

Boris Mar Barcelos

**Modelo de Otimização para Imunização de  
Carteira de Crédito com Restrições de Liquidez  
e Número de Contratos de DI Futuros**

Brasil

2023

Boris Mar Barcelos

**Modelo de Otimização para Imunização de Carteira de  
Crédito com Restrições de Liquidez e Número de  
Contratos de DI Futuros**

Dissertação de Mestrado Acadêmico apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito à obtenção de Grau de Mestre em Administração.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Orientador: Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena

Brasil

2023

Boris Mar Barcelos

Modelo de Otimização para Imunização de Carteira de Crédito com Restrições de  
Liquidez e Número de Contratos de DI Futuros

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Administração da Universi-  
dade Federal do Rio Grande do Sul como requisito à  
obtenção de Grau de Mestre em Administração.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena  
PPGA/UFRGS  
Orientador

---

Prof. Dr. Marcelo Brutti Righi  
PPGA/UFRGS

---

Prof. Dr. Leonardo Riegel Sant'Anna  
PPGA/UFRGS

---

Prof. Dr. Marlon Ruoso Moresco,  
Concordia University/CONCORDIA

Brasil, 06 de Novembro de 2023

# Resumo

Este trabalho aborda a importância da proteção de ativos de carteiras de crédito bancárias contra a volatilidade do mercado, com foco no risco de mercado associado à curva de juros. A estratégia utilizada para mitigar esse risco é o *Asset and Liability Management* (ALM), com destaque para a imunização de carteiras, como forma de proteger contra oscilações nas taxas de juros. O trabalho propõe um modelo de otimização matemática para resolver o problema de imunização de carteiras de renda fixa, considerando restrições de liquidez e de contratos, além de avaliar a sua eficácia em diferentes cenários a partir de testes com dados reais.

**Palavras-chave:** ALM. *Hedge*. Otimização.

# Abstract

This work addresses the importance of protecting assets in banking credit portfolios against market volatility, with a focus on market risk associated with the yield curve. The strategy used to mitigate this risk is Asset and Liability Management (ALM), emphasizing portfolio immunization as a means to shield against interest rate fluctuations. The study proposes a mathematical optimization model to solve the problem of fixed-income portfolio immunization, considering liquidity and contract constraints, and evaluates its effectiveness in various scenarios through real data testings.

**Keywords:** ALM. Hedge. Optimization.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Histograma de percentual de limite utilizado . . . . .	44
---	----

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Valor Presente das Carteiras (R\$milhões) . . . . .	35
Tabela 2 – <i>Duration</i> modificada das Carteiras . . . . .	35
Tabela 3 – Convexidade das Carteiras . . . . .	35
Tabela 4 – Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de soluções .	36
Tabela 5 – Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de quantidade de contratos utilizados . . . . .	36
Tabela 6 – Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de eficiências	37
Tabela 7 – Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de correlação e R-quadrado . . . . .	37
Tabela 8 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de soluções . . . . .	37
Tabela 9 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de quantidade de contratos utilizados . . . . .	38
Tabela 10 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de eficiências . . . . .	38
Tabela 11 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de correlação e R-quadrado . . . . .	39
Tabela 12 – Modelo com todas restrições: Resultados de soluções . . . . .	39
Tabela 13 – Modelo com todas restrições: Resultados de eficiências . . . . .	40
Tabela 14 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de correlação e R-quadrado . . . . .	41
Tabela 15 – Modelo de Análise de Componentes Principais: Resultados de soluções	41
Tabela 16 – Modelo de Análise de Componentes Principais: Resultados de eficiências	42
Tabela 17 – Modelo de Análise de Componentes Principais: Resultados de correlação e R-quadrado . . . . .	42
Tabela 18 – Modelo com todas restrições e liquidez diminuída: Resultados de soluções	43
Tabela 19 – Modelo com todas restrições e liquidez diminuída: Resultados de eficiências	44
Tabela 20 – Nomenclatura das carteiras testadas . . . . .	55

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>10</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização da Dissertação</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>Asset and Liability Management</b>	<b>12</b>
2.1.1	Imunização de Carteiras	13
2.1.2	Legislação	14
2.1.2.1	Circular N <sup>o</sup> 3.082	14
2.1.2.2	Circular N <sup>o</sup> 3.876	15
2.1.2.3	Contabilidade de <i>Hedge</i>	17
<b>2.2</b>	<b>Estrutura a Termo de Taxa de Juros</b>	<b>18</b>
2.2.1	Interpolação da Curva a Termo	18
2.2.1.1	Modelos Não-Paramétricos	18
2.2.1.2	Modelos Paramétricos	19
2.2.2	Formato e Comportamento da Curva de Juros a Termo	20
<b>2.3</b>	<b>Instrumentos Financeiros de Renda Fixa</b>	<b>20</b>
2.3.1	Títulos Públicos	20
2.3.2	Derivativos	20
2.3.2.1	Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia	21
2.3.3	Métricas de Instrumentos de Renda Fixa	22
2.3.3.1	<i>Duration</i>	22
2.3.3.2	Convexidade	23
2.3.3.3	Marcação a Mercado	23
2.3.3.4	Liquidez	23
<b>2.4</b>	<b>Otimização Matemática</b>	<b>24</b>
2.4.1	Modelos de Otimização em Finanças	25
<b>3</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>26</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelo</b>	<b>26</b>
3.1.1	Modelo de Otimização	27
3.1.2	Prova de Convexidade	29
<b>3.2</b>	<b>Efetividade da Carteira de <i>Hedge</i></b>	<b>29</b>
<b>3.3</b>	<b>Fonte de Dados</b>	<b>29</b>
<b>3.4</b>	<b>Amostra</b>	<b>30</b>
3.4.1	Carteira de Crédito	30



3.4.2	Carteira de <i>Hedge</i> . . . . .	30
3.4.2.1	Liquidez . . . . .	31
3.4.2.2	Duration e Convexidade . . . . .	31
3.4.2.3	Quantidade de Contratos . . . . .	32
<b>3.5</b>	<b><i>Benchmarking</i></b> . . . . .	<b>32</b>
<b>3.6</b>	<b><i>Solver</i></b> . . . . .	<b>32</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>4.1</b>	<b>Testes</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>4.2</b>	<b>Modelo sem restrições de liquidez e contratos</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>4.3</b>	<b>Modelo com restrições de liquidez</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>4.4</b>	<b>Modelo com todas restrições</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>4.5</b>	<b>Testes com Análise de Componentes Principais</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>4.6</b>	<b>Revisão de Resultados</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>48</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>54</b>

# 1 Introdução

A proteção de ativos de carteira de crédito bancária visa evitar a perda de valor para a volatilidade ocasionada por movimentos do mercado (ALMEIDA; LUND, 2014). O risco de mercado associado à curva de juros é motivo de supervisão constante dos gestores nas mesas de operações de instituições financeiras. Há diversas possibilidades de mitigação desse risco e, no presente trabalho, o foco será nos modelos de gestão de ativos e passivos, conhecido como *Asset and Liability Management*, ALM. Uma estratégia amplamente conhecida e aplicada por bancos é a imunização de carteira, sendo a otimização matemática uma das formas com que é calculada o ponto ideal entre ativos e passivos (KUNZLER, 2019).

Para Choudhry e Carter (2007), a principal função da mesa de ALM é a administração os riscos de liquidez e de mercado, não esquecendo também dos riscos e política de crédito do banco. A forma como atua deve buscar ajustar descasamentos entre os passivos e ativos do banco, com instrumentos financeiros e processos adequados para tal tarefa. Muito embora a indústria bancária exista há centenas de anos (ADAM, 2008), a implementação de ALM em bancos veio na esteira de crises em que a subida de taxas de juros provocou graves insolvências nos setores de hipoteca nos anos de 1980 nas associações de poupança e empréstimo. Assim, tomou forma o ALM, para monitorar os riscos, juntamente com uma melhor regulação do mercado.

O risco de mercado em carteiras de crédito está associado, principalmente, à curva de juros praticada pelo mercado financeiro na precificação de ativos e passivos. Já o risco de liquidez reflete a capacidade da instituição de cumprir com as suas obrigações financeiras. Diversas instituições financeiras que têm a necessidade de adequar o seu balanço, fazem uso de ALM para gerenciamento de risco, demonstrando a grande abrangência do assunto (MARTELLINI; PRIAULET; PRIAULET, 2005).

Dentro do assunto de gestão de ativos e passivos, diversas técnicas são empregadas para cumprir com o objetivo de proteção ao risco da carteira, sendo a abordagem de Imunização de carteiras uma das mais conhecidas. A ideia básica da imunização é proteger a carteira de oscilações nas taxas de juros. O precursor dessa abordagem foi o artigo escrito por Redington (1952), cunhando o termo "imunização" para descrever um portfólio que, de certa forma, não sofresse com uma alteração nas taxas de juros, sendo reforçado por Fisher e Weil (1971).

Ho (1992) demonstra uma forma de proteção contra choques não paralelos na curva de juros, com *Key Rate Durations* (KRD's). Litterman e Scheinkman (1991) também elaboram grande estudo de proteção contra choques não paralelos, além de expor o possível

comportamento da curva dividido, em basicamente, três tipos, nível, inclinação e curvatura. Outra forma de proteção contra risco de mercado é o chamado *Cash flow matching* (FARAHVASH, 2020), consistindo em acertar todos os fluxos de caixas positivos, um negativo em igual tamanho, evitando, assim, qualquer possibilidade de uma variação em juros afetar o valor da carteira.

Outro tópico importante é o problema de liquidez de instrumentos financeiros (VIEIRA; FILOMENA, 2020), que pode ser muito prejudicial para a correta imunização da carteira. Caso não haja possibilidade de compra ou venda de algum contrato desejado ou necessário para proteção, o gestor poderá ficar incapacitado de ter a melhor efetividade contra oscilações no mercado.

Sobre as ferramentas para resolução desses problemas, uma das ferramentas matemáticas mais utilizadas é a otimização. São chamadas de otimização matemática as operações feitas para encontrar resultados máximos ou mínimos em uma função. Se o problema não envolve variáveis com potência diferente de um, o problema é dito linear, caso contrário, será categorizado como não-linear. O campo de otimização não-linear é vasto e muitos problemas propostos não têm fácil solução, isso quando possuem solução viável. No campo financeiro, modelos de otimização vêm sendo utilizados há décadas, vide o modelo de Média-Variância na seleção de portfólio (MARKOWITZ, 1952).

No presente trabalho se aborda um modelo para resolver o problema de imunização de carteiras de renda fixa. Diversos trabalhos abordam o tema de *hedge* usando o método de análise de componentes principais para obter a carteira passiva (KUNZLER, 2019). Tais trabalhos, normalmente, resolvem o problema com três ou menos contratos derivativos de *hedge*. A vantagem que esse modelo proporcionará está na proteção de carteiras maiores e mais complicadas, sempre considerando a restrição da natureza do mercado, a liquidez. Somando-se a isso, também há o maior controle por parte do operador, podendo-se determinar quais e quantos contratos usar no seu *hedge*.

O diferencial desse trabalho está num modelo de otimização que tenta ser eclético nas restrições para defender a carteira de problemas enfrentados na realidade de ALM. Com limites de liquidez e de contratos, resolve-se um problema usando a teoria de imunização com igualdade de *duration* e convexidade. Dessa forma, pode-se determinar a quantidade de contratos que se deseja usar. Outro diferencial está na formação da carteira de renda fixa, com número longo de maturidades, carteiras com até cinco anos.

## 1.1 Objetivos

Nesta dissertação, os objetivos são:

I) Propor um modelo de otimização não linear com base nas estratégias de Imunização para resolução de problema de ALM;

II) Avaliar sua eficácia em cenários diferentes em testes.

## 1.2 Organização da Dissertação

A seguir, na seção 2, é apresentada uma revisão da literatura de *Asset and Liability Management*, além do avanço em estratégias de Imunização de carteiras. Ainda na seção 2, são revistas abordagens de solução de problemas de otimização matemática, principalmente em problemas não lineares, tratando das dificuldades e formas de garantir soluções ótimas. Na seção 3 são explicados os procedimentos metodológicos utilizados no presente trabalho, desde a origem dos dados, forma como são solucionados os problemas propostos, sejam eles estritamente matemáticos ou financeiros, até a forma de avaliação da eficiência do modelo. Finalmente, na seção 4, são apresentados os resultados com as devidas considerações.

## 2 Referencial Teórico

Será apresentado nesta seção qual será o embasamento teórico utilizado no presente trabalho, sendo eles sobre finanças e otimização matemática. Os conceitos são: instrumentos financeiros de renda fixa e as suas características, tal como formação e comportamento de curva de juros, duration, convexidade e liquidez dos instrumentos, *Asset and Liability Management*, conceitos de Imunização de carteira, hedge de carteira de crédito, bem como legislação vigente no Brasil, a respeito de eficiência de *hedge*.

Seguindo para a parte matemática, será exibido o arcabouço utilizado para resolução de problemas de otimização quadrática.

### 2.1 Asset and Liability Management

O gerenciamento de ativos e passivos deve respeitar uma estratégia definida para a proteção da instituição financeira. O fato se dá, primordialmente, pela atividade bancária ter a sua captação de valores normalmente em curto prazo e pós-fixada e empréstimos em prazo mais longo com a sua maioria na forma pré-fixada. Beutler et al. (2020) fazem um estudo sobre o quanto as mudanças nas taxas de juros podem afetar a capacidade de emprestar dos bancos, sugerindo um aumento de sensibilidade caso os juros aumentem.

