UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

"Estudo Analítico de um Modelo em Turbulência"

por

Roberto Carlos Rodríguez Muguerza

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Carolina Cardoso Manica
Orientadora

Profa. Dra. Manuela Longoni de Castro
Co-orientadora

Porto Alegre, Março de 2010.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Rodríguez Mugerza, Roberto Carlos

"Estudo Analítico de um Modelo em Turbulência" / Roberto Carlos Rodríguez Muguerza.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2010.

49 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2010.
Orientadora: Cardoso Manica, Carolina; Co-orientadora: Longoni de Castro, Manuela

Dissertação: Análise Funcional
Equações de Navier-Stokes, Fluidos Incompressíveis, Modelos da Ordem Zero

"Estudo Analítico de um Modelo em Turbulência"

por

Roberto Carlos Rodríguez Muguerza

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos em Dinâmica de Fluidos

Orientadora: Profa. Dra. Carolina Cardoso Manica

Co-orientadora: Profa. Dra. Manuela Longoni de Castro

Banca examinadora:

Professor Dr. Jorge Hugo Silvestrini
FENG / PUC

Professor Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
PPGMAT / UFRGS

Professor Dr. Paulo Ricardo de Avila Zingano
PPGMAP / UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em 04/03/2010.

Waldir Leite Roque
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus principalmente por todas as coisas que está me permitindo alcançar na minha vida, a minha mãe Elena e meus avós Luis e Elena, pela força e o apoio constante, às professoras Carolina e Manuela pela orientação, pela paciência na realização deste trabalho e pelos conselhos os quais contribuíram e contribuirão para meu crescimento profissional e pessoal, ao PPGMAP-UFRGS por ter me dado a oportunidade de realizar meus estudos de mestrado e a todos meus amigos e professores pelo apoio moral e acadêmico.

Sumário

RESUMO

Neste trabalho estuda-se analiticamente um modelo de turbulência com condições de fronteira 2π-periódicas. Para isso, considera-se uma família de modelos de Simulação em Grandes Escalas (LES) que é baseada na deconvolução aproximada de Van Cittert, onde especifica-se o filtro diferencial e suas propriedades. Para conhecer melhor os modelos de fecho, especifica-se os requisitos para um modelo de fecho ser satisfatório. Define-se uma norma e mostra-se que esta é equivalente à norma L^2, sendo usada no estudo da estabilidade (solução satisfazendo uma desigualdade de energia) e da existência de soluções fracas do modelo. Para mostrar a existência de soluções, além de usar a norma definida neste trabalho, usa-se o método de Faedo-Galerkin e a propriedade antissimétrica pertinente ao termo não linear do modelo.

ABSTRACT

In this work we study analytically a model of turbulence with 2π-periodic boundary conditions. To that end, we consider a family of Large Eddy Simulation (LES) models based on the van Cittert approximate deconvolution procedure, and we also specify a differential filter and its properties. To learn more about the closure models, we specify the requirements of a satisfactory closure model. We define a norm which is shown to be equivalent to the L^2-norm and is used to study stability (solutions satisfy an energy inequality) and existence of weak solutions of the model. To show the existence of solutions, we use the Faedo-Galerkin method and the model's nonlinear term skew-symmetry property.

INTRODUÇÃO

Movimento turbulento ou turbulência em fluidos é um fenômeno familiar de nosso dia a dia. No entanto é algo extremamente difícil para definir quantitativamente e, além disso, é considerado um dos problemas mais difíceis da física moderna. Na maioria dos casos, a melhor forma de definir turbulência é mencionando algumas de suas características: fluxo caótico instável, aparentemente aleatório, com movimentos do fluido distribuídos sobre uma ampla faixa de escalas de comprimento e de tempo. A complicada estrutura espaço-tempo de velocidades turbulentas torna impossível a sua descrição analítica. O grande número de graus de liberdade e a ampla faixa de escalas em fluxos turbulentos dificultam a análise numérica, somando-se a isso a velocidade e a capacidade de memória dos computadores na atualidade. Do comportamento efetivamente aleatório de fluxos turbulentos é natural tentar fazer uma formulação estatística. Esta é a abordagem clássica da teoria de turbulência. A ideia é decompor o espaço de velocidade turbulenta em uma parte média e uma parte flutuante, na tentativa de extrair as quantidades médias fisicamente relevantes. A "média" nesta tentativa pode ser espacial ou temporal.

É sabido que, desde o meteorologista Richardson, esquemas numéricos permitem resolver de maneira determinística as equações do movimento, começando com um estado inicial dado e com condições de fronteira estipuladas. Estes são baseados no balanço de momento e de energia. No entanto, uma resolução completa, Simulação Numérica Direta (DNS), requer poder de computação formidável e é somente possível para um baixo número de Reynolds. Essas simulações numéricas diretas podem envolver um número de cálculos muito grande. Geralmente, configurações industriais, naturais ou experimentais envolvem números de Reynolds que são grandes demais para permitir simulações diretas, e uma boa alternativa é a Simulação em Grandes Escalas (Large Eddy Simulation-LES), ver [35], onde as flutuações turbulentas de pequena escala são modeladas via hipóteses de viscosidade turbulenta e de difusividade. A história de LES começou no início da década de 1960 com o famoso modelo de Smagorinsky.

Smagorinsky, em seus estudos meteorológicos, procurava representar efeitos de pequena escala de turbulência, em duas dimensões, baseado nas grandes escalas em efeito cascata, de acordo com os mecanismos descritos por Rocha em 1926 e formalizados pelo famoso matemático Kolmogorov em 1941. É interessante notar que o modelo de Smagorinsky, apesar do sucesso em aplicações a fluxo industrial, não foi o esperado para modelos atmosféricos, porque ele dissipa demais o movimento das grandes escalas. Um pouco depois, no ano 1970 o físico teórico Kraichnan desenvolveu o importante conceito de viscosidade turbulenta espectral, que nos permite ir além da suposição de separação de escalas inerente no conceito típico de viscosidade turbulenta de Smagorinsky. Desde então, a história de LES vem se desenvolvendo seguindo basicamente duas escolas: Stanford-Torino, onde uma versão dinâmica do modelo de Smagorinsky foi desenvolvida; e Grenoble, que seguiu os passos de Kraichnan. Logo os pesquisadores, incluindo pessoas da indústria, ao redor do mundo, ficaram interessados nessas técnicas, estando cientes dos limites dos métodos de modelagem clássica baseados na média das equações do movimento,[26].

LES é atualmente uma das mais promissoras e conhecidas aproximações para modelar turbulência. Em LES, procura-se calcular somente as grandes escalas do espaço do fluxo enquanto a influência das pequenas escalas é modelada em termos das grandes escalas. As grandes estruturas dos fluxos são definidas por uma média espacial do campo do fluxo. Este processo é chamado filtragem e existem muitos filtros diferentes que podem ser usados para obter a média em LES. Para maiores detalhes ver Sagaut [35], John [18] e Berselli, Iliescu e Layton [4]. Um dos filtros mais conhecidos e um dos mais analisados é o filtro Gaussiano.

Na simulação numérica de fluidos turbulentos, procuramos aproximar adequadamente a velocidade pontual do fluido através de uma média [30]. A ideia de LES é decompor a velocidade em uma média espacial local e uma flutuação sobre essa média. A média é definida por filtragem ou molificação (convolução com uma identidade apropriada). Acredita-se que isto seja possível baseado na ideia de que como as flutuações têm caráter aleatório, seus efeitos sobre a média podem ser modelados satisfatoriamente [24].

Tomando a média da equação de Navier-Stokes origina-se o problema de modelagem de fecho. Para ser mais específico, seja $(\mathbf{u}, p)$ a velocidade e a pressão do fluido, que satisfaz a equação de Navier-Stokes para fluido incompressível:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

Aplicando o filtro que, sob condições periódicas, comuta com a diferenciação, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\, \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}\,) - \nu\Delta\overline{\mathbf{u}} + \nabla\,\overline{p} &= \overline{\mathbf{f}} \\ \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned}$$

A equação obtida será chamada de equação de Navier-Stokes não fechada. Como a equação de Navier-Stokes não fechada é mais complicada do que a própria equação de Navier-Stokes, é necessário obter uma equação em termos de $\overline{\mathbf{u}}$, ou seja, substituir $\overline{\mathbf{u}\,\mathbf{u}}$ por um tensor dependendo só de $\overline{\mathbf{u}}$.

Há vários modelos de fecho usados em LES, ver Sagaut [35], John [18], Lesieur, Metais e Comte [27] e Berselli, Iliescu e Layton [4]. Entre os mais comuns modelos LES apresentados na literatura estão os modelos dinâmicos de Smagorinsky, modelos do tipo de pequenas escalas (por exemplo: Modelo de Smagorinsky Dinâmico [14], Modelo Misto Dinâmico [31, 41], Modelo Dinâmico Lagrangeano [29], Modelos Dinâmico de Dois Parâmetros [36]) e o de similitude de escala, introduzido por Bardina, Ferziger e Reynolds [3] explicado por Sagaut [35].

A operação média $\mathbf{u} \to \overline{\mathbf{u}}$ é formalmente denotada por G, definida como: $\overline{\mathbf{u}} := G\mathbf{u}$. No caso mais interessante G não é inversível. Não obstante, o problema do fecho é resolvido uma vez que o problema de deconvolução aproximada (ação de aproximar a G^{-1}) é resolvido. Neste trabalho consideraremos o modelo de fecho estudado por W. Layton e R. Lewandowski em [20], utilizando o método de Van Cittert para deconvolução aproximada.

A aproximação de Van Cittert para G^{-1} pode ser desenvolvida de várias maneiras. A mais simples é encontrar uma aproximação para $\mathbf{u}$ por extrapolação das escalas resolvidas de $\overline{\mathbf{u}}$ às de $\mathbf{u}$. O método de Van Cittert de deconvolução aproximada (ver [5]) constrói uma família G_N de inversas para G. Denota-se por $G_N\overline{\mathbf{u}}$ o N-ésimo grau de precisão da inversa aproximada.

Este trabalho está dividido em 4 capítulos e é apresentado como segue: no capítulo 1 apresenta-se a notação e as preliminares do trabalho, onde são especificados os espaços de funções, definições e algumas propriedades importantes que serão usadas ao longo do trabalho. No capítulo 2 considera-se a formulação do problema, onde pode-se observar como chega-se ao problema do fecho. Para resolver este tipo de problema existem os chamados modelos de fecho e para conhecer algo desses modelos especifica-se os requisitos para um modelo de fecho ser satisfatório. No capítulo 3 estuda-se o operador G e suas propriedades. Além disso, realiza-se um pequeno estudo das propriedades do filtro Gaussiano, do filtro diferencial e da relação que existe entre estes filtros. No capítulo 4 define-se a família G_N de operadores, descreve-se o método de Van Cittert de deconvolução aproximada e especifica-se as propriedades do operador G_N. É neste capítulo 4 que é definida uma norma em função de G_N, equivalente à norma usual de L^2, a qual é usada neste trabalho para o estudo da estabilidade (solução satisfazendo uma desigualdade de energia) e na dedução da existência de soluções fracas do modelo. Esta norma torna as desigualdades mais diretas, facilitando bastante o estudo. No capítulo 5 são dadas as conclusões do trabalho.

1 NOTAÇÃO E PRELIMINARES

Neste capítulo são definidos os espaços de funções e definições que serão utilizados ao longo do trabalho, tendo como referência R. A. Adams [1], E. C. Lawrence [19].

1.1 Espaços de Funções

Seja $\Omega = (0, 2\pi)^3$; assim definem-se os seguintes espaços:

$\mathcal{C}(\Omega) := \{\, \mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{u}$ é contínua $\}$,
$\mathcal{C}(\overline{\Omega}) := \{\, \mathbf{u} \in \mathcal{C}(\Omega) : \mathbf{u}$ é uniformemente contínua $\}$,
$\mathcal{C}^k(\Omega) := \{\, \mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{u}$ é k-vezes continuamente diferenciável $\}$,
$\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \{\, \mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{u}$ é infinitamente diferenciável $\}$,
$\mathcal{D}(\Omega) := \left\{\, \Phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \nabla \cdot \Phi = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_\Omega \Phi \, d\mathbf{x} = 0 \,\right\}$,
$\mathcal{D}(\Omega_T) := \{\, \Phi \in \mathcal{C}^\infty([0,T) \times \Omega) :$ para $t \in [0,T), \Phi(\cdot, t)$ é periódica, com periodo 2π e tem suporte compacto na variável $t \in [0,T) \,\}$.
O produto interno usual em $L^2(\Omega)$ é denotado por $(\cdot, \cdot)$ e é dado por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

A norma $L^2(\Omega)$ é denotada por $||\cdot||$, e é definida como

$$||\mathbf{u}|| := \left[\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$L^2_0(\Omega) := \left\{\, \mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \text{ e } \int_\Omega \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0 \,\right\}$.

Uma função $\mathbf{u}$ tem derivadas fracas em $L^p(\Omega)$, se e somente se

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot D^\alpha \Phi \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \mathbf{u} \cdot \Phi \, d\mathbf{x} \quad \forall \Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

$W^{k,p} := \{\mathbf{u} \in L^p(\Omega) : D^\alpha \mathbf{u} \in L^p(\Omega)$ para $|\alpha| \leq k,$ no sentido fraco$\}$ é um espaço de Sobolev.

$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} (\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \mathbf{u} \, , \, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \mathbf{v}).$$

A norma de $H^k(\Omega)$ é denotada por $|| \cdot ||_k$ e é definida por

$$||\mathbf{u}||_k := \left[\sum_{|\alpha| \leq k} || \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \mathbf{u} ||^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\overline{H}^k(\Omega) := \left\{ \mathbf{u} \in H^k(\Omega) : \int_\Omega \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0 \right\}$

$H(\Omega) := \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} \, = 0 \text{ em } \Omega \}$

$H_0^1(\Omega) := \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega) : \nabla \mathbf{u} \, \in L^2(\Omega) \text{ e } \gamma_0 \mathbf{u} = 0 \, \}$, onde $\gamma_0 \mathbf{u}$ é a restrição de $\mathbf{u}$ a $\partial \Omega$.

$V(\Omega) := \{ \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} \, = 0 \text{ em } \Omega \}$.

Se $\mathbf{f}$ é um elemento do espaço dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$, sua norma é definida como

$$||\mathbf{f}||_{-1} = \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(\mathbf{f}, \mathbf{v})|}{||\nabla \mathbf{v}||}. \tag{1.1}$$

Como consequência de (1.1), tem-se:

$$|(\mathbf{f}, \mathbf{v})| \, \leq \, ||\mathbf{f}||_{-1} \, ||\nabla \mathbf{v}||, \text{ onde } \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

Se X é um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $L^2(a, b, X)$ é o espaço das (classes de) funções de L^2 de (a, b) até X, é um espaço de Banach e a norma é definida como

$$||f||_{L^2(a,b,X)} := \left[\int_a^b ||f(t)||_X^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

De forma análoga define-se $L^\infty(a, b, X)$ como o espaço das (classes de) funções mensuráveis de (a, b) até X as quais são essencialmente limitadas, é também um espaço de Banach e a norma é definida como

$$||f||_{L^\infty(a,b,X)} := \sup \text{ess}_{t \in (a,b)} ||f(t)||_X.$$

1.2 Definições e Propriedades Adicionais

No trabalho serão consideradas algumas desigualdades e definições conforme especificado a seguir.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \quad onde \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in L^2(\Omega).$$

Desigualdade de Young:

$$ab \leq \frac{\epsilon}{q}a^q + \frac{\epsilon^{-\frac{q}{p}}}{p}b^p, \qquad 1 < p,q < \infty, \quad a,b,\epsilon > 0, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Um caso particular da desigualdade de Young é a Desigualdade de Cauchy.

