

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA**

**O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN
APLICADO À INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA DE
UM CABO**

por

Adriana Elisa Ladeira Pereira

**Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli
Orientador**

**Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes
Co-orientador**

**Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a
obtenção do título Doutor em Matemática Aplicada.**

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Andrei Burchtein
Prof. Dr. Igor Mozolevski
Prof. Dr. Waldir Leite Roque**

**UFPEL
UFSC
PPGMAp/UFRGS**

Porto Alegre, 2010

Este trabalho é dedicado às minhas filhas

Raquel e Isabel

*ao meu marido **Claiton***

*e aos meus pais **Osmar e Telka***

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me dado condições para realizar este trabalho.

Ao PPGMAp, por ter me dado a oportunidade de realizar esta Tese.

Ao meu orientador Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli, pelo excelente trabalho, pela eficiência, dedicação, amizade, paciência e colaboração.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes por ter sido um excelente profissional, eficiente, dedicado, paciente, compreensivo e, principalmente por ter-se mostrado um grande amigo, não medindo esforços para me ajudar na realização desta Tese.

Ao antigo Departamento de Matemática da FURG, atual IMEF, por ter me concedido o afastamento para a realização do curso de Doutorado.

À CAPES pela concessão de recursos.

A todos os colegas que me apoiaram durante a realização deste trabalho, em especial à Denise, à Celiane, à Catia, à Elaine e ao Scott.

Aos meus pais Osmar e Telka, à minha avó Ida e aos meus irmãos, que sempre participaram de todos os momentos de minha vida, e me apoiaram.

Ao meu sogro Carlos e à minha sogra Madelaine, que estão sempre prontos para me ajudar.

Às minhas filhas Raquel e Isabel, pelo amor, apoio, incentivo e por entenderem a minha ausência nos momentos em que estava trabalhando nesta Tese.

Ao meu marido Claiton, pelo amor, dedicação, incentivo, e também pela compreensão nos momentos de nervosismo, irritação e ausência devido à realização deste trabalho.

Finalmente, gostaria de agradecer à Santa Rita de Cássia, que está sempre pronta a atender às minhas preces.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA.....	i
AGRADECIMENTOS.....	ii
SUMÁRIO.....	iii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	1
LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS.....	5
LISTA DE FIGURAS.....	7
RESUMO.....	11
ABSTRAT.....	12
CAPÍTULO I.....	13
1. INTRODUÇÃO.....	14
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	16
1.1.1 DINÂMICA DE CABOS.....	16
1.1.2 INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA.....	25
1.1.3 MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN.....	28
1.2 OBJETIVOS.....	32
1.2.1 OBJETIVO GERAL.....	32
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	32
1.3 ROTEIRO DO TRABALHO.....	32
CAPÍTULO II.....	34
2. MODELAGEM DINÂMICA DO CABO.....	35
2.1 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO.....	35
2.2 CABO COM TRÊS ARTICULAÇÕES FICTÍCIAS.....	47
CAPÍTULO III.....	62

3.	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COM A DINÂMICA DE CABOS.....	63
	CAPÍTULO IV.....	73
4.	ESCOAMENTO SOBRE CILINDROS CIRCULARES.....	74
4.1	GEOMETRIA E NÚMERO DE REYNOLDS.....	74
4.2	ESCOAMENTO NÃO VISCOSO SOBRE UM CILINDRO.....	77
4.3	ESCOAMENTO VISCOSO SOBRE UM CILINDRO.....	80
	CAPÍTULO V.....	83
5.	MODELO ANALÍTICO PARA O ESCOAMENTO SOBRE CILINDROS.....	84
5.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	85
5.2	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES.....	97
	CAPÍTULO VI.....	112
6.	INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA.....	113
6.1	FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	113
6.2	RESULTADOS.....	122
	CAPÍTULO VII.....	147
7.	CONCLUSÕES.....	148
	CAPÍTULO VIII.....	151
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	152
	CAPÍTULO IX.....	162
	APÊNDICE A. TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS.....	163
A.1	MATRIZ DE ROTAÇÃO.....	163
A.2	COMPOSIÇÃO DE MATRIZES DE ROTAÇÃO.....	167
A.3	TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS.....	168
A.4	COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS.....	170
	APÊNDICE B. O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN.....	172

B.1	INTRODUÇÃO DO MÉTODO DE ADOMIAN.....	172
B.2	CÁLCULO DOS POLINÔMIOS DE ADOMIAN.....	173
B.3	SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES.....	174

LISTA DE SÍMBOLOS

a	raio do cilindro
$a_i, i = 1, \dots, n$	alturas
A_V	área da projeção vertical do corpo submerso
A_h	área da projeção horizontal do corpo submerso
$A_{i,j,n}, i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 5$	polinômios de Adomian
$ \vec{a} , \vec{b} $	módulos dos vetores \vec{a} e \vec{b}
C	matriz das constantes de atrito
$c_{ij}, i, j = 1, \dots, 9$	elementos da matriz das constantes de atrito
c_{1a}, c_{2a}, c_{3a}	constantes de atrito devido aos movimentos de azimute
c_{1e}, c_{2e}, c_{3e}	constantes de atrito devido aos movimentos de elevação
c_{1T}, c_{2T}, c_{3T}	constantes de atrito devido aos movimentos de torção
c_p	coeficiente de pressão
c_s	coeficiente de sustentação do cilindro
d	deslocamento
D	comprimento característico
dA_x, dA_y	elementos de área
E	Módulo de Young
E_c	energia cinética
E_{c_R}	energia cinética devido ao movimento de rotação
E_{c_T}	energia cinética devido ao movimento de translação
E_p	energia potencial
$\vec{f}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}), \vec{F}(\vec{X})$	vetor de esforços não lineares
$F(z)$	potencial complexo
$f_i, i = 1, \dots, 9$	componentes do vetor de esforços não lineares
$\vec{F}_i, i = 1, \dots, 3$	vetor força atuante no i-ésimo elo
$f_{ia}, f_{ib}, f_{ic}, f_{id}, i = 1, \dots, 6$	termos das componentes do vetor de esforços não lineares

F_D	força de arrasto
F_L	força de sustentação
F_r	componente da força na direção r
F_θ	componente da força na direção θ
F_x	componente da força na direção x
F_y	componente da força na direção y
F_z	componente da força na direção z
f_s	frequência de emissão de vórtices
g	aceleração da gravidade
$H_{0_1}, H_{0_2}, H_{0_3}, H_{1_2}, H_{1_3}$	matrizes de transformação homogênea
$h_i, i = 1, \dots, n$	alturas
I	inércia da seção transversal
$I_{R_i}, i = 1, \dots, n$	momentos de inércia de rotação nas articulações fictícias
$I_{T_i}, i = 1, \dots, n$	momentos de inércia de torção nas articulações fictícias
$I(\vec{\theta})$	matriz de inércia
$I_{ij}, i, j = 1, \dots, 9$	elementos da matriz $I(\vec{\theta})$
I_3	matriz identidade 3×3
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	vetores da base ortonormal
K	matriz das constantes elásticas
$k_{ia}, i = 1, \dots, n$	constantes elásticas devido aos ângulos de azimute
$k_{ie}, i = 1, \dots, n$	constantes elásticas devido aos ângulos de elevação
$k_{iT}, i = 1, \dots, n$	constantes elásticas devido aos ângulos de torção
l	comprimento do cabo
L	Lagrangeano do sistema
$L_i, La_1, i = 1, \dots, 5$	termos que fazem parte do Lagrangeano
L_t	operador diferencial em relação à t
L_t^{-1}	operador integral em relação à t
$l_i, i = 1, \dots, n$	comprimentos dos elos do cabo
$m_i, i = 1, \dots, n$	massas dos elos do cabo

m_c	massa da carga
$O_i X_i, O_i Y_i, O_i Z_i$	eixos do sistema de coordenadas
p	pressão
p_∞	pressão na corrente livre
$P(\vec{X})$	matriz do sistema da dinâmica do cabo
$\vec{p}_{x_1 y_1 z_1}$	vetor
$\hat{p}_{x_1 y_1 z_1}$	vetor em coordenadas homogêneas
$P_{x_i y_i z_i}$	coordenadas do ponto no sistema de referência $x_i y_i z_i$
$p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}$	projeções de \vec{p} segundo os eixos ox_1, oy_1 e oz_1
q	carregamento gerado pela interação fluido-estrutura
Re	número de Reynolds
R	matriz de rotação
R^{-1}	inversa da matriz R
R^T	transposta da matriz R
$R_{x_0, \alpha}, R_{y_0, \phi}$ e $R_{z_0, \theta}$	matrizes de rotações básicas elementares
\vec{r}	vetor do braço de alavanca
$\vec{r}_{2a}, \vec{r}_{3a}, \vec{r}_{1c}, \vec{r}_{2c}, \vec{r}_{3c}$	vetores utilizados na determinação dos torques
\vec{s}	vetor
St	número de Strouhal
t	tempo
T	matriz de transformação homogênea
$\vec{T}_i, i = 1, \dots, 3$	vetor torque no i-ésimo elo do cabo
\vec{T}_m	vetor de torques externos
$T_{mi}, i = 1, \dots, 9$	componentes do vetor \vec{T}_m
$T_{\theta ia}, T_{\theta ie}, T_{\theta iT}$	torques externos atuando nas articulações fictícias
$T_{ix}, T_{iy}, T_{iz}, i = 1, \dots, 3$	torques no i-ésimo elo
$T_{x_0, \alpha}, T_{y_0, \phi}$ e $T_{z_0, \theta}$	matrizes de rotações homogêneas básicas
U	velocidade do fluido
U_∞	velocidade característica do escoamento

v_r	componente do vetor velocidade do fluido na direção r
$v_{r_i}, i = 1, \dots, 3$	termos da série $\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n}$
$v_{\theta_i}, i = 1, \dots, 3$	termos da série $\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n}$
$v_{z_i}, i = 1, \dots, 3$	termos da série $\sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n}$
v_{θ}	componente do vetor velocidade do fluido na direção θ
v_z	componente do vetor velocidade do fluido na direção z
V_{∞}, V	velocidade da corrente livre
w	fator de escala
\vec{X}	vetor de estado
$\dot{\vec{X}}$	derivada do vetor de estado em relação à t
$x_i, i = 1, \dots, 18$	componentes do vetor de estado \vec{X}
$\dot{x}_i, i = 1, \dots, 18$	componentes do vetor $\dot{\vec{X}}$
$X_0 Y_0 Z_0$	sistema inercial da base
$X_G Y_G Z_G$	sistema geodésico
$X_i Y_i Z_i$	sistema de referência
$X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}$	eixos dos sistemas de referência

LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

$\sum_{n=0}^{\infty} A_{i,n}, i = 1, \dots, 3$	séries dos termos não lineares dos polinômios de Adomian
α_i	plano
Δ	unidade de volume
$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right)$	derivada total em relação à t
$\frac{dF}{dz}$	derivada da velocidade em relação à z
$\frac{\partial L}{\partial \theta_{ia}}, \frac{\partial L}{\partial \theta_{ie}}, \frac{\partial L}{\partial \theta_{iT}}$	derivadas parciais do Lagrangeano
$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}$	derivadas parciais da função potencial
$\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$	derivadas parciais da função de corrente
$\frac{\partial p}{\partial x}$	gradiente de pressão
$\frac{\partial v_r}{\partial t}, \frac{\partial v_r}{\partial r}, \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \frac{\partial v_r}{\partial z}$	derivadas parciais de v_r
$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}, \frac{\partial v_\theta}{\partial r}, \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$	derivadas parciais de v_θ
$\frac{\partial v_z}{\partial t}, \frac{\partial v_z}{\partial r}, \frac{\partial v_z}{\partial \theta}, \frac{\partial v_z}{\partial z}$	derivadas parciais de v_z
$\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}$	derivadas parciais de segunda ordem
$\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{\partial p}{\partial \theta}, \frac{\partial p}{\partial z}$	gradientes de pressão
$\frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial u_i}{\partial y}, \frac{\partial u_i}{\partial z}$	derivadas parciais onde $u_i = (u, v, w)$
μ	viscosidade
μ_T	viscosidade turbulenta
(r, θ, z)	coordenadas cilíndricas

$\sum_{i=1}^j$, $\sum_{j=1}^n$, $\sum_{i=1}^{\ell}$, $\sum_{i=1}^{\ell-1}$	somatórios
\int	símbolo de integração
ϕ	potencial de velocidade
ρ	massa específica
ψ	função de corrente
$\vec{\theta}$	vetor de estado
$\dot{\vec{\theta}}$	derivada primeira do vetor $\vec{\theta}$ em relação à t
$\ddot{\vec{\theta}}$	derivada segunda do vetor $\vec{\theta}$ em relação à t
$\theta_{ia}, i = 1, \dots, n$	ângulos de azimute
$\theta_{ie}, i = 1, \dots, n$	ângulos de elevação
$\theta_{iT}, i = 1, \dots, n$	ângulos de torção
$\dot{\theta}_{ia}, i = 1, \dots, n$	derivada em relação à t da posição em azimute
$\dot{\theta}_{ie}, i = 1, \dots, n$	derivada em relação à t da posição em elevação
$\dot{\theta}_{iT}, i = 1, \dots, n$	derivada em relação à t da posição em torção
$\vec{\Gamma}$	vetor dos torques
ν	viscosidade cinemática do fluido
$\sum_{n=0}^{\infty} v_{rn}$	série que representa v_r
$\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta n}$	série que representa v_{θ}
$\sum_{n=0}^{\infty} v_{zn}$	série que representa v_z
(x_i, y_i, z_i)	coordenadas do centro de massa do i -ésimo elo do cabo
(x_c, y_c, z_c)	coordenadas do centro de massa da carga
$(x_{0_1}, y_{0_1}, z_{0_1})$	coordenadas na segunda articulação fictícia
$(x_{1_2}, y_{1_2}, z_{1_2})$	coordenadas da terceira articulação fictícia

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Cabos umbilicais utilizados nos sistemas de produção flutuante.....	16
Figura 1.2 Plataforma de Petróleo.....	17
Figura 2.1 Representação esquemática do cabo umbilical.....	36
Figura 2.2 Sistema subaquático.....	36
Figura 2.3 Estrutura flexível e sua representação discreta.....	37
Figura 2.4 Ângulos de azimute, elevação e torção para a articulação da base.....	38
Figura 2.5 Cabo com 4 partes rígidas.....	40
Figura 2.6 Representação geométrica dos dois primeiros sistemas de referência.....	42
Figura 2.7 Representação geométrica do cabo com três articulações fictícias.....	48
Figura 3.1 Representação gráfica das convenções adotadas para os ângulos de elevação e azimute.....	64
Figura 3.2 Representação gráfica das convenções adotadas para o sistema inercial.....	65
Figura 3.3 Posição angular de cada elo em elevação com o cabo fora da água.....	67
Figura 3.4 Posição angular de cada elo em azimute com o cabo fora da água.....	68
Figura 3.5 Posição espacial da massa terminal do cabo fora da água.....	68
Figura 3.6 Posição da massa terminal do cabo fora da água.....	69
Figura 3.7 Posição angular de cada elo em elevação com o cabo submerso.....	69
Figura 3.8 Posição angular de cada elo em azimute com o cabo submerso.....	70
Figura 3.9 Posição espacial da massa terminal do cabo submerso.....	70
Figura 3.10 Posição da massa terminal do cabo submerso.....	71
Figura 3.11 Posição angular em torção para cada elo.....	71
Figura 3.12 Posição angular em torção para cada elo.....	72

Figura 4.1 Regimes de escoamento em torno de um cilindro circular.....	75
Figura 4.2 Esteira de Vórtices de Von Kármán para dois regimes de escoamento laminar ($Re=140$) e turbulento ($Re = 10^4$).....	76
Figura 4.3 Variação do número de St com o número de Re e os regimes de escoamento para um cilindro circular.....	77
Figura 4.4 Escoamento não viscoso em torno de um cilindro circular.....	78
Figura 4.5 Escoamento com gradiente de pressão adverso sobre um cilindro.....	81
Figura 4.6 Distribuição de pressão em torno de um cilindro circular.....	82
Figura 5.1 Escoamento sobre o cilindro circular considerado neste trabalho.....	84
Figura 5.2 Gráfico do coeficiente de pressão para $Re = 100$ e $t = 0.1s$	101
Figura 5.3 Gráfico do coeficiente de pressão para $Re = 100$ e $t = 0.2s$	102
Figura 5.4 Gráfico do coeficiente de pressão para $Re = 1000$ e $t = 0.1s$	110
Figura 5.5 Gráfico do coeficiente de pressão para $Re = 1000$ e $t = 0.2s$	110
Figura 6.1 Representação das forças que atuam sobre a estrutura flexível submersa...	114
Figura 6.2 Representação do vetor \vec{r}_{1c}	116
Figura 6.3 Representação dos vetores \vec{r}_{2a} e \vec{r}_{2c}	117
Figura 6.4 Representação dos vetores \vec{r}_{3a} e \vec{r}_{3c}	118
Figura 6.5 Representação espacial dos torques.....	120
Figura 6.6 Representação dos torques no plano.....	120
Figura 6.7 Forças na direção X (transversal ao escoamento).....	123
Figura 6.8 Forças na direção Y (mesma direção do escoamento).....	123
Figura 6.9 Posição angular em elevação para cada elo.....	126
Figura 6.10 Posição angular em azimute para cada elo.....	126
Figura 6.11 Torques em elevação para cada elo.....	127
Figura 6.12 Torques em azimute para cada elo.....	127

Figura 6.13 Posição angular em elevação para cada elo.....	128
Figura 6.14 Posição angular em elevação para o terceiro elo (ampliação).....	128
Figura 6.15 Posição angular em azimute para cada elo.....	129
Figura 6.16 Posição angular em azimute para cada elo (ampliação).....	129
Figura 6.17 Torques em elevação e em azimute para cada elo.....	130
Figura 6.18 Posição angular em elevação para cada elo.....	131
Figura 6.19 Posição angular em azimute para cada elo.....	131
Figura 6.20 Torques em elevação para cada elo.....	132
Figura 6.21 Torques em azimute para cada elo.....	132
Figura 6.22 Posição da carga.....	133
Figura 6.23 Movimento espacial da carga.....	133
Figura 6.24 Posição angular em elevação para cada elo.....	134
Figura 6.25 Posição angular em azimute para cada elo.....	135
Figura 6.26 Torques em elevação para cada elo.....	135
Figura 6.27 Torques em azimute para cada elo.....	136
Figura 6.28 Posição angular em elevação para cada elo.....	137
Figura 6.29 Posição angular em azimute para cada elo.....	138
Figura 6.30 Torques em elevação para cada elo.....	138
Figura 6.31 Torques em azimute para cada elo.....	139
Figura 6.32 Posição da carga terminal.....	139
Figura 6.33 Movimento espacial da carga terminal.....	140
Figura 6.34 Posição angular em elevação para cada elo.....	142
Figura 6.35 Posição angular em azimute para cada elo.....	142
Figura 6.36 Torques em elevação para cada elo.....	143
Figura 6.37 Torques em azimute para cada elo.....	143

Figura 6.38 Posição da extremidade livre.....	144
Figura 6.39 Movimento espacial da extremidade livre.....	144
Figura 6.40 Posições em Y da extremidade livre do cabo com comprimentos diferenciados.....	146
Figura A.1 Representação de um referencial fixo $x_0y_0z_0$ e de um móvel $x_1y_1z_1$	164
Figura A.2 Rotação do corpo rígido da Figura A.1 de um ângulo α em relação ao eixo ox_0	166
Figura A.3 Rotação do corpo rígido da Figura A.1 de um ângulo ϕ em relação ao eixo oy_0	167
Figura A.4 Rotação do corpo rígido da Figura A.1 de um ângulo θ em relação ao eixo oz_0	167

RESUMO

Neste trabalho investiga-se a interação fluido-estrutura de um cabo submerso em um fluido. Esta investigação será feita através do acoplamento entre a modelagem da dinâmica do cabo com o movimento do fluido.

Para a dinâmica do cabo propõe-se uma formulação inédita, que consiste em supor que a flexibilidade contínua é representada por uma aproximação discreta, constituída de elos rígidos conectados por articulações elásticas, permitindo movimentos no espaço tridimensional.

Para o movimento do fluido propõe-se o escoamento sobre um cilindro circular, onde as soluções analíticas das equações de Navier-Stokes serão resolvidas através do Método da Decomposição de Adomian. Através deste método, são determinadas as funções que aproximam as componentes da velocidade e a partir destas determina-se uma expressão para a pressão que o fluido exerce sobre o cilindro.

O acoplamento será feito determinando a força resultante que o fluido exerce sobre o cabo, através da integração analítica da diferença de pressão em cada elemento de área do cabo. Através da expressão da força resultante, são determinadas as forças atuantes sobre cada elo do cabo e a partir destas forças são calculados os torques em elevação e azimute em cada articulação fictícia. Estes torques são considerados na modelagem dinâmica do cabo como uma perturbação externa nos movimentos do mesmo, e então são realizadas várias simulações com o cabo submerso na água.

ABSTRAT

In this work I investigate the fluid-structure interaction problem of a submerse cable into a fluid. This investigation will be made through the coupling between the modeling of the dynamics of the cable with the movement of the fluid.

To the dynamic cable, it is proposed a new formulation, which consists in presuming that the continuous flexibility is represented by the discret approach, that consists of rigid links connected by elastic joints, allowing movements on the three-dimensional space.

For the fluid movement it is proposed the flow around a circular cylinder, where the analytical solutions of the Navier-Stokes equations will be solved by the Adomian Method of Decomposition. By this method are determined the functions that approach the speed components and from this determined an expression for the pressure that the fluid exerts on the cylinder.

The coupling will be determined as a result of the strength that the fluid exerts on the cable, by the analytical integration of the pressure difference in every element of the cable area. By the expression of the resultant strength, we determine the strengths on every link of the cable and from these strengths are calculated the torques of elevation and azimuth in every link considered on the dynamic model of the cable as an external force on the movements of the same; then are realized a lot of simulations with the submerse cable on the water.

CAPÍTULO I
INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, os cabos marinhos estão presentes numa grande variedade de aplicações, como nos sistemas de ancoragem e de reboque. Existem também muitas aplicações com cabos umbilicais, como por exemplo, nos cabos utilizados para a comunicação entre um veículo do tipo ROV (*Remotely Operated Vehicle*) com alguma embarcação em superfície.

Determinar o modelo dinâmico de um cabo é um problema complexo em razão das não linearidades, da flexibilidade estrutural no espaço tridimensional e ainda, da existência de complexas interações com o meio no qual o cabo está submerso.

A presente tese propõe um novo formalismo para a modelagem de estruturas flexíveis do tipo cabo, cujo fundamento principal é supor que o cabo é formado por diversos elos rígidos conectados por articulações elásticas, como se o mesmo fosse formado por múltiplos pêndulos esféricos, sendo que cada junção entre dois pêndulos consecutivos é realizada por uma articulação elástica permitindo três movimentos distintos: azimute, elevação e torção, no espaço tridimensional.

A proposta consiste na formulação de um método que permita determinar o Lagrangeano do sistema de forma algorítmica, independentemente do número de elementos que se escolheu para dividir a estrutura flexível. A aplicação das equações de Euler-Lagrange a todos os graus de liberdade do sistema permite a obtenção final do modelo dinâmico.

Uma das principais contribuições da presente tese é a possibilidade da obtenção automática do Lagrangeano do sistema a partir de uma única equação constituída de somatórios que dependem do número de elos considerados, ou seja, dependem do número de graus de liberdade que se pretende para a dinâmica do sistema. Esta equação única para a obtenção do Lagrangeano permite, por exemplo, que se desenvolvam algoritmos para a determinação automática do modelo dinâmico para qualquer número de graus de liberdade. Através da atribuição de valores aos parâmetros de um modelo dinâmico de um cabo foram feitas algumas simulações, apenas para mostrar que o modelo apresenta resultados coerentes com o esperado para o comportamento dinâmico dentro ou fora d'água.

A técnica do Formalismo Discreto foi desenvolvida e validada por PEREIRA [87] que fez um estudo da modelagem dinâmica de uma estrutura flexível no plano, sendo esta estrutura articulada em uma extremidade e livre na outra. Neste formalismo a

estrutura flexível foi dividida em duas, três ou quatro partes rígidas conectadas por articulações elásticas, permitindo apenas o movimento de elevação no espaço bidimensional. Esta técnica também foi utilizada por MACHADO, PEREIRA, GOMES e BORTOLI [72] no desenvolvimento de um algoritmo para a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis e por MACHADO [73][74].

Nos escoamentos em torno de cabos flexíveis existe um acoplamento não linear complexo entre a dinâmica do cabo e as forças que o fluido exerce sobre o mesmo. Considerando-se que o cabo é cilíndrico, propõe-se o escoamento sobre um cilindro circular com eixo de simetria no eixo oz , onde as equações de Navier-Stokes, que determinam o movimento do fluido sobre o cilindro, serão resolvidas analiticamente, através do Método da Decomposição de Adomian, onde as condições iniciais e de contorno são determinadas pelo escoamento potencial em torno do cilindro.

O Método da Decomposição de Adomian, introduzido por Adomian na década de 80, consiste em separar uma equação na sua parte linear e não linear e utilizar o operador inverso. Para determinar o operador inverso da parte não linear, as funções desconhecidas são decompostas em séries, cujos termos são determinados de acordo com fórmulas de recorrência que serão inicializadas pelos valores iniciais ou condições de contorno da equação (SCHNEIDER [96]).

Uma importante vantagem do Método da Decomposição de Adomian é que este método não requer a discretização das variáveis, não sendo afetado pelos erros de arredondamento computacionais e, além disso, não enfrenta a necessidade de grande tempo e memória computacional. A aproximação da decomposição é feita diretamente sem o uso de suposições restritivas ou linearizações. Além disso, ao contrário da maioria dos métodos numéricos, o Método da Decomposição de Adomian fornece uma forma fechada da solução (DEHGAN [41]).

De acordo com o método de Adomian são determinadas as séries das funções que representam as componentes da velocidade do fluido e, através destas componentes, determina-se a pressão que o fluido exerce sobre o cilindro.

A interação entre fluido-estrutura será investigada através do acoplamento da dinâmica do cabo com a solução do escoamento sobre o cilindro. Para o acoplamento integra-se analiticamente a diferença de pressão em cada elemento de área do cilindro, obtendo-se a força resultante que o fluido exerce sobre o cabo. Através da expressão da força resultante, são determinadas as forças atuantes sobre cada elo do cabo e a partir destas forças são calculados os torques em elevação e azimute em cada articulação

fictícia. Estes torques são considerados na modelagem dinâmica do cabo como uma perturbação externa nos movimentos do mesmo, e então são realizadas várias simulações com o cabo dentro d'água.

A grande maioria dos trabalhos que se encontra na literatura aborda a modelagem de cabos subaquáticos a partir das técnicas de elementos finitos e de diferenças finitas. A seguir, apresenta-se a revisão bibliográfica comentada.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1.1 DINÂMICA DE CABOS

Atualmente, cabos marinhos de amarração ou de reboque estão presentes numa grande variedade de aplicações, como por exemplo: nos sistemas de ancoragem compostos por navios, unidades de produção em alto-mar, corpos de superfície ou submarinos, docas flutuantes e outras estruturas flutuantes, nos sistemas de reboque compostos por superfície de navios, corpos submarinos e redes de pesca (MATULEA et al [78]).

Os cabos umbilicais empregados nos sistemas de produção flutuantes (SPF), Figura 1.1, constituem uma estrutura muito complexa, do ponto de vista de sua geometria e materiais, que interagindo fazem com que o cabo envie sinais de controle e forneça energia elétrica ao conjunto de válvulas, que se encontra instalado na cabeça do poço de petróleo no fundo do mar (CORDOVÉS [36]).

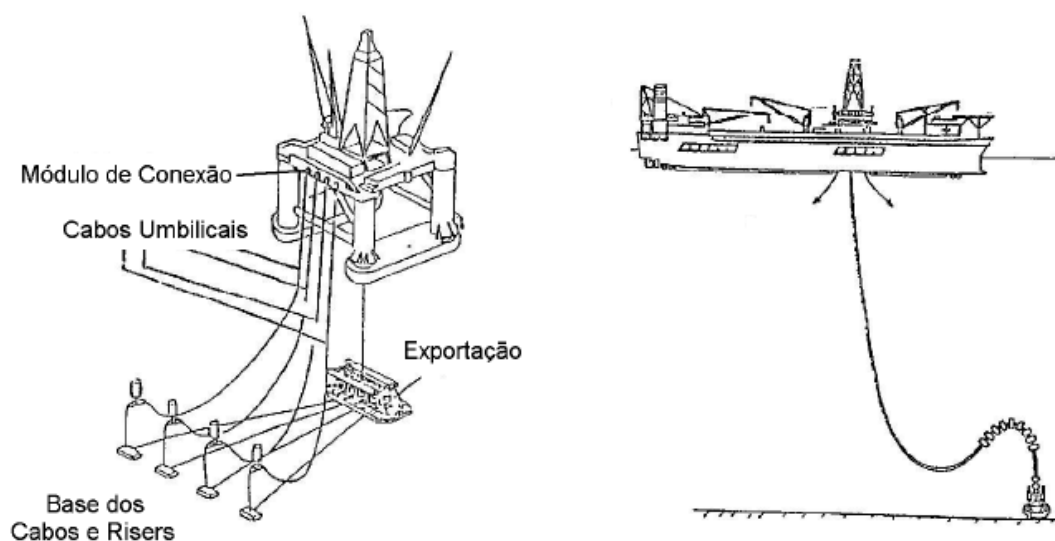


Figura 1.1 Cabos umbilicais utilizados nos sistemas de produção flutuante (CORDOVÉS [36])

CÁRDENAS, MACHADO e GONÇALVES [29] apresentaram um estudo dos efeitos do carregamento cíclico e do ambiente marinho sobre as propriedades mecânicas do polietileno de alta densidade (high-density polyethylene - HDPE) usado na camada externa de cabos submarinos e mostraram que o carregamento cíclico, a água do mar e as radiações ultravioletas aceleram o processo de degradação do HDPE.

As técnicas numéricas capazes de tratar problemas não lineares vêm sendo alvo de inúmeros pesquisadores, pois cada vez mais surgem modelos sofisticados para a descrição das realidades físicas que geram sistemas de equações não lineares, como no estudo de cabos submarinos. Na ligação entre plataformas e poços petrolíferos (Figura 1.2) são utilizados cabos de grande comprimento, sendo estes conhecidos industrialmente como cabos umbilicais. A geometria particular destes cabos sugere a utilização de modelos que explorem este fato, minimizando assim, o custo em projetos e cálculos computacionais. Em muitas situações de operação, estes cabos são submetidos a grandes deslocamentos, surgindo assim efeitos complexos como o acoplamento flexão-torção (ROCHINHA, SAMPAIO e LE TALLEC [94]).

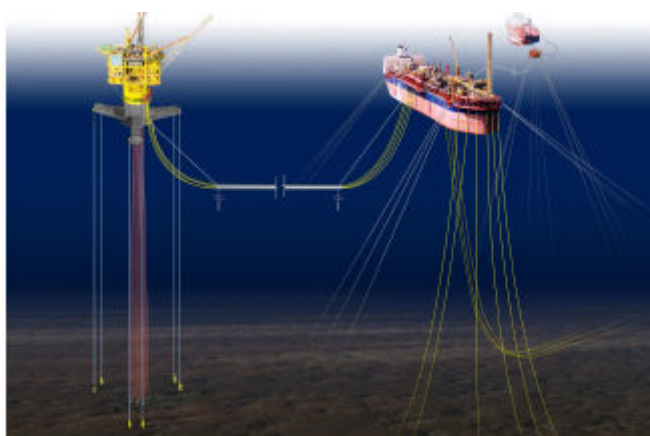


Figura 1.2 Plataforma de petróleo (PINTO [89])

A dinâmica tridimensional de cabos pode ser estudada através de vários sistemas de coordenadas; entretanto, as propriedades dinâmicas fundamentais do cabo são de melhor forma analisadas em um sistema local de coordenadas, ou sistema Lagrangeano de coordenadas, que é fixado no próprio cabo (BLIEK [25] e HOWELL [53]).

A configuração estática de cabos foi apresentada através de um modelo matemático com um método numérico baseado em Diferenças Finitas por MATULEA et al [78] e através do método da Bissecção com a ajuda do método Runge-Kutta de quarta ordem. WANG, HUANG e DENG [115] apresentaram a solução para o estado estacionário destes cabos.

BLIEK [25] desenvolveu um método matricial para a análise de sistemas de amarração, que utiliza uma malha iterativa para harmonizar as linearizações e que envolve as matrizes de transferência que surgem a partir de uma decomposição das equações do cabo em Diferenças Finitas, e HOVER, GROSENBAUGH, e TRIANTAFYLLOU [51] desenvolveram uma extensão do método matricial de BLIEK [25] para abordar a resposta dinâmica de sistemas submarinos de reboque.

Para o dimensionamento de estruturas constituídas por cabos ou cabos isolados, duas abordagens usualmente utilizadas são: as equações analíticas baseadas em condições de equilíbrio e forças, e o método dos elementos finitos, através de uma formulação baseada nos deslocamentos dos nós. VARUM e CARDOSO [111] compararam os resultados da análise não-linear por elementos finitos e os resultados das equações analíticas para duas categorias de cabos, a partir de um exemplo, e verificaram que a solução não-linear do programa obtido através do método de elementos finitos foi bastante diferente daquela obtida através das equações analíticas. Concluíram que as análises não-lineares geométricas tornam-se necessárias no estudo de cabos, especialmente para níveis de tensão alto/médio.

A mecânica de cabos altamente extensíveis foi estudada por TJAVARAS et al [107], que utilizaram os parâmetros de Euler na reformulação das equações que regem o movimento do cabo. Os autores empregaram uma relação não-linear para tensão-deformação e incluíram os termos de rigidez flexional para garantir um problema bem colocado quando a tensão se torna muito pequena. Resolveram as equações utilizando diferenças finitas e um esquema implícito de integração numérica, que permitiu a simulação com erro dentro de limites pré-definidos. Para demonstrar o novo método, estudaram os seguintes problemas: o comportamento pós-ruptura de um cabo sintético, e a resposta dinâmica de uma bóia amarrada próxima da superfície na onda.

SUN e LEONARD [104] desenvolveram um modelo híbrido e um esquema para a solução por integração direta, a fim de resolver o sistema oceânico cabo-corpo com localização em regiões de baixa tensão.

VAZ e PATEL [112] apresentaram uma formulação que descreve a geometria elástica de um cabo em termos de dois ângulos, azimute e elevação, que estão relacionados com as coordenadas cartesianas pela compatibilidade das relações geométricas. Combinaram estas relações com as equações de equilíbrio do cabo para obter um sistema de equações diferenciais não-lineares, sendo este integrado numericamente pelos métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordens. Apresentaram os resultados para tensão, ângulos, geometria e alongamento no cabo, para três exemplos: a instalação de um cabo de fibra óptica marinha, a análise estática de uma linha de amarração em águas profundas e a resposta de um cabo de telecomunicações para um perfil de corrente multi-direcional.

WANG, FUNG e LEE [114], utilizaram o Método de Elementos Finitos e investigaram as vibrações de um cabo subaquático geometricamente não-linear com um peso na extremidade inferior.

GOSLING e KORBAN [48] descreveram uma formulação por Elementos Finitos para a análise estrutural de cabos considerando a flexibilidade finita e contínua. Os esforços de tração, compressão e flexão foram descritos em um contexto Lagrangeano Total. Através do acoplamento com o algoritmo Newton-Raphson eles demonstraram a eficácia do elemento.

ROCHINHA, SAMPAIO e LE TALLEC [94] apresentaram um modelo numérico para cabos umbilicais hiper-elásticos com grandes deslocamentos e rotações e resolveram o problema discretizando as equações pelo Método dos Elementos Finitos.

CUSTÓDIO e VAZ [37] apresentaram uma formulação e uma solução para a resposta de cabos umbilicais e tubos flexíveis submetidos a um carregamento de tensão, torque e pressões interna e externa. Utilizaram um algoritmo que realiza o mapeamento da resposta com controle da carga ou deslocamento, aplicaram o método de Newton e calcularam a matriz Jacobiana por meio de Diferenças Finitas.

SHIN [97] estudou o movimento de um cabo na água quando são anexadas bóias ao longo do seu comprimento, o efeito da não linearidade geométrica no comportamento da dinâmica do cabo na presença de arraste de fluido e o efeito da tensão total nula. Utilizou o Método Espectral baseado nos polinômios de Chebyshev, empregando especialmente o Método da Colocação e o Método de Newton para a integração no tempo.

De acordo com GOBAT e GROSENBAUGH [47] as soluções das equações da dinâmica do cabo usando diferenças finitas são atraentes pela sua simplicidade. Com a

inclusão da rigidez de flexão nas equações governantes, os programas computacionais baseados em soluções por diferenças finitas podem ter tanta capacidade (em termos dos efeitos das forças materiais e hidrodinâmicas) quanto às soluções por elementos finitos.

GOBAT e GROSENBAUGH[47] e GATTI-BONO e PERKINS [46] utilizaram Diferenças Finitas e implementaram um método para determinar as soluções das equações da dinâmica de um cabo, onde consideraram a separação das discretizações espacial e temporal em fases distintas.

A análise dinâmica do movimento tridimensional de um cabo foi estudada por KOH e RONG [65], que representaram os eixos das deformações de flexão e torção, bem como a não linearidade geométrica devido aos grandes deslocamentos e rotações. Eles utilizaram uma estratégia baseada em um esquema iterativo de diferenças finitas e ilustraram, através de um problema específico com estudo experimental dos movimentos de um cabo devido à excitação do apoio, a assimetria e a sensibilidade da resposta dinâmica da tensão associada com a não linearidade geométrica dos grandes deslocamentos do cabo em movimento.

JOHANSEN, ERSDAL, SORENSEN e LEIRA [59] desenvolveram um modelo e fizeram comparações entre experiências e simulações numéricas para a dinâmica de um cabo inextensível, com flexão, cisalhamento e rigidez de torção, desprezíveis. Utilizaram a regra do ponto médio para a integração espacial, pois em contraste com a maioria dos outros métodos alternativos para a integração numérica, a regra do ponto médio não exige que os valores da função sejam conhecidos nas fronteiras do domínio espacial.

BANERJEE e DO [18] desenvolveram um modelo para a dinâmica de cabos submarinos e um sistema de controle que permite um desenvolvimento realista, de regulamentação e de recuperação de um veículo submarino não tripulado amarrado a um navio. O cabo foi modelado como uma cadeia de hastes rígidas ligadas uma à outra por articulações, com dois graus de liberdade, que podem descrever a flexão do cabo em dois planos; utilizaram um algoritmo de ordem n para a dinâmica do sistema com n hastes em movimento.

CORDOVÉS [36] propôs um modelo, utilizando o Método dos Elementos Finitos, para avaliar a confiabilidade estrutural de um cabo umbilical, levando em consideração os mecanismos de falha por escoamento e por fadiga mecânica.

A investigação analítica da dinâmica ressonante multi-modal devido às ressonâncias internas nas vibrações livres com amplitudes finitas de cabos horizontais /

inclinados foi estudada por SRINIL, REGA e CHUCHEEPSAKUL [101], que trataram da formulação teórica e validação do modelo de um cabo em geral, onde aproximaram as equações diferenciais parciais não lineares em 3-D do movimento de pequenos cabos flexíveis, que representam a variação temporal e espacial da dinâmica não linear de tensão e assimetria do sistema devido as configurações da inclinação do cabo. Eles apresentaram uma expansão de Galerkin em várias dimensões, resultando em um conjunto completo de coeficientes quadráticos/cúbicos do sistema para soluções dos movimentos planos e não planos do cabo. Com o objetivo de estudar parametricamente o comportamento de cabos horizontais/inclinados, SRINIL e REGA [102] realizaram uma análise de 2ª ordem nas ressonâncias planas pelo método de múltiplas escalas (*method of multiple scales – MMS*).

De acordo com TRIANTAFYLLOU e YUE [109], os cabos sintéticos têm vantagens significativas sobre os cabos metálicos para certas aplicações, porque eles são consideravelmente mais leves e podem absorver movimentos dinâmicos impostos através da extensão sem causar excessiva tensão dinâmica.

WARNITCHAI, FUJINO e SUSUMPOW [116] estudaram um conjunto de equações governantes para a dinâmica dos movimentos transversais de um cabo com pequena flexão. Consideraram que os movimentos do cabo são separados em duas partes, ou seja, os movimentos quase estáticos, que são os deslocamentos do cabo que se move como um tendão elástico, devido aos movimentos do apoio e os movimentos modais, que são expressos como uma combinação linear dos modos não amortecidos do cabo com extremidades fixas. As equações governantes dos movimentos não-lineares do cabo foram obtidas através das equações de Lagrange.

ISOLDI [57] implementou computacionalmente um sistema de equações capaz de descrever o movimento de cabos extensíveis. Utilizou um esquema implícito de diferenças finitas para obter a solução numérica das equações governantes, sendo o modelo numérico usado para analisar o comportamento dinâmico de um cabo sintético durante e após sofrer uma ruptura.

KWAN [66] analisou os princípios estruturais básicos em torno do comportamento não-linear de cabos interligados e obteve explicitamente a resposta estática não-linear da carga para esta estrutura utilizando uma aproximação simples. Esta aproximação para a não-linearidade geométrica foi testada em 3-D para três cabos interligados e os resultados foram comparados com outras três técnicas, que são: matriz de rigidez geométrica, dinâmica de relaxação e energia geral mínima.

OLIVEIRA, MACHADO e HEEKE [85] fizeram uma análise comparativa entre dois elementos de cabo presentes na literatura. Apresentaram um elemento finito isoparamétrico do cabo com dois nós, desenvolvido a partir de uma formulação variacional empregada no Método dos Elementos Finitos, e um elemento de catenária desenvolvido a partir de expressões exatas oriundas da equação da catenária elástica. Analisaram o comportamento estático desses elementos quando submetidos a algumas condições de carregamento, sendo o processo iterativo utilizado para esta análise não linear determinado através do Método de Newton-Raphson. Fizeram uma comparação dos resultados obtidos e verificaram algumas vantagens na utilização desses elementos em situações práticas.

BEHBAHANI-NEJAD e PERKINS [22] analisaram as ondas que se propagam livremente ao longo de um cabo elástico. A investigação começa com um modelo matemático que regula a resposta tridimensional não-linear de um longo cabo elástico, onde é apresentada uma forma assintótica deste modelo para a propagação de ondas lineares ao longo dos cabos.

Segundo KAZAKEVITCH e ZAKORA [64], a estabilização dinâmica de cabos tem uma forma complexa de cálculo, constrói e organiza medidas que servem para evitar o surgimento de eventuais oscilações de ressonância dos cabos tanto na elevação da extensão da estrutura ou na utilização de pontes. Eles classificaram detalhadamente os métodos de amortecimento de oscilação de um cabo, e também mostraram a sua eficácia e âmbito de aplicação.

FANG, HOU e LUO [44] desenvolveram um modelo hidrodinâmico para simular os seis graus de liberdade dos movimentos de um veículo submarino operado remotamente (ROV), incluindo o efeito do cabo umbilical, onde obtiveram as forças hidrodinâmicas correspondentes ao veículo subaquático através da técnica de teste do movimento planar do mecanismo (*planar motion mechanism test technique*) e adotaram o método numérico Runge-Kutta-4 para resolver as equações dos movimentos do ROV e a configuração do cabo umbilical. Utilizaram também um método de passo múltiplo para resolver o problema de valores de fronteira nas duas extremidades do cabo umbilical em relação a um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Todas as simulações de operação para o ROV, incluindo os movimentos de frente, ascendente, descendente, para os lados e giro foram analisados, com ou sem efeito do cabo umbilical e verificaram que os resultados do cabo umbilical afetam significativamente o movimento do ROV e não devem ser negligenciados na simulação.

HOW, GE e CHOO [52] consideraram o controle ativo do ângulo de um “riser” (tubo vertical) marinho flexível e a redução de vibração forçada com um carregamento distribuído variando no tempo usando uma abordagem de controle de fronteira. Introduziram um torque atuador no volume superior do “riser” e projetaram uma lei de controle de fronteira para gerar o sinal necessário para o controle do ângulo de elevação e redução da vibração com a garantia da estabilidade em malha fechada. Obtiveram a estabilidade exponencial sob a condição de vibração livre. O controle proposto foi simples e com instrumentos reais, independente dos parâmetros do sistema, possuindo, assim, a robustez de estabilidade a variações de parâmetros. Fizeram simulações numéricas para verificar a eficácia da abordagem apresentada.

MOUSTAFA, TRABIA e ISMAIL[80] introduziram um novo modelo matemático que representa um guindaste de elevação/abaixamento de carga com cabo flexível. Este modelo inclui as vibrações transversais do cabo flexível. As equações Diferenciais Parciais e Equações Diferenciais Ordinárias não lineares que governam o movimento do sistema guindaste com domínio espacial variando no tempo foram obtidas através do Cálculo Variacional e do Princípio de Hamilton. Um esquema de controle proporcional derivado foi aplicado à movimentação do guindaste subjacente de modo que o cabo e o balanço da carga foram atenuados para fora. As simulações numéricas para o controle do desempenho do sistema considerado foram apresentadas para várias condições de funcionamento.

ZHU, ZHU, ZHANG e GAO [129] desenvolveram um modelo de acoplamento dinâmico de vários corpos para simular o movimento de um Veículo Amarrado Operado Remotamente (*Trov- Tethered Remotely Operated Vehicle*). Discutiram o forte acoplamento entre o movimento não-linear do cabo umbilical preso e do ROV. O movimento do ROV foi considerado com seis graus de liberdade. Aplicaram o modelo da massa concentrada (*lumped mass model*) e incluíram uma técnica do vetor tangencial médio nas equações da dinâmica tridimensional para a resposta dos segmentos do cabo. Este modelo pode simular o movimento tridimensional transiente acoplado de um sistema complexo com vários corpos, em condições típicas de manobra de um navio e pode ser utilizado em qualquer problema de reboque ou em problemas com veículos amarrados debaixo da água. Observaram que os resultados da simulação se encaixam bem com o experimento.

XIAO, WU e LI [127] simularam a dinâmica do acoplamento entre um robô móvel para trabalhar com um cabo e sua trajetória movendo o cabo flexível para cima.

O robô foi considerado como um sistema de vários corpos rígidos, e seu modelo dinâmico foi desenvolvido com o método de Lagrange. Eles consideraram a suspensão do cabo flexível como um sistema de vários corpos flexíveis, formaram o modelo dinâmico pelo método de síntese modal e obtiveram o modelo dinâmico do robô e do cabo flexível através do acoplamento de contato. Fizeram simulação dinâmica sobre o robô com o cabo flexível em três tipos diferentes de condições de movimento, e exploraram a lei que rege o impacto do cabo flexível sobre o desempenho dinâmico do robô.

YOON, PARK e YIM [128] verificaram que o cabo que transfere o sinal e poder de um robô industrial tem um problema de fratura por desgaste das componentes de aço. Como o cabo é muito flexível em comparação com outros componentes do sistema, é difícil estimar o seu movimento numericamente. Eles fizeram alguns estudos sobre um problema de grande deformação, especialmente em um cabo, e algumas tentativas foram feitas para aplicar a formulação ANCF (*absolute nodal coordinate formulation*), que pode simular uma grande deformação. Eles fizeram pesquisas sobre o desgaste na duração de cabos estruturais e estudos comparativos de simulações FEM (*formulation finits elements*) e ANCF. Apresentaram um método para simular o comportamento do cabo utilizando ANCF, que prevê o desgaste na duração, enquanto calcula a evolução temporal da tensão no ponto de interesse. Aplicaram a dinâmica do corpo rígido para o sistema do robô e usaram ANCF para o cabo. A simulação foi executada usando um processo da análise dinâmica. A propriedade do material do cabo foi obtida por um teste. Prepararam um modelo simplificado e, com estes dados, simularam o comportamento do cabo e fizeram uma previsão do desgaste na durabilidade do mesmo.

De acordo com BUCKAM, DRISCOLL e MEYER [27], para simular corretamente os movimentos dos cabos marinhos flexíveis é necessário captar os efeitos da rigidez de flexão e torção. Eles apresentaram computacionalmente e originalmente elementos finitos de terceira ordem que proporcionam uma representação tanto dos efeitos de flexão como de torção e aceleram a convergência do modelo em elementos de tamanhos relativamente grandes. Usaram uma aproximação do peso residual, e desenvolveram as equações discretizadas do movimento para o novo elemento cúbico. Aplicaram inter-elementos de restrição e demonstraram como um conjunto destas equações elementares pode ser significativamente reduzido para evitar o crescimento do sistema de equações normalmente associadas a esses elementos de ordem superior e para permitir uma rápida avaliação da dinâmica em qualquer cabo esticado ou em situações de baixa tensão.

1.1.2 INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Os problemas de interação entre fluido e estrutura podem ser encontrados em muitas aplicações técnicas. O tratamento deste problema é muito complexo e, conseqüentemente, a modelagem é feita com diversas simplificações. Grande parte dos trabalhos envolvendo este problema baseia-se na formulação ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*) e as simulações são feitas através do Método de Elementos Finitos ou de Diferenças Finitas.

SOULI, OUAHSINE e LEWIN [100] utilizaram uma formulação ALE e o método de elementos finitos para os problemas de interação-fluido estrutura. Eles concluíram que para a maioria dos problemas a formulação ALE reduz o custo da análise onde existem grandes deformações.

BECKERT [21] apresentou um esquema para acoplamento fluido-estrutura baseado na interpolação por elementos finitos. Aplicou este esquema para problemas aeroelásticos estáticos, a fim de prever o equilíbrio dos modelos de uma asa elástica num fluxo transônico do fluido

De acordo com SOULAÏMANI, FENG e ALI [99], a aeroelasticidade é um dos exemplos mais importantes e desafiadores da Física. Acopla duas aplicações não triviais e é caracterizada por fenômenos de múltipla escala, ambos no tempo e no espaço. O acoplamento entre o fluxo de um fluido e o deslocamento de uma estrutura flexível pode produzir instabilidades, e estas poderão comprometer a integridade estrutural. A oscilação é um fenômeno dinâmico da instabilidade exibido por uma estrutura flexível sob o efeito da velocidade elevada do fluxo.

SULEMAN [103] apresentou oscilações auto-excitadas de um painel externo de vôo de um veículo, quando exposto ao fluxo supersônico de ar. O modelo proposto nesta investigação consiste num tipo de casca adaptada composta por elementos finitos com propriedades eletromecânicas e dupla curvatura.

DE BORTOLI [40] desenvolveu um método para resolver o problema de interação fluido-estrutura de um painel em um fluxo compressível, baseado na formulação ALE, usando diferenças finitas centrais e um esquema Runge-Kutta explícito para o passo de tempo.

O estudo da interação fluido-estrutura de um cabo submerso em um fluido necessita do acoplamento da dinâmica do cabo com a solução do escoamento do fluido sobre o mesmo. As equações diferenciais parciais não lineares que descrevem o

fenômeno do fluxo de um fluido são as equações de Navier-Stokes. Estas equações têm desafiado as soluções analíticas por um século e as abordagens analíticas foram então substituídas por métodos numéricos que discretizam o problema e conduzem a graves problemas de tempo computacional em supercomputadores (ADOMIAN [4]).

De acordo com CAMPREGHER [28] a modelagem matemática e a simulação numérica de escoamentos turbulentos tridimensionais ao redor de geometrias complexas móveis constituem um dos grandes desafios da engenharia moderna. Ele propôs um modelo numérico que permite simular escoamentos ao redor de geometrias arbitrárias tridimensionais e não deformáveis capazes de se movimentar sob a ação de forças induzidas pelo próprio escoamento.

O acoplamento fluxo-cabo, em regime de baixo número de Reynolds, foi analisado por DAVIS, DEMETRIOU e OLINGER [38], que utilizaram Diferenças Finitas para acoplar o modelo estrutural do cabo com o modelo da esteira, e por NEWMAN e KARNIADAKIS [82][83], que utilizaram o Método Espectral para discretizar o plano xy e a expansão de Fourier na direção z , ao longo do cabo.

A grande maioria dos trabalhos sobre o problema da interação fluido-estrutura utiliza os métodos de elementos finitos ou diferenças finitas [21] [100] [106]. MASSOUDI e PHUOC [77] utilizaram diferenças finitas para estudar o movimento de um fluido em torno de um cilindro.

LIU, LI e WANG [70] trataram com as soluções inteiras da equação bi-estável de reação-advecção-difusão e com a interação da onda em propagação com cilindros infinitos.

FLORI, GIUDICELLI e ORENGA [45] apresentaram um modelo bidimensional para descrever o fluxo de um fluido compressível na interação ao redor de uma casca cilíndrica elástica, demonstraram a existência dos resultados e construíram as soluções aproximadas para este modelo.

De acordo com PINTO [89], o estudo do escoamento ao redor de cilindros é de grande interesse em vários campos da engenharia e também de outras ciências. Ele estudou a dinâmica do escoamento ao redor de um cilindro circular submetido a um movimento forçado analisando as alterações ocorridas na formação da esteira de vórtices. Para a realização das simulações, utilizou a técnica de Simulação Numérica Direta (*DNS*), com um esquema de diferenças finitas compacto de sexta ordem, em associação com um método de representação virtual das fronteiras do cilindro.

ÁSSI [12] apresentou um estudo experimental sobre os efeitos de interferência das vibrações induzidas pelo escoamento ao redor de cilindros rígidos livres para oscilar transversalmente ao escoamento do fluido, onde os resultados envolveram: medições da resposta dinâmica em amplitude e frequência dominante de oscilação; medição instantânea do ângulo de fase entre a força fluida e o deslocamento do cilindro e do ângulo de fase entre as oscilações de dois cilindros e medições da dinâmica da esteira. Os arranjos de cilindros estudados foram: cilindro isolado, par alinhado com cilindro à montante oscilando, par alinhado com cilindro à jusante oscilando e par alinhado com ambos os cilindros oscilando.

O escoamento incompressível ao redor de pares de cilindros rígidos e imóveis, posicionados de forma alinhada em relação a uma corrente uniforme, foi estudado por CARMO [30], que utilizou o método de elementos espectrais para realizar simulações bi e tridimensionais do escoamento.

MENEGHINI [79] apresentou o fenômeno de formação e desprendimento de vórtices e sua relação com vibração induzida pelo escoamento. Investigou de maneira detalhada o fenômeno de geração e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros, analisou o acoplamento entre as oscilações do corpo com os vórtices gerados, estudou, através de simulações numéricas e experimentos, o efeito da interferência na geração dos vórtices de um corpo pela presença de um segundo corpo e apresentou resultados referentes ao estudo do acoplamento hidroelástico.

TREMBLAY [108] utilizou a técnica de Simulação Numérica Direta (DNS) e LES para o estudo do fluxo, com número de Reynolds subcrítico, em torno de um cilindro circular.

CHRISTOV, MARINOVA e MARINOV [35] propuseram uma técnica chamada de *Method of Variational Imbedding (MVI)* para tratar numericamente do fluxo permanente em torno de cilindro circular.

RAMAN-NAIR e WILLIAMS [91] investigaram a resposta de um longo “riser” (tubo vertical) marinho flexível em uma corrente cisalhante usando um modelo numérico de massa concentrada (“*lumped mass*”), com o objetivo de fornecer uma ferramenta de simulação para avaliar os movimentos e tensões (longitudinal e de flexão) em um “riser” em águas profundas, sob a superfície das ondas e correntes oceânicas profundas. O “riser” foi modelado como uma viga de secção circular oca dividida em segmentos. As forças estruturais foram modeladas por molas e amortecedores extensionais nos segmentos e por molas e amortecedores rotacionais nas articulações

entre os segmentos. O acoplamento fluido-estrutura foi obtido através da aplicação das cargas hidrodinâmicas via arrasto, sustentação e adição de coeficientes de massa utilizando as velocidades e acelerações instantâneas relativas entre o campo fluido e os segmentos do “riser”. Os efeitos do fluxo e da pressão do fluido no interior do “riser” foram incluídos no modelo. As equações do movimento foram montadas usando um método dinâmico de corpos múltiplos e resolvidas usando uma implementação robusta do método de Runge-Kutta no MATLAB™. O modelo foi aplicado para simular os resultados observados em vários modelos físicos experimentais.

1.1.3 MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN

Recentemente, o método da decomposição de Adomian [4][5][6] tornou possível evitar os métodos de discretização que conduzem a requisitos computacionais pesados na resolução de equações diferenciais parciais não lineares. Este método conduz às soluções computáveis, exatas, convergentes e que podem ser verificadas teoricamente a qualquer grau de aproximação.

O método da decomposição de Adomian [4] foi introduzido por George Adomian, na década iniciada em 1980, para resolver equações lineares e não lineares. CHERRUALT, ABBAOUI, et al [1][2][32] e ALLAN [10] estabeleceram sua estrutura matemática e provaram a sua convergência.

