XXXV SALÃO
de INICIAÇÃO
CIENTÍFICA
6 a 10 de novembro

Evento	Salão UFRGS 2023: SIC - XXXV SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2023
Local	Campus Centro - UFRGS
Título	Álgebras de Lie, Envolvente universal e o Teorema PBW
Autor	JULIANO BIANCHI TRESOLDI
Orientador	BARBARA SEELIG POGORELSKY

As álgebras de Lie são estruturas algébricas que surgem naturalmente na geometria diferencial e em suas aplicações. Estão relacionadas aos grupos de Lie, que consistem em grupos topológicos com uma estrutura diferencial, comuns em física. Nestes casos, a álgebra de Lie associada é o espaço tangente ao elemento identidade do grupo, e seus membros são ditos os geradores infinitesimais do grupo. Vejamos como álgebras de Lie são facilmente fabricadas à partir de álgebras associativas e que, de fato, à menos de isomorfismo, cada álgebra de Lie de dimensão finita surge desta forma à partir de uma álgebra associativa universal que pode ser descrita de forma particularmente simples através de uma base da álgebra de Lie.

Definição 1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Chamamos de $\mathbb{K}$-*álgebra* um espaço vetorial A sobre $\mathbb{K}$ munido de uma operação bilinear, que chamamos genericamente de produto:

$$x(\lambda y + z) = \lambda xy + xz, \quad (x + y)\lambda z = \lambda xz + yz \qquad \forall x, y, z \in A, \lambda \in \mathbb{R}$$

Um elemento $e \in A$ é dito *elemento identidade* se, para todo $x \in A$ $xe = ex = x$. Uma álgebra com tal elemento é dita *unital*. Se o produto for associativo, dizemos que A é uma álgebra associativa, etc.

Exemplo 1. $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ o espaço de matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, é uma álgebra com produto dado pelo produto matricial. Mais geralmente, dado em $\mathbb{K}$-espaço vetorial V, o $\mathbb{K}$-espaço $\mathrm{End}(V)$ de transformações lineares invertíveis de V é uma álgebra associativa com produto dado por composição.

Definição 2. Uma *álgebra de Lie* L é uma $\mathbb{K}$-álgebra com produto $[\cdot, \cdot]$ satisfazendo:

1. (Anti-comutatividade) $\quad [x, x] = 0$
2. (Identidade de Jacobi) $\quad [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

Definimos a dimensão de L como sendo sua dimensão como $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Exemplo 2. Alguns exemplos de álgebras de Lie,

- Qualquer espaço vetorial V com $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in V$. Dita uma álgebra abeliana.
- $V = \mathbb{R}^3$ com $[x, y] = x \times y$.
- Se A é uma álgebra associativa então definindo $[x, y] = xy - yx$, temos que A com produto $[\cdot, \cdot]$ é uma álgebra de Lie, denotada por A^-. No caso $A = \mathrm{End}(V)$ para algum espaço vetorial V, denotamos A^- por $\mathfrak{gl}(V)$.

Dado o último exemplo acima é natural perguntar se toda álgebra de Lie surge como A^- para alguma álgebra associativa A. Vejamos adiante que a resposta é afirmativa. Para isso vamos formalizar a questão.

Definição 3. Dado A uma $\mathbb{K}$-álgebra e $B \subset A$ um subespaço de A, dizemos que B é uma *subálgebra* de A caso B for fechada por produto.

Definição 4. Dado A uma $\mathbb{K}$-álgebra e $B \subset A$ uma subálgebra, B é dito um *ideal à direita* de A se, para todo $a \in A$ e $b \in B$, $ab \in B$. Ideais à esquerda são definidos analogamente. Em uma álgebra de Lie todo ideal é tanto à esquerda quanto à direita, dito *ideal bilateral*.

Definição 5. Dadas $(A, [\cdot, \cdot]_A)$ e $(B, [\cdot, \cdot]_B)$ $\mathbb{K}$-álgebras de Lie, uma transformação linear $f : A \to B$ é dita um *homomorfismo* de álgebras de Lie se para todo $x, y \in A$, $f([x, y]_A) = [f(x), f(y)]_B$. Chamamos de *isomorfismo* um homomorfismo bijetivo.