Desigualdade de Cauchy:

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad onde \quad a,b > 0.$$

Desigualdade de Poincaré-Friedrichs

$$||\mathbf{v}|| \leq C_{PF}(\Omega)||\nabla\mathbf{v}||, \quad \forall\, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega).$$

onde a constante $C_{PF}(\Omega)$ depende de Ω.

Desigualdade de Korn

$$||\mathbf{v}||_1 \leq C(\Omega)||\nabla\mathbf{v}||, \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^1(\Omega).$$

onde $C(\Omega)$ é uma constante que depende de Ω.

Seja $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, define-se:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} := \mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u}$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal exterior unitário.

Fórmulas de Green:

Sejam $\mathbf{u},\mathbf{w} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Então:

1. $\int_\Omega \Delta\mathbf{u}\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}}\, dS,$

2. $\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \mathbf{u} \Delta \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{u} \, dS,$

3. $\int_\Omega \mathbf{u} \Delta \mathbf{w} - \mathbf{w} \Delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{w} \, dS.$

Definição 1.2.1. *Dizemos que um operador linear $T : N_1 \to N_2$ é compacto se a imagem de qualquer conjunto limitado (de N_1) tem fecho compacto (em N_2). Ou equivalentemente, se de cada seqüência limitada (Ψ_j) em N_1, se pode obter uma subseqüência (Ψ_{j_n}) tal que $(T\Psi_{j_n})$ seja convergente em N_2.*

Teorema 1.2.1. ***(Teorema de Plancherel)***
Se $\mathbf{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então sua transformada de Fourier $\widehat{\mathbf{f}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e se satisfaz a fórmula de Plancherel:

$$\|\widehat{\mathbf{f}}\| = \|\mathbf{f}\|.$$

Teorema 1.2.2. ***(Transformada de Fourier do Gaussiano)*** *E. H. Lieb e M. Loss [28].*
Para $\lambda > 0$, denotemos por g_λ à função Gaussiano em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$g_\lambda(\mathbf{x}) = e^{-\pi\lambda|\mathbf{x}|^2}$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\widehat{g}_\lambda(\mathbf{K}) = \lambda^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\pi|\mathbf{K}|^2}{\lambda}},$$

onde $\mathbf{K}$ é a variável dual da transformada de Fourier.

Teorema 1.2.3. ***(Teorema de Rellich)*** *Moura, Carlos A. de [32].*
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Dada uma seqüência arbitraria (Ψ_j) em $H_0^k(\Omega)$, $k \geq 1$, existe uma subseqüência (Ψ_{j_n}) que converge em $H_0^{k-l}(\Omega)$, $1 \leq l \leq k$.
O resultado é válido para $H^k(\Omega)$ (em lugar de $H_0^k(\Omega)$) desde que $\partial\Omega$ tenha certa regularidade.

Definição 1.2.2. *Para $\mathbf{u} \in V(\Omega)$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)$, define-se a forma trilinear $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ como segue:*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}.$$

ou equivalentemente,

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i,j} \int_\Omega \mathbf{u}_i(D_i\mathbf{v}_j)\mathbf{w}_j \, d\mathbf{x}, \qquad i,j = 1,\ldots,d.$$

Lema 1.2.1. *A forma trilinear* $b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ *definida acima satisfaz:*

1. $b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\,b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})$,

2. $b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$,

onde $\mathbf{u} \in V(\Omega)$ *e* $\mathbf{v},\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração.

Prova de (1):

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \sum_{i,j} \int_\Omega \mathbf{u}_i(D_i\mathbf{v}_j)\mathbf{w}_j \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j} \left[\mathbf{u}_i\mathbf{v}_j\mathbf{w}_j|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \mathbf{v}_j D_i(\mathbf{u}_i\mathbf{w}_j)\, d\mathbf{x} \right] \\ &= -\sum_{i,j} \int_\Omega [\, \mathbf{v}_j(D_i\mathbf{u}_i)\mathbf{w}_j + \mathbf{u}_i(D_i\mathbf{w}_j)\mathbf{v}_j \,] \; d\mathbf{x} \\ &= -\sum_{i,j} \int_\Omega \mathbf{u}_i(D_i\mathbf{w}_j)\mathbf{v}_j \, d\mathbf{x} \\ &= -b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Prova de (2): Consequência direta de (1), com $\mathbf{w} = \mathbf{v}$. □

2 O PROBLEMA DO FECHO

2.1 Formulação do Problema

Existem muitos operadores comumente chamados de filtros que são usados para obter a média em LES, para ter uma idéia maior disto ver Sagaut [35], John [18] e Berselli, Iliescu e Layton [4]. Um dos filtros mais conhecidos e um dos mais analisados é o filtro Gaussiano. Seja $\mathbf{u}$ a função a ser filtrada e seja

$$g_{\widetilde{\delta}} = \left(\frac{6}{\widetilde{\delta}^2 \pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{6}{\widetilde{\delta}^2}|\mathbf{x}|^2} \tag{2.1}$$

a função filtro Gaussiano, onde $|\mathbf{x}|$ é a norma Euclidiana de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. A função filtrada $\widetilde{\mathbf{u}}$ é definida através da convolução de $\mathbf{u}$ com $g_{\widetilde{\delta}}$ como segue: $\widetilde{\mathbf{u}} = g_{\widetilde{\delta}} * \mathbf{u}$ ou, equivalentemente, $\widetilde{\mathbf{u}} = \left(\frac{6}{\widetilde{\delta}^2 \pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int e^{-\frac{6}{\widetilde{\delta}^2}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$, onde o parâmetro $\widetilde{\delta}$ é chamado largura do filtro, para maiores detalhes ver [8].

Para fixar as idéias neste trabalho, especifica-se um filtro diferencial, ver [12], [25] e [33], associado com o tamanho da escala $\delta > 0$, introduzido em [11] e [12] e relacionado à regularização de Yoshida (algumas vezes chamado filtro de Helmholz na literatura dos modelos alfa, por exemplo Cheskidov, Holm, Olson e Titi [7]). Definimos a operação de filtragem como a solução do problema de Poisson. Dada uma função ϕ, existe $\overline{\phi}$, a única solução de

$$-\delta^2 \Delta \overline{\phi} + \overline{\phi} \;=\; \phi \qquad em \;\; \Omega, \tag{2.2}$$

com condições de fronteira periódicas (a prova da unicidade é feita usando a representação por série de Fourier e a unicidade da série no espaço L^2).

Em [42], foi discutido que o filtro diferencial $\overline{\mathbf{u}}$ (o qual também é chamado filtro exponencial em [42]) tem algumas vantagens em relação ao filtro Gaussiano $\widetilde{\mathbf{u}}$, especialmente uma representação mais simples das aqui chamadas pequenas escalas, $\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}$, em comparação com $\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}$, ver [8]. O uso do filtro diferencial para cálculos em LES em domínios 3D é recomendado em [33]. Existe uma relação entre o filtro Gaussiano e o filtro diferencial, a qual será mostrada na seção 3.

Tomando a média da equação de Navier-Stokes origina-se o problema de modelagem de fecho. Para ser mais específico, seja $(\mathbf{u}, p)$ a velocidade e a pressão do fluido, que satisfaz a equação de Navier-Stokes para fluido incompressível

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T) \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $\Omega = (0, 2\pi)^3$, $\mathbf{f}$ é a força externa e $\nu > 0$ é a viscosidade cinemática.

O sistema (2.3) está sujeito a condições de fronteira periódicas, com condição inicial (velocidade inicial) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, com a condição usual de média zero $\int_\Omega \mathbf{u} = \int_\Omega \mathbf{f} = \mathbf{0}$ e com uma condição de normalização da pressão, $\int_\Omega p = 0$, a qual é necessária para a unicidade da pressão.

Aplicando o filtro em (2.3) que, sob condições periódicas comuta com a diferenciação, conforme veremos na seção 3.3, tem-se

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\, \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} \,) - \nu \Delta \overline{\mathbf{u}} + \nabla \overline{p} &= \overline{\mathbf{f}} \\ \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Podemos notar que a equação (2.4) esta dada em termos da função filtrada ou filtro diferencial $\overline{\mathbf{u}}$ e em termos da função $\mathbf{u}$. A esse tipo de problema chamaremos de problema do fecho (conhecido também como problema de fechamento) e a equação de Navier-Stokes dada em (2.4) será chamada de equação de Navier-Stokes não fechada. Tendo a equação de Navier-Stokes não fechada o problema fica mais complicado do que a própria equação de Navier-Stokes dada em (2.3), por isso é necessário obter uma equação em termos do filtro diferencial $\overline{\mathbf{u}}$.

Somando o termo $-\nabla \cdot (\, \overline{\mathbf{u}}\, \overline{\mathbf{u}} \,)$ a ambos lados da equação (2.4), tem-se

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\, \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} \,) - \nu \Delta \overline{\mathbf{u}} + \nabla \overline{p} - \nabla \cdot (\, \overline{\mathbf{u}}\, \overline{\mathbf{u}} \,) &= \overline{\mathbf{f}} - \nabla \cdot (\, \overline{\mathbf{u}}\, \overline{\mathbf{u}} \,) \\ \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Definindo o tensor de tensão de Reynolds como:

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) := \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}}\, \overline{\mathbf{u}}\,, \tag{2.6}$$

e substituindo (2.6) na equação (2.5) obtém-se a equação de Navier-Stokes não fechada, no espaço filtrado, para $(\overline{\mathbf{u}}\,, \overline{p})$ como segue:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\,\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}\,) - \nu\Delta\overline{\mathbf{u}} + \nabla\,\overline{p} &= \overline{\mathbf{f}} - \nabla \cdot \mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \\ \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

com condições de fronteira periódicas e com condição inicial $\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \overline{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$.
Na equação (2.7) podemos ver que o lado esquerdo esta unicamente em termos de $\overline{\mathbf{u}}$ e quem ainda preserva o problema de fecho é $\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u})$. Tendo em consideração que estamos procurando obter a equação (2.7) só em termos de $\overline{\mathbf{u}}$, temos que aproximar $\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u})$ por um modelo que dependa somente de $\overline{\mathbf{u}}$.

Um modelo de fecho é o de similitude de escala, introduzido por Bardina, Ferziger e Reynolds [3] e bem explicado por Sagaut [35]:

$$\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \sim \mathcal{S}(\,\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}}\,) := \overline{\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}} - \overline{\overline{\mathbf{u}}}\,\overline{\overline{\mathbf{u}}}. \tag{2.8}$$

Os modelos de similitude de escala tipicamente são usados satisfatoriamente em simulações de fluxo turbulento [6, 35, 37, 40].
Neste trabalho, considera-se um modelo mais simples que o modelo (2.8) o qual tem uma propriedade de estabilidade forte segundo [20]. Para explicar o modelo, primeiro considera-se uma forma alternativa do termo não linear em (2.7):

$$\nabla \cdot (\,\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}\,) + \nabla \cdot \mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\,\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}\,).$$

Modelando-o por similitude de escala com

$$\nabla \cdot (\,\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}\,) \sim \nabla \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}}\right), \tag{2.9}$$

este é equivalente ao modelo de $\mathcal{R}$ dado por

$$\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \sim \widetilde{S}(\,\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}}\,) := \overline{\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}} - \overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}. \tag{2.10}$$

Chamando $(\mathbf{w}, q)$ as aproximações para $(\overline{\mathbf{u}}, \overline{p})$ resultantes de (2.9) e (2.10) então temos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t + \nabla \cdot (\,\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}}\,) - \nu\Delta\mathbf{w} + \nabla q &= \overline{\mathbf{f}} \\ \nabla \cdot \mathbf{w} &= 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

com condições de fronteira 2π-periódicas (com média zero) e com condição inicial $\mathbf{w}(\mathbf{x},0) = \overline{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$.

2.2 Requisitos para um Modelo de Fecho Satisfatório

Como existem muitos modelos SGS (Subgrid Scale) possíveis, qualquer orientação matemática, física e experimental sobre a seleção do modelo é valiosa. Muitas destas orientações vem das propriedades básicas do tensor de tensão de Reynolds, $\mathcal{R}$, e de $\overline{\mathbf{u}}$ que deveriam ser preservadas por $\mathcal{S}$ e $\mathbf{w}$, respectivamente.

Condição 1: Reversibilidade(Germano [13]).
Os tensores de tensão de Reynolds $\mathcal{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ são reversíveis, isto é,

$$\mathcal{R}(-\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2) = \mathcal{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2).$$

Assim, uma importante condição é que o tensor aproximado de Reynolds seja reversível também:

$$\mathcal{S}(-\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2) = \mathcal{S}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2).$$

Condição 2: Realizabilidade(Ghosal [15], Sagaut [35], Vreman, Geurts e Kuerter [39].)
Se o núcleo do filtro é não-negativo, i.e. $g_\delta \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$, então os tensores de tensão de Reynolds são positivos semi-definidos:

$$\xi^t \, \mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \, \xi \, \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Assim, é natural impor como uma condição algébrica sobre qualquer modelo procurado que

$$\xi^t \, \mathcal{S}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{u}}) \, \xi \, \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{2.12}$$

Realizabilidade é uma condição simples e clara, mas sua importância no modelo final não é bem entendida, já que $\nabla \cdot \mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ aparece no modelo, ao invés de $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$.

Condição 3: Energia Cinética Finita (Iliescu, John, Layton, Matthies e Tobiska [21], Layton [22]).

A desigualdade de Young para convoluções implica imediatamente que $\frac{1}{2}\int_\Omega |\,\overline{\mathbf{u}}\,|^2\,d\mathbf{x} \leq C\,\frac{1}{2}\int_\Omega |\,\mathbf{u}\,|^2\,d\mathbf{x}$, que é limitada sob a hipótese $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$. Como $\mathbf{w} \approx \overline{\mathbf{u}}$, é natural, mesmo essencial, que a energia cinética do modelo seja limitada (não exploda) em tempo finito para dados gerais do problema

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\,\mathbf{w}\,|^2\,d\mathbf{x} \leq C^* < \infty$$

onde $C^* = \mathit{constante}$ é limitada uniformemente em δ.

Há muitos modelos para os quais testes práticos têm revelado problemas de estabilidade que são tipicamente corrigidos pela adição de uma viscosidade de escala extra.

Condição 4: Uma Relação do Balanço de Energia Global.

A conexão entre a descrição matemática mais geral de escoamento de fluidos e a física de movimento do fluido é através da desigualdade de energia global para a equação de Navier-Stokes (ENS). Definamos

$$\begin{aligned} k_{ENS}(t) &:= \frac{1}{2}\int_\Omega |\,\mathbf{u}\,|^2\,d\mathbf{x}, \\ \epsilon_{ENS}(t) &:= \nu\int_\Omega |\,\nabla\mathbf{u}\,|^2\,d\mathbf{x}, \\ P_{ENS}(t) &:= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde k_{ENS} é a energia cinética da ENS, ϵ_{ENS} é a taxa de dissipação de energia da ENS e P_{ENS} é a energia potencial da ENS.

A desigualdade de energia estipula o seguinte:

$$k_{ENS}(t) + \int_0^t \epsilon_{ENS}(t')\,dt' \leq k_{ENS}(0) + \int_0^t P_{ENS}(t')\,dt'.$$

Definamos

$$\begin{aligned} k_{Modelo}(t) &:= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\,\mathbf{w}\,|^2\,d\mathbf{x} + \delta^2\int_\Omega |\,\nabla\mathbf{w}\,|^2\,d\mathbf{x}\right], \\ \epsilon_{Modelo}(t) &:= \nu\int_\Omega |\,\nabla\mathbf{w}\,|^2\,d\mathbf{x} + \nu\delta^2\int_\Omega |\,\Delta\mathbf{w}\,|^2\,d\mathbf{x}, \\ P_{Modelo}(t) &:= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde k_{Modelo}, ϵ_{Modelo} e P_{Modelo} são a energia cinética, a taxa de dissipação de energia e a energia potencial do modelo, respectivamente.