A convergência do Método de Adomian também foi tratada por BASTO [20], NGARHASTA, ABBAOUI e CHERRUALT [84], HELAL e MEHANNA [49], MUSTAFA [81], LESNIC [67][68], OUEDRAOGO, CHERRUALT e ABBAOUI [86], KAYA e INAN [62][63], BABOLIAN e BIAZAR [14], BABAJEE, DAUHOO, DARVISHI e BARATI [13] e por HIMOUN, ABBAOUI e CHERRUALT [50].

O objetivo do método da decomposição de Adomian [4] é tornar possíveis, fisicamente, as soluções realistas de sistemas complexos sem compromisso com a solução e a modelagem usual para alcançar a tratabilidade.

Atualmente este método tem sido utilizado por muitos autores, nas mais diversas áreas, tanto para resolver problemas envolvendo equações diferenciais nos problemas de valor inicial ou de contorno ([39] [49] [54] [69] [92] [105] [110] [118] [120] [121] [122]), quanto para resolver sistemas de equações diferenciais ([7] [43] [60] [75] [98][113]).

ADOMIAN [7] demonstrou a solução de um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não lineares para condições de fronteira desacopladas utilizando o método da decomposição. Ele aplicou também este método para determinar a solução das equações de Navier-Stokes em [6] e para determinar as soluções explícitas de equações diferenciais parciais em [8].

A seguir são apresentados alguns autores que utilizaram o método da decomposição de Adomian nos seus trabalhos.

WAZWAZ [117] desenvolveu uma técnica confiável a fim de calcular os polinômios de Adomian para operadores não lineares. Esta técnica oferece uma abordagem promissora para o cálculo dos polinômios de Adomian para todas as formas de não-linearidade e propôs em [119] e [123] algumas modificações do método que proporcionam maior rapidez na convergência da solução em série. Além disso, em [126], WAZWAZ comparou o desempenho do Método da Decomposição de Adomian com o Método da Série de Taylor quando aplicados à solução de equações diferenciais ordinárias lineares e não lineares. Ele verificou que o método da decomposição é confiável, eficiente e de fácil uso no ponto de vista computacional. Aplicou também o Método da Decomposição para o problema de advecção não linear em [125]. Estudou o fenômeno da interferência dos termos que aparecem nas componentes da solução em série, determinada pelo método da decomposição, e verificou que este fenômeno é útil para demonstrar a rápida convergência da solução exata [124].

CHOI e SHIN [34] desenvolveram um código de implementação simbólica da técnica apresentada por WAZWAZ [117] para calcular os polinômios de Adomian para operadores não lineares. CHEN e LU [33] também desenvolveram uma técnica para calcular os polinômios de Adomian para operadores não lineares, onde o algoritmo foi desenvolvido utilizando computação simbólica, de modo que a solução das equações diferenciais pode ser mecanizada no Maple. ABBAOUI, CHERRUAULT e SENG [3] apresentaram uma generalização dos polinômios de Adomian para uma função de várias variáveis.

MUSTAFA [81] apresentou uma comparação entre o método da decomposição de Adomian (ADM), o método de Wavelet-Galerkin (WGM), a técnica de diferenças finitas, totalmente explícita (FTCS), o método de diferenças finitas totalmente implícito (BTCS), a fórmula de diferenças finitas tipo Crank-Nicholson (C-N), o método totalmente explícito e o método de diferenças finitas 9-pontos, para resolver equações diferenciais parabólicas com condições de fronteira arbitrárias e baseadas na forma de

funcionais fracos em domínios finitos. Verificou que o problema é resolvido rapidamente, facilmente e elegantemente por ADM. Os resultados numéricos mostraram que o método da decomposição de Adomian consome menos tempo e é mais fácil de usar do que outros métodos. Além disso, provou a convergência deste método quando aplicado à equação parabólica não linear.

NGARHASTA, SOME, ABBAOUI,K. e CHERRUAULT [84] provaram a convergência do método de Adomian quando aplicado as equações lineares ou não lineares da difusão. Os resultados mostraram que a convergência deste método não é influenciada pela escolha do operador linear inversível na equação a ser resolvida. Além disso, analisaram alguns exemplos envolvendo uma nova forma canônica, onde o termo inicial da série de Adomian é escolhido em algumas formas especiais que verificam as condições iniciais e de fronteira. Então a série de Adomian converge para solução exata ou todas as soluções aproximadas (séries truncadas) verificam estas condições. RAY [92] apresentou uma nova aproximação para a aplicação do método de decomposição Adomian para a solução da equação parcial da difusão no espaço.

O método da decomposição de Adomian foi aplicado em problemas de valor inicial para sistemas de equações diferenciais lineares e não lineares por MAHMOOD, CASASÚS e AL-HAYANI [76].

DEHGHAN [41] investigou a aplicação do método da decomposição de Adomian para resolver equações diferenciais parciais bidimensionais parabólicas lineares com especificações não locais de fronteira substituindo as condições clássicas de fronteira. Verificou que o método da decomposição de Adomian é utilizado por muitos pesquisadores na investigação de diversas aplicações científicas, requer menos trabalho em comparação com as técnicas tradicionais, é fácil de programar em problemas aplicados e fornece soluções imediatas e convergentes sem qualquer necessidade de linearização ou discretização.

DEHGAN e TATARI [42] utilizaram o método de Adomian para resolver problemas de Cálculo Variacional, com o objetivo de encontrar a solução para uma equação diferencial ordinária originada de um problema variacional. Eles apresentaram resultados numéricos para mostrar a eficiência do método.

RAJARAM e NAJAFI [90] estudaram o tratamento analítico e a convergência do método da decomposição de Adomian para um sistema de equações acopladas do amortecimento da onda.

PEREIRA, DE BORTOLI e GOMES [88] apresentaram o problema do escoamento laminar através de um duto juntamente com a solução analítica que representa o perfil da velocidade para este escoamento. Empregaram o Método da Decomposição de Adomian e obtiveram o perfil da velocidade idêntico ao da solução analítica.

JIAO, YAMAMOTO, DANG e HAO [58] propuseram uma técnica que produz a solução analítica aproximada, com rápida taxa de convergência e de alta precisão, através da aplicação da aproximação de Padé para a solução da série obtida pelo Método da Decomposição de Adomian. ANDRIANOV, OLEVSKII e TOKARZEWSKI [11] também utilizaram a aproximação de Padé com o método da decomposição modificado para determinar a solução nos seguintes exemplos: uma equação diferencial não linear e uma placa retangular sob pressão transversal e compressão longitudinal.

INC, CHERRUAULT e ABBAOUI [56] e BIAZAR e ISLAM [24] utilizaram o Método da Decomposição de Adomian para determinar as soluções analíticas da equação da onda.

BABOLIAN e BIAZAR [15], BASTO [20], BRATSOS, EHRHARDT e FAMELIS [26] e BASTO, SEMIAO e CALHEIROS [19] aplicaram o Método da Decomposição de Adomian para determinar a solução de equações não lineares e CASASÚS e AL-HAYANI [31] também utilizaram este método para resolver problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias com descontinuidades para ambos os casos, linear e não linear.

BABOLIAN e DAVARI [16] propuseram uma nova idéia do método da decomposição para resolver equações integrais e BABOLIAN e JAVADI [17] introduziram um novo algoritmo baseado neste método para resolver equações algébricas.

KAYA e YOKUS [61] utilizaram o método da decomposição de Adomian para resolver a equação do calor e a equação não linear de Burgers, com condições iniciais apropriadas. Demonstraram que a aplicação do método com a solução parcial em relação à x exige maior trabalho computacional em comparação com a solução em relação à t , porém a solução numérica em relação à x é extremamente bem resolvida em termos de precisão e eficiência.

A seguir são apresentados os objetivos e o roteiro deste trabalho.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral da presente tese é apresentar um estudo da interação fluido-estrutura de um cabo submerso em um fluido, através do acoplamento entre a modelagem dinâmica do cabo e o movimento do fluido.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Apresentar a modelagem dinâmica do cabo através de uma formulação inédita, que consiste em supor que a flexibilidade contínua é representada por uma aproximação discreta.

Estudar o escoamento do fluido sobre o cabo, considerando que o cabo é cilíndrico e resolvendo as equações do escoamento pelo Método da Decomposição de Adomian.

Investigar a interação fluido-estrutura através do acoplamento da dinâmica do cabo com a solução do escoamento sobre o cilindro.

1.3 ROTEIRO DO TRABALHO

A seguir, faz-se uma descrição sumária do conteúdo dos diversos capítulos que compõem este trabalho.

O Capítulo 1 contém a Introdução, que destaca os objetivos e revisão bibliográfica.

O Capítulo 2 trata da Modelagem Dinâmica de Cabos, onde é apresentado o desenvolvimento teórico da modelagem de cabos.

O Capítulo 3 apresenta os resultados das simulações da dinâmica de cabos fora da água e submersos.

O Capítulo 4 introduz alguns conceitos sobre o escoamento em torno de cilindros circulares.

O Capítulo 5 trata do modelo analítico para o escoamento em torno de um cilindro circular, capítulo este que contempla a formulação matemática, utilizando o

Método da Decomposição de Adomian, para o escoamento sobre cilindros circulares e apresenta os resultados das simulações feitas através deste método.

O Capítulo 6 apresenta o acoplamento entre a dinâmica do cabo e o escoamento sobre o cilindro circular, tratando ainda da Interação Fluido-Estrutura Flexível. Este capítulo contém os fundamentos teóricos do acoplamento e os resultados das simulações.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões gerais sobre todo estudo realizado na presente tese, enquanto o Capítulo 8 apresenta as referências bibliográficas.

CAPÍTULO II
MODELAGEM DINÂMICA DO CABO

2. MODELAGEM DINÂMICA DO CABO

A análise da dinâmica de cabos submarinos tem oferecido um amplo campo para a pesquisa devido à complexidade do fenômeno na interação entre o fluido e a estrutura e em relação às não-linearidades geométricas.

Muitos autores têm publicado sistemas de equações descrevendo o movimento de cabos, sob várias situações, considerando as propriedades do material, o movimento do cabo e a influência do fluido que o circunda durante o seu movimento (ISOLDI [57]).

O estudo da dinâmica tridimensional de um cabo pode ser feito em vários sistemas de coordenadas; entretanto, as propriedades fundamentais são de melhor forma analisadas nas chamadas coordenadas naturais do cabo, que são fixadas no cabo. O sistema de coordenadas do cabo é, portanto, variável no tempo e no espaço (BLIEK [25]).

A maioria dos trabalhos encontrados na literatura utiliza os métodos de elementos finitos ou de diferenças finitas para a discretização das equações da dinâmica de cabos. Neste capítulo é proposto um novo formalismo para a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo. A base principal da formulação consiste em supor que a flexibilidade contínua é representada por uma aproximação discreta, constituída de elos rígidos conectados por articulações elásticas, permitindo movimentos no espaço tridimensional. A seguir apresenta-se o desenvolvimento teórico do formalismo descrito.

2.1 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Considera-se um cabo umbilical conforme indicado na Figura 2.1, fixo em sua extremidade superior a uma base que pode ser móvel e em sua extremidade inferior a uma massa m_c . Estruturas flexíveis como esta possuem diversas aplicações em sistemas subaquáticos (Figura 2.2), como, por exemplo, em cabos umbilicais de veículos do tipo ROV (*Remotely Operated Vehicles*). Podem também ter aplicações em cabos de amarras de plataformas de petróleo, bastando, para tanto, supor que a massa m_c é infinita.

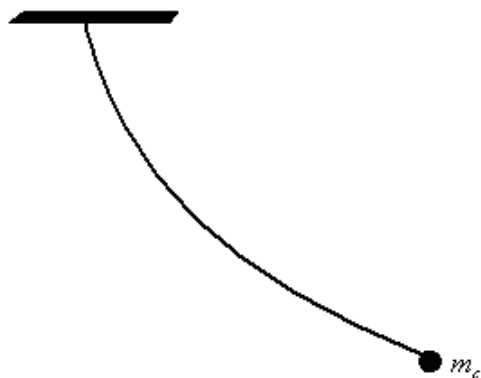


Figura 2.1 Representação esquemática do cabo umbilical

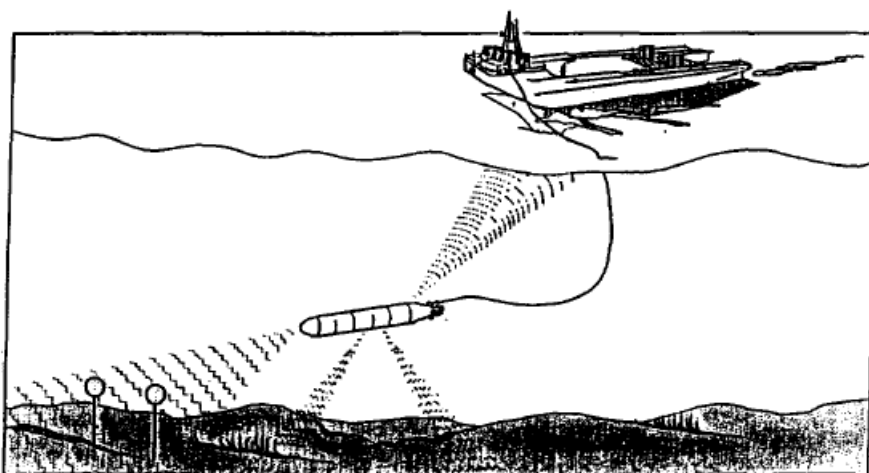


Figura 2.2 Sistema subaquático (BANERJEE e DO [18])

Como os cabos podem realizar movimentos de rotação e translação no espaço, é necessário estabelecer transformações entre os sistemas de coordenadas (ISOLDI [57]). Para um cabo fixo na sua extremidade superior e livre na outra, é necessário que a orientação e a posição da extremidade livre deste cabo sejam conhecidas. A orientação da extremidade livre é definida por intermédio de rotações puras e a posição por translações.

Neste trabalho, a idéia principal do método de modelagem é dividir o cabo em pequenos elementos rígidos (elos), conectados por articulações fictícias flexíveis que permitem três movimentos livres independentes, intitulados aqui de azimute, elevação e torção. Estes movimentos são relativos ao elo anterior da cadeia articulada. Deve ser ressaltado que um quarto movimento livre também poderia ser considerado, tratando-se da extensão linear que foi negligenciada no presente trabalho. Cada articulação fictícia possui uma natureza elástica e, portanto, três constantes elásticas com os seus

respectivos amortecimentos constituem parâmetros que definem a natureza física da articulação.

Para conhecer a posição da extremidade livre do cabo, é necessário associar a cada articulação um sistema de eixos coordenados e, a fim de posicionar este sistema de coordenadas nas articulações de forma sistemática, utiliza-se o formalismo de Denavit-Hartenberg, que consiste em descrever a posição e a orientação relativa entre dois elos consecutivos utilizando transformações homogêneas.

Em resumo, a proposta consiste na formulação de um método que permita determinar o Lagrangeano do sistema de forma algorítmica, independentemente do número de elementos que se escolheu para dividir a estrutura flexível.

Na modelagem discreta, este cabo de flexibilidade contínua é dividido em n partes rígidas de comprimentos $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, que são chamadas de elos, sendo estes elos conectados por articulações fictícias, como mostra a Figura 2.3.

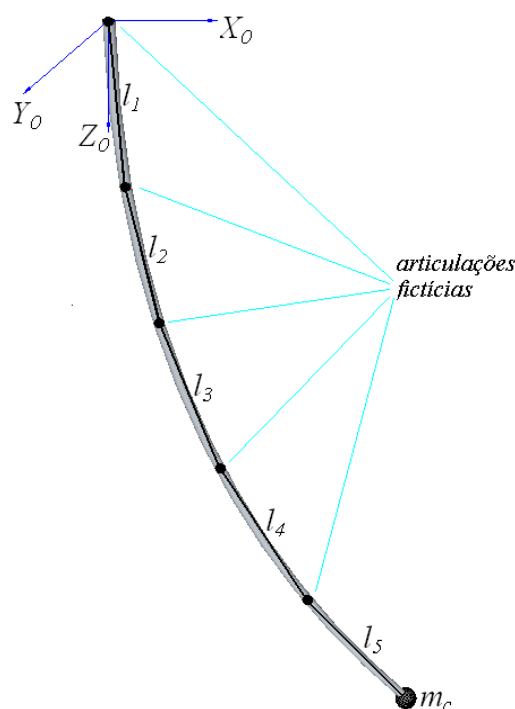


Figura 2.3 Estrutura flexível e sua representação discreta.

Os elos têm massas concentradas nos centros de massa, ou seja, (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , $(x_3, y_3, z_3) \dots (x_n, y_n, z_n)$ que são as coordenadas dos centros de massa dos elos que possuem massas $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$, respectivamente, enquanto (x_c, y_c, z_c) são as coordenadas do centro de massa da carga de massa m_c . Em cada articulação são

considerados os ângulos de azimute, elevação e torção do cabo, ou seja, na i -ésima articulação, θ_{ia} é o ângulo de azimute, θ_{ie} é o ângulo de elevação e θ_{iT} é o ângulo de torção do cabo, conforme mostra a Figura 2.4. No referencial $X_i Y_i Z_i$ tem-se que: o eixo $O_i Z_i$ é paralelo ao eixo OZ_0 do referencial inicial (sempre na direção vertical), o eixo $O_i Y_i$ é paralelo à projeção da parte rígida anterior à i -ésima articulação (projeção no plano horizontal) e o eixo $O_i X_i$ é ortogonal ao eixo $O_i Y_i$. Em cada articulação são consideradas três constantes elásticas, ou seja, na i -ésima articulação são consideradas as constantes elásticas k_{ia} , k_{ie} , k_{iT} , devidas aos ângulos de azimute, elevação e torção, respectivamente.

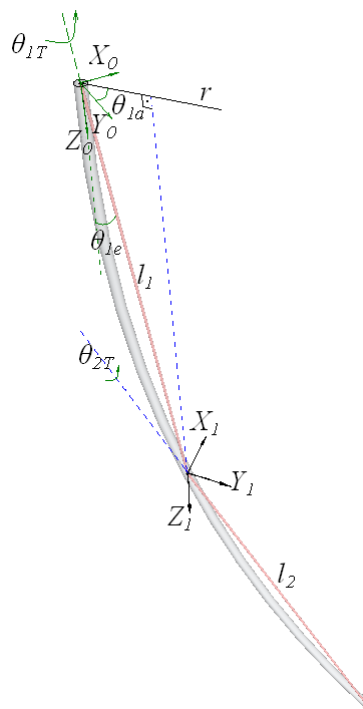


Figura 2.4 Ângulos de azimute, elevação e torção para a articulação da base.

A energia cinética é definida por:

$$E_C = E_{C_R} + E_{C_T} \quad (2.1)$$

onde E_{C_R} é a energia cinética devido ao movimento de rotação do cabo e E_{C_T} é a energia cinética devido ao movimento de translação do cabo.

A energia cinética devida ao movimento de rotação do cabo é definida por:

$$E_{C_R} = \frac{1}{2} I_{R_1} \dot{\theta}_{1a}^2 + \frac{1}{2} I_{R_2} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})^2 + \frac{1}{2} I_{R_3} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a})^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{R_n} \left(\sum_{i=1}^n \dot{\theta}_{ia} \right)^2 + \quad (2.2)$$

$$+ \frac{1}{2} I_{T_1} \dot{\theta}_{1T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_2} \dot{\theta}_{2T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_3} \dot{\theta}_{3T}^2 + \dots + \frac{1}{2} (I_{T_n} + I_{T_c}) \dot{\theta}_{nT}^2$$

onde $\theta_{1a}, \theta_{2a}, \theta_{3a}, \dots, \theta_{na}$ são os ângulos de azimute nas articulações, $I_{R_1}, I_{R_2}, I_{R_3}, \dots, I_{R_n}$ são os momentos de inércia de rotação nas articulações, $I_{T_1}, I_{T_2}, I_{T_3}, \dots, I_{T_n}, I_{T_c}$ são os momentos de inércia devida ao movimento de torção nas articulações e $\theta_{1T}, \theta_{2T}, \theta_{3T}, \dots, \theta_{nT}$ são os ângulos de torção nas articulações.

A energia cinética devida ao movimento de translação do cabo é definida por:

$$E_{C_T} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \dots + \quad (2.3)$$

$$+ \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2)$$

onde $\frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2), \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2), \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2), \dots, \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2)$ e $\frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2)$ são as energias cinéticas relativas ao movimento das massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ dos elos e da massa m_c da carga, respectivamente.

A energia potencial é definida por:

$$E_p = \frac{1}{2} k_{1e} \theta_{1e}^2 + \frac{1}{2} k_{2e} (\theta_{2e} - \theta_{1e})^2 + \frac{1}{2} k_{3e} (\theta_{3e} - \theta_{2e})^2 + \dots + \frac{1}{2} k_{ne} (\theta_{ne} - \theta_{(n-1)e})^2 + \quad (2.4)$$

$$+ \frac{1}{2} k_{1a} \theta_{1a}^2 + \frac{1}{2} k_{2a} (\theta_{2a} - \theta_{1a})^2 + \frac{1}{2} k_{3a} (\theta_{3a} - \theta_{2a})^2 + \dots + \frac{1}{2} k_{na} (\theta_{na} - \theta_{(n-1)a})^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} k_{1T} \theta_{1T}^2 + \frac{1}{2} k_{2T} (\theta_{2T} - \theta_{1T})^2 + \frac{1}{2} k_{3T} (\theta_{3T} - \theta_{2T})^2 + \dots + \frac{1}{2} k_{nT} (\theta_{nT} - \theta_{(n-1)T})^2$$

$$+ m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + m_3 g h_3 + \dots + m_n g h_n$$

onde $\theta_{1e}, \theta_{2e}, \theta_{3e}, \dots, \theta_{ne}$ são os ângulos de elevação nas articulações, $k_{1e}, k_{2e}, k_{3e}, \dots, k_{ne}, k_{1a}, k_{2a}, k_{3a}, \dots, k_{na}, k_{1T}, k_{2T}, k_{3T}, \dots, k_{nT}$ são as constantes elásticas nas articulações relativas aos ângulos de elevação, azimute e torção, respectivamente, e

$m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + m_3 g h_3 + \dots + m_n g h_n$ é a energia potencial gravitacional, onde $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ são as alturas definidas por:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{a_1}{2} \Rightarrow h_1 = \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_{1e}), \\ h_2 &= a_1 + \frac{a_2}{2} \Rightarrow h_2 = a_1 + \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_{2e}), \\ h_3 &= a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \Rightarrow h_3 = a_1 + a_2 + \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_{3e}), \\ &\vdots \\ h_n &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{a_n}{2} \Rightarrow h_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{l_n}{2}(1 - \cos \theta_{ne}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde,

$$a_0 = 0, a_1 = l_1(1 - \cos \theta_{1e}), a_2 = l_2(1 - \cos \theta_{2e}), \dots, a_n = l_n(1 - \cos \theta_{ne}),$$

conforme definições vistas na Figura 2.5.

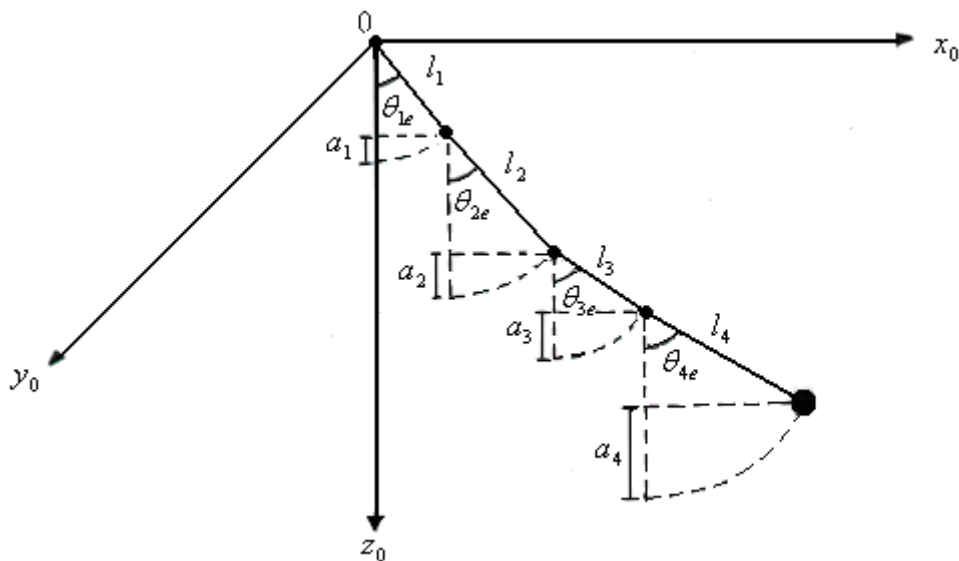


Figura 2.5 Cabo com 4 partes rígidas

O Lagrangeano do sistema é dado por:

$$L = E_c - E_p \quad (2.6)$$

De (2.2), (2.3) e (2.4), obtém-se:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} I_{R_1} \dot{\theta}_{1a}^2 + \frac{1}{2} I_{R_2} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})^2 + \frac{1}{2} I_{R_3} (\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a})^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{R_n} \left(\sum_{i=1}^n \dot{\theta}_{ia} \right)^2 + \\
& + \frac{1}{2} I_{T_1} \dot{\theta}_{1T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_2} \dot{\theta}_{2T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_3} \dot{\theta}_{3T}^2 + \dots + \frac{1}{2} (I_{T_n} + I_{T_c}) \dot{\theta}_{nT}^2 + \\
& + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \dots + \\
& + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \tag{2.7} \\
& - \frac{1}{2} k_{1e} \theta_{1e}^2 - \frac{1}{2} k_{2e} (\theta_{2e} - \theta_{1e})^2 - \frac{1}{2} k_{3e} (\theta_{3e} - \theta_{2e})^2 - \dots - \frac{1}{2} k_{ne} (\theta_{ne} - \theta_{(n-1)e})^2 + \\
& - \frac{1}{2} k_{1a} \theta_{1a}^2 - \frac{1}{2} k_{2a} (\theta_{2a} - \theta_{1a})^2 - \frac{1}{2} k_{3a} (\theta_{3a} - \theta_{2a})^2 - \dots - \frac{1}{2} k_{na} (\theta_{na} - \theta_{(n-1)a})^2 + \\
& - \frac{1}{2} k_{1T} \theta_{1T}^2 - \frac{1}{2} k_{2T} (\theta_{2T} - \theta_{1T})^2 - \frac{1}{2} k_{3T} (\theta_{3T} - \theta_{2T})^2 - \dots - \frac{1}{2} k_{nT} (\theta_{nT} - \theta_{(n-1)T})^2 \\
& - m_1 g h_1 - m_2 g h_2 - m_3 g h_3 - \dots - m_n g h_n
\end{aligned}$$

Então de (2.7) e considerando-se $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
L = & \sum_{b=1}^n \left\{ \frac{1}{2} I_{R_b} \left(\sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T_b} \dot{\theta}_{bT}^2 + \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2) - \frac{1}{2} k_{be} (\theta_{be} - \theta_{(b-1)e})^2 + \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} k_{ba} (\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a})^2 - \frac{1}{2} k_{bT} (\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T})^2 - m_b g \left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2} (1 - \cos \theta_{be}) \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{nT}^2 + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

As coordenadas dos centros de massa das partes rígidas e da carga terminal são determinadas a partir de transformações homogêneas. A primeira articulação fictícia é colocada na origem do sistema de referência $X_0Y_0Z_0$ e os ângulos de azimute θ_{1a} e elevação θ_{1e} são considerados de acordo com as figuras 2.4 e 2.6. A partir desta figura conclui-se que as coordenadas da segunda articulação fictícia $(x_{0_1}, y_{0_1}, z_{0_1})$ em relação ao sistema de referência $X_0Y_0Z_0$ são:

$$\begin{cases} x_{0_1} = l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ y_{0_1} = l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ z_{0_1} = l_1 \cos \theta_{1e} \end{cases} \tag{2.9}$$

e as coordenadas do centro de massa do primeiro elo (l_1) são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ y_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ z_1 = \frac{l_1}{2} \cos \theta_{1e} \end{cases} \quad (2.10)$$

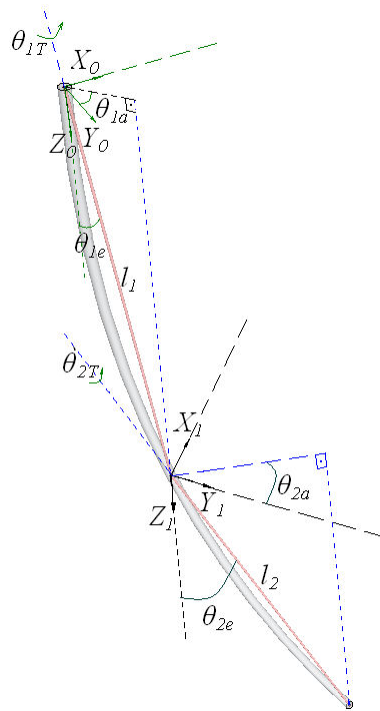


Figura 2.6 Representação geométrica dos dois primeiros sistemas de referência.

Um novo sistema de referência $X_1Y_1Z_1$ é incorporado na estrutura flexível, centrado na segunda articulação fictícia, conforme ilustra a figura 2.6 e de acordo com a convenção descrita anteriormente.

Considerando-se a matriz homogênea de rotação de um ângulo θ_{1a} em torno do eixo OZ_0 em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, como sendo:

$$H_{0_1} = \begin{bmatrix} [R_{z, \theta_{1a}}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{0_1} \\ y_{0_1} \\ z_{0_1} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

onde a matriz de rotação de um ângulo θ em torno do eixo OZ é definida por:

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

a transformação homogênea que relaciona os sistemas $X_0Y_0Z_0$ e $X_1Y_1Z_1$ tem a forma:

$$H_{0_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1a} & \sin \theta_{1a} & 0 & l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ -\sin \theta_{1a} & \cos \theta_{1a} & 0 & l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \cos \theta_{1e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Considerando-se o próximo elo e colocando-se o sistema de referência $X_2Y_2Z_2$ na terceira articulação fictícia, as coordenadas da terceira articulação fictícia em relação ao referencial $X_1Y_1Z_1$ são:

$$\begin{cases} x_{1_2} = l_2 \sin \theta_{2e} \sin \theta_{2a} \\ y_{1_2} = l_2 \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \\ z_{1_2} = l_2 \cos \theta_{2e} \end{cases} \quad (2.14)$$

Então, a matriz homogênea de rotação de um ângulo θ_{2a} em torno do eixo O_1Z_1 em relação ao referencial $X_1Y_1Z_1$ é definida por:

$$H_{1_2} = \begin{bmatrix} [R_{z,\theta_{2a}}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{1_2} \\ y_{1_2} \\ z_{1_2} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ou seja, a transformação homogênea que relaciona os sistemas $X_1Y_1Z_1$ e $X_2Y_2Z_2$ tem a forma:

$$H_{1_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{2a} & \sin \theta_{2a} & 0 & l_2 \sin \theta_{2e} \sin \theta_{2a} \\ -\sin \theta_{2a} & \cos \theta_{2a} & 0 & l_2 \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \cos \theta_{2e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

A fim de determinar a posição da terceira articulação fictícia e das coordenadas do centro de massa da segunda parte rígida em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, efetua-se o produto das matrizes H_{0_1} e H_{1_2} , de onde se obtém $H_{0_2} = H_{0_1} \cdot H_{1_2}$, ou seja:

$$H_{0_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 & l_2 \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ -\sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 & l_2 \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \cos \theta_{2e} + l_1 \cos \theta_{1e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, as coordenadas do centro de massa da segunda parte rígida do cabo, em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, são dadas por:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{l_2}{2} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ y_2 = \frac{l_2}{2} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ z_2 = \frac{l_2}{2} \cos \theta_{2e} + l_1 \cos \theta_{1e} \end{cases} \quad (2.17)$$

Adicionando-se mais um elo e procedendo-se analogamente ao modo descrito anteriormente, mostra-se que as coordenadas da quarta articulação fictícia em relação ao referencial $X_2Y_2Z_2$ são:

$$\begin{cases} x_{2_3} = l_3 \sin \theta_{3e} \sin \theta_{3a} \\ y_{2_3} = l_3 \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \\ z_{2_3} = l_3 \cos \theta_{3e} \end{cases} \quad (2.18)$$

Desta forma, a matriz homogênea de rotação de um ângulo θ_{3a} em torno do eixo O_2Z_2 em relação ao referencial $X_2Y_2Z_2$ é definida por:

$$H_{2_3} = \begin{bmatrix} [R_{z, \theta_{3a}}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{2_3} \\ y_{2_3} \\ z_{2_3} \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

ou seja, a transformação homogênea que relaciona os sistemas $X_2Y_2Z_2$ e $X_3Y_3Z_3$ tem a forma:

$$H_{2_3} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{3a} & \sin \theta_{3a} & 0 & l_3 \sin \theta_{3e} \sin \theta_{3a} \\ -\sin \theta_{3a} & \cos \theta_{3a} & 0 & l_3 \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \cos \theta_{3e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

A posição da quarta articulação fictícia e das coordenadas do centro de massa da terceira parte rígida em relação ao referencial $X_0Y_0Z_0$, são determinadas através do produto das matrizes H_{0_2} e H_{2_3} , ou seja, $H_{0_3} = H_{0_2} \cdot H_{2_3}$, e de modo semelhante ao que foi mostrado anteriormente, obtêm-se as seguintes coordenadas do centro de massa da terceira parte rígida:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{l_3}{2} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + l_2 \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ y_3 = \frac{l_3}{2} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + l_2 \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \\ z_3 = \frac{l_3}{2} \cos \theta_{3e} + l_2 \cos \theta_{2e} + l_1 \cos \theta_{1e} \end{cases} \quad (2.21)$$

Usando-se um procedimento análogo ao que foi mostrado para as coordenadas dos centros de massa da primeira, segunda e terceira partes rígidas, são obtidas as coordenadas do centro de massa da k -ésima parte rígida e as coordenadas da carga terminal, respectivamente, como sendo:

$$\begin{cases} x_k = \frac{l_k}{2} \sin \theta_{ke} \sin \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j \sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ y_k = \frac{l_k}{2} \sin \theta_{ke} \cos \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j \sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ z_k = \frac{l_k}{2} \cos \theta_{ke} + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \cos \theta_{je} \end{cases}, \text{ onde } k = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} x_c = \sum_{j=1}^n \left[l_j \sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ y_c = \sum_{j=1}^n \left[l_j \sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ z_c = \sum_{j=1}^n l_j \cos \theta_{je} \end{cases} \quad (2.23)$$

Então, de (2.22) e de (2.23), obtém-se as derivadas destas coordenadas em relação à t , que são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \frac{l_k}{2} \left[\sin \theta_{ke} \cos \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{ke} \sin \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{ke} \right] + \\ \quad + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[\sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{y}_k = \frac{l_k}{2} \left[-\sin \theta_{ke} \sin \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{ke} \cos \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{ke} \right] + \\ \quad + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[-\sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{z}_k = -\frac{l_k}{2} \sin \theta_{ke} \dot{\theta}_{ke} - \sum_{j=1}^{k-1} l_j \sin \theta_{je} \dot{\theta}_{je} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \sum_{j=1}^n l_j \left[\sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{y}_c = \sum_{j=1}^n l_j \left[-\sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{z}_c = -\sum_{j=1}^n l_j \sin \theta_{je} \dot{\theta}_{je} \end{cases} \quad (2.25)$$

Portanto de (2.8) obtém-se:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \quad (2.26)$$

onde

$$\begin{aligned} L_1 = \sum_{b=1}^n \left\{ \frac{1}{2} I_{R_b} \left(\sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T_b} \dot{\theta}_{bT}^2 - \frac{1}{2} K_{be} (\theta_{be} - \theta_{(b-1)e})^2 - \frac{1}{2} K_{ba} (\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a})^2 + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} K_{bT} (\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T})^2 - m_b g \left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2} (1 - \cos \theta_{be}) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \sum_{b=1}^n \frac{m_b}{2} \left\{ \frac{l_b}{2} \left[\sin \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[\sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2 \\
L_3 &= \sum_{b=1}^n \frac{m_b}{2} \left\{ \frac{l_b}{2} \left[-\sin \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[-\sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2 \\
L_4 &= \sum_{b=1}^n \frac{m_b}{2} \left[-\frac{l_b}{2} \sin \theta_{be} \dot{\theta}_{be} - \sum_{j=1}^{b-1} l_j \sin \theta_{je} \dot{\theta}_{je} \right]^2 + \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{nT}^2 \\
L_5 &= \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^n l_b \left[\sin \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^n l_b \left[-\sin \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} m_c \left[-\sum_{b=1}^n l_b \sin \theta_{be} \dot{\theta}_{be} \right]^2
\end{aligned}$$

onde $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$.

2.2 CABO COM TRÊS ARTICULAÇÕES FICTÍCIAS

Considera-se um cabo de comprimento l , articulado na extremidade onde ele está fixo e dividido em três partes rígidas, sendo estas partes rígidas conectadas por duas articulações fictícias, conforme a figura 2.7.

De (2.26) obtém-se o Lagrangeano desse sistema que é dado por:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \quad (2.27)$$

onde

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sum_{b=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} I_{R_b} \left(\sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T_b} \dot{\theta}_{bT}^2 - \frac{1}{2} K_{be} (\theta_{be} - \theta_{(b-1)e})^2 - \frac{1}{2} K_{ba} (\theta_{ba} - \theta_{(b-1)a})^2 + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} K_{bT} (\theta_{bT} - \theta_{(b-1)T})^2 - m_b g \left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2} (1 - \cos \theta_{be}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \sum_{b=1}^3 \frac{m_b}{2} \left\{ \frac{l_b}{2} \left[\sin \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[\sin \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2 \\
L_3 &= \sum_{b=1}^3 \frac{m_b}{2} \left\{ \frac{l_b}{2} \left[-\sin \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[-\sin \theta_{je} \sin \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{je} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2 \\
L_4 &= \sum_{b=1}^3 \frac{m_b}{2} \left[-\frac{l_b}{2} \sin \theta_{be} \dot{\theta}_{be} - \sum_{j=1}^{b-1} l_j \sin \theta_{je} \dot{\theta}_{je} \right]^2 + \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{3T}^2 \\
L_5 &= \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^3 l_b \left[\sin \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^3 l_b \left[-\sin \theta_{be} \sin \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{ia} + \cos \theta_{be} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{be} \right] \right\}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} m_c \left[-\sum_{b=1}^3 l_b \sin \theta_{be} \dot{\theta}_{be} \right]^2
\end{aligned}$$

onde $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$.

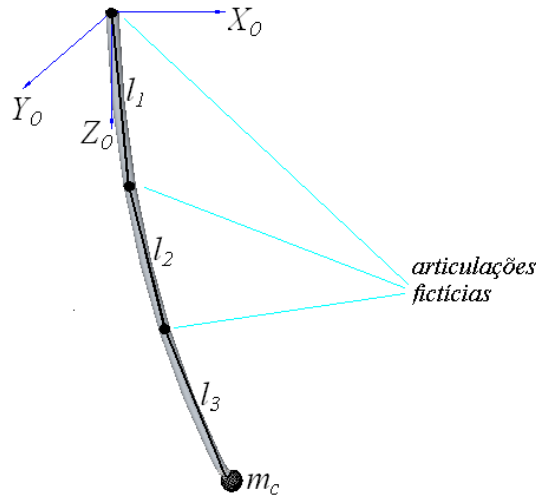


Figura 2.7 Representação geométrica do cabo com três articulações fictícias.

Pretende-se fazer em um estudo posterior a determinação dos comprimentos ideais para os elos, a fim de aproximar a flexibilidade contínua do cabo por uma equivalente discreta. Neste capítulo, utilizou-se para a geração de um modelo de testes, a divisão das partes rígidas em metades quando é feita a inclusão de uma nova articulação fictícia, por exemplo: uma única articulação fictícia considerada seria posta na metade do comprimento total do elo, dividindo o mesmo em duas partes rígidas. Uma nova articulação fictícia implicaria em colocar as duas articulações nas metades das duas partes rígidas do caso anterior e assim sucessivamente. Esta forma de divisão foi proposta para manipuladores robóticos com elos flexíveis em [72], tendo-se mostrado eficiente. Porém para o caso de estruturas com grande flexibilidade do tipo cabo, será necessário fazer um estudo posterior para definir se de fato esta representação seria a ideal ou não.

De acordo com a representação adotada, considera-se $l_1 = \frac{l}{4}$, $l_2 = \frac{l}{2}$ e $l_3 = \frac{l}{4}$, e, portanto:

$$L = La_1 + La_2 + La_3 + La_4 + La_5 \quad (2.28)$$

Onde

$$\begin{aligned} La_1 = & \frac{1}{2}I_{R_1}\dot{\theta}_{1a}^2 + \frac{1}{2}I_{R_2}(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a})^2 + \frac{1}{2}I_{R_3}(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a})^2 + \frac{1}{2}I_{T_1}\dot{\theta}_{1T}^2 + \frac{1}{2}I_{T_2}\dot{\theta}_{2T}^2 + \\ & + \frac{1}{2}(I_{T_3} + I_{T_c})\dot{\theta}_{3T}^2 - \frac{1}{2}k_{1e}\theta_{1e}^2 - \frac{1}{2}k_{2e}(\theta_{2e} - \theta_{1e})^2 - \frac{1}{2}k_{3e}(\theta_{3e} - \theta_{2e})^2 - \frac{1}{2}k_{1a}\theta_{1a}^2 + \\ & - \frac{1}{2}k_{2a}(\theta_{2a} - \theta_{1a})^2 - \frac{1}{2}k_{3a}(\theta_{3a} - \theta_{2a})^2 - \frac{1}{2}k_{1T}\theta_{1T}^2 - \frac{1}{2}k_{2T}(\theta_{2T} - \theta_{1T})^2 - \frac{1}{2}k_{3T}(\theta_{3T} - \theta_{2T})^2 \\ La_2 = & -\frac{m_1gl}{8}(1 - \cos\theta_{1e}) - m_2g\left[\frac{l}{4}(1 - \cos\theta_{1e}) + \frac{l}{4}(1 - \cos\theta_{2e})\right] \\ & - m_3g\left[\frac{l}{4}(1 - \cos\theta_{1e}) + \frac{l}{2}(1 - \cos\theta_{2e}) + \frac{l}{8}(1 - \cos\theta_{3e})\right] + \\ & + \frac{1}{128}m_1l^2\left[(\sin\theta_{1e}\cos\theta_{1a}\dot{\theta}_{1a} + \cos\theta_{1e}\sin\theta_{1a}\dot{\theta}_{1e})^2 + \right. \\ & \left. + (-\sin\theta_{1e}\sin\theta_{1a}\dot{\theta}_{1a} + \cos\theta_{1a}\cos\theta_{1e}\dot{\theta}_{1e})^2 + \sin^2\theta_{1e}\dot{\theta}_{1e}^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
La_3 = \frac{1}{32} m_2 l^2 \{ & [\sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) + \cos \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a})\dot{\theta}_{2e} + \\
& + \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \dot{\theta}_{1a} + \cos \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \dot{\theta}_{1e}]^2 + \\
& + [-\sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) + \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a})\cos \theta_{2e} \dot{\theta}_{2e} + \\
& - \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \dot{\theta}_{1a} + \cos \theta_{1a} \cos \theta_{1e} \dot{\theta}_{1e}]^2 + \\
& + (-\sin \theta_{2e} \dot{\theta}_{2e} - \sin \theta_{1e} \dot{\theta}_{1e})^2 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
La_4 = \frac{1}{128} m_3 l^2 \{ & \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) + \cos \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{3e} + \\
& + 4[\sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) + \cos \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a})\dot{\theta}_{2e}] + \\
& + 2(\sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \dot{\theta}_{1a} + \cos \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \dot{\theta}_{1e}) \}^2 + \\
& + \frac{1}{128} m_3 l^2 \{ -\sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) + \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a})\cos \theta_{3e} \dot{\theta}_{3e} + \\
& + 4[-\sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) + \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a})\cos \theta_{2e} \dot{\theta}_{2e}] + \\
& + 2(-\sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \dot{\theta}_{1a} + \cos \theta_{1a} \cos \theta_{1e} \dot{\theta}_{1e}) \}^2 + \\
& + \frac{1}{128} m_3 l^2 (-\sin \theta_{3e} \dot{\theta}_{3e} - 4 \sin \theta_{2e} \dot{\theta}_{2e} - 2 \sin \theta_{1e} \dot{\theta}_{1e})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
La_5 = \frac{1}{32} m_c l^2 \{ & \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) + \cos \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{3e} + \\
& + 2[\sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) + \cos \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a})\dot{\theta}_{2e}] + \\
& + \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \dot{\theta}_{1a} + \cos \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \dot{\theta}_{1e} \}^2 + \\
& + \frac{1}{32} m_c l^2 \{ -\sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a} + \dot{\theta}_{3a}) + \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a})\cos \theta_{3e} \dot{\theta}_{3e} + \\
& + 2[-\sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a})(\dot{\theta}_{1a} + \dot{\theta}_{2a}) + \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a})\cos \theta_{2e} \dot{\theta}_{2e}] + \\
& + (-\sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \dot{\theta}_{1a} + \cos \theta_{1a} \cos \theta_{1e} \dot{\theta}_{1e}) \}^2 + \\
& + \frac{1}{32} m_c l^2 (-\sin \theta_{3e} \dot{\theta}_{3e} - 2 \sin \theta_{2e} \dot{\theta}_{2e} - \sin \theta_{1e} \dot{\theta}_{1e})^2
\end{aligned}$$

Aplica-se a equação de Euler-Lagrange a cada uma das variáveis em (2.28), ou seja, as seguintes equações são determinadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1e}} = T_{\theta_{1e}} - c_{1e} \dot{\theta}_{1e} - c_{2e} (\dot{\theta}_{1e} - \dot{\theta}_{2e}) = T_{\theta_{1e}} - (c_{1e} + c_{2e}) \dot{\theta}_{1e} + c_{2e} \dot{\theta}_{2e} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2e}} &= T_{\theta_{2e}} - c_{2e} (\dot{\theta}_{2e} - \dot{\theta}_{1e}) - c_{3e} (\dot{\theta}_{2e} - \dot{\theta}_{3e}) = \\ &= T_{\theta_{2e}} + c_{2e} \dot{\theta}_{1e} - (c_{2e} + c_{3e}) \dot{\theta}_{2e} + c_{3e} \dot{\theta}_{3e} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3e}} = T_{\theta_{3e}} - c_{3e} (\dot{\theta}_{3e} - \dot{\theta}_{2e}) = T_{\theta_{3e}} - c_{3e} \dot{\theta}_{3e} + c_{3e} \dot{\theta}_{2e} \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1a}} = T_{\theta_{1a}} - c_{1a} \dot{\theta}_{1a} - c_{2a} (\dot{\theta}_{1a} - \dot{\theta}_{2a}) = T_{\theta_{1a}} - (c_{1a} + c_{2a}) \dot{\theta}_{1a} + c_{2a} \dot{\theta}_{2a} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2a}} &= T_{\theta_{2a}} - c_{2a} (\dot{\theta}_{2a} - \dot{\theta}_{1a}) - c_{3a} (\dot{\theta}_{2a} - \dot{\theta}_{3a}) = \\ &= T_{\theta_{2a}} + c_{2a} \dot{\theta}_{1a} - (c_{2a} + c_{3a}) \dot{\theta}_{2a} + c_{3a} \dot{\theta}_{3a} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3a}} = T_{\theta_{3a}} - c_{3a} (\dot{\theta}_{3a} - \dot{\theta}_{2a}) = T_{\theta_{3a}} - c_{3a} \dot{\theta}_{3a} + c_{3a} \dot{\theta}_{2a} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1T}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1T}} &= T_{\theta_{1T}} - c_{1T} \dot{\theta}_{1T} - c_{2T} (\dot{\theta}_{1T} - \dot{\theta}_{2T}) = T_{\theta_{1T}} - (c_{1T} + c_{2T}) \dot{\theta}_{1T} + c_{2T} \dot{\theta}_{2T} \\ & \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2T}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2T}} &= T_{\theta_{2T}} - c_{2T} (\dot{\theta}_{2T} - \dot{\theta}_{1T}) - c_{3T} (\dot{\theta}_{2T} - \dot{\theta}_{3T}) = \\ &= T_{\theta_{2T}} + c_{2T} \dot{\theta}_{1T} - (c_{2T} + c_{3T}) \dot{\theta}_{2T} + c_{3T} \dot{\theta}_{3T} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3T}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3T}} = T_{\theta_{3T}} - c_{3T} (\dot{\theta}_{3T} - \dot{\theta}_{2T}) = T_{\theta_{3T}} - c_{3T} \dot{\theta}_{3T} + c_{3T} \dot{\theta}_{2T} \quad (2.37)$$

onde c_{1e} , c_{2e} , c_{3e} ; c_{1a} , c_{2a} , c_{3a} e c_{1T} , c_{2T} , c_{3T} são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação, azimute e torção, respectivamente. Os torques externos atuantes nas articulações fictícias, $T_{\theta_{ia}}$, $T_{\theta_{ie}}$ e $T_{\theta_{iT}}$, $i=1,2,3$, surgem em razão de diversas causas, tais como, força de empuxo, correntes subaquáticas, movimento independente da carga terminal (no caso da mesma ser um ROV, por exemplo), etc. Para cabos com seção transversal constante é coerente supor que o centro de empuxo de cada elo é coincidente com o centro de massa e, portanto, os torques devidos às forças de empuxo serão semelhantes aos gravitacionais, mas de sentido oposto e amplitudes diferentes, equivalentes ao peso do fluido contido no volume de cada elo submerso.