O artigo de Drechsler, Savov e Schnabl (2021) faz uma observação interessante. Segundo os autores, tomar emprestado em curto prazo e emprestar em longo prazo não expõe os bancos ao risco de taxa de juros, o que é uma visão diferente do convencional. Tratando de risco tomado por instituições ao emprestar, Aramonte, Lee e Stebunovs (2022) apontam que as instituições não bancárias se expõem a mais riscos do que bancos na hora de emprestar o seu dinheiro.

Além disso, o ALM é o responsável pela tomada de decisão no cotidiano de bancos, dados os movimentos no mercado financeiro. Um banco que tem a sua carteira de ativos sendo uma carteira creditícia, deve zelar, primordialmente, pela proteção do *spread* gerado pela diferença entre o valor tomado e emprestado, entrando em cena o ALM. Nas instituições financeiras de depósitos, os bancos, o principal motivador para a criação de estratégias de ALM é a proteção do *spread* bancário, ou seja, é feito o *hedge* da carteira para prevenção contra perda de valor em risco de mercado, sem esquecer-se do risco de liquidez (KUNZLER, 2019).

Ao analisar bancos em um mercado emergente, Owusu e Alhassan (2021), fazem uma ligação entre o uso de ALM e lucratividade, demonstrando a sua relação, além de que o uso de ALM tem forte impacto positivo na performance geral de um banco. Vuilleme

(2019) aponta que muitos bancos não fazem proteção contra risco de taxa de juros e que parte dos bancos usa derivativos para se expor ainda mais à subida de juros.

### 2.1.1 Imunização de Carteiras

O apreçamento de ativos e passivos de instituições financeiras é feito pela estrutura a termo, sendo de grande importância a proteção contra variações não previstas nas taxas de juros. A teoria de imunização de carteiras tem como objetivo a construção de uma carteira de *hedge*, de forma a proteger a carteira principal contra tais variações (ALMEIDA; LUND, 2014).

Tal teoria começa a ser construída com Redington (1952) e ganha tração com Fisher e Weil (1971), demonstrando a imunização por *duration*. Conforme o trabalho, a imunização por *duration* protege contra choques de nível na curva de juros. Bierwag (1977) e Bierwag, Kaufman e Toevs (1983) descrevem o desenvolvimento da métrica *duration* e o seu uso em estratégias de imunização. A estratégia de *duration* tem a qualidade de ser barata para implementação, mas o defeito de não proteger adequadamente contra os variados movimentos da estrutura a termo de curva de juros (ETTJ). Um estudo feito por Neto (2018) pontua tal facilidade. Kolb e Gay (1982) destacam a imunização com uso de futuros.

Fong e Vasicek (1984) apresentaram uma nova medida, M-Quadrado, que busca expressar a exposição ao risco de uma carteira à variações na ETTJ. Litterman e Scheinkman (1991) fazem um estudo indicando que três fatores correspondem pela maioria da variação dos retornos em ativos de renda fixa, sendo eles nível, inclinação e curvatura. Eles argumentam que apenas uma proteção com *duration* não é totalmente efetiva para proteção. É proposto, então, um modo com análise de componentes principais (ACP) para identificar e compor a carteira de *hedge*.

Díaz, González e Navarro (2008) discorrem sobre a imunização com *bonds*, testando quatro métodos de proteção, concluindo que a diversificação de posições ajuda na diluição do risco. Com particionamento da carteira para medição de *Key Rate Durations* (KRD), Ho (1992) tenta assimilar os choques diferentes ao choque de nível e proteger a carteira de renda fixa e Golub e Tilman (1997) aprofundam o estudo sobre KRD. A diluição do *hedge* em mais contratos vai ao encontro à teoria das carteiras para a diminuição de riscos.

Acrescenta-se, ainda, a estratégia chamada de *Cash flow matching*, em que todos os fluxos de caixa ativos ou passivos são igualados por outro fluxo de igual proporção, mas sentidos opostos (FARAHVASH, 2020). Esse método de imunização enfrenta grande dificuldade de aplicação na prática, dado o seu alto custo e falta de instrumentos financeiros adequados.

Em um estudo buscando identificar quem está sujeito ao risco de taxa de juros em

bancos europeus, Hoffmann et al. (2018) dispõem, entre outras conclusões, que *hedge* com *swaps* minimiza cerca de 25% de exposição em balanço.

Gomez et al. (2021), Adam et al. (2020) e Beutler et al. (2020) abordam o tema de risco de juros em bancos. Deguest et al. (2018) demonstram e aplicam um modelo de otimização para seleção de portfólio baseado em *duration*. Lapshin (2019) usa abordagem não paramétrica para imunização de portfólio de títulos. Zhu et al. (2018) fazem uso de convexidade de títulos e carteiras para imunização de portfólio. Simões, Oliveira e Bravo (2021) investigam estratégias de imunização em carteiras de múltiplos passivos.

No Brasil, Almeida e Lund (2014) aplicam fundamentos de Litterman e Scheinkman (1991) para construir um *hedge* de carteira de renda fixa. Meirelles e Fernandes (2018) comparam a estratégia de análise de componentes principais contra *hedge* por *duration*. Varga e Valli (2001) também aplicam ideias de ACP para imunizar carteira de renda fixa após avaliar movimentos da estrutura a termo brasileira. Kunzler (2019) também faz uma comparação, mas em uma carteira de renda fixa semelhante à uma carteira bancária. Grande parte dos trabalhos citados, quando comparam os métodos de *duration* contra métodos de ACP, fazem uso de carteiras de ativos de renda fixa com poucos fluxos.

## 2.1.2 Legislação

Para entender os limites em que se empregam as ferramentas apresentadas, deve-se compreender como é formado o ambiente financeiro no Brasil. Uma visão ampla de como é estabelecido o setor financeiro brasileiro é exibida pela *webpage* do Banco Central do Brasil sobre o Sistema Financeiro Nacional (Banco Central do Brasil, 2022).

No que tange ao escopo deste trabalho, tem-se Conselho Monetário Nacional (CMN) como órgão máximo regulador, seguido pelo Banco Central do Brasil (BC) e Comissão de Valores Mobiliários (CVM) - atuando como supervisores - e, por fim, os operadores do mercado - tais quais as bolsas, em que no Brasil se tem a B3, bem como bancos indo desde comerciais até de investimentos. Dado isso, na ordem criada pela lei, tem-se o Banco Central do Brasil como órgão que monitora atividades de bancos, incluindo o assunto de *hedge*.

Baseado nisso, serão dispostas as principais normas e características, que devem ser seguidas a respeito de ALM e *hedge* numa instituição financeira do mercado brasileiro.

### 2.1.2.1 Circular N° 3.082

Nessa questão, o Banco Central do Brasil (Bacen ou BCB) é o autor de documentos nomeados de Circulares, de linguagem clara e concisa a respeito de tarefas e deveres de instituições financeiras. O Bacen emitiu a Circular N° 3.082 de janeiro de 2002 (Banco Central do Brasil, 2002), que, entre outras decisões, focando no uso do presente trabalho,

dispõe sobre o *hedge* as seguintes regras: instrumentos financeiros derivativos devem ser avaliados pelo valor de mercado, podendo ser usado como parâmetro o valor de ajuste diário em operação realizada no mercado futuro e operações com derivativos para o *hedge* devem ser classificadas como proteção de risco de mercado ou fluxo de caixa. Vale citar também:

Art. 3º: Parágrafo 1º Para fins do disposto nesta circular, entende-se por "hedge" a designação de um ou mais instrumentos financeiros derivativos com o objetivo de compensar, no todo ou em parte, os riscos decorrentes da exposição às variações no valor de mercado ou no fluxo de caixa de qualquer ativo, passivo, compromisso ou transação futura prevista, registrado contabilmente ou não, ou ainda grupos ou partes desses itens com características similares e cuja resposta ao risco objeto de "hedge" ocorra de modo semelhante.

Art. 3º: Parágrafo 2º Na categoria "hedge" de risco de mercado devem ser classificados os instrumentos financeiros derivativos que se destinem a compensar riscos decorrentes da exposição à variação no valor de mercado do item objeto de "hedge".

Ademais:

Art. 4º Os instrumentos financeiros derivativos destinados a "hedge" e os respectivos itens objeto de "hedge" devem ser ajustados ao valor de mercado, no mínimo, por ocasião dos balancetes mensais e balanços(...)

Além do citado acima, o ponto-chave da Circular Nº3.082 para este trabalho trata da efetividade do *hedge*. A efetividade é o intervalo em que a variação em valor de mercado da carteira de ativos é combatida pela variação em valor de mercado pelos instrumentos utilizados no *hedge*, sendo esse intervalo de 80% a 125%.

Art. 5º: II - comprovar a efetividade do "hedge" desde a concepção e no decorrer da operação, com indicação de que as variações no valor de mercado ou no fluxo de caixa do instrumento de "hedge" compensam as variações no valor de mercado ou no fluxo de caixa do item objeto de "hedge" num intervalo entre 80% (oitenta por cento) e 125% (cento e vinte e cinco por cento);

#### 2.1.2.2 Circular Nº3.876

Em par com a circular anterior e tão importante quanto, está a Circular Nº3.876 de janeiro de 2018, (Banco Central do Brasil, 2018), dispondo, entre outros, sobre valor de Patrimônio de Referência mantido para cobertura de risco de variação das taxas de juros



em instrumentos classificados na carteira bancária (IRRBB). Dois conceitos importantes para estratégias de ALM em bancos são o delta  $\Delta EVE$  (*Economic Value of Equity*), e o  $\Delta NII$  *Net Interest Income*, que são definidos em conjunto com outros conceitos utilizados nessa circular:

Art. 3º Para fins desta Circular, definem-se:

I - fluxos de reapreçamento como os valores referentes a:

- a) fluxos de caixa referentes ao pagamento do principal;
- b) fluxos de caixa referentes ao pagamento de juros; ou
- c) fluxos de repactuação do indexador do principal;

Art. 3º: IV -  $\Delta EVE$  como a diferença entre o valor presente do somatório dos fluxos de reapreçamento de instrumentos sujeitos ao IRRBB em um cenário-base e o valor presente do somatório dos fluxos de reapreçamento desses mesmos instrumentos em um cenário de choque nas taxas de juros;

Art. 3º: V -  $\Delta NII$  como a diferença entre o resultado de intermediação financeira dos instrumentos sujeitos ao IRRBB em um cenário-base e o resultado de intermediação financeira desses mesmos instrumentos em um cenário de choque nas taxas de juros;

Na IRRBB, ainda há a menção de risco de *spread* de crédito, de significativa importância para o ALM. Seguindo com definições importantes, há a instrução de como fazer o reapreçamento:

Art. 8º: II - utilizar, no cálculo do valor presente dos fluxos de reapreçamento:

- a) as taxas de juros de mercado, para instrumentos financeiros transacionados em um mercado ativo;
- b) taxas de desconto consistentes com premissas adequadas e verificáveis, para instrumentos sem mercado ativo;

A circular Nº3.876 segue explicando como proceder com a mensuração do IRRBB. No artigo 11, o documento apresenta a formulação padronizada utilizada para cálculos em cenários de choques nas taxas de juros.

$$R_{i,f} = R_{0,f}(t_k) + \Delta R_{i,f}(t_k) \quad (2.1)$$

Porém, vale ressaltar a natureza dos choques na curva de juros: paralela, inclinação e curvatura.

No capítulo V da circular, são apresentados os procedimentos para o gerenciamento do IRRBB, com grande intersecção, ou de certa forma, um subconjunto do assunto ALM. Foram omitidas definições que não se farão presente neste trabalho.

### 2.1.2.3 Contabilidade de *Hedge*

Para a contabilidade do *hedge*, a norma contábil Comitê de Pronunciamentos Contábeis (2016) traz no seu conteúdo as formas de classificação de ativo e passivo financeiro, mensuração, contabilização de *hedge*, entre outros tópicos. O livro Manual de Contabilidade Societária (GELBCKE et al., 2018) descreve o aspecto conceitual de contabilidade de *hedge* como uma metodologia para que demonstrações financeiras reflitam de forma correta o regime de competência caso seja realizado *hedge*, além de melhor resolver a confrontação entre receitas e despesas, caso sejam utilizados derivativos.

Os riscos expostos para proteção são em taxas de juros, câmbio, crédito e mercado. Não sendo obrigatório, caso adotado, segundo Gelbcke et al. (2018), os critérios a serem respeitados são: objeto de *hedge* e período; item objeto de *hedge*; instrumento de *hedge*; demonstrar eficácia e monitorar de maneira retrospectiva a eficiência. A respeito das modalidades de *hedge*, existem três possibilidades de tentativa de redução de risco: *hedge* de valor justo; *hedge* de fluxo de caixa e *hedge* de investimento no exterior/líquido.

A contabilidade de *hedge* na Comitê de Pronunciamentos Contábeis (2016) libera o chamado corredor de 80% a 125% para demonstração de eficiência, deixando o critério de eficiência à cargo da instituição financeira, que deverá documentar e aplicar isso de forma consistente. Sobre os instrumentos, para a definição como *hedge*, o instrumento deve ser derivativo, restando a possibilidade de não derivativo apenas para proteção cambial (Comitê de Pronunciamentos Contábeis, 2016).

