PEDRO HENRIQUE DA SILVA MONTEIRO

GEOMETRIA PLANA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM ESTUDO COM ESTUDANTES DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Marilaine Fraga Sant'Ana

Porto Alegre

2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar a vida e me manter com saúde para eu ir atrás dos meus sonhos.

Agradeço a minha esposa, por ser minha melhor amiga, minha confidente, meu esteio, minha grande motivação e suporte até nos dias mais difíceis.

Agradeço ao meu pai e minha tia, por terem sido tão importantes na minha caminhada até o presente momento, me educando e me fortalecendo para os dias de tormenta que vieram e que virão.

Agradeço aos meus irmãos de sangue, Lucas e Joanna, e meu irmão do coração, Júnior por me apoiarem, me ensinarem sobre a vida, serem meus exemplos de seres humanos e por me darem inúmeros puxões de orelha.

Agradeço a minha avó Ilda, por ter me acolhido tão bem, participado ativamente da minha criação, não ter medido esforços para me ver formado (conseguimos, vó!).

Agradeço à família de minha esposa, por ter me recebido tão bem e ter me dado momentos de imensa alegria durante a caminhada até aqui.

Agradeço aos amigos que a universidade me apresentou que se tornaram irmãos de outras mães que, embora passamos muito tempo sem nos falar, quando nos encontramos é como se tivéssemos nos visto "ontem".

Agradeço a professora Marilaine que topou me orientar neste que é o último trabalho da graduação e, também, agradeço a cada um dos professores que tive, tanto na minha trajetória na educação básica, quanto no ensino superior. Alguns deles tive a honra de trabalhar na mesma instituição, o que muito me orgulha.

Por fim, agradeço a cada profissional que contribuiu de alguma maneira com a minha trajetória acadêmica e profissional. Cada um deles colocou um tijolinho na edificação permanente do Professor Pedro Monteiro.

Resumo

O presente Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo analisar quais estratégias os alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola particular de Canoas/RS estabelecem para resolver problemas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Esse trabalho emerge da necessidade do pesquisador de buscar alternativas para preparar os estudantes da instituição em que atua para provas externas como o ENEM e vestibulares. A presente pesquisa é de abordagem qualitativa considerando as contribuições de Silveira e Córdova (2009) e foi desenvolvida à luz da Resolução de Problemas de Polya (1995), utilizando Onuchic e Allevato (2009) como inspiração nas etapas de Resolução de Problemas. Para a análise dos dados, foi utilizada a Teoria dos Três Mundos de David Tall. A produção de dados foi realizada em uma turma da segunda série do Ensino Médio de uma escola particular no ano letivo de 2023. Considerando que o público-alvo deste estudo são estudantes de uma escola que prepara para avaliações externas, foram selecionados e adaptados alguns problemas das provas do ENEM para a execução da prática. Após a produção de dados, a fim de responder a pergunta norteadora da pesquisa, foram analisadas as resoluções dos problemas desenvolvidas pelos estudantes participantes a partir do referencial teórico que embasa o estudo. Por meio dessa prática, os estudantes foram incentivados a pensar de maneira autônoma, aprimorar suas estratégias de resolução, fortalecer a capacidade de interpretação e desenvolver habilidades simbólicas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Geometria Plana; David Tall.

Abstract

The present Final Course Work aims to analyze the strategies employed by second-year high school students at a private school in Canoas/RS to solve problems from the National High School Examination (ENEM). This research emerges from the researcher's need to seek alternatives to prepare students at the institution where they work for external exams such as the ENEM and college entrance exams. This study adopts a qualitative approach, considering the contributions of Silveira and Córdova (2009), and is developed based on Polya's Problem-Solving Framework (1995), drawing inspiration from Onuchic and Allevato (2009) in the problem-solving stages. The Three Worlds Theory by David Tall is employed for data analysis. Data collection took place in a second-year high school class at a private school during the 2023 academic year. Given that the target audience of this study comprises students at a school that prepares them for external assessments, some problems from ENEM exams were selected and adapted for practical execution. Following data collection, to address the research question, the problem-solving solutions developed by participating students were analyzed within the theoretical framework underpinning the study. Through this practice, students were encouraged to think autonomously, refine their problem-solving strategies, enhance their interpretative skills, and develop symbolic abilities.

Keywords: Problem Solving; Plane Geometry; David Tall.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O pesquisador, em toda sua trajetória profissional, atuou em algumas instituições de ensino as quais tinham como principal objetivo a preparação para avaliações externas como ENEM e vestibulares, por exemplo. Atualmente, o pesquisador leciona em uma escola particular de Ensino Médio de Canoas-RS em turmas de 1ª e 2ª série que também tem como foco a preparação para avaliações externas. Recentemente, o pesquisador concluiu a disciplina Educação Matemática e Docência II, disciplina obrigatória do currículo de Licenciatura em Matemática da UFRGS, em que foram estudadas algumas metodologias de ensino.