A condição necessária associada é que a solução do modelo (2.11) satisfaça o balanço de energia global relacionado,

$$k_{Modelo}(t) + \int_0^t \epsilon_{Modelo}(t')\,dt' \le k_{Modelo}(0) + \int_0^t P_{Modelo}(t')\,dt', \tag{2.13}$$

e que quando $\delta \to 0$,

$$\begin{aligned} k_{Modelo} &\to k_{ENS}, \\ \epsilon_{Modelo} &\to \epsilon_{ENS}, \\ P_{Modelo} &\to P_{ENS}. \end{aligned}$$

Condição 5: Consistência da Modelagem.

Em estudos computacionais a consistência da modelagem é freqüentemente chamada de precisão e é avaliada experimentalmente como segue. Um campo de velocidade $\mathbf{u}$ é obtido ou de uma Simulação Numérica Direta (DNS) com número moderado de Reynolds ou de dados experimentais e $\overline{\mathbf{u}}$ é calculada explicitamente. Depois, a consistência da modelagem é avaliada a posteriori calculando-se

$$||\,\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mathcal{S}(\,\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}}\,)\,||.$$

A informação sobre a consistência pode (e deveria) também ser obtida a priori. Por exemplo, para a parte flutuante de $\mathbf{u}$, a consistência do modelo poderia ser expressa pelo modelo total possuindo uma propriedade de suavidade.

Para os componentes suaves de $\mathbf{u}$ uma condição razoável é que

$$||\,\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mathcal{S}(\,\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}}\,)\,|| \le C(\mathbf{u})\,\delta^\alpha \tag{2.14}$$

para $\mathbf{u}$ suave e para $\alpha \geq 2$.

A razão da restrição $\alpha \geq 2$ é que para $\mathbf{u}$ suave, $||\,\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u})\,|| \leq C(\mathbf{u})\,\delta^2$, i.e. $\alpha = 2$ é mínima para a consistência.

A expressão de consistência (2.14) para uma solução fraca Leray-Hopf $\mathbf{u}$ da equação de Navier-Stokes é

$$\int_0^T ||\,\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mathcal{S}(\,\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}}\,)\,||^2\,dt \to 0 \quad \text{quando } \delta \to 0.$$

Condição 6: Existência de Soluções para Dados Grandes e para Tempo Longo.

Sabe-se que as soluções fracas globais no tempo, das equações de Navier-Stokes existem para dados grandes e números de Reynolds arbitrários,[9]. Um modelo para que $\mathbf{w}$ aproxime $\overline{\mathbf{u}}$ deveria no mínimo preservar essas propriedades. Na verdade, já que $\overline{\mathbf{u}}$ é mais regular ou mais suave que $\mathbf{u}$, o modelo para $\mathbf{w}$ deveria ter propriedades matemáticas mais apropriadas do que as equações de Navier-Stokes.

Condição 7: Suavidade.

Dada uma solução fraca $\mathbf{u}$ para a equação de Navier-Stokes, sua média local satisfaz:

$$\overline{\mathbf{u}} \in C^\infty(\Omega),\ \forall\, t > 0.$$

Como $\mathbf{w} \approx \overline{\mathbf{u}}$, uma condição razoável (e mínima) é que a solução $\mathbf{w}$ para o modelo seja suficientemente regular, i.e., para $\delta > 0$, que a solução fraca do modelo, $\mathbf{w}$, seja uma solução forte única globalmente, e a desigualdade de energia do modelo (2.13) seja na verdade uma igualdade de energia.

Condição 8: Consistência no Limite.

Quando $\delta \to 0$, $\overline{\mathbf{u}} \to \mathbf{u}$, tem-se uma solução fraca da equação de Navier-Stokes. Assim, duas condições mínimas para ter consistência (a segunda estudada em [23]) são:

Quando $\delta \to 0$, existe uma seqüencia δ_j tal que $\mathbf{w}(\delta_j) \to \mathbf{u}$, uma solução fraca da equação de Navier-Stokes, e se uma solução fraca $\mathbf{u}$ da equação de Navier-Stokes é suficientemente regular e é única, $\mathbf{w} \to \mathbf{u}$ quando $\delta \to 0$.

Condição 9: Verificação.

Já que a precisão de um modelo é avaliada experimentalmente checando se $||\,\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mathcal{S}(\,\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}}\,)\,||$ é pequeno, esta necessidade implica que $||\,\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{w}\,||$ seja pequeno. Em outras palavras tem-se

$$||\,\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{w}\,||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\,||\,\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mathcal{S}(\,\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}}\,)\,||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + L(\,\delta\,),$$

onde L é um termo que depende de δ que satisfaz $L(\,\delta\,) \to 0$ quando $\delta \to 0$.

Condição 10: Precisão.

Uma solução fraca $\mathbf{u}$ da equação de Navier-Stokes satisfaz

$$||\,\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{w}\,|| \to 0 \quad \text{quando } \delta \to 0.$$

Condição 11: Condições Experimentais Importantes.

Em experimentos com um mínimo de algoritmos ou modelos afins, a solução do modelo deveria mostrar: o espectro de energia $k^{-\frac{5}{3}}$, turbulência isotrópica homogênea e com k_c, o número de onda de corte, modificado apropriadamente, estatísticas de canal de fluxo turbulento e alguns funcionais turbulentos importantes dirigidos por interação de um fluxo laminar com uma fronteira complexa maior.

3 O OPERADOR G, ALGUMAS PROPRIEDADES DO GAUSSIANO E DO FILTRO DIFERENCIAL

3.1 O operador G

Definição 3.1.1. *Define-se o operador* $G := (I - \delta^2\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *como* $G\phi = \overline{\phi}$ *e a sua norma por:*

$$\| G \| := \sup_{\substack{\phi \in L^2(\Omega) \\ \phi \neq \mathbf{0}}} \frac{\| G\phi \|}{\| \phi \|}.$$

Lema 3.1.1. *O operador* G *é compacto, auto-adjunto, positivo definido e satisfaz* $|| G || \leq 1$.

Demonstração.
Consideremos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$ que satisfazem (2.2), então está garantida a existência de $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{v}} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Multiplicando (2.2) por $\overline{\mathbf{u}}$ e fazendo uso das fórmulas de Green tem-se:

$$\begin{aligned}
(-\delta^2\Delta\overline{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{v}}\,,\,\overline{\mathbf{u}}) &= (\mathbf{v}\,,\,\overline{\mathbf{u}}),\\
(\delta^2\nabla\overline{\mathbf{v}}\,,\,\nabla\overline{\mathbf{u}}) + (\overline{\mathbf{v}}\,,\,\overline{\mathbf{u}}) &= (\mathbf{v}\,,\,\overline{\mathbf{u}}),\\
(\overline{\mathbf{v}}\,,\,-\delta^2\Delta\overline{\mathbf{u}}) + (\overline{\mathbf{v}}\,,\,\overline{\mathbf{u}}) &= (\mathbf{v}\,,\,\overline{\mathbf{u}}),\\
(\overline{\mathbf{v}}\,,\,-\delta^2\Delta\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}}) &= (\mathbf{v}\,,\,\overline{\mathbf{u}}),\\
(\overline{\mathbf{v}}\,,\,\mathbf{u}) &= (\mathbf{v}\,,\,\overline{\mathbf{u}}),
\end{aligned}$$

ou seja, $(G\mathbf{v}\,,\,\mathbf{u}) = (\mathbf{v}\,,\,G\mathbf{u})$, $\forall\ \mathbf{u},\ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$, mostrando que G é um operador auto-adjunto.

Multiplicando (2.2) por $\overline{\mathbf{v}}$ e integrando sobre Ω tem-se:

$$\begin{aligned}(-\delta^2\Delta\overline{\mathbf{v}}+\overline{\mathbf{v}}\,,\,\overline{\mathbf{v}}) &= (\mathbf{v}\,,\,\overline{\mathbf{v}}),\\ (\delta^2\nabla\overline{\mathbf{v}}\,,\,\nabla\overline{\mathbf{v}})+(\overline{\mathbf{v}}\,,\,\overline{\mathbf{v}}) &= (\mathbf{v}\,,\,\overline{\mathbf{v}}),\\ \delta^2||\,\nabla\overline{\mathbf{v}}\,||^2+||\,\overline{\mathbf{v}}\,||^2 &= (\mathbf{v}\,,\,\overline{\mathbf{v}}),\end{aligned}$$

daí tem-se que $(\mathbf{v}, G\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\,,\,\overline{\mathbf{v}}) \geq 0$, com igualdade acontecendo apenas para $\mathbf{v} = 0$, provando que G é positivo definido. Além disso, de $\delta^2||\,\nabla\overline{\mathbf{v}}\,||^2 + ||\,\overline{\mathbf{v}}\,||^2 \leq \frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2 + \frac{1}{2}||\overline{\mathbf{v}}||^2$ em Ω, tem-se que $||\,\overline{\mathbf{v}}\,||^2 \leq \frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2 + \frac{1}{2}||\overline{\mathbf{v}}||^2$. Simplificando essa expressão tem-se :

$$\frac{||\,G\,\mathbf{v}\,||}{||\,\mathbf{v}\,||} = \frac{||\,\overline{\mathbf{v}}\,||}{||\,\mathbf{v}\,||} \leq 1$$

e de acordo como a Definição 3.1.1, tem-se que $||\,G\,|| \leq 1$.

Para mostrar a compacidade do operador G considera-se uma sequência limitada $\{\mathbf{w}_k\} \subset L^2(\Omega)$, assim tem-se que $\{G\mathbf{w}_k\} \subset H^2(\Omega)$ é limitada, logo pela definição 1.2.1 e usando o teorema de Rellich 1.2.3, o qual nos garante que existe $\{G\mathbf{w}_{k_j}\}$ convergente em $L^2(\Omega)$, mostra-se que G é compacto. $\square$

3.2 Motivação para o uso do Filtro Diferencial

Aqui será estudada a motivação para o uso do filtro diferencial (2.2), delineando como este pode ser obtido do filtro Gaussiano. Para $\mathbf{u}$ não periódica definida para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, define-se o filtro Gaussiano $\widetilde{\mathbf{u}}$ por

$$\widetilde{\mathbf{u}} = g_{\widetilde{\delta}} * \mathbf{u}, \tag{3.1}$$

onde

$$g_{\widetilde{\delta}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{6}{\widetilde{\delta}^2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{6}{\widetilde{\delta}^2}|\mathbf{x}|^2}. \tag{3.2}$$

Usando a linearidade da transformada de Fourier e o Teorema 1.2.2, considerando $\lambda = \frac{6}{\widetilde{\delta}^2\pi}$, tem-se que $\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}(\mathbf{K}) = e^{-\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2}$, onde $\mathbf{K}$ é a variável dual da transformada de Fourier.

Aplicando a transformada de Fourier a ambos lados da igualdade (3.1), tem-se

$$\widehat{\widehat{\mathbf{u}}}(\mathbf{K}) \;=\; \widehat{g_{\widetilde{\delta}} * \mathbf{u}}(\mathbf{K}) = \widehat{g_{\widetilde{\delta}}}(\mathbf{K})\, \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{K}). \tag{3.3}$$

Para obter a função $\widehat{\mathbf{u}}$, a primeira idéia é inverter a transformada de Fourier do Gaussiano, i.e., $\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{K}) = \widehat{g_{\widetilde{\delta}}}^{-1}(\mathbf{K})\, \widehat{\widehat{\mathbf{u}}}(\mathbf{K})$. Fazer isso implica resolver o problema diretamente, mas isso traz questionamentos, pois $\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}^{-1}(\mathbf{K}) \to \infty$ quando $|\mathbf{K}| \to 0$. Então a ideia é aproximar $\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}^{-1}(\mathbf{K})$, i.e., obter um método de deconvolução e assim obter um modelo de fecho. A propriedade do Gaussiano que é fundamental para LES é sua propriedade de suavidade e o decaimento no infinito em $\mathbf{K}$, ou seja

$$|\,\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}(\mathbf{K})\,| \to 0, \text{ quando } |\,\mathbf{K}\,| \;\to\; \infty.$$

É natural pensar na expansão de Taylor como uma aproximação para $\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}(\mathbf{K})$, dada por:

$$\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}(\mathbf{K}) = 1 - \frac{\pi^2 \widetilde{\delta}^2}{6} |\mathbf{K}|^2 + \mathcal{O}(\delta^4).$$

É possível observar que por (3.2), $|\,\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}(\mathbf{K})\,| \to 0$ quando $|\,\mathbf{K}\,| \to \infty$, mas $(\,1 - \frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2\,) \to -\infty$ quando $|\,\mathbf{K}\,| \to \infty$, de forma que a aproximação de Taylor nos leva a um modelo que não preserva o decaimento do Gaussiano. Assim é necessário pensar em outra aproximação. Para isto consideremos a seguinte definição tomada de [2]:

Definição 3.2.1. *Denota-se por $\{L,M\}$ a aproximação de Padé de função suficientemente suave ou regular, $A(\mathbf{x})$, por:*

$$\{L, M\} := \frac{P_L(\mathbf{x})}{Q_M(\mathbf{x})},$$

onde $P_L(\mathbf{x})$ é um polinômio de grau no máximo L e $Q_M(\mathbf{x})$ é um polinômio de grau no máximo M, sendo os coeficientes de $P_L(\mathbf{x})$ e $Q_M(\mathbf{x})$ determinados através da equação:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, \mathbf{x}^j - \frac{P_L(\mathbf{x})}{Q_M(\mathbf{x})} = \mathcal{O}(\mathbf{x}^{L+M+1}),$$

onde a_j são os coeficientes da expansão em série de potências de $A(\mathbf{x})$.

A mais simples aproximação da exponencial que preserva a propriedade de decaimento no infinito em $|\mathbf{K}|$ é a aproximação de Padé $\{0,1\}$-subdiagonal [2, 34] e segundo a tabela dada em [2] tem-se

$$e^{-\mathbf{x}} \approx \frac{1}{1+\mathbf{x}}.$$

Fazendo a expansão de Taylor do Gaussiano $\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}$ tem-se

$$e^{-\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2} = 1 - \frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2 + \frac{\pi^4\widetilde{\delta}^4}{72}|\mathbf{K}|^4 + \ldots,$$

e analogamente a expansão de $\frac{1}{1+\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2}$ resulta em

$$\frac{1}{1+\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2} = 1 - \frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2 + \frac{\pi^4\widetilde{\delta}^4}{36}|\mathbf{K}|^4 + \ldots.$$

Subtraindo as duas igualdades tem-se

$$\frac{1}{1+\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2} - e^{-\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2} = \frac{\pi^4\widetilde{\delta}^4}{72}|\mathbf{K}|^4 + \ldots,$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{1}{1+\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2} - e^{-\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2} = \mathcal{O}(\widetilde{\delta}^4).$$

Desta maneira pode-se escrever a função $\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}(\mathbf{K})$ como

$$\widehat{g_{\widetilde{\delta}}}(\mathbf{K}) = e^{-\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2} = \frac{1}{1+\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2} + \mathcal{O}(\widetilde{\delta}^4).$$

Substituindo este resultado em (3.3), tem-se

$$\widehat{\widetilde{\mathbf{u}}}(\mathbf{K}) = \widehat{g_{\widetilde{\delta}} * \mathbf{u}}(\mathbf{K}) = \widehat{g_{\widetilde{\delta}}}(\mathbf{K})\,\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{K}) \quad \approx \quad \frac{1}{1+\frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}|\mathbf{K}|^2}\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{K})$$

e aplicando-se a transformada inversa resulta em

$$\widetilde{\mathbf{u}} \approx \left(1 - \frac{\pi^2\widetilde{\delta}^2}{6}\Delta\right)^{-1}\mathbf{u}. \tag{3.4}$$

Considerando $\delta = \frac{\pi\widetilde{\delta}}{\sqrt{6}}$ em (3.4), tem-se:

$$\widetilde{\mathbf{u}} \approx (1-\delta^2\Delta)^{-1}\mathbf{u}, \tag{3.5}$$

o que seria a versão de (2.2) para funções não periódicas.