Desenvolvendo-se as equações (2.29) a (2.37), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$I(\vec{\theta})\ddot{\vec{\theta}} + C\dot{\vec{\theta}} + K\vec{\theta} + \vec{f}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) = \vec{T}_m, \quad (2.38)$$

onde $\vec{\theta} = [\theta_{1e} \ \theta_{2e} \ \theta_{3e} \ \theta_{1a} \ \theta_{2a} \ \theta_{3a} \ \theta_{1T} \ \theta_{2T} \ \theta_{3T}]^T$, $I(\vec{\theta})$ é a matriz de inércia cujos elementos são:

$$I_{11} = \frac{l^2}{64}(m_1 + 4m_2 + 4m_3 + 4m_c)$$

$$I_{12} = \frac{l^2}{16}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)(\cos\theta_{2e} \cos\theta_{2a} \cos\theta_{1e} + \sin\theta_{2e} \sin\theta_{1e})$$

$$I_{13} = \frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)[\sin\theta_{3e} \sin\theta_{1e} + \cos\theta_{3e} \cos\theta_{1e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})]$$

$$I_{14} = -\frac{l^2}{32}[(2m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin\theta_{2e} \sin\theta_{2a} + (m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]\cos\theta_{1e}$$

$$I_{15} = -\frac{l^2}{32}[(2m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin\theta_{2e} \sin\theta_{2a} + (m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]\cos\theta_{1e}$$

$$I_{16} = -\frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\cos\theta_{1e}$$

$$I_{17} = I_{18} = I_{19} = 0$$

$$I_{21} = I_{12} ; \quad I_{22} = \frac{l^2}{16}(m_2 + 4m_3 + 4m_c)$$

$$I_{23} = \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)(\cos\theta_{3e} \cos\theta_{3a} \cos\theta_{2e} + \sin\theta_{3e} \sin\theta_{2e})$$

$$I_{24} = \frac{l^2}{16}[(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2a} \sin\theta_{1e} - (m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e} \sin\theta_{3a}]\cos\theta_{2e}$$

$$I_{25} = -\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e} \sin\theta_{3a} \cos\theta_{2e}$$

$$I_{26} = -\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e} \sin\theta_{3a} \cos\theta_{2e}$$

$$I_{27} = I_{28} = I_{29} = 0$$

$$I_{31} = I_{13} ; \quad I_{32} = I_{23} ; \quad I_{33} = \frac{l^2}{64}(m_3 + 4m_c)$$

$$I_{34} = \frac{l^2}{32}[(2m_3 + 4m_c)\sin\theta_{3a} \sin\theta_{2e} + (m_3 + 2m_c)\sin\theta_{1e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})]\cos\theta_{3e}$$

$$I_{35} = \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{3e} \sin\theta_{3a} \sin\theta_{2e}$$

$$I_{36} = I_{37} = I_{38} = I_{39} = 0$$

$$I_{41} = I_{14} ; \quad I_{42} = I_{24} ; \quad I_{43} = I_{34}$$

$$\begin{aligned}
I_{44} = & \frac{l^2}{64}(m_1 + 4m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{1e} + \frac{l^2}{16}(m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{2e} + \\
& + \frac{l^2}{64}(m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{3e} + \frac{l^2}{8}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \sin \theta_{1e} + \\
& + \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} + \\
& + I_{R_1} + I_{R_2} + I_{R_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{45} = & \frac{l^2}{16}(m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{2e} + \frac{l^2}{64}(m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{3e} + \\
& + \frac{l^2}{16}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \sin \theta_{1e} + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} + \\
& + \frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + I_{R_2} + I_{R_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{46} = & \frac{l^2}{64}(m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{3e} + \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} + \\
& + \frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + I_{R_3}
\end{aligned}$$

$$I_{47} = I_{48} = I_{49} = 0$$

$$I_{51} = I_{15} ; I_{52} = I_{25} ; I_{53} = I_{35} ; I_{54} = I_{45}$$

$$\begin{aligned}
I_{55} = & \frac{l^2}{16}(m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{2e} + \frac{l^2}{64}(m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{3e} + \\
& + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} + I_{R_2} + I_{R_3}
\end{aligned}$$

$$I_{56} = \frac{l^2}{64}(m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{3e} + \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} + I_{R_3}$$

$$I_{57} = I_{58} = I_{59} = 0$$

$$I_{61} = I_{16} ; I_{62} = I_{26} ; I_{63} = I_{36} = 0 ; I_{64} = I_{46} ; I_{65} = I_{56}$$

$$I_{66} = \frac{l^2}{64}(m_3 + 4m_c)\sin^2 \theta_{3e} + I_{R_3} ; I_{67} = I_{68} = I_{69} = 0$$

$$I_{71} = I_{72} = I_{73} = I_{74} = I_{75} = I_{76} = 0 ; I_{77} = I_{T1} ; I_{78} = I_{79} = 0$$

$$I_{81} = I_{82} = I_{83} = I_{84} = I_{85} = I_{86} = I_{87} = 0 ; I_{88} = I_{T2} ; I_{89} = 0$$

$$I_{91} = I_{92} = I_{93} = I_{94} = I_{95} = I_{96} = I_{97} = I_{98} = 0 ; I_{99} = I_{T3} + I_{Tc}$$

A matriz C das constantes de atrito tem os seguintes elementos:

$$C_{11} = c_{1e} + c_{2e} ; C_{12} = -c_{2e} ; C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{17} = C_{18} = C_{19} = 0 ;$$

$$C_{21} = C_{12} ; C_{22} = c_{2e} + c_{3e} ; C_{23} = -c_{3e} ; C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{27} = C_{28} = C_{29} = 0 ;$$

$$C_{31} = C_{13} ; C_{32} = C_{23} ; C_{33} = c_{3e} ; C_{34} = C_{35} = C_{36} = C_{37} = C_{38} = C_{39} = 0 ;$$

$$\begin{aligned}
C_{41} = C_{42} = C_{43} = 0; C_{44} = c_{1a} + c_{2a}; C_{45} = -c_{2a}; C_{46} = C_{47} = C_{48} = C_{49} = 0; \\
C_{51} = C_{52} = C_{53} = 0; C_{54} = C_{45}; C_{55} = c_{2a} + c_{3a}; C_{56} = -c_{3a}; C_{57} = C_{58} = C_{59} = 0; \\
C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = 0; C_{65} = C_{56}; C_{66} = c_{3a}; C_{67} = C_{68} = C_{69} = 0; \\
C_{71} = C_{72} = C_{73} = C_{74} = C_{75} = C_{76} = 0; C_{77} = c_{1T} + c_{2T}; C_{78} = -c_{2T}; C_{79} = 0; \\
C_{81} = C_{82} = C_{83} = C_{84} = C_{85} = C_{86} = 0; C_{87} = C_{78}; C_{88} = c_{2T} + c_{3T}; C_{89} = -c_{3T}; \\
C_{91} = C_{92} = C_{93} = C_{94} = C_{95} = C_{96} = C_{97} = 0; C_{98} = C_{89}; C_{99} = c_{3T}
\end{aligned}$$

A matriz K das constantes elásticas tem os seguintes elementos:

$$\begin{aligned}
K_{11} = k_{1e} + k_{2e}; K_{12} = -k_{2e}; K_{13} = K_{14} = K_{15} = K_{16} = K_{17} = K_{18} = K_{19} = 0; \\
K_{21} = K_{12}; K_{22} = k_{2e} + k_{3e}; K_{23} = -k_{3e}; K_{24} = K_{25} = K_{26} = K_{27} = K_{28} = K_{29} = 0; \\
K_{31} = K_{13}; K_{32} = K_{23}; K_{33} = k_{3e}; K_{34} = K_{35} = K_{36} = K_{37} = K_{38} = K_{39} = 0; \\
K_{41} = K_{42} = K_{43} = 0; K_{44} = k_{1a} + k_{2a}; K_{45} = -k_{2a}; K_{46} = K_{47} = K_{48} = K_{49} = 0; \\
K_{51} = K_{52} = K_{53} = 0; K_{54} = K_{45}; K_{55} = k_{2a} + k_{3a}; K_{56} = -k_{3a}; K_{57} = K_{58} = K_{59} = 0; \\
K_{61} = K_{62} = K_{63} = K_{64} = 0; K_{65} = K_{56}; K_{66} = k_{3a}; K_{67} = K_{68} = K_{69} = 0; \\
K_{71} = K_{72} = K_{73} = K_{74} = K_{75} = K_{76} = 0; K_{77} = k_{1T} + k_{2T}; K_{78} = -k_{2T}; K_{79} = 0; \\
K_{81} = K_{82} = K_{83} = K_{84} = K_{85} = K_{86} = 0; K_{87} = K_{78}; K_{88} = k_{2T} + k_{3T}; K_{89} = -k_{3T}; \\
K_{91} = K_{92} = K_{93} = K_{94} = K_{95} = K_{96} = K_{97} = 0; K_{98} = K_{89}; K_{99} = k_{3T}
\end{aligned}$$

As componentes do vetor $\vec{f}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$ são:

$$f_1 = f_{1a} + f_{1b} + f_{1c} + f_{1d},$$

onde

$$\begin{aligned}
f_{1a} = & -\frac{l^2}{8}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\cos\theta_{2e}\sin\theta_{2a}(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2e} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{2e}) + \\
& -\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\cos\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3e} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3e} + \dot{\theta}_{3a}\dot{\theta}_{3e}) \\
f_{1b} = & \left[-\frac{l^2}{8}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a} + \right. \\
& \left. -\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \\
& -\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{1c} = & \left[-\frac{l^2}{64}(m_1 + 4m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin\theta_{1e}\cos\theta_{1e} + \right. \\
& -\frac{l^2}{16}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a} + \\
& \left. -\frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{1a}^2 + \\
& + \left[-\frac{l^2}{16}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a} + \right. \\
& \left. -\frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{2a}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{1d} = & -\frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{3a}^2 + \\
& -\frac{l^2}{16}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)(\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2a} - \cos\theta_{2e}\sin\theta_{1e})\dot{\theta}_{2e}^2 + \\
& -\frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)[\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) - \cos\theta_{3e}\sin\theta_{1e}]\dot{\theta}_{3e}^2 + \\
& + \frac{gl}{8}(m_1 + 2m_2 + 2m_3)\sin\theta_{1e}
\end{aligned}$$

$$f_2 = f_{2a} + f_{2b} + f_{2c} + f_{2d},$$

onde

$$\begin{aligned}
f_{2a} = & \frac{l^2}{8}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{2a}\cos\theta_{2e}\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e} + \\
& -\frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}\cos\theta_{3e}\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3e} + \\
& -\frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}\cos\theta_{3e}(\dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3e} + \dot{\theta}_{3a}\dot{\theta}_{3e})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{2b} = & -\frac{l^2}{8}[(m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e} + (m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\sin\theta_{3e}]\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \\
& -\frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\sin\theta_{3e}\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} \\
& -\frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\sin\theta_{3e}\dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}
\end{aligned}$$

$$f_{2c} = -\frac{l^2}{16}[(m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e} + (m_2 + 2m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\cos\theta_{2a}\sin\theta_{1e} + \\ + (m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\sin\theta_{3e}]\dot{\theta}_{1a}^2 + \\ -\frac{l^2}{16}[(m_2 + 4m_3 + 4m_c)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{2e} + (m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\sin\theta_{3e}]\dot{\theta}_{2a}^2$$

$$f_{2d} = -\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\sin\theta_{3e}\dot{\theta}_{3a}^2 + \\ + \frac{l^2}{16}[(m_2 + 2m_3 + 2m_c)(\sin\theta_{2e}\cos\theta_{1e} - \sin\theta_{1e}\cos\theta_{2a}\cos\theta_{2e})\dot{\theta}_{1e}^2 + \\ + \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)(\cos\theta_{3e}\sin\theta_{2e} - \sin\theta_{3e}\cos\theta_{3a}\cos\theta_{2e})\dot{\theta}_{3e}^2 + \\ + \frac{gl}{4}(m_2 + 2m_3)\sin\theta_{2e}$$

$$f_3 = f_{3a} + f_{3b} + f_{3c} + f_{3d},$$

onde

$$f_{3a} = \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\cos\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e} + \\ + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}\cos\theta_{3e}\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2e} + \\ + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{2e}\sin\theta_{3a}\cos\theta_{3e}\dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{2e}$$

$$f_{3b} = -\frac{l^2}{64}[8(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\cos\theta_{3e} + 2(m_3 + 4m_c)\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}]\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \\ -\frac{l^2}{32}(m_3 + 4m_c)\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}) + \\ -\frac{l^2}{128}[(4m_3 + 8m_c)\sin\theta_{1e}\cos\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + (2m_3 + 8m_c)\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e} + \\ + 8(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\cos\theta_{3e}]\dot{\theta}_{1a}^2$$

$$f_{3c} = -\frac{l^2}{64}[(4m_3 + 8m_c)\sin\theta_{2e}\cos\theta_{3a}\cos\theta_{3e} + (m_3 + 4m_c)\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}]\dot{\theta}_{2a}^2 + \\ -\frac{l^2}{64}(m_3 + 4m_c)\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}\dot{\theta}_{3a}^2$$

$$\begin{aligned}
f_{3d} &= \frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c) [\sin \theta_{3e} \cos \theta_{1e} - \sin \theta_{1e} \cos \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})] \dot{\theta}_{1e}^2 + \\
&+ \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c) [\sin \theta_{3e} \cos \theta_{2e} - \sin \theta_{2e} \cos \theta_{3a} \cos \theta_{3e}] \dot{\theta}_{2e}^2 + \\
&+ \frac{gl}{8} m_3 \sin \theta_{3e}
\end{aligned}$$

$$f_4 = f_{4a} + f_{4b} + f_{4c} + f_{4d} + f_{4e},$$

onde

$$\begin{aligned}
f_{4a} &= \left[\frac{l^2}{32}(m_1 + 4m_2 + 4m_3 + 4m_c) \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1e} + \frac{l^2}{8}(m_2 + 2m_3 + 2m_c) \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \cos \theta_{1e} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c) \cos \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} + \\
&+ \left[\frac{l^2}{8}(m_2 + 4m_3 + 4m_c) \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2e} + \frac{l^2}{8}(m_2 + 2m_3 + 2m_c) \cos \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \sin \theta_{1e} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c) \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \cos \theta_{2e} \right] \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2e} + \\
&+ \left[\frac{l^2}{32}(m_3 + 4m_c) \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3e} + \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c) \sin \theta_{1e} \cos \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c) \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} \right] \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{3e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{4b} &= \left[\frac{l^2}{8}(m_2 + 2m_3 + 2m_c) \cos \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \sin \theta_{1e} + \frac{l^2}{8}(m_2 + 4m_3 + 4m_c) \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2e} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c) \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \cos \theta_{2e} \right] \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{2e} + \\
&+ \left[\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c) \cos \theta_{3e} \sin \theta_{1e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \frac{l^2}{32}(m_3 + 4m_c) \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3e} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c) \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} \right] \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{3e} + \\
&+ \left[\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c) \cos \theta_{3e} \sin \theta_{1e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \frac{l^2}{32}(m_3 + 4m_c) \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3e} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c) \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} \right] \dot{\theta}_{3a} \dot{\theta}_{3e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{4c} = & \left[-\frac{l^2}{8}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\sin\theta_{1e} + \right. \\
& \left. -\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \\
& + \left[-\frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\sin\theta_{2e} + \right. \\
& \left. -\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3a} + \\
& + \left[-\frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\sin\theta_{2e} + \right. \\
& \left. -\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{4d} = & \left[-\frac{l^2}{16}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\sin\theta_{1e} + \right. \\
& \left. -\frac{l^2}{64}(2m_3 + 4m_c)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{2a}^2 + \\
& + \left[-\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\sin\theta_{2e} + \right. \\
& \left. -\frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{3a}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{4e} = & \left[\frac{l^2}{16}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\sin\theta_{1e} + \right. \\
& \left. +\frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{1e}^2 \\
& + \left[-\frac{l^2}{16}(m_2 + 2m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\sin\theta_{2a}\sin\theta_{1e} + \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a} \right] \dot{\theta}_{2e}^2 + \\
& + \left[-\frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}\sin\theta_{2e} + \right. \\
& \left. -\frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{3e}^2
\end{aligned}$$

$$f_5 = f_{5a} + f_{5b} + f_{5c} + f_{5d},$$

onde

$$\begin{aligned}
f_{5a} = & \left[\frac{l^2}{8} (m_2 + 2m_3 + 2m_c) \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2a} \cos \theta_{1e} + \right. \\
& \left. + \frac{l^2}{16} (m_3 + 2m_c) \cos \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{1e} + \\
& + \left[\frac{l^2}{8} (m_2 + 4m_3 + 4m_c) \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2e} + \right. \\
& \left. + \frac{l^2}{8} (m_3 + 2m_c) \cos \theta_{2e} \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \right] \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{2e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{5b} = & \left[\frac{l^2}{8} (m_3 + 2m_c) \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} + \frac{l^2}{32} (m_3 + 4m_c) \cos \theta_{3e} \sin \theta_{3e} \right] \dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{3e} + \\
& + \left[\frac{l^2}{8} (m_2 + 4m_3 + 4m_c) \sin \theta_{2e} \cos \theta_{2e} + \frac{l^2}{8} (m_3 + 2m_c) \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \cos \theta_{2e} \right] \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{2e} + \\
& + \left[\frac{l^2}{32} (m_3 + 4m_c) \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3e} + \frac{l^2}{8} (m_3 + 2m_c) \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} \right] \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{3e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{5c} = & \left[\frac{l^2}{8} (m_3 + 2m_c) \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} \sin \theta_{2e} + \frac{l^2}{32} (m_3 + 4m_c) \sin \theta_{3e} \cos \theta_{3e} \right] \dot{\theta}_{3a} \dot{\theta}_{3e} + \\
& - \frac{l^2}{8} (m_3 + 2m_c) \sin \theta_{3e} \sin \theta_{3a} \sin \theta_{2e} (\dot{\theta}_{1a} \dot{\theta}_{3a} + \dot{\theta}_{2a} \dot{\theta}_{3a}) + \\
& + \left[\frac{l^2}{32} (m_3 + 2m_c) \sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \right. \\
& \left. + \frac{l^2}{16} (m_2 + 2m_3 + 2m_c) \sin \theta_{1e} \sin \theta_{2e} \sin \theta_{2a} \right] \dot{\theta}_{1a}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{5d} = & -\frac{l^2}{16} (m_3 + 2m_c) \sin \theta_{3e} \sin \theta_{3a} \sin \theta_{2e} \dot{\theta}_{3a}^2 + \frac{l^2}{16} (m_3 + 2m_c) \sin \theta_{3e} \sin \theta_{3a} \sin \theta_{2e} (\dot{\theta}_{2e}^2 - \dot{\theta}_{3e}^2) + \\
& + \left[\frac{l^2}{32} (m_3 + 2m_c) \sin \theta_{1e} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \right. \\
& \left. + \frac{l^2}{16} (m_2 + 2m_3 + 2m_c) \sin \theta_{1e} \sin \theta_{2e} \sin \theta_{2a} \right] \dot{\theta}_{1e}^2
\end{aligned}$$

$$f_6 = f_{6a} + f_{6b},$$

onde

$$\begin{aligned}
f_{6a} = & \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\cos\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\cos(\theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{1e} + \frac{l^2}{32}(m_3 + 4m_c)\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}\dot{\theta}_{3a}\dot{\theta}_{3e} + \\
& + \frac{l^2}{32}(m_3 + 4m_c)\sin\theta_{3e}\cos\theta_{3e}(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{3e} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{3e}) + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{2a}\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2a} + \\
& + \frac{l^2}{8}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{3e}\cos\theta_{2e}\cos\theta_{3a}(\dot{\theta}_{1a}\dot{\theta}_{2e} + \dot{\theta}_{2a}\dot{\theta}_{2e})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{6b} = & \left[\frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a}) + \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a} \right] \dot{\theta}_{1a}^2 + \\
& + \frac{l^2}{16}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{2e}\sin\theta_{3e}\sin\theta_{3a}(\dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2) + \\
& + \frac{l^2}{32}(m_3 + 2m_c)\sin\theta_{1e}\sin\theta_{3e}\sin(\theta_{2a} + \theta_{3a})\dot{\theta}_{1e}^2
\end{aligned}$$

$$f_7 = f_8 = f_9 = 0$$

As componentes do vetor \vec{T}_m dos torques são:

$$T_{m1} = T_{\theta_{1e}}; T_{m2} = T_{\theta_{2e}}; T_{m3} = T_{\theta_{3e}};$$

$$T_{m4} = T_{\theta_{1a}}; T_{m5} = T_{\theta_{2a}}; T_{m6} = T_{\theta_{3a}};$$

$$T_{m7} = T_{\theta_{1T}}; T_{m8} = T_{\theta_{2T}}; T_{m9} = T_{\theta_{3T}}$$

Para resolver o sistema (2.38), considera-se a seguinte troca de variáveis:

$$\begin{aligned}
x_1 = \theta_{1e} & \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_{1e} = x_{10} \Rightarrow \dot{x}_{10} = \ddot{\theta}_{1e} \\
x_2 = \theta_{2e} & \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\theta}_{2e} = x_{11} \Rightarrow \dot{x}_{11} = \ddot{\theta}_{2e} \\
x_3 = \theta_{3e} & \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_{3e} = x_{12} \Rightarrow \dot{x}_{12} = \ddot{\theta}_{3e} \\
x_4 = \theta_{1a} & \Rightarrow \dot{x}_4 = \dot{\theta}_{1a} = x_{13} \Rightarrow \dot{x}_{13} = \ddot{\theta}_{1a} \\
x_5 = \theta_{2a} & \Rightarrow \dot{x}_5 = \dot{\theta}_{2a} = x_{14} \Rightarrow \dot{x}_{14} = \ddot{\theta}_{2a} \\
x_6 = \theta_{3a} & \Rightarrow \dot{x}_6 = \dot{\theta}_{3a} = x_{15} \Rightarrow \dot{x}_{15} = \ddot{\theta}_{3a} \\
x_7 = \theta_{1T} & \Rightarrow \dot{x}_7 = \dot{\theta}_{1T} = x_{16} \Rightarrow \dot{x}_{16} = \ddot{\theta}_{1T} \\
x_8 = \theta_{2T} & \Rightarrow \dot{x}_8 = \dot{\theta}_{2T} = x_{17} \Rightarrow \dot{x}_{17} = \ddot{\theta}_{2T} \\
x_9 = \theta_{3T} & \Rightarrow \dot{x}_9 = \dot{\theta}_{3T} = x_{18} \Rightarrow \dot{x}_{18} = \ddot{\theta}_{3T}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Obtém-se, assim, o seguinte sistema de equações diferenciais de 1ª ordem na forma matricial:

$$\dot{\vec{X}} = P(\vec{X})\vec{X} + \vec{F}(\vec{X}) + \vec{\Gamma} \quad (2.40)$$

onde

$$P(\vec{X}) = \begin{bmatrix} [0]_{9 \times 9} & [1]_{9 \times 9} \\ -[I(\vec{X})]^{-1} K & -[I(\vec{X})]^{-1} C \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{X}) = \begin{bmatrix} [0]_{9 \times 1} \\ -[I(\vec{X})]^{-1} \vec{f}(\vec{X}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Gamma} = \begin{bmatrix} [0]_{9 \times 1} \\ [I(\vec{X})]^{-1} \vec{T}_m \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{18}]^T$$

No próximo capítulo serão apresentados os resultados das simulações com a dinâmica de cabos fora da água e submersos, utilizando-se a formulação descrita no presente capítulo.

CAPÍTULO III
RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COM A DINÂMICA
DE CABOS

3. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COM A DINÂMICA DE CABOS

Neste capítulo serão apresentadas algumas simulações com a dinâmica de cabos livres ou submersos. Existem muitas formas de cabos, com múltiplas vias, diferentes concepções de entrelaçamento, diferentes tipos de revestimentos, etc. O modelo dinâmico do cabo proposto na presente tese é genérico e se aplica a qualquer tipo de cabo, é original e constitui uma interessante alternativa ao uso de elementos finitos, entretanto, existe a necessidade de identificar os parâmetros das constantes de atrito e das constantes elásticas em cada articulação fictícia, sendo que estes parâmetros determinam se o cabo é muito ou pouco flexível. Como o modelo é genérico, ele pode ser empregado para uma viga com flexibilidade espacial.

Ainda não se dispõe de um aparato experimental para validar os modelos dinâmicos. Pretende-se, como continuação da presente pesquisa, construir um experimento constituído de um cabo equipado com diversos sensores, de forma a identificar os parâmetros e validar os trabalhos de modelagem. Porém, foram atribuídos valores aos parâmetros de um modelo dinâmico e realizaram-se as simulações, com o objetivo de mostrar que o formalismo proposto para a modelagem apresenta resultados coerentes com o esperado para a dinâmica de cabos livres ou submersos.

Considerou-se um cabo idealizado com 0.02m de diâmetro e 3.2m de comprimento com uma extremidade fixa a um corpo sem movimento e outra extremidade livre, na qual se considera uma massa de 0.5kg.

Na presente tese, todas as simulações com o cabo foram realizadas utilizando-se a rotina ODE45 do MATLAB (Integrador Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem com ajuste automático do passo de integração).

Conforme foi descrito no capítulo anterior, o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{\vec{X}} = P(\vec{X})\vec{X} + \vec{F}(\vec{X}) + \vec{\Gamma} \quad (3.1)$$

descreve a dinâmica dos cabos, onde o vetor de estado dado por:

$$\vec{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \ x_{15} \ x_{16} \ x_{17} \ x_{18}]^T \quad (3.2)$$

possui dezoito coordenadas, sendo as nove primeiras de posição e as outras nove as suas respectivas velocidades, ou seja (para as simulações considerou-se o modelo com três elos):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \theta_{1e}, & x_2 &= \theta_{2e}, & x_3 &= \theta_{3e}, \\
 x_4 &= \theta_{1a}, & x_5 &= \theta_{2a}, & x_6 &= \theta_{3a}, \\
 x_7 &= \theta_{1T}, & x_8 &= \theta_{2T}, & x_9 &= \theta_{3T}, \\
 x_{10} &= \dot{\theta}_{1e}, & x_{11} &= \dot{\theta}_{2e}, & x_{12} &= \dot{\theta}_{3e}, \\
 x_{13} &= \dot{\theta}_{1a}, & x_{14} &= \dot{\theta}_{2a}, & x_{15} &= \dot{\theta}_{3a}, \\
 x_{16} &= \dot{\theta}_{1T}, & x_{17} &= \dot{\theta}_{2T}, & x_{18} &= \dot{\theta}_{3T}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $\theta_{1e}, \theta_{2e}, \theta_{3e}$ são os ângulos de elevação, $\theta_{1a}, \theta_{2a}, \theta_{3a}$ são os ângulos de azimute e $\theta_{1T}, \theta_{2T}, \theta_{3T}$ são os ângulos de torção nas articulações 1,2 e 3, respectivamente.

Devido à convenção adotada no Capítulo 2, em relação aos sistemas de referência e aos ângulos de elevação, de azimute e de torção, é importante salientar que os ângulos de elevação são simétricos em relação ao eixo Z_{i-1} em cada plano α_i , conforme ilustra a figura 3.1, e os ângulos de azimute θ_{ia} são sempre ângulos pequenos entre o eixo Y_{i-1} e o plano α_i .

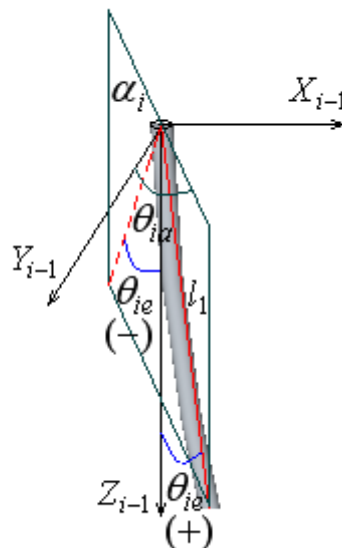


Figura 3.1 Representação gráfica das convenções adotadas para os ângulos de elevação e azimute.

Outra convenção adotada e importante está relacionada com o sistema inercial da base $(X_0 Y_0 Z_0)$. Considera-se um sistema geodésico $X_G Y_G Z_G$ como mostra a figura 3.2, com o eixo Z_G apontando para o centro da Terra e Y_G para o Polo Sul. O sistema inercial $X_0 Y_0 Z_0$ é colocado de modo que Z_0 aponta para o centro da Terra e Y_0 na mesma direção da projeção horizontal do primeiro elo no começo do primeiro movimento do cabo. Se o movimento do cabo é causado por uma perturbação externa conhecida (corrente oceânica com direção conhecida, por exemplo) é fácil encontrar o ângulo entre Y_G e Y_0 .

Os ângulos de azimute dos elos são tomados com relação aos eixos Y_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) sempre que existem deformações do cabo causadas por movimentos, de modo que a configuração geométrica do cabo já não esteja contida em um único plano. Isto significa que se o cabo está com ângulos de elevação, azimute e torção diferentes de zero, todos os ângulos tendem a zero (na ausência de torques externos) devido à gravidade e aos torques elásticos internos.

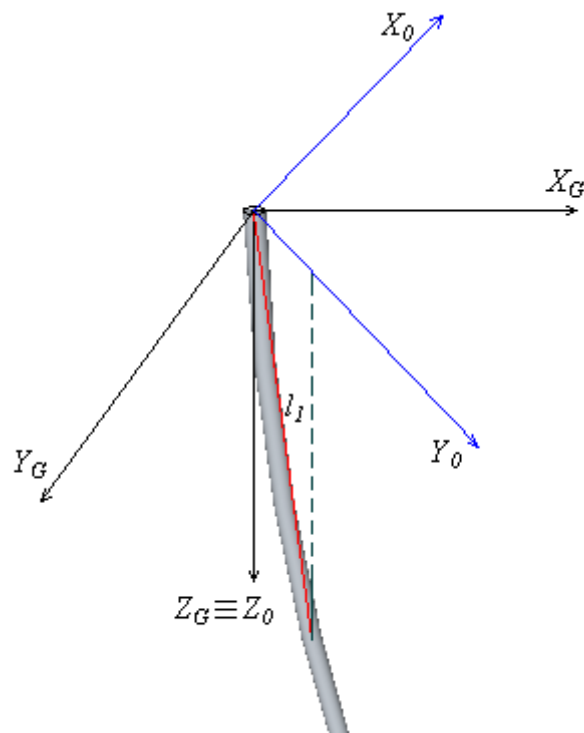


Figura 3.2 Representação gráfica das convenções adotadas para o sistema inercial.

Na matriz $P(\vec{X})$, as constantes elásticas foram atribuídas com base nas características do material do cabo. Porém, as constantes de atrito interno, bem como as constantes relativas ao arrasto devido ao contato com o fluido foram atribuídas e refinadas em sucessivas simulações a fim de se obter resultados esperados fisicamente. Em razão dos esforços de natureza elástica e gravitacional, na ausência de esforços externos, a dinâmica deve responder com oscilações em torno do ponto de equilíbrio estável e ainda atingir o estado estacionário final exatamente neste mesmo ponto de equilíbrio, ou seja, com todas as posições e velocidades angulares nulas.

As simulações apresentadas a seguir foram realizadas, com o vetor de estado inicial

$$\vec{X} = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

com 0.1rad para cada coordenada de posição em elevação e azimute, com as coordenadas de posição em torção nulas, com todas as velocidades nulas e com passo de integração 0.05s . As únicas forças externas consideradas foram arrasto e empuxo, existentes quando se considerou o cabo submerso.

A figura 3.3 mostra a posição angular de elevação para cada elo, considerando-se o cabo fora da água. O movimento pendular em elevação devido à gravidade poderia ser menos ou mais amortecido em razão dos atritos nas articulações fictícias elásticas.

A figura 3.4 mostra a posição angular de azimute para cada elo, também com o cabo fora da água. Neste caso, o movimento tende a ser mais amortecido em razão de não haver torques gravitacionais tendendo a aumentar as amplitudes do movimento.

Nas figuras 3.5 e 3.6 vê-se a posição espacial da extremidade, para o caso do cabo fora da água. Como as oscilações em azimute se atenuam antes das de elevação, o movimento deixa de ser espacial e passa a ser plano; então se estabelece um movimento pendular com oscilações apenas sobre o eixo y ao final.

As figuras 3.7 a 3.8 mostram resultados de uma simulação realizada sob as mesmas condições da simulação anterior, mas, nesse caso, considerando-se o cabo submerso. Conforme já era esperado, as respostas são mais lentas e bem mais amortecidas, em razão dos efeitos do empuxo e do arrasto. Observando-se as figuras 3.9 e 3.10, por exemplo, percebe-se que a extremidade do cabo saiu da posição inicial e chegou na posição final ($x = 0$, $y = 0$ e $z = 3.2\text{m}$ (comprimento do cabo)) praticamente sem oscilações. Na realidade, o arrasto é o responsável por respostas tão amortecidas.

A figura 3.11 mostra a torção em cada elo, para o vetor de estado inicial

$$\vec{X} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

com cada coordenada de posição em elevação e azimute nulas e cada coordenada de posição em torção com $0.1rad$, com todas as velocidades nulas e com passo de integração $0.001s$ para o cabo fora da água. Ressalta-se que não se trata da torção relativa ao elo anterior e sim relativa ao estado neutro da base do cabo. Percebe-se um modo de mais alta frequência e bastante amortecido.

A figura 3.12 mostra a torção em cada elo, para o vetor de estado inicial

$$\vec{X} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ -0.1 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

com cada coordenada de posição em elevação e azimute nulas, com as coordenadas de posição em torção $\theta_{1T} = \theta_{3T} = 0.1rad$ e $\theta_{2T} = -0.1rad$, com todas as velocidades nulas e com passo de integração $0.001s$ para o cabo fora da água. Observa-se que nestas condições iniciais as oscilações se estabilizam mais rapidamente.

A resposta em torção é ainda praticamente idêntica para o cabo dentro ou fora da água, visto que o atrito com a água foi negligenciado apenas no movimento de torção.

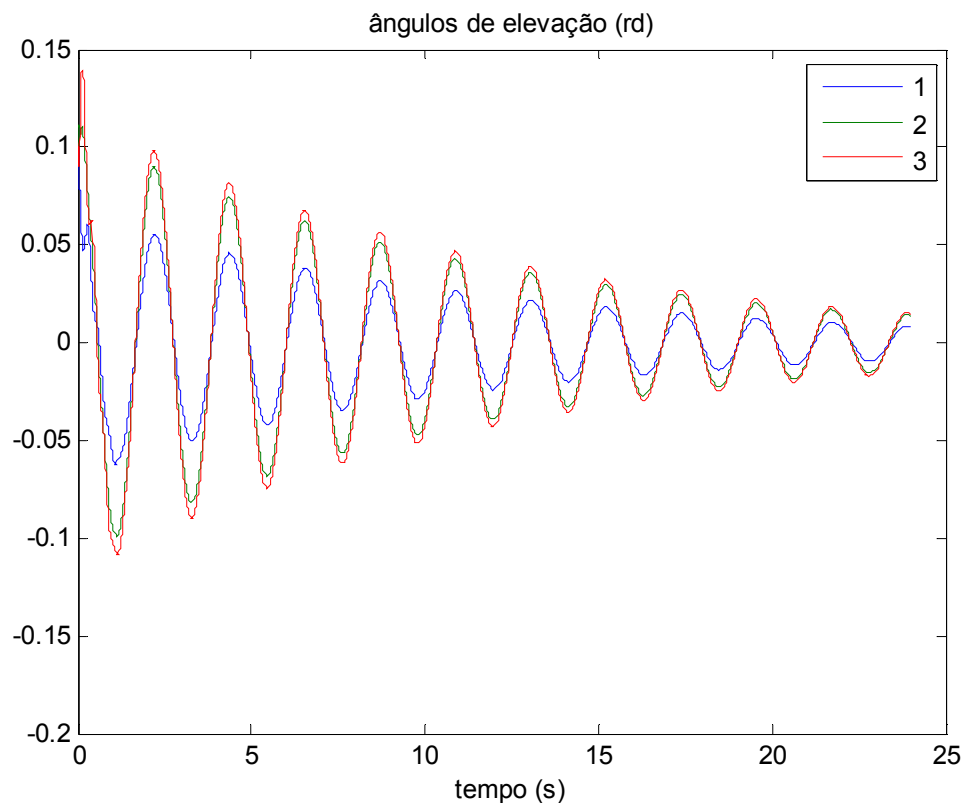


Figura 3.3 Posição angular de cada elo em elevação com o cabo fora da água.

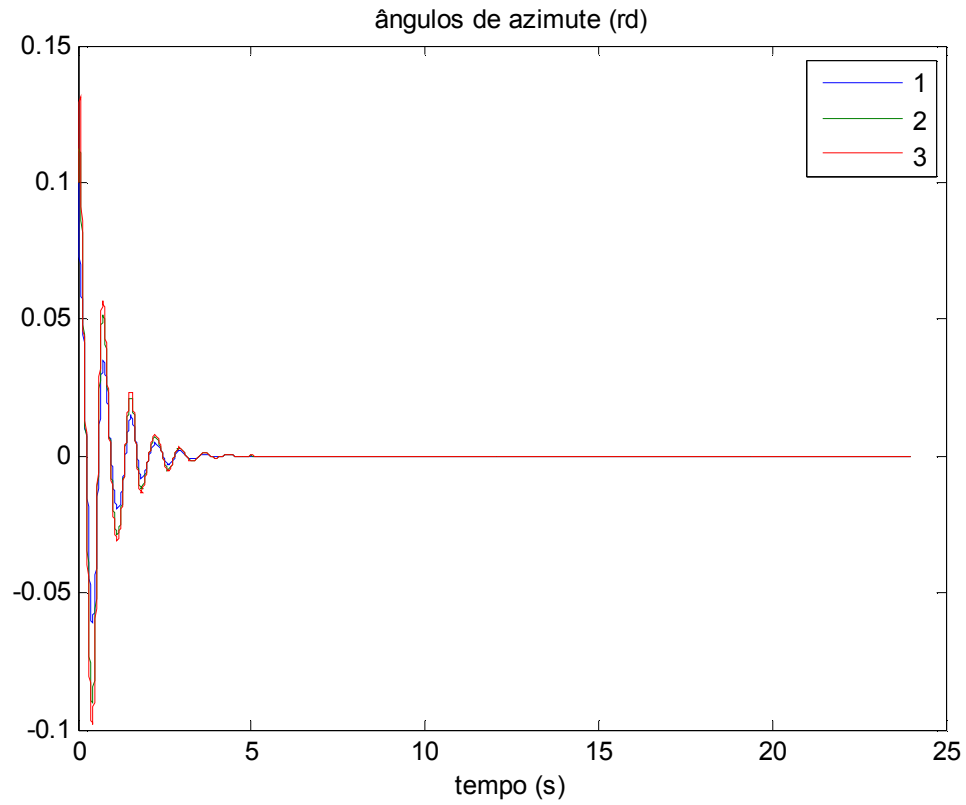


Figura 3.4 Posição angular de cada elo em azimute com o cabo fora da água.

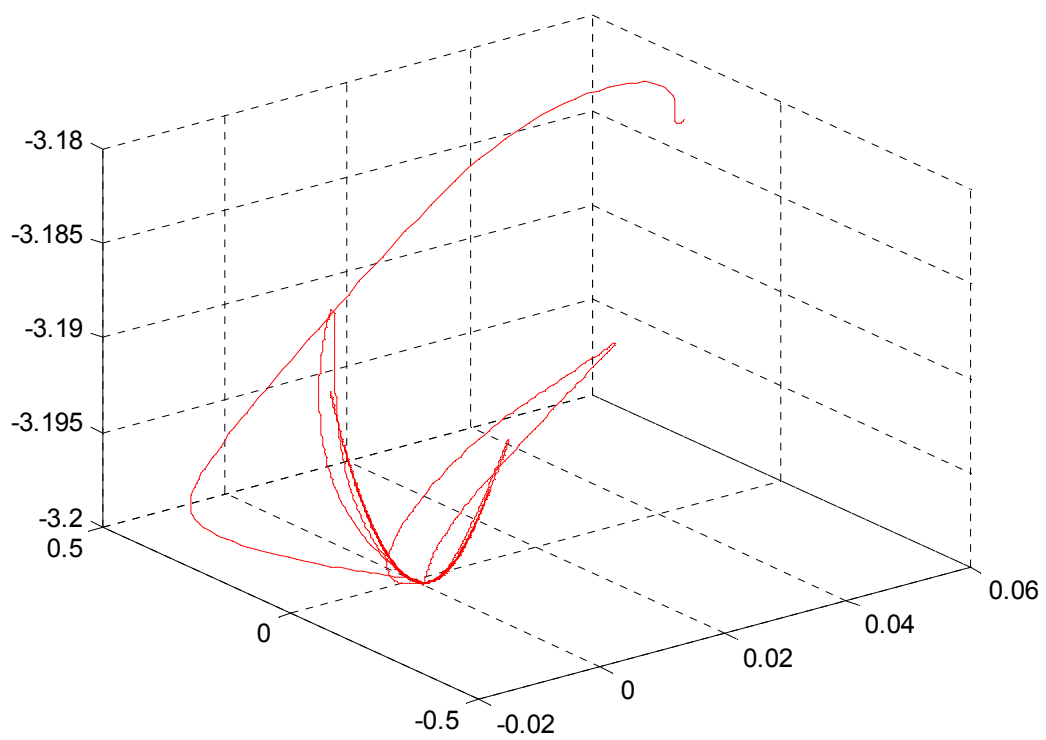


Figura 3.5 Posição espacial da massa terminal do cabo fora da água.

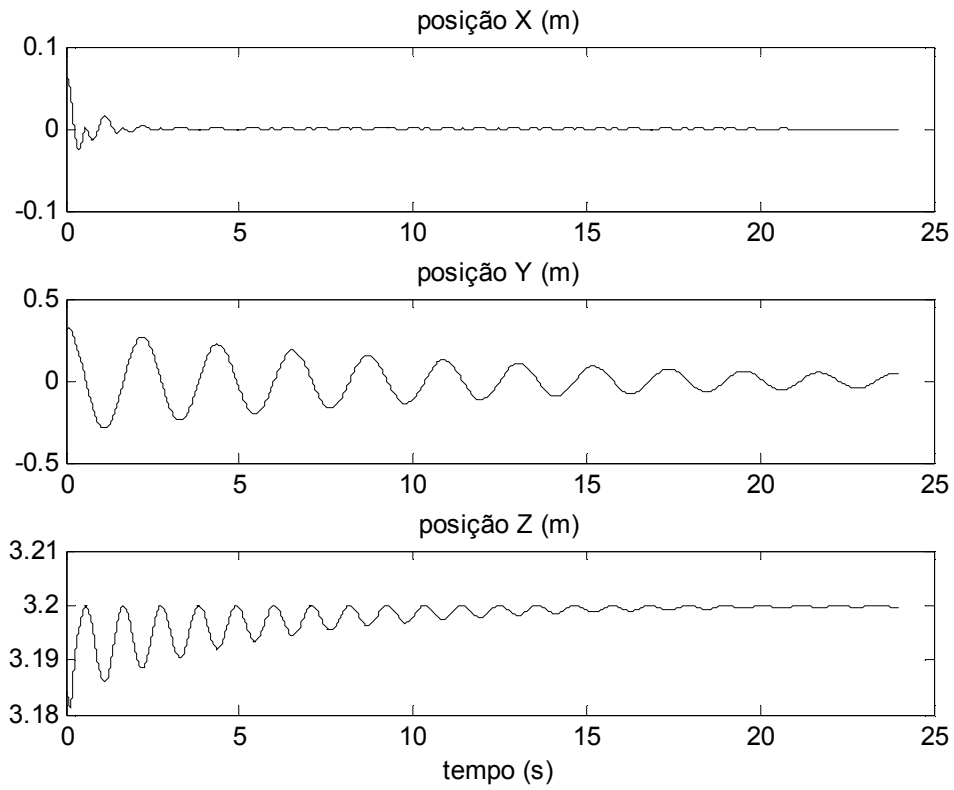


Figura 3.6 Posição da massa terminal do cabo fora da água.

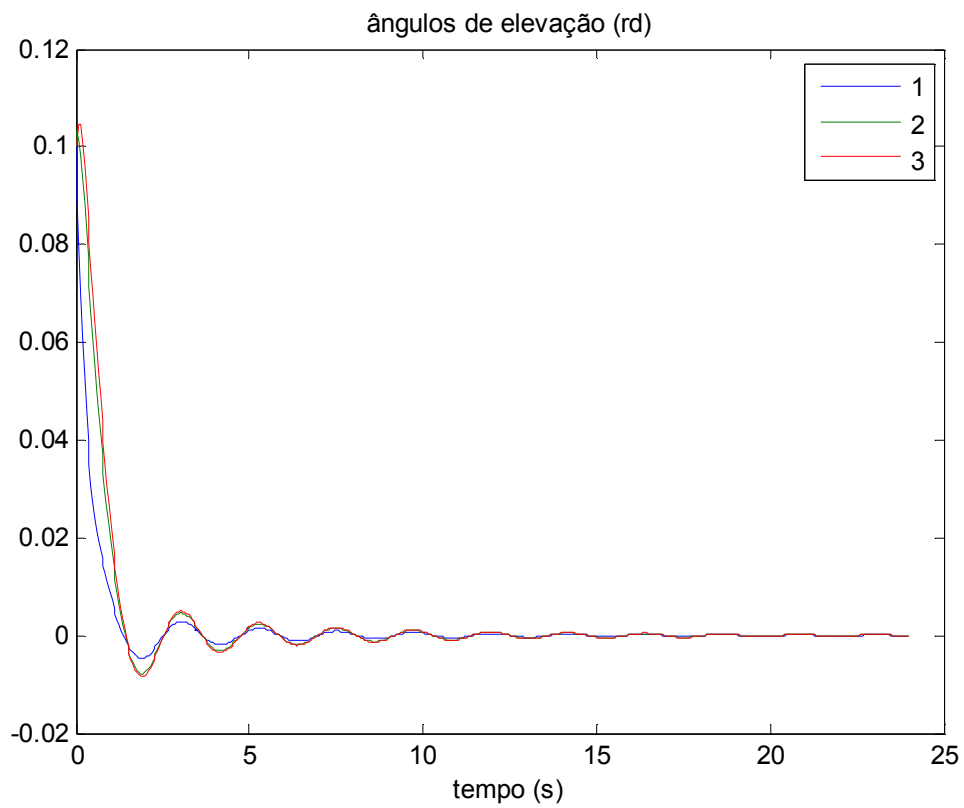


Figura 3.7 Posição angular de cada elo em elevação com o cabo submerso.

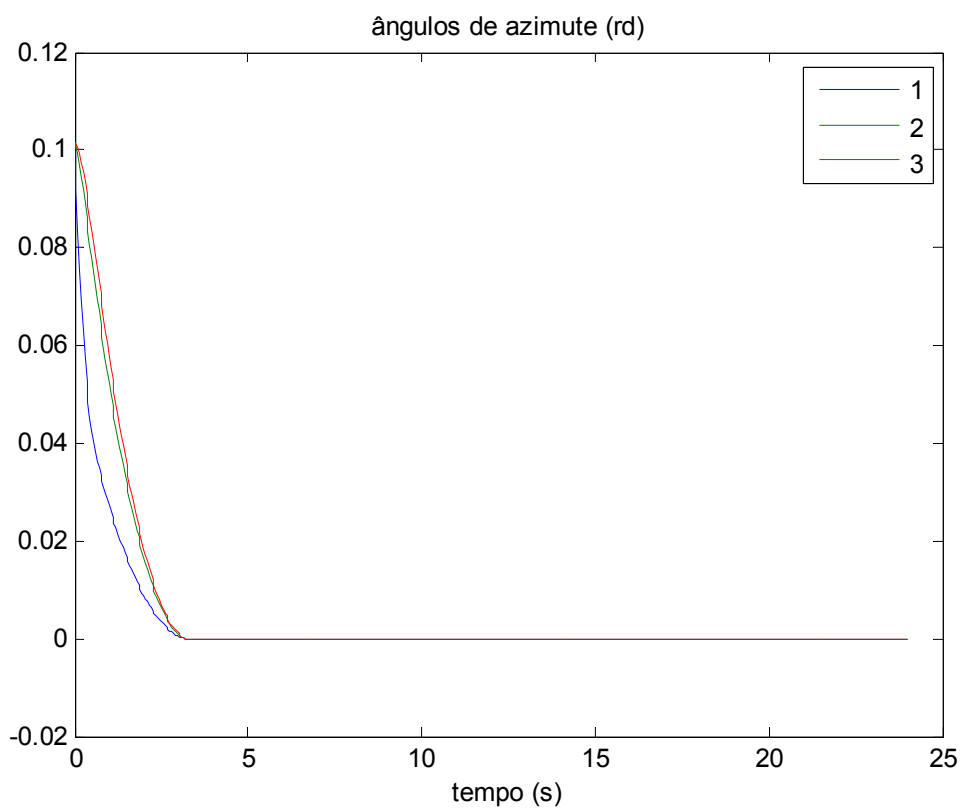


Figura 3.8 Posição angular de cada elo em azimute com o cabo submerso.

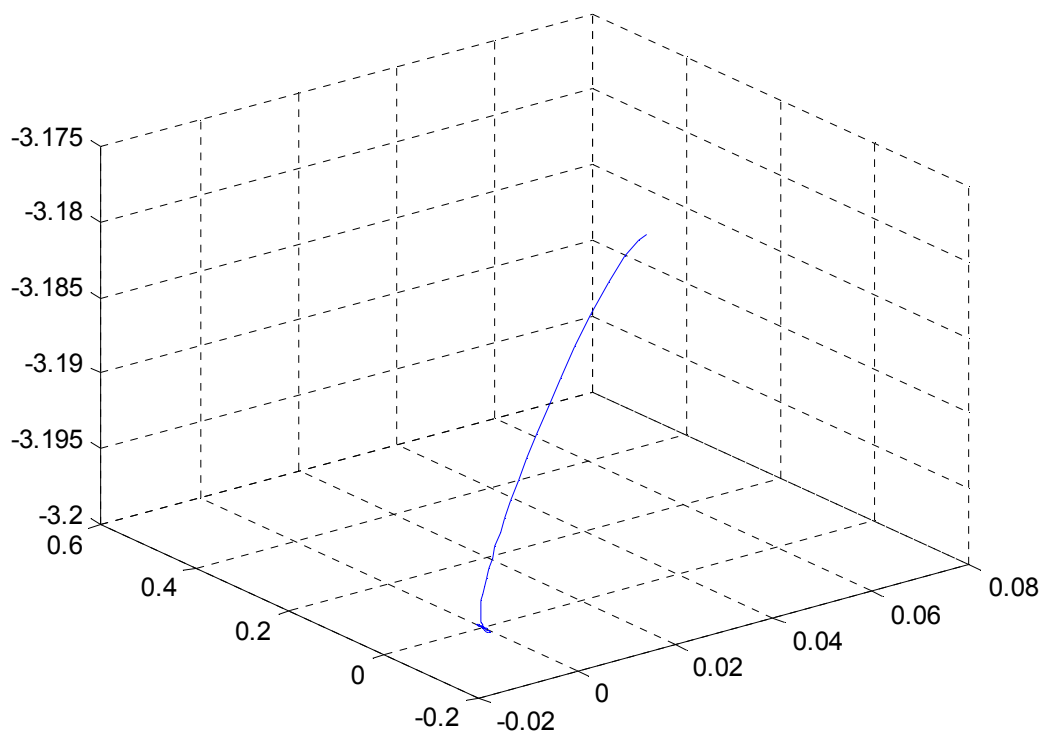


Figura 3.9 Posição espacial da massa terminal do cabo submerso.

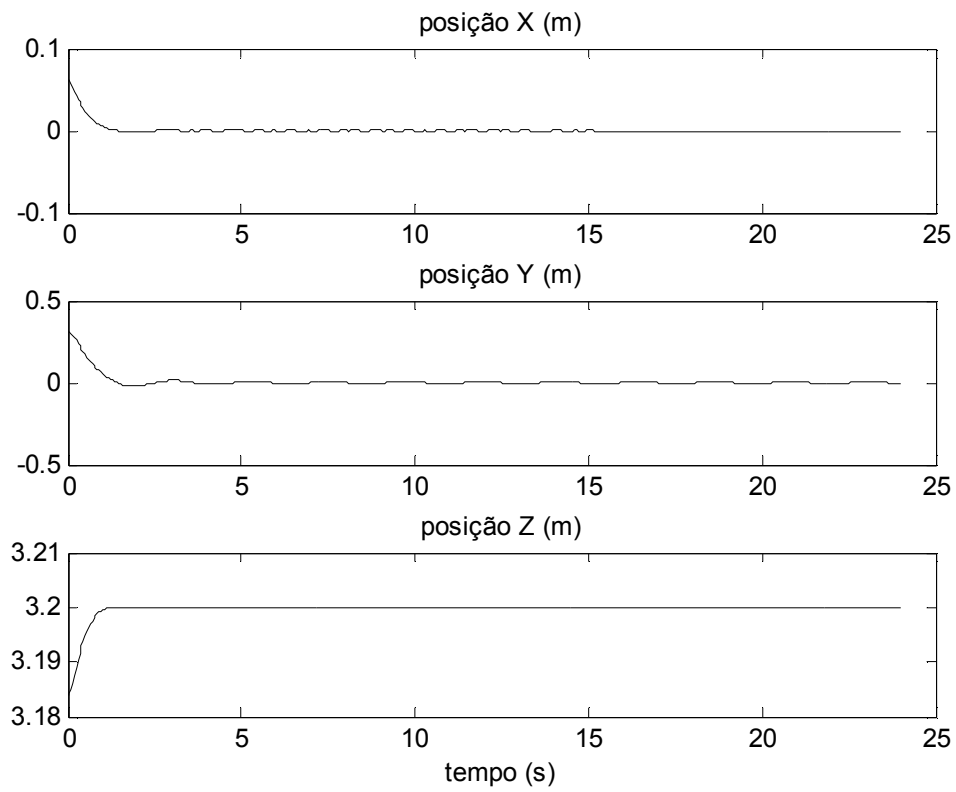


Figura 3.10 Posição da massa terminal do cabo submerso.

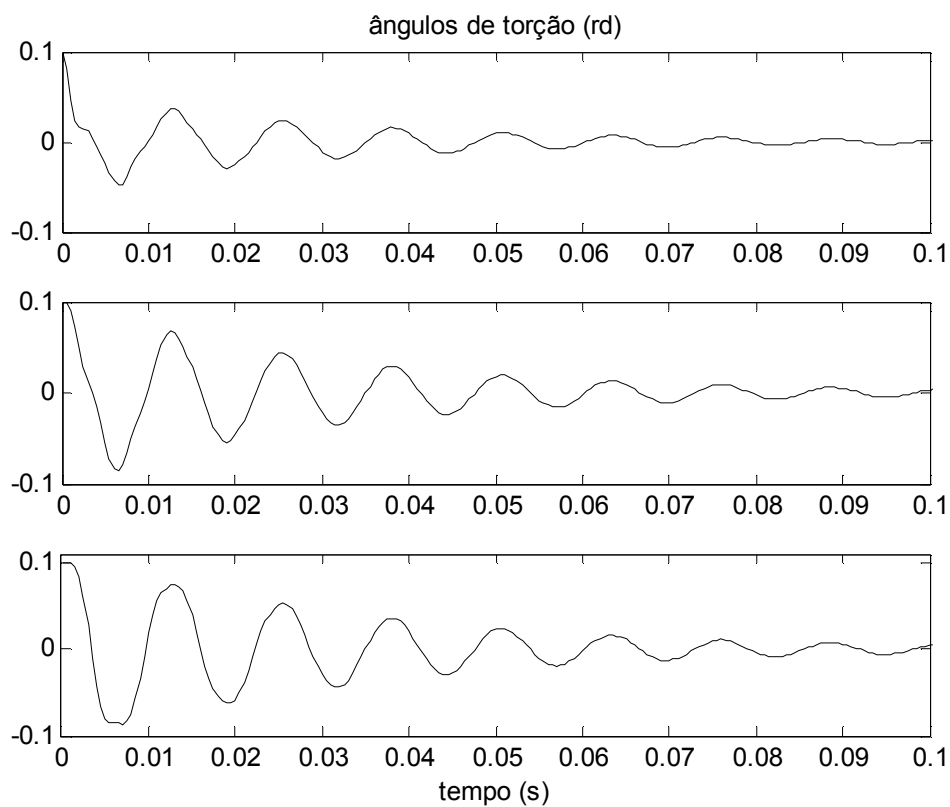


Figura 3.11 Posição angular em torção para cada elo.

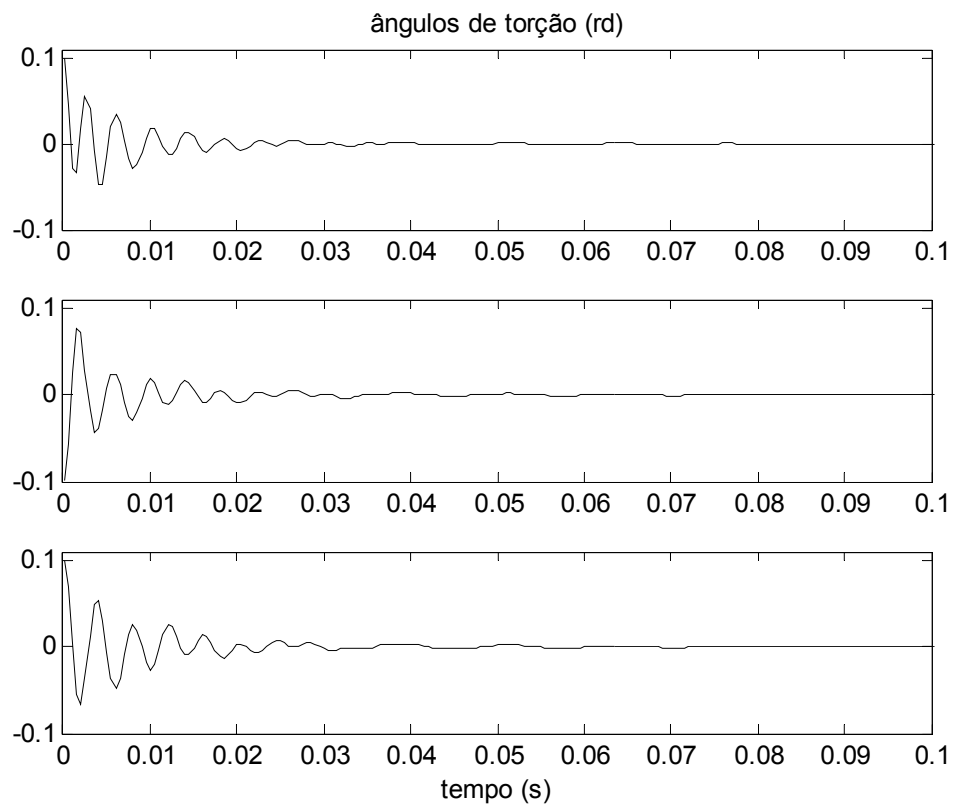


Figura 3.12 Posição angular em torção para cada elo.

CAPÍTULO IV
ESCOAMENTO SOBRE CILINDROS CIRCULARES

4. ESCOAMENTO SOBRE CILINDROS CIRCULARES

Neste capítulo serão introduzidos alguns conceitos sobre o escoamento em torno de cilindros circulares. Inicialmente serão apresentados os regimes de escoamento em função da geometria e do número de Reynolds e, em seguida, os escoamentos do tipo não viscoso e viscoso em torno de cilindros circulares.

4.1 GEOMETRIA E NÚMERO DE REYNOLDS

Segundo MENEGHINI [79], um corpo rombudo é aquele que, no caso de ser imerso em uma corrente de fluido, gera separação do escoamento e esta ocorre em uma porção considerável de sua superfície. A ocorrência de separação em um corpo com seção transversal bidimensional faz com que haja a formação de duas camadas cisalhantes livres na região imediatamente posterior ao corpo. As interações destas duas camadas cisalhantes de fluido são não-lineares e são consideradas como a razão principal da formação e desprendimento de vórtices atrás do corpo.

Dependendo da relação entre as forças viscosas e de inércia atuantes neste escoamento podem ocorrer instabilidades, causando a formação e o desprendimento de vórtices, a jusante deste corpo (PINTO [89]). O parâmetro adimensional que relaciona tais forças viscosas e de inércia é denominado número de Reynolds e é expresso por:

$$\text{Re} = \frac{U_{\infty} D}{\nu} \quad (4.1)$$

onde U_{∞} é a velocidade característica do escoamento em questão, D é um comprimento característico, que no caso do cilindro é dado pelo seu diâmetro, e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

À medida que o número de Reynolds aumenta, o escoamento passa por transições sucessivas assumindo regimes diferentes para cada região perturbada ao redor do corpo. Estas transições estão relacionadas à turbulência na camada limite e são sensíveis a pequenas perturbações (ÁSSI [12]).

A figura 4.1 mostra o processo de formação e desprendimento de vórtices em função do número de Reynolds, para o escoamento incompressível em torno de um cilindro circular.

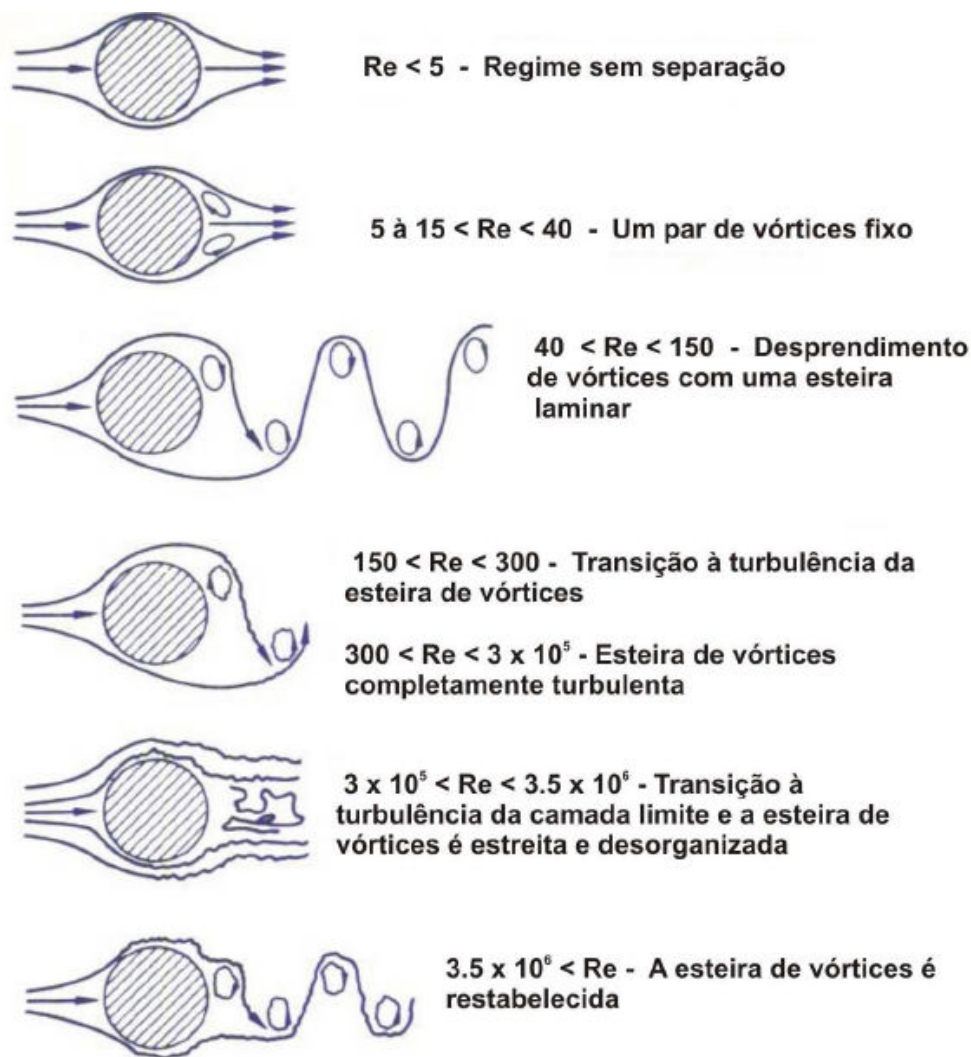


Figura 4.1 Regimes de escoamento em torno de um cilindro circular (PINTO [89])

A seguir apresenta-se a descrição de cada regime de escoamento, de acordo com PINTO [89], MENEGHINI [79] e SCHLICHTING [95].