No estudo realizado por Leite e Teixeira (2023), são investigados os fatores que influenciam a utilização do *hedge accounting* no contexto bancário brasileiro, concluindo que "adoção do *hedge accounting* por parte dos bancos brasileiros é positivamente relacionada com o fato de os bancos serem de natureza privada, listados na B3 e possuírem investimentos no exterior". Outro estudo conduzido no Brasil sobre o assunto, de Tavares e Cia (2014), conclui que há a adesão de 7 dos quinze maiores bancos e a adequação de 70,94% dos itens exigidos contabilmente.

Instituições seguradoras, eventualmente, também devem fazer *hedge* dos seus portfólios. Em um estudo conduzido por Sen (2019), a conclusão aponta para pouca evidência de que decisões de proteção é tomada a partir de arcabouço regulatório, mas quando os órgãos regulatórios percebem certos riscos nas instituições, fazem com que se tomem medidas para mitigar tais riscos.

## 2.2 Estrutura a Termo de Taxa de Juros

A Estrutura a Termo de Taxa de Juros (ETTTJ) será utilizada na sua totalidade para a precificação de ativos financeiros de uma carteira creditícia, na marcação à mercado.

Dessa forma, faz relevância o correto dimensionamento da curva de juros para evitar perdas por parte da mesa de ALM em decorrência de erros. No Brasil, a ANBIMA e a B3 utilizam das mais conhecidas técnicas para estimação da curva, que serão apresentadas e utilizadas no presente trabalho (ANBIMA, 2021), (Brasil Bolsa Balcão, 2022b).

### 2.2.1 Interpolação da Curva a Termo

Para estimar a curva de juros, normalmente, usa-se a taxa de juros aplicada a títulos públicos federais que estão em negociação e, dessa forma, é criada a estrutura a termo da curva de juros.

A estrutura a termo, normalmente, é apresentada de forma contínua, mas isso não ocorre na realidade, dado que se tem apenas um número limitado de valores observados. Então, é lançado mão de algum tipo de modelo para interpolar tais pontos observados, para, assim, suprir a necessidade de precificação de qualquer ativo que exija maturidade diferente.

Caldeira (2011) demonstra de forma ampla a grande maioria de modelos e sua divisão para estimação, citando também as suas respectivas origens. São divididos, basicamente, entre modelos não-paramétricos e paramétricos. Os modelos não paramétricos assumem condição de não arbitragem em vértices que há valor observado. Os modelos paramétricos, em geral, atuam de forma mais suave na criação da ETTTJ, dados os seus parâmetros.

Porém, no caso brasileiro, não há negociação desses instrumentos a todos os vértices, impossibilitando a estimação sem um prévio tratamento dos dados. A B3 disponibiliza o Manual de Curvas, em que expõe todas as metodologias de cálculos que são utilizadas para estimar as suas curvas (Brasil Bolsa Balcão, 2022b). A ANBIMA também apresenta a sua metodologia em um documento próprio (ANBIMA, 2021). As principais metodologias utilizadas no mercado brasileiro serão apresentadas nas próximas seções, pontuando as características de cada forma de estimação da curva e o melhor uso.

#### 2.2.1.1 Modelos Não-Paramétricos

A interpolação exponencial é um método simples e muito implementado, dada essa característica. Fazendo uso dos pontos anterior e posterior ao ponto a ser interpolado, é utilizada uma equação exponencial com as taxas e os dias úteis.

A B3, no seu Manual de Curvas, (Brasil Bolsa Balcão, 2022b), demonstra tal

metodologia, que é utilizada na geração de sua Curva de Juros Local, Curva DI x PRÉ. Tal curva é muito utilizada no mercado, pois a sua fonte de dados é a negociação de contratos Futuros de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI1). Os dados utilizados são os valores de fechamento dos contratos de DI futuros negociados na B3. Conforme cita o manual, para o ponto a ser interpolado, o resultado é dado pela formulação chamada de Interpolação *Flat Forward* 252:

$$\left( \left( 1 + \frac{i_{anterior}}{100} \right) \cdot \left( \frac{\left( 1 + \frac{i_{posterior}}{100} \right)}{\left( 1 + \frac{i_{anterior}}{100} \right)} \right)^{\left( \frac{DU - DU_{anterior}}{DU_{posterior} - DU_{anterior}} \right)} \right) * 100 \quad (2.2)$$

Continuando com métodos não paramétricos, há a interpolação por *cubic splines*, que utiliza polinômios a cada segmento da curva, unindo os vértices, que são observáveis. É chamado de tal forma, porque os polinômios são cúbicos. McCulloch (1971) e McCulloch (1975) fazem uso de *cubic splines* na estimação da curva de juros e Caldeira, Moura e Portugal (2010) comentam o seu uso.

#### 2.2.1.2 Modelos Paramétricos

As vantagens de modelos paramétricos estão na possibilidade de interpretação econômica, também na imposição de relações dadas por teorias econômicas e, por último, conforme Laurini e Moura (2010), podem ser testados contra modelos aninhados (CALDEIRA, 2011).

Um dos modelos paramétricos mais conhecidos é o de Nelson e Siegel (1987), do qual deriva o modelo de Svensson (1994) e que Diebold e Li (2006) fazem nova interpretação. O modelo foi desenvolvido para ser capaz de caracterizar as diferentes formas que a curva de juros pode assumir.

A versão de Diebold e Li (2006) de Nelson e Siegel (1987) é:

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) \quad (2.3)$$

Os parâmetros  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  representam as mudanças de nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo e o cálculo dos seus valores se dá por mínimos quadrados ou método semelhante. As maturidades sendo representadas por  $\tau$ .

Svensson (1994) adiciona outro termo à equação anterior para melhor precisão, no qual também há dois novos parâmetros. Esse modelo, em geral, apresenta melhor ajuste, se comparado à Nelson e Siegel (1987).

Svensson (1994):

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{4,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau} \right) \quad (2.4)$$

No Brasil, a ANBIMA faz uso do modelo de Svensson (1994) na metodologia para estimar a estrutura a termo das taxas de juros, conforme a ANBIMA (2021). Também no seu documento, a ANBIMA demonstra como são obtidos os parâmetros e a minimização do somatório dos erros quadráticos. Maiores detalhes são obtidos direto no seu manual (ANBIMA, 2021).

## 2.2.2 Formato e Comportamento da Curva de Juros a Termo

Os formatos da estrutura a termo de taxas de juros são inúmeros, usando maturidades fixas e variando o período utilizado. O trabalho de Litterman e Scheinkman (1991) foi pioneiro na utilização de análise de componentes principais em relação à curva de juros. Segundo o trabalho, três fatores respondem pela absoluta maioria da variação nas taxas de juros, sendo elas: nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo.

## 2.3 Instrumentos Financeiros de Renda Fixa

Nos próximos tópicos, serão apresentados os principais instrumentos que irão compor a carteira de passivos para a proteção contra a variação das taxas de juros.

### 2.3.1 Títulos Públicos

Os títulos públicos podem ser basicamente emitidos por governos federal, estadual e municipal, sendo o foco em Títulos Públicos do Tesouro Nacional. Tais títulos soberanos, emitidos pelo Tesouro Nacional brasileiro, têm a função de captação de recursos para a união, não cabendo neste trabalho comentar sobre o destino desses valores. Há uma alta variedade de títulos federais, sendo diferenciados, basicamente, pelas características de forma de rentabilidade e prazos.

Pode-se dizer que a taxa resultante do comércio dos títulos públicos é a taxa livre de risco do mercado brasileiro, pois o risco corrido ao negociar tais instrumentos é federal. Fernandez, Apellániz e Acín (2020) fazem uma pesquisa demonstrando a taxa livre de risco e prêmio de risco de mercado exigido por vários países nas suas negociações.

### 2.3.2 Derivativos

A definição formal de um derivativo é a de um instrumento financeiro em que seu valor depende do valor de um ativo subjacente (HULL, 2018). A utilização de contratos

derivativos permeia todo o mundo das finanças, avançando as suas criações desde o mercado de títulos e juros até *commodities*, passando por moeda, entre outras inúmeras áreas em que são utilizados.

Usados para proteção, como *hedge*, ou especulação e alavancagem, os contratos derivativos já foram causadores de quebras, como na crise sub-prime em 2008 (HULL, 2018). Como uso de proteção, Jin et al. (2020) abordam o uso de derivativo chamados *bonds* verdes, para defender contra variações no mercado de carbono. Usando estratégias de *hedge* dinâmico, os autores concluem que é possível mitigar o risco de mercado de carbono.

Em um estudo objetivando medir o impacto de derivativos na performance de bancos, Keffala (2021) analisa os usos com propósito de *hedge* e *trading*. Na sua amostra, o estudo aponta que os bancos fazem bastante uso de tais instrumentos, preferindo o uso em *trading*, e o resultado do uso dos derivativos é ambíguo, com impactos positivos e negativos.

Huan e Parbonetti (2019) compõem um artigo concluindo que bancos que fazem uso de derivativos estão mais expostos à risco. Já Titova, Penikas e Gomayun (2020) apresentam em um estudo que bancos que aplicam derivativos para *hedge* têm maior valor de mercado e estão expostos a menor risco.

Nas próximas seções serão apresentados os derivativos utilizados no presente trabalho e as suas características.

### 2.3.2.1 Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia

Antes de explicar propriamente tal contrato, cabe explorar o conceito de Depósito Interfinanceiro, sendo um título privado de renda fixa negociado entre instituições financeiras no propósito de captar recursos. O contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, segundo a B3, é um derivativo que tem como ativo subjacente a taxa média diária de Depósitos Interfinanceiros (B3, 2022). Cada contrato tem valor nominal de R\$ 100.000 no dia de vencimento e o valor no dia de negociação é representado como o Preço Único do título hipotético, descontado pela taxa negociada no período 0, usando como base 252 dias úteis, sendo corrigido diariamente o valor do PU com a Taxa DI. Ao final, é acertada a troca de valores entre partes opostas do contrato, sendo essa a variação da taxa contratada inicialmente e da taxa negociada no dia de encerramento do contrato. Informações adicionais podem ser vistas no documento do contrato no site B3 (2022) e (Brasil Bolsa Balcão, 2022a).

Teoricamente, a B3 disponibiliza contratos de futuros de DI para diversos meses, porém o mercado brasileiro não faz uso de todos os meses disponíveis na prática, levando, assim, a possíveis dificuldades na hora de montar a carteira de *hedge* bancária. O assunto liquidez será tratado melhor em uma seção subsequente, mas dita o tom das restrições no

modelo de otimização apresentado.

### 2.3.3 Métricas de Instrumentos de Renda Fixa

Para avaliar e comparar diferentes tipos de instrumentos, sejam títulos ou derivativos, é lançado mão de diferentes métricas e indicadores que foram sendo criados e aperfeiçoados ao longo dos anos. Em uma renda fixa, a *duration* de um título foi uma das primeiras formas de indicador criado. Será utilizada também nesse trabalho a convexidade de títulos e ativos de renda fixa. Se completará com a liquidez, que não é uma medida derivada diretamente de um ativo específico, mas de qualquer tipo de instrumento financeiro, que é possível de ser negociado. A liquidez de um ativo se conceitua, basicamente, na sua facilidade de negociação.

#### 2.3.3.1 *Duration*

A *duration*, ou a duração de um título, é uma medida de tempo em média a qual o valor do título é recebido, conforme apresentado por Hull (2018). Um título com cupom zero terá duração no seu vencimento e um título com cupom terá duração menor que o seu vencimento. Tais conceitos podem ser calculados e usados de forma análoga nos fluxos de caixa.

O conceito original de *duration* foi criado por Macaulay (1938) e a sua formulação corresponde à média ponderada dos fluxos de caixa de um título trazidos a valor presente. Outros conceitos de *duration* são muito encontrados e utilizados na literatura de finanças, sendo a *duration* modificada uma delas, representada pela divisão da *duration* de Macaulay pela taxa de juros do período ou sendo calculada como a variação da *duration* por choques nas taxas.

De acordo com Fabozzi e Mann (2011), há a ideia de que a *duration* é a primeira derivada da relação entre o preço do ativo e a taxa, calculada como a *duration* modificada, e há também a interpretação temporal, vista como a *duration* de Macaulay. Não há nada de errado com nenhuma das formas, porém, deve-se sempre levar em consideração o contexto utilizado, juntamente com a representação do que se espera saber, ou seja, se é uma variação de preço no título ou se é um período no tempo.

No contexto de carteiras de ativos e passivos, a *duration* de um portfólio pode ser calculada também de forma análoga como a soma ponderada de *durations* de cada um dos instrumentos em valores presentes. Isso é utilizado para comparar e adequar os dois lados da carteira em estratégias de ALM.

### 2.3.3.2 Convexidade

Farahvash (2020) demonstra que o valor de um instrumento de renda fixa não é bem aproximado pelo *duration*, dado que tal é uma aproximação linear. Dessa forma, para melhor capturar a variação de preço de acordo com a variação na taxa de juros, se deriva a convexidade.

A convexidade é a medida de sensibilidade da *duration* em relação à mudança na taxa de juros, tendo sido proposta por Fisher e Weil (1971). Na imunização de portfólios, ajustando a convexidade dos ativos para ser maior ou igual à convexidade dos passivos, aliado à igualdade de *duration* e valor presente, se tem uma proteção contra choques de nível na curva de juros (CORNUÉJOLS; PEÑA; TÛTÛNCÛ, 2018).

### 2.3.3.3 Marcação a Mercado

Marcar a mercado concerne à precificação de ativos ou passivos a "valor justo" contabilmente. De acordo com a norma CPC-46, o Comitê de Pronunciamentos Contábeis (2012):

(...) define valor justo como o preço que seria recebido pela venda de um ativo ou que seria pago pela transferência de um passivo em uma transação não forçada entre participantes do mercado na data de mensuração.