Isto pode ser usado para construir um modelo para as pequenas escalas (SGS, Subgrid Scale) seguindo [10].

3.3 Algumas Propriedades do Filtro Diferencial

Nesta seção algumas das propriedades do filtro diferencial são demonstradas. Sabe-se que (2.2) admite uma única solução $\overline{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega)$. A formulação variacional (fraca) de (2.2), leva ao seguinte problema: Encontrar $\overline{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\delta^2(\,\nabla\overline{\mathbf{u}}\,,\,\nabla\mathbf{v}\,) + (\,\overline{\mathbf{u}}\,,\,\mathbf{v}) = (\,\mathbf{u},\mathbf{v}\,),\ \forall\,\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \tag{3.6}$$

Como Ω é convexo, então tem-se que $\overline{\mathbf{u}} \in H^2(\Omega)$, ver Grisvard [17], Teorema 3.2.1.2. Os seguintes dois lemas dão estimativas para algumas normas de $\overline{\mathbf{u}}$.

Lema 3.3.1. *Para toda* $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$, *a solução de* (3.6) *satisfaz*

$$\delta^4\|\,\Delta\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 + \delta^2\|\,\nabla\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 + \|\,\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 \leq 5\|\,\mathbf{u}\,\|^2. \tag{3.7}$$

Além disso, existe uma constante $C(\,\Omega\,)$ *tal que*

$$\delta\|\,\overline{\mathbf{u}}\,\|_1 \leq C(\,\Omega\,)\|\,\mathbf{u}\,\|. \tag{3.8}$$

Demonstração.
Considerando $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{u}}$ em (3.6), tem-se

$$\begin{aligned} \delta^2(\,\nabla\overline{\mathbf{u}}\,,\,\nabla\overline{\mathbf{u}}\,) + (\,\overline{\mathbf{u}}\,,\,\overline{\mathbf{u}}) &= (\,\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}\,) \\ \delta^2\|\,\nabla\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 + \|\,\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 &= (\,\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}\,) \end{aligned}$$

e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Cauchy na última igualdade,

$$\delta^2\|\,\nabla\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 + \|\,\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 \leq \|\,\mathbf{u}\,\|\,\|\,\overline{\mathbf{u}}\,\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2}\|\,\overline{\mathbf{u}}\,\|^2. \tag{3.9}$$

De (3.9)

$$\|\,\overline{\mathbf{u}}\,\| \leq \|\mathbf{u}\|, \tag{3.10}$$

substituindo (3.10) em (3.9),

$$\delta^2\|\,\nabla\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 + \|\,\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2. \tag{3.11}$$

Além disso, de (2.2), aplicando a desigualdade triangular e (3.10)

$$\delta^2 \| \Delta \overline{\mathbf{u}} \| = \| \mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}} \| \leq \|\mathbf{u}\| + \| \overline{\mathbf{u}} \| \leq 2\|\mathbf{u}\|,$$

elevando ao quadrado a última desigualdade,

$$\delta^4 \| \Delta \overline{\mathbf{u}} \|^2 \leq 4\|\mathbf{u}\|^2. \tag{3.12}$$

De (3.11) e (3.12), obtém-se a prova completa da estimativa (3.7).
Da desigualdade de Korn,

$$\|\overline{\mathbf{u}}\|_1 \leq C(\Omega)\|\nabla \overline{\mathbf{u}}\|, \quad \forall \overline{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega),$$

e da estimativa (3.11) segue $\| \nabla \overline{\mathbf{u}} \| \leq \frac{1}{\delta}\|\mathbf{u}\|$, substituindo isto na desigualdade de Korn

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leq C(\Omega)\frac{1}{\delta}\|\mathbf{u}\|.$$

Multiplicando por δ a ambos lados da desigualdade obtém-se a prova da estimativa (3.8). □

Lema 3.3.2. *Para toda* $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ *existe uma constante* $C(\Omega)$ *independente de* δ *tal que*

$$\| \overline{\mathbf{u}} \|_2 \leq C(\Omega)\delta^{-2}\| \mathbf{u} \|. \tag{3.13}$$

Demonstração.
De (2.2) segue que,

$$-\Delta \overline{\mathbf{u}} = \frac{1}{\delta^2}(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}) \qquad \in \ \Omega, \tag{3.14}$$

i.e. $\overline{\mathbf{u}}$ é a solução do problema de Poisson com lado direito $\frac{(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}})}{\delta^2}$.
O operador Laplaciano $-\Delta : \overline{H}^2(\Omega) \subset H(\Omega) \to H(\Omega)$ é um operador linear limitado e é um isomorfismo, ver Teorema 3.2.1.2. em Grisvard [17], ou Girault e Raviart [16], no Capítulo I, Observação 1.2. Uma aplicação do Teorema da Aplicação Aberta garante que

$$(-\Delta)^{-1} : H(\Omega) \to \overline{H}^2(\Omega) \subset H(\Omega)$$

é um operador linear continuo e limitado. Conseqüentemente, existe uma constante $C = C(\Omega)$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_2 \leq C\|\Delta\mathbf{u}\|$$

para cada $\mathbf{u} \in \overline{H}^2(\Omega) \subset H(\Omega)$. De (3.14) e aplicando a desigualdade triangular segue,

$$\|\,\overline{\mathbf{u}}\,\|_2 \leq \frac{C(\Omega)}{\delta^2}\|\,\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}\,\| \leq \frac{C(\Omega)}{\delta^2}(\,\|\,\mathbf{u}\,\| + \|\,\overline{\mathbf{u}}\,\|\,),$$

e usando a estimativa (3.10) prova-se o lema. □

Teorema 3.3.1. *Seja δ constante (não varia com a posição). Então,*

(a) Sob condições de fronteira periódicas, se $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$, $\overline{\mathbf{u}} \to \mathbf{u}$ quando $\delta \to 0$, i.e.,$||\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}|| \to 0$.

(b) Sob condições de fronteira periódicas, se $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ e $\nabla\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ então $||\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}||_1 \to 0$ quando $\delta \to 0$.

(c) Se o campo de velocidade $\mathbf{u}$ tem energia cinética limitada, então também o tem $\overline{\mathbf{u}}$:

$$\|\overline{\mathbf{u}}\| \leq \|\mathbf{u}\|.$$

(d) Sob condições periódicas, filtragem comuta com diferenciação:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\mathbf{x}^\alpha}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\mathbf{x}^\alpha}\mathbf{u}\right)}.$$

(e) Sob condições periódicas, para $\mathbf{u}$ suave, $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\delta^2)$. Especificamente,

$$||\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}|| \leq C\delta^2||\mathbf{u}||_2 \quad \textit{para} \quad \mathbf{u} \in H^2(\Omega).$$

Demonstração.

Seja $\mathbf{Z^3} = \{\mathbf{m} : \mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ onde $m_1, m_2, m_3 \in \mathbf{Z}\}$.

Prova de (a):

Usando o fato que a função $\mathbf{u}$ é 2π-periódica então $\mathbf{u}$ pode ser escrita como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z^3}} C_{\mathbf{m}}(t)e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}.$$

Pela hipótese tem-se que $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$, o que implica que $\|\mathbf{u}\| < \infty$ e, usando a Identidade de Parseval, temos

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} |C_{\mathbf{m}}(t)|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 < \infty. \tag{3.15}$$

Analogamente tem-se para $\overline{\mathbf{u}}$

$$\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} D_{\mathbf{m}}(t) e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}.$$

De (2.2) tem-se

$$D_{\mathbf{m}}(t) = \frac{1}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2} C_{\mathbf{m}}(t),$$

mas como o termo $\frac{1}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2} \leq 1$, tem-se

$$|D_{\mathbf{m}}(t)| \leq |C_{\mathbf{m}}(t)|.$$

Então afirmamos que $\|\overline{\mathbf{u}}\| < \infty$, pois

$$\|\overline{\mathbf{u}}\|^2 = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} |D_{\mathbf{m}}(t)|^2 \leq \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} |C_{\mathbf{m}}(t)|^2 = \|\mathbf{u}\|^2.$$

Tendo essas considerações e usando a Identidade de Parseval tem-se

$$\begin{aligned} \|\, \mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}} \,\|^2 &= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} |C_{\mathbf{m}} - D_{\mathbf{m}}|^2, \\ &= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} \left| 1 - \frac{1}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2} \right|^2 |C_{\mathbf{m}}|^2, \end{aligned}$$

$$\|\, \mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}} \,\|^2 = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} \left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2} \right)^2 |C_{\mathbf{m}}|^2. \tag{3.16}$$

Considerando que

$$\left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2} \right)^2 |C_{\mathbf{m}}|^2 \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0,$$

$$\left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2} \right)^2 |C_{\mathbf{m}}|^2 \leq |C_{\mathbf{m}}|^2,$$

e sabendo que $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} |C_{\mathbf{m}}(t)|^2$ é convergente por (3.15) e como um somatório pode ser interpretado como uma integral, então aplicando o Teorema de Convergência

Dominada de integrais para o somatório, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\|\,\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}}\,\|^2 &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3}\left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2}\right)^2|C_{\mathbf{m}}|^2\\ &= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3}\lim_{\delta\to 0}\left[\left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2}\right)^2|C_{\mathbf{m}}|^2\right]=0.\end{aligned}$$

Prova de (b):

A prova será feita usando o mesmo fato considerado na prova de (a).

$$\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}(t)e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}$$

e

$$\nabla\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)=\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3} i\mathbf{m}D_{\mathbf{m}}(t)e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}.$$

Pela hipótese tem-se que $\mathbf{u}\in L^2(\Omega)$ e $\nabla\mathbf{u}\in L^2(\Omega)$, logo $\mathbf{u}\in H^1(\Omega)$ e conseqüentemente tem-se

$$\|\mathbf{u}\|_1<\infty\Rightarrow\|\mathbf{u}\|^2+\|\nabla\mathbf{u}\|^2<\infty,$$

e usando a Identidade de Parseval tem-se

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3}|C_{\mathbf{m}}|^2+\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3}|i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}|^2<\infty.$$

É possível verificar que $\|\overline{\mathbf{u}}\|_1<\infty$, através da comparação das séries $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3}|i\mathbf{m}D_{\mathbf{m}}|^2$ e $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3}|i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}|^2$. Como $\|\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}}\|_1^2=\|\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}}\|^2+\|\nabla(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}})\|^2$, então mostrar que $\|\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}}\|_1\to 0$ quando $\delta\to 0$ é equivalente a mostrar que $\|\nabla(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}})\|\to 0$ quando $\delta\to 0$, pois usando o item (a) tem-se que $\|\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}}\|\to 0$ quando $\delta\to 0$. Usando a Identidade de Parseval tem-se

$$\begin{aligned}\|\nabla(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}})\|^2 &= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3}|i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}-i\mathbf{m}D_{\mathbf{m}}|^2,\\ &= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3}\left|i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}-\frac{i\mathbf{m}}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2}C_{\mathbf{m}}\right|^2,\\ &= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}^3}\left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2}\right)^2|i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}|^2.\end{aligned}$$

Considerando que $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z^3}} |i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}|^2 < \infty$ e

$$\left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2}\right)^2 |i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}|^2 \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0,$$

$$\left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2}\right)^2 |i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}|^2 \leq |i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}|^2,$$

e da mesma forma que foi feita em (a), aplicando o Teorema de Convergência Dominada de integrais para o somatório, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \| \nabla(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}}) \|^2 &= \lim_{\delta\to 0} \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z^3}} \left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2}\right)^2 |i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}|^2 \\
&= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z^3}} \lim_{\delta\to 0} \left[\left(\frac{\delta^2|\mathbf{m}|^2}{1+\delta^2|\mathbf{m}|^2}\right)^2 |i\mathbf{m}C_{\mathbf{m}}|^2\right] = 0.
\end{aligned}$$

Prova de (c):

A prova de (c) é obtida diretamente de (3.6) e já foi mostrada em (3.10).

Prova de (d):

Chamando $B = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$ para qualquer valor de $|\alpha|$, tem-se

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{u}} - \delta^2\Delta\overline{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}, \quad \textit{por}\ (2.2) \\
B\overline{\mathbf{u}} - B\delta^2\Delta\overline{\mathbf{u}} &= B\mathbf{u}, \\
B\overline{\mathbf{u}} - \delta^2\Delta B\overline{\mathbf{u}} &= B\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Chamando $\mathbf{w} = B\overline{\mathbf{u}}$, de (2.2), tem-se que o problema

$$\mathbf{w} - \delta^2\Delta\mathbf{w} = B\mathbf{u},$$

com condições de fronteira 2π-periódica, tem solução única dada por $\mathbf{w} = \overline{B\mathbf{u}}$. Assim tem-se que $B\overline{\mathbf{u}} = \overline{B\mathbf{u}}$.

Prova de (e):

Usando o operador G, temos $G\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}$ ou, equivalentemente, $\overline{\mathbf{u}} - \delta^2 \Delta \overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$, porém

$$\begin{aligned}
||\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}||^2 &\leq || - \delta^2 \Delta \overline{\mathbf{u}}\,||^2 \\
&\leq \delta^4 ||\, \Delta \overline{\mathbf{u}}\,||^2 \\
&= \delta^4 ||\, \overline{\Delta \mathbf{u}}\,||^2, \quad \text{pois a operação de filtragem comuta com a diferenciação} \\
&\leq C_1\, \delta^4\, ||\, \Delta \mathbf{u}\,||^2, \quad \text{pela parte (c)} \\
&\leq C_1\, C_2\, \delta^4\, ||\, \mathbf{u}\,||_2^2,
\end{aligned}$$

daí que temos:

$$||\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}|| \;\leq\; C\,\delta^2\, ||\mathbf{u}||_2, \quad \mathbf{u} \in H^2(\Omega), \;\; C = \sqrt{C_1\, C_2}.$$

$\square$

Definição 3.3.1. *Seja* $\mathbf{u}$ *a velocidade do fluido e* $\overline{\mathbf{u}}$ *sua respectiva função filtrada, define-se a flutuação turbulenta* $\mathbf{u}'$ *por* $\mathbf{u}' := \mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}$.

O seguinte lema é útil para estimar os tamanhos dos termos individuais a serem modelados e permite comparar (2.10) com o modelo de Bardina (2.8). Como $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ tem-se

$$\overline{\mathbf{u}\,\mathbf{u}} = \overline{\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{u}}\,\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\,\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\mathbf{u}'\,\mathbf{u}'}. \tag{3.17}$$

Lema 3.3.3. *Em* (3.17)*, para* $\mathbf{u}$ *suave, tem-se*

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}} &= \mathcal{O}(1) \\
\overline{\overline{\mathbf{u}}\,\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\,\overline{\mathbf{u}}} &= \mathcal{O}(\delta^2) \quad e \\
\overline{\mathbf{u}'\,\mathbf{u}'} &= \mathcal{O}(\delta^4).
\end{aligned}$$

Demonstração.

Como $\mathbf{u}$ é suave e $\|\overline{\mathbf{u}}\| \leq \|\mathbf{u}\|$ pelo Teorema 3.3.1 , tem-se que $\|\overline{\mathbf{u}}\| \leq C(\mathbf{u}) = \mathcal{O}(1)$, o que mostra a primeira igualdade do lema.

Como $\overline{\mathbf{u}} = \mathcal{O}(1)$ tem-se que $\Delta\overline{\mathbf{u}} = \mathcal{O}(1)$ e sabendo que $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}} = \delta^2 \Delta \overline{\mathbf{u}}$ tem-se que $\mathbf{u}' = \mathcal{O}(\delta^2)$ portanto $\overline{\mathbf{u}}\,\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\,\overline{\mathbf{u}} = \mathcal{O}(\delta^2)$ com o qual verifica-se a segunda igualdade.