Para $Re < 5$ o escoamento em torno do cilindro é aproximadamente simétrico a montante e a jusante do corpo com um ponto de estagnação frontal e outro traseiro. Não ocorre separação do escoamento e, portanto, não há formação de vórtices.

Para $5 < Re < 40$ ocorre a separação da camada limite na parte de trás do corpo e a formação de um par de vórtices estacionários que tendem a aumentar de comprimento em função do aumento do número de Reynolds. Acima de um determinado valor crítico de Re , as instabilidades das camadas cisalhantes causam o início de oscilações da esteira.

Para $40 < Re < 150$ inicia-se um processo de formação e desprendimento de vórtices na forma de uma esteira de von Kármán. No intervalo $150 < Re < 300$ ocorre a transição à turbulência da esteira de vórtices de Von Kármán e surgem as primeiras instabilidades tridimensionais. Na faixa de $300 < Re < 3 \cdot 10^5$, a camada limite sobre a superfície do cilindro permanece laminar e a esteira fica completamente turbulenta. O início da transição à turbulência da camada limite ocorre na faixa de $3 \cdot 10^5 < Re < 3,5 \cdot 10^6$ e a esteira de vórtices torna-se mais estreita e desorganizada.

Para $Re > 10^5$ a área afetada pelas forças viscosas é concentrada na parte de trás do cilindro. Na parte frontal do cilindro se desenvolve uma camada muito fina de fluido onde os efeitos viscosos são importantes. Na parte frontal, após a separação, o escoamento torna-se turbulento originando-se uma região com emissão de vórtices. Nesta região, o fluido apresenta gradientes consideráveis de velocidade. Como a tensão de cisalhamento é proporcional a estes gradientes, os efeitos viscosos são significativos. Fora da camada limite e da região de vórtices, o fluido se comporta como se fosse um fluido não viscoso (ALÉ [9]).

Os vórtices são as estruturas do escoamento que concentram grande circulação e que têm origem na esteira próxima, pela interação entre as duas camadas cisalhantes que se separam do cilindro, sendo formados alternadamente para o escoamento formando a esteira à jusante. Estas estruturas possuem alta circulação concentrada e vão se difundindo ao longo da esteira, perdurando até cerca de 250 diâmetros de distância à jusante do cilindro.

A figura 4.2 ilustra a esteira de Von Kármán para os regimes de escoamento laminar e turbulento. Esta esteira tem um papel fundamental nas instabilidades que causam as vibrações induzidas pelos escoamentos sobre cilindros (ÁSSI [12]).

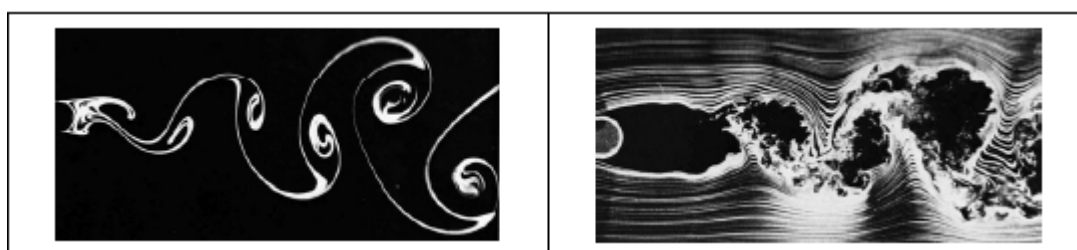


Figura 4.2 Esteira de Vórtices de Von Kármán para dois regimes de escoamento: laminar ($Re=140$) e turbulento ($Re=10^4$) (ÁSSI [12])

Os vórtices são emitidos de maneira alternada e, portanto, o escoamento é transitório no tempo, existindo assim uma frequência característica de emissão dos vórtices para cada condição de escoamento, que é chamada de frequência de emissão de vórtices f_s , sendo esta dependente da velocidade incidente e da interação entre as camadas cisalhantes, e pode ser representada pelo número adimensional de Strouhal (Ássi [12]):

$$St = \frac{f_s D}{U_\infty} \quad (4.2)$$

Na figura 4.3 observa-se a relação entre a alteração do regime do escoamento com a frequência de desprendimento de vórtices.

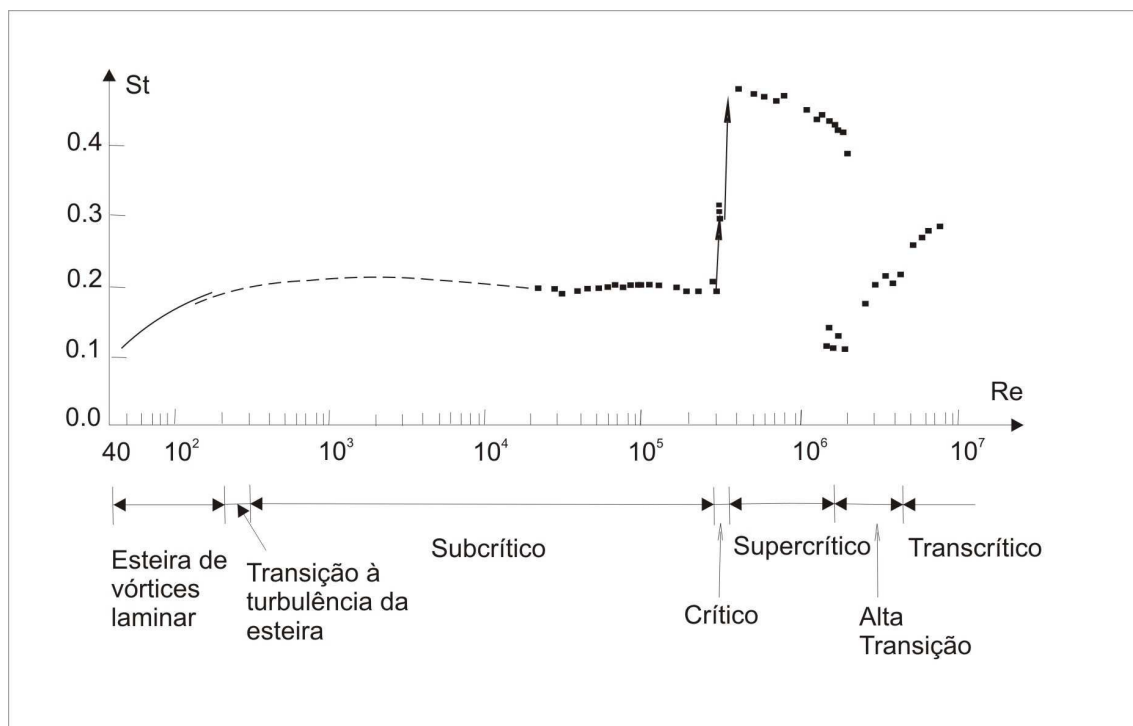


Figura 4.3 Variação do número de St com o número de Re e os regimes de escoamento para um cilindro circular (PINTO [89])

4.2 ESCOAMENTO NÃO VISCOSO SOBRE UM CILINDRO

Considere um escoamento não viscoso sobre um cilindro circular, onde as linhas de corrente formadas em torno do cilindro são simétricas e a linha de corrente que atinge o ponto de estagnação contorna o cilindro aderida ao mesmo. Devido à forma do

cilindro, a velocidade do fluido que contorna o cilindro (U) é diferente da velocidade de corrente livre (V_∞) e depende da posição angular (ALÉ [9]).

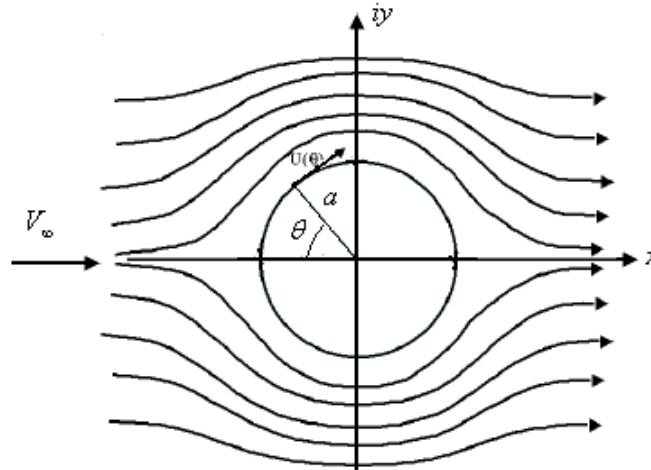


Figura 4.4 Escoamento não viscoso em torno de um cilindro circular.

Com relação à Figura 4.4, um escoamento uniforme com velocidade V_∞ flui na direção positiva dos x . O cilindro de raio a localiza-se na origem. De acordo com HUGHES e BRIGHTON [55], o potencial complexo para o escoamento em torno do cilindro é dado por:

$$F(z) = \Phi + i\Psi = -V_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (4.3)$$

Substituindo-se $z = x + iy$ em (4.3), obtém-se:

$$F = -V_\infty \left[x + iy + \frac{a^2}{x^2 + y^2} (x - iy) \right] = -V_\infty \left[x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) + iy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \right] \quad (4.4)$$

Então, substituindo $r^2 = x^2 + y^2$ em (4.4), resulta em:

$$F = -V_\infty \left[x \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + iy \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \quad (4.5)$$

De (4.5) resulta a função de corrente como:

$$\Psi = -V_\infty y \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) = -V_\infty y + \frac{a^2 V_\infty y}{x^2 + y^2} \quad (4.6)$$

e o potencial de velocidade Φ é dado por:

$$\Phi = -V_{\infty}x \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) = -V_{\infty}x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) \quad (4.7)$$

Em $r = a$, o contorno do cilindro deve coincidir com uma linha de corrente. De fato, em $r = a$, $\Psi = 0$.

O campo de velocidade pode ser obtido de:

$$-\frac{dF}{dz} = u - iv \quad (4.8)$$

onde

$$u = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (4.9)$$

De (4.8) resulta

$$-\frac{dF}{dz} = u - iv = V_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right), \quad (4.10)$$

que escrita em coordenadas polares, se apresenta na forma:

$$\frac{dF}{dz} = -V_{\infty} + \frac{V_{\infty}a^2}{z^2} = -V_{\infty} + \frac{V_{\infty}a^2 e^{-2i\theta}}{r^2} = V_{\infty} \left(\frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta - 1\right) + iV_{\infty} \frac{a^2}{r^2} \text{sen} 2\theta \quad (4.11)$$

de modo que as componentes cartesianas da velocidade são:

$$u = -V_{\infty} \left(\frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta - 1\right), \quad v = -V_{\infty} \frac{a^2}{r^2} \text{sen} 2\theta \quad (4.12)$$

Em coordenadas polares r e θ , onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \text{sen} \theta$, as relações são escritas como:

$$v_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \quad \text{e} \quad v_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad (4.13)$$

Portanto, de (4.13) obtém-se as componentes polares v_r e v_{θ} como:

$$v_r = V_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad \text{e} \quad v_{\theta} = -V_{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \text{sen} \theta \quad (4.14)$$

E assim

$$U^2 = u^2 + v^2 = v_r^2 + v_{\theta}^2 = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = V_{\infty}^2 \left[1 + \frac{a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} (\text{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta)\right] \quad (4.15)$$

ou seja

$$U^2 = V_{\infty}^2 \left(1 + \frac{a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta\right) \quad (4.16)$$

Considerando-se que a montante do cilindro a corrente livre não perturbada apresenta velocidade V_∞ e pressão p_∞ , pode-se aplicar a Equação de Bernoulli no contorno do cilindro considerando um ponto a montante do mesmo e outro sobre a sua superfície com pressão p e velocidade $U = U(\theta)$.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} \quad (4.17)$$

onde p_0 é a pressão de estagnação em qualquer ponto do escoamento em que $U = 0$ e p_∞ é a pressão na corrente livre onde a velocidade é V_∞ .

De (4.17) obtém-se:

$$p = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho U^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(1 - \frac{U^2}{V_\infty^2} \right) \quad (4.18)$$

que resulta em:

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 2 \cos 2\theta \right) \quad (4.19)$$

A distribuição de pressão é analisada na forma adimensional através do coeficiente de pressão, c_p , que é definido por:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} \cong 1 - \frac{U^2}{V_\infty^2} \quad (4.20)$$

A solução teórica (potencial) da distribuição de pressão para o escoamento não viscoso é dada por:

$$c_p = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (4.21)$$

e a velocidade ao longo da superfície é dada por:

$$U(\theta) = 2V_\infty \sin \theta \quad (4.22)$$

4.3 ESCOAMENTO VISCOSO SOBRE UM CILINDRO

Um corpo imerso em um fluido viscoso sofre a ação de uma força provocada pelo escoamento, denominada de força hidrodinâmica. No caso do cilindro, esta força é decomposta em duas componentes, que são: a componente de arrasto (F_D) na direção longitudinal e a componente de sustentação (F_L) na direção transversal. Estas forças

são adimensionalizadas através dos coeficientes de arrasto (c_D) e de sustentação (c_L), que são definidos por:

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 A_v} \quad \text{e} \quad c_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 A_h}, \quad (4.23)$$

onde A_v representa a área da projeção vertical e A_h a área da projeção horizontal do corpo submerso (PINTO [89]).

Considera-se uma partícula de fluido escoando dentro da camada limite do ponto A para o ponto F , conforme mostra a figura 4.5. Esta partícula está submetida à mesma distribuição de pressão das partículas de fluido que estão próximas, mas estão fora da camada limite. Devido aos efeitos viscosos, a partícula localizada dentro da camada limite, quando atinge o ponto C , não possui quantidade de movimento suficiente para vencer o gradiente de pressão adverso (ALÉ [9]).

O gradiente de pressão é adverso (contrário) quando a pressão aumenta no sentido do escoamento e, neste caso, se o sentido do escoamento é na direção do eixo dos x , tem-se $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ e o gradiente de pressão é favorável, quando a pressão diminui no sentido do escoamento, ou seja, $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$.

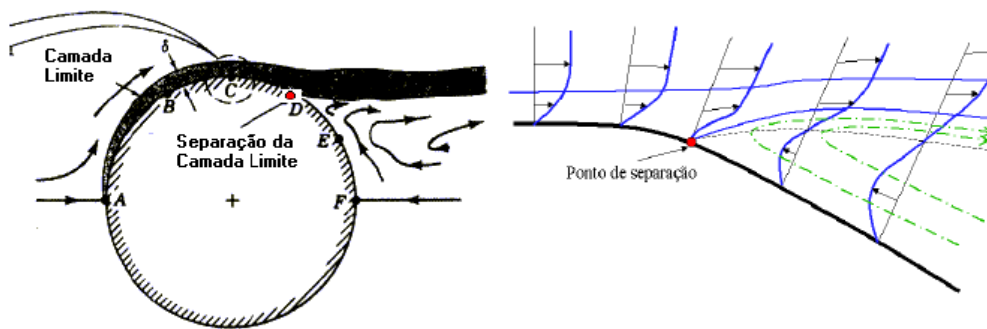


Figura 4.5 Escoamento com gradiente de pressão adverso sobre um cilindro (ALÉ [9]).

A figura 4.6 ilustra a distribuição de pressão no escoamento viscoso e no escoamento não viscoso em torno de um cilindro circular em regimes laminar e turbulento.

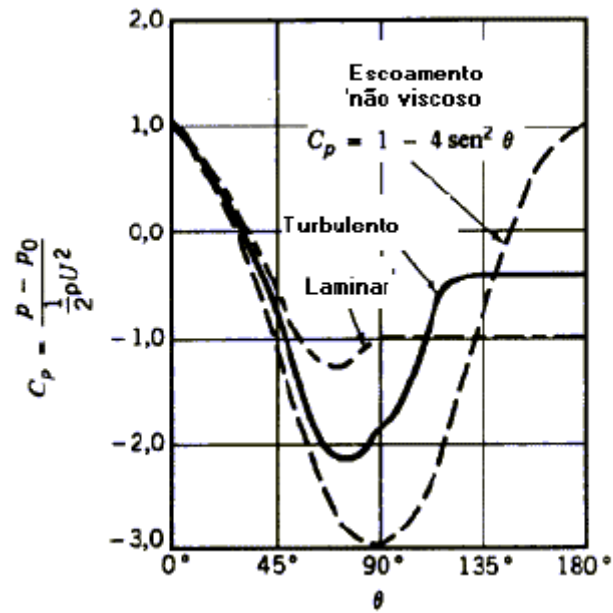


Figura 4.6 Distribuição de pressão em torno de um cilindro circular (ALÉ [9]).

No próximo capítulo será apresentada a formulação matemática para o escoamento sobre um cilindro circular, através do Método da Decomposição de Adomian.

CAPÍTULO V
MODELO ANALÍTICO PARA O ESCOAMENTO
SOBRE CILINDROS

5. MODELO ANALÍTICO PARA O ESCOAMENTO SOBRE CILINDROS

A modelagem matemática e a simulação numérica de escoamentos ao redor de cilindros tem sido foco de uma série de estudos atuais e constituem sistemas de grande interesse na engenharia e nas ciências. A presença de um obstáculo imerso em um determinado escoamento faz com que surjam fenômenos físicos característicos de fluidos viscosos, como a formação da esteira de vórtices e a transição à turbulência (PINTO [89]).

É interessante salientar que o estudo dos efeitos do escoamento de um fluido sobre corpos sólidos e o deslocamento destes influenciando na dinâmica do escoamento encontra-se no domínio dos problemas multidisciplinares de difícil tratamento (CAMPREGHER [28]).

Neste trabalho, considera-se que o cabo é cilíndrico e estuda-se o escoamento sobre este cabo através do escoamento sobre um cilindro circular de raio a , com centro na origem e eixo de simetria no eixo oz , sendo este escoamento uniforme incompressível com velocidade V_∞ que flui na direção positiva dos x , conforme a Figura 5.1. Para este escoamento, o movimento do fluido é modelado a partir das equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas no espaço tridimensional, junto com a equação que determina a pressão exercida sobre o cilindro. As condições de contorno para este sistema de equações diferenciais são determinadas a partir da teoria do escoamento potencial. A solução analítica deste sistema será determinada utilizando-se o método da Decomposição de Adomian.

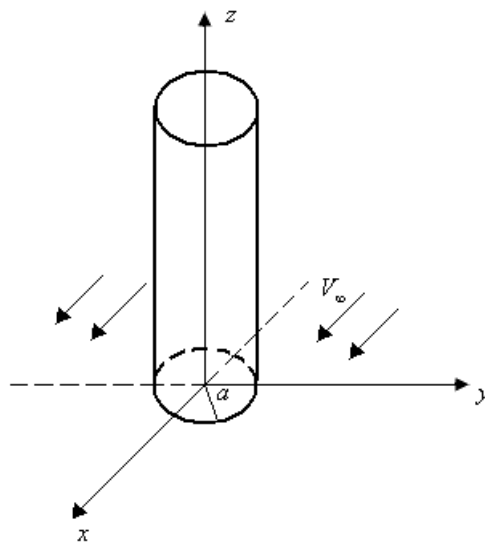


Figura 5.1 Escoamento sobre o cilindro circular considerado neste trabalho.

5.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considerando-se que o cabo é cilíndrico, propõe-se o escoamento sobre um cilindro circular de raio a , com eixo de simetria no eixo oz , conforme a Figura 5.1, onde as equações tridimensionais de Navier-Stokes que determinam o movimento do fluido sobre o cilindro, em coordenadas cilíndricas são dadas por (BEJAN [23]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = \\ - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + F_\theta \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + F_z \quad (5.3)$$

Após um estudo da ordem de magnitude dos termos nas equações (5.1), (5.2) e (5.3), estas equações foram simplificadas, sendo que os termos $v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}$ e $\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$ foram eliminados na equação (5.1), os termos $v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$, $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}$ e $\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$ foram eliminados na equação (5.2) e o termo $\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$ foi eliminado na equação (5.3), resultando nas equações:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + F_\theta \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right) + F_z \quad (5.6)$$

A equação da conservação da massa é dada por:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

Portanto, pode-se escrever

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (5.7)$$

Substituindo-se (5.7) em (5.6) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \left(-\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right) + F_z \end{aligned} \quad (5.8)$$

Considerando-se as condições iniciais obtidas a partir do escoamento potencial, obtém-se para $t = 0$:

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta, z, 0) &= V_\infty \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right], \\ v_\theta(r, \theta, z, 0) &= -V_\infty \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right], \\ v_z(r, \theta, z, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nos escoamentos incompressíveis utiliza-se a equação de Poisson para a pressão, entretanto com a utilização do Método da Decomposição de Adomian as

expressões se tornam muito longas; então para simplificar o cálculo, considera-se uma aproximação para a pressão através da equação de Bernoulli (4.18) como:

$$p = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho U^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(1 - \frac{U^2}{V_\infty^2} \right) \quad (5.10)$$

onde

$$U^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2 \quad (5.11)$$

A seguir utiliza-se o Método da Decomposição de Adomian [4], descrito no Apêndice B, para determinar a solução para o sistema (5.4), (5.5) e (5.8), com as condições iniciais (5.9) e a equação da pressão (5.10).

Considerando-se a equação (5.4), tem-se:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r \quad (5.12)$$

Então, escrevendo-se a equação (5.12) na forma de operador, tem-se:

$$L_t v_r = -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r \quad (5.13)$$

onde $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Resolvendo-se a equação (5.13) em t , aplica-se o operador inverso

$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ e obtém-se:

$$L_t^{-1} L_t v_r = L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \right) + L_t^{-1} \left(-v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta^2}{r} \right) + L_t^{-1} \left[\frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \quad (5.14)$$

sendo

$$\begin{aligned}
L_t^{-1} L_t v_r &= \int_0^t \frac{\partial v_r}{\partial t} dt = v_r(r, \theta, z, t) - v_r(r, \theta, z, 0) = \\
&= v_r(r, \theta, z, t) - V_\infty \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Logo, substituindo (5.15) em (5.14), obtém-se:

$$\begin{aligned}
v_r &= V_\infty \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \right) + L_t^{-1} \left[-v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta^2}{r} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Considerando $v_r = \sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n}$, $v_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n}$, $v_z = \sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n}$, de (5.16) resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} = V_\infty \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \right) + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n} \right) \tag{5.17}$$

onde

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n} &= - \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{r_n}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{r_n}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n} \right) + \\
&\quad + \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{r_n}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{r_n}}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} \right) - \frac{2}{r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{\theta_n}}{\partial \theta} \right) \right]
\end{aligned}$$

ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-A_{1,1,n} - \frac{1}{r} A_{1,2,n} + \frac{1}{r} A_{1,3,n} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{r_n}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{r_n}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} v_{r_n} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta_n}}{\partial \theta} \right) \right] \tag{5.18}$$

Tem-se que:

$$1^\circ) \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,1,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{r_n}}{\partial r} \right) = (v_{r_0} + v_{r_1} + v_{r_2} + \dots) \left(\frac{\partial v_{r_0}}{\partial r} + \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r} + \frac{\partial v_{r_2}}{\partial r} + \dots \right),$$

onde considera-se:

$$\begin{aligned}
A_{1,1,0} &= v_{r0} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} ; \\
A_{1,1,1} &= v_{r0} \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + v_{r1} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} ; \\
A_{1,1,2} &= v_{r0} \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} + v_{r1} \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + v_{r2} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} ; \\
A_{1,1,3} &= v_{r0} \frac{\partial v_{r3}}{\partial r} + v_{r1} \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} + v_{r2} \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + v_{r3} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} ; \\
A_{1,1,4} &= v_{r0} \frac{\partial v_{r4}}{\partial r} + v_{r1} \frac{\partial v_{r3}}{\partial r} + v_{r2} \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} + v_{r3} \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + v_{r4} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} ;
\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$2^\circ) \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,2,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{rn}}{\partial \theta} \right) = (v_{\theta 0} + v_{\theta 1} + v_{\theta 2} + \dots) \left(\frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{r1}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{r2}}{\partial \theta} + \dots \right),$$

sendo:

$$\begin{aligned}
A_{1,2,0} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} ; \\
A_{1,2,1} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{r1}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} ; \\
A_{1,2,2} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{r2}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{r1}}{\partial \theta} + v_{\theta 2} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} ; \\
A_{1,2,3} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{r3}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{r2}}{\partial \theta} + v_{\theta 2} \frac{\partial v_{r1}}{\partial \theta} + v_{\theta 3} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} ; \\
A_{1,2,4} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{r4}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{r3}}{\partial \theta} + v_{\theta 2} \frac{\partial v_{r2}}{\partial \theta} + v_{\theta 3} \frac{\partial v_{r1}}{\partial \theta} + v_{\theta 4} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} ;
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$3^\circ) \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,3,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta n} \right) = (v_{\theta 0} + v_{\theta 1} + v_{\theta 2} + \dots)(v_{\theta 0} + v_{\theta 1} + v_{\theta 2} + \dots), \quad \text{onde}$$

considera-se:

$$\begin{aligned}
A_{1,3,0} &= v_{\theta 0}^2 ; \\
A_{1,3,1} &= 2v_{\theta 0}v_{\theta 1} ; \\
A_{1,3,2} &= 2v_{\theta 0}v_{\theta 2} + v_{\theta 1}^2 ; \\
A_{1,3,3} &= 2v_{\theta 0}v_{\theta 3} + 2v_{\theta 1}v_{\theta 2} ; \\
A_{1,3,4} &= 2v_{\theta 0}v_{\theta 4} + 2v_{\theta 1}v_{\theta 3} + v_{\theta 2}^2 ;
\end{aligned} \tag{5.21}$$

De (5.17) obtém-se:

$$v_{r0} + \sum_{n=0}^{\infty} v_{rn+1} = V_{\infty} \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \right) + \sum_{n=0}^{\infty} L_t^{-1} (A_{1,n}) \quad (5.22)$$

o que resulta em:

$$\begin{cases} v_{r0} = V_{\infty} \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \right) \\ v_{rn+1} = L_t^{-1} (A_{1,n}) \end{cases} \quad (5.23)$$

Considerando-se a equação (5.5) tem-se:

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - v_r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{v_r v_{\theta}}{r} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r^2} \right) + F_{\theta} \quad (5.24)$$

e escrevendo-se (5.24) na forma de operador, obtém-se:

$$L_t v_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - v_r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{v_r v_{\theta}}{r} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r^2} \right) + F_{\theta} \quad (5.25)$$

onde $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Resolvendo a equação (5.25) em t , aplica-se o operador inverso $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$,

e obtém-se:

$$\begin{aligned} L_t^{-1} L_t v_{\theta} &= L_t^{-1} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_{\theta} \right) + \\ &+ L_t^{-1} \left[-v_r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{v_r v_{\theta}}{r} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

sendo

$$\begin{aligned} L_t^{-1} L_t v_{\theta} &= \int_0^t \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} dt = v_{\theta}(r, \theta, z, t) - v_{\theta}(r, \theta, z, 0) = \\ &= v_{\theta}(r, \theta, z, t) + V_{\infty} \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

Substituindo-se (5.27) em (5.26) obtém-se:

$$v_\theta(r, \theta, z, t) = -V_\infty \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta \right) + \quad (5.28)$$

$$+ L_t^{-1} \left[-v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \right]$$

Considerando-se $v_r = \sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n}$, $v_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n}$, $v_z = \sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n}$, de (5.28) resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n} = -V_\infty \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta \right) + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} \right) \quad (5.29)$$

onde

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} = - \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{\theta_n}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{\theta_n}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n} \right) + \quad (5.30)$$

$$+ \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{\theta_n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{\theta_n}}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{r_n}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n} \right) \right]$$

ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-A_{2,1,n} - \frac{1}{r} A_{2,2,n} - \frac{1}{r} A_{2,3,n} + \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 v_{\theta_n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta_n}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{r_n}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} v_{\theta_n} \right) \right] \quad (5.31)$$

Para

$$1^\circ) \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,1,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{\theta_n}}{\partial r} \right) = (v_{r_0} + v_{r_1} + v_{r_2} + \dots) \left(\frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial r} + \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial r} + \frac{\partial v_{\theta_2}}{\partial r} + \dots \right),$$

considera-se:

$$A_{2,1,0} = v_{r_0} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial r} ;$$

$$A_{2,1,1} = v_{r_0} \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial r} + v_{r_1} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial r} ;$$

$$A_{2,1,2} = v_{r_0} \frac{\partial v_{\theta_2}}{\partial r} + v_{r_1} \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial r} + v_{r_2} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial r} ; \quad (5.32)$$

$$A_{2,1,3} = v_{r_0} \frac{\partial v_{\theta_3}}{\partial r} + v_{r_1} \frac{\partial v_{\theta_2}}{\partial r} + v_{r_2} \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial r} + v_{r_3} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial r} ;$$

$$A_{2,1,4} = v_{r_0} \frac{\partial v_{\theta_4}}{\partial r} + v_{r_1} \frac{\partial v_{\theta_3}}{\partial r} + v_{r_2} \frac{\partial v_{\theta_2}}{\partial r} + v_{r_3} \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial r} + v_{r_4} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial r}$$

$$2^\circ) \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,2,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{\theta n}}{\partial \theta} \right) = (v_{\theta 0} + v_{\theta 1} + v_{\theta 2} + \dots) \left(\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta 1}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta 2}}{\partial \theta} + \dots \right)$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} A_{2,2,0} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} ; \\ A_{2,2,1} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{\theta 1}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} ; \\ A_{2,2,2} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{\theta 2}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{\theta 1}}{\partial \theta} + v_{\theta 2} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} ; \\ A_{2,2,3} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{\theta 3}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{\theta 2}}{\partial \theta} + v_{\theta 2} \frac{\partial v_{\theta 1}}{\partial \theta} + v_{\theta 3} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} ; \\ A_{2,2,4} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{\theta 4}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{\theta 3}}{\partial \theta} + v_{\theta 2} \frac{\partial v_{\theta 2}}{\partial \theta} + v_{\theta 3} \frac{\partial v_{\theta 1}}{\partial \theta} + v_{\theta 4} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$3^\circ) \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,3,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{rn} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta n} \right) = (v_{r0} + v_{r1} + v_{r2} + \dots)(v_{\theta 0} + v_{\theta 1} + v_{\theta 2} + \dots),$$

considera-se:

$$\begin{aligned} A_{2,3,0} &= v_{r0} v_{\theta 0} ; \\ A_{2,3,1} &= v_{r0} v_{\theta 1} + v_{r1} v_{\theta 0} ; \\ A_{2,3,2} &= v_{r0} v_{\theta 2} + v_{r1} v_{\theta 1} + v_{r2} v_{\theta 0} ; \\ A_{2,3,3} &= v_{r0} v_{\theta 3} + v_{r1} v_{\theta 2} + v_{r2} v_{\theta 1} + v_{r3} v_{\theta 0} ; \\ A_{2,3,4} &= v_{r0} v_{\theta 4} + v_{r1} v_{\theta 3} + v_{r2} v_{\theta 2} + v_{r3} v_{\theta 1} + v_{r4} v_{\theta 0} \end{aligned} \quad (5.34)$$

De (5.29) resulta:

$$v_{\theta 0} + \sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta n+1} = -V_{\infty} \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_{\theta} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} L_t^{-1} (A_{2,n}) \quad (5.35)$$

Portanto, obtem-se:

$$\begin{cases} v_{\theta 0} = -V_{\infty} \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_{\theta} \right) \\ v_{\theta n+1} = L_t^{-1} (A_{2,n}) \end{cases} \quad (5.36)$$

Considerando-se a equação (5.8) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} = & -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z - v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_z v_r}{r} + \frac{1}{r} v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

e escrevendo-se (5.37) na forma de operador, obtém-se:

$$\begin{aligned} L_t v_z = & -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z - v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_z v_r}{r} + \frac{1}{r} v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Resolvendo-se a equação (5.38) em t , aplica-se o operador inverso

$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$, e obtém-se:

$$\begin{aligned} L_t^{-1} L_t v_z = & L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \right) + L_t^{-1} \left[-v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_z v_r}{r} + \frac{1}{r} v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{\mu}{\text{Re}} L_t^{-1} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

sendo

$$L_t^{-1} L_t v_z = \int_0^t \frac{\partial v_z}{\partial t} dt = v_z(r, \theta, z, t) - \underbrace{v_z(r, \theta, z, 0)}_0 = v_z(r, \theta, z, t) \quad (5.40)$$

Substituindo-se (5.40) em (5.39), resulta:

$$\begin{aligned} v_z(r, \theta, z, t) = & L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \right) + L_t^{-1} \left[-v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_z v_r}{r} + \frac{1}{r} v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{\mu}{\text{Re}} L_t^{-1} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Considerando $v_r = \sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n}$, $v_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n}$, $v_z = \sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n}$, de (5.41) tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n} = L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \right) + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{3,n} \right) \quad (5.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_{3,n} = & - \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{z_n}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{z_n}}{\partial \theta} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{r_n}}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} \right) + \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{\theta_n}}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{z_n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{z_n}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 v_{z_n}}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_{3,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-A_{3,1,n} - \frac{1}{r} A_{3,2,n} + A_{3,3,n} + \frac{1}{r} A_{3,4,n} + \frac{1}{r} A_{3,5,n} + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_{z_n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{z_n}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{z_n}}{\partial \theta^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.44)$$

Para

$$1^\circ) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{3,1,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{z_n}}{\partial r} \right) = (v_{r_0} + v_{r_1} + v_{r_2} + \dots) \left(\frac{\partial v_{z_0}}{\partial r} + \frac{\partial v_{z_1}}{\partial r} + \frac{\partial v_{z_2}}{\partial r} + \dots \right)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} A_{3,1,0} &= v_{r_0} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial r} ; \\ A_{3,1,1} &= v_{r_0} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial r} + v_{r_1} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial r} ; \\ A_{3,1,2} &= v_{r_0} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial r} + v_{r_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial r} + v_{r_2} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial r} ; \\ A_{3,1,3} &= v_{r_0} \frac{\partial v_{z_3}}{\partial r} + v_{r_1} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial r} + v_{r_2} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial r} + v_{r_3} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial r} ; \\ A_{3,1,4} &= v_{r_0} \frac{\partial v_{z_4}}{\partial r} + v_{r_1} \frac{\partial v_{z_3}}{\partial r} + v_{r_2} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial r} + v_{r_3} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial r} + v_{r_4} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial r} \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$2^\circ) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{3,2,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{z_n}}{\partial \theta} \right) = (v_{\theta 0} + v_{\theta 1} + v_{\theta 2} + \dots) \left(\frac{\partial v_{z_0}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{z_1}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{z_2}}{\partial \theta} + \dots \right)$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} A_{3,2,0} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial \theta} ; \\ A_{3,2,1} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial \theta} ; \\ A_{3,2,2} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial \theta} + v_{\theta 2} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial \theta} ; \\ A_{3,2,3} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{z_3}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial \theta} + v_{\theta 2} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial \theta} + v_{\theta 3} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial \theta} ; \\ A_{3,2,4} &= v_{\theta 0} \frac{\partial v_{z_4}}{\partial \theta} + v_{\theta 1} \frac{\partial v_{z_3}}{\partial \theta} + v_{\theta 2} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial \theta} + v_{\theta 3} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial \theta} + v_{\theta 4} \frac{\partial v_{z_0}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$3^\circ) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{3,3,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{r_n}}{\partial r} \right) = (v_{z_0} + v_{z_1} + v_{z_2} + \dots) \left(\frac{\partial v_{r_0}}{\partial r} + \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r} + \frac{\partial v_{r_2}}{\partial r} + \dots \right)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} A_{3,3,0} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{r_0}}{\partial r} ; \\ A_{3,3,1} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r} + v_{z_1} \frac{\partial v_{r_0}}{\partial r} ; \\ A_{3,3,2} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{r_2}}{\partial r} + v_{z_1} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r} + v_{z_2} \frac{\partial v_{r_0}}{\partial r} ; \\ A_{3,3,3} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{r_3}}{\partial r} + v_{z_1} \frac{\partial v_{r_2}}{\partial r} + v_{z_2} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r} + v_{z_3} \frac{\partial v_{r_0}}{\partial r} ; \\ A_{3,3,4} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{r_4}}{\partial r} + v_{z_1} \frac{\partial v_{r_3}}{\partial r} + v_{z_2} \frac{\partial v_{r_2}}{\partial r} + v_{z_3} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r} + v_{z_4} \frac{\partial v_{r_0}}{\partial r} ; \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$4^\circ) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{3,4,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n} \right) = (v_{z_0} + v_{z_1} + v_{z_2} + \dots) (v_{r_0} + v_{r_1} + v_{r_2} + \dots)$$

considera-se:

$$\begin{aligned} A_{3,4,0} &= v_{z_0} v_{r_0} ; \\ A_{3,4,1} &= v_{z_0} v_{r_1} + v_{z_1} v_{r_0} ; \\ A_{3,4,2} &= v_{z_0} v_{r_2} + v_{z_1} v_{r_1} + v_{z_2} v_{r_0} ; \\ A_{3,4,3} &= v_{z_0} v_{r_3} + v_{z_1} v_{r_2} + v_{z_2} v_{r_1} + v_{z_3} v_{r_0} ; \\ A_{3,4,4} &= v_{z_0} v_{r_4} + v_{z_1} v_{r_3} + v_{z_2} v_{r_2} + v_{z_3} v_{r_1} + v_{z_4} v_{r_0} ; \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$5^\circ) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{3,5,n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_{\theta_n}}{\partial \theta} \right) = (v_{z_0} + v_{z_1} + v_{z_2} + \dots) \left(\frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta_2}}{\partial \theta} + \dots \right)$$

resulta:

$$\begin{aligned} A_{3,5,0} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial \theta} ; \\ A_{3,5,1} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial \theta} + v_{z_1} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial \theta} ; \\ A_{3,5,2} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{\theta_2}}{\partial \theta} + v_{z_1} \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial \theta} + v_{z_2} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial \theta} ; \\ A_{3,5,3} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{\theta_3}}{\partial \theta} + v_{z_1} \frac{\partial v_{\theta_2}}{\partial \theta} + v_{z_2} \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial \theta} + v_{z_3} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial \theta} ; \\ A_{3,5,4} &= v_{z_0} \frac{\partial v_{\theta_4}}{\partial \theta} + v_{z_1} \frac{\partial v_{\theta_3}}{\partial \theta} + v_{z_2} \frac{\partial v_{\theta_2}}{\partial \theta} + v_{z_3} \frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial \theta} + v_{z_4} \frac{\partial v_{\theta_0}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (5.49)$$

De (5.42) obtém-se:

$$v_{z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} v_{z_{n+1}} = L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \right) - \sum_{n=0}^{\infty} L_t^{-1} (A_{3,n}) \quad (5.50)$$

Portanto, resulta

$$\begin{cases} v_{z_0} = L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \right) \\ v_{z_{n+1}} = L_t^{-1} (A_{3,n}) \end{cases} \quad (5.51)$$

De (5.23), (5.36), (5.51) e (5.10), tem-se:

$$\begin{cases} v_{r_0} = V_\infty \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \right) ; v_{r_{n+1}} = L_t^{-1} (A_{1,n}) \\ v_{\theta_0} = -V_\infty \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta \right) ; v_{\theta_{n+1}} = L_t^{-1} (A_{2,n}) \\ v_{z_0} = L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \right) ; v_{z_{n+1}} = L_t^{-1} (A_{3,n}) ; \\ p = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(1 - \frac{U^2}{V_\infty^2} \right) \end{cases} \quad (5.52)$$

5.2 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Para obter os resultados do sistema (5.52), consideram-se as condições iniciais escritas em (5.9) como:

$$\begin{aligned}v_r(r, \theta, z, 0) &= V_\infty \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right], \\v_\theta(r, \theta, z, 0) &= -V_\infty \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right], \\v_z(r, \theta, z, 0) &= 0\end{aligned}$$

sendo a sua substituição na equação da pressão (5.10), que é dada por:

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(1 - \frac{U^2}{V_\infty^2} \right)$$

onde

$$U^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2$$

resulta na seguinte equação :

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(\frac{a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad (5.53)$$

para $t = 0$.

Para a primeira simulação considerada no presente capítulo, são atribuídas as seguintes condições para o sistema (5.52):

$$F_r = F_\theta = F_z = 0 \quad (5.54)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 10^{-6}, \quad (5.55)$$

Então, considerando-se as condições (5.54), (5.55) e substituindo-se (5.53), (5.54) e (5.55) nas equações

$$\begin{aligned}
v_{r0} &= V_\infty \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \right), \\
v_{\theta 0} &= -V_\infty \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + L_t^{-1} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta \right), \\
v_{z0} &= L_t^{-1} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \right)
\end{aligned}$$

obtém-se:

$$v_{r0} = V \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \rho V^2 t \left(-\frac{4a^4}{r^5} + \frac{4a^2 \cos 2\theta}{r^3} \right) \quad (5.56)$$

$$v_{\theta 0} = -V \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + \frac{2\rho V^2 a^2 t \sin 2\theta}{r^3} \quad (5.57)$$

$$v_{z0} = -10^{-6} t \quad (5.58)$$

considerando-se $V_\infty = V$.

Após a determinação dos primeiros termos das séries $v_r = \sum_{n=0}^{\infty} v_{rn}$, $v_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta n}$, $v_z = \sum_{n=0}^{\infty} v_{zn}$, que são: v_{r0} , $v_{\theta 0}$ e v_{z0} , os próximos termos serão determinados conforme a descrição a seguir.

A partir de (5.18) a (5.21), da primeira equação de (5.52), de (5.56) a (5.58), e considerando-se $\mu = 1$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
v_{r1} = L_t^{-1}(A_{1,0}) &= \frac{2V^4 a^4 \rho^2 t^3}{3r^{11}} (6r^4 + 16a^2 r^2 - 32a^2 r^2 \cos^2 \theta + 10a^4) + \\
&+ \frac{V^2 a^2 \rho t^2}{r^8 \text{Re}} (-9V \text{Re} r^4 \cos \theta - 10V \text{Re} \cos \theta a^2 r^2 + 12r^3 + 12V \text{Re} r^4 \cos^3 \theta + \\
&\quad - 24r^3 \cos^2 \theta + 6a^2 r + 7V \text{Re} a^4 \cos \theta) + \\
&+ \frac{2Va^2 t}{r^5 \text{Re}} (V \text{Re} a^2 - 2V \text{Re} r^2 \cos^2 \theta + 3r \cos \theta + V \text{Re} r^2)
\end{aligned} \quad (5.59)$$

A partir de (5.31) a (5.34), da segunda equação de (5.52), de (5.56) a (5.58) e considerando-se $\mu = 1$ e $V_\infty = V$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
v_{\theta_1} = L_t^{-1}(A_{2,0}) = & -\frac{16 V^4 a^6 \rho^2 t^3}{3r^9} \sin \theta \cos \theta + \\
& + \frac{V^2 a^2 \rho t^2}{r^8 \operatorname{Re}} \sin \theta (8r^3 \cos \theta + 12V \operatorname{Re} r^4 \cos^2 \theta - 2V \operatorname{Re} a^2 r^2 + V \operatorname{Re} a^4 - 3V \operatorname{Re} r^4) \\
& + \frac{Vt}{r^4 \operatorname{Re}} \sin \theta (-a^2 - r^2 - 4V \operatorname{Re} a^2 r \cos \theta)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

A partir de (5.44) a (5.47), da terceira equação de (5.52), de (5.56) a (5.58) e considerando-se $\mu = 1$ e $V_\infty = V$, obtém-se:

$$v_{z_1} = L_t^{-1}(A_{3,0}) = -\frac{V^2 a^4 \rho t^3}{375000r^6} \tag{5.61}$$

De modo semelhante à forma como foram determinadas as expressões (5.59) a (5.61), determina-se:

$$\begin{aligned}
v_{r_2} = L_t^{-1}(A_{1,1}) = & -\frac{V^6 a^6 \rho^3 t^5}{15r^{17}} (-2912 a^4 r^2 \cos^2 \theta - 2304 a^2 r^4 \cos^2 \theta + 1056 a^2 r^4 + \\
& + 2304 a^2 r^4 \cos^4 \theta - 480 r^6 \cos^2 \theta + 640 a^6 + 240 r^6 + 1456 a^4 r^2) \\
& - \frac{V^4 a^4 \rho^2 t^4}{12r^{14} \operatorname{Re}} (806V \operatorname{Re} a^6 \cos \theta + 2112r^5 \cos^4 \theta - 2112r^5 \cos^2 \theta + \\
& - 374V \operatorname{Re} a^4 r^2 \cos \theta + 2332V \operatorname{Re} a^2 r^4 \cos^3 \theta - 210V \operatorname{Re} r^6 \cos \theta + \\
& + 1560 a^2 r^3 - 1134V \operatorname{Re} a^2 r^4 \cos \theta - 1320V \operatorname{Re} a^4 r^2 \cos^3 \theta + \\
& + 672 a^4 r + 672r^5 - 3120 a^2 r^3 \cos^2 \theta) + \\
& - \frac{V^2 a^2 \rho t^3}{9r^{11} \operatorname{Re}^2} (1152V \operatorname{Re} r^5 \cos^3 \theta + 288V^2 \operatorname{Re}^2 r^6 \cos^2 \theta + 702V \operatorname{Re} a^4 r \cos \theta + \\
& - 288V^2 \operatorname{Re}^2 r^6 \cos^4 \theta + 30V \operatorname{Re} a^2 r^3 \cos \theta + 180V^2 \operatorname{Re}^2 a^6 \cos^2 \theta + \\
& - 768V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^2 \cos^2 \theta + 150V^2 \operatorname{Re}^2 a^6 + 168V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^2 + \\
& + 324V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^4 \cos^2 \theta + 312r^4 - 912V \operatorname{Re} a^2 r^3 \cos^3 \theta + \\
& - 792V \operatorname{Re} r^5 \cos \theta - 624r^4 \cos^2 \theta + 144a^2 r^2 - 18V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^4 + \\
& - 36V^2 \operatorname{Re}^2 r^6) + \\
& - \frac{Vt^2}{6r^8 \operatorname{Re}^2} (-60V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^2 \cos \theta + 42V^2 \operatorname{Re}^2 a^6 \cos \theta + 102 a^2 r^2 \cos \theta + \\
& + 78V \operatorname{Re} a^2 r^3 + 99V \operatorname{Re} a^4 r \cos^2 \theta - 222V \operatorname{Re} a^2 r^3 \cos^2 \theta + \\
& + 72V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^4 \cos^3 \theta - 54V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^4 \cos \theta + 3V \operatorname{Re} r^5 \cos^2 \theta + \\
& - 3V \operatorname{Re} r^5 - 6r^4 \cos \theta + 45V \operatorname{Re} a^4 r)
\end{aligned} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
v_{\theta 2} = L_t^{-1}(A_{2,1}) = & -\frac{V^6 a^6 \rho^3 t^5}{15r^{15}} \sin \theta \cos \theta (-416a^4 - 384a^2 r^2 + 768a^2 r^2 \cos^2 \theta + \\
& -96r^4) + \\
& -\frac{V^4 a^4 \rho^2 t^4}{12r^{14} \text{Re}} \sin \theta (-126V \text{Re} a^2 r^4 - 360V \text{Re} a^4 r^2 \cos^2 \theta + 744V \text{Re} a^2 r^4 \cos^2 \theta + \\
& -288r^5 \cos \theta - 34V \text{Re} a^4 r^2 + 1072a^2 r^3 \cos \theta + \\
& + 62V \text{Re} a^6 + 576r^5 \cos^3 \theta - 30V \text{Re} r^6) \\
& -\frac{V^2 a^2 \rho t^3}{9r^{11} \text{Re}^2} \sin \theta (-444V \text{Re} r^5 \cos^2 \theta - 192V^2 \text{Re}^2 a^4 r^2 \cos \theta + \\
& -192V^2 \text{Re}^2 a^4 r^2 \cos \theta - 192V \text{Re} a^2 r^3 \cos^2 \theta - 288V^2 \text{Re}^2 r^6 \cos^3 \theta + \\
& + 144V^2 \text{Re}^2 r^6 \cos \theta + 108V^2 \text{Re}^2 a^2 r^4 \cos \theta - 864r^4 \cos \theta + \\
& + 180V \text{Re} a^2 r^3 + 75V \text{Re} r^5 + 36V^2 \text{Re}^2 a^6 \cos \theta - 147V \text{Re} a^4 r) \\
& -\frac{V t^2}{6r^8 \text{Re}^2} \sin \theta (-18V^2 \text{Re}^2 a^2 r^4 + 9V \text{Re} r^5 \cos \theta + 6V^2 \text{Re}^2 a^6 - 12V^2 \text{Re}^2 a^6 + \\
& -12V^2 \text{Re}^2 a^4 r^2 + 9r^4 + 81a^2 r^2 + 48V \text{Re} a^2 r^3 \cos \theta + \\
& + 15V \text{Re} a^4 r \cos \theta + 72V^2 \text{Re}^2 a^2 r^4 \cos^2 \theta)
\end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}
v_{z 2} = L_t^{-1}(A_{3,2}) = & -\frac{V^4 a^4 \rho^2 t^5}{15000000r^{12}} (672a^2 r^2 \cos^2 \theta - 72r^4 - 336a^2 r^2 - 232a^4) + \\
& -\frac{V^2 a^2 \rho t^4}{12000000r^9 \text{Re}} (192V \text{Re} a^2 r^2 \cos \theta + 336r^3 \cos^2 \theta + 180a^2 r + \\
& -168r^3 - 192V \text{Re} a^4 \cos \theta) + \\
& -\frac{V t^3}{9000000r^6 \text{Re}} (-24V \text{Re} a^4 - 57a^2 r \cos \theta - 3r^3 \cos \theta)
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Determina-se o módulo da velocidade U a partir da equação $U^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2$,

mas devido ao fato dos próximos termos das séries $v_r = \sum_{n=0}^{\infty} v_{r_n}$, $v_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} v_{\theta_n}$ e

$v_z = \sum_{n=0}^{\infty} v_{z_n}$ serem muito grandes, considera-se, nesta simulação, as seguintes

aproximações:

$$v_r = \sum_{n=0}^2 v_{r_n} = v_{r_0} + v_{r_1} + v_{r_2}, \tag{5.65}$$

$$v_\theta = \sum_{n=0}^2 v_{\theta_n} = v_{\theta_0} + v_{\theta_1} + v_{\theta_2}, \tag{5.66}$$

$$v_z = \sum_{n=0}^2 v_{z_n} = v_{z_0} + v_{z_1} + v_{z_2}. \tag{5.67}$$

Em seguida, substituem-se as expressões encontradas através de (5.65) a (5.67) na última equação de (5.52), e determina-se:

$$\Delta p = p - p_\infty = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(1 - \frac{U^2}{V_\infty^2} \right)$$

e como esta expressão é muito grande, foi omitida no presente capítulo. A seguir são mostrados alguns gráficos das simulações para o coeficiente de pressão descrito na equação (4.20).

As simulações apresentadas a seguir foram realizadas no Maple 12. Na figura 5.2 a simulação do coeficiente de pressão foi realizada, considerando-se $r = a = 1$, $V = V_\infty = 1$, $\rho = 1$, $t = 0.1$ e $Re = 100$; observa-se um resultado semelhante ao da figura 4.7 para o escoamento não viscoso. Na figura 5.3 a simulação do coeficiente de pressão foi realizada considerando-se $r = a = 1$, $V = V_\infty = 1$, $\rho = 1$, $t = 0.2$ e $Re = 100$. Pode ser observado que o resultado é praticamente o mesmo da figura 5.2.

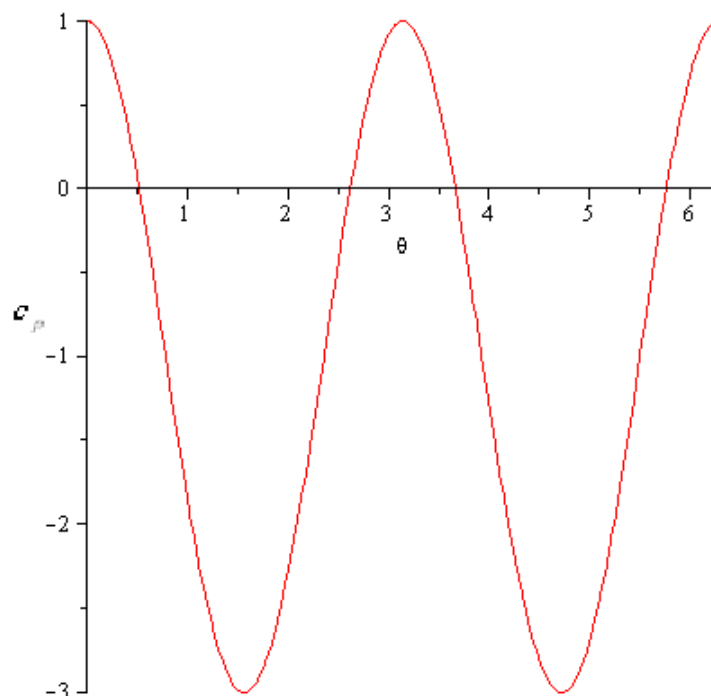


Figura 5.2 Gráfico do coeficiente de pressão para $Re = 100$ e $t = 0.1s$

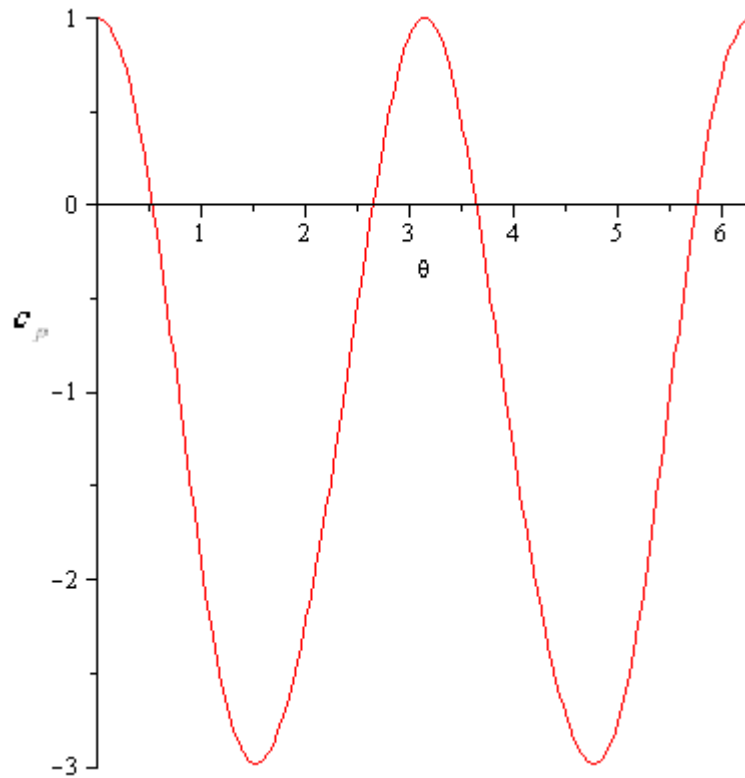


Figura 5.3 Gráfico do coeficiente de pressão para $Re = 100$ e $t = 0.2s$

Para a segunda simulação considerada no presente capítulo, são atribuídas as seguintes condições para o sistema (5.52):

$$F_r = F_z = 0 \quad (5.68)$$

$$F_\theta = \frac{1}{2} \cos(8\pi t) \quad (5.69)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 10^{-6}, \quad (5.70)$$

De acordo com SCHLICHTING [95], adiciona-se a viscosidade física uma viscosidade turbulenta (artificial), que é aproximada aqui conforme:

$$\mu_T = c_s \Delta^2 |\vec{s}| \quad (5.71)$$

onde

$$|\vec{s}| = \left[2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.72)$$

sendo $c_s = 0.2$, uma constante (Smagorinsky) e $\Delta \approx 1$.

A partir das condições iniciais (5.9), obtém-se, para $t = 0$:

$$\mu_T = \frac{4V a^2}{5r^3}, \quad (5.73)$$

onde $V_\infty = V$.