Isso significa expor corretamente o valor do instrumento financeiro no ponto atual do tempo. A Circular Nº 3.082 do Banco Central, Banco Central do Brasil (2002), decide que, além do ajuste diário a valores de mercado de valores mobiliários e instrumentos derivativos, a metodologia para tal é de responsabilidade das instituições financeiras:

Art. 2º: Parágrafo único: Para fins do ajuste previsto no caput, a metodologia de apuração do valor de mercado é de responsabilidade da instituição administradora e deve ser estabelecida com base em critérios consistentes e passíveis de verificação, que levem em consideração a independência na coleta de dados em relação às taxas praticadas em suas mesas de operação (...)

Em termos de carteira de crédito, marcar a mercado seria trazer a valor presente, utilizando a curva de juros a termo, os ativos e passivos, para, assim, fazer os corretos cálculos de contabilidade e *hedge*.

### 2.3.3.4 Liquidez

A medida de liquidez, de acordo com Demsetz (1968), pode ser determinada por um apanhado de fatores: preço da ação, tamanho da empresa em questão, volatilidade, volume financeiro transacionado e número de negócios. Amihud e Mendelson (1986) se baseiam em preço, no *bid-ask spread* para observar qual a relação entre a liquidez do ativo



e seu retorno. Marsh e Rock (1986) propõem uma razão de liquidez utilizando o número de transações. Gabrielsen, Marzo e Zagaglia (2011) abordam o tema com índice baseado em volume financeiro negociado e Baker e Los (2014) complementam analisando inúmeras formas de cálculo de liquidez com simulações.

A forma de mensuração de liquidez baseada em número de negócios realizados é mais adequada ao tema estudado no trabalho, dado que os instrumentos financeiros abordados são de uma mesma classe, mas possuem estrutura temporal diferente, levando à uma precificação diferente e, conseqüentemente, a um volume financeiro negociado diferente.

No Brasil, instrumentos de *hedge*, como o derivativo citado anteriormente e parte central do presente trabalho, futuro de DI, não apresenta negociação relevante em todos os vértices da curva de juros, impossibilitando, assim, a aplicação de uma estratégia como *Cash flow matching*, por exemplo. Negociações relevantes do futuro de DI se mostram presentes basicamente em meses de janeiro e juntamente com meses de vencimentos de títulos públicos federais. Dessa forma, a possibilidade de um operador de mercado não conseguir uma boa precificação, seja na compra ou na venda, de um contrato fora do escopo citado, aumenta. SILVA e Holland (2013) ressaltam que, no Brasil, há uma singularidade na formação de preço, dada a liquidez maior para contratos futuros do que para títulos públicos.

Como descrito, essa métrica é uma peça-chave na problemática do trabalho e restrição obrigatória para uma correta resolução do problema de *hedge* bancário. Em uma pesquisa conduzida no mercado futuro de milho, Silva et al. (2017) apontam a falta de liquidez em contratos que não tem vencimento próximo. Vieira e Filomena (2020) abordam o tema com restrição de liquidez em um problema de carteira e em Vieira et al. (2021) evoluem o tema. Pan e Xiao (2017) debatem sobre a restrição de liquidez em ALM.

## 2.4 Otimização Matemática

A otimização matemática pode ser conceituada como uma ferramenta matemática em que se procura os melhores elementos dados critérios e restrições. Usualmente, os problemas de otimização são dados por uma função principal a ser minimizada, a função objetivo, e um conjunto de restrições. Os valores resultantes desse problema podem ser chamados de pontos de ótimo local ou global.

Dado que funções matemáticas têm as mais variadas características, problemas de otimização podem ter diversas formas, sendo as mais comuns: programação convexa, dividida em linear e quadrática, programação inteira e programação estocástica (CORNUÉJOLS; PEÑA; TÛTÛNCÛ, 2018).

### 2.4.1 Modelos de Otimização em Finanças

Os problemas em finanças, normalmente, têm a característica de não serem lineares, além de, muitas vezes, necessitarem de solução discreta. Dessa forma, é comum observar modelagem de problemas categorizados como quadráticos e inteiros.

A programação quadrática se refere ao fato de que a função objetivo tem elementos elevados na segunda potência. Tais problemas, de maior dificuldade de resolução, podem ser solucionados com algoritmos conhecidos, caso atendam a algumas propriedades, sendo a principal a convexidade da função objetivo. Jensen e Bard (2002) afirmam que na programação não linear quadrática, as condições necessárias para atingir ponto de ótimo global são dadas pela função objetivo sendo de ser duas vezes continuamente derivável, ser convexa ou estritamente convexa, além do gradiente ser zero em tal ponto. Continuando, para tal função ser convexa (estritamente convexa), a sua matriz hessiana deve ser positiva semi-definida (positiva definida). Tratando-se de otimização não há como não citar Markowitz (1952) com o modelo de média-variância para seleção de portfólio, talvez sendo o mais conhecido modelo em finanças.

Em uma abordagem usando programação linear, Shiu (1988) descreve uma solução com a abordagem de *duration hedge* proposta por Redington (1952). Ortobelli et al. (2018) desenvolvem um portfólio com otimização em dois estágios para máxima performance e com imunização constante. Freitas (2011) e Weiskopf (2003) apresentam modelos de otimização em imunização de carteiras de renda fixa. Oliveira et al. (2017) aprofundam no tema de otimização estocástica para problema de ALM em fundos de pensão. No seu artigo, Chi e Chi (2007) apresentam um modelo de otimização para ALM, considerando o casamento de *duration* dos passivos e ativos. Shen, Wei e Zhao (2018) adicionam movimento browniano à média-variância para resolução de um problema de ALM e a contribuição principal desse artigo é estender o modelo para incorporar regimes de mudança não-markovianos. Stern et al. (2020) demonstram exemplos de modelos de otimização estocástica para *hedge*.

## 3 Procedimentos Metodológicos

Neste capítulo, será exposta a forma como será conduzido o estudo, demonstrando quais ferramentas foram implementadas e como foram utilizadas.

### 3.1 Modelo

No ponto principal do trabalho, está a teoria levantada por Redington (1952), Fisher e Weil (1971), em que a imunização de uma carteira se dá ao igualar valores presentes de ativos e passivos, igualando também *duration*, e por fim, convexidade podendo ser igual ou maior na parte dos ativos. Para buscar tal solução, se formula um modelo para suprir essas demandas.

O propósito do modelo é ser viável e utilizável na prática, além de apresentar resultados satisfatórios para problemas de maior dificuldade de resolução e maior escala. Para tal, para maior aderência à realidade, principalmente a local, buscou-se uma forma na qual se reconhecesse todas as possíveis restrições que o mercado brasileiro apresenta.

É comum nas tesourarias de bancos o uso de diversos tipos de instrumentos para *hedge*. Um dos mais diretos para prevenção do risco de mercado em juros é o contrato futuro de DI, que foi escolhido para ser utilizado nesse modelo. Porém, como já citado, problemas de liquidez afetam a maioria dos vértices desse contrato, impossibilitando o livre uso.

Outro ponto importante é a quantidade de contratos em que o *trader* opera. Mesmo que, em teoria, uma maior presença de contratos espalhados pela curva deva proteger melhor a carteira, operar e cuidar de muitos instrumentos não é tarefa fácil. Soma-se a isso, ainda, o eventual custo de transação de inúmeros contratos abertos. Para tal dificuldade, inclui-se a restrição de números de contratos utilizados.

Valores de fluxo de caixa negativos e positivos podem ser vistos na realidade, sendo assim, a possibilidade de compra ou venda de contratos de DI é de utilidade na prática. Agregando ao modelo de otimização essas restrições, se está melhor aderindo à realidade de ALM. A função objetivo do modelo ampara tal situação, porém, no trabalho, será possibilitada apenas a opção de compra de contratos, ficando para futuros trabalhos a liberdade total de compra e venda.

### 3.1.1 Modelo de Otimização

Na apresentação do modelo abaixo, temos a função objetivo quadrática com restrições lineares, como visto anteriormente, sendo classificada como um Problema de Programação Quadrática.

Função Objetivo:

$$\min \sum_{m=1}^M \left( V_m - \sum_{i \in I} F_{im} \cdot x_{im} \right)^2 \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$D_a = D_p \quad (3.2)$$

$$C_a \geq C_p \quad (3.3)$$

$$\sum_{m \in M} x_{im} \leq L_i, \quad \forall i \in I \quad (3.4)$$

$$\sum_{i \in I} z_i \geq Q_{min} \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in I} z_i \leq Q_{max} \quad (3.6)$$

$$\sum_{m \in M} x_{im} \geq z_i, \quad \forall i \in I \quad (3.7)$$

$$\sum_{m \in M} x_{im} \leq P \cdot z_i, \quad \forall i \in I \quad (3.8)$$

$$x_{im} \geq 0, \quad i \in I, \quad m \in M \quad (3.9)$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad (3.10)$$

Conjuntos:

- $M$  = maturidades da carteira, sendo  $m \in M$
- $I$  = conjunto de contratos, sendo  $i \in I$

Variáveis:

- $x_{im}$  = quantidade de compra de cada contrato Futuro de DI, variável de decisão
- $z_i$  = quantidade de contratos Futuro de DI a ser utilizado, variável auxiliar

Parâmetros:

- $V_m$  = valor presente carteira de crédito em cada maturidade
- $F_{im}$  = valor presente do contrato futuro de DI
- $F_{im} = \begin{cases} \text{VP DI,} & \text{caso o contrato esteja disponível para } hedge \text{ no } bucket; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
- $D_p$  = *duration* modificada da carteira de passivos
- $D_a$  = *duration* modificada da carteira de ativos
- $C_p$  = convexidade da carteira de passivos
- $C_a$  = convexidade da carteira de ativos
- $L_i$  = limitante de liquidez máxima a ser utilizada de cada contrato
- $P$  = valor arbitrário de ordem de grandeza superior para restrição
- $Q_{min}$  = quantidade mínima de tipos de contratos diferentes utilizados
- $Q_{max}$  = quantidade máxima de tipos de contratos diferentes utilizados

A função objetivo (3.1) procura minimizar a diferença entre o valor presente da carteira de crédito e a carteira de *hedge*. Nota-se que o problema será resolvido com variáveis contínuas, porém, na realidade, só existem contratos inteiros. Esse relaxamento se dará pois os custos de se arredondar o número de contratos para o inteiro mais próximo são baixos, dado os valores altos das carteiras e pelo alto custo de tempo que seria necessário para resolução de um problema inteiro. As restrições (3.2) e (3.3) são necessárias para respeitar a teoria de imunização de carteira, sendo a equivalência de *duration* e convexidade, respectivamente. A restrição de liquidez (3.4), sendo uma das mais importantes no modelo, permite a alocação em contratos respeitando os limites de liquidez viáveis na realidade do mercado local. As restrições (3.5) e (3.6) dão aos limites de tipos contratos possíveis de alocação, além disso, (3.7) e (3.8) auxiliam matematicamente as condições anteriores. Finalmente, (3.9) e (3.10) permitem um espaço de soluções para as variáveis  $x_{im}$  em valores não-negativos e  $z_i$  em valor binário.

O particionamento da carteira pode ser utilizado para melhorar a visualização e resultado de um *hedge*, dada a diluição da alocação. Tal ação se dá na entrada de dados na função objetivo, podendo ser determinado quais contratos defenderam quais *bucket*. Somando-se a isso, há também a ideia de usar contratos (vértices) com menor correlação entre si, para, teoricamente, melhorar a eficiência do *hedge*. No presente trabalho se optou por não aplicar a partição de carteira.

### 3.1.2 Prova de Convexidade

Para confirmar que um problema quadrático possui solução, uma garantia é dada caso o modelo seja ao menos convexo. Dessa forma, como a função objetivo, Equação (3.1), do modelo proposto é quadrática, faz-se necessária uma prova de que a matriz resultante do modelo algébrico descrito seja ao menos positiva semidefinida, conforme Jensen e Bard (2002).

A obtenção da forma matricial da função objetivo se dá pela multiplicação de um vetor pelo seu transposto, ou seja, semelhante à forma de obtenção de uma matriz de covariâncias. Matematicamente, é possível provar que o resultado dessa multiplicação é sempre uma matriz positiva semidefinida, sendo, dessa maneira, a função objetiva do modelo convexa e garantida a obtenção de convergência para uma solução.

Assim sendo, para qualquer  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , a matriz  $X^T X$  é positiva semidefinida.

Para qualquer vetor  $z \in \mathbb{R}^n$ ,

$$z^T (X^T X) z = (Xz)^T (Xz) = \|Xz\|_2^2$$

## 3.2 Efetividade da Carteira de *Hedge*

Será calculada a efetividade do *hedge*, conforme apresentado em seção anterior, respeitando a normativa do Banco Central do Brasil.

$$Eficiencia(\%) = \left( \frac{\Delta Valor de Mercado Hedge}{\Delta Valor de Mercado Carteira} \right) * 100 \quad (3.11)$$

A efetividade será calculada no último dia útil de cada mês e comparada para descrição da utilidade do modelo.

Também será calculado o R-quadrado e a correlação entre os valores presentes das carteiras finais de cada período. A busca pela eficiência é a motriz principal do trabalho, sendo a maior contribuição para o meio que se pode alcançar com ele.