Dentre as metodologias apresentadas, a Resolução de Problemas despertou curiosidades e interesses considerando a realidade em que o licenciando trabalha. Tendo em vista que o conteúdo programático do segundo semestre da segunda série do Ensino Médio da escola em que o pesquisador leciona é geometria plana e espacial, foi escolhido o assunto de geometria plana para realizar o presente trabalho de conclusão de curso. Dessa maneira, o pesquisador visa investigar quais estratégias os alunos desenvolvem para resolver problemas por meio de resolução de problemas extraídos do ENEM no contexto e propósito dos discentes, aliado com a característica da instituição que será aplicada a pesquisa. Sob essa ótica, a pergunta norteadora da pesquisa é: "De que forma os estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Canoas desenvolvem estratégias para a resolução de problemas relacionados aos conteúdos de geometria plana?". A abordagem por meio de resolução de problemas que o pesquisador propõe visa promover um ambiente para que os estudantes possam desenvolver algumas habilidades da Competência de área 2 da Matemática da Matriz de Referência ENEM (C2). A C2 visa "utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela" (BNCC, 2018) e suas habilidades são:

a. H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
b. H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
c. H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
d. H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Os problemas que foram selecionados contemplam as habilidades H7, H8 e H9, pois estas compõem o objeto de estudo dos alunos da 2ª Série do Ensino Médio a partir do currículo da Escola Particular em questão. Os problemas selecionados são apresentados no Capítulo 3. A seguir apresentamos a estrutura do presente trabalho.

O Capítulo 2 é destinado ao referencial teórico que a pesquisa se baseia. Nele, o pesquisador cita, dentre outros pesquisadores, Dante como referência para resolução de problemas e David Tall e sua Teoria dos Três Mundos da Matemática para a análise dos dados produzidos nas práticas docentes.

No Capítulo 3 são descritas as atividades realizadas com os alunos da 2ª Série do Ensino Médio de uma escola de Canoas/RS, bem como os problemas selecionados. Neste capítulo, descrevemos como foi planejada a sequência pedagógica, bem como o porquê da escolha de cada um dos problemas propostos.

O Capítulo 4 é o espaço do relato minucioso da produção e análise dos dados. A análise do processo da resolução de problemas é realizada, como explicado no capítulo 2, por meio da Teoria dos Três Mundos de David Tall. Foram analisados cada um dos problemas e as diferentes maneiras de resolver que os alunos desenvolveram, mesmo que de forma não tão assertiva.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresentamos os referenciais teóricos que fundamentam o presente trabalho. Nas seções a seguir apresentamos a concepção de Resolução de Problemas de Polya e a Teoria dos Três Mundos de David Tall.

2.1 Resolução de Problemas

Segundo Dante (2005) um problema é qualquer circunstância que exige o indivíduo pensar para resolvê-la. A resolução de problemas pode ajudar no processo do ensino da Matemática e na aprendizagem de Matemática ajudando os alunos a desenvolver o raciocínio matemático por meio de diferentes problemas. Ainda segundo Dante (apud SOUZA, 2005, p.3).

> É possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela (SOUZA, 2005, p. 3).

Assim, Dante sustenta que a resolução de problemas é uma abordagem pedagógica muito eficaz também para desenvolver uma variedade de habilidades importantes nos alunos, como iniciativa, criatividade, independência, raciocínio lógico e uso inteligente de recursos. Essa abordagem se baseia no princípio de que os alunos aprendem melhor ao enfrentar desafios e encontrar soluções por si mesmos, em vez de receber informações passivamente.

De acordo com Polya (1995), um importante pesquisador em resolução de problemas, ao resolver um problema pode existir uma vontade de investigá-lo:

> Por trás do desejo de resolver este ou aquele problema que não resulta em nenhuma vantagem material, pode haver uma curiosidade mais profunda, um desejo de compreender os meios e as maneiras, as motivações e os procedimentos de resolução (POLYA,1995, pg. 6).

Assim, é possível observar, sob a ótica de Polya (1995), que a resolução de problemas envolve analisar minuciosamente os elementos que compõem o problema, buscando padrões e conexões. Esse processo não apenas resulta em uma solução, mas também proporciona uma compreensão mais profunda dos processos subjacentes, o que pode ser uma motivação por si só e a motivação para resolver problemas desafiadores, mesmo sem uma recompensa tangível, é alimentada pela curiosidade inata do ser humano. Essa busca pelo conhecimento e compreensão é intrinsecamente gratificante e estimula a mente a investigar e aprender.

Para a abordagem sob a ótica da resolução de problemas, Polya (1995) cita alguns passos para a compreensão e procedimentos:

1. Compreensão do problema;
2. Planejamento de estratégias;
3. Execução das estratégias revendo todos os passos;
4. Verificação e interpretação dos resultados obtidos.