Substituindo-se (5.53), (5.68), (5.69), (5.70) e (5.73) no sistema (5.52), resulta em:

$$v_{r0} = V \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \rho V^2 t \left(-\frac{4a^4}{r^5} + \frac{4a^2 \cos 2\theta}{r^3} \right) \quad (5.74)$$

$$v_{\theta 0} = -V \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + \frac{2\rho V^2 a^2 t \sin 2\theta}{r^3} + \frac{1}{16\pi} \sin(8\pi t) \quad (5.75)$$

$$v_{z0} = -10^{-6} t \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} v_{r1} = L_t^{-1}(A_{1,0}) = & \frac{1}{r^{11} \text{Re}} \left[1.583 \cdot 10^{-32} (-1.5 \cdot 10^{29} V \text{Re} a^2 r^8 \sin \theta - 4.1 \cdot 10^{28} V r^{10} \sin \theta + \right. \\ & + 3.032 \cdot 10^{32} V^2 a^4 r^4 t \cos \theta - 6.064 \cdot 10^{32} V^3 a^4 \rho r^3 t^2 \cos 2\theta + \\ & - 2.527 \cdot 10^{32} V^2 \text{Re} a^2 r^8 t \cos^2 \theta - 3.158 \cdot 10^{32} V^3 \text{Re} a^4 \rho r^5 t^2 \cos \theta + \\ & + 1.895 \cdot 10^{32} V^3 \text{Re} a^2 \rho r^7 t^2 \cos \theta \cos 2\theta + 4.4226 \cdot 10^{32} V^3 \text{Re} a^6 \rho^2 r^3 t^2 \cos 2\theta + \\ & - 3.16 \cdot 10^{32} V^3 \text{Re} a^4 \rho r^5 t^2 \cos 2\theta - 6.74 \cdot 10^{32} V^4 \text{Re} a^6 \rho^2 r^2 t^3 \cos 2\theta + \\ & - 1.895 \cdot 10^{32} V^3 \text{Re} a^2 \rho r^7 t^2 \sin \theta \sin 2\theta - 3.158 \cdot 10^{32} V^3 \text{Re} a^4 \rho r^5 t^2 \sin \theta \sin 2\theta + \\ & + 4.99 \cdot 10^{28} V \text{Re} r^{10} \cos(8\pi t) \sin \theta + 1.5 \cdot 10^{29} V \text{Re} a^2 r^8 \cos(8\pi t) \sin \theta + \\ & + 1.592 \cdot 10^{28} V^2 \text{Re} a^2 \rho r^7 \sin(8\pi t) \sin 2\theta - 3.99 \cdot 10^{29} V^2 \text{Re} a^2 \rho r^7 t \cos(8\pi t) \sin 2\theta + \\ & + 3.032 \cdot 10^{32} V^3 a^6 \rho r t^2 + 4.21 \cdot 10^{32} V^4 \text{Re} a^8 \rho^2 t^3 + 2.527 \cdot 10^{32} V^4 \text{Re} a^4 \rho^2 r^4 t^3 + \\ & + 1.25 \cdot 10^{28} \text{Re} r^{10} t - 4.97 \cdot 10^{26} \text{Re} r^{10} \cos(8\pi t) \sin(8\pi t) + 1.26 \cdot 10^{32} V^2 \text{Re} a^2 r^8 t + \\ & \left. + 1.26 \cdot 10^{32} V^2 \text{Re} a^4 r^6 t \right] \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned}
v_{\theta_1} = L_t^{-1}(A_{2,0}) = & -\frac{1}{r^9 \operatorname{Re}} \left[3.17 \cdot 10^{-29} (1.99 \cdot 10^{25} V a^2 r^4 - 4.99 \cdot 10^{25} V \operatorname{Re} a^2 r^6 \cos \theta + \right. \\
& + 3.158 \cdot 10^{28} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^3 t^2 \cos \theta \sin 2\theta - 9.475 \cdot 10^{28} V^3 \operatorname{Re} a^2 \rho r^5 t^2 \cos \theta \sin 2\theta + \\
& - 9.475 \cdot 10^{28} V^3 \operatorname{Re} a^2 \rho r^5 t^2 \sin \theta \cos 2\theta - 3.158 \cdot 10^{28} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^3 t^2 \cos 2\theta \sin \theta + \\
& + 3.158 \cdot 10^{28} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^3 t^2 \sin \theta + 5.968 \cdot 10^{24} V^2 \operatorname{Re} a^2 \rho r^5 \cos 2\theta \sin(8\pi t) + \\
& - 1.5 \cdot 10^{26} V^2 \operatorname{Re} a^2 \rho r^5 t \cos(8\pi t) \cos 2\theta + 4.99 \cdot 10^{25} V \operatorname{Re} a^2 r^6 \cos(8\pi t) \cos \theta + \\
& - 3.158 \cdot 10^{28} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r t^2 \sin \theta - 1.01 \cdot 10^{29} V^3 a^4 \rho r t^2 \sin 2\theta + \\
& + 2.527 \cdot 10^{28} V^2 a^4 r^2 t \sin \theta - 1.99 \cdot 10^{25} V a^2 r^4 \cos(8\pi t) + \\
& + 8.42 \cdot 10^{28} V^4 \operatorname{Re} a^6 \rho^2 t^3 \sin 2\theta + 1.26 \cdot 10^{29} V^2 \operatorname{Re} a^2 r^6 t \cos \theta \sin \theta + \\
& - 1.98 \cdot 10^{24} V^2 a^4 \rho r^3 \sin(8\pi t) + 4.99 \cdot 10^{25} V^2 \operatorname{Re} a^4 \rho r^3 t \cos(8\pi t) + \\
& \left. + 2.527 \cdot 10^{28} V^2 a^2 \rho^2 r^4 t \sin \theta \right]
\end{aligned} \tag{5.78}$$

$$v_{z_1} = L_t^{-1}(A_{3,0}) = -\frac{V^2 a^4 \rho t^3}{375000 r^6} \tag{5.79}$$

$$\begin{aligned}
v_{r_2} = L_t^{-1}(A_{1,1}) = & -\frac{1}{V \operatorname{Re}^2 a^2 r^{16}} \left[1.197 \cdot 10^{-55} V (1.19 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 \rho a^6 r^9 t^2 \cos 2\theta \sin \theta + \right. \\
& - 1.058 \cdot 10^{52} V^2 \operatorname{Re} a^4 r^{10} t \sin \theta \cos(8\pi t) + 2.12 \cdot 10^{52} V^2 \operatorname{Re} a^6 r^8 t \sin \theta \cos(8\pi t) + \\
& - 1.407 \cdot 10^{51} V^3 \operatorname{Re} a^6 r^7 \rho \sin 2\theta \cos(8\pi t) - 3.37 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 a^{10} \rho^2 r^4 t^4 \sin 2\theta \sin \theta + \\
& - 5.26 \cdot 10^{50} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{14} \cos \theta \sin \theta \sin(8\pi t) - 1.29 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re} a^8 \rho r^5 t^3 \sin 2\theta \sin \theta + \\
& + 4.145 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re} a^8 \rho^2 r^4 t^4 \cos^2 2\theta - 2.496 \cdot 10^{56} V^4 a^8 \rho r^3 t^3 \cos 2\theta + \\
& + 2.117 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^7 t^2 \sin 2\theta - 1.05 \cdot 10^{57} V^5 \operatorname{Re} a^{10} \rho^2 r^2 t^4 \cos 2\theta + \\
& - 7.276 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t^2 \cos \theta \sin 2\theta + 2.006 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re} a^6 \rho r^9 t^3 \sin \theta \cos \theta \sin 2\theta + \\
& + 1.504 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 \rho a^8 r^6 t^4 \sin \theta \sin 2\theta \cos 2\theta + 6.284 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re} a^8 \rho r^5 t^3 \cos \theta \cos 2\theta + \\
& - 1.337 \cdot 10^{56} V^6 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^3 r^5 t^5 \cos 2\theta + 6.685 \cdot 10^{55} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t^3 \sin \theta \sin 2\theta \cos \theta + \\
& + 6.65 \cdot 10^{46} V^5 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^8 t^4 \cos \theta \cos^2 2\theta + 1.504 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^6 t^4 \cos \theta \cos^2 2\theta + \\
& + 3.927 \cdot 10^{48} V \operatorname{Re}^2 a^2 r^{14} \cos^2(8\pi t) \cos \theta - 2.089 \cdot 10^{46} V^5 \operatorname{Re}^2 a^6 r^8 t^4 \sin \theta \sin 2\theta \cos 2\theta + \\
& + 4.189 \cdot 10^{49} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t \cos 2\theta - 4.41 \cdot 10^{51} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^{11} t^3 \cos 2\theta + \\
& - 1.337 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re} a^8 \rho r^7 t^3 \sin \theta \sin 2\theta \cos \theta + 3.476 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re} a^6 \rho r^7 t^3 \cos \theta \cos 2\theta + \\
& - 8.11 \cdot 10^{56} V^6 \operatorname{Re}^2 a^{12} \rho^3 r t^5 \cos 2\theta - 6.685 \cdot 10^{55} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^7 t^3 \cos 2\theta + \\
& - 1.604 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re} a^6 \rho r^7 t^3 \sin \theta \sin 2\theta + 8.87 \cdot 10^{46} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^9 t^3 \cos 2\theta + \\
& \left. + 3.209 \cdot 10^{56} V^6 \operatorname{Re}^2 a^{10} \rho^3 r^3 t^5 \cos^2 2\theta + 5.014 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^6 t^4 \cos \theta \cos 2\theta + \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 5.236 \cdot 10^{48} V \operatorname{Re}^2 a^2 r^{14} \cos(8\pi t) \cos \theta - 8.38 \cdot 10^{48} V \operatorname{Re} a^4 r^{10} \cos(8\pi t) + \\
&+ 6.28 \cdot 10^{48} V \operatorname{Re} a^4 r^{10} \cos^2(8\pi t) + 2.01 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t^3 \cos^2 \theta \cos 2\theta + \\
&+ 3.125 \cdot 10^{47} V^2 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 \cos(8\pi t) \sin(8\pi t) - 1.52 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^7 t \sin 2\theta \sin(8\pi t) + \\
&- 8.467 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^7 t^2 \sin 2\theta \cos(8\pi t) + 5.236 \cdot 10^{48} V^2 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t \cos^2(8\pi t) + \\
&+ 9.33 \cdot 10^{49} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^6 \sin 2\theta \sin(8\pi t) + 1.053 \cdot 10^{51} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^{12} \sin \theta \cos \theta + \\
&+ 2.304 \cdot 10^{50} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 \cos(8\pi t) + 1.58 \cdot 10^{51} V^2 \operatorname{Re}^2 a^6 r^{10} \sin \theta \cos \theta \sin(8\pi t) + \\
&+ 1.88 \cdot 10^{50} V^3 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^7 \sin \theta \cos(8\pi t) + 3.34 \cdot 10^{55} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t^3 \cos 2\theta + \\
&+ 2.646 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t \sin \theta \cos 2\theta - 7.97 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 a^{10} \rho^2 r^4 t^4 \cos \theta \cos 2\theta + \\
&- 6.615 \cdot 10^{51} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t^2 \sin 2\theta \cos \theta - 1.34 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^7 t^3 \cos^2 \theta \cos 2\theta + \\
&- 1.25 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^6 t^4 \sin \theta \sin 2\theta - 4.19 \cdot 10^{49} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 \sin \theta + \\
&- 6.283 \cdot 10^{50} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 \cos \theta \sin 2\theta \cos(8\pi t) + \\
&+ 1.88 \cdot 10^{50} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 \cos 2\theta \sin \theta \cos(8\pi t) - 2.35 \cdot 10^{51} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^6 t \sin 2\theta \cos(8\pi t) + \\
&- 4.167 \cdot 10^{48} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} \cos 2\theta \sin(8\pi t) \cos(8\pi t) + \\
&- 1.76 \cdot 10^{53} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^6 t^3 \sin 2\theta \cos(8\pi t) - 1.26 \cdot 10^{52} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^6 t^2 \sin 2\theta \sin(8\pi t) + \\
&+ 6.28 \cdot 10^{49} V^3 \operatorname{Re}^2 a^3 \rho r^{11} \cos 2\theta \sin \theta \cos(8\pi t) + \\
&+ 3.77 \cdot 10^{50} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} \cos \theta \sin 2\theta \cos(8\pi t) + \\
&- 1.058 \cdot 10^{53} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^{12} t \cos \theta \sin \theta \cos(8\pi t) + \\
&+ 6.28 \cdot 10^{49} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} \cos 2\theta \cos^2(8\pi t) + 6.32 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t \sin \theta \cos(8\pi t) + \\
&- 3.99 \cdot 10^{49} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^8 \cos 2\theta \sin 2\theta \sin(8\pi t) - 4.47 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^7 t^3 \cos^2 \theta + \\
&+ 7.94 \cdot 10^{52} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^{12} t \cos \theta \sin \theta - 3.97 \cdot 10^{52} V^2 \operatorname{Re}^2 a^6 r^{10} t \cos \theta \sin \theta + \\
&- 1.59 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^7 t^2 \sin \theta + 1.67 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re}^2 a^{10} \rho r^5 t^3 \cos^2 \theta + \\
&+ 1.003 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^9 t^3 \cos^2 \theta - 1.164 \cdot 10^{53} V^2 \operatorname{Re} a^6 r^8 t \sin \theta + \\
&+ 5.95 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^7 t^2 \sin \theta \cos(8\pi t) + 6.32 \cdot 10^{51} V^3 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^7 t \sin \theta \sin(8\pi t) + \\
&- 4.63 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t^2 \sin \theta \cos(8\pi t) + 5.613 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 a^{12} \rho^2 r^2 t^4 \cos \theta + \\
&- 4.63 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t^2 \cos \theta \sin 2\theta \cos(8\pi t) + \\
&+ 8.42 \cdot 10^{51} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^8 t^2 \sin 2\theta \cos 2\theta \sin(8\pi t) + \\
&+ 1.005 \cdot 10^{51} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^8 t \sin 2\theta \cos 2\theta \cos(8\pi t) + \\
&- 3.16 \cdot 10^{51} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t \cos \theta \sin 2\theta \sin(8\pi t) + \\
&+ 1.053 \cdot 10^{51} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t \cos \theta \sin 2\theta \sin(8\pi t) + \\
&- 3.83 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 a^{10} \rho^2 r^4 t^4 \cos \theta - 3.97 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t^2 \sin \theta + \\
&- 1.46 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^8 t^4 \cos \theta + 1.128 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^6 t^4 \cos \theta + \\
&- 2.117 \cdot 10^{52} V^2 \operatorname{Re} a^4 r^{10} t \sin \theta - 4.21 \cdot 10^{51} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t \sin \theta \cos 2\theta \sin(8\pi t) + \\
&- 4.21 \cdot 10^{51} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t \sin \theta \cos 2\theta \sin(8\pi t) + \\
&+ 9.92 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t^2 \cos \theta \sin 2\theta \cos(8\pi t) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 9.92 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t^2 \cos 2\theta \sin \theta \cos(8\pi t) + 1.39 \cdot 10^{56} V^3 a^8 r^4 t^2 \cos \theta + \\
& + 4.63 \cdot 10^{52} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t^2 \sin \theta \cos 2\theta \cos(8\pi t) + 2.48 \cdot 10^{51} V \operatorname{Re}^2 a^4 r^{12} t^2 \cos \theta + \\
& - 5.35 \cdot 10^{54} V^3 a^6 r^6 t^2 \cos \theta + 8.02 \cdot 10^{55} V^5 \operatorname{Re} a^8 \rho^2 r^4 t^4 + \\
& - 6.685 \cdot 10^{55} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} t^3 \cos^2 \theta \cos 2\theta - 1.31 \cdot 10^{48} V \operatorname{Re}^2 a^2 r^{14} \cos \theta + \\
& - 1.44 \cdot 10^{49} V \operatorname{Re}^2 a^4 r^{12} \cos \theta \cos^2(8\pi t) - 1.885 \cdot 10^{50} V^3 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^7 \sin \theta + \\
& + 1.18 \cdot 10^{56} V^4 a^{10} \rho r t^3 + 3.34 \cdot 10^{54} V^3 \operatorname{Re} a^4 r^{10} t^2 \cos^2 \theta + \\
& + 3.79 \cdot 10^{51} V^2 \operatorname{Re} a^6 r^8 \sin \theta \sin(8\pi t) + 1.26 \cdot 10^{51} V^2 \operatorname{Re} a^4 r^{10} \sin \theta \sin(8\pi t) + \\
& - 3.075 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re} a^6 r^8 t^2 \cos^2 \theta - 1.705 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re} a^8 r^6 t^2 \cos^2 \theta + \\
& + 3.67 \cdot 10^{49} V \operatorname{Re}^2 a^4 r^{12} \cos \theta \cos(8\pi t) + 4.345 \cdot 10^{56} V^5 \operatorname{Re} a^{12} \rho^2 t^4 + \\
& - 7.521 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^{12} t^2 \cos \theta - 1.67 \cdot 10^{55} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t^3 + \\
& + 8.69 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re} a^6 r^8 t^2 + 1.323 \cdot 10^{52} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{14} t \sin \theta \cos \theta + \\
& + 2.094 \cdot 10^{48} V \operatorname{Re} a^4 r^{10} + 7.98 \cdot 10^{46} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 r^{10} t^2 \cos^3 \theta + \\
& + 5.014 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re} a^8 r^6 t^2 - 2.273 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re} a^8 \rho r^5 t^3 \cos \theta + \\
& + 8.91 \cdot 10^{55} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^7 t^3 + 1.003 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 r^{12} t^2 \cos^3 \theta + \\
& + 1.39 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re}^2 a^{10} \rho r^5 t^3 + 2.815 \cdot 10^{51} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^7 \sin \theta \cos \theta + \\
& + 8.79 \cdot 10^{50} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 \sin \theta \cos^2 \theta - 8.79 \cdot 10^{50} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} \sin \theta \cos^2 \theta + \\
& + 6.28 \cdot 10^{49} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^{11} \sin \theta - 8.356 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 r^{10} t^2 \cos \theta + \\
& + 6.42 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re} a^{10} \rho r^3 t^3 \cos \theta + 2.67 \cdot 10^{56} V^6 \operatorname{Re}^2 a^{10} \rho^3 r^3 t^5 + \\
& - 8.268 \cdot 10^{50} V \operatorname{Re}^2 a^2 r^{14} \cos \theta + 3.565 \cdot 10^{56} V^6 \operatorname{Re}^2 a^{14} \rho^3 \frac{t^5}{r} \cos \theta + \\
& + 6.615 \cdot 10^{51} V^2 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t^3 + 5.85 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re}^2 a^8 r^8 t^2 \cos \theta + \\
& - 3.34 \cdot 10^{54} V^3 \operatorname{Re} a^4 r^{10} t^2 + 1.32 \cdot 10^{51} V \operatorname{Re} a^4 r^{10} t^2 + \\
& - 1.31 \cdot 10^{49} V^2 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^9 t - 2.225 \cdot 10^{49} V \operatorname{Re}^2 a^4 r^{12} \cos \theta) \Big]
\end{aligned}$$

(5.80)

$$\begin{aligned}
v_{\theta 2} = L_t^{-1}(A_{2,1}) = & - \frac{1}{\operatorname{Re}^2 r^{15}} \Big[3.76 \cdot 10^{-59} (2.63 \cdot 10^{54} V \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} t^2 \sin \theta + \\
& + 1.7 \cdot 10^{59} V^3 \operatorname{Re} a^4 r^7 t^2 \sin \theta \cos \theta + 7.8 \cdot 10^{58} V^4 \operatorname{Re} a^6 \rho r^4 t^3 \sin \theta + \\
& - 2.11 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re}^2 r^{13} t \cos^2 \theta - 3.55 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^6 t^3 \sin \theta \cos \theta + \\
& + 1.37 \cdot 10^{59} V^5 \operatorname{Re}^2 a^{10} \rho^2 r t^4 \sin \theta - 2.11 \cdot 10^{56} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} t \cos^2 \theta + \\
& - 5.32 \cdot 10^{58} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 r^9 t^2 \sin \theta - 7.98 \cdot 10^{58} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} t^2 \sin \theta + \\
& + 3.192 \cdot 10^{59} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} t^2 \sin \theta \cos^2 \theta - 3.9 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re} a^8 \rho r^2 t^3 \sin \theta + \\
& + 1.06 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t^3 \sin \theta \cos \theta + 1.18 \cdot 10^{56} V^2 \operatorname{Re} a^2 r^9 t \cos \theta + \\
& + 8.42 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^6 t^2 \cos \theta - 6.74 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^4 t^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2.19 \cdot 10^{56} V^2 \operatorname{Re} a^4 r^7 t \cos \theta - 7.99 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} \cos \theta + \\
& + 2.043 \cdot 10^{59} V^3 a^4 r^5 t^2 \sin \theta + 4.23 \cdot 10^{49} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 r^9 t^2 \sin \theta \cos^2 \theta + \\
& - 6.65 \cdot 10^{58} V^5 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^7 t^4 \sin \theta + 6.38 \cdot 10^{58} V^3 \operatorname{Re} a^2 r^9 t^2 \cos \theta \sin \theta + \\
& - 3.41 \cdot 10^{54} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^6 \cos(8\pi t) + 1.11 \cdot 10^{50} \operatorname{Re}^2 r^{13} \sin(8\pi t) + \\
& + 1.463 \cdot 10^{59} V^5 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^5 t^4 \sin \theta + 2.66 \cdot 10^{58} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 r^7 t^2 \sin \theta + \\
& - 4.17 \cdot 10^{51} V \operatorname{Re}^2 r^{13} \sin \theta + 6.32 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^9 \cos^2 \theta + \\
& + 7.76 \cdot 10^{45} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^6 t \cos \theta \sin(8\pi t) + 1.5 \cdot 10^{53} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t \sin 2\theta \cos^2(8\pi t) + \\
& + 3.99 \cdot 10^{59} V^5 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^5 t^4 \sin 2\theta \cos \theta - 1.404 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^3 t^3 \cos(8\pi t) + \\
& + 8.62 \cdot 10^{45} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^3 t^2 \sin(8\pi t) - 3.55 \cdot 10^{58} V^5 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^3 t^4 \sin \theta \cos 2\theta + \\
& + 8.42 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t^2 \sin \theta \sin 2\theta - 2.128 \cdot 10^{58} V^3 \operatorname{Re} a^6 r^5 t^2 \sin \theta \cos \theta + \\
& - 1.108 \cdot 10^{59} V^5 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^3 t^4 \sin \theta - 1.06 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho r^4 t^3 \sin \theta \cos \theta + \\
& - 9.62 \cdot 10^{51} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} \sin 2\theta \sin(8\pi t) \cos(8\pi t) + \\
& - 3.64 \cdot 10^{59} V^5 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^3 t^4 \sin 2\theta \cos \theta + 3.405 \cdot 10^{59} V^6 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^3 r^2 t^5 \sin 2\theta \cos 2\theta + \\
& - 6.86 \cdot 10^{45} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t \cos \theta \sin(8\pi t) + 1.68 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re} a^2 r^9 t \cos \theta \cos(8\pi t) + \\
& - 3.69 \cdot 10^{59} V^6 \operatorname{Re}^2 a^{10} \rho^3 t^{15} \sin 2\theta - 2.13 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t^3 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta + \\
& + 2.66 \cdot 10^{59} V^5 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^5 t^4 \sin \theta \cos 2\theta - 1.68 \cdot 10^{55} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^{17} t^2 \cos^2 2\theta \sin(8\pi t) + \\
& + 7.96 \cdot 10^{52} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^7 \cos^2 2\theta - 1.68 \cdot 10^{54} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} \cos^2 \theta \sin(8\pi t) + \\
& + 3.37 \cdot 10^{56} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^5 t^3 \cos 2\theta \cos(8\pi t) - 1.01 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^4 t^2 \cos(8\pi t) + \\
& - 3.41 \cdot 10^{54} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^6 + 1.08 \cdot 10^{60} V^5 \operatorname{Re} a^8 \rho^2 r t^4 \sin 2\theta + \\
& - 1.35 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re} a^4 \rho r^6 t^3 \sin \theta \cos 2\theta + 4.21 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t^2 \sin \theta \sin 2\theta + \\
& + 8.38 \cdot 10^{53} V^2 \operatorname{Re}^2 r^{13} \cos^2 \theta \sin(8\pi t) + 4 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} \sin \theta \sin 2\theta \cos(8\pi t) + \\
& + 2.106 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re}^2 r^{13} t + 3.23 \cdot 10^{56} V^2 a^4 r^5 t - 4.33 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re} a^4 \rho r^6 t^3 \cos \theta \sin 2\theta + \\
& + 1.6 \cdot 10^{59} V^5 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^5 t^4 \sin 2\theta \cos \theta \cos 2\theta - 2.13 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t^3 \sin 2\theta \cos^2 \theta + \\
& + 1.26 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t^2 \sin \theta \sin 2\theta \cos(8\pi t) - 2.67 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^6 \cos \theta \cos(8\pi t) + \\
& - 1.99 \cdot 10^{54} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^7 t \cos^2 2\theta \cos(8\pi t) - 4.27 \cdot 10^{54} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^4 + \\
& + 2.53 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t^2 \sin \theta \sin 2\theta \cos(8\pi t) - 8.42 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re} a^4 r^7 t \cos \theta \cos(8\pi t) + \\
& - 8.42 \cdot 10^{55} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^7 t^3 \cos(8\pi t) + 1.68 \cdot 10^{55} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^7 t^2 \sin(8\pi t) + \\
& - 7.99 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} \cos \theta \cos(8\pi t) - 7.98 \cdot 10^{49} V^5 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^7 t^4 \cos \theta \sin 2\theta \cos 2\theta + \\
& + 2.67 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^6 \cos \theta + 1.21 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re} a^4 r^7 \cos \theta \sin(8\pi t) + \\
& + 1.68 \cdot 10^{54} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} \sin(8\pi t) - 6.7 \cdot 10^{54} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t \sin \theta \sin 2\theta \sin(8\pi t) + \\
& - 2.51 \cdot 10^{54} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^9 \cos^2 \theta \sin(8\pi t) + 3.99 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 \cos \theta \cos 2\theta \cos(8\pi t) + \\
& - 6.36 \cdot 10^{52} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^7 \sin(8\pi t) + 1.59 \cdot 10^{54} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^7 t \cos(8\pi t) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2.53 \cdot 10^{56} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} t \cos^2 \theta \cos(8\pi t) - 8.87 \cdot 10^{49} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t^3 \cos \theta \sin \theta \cos 2\theta + \\
& + 1.26 \cdot 10^{44} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 \cos \theta - 1.25 \cdot 10^{52} V \operatorname{Re}^2 r^{13} \sin \theta \cos^2(8\pi t) + \\
& - 1.25 \cdot 10^{52} V \operatorname{Re}^2 r^{13} \sin \theta \cos^2(8\pi t) - 1.064 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^6 \sin 2\theta + \\
& - 1.59 \cdot 10^{59} V^5 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^5 t^4 \sin \theta \cos^2 2\theta - 7.02 \cdot 10^{54} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t^3 \sin 2\theta + \\
& - 8.47 \cdot 10^{49} V^5 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho^2 r^7 t^4 \sin \theta \cos^2 2\theta + 1.28 \cdot 10^{59} V^5 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^3 t^4 \sin 2\theta \cos 2\theta + \\
& - 3.99 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 \sin \theta \sin 2\theta \cos(8\pi t) - 3.75 \cdot 10^{52} V \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} \sin \theta \cos^2(8\pi t) + \\
& + 1.064 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t^3 \sin 2\theta + 2.65 \cdot 10^{52} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^3 \sin(8\pi t) + \\
& + 9.17 \cdot 10^{52} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t \sin 2\theta - 8.38 \cdot 10^{53} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 \sin(8\pi t) + \\
& - 1.6 \cdot 10^{54} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} \cos^3 \theta - 1.29 \cdot 10^{55} V^2 a^4 r^5 \sin(8\pi t) - 4.17 \cdot 10^{51} \operatorname{Re}^2 r^{13} t \cos(8\pi t) + \\
& + 5.53 \cdot 10^{49} \operatorname{Re}^2 r^{13} \sin(8\pi t) \cos^2(8\pi t) - 4.58 \cdot 10^{52} V \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} \sin \theta + \\
& - 2.53 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} t^2 \cos \theta \cos 2\theta \cos(8\pi t) + 3.99 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 \cos \theta \cos(8\pi t) + \\
& - 2.62 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re} a^6 \rho r^4 t^3 \sin \theta \cos 2\theta - 5.36 \cdot 10^{54} V^2 \operatorname{Re} a^2 r^9 \cos \theta \sin(8\pi t) + \\
& - 9.525 \cdot 10^{45} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} \cos \theta \cos 2\theta \sin(8\pi t) - 8 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^2 \rho r^{10} \cos \theta \sin^2 \theta + \\
& + 1.26 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t^2 \cos \theta \cos 2\theta \cos(8\pi t) + 7.99 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 \sin^2 \theta \cos \theta + \\
& + 6.83 \cdot 10^{54} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^6 \cos^2 \theta - 7.99 \cdot 10^{53} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 \cos^3 \theta + \\
& + 2.632 \cdot 10^{54} V \operatorname{Re}^2 r^{13} t^2 \sin \theta - 2.11 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^9 t + \\
& + 3.37 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^6 t^2 \cos 2\theta + 1.67 \cdot 10^{52} V \operatorname{Re}^2 r^{13} \sin \theta \cos(8\pi t) + \\
& + 8.42 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} t + 5.11 \cdot 10^{59} V^3 a^6 r^3 t^2 \sin \theta + \\
& - 6.67 \cdot 10^{53} V^4 \operatorname{Re}^2 a^8 \rho^2 r^3 t \cos(8\pi t) + 1.064 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t^3 \sin 2\theta + \\
& + 8.33 \cdot 10^{52} V \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} \sin \theta \cos(8\pi t) + 4.27 \cdot 10^{54} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^4 \cos(8\pi t) + \\
& + 6.74 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^6 t^2 \cos 2\theta \cos(8\pi t) - 4.21 \cdot 10^{55} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^9 t \cos(8\pi t) + \\
& + 6.032 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^4 \sin(8\pi t) - 4.69 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^6 t \cos 2\theta \sin(8\pi t) + \\
& - 1.34 \cdot 10^{55} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t \sin \theta \sin 2\theta \sin(8\pi t) - 1.26 \cdot 10^{56} V^2 \operatorname{Re}^2 a^2 r^{11} t \cos(8\pi t) + \\
& - 1.68 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho r^6 t^2 \cos \theta \cos(8\pi t) + 8.47 \cdot 10^{45} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^5 t^2 \cos 2\theta \sin(8\pi t) + \\
& - 3.68 \cdot 10^{45} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t \cos \theta \cos 2\theta \sin(8\pi t) + 2.51 \cdot 10^{54} V^2 \operatorname{Re}^2 a^4 r^9 \sin(8\pi t) + \\
& + 1.63 \cdot 10^{59} V^4 \operatorname{Re} a^6 \rho r^4 t^3 \cos \theta \sin 2\theta - 1.7 \cdot 10^{60} V^4 a^6 \rho r^2 t^3 \sin 2\theta + \\
& + 6.65 \cdot 10^{46} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t^2 \cos \theta \cos 2\theta - 8.512 \cdot 10^{58} V^6 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^3 r^4 t^5 \sin 2\theta + \\
& + 1.59 \cdot 10^{54} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^5 t \cos 2\theta \cos(8\pi t) + 1.26 \cdot 10^{56} V^3 \operatorname{Re}^2 a^4 \rho r^8 t^2 \cos \theta \cos(8\pi t) + \\
& - 6.37 \cdot 10^{52} V^4 \operatorname{Re}^2 a^6 \rho^2 r^5 \cos 2\theta \sin(8\pi t) \Big]
\end{aligned}$$

(5.81)

$$\begin{aligned}
v_{z2} = L_t^{-1}(A_{3,1}) = & -\frac{1}{\operatorname{Re} r^{11}} \Big[1.89 \cdot 10^{-47} (-1.47 \cdot 10^{25} \operatorname{Re} r^9 t + 1.058 \cdot 10^{28} \operatorname{Re} r^9 t^3 + \\
& + 3.175 \cdot 10^{41} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^4 t^4 \sin \theta \sin 2\theta + 4.445 \cdot 10^{41} V^4 a^6 \rho t^4 + \\
& + 1.98 \cdot 10^{32} V^3 \operatorname{Re} a^2 \rho r^6 t^4 \cos \theta \cos 2\theta - 1.98 \cdot 10^{32} V^3 \operatorname{Re} a^2 \rho r^6 t^4 \sin \theta \sin 2\theta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3.175 \cdot 10^{41} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^4 t^4 \cos \theta \cos 2\theta + 1.185 \cdot 10^{42} V^4 \operatorname{Re} a^6 \rho^2 r t^5 \cos 2\theta + \\
& + 9.737 \cdot 10^{41} V^3 a^4 \rho r^2 t^4 \cos 2\theta + 1.99 \cdot 10^{37} V^2 \operatorname{Re} a^2 \rho r^6 t^2 \sin 2\theta \sin(8\pi t) + \\
& - 6.67 \cdot 10^{36} V \operatorname{Re} a^2 r^7 t \sin \theta \sin(8\pi t) + 3.79 \cdot 10^{27} V \operatorname{Re} r^9 t \sin \theta \sin(8\pi t) + \\
& - 4.763 \cdot 10^{28} V \operatorname{Re} r^9 t^2 \sin \theta + 8.38 \cdot 10^{37} V \operatorname{Re} a^2 r^7 t^2 \sin \theta + \\
& - 8.47 \cdot 10^{41} V^3 \operatorname{Re} a^6 \rho r^2 t^4 \cos \theta - 2.65 \cdot 10^{32} V^2 \operatorname{Re} a^2 r^7 t^3 \cos^2 \theta + \\
& + 5.292 \cdot 10^{41} V^3 \operatorname{Re} a^4 \rho r^4 t^4 \cos \theta + 1.51 \cdot 10^{26} V \operatorname{Re} r^9 \sin \theta \cos(8\pi t) + \\
& + 2.95 \cdot 10^{25} \operatorname{Re} r^9 t \cos^2(8\pi t) - 2.54 \cdot 10^{41} V^4 \operatorname{Re} a^4 \rho^2 r^3 t^5 + 1.235 \cdot 10^{32} V^2 \operatorname{Re} a^2 r^7 t^3 + \\
& - 1.41 \cdot 10^{41} V^2 \operatorname{Re} a^4 r^5 t^3 - 5.22 \cdot 10^{41} V^2 a^4 r^3 t^3 \cos \theta - 8.18 \cdot 10^{41} V^4 \operatorname{Re} a^8 \rho^2 \frac{t^5}{r} + \\
& - 1.41 \cdot 10^{40} V^2 a^2 r^5 t^3 \cos \theta - 5.86 \cdot 10^{23} \operatorname{Re} r^9 \sin(8\pi t) \cos(8\pi t) + \\
& - 1.51 \cdot 10^{26} V \operatorname{Re} r^6 \sin \theta + 2.65 \cdot 10^{35} V \operatorname{Re} a^2 r^7 \sin \theta + \\
& + 2.39 \cdot 10^{36} V^2 \operatorname{Re} a^2 \rho r^6 t \sin 2\theta \cos(8\pi t) - 2.65 \cdot 10^{35} V \operatorname{Re} a^2 r^7 \sin \theta \cos(8\pi t) + \\
& - 9.5 \cdot 10^{34} V^2 \operatorname{Re} a^2 \rho r^6 \sin 2\theta \sin(8\pi t) \Big] \tag{5.82}
\end{aligned}$$

De modo análogo às simulações anteriores, são determinados os três primeiros termos das séries a seguir:

$$v_r = \sum_{n=0}^2 v_{rn} = v_{r0} + v_{r1} + v_{r2}, \tag{5.83}$$

$$v_\theta = \sum_{n=0}^2 v_{\theta n} = v_{\theta 0} + v_{\theta 1} + v_{\theta 2}, \tag{5.84}$$

$$v_z = \sum_{n=0}^2 v_{zn} = v_{z0} + v_{z1} + v_{z2}. \tag{5.85}$$

e a partir destas calcula-se:

$$\Delta p = p - p_\infty = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(1 - \frac{U^2}{V_\infty^2} \right)$$

onde $U^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2$, e como esta expressão fica muito extensa, foi omitida no presente capítulo. A seguir são mostrados alguns gráficos das simulações para o coeficiente de pressão descrito na equação (4.20).

Na figura 5.4, a simulação do coeficiente de pressão foi realizada, considerando-se $r = a = 1$, $V = V_\infty = 1$, $\rho = 1$, $t = 0.1$ e $\operatorname{Re} = 1000$. Já na figuras 5.5 considerou-se $r = a = 1$, $V = V_\infty = 1$, $\rho = 1$, $t = 0.2$ e $\operatorname{Re} = 1000$. Observa-se uma variação no gráfico do coeficiente de pressão no intervalo de tempo considerado, sendo esta variação provocada pela oscilação do cilindro.

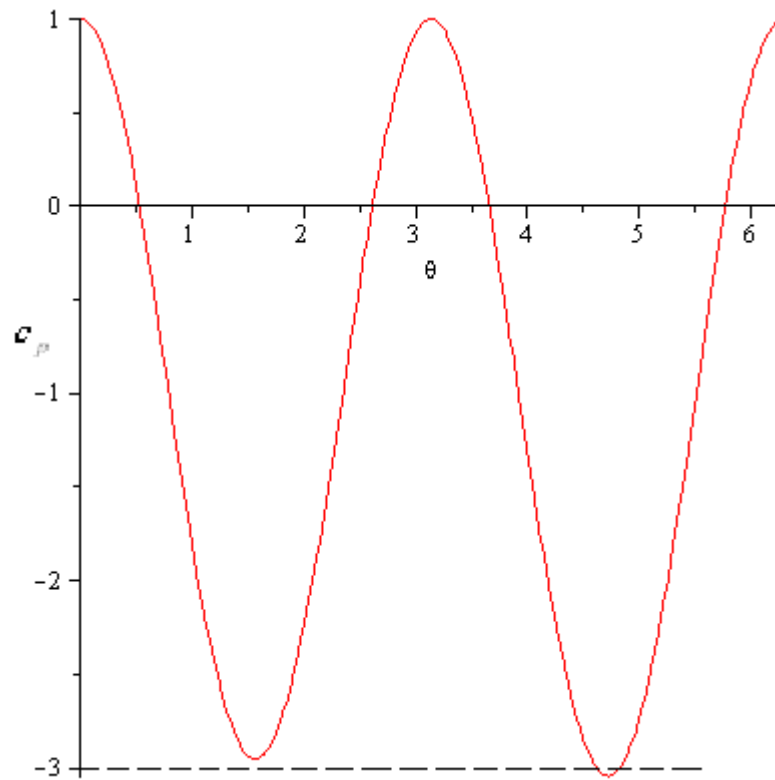


Figura 5.4 Gráfico do coeficiente de pressão para $Re = 1000$ e $t = 0.1$ s.

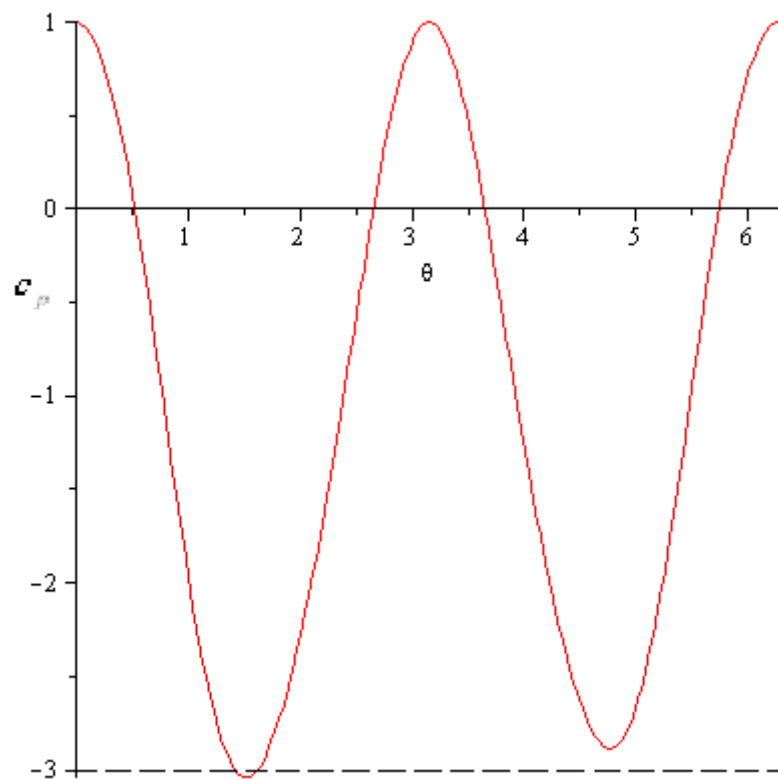


Figura 5.5 Gráfico do coeficiente de pressão para $Re = 1000$ e $t = 0.2$ s.

Note que com o método de Adomian fica mais difícil a obtenção de esteiras turbulentas ou grandes diferenças no c_p , necessitando-se para isto muitos termos na série. O emprego de muitos termos torna o cálculo muito mais complexo.

No próximo capítulo será apresentada a interação entre o fluido e a estrutura, onde a força que o fluido exerce sobre a estrutura flexível será determinada pela integração da diferença de pressão obtida pelo método apresentado no presente capítulo.

CAPÍTULO VI
INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

6. INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Os problemas de interação fluido-estrutura estão presentes em muitas aplicações. A grande maioria destes problemas tem sido analisada a partir de métodos como Elementos Finitos, Diferenças Finitas e Volumes Finitos, que utilizam malhas não estruturadas e exigem elevado custo computacional.

Além disso, os escoamentos ao redor de geometrias complexas representam sérias dificuldades em relação à escolha da malha utilizada para discretizar o domínio contínuo. Assim, diversas técnicas procuram lidar com o problema, empregando malhas que se ajustam a sua topologia, ou vão acompanhando a superfície do corpo a ser estudado, ou se adaptando melhor ao escoamento, melhorando a qualidade da solução. Um dos problemas deste tipo de abordagem é o aumento da complexidade das funções de interpolação geométricas que, além de dificultarem a implementação computacional, encarecem a solução (CAMPREGHER [28]).

No presente trabalho, o problema da interação fluido-estrutura será investigado através do acoplamento da dinâmica do cabo com a solução do escoamento sobre o cilindro. Como a deformação resultante da flexibilidade do cabo pode variar consideravelmente a natureza do escoamento caracterizando um fenômeno de interação fluido-estrutura, é necessário resolver o problema do escoamento e estrutural simultaneamente. O procedimento de solução para este acoplamento consiste em resolver o problema do escoamento obtendo as componentes do vetor força atuante sobre o cabo e, então, determina-se a força que o fluido exerce sobre o cabo com a integração da diferença de pressão, encontrada utilizando-se o Método de Adomian, em cada elemento de área do cilindro, e depois esta força será acoplada na modelagem dinâmica do cabo como uma perturbação externa nos movimentos do mesmo. Esta formulação é apresentada a seguir.

6.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

De acordo com HUGHES e BRIGHTON [55], as forças sobre superfícies submersas podem ser estabelecidas pela integração do produto pressão-área em toda a superfície, para as componentes escalares da equação vetorial:

$$F_x = \int_A p dA_x, \quad F_y = \int_A p dA_y \quad (6.1)$$

Neste trabalho, a estrutura submersa no fluido é um cabo cilíndrico e flexível, que é dividido em três elementos rígidos (elos), conectados por articulações fictícias flexíveis que permitem três movimentos livres independentes, de azimute, de elevação e de torção. Portanto quando este cabo está submerso em um fluido em movimento ocorre a deformação da estrutura, fazendo com que esta deixe de ser perpendicular ao escoamento, tornando-se necessário decompor as componentes v_r , v_θ e v_z , do vetor U , na direção perpendicular a cada elo da estrutura.

O sistema inercial $X_0Y_0Z_0$ é colocado de modo Z_0 aponta para o centro da Terra e Y_0 na mesma direção do escoamento. As forças

$$\vec{F}_1 = F_{x1}\vec{i} + F_{y1}\vec{j}, \quad \vec{F}_2 = F_{x2}\vec{i} + F_{y2}\vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{F}_3 = F_{x3}\vec{i} + F_{y3}\vec{j}, \quad (6.2)$$

que atuam nos centros de massa de cada elo da estrutura, estão representadas na figura 6.1.

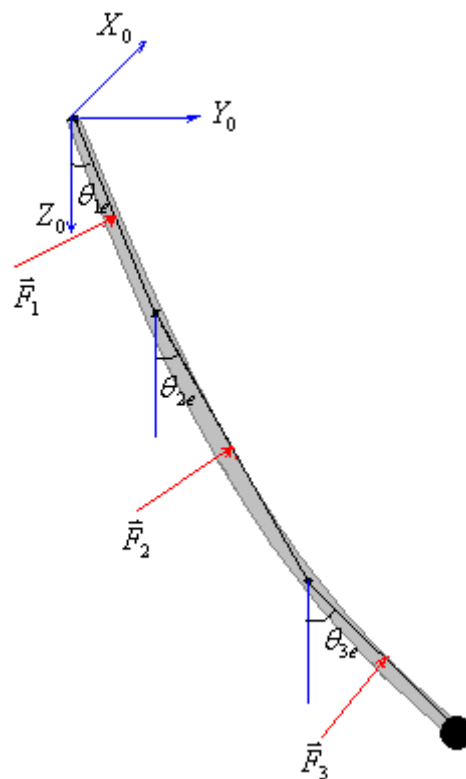


Figura 6.1 Representação das forças que atuam sobre a estrutura flexível submersa

Neste capítulo são consideradas as componentes v_r , v_θ e v_z , do vetor U , conforme as equações (5.73) a (5.84), obtendo-se:

$$v_r = v_{r0} + v_{r1} + v_{r2}, \quad (6.3)$$

$$v_\theta = v_{\theta0} + v_{\theta1} + v_{\theta2}, \quad (6.4)$$

$$v_z = v_{z0} + v_{z1} + v_{z2}. \quad (6.5)$$

Considera-se, então, a decomposição destas componentes nas direções perpendiculares a cada elo do cabo, ou seja:

$$v_r = (v_{r0} + v_{r1} + v_{r2}) \cos \theta_{ie}, \quad i = 1,2,3 \quad (6.6)$$

$$v_\theta = (v_{\theta0} + v_{\theta1} + v_{\theta2}) \cos \theta_{ie}, \quad i = 1,2,3 \quad (6.7)$$

$$v_z = (v_{z0} + v_{z1} + v_{z2}) \sin \theta_{ie}, \quad i = 1,2,3 \quad (6.8)$$

A partir das equações (6.6), (6.7) e (6.8), determina-se a pressão exercida pelo escoamento sobre o cabo através da equação da pressão (5.10) e as forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 que atuam em cada ponto do cilindro são estabelecidas através da integração da diferença de pressão conforme em (6.1), para θ variando de 0 a 2π , sendo estas forças decompostas nas direções x e y e somadas de forma a se obter uma resultante atuando no centro de massa de cada elo do cabo como em (6.2).

Da Física tem-se que o torque é o produto vetorial entre a força aplicada num corpo, \vec{F} , e o braço de alavanca desse corpo, \vec{r} , ou seja:

$$\vec{T} = \vec{F} \times \vec{r} \quad (6.9)$$

Através das forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 determinadas anteriormente e de acordo com as figuras 6.2, 6.3 e 6.4, determinam-se os torques em cada um dos elos do cabo como:

$$\vec{T}_1 = \vec{F}_1 \times \vec{r}_{1c} \quad (6.10)$$

$$\vec{T}_2 = \vec{F}_2 \times (\vec{r}_{2c} - \vec{r}_{2a}) \quad (6.11)$$

$$\vec{T}_3 = \vec{F}_3 \times (\vec{r}_{3c} - \vec{r}_{3a}) \quad (6.12)$$

onde

$$\vec{r}_{1c} = \frac{l}{8} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \vec{i} + \frac{l}{8} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \vec{j} + \frac{l}{8} \cos \theta_{1e} \vec{k} \quad (6.13)$$

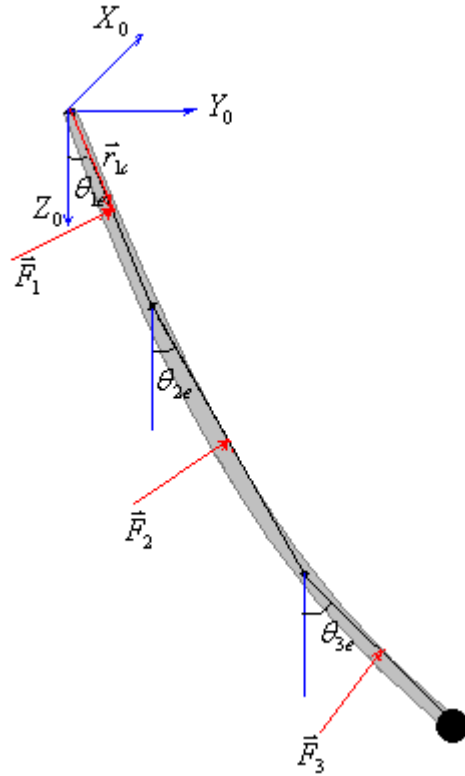


Figura 6.2 Representação do vetor \vec{r}_{1c}

$$\vec{r}_{2a} = \frac{l}{4} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \vec{i} + \frac{l}{4} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \vec{j} + \frac{l}{4} \cos \theta_{1e} \vec{k} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{2c} = & \left[\frac{l}{4} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \frac{l}{4} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \right] \vec{i} + \\ & + \left[\frac{l}{4} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \frac{l}{4} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \right] \vec{j} + \left[\frac{l}{4} \cos \theta_{2e} + \frac{l}{4} \cos \theta_{1e} \right] \vec{k} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\vec{r}_{2c} - \vec{r}_{2a} = \frac{l}{4} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \vec{i} + \frac{l}{4} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \vec{j} + \frac{l}{4} \cos \theta_{2e} \vec{k} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{3a} = & \left[\frac{l}{2} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \frac{l}{4} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \right] \vec{i} + \\ & + \left[\frac{l}{2} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \frac{l}{4} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \right] \vec{j} + \left[\frac{l}{2} \cos \theta_{2e} + \frac{l}{4} \cos \theta_{1e} \right] \vec{k} \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{3c} = & \left[\frac{l}{8} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \frac{l}{2} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \frac{l}{4} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \right] \vec{i} + \\ & + \left[\frac{l}{8} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + \frac{l}{2} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + \frac{l}{4} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} \right] \vec{j} + (6.18) \\ & + \left[\frac{l}{8} \cos \theta_{3e} + \frac{l}{2} \cos \theta_{2e} + \frac{l}{4} \cos \theta_{1e} \right] \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{3c} - \vec{r}_{3a} = \frac{l}{8} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \vec{i} + \frac{l}{8} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \vec{j} + \frac{l}{8} \cos \theta_{3e} \vec{k} \quad (6.19)$$

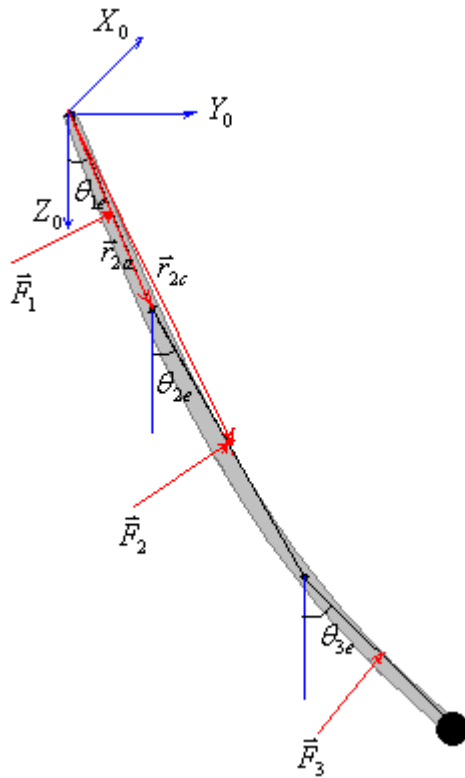


Figura 6.3 Representação dos vetores \vec{r}_{2a} e \vec{r}_{2c}

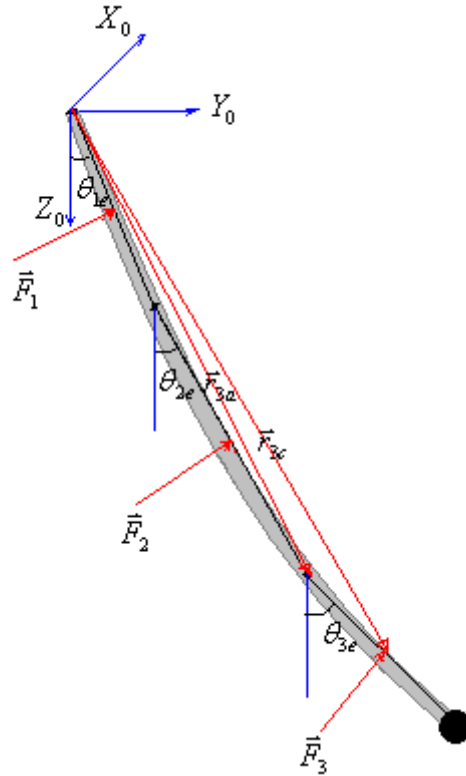


Figura 6.4 Representação dos vetores \vec{r}_{3a} e \vec{r}_{3c}

Considerando-se as equações (6.10), (6.11), (6.12), (6.13), (6.16) e (6.19), obtém-se:

$$\vec{T}_1 = \frac{F_{y1} l}{8} \cos \theta_{1e} \vec{i} - \frac{F_{x1} l}{8} \cos \theta_{1e} \vec{j} + \left(\frac{F_{x1} l}{8} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} - \frac{F_{y1} l}{8} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \right) \vec{k} \quad (6.20)$$

$$\vec{T}_2 = \frac{F_{y2} l}{4} \cos \theta_{2e} \vec{i} - \frac{F_{x2} l}{4} \cos \theta_{2e} \vec{j} + \left[\frac{F_{x2} l}{4} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) - \frac{F_{y2} l}{4} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \right] \vec{k} \quad (6.21)$$

$$\vec{T}_3 = \frac{F_{y3} l}{8} \cos \theta_{3e} \vec{i} - \frac{F_{x3} l}{8} \cos \theta_{3e} \vec{j} + \left[\frac{F_{x3} l}{8} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) - \frac{F_{y3} l}{8} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \right] \vec{k} \quad (6.22)$$

A partir das equações (6.20), (6.21) e (6.22) obtém-se os torques em relação à x , y e z para cada elo do cabo, conforme as equações a seguir.