Sabendo que se $\mathbf{u}' = \mathcal{O}(\delta^2)$ tem-se que $\mathbf{u}'\,\mathbf{u}' = \mathcal{O}(\delta^4)$, prova-se a última igualdade do lema. $\square$

Observação 3.3.1. *O modelo de Bardina* (2.8)*, aproxima dois termos em* $\mathcal{R}$ *enquanto* (2.10) *só um termo em* $\mathcal{R}$*. Além disso, na expansão de* $\mathcal{R}$ *até* $\mathcal{O}(1)$*,* $\mathcal{O}(\delta^2)$ *e* $\mathcal{O}(\delta^4)$ *temos* $\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \overline{\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}} - \overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}} + \left(\overline{\overline{\mathbf{u}}\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\overline{\mathbf{u}}}\right) + \overline{\mathbf{u}'\,\mathbf{u}'}$*,* (2.10) *é também a aproximação mais simples de* $\mathcal{O}(\delta^2)$*, quando os termos de* $\mathcal{O}(\delta^2)$ *e de ordem maior são descartados.*

4 ESTIMATIVAS

4.1 Estimativa Básica

A principal estimativa é dada no seguinte teorema:

Teorema 4.1.1 (Estabilidade de w). *Seja* $\mathbf{f} \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$. *Se* $(\mathbf{w},q)$ *é solução de* (2.11) *então tem-se que* $\mathbf{w}$ *satisfaz*

$$\mathbf{w} \in L^{\infty}\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right).$$

Demonstração.

Multiplicando (2.11) pelo termo $\mathbf{w} - \delta^2\Delta\mathbf{w}$, e integrando em Ω, tem-se

$$\left(\mathbf{w}_t + \nabla\cdot(\,\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}}\,) - \nu\Delta\mathbf{w} + \nabla q, \mathbf{w} - \delta^2\Delta\mathbf{w}\right) \;=\; \left(\overline{\mathbf{f}}, \mathbf{w} - \delta^2\Delta\mathbf{w}\right).$$

- $$\begin{aligned}\left(\mathbf{w}_t, \mathbf{w} - \delta^2\Delta\mathbf{w}\right) &= (\mathbf{w}_t,\mathbf{w}) - \delta^2(\mathbf{w}_t,\Delta\mathbf{w}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2 - \delta^2(\mathbf{w}_t,\Delta\mathbf{w}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2 + \delta^2(\nabla\mathbf{w}_t,\nabla\mathbf{w}) - \delta^2\underbrace{\int_{\partial\Omega}\mathbf{w}_t\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial n}\,dS}_{=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2 + \frac{\delta^2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\mathbf{w}\|^2.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(-\nu\Delta\mathbf{w}, \mathbf{w} - \delta^2\Delta\mathbf{w}\right) &= -\nu(\Delta\mathbf{w},\mathbf{w}) + \nu\delta^2(\Delta\mathbf{w},\Delta\mathbf{w}) \\ &= \nu\|\nabla\mathbf{w}\|^2 - \nu\underbrace{\int_{\partial\Omega}\mathbf{w}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial n}\,dS}_{=0} + \nu\delta^2\|\Delta\mathbf{w}\|^2 \\ &= \nu\|\nabla\mathbf{w}\|^2 + \nu\delta^2\|\Delta\mathbf{w}\|^2.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\nabla q, \mathbf{w}-\delta^2\Delta\mathbf{w}\right) &= -\left(q, \nabla\cdot(\mathbf{w}-\delta^2\Delta\mathbf{w})\right)\\ &= -\left(q, \nabla\cdot\mathbf{w}\right)+\delta^2\left(q, \nabla\cdot(\Delta\mathbf{w})\right)\\ &= \delta^2\left(q, \Delta(\nabla\cdot\mathbf{w})\right).\\ &= 0\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\overline{\mathbf{f}}, \mathbf{w}-\delta^2\Delta\mathbf{w}\right) &= \left(\mathbf{f}, \overline{\mathbf{w}-\delta^2\Delta\mathbf{w}}\right)\\ &= \left(\mathbf{f}, \overline{\mathbf{w}}-\overline{\delta^2\Delta\mathbf{w}}\right)\\ &= (\mathbf{f}, \underbrace{\overline{\mathbf{w}}-\delta^2\Delta\overline{\mathbf{w}}}_{=\mathbf{w}\, por\, (2.2)})\\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{w}).\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\nabla\cdot(\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}}), \mathbf{w}-\delta^2\Delta\mathbf{w}\right) &= \left(\overline{\nabla\cdot(\,\mathbf{w}\mathbf{w}\,)}, \mathbf{w}-\delta^2\Delta\mathbf{w}\right)\\ &= \left(\nabla\cdot(\,\mathbf{w}\mathbf{w}\,), \overline{\mathbf{w}-\delta^2\Delta\mathbf{w}}\right)\\ &= (\,\nabla\cdot(\,\mathbf{w}\mathbf{w}\,), \underbrace{\overline{\mathbf{w}}-\delta^2\Delta\overline{\mathbf{w}}}_{=\mathbf{w}\, por\, (2.2)}\,)\\ &= (\,\nabla\cdot(\,\mathbf{w}\mathbf{w}\,), \mathbf{w}\,)\\ &= b(\mathbf{w},\mathbf{w},\mathbf{w})\ \textit{já que}\ \mathbf{w}\in V(\Omega)\\ &= 0\ (\,\textit{pelo Lema}\ 1.2.1\,).\end{aligned}$$

Assim temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2+\frac{\delta^2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\mathbf{w}\|^2+\nu\|\nabla\mathbf{w}\|^2+\nu\delta^2\|\Delta\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{f},\mathbf{w})$$

e, integrando no tempo, obtemos

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2+\frac{\delta^2}{2}\|\nabla\mathbf{w}\|^2\right]+\int_0^t\left\{\nu\|\nabla\mathbf{w}\|^2+\nu\delta^2\|\Delta\mathbf{w}\|^2\right\}\,dt'\\ &\quad=\left[\frac{1}{2}\|\overline{\mathbf{u}}_0\|^2+\frac{\delta^2}{2}\|\nabla\overline{\mathbf{u}}_0\|^2\right]+\int_0^t(\mathbf{f},\mathbf{w})\,dt',\end{aligned}\tag{4.1}$$

já que $\mathbf{w}(\mathbf{x},0)=\overline{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$.

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré-Friedrichs e Young no último termo da igualdade (4.1) tem-se, para $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\mathbf{f}, \mathbf{w})\ dt' &\leq \int_0^t ||\mathbf{f}||\, ||\mathbf{w}||\, dt' \\
&\leq C_{PF} \int_0^t ||\mathbf{f}||\, ||\nabla\, \mathbf{w}||\, dt' \\
&\leq \int_0^t \left(\frac{C_{PF}}{4\epsilon} ||\mathbf{f}||^2 + C_{PF}\, \epsilon\, ||\nabla \mathbf{w}||^2 \right) dt'.
\end{aligned}$$

Assim da equação (4.1) tem-se a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 + \frac{\delta^2}{2}\|\nabla \mathbf{w}\|^2\right] + \int_0^t \left\{(\nu - C_{PF}\,\epsilon\,)\,\|\nabla \mathbf{w}\|^2 + \nu\delta^2\,\|\Delta \mathbf{w}\|^2\right\}\ dt' \\
&\qquad \leq \left[\frac{1}{2}\|\overline{\mathbf{u}}_0\|^2 + \frac{\delta^2}{2}\|\nabla \overline{\mathbf{u}}_0\|^2\right] + \frac{C_{PF}}{4\epsilon}\int_0^t ||\mathbf{f}||^2\, dt'.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

De (4.2), escolhendo $\epsilon = \frac{\nu}{2C_{PF}}$ tem-se

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 + \frac{\delta^2}{2}\|\nabla \mathbf{w}\|^2\right] + \int_0^t \left\{\frac{\nu}{2}\|\nabla \mathbf{w}\|^2 + \nu\delta^2\,\|\Delta \mathbf{w}\|^2\right\}\ dt' \\
&\qquad \leq \left[\frac{1}{2}\|\overline{\mathbf{u}}_0\|^2 + \frac{\delta^2}{2}\|\nabla \overline{\mathbf{u}}_0\|^2\right] + \frac{C_{PF}^2}{2\nu}\int_0^t ||\mathbf{f}||^2\, dt',
\end{aligned} \tag{4.3}$$

o que prova o lema. □

4.2 A Família G_N de Operadores

4.2.1 Modelos de Deconvolução

Conforme Germano [12], o filtro diferencial, parece dispensar a deconvolução: pode-se escrever exatamente $\phi := (I - \delta^2\Delta)\overline{\phi}$, o que levaria ao modelo exato para $\overline{\mathbf{u}}$ dado por:

$$\overline{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot \overline{(\,(I - \delta^2\Delta)\overline{\mathbf{u}}\,(I - \delta^2\Delta)\overline{\mathbf{u}}\,)} - \nu\Delta\overline{\mathbf{u}} + \nabla\overline{p} \;=\; \overline{\mathbf{f}} \tag{4.4}$$

sob condições de fronteira periódicas. Um problema em usar o modelo de deconvolução exato (4.4) para predizer $\overline{\mathbf{u}}$ é que da transformação da equação de Navier Stokes em (4.4) não há perda da informação. Desta maneira, não há razão para acreditar que (4.4) possa ser aproximada com menos graus de liberdade do que a própria equação de Navier Stokes. Outra dificuldade com (4.4) é que qualquer modelo que aumente a ordem da equação diferencial deverá ser apresentado com condições de fronteira extras. Assim, para problemas não periódicos, modelos tais como (4.4) mudam o problema essencial de fecho interior para problemas mais difíceis de especificar, como condições de fronteira incluindo derivadas de alta ordem da velocidade turbulenta na fronteira. Logo, deconvolução aproximada, na qual haverá perda de informação, é utilizada.

O método de Van Cittert de deconvolução aproximada (ver [5]) constrói uma família G_N de inversas para G como segue. Se $G = I - (I - G)$, uma inversa para G pode ser escrita como a série de potências,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(I-G)^n.$$

Truncando esta série obtém-se, para $N > 0$ inteiro,

$$G_N = \sum_{n=0}^{N}(I-G)^n. \tag{4.5}$$

Denota-se por $G_N\overline{\mathbf{u}}$ a N-ésima aproximação de G^{-1}. As primeiras três aproximações são dadas como segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &\approx G_0\overline{\mathbf{u}} := \overline{\mathbf{u}} \quad \text{(extrapolação constante em } \delta)\\
\mathbf{u} &\approx G_1\overline{\mathbf{u}} := 2\overline{\mathbf{u}} - \overline{\overline{\mathbf{u}}} \quad \text{(extrapolação linear em } \delta)\\
\mathbf{u} &\approx G_2\overline{\mathbf{u}} := 3\overline{\mathbf{u}} - 3\overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\overline{\mathbf{u}}}} \quad \text{(extrapolação quadrática em } \delta)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Logo, o caso $N = 0$ corresponde ao modelo (2.11), o mais simples da família.

Lema 4.2.1. *O operador $G_N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é inversível, autoadjunto e positivo definido.*

Demonstração.

O operador $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é compacto, autoadjunto, positivo definido e $||G|| \leq 1$, ver Lema 3.1.1. Seja $h_N(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N}(1-\mathbf{x})^n$. Pela definição de G_N tem-se que

$$G_N = h_N(G)$$

e como h_N é positivo em $[0,1]$, intervalo que contém o espectro de G, tem-se que G_N é também um operador autoadjunto e positivo definido.

Como $h_N(\mathbf{x}) \leq \sum_{n=0}^{N} 1^n = N+1$ e como $h_N(\mathbf{x}) \geq 1$ para $\mathbf{x} \in [0,1]$, tem-se que o espectro de $h_N(G)$ esta contido no intervalo $[1, N+1]$. Equivalentemente o espectro de G_N esta contido no intervalo $[1, N+1]$. Consequentemente G_N é inversível e o espectro de G_N^{-1} está contido no intervalo $[\frac{1}{N+1}, 1]$. □

Lema 4.2.2. *Para* $\mathbf{u}$ *suave a deconvolução aproximada* (4.5) *tem erro de consistência* $\mathcal{O}(\delta^{2N+2})$*,*

$$\mathbf{u} - G_N\overline{\mathbf{u}} = (-1)^{N+1}\delta^{2N+2}\Delta^{N+1}G^{N+1}\overline{\mathbf{u}}, \tag{4.7}$$

localmente em Ω*. Além disso,*

$$||\mathbf{u} - G_N\overline{\mathbf{u}}|| \leq \delta^{2N+2}||\overline{\mathbf{u}}||_{H^{2N+2}(\Omega)}.$$

Demonstração.

Seja $A := (I - G)$, que satisfaz

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} = (I-G)\mathbf{u} = G(G^{-1} - I)\mathbf{u} &= (I - \delta^2\Delta)^{-1}((I - \delta^2\Delta) - I)\mathbf{u} \\ &= (I - \delta^2\Delta)^{-1}(-\delta^2\Delta\mathbf{u}) = -\delta^2\Delta\overline{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Definindo $\mathbf{e} := \mathbf{u} - G_N\overline{\mathbf{u}}$, e de acordo com a definição de G_N, tem-se

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + A\overline{\mathbf{u}} + A^2\overline{\mathbf{u}} + ... + A^N\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{e}. \tag{4.8}$$

Aplicando o operador A em ambos lados da igualdade (4.8) tem-se

$$A\mathbf{u} = A\overline{\mathbf{u}} + A^2\overline{\mathbf{u}} + A^3\overline{\mathbf{u}} + ... + A^{N+1}\overline{\mathbf{u}} + A\mathbf{e} \tag{4.9}$$

e, subtraindo (4.9) de (4.8), tem-se

$$(I - A)\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} - A^{N+1}\overline{\mathbf{u}} + (I - A)\mathbf{e},$$

ou, equivalentemente,

$$G\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} - A^{N+1}\overline{\mathbf{u}} + G\mathbf{e}.$$

Como $G\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}$, tem-se $G\mathbf{e} = \overline{\mathbf{e}} = A^{N+1}\overline{\mathbf{u}}$.

Aplicando $G^{-1} = (I - \delta^2\Delta)$ a ambos lados tem-se

$$(I - \delta^2\Delta)G\mathbf{u} = (I - \delta^2\Delta)\overline{\mathbf{u}} - (I - \delta^2\Delta)A^{N+1}\overline{\mathbf{u}} + (I - \delta^2\Delta)G\mathbf{e},$$

que é o mesmo que

$$\mathbf{e} = A^{N+1}\mathbf{u},$$

e de onde se tem a seguinte identidade

$$G_N\, G = I - (I - G)^{N+1}.$$

Lembrando que $A\mathbf{u} = -\delta^2\Delta\overline{\mathbf{u}}$ então $A^{N+1}\mathbf{u} = (-\delta^2\Delta)^{N+1}\overline{\mathbf{u}}$, assim tem-se

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - G_N\overline{\mathbf{u}} = (-\delta^2\Delta)^{N+1}\overline{\mathbf{u}} = (-1)^{N+1}\delta^{2(N+1)}\Delta^{N+1}\overline{\mathbf{u}},$$

finalizando a prova da igualdade do lema.