A primeira fase envolve compreender o problema, isto é, entender a situação descrita na descrição. Uma tática útil é, por exemplo, questionar o aluno se ele compreendeu o enunciado; caso a resposta seja positiva, o docente pode pedir a ele que explique o problema. Normalmente, ele iria ler a questão em voz alta e, em seguida, explicar como ele a entendeu. Tal exercício permite ao discente compreender o que realmente significa entender o problema a ponto de internalizá-lo, sendo capaz de explicá-lo a outrem sem depender do enunciado.

Dentro desse processo de compreensão do problema, é crucial que o aluno identifique qual é a incógnita presente no desafio. Quando se fala em "incógnita", não necessariamente está associado ao conceito de "incógnita" da álgebra, mas sim representa aquilo que precisa ser descoberto para solucionar o problema. Logo, "Qual é a incógnita?' pode ser entendida como uma espécie de pergunta norteadora. Em alguns problemas, podem existir mais de uma incógnita, especialmente quando a sua resolução é dividida em mais de uma etapa. A falta de clareza sobre qual é a incógnita impossibilita a formulação de uma estratégia de resolução.

No planejamento de estratégias, por sua vez, envolve a criação de um plano ou estratégia para resolver o problema. Um passo inicial é tentar estabelecer conexões entre as informações fornecidas no enunciado e as incógnitas que foram identificadas na etapa anterior. A prática constante de resolução de problemas é importante, pois os estudantes gradualmente vão acumulando uma bagagem de problemas resolvidos, que podem servir de base para os problemas futuros. Ou seja, quando o aluno se depara com um novo problema, ele pode recorrer a soluções anteriores como base, aproveitando as estratégias e métodos semelhantes.

Essa prática sistemática de resolver problemas não só aumenta a proficiência do estudante na resolução, mas também aprimora sua capacidade de discernir e identificar padrões e abordagens adequadas para aplicar estratégias aprendidas previamente. Dessa forma, cada problema resolvido se torna um bloco de sustentação para a resolução de desafios futuros, o que pode ser fundamental em problemas mais complexos.

Na terceira etapa, a Execução, como o próprio nome já diz, preocupa-se em colocar as ideias das duas outras etapas em prática, sendo muito importante validar os passos que foram seguidos. Na última etapa, a de Verificação e Interpretação dos resultados obtidos, tem por característica analisar o macro do problema. Perceber se a resposta faz sentido ou não. Além disso, podemos verificar se pode-se chegar à solução do problema usando um outro caminho, sendo este mais otimizado ou não. Se o aluno consegue fazer essa análise sobre o problema e sua solução fazer ou não sentido, muitos erros podem ser evitados.

Segundo Onuchic e Allevato, (apud MESQUITA, 2015, p.37): “a resolução de problemas desenvolve a capacidade de pensar a Matemática usando as estratégias para resolver diferentes problemas”. Além disso, os autores entendem que a resolução de problemas pode aumentar a confiança e a autoestima dos discentes e os professores que aplicam essa metodologia, visto que, sentem-se satisfeitos com o desenvolvimento dos alunos na compreensão dos problemas e no raciocínio matemático. Dessa forma entende-se que uma proposta pedagógica que compreende a resolução de problemas pode desenvolver a capacidade de pensar matemática, além de ser agradável tanto para os estudantes quanto para o professor.

Como etapas da Resolução de Problemas, Onuchic e Allevato (2009) sugerem a seguinte sequência de passos:

a. Preparação do problema: baseia-se em escolher um problema para possibilitar um ambiente para construção de um novo conceito para o aluno. Esse problema será chamado de "problema gerador";
b. Leitura individual: entregar aos alunos para lerem individualmente;
c. Leitura em conjunto: os alunos, agora em grupo, lerem o problema. Caso tenha dúvidas sobre ele, o professor pode ajudar a compreender o problema;
d. Resolução do problema: a partir do entendimento do problema, os alunos buscam pela sua solução;
e. Observar e incentivar: o papel do professor agora é observar e incentivar os alunos a resolverem o problema. Pode até ajudar fazendo perguntas, mas não atua mais como o transmissor do conhecimento;
f. Registro das resoluções na lousa: um aluno por grupo é convidado a registrar as soluções no quadro para que todos os alunos possam discutir sobre as soluções encontradas nos problemas;
g. Plenária: nessa etapa, ocorrem as discussões sobre as resoluções desenvolvidas pelos alunos, com o professor assumindo o papel de mediador do processo;
h. Busca do consenso: o professor tenta, a partir das soluções e do que foi discutido, chegar em um consenso com a turma;

i. Formalização do conteúdo: ao final, o professor registra uma formalização do conteúdo no quadro, padronizando os conceitos trabalhados.