Teorema 1. *Se $f : A \to B$ for um homomorfismo das álgebras de Lie A e B, então:*

- $Im(f)$ *é uma subálgebra de* B
- $Ker(f)$ *é um ideal de* A
- $A/Ker(f)$ *e* $A/Ker(f) \cong Im(f)$

Com essas definições em mente, vemos que nossa pergunta deve ser: Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, existe uma álgebra associativa unital A e um homomorfismo de álgebras de Lie injetivo $\psi : \mathfrak{g} \to A^-$? Uma álgebra com tal propriedade é dita uma *álgebra envolvente de* $\mathfrak{g}$.Vamos responder positivamente construindo uma tal álgebra que é, de certa forma, maximal entre as possíveis álgebras envolventes. Para isso, lembremos do produto tensorial de espaços vetoriais, que é associativo no seguinte sentido: Se U, V, W são espaços vetoriais então $(V \otimes U) \otimes W \cong V \otimes (U \otimes W)$. Portanto faz sentido escrever $V \otimes U \otimes W$. Se V for um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, então adotamos a seguinte notação:

$$V^{\otimes 0} = \mathbb{K} \qquad V^{\otimes 1} = V \qquad V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes V \cdots \otimes V}_{n \text{ vezes}} \text{ para } n > 1.$$

Definição 6. Seja $\mathfrak{g}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra de Lie. A *álgebra tensorial* de $\mathfrak{g}$ é o espaço vetorial:

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes k}$$

com multiplicação definida por

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n)(y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_m) = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_m$$

Podemos interpretar $T(\mathfrak{g})$ como a álgebra de polinômios formais com variáveis não comutativas advindas de $\mathfrak{g}$. Pela associatividade e multilinearidade do produto tensorial, $T(\mathfrak{g})$ é $\mathbb{K}$-álgebra associativa unital, com identidade $1_{\mathbb{K}} \in g^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Claramente temos a inserção canônica $\mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ como espaço vetorial, resta impor uma estrutura de álgebra de Lie em $i(\mathfrak{g}) \subset T(\mathfrak{g})$ para obtermos uma álgebra envolvente. Faremos isso quocientando $T(\mathfrak{g})$ por um ideal adequado. De fato, muitas estruturas importantes na Álgebra são construídas como quocientes de uma álgebra tensorial.

Definição 7. Seja J um subconjunto de $T(\mathfrak{g})$. O *ideal gerado por* J denotado por $\langle J \rangle$ é o ideal bilateral dado por:

$$\langle J \rangle = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes j_i \otimes b_i, \; j_i \in J, a_i, b_i \in T(\mathfrak{g}), n \in \mathbb{N} \Big\}$$

Definição 8. Seja $\mathfrak{g}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra de Lie e $J = \{X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \; X, Y \in i(\mathfrak{g})\} \subset T(\mathfrak{g})$. A *álgebra envolvente universal de* $\mathfrak{g}$ é a álgebra quociente:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\langle J \rangle$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ continua sendo uma álgebra associativa unital e vale o teorema:

Teorema 2. *Existe um único homomorfismo injetivo de álgebras de Lie $j : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})^-$. Ou seja, $\mathfrak{g}$ é isomorfa à uma subálgebra de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^-$.*

Que tal homomorfismo existe é fácil de ver. Porém, sua injetividade não é trivial, e segue do seguinte resultado fundamental para a teoria de álgebras de Lie, o Teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW):

Teorema 3 (PBW)**.** *Se $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita e base $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ então elementos do tipo $j(X_1)^{n_1} \otimes j(X_2)^{n_2} \otimes \cdots \otimes j(X_k)^{n_k}$, nesta ordem, com os n_i variando nos naturais, geram $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e são linearmente independentes. Em particular $\{j(X_1), j(X_2), \ldots, j(X_k)\}$ é um conjunto l.i.*