Os torques nas direções x , y e z , respectivamente, no primeiro elo são:

$$\begin{aligned} T_{1x} &= \frac{F_{y1} l}{8} \cos \theta_{1e} \\ T_{1y} &= -\frac{F_{x1} l}{8} \cos \theta_{1e} \\ T_{1z} &= \frac{F_{x1} l}{8} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} - \frac{F_{y1} l}{8} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \end{aligned} \quad (6.23)$$

no segundo elo são:

$$\begin{aligned} T_{2x} &= \frac{F_{y2} l}{4} \cos \theta_{2e} \\ T_{2y} &= -\frac{F_{x2} l}{4} \cos \theta_{2e} \\ T_{2z} &= \frac{F_{x2} l}{4} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) - \frac{F_{y2} l}{4} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \end{aligned} \quad (6.24)$$

e no terceiro elo são:

$$\begin{aligned} T_{3x} &= \frac{F_{y3} l}{8} \cos \theta_{3e} \\ T_{3y} &= -\frac{F_{x3} l}{8} \cos \theta_{3e} \\ T_{3z} &= \frac{F_{x3} l}{8} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) - \frac{F_{y3} l}{8} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \end{aligned} \quad (6.25)$$

O eixo sobre o qual atua o torque responsável pela elevação é perpendicular à projeção do elo no plano horizontal (reta que marca os ângulos de azimute) e, portanto, observando-se as figuras 6.5 e 6.6, pode-se concluir que os torques em elevação e em azimute são respectivamente:

$$\begin{aligned} T_{\theta_e} &= T_x \cos \theta_a - T_y \sin \theta_a \\ T_{\theta_a} &= T_z \end{aligned} \quad (6.26)$$

Aplicando-se (6.26) para todos os elos obtém-se os torques em elevação e em azimute para o primeiro, segundo e terceiro elo, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} T_{\theta_{1e}} &= T_{1x} \cos \theta_{1a} - T_{1y} \sin \theta_{1a} \\ T_{\theta_{1a}} &= T_{1z} \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} T_{\theta_{2e}} &= T_{2x} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) - T_{2y} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \\ T_{\theta_{2a}} &= T_{2z} \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} T_{\theta_{3e}} &= T_{3x} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) - T_{3y} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \\ T_{\theta_{3a}} &= T_{3z} \end{aligned} \quad (6.29)$$

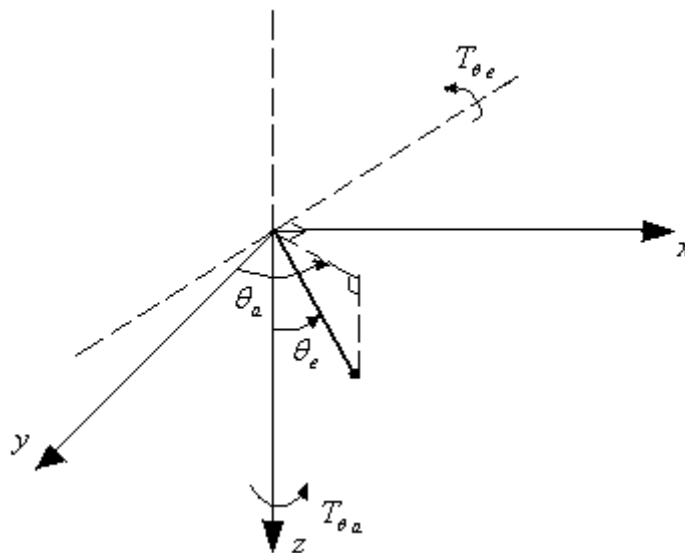


Figura 6.5 Representação espacial dos torques

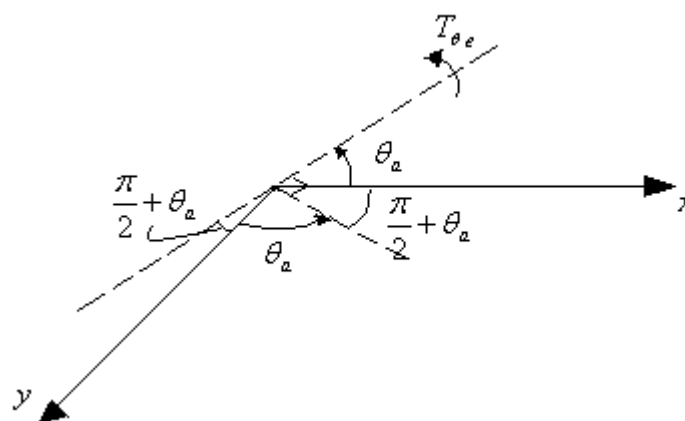


Figura 6.6 Representação dos torques no plano

Substituindo-se (6.23) em (6.27) resulta:

$$\begin{aligned} T_{\theta_{1e}} &= \frac{F_{y_1} l}{8} \cos \theta_{1e} \cos \theta_{1a} + \frac{F_{x_1} l}{8} \cos \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \\ T_{\theta_{1a}} &= \frac{F_{x_1} l}{8} \sin \theta_{1e} \cos \theta_{1a} - \frac{F_{y_1} l}{8} \sin \theta_{1e} \sin \theta_{1a} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Substituindo-se (6.24) em (6.28), obtém-se:

$$\begin{aligned} T_{\theta_{2e}} &= \frac{F_{y_2} l}{4} \cos \theta_{2e} \cos \theta_{2a} + \frac{F_{x_2} l}{4} \cos \theta_{2e} \sin \theta_{2a} \\ T_{\theta_{2a}} &= \frac{F_{x_2} l}{4} \sin \theta_{2e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) - \frac{F_{y_2} l}{4} \sin \theta_{2e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) \end{aligned} \quad (6.31)$$

e substituindo-se (6.25) em (6.29), tem-se:

$$\begin{aligned} T_{\theta_{3e}} &= \frac{F_{y_3} l}{8} \cos \theta_{3e} \cos \theta_{3a} + \frac{F_{x_3} l}{8} \cos \theta_{3e} \sin \theta_{3a} \\ T_{\theta_{3a}} &= \frac{F_{x_3} l}{8} \sin \theta_{3e} \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) - \frac{F_{y_3} l}{8} \sin \theta_{3e} \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) \end{aligned} \quad (6.32)$$

Após a determinação dos torques, resolve-se o sistema (2.40) apresentado no Capítulo 2, como segue:

$$\dot{\vec{X}} = P(\vec{X})\vec{X} + \vec{F}(\vec{X}) + \vec{\Gamma} \quad (6.33)$$

onde

$$P(\vec{X}) = \begin{bmatrix} [0]_{9 \times 9} & [1]_{9 \times 9} \\ -[I(\vec{X})]^{-1} K & -[I(\vec{X})]^{-1} C \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$\vec{F}(\vec{X}) = \begin{bmatrix} [0]_{9 \times 1} \\ -[I(\vec{X})]^{-1} \vec{f}(\vec{X}) \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

$$\vec{\Gamma} = \begin{bmatrix} [0]_{9 \times 1} \\ [I(\vec{X})]^{-1} \vec{T}_m \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$$\vec{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \ x_{15} \ x_{16} \ x_{17} \ x_{18}]^T \quad (6.37)$$

Conforme apresentado no Capítulo 2, as componentes do vetor \vec{X} são:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \theta_{1e}, & x_2 &= \theta_{2e}, & x_3 &= \theta_{3e}, \\
 x_4 &= \theta_{1a}, & x_5 &= \theta_{2a}, & x_6 &= \theta_{3a}, \\
 x_7 &= \theta_{1T}, & x_8 &= \theta_{2T}, & x_9 &= \theta_{3T}, \\
 x_{10} &= \dot{\theta}_{1e}, & x_{11} &= \dot{\theta}_{2e}, & x_{12} &= \dot{\theta}_{3e}, \\
 x_{13} &= \dot{\theta}_{1a}, & x_{14} &= \dot{\theta}_{2a}, & x_{15} &= \dot{\theta}_{3a}, \\
 x_{16} &= \dot{\theta}_{1T}, & x_{17} &= \dot{\theta}_{2T}, & x_{18} &= \dot{\theta}_{3T}
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

onde $\theta_{1e}, \theta_{2e}, \theta_{3e}$ são os ângulos de elevação, $\theta_{1a}, \theta_{2a}, \theta_{3a}$ são os ângulos de azimute e $\theta_{1T}, \theta_{2T}, \theta_{3T}$ são os ângulos de torção nas articulações 1,2 e 3, respectivamente. O vetor $\vec{\Gamma}$ contém os torques em elevação e azimute, que são componentes do vetor \vec{T}_m , conforme apresentado no Capítulo 2 por:

$$\begin{aligned}
 T_{m1} &= T_{\theta_{1e}}; T_{m2} = T_{\theta_{2e}}; T_{m3} = T_{\theta_{3e}}; \\
 T_{m4} &= T_{\theta_{1a}}; T_{m5} = T_{\theta_{2a}}; T_{m6} = T_{\theta_{3a}}; \\
 T_{m7} &= T_{\theta_{1T}}; T_{m8} = T_{\theta_{2T}}; T_{m9} = T_{\theta_{3T}}
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

A seguir são apresentados os resultados das simulações com a interação fluido-estrutura.

6.2 RESULTADOS

Nesta seção serão apresentadas algumas simulações com a dinâmica de cabos submersos na água em um escoamento permanente com número de Reynolds $Re = 1000$ e velocidade na corrente livre $V_\infty = V = 3m/s$.

Do mesmo modo como no Capítulo 3, considerou-se um cabo com 0.02m de diâmetro e 3.2m de comprimento, com uma extremidade fixa a um corpo sem movimento e outra extremidade livre, na qual se considera uma massa de 0.5kg, cujos parâmetros constantes elásticas e constantes de atrito são conhecidos.

As forças resultantes que atuam nos centros de massa de cada elo do cabo são decompostas nas direções X e Y , como em (6.2). As figuras 6.7 e 6.8 apresentam uma simulação das forças nas direções X (transversal ao escoamento) e Y (mesma direção do escoamento), considerando-se inicialmente o cabo perpendicular ao escoamento, com um passo de integração 0.0005s, num intervalo de tempo de 0 a 0.4s. Este passo de integração reduzido foi utilizado de forma a facilitar a convergência do processo analítico de obtenção das forças oriundas da interação do fluido com a estrutura. Observa-se que as forças na direção transversal ao escoamento apresentam oscilações e, portanto, devem provocar oscilações na estrutura flexível com frequências de acordo com a imposta pelo número de Strouhal, conforme apresentado no Capítulo 5. Já as forças na direção do escoamento não apresentam oscilações significativas e são praticamente constantes.

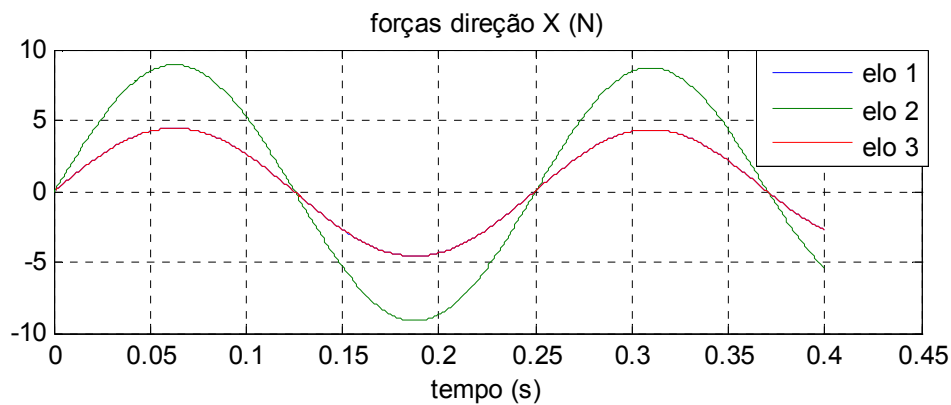


Figura 6.7 Forças na direção X (transversal ao escoamento).

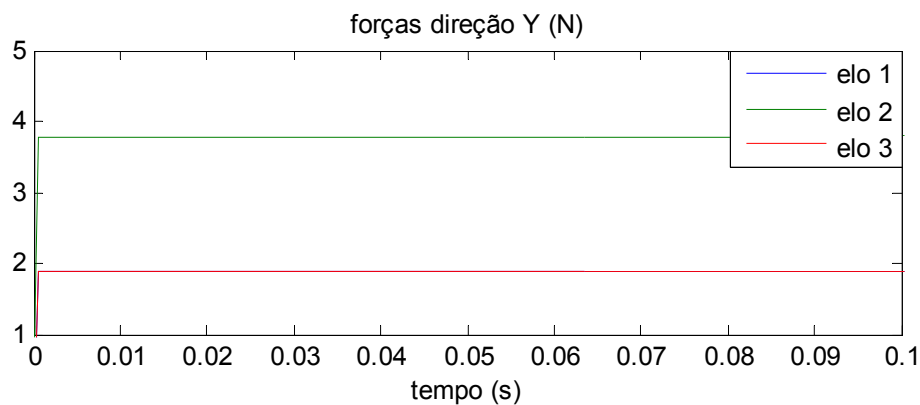


Figura 6.8 Forças na direção Y (mesma direção do escoamento).

Nas simulações a seguir explora-se o fenômeno da interação entre o fluido com a estrutura submersa. Conforme se observa na figura 6.7, as forças na direção X obtidas para o intervalo de tempo de 0 a 0.4s através da solução analítica do escoamento têm o comportamento de uma senóide. Na solução analítica do escoamento não foi possível aproximar as componentes v_r, v_θ e v_z com muitos termos. Então, considera-se para as forças transversais, aplicadas nos centros de massa de cada elo, aproximações por senóides de mesma amplitude e frequência das obtidas pela solução analítica.

A partir das forças nas direções X e Y , foram calculados os torques apresentados nas equações (6.30), (6.31) e (6.32), que entraram como componentes do vetor \vec{T}_m em (6.36).

As simulações apresentadas nas figuras (6.9) a (6.12) foram realizadas com o vetor de estado inicial

$$\vec{X} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

com todas as coordenadas de posição e velocidade nulas e passo de integração 0.005s.

Após a obtenção analítica das forças, a dinâmica do cabo por ser mais lenta permite que se trabalhe com um passo de integração 0.005s. Este passo de integração equivale a se utilizar uma frequência de discretização de 200Hz, que é maior do que a maior frequência da dinâmica própria estrutural. As simulações foram realizadas com um tempo total de 24s, o suficiente para que a dinâmica do cabo se estabilize no estado estacionário final.

A figura 6.9 mostra a posição angular em elevação para cada elo, considerando-se o cabo submerso em água, submetido a um escoamento permanente nos primeiros 12s, sendo este fluxo desligado nos próximos 12s. Observa-se que os movimentos dos ângulos de elevação se estabilizam rapidamente fora da origem quando o cabo está sob o fluxo do fluido e na origem quando o fluxo de fluido é desligado.

A figura 6.10 mostra a posição angular em azimute para cada elo, também com o cabo submerso em água e sob as mesmas condições do escoamento da figura 6.9. Verifica-se que os ângulos de azimute apresentam vibrações de alta frequência em torno da origem quando o cabo está sob o fluxo do fluido, pois os ângulos de azimute sofrem

perturbação em relação à força transversal ao escoamento. Estas vibrações se estabilizam quando o fluxo de fluido é desligado.

A figura 6.11 apresenta os torques em elevação e a figura 6.12 os torques em azimute para cada elo. Os torques em azimute apresentam flutuações de mais alta frequência em razão das forças de natureza oscilatória que surgem na direção transversal ao escoamento.

As simulações apresentadas nas figuras 6.13 a 6.17 foram realizadas com o vetor de estado inicial

$$\vec{X} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

com 0.1rad para cada coordenada de posição em azimute, com as coordenadas de posição em elevação e torção nulas, com todas as velocidades nulas e com passo de integração $0.005s$, considerando-se o cabo submerso em água, submetido a um escoamento permanente nos primeiros $12s$, sendo este fluxo desligado nos próximos $12s$.

A figura 6.13 mostra a posição angular em elevação para cada elo e, neste caso, observa-se que os movimentos dos ângulos de elevação se estabilizam fora da origem quando o cabo está sob o fluxo do fluido e na origem quando o fluido é desligado. Na figura 6.14 apresenta-se uma ampliação da figura 6.13 para o terceiro elo, onde se constata uma perturbação com oscilações de pequenas amplitudes nos ângulos de elevação quando o cabo está sob o fluxo do fluido.

A figura 6.15 mostra a posição angular em azimute para cada elo, sendo que, neste caso, observa-se uma diferença em relação aos resultados da simulação obtida na figura 6.10 devida à mudança nas condições iniciais nas posições em azimute, que no presente caso não são todas nulas. Entretanto, os ângulos de azimute oscilam em torno da origem, mantendo vibrações de pequenas amplitudes quando o cabo está submetido ao fluxo do fluido e estas se estabilizam na origem quando o fluxo é desligado. Na figura 6.16 tem-se uma ampliação da figura 6.15.

A figura 6.17 apresenta os torques em elevação e em azimute para cada elo e, neste caso, constata-se que à medida que os ângulos de azimute crescem, vão aparecendo flutuações de mais alta frequência nos torques em elevação, sendo que estas flutuações desaparecem quando os ângulos de azimute se estabilizam na origem.

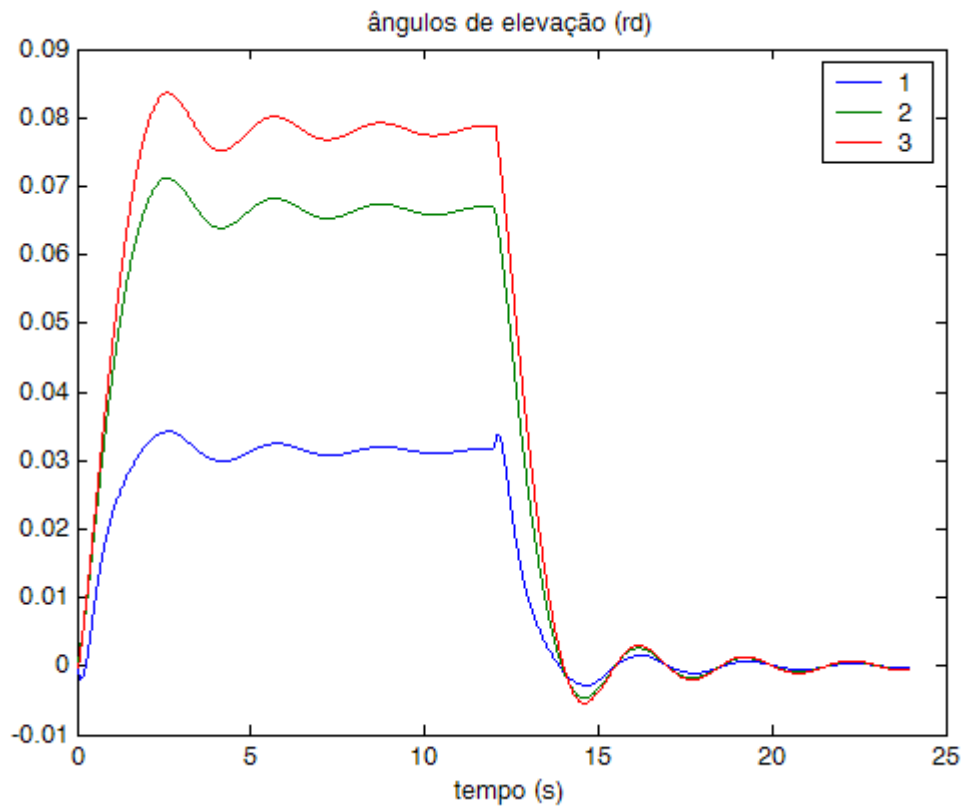


Figura 6.9 Posição angular em elevação para cada elo.

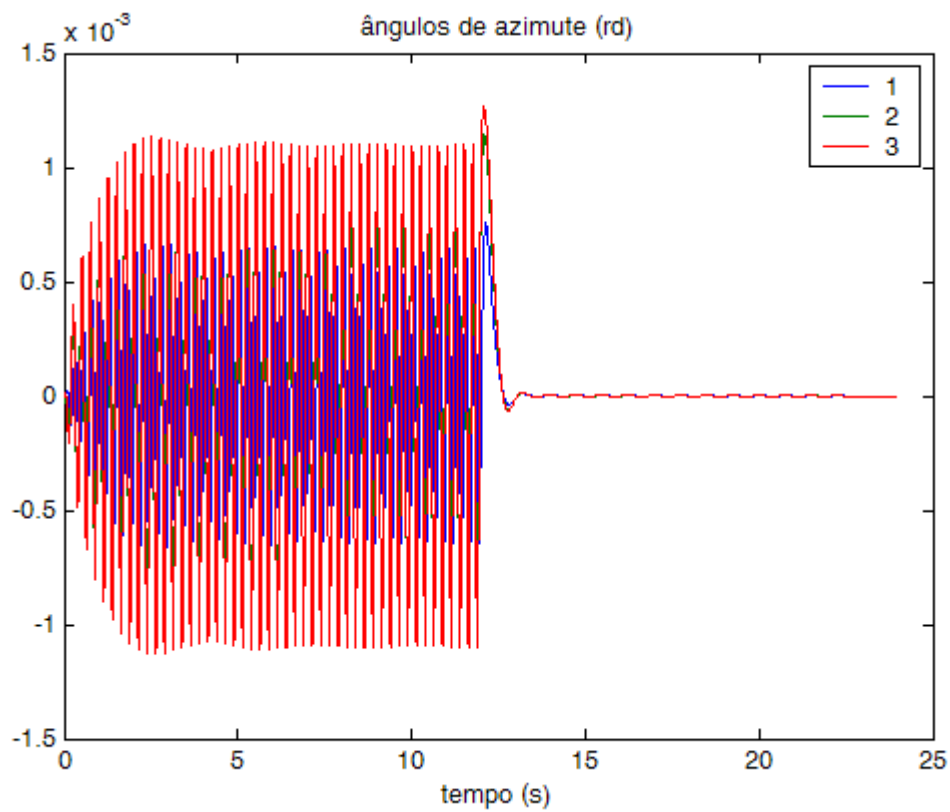


Figura 6.10 Posição angular em azimute para cada elo.

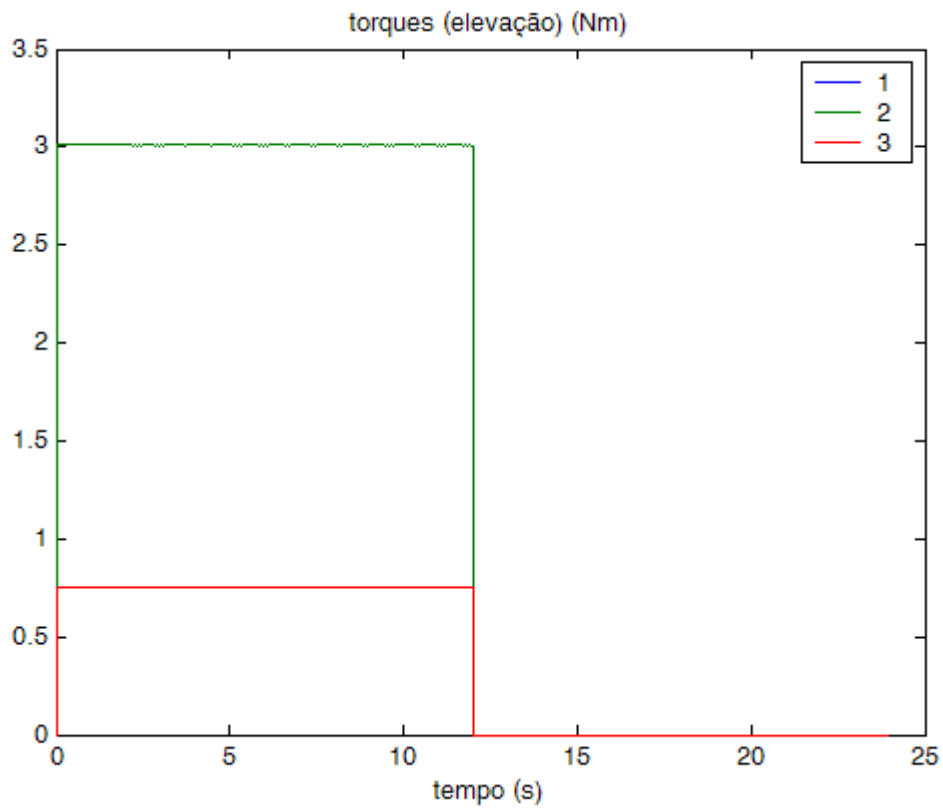


Figura 6.11 Torques em elevação para cada elo

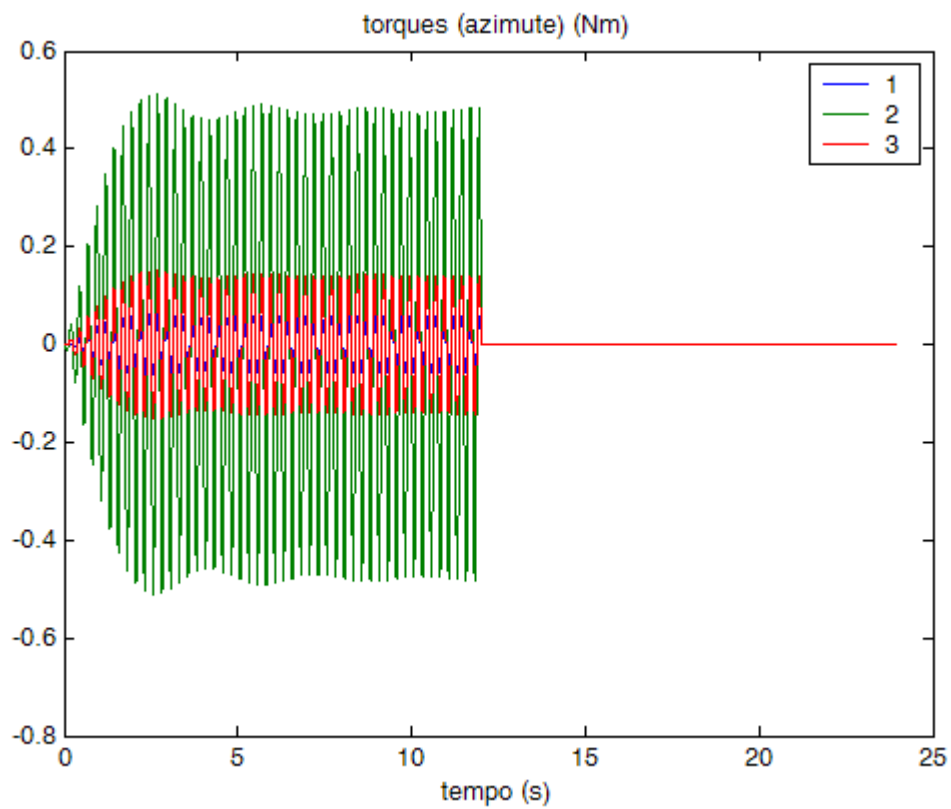


Figura 6.12 Torques em azimute para cada elo.

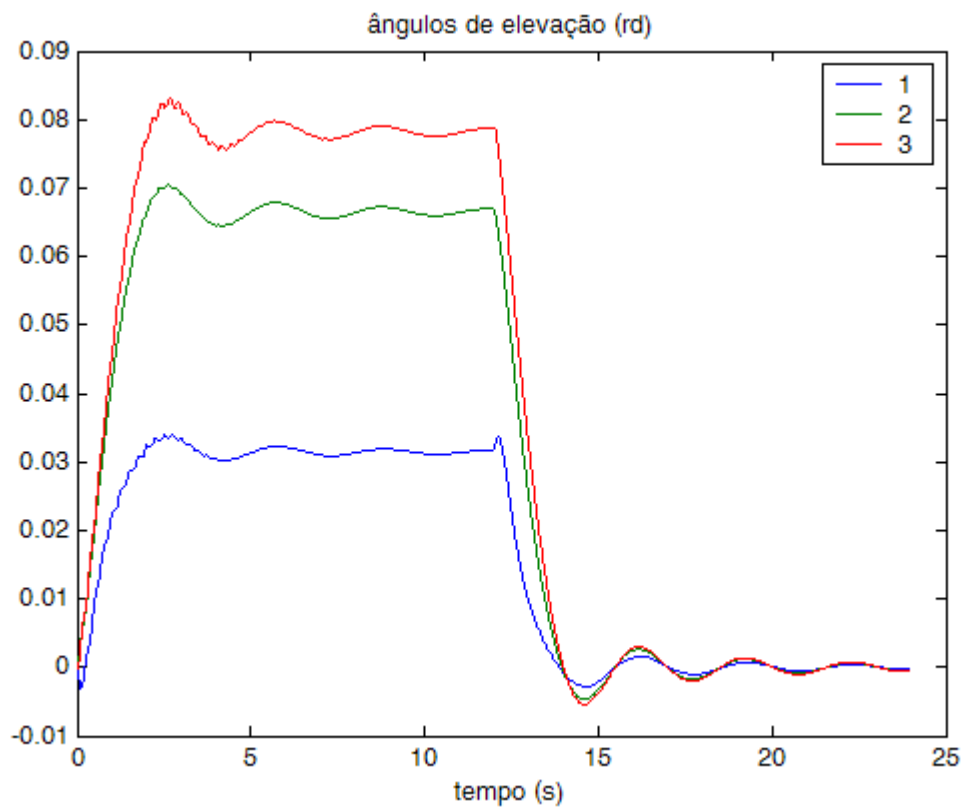


Figura 6.13 Posição angular em elevação para cada elo.

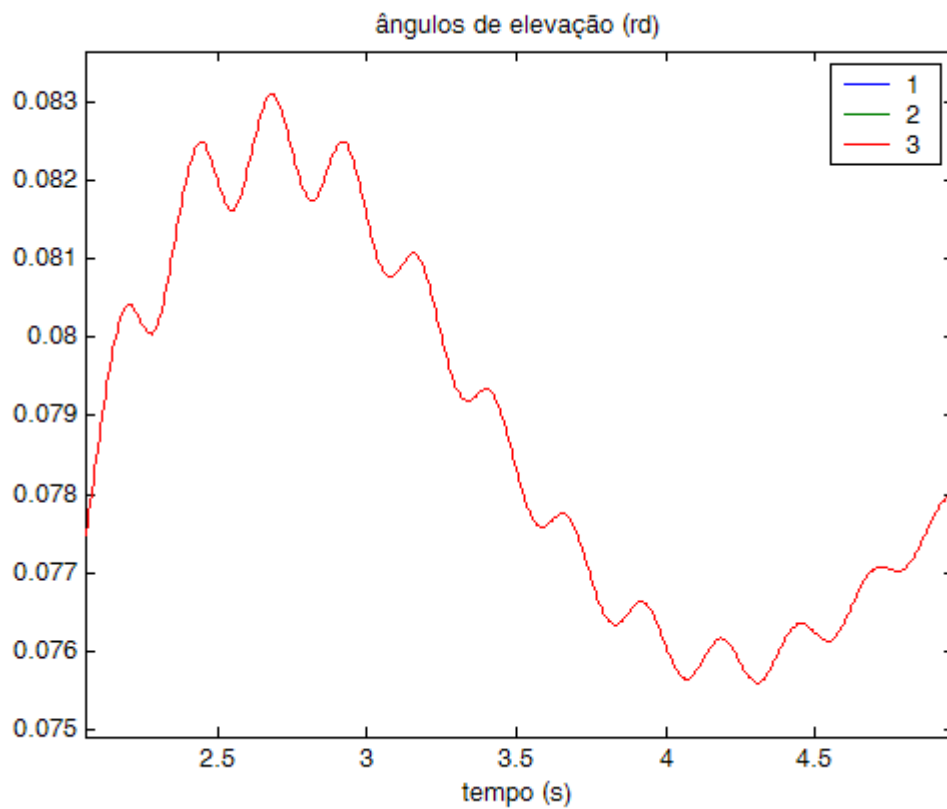


Figura 6.14 Posição angular em elevação para o terceiro elo (ampliação).

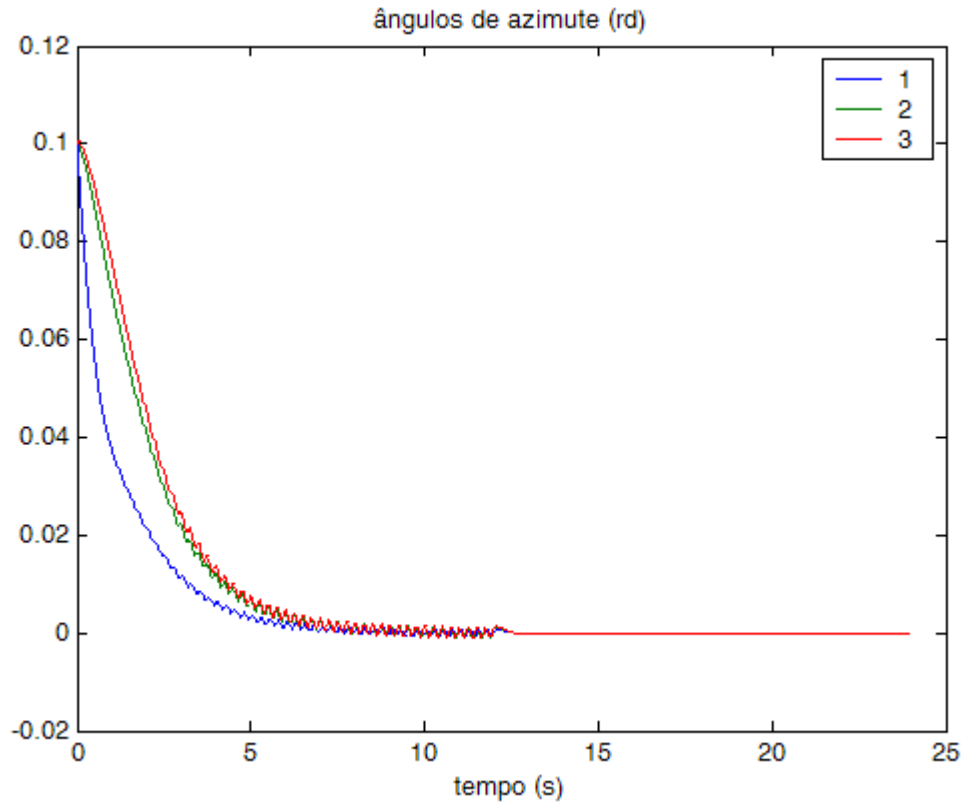


Figura 6.15 Posição angular em azimute para cada elo.

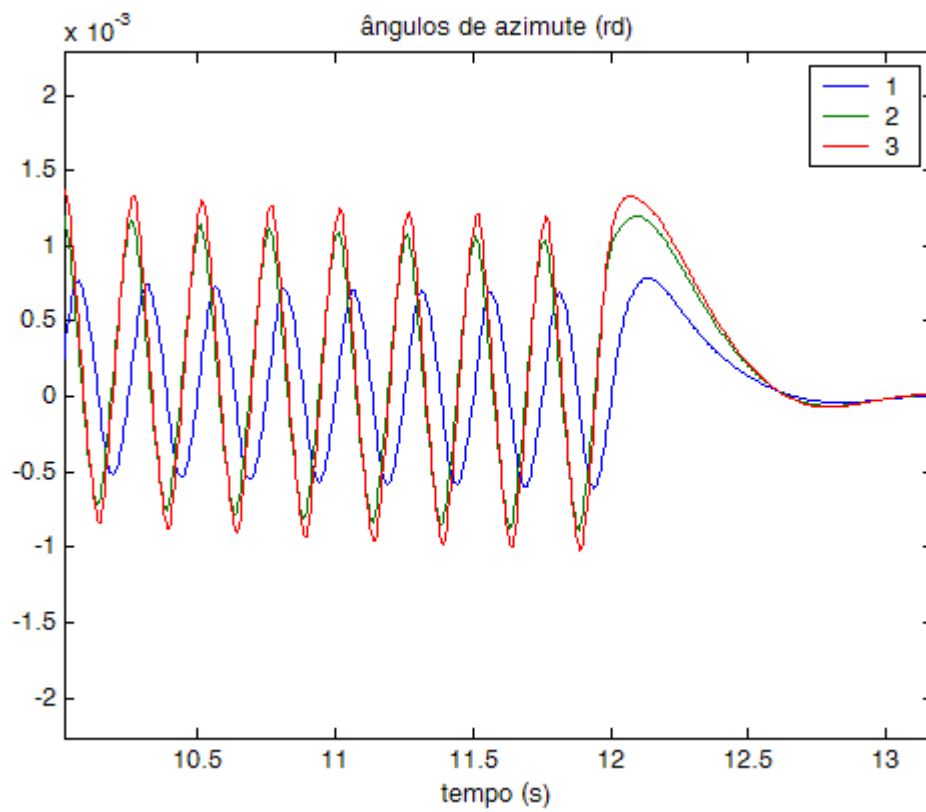


Figura 6.16 Posição angular em azimute para cada elo (ampliação).

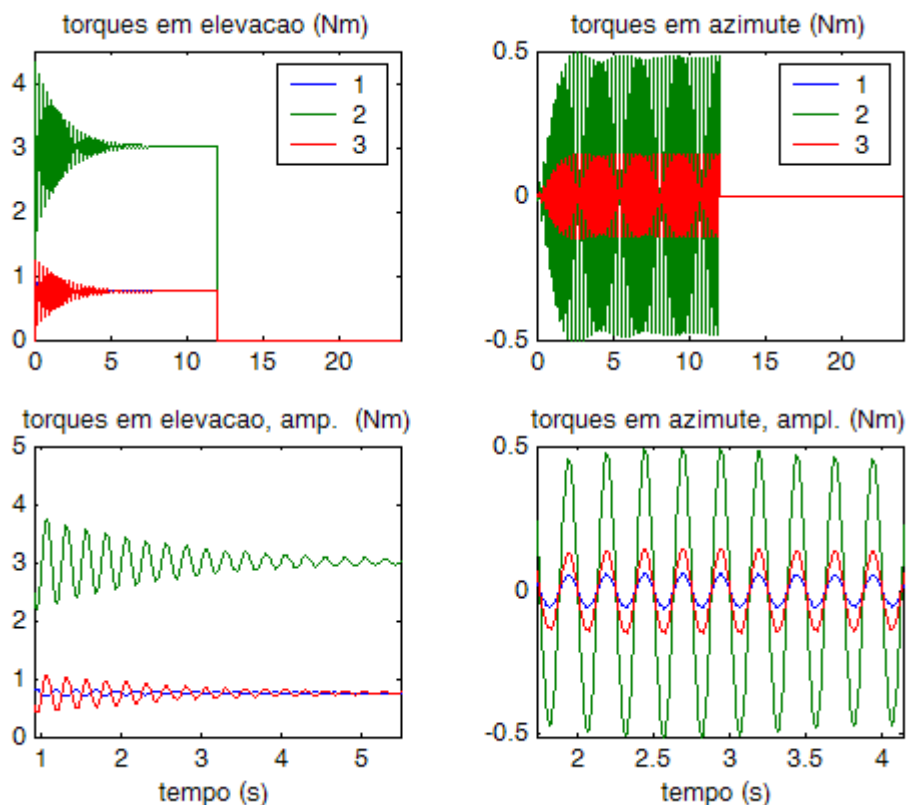


Figura 6.17 Torques em elevação e em azimute para cada elo.

Nas figuras 6.18 a 6.23 considera-se o escoamento permanente nos 24s, com os elementos do vetor de estado inicial todos nulos e com um passo de integração igual a 0.005s.

A figura 6.18 mostra a posição em elevação em cada elo e observa-se que o regime permanente só se estabelece após aproximadamente 20s de simulação.

A figura 6.19 mostra a posição angular em azimute em cada elo e neste caso aparecem vibrações de alta frequência em relação aos ângulos de azimute causadas pela interação com o fluido.

A figura 6.20 apresenta os torques em elevação para cada elo e a figura 6.21 mostra os torques em azimute para cada elo, onde novamente verificam-se oscilações de alta frequência, com amplitudes maiores para o segundo elo.

As figuras 6.22 e 6.23 apresentam o movimento espacial da carga. Observa-se que a extremidade do cabo saiu da posição inicial ($x = 0$, $y = 0$ e $z = 3.2m$ (comprimento do cabo)), mas não se estabiliza em uma posição final, permanecendo sempre oscilando, pois neste caso o cabo está sob o escoamento durante todos os 24s de simulação.

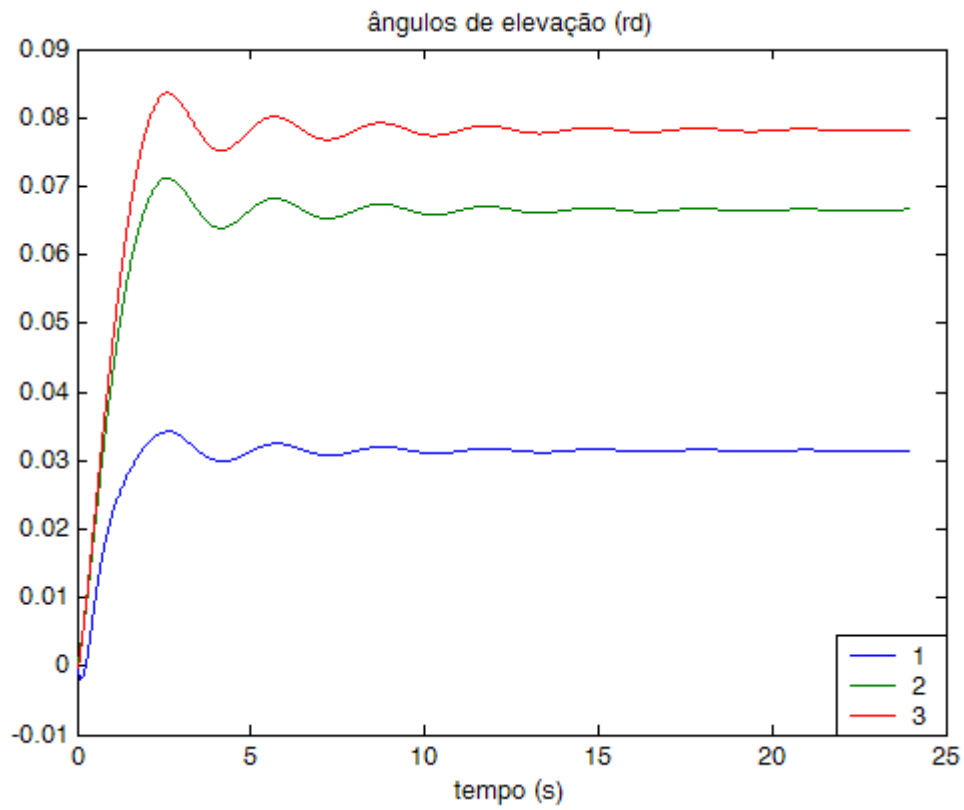


Figura 6.18 Posição angular em elevação para cada elo.

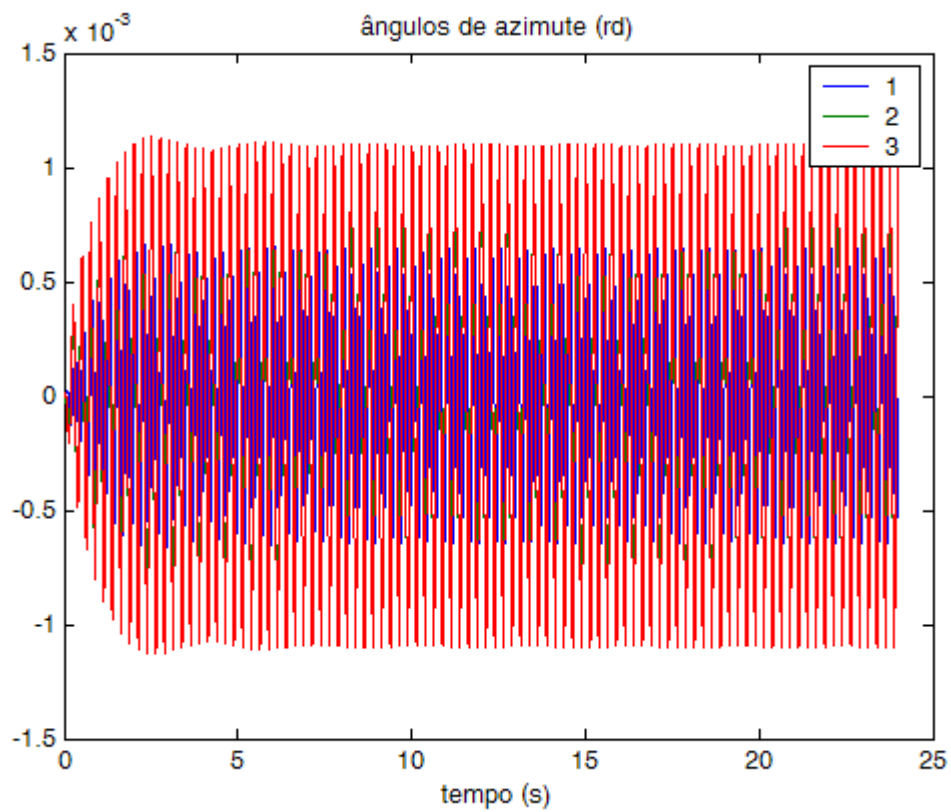


Figura 6.19 Posição angular em azimute para cada elo.

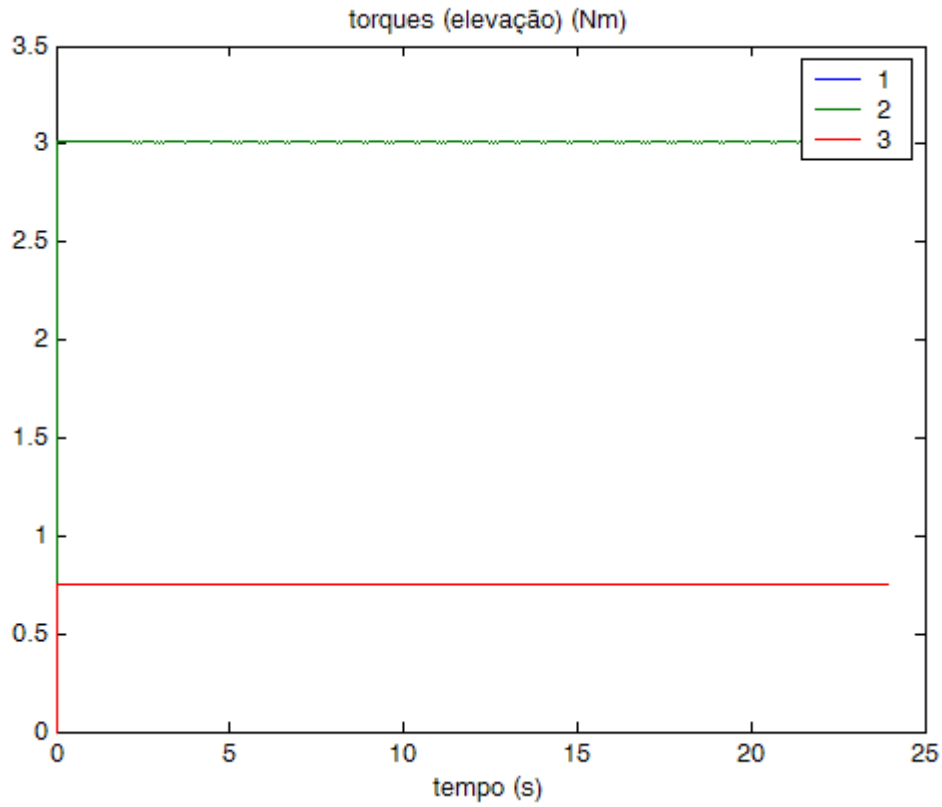


Figura 6.20 Torques em elevação para cada elo.

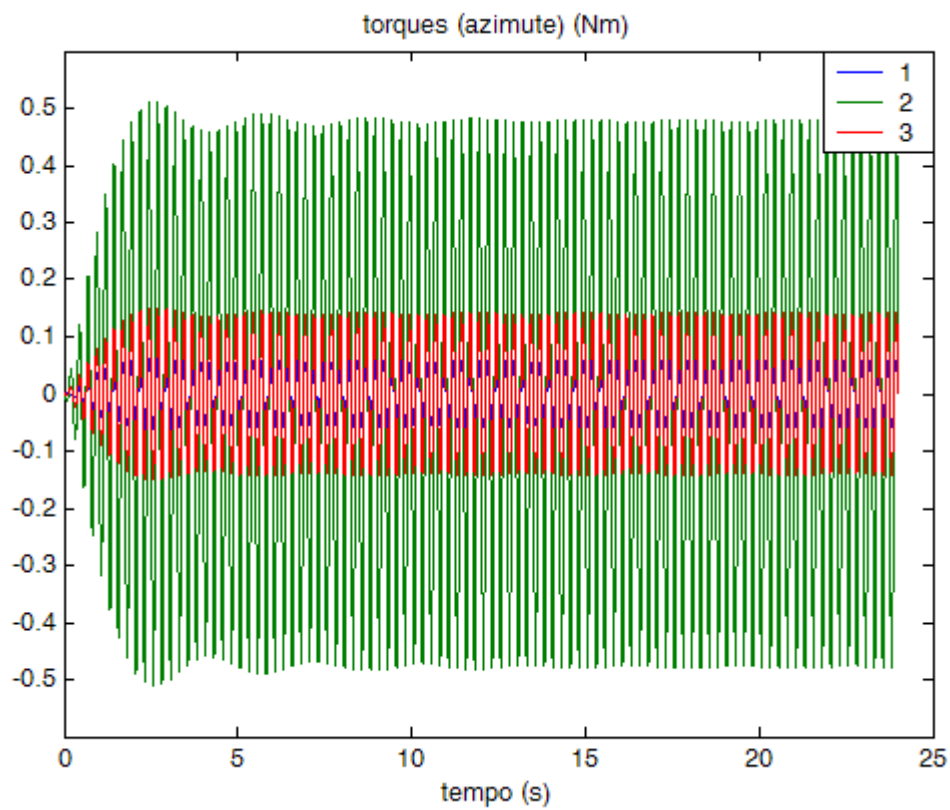


Figura 6.21 Torques em azimute para cada elo.

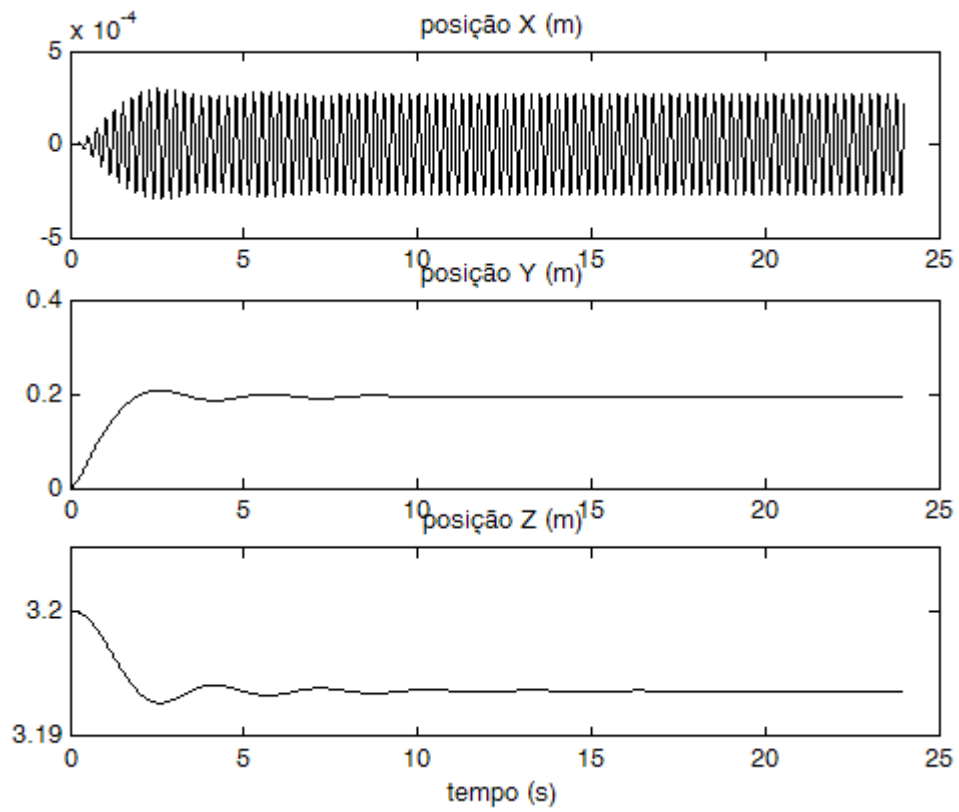


Figura 6.22 Posição da carga.

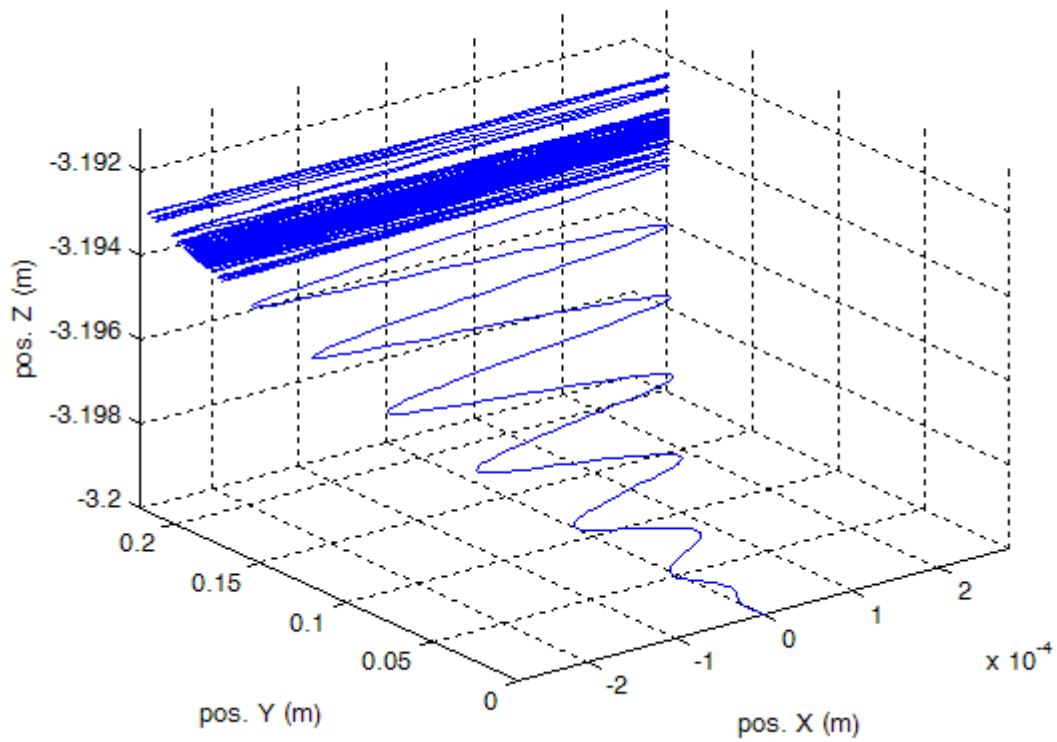


Figura 6.23 Movimento espacial da carga.

As simulações apresentadas nas figuras 6.24 a 6.27 foram realizadas com o vetor de estado inicial

$$\bar{X} = [0.1 \quad -0.1 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Considera-se $0.1rad$ para a primeira e a terceira coordenada de posição em elevação, $-0.1rad$ para a segunda coordenada de posição em elevação, com as coordenadas de posição em azimute e torção nulas, com todas as velocidades nulas e com passo de integração $0.005s$ e com o cabo submerso sob escoamento permanente nos 24s.

A figura 6.24 apresenta a posição angular em elevação para cada elo, onde se verifica o transitório das posições em elevação. Como neste caso o cabo encontra-se submerso em um fluxo permanente de fluido, as oscilações se estabilizam fora da origem. A figura 6.25 apresenta a posição angular em azimute para cada elo e neste caso verifica-se que não houve quase alteração em relação à simulação feita na figura 6.19. Isto ocorre devido à condição do vetor de estado inicial também ter as coordenadas de posição em azimute todas nulas. A figura 6.26 mostra os torques em elevação para cada elo e a figura 6.27 mostra os torques em azimute para cada elo.

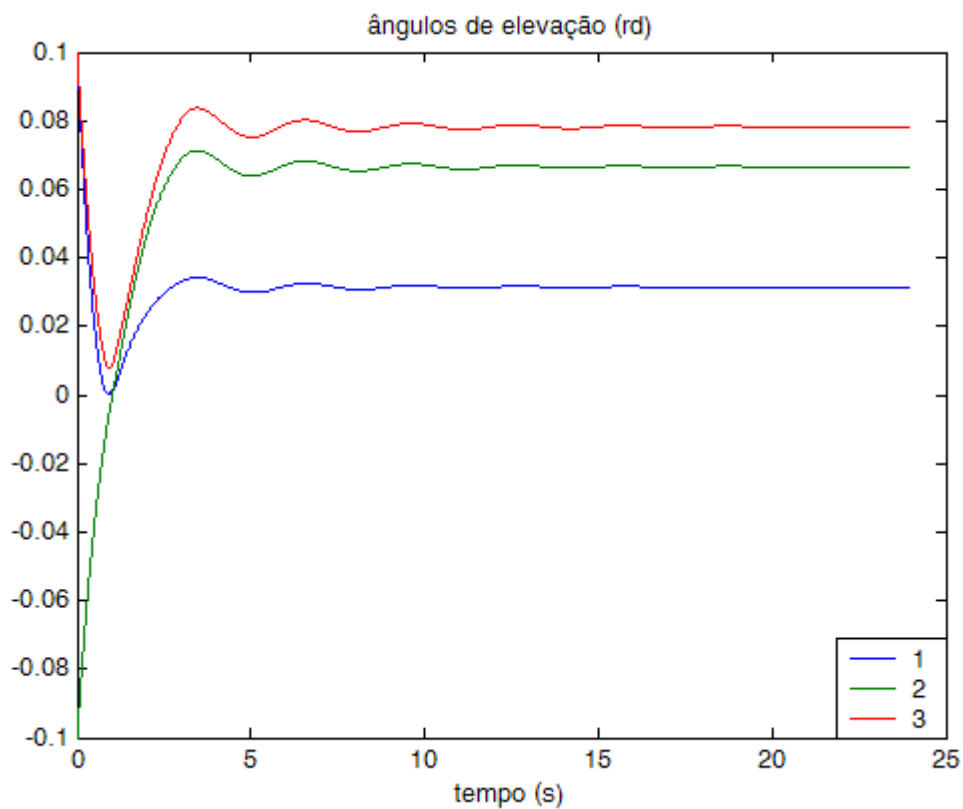


Figura 6.24 Posição angular em elevação para cada elo.