A sequência pedagógica aplicada, foi inspirada em algumas das etapas descritas anteriormente, sendo elas: preparação de problemas, leitura em conjunto, resolução de problemas e observar e incentivar. A análise do produto final, ou seja, as resoluções dos problemas propostos serão com base na Teoria dos Três Mundos de David Tall.

2.2 Teoria dos Três Mundos

Vários investigadores se dedicaram a compreender a natureza do processo cognitivo no estudo de como os alunos aprendem matemática. Entre eles está David Tall, que explorou esse tema em sua obra intitulada "*How humans learn to think mathematically*" ("Como humanos aprendem a pensar matematicamente" em minha tradução livre), publicada em 2013. Nesse trabalho, ele compartilhou os frutos de sua extensa trajetória de pesquisa voltada para a compreensão do aprendizado da Matemática.

De acordo com as conclusões de Tall (2013), os pensamentos enraizados na matemática evoluem gradualmente à medida que um indivíduo progride em seu desenvolvimento. Esses pensamentos não resultam apenas da soma passiva de conhecimentos assimilados, visto que cada novo conhecimento dá origem a uma reestruturação dos saberes anteriores. Isso, por sua vez, conduz a alterações e à formação de estruturas de conhecimento cada vez com mais interseções ao longo do tempo.

2.3.1 O Mundo Corporificado

Nesse mundo, são percebidas as características de um objeto, podendo este ser físico ou abstrato. Esse objeto pode ser uma figura geométrica, um gráfico, entre outros. Logo, os objetos podem ser manipuláveis fisicamente, ou não. Sendo fisicamente manipuláveis, podem ser entendidos, em um segundo momento, em objetos mentais, como uma pirâmide, por exemplo.

Segundo Tall (2004), no Mundo Conceitual Corporificado (ou apenas Mundo Corporificado) são envolvidas percepções sobre objetos físicos, significados e concepções mentais que integram esses objetos. Tais concepções surgem a partir de percepções e ações mentais sobre os objetos que já são conhecidos.

Segundo Lima (2007), são utilizadas as experiências com as características corporificadas para entender um conceito e operar sem a necessidade da utilização de uma linguagem matemática, pois apenas a observação é o suficiente para o compreender.

Sob essa ótica, o Mundo Corporificado é, portanto, formado pelos objetos, pelas suas imagens e pelas ações que se podem fazer sobre estes objetos, sendo eles físicos ou mentais. O nome "corporificação" tem raízes no termo "criar corpo", mas os objetos do Mundo Corporificado não são exclusivamente aqueles que têm corpo sólido, como, por exemplo, a esfera. A representação dos gráficos de função ou até mesmo o desenho de figuras planas em uma folha de papel, são imagens reconhecidas pelo seu formato, e, portanto, elas apresentam características do Mundo Corporificado.

2.3.2 O Mundo Simbólico

O Mundo Simbólico resume-se na utilização de símbolos na representação de ações sobre um objeto. Segundo Tall (2013), o mundo simbólico é formado por símbolos matemáticos.

Segundo Gray e Tall (1994 apud LIMA, 2007, p.57), os símbolos matemáticos são formados por uma união entre processo e conceito. Ao unirmos às duas palavras, têm-se uma nova ideia: os "proceitos". Gray e Tall (1994) apontam, ainda, que a utilização de símbolos pode auxiliar o estudante no entendimento da matemática. Os alunos que utilizam os símbolos tendo como foco apenas a operacionalização poderão apresentar grandes dificuldades em aprender Matemática. Assim, pode-se entender que a operacionalização dos símbolos matemáticos, para desenvolver a cognição matemática do aluno, precisa estar atrelada aos conceitos.

2.3.3 O Mundo Formal

O Mundo Formal baseia-se nos teoremas e definições do sistema axiomático da matemática. É possível encontrar essas características no Ensino Médio, quando surge a necessidade da utilização de definições matemáticas.

> ...há o uso de algumas características desse mundo, em dados momentos, como, por exemplo, quando o aluno se depara com demonstrações, em que ele precisa compreender o desencadeamento dos passos nelas efetuados, ou mesmo ao se deparar

> com definições, propriedades ou princípios da Matemática ao realizar alguma manipulação algébrica ou alguma generalização. (LIMA, 2007, p.79)

Ao explorarmos o Mundo Formal, percebemos que é um ambiente que abriga um conjunto de definições, axiomas, teoremas, deduções e demonstrações matemáticas. Nesse mundo, os conceitos são meticulosamente estruturados e precisos, o que confere à matemática formal a capacidade de transcender os contextos específicos nos quais é aplicada. Em outras palavras, as verdades matemáticas estabelecidas neste mundo mantêm sua validade independentemente da situação em que são trabalhadas.