Tonin, Braga e Coelho (2009) elaboraram estudo que avalia a efetividade de um *hedge* no mercado de milho no Brasil e apresentaram resultados insatisfatórios na proteção contra a oscilação, provavelmente, devido à baixa liquidez dos futuros de milho.

## 3.3 Fonte de Dados

Para a resolução do problema, foi necessária, principalmente, a utilização de dados de Contratos Futuros de DI, que são disponibilizados pela B3. A partir de tais dados são geradas as ETTJ pela B3, além do qual serão utilizados valores de PU, número de negócios realizados e ajuste diário de PU. A Estrutura a Termo de Taxas de Juros utilizada é

fornecida e já interpolada também pela B3. Todos dados são encontrados de forma livre na *webpage* da B3.

## 3.4 Amostra

Foi selecionado o período entre dezembro de 2014 até dezembro de 2021 para testes e análises, resultando em 85 períodos para análise. Tal período foi escolhido por apresentar ciclos de alta e baixa de juros moderados a fortes.

### 3.4.1 Carteira de Crédito

Na construção da carteira de crédito do problema foram implementados métodos para tentar refletir melhor as condições reais de um banco. Os critérios utilizados na formação das carteiras são, basicamente, valores nominais e maturidades, sendo relacionados de forma a criar vários diferentes desenhos de carteira de crédito.

No primeiro método foi estipulado um valor nominal de dez milhões de Reais, que foi distribuído de forma homogênea ao longo de 60 maturidades, criando carteira do tipo *ladder*. Também foram criadas carteiras de 60 períodos, partindo de valor nominal de cinco milhões de Reais até 15 milhões, e outra oposta, indo de 15 até cinco milhões de Reais, ambas com coeficientes lineares. No segundo método para replicar uma carteira *barbell*, foram selecionadas duas maturidades nos períodos 15 e 45 com valor nominal de 100 milhões em cada vértice. Não foi criada uma carteira *bullet*, dada a simplicidade dessa carteira.

Após a criação, os fluxos de caixa das carteiras são trazidos a valor presente para utilização dentro do modelo de otimização, além disso, são feitos os cálculos de *duration* e convexidade. Como mencionado, a curva utilizada para cálculos é disponibilizada pela B3 e eventuais maturidades que não estiverem dispostas, são calculadas com *cubic spline*. O estudo considerou a criação das carteiras a cada primeiro dia útil de cada mês, não acumulando valores para os próximos meses.

### 3.4.2 Carteira de Hedge

A formação da carteira de *hedge* se dará pela otimização matemática, sendo a saída do modelo representada pela quantidade e tipo de contratos futuros de DI a serem negociados em cada um dos testes. Os valores utilizados são os de fechamento do dia anterior.

Os parâmetros de maior importância utilizados para determinar o espaço de soluções possível são dois, liquidez máxima de cada contrato e números, máximo e mínimo, de

contratos a serem utilizados. Desses parâmetros, há uma combinação entre si para buscar compor as melhores, ou piores, formas de criar a carteira de passivos.

Usualmente, denomina-se a forma de *hedge* entre estático e dinâmico. Há a forma estática, em que a carteira de passivos é formada e permanece igual até a sua análise e dinâmico, em que há o rebalanceamento dos pesos e contratos, conforme se tem necessidade. No trabalho será feito um *hedge* estático, em que a carteira é formada apenas uma vez e não rebalanceada até a sua análise.

#### 3.4.2.1 Liquidez

Na criação da restrição de liquidez aplicada ao modelo, é levada em consideração a quantidade de negócios realizados em cada um dos contratos de DI. Dessa forma, busca-se evitar desvios possíveis de serem causados pelo PU do contrato derivativo, caso se utilizasse valores financeiros.

Analizados os dados, será utilizado um ponto de corte de 0,4% do total negociado do mês anterior, como máximo de liquidez a ser usado na otimização. Tal valor tem como base a ideia de que um único participante não pode operar percentuais muito elevados no mercado e levando em consideração o tamanho da carteira hipotética versus o mercado de crédito brasileiro, inferiu-se que o valor 0,4% seria aceitável. Esse percentual, aplicado a cada contrato, será limitador do cálculo da carteira de passivos. Aqui não será considerada a dinâmica intra-diária dos contratos, sendo assim, será considerado que terá *book* de ofertas para tal demanda.

No ponto inferior, também serão feitos testes descartando contratos que têm liquidez muito baixa, usando como ponto de corte a média dos contratos oferecidos a cada teste. Tal ação aumentou a velocidade de resolução dos problemas de otimização, pois diminuiu o número de variáveis de decisão sem prejuízo para a solução. Há a possibilidade de adicionar restrição semelhante a 3.4, mas oposta em sinal, necessitou de uma alocação mínima em determinados contratos. Pode-se observar que, eventualmente, é positivo e até necessário a diluição do *hedge* em mais contratos, de forma a ficar menos exposto a variações de curvatura e inclinação da curva, assemelhando-se a um *Cash flow matching*.

#### 3.4.2.2 Duration e Convexidade

A *duration* será calculada na forma modificada, conforme Fisher e Weil (1971), para o uso como restrição do problema. Para tanto, será utilizada também a convexidade como parâmetro de restrição. No modelo de imunização de carteira se busca a igualdade de *duration* entre as carteiras de passivos e ativos, além de uma convexidade maior ou igual dos ativos.



### 3.4.2.3 Quantidade de Contratos

O número de contratos estipulados utilizados não segue nenhuma norma ou padrão, convencionando-se então no uso de 3, 5 ou 7 contratos para estabelecer a carteira de passivos.

Estudos e modelos já foram criados, buscando-se limitar a quantidade de contratos utilizados em uma carteira (SANT'ANNA; FILOMENA; BORENSTEIN, 2014) e (SANT'ANNA et al., 2017).

## 3.5 *Benchmarking*

Os resultados obtidos com o modelo serão comparados com resultados de *hedge* usando o método ACP, como nos trabalhos de Almeida e Lund (2014), Caldeira, Moura e Santos (2016) e Varga e Valli (2001), que foram baseados no método de Litterman e Scheinkman (1991). A ideia é visualizar os pontos fortes e fracos do modelo.

## 3.6 *Solver*

Para a resolução do problema, são necessários diversos procedimentos, desde obtenção e manipulação de dados, até cálculos para solução do problema de otimização. Dessa forma, foi utilizada a linguagem *python* em todos os processos e inserido a isso, se emprega um *software* específico para encontrar os resultados na otimização, chamado também de *solver*, usou-se o programa de código aberto *Bonmin*. Tal *solver* utiliza métodos de pontos interiores para encontrar a solução matemática do problema, porém esse assunto não é escopo deste trabalho. O *hardware* principal usado foi um AMD Ryzen 9 5950X com 64GB de memória disponível e sistema operacional Windows.

## 4 Resultados

### 4.1 Testes

Para melhor visualização dos resultados do modelo, os testes foram feitos em três diferentes cenários, adicionando restrições ao modelo de otimização. No primeiro momento, foram testadas as carteiras com o modelo sem restrições de liquidez e número de contratos, após, foi adicionada a restrição de liquidez e, então, as restrições de número de contratos. Abaixo será expresso e explicado o equacionamento principal. As funções secundárias e auxiliares foram suprimidas nessa parte, já tendo sido apresentadas na seção anterior.

O equacionamento do cenário inicial, exposto abaixo, terá o intuito de formar uma base de resultados. É formado pela função objetivo (4.1), minimizando a distância entre os valores presentes da carteira de ativos e passivos. A liberdade de escolha dos contratos, na variável de decisão  $x_{im}$ , é contínua, não correspondendo com a realidade de valores discretos. A escolha de produzir resultados do modelo dessa forma e após isso arredondar para o inteiro mais próximo foi tomada pelo ganho de velocidade na obtenção de resultados do *solver*, dado que a perda econômica para o resultado final é baixo.

Os testes serão restritos por (4.2) e (4.3), que são as restrições de *duration* e convexidade das carteiras. A restrição 4.2 corresponde ao igualamento de *duration* das carteiras de ativos e passivos. Tal restrição "dura" de igualdade acaba por não trazer dificuldades de obtenção de resultados, pois há liberdade nas variáveis de decisão contínuas na função objetivo. A restrição 4.3 demonstra uma convexidade maior ou igual para a parte dos ativos (CORNUÉJOLS; PEÑA; TÛTÛNCÛ, 2018).

Função Objetivo:

$$\min \sum_{m=1}^M \left( V_m - \sum_{i \in I} F_{im} \cdot x_{im} \right)^2 \quad (4.1)$$

Sujeito a (cenário 1):

$$D_a = D_p \quad (4.2)$$

$$C_a \geq C_p \quad (4.3)$$

Para o seguinte cenário de testes, será adicionado ao equacionamento anterior a restrição de liquidez (4.4), que é ponto central do trabalho. Tal restrição é limitante na realidade de mercado brasileira. Basicamente, o objetivo dessa restrição é entender como

se desdobrará o resultado da carteira de passivos, se a alocação preencherá o limite ou se haverá a divisão entre outros contratos.

Sujeito a (cenário 2):

$$\sum_{m \in M} x_{im} \leq L_i, \quad \forall i \in I \quad (4.4)$$

No terceiro e último cenário de testes, as restrições de quantidade de alocação em espécies de contratos diferentes são adicionadas, 4.5 e 4.6 respectivamente, ditando as quantidades mínima e máxima para solução do modelo. O racional de tais restrições invoca uma necessidade realista de administração e dispêndio de operação. Dado ser matematicamente possível a resolução do problema fora desses limites, porém tal solução pode não ser viável pelo seu custo elevado. Seja em uma situação em que operar muitos contratos não é ideal, ou talvez se tenha um alto *spread* cobrado pelo mercado na compra ou venda por causa da necessidade de operar poucos contratos. De toda forma, há a opção de escolha para o aplicador do modelo com tais restrições.

Sujeito a (cenário 3):

$$\sum_{i \in I} z_i \geq Q_{min} \quad (4.5)$$

$$\sum_{i \in I} z_i \leq Q_{max} \quad (4.6)$$

Ao total, foram feitos 20 tipos de testes diferentes, dadas as combinações de carteiras em 85 períodos, totalizando 1700 testes de *hedge*. Para visualizar a variação de valores das carteiras de ativos, nas Tabelas 1, 2 e 3 estão expostos os valores de média, máximo, mínimo e mediana para dados de valor presente, *duration* e convexidade. As carteiras *ladder* e *barbell* se diferem nos quesitos tamanho nominal e forma, então, uma cautela é necessária ao compará-las. A constituição do nome se dá pela forma da carteira (*ladder* ou *barbell*), valores nominais iniciais e finais (conforme descrito na seção anterior) e nível de restrição dos testes (livre, liquidez, contratos e ACP). A nomenclatura completa para as carteiras está exposta na Tabela 20, em anexo.

Na Tabela 1 se pode notar que os valores presentes descontados usando a curva de juros tiveram um valor médio de 482,90 milhões nas carteiras *ladder* e 161,47 milhões nas *barbell*. O país vivenciou diversos ciclos monetários no período escolhido, ciclos de aperto ou afrouxamento de taxas de juros, levando a curva de juros a se mover conforme as expectativas do mercado financeiro. Pode-se perceber nos valores presentes das carteiras essa expectativa, apresentando as maiores taxas de desconto entre meados de 2015 e meados de 2016. Há também o outro lado, as menores taxas ao longo de 2020 até início de

2021, período que marcou a menor taxa básica de juros do Brasil. Como já pontuado, tais condições afetam os cálculos de valor presente, *duration* e convexidade dos instrumentos financeiros desse trabalho.

Tabela 1 – Valor Presente das Carteiras (R\$milhões)

Carteiras	média	máximo	mínimo	mediana
ladder_5_15	463,67	527,85	390,89	465,74
ladder_10_10	482,90	540,40	417,99	485,24
ladder_15_5	502,14	552,95	445,08	504,63
barbell_100_100	161,47	180,97	139,44	162,34

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Sobre os valores de *duration*, Tabela 2, as carteiras *barbell* apresentaram uma média de 2,14, e as carteiras *ladder* tiveram os seus valores mínimos e máximos, respectivamente, 1,57 e 2,72.

Tabela 2 – *Duration* modificada das Carteiras

Carteiras	média	máximo	mínimo	mediana
ladder_5_15	2,53	2,72	2,27	2,53
ladder_10_10	2,13	2,32	1,90	2,13
ladder_15_5	1,77	1,93	1,57	1,77
barbell_100_100	2,14	2,30	1,93	2,14

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Com a tabela 3, nota-se que a diferença de valores entre carteiras é mais acentuada, dada a forma de cálculo da convexidade. Isso exemplifica a importância para aproximar melhor o resultado entre *hedge* e ativos.

Tabela 3 – Convexidade das Carteiras

Carteiras	média	máximo	mínimo	mediana
ladder_5_15	11,28	12,25	9,97	11,26
ladder_10_10	8,96	9,84	7,79	8,93
ladder_15_5	6,82	7,54	5,88	6,80
barbell_100_100	8,53	9,26	7,54	8,51

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 4.2 Modelo sem restrições de liquidez e contratos

O propósito inicial dessa forma de teste, Cenário 1, é analisar o quanto a restrição de liquidez é capaz de influenciar no resultado, ou seja, caso os resultados sejam muito superiores nessa situação, poderia inferir-se que a liquidez é realmente um problema que deve ser contornado. O oposto talvez não possa ser confirmado, pois há a possibilidade

de o modelo alocar em outros contratos disponíveis com mais liquidez e os resultados do modelo restrito serem tão bons quanto.