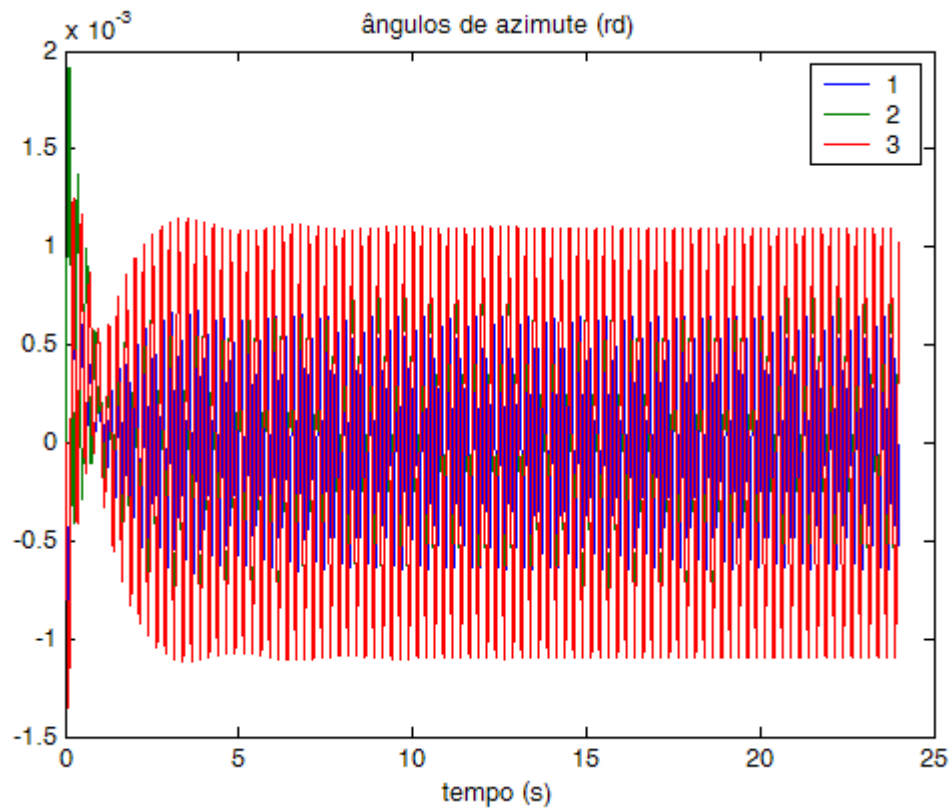


Figura 6.25 Posição angular em azimute para cada elo.

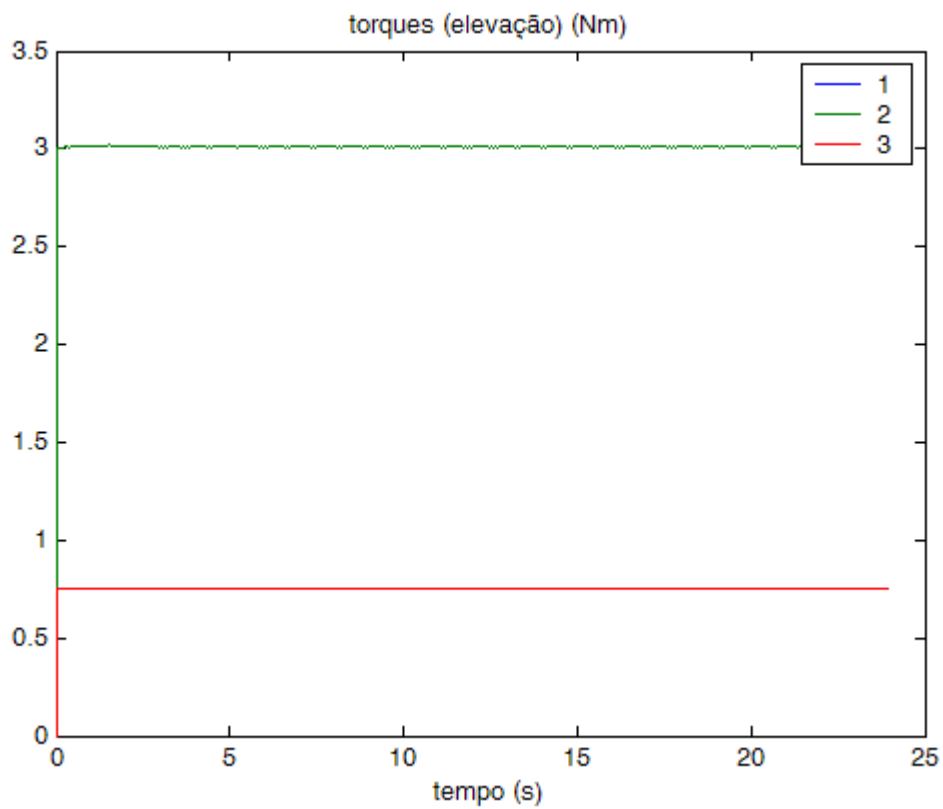


Figura 6.26 Torques em elevação para cada elo.

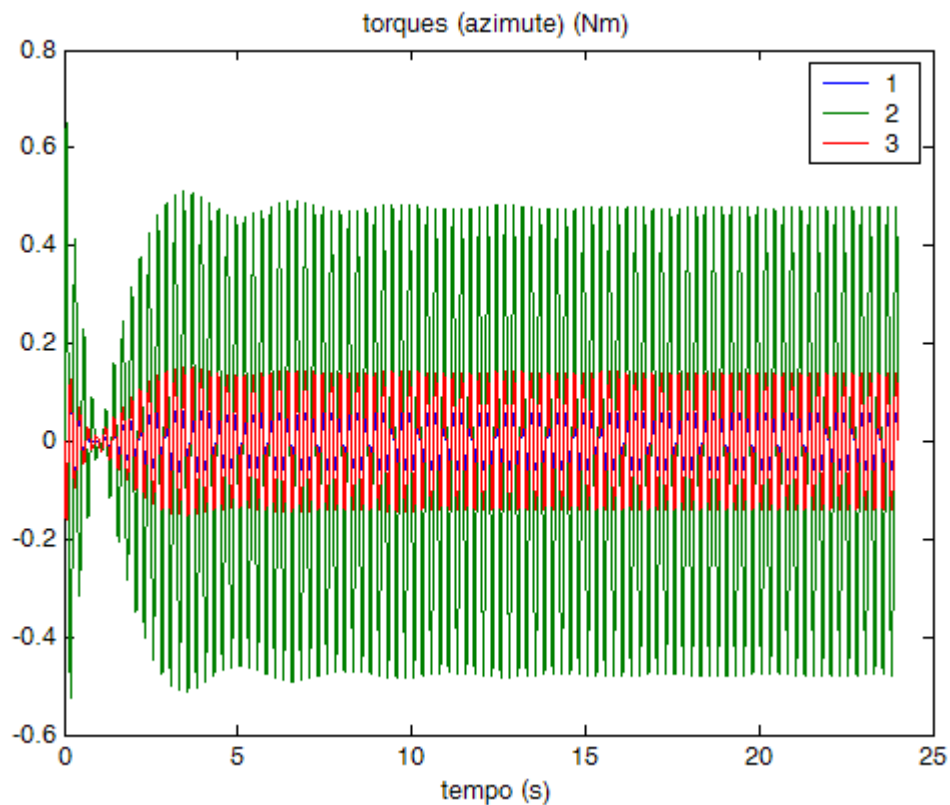


Figura 6.27 Torques em azimute para cada elo.

As simulações apresentadas nas figuras 6.28 a 6.33 foram realizadas com o vetor de estado inicial

$$\vec{X} = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Considera-se 0.1 rad para todas as coordenadas de posição em elevação e em azimute e todas as coordenadas de posição em torção e todas as velocidades nulas, com passo de integração 0.005 s e com o cabo submerso sob um escoamento permanente nos 24s.

A figura 6.28 apresenta a posição angular em elevação para cada elo, onde se verificam as vibrações a exemplo dos casos anteriores, quando os ângulos de azimute não são nulos. Verifica-se ainda que os ângulos se estabilizam fora da origem, pois neste caso o cabo encontra-se submerso em um fluxo permanente de fluido.

A figura 6.29 apresenta a posição angular em azimute para cada elo e neste caso verifica-se que não houve quase alteração em relação à simulação feita na figura 6.15. Isto ocorre devido à condição do vetor de estado inicial também ter as coordenadas de posição em azimute todas iguais a 0.1 rad .

A figura 6.30 mostra os torques em elevação para cada elo e a figura 6.31 mostra os torques em azimute para cada elo, onde se verifica que os torques são maiores no segundo elo, pois este tem o comprimento duas vezes maior do que os comprimentos do primeiro e do terceiro elos.

As figuras 6.32 e 6.33 apresentam o movimento espacial da carga. Observa-se que a extremidade do cabo sai da posição inicial e não se estabiliza em uma posição final, permanecendo sempre oscilando, pois neste caso o cabo está sob o escoamento durante todos os 24s de simulação.

Nesta seção foram apresentados alguns resultados importantes do presente trabalho. Colocou-se em evidência o cabo flexível submerso em um fluido com escoamento permanente e também foi considerado o caso em que o cabo está submerso num fluxo de fluido nos primeiros 12s e a partir destes 12s iniciais o fluxo é interrompido.

A seguir são apresentadas as simulações para um caso mais específico, considerando o cabo mais rígido com o objetivo de comparar os resultados das simulações com o resultado analítico obtido para uma viga com flexibilidade espacial.

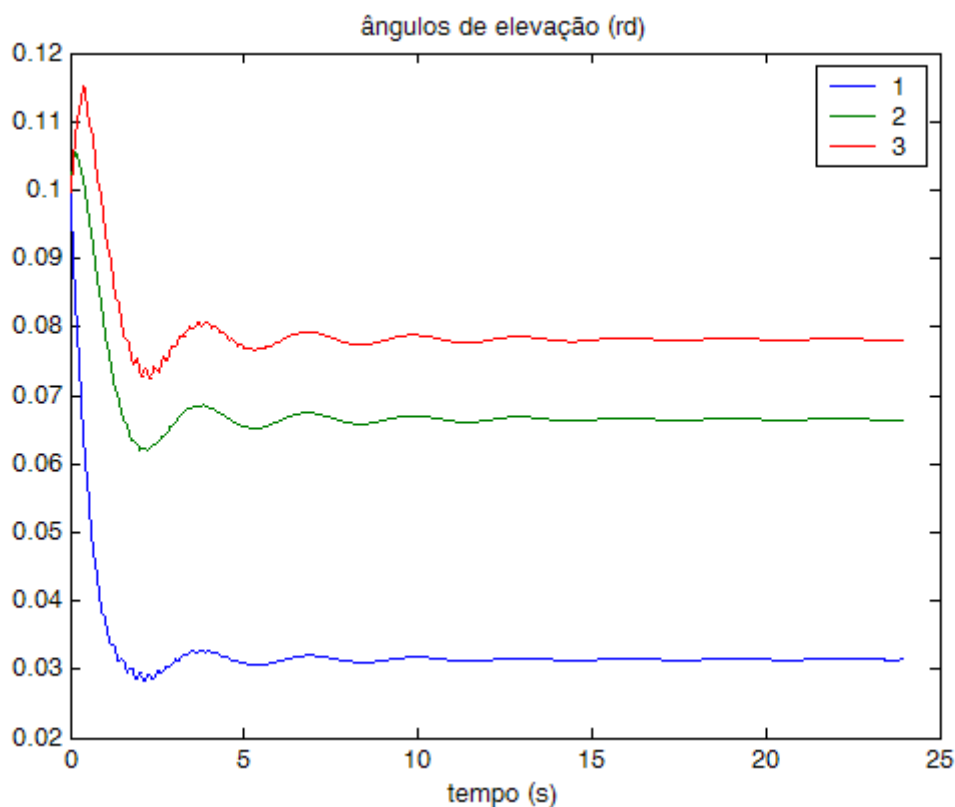


Figura 6.28 Posição angular em elevação para cada elo.

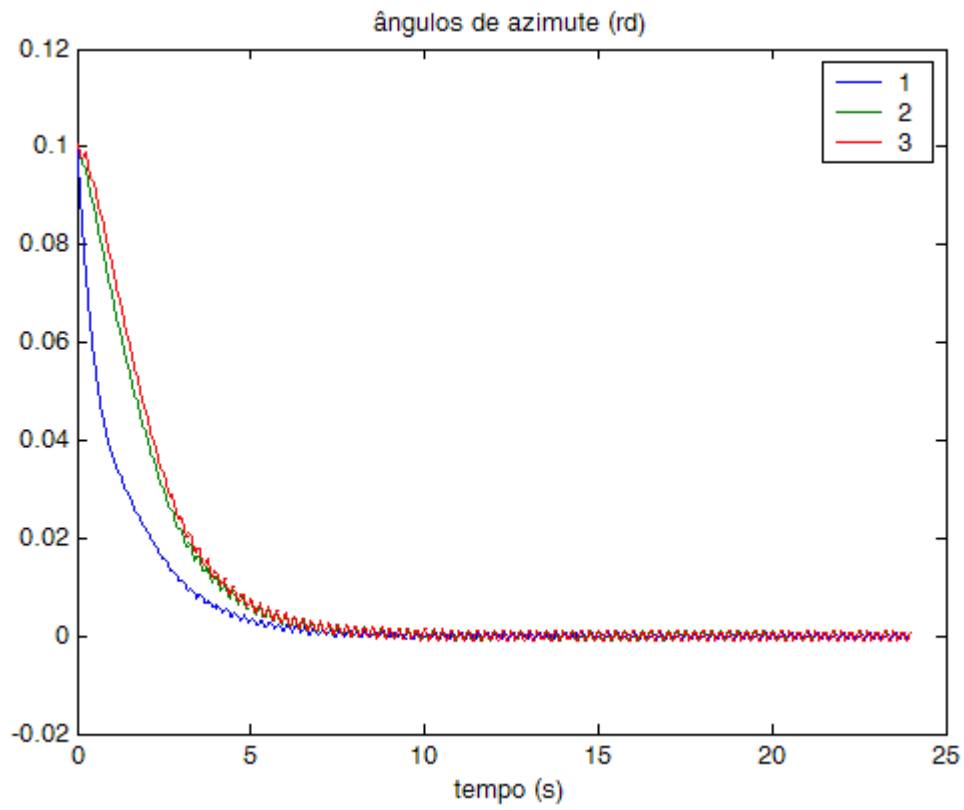


Figura 6.29 Posição angular em azimute para cada elo.

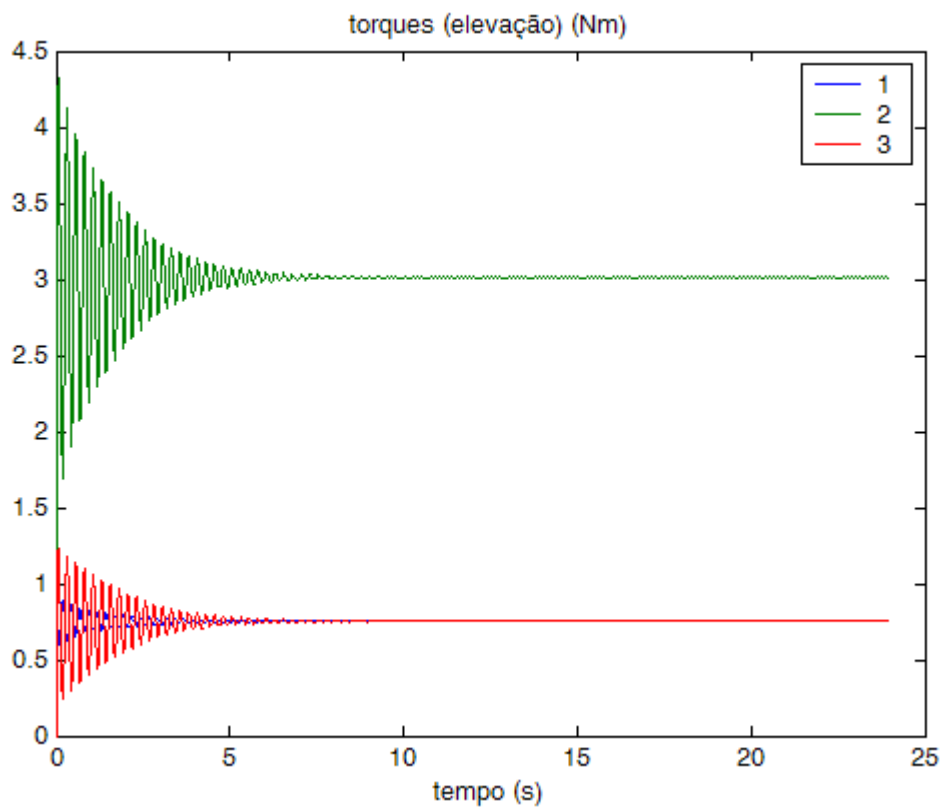


Figura 6.30 Torques em elevação para cada elo.

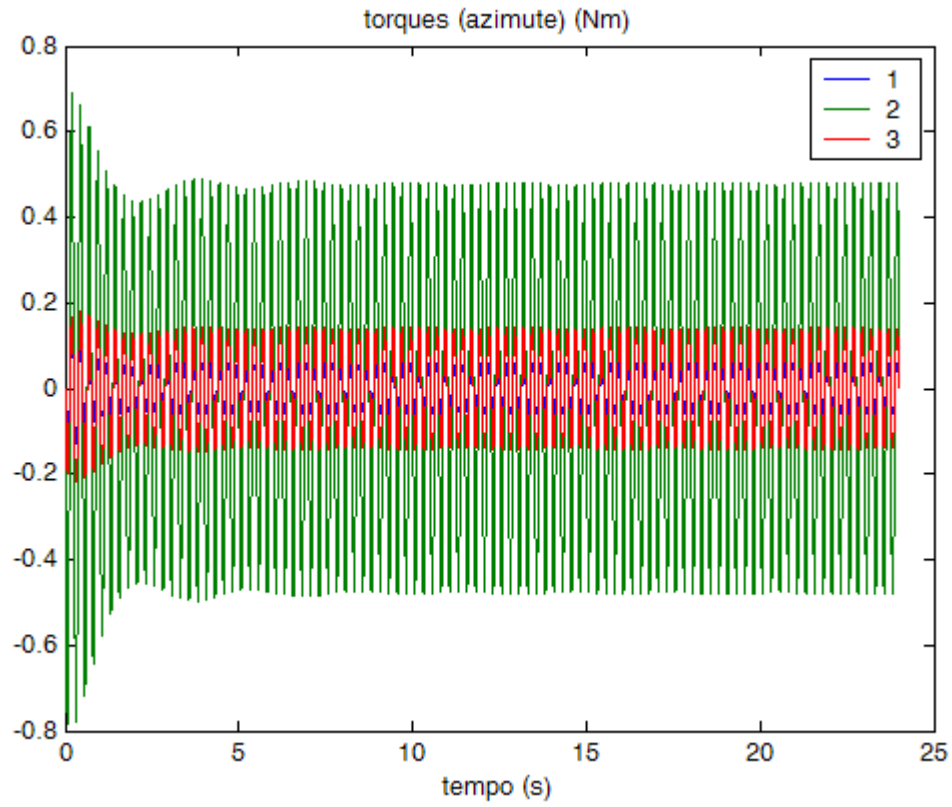


Figura 6.31 Torques em azimute para cada elo.

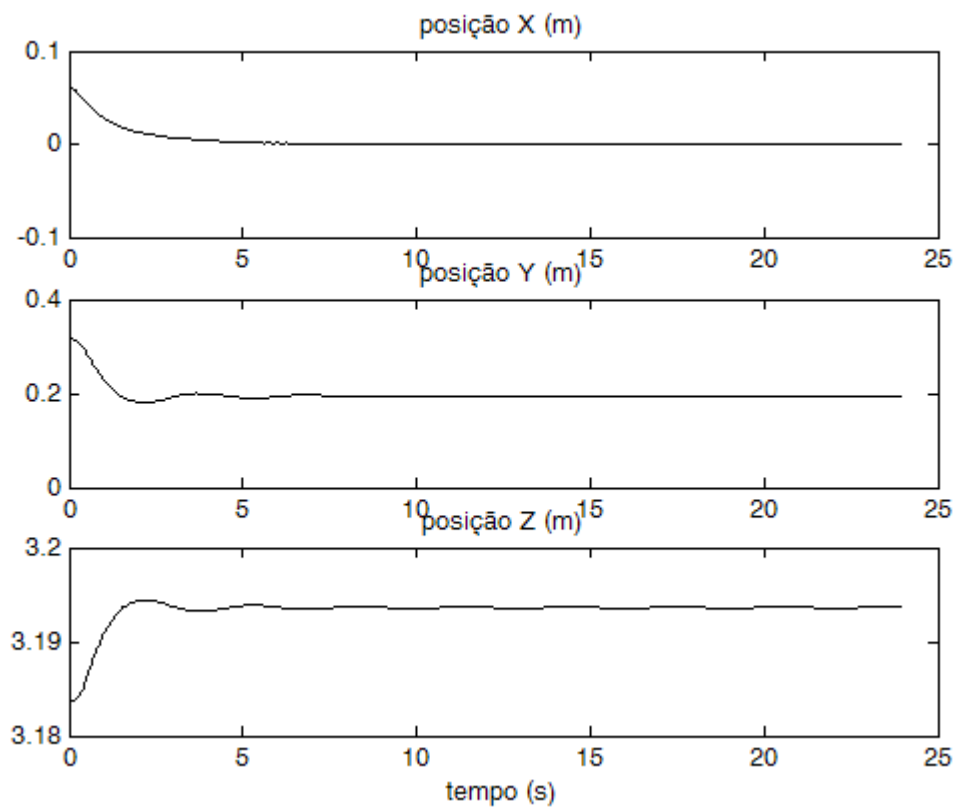


Figura 6.32 Posição da carga terminal.

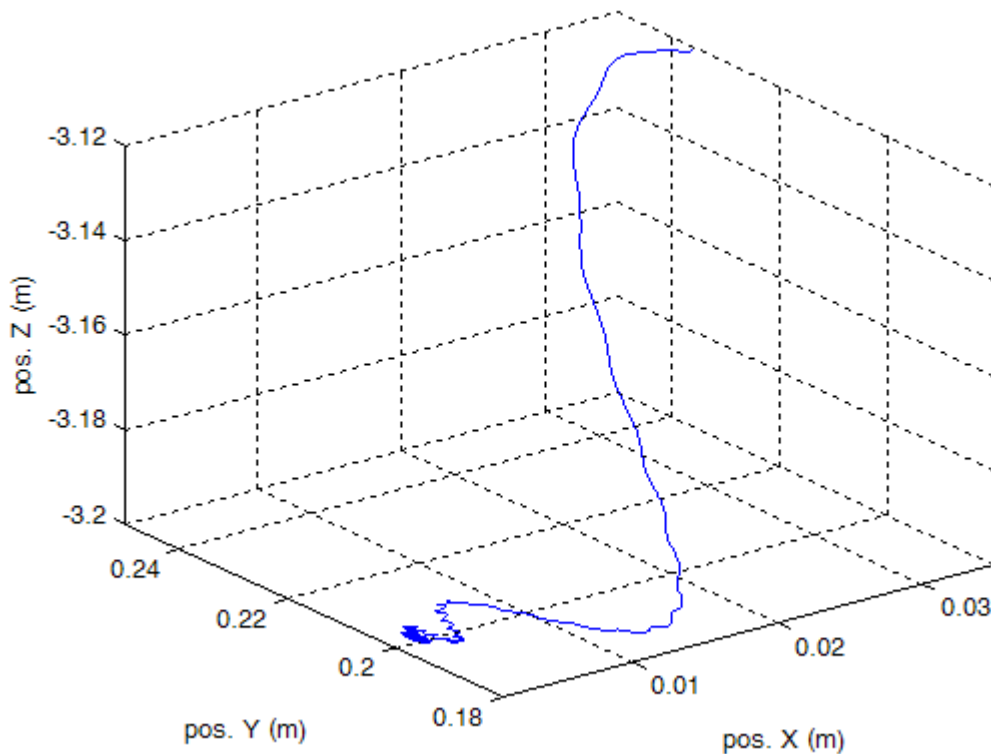


Figura 6.33 Movimento espacial da carga terminal.

Conforme foi descrito no Capítulo 3, o modelo proposto é genérico e se aplica inclusive para uma viga com flexibilidade espacial. Considera-se a seguir o aço como material de um cabo com diâmetro de $0.02m$ e comprimento $3.2m$, tornando a estrutura mais rígida, de modo que a mesma possa ser considerada como uma viga engastada, mas com flexibilidade espacial, ou seja, uma estrutura com comportamento de uma viga no sentido de Euler-Bernoulli (viga engastada-livre), com seção circular de raio $0.01m$ e comprimento $3.2m$. O cálculo da flecha máxima na extremidade livre para esse tipo de estrutura é dado por:

$$d = \frac{ql^4}{8EI} \quad (6.40)$$

O Módulo de Young (transversal) do aço é

$$E = 80GPa = 80 \cdot 10^9 N/m^2, \quad (6.41)$$

e l é comprimento total da estrutura. A inércia da seção transversal é dada por

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = 7.854 \cdot 10^{-9} m^4 \quad (6.42)$$

e q é o carregamento homogêneo gerado pela interação do fluido com a estrutura, equivalente a:

$$q = \frac{F_{y1}}{l_1} = \frac{F_{y2}}{l_2} = \frac{F_{y3}}{l_3} = 2.375 N/m, \quad (6.43)$$

onde l_1 , l_2 e l_3 são os comprimentos dos elos 1,2 e 3, respectivamente e F_{y1} , F_{y2} e F_{y3} são as forças na direção do escoamento aplicadas em cada elo. Substituindo-se (6.41), (6.42) e (6.43) em (6.40), obtém-se

$$d \approx 0.05m. \quad (6.44)$$

Nas simulações apresentadas a seguir considerou-se um cabo de aço com 0.02m de diâmetro e 3.2m de comprimento, com uma extremidade fixa a um corpo sem movimento e outra extremidade livre. O cabo está submerso e sob um escoamento permanente nos 24s, com o vetor de estado inicial

$$\vec{X} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Os parâmetros do modelo relativos às constantes elásticas das articulações fictícias foram modificados a fim de possibilitar resultados de simulações, de forma que, após o transitório da reposta, o cabo se estabilize com um deslocamento final da extremidade livre semelhante a 0.05m. Verificou-se que as constantes elásticas que permitem os resultados esperados podem ser calculadas a partir da seguinte equação:

$$k = \frac{5}{6} \left(\frac{nEI}{l} \right), \quad (6.45)$$

onde n é o número de articulações fictícias.

A figura 6.34 apresenta a posição angular em elevação para cada elo, onde os ângulos de elevação se estabilizam fora da origem, pois neste caso o cabo encontra-se submerso em um fluxo permanente de fluido.

A figura 6.35 apresenta a posição angular em azimute para cada elo e neste caso aparecem vibrações de alta frequência em relação aos ângulos de azimute causadas pela interação com o fluido.

A figura 6.36 mostra os torques em elevação para cada elo e a figura 6.37 mostra os torques em azimute para cada elo, onde se verifica que os torques são maiores no segundo elo, pois este tem o comprimento duas vezes maior do que os comprimentos do primeiro e do terceiro elos.

As figuras 6.38 e 6.39 apresentam o movimento espacial da extremidade livre. Observa-se que a extremidade do cabo sai da posição inicial em Y e se estabiliza em torno de 0.05m, coincidindo com o cálculo do deslocamento para a flecha máxima obtido em (6.44).

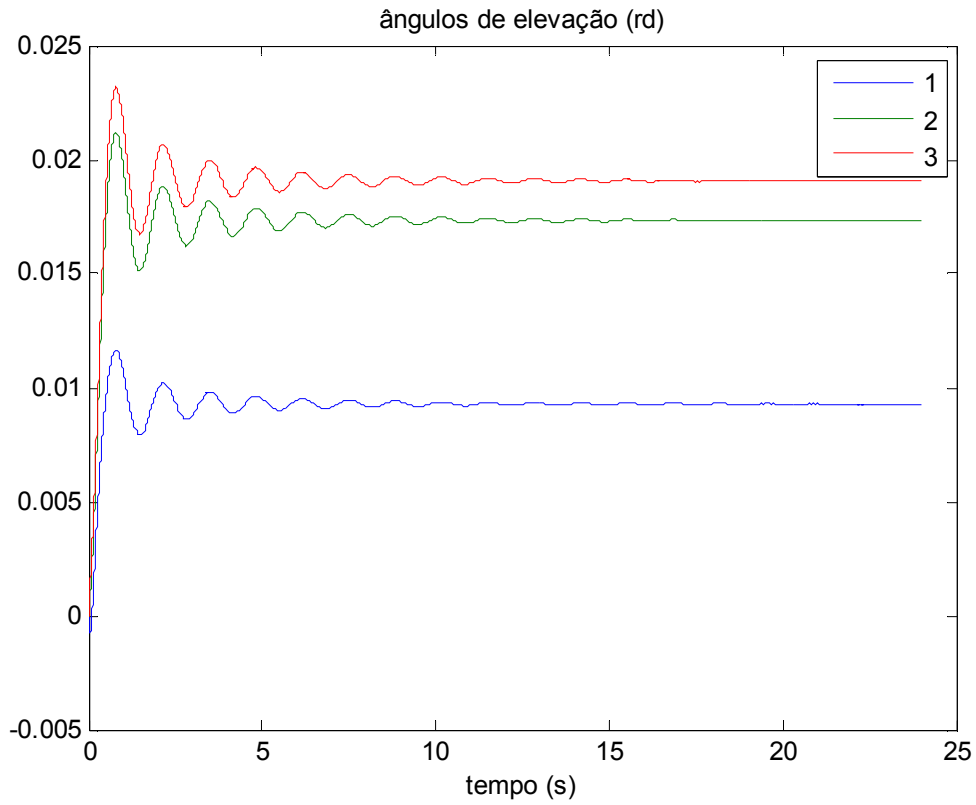


Figura 6.34 Posição angular em elevação para cada elo.

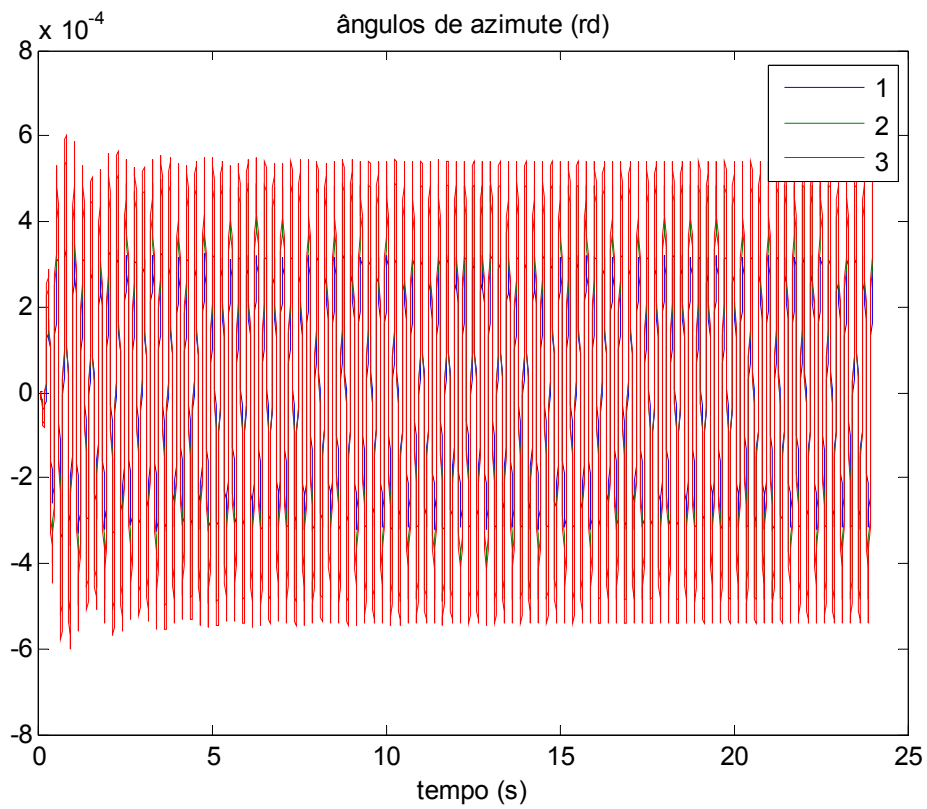


Figura 6.35 Posição angular em azimute para cada elo.

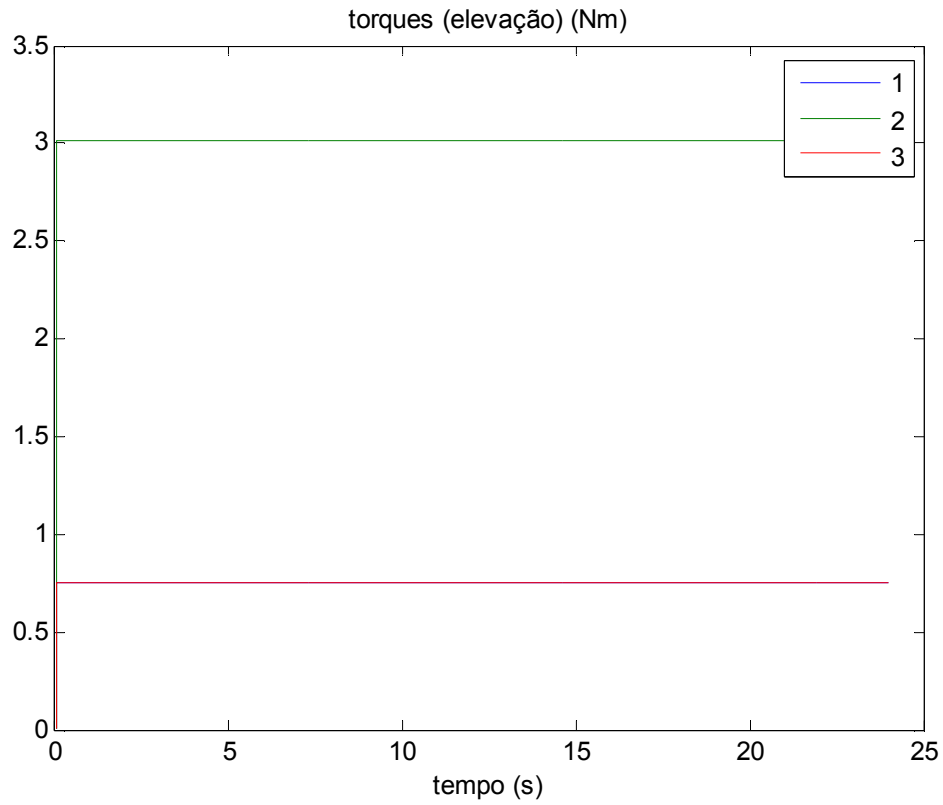


Figura 6.36 Torques em elevação para cada elo.

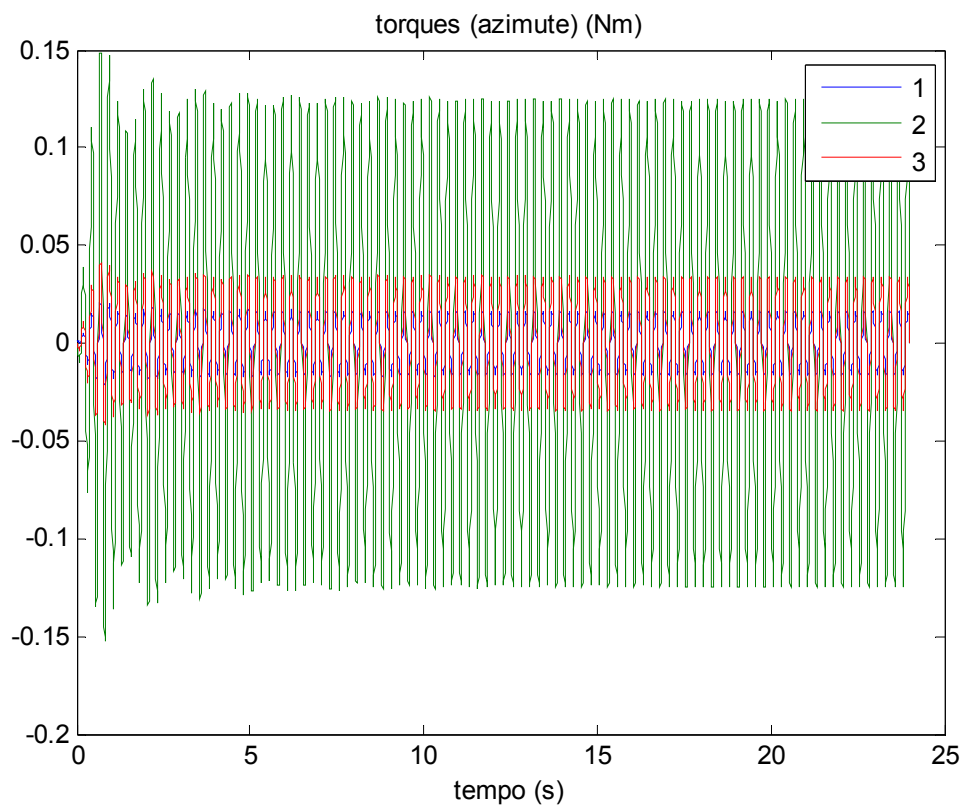


Figura 6.37 Torques em azimute para cada elo.

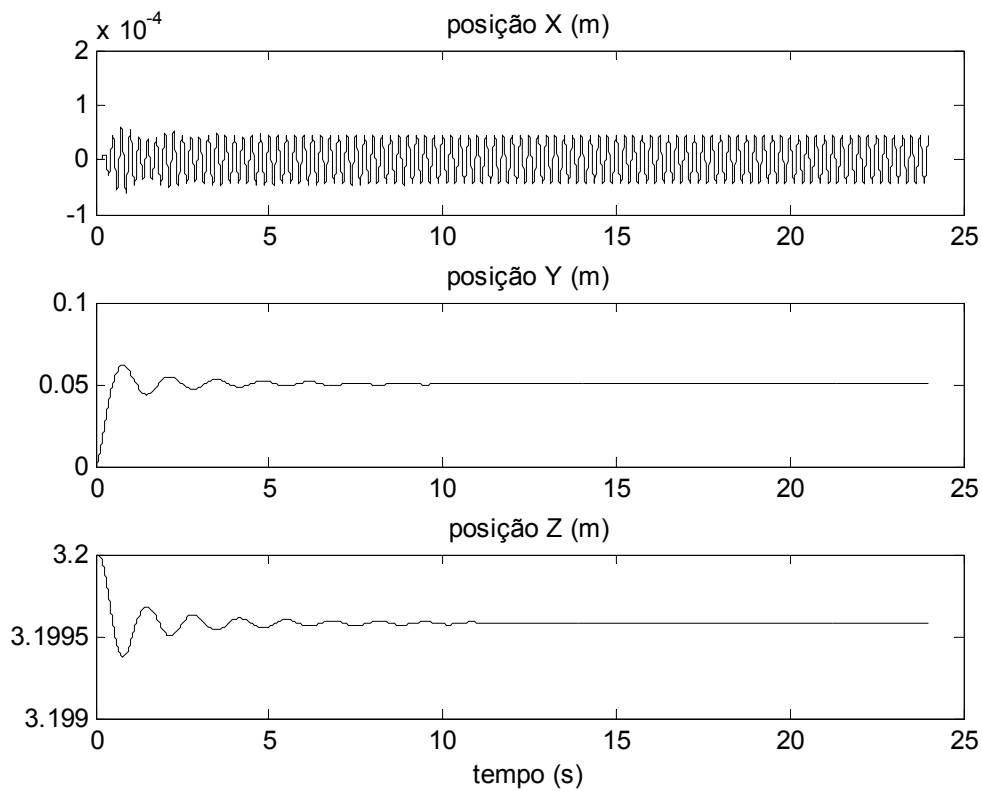


Figura 6.38 Posição da extremidade livre.

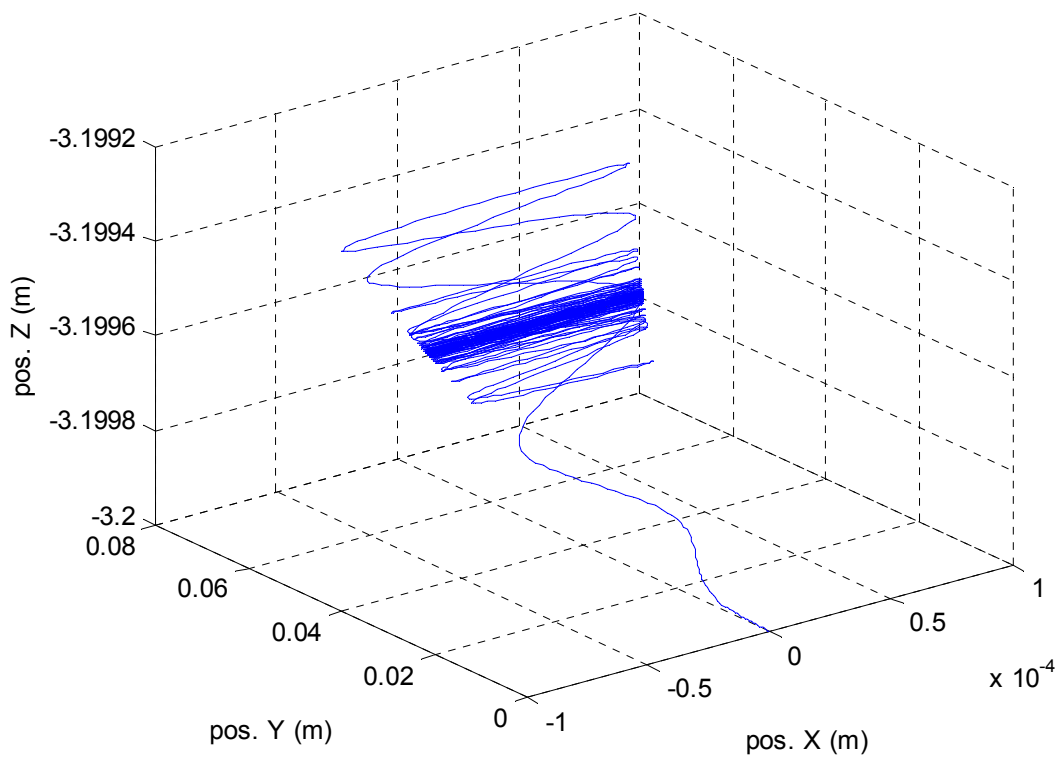


Figura 6.39 Movimento espacial da extremidade livre.

A seguir são apresentadas mais algumas simulações considerando-se o cabo em aço como na simulação anterior, mas com diferentes comprimentos para o mesmo, a fim de se fazer mais algumas comparações em relação à posição da extremidade livre do cabo com a flecha máxima da viga de Euler-Bernoulli.

A figura 6.40 apresenta as posições em Y da extremidade livre do cabo. Na primeira simulação considera-se o cabo de aço original usado anteriormente com comprimento de $3.2m$ e $0.02m$ de diâmetro. Conforme visto na simulação anterior, o deslocamento da extremidade livre do cabo coincide com a flecha máxima $d \approx 0.05m$ obtida em (6.44).

Nas próximas simulações da figura 6.40, considera-se o mesmo carregamento anterior como em (6.43) dado por:

$$q = \frac{F_{y1}}{l_1} = \frac{F_{y2}}{l_2} = \frac{F_{y3}}{l_3} = 2.375N/m,$$

com o cabo também em aço e com diâmetro $0.02m$, mas com comprimentos diferenciados, ou seja, com comprimentos 25%, 50%, 75% e 100% maiores do que o comprimento original de $3.2m$, respectivamente. Para estes comprimentos considerados as flechas máximas obtidas através da equação (6.40) dada por:

$$d = \frac{ql^4}{8EI}$$

são aproximadamente $0.12m$, $0.25m$, $0.46m$ e $0.79m$, respectivamente.

Na segunda simulação da figura 6.40, o cabo possui comprimento 25% maior do que o original e verifica-se que a extremidade livre do cabo se estabiliza em torno de $0.12m$, sendo este resultado coincidente com a flecha máxima obtida a partir da equação (6.40).

Na terceira simulação o cabo possui comprimento 50% maior do que o comprimento original e observa-se que a extremidade livre se estabiliza em torno de $0.25m$. Na quarta simulação, o cabo possui comprimento 75% maior do que o comprimento original e constata-se que a extremidade livre se estabiliza em torno de $0.46m$. Na quinta simulação o cabo possui comprimento 100% maior do que o comprimento original e verifica-se que o deslocamento da extremidade livre é em torno de $0.79m$. Observa-se então que os resultados obtidos através das simulações coincidem com os da flecha máxima para cada caso.

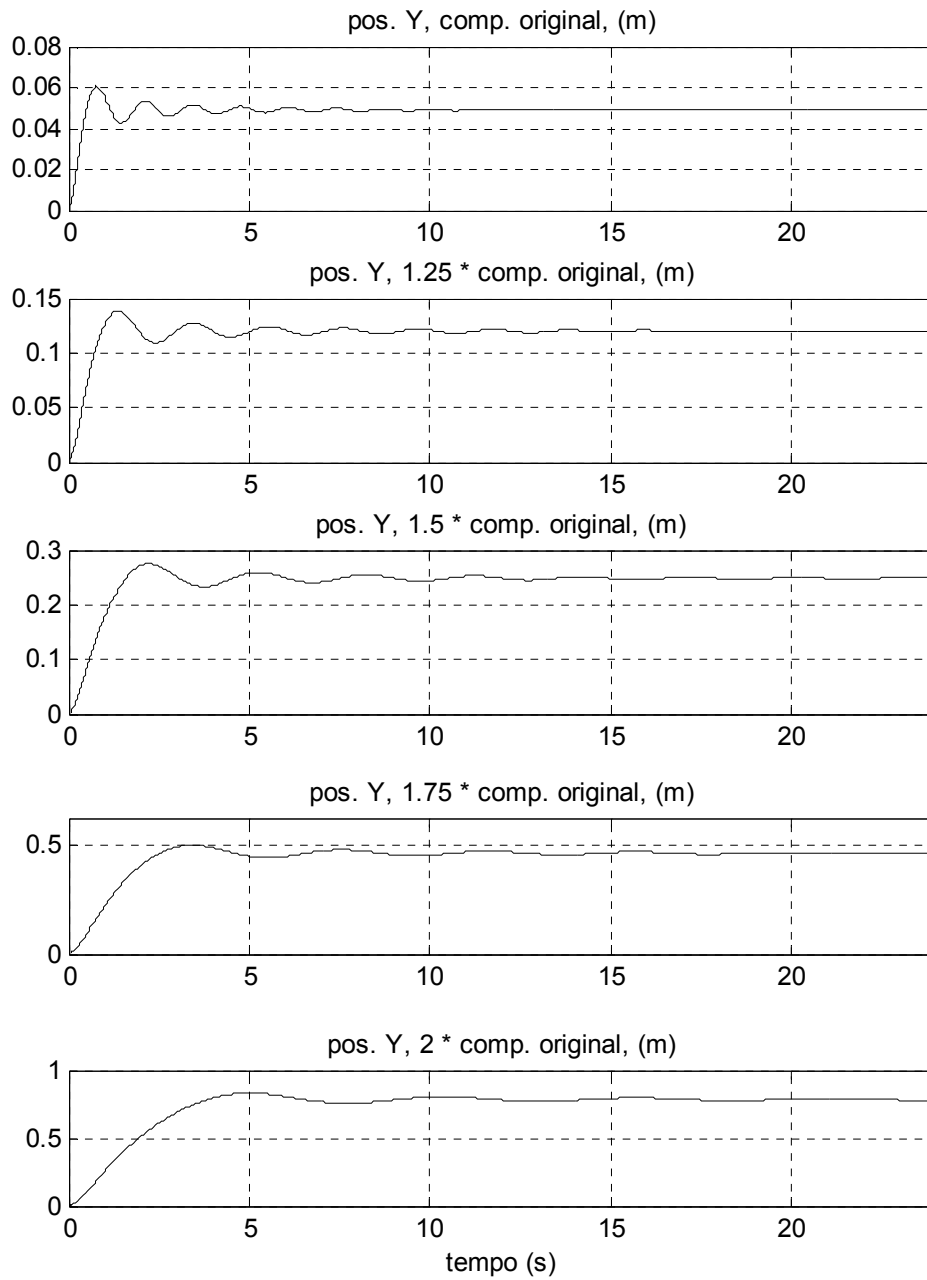


Figura 6.40 Posições em Y da extremidade livre do cabo com comprimentos diferenciados.

Embora o acoplamento fluido-estrutura utilizado seja simples, os resultados obtidos concordam com o esperado. No capítulo seguinte são descritas as conclusões deste trabalho, as contribuições e também as sugestões para pesquisas futuras.

CAPÍTULO VII
CONCLUSÕES

6. CONCLUSÕES

Este capítulo contém as conclusões referentes aos resultados obtidos nesta tese. O problema da interação fluido-estrutura tem sido amplamente estudado e a grande maioria dos trabalhos publicados baseia-se na formulação ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*) e as simulações são feitas através do Método de Elementos Finitos ou Diferenças Finitas.

Neste trabalho é proposto um novo formalismo para a modelagem de estruturas flexíveis do tipo cabo, cujo fundamento principal é supor que o cabo é formado por diversos elos rígidos conectados por articulações elásticas, sendo uma principal contribuição da presente proposta, a possibilidade da obtenção automática do Lagrangeano do sistema a partir de uma única equação constituída de somatórios e produtórios que dependem do número de elos considerados, ou seja, dependem do número de graus de liberdade que se pretende para a dinâmica do sistema. No estudo do escoamento sobre o cabo flexível, considera-se o cabo cilíndrico e propõe-se o escoamento sobre um cilindro circular com eixo de simetria no eixo oz , onde as equações de Navier-Stokes são resolvidas analiticamente, através do Método da Decomposição de Adomian, onde as condições iniciais são aproximadas pelo escoamento potencial em torno do cilindro. A interação entre fluido-estrutura foi investigada a partir do acoplamento da dinâmica do cabo com a solução do escoamento sobre o cilindro.

Diversas conclusões sobre as teorias desenvolvidas na presente tese já foram apresentadas à medida que as respectivas teorias iam sendo desenvolvidas e apresentadas ao longo dos capítulos. Serão apresentados, entretanto, resumos sobre as principais conclusões extraídas de todo o trabalho realizado, acrescidas de comentários que objetivam elucidar melhor a interpretação dos resultados.

No Capítulo 2, que trata da modelagem dinâmica do cabo, apresenta-se o desenvolvimento teórico do formalismo discreto, onde o cabo de flexibilidade contínua é dividido em partes rígidas, que são chamadas de elos, sendo estes elos conectados por articulações elásticas fictícias, permitindo três movimentos distintos: azimute, elevação e torção, no espaço tridimensional. Através de transformações homogêneas são determinadas as coordenadas dos centros de massa e das articulações fictícias para cada elo. Obtém-se, então uma única equação capaz de montar o Lagrangeano do sistema de forma simples, independente do número de elos escolhidos para a representação da

dinâmica do cabo. Como exemplo de aplicação considerou-se o cabo dividido em três partes rígidas e através das equações de Euler-Lagrange determinou-se o sistema de equações diferenciais ordinárias que descrevem a dinâmica do cabo. É importante salientar que este formalismo constitui-se na mais simples das técnicas em termos matemáticos, uma vez que não há a necessidade de se trabalhar com equações diferenciais parciais, nem com as condições de contorno.

No Capítulo 3 são apresentados os resultados de algumas simulações com a dinâmica de cabos livres ou submersos, onde foram atribuídos valores aos parâmetros do modelo dinâmico e realizaram-se as simulações, com o objetivo de mostrar que o formalismo proposto para a modelagem apresenta resultados coerentes com o esperado para a dinâmica de cabos livres ou submersos.

O Capítulo 4 trata de alguns conceitos sobre o escoamento de fluidos em torno de cilindros circulares, que são utilizados no capítulo seguinte.

O Capítulo 5 apresenta o modelo analítico para o escoamento sobre cilindro circulares, que consiste na solução analítica das equações de Navier-Stokes através do Método da Decomposição de Adomian. Uma importante vantagem deste método é que este não requer a discretização das variáveis, não sendo afetado pelos erros de arredondamento computacionais e, além disso, não enfrenta a necessidade de grande tempo de processamento e memória computacional. A aproximação da decomposição é feita diretamente sem o uso de suposições restritivas ou linearizações. O método de Adomian consiste em separar uma equação na sua parte linear e não linear e utilizar o operador inverso, sendo este, na maioria dos casos, facilmente determinado para a parte linear. Para a parte não linear, as funções desconhecidas são decompostas em séries, cujos termos são determinados de acordo com fórmulas de recorrência que serão inicializadas pelos valores iniciais ou condições de contorno da equação. Para o problema do escoamento sobre o cilindro circular, apresentado neste capítulo, os termos das séries que representam as componentes do vetor velocidade do fluido foram desenvolvidos no Maple12 e ficaram muito extensos, sendo por esta razão que não foi possível uma aproximação das séries com muitos termos. A partir das componentes do vetor velocidade do fluido determina-se a pressão que o fluido exerce sobre o cilindro. Neste capítulo também foram apresentadas algumas simulações do escoamento sobre o cilindro circular e os resultados foram coerentes. Porém notou-se limitações do método de Adomian em representar escoamentos que apresentam vorticidade e no uso de

equações do tipo Poisson para a pressão devido ao tamanho das expressões algébricas obtidas.

O Capítulo 6 trata do problema da interação fluido-estrutura flexível, que foi investigado a partir do acoplamento da dinâmica do cabo com a solução do escoamento sobre o cilindro. Para este acoplamento obtém-se a força resultante que atua sobre cada elo do cabo com a integração da diferença de pressão, determinada no Capítulo 5, em cada elemento de área do cilindro. Tendo as expressões para as forças resultantes em cada elo, são calculados os torques em azimute e elevação sobre cada elo do cabo. Estes torques entram na dinâmica do cabo como perturbações externas aos movimentos do mesmo. São apresentadas algumas simulações importantes com o cabo submerso na água sob um escoamento com $Re=1000$, onde se colocam condições iniciais diferentes para o vetor de estado e são consideradas duas situações para o escoamento: primeiro considera-se o escoamento permanente nos primeiros 12s e, depois, desliga-se o fluxo de fluido com o cabo ainda submerso; em segundo lugar considera-se o escoamento permanente durante os 24s. Os resultados obtidos foram os esperados fisicamente. Na parte final deste capítulo, considera-se o cabo de aço com uma extremidade fixa a um corpo sem movimento e outra extremidade livre, com a finalidade de tornar a estrutura mais rígida, de modo que a mesma possa ser considerada como uma viga engastada, mas com flexibilidade espacial. Obtém-se o deslocamento da extremidade livre através do cálculo da flecha máxima para esse tipo de estrutura e verifica-se que este deslocamento coincide com o obtido através das simulações com o cabo submerso e sob um escoamento permanente durante 24s.

Ainda não se dispõe de um aparato experimental para validar o modelo dinâmico. Pretende-se, como continuação da presente pesquisa, construir um experimento constituído de um cabo equipado com diversos sensores, de forma a identificar parâmetros e validar trabalhos de modelagem. Porém, foram atribuídos valores aos parâmetros de um modelo dinâmico e realizaram-se simulações, cujo objetivo foi mostrar que o formalismo de modelagem proposto apresenta resultados coerentes com o esperado para a dinâmica de cabos livres ou submersos.

As principais contribuições desta tese são o novo formalismo para a modelagem de estruturas flexíveis do tipo cabo, o estudo do escoamento sobre o cilindro circular através do Método da Decomposição de Adomian e o acoplamento da dinâmica do cabo com o escoamento sobre a estrutura.

CAPÍTULO VIII
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABBAOUI, K., et al. *A new formulation of Adomian method- Convergence result*. Kybernets, Vol. 30, No. 9/10, 2001, pp.1183-1191.
- [2] ABBAOUI, K. and CHERRUAULT, Y., *The decomposition method applied to the Cauchy problem*, Kybernets, Vol 28, N°1, 1999, pp 68-74.
- [3] ABBAOUI, K., CHERRUAULT, Y. and SENG, V. *Practical Formulae for the Calculus of Multivariable Adomian Polynomials*. Mathl. Comput. Modelling Vol. 22, N0. 1, pp. 89-93, 1995.
- [4] ADOMIAN, G., *Solving Frontier problems of physics. The Decomposition Method*, Kluwer, Boston, 1994.
- [5] ADOMIAN, G. and RACH, R., *Analytic Solution of Nonlinear Boundary-Value Problems in Several Dimensions by Decomposition*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 174, 118-137 (1993).
- [6] ADOMIAN, G. *Application of the Decomposition Method to the Navier-Stokes Equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 119, 340-360 (1986).
- [7] ADOMIAN, G. *Solution of Coupled Nonlinear Partial Differential Equations by Decomposition*. Computers Math. Applic. Vol. 31, No.6,pp. 117-120, 1996.
- [8] ADOMIAN, G. *Explicit Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*. Applied Mathematics and Computation 88:117-126 (1997).
- [9] ALÉ, J. V. *Mecânica dos Fluidos, Curso Básico*. PUCRS, Faculdade de Engenharia –FENG, Departamento de Engenharia Mecânica e Mecatrônica, 2002.
- [10] ALLAN, F. M. *Derivation of the Adomian decomposition method using the homotopy analysis method*. Applied Mathematics and Computation 190 (2007) 6-14.
- [11] ANDRIANOV, I. V., OLEVSKII, V. I. and TOKARZEWSKI, S. *A Modified Adomian's Decomposition Method*. J. Appl. Maths. Mechs, Vol. 62, N0. 2, PP. 309-314, 1998.
- [12] ÁSSI, G. R. S. *Estudo Experimental do Efeito de Interferência no escoamento ao Redor de Cilindros Alinhados*. Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 2005.
- [13] BABAJEE, D. K. R., DAUHOO, M. Z., DARVISHI, M. T. and BARATI, A. *A note on the local convergence of iterative methods based on Adomian decomposition method and 3-node quadrature rule*. Applied Mathematics and Computation 200 (2008) 452-458.