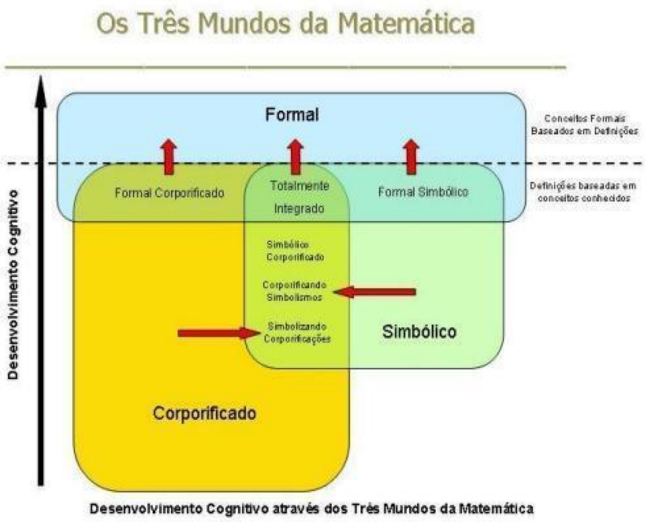
Quando se trata da elaboração de provas e demonstrações no Mundo Formal, os elementos do Mundo Simbólico e do Mundo Corporificado podem ser habilmente empregados. Essa interação revela a profunda inter-relação que permeia os Três Mundos da Matemática. O uso dos símbolos abstratos, característicos do Mundo Simbólico, assim como uma compreensão prática e intuitiva, representativa do Mundo Corporificado, convergem no desenvolvimento das fundamentações e evidências que sustentam as conclusões no Mundo Formal Axiomático. Esse entrelaçamento dos três mundos não apenas enriquece a forma como a matemática é concebida e aplicada, mas também destaca a sua natureza profundamente complexa e abrangente.

Ao longo da vida, o processo de aprendizado de um indivíduo passa por uma evolução que incorpora características distintas dos Três Mundos da Matemática. Essa evolução ocorre de maneiras variadas e singulares para cada pessoa. Segundo as ideias de Tall (2013), é crucial entender que os Três Mundos da Matemática não são compartimentos isolados e estáticos. Em vez disso, eles se entrelaçam e se interconectam de maneira dinâmica. Dependendo do contexto e da situação, o conhecimento que alguém possui sobre um determinado tópico matemático pode apresentar elementos característicos de dois ou até mais dos mundos matemáticos. Por exemplo, um conceito matemático pode ser abordado de formas diferentes, adotando as características do Mundo Corporificado, que envolve uma compreensão prática e sensorial do conceito, e, ao mesmo tempo, do Mundo Simbólico, que se concentra em representações abstratas por meio de símbolos. Da mesma forma, esse conceito também pode incorporar elementos do Mundo Formal, que se relaciona com a estrutura lógica e axiomática da matemática.

Percebe-se, portanto, que os Três Mundos de David Tall estão interligados, mas os alunos podem encontrar dificuldades de transitar entre esses mundos, visto que cada estudante possui sua própria bagagem escolar e experiências, além de desenvolverem a sua cognição matemática de maneiras distintas.

A teoria dos Três Mundos de David Tall é abordada nessa investigação, pois ela descreve de maneira clara os procedimentos cognitivos na resolução de problemas matemáticos. A partir dessa teoria, é possível analisar que a transição entre os mundos está ligada diretamente com a capacidade do aluno entender as incógnitas do problema e estabelecer estratégias para solucionar o problema por meio da transição entre os mundos corporificado e simbólico. Dessa forma, entendemos que essa teoria pode embasar os resultados obtidos na produção de dados.

Figura 1: Desenvolvimento cognitivo através dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2007 apud BADARÓ, 2009, p.9)



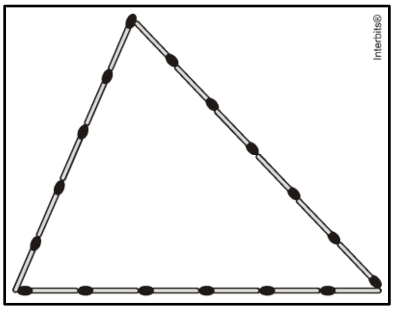
Na Figura 1, são ilustradas as três vias de evolução do conhecimento na perspectiva de Tall (2013). No quadrante inferior esquerdo, estão abarcados os elementos tangíveis e suas características, nos quais são primeiramente observados, delineados, definidos e descritos, permitindo ao indivíduo conceber representações físicas e mentais desses elementos. No quadrante inferior direito, no Simbólico, são apresentadas as operações matemáticas e suas propriedades, abrangendo a contagem, o agrupamento, as operações numéricas, os conceitos e as generalizações na esfera da álgebra, as quais se baseiam em expressões algébricas. O conhecimento pode progredir de maneiras distintas por meio da dedução formal das propriedades, chegando no desenvolvimento da matemática formal, como retratado no quadrante superior.