Na Tabela 4 estão demonstrados os percentuais de carteiras com solução para o modelo e quantidades eficientes. Há solução para todos os cenários, dado que estes testes são os de menor nível restritivo.

Tabela 4 – Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de soluções

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_livre	100%	75%	64
ladder_5_15_livre	100%	79%	67
ladder_10_10_livre	100%	75%	64
ladder_15_5_livre	100%	76%	65

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

As quantidades utilizadas de contratos, demonstradas na Tabela 5, apontam para a mesma quantidade de contratos usados em todas as soluções, ou seja, o *solver* encontrou exatamente a mesma quantidade de contratos para solucionar os diferentes tipos de carteira a cada período.

É possível inferir que sem restrições de liquidez, há a possibilidade de elaborar soluções com uma combinação linear de quaisquer contratos, a fim de respeitar as condições de valor presente, *duration* e convexidade. Pode-se presumir que o processo dentro do *solver* parece não ser estocástico, sendo determinística a forma de busca de solução, inferindo-se que esses resultados eram os mais rápidos encontrados.

Tabela 5 – Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de quantidade de contratos utilizados

Carteiras	Máxima quantidade contratos	Mínima quantidade contratos	Média quantidade contratos	Mediana quantidade contratos	Desvio padrão quantidade contratos
barbell_100_100_livre	11,00	5,00	8,96	9,00	1,26
ladder_5_15_livre	11,00	5,00	8,96	9,00	1,26
ladder_10_10_livre	11,00	5,00	8,96	9,00	1,26
ladder_15_5_livre	11,00	5,00	8,96	9,00	1,26

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na Tabela 6 são observados alguns resultados descritivos sobre as eficiências calculadas a cada período de *hedge*. Cabe pontuar certa divergência nos valores de média e desvio padrão, demonstrando que quando os resultados saem da banda, o fazem com grande intensidade, já os valores de mediana estão próximos o valor ideal de 100%.

Tabela 6 – Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de eficiências

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_livre	102%	102%	63%
ladder_5_15_livre	127%	100%	207%
ladder_10_10_livre	93%	100%	80%
ladder_15_5_livre	75%	100%	175%

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A Tabela 7 expõe resultados com bastante aderência entre os valores presentes finais da carteira e do *hedge* de cada período. Grande parte dos trabalhos acadêmicos faz apenas esse tipo de análise, não calculando os valores de eficiência mês a mês e, embora normas e legislação permitam, perde-se qualidade na análise do *hedge*.

Tabela 7 – Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de correlação e R-quadrado

Carteiras	R-quadrado valores de carteiras	Correlação valores de carteiras
barbell_100_100_livre	0,9992	0,9996
ladder_5_15_livre	0,9991	0,9996
ladder_10_10_livre	0,9992	0,9996
ladder_15_5_livre	0,9993	0,9996

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 4.3 Modelo com restrições de liquidez

A seguir são apresentados os resultados do cenário 2, adicionando ao modelo as restrições de liquidez de contratos de DI. A Tabela 8 expõe que todos os testes foram completados com alguma solução e, do total, tem-se uma eficiência maior que 76% em todos os cenários.

Tabela 8 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de soluções

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_liquidez	100%	76%	65
ladder_5_15_liquidez	100%	82%	70
ladder_10_10_liquidez	100%	79%	67
ladder_15_5_liquidez	100%	81%	69

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Como não há restrição de número de contratos ainda, o universo de solução em quantidades de contratos se dá pelo conjunto disponível a cada teste. A Tabela 9 informa que a quantidade de contratos variou entre 6 e 10 em todas as carteiras, com um desvio padrão de praticamente 1 contrato. Uma possível explicação para os números semelhantes nas carteiras é que no *solver*, a busca pelo ótimo se estabeleceu na combinação dos mesmos contratos.

Tabela 9 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de quantidade de contratos utilizados

Carteiras	Máxima quantidade contratos	Mínima quantidade contratos	Média quantidade contratos	Mediana quantidade contratos	Desvio padrão quantidade contratos
barbell_100_100_liquidez	10	6	8	9	0,98
ladder_5_15_liquidez	10	6	8	9	0,98
ladder_10_10_liquidez	10	6	8	9	0,98
ladder_15_5_liquidez	10	6	8	9	0,98

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A média de eficiências (Tabela 10) apresentou semelhança na ordem de valores do modelo sem restrições de liquidez ou contratos, um indicador de que as carteiras formadas podem ser semelhantes nos dois tipos de teste. O pior resultado ficou com a carteira *ladder\_5\_15*, com uma média de 130% de eficiência, valor acima da banda exigida. Porém, com valores de desvio padrão alto, a análise da mediana se torna necessária e todos os resultados estão coerentes com a faixa buscada.

Tabela 10 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de eficiências

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_liquidez	95%	101%	66%
ladder_5_15_liquidez	130%	100%	203%
ladder_10_10_liquidez	91%	99%	69%
ladder_15_5_liquidez	89%	99%	120%

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A aderência entre os valores presente das carteiras de *hedge* e de crédito ao final de cada período é alta, conforme a Tabela 11. Dessa forma, tais testes passariam como praticamente perfeitos, caso fosse feito apenas esse tipo de análise.

Tabela 11 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de correlação e R-quadrado

Carteiras	R-quadrado valores de carteiras	Correlação valores de carteiras
barbell_100_100_liquidez	0,9991	0,9995
ladder_5_15_liquidez	0,9990	0,9995
ladder_10_10_liquidez	0,9991	0,9995
ladder_15_5_liquidez	0,9990	0,9995

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

#### 4.4 Modelo com todas restrições

Por fim, com o modelo demonstrando a capacidade de restrições de número de contratos utilizados para o *hedge*, tem-se a apresentação dos testes do Cenário 3. Foram testados os quatro tipos de carteiras com limites de liquidez e contratos fixados em 3, 5, 7. Se poderia executar tal restrição com liberdade de  $Q_{min} < Q_{max}$ , porém, como mencionado, foi-se fixado o valor, tornando  $Q_{min} = Q_{max}$ .

Isso poderia resultar em problemas inviáveis na busca por soluções, porém, nota-se na Tabela 12 que só se apresentou pequenas dificuldades em solução com uso de 7 contratos, quando se obteve resultado em 96% das carteiras nessa quantidade.

Nos resultados de eficiência dos problemas solucionados, tem-se como menor valor 76% das carteiras e o maior 81%. Como detalhe para a coluna de Quantidade de carteiras eficientes, apresentando o número absoluto de testes que foram eficientes de um universo de 85 testes por carteira, conseguiu-se, no mínimo, 64, indo até 69.

Tabela 12 – Modelo com todas restrições: Resultados de soluções

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_liquidez_contratos_3	100%	80%	68
ladder_5_15_liquidez_contratos_3	100%	79%	67
ladder_10_10_liquidez_contratos_3	100%	78%	66
ladder_15_5_liquidez_contratos_3	100%	78%	66
barbell_100_100_liquidez_contratos_5	100%	79%	67
ladder_5_15_liquidez_contratos_5	100%	81%	69
ladder_10_10_liquidez_contratos_5	100%	78%	66
ladder_15_5_liquidez_contratos_5	100%	76%	65
barbell_100_100_liquidez_contratos_7	96%	78%	64
ladder_5_15_liquidez_contratos_7	96%	79%	65
ladder_10_10_liquidez_contratos_7	96%	80%	66
ladder_15_5_liquidez_contratos_7	96%	80%	66

**Fonte:** Elaborado pelo autor.



Não é apresentado um quadro de estatísticas de quantidades de contratos por motivos óbvios, dado que é restrição no modelo.

Na Tabela 13, são apresentados os resultados médios de eficiência, que variam entre 81% e 130%, ficando a média fora da banda em três testes, todos sendo a carteira *ladder* com *duration* mais alongado. Tais carteiras com grande peso de fluxos de caixa em períodos mais distantes podem estar sendo comprometidas pela falta de liquidez em contratos mais longos. Isso poderia ser resolvido utilizando uma das qualidades do modelo, em que se filtra na entrada quais contratos poderão ser utilizados em determinados períodos, fazendo com que se obrigue o uso dos contratos selecionados.

Tabela 13 – Modelo com todas restrições: Resultados de eficiências

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_liquidez_contratos_3	95%	101%	66%
ladder_5_15_liquidez_contratos_3	130%	100%	203%
ladder_10_10_liquidez_contratos_3	91%	99%	69%
ladder_15_5_liquidez_contratos_3	89%	99%	120%
barbell_100_100_liquidez_contratos_5	100%	101%	61%
ladder_5_15_liquidez_contratos_5	130%	101%	221%
ladder_10_10_liquidez_contratos_5	101%	99%	57%
ladder_15_5_liquidez_contratos_5	81%	99%	118%
barbell_100_100_liquidez_contratos_7	102%	102%	64%
ladder_5_15_liquidez_contratos_7	127%	100%	219%
ladder_10_10_liquidez_contratos_7	98%	100%	56%
ladder_15_5_liquidez_contratos_7	83%	100%	122%

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

As correlações e R-quadrados são exibidas na Tabela 14, novamente com assimilação total entre os valores das carteiras de *hedge* e ativos.

## 4.5 Testes com Análise de Componentes Principais

Nessa seção, para o *benchmarking*, serão expostos os resultados usando o método de análise de componentes principais (ACP), em que Litterman e Scheinkman (1991) foram precursores. Dada as análises da curva à termo, tal estudo demonstrou que três componentes principais respondem por grande parte dos movimentos, sendo nomeadas de nível, inclinação e curvatura.

Para se criar a carteira de *hedge* usando essa abordagem, são utilizados três contratos, um para cada componente. Deve-se usar a *duration* da carteira de crédito para escolher a posição do primeiro contrato e os outros dois de forma mais equidistante possível, para frente e para trás do contrato medial, sendo alocado valores iguais em cada um.

Tabela 14 – Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de correlação e R-quadrado

Carteiras	R-quadrado valores de carteiras	Correlação valores de carteiras
barbell_100_100_liquidez_contratos_3	0,9991	0,9995
ladder_5_15_liquidez_contratos_3	0,9990	0,9995
ladder_10_10_liquidez_contratos_3	0,9991	0,9995
ladder_15_5_liquidez_contratos_3	0,9990	0,9995
barbell_100_100_liquidez_contratos_5	0,9992	0,9996
ladder_5_15_liquidez_contratos_5	0,9991	0,9995
ladder_10_10_liquidez_contratos_5	0,9991	0,9996
ladder_15_5_liquidez_contratos_5	0,9993	0,9997
barbell_100_100_liquidez_contratos_7	0,9992	0,9996
ladder_5_15_liquidez_contratos_7	0,9991	0,9995
ladder_10_10_liquidez_contratos_7	0,9992	0,9996
ladder_15_5_liquidez_contratos_7	0,9993	0,9996

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

São apresentados os resultados de soluções na Tabela 15 e foram solucionados todos os testes, porém em percentual de eficiência, nenhuma situação se conseguiu mais de 70%.

Tabela 15 – Modelo de Análise de Componentes Principais: Resultados de soluções

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_ACP	100%	65%	55
ladder_5_15_ACP	100%	68%	58
ladder_10_10_ACP	100%	69%	59
ladder_15_5_ACP	100%	65%	55

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Ao analisar o Tabela 16, é preciso que se saliente que o valor de 8% em média de eficiência na carteira *ladder* com *duration* mais elevado é acompanhado de valor de um desvio padrão alto. Mesmo sendo resultante de um resultado extremamente fora do padrão, não se fez exceção e o número foi mantido. Assim, em dois testes, a média fica fora da banda ideal de resultados.

Por fim, nos resultados de R-quadrado e correlações, todos resultados os também apresentaram grande aderência entre carteiras.

## 4.6 Revisão de Resultados

Os testes de otimização foram resolvidos num total de cinco horas, demorando 03h15 nas 1020 carteiras testadas com restrição de contratos (11,47 segundos em média

Tabela 16 – Modelo de Análise de Componentes Principais: Resultados de eficiências

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_ACP	115%	102%	165%
ladder_5_15_ACP	8%	99%	901%
ladder_10_10_ACP	78%	103%	250%
ladder_15_5_ACP	113%	100%	106%

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Tabela 17 – Modelo de Análise de Componentes Principais: Resultados de correlação e R-quadrado

Carteiras	R-quadrado valores de carteiras	Correlação valores de carteiras
barbell_100_100_ACP	0,9983	0,9991
ladder_5_15_ACP	0,9984	0,9992
ladder_10_10_ACP	0,9981	0,9990
ladder_15_5_ACP	0,9986	0,9993

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

por teste), e 40 minutos nos 640 testes livres e com apenas restrição de liquidez (3,75 segundos em média por teste). A diferença para o total, cerca de 40 testes não obtiveram solução pelo *solver*.

Na formação de carteiras dos testes livres ou com liquidez, a quantidade de contratos utilizadas permaneceu a mesma em todos os meses, exceto nos dois primeiros. Nos oito testes que não tinham restrição de contratos, apenas nos meses de dezembro de 2014 e janeiro de 2015 não foi achado como resultado uma carteira de *hedge* com quantidade idêntica de contratos.

Houve meses nos testes em que todos os resultados ficaram fora da banda ideal de *hedge*, com meses de forte volatilidade, o que não inviabiliza o modelo, mas penaliza essa forma de fazer *hedge* utilizada. O *hedge* estático, sem ativamente alterar a carteira em caso de oscilação forte na curva de juros, talvez não seja a forma mais eficiente.