- [14]BABOLIAN, E. and BIAZAR, J. *On the order of convergence of Adomian method*. Applied Mathematics and Computation 130 (2002) 383-387.
- [15]BABOLIAN, E. and BIAZAR, J. *Solution of nonlinear equations by modified Adomian decomposition method*. Applied Mathematics Computation 132 (2002) 167-172.
- [16]BABOLIAN, E. and DAVARI, A. *Numerical implementation of Adomian decomposition method*. Applied Mathematics and Computation 153 (2004) 301-305.
- [17]BABOLIAN, E. and JAVADI, Sh. *Restarted Adomian method for algebraic equations*. Applied Mathematics and Computation 146 (2003) 533-541.
- [18]BANERJEE, A. K. and DO, V.N. *Deployment Control of a Cable Connecting a Ship to an Underwater Vehicle*. Applied Mathematics and Computation. 70:97-116 (1995).
- [19]BASTO, M., SEMIAO, V. and CALHEIROS, F. L. *A new iterative method to compute nonlinear equations*. Applied Mathematics and Computation 173 (2006) 468-483.
- [20]BASTO, M. J. F. *Adomian Decomposition Method, Nonlinear Equations and Spectral Solutions of Burgers Equation*. Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia do Porto para obtenção do grau de Doutor em Ciências da Engenharia, Porto, 2006.
- [21]BECKERT, A. *Coupling fluid (CFD) and structural (FE) models using finite interpolation elements*. Aerosp. Sci. Technol. 4 (2000) 13-22.
- [22]BEHBAHANI-NEJAD, M. and PERKINS, N.C. *Freely propagating waves in elastic cables*. Journal of Sound and Vibration. Volume 196, Issue 2, September 1996, Pages 189-202.
- [23]BEJAN, A., *Heat Transfer*, John Wiley & Sons, Inc., U.S.A., 1993.
- [24]BIAZAR, J. and ISLAM, R. *Solution of wave equation by Adomian decomposition method and restrictions of the model*. Applied Mathematics and Computation 149 (2004) 807-814.
- [25]BLIEK, A. *Dynamic analysis of single span cables*. Cambridge, 1984. 295 f. Thesis (Doctor of Philosophy) – Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology).
- [26]BRATSOS, A., EHRHARDT, M. and FAMELIS, I. T. *A discrete Adomian decomposition method for discrete nonlinear Schrödinger equations*. Applied Mathematics and Computation 197 (2008) 190-205.

- [27]BUCKAM, B., DRISCOLL, F.R. and MEYER, N. *Development of a Finite Element Cable Model for Use in Low-Tension Dynamics Simulation*. J.Appl.Mech, July 2004-Volume 71,Issue 4, 476 (10 pages).
- [28]CAMPREGHER, R. *Modelagem Matemática Tridimensional para Problemas de Interação Fluido-estrutura*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, MG, 2005.
- [29]CÁRDENAS, N.O., MACHADO, I.F. and GONÇALVES,E. *Cyclic loading and marine environment effects on the properties of HDPE umbilical cables*. J.Mater Sci (2007) 42:6935-6941.
- [30]CARMO, B. S. *Estudo Numérico do Escoamento ao Redor de Cilindros Alinhados*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, apresentada a Politécnic da Universidade de São Paulo, 2005.
- [31]CASASÚS, L. and AL-HAYANI, W. *The decomposition method for ordinary differential equations with discontinuities*. Applied Mathematics and Computation 131 (2002) 245-251.
- [32]CHERRUAULT, Y., *Convergence of Adomian's method*, Kybernets, Vol. 18, N°2, pp. 31-38, 1989.
- [33]CHEN, W. and LU, Z. *An algorithm for Adomian decomposition method*. Applied Mathematics and Computation 159 (2004) 221-235.
- [34]CHOI, H. W. and SHIN, J. G. *Symbolic implementation of the algorithm for calculating Adomian polynomials*. Applied Mathematics and Computation 146 (2003) 257-271.
- [35] CHRISTOV, C., MARINOVA, R. S. and MARINOV, T. T. *Does the stationary flow around circular cylinder exist for large Reynolds numbers? A numerical solution via variational imbedding*. Journal of Computational and Applied Mathematics 226 (2009) 205-217.
- [36]CORDOVÉS, D.C.S. *Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnic da Universidade de São Paulo, Mestrado em Engenharia, São Paulo, 2008.
- [37]CUSTÓDIO, A.B. and VAZ, M.A. *A nonlinear formulation for the axisymmetric response of umbilical cables and flexible pipes*. Applied Ocean Research 24 (2002) 21-29.
- [38]DAVIS, M., DEMETRIOU, M.A. and OLINGER, D.J. *Low Order Modelling of Freely Vibrating Flexible Cables*. Flow, Turbulence and Combustion, 71: 75-91, 2003.
- [39]DAFTARDAR-GEJJI, V. and BHALEKAR, S. *Solving multi-term linear and non-linear diffusion-wave equations of fractional order by Adomian decomposition method*. Applied Mathematics and Computation 202 (2008) 113-120.

- [40]DE BORTOLI, A. L. *Aeroelastic analysis of panels in compressible flows*. Journal of Fluids and Structures 20 (2005) 189-195.
- [41]DEHGHAN, M., *Application of the Adomian decomposition method for two-dimensional parabolic equation subject to nonstandard boundary specifications*. Applied Mathematics and Computation, 157 (2004) 549-560.
- [42]DEHGHAN, M. and TATARI, M. *The use of Adomian Decomposition Method for solving problems in Calculus of Variations*. Mathematical Problems in Engineering. Volume 2006, Article ID 65379, Pages 1-12.
- [43]DEHGHAN, M., HAMIDI, A. and SHAKOURIFAR, M. *The solution of coupled Burgers' equations using Adomian-Pade technique*. Applied Mathematics and Computation 189 (2007) 1034-1047.
- [44] FANG, M.-C., HOU, C.-S. and LUO, J.-H. *On the motions of the underwater remotely operated vehicle with the umbilical cable effect*. Ocean Engineering. Volume 34, Issues 8-9, June 2007, Pages 1275-1289.
- [45]FLORI, F., GIUDICELLI, B. and ORENGA, P. *An existence result for a compressible fluid pattern coupled to a cylindrical shell*. Nonlinear Analysis: Real World Applications 7 (2006) 308-318.
- [46]GATTI-BONO, C. and PERKINS, N.C. *Dynamic Analysis of Loop Formation in Cables Under Compression*. International Journal of Offshore and Polar Engineering. Vol. 12, No. 3, September 2002 (ISSN 1053-5381).
- [47]GOBAT, J.I. and GROSENBAUGH, M.A. *Application of the generalized- α method to the time integration of the cable dynamics equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001) 4817-4829.
- [48]GOSLING, P.D. and KORBAN, F.A. *A bendable finite element for the analysis of flexible cable structures*. Finite Elements in Analysis and Design. 38 (2001) 45-63.
- [49]HELAL, M.A. and MEHANNA, M.S. *The tanh method and Adomian decomposition method for solving the foam drainage equation*. Applied Mathematics and Computation 190 (2007) 599-609.
- [50]HIMOUN, N., ABBAOUI, K. and CHERRUAULT, Y. *New results on Adomian method*. Kybernetes Vol.32 No. 4, 2003, pp. 523-539.
- [51]HOVER, F.S., GROSENBAUGH, M.A. and TRIANTAFYLLOU, M.S. *Calculation of Dynamic Motions and Tensions in Towed Underwater Cables*. IEEE Journal of Oceanic Engineering, Vol. 19, No. 3, July 1994.
- [52]HOW, B.V.E., GE, S.S. and CHOO, Y.S. *Active control of flexible marine risers*. Journal of Sound and Vibration. Volume 320, Issues 4-5, 6 March 2009, Pages 758-776.

- [53]HOWELL, C.T. *Investigation of the dynamics of low-tension cables*. Cambridge, 1992. 150 f. Ph.D. Thesis – Departament of Ocean Engineeing, Massachusetts Institute of Technology.
- [54]HU, Y., LUO, Y. and LU, Z. *Analytical Solution of the linear fractional differential equation by Adomian decomposition method*. J. Comput. Appl. Math. 215 (1), 220-229 (2008).
- [55]HUGHES, W. F. and BRIGHTON, J. A. *Dinâmica dos Fluidos*. Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo, 1974.
- [56]INC,M., CHERRUAULT, Y. and ABBAOUI, K. *A computational approach to the wave equations – An application of the decomposition method*. Kybernetes Vol. 33 No. 1, 2004 pp. 80-97
- [57]ISOLDI, L. A., *Análise Numérica da Dinâmica de Cabos Altamente Extensíveis*. Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica – FURG, julho de 2002.
- [58]JIAO, Y.C., YAMAMOTO, Y., DANG, C. and HAO, Y. *An Aftertreatment Technique for Improving the Accuracy of Adomian's Decomposition Method*. Computers and Mathematics with Applications 43 (2002) 783-798.
- [59]JOHANSEN, V., ERSDAL, S., SORENSEN, A.J. and LEIRA,B. *Modelling of inextensible cable dynamics with experiments*. International Journal of Non-Linear Mechanics. Volume 41, Issue 4, May 2006, Pages 543-555.
- [60]JUNSHENG, D., JIANYE, A. and MINGYU, X. *Solution of system of fractional differential equations by Adomian Decomposition Method*. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B 2007, 22(1):7-12.
- [61]KAYA, D. and YOKUS, A. *A numerical comparison of partial solutions in the decomposition method for linear and nonlinear partial differential equations*. Mathematics and Computers in Simulation 60 (2002) 507-512.
- [62]KAYA, D. and INAN, I. *A numerical application of the decomposition method for the combined KdV-MKdV equation*. Applied Mathematics and Computation 168 (2005) 915-926.
- [63]KAYA, D. and INAN, I. E. *A convergence analysis of the ADM and an application*. Applied Mathematics and Computation 161 (2005) 1015-1025.
- [64]KAZAKEVITCH, M. and ZAKORA, A. *Cable stabilization for wind and moving load effect*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 74-76 (1998) 995-1003.
- [65]KOH, C.G. and RONG, Y. *Dynamic analysis of large displacement cable motion with experimental verification*. Journal of Sound and Vibration 272 (2004) 187-206.

- [66]KWAN, A.S.K. *A new approach to geometric nonlinearity of cable structures*. Computers and Structures. 67 (1998) 243-252.
- [67]LESNIC, D. *Convergence of Adomian's Decomposition Method: Periodic Temperatures*. Computers and Mathematics with Applications 44 (2002) 13-24.
- [68]LESNIC, D. *The decomposition method for forward and backward time-dependent problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics 147 (2002) 27-39.
- [69]LIANG, Z. and TANG, X. *Analytical solution of fractionally damped beam by Adomian decomposition method*. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2007, 28(2):219-228.
- [70]LIU, N-W., LI, W-T. and WANG, Z-C. *Entire solutions of reaction-advection-diffusion equations with bistable nonlinearity in cylinders*. J. Differential Equations 246 (2009) 4249-4267.
- [71]LOPES, A.M. *Modelação Cinemática e Dinâmica de Manipuladores de Estrutura em Série*. Robótica Industrial. FEUP, 2002.
- [72]MACHADO, C.C., PEREIRA, A.E.L., GOMES, S.C.P. and DE BORTOLI, A.L. *Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis*. Revista Controle e Automação 13 (2002),134-140.
- [73]MACHADO, C.C. *Um estudo sobre controle de estruturas flexíveis ativadas por escoamento de fluidos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada – UFRGS- 1999.
- [74]MACHADO, C.C. *Modelagem Matemática e Controle Ativo de um Manipulador com um elo flexível*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, 2006.
- [75]MACHADO, M. J., VERARDI, S.L.L., and SHIYOU, Y. *An Application of the Adomian's Decomposition Method to the Analysis of MHD Duct Flows*. IEEE Transactions on Magnetics. Vol. 41, NO. 5, May 2005.
- [76]MAHMOOD, A.S., CASASÚS, L. and AL-HAYANI, W., *The decomposition method for stiff systems of ordinary differential equations*, Applied Mathematics and Computation 1678 (2005), 964-975.
- [77]MASSOUDI, M. and PHUOC, X.P. *On the motion a second grade fluid due to longitudinal and torsional oscillations of a cylinder: A numerical study*. Applied Mathematics and Computation 203 (2008) 471-481.
- [78]MATULEA, I.C., et all. *On the equilibrium configuration of mooring and towing cables*. Applied Ocean Research, 30 (2008) 81-91.

- [79]MENECHINI, J, R. *Projetos de Pesquisa no Tópico Geração e Desprendimento de Vórtices no escoamento ao redor de Cilindros*. Resenha apresentada à Escola Politécnica da USP para obtenção do título de Professor Livre-Docente em Engenharia, São Paulo, 2002.
- [80]MOUSTAFA, K.A.F., TRABIA, M.B. e ISMAIL, M.I.S. *Modelling and control of an overhead crane with a variable length flexible cable*. International Journal of Computer Applications in Tecnology. 2009, Vol.34, No. 3, pp. 216-228.
- [81]MUSTAFA, INC, *Decomposition method for solving parabolic equations infinite domains*, Journal of Zhejiang University SCIENCE, 2005, 6A(10):1058-1064.
- [82]NEWMAN, D.J. and KARNIADAKIS, G.E. *Simulations of flow over a flexible cable: A comparison of forced and flow-induced vibration*. Journal of Fluid Mechanics, (1996), 10: 439-453.
- [83]NEWMAN, D.J. and KARNIADAKIS, G.E. *A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable*. Journal of Fluid Mechanics, (1997), 344: 95-136.
- [84]NGARHASTA, N., SOME, B., ABBAOUI, K. and CHERRUAULT, Y., *New numerical study of Adomian method applied to a diffusion model*, Kybernets, Vol.31 N° 1, 2002, pp. 61-75.
- [85]OLIVEIRA, P.A, MACHADO, R.D. and HEEKE, M.B. *Análise estática não-linear de cabos utilizando o Método dos Elementos Finitos*. Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, UnB, Brasília, 2002.
- [86]OUEDRAOGO, R.Z., CHERRUAULT, Y. and ABBAOUI, K. *Convergence of Adomian's method applied to algebraic equations*. Kybernetes, Vol.29 No. 9/10, 2000, pp. 1298-1305.
- [87]PEREIRA, A.E.L. *Um Estudo sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis*. Dissertação de Mestrado para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, UFRGS, 1999.
- [88]PEREIRA, A.E.L., DE BORTOLI, A.L. and GOMES, S.C.P, *O Método da decomposição de Adomian aplicado ao problema do escoamento laminar através de um duto*. Seminário Brasileiro de Análise – SBA, Instituto de Matemática e Estatística – USP, Edição n° 66, novembro de 2007.
- [89]PINTO, L. C. *Análise por Simulação Numérica do Desprendimento de Vórtices de um Cilindro Circular em Movimento Forçado*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da UFRGS, 2008.
- [90]RAJARAM, R. and NAJAFI, M. *Analytical treatment and convergence of the Adomian decomposition Method for a system of coupled damped wave equations*. Accepted manuscript in Applied Mathematics and Computation (2009).

- [91]RAMAN-NAIR, W. and WILLIAMS, C.D. *Vortex-Induced Response of a Long Flexible Marine Riser in a Shear Current*. International Symposium on Technology of Ultra Deep Ocean Engineering. Feb 1-2, 2005, Tokyo, Japan.
- [92]RAY, S.S. *A new approach for the application of Adomian decomposition method for the solution of fractional space diffusion equation with insulated ends*. Applied Mathematics and Computation 202 (2008) 544-549.
- [93]ROCHA, J.I.P.R. *Inspeção e Manutenção Robótica em Linhas de Alta Tensão*. EST-IPS/ISR-IST, Lisboa, 2004.
- [94]ROCHINHA, A., SAMPAIO, R., and LE TALLEC, P. *O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingenieria. Vol. 6,1, 97-108 (1990).
- [95]SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*. Mc Graw-Hill Book, London, 1955.
- [96]SCHNEIDER, E.S. *Solução das Equações da Cinética Pontual pelo Método da Decomposição de Adomian*. Dissertação de Mestrado para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, UFRGS, 2006.
- [97]SHIN, H. *Nonlinear cable dynamics*. Cambridge, 1987. 176f. Thesis (Doctor of Philosophy) - Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- [98]SOLIMAN, A.A. and ABDOU, M.A. *The decomposition method for solving the coupled modified KdV equations*. Math. Comput. Model. 47 (9-10), 1035-1041 (2008).
- [99]SOULAÏMANI, A., FENG, Z. and ALI, A. B. H. *Solution techniques for multiphysics problems with application to computational nonlinear aeroelasticity*. Nonlinear Analysis 63 (2005) e1585-e-1595.
- [100]SOULI, M., OUAHSINE, A. and LEWIN, L. *ALE formulation for fluid-structure interaction problems*. Computer Methods Applied Mechanics and Engineering 190 (2000) 659-675.
- [101]SRINIL, N., REGA, G. and CHUCHEEPSAKUL, *Two-to-one resonant multi-modal dynamics of horizontal/inclined cables. Part I: Theoretical formulation and model validation*. Nonlinear Dyn (2007) 48:231-252.
- [102]SRINIL, N. and REGA, G., *Two-to-one resonant multi-modal dynamics of horizontal/inclined cables. Part II: Internal resonance activation, reduced-order models and nonlinear normal modes*. Nonlinear Dyn (2007) 48:253-274.
- [103]SULEMAN, A. *Adaptive composites modeling and application in panel flutter and noise suppression*. Computers and Structures 76 (2000) 365-378.
- [104]SUN, Y. and LEONARD, J.W. *Dynamics of ocean cables with local low-tension regions*. Ocean Engineering, Volume 25, Issue 6, June 1998, Pages 443-463.

- [105]TATARI, M and DEHGHAN, M. *Numerical Solution Equation in a Disk using the Adomian Decomposition Method*. Physica Scripta. Vol. 72, 345-348, 2005.
- [106]TEIXEIRA, P.R.F and AWRUCH,A.M. *Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method*. Computers & Fluids 34 (2005) 249-273.
- [107]TJAVARAS, A.A., et all. *The mechanics of highly-extensible cables*. Journal of Sound and Vibration. Volume 213, Issue 4, 1998, Pages 709-737.
- [108]TREMBLAY, F. *Direct and large-eddy simulation of flow around a circular cylinder at subcritical Reynolds numbers*. Doktor-Ingenieurs, Fachgebiet Strömungsmechanik, Technische Universität München, 2006.
- [109]TRIANAFYLLOU, M.S. and YUE, D.K.P. *Damping amplification in highly extensible hysteretic cables*. Journal of Sound Vibration (1995) 186(3), 355-368.
- [110]VARGAS, R. M. F. and VILHENA, M. T. *Solution of the S_N radiative transfer equation in an inhomogeneous plane-parallel atmosphere by the decomposition method*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 92 (2005) 121-127.
- [111]VARUM, H. and CARDOSO,R.J.S., *A geometrical non-linear model for cable systems analysis*. International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, STRUCTURAL MEMBRANES 2005.
- [112]VAZ, M.A and PATEL,M.H. *Three-dimensional behaviour of elastic marine cables in sheared currents*. Applied Ocean Research. Volume 22, Issue 1, February 2000, Pages 45-53.
- [113]WAKIL, S. A. EL. and ABDOU, M. A. *New applications of variational method using Adomian polynomials*. Nonlinear Dyn (2008) 52: 41-49.
- [114]WANG, P.H., FUNG, R.F. and LEE, M.J. *Finite Element analysis of a three-dimensional underwater cable with time-dependent length*. Journal of Sound Vibration. Volume 209, Issue 2, January 1998, Pages 223-249.
- [115]WANG, F., HUANG, G. and DENG, D. *Steady State Analysis of Towed Marine Cables*. J. Shanghai Jiaotong Univ. (Sci.), 2008, 13(2): 239-244.
- [116]WARNITCHAI, P., FUJINO,Y. and SUSUMPOW,T. *A non-linear dynamic model for cables and its application to a cable-structure system*. Journal of Sound Vibration. Volume 187, Issue 4, November 1995, Pages 695-712.
- [117]WAZWAZ, A.M. *A new algorithm for calculating Adomian polynomials for non linear operators*. Applied Mathematics and Computation, 111 (2000), 53-69.
- [118]WAZWAZ, A.M. *The numerical solution of sixth-order boundary value problems by the modified decomposition method*. Applied Mathematics and Computation, 118 (2001), 311-325.

- [119]WAZWAZ, A.M. *A reliable modification of Adomain decomposition method*. Applied Mathematics and Computation, 102 (1999), 77-86.
- [120]WAZWAZ, A.M. *Approximate Solutions to Boundary Value Problems of Higher Order by The Modified Decomposition Method*. Computers & Mathematics with applications, 40 (2000) 679-691.
- [121]WAZWAZ, A.M. *The numerical solution of fifth-order boundary value problems by the decomposition method*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 136 (2001) 259-270.
- [122]WAZWAZ, A.M. *A note on using Adomian Decomposition Method for solving boundary value problems*. Foundations of Physics, Vol. 13. No.5, 2000.
- [123]WAZWAZ, A.M and EL-SAYED, S. M. *A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators*. Applied Mathematics and Computation 122 (2001) 393-405.
- [124]WAZWAZ, A.M. *Necessary Conditions for the Appearance of Noise Terms in Decomposition Solutions Series*. Applied Mathematics and Computation 81:265-274 (1997).
- [125]WAZWAZ, A.M. *A New Approach to the Nonlinear Advection Problem: An Application of the Decomposition Method*. Applied Mathematics and Computation 72:175-181 (1995).
- [126]WAZWAZ, A.M. *A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solutions*. Applied Mathematics and Computation 97 (1998) 37-44.
- [127]XIAO,X., WU,G. e LI,S. *The rigid-flexible coupling dynamic simulation of mobile robot and overhang flexible cable under crawling work state*. Processings of te 5th WSEAS International Conference on Signal Processing, Robotics and Automation. Madrid, Spain, Pages 364-369, 2006, ISBN~ISSN: 17 90-5109 ,960-847-41-6. Editora: World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS).
- [128]YOON,J.W., PARK,T.W. e YIM,H.J. *Fatigue life prediction of a cable harness in an industrial robot using dynamic simulation*. Journal of mechanical science and technology. ISSN 1738-494X, 2008, Vol.22, n° 3, pp. 484-489.
- [129]ZHU, K.-Q., ZHU, H.-Y., ZHANG,Y.-S. and GAO, J. *A multi-body space-coupled motion simulation for a deep-sea tethered remotely operated vehicle*. Journal of Hydrodynamic. 2008, 20(2):210-215.

CAPÍTULO IX
APÊNDICES

APÊNDICE A. TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

Para caracterizar de uma forma unívoca os movimentos de um cabo no espaço, sendo este fixo na sua extremidade superior e livre na outra, torna-se necessário conhecer a orientação e a posição da extremidade livre deste cabo. A orientação da extremidade livre é definida por intermédio de rotações puras e a posição por translações.

Na modelagem dinâmica, o cabo é dividido em partes rígidas chamadas elos, ligados entre si por juntas denominadas articulações fictícias. O movimento do cabo é obtido pela composição dos movimentos de cada elo em relação ao elo anterior.

Para conhecer a posição da extremidade livre do cabo é necessário associar a cada articulação um sistema de eixos coordenados e, a fim de posicionar este sistema de coordenadas nas articulações de forma sistemática, propõe-se, na presente tese, a utilização de matrizes homogêneas de transformação entre sistemas.

Em coordenadas homogêneas um vetor do espaço real de dimensão três é representado por um vetor no espaço de quatro dimensões. Para simplificar o tratamento algébrico das operações de rotação e translação que determinam, respectivamente, a orientação e a posição da extremidade livre do cabo, define-se uma matriz 4x4, na qual ambos os operadores estão representados. Esta matriz, que permite efetuar uma transformação de coordenadas entre dois referenciais, é chamada de matriz de transformação homogênea (ROCHA [93]).

A seguir apresenta-se o formalismo descrito por LOPES [71] que será utilizado para determinar uma matriz de transformação homogênea.

A.1 MATRIZ DE ROTAÇÃO

Na Figura A.1, os referenciais cartesianos $x_0y_0z_0$ e $x_1y_1z_1$ têm a mesma origem no ponto O , sendo que o referencial $x_0y_0z_0$ encontra-se fixo e o referencial $x_1y_1z_1$ pode girar em relação à $x_0y_0z_0$. Fisicamente, pode-se considerar $x_1y_1z_1$ como estando apoiado em um corpo rígido.

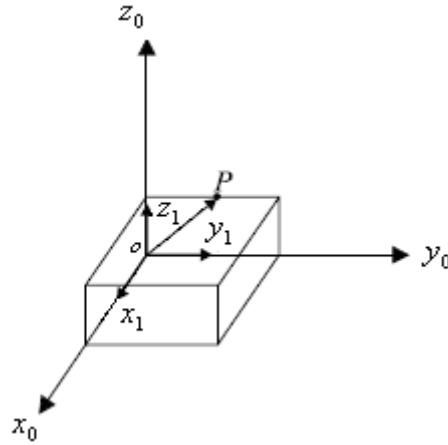


Figura A.1 Representação de um referencial fixo, $x_0y_0z_0$, e de um móvel $x_1y_1z_1$.

Considere os vetores unitários $\vec{i}_{x_0}, \vec{j}_{y_0}, \vec{k}_{z_0}$ e $\vec{i}_{x_1}, \vec{j}_{y_1}, \vec{k}_{z_1}$, segundo os eixos do referencial $x_0y_0z_0$ e $x_1y_1z_1$, respectivamente. Um ponto P do espaço pode ser representado por suas coordenadas expressas em relação à $x_0y_0z_0$ por

$$\vec{p}_{x_0y_0z_0} = [p_{x_0} \ p_{y_0} \ p_{z_0}]^T \quad (\text{A.1})$$

e em relação à $x_1y_1z_1$ por

$$\vec{p}_{x_1y_1z_1} = [p_{x_1} \ p_{y_1} \ p_{z_1}]^T. \quad (\text{A.2})$$

Pela definição de componentes de um vetor, tem-se:

$$\vec{p}_{x_1y_1z_1} = p_{x_1}\vec{i}_{x_1} + p_{y_1}\vec{j}_{y_1} + p_{z_1}\vec{k}_{z_1}, \quad (\text{A.3})$$

onde $p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}$ representam as projeções de \vec{p} segundo os eixos ox_1, oy_1 e oz_1 .

Então, utilizando-se a definição de produto escalar e a equação (A.3), tem-se:

$$\begin{aligned} p_{x_0} &= \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{p} = \vec{i}_{x_0} \cdot (p_{x_1}\vec{i}_{x_1} + p_{y_1}\vec{j}_{y_1} + p_{z_1}\vec{k}_{z_1}) = (\vec{i}_{x_0} \cdot \vec{i}_{x_1})p_{x_1} + (\vec{i}_{x_0} \cdot \vec{j}_{y_1})p_{y_1} + (\vec{i}_{x_0} \cdot \vec{k}_{z_1})p_{z_1} \\ p_{y_0} &= \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{p} = \vec{j}_{y_0} \cdot (p_{x_1}\vec{i}_{x_1} + p_{y_1}\vec{j}_{y_1} + p_{z_1}\vec{k}_{z_1}) = (\vec{j}_{y_0} \cdot \vec{i}_{x_1})p_{x_1} + (\vec{j}_{y_0} \cdot \vec{j}_{y_1})p_{y_1} + (\vec{j}_{y_0} \cdot \vec{k}_{z_1})p_{z_1} \\ p_{z_0} &= \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{p} = \vec{k}_{z_0} \cdot (p_{x_1}\vec{i}_{x_1} + p_{y_1}\vec{j}_{y_1} + p_{z_1}\vec{k}_{z_1}) = (\vec{k}_{z_0} \cdot \vec{i}_{x_1})p_{x_1} + (\vec{k}_{z_0} \cdot \vec{j}_{y_1})p_{y_1} + (\vec{k}_{z_0} \cdot \vec{k}_{z_1})p_{z_1} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ou na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{i}_{x_1} & \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{j}_{y_1} & \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{k}_{z_1} \\ \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{i}_{x_1} & \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{j}_{y_1} & \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{k}_{z_1} \\ \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{i}_{x_1} & \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{j}_{y_1} & \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{k}_{z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ p_{z_1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A transformação matricial $R = {}^{x_0y_0z_0}R_{x_1y_1z_1}$ que converte as coordenadas de P expressas em relação ao sistema de referência $x_1y_1z_1$, $P_{x_1y_1z_1}$, nas coordenadas de P

expressas em relação ao sistema de referência $x_0y_0z_0$, $P_{x_0y_0z_0}$, depois do corpo apoiado com o referencial $x_1y_1z_1$ ter sofrido uma rotação, é dada por:

$$\vec{p}_{x_0y_0z_0} = R \vec{p}_{x_1y_1z_1}, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$R = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{i}_{x_1} & \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{j}_{y_1} & \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{k}_{z_1} \\ \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{i}_{x_1} & \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{j}_{y_1} & \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{k}_{z_1} \\ \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{i}_{x_1} & \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{j}_{y_1} & \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{k}_{z_1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Note que as colunas da matriz R representam as coordenadas dos eixos principais do referencial $x_1y_1z_1$ em relação ao referencial $x_0y_0z_0$, isto é, representam os co-senos diretores dos eixos do referencial $x_1y_1z_1$ em relação ao referencial $x_0y_0z_0$. Assim, a matriz R representa a orientação do referencial $x_1y_1z_1$ em relação ao referencial $x_0y_0z_0$.

De modo semelhante podem ser obtidas as coordenadas de $P_{x_1y_1z_1}$ a partir das coordenadas de $P_{x_0y_0z_0}$ através da equação matricial

$$\vec{p}_{x_1y_1z_1} = Q \vec{p}_{x_0y_0z_0} \quad (\text{A.8})$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ p_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_1} \cdot \vec{i}_{x_0} & \vec{i}_{x_1} \cdot \vec{j}_{y_0} & \vec{i}_{x_1} \cdot \vec{k}_{z_0} \\ \vec{j}_{y_1} \cdot \vec{i}_{x_0} & \vec{j}_{y_1} \cdot \vec{j}_{y_0} & \vec{j}_{y_1} \cdot \vec{k}_{z_0} \\ \vec{k}_{z_1} \cdot \vec{i}_{x_0} & \vec{k}_{z_1} \cdot \vec{j}_{y_0} & \vec{k}_{z_1} \cdot \vec{k}_{z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_1} \cdot \vec{i}_{x_0} & \vec{i}_{x_1} \cdot \vec{j}_{y_0} & \vec{i}_{x_1} \cdot \vec{k}_{z_0} \\ \vec{j}_{y_1} \cdot \vec{i}_{x_0} & \vec{j}_{y_1} \cdot \vec{j}_{y_0} & \vec{j}_{y_1} \cdot \vec{k}_{z_0} \\ \vec{k}_{z_1} \cdot \vec{i}_{x_0} & \vec{k}_{z_1} \cdot \vec{j}_{y_0} & \vec{k}_{z_1} \cdot \vec{k}_{z_0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Dado que o produto escalar é comutativo, de (A.7) e (A.10) obtém-se que:

$$Q = R^T \quad (\text{A.11})$$

e

$$QR = I_3 \quad (\text{A.12})$$

onde I_3 representa a matriz identidade de dimensão 3×3 . Portanto, tem-se

$$Q = R^{-1} = R^T, \quad (\text{A.13})$$

As matrizes R e Q são ortogonais e como os vetores $\vec{i}_{x_0}, \vec{j}_{y_0}, \vec{k}_{z_0}$ e $\vec{i}_{x_1}, \vec{j}_{y_1}, \vec{k}_{z_1}$ são unitários, as transformações representadas pelas equações (A.6) e (A.8) são transformações ortonormais.

Desta forma podem ser determinadas as transformações que representam as rotações do referencial $x_1y_1z_1$ em relação aos eixos do referencial $x_0y_0z_0$. Se o referencial $x_1y_1z_1$ sofrer uma rotação de um ângulo α em relação ao eixo ox_0 , então o ponto $P_{x_1y_1z_1}$ de coordenadas $[p_{x_1} \ p_{y_1} \ p_{z_1}]^T$ em relação à $x_1y_1z_1$, terá diferentes coordenadas $[p_{x_0} \ p_{y_0} \ p_{z_0}]^T$ em relação à $x_0y_0z_0$. A transformação $R_{x_0,\alpha}$ chama-se matriz de rotação em relação à ox_0 de um ângulo α (Figura A.2) e pode ser determinada a partir dos conceitos desenvolvidos antes. Assim, obtém-se:

$$\vec{p}_{x_0y_0z_0} = R_{x_0,\alpha} \vec{p}_{x_1y_1z_1} \quad (\text{A.14})$$

com $\vec{i}_{x_0} \equiv \vec{i}_{x_1}$ e considerando-se a definição do produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$, sendo α o ângulo entre os vetores \vec{a} e \vec{b} , tem-se:

$$R_{x_0,\alpha} = \begin{bmatrix} \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{i}_{x_1} & \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{j}_{y_1} & \vec{i}_{x_0} \cdot \vec{k}_{z_1} \\ \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{i}_{x_1} & \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{j}_{y_1} & \vec{j}_{y_0} \cdot \vec{k}_{z_1} \\ \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{i}_{x_1} & \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{j}_{y_1} & \vec{k}_{z_0} \cdot \vec{k}_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

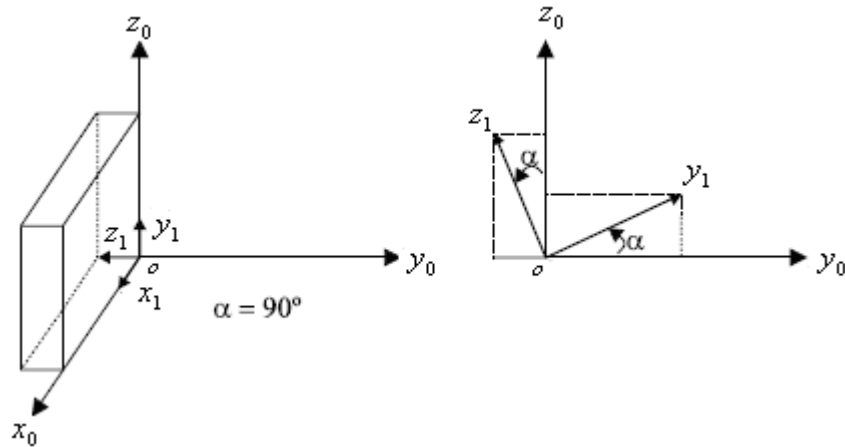


Figura A.2 Rotação do corpo rígido da Figura A.1 de um ângulo α em relação ao eixo ox_0 .

De modo semelhante podem ser obtidas as matrizes de rotação de um ângulo ϕ em relação ao eixo oy_0 e de um ângulo θ em relação ao eixo oz_0 , representadas nas Figuras A.3 e A.4, como:

$$R_{y_0, \phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R_{z_0, \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

As matrizes $R_{x_0, \alpha}$, $R_{y_0, \phi}$ e $R_{z_0, \theta}$ são chamadas de rotação básicas ou elementares.

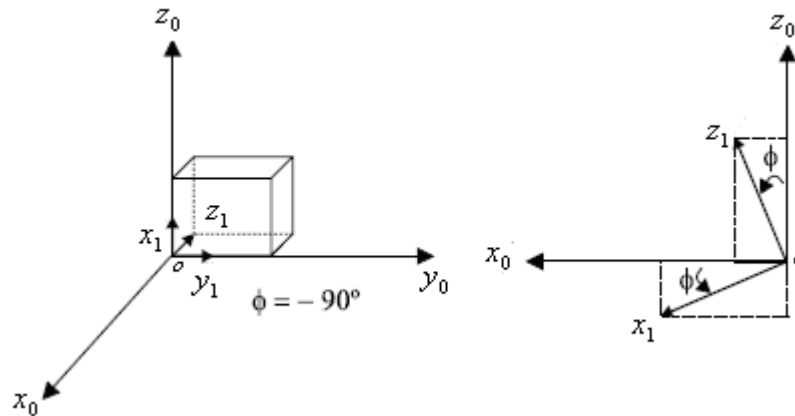


Figura A.3 Rotação do corpo rígido da Figura A.1 de um ângulo ϕ em relação ao eixo Oy_0 .

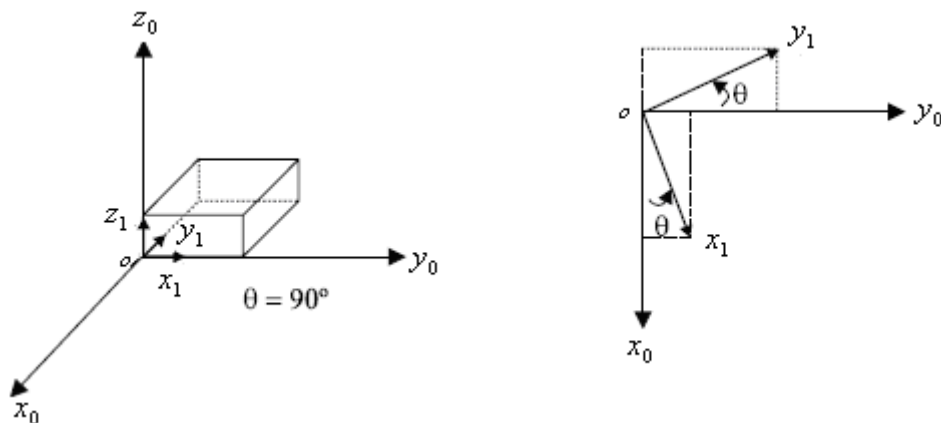


Figura A.4 Rotação do corpo rígido da Figura A.1 de um ângulo θ em relação ao eixo Oz_0 .

A.2 COMPOSIÇÃO DE MATRIZES DE ROTAÇÃO

Na seção anterior foi obtida uma representação matemática da rotação de um referencial $x_1y_1z_1$ em relação a cada um dos eixos de um referencial fixo $x_0y_0z_0$.

Se o referencial $x_1y_1z_1$, inicialmente alinhado com $x_0y_0z_0$, sofrer uma sequência finita de rotações em torno desses mesmos eixos, então essa sequência pode ser representada através de um produto de várias matrizes de rotação básicas.

Por exemplo, a matriz $R = R_{y_0, \phi} R_{z_0, \theta} R_{x_0, \alpha}$ representa a rotação do referencial x_1, y_1, z_1 de um ângulo α em relação ao eixo ox_0 , seguida de uma rotação de um ângulo θ em relação ao eixo oz_0 e, por último, da rotação de um ângulo ϕ em relação ao eixo oy_0 . Como o produto de matrizes em geral não é comutativo, é importante a ordem pela qual são efetuadas as rotações.

A.3 TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

O conceito de transformação homogênea é útil no desenvolvimento de transformações que incluam informações sobre rotação, translação, fator de escala e efeito de perspectiva (LOPES [71]).

Se a um dado vetor $\vec{p} = [p_{x_0} \ p_{y_0} \ p_{z_0}]^T$, no espaço 3D, é acrescentada uma quarta componente, de modo a \vec{p} ser transformado em $\hat{p} = [wp_{x_0} \ wp_{y_0} \ wp_{z_0} \ w]^T$, diz-se que \hat{p} está expresso em coordenadas homogêneas.

Em geral, a representação de um vetor n -dimensional por um vetor $(n+1)$ -dimensional, chama-se de representação homogênea. Inversamente, obtém-se o vetor n -dimensional da sua representação em coordenadas homogêneas dividindo-se as coordenadas do vetor $(n+1)$ -dimensional pela componente de ordem $(n+1)$. Assim, no espaço 3D, um vetor $\vec{p} = [p_{x_0} \ p_{y_0} \ p_{z_0}]^T$ é representado pelo vetor aumentado $\hat{p} = [wp_{x_0} \ wp_{y_0} \ wp_{z_0} \ w]^T$ verificando-se as relações

$$p_{x_0} = \frac{wp_{x_0}}{w}, \quad p_{y_0} = \frac{wp_{y_0}}{w} \text{ e } p_{z_0} = \frac{wp_{z_0}}{w} \quad (\text{A.17})$$

Não existe uma única representação para um vetor em coordenadas homogêneas. Assim, $\hat{p}_1 = [w_1 p_{x_0} \ w_1 p_{y_0} \ w_1 p_{z_0} \ w_1]^T$ ou $\hat{p}_2 = [w_2 p_{x_0} \ w_2 p_{y_0} \ w_2 p_{z_0} \ w_2]^T$ podem ser consideradas representações válidas para o vetor $\vec{p} = [p_{x_0} \ p_{y_0} \ p_{z_0}]^T$. Observa-se que a quarta componente, w , funciona como um fator de escala. Se o fator de escala $w = 1$, então as componentes físicas do vetor são iguais às componentes em coordenadas homogêneas.

Uma matriz homogênea 4×4 pode ser considerada como consistindo de quatro submatrizes:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} & \vec{p}_{3 \times 1} \\ \hline f_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{matriz} & \text{vetor} \\ \text{rotação} & \text{posição} \\ \hline \text{efeito de} & \text{fator} \\ \text{perspectiva} & \text{escala} \end{array} \right] \quad (\text{A.18})$$

A submatriz $R_{3 \times 3}$ representa a matriz de rotação, isto é, a orientação do referencial móvel em relação ao referencial fixo, a submatriz $\vec{p}_{3 \times 1}$ representa o vetor da origem do referencial fixo, a submatriz $f_{1 \times 3}$ representa o efeito de perspectiva e o quarto elemento da diagonal principal representa o fator de escala.

A matriz de rotação 3×3 pode ser aumentada para 4×4 , transformando-se assim numa matriz homogênea, T_{rot} , representando apenas a operação de rotação. Assim, as matrizes de rotação nas equações (A.15) e (A.16), escritas em termos de matrizes homogêneas são:

$$T_{x_0, \alpha} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.19})$$

$$T_{y_0, \phi} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$T_{z_0, \theta} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.21})$$

As matrizes em (A.19), (A.20) e (A.21), são chamadas de matrizes de rotação homogêneas básicas.

Por outro lado, os três primeiros elementos da quarta coluna da matriz de transformação homogênea representam a translação do referencial $x_1 y_1 z_1$ em relação ao referencial $x_0 y_0 z_0$. Assim, $x_1 y_1 z_1$ tem eixos paralelos ao referencial $x_0 y_0 z_0$, mas a sua

origem encontra-se deslocada de $(x_{0_1}, y_{0_1}, z_{0_1})$ deste referencial. A matriz homogênea de translação básica ou elementar é dada na forma:

$$T_{\text{trans}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_{0_1} \\ 0 & 1 & 0 & y_{0_1} \\ 0 & 0 & 1 & z_{0_1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.22})$$

Em síntese, uma transformação homogênea converte um vetor expresso em coordenadas homogêneas em relação a um referencial $x_1 y_1 z_1$, num vetor expresso em coordenadas homogêneas em relação a um referencial $x_0 y_0 z_0$. Em outras palavras, uma matriz homogênea representa a situação ou posição generalizada de um referencial móvel em relação a um referencial fixo. Isto é, com $w = 1$, tem-se:

$$\hat{p}_{x_0 y_0 z_0} = T \hat{p}_{x_1 y_1 z_1} \quad (\text{A.23})$$

onde

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & p_{x_0} \\ & R_{3 \times 3} & & p_{y_0} \\ & & & p_{z_0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{A.24})$$

A.4 COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

Para representar uma sequência finita de transformações homogêneas, multiplicam-se sucessivamente as transformações homogêneas básicas, de modo a obter a matriz de transformação global. Como a multiplicação de matrizes em geral não é comutativa, deve-se levar em conta a ordem pela qual se fazem as transformações básicas.

Na determinação da matriz de transformação global as seguintes regras devem ser consideradas:

- inicialmente ambos os referenciais coincidem, então a matriz homogênea será a matriz identidade 4x4;

- se o referencial $x_1y_1z_1$ sofrer uma rotação/translação em relação a um dos eixos principais de $x_0y_0z_0$, então a matriz calculada até esse momento deve ser pré-multiplicada pela matriz homogênea básica apropriada;

- se o referencial $x_1y_1z_1$ sofrer uma rotação/translação em relação a um dos seus eixos principais, então a matriz calculada até esse momento deve ser pós-multiplicada pela matriz homogênea básica apropriada.

ABÊNDICE B. O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN

B.1 INTRODUÇÃO DO MÉTODO DE ADOMIAN

O método de Adomian consiste em separar uma equação na sua parte linear e não linear e utilizar o operador inverso, sendo este, na maioria dos casos, facilmente determinado para a parte linear. Para a parte não linear, as funções desconhecidas são decompostas em séries, cujos termos são determinados de acordo com fórmulas de recorrência que serão inicializadas pelos valores iniciais ou condições de contorno da equação (SCHNEIDER [96]). A convergência do método de Adomian foi estudada e demonstrada por vários autores, conforme descrito na introdução deste trabalho.

O formalismo descrito a seguir é baseado nos trabalhos apresentados por ADOMIAN [4], ABBAOUI et al. [1] e WAZWAZ [117].

Considere a equação na forma de operador

$$L_t u - N(u) = f, \quad (\text{B.1})$$

onde $u = u(x, y, t)$, $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, N representa um operador diferencial não linear, f é uma função dada nas variáveis x, y e t .

O problema consiste em determinar a solução $u \in H$ da equação (B.1). Assumindo-se que o inverso do operador L_t existe e que é dado por

$$L_t^{-1}(\cdot) = \int_{t_0}^t (\cdot) dt$$

e aplicando-se o operador inverso na equação (1), obtém-se:

$$L_t^{-1} L_t u - L_t^{-1} N(u) = L_t^{-1} f \quad (\text{B.2})$$

onde $L_t^{-1} L_t u = \int_{t_0}^t L_t u dt = \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial t} dt = u(x, y, t) - u(x, y, t_0)$ e segue da equação (B.2) que:

$$u(x, y, t) - u(x, y, t_0) - L_t^{-1} N(u) = L_t^{-1} f$$

ou seja

$$u(x, y, t) = u(x, y, t_0) + L_t^{-1} f + L_t^{-1} N(u) \quad (\text{B.3})$$

O método de Adomian busca a solução $u(x, y, t)$, se ela existir, como uma série da forma:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t) \quad (\text{B.4})$$

e decompõe o termo não linear $N(u)$ como:

$$N(u) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i, \quad (\text{B.5})$$

onde os A_n são polinômios que dependem exclusivamente de $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$, chamados de polinômios de Adomian. Substituindo-se as equações (B.4) e (B.5) na equação (B.3), obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y, t) = u(x, y, t_0) + L_t^{-1} f + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right). \quad (\text{B.6})$$

Os termos da série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ são obtidos por identificação na equação (B.6), ou seja

$$u_0(x, y, t) + \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}(x, y, t) = u(x, y, t_0) + L_t^{-1} f + \sum_{n=0}^{+\infty} L_t^{-1} A_n, \quad (\text{B.7})$$

então

$$\begin{cases} u_0 = u(x, y, t_0) + L_t^{-1} f \\ u_{n+1} = L_t^{-1} A_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Deste modo, pode ser determinada a série da solução exata para a equação (B.1).

B.2 O CÁLCULO DOS POLINÔMIOS DE ADOMIAN

Dado um operador não linear $F(u)$, $F(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$, onde A_n são os polinômios de Adomian para o operador não linear que formam uma série rapidamente convergente. Segundo ADOMIAN [4], os A_n são dados por:

$$\begin{aligned} A_0 &= F(u_0) \\ A_1 &= u_1 \frac{d}{du_0} [F(u_0)] \\ A_2 &= u_2 \frac{d}{du_0} [F(u_0)] + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} [F(u_0)] \\ A_3 &= u_3 \frac{d}{du_0} [F(u_0)] + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} [F(u_0)] + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} [F(u_0)] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

De acordo com ABBAOUI et al [1], NGARHASTA, ABBAOUI e CHERRUAULT [84], ABBAOUI, CHERRUAULT e SENG [3] e BASTO [20], para uma função escalar $F(u)$, os A_n podem ser facilmente calculados da seguinte maneira:

$$\begin{cases} A_0(u_0) = F(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n} F^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{(\alpha_1 - \alpha_2)}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \dots \frac{u_{n-1}^{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)}}{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)!} \cdot \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}, n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

onde a sequência $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ é decrescente. A fórmula para o cálculo dos polinômios de Adomian apresentada em (B.10) foi demonstrada por ABBAOUI, CHERRUAULT e SENG [3].

B.3 SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

De acordo com [4], as equações de Navier-Stokes para o escoamento de um fluido incompressível com viscosidade cinemática ν e massa específica ρ constante são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} - \nu \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \bar{F} & u \in \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \bar{u} &= 0 & \Omega \times (0, T) \\ \bar{u} &= 0 & d\Omega \times (0, T) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde $\bar{u}(x, y, z, t, \omega)$ é o vetor com as componentes u, v, w , $p(x, y, z, t, \omega)$ é a pressão e \bar{F} é o vetor das forças externas. Em termos das componentes da velocidade u, v, w , escreve-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F_x \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = F_y \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = F_z \quad (\text{B.14})$$

Define-se um problema de valor inicial e de contorno especificando-se as condições iniciais para u, v, w e para $t \geq 0$ e especificando-se u, v, w na fronteira.

Reescrevendo-se o sistema (B.12), (B.13), (B.14) na forma da decomposição, tem-se:

$$\begin{aligned}
Lu + N_1(u, v, w) &= g_1 \\
Lv + N_2(u, v, w) &= g_2 \\
Lw + N_3(u, v, w) &= g_3
\end{aligned} \tag{B.15}$$

onde

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] = L_t + L_x + L_y + L_z \\
L_t &= \frac{\partial}{\partial t}, L_x = -\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}, L_y = -\nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}, L_z = -\nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
N_1 &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\
N_2 &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\
N_3 &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\
g_2 &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\
g_3 &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Para completar a especificação de g_1, g_2, g_3 , deve-se conhecer a função da pressão. Pode-se assumir uma pressão inicial, o que, naturalmente, torna-se uma função de x, y, z, t , tal como qualquer perturbação ocorre. No entanto, necessita-se determinar a dependência funcional da pressão sobre as velocidades u, v, w , para que g_1, g_2, g_3 sejam calculáveis.

Encontrando-se a divergência de cada termo na equação de Navier-Stokes, ∇p torna-se $\nabla^2 p$ ou $\frac{1}{\rho} \nabla^2 p$ dependendo da definição usada para p . O primeiro e o terceiro termo se anulam a partir da condição da divergência. O segundo termo é dado por $\nabla(\bar{u} \cdot \nabla) \cdot \bar{u}$. Deste modo tem-se:

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \bar{F} - \nabla(\bar{u} \cdot \nabla) \cdot \bar{u} \tag{B.18}$$

Assim, resulta:

$$(L_x + L_y + L_z)p = \nabla \cdot \bar{F} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] - 2 \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right] \quad (\text{B.19})$$

Considerando-se

$$f = \nabla \cdot \bar{F} - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] - 2 \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right]$$

obtem-se:

$$(L_x + L_y + L_z)p = f \quad (\text{B.20})$$

onde $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ e $L_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Resolvendo-se a equação (B.20) para $L_x p$, tem-se:

$$L_x p = f - L_y p - L_z p \quad (\text{B.21})$$

e aplicando-se o operador inverso $L_x^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$ para resolver a equação (B.21),

obtem-se:

$$L_x^{-1} L_x p = L_x^{-1} (f - L_y p - L_z p)$$

de onde resulta:

$$p = A + Bx + L_x^{-1} (f - L_y p - L_z p)$$

ou seja

$$p = A + Bx + L_x^{-1} f - L_x^{-1} L_y p - L_x^{-1} L_z p, \quad (\text{B.22})$$

sendo que as constantes A e B são determinadas a partir das condições de contorno.

Escrevendo-se $p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$ e identificando-se

$$p_0 = A + Bx + L_x^{-1} f \quad (\text{B.23})$$

obtem-se para $n \geq 0$

$$p_{n+1} = -L_x^{-1} L_y p_n - L_x^{-1} L_z p_n \quad (\text{B.24})$$

Pode-se escrever uma aproximação com n termos para p por $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} p_i$, que

converge para $p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$. Equações semelhantes podem ser escritas para $L_y p$ e $L_z p$.

Assume-se a pressão inicial dada por A na equação para p_0 . O coeficiente B é zero, desde que a perturbação se anule ao $x \rightarrow \infty$. Usa-se este p para encontrar u, v e w . As velocidades resultantes são usadas na equação para p , como funções da velocidade, para produzir um melhoramento em $p = p_0 + p_1$, (que re-calcula p_0 por causa da mudança em f). Isto é usado para melhorar os resultados para as velocidades u, v e w . Estes cálculos podem prosseguir até que se tenham resultados suficientemente precisos para u, v, w e p .

Considerando-se as equações (B.15)

$$\begin{aligned} Lu + N_1(u, v, w) &= g_1 \\ Lv + N_2(u, v, w) &= g_2 \\ Lw + N_3(u, v, w) &= g_3 \end{aligned}$$

onde $L = L_t + L_x + L_y + L_z$, se as condições iniciais são conhecidas, as equações envolvendo o operador L_t serão mais simples, visto que somente uma simples integração é exigida.

Então, resolvendo-se estas equações em relação à variável t , escreve-se as equações (B.15) na forma

$$\begin{aligned} L_t u &= g_1 - N_1(u, v, w) - (L_x + L_y + L_z)u \\ L_t v &= g_2 - N_2(u, v, w) - (L_x + L_y + L_z)v \\ L_t w &= g_3 - N_3(u, v, w) - (L_x + L_y + L_z)w \end{aligned}$$

e aplica-se o operador inverso $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ em cada uma destas equações, obtendo-se:

$$\begin{aligned} L_t^{-1} L_t u &= L_t^{-1} g_1 - L_t^{-1} N_1(u, v, w) - L_t^{-1} (L_x + L_y + L_z)u \\ L_t^{-1} L_t v &= L_t^{-1} g_2 - L_t^{-1} N_2(u, v, w) - L_t^{-1} (L_x + L_y + L_z)v \\ L_t^{-1} L_t w &= L_t^{-1} g_3 - L_t^{-1} N_3(u, v, w) - L_t^{-1} (L_x + L_y + L_z)w \end{aligned}$$

e, portanto, resulta em:

$$u = u|_{t=0} + L_t^{-1} g_1 - L_t^{-1} N_1(u, v, w) - L_t^{-1} (L_x + L_y + L_z)u \quad (\text{B.25})$$

$$v = v|_{t=0} + L_t^{-1} g_2 - L_t^{-1} N_2(u, v, w) - L_t^{-1} (L_x + L_y + L_z)v \quad (\text{B.26})$$

$$w = w|_{t=0} + L_t^{-1} g_3 - L_t^{-1} N_3(u, v, w) - L_t^{-1} (L_x + L_y + L_z)w \quad (\text{B.27})$$

São consideradas as decomposições $u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $v = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, $w = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$, escrevendo-se também N_1, N_2, N_3 e f em termos dos polinômios de Adomian A_n . Desta forma, de (B.25) a (B.27) obtém-se:

$$u_0 = u|_{t=0} + L_t^{-1} g_1 \quad (\text{B.28})$$

$$v_0 = v|_{t=0} + L_t^{-1} g_2 \quad (\text{B.29})$$

$$w_0 = w|_{t=0} + L_t^{-1} g_3 \quad (\text{B.30})$$

$$u_{n+1} = -L_t^{-1} A_n \{N_1\} - L_t^{-1} (L_x + L_y + L_z) u_n, \quad n \geq 0 \quad (\text{B.31})$$

$$v_{n+1} = -L_t^{-1} A_n \{N_2\} - L_t^{-1} (L_x + L_y + L_z) v_n, \quad n \geq 0 \quad (\text{B.32})$$

$$w_{n+1} = -L_t^{-1} A_n \{N_3\} - L_t^{-1} (L_x + L_y + L_z) w_n, \quad n \geq 0 \quad (\text{B.33})$$

onde a notação $A_n \{\cdot\}$ se refere ao polinômio de Adomian para a função entre as chaves.

Finalmente, obtém-se as aproximações $\varphi_n^{(u)} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$, $\varphi_n^{(v)} = \sum_{i=0}^{n-1} v_i$, $\varphi_n^{(w)} = \sum_{i=0}^{n-1} w_i$,

respectivamente, para as soluções u, v, w com n termos.