Para provar a desigualdade, tem-se

$$\begin{aligned}
||\mathbf{u} - G_N\overline{\mathbf{u}}|| &= ||(-1)^{N+1}\delta^{2(N+1)}\Delta^{N+1}\overline{\mathbf{u}}\,|| \\
&= \delta^{2(N+1)}||\,\Delta^{N+1}\overline{\mathbf{u}}\,|| \\
&\leq \delta^{2N+2}||\,\overline{\mathbf{u}}\,||_{H^{2N+2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

O Lema 4.2.2 mostra que $G_N\overline{\mathbf{u}}$ dá uma aproximação para $\mathbf{u}$ com precisão $\mathcal{O}(\delta^{2N+2})$ numa região de fluxo suave, o que justifica sua utilização em

$$\nabla \cdot (\,\overline{\mathbf{u}\,\mathbf{u}}\,) = \nabla \cdot \left(\overline{G_N\overline{\mathbf{u}}\,G_N\overline{\mathbf{u}}}\right) + \mathcal{O}(\delta^{2N+2}).$$

De acordo como foi definido o tensor de Reynolds $\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u})$ em (2.6), a aproximação fechada é equivalente para o modelo do fecho

$$\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \approx \mathcal{R}_N(\,\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}}\,) := \overline{G_N\overline{\mathbf{u}}\,G_N\overline{\mathbf{u}}} - \overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}. \tag{4.10}$$

O tensor de Reynolds $\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u})$ é reversível e Galileu invariante ($\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \mathcal{R}(\mathbf{u} + U, \mathbf{u} + U)$ onde U é vector arbitrário uniforme no espaço e constante no tempo). Na continuação mostra-se que o modelo (4.10) tem as duas propriedades.

Lema 4.2.3. *Para cada N=0,1,2,... o modelo de fecho* (4.10) *é reversível e Galileu invariante.*

Demonstração.
A reversibilidade é imediata. Galileu invariância segue notando que $\overline{U\mathbf{w}} = U\overline{\mathbf{w}}$ e também $G_N(U\overline{\mathbf{u}}) = UG_N(\overline{\mathbf{u}})$. Usando estas e outras propriedades análogas tem-se

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathcal{R}_N(\mathbf{u}+U,\mathbf{u}+U) &= \nabla\cdot\Big[\overline{G_N(\overline{\mathbf{u}}+U)\,G_N(\overline{\mathbf{u}}+U)} - (\,\overline{\mathbf{u}}+U\,)\,(\,\overline{\mathbf{u}}+U\,)\Big] \\
&= \nabla\cdot\big[\,\overline{G_N\overline{\mathbf{u}}\,G_N\overline{\mathbf{u}}} + U\overline{G_N\overline{\mathbf{u}}} + \overline{G_N\overline{\mathbf{u}}}U + \overline{UU} - (\,\overline{\mathbf{u}}+U\,)\,(\,\overline{\mathbf{u}}+U\,)\big] \\
&= \nabla\cdot\big[\,\overline{G_N\overline{\mathbf{u}}\,G_N\overline{\mathbf{u}}} - \overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}\big] + \big(\nabla\cdot\overline{G_N\overline{\mathbf{u}}}\big)\,U + U\nabla\cdot\overline{G_N\overline{\mathbf{u}}} \\
&\quad - (\,\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}}\,)\,U - U\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}} \\
&= \nabla\cdot\big[\,\overline{G_N\overline{\mathbf{u}}\,G_N\overline{\mathbf{u}}} - \overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}\big] \\
&= \nabla\cdot\mathcal{R}_N(\mathbf{u},\mathbf{u}),
\end{aligned}$$

já que $\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}} = \nabla\cdot G_N(\overline{\mathbf{u}}) = \nabla\cdot\overline{G_N\overline{\mathbf{u}}} = 0$, $\overline{UU} = UU$ e $\nabla\cdot(UU) = 0$. $\square$

4.3 Os Modelos e a Existência de Soluções Fracas

Definição 4.3.1. *A forma forte do modelo de Stolz-Adams que será analisada neste trabalho é a seguinte: Encontrar* $(\mathbf{w}, q)$ *tais que*

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &\in \overline{H}^2(\Omega)\cap H(\Omega), \quad \textit{para quase todo } t\in[0,T] \\
\mathbf{w} &\in H^1(0,T), \quad \textit{para quase todo}\, \mathbf{x}\in\overline{\Omega} \\
q &\in H^1(\Omega)\cap L^2_0(\Omega), \quad \textit{se } \ t\in(0,T]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_t + \nabla\cdot\left(\overline{(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w})}\right) - \nu\Delta\mathbf{w} + \nabla q &= \overline{\mathbf{f}} \quad \textit{em } (0,T)\times\Omega, \\
\nabla\cdot\mathbf{w} &= 0 \quad \textit{em } (0,T]\times\Omega, \\
\mathbf{w}|_{t=0} &= \overline{\mathbf{u}}_0 \quad \textit{em } \Omega, \\
\textstyle\int_\Omega q\,d\mathbf{x} &= 0 \quad \textit{em } \ (0,T].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Definição 4.3.2. *Sejam* $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $\mathbf{w}_0 = \overline{\mathbf{u}}_0 \in \overline{H}^2(\Omega)$. *Uma função mensurável* $\mathbf{w} : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ *é uma solução fraca de* (4.12) *se*

$$\mathbf{w} \in L^2(0,T;\overline{H}^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega)) \tag{4.13}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left[\left(\mathbf{w}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \phi) - \left(\overline{(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w})}, \phi \right) \right] dt \\ &\quad = -\int_0^\infty (\mathbf{f}, \phi)\, dt - (\mathbf{w}_0, \phi(0)),\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega_T). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Lema 4.3.1. *Seja* $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)$, *então a função*

$$||\cdot||_{G_N} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$$

definida por

$$||\,\mathbf{w}\,||_{G_N} := (\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{w}\,)^{1/2}$$

é uma norma.

Demonstração.

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w}$ como na hipótese.

- A propriedade de ser não negativa segue do fato que a família de operadores $(G_N)_N$ é positiva definida (ver Lema 4.2.1).
  $||\,\mathbf{w}\,||_{G_N} = (\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{w}\,)^{1/2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{w} = 0$ ou $G_N\mathbf{w} = 0$.
  Como o núcleo do operador G_N é $\mathbf{w} = 0$ para cada N, pode-se concluir que
  $||\,\mathbf{w}\,||_{G_N} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{w} = 0$.

- $||\,\alpha\mathbf{w}\,||^2_{G_N} = (\,\alpha\mathbf{w}, G_N\alpha\mathbf{w}\,) = (\,\alpha\mathbf{w}, \alpha G_N\mathbf{w}\,) = \alpha^2(\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{w}\,)$,
  ou seja,
  $||\,\alpha\mathbf{w}\,||_{G_N} = |\alpha|\,||\,\mathbf{w}\,||_{G_N},\ \forall\,\mathbf{w} \in L^2(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Aproveitando a propriedade que G_N é positivo definido e autoadjunto, $G_N^{1/2}$ existe e tem-se

$$(\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{u}\,) = (\,G_N^{1/2}\mathbf{w}, G_N^{1/2}\mathbf{u}\,)\ \ \forall\,\mathbf{w},\,\mathbf{u}\,\in\,L^2(\Omega)$$

e

$$||\,\mathbf{w}\,||_{G_N}^2 = (\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{w}\,) = (\,G_N^{1/2}\mathbf{w}, G_N^{1/2}\mathbf{w}\,) = ||\,G_N^{1/2}\mathbf{w}\,||^2, \qquad (4.15)$$

onde $G_N^{1/2}$ preserva as propriedades de G_N.

Assim, considerando $\mathbf{w},\,\mathbf{u}\,\in\,L^2(\Omega)$ arbitrários tem-se

$$\begin{aligned}
||\,\mathbf{w}+\mathbf{u}\,||_{G_N}^2 &= (\,\mathbf{w}+\mathbf{u}, G_N(\,\mathbf{w}+\mathbf{u}\,)\,)\\
&= (\,\mathbf{w}+\mathbf{u}, G_N\mathbf{w}+G_N\mathbf{u}\,)\\
&= (\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{w}\,) + (\,\mathbf{u}, G_N\mathbf{u}\,) + (\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{u}\,) + (\,\mathbf{u}, G_N\mathbf{w}\,)\\
&= ||\,\mathbf{w}\,||_{G_N}^2 + ||\,\mathbf{u}\,||_{G_N}^2 + (\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{u}\,) + (\,G_N\mathbf{u}, \mathbf{w}\,)\\
&= ||\,\mathbf{w}\,||_{G_N}^2 + ||\,\mathbf{u}\,||_{G_N}^2 + 2(\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{u}\,)\\
&= ||\,\mathbf{w}\,||_{G_N}^2 + ||\,\mathbf{u}\,||_{G_N}^2 + 2(\,G_N^{1/2}\mathbf{w}, G_N^{1/2}\mathbf{u}\,)\\
&\leq ||\,\mathbf{w}\,||_{G_N}^2 + ||\,\mathbf{u}\,||_{G_N}^2 + 2||\,G_N^{1/2}\mathbf{w}\,||\;||\,G_N^{1/2}\mathbf{u}\,||\\
&= ||\,\mathbf{w}\,||_{G_N}^2 + ||\,\mathbf{u}\,||_{G_N}^2 + 2||\,\mathbf{w}\,||_{G_N}\;||\,\mathbf{u}\,||_{G_N}\\
&= (\,||\,\mathbf{w}\,||_{G_N} + ||\,\mathbf{u}\,||_{G_N}\,)^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $||\,\mathbf{w}+\mathbf{u}\,||_{G_N}\ \leq\ ||\,\mathbf{w}\,||_{G_N} + ||\,\mathbf{u}\,||_{G_N}$,

provando que $||\,\cdot\,||_{G_N}$ é uma norma. □

Lema 4.3.2. *A norma $||\,\cdot\,||_{G_N}$ definida no Lema 4.3.1 é equivalente à norma $||\,\cdot\,||$.*

Demonstração.

Com efeito,

$$\begin{aligned} ||\,\mathbf{w}\,||^2_{G_N} &= (\,\mathbf{w}, G_N\mathbf{w}\,) \\ &\leq ||\,\mathbf{w}\,||\,||\,G_N\mathbf{w}\,|| \\ &\leq ||\,\mathbf{w}\,||\,||\,G_N\,||\,||\,\mathbf{w}\,|| \\ &= ||\,G_N\,||\,||\,\mathbf{w}\,||^2 \\ &\leq C_1\,||\,\mathbf{w}\,||^2, \end{aligned}$$

já que $||\,G_N\,|| \leq C_1$. Assim, tem-se $||\,\mathbf{w}\,||_{G_N} \leq C\,||\,\mathbf{w}\,||$, com $C = \sqrt{C_1}$.
Como $\mathbf{w} = G_N^{-1/2}\,G_N^{1/2}\,\mathbf{w}$, tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\| &\leq \|G_N^{-1/2}\|\,\|\,G_N^{1/2}\,\mathbf{w}\| \\ &= \|G_N^{-1/2}\|\,\|\mathbf{w}\|_{G_N}. \end{aligned}$$

Assim, tem-se $||\,\mathbf{w}\,|| \leq \alpha\,||\,\mathbf{w}\,||_{G_N}$, com $\|G_N^{-1/2}\| \leq \alpha$, o que completa a prova do lema. $\square$

Lema 4.3.3. *Se* $\mathbf{w}$ *é uma solução forte de* (4.12) *como na Definição 4.3.1 então* $\mathbf{w}$ *satisfaz a seguinte desigualdade de energia:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}||\mathbf{w}(t)||^2_{G_N} + \frac{\delta^2}{2}||\nabla\mathbf{w}(t)||^2_{G_N} + \frac{\nu}{2}\int_0^t ||\nabla\mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\,ds + \nu\delta^2\int_0^t ||\Delta\mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\,ds \\ \leq K\left(\int_0^T ||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\,ds + \,\delta^2||\nabla\,\mathbf{w}_0||^2_{G_N} + ||\mathbf{w}_0||^2_{G_N}\right), \end{aligned} \tag{4.16}$$

para todo $t \in [0,T]$ *com* $K = max\left\{\frac{C||G_N||^2}{2\nu}, \frac{1}{2}\right\}$ *e* $\mathbf{w}_0 = \overline{\mathbf{u}}_0$.

Demonstração.

Multiplicando (4.12) pela função teste $\Psi := (I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}$, tem-se

$$\Big(\mathbf{w}_t + \nabla\cdot(\,\overline{(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w})}\,) - \nu\Delta\mathbf{w} + \nabla q, (I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}\Big) \;=\; \big(\overline{\mathbf{f}}, (I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}\big)$$

e usando o fato que:

- $$\begin{aligned}\big(\nabla q, (I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}\big) &= -\big(\, q, \nabla\cdot((I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w})\big)\\ &= -\big(\, q, (I-\delta^2\Delta)G_N(\nabla\cdot\mathbf{w})\big)\\ &= 0,\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\big(\overline{\mathbf{f}}, (I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}\big) &= \Big(\mathbf{f}, \overline{(I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}}\Big)\\ &= \big(\mathbf{f}, (I-\delta^2\Delta)\overline{G_N\mathbf{w}}\big)\\ &= (\mathbf{f}, G_N\mathbf{w})\,,\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\Big(\nabla\cdot(\,\overline{(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w})}), (I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}\Big) &= \Big(\,\overline{\nabla\cdot(\,(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w}\,))}, (I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}\,\Big)\\ &= \Big(\,\nabla\cdot(\,(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w}\,)), \overline{(I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}}\,\Big)\\ &= \big(\,\nabla\cdot(\,(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w}\,)), (I-\delta^2\Delta)\overline{G_N\mathbf{w}}\,\big)\\ &= (\,\nabla\cdot(\,(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w}\,)), G_N\mathbf{w}\,)\\ &= b(G_N\mathbf{w}, G_N\mathbf{w}, G_N\mathbf{w})\\ &= 0, \text{ pelo Lema 1.2.1,}\end{aligned}$$

tem-se

$$\big(\mathbf{w}_t, (I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}\big) + \big(-\nu\Delta\mathbf{w}, (I-\delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}\big) \;=\; (\mathbf{f}, G_N\mathbf{w})\,,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\,\mathbf{w}\,||^2_{G_N} + \frac{\delta^2}{2}\frac{d}{dt}\,(\nabla\mathbf{w}, \nabla G_N\mathbf{w}) + \nu\,(\nabla\mathbf{w}, \nabla G_N\mathbf{w}) + \nu\delta^2\,(\Delta\mathbf{w}, \Delta G_N\mathbf{w}) \;=\; (\mathbf{f}, G_N\mathbf{w})\,.$$

Usando a propriedade que o operador G_N comuta com a diferenciação, tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\,\mathbf{w}\,||^2_{G_N} + \frac{\delta^2}{2}\frac{d}{dt}||\,\nabla\mathbf{w}\,||^2_{G_N} + \nu||\,\nabla\mathbf{w}\,||^2_{G_N} + \nu\delta^2||\,\Delta\mathbf{w}\,||^2_{G_N} \;=\; (\mathbf{f}, G_N\mathbf{w})$$

e integrando a igualdade obtida em $[0,t]$, onde $0\le t\le T$, fica-se com

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}||\,\mathbf{w}(s)\,||^2_{G_N}\,ds + \frac{\delta^2}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}||\,\nabla\mathbf{w}(s)\,||^2_{G_N}\,ds + \nu\int_0^t ||\,\nabla\mathbf{w}(s)\,||^2_{G_N}\,ds$$
$$+\nu\delta^2\int_0^t ||\,\Delta\mathbf{w}(s)\,||^2_{G_N}\,ds = \int_0^t (\,\mathbf{f}(s), G_N\mathbf{w}(s)\,)\,ds,$$

$$\frac{1}{2}||\,\mathbf{w}(t)\,||^2_{G_N}+\frac{\delta^2}{2}||\,\nabla\mathbf{w}(t)\,||^2_{G_N}+\nu\int_0^t||\,\nabla\mathbf{w}(s)\,||^2_{G_N}\,ds+\nu\delta^2\int_0^t||\,\Delta\mathbf{w}(s)\,||^2_{G_N}\,ds$$
$$=\int_0^t(\,\mathbf{f}(s),G_N\mathbf{w}(s)\,)\,ds+\frac{1}{2}||\,\mathbf{w}_0\,||^2_{G_N}+\frac{\delta^2}{2}||\,\nabla\mathbf{w}_0\,||^2_{G_N},\tag{4.17}$$

mas, usando as desigualdades (1.2) e a de Young com $\epsilon>0$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^t(\mathbf{f}(s),G_N\mathbf{w}(s))\,ds &\leq \int_0^t||\mathbf{f}(s)||_{-1}||\nabla G_N\mathbf{w}(s)||\,ds\\ &= \int_0^t||\mathbf{f}(s)||_{-1}||G_N\nabla\mathbf{w}(s)||\,ds\\ &\leq \int_0^t||\mathbf{f}(s)||_{-1}||G_N||\,||\nabla\mathbf{w}(s)||\,ds\\ &\leq \int_0^t\left(\frac{1}{4\epsilon}||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}||G_N||^2\,+\,\epsilon||\nabla\mathbf{w}(s)||^2\right)ds\\ &\leq \frac{||G_N||^2}{4\epsilon}\int_0^t||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\,ds+\epsilon\int_0^t||\nabla\mathbf{w}(s)||^2\,ds\\ &\leq \frac{||G_N||^2}{4\epsilon}\int_0^t||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\,ds+C\epsilon\int_0^t||\nabla\mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\,ds\,,\end{aligned}$$

onde C é uma constante tal que $||\nabla\mathbf{w}(s)||\leq C||\nabla\mathbf{w}(s)||_{G_N}$.