Mesmo quando os valores de média e desvio padrão se mostrarem dispersos nas tabelas de Resultados de eficiências (Tabelas 6, 10 e 13), a taxa de carteiras de *hedge* efetivas foi sempre superior a 75%, mesmo em uma abordagem passiva, em que não se mexeu na carteira de defesa ao longo de todo mês.

Os resultados de desvios padrão altos podem ser explicados por *outliers* nos resultados, em que valores de eficiência atingiram números bem acima ou abaixo da média. Eventualmente tais resultados *outliers* apresentaram variação nominal baixa em compara-

ção ao tamanho das carteiras, mesmo que percentualmente valores altos, esclarecendo os desvios padrões elevados.

Nos testes livres sem as restrições de liquidez, no cenário 1, em muitos casos, foram alocadas quantidades de contratos acima do limite estipulado no trabalho, ou seja, tais carteiras não poderiam ser executadas na prática, pois não se teria liquidez suficiente para tal. Já nos testes em que a restrição de liquidez esteve presente, apenas em uma vez um contrato bateu no limite de liquidez disponível. Uma situação como esse acontecimento não impossibilita um resultado ótimo no modelo, pois dado que o problema tem por característica ser originário de uma matriz positiva semi-definida, ele apresenta mais de uma solução ótima, buscando, assim, povoar a carteira de *hedge* com outros contratos que tenham liquidez disponível.

As carteiras *ladder* com maior *duration* performaram pior no geral. O que pode explicar tal fato é a possibilidade de baixa liquidez de contratos de DI futuros em períodos mais alongados no Brasil - motivo central do trabalho. Como foi comentado anteriormente, tem-se a possibilidade de partição da carteira de ativos na entrada do modelo e isolamento do uso de contratos de *hedge* para contornar tal problema. Essa técnica pode ser uma motivação para trabalhos futuros.

A carteira *barbell* foi escolhida para evoluir em testes com limite de liquidez menor, ou seja, abaixo do ponto de corte de 0,4%. Foram usados os valores 0,1%, 0,2% e 0,3% para testes de eficiência do *hedge*.

A Tabela 18 apresenta os resultados de soluções e percentual eficiente dos solucionados, os resultados não foram afetados pela menor disponibilidade de liquidez.

Tabela 18 – Modelo com todas restrições e liquidez diminuída: Resultados de soluções

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,1	100%	104%	76
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,2	100%	104%	78
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,3	103%	104%	84

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na Tabela 19 são apresentados os resultados de eficiências dos *hedges*, expondo também que o corte na liquidez não afetou os resultados.

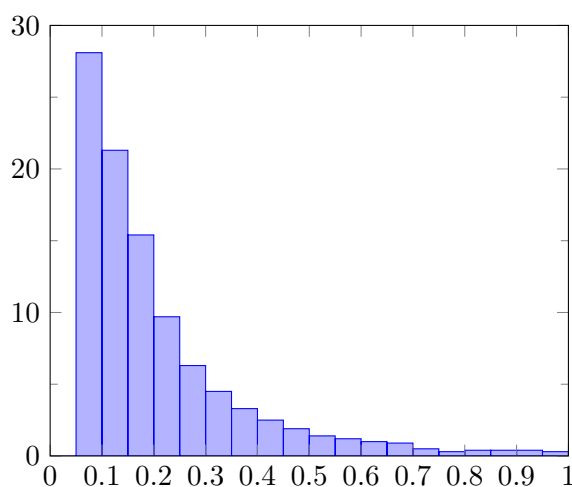
A Figura 1 apresenta um histograma em que o eixo das abcissas representa o percentual utilizado do limite de contratos utilizados. No eixo das ordenadas, há a quantidade em percentual de contratos que atingiram os respectivos percentuais. Essa figura, que abrange apenas as carteiras em que há o limite de liquidez empregado, mostra que cerca de 80% dos contratos utilizados, usa 25% ou menos do limite de liquidez disponível.

Tabela 19 – Modelo com todas restrições e liquidez diminuída: Resultados de eficiências

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,1	115%	102%	165%
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,2	8%	99%	901%
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,3	78%	103%	250%

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Figura 1 – Histograma de percentual de limite utilizado



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A respeito dos testes com o método ACP, dado que são utilizados apenas 3 contratos para o *hedge*, foi feito um cálculo da disponibilidade de utilização de contratos de DI futuro para comparar com o método de otimização, que pode utilizar mais contratos. O resultado se traduz em 78% mais liquidez com todos os contratos de DI futuros ofertados versus os três mais líquidos. O resultado poderia ser pior, dado que talvez os três contratos mais líquidos não cumprissem as exigências do método. Embora o método aparente ser de execução mais simples, tal modelo esbarra, principalmente, na questão da liquidez, pois sempre necessitará usar todo o valor presente da carteira em apenas três contratos. Dessa forma, esse método sempre estará em desvantagem, caso a carteira seja demasiada grande para a liquidez disponível.

Para uma comparação entre os testes livres, com liquidez, com restrição de contratos e ACP, esses aspectos podem ser observados ao avaliar a média dos valores da coluna "Percentual eficiente dos solucionados", respectivamente, 76%, 80%, 79% e 67%, vindos das Tabelas 4, 8, 12 e 15. Os valores indicam que há mais resultantes eficientes nos testes com modelo de otimização comparado ao ACP.

Por fim, dos 1348 testes com solução nos cenários 2 e 3, com restrição de liquidez e contratos, tem-se uma média de eficiência de 103% contra 79% dos 340 testes de ACP.

---

Aparentemente, esse é outro indicativo de maior consistência nos resultados a favor do modelo de otimização, dado que pode ficar mais próximo do valor ideal de *hedge*, 100%.

## 5 Conclusão

A proteção de ativos em carteiras de crédito bancário visa evitar perdas, devido à volatilidade do mercado, com foco especial no risco de mercado associado às taxas de juros. Isso requer uma gestão cuidadosa de ativos e passivos, conhecida como *Asset and Liability Management* (ALM), que tem entre os seus objetivos, monitorar e ajustar descasamentos de tais ativos e passivos para proteger o *spread* bancário. O risco de mercado, na forma de mudanças nas taxas de juros, advém de mudanças na curva à termo. Movimentos na curva a termo, entre os quais estão mudança de nível, inclinação e curvatura, são influenciados por diversos fatores econômicos e podem afetar o valor de ativos e passivos.

Gerenciar o risco de taxa de juros requer estratégias, como diversificação, correspondência de prazos e o uso de derivativos. Uma estratégia comum é a imunização de carteira, em que a otimização matemática pode ser utilizada para encontrar o equilíbrio ideal entre ativos e passivos, mitigando o risco de forma eficaz. Dentro da gestão de ativos e passivos, a imunização de carteiras é uma técnica bem conhecida para proteger contra oscilações nas taxas de juros. Essa abordagem foi introduzida por Redington (1952) em 1952 e, posteriormente, desenvolvida por Fisher e Weil (1971), em 1971. A imunização visa criar uma carteira que não seja sensível às mudanças nas taxas de juros, proporcionando proteção contra riscos de mercado.

O trabalho propôs um modelo de otimização matemática para elaborar uma carteira de *hedge* com o uso de instrumentos derivativos, chamados de contratos futuros de DI, com objetivo de imunizar uma carteira de crédito contra o risco de mercado. O problema resolvido é aderente à realidade brasileira, com limites de liquidez nos instrumentos e quantidade de contratos utilizados. Foi realizada uma grande variedade de testes para estressar o modelo proposto, a fim de provar a sua eficácia, além de uma comparação com estudos semelhantes que usaram o método de análise de componentes principais (ACP). Uma vantagem do método abordado neste trabalho sobre o método ACP está na liberdade de utilizar mais contratos na atribuição da carteira de *hedge*, dado que o método ACP emprega apenas três contratos. Tal possibilidade representa 78% a mais de liquidez disponível a favor do modelo de otimização.

Os resultados demonstram a capacidade do modelo de otimização de defender o valor da carteira de crédito, principalmente ao analisar a média total de resultados de eficiência de *hedge*. Sendo 100% o valor ideal, o modelo do trabalho obtém valor de 103%, contra 79% dos testes com ACP. O modelo tem a capacidade de achar soluções em diversos cenários diferentes, mesmo com restrições fortemente limitantes, atribuindo versatilidade na resolução do problema. Mais de 75% dos testes viáveis matematicamente, obtiveram

Capítulo 5. Conclusão resultados eficientes, dentro da banda ótima de *hedge*. Praticamente a totalidade dos testes obteve altíssima aderência em R-quadrado entre os valores de carteira de ativos e carteira de *hedge*.

Para futuros estudos, pode-se lançar mão de outras técnicas, a fim de melhorar os resultados. Na entrada dos dados, pode-se utilizar contratos de DI com menor correlação entre si. Já na função objetivo há a possibilidade de limitar o uso de contratos em cada *bucket* e se pode atribuir várias carteiras em uma mesma solução. Por fim, na parte de restrições, há a possibilidade de adicionar *key rate durations* ou outra medida de risco, além de necessidades específicas de cada tipo de problema, o que é um ponto positivo para os métodos com modelos de otimização.



# Referências

ADAM, A. *Handbook of Asset and Liability Management: From Models to Optimal Return Strategies*. [S.l.]: Wiley, 2008. (The Wiley Finance Series). ISBN 9780470724118. Citado na página 9.

ADAM, A. et al. On the risk management of demand deposits: quadratic hedging of interest rate margins. *Annals of Operations Research*, Springer, p. 1–37, 2020. Citado na página 14.

ALMEIDA, C.; LUND, B. Immunization of fixed-income portfolios using an exponential parametric model. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 34, n. 2, p. 155–201, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 9, 13, 14 e 32.

AMIHUD, Y.; MENDELSON, H. Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of Financial Economics*, v. 17, n. 2, p. 223–249, December 1986. Citado na página 23.

ANBIMA. *Estrutura a Termo das Taxas de Juros Estimada e Inflação Implícita Metodologia*. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.

ARAMONTE, S.; LEE, S. J.; STEBUNOV, V. Risk taking and low longer-term interest rates: Evidence from the u.s. syndicated term loan market. *Journal of Banking & Finance*, v. 138, 2022. ISSN 0378-4266. Citado na página 12.

B3. *Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia*. 2022. <[https://www.b3.com.br/pt\\_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm](https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm)>. Disponível em: <[https://www.b3.com.br/pt\\_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm](https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm)>. Acesso em: 17 julho 2022. Citado na página 21.

BAKER, J.; LOS, C. A. Liquidity and simulation a survey of liquidity measures using traderex. *SSRN Electronic Journal*, 2014. Citado na página 24.

Banco Central do Brasil, B. *Circular N<sup>o</sup> 3.082*. 2002. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 23.

Banco Central do Brasil, B. *Circular N<sup>o</sup> 3.876*. 2018. Citado na página 15.

Banco Central do Brasil, B. *Sistema Financeiro Nacional*. 2022. <<https://www.bcb.gov.br/estabilidadefinanceira/sfn>>. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/estabilidadefinanceira/sfn>>. Acesso em: 27 julho 2022. Citado na página 14.

BEUTLER, T. et al. The impact of interest rate risk on bank lending. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 115, p. 105797, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.

BIERWAG, G. O. Immunization, duration, and the term structure of interest rates. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge University Press, v. 12, n. 5, p. 725–742, 1977. ISSN 00221090, 17566916. Citado na página 13.

- BIERWAG, G. O.; KAUFMAN, G. G.; TOEVS, A. Duration: Its development and use in bond portfolio management. *Financial Analysts Journal*, CFA Institute, v. 39, n. 4, p. 15–35, 1983. ISSN 0015198X. Citado na página 13.
- Brasil Bolsa Balcão, B. *CONTRATO FUTURO DE TAXA MÉDIA DE DEPÓSITOS INTERFINANCEIROS DE UM DIA (DI1)*. 2022. Citado na página 21.
- Brasil Bolsa Balcão, B. *Manual de Curvas*. 2022. Citado na página 18.
- CALDEIRA, J.; MOURA, G. V.; PORTUGAL, M. S. Efficient yield curve estimation and forecasting in brazil. *Revista Economia, January/April*, 2010. Citado na página 19.
- CALDEIRA, J. F. Estimação da estrutura a termo da curva de juros no brasil através de modelos paramétricos e não paramétricos. *Análise Econômica*, v. 29, n. 55, jul. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. Bond portfolio optimization using dynamic factor models. *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 37, p. 128–158, 2016. Citado na página 32.
- CHI, G.; CHI, F. Optimization model of asset-liability portfolio considering duration perfect matching. *2007 IEEE International Conference on Control and Automation*, 2007. Citado na página 25.
- CHOUDHRY, M.; CARTER, D. *Bank Asset and Liability Management: Strategy, Trading, Analysis*. [S.l.]: Wiley, 2007. (Wiley Finance). ISBN 9780470821350. Citado na página 9.
- Comitê de Pronunciamentos Contábeis. *Pronunciamento Técnico CPC 46*. 2012. Citado na página 23.
- Comitê de Pronunciamentos Contábeis. *Pronunciamento Técnico CPC 48*. 2016. Citado na página 17.
- CORNUÉJOLS, G.; PEÑA, J.; TÛTÛNCÛ, R. *Optimization Methods in Finance*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. ISBN 9781107056749. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 33.
- DEGUEST, R. et al. Bond portfolio optimization in the presence of duration constraints. *The Journal of Fixed Income*, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 28, n. 1, p. 6–26, 2018. Citado na página 14.
- DEMSETZ, H. The cost of transacting. *The Quarterly Journal of Economics*, Oxford University Press, v. 82, n. 1, p. 33–53, 1968. Citado na página 23.
- DÍAZ, A.; GONZÁLEZ, M. de la O.; NAVARRO, E. Bond portfolio immunization, immunization risk and idiosyncratic risk. *Revista de Economía Financiera*, n. 16, 2008. Citado na página 13.
- DIEBOLD, F. X.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, v. 130, n. 2, p. 337–364, February 2006. Citado na página 19.
- DRECHSLER, I.; SAVOV, A.; SCHNABL, P. Banking on deposits: Maturity transformation without interest rate risk. *The Journal of Finance*, v. 76, n. 3, p. 1091–1143, 2021. Citado na página 12.