Para exemplificar como os Três Mundos se correlacionam, anteciparemos um dos problemas que foram abordados na prática docente: o problema 4.

4. (Enem 2014 - Adaptada) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

Figura 6. Imagem do Problema "Triângulos com Palitos de Fósforo"

Fonte: ENEM 2014



Qual a quantidade máxima de triângulos não-congruentes dois a dois que podem ser construídos? **Quais são eles? Por quê?**

Foi apresentado aos alunos os 17 palitos de fósforo para ajudar na solução do problema. No momento que os alunos começam a manipular o objeto e entender seus elementos, estão fazendo as relações cognitivas no Mundo Corporificado. Quando começam a representar em desenhos ou algebricamente as soluções para o problema, agir sobre o objeto estudado se valendo de representações, conseguem transitar para Mundo Simbólico. Por fim, caso os estudantes consigam expressar a desigualdade triangular por meio de generalizações e teoremas, os estudantes estariam transitando para o Mundo Formal.

Tall (2013) defende a ideia de que o pensamento humano pode ser incorporado por meio de experiências que englobam os sentidos e ações físicas, uma ideia particularmente aplicável à Matemática. De acordo com o autor, a forma como assimilamos o pensamento pode ser dividida em duas vertentes: uma sensorial, ligada à nossa percepção do mundo através dos sentidos, e outra motora, vinculada à nossa interação com o ambiente. Os objetos e suas características inicialmente ganham forma por meio de sensações, e posteriormente pela dimensão motora, que não apenas se relaciona com os objetos em si, mas também abrange as ações que empreendemos utilizando símbolos.

Tall (2013) explica a existência de Três Mundos da Matemática: o Mundo Conceitual Corporificado (Mundo Corporificado), o Mundo Operacional Simbólico (Mundo Simbólico) e o Mundo Formal Axiomático (Mundo Formal).

Esses mundos referem-se a tipos diferentes do desenvolvimento cognitivo matemático e se relacionam entre si, proporcionando, assim, diferentes formas do pensamento matemático que se desenvolvem ao longo do tempo, conforme a maturidade do estudante.

Por fim, a teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall fundamentalmente apresenta-nos como um ser humano, em seu desenvolvimento cognitivo, faz conexões matemáticas e de como essas estruturas do conhecimento são formadas ao longo do tempo. A observação de uma característica dos Três Mundos da Matemática no conhecimento de um indivíduo é indicativa que ocorreu aprendizado, porém, na maioria das vezes, o conhecimento deve possuir mais de uma característica desses Três Mundos da Matemática para que ele possa ser aplicado em situações concretas no nosso dia a dia.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, serão abordados os procedimentos selecionados para a realização da pesquisa. Nas seções a seguir, apontamos o tipo de abordagem considerada no trabalho, os problemas propostos e os recursos utilizados para os registros das produções dos estudantes participantes.

3.1 Pesquisa Qualitativa

A fim de responder à pergunta diretriz "De que forma os estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Canoas desenvolvem estratégias para a resolução de problemas relacionados aos conteúdos de geometria plana?" , a análise dos dados será por meio de uma pesquisa qualitativa. Segundo Silveira e Córdova (2009) a pesquisa qualitativa não se preocupa com a representatividade numérica dos dados, mas sim com o aprofundamento da compreensão de um determinado grupo social. Algumas das características principais deste tipo de abordagem, de acordo com os autores são a descrição, compreensão e explicação de um determinado fenômeno, respeito às concepções teóricas e aos dados empíricos.

Portanto, as pesquisas de abordagem qualitativa atentam-se aos aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na explicação e compreensão do fenômeno observado, conforme Silveira e Córdova (2009). Seu foco, portanto, reside na exploração de significados subjacentes, motivos, crenças e valores, indo além do que pode ser quantificado.

Sob essa ótica, a pesquisa qualitativa se concentra no entendimento do "porquê" das coisas, buscando explicações em vez de quantificações. Os dados analisados não são métricos, mas envolvem interações humanas e relatos subjetivos. Silveira e Córdova (2009) sustentam que nesse tipo de pesquisa, o pesquisador é tanto o sujeito quanto o objeto do estudo, permitindo um envolvimento ativo.

No entanto, na pesquisa qualitativa é preciso estar atento quanto à subjetividade e ao envolvimento emocional do pesquisador. Os desafios desse tipo de pesquisa incluem a necessidade de evitar o domínio excessivo do pesquisador sobre o objeto de estudo, além de assegurar a reflexão cuidadosa sobre a interpretação dos dados.

Em resumo, a pesquisa qualitativa desempenha um papel crucial na exploração das nuances das relações sociais. Ela se destaca pela busca de significados, motivos e valores, abrindo caminho para *insights* profundos e compreensão enriquecida, apesar dos desafios inerentes à subjetividade do pesquisador e às limitações na operacionalização.