Substituindo isto na igualdade (4.17), chega-se a

$$\frac{1}{2}||\,\mathbf{w}(t)\,||^2_{G_N}+\frac{\delta^2}{2}||\,\nabla\mathbf{w}(t)\,||^2_{G_N}+\nu\int_0^t||\,\nabla\mathbf{w}(s)\,||^2_{G_N}\,ds+\nu\delta^2\int_0^t||\,\Delta\mathbf{w}(s)\,||^2_{G_N}\,ds$$
$$\leq\frac{||G_N||^2}{4\epsilon}\int_0^t||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\,ds+C\epsilon\int_0^t||\nabla\mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\,ds+\frac{1}{2}||\,\mathbf{w}_0\,||^2_{G_N}+\frac{\delta^2}{2}||\,\nabla\mathbf{w}_0\,||^2_{G_N},$$

logo, considerando $\epsilon=\frac{\nu}{2C}$ tem-se

$$\frac{1}{2}||\mathbf{w}(t)||^2_{G_N}+\frac{\delta^2}{2}||\nabla\mathbf{w}(t)||^2_{G_N}+\nu\int_0^t||\nabla\mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\,ds$$
$$+\nu\delta^2\int_0^t||\Delta\mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\,ds\leq\frac{C||G_N||^2}{2\nu}\int_0^t||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\,ds+\frac{\nu}{2}\int_0^t||\nabla\mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\,ds$$
$$+\frac{1}{2}||\,\mathbf{w}_0\,||^2_{G_N}+\frac{\delta^2}{2}||\,\nabla\mathbf{w}_0\,||^2_{G_N}.$$

Simplificando a desigualdade tem-se

$$\frac{1}{2}||\mathbf{w}(t)||^2_{G_N}+\frac{\delta^2}{2}||\nabla\mathbf{w}(t)||^2_{G_N}+\frac{\nu}{2}\int_0^t||\nabla\mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\,ds+\nu\delta^2\int_0^t||\Delta\mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\,ds$$
$$\leq\frac{C||G_N||^2}{2\nu}\int_0^t||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\,ds+\frac{1}{2}||\,\mathbf{w}_0\,||^2_{G_N}+\frac{\delta^2}{2}||\,\nabla\mathbf{w}_0\,||^2_{G_N}.$$

Como $||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}$ é uma função não negativa e $0 \leq t \leq T$, tem-se que $\int_0^t ||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\, ds \leq \int_0^T ||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\, ds$, portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||\mathbf{w}(t)||^2_{G_N} + \frac{\delta^2}{2}||\nabla \mathbf{w}(t)||^2_{G_N} + \frac{\nu}{2}\int_0^t ||\nabla \mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\, ds + \nu\delta^2 \int_0^t ||\Delta \mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\, ds \\ \leq \frac{C||G_N||^2}{2\nu}\int_0^T ||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\, ds + \frac{1}{2}||\,\mathbf{w}_0\,||^2_{G_N} + \frac{\delta^2}{2}||\,\nabla \mathbf{w}_0\,||^2_{G_N},\end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||\mathbf{w}(t)||^2_{G_N} + \frac{\delta^2}{2}||\nabla \mathbf{w}(t)||^2_{G_N} + \frac{\nu}{2}\int_0^t ||\nabla \mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\, ds + \nu\delta^2 \int_0^t ||\Delta \mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\, ds \\ \leq K\left(\int_0^T ||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\, ds + \delta^2||\nabla\, \mathbf{w}_0||^2_{G_N} + ||\mathbf{w}_0||^2_{G_N}\right),\end{aligned}$$

onde $K = max\left\{\frac{C||G_N||^2}{2\nu}, \frac{1}{2}\right\}$, com o qual se completa a prova.

$\square$

Observação 4.3.1. *Como a inclusão $\overline{H}^2(\Omega) \to H(\Omega)$ é compacta, a inversa do operador Laplaciano $(-\Delta)^{-1} : H(\Omega) \to \overline{H}^2(\Omega) \subset H(\Omega)$ é um operador limitado, autoadjunto e compacto. Isto implica que existe uma base ortonormal $(\Psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $H(\Omega)$ que consiste das autofunções do operador Laplaciano.*

Proposição 4.3.1. *Seja $T > 0$ e V' o espaço dual de $V(\Omega)$. Então para $\mathbf{w}_0 \in \overline{H}^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ e $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V')$, existe uma solução fraca $\mathbf{w}$ de (4.12) no sentido da Definição 4.3.2. Esta solução $\mathbf{w} \in L^2(0,T;\overline{H}^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;V(\Omega))$ e satisfaz a seguinte desigualdade de energia*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||\mathbf{w}(t)||^2_{G_N} + \frac{\delta^2}{2}||\nabla \mathbf{w}(t)||^2_{G_N} + \frac{\nu}{2}\int_0^t ||\nabla \mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\, ds + \nu\delta^2 \int_0^t ||\Delta \mathbf{w}(s)||^2_{G_N}\, ds \\ \leq K\left(\int_0^T ||\mathbf{f}(s)||^2_{-1}\, ds + \delta^2||\nabla\, \mathbf{w}_0||^2_{G_N} + ||\mathbf{w}_0||^2_{G_N}\right)\end{aligned} \tag{4.18}$$

para todo $t \in [0,T]$ com $K = max\left\{\frac{C||G_N||^2}{2\nu}, \frac{1}{2}\right\}$.

Demonstração.

Na prova usa-se o método de Faedo Galerkin e segue-se Galdi [9]. Levando (4.12) a sua forma variacional tem-se:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla\cdot(\,\overline{(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w})}\,) - \nu\Delta\mathbf{w} + \nabla q, \mathbf{v}\right) = \left(\overline{\mathbf{f}}, \mathbf{v}\right), \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega). \tag{4.19}$$

Usando as identidades de Green tem-se:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \left(\nabla \cdot (\,\overline{(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w})}\,), \mathbf{v}\right) - (\nu \Delta \mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\nabla q, \mathbf{v}) &= \left(\overline{\mathbf{f}}, \mathbf{v}\right)\\ \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \left(\nabla \cdot (\,\overline{(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w})}\,), \mathbf{v}\right) + \nu\,(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) &= \left(\overline{\mathbf{f}}, \mathbf{v}\right),\end{aligned}$$

obtendo assim uma expressão equivalente à igualdade (4.19):

$$\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \left(\nabla \cdot (\,\overline{(G_N\mathbf{w})\,(G_N\mathbf{w})}\,), \mathbf{v}\right) + \nu\,(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) = \left(\overline{\mathbf{f}}, \mathbf{v}\right). \tag{4.20}$$

Seja $\{\Psi_i\}_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ de $H(\Omega)$ uma base ortonormal formada pelas autofunções do operador Laplaciano, onde a existência da base é explicada na *Observação* 4.3.1, e seja $S_k = span\{\Psi_i\}_{i=1,\ldots,k}$. Definamos uma solução aproximada de (4.20) em S_k; isto é $\mathbf{w}_k \in S_k$, dada por

$$\mathbf{w}_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{k} \eta_{ki}(t)\Psi_i(\mathbf{x}) \tag{4.21}$$

para $k \in \mathbb{N}$ fixo, satisfazendo:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \left(\nabla \cdot (\,\overline{(G_N\mathbf{w}_k)\,(G_N\mathbf{w}_k)}\,), \mathbf{v}\right) + \nu\,(\nabla \mathbf{w}_k, \nabla \mathbf{v}) = \left(\overline{\mathbf{f}}, \mathbf{v}\right). \tag{4.22}$$

Como a igualdade (4.22) é válida $\forall\, \mathbf{v} \in V(\Omega)$, em particular, também é válida para a autofunção Ψ_r :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial t}, \Psi_r\right) + \left(\nabla \cdot (\,\overline{(G_N\mathbf{w}_k)\,(G_N\mathbf{w}_k)}\,), \Psi_r\right) + \nu\,(\nabla \mathbf{w}_k, \nabla \Psi_r) = \left(\overline{\mathbf{f}}, \Psi_r\right), \tag{4.23}$$

onde $r = 1, \ldots, k$. Fazendo o mesmo com a condição inicial, tem-se

$$(\mathbf{w}_k(\mathbf{x}, 0), \Psi_r) = (\mathbf{w}_0, \Psi_r) \;\; \forall\, r = 1, \ldots, k.$$

Mas, como $\mathbf{w}_k(\mathbf{x},t) = \sum_{r=1}^{k} \eta_{kr}(t)\Psi_r(\mathbf{x})$, tem-se que:

$$\bullet \quad \left(\frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial t}, \Psi_r\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} \eta_{kj}\Psi_i, \Psi_r\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{d}{dt}(\eta_{ki}\Psi_i), \Psi_r\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{d\eta_{ki}}{dt}\Psi_i, \Psi_r\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{d\eta_{ki}}{dt}\left(\Psi_i, \Psi_r\right)$$
$$= \frac{d\eta_{kr}}{dt}.$$

$$\bullet \quad \left(\nabla\cdot(\,\overline{(G_N\mathbf{w}_k)\,(G_N\mathbf{w}_k)}\,), \Psi_r\right) = \left(\nabla\cdot(\,\overline{(G_N\sum_{i=1}^{k}\eta_{ki}\Psi_i)\,(G_N\sum_{j=1}^{k}\eta_{kj}\Psi_i)}\,), \Psi_r\right)$$
$$= \left(\sum_{i,j=1}^{k}\eta_{ki}\eta_{kj}\nabla\cdot(\,\overline{(G_N\Psi_i)\,(G_N\Psi_j)}\,), \Psi_r\right)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{k}\eta_{ki}\eta_{kj}\left(\nabla\cdot(\,\overline{(G_N\Psi_i)\,(G_N\Psi_j)}\,), \Psi_r\right).$$

$$\bullet \quad (\nabla\mathbf{w}_k, \nabla\Psi_r) = \left(\nabla\sum_{i=1}^{k}\eta_{ki}\Psi_i, \nabla\Psi_r\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\eta_{ki}\left(\nabla\Psi_i, \nabla\Psi_r\right).$$

Logo, substituindo isto na igualdade (4.23), tem-se

$$\frac{d\eta_{kr}}{dt} + \sum_{i,j=1}^{k}\eta_{ki}\eta_{kj}\left(\nabla\cdot(\,\overline{(G_N\Psi_i)\,(G_N\Psi_j)}\,), \Psi_r\right) + \nu\sum_{i=1}^{k}\eta_{ki}\left(\nabla\Psi_i, \nabla\Psi_r\right) = \left(\overline{\mathbf{f}}, \Psi_r\right)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d\eta_{kr}}{dt} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ijr}\eta_{ki}\eta_{kj} + \sum_{i=1}^{k} a_{ir}\eta_{ki} = \overline{\mathbf{f}}_r \tag{4.24}$$

com condição inicial

$$\eta_{kr}(0) = C_{0r}, \tag{4.25}$$

onde $a_{ijr} = \Big(\nabla \cdot (\,\overline{(G_N\Psi_i)\,(G_N\Psi_j)}\,), \Psi_r\Big)$, $a_{ir} = \nu\,(\nabla\Psi_i, \nabla\Psi_r)$, $\overline{\mathbf{f}}_r = \big(\overline{\mathbf{f}}, \Psi_r\big)$, $C_{0r} = (\mathbf{w}_0, \Psi_r)$ com $r = 1, \ldots, k$.

Consequentemente, tem-se que os coeficientes η_{kr} satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) (4.24) com condições iniciais (4.25) e como $\overline{\mathbf{f}}_r \in L^2[0, T)$ para qualquer r, tem-se que (4.24) tem uma única solução perto de 0,

$$\eta_{kr} \in H^1(0, T_k),$$

onde $T_k \leq T$. Como $\mathbf{w}_0 \in \overline{H}^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, existe $\mathbf{u}_0 \in H(\Omega)$ tal que $\overline{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{w}_0$. Denotemos $\mathbf{w}_k(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_{k0}$.

Para a EDO definida em (4.24) tem-se que $(\mathbf{w}_{k0}, \Psi_r) = (\mathbf{w}_0, \Psi_r)$, para todo $r = 1, \ldots, k$. Assim, tem-se

$$(\mathbf{w}_{k0}, \Psi_r) = (\overline{\mathbf{u}}_0, \Psi_r), \tag{4.26}$$

para todo $r = 1, \ldots, k$. Mas $\mathbf{w}_{k0} \in S_k$ e S_k é um subespaço invariante do operador Laplaciano. Então $(I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_{k0} \in S_k$ e é possível substituir Ψ_r por $(I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_{k0}$ em (4.26), de forma que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w}_{k0}, (I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_{k0}) &= (\overline{\mathbf{u}}_0, (I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_{k0}) \\
&= (\mathbf{u}_0, \overline{(I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_{k0}}) \\
&= (\mathbf{u}_0, (I - \delta^2\Delta)\overline{G_N\mathbf{w}_{k0}}) \\
&= (\mathbf{u}_0, G_N\mathbf{w}_{k0}).
\end{aligned}$$

Integrando por partes $(\mathbf{w}_{k0}, (I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_{k0})$, tem-se

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w}_{k0}, (I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_{k0}) &= (\mathbf{w}_{k0}, G_N\mathbf{w}_{k0}) - \delta^2(\mathbf{w}_{k0}, \Delta G_N\mathbf{w}_{k0}) \\
&= \|\mathbf{w}_{k0}\|^2_{G_N} + \delta^2(\nabla\mathbf{w}_{k0}, \nabla G_N\mathbf{w}_{k0}) \\
&= \|\mathbf{w}_{k0}\|^2_{G_N} + \delta^2(\nabla\mathbf{w}_{k0}, G_N\nabla\mathbf{w}_{k0}) \\
&= \|\mathbf{w}_{k0}\|^2_{G_N} + \delta^2\|\nabla\mathbf{w}_{k0}\|^2_{G_N}.
\end{aligned}$$

Usando (4.15) e a desigualdade de Cauchy, tem-se

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_0, G_N\mathbf{w}_{k0}) &= (G_N^{1/2}\mathbf{u}_0, G_N^{1/2}\mathbf{w}_{k0})\\ &\leq \frac{1}{2}\|G_N^{1/2}\mathbf{u}_0\|^2 + \frac{1}{2}\|G_N^{1/2}\mathbf{w}_{k0}\|^2\\ &\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|_{G_N}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{w}_{k0}\|_{G_N}^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\mathbf{u}_0, G_N\mathbf{w}_{k0}) \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|_{G_N}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{w}_{k0}\|_{G_N}^2.$$

Consequentemente

$$\|\mathbf{w}_{k0}\|_{G_N}^2 + \delta^2\|\nabla\mathbf{w}_{k0}\|_{G_N}^2 \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|_{G_N}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{w}_{k0}\|_{G_N}^2,$$

com o qual chega-se à seguinte estimativa:

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{w}_{k0}\|_{G_N}^2 + \delta^2\|\nabla\mathbf{w}_{k0}\|_{G_N}^2 \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|_{G_N}^2. \tag{4.27}$$

Precisamos mostrar que é possível considerar $T_k = T$. Como $(I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_k \in S_k$ para qualquer $t \in [0, T)$, então é possível substituir Ψ_r por $(I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_k$ em (4.23), obtendo assim

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\mathbf{w}_k}{\partial t}, (I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_k\right) + \left(\nabla\cdot(\overline{(G_N\mathbf{w}_k)\,(G_N\mathbf{w}_k)}\,), (I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_k\right)&\\ +\nu\left(\nabla\mathbf{w}_k, \nabla(I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_k\right) = \left(\overline{\mathbf{f}}, (I - \delta^2\Delta)G_N\mathbf{w}_k\right).&\end{aligned}$$

Do mesmo jeito que foi deduzida a desigualdade de energia para soluções fortes (4.16), obtém-se

$$\frac{1}{2}||\mathbf{w}_k(t)||_{G_N}^2 + \frac{\delta^2}{2}||\nabla\mathbf{w}_k(t)||_{G_N}^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t ||\nabla\mathbf{w}_k(s)||_{G_N}^2\,ds + \nu\delta^2\int_0^t ||\Delta\mathbf{w}_k(s)||_{G_N}^2\,ds \leq M \tag{4.28}$$

onde

$$M := K\left(\int_0^T ||\mathbf{f}(s)||_{-1}^2\,ds + \delta^2||\nabla\,\mathbf{w}_{k_0}||_{G_N}^2 + ||\mathbf{w}_{k_0}||_{G_N}^2\right) \tag{4.29}$$

e $K = max\left\{\frac{C||G_N||^2}{2\nu}, \frac{1}{2}\right\}$.