- FABOZZI, F.; MANN, S. *The Handbook of Fixed Income Securities, Eighth Edition*. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2011. ISBN 9780071768474. Citado na página 22.
- FARAHVASH, P. *Asset-Liability and Liquidity Management*. [S.l.]: Wiley, 2020. ISBN 9781119701880. Citado 3 vezes nas páginas 10, 13 e 23.
- FERNANDEZ, P.; APELLÁNIZ, E. de; ACÍN, J. F. Survey: Market risk premium and risk-free rate used for 81 countries in 2020. *IESE Business School Working Paper No. WP-1244-E*, 2020. Citado na página 20.
- FISHER, L.; WEIL, R. L. Coping with the risk of interest-rate fluctuations: Returns to bondholders from naïve and optimal strategies. *The Journal of Business*, University of Chicago Press, v. 44, n. 4, p. 408–431, 1971. Citado 6 vezes nas páginas 9, 13, 23, 26, 31 e 46.
- FONG, H. G.; VASICEK, O. A. A risk minimizing strategy for portfolio immunization. *Journal of Finance*, v. 39, n. 5, p. 1541–46, 1984. Citado na página 13.
- FREITAS, M. R. d. Carteiras de renda fixa: imunização, risco de imunização e risco idiossincrático. 2011. Citado na página 25.
- GABRIELSEN, A.; MARZO, M.; ZAGAGLIA, P. Measuring market liquidity: An introductory survey. *SSRN Electronic Journal*, 12 2011. Citado na página 24.
- GELBCKE, E. R. et al. *Manual de contabilidade societária: aplicável a todas as sociedades de acordo com as normas internacionais e do CPC*. [S.l.]: Atlas, 2018. Citado na página 17.
- GOLUB, B.; TILMAN, L. Measuring yield curve risk using principal components, analysis, value, at risk, and key rate durations. *The Journal of Portfolio Management*, 1997. Citado na página 13.
- GOMEZ, M. et al. Banks' exposure to interest rate risk and the transmission of monetary policy. *Journal of Monetary Economics*, Elsevier, v. 117, p. 543–570, 2021. Citado na página 14.
- HO, T. S. Key rate durations: Measures of interest rate risks. *The Journal of Fixed Income*, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 2, n. 2, p. 29–44, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 13.
- HOFFMANN, P. et al. Who Bears Interest Rate Risk? *The Review of Financial Studies*, v. 32, n. 8, p. 2921–2954, 11 2018. Citado na página 14.
- HUAN, X.; PARBONETTI, A. Financial derivatives and bank risk: evidence from eighteen developed markets. *Accounting and Business Research*, Routledge, v. 49, n. 7, p. 847–874, 2019. Citado na página 21.
- HULL, J. *Options, Futures, and Other Derivatives*. [S.l.]: Pearson, 2018. ISBN 9780134472089. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 22.
- JENSEN, P.; BARD, J. *Operations Research Models and Methods*. [S.l.]: Wiley, 2002. ISBN 9780471380047. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 29.

- JIN, J. et al. The hedging effect of green bonds on carbon market risk. *International Review of Financial Analysis*, v. 71, p. 101509, 2020. ISSN 1057-5219. Citado na página 21.
- KEFFALA, M. R. How using derivative instruments and purposes affects performance of islamic banks? evidence from camels approach. *Global Finance Journal*, v. 50, p. 100520, 2021. ISSN 1044-0283. Citado na página 21.
- KOLB, R. W.; GAY, G. D. Immunizing bond portfolios with interest rate futures. *Financial Management*, [Financial Management Association International, Wiley], v. 11, n. 2, p. 81–89, 1982. ISSN 00463892, 1755053X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3665028>>. Citado na página 13.
- KUNZLER, M. S. Aplicação da análise de componentes principais na estrutura a termo da taxa de juros, com ênfase em imunização de carteiras de renda fixa. 2019. Citado 4 vezes nas páginas 9, 10, 12 e 14.
- LAPSHIN, V. A nonparametric approach to bond portfolio immunization. *Mathematics*, MDPI, v. 7, n. 11, p. 1121, 2019. Citado na página 14.
- LAURINI, M. P.; MOURA, M. Constrained smoothing B-splines for the term structure of interest rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 46, n. 2, p. 339–350, April 2010. Citado na página 19.
- LEITE, G. B. D. J. A.; TEIXEIRA, E. E. Determinantes da adoção do hedge accounting pelos bancos brasileiros. *Revista Catarinense Da Ciência Contábil*, 2023. Citado na página 17.
- LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J. Common factors affecting bond returns. *Journal of fixed income*, v. 1, n. 1, p. 54–61, 1991. Citado 6 vezes nas páginas 9, 13, 14, 20, 32 e 40.
- MACAULAY, F. *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1859*. [S.l.]: National Bureau of Economic Research, 1938. (Publications of the National Bureau of Economic Research). Citado na página 22.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 25.
- MARSH, T. A.; ROCK, K. Exchange listing and liquidity: A comparison of the american stock exchange with the nasdaq national market system. American Stock Exchange, 1986. Citado na página 24.
- MARTELLINI, L.; PRIAULET, P.; PRIAULET, S. *Fixed-Income Securities: Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*. [S.l.]: Wiley, 2005. (The Wiley Finance Series). ISBN 9780470868225. Citado na página 9.
- MCCULLOCH, J. H. Measuring the term structure of interest rates. *the Journal of Business*, JSTOR, v. 44, n. 1, p. 19–31, 1971. Citado na página 19.
- MCCULLOCH, J. H. The tax-adjusted yield curve. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 30, n. 3, p. 811–830, 1975. Citado na página 19.

- MEIRELLES, S. K.; FERNANDES, M. Estratégias de imunização de carteiras de renda fixa no brasil. *Brazilian Review of Finance*, v. 16, n. 2, p. 179–219, 2018. Citado na página 14.
- NELSON, C.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, v. 60, n. 4, p. 473–89, 1987. Citado na página 19.
- NETO, J. M. V. Hedge simultâneo de valor presente e valor futuro. *GV INVEST*, 2018. Citado na página 13.
- OLIVEIRA, A. D. de et al. A multistage stochastic programming asset-liability management model: An application to the brazilian pension fund industry. *Optimization and Engineering*, Springer, v. 18, n. 2, p. 349–368, 2017. Citado na página 25.
- ORTOBELLI, S. et al. Portfolio selection strategy for fixed income markets with immunization on average. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 260, n. 1, p. 395–415, 2018. Citado na página 25.
- OWUSU, F. B.; ALHASSAN, A. L. Asset-liability management and bank profitability: Statistical cost accounting analysis from an emerging market. *International Journal of Finance & Economics*, v. 26, n. 1, p. 1488–1502, 2021. Citado na página 12.
- PAN, J.; XIAO, Q. Optimal asset–liability management with liquidity constraints and stochastic interest rates in the expected utility framework. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 317, p. 371–387, 2017. Citado na página 24.
- REDINGTON, F. M. Review of the principles of life-office valuations. *Journal of the Institute of Actuaries (1886-1994)*, Cambridge University Press, v. 78, n. 3, p. 286–340, 1952. Citado 5 vezes nas páginas 9, 13, 25, 26 e 46.
- SANT’ANNA, L. R.; FILOMENA, T. P.; BORENSTEIN, D. Index tracking com controle do número de ativos. *Revista Brasileira de Finanças*, 2014. Citado na página 32.
- SANT’ANNA, L. R. et al. Index tracking with controlled number of assets using a hybrid heuristic combining genetic algorithm and non-linear programming. *Annals of Operations Research*, v. 258, n. 2, p. 849–867, November 2017. Citado na página 32.
- SEN, I. Regulatory limits to risk management. *The Review of Financial Studies*, 2019. Citado na página 17.
- SHEN, Y.; WEI, J.; ZHAO, Q. Mean–variance asset–liability management problem under non-markovian regime-switching models. *Applied Mathematics & Optimization*, Springer US, Sep 2018. Citado na página 25.
- SHIU, E. S. Immunization of multiple liabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, v. 7, n. 4, p. 219–224, 1988. Citado na página 25.
- SILVA, A. L. P.; HOLLAND, M. Liquidez de mercado, curva de di futuro e a taxa de juros dos títulos públicos prefixados: Evidências para o brasil. *41º Encontro Nacional de Economia-Anpec*, 2013. Citado na página 24.
- SILVA, F. M. D. et al. Liquidez dos contratos futuros de milho negociados na bm&fbovespa. *Revista de Administração e Negócios da Amazônia*, v. 9, n. 1, p. 26–44, 2017. Citado na página 24.

- SIMÕES, C.; OLIVEIRA, L.; BRAVO, J. M. Immunization strategies for funding multiple inflation-linked retirement income benefits. *Risks*, MDPI, v. 9, n. 4, p. 60, 2021. Citado na página 14.
- STERN, J. M. et al. *Otimizacao e Processos Estocasticos Aplicados a Economia e Financas*. [S.l.: s.n.], 2020. Citado na página 25.
- SVENSSON, L. E. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992 - 1994. n. 4871, set. 1994. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- TAVARES, J.; CIA, J. S. Nível de adequação dos bancos brasileiros a informações publicadas sobre hedge accounting. *Novas perspectivas na pesquisa contábil*, 2014. Citado na página 17.
- TITOVA, Y.; PENIKAS, H.; GOMAYUN, N. The impact of hedging and trading derivatives on value, performance and risk of european banks. *Empirical Economics*, 2020. Citado na página 21.
- TONIN, J. M.; BRAGA, M. J.; COELHO, A. B. Efetividade de hedge do milho com contratos futuros da bm&f: uma aplicação para a região de maringá (pr). *Revista de Economia*, v. 35, n. 1, 2009. Citado na página 29.
- VARGA, G.; VALLI, M. Movimentos da estrutura a termo brasileira e imunização (term structure movements and imunization). *Economia Aplicada*, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 32.
- VIEIRA, E. B. F.; FILOMENA, T. P. Liquidity constraints for portfolio selection based on financial volume. *Computational Economics*, Springer, v. 56, n. 4, p. 1055–1077, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 24.
- VIEIRA, E. B. F. et al. Liquidity-constrained index tracking optimization models. *Annals of Operations Research*, Springer, p. 1–46, 2021. Citado na página 24.
- VUILLEMEY, G. Bank interest rate risk management. *Management Science*, 2019. Citado na página 13.
- WEISKOPF, M. Imunização de carteiras de renda fixa. 2003. Citado na página 25.
- ZHU, W. et al. Incorporating convexity in bond portfolio immunization using multifactor model: A semidefinite programming approach. *Journal of the operations research society of china*, Springer, v. 6, n. 1, p. 3–23, 2018. Citado na página 14.

# Anexos

Tabela 20 – Nomenclatura das carteiras testadas

Formato	Valor Nominal Inicial	Valor Nominal Final	Restrição	Nome
Barbell	100	100	Livre	Barbell_100_100_Livre
Ladder	5	15	Livre	Ladder_5_15_Livre
Ladder	10	10	Livre	Ladder_10_10_Livre
Ladder	15	5	Livre	Ladder_15_5_Livre
Barbell	100	100	Liquidez	Barbell_100_100_Liquidez
Ladder	5	15	Liquidez	Ladder_5_15_Liquidez
Ladder	10	10	Liquidez	Ladder_10_10_Liquidez
Ladder	15	5	Liquidez	Ladder_15_5_Liquidez
Barbell	100	100	Liquidez_Contratos_3	Barbell_100_100_Liquidez_Contratos_3
Ladder	5	15	Liquidez_Contratos_3	Ladder_5_15_Liquidez_Contratos_3
Ladder	10	10	Liquidez_Contratos_3	Ladder_10_10_Liquidez_Contratos_3
Ladder	15	5	Liquidez_Contratos_3	Ladder_15_5_Liquidez_Contratos_3
Barbell	100	100	Liquidez_Contratos_5	Barbell_100_100_Liquidez_Contratos_5
Ladder	5	15	Liquidez_Contratos_5	Ladder_5_15_Liquidez_Contratos_5
Ladder	10	10	Liquidez_Contratos_5	Ladder_10_10_Liquidez_Contratos_5
Ladder	15	5	Liquidez_Contratos_5	Ladder_15_5_Liquidez_Contratos_5
Barbell	100	100	Liquidez_Contratos_7	Barbell_100_100_Liquidez_Contratos_7
Ladder	5	15	Liquidez_Contratos_7	Ladder_5_15_Liquidez_Contratos_7
Ladder	10	10	Liquidez_Contratos_7	Ladder_10_10_Liquidez_Contratos_7
Ladder	15	5	Liquidez_Contratos_7	Ladder_15_5_Liquidez_Contratos_7

**Fonte:** Elaborado pelo autor.