A análise de dados será feita por meio de uma pesquisa qualitativa utilizando a teoria dos três mundos de David Tall, conforme citado no capítulo anterior, para a análise das diferentes estratégias utilizadas para a resolução dos problemas propostos.

3.2 Procedimentos para a Investigação

A prática foi feita com os alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola particular de Canoas/RS. Foram usufruídos cinco períodos de 45 minutos em dois dias de aulas: o primeiro dia em 3 períodos e o segundo dia em 2 períodos para a prática que consiste em organizar os alunos em grupos de 3 a 4 pessoas, tendo, no total, 5 grupos para resolver os problemas extraídos das provas do ENEM.

Disponibilizamos os problemas um a um para que eles pensem em grupo sem a preocupação em terminar o quanto antes as questões. Sem tal preocupação, é possível perceber quais estratégias que os alunos estão realizando para a resolução de cada problema, bem como o aspecto cognitivo na transição entre os Mundos da Matemática de David Tall. A instrução dada foi que os grupos precisavam estabelecer estratégias para resolver os problemas propostos, sendo que eles poderiam se valer de quaisquer conteúdos da matemática. Não esperava-se, nesse primeiro momento, que os alunos conseguissem fazer generalizações quando eram indagados sobre alguns aspectos inerentes às figuras geométricas planas, às quais estão tendo acesso pela primeira vez por meio de problemas extraídos das provas do ENEM.

As questões usadas foram adaptadas do ENEM, pois o intuito foi de que, primeiramente, não tenha alternativa, pois o fato de ter opções para as respostas poderia induzir os alunos a algum tipo de solução específica. Além disso, em algumas questões, foram adicionados alguns questionamentos para que estimulem o pensamento e façam a verificação e interpretação dos resultados obtidos. Seguem os problemas:

O primeiro problema foi extraído da prova do ENEM de 2017, questão 160 da prova cinza do segundo dia de aplicação. Pela análise dos Microdados ENEM[1], a questão é de nível fácil e aborda a habilidade 8 da matriz de referência do ENEM. A única adaptação feita nesse

[1] Microdados do ENEM é um conjunto de dados que representam a menor fração dos dados sobre a prova do ENEM. Pode ser lido por meio de um software estatístico e lá estão, dentre outras informações, a habilidade cobrada na questão, a dificuldade da questão e o gabarito da questão.

problema foi excluir as alternativas, para não haver nenhuma indução da forma de resolver a questão. Segue o problema:

3.2.1 Problema 1

1. (ENEM 2017 - Adaptada) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Figura 2. Imagem de Introdução do Problema "Caminhão entala em viaduto no Centro"

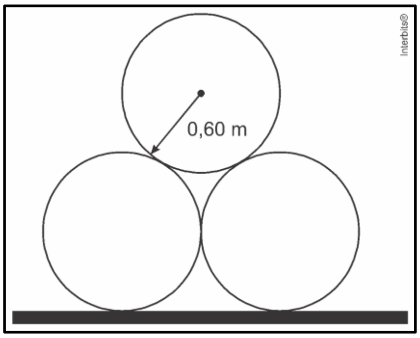
Fonte: ENEM 2017

Disponivel em: www.caminhoes-e-carretas.com.
Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.

Figura 3. Imagem do Problema "Caminhão entala em viaduto no Centro"-

Fonte: ENEM 2017



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

No caso da questão número 1, optei por incluí-la devido à sua complexidade conceitual e à necessidade de compreender a natureza de um triângulo equilátero, um conceito ainda não abordado em aula. Isso permitirá observar como os grupos elaboram estratégias para resolver o problema, tanto por meio do uso de símbolos matemáticos para uma solução precisa, quanto por uma abordagem aproximada usando o mundo concreto.

3.2.2 Problema 2

O segundo problema foi extraído da prova do ENEM de 2016, questão 159 da prova amarela do segundo dia de aplicação. Pela análise dos Microdados ENEM, a questão é de nível difícil e aborda a habilidade 9 da matriz de referência do ENEM. Foram feitas duas adaptações nesse problema. Além de excluir as alternativas, foi feita a pergunta "**Por que as demais brocas não servem para as condições impostas pelo marceneiro?**" com a finalidade de ter mais registros sobre o pensamento do grupo acerca desse problema, bem como para que os discentes verifiquem e interpretem a resolução da questão proposta. Segue o problema:

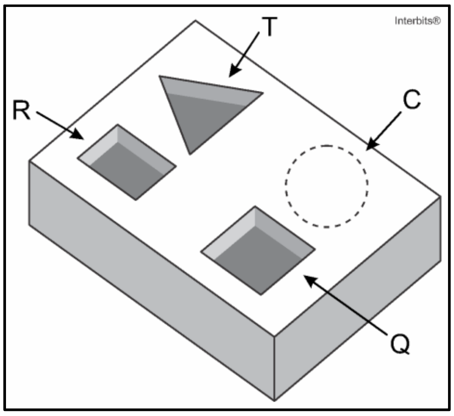
2**.** (Enem 2016 - Adaptada) Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada (Q) de lado 4 cm uma retangular (R) com base 3 cm e altura 4 cm e uma em forma de um triângulo equilátero (T) de lado 6,8 cm Falta realizar uma perfuração de base circular (C).

O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue:

(l) 3,8 cm (II) 4,7 cm (III) 5,6 cm (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm

Figura 4. Imagem do Problema “Brocas”

Fonte: ENEM 2016



Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente.

Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

Por que as demais brocas não servem para as condições impostas pelo marceneiro?

No segundo problema proposto na atividade surge um desafio que envolve a relação entre quatro polígonos e um círculo, buscando estabelecer figuras inscritas e circunscritas. A fim de auxiliar nesse processo, um material de papelão foi preparado, contendo figuras geométricas de dimensões idênticas àquelas que o problema traz, juntamente com uma representação em papelão imitando a estrutura de madeira. Isso possibilitou observar como os alunos lidam com a transição entre o mundo concreto e o mundo simbólico na resolução do problema.

3.2.3 Problema 3

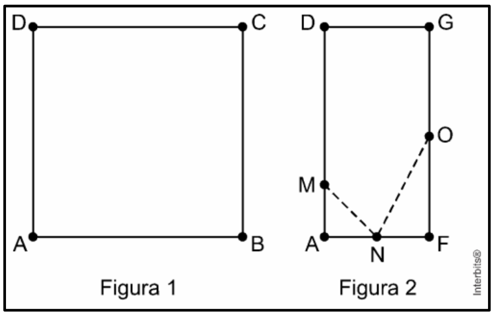
O terceiro problema foi extraído da prova do ENEM de 2015, questão 167 da prova azul do segundo dia de aplicação. Pela análise dos Microdados ENEM, a questão é de nível médio e aborda a habilidade 7 da matriz de referência do ENEM. Além de excluir as alternativas, fizemos nova adaptação. Foi colocada a seguinte pergunta: “**Se o quadrado**

ABCD (Figura 1) possui seus lados medindo 6 cm, o segmento AM mede 2 cm e o segmento OF mede 3 cm, qual a área que representa a bandeirinha pronta?" para investigar como os alunos definem as estratégias para resolver a área da figura resultante. Segue o problema:

3**.** (Enem 2015 - Adaptada) Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas bandeirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a Figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados BC e AD, de modo que C e D coincidam, e o mesmo ocorra com A e B, conforme ilustrado na Figura 2. Marcaram os pontos médios O e N, dos lados FG e AF, respectivamente, e o ponto M do lado AD, de modo que AM seja igual a um quarto de AD. A seguir, fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

Figura 5. Imagem do Problema "Bandeirinhas de Papel"

Fonte: ENEM 2015



Após os cortes, a folha é aberta e a bandeirinha está pronta.
Desenhe a figura que representa a forma da bandeirinha pronta:

Se o quadrado ABCD (Figura 1) possui seus lados medindo 6 cm, o segmento AM mede 2 cm e o segmento OF mede 3 cm, qual a área que representa a bandeirinha pronta?

Na questão 3, foi fornecido um quadrado de papel, tesoura e régua para que os alunos reproduzam as instruções dadas. Essa escolha também visa investigar a capacidade dos alunos de criar a bandeirinha. O entendimento da questão é crucial para a resolução dos problemas propostos, bem como a construção física é fundamental para compreender o desenho final e a extração das partes para o cálculo da área.

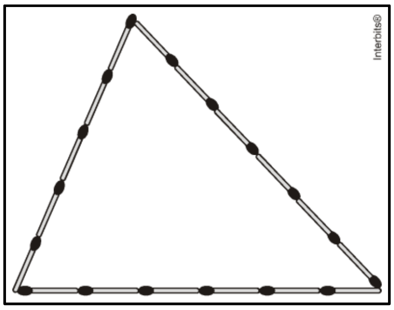
3.2.4 Problema 4

O quarto problema foi extraído da prova do ENEM de 2014, questão 147 da prova azul do segundo dia de aplicação. Pela análise dos Microdados ENEM, a questão é de nível difícil e aborda a habilidade 8 da matriz de referência do ENEM. Não foram feitas grandes adaptações. Foram excluídas as alternativas e adicionada uma pergunta ao final do problema: "**Quais são eles? Por quê?**" para que os grupos tivessem os registros de como foi pensado e quais foram as estratégias utilizadas para a solução do problema. Segue o problema:

4. (Enem 2014 - Adaptada) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

Figura 6. Imagem do Problema "Triângulos com Palitos de Fósforo"

Fonte: ENEM 2014



Qual a quantidade máxima de triângulos não-congruentes dois a dois