De (4.29) tem-se que M não depende de t e de (4.27) tem-se que M também não depende de k. Da ortonormalidade da família $\{\Psi_j\}_j$ em $H(\Omega)$ tem-se uma estimativa a priori dos coeficientes η_{kr}:

De (4.21),

$$(\mathbf{w}_k, \Psi_r) = \left(\sum_{i=1}^{k} \eta_{ki}(t)\Psi_i(\mathbf{x}), \Psi_r \right) = \eta_{kr},$$

porém

$$|(\mathbf{w}_k(\mathbf{x}, t), \Psi_r(\mathbf{x}))| = |\eta_{kr}(t)| \leq \|\mathbf{w}_k(t)\|,$$

e de (4.28),

$$|\eta_{kr}(t)|^2 \leq \|\mathbf{w}_k(t)\|^2 \leq 2M,$$

consequentemente, pela equivalência das normas,

$$|\eta_{kr}(t)|^2 \leq C\|\mathbf{w}_k(t)\|_{G_N}^2 \leq 2CM,$$

para todo $t \in [0, T)$, $r = 1, \ldots, k$ e $k \in \mathbb{N}$, o qual implica que para qualquer k existe uma solução global (em $[0, T)$) do sistema de EDO (4.24),

$$\eta_{kr} \in W^{1,2}[0, T),$$

onde $r = 1, \ldots, k$.

Do mesmo jeito que em Galdi [9], usando a estimativa (4.28) é possível mostrar que existe uma subseqüência de $\mathbf{w}_k$, $\mathbf{w}_{k_j}$, a qual converge fracamente em $V(\Omega)$ e uniformemente em t para uma função $\mathbf{w} \in L^\infty(0, T, V(\Omega))$. Da estimativa (4.28) tem-se que a seqüência $\mathbf{w}_k$ é limitada em $L^2(0, T, \overline{H}^2(\Omega))$, o que implica que tem uma subseqüência $\mathbf{w}_{k_j}$ convergente, a qual converge para uma função $\mathbf{w}' \in L^2(0, T, \overline{H}^2(\Omega))$. Tomando o limite de $\mathbf{w}_{k_j}$ no espaço $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ tem-se $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$, com o que obtém-se que $\mathbf{w} \in \overline{H}^2(\Omega) \cap H(\Omega)$.

Como em Galdi [9], tomando o limite na igualdade (4.23) tem-se que $\mathbf{w}$ satisfaz a igualdade (4.14). No caso dos modelos de Stolz-Adams, quando é tomado o limite, é preciso mostrar que para uma autofunção Ψ_r dada, o termo não linear satisfaz,

$$\int_0^t (\overline{\nabla \cdot (G_N\mathbf{w}_k)(G_N\mathbf{w}_k)}, (I - \delta^2\Delta)\Psi_r) - (\overline{\nabla \cdot (G_N\mathbf{w})(G_N\mathbf{w})}, (I - \delta^2\Delta)\Psi_r)\, ds \to 0.$$

Mas,

$$\left|\int_0^t (\overline{\nabla\cdot(G_N\mathbf{w}_k)(G_N\mathbf{w}_k)},(I-\delta^2\Delta)\Psi_r)-(\overline{\nabla\cdot(G_N\mathbf{w})(G_N\mathbf{w})},(I-\delta^2\Delta)\Psi_r)\,ds\right|$$

$$=\left|\int_0^t (\overline{G_N\mathbf{w}_k\cdot\nabla G_N\mathbf{w}_k},(I-\delta^2\Delta)\Psi_r)-(\overline{G_N\mathbf{w}\cdot\nabla G_N\mathbf{w}},(I-\delta^2\Delta)\Psi_r)\,ds\right|$$

$$=\left|\int_0^t (G_N\mathbf{w}_k\cdot\nabla G_N\mathbf{w}_k,\overline{(I-\delta^2\Delta)\Psi_r})-(G_N\mathbf{w}\cdot\nabla G_N\mathbf{w},\overline{(I-\delta^2\Delta)\Psi_r})\,ds\right|$$

$$=\left|\int_0^t (G_N\mathbf{w}_k\cdot\nabla G_N\mathbf{w}_k,(I-\delta^2\Delta)\overline{\Psi_r})-(G_N\mathbf{w}\cdot\nabla G_N\mathbf{w},(I-\delta^2\Delta)\overline{\Psi_r})\,ds\right|$$
$$=\left|\int_0^t (G_N\mathbf{w}_k\cdot\nabla G_N\mathbf{w}_k,\Psi_r)-(G_N\mathbf{w}\cdot\nabla G_N\mathbf{w},\Psi_r)\,ds\right|$$
$$=\left|\int_0^t (G_N(\mathbf{w}_k-\mathbf{w})\cdot\nabla G_N\mathbf{w}_k,\Psi_r)+(G_N\mathbf{w}\cdot\nabla G_N(\mathbf{w}_k-\mathbf{w}),\Psi_r)\,ds\right|$$

$$\leq\left|\int_0^t (G_N(\mathbf{w}_k-\mathbf{w})\cdot\nabla G_N\mathbf{w}_k,\Psi_r)\,ds\right|+\left|\int_0^t (G_N\mathbf{w}\cdot\nabla G_N(\mathbf{w}_k-\mathbf{w}),\Psi_r)\,ds\right|$$
$$=\left|\int_0^t (G_N(\mathbf{w}_k-\mathbf{w})\cdot G_N\nabla\mathbf{w}_k,\Psi_r)\,ds\right|+\left|\int_0^t (G_N\mathbf{w}\cdot G_N(\nabla(\mathbf{w}_k-\mathbf{w})),\Psi_r)\,ds\right|$$
$$\leq\|G_N\|^2\|\mathbf{w}_k-\mathbf{w}\|_{L^2(0,T,L^2)}\|\nabla\mathbf{w}_k\|_{L^2(0,T,L^2)}\|\Psi_r\|_\infty+\left|\int_0^t (G_N\mathbf{w}\cdot G_N(\nabla(\mathbf{w}_k-\mathbf{w})),\Psi_r)\,ds\right|$$

O primeiro termo converge para 0, pois $\mathbf{w}_k\to\mathbf{w}$ em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$, e o segundo termo converge para 0 pelo fato que $\nabla\mathbf{w}_k\to\nabla\mathbf{w}$ fracamente em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ e porque o operador G_N é auto-adjunto.

A desigualdade de energia (4.18) é obtida da mesma forma como no caso da equação de Navier-Stokes, tomando o limite em (4.28). $\square$

5 CONCLUSÃO

O propósito inicial do presente trabalho foi realizar um estudo dos conhecimentos básicos de LES, de sua importância para o estudo de problemas de turbulência, dos problemas de fecho que surgem ao usar LES e dos modelos de Stolz-Adams. Foi através dessas idéias que decidiu-se fazer um estudo analítico de um modelo de turbulência, usando os operadores G_N, dada a importância destes operadores, especialmente do ponto de vista computacional. Foi definida uma função $\|\cdot\|_{G_N}$, em termos destes operadores, que é uma norma equivalente à norma usual de L^2. Foi possível então usá-la para o estudo da estabilidade e da existência de soluções, o que é apresentado no capítulo 4. Esta técnica é diferente do comumente usado para o estudo da estabilidade e existência de soluções, tornando esse estudo claro e objetivo. Além disso, é verificado que os modelos de deconvolução de Stolz-Adams analisados tem interessantes propriedades em comparação com outros modelos de LES. Eles foram testados e as suas vantagens comprovadas nos estudos computacionais de Stolz, Adams e Kleiser [38].

Como posteriores estudos, pode-se considerar, por exemplo, a análise da modelagem do erro da aproximação e a simulação computacional, o que seria importante para a verificação dos resultados analíticos e a aplicação de LES a problemas práticos.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces.* Academic Press., New York, 1975.

[2] BAKER, JR, G. A. *Essentials of Padé Approximants.* Academic Press, New York, 1975.

[3] BARDINA, J., FERZIGER, J. H., AND REYNOLDS, W. C. *Improved Subgrid-Scale Models for Large Eddy Simulation.* 1980.

[4] BERSELLI, L. C., ILIESCU, T., AND LAYTON, W. *Large Eddy Simulation.* Cambridge, Berlin, 2006.

[5] BERTERO, M., AND BOCCACCI, P. *Introduction to Inverse Problems in Imaging.* IOP Publishing, UK, 1998.

[6] CARATI, D., WINCKELMANS, G. S., AND JEANMART, H. On the modelling of the subgrid-scale and filtered-scale stress tensors in Large Eddy Simulation. *J. Fluid Mech. 441* (2001), 119–138.

[7] CHESKIDOV, A., HOLM, D. D., OLSON, E., AND TITI, E. S. On a Leray-α model of turbulence. *Proc. R. Soc. A 461* (2005), 629–649.

[8] DUNCA, A., AND JOHN, V. Finite element error analysis of space averaged flow fields defined by a differential filter. *M^3AS 14* (2004), 603–618.

[9] GALDI, G. P. *Lectures in Mathematical Fluid Dynamics.* Birkhauser-Verlag, Basel, Switzerland, 2000.

[10] GALDI, G. P., AND LAYTON, W. J. Approximating the larger eddies in fluid motion II: A model for space filtered flow. *M^3AS 10* (2000), 1–8.

[11] GERMANO, M. Differential filters for the Large Eddy Numerical Simulation of turbulent flows. *Phys. Fluids 29* (1986), 1755–1757.

[12] GERMANO, M. Differential filters of elliptic type. *Phys. Fluids 29* (1986), 1757–1758.

[13] GERMANO, M. LES overview. *In C. Liu, L. Sakell and T. Bentner editors, DNS/LES Progress and Challengues* (2001).

[14] GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P., AND CABOT, W. H. A dynamic subgrid scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A3* (1991), 1760–1765.

[15] GHOSAL, S. Mathematical and phisical constraints on LES of turbulence. *A.I.A.A.J. 37* (1999), 425–433.

[16] GIRAULT, V., AND RAVIART, P. A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.* Springer-Verlag, 1986.

[17] GRISVARD, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* Pitman, Toronto, 1985.

[18] JOHN, V. *Large Eddy Simulation for Turbulence Imcompressible Flows.* Springer, Berlin, 2004.

[19] LAWRENCE, E. C. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[20] LAYTON, W., AND LEWANDOWSKI, R. A simple and stable scale-similarity model for Large Eddy Simulation: Energy balance and existence of weak solutions. *Appl. Math. Lett. 16* (2003), 1205–1209.

[21] LAYTON, W., MATTHIES, G., ILIESCU, T., JOHN, V., AND TOBISKA, L. *An Assessment of Models in Large Eddy Simulation.* 2001.

[22] LAYTON, W. J. Approximating the larger eddies in fluid motion v: Kinetic energy balance of scale similarity models. *Mathematical and Computer Modelling 31* (2000), 1–7.

[23] LAYTON, W. J. A connection between subgrid scale eddy viscosity and mixed methods. *Appl. Math. and Comput. 133*, 1 (2002), 147–157.

[24] LAYTON, W. J. A mathematical introduction to Large Eddy Simulation. Tech. rep., Univ. of Pittsburgh, U.S.A., 2002.

[25] LAYTON, W. J., AND LEWANDOWSKI, R. Analysis of an eddy viscosity model for Large Eddy Simulation of turbulent flows. *J. Math. Fluid Mech. 4* (2002), 374–399.

[26] LESIEUR, M. *Turbulence in Fluids.* Springer, The Netherlands, 2008.

[27] LESIEUR, M., METAIS, O., AND COMTE, P. *Large-Eddy Simulation for Turbulence.* Cambridge, 2005.

[28] LIEB, E. H., AND LOSS, M. *Analysis.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 14, U.S.A., 1997.

[29] MENEVEAU, C., LUND, T. S., AND CABOT, W. H. A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence. *J. Fluid Mech. 319* (1996), 353–385.

[30] MOHAMMADI, B., AND PIRONNEAU, O. *Analysis of K-Epsilon Turbulence Model.* John Wiley and Sons, 1994.

[31] MORINISHI, Y., LUND, T. S., VASILYEV, O., AND MOIN, P. Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow. *J. Comput. Phys. 143* (1998), 90–124.

[32] MOURA, C. A. D. *Analise Funcional para Aplicações-Posologia.* 2002.

[33] MULLEN, J. S., AND FISCHER, P. F. Filtering techniques for complex geometry fluid flows. *Commun. Numer. Meth. Engng. 15* (1999), 9–18.

[34] POZZI, A. *Applications of Padé Approximation Theory in Fluid Dynamics.* World Scientific, 1994.

[35] SAGAUT, P. *Large Eddy Simulation for Imcompressible Flows.* Springer, New York, 1998.

[36] SALVETTI, V. M., AND BANERJEE, S. A priori tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite difference Large-Eddy Simulations. *Phys. Fluids 7* (1995), 2831–2847.

[37] Sarghini, F., Piomelli, U., and Balaras, E. Scale-similar models for Large Eddy Simulation. *Phys. Fluids 11* (1999), 1596–1607.

[38] Stolz, S., Adams, N. A., and Kleiser, D. An approximate deconvolution model for Large-Eddy Simulation with application to incompressible wall-bounded flows. *Phys. Fluids 13* (2001), 997–1015.

[39] Vreman, B., Geurts, B., and Kuerter, H. Relizability condition for the turbulent stress tensor in LES. *J. Fluid Mech. 278* (1994), 351–362.

[40] Winckelmans, G. S., Lund, T. S., Carati, D., and Wray, A. A. A priori testing of subgrid-scale models for the velocity-pressure and vorticity-velocity formulations. *In Proc. Summer Program-Center for Turb. Research* (1996), 309–328.

[41] Zang, Y., Street, R. L., and Kosff, J. R. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Phys. Fluids A5* (1993), 3186–3196.

[42] Zhou, Y., Hossain, M., and Vahala, G. A critical look at the use of filters in Large Eddy Simulation. *Phys. Lett A139* (1989), 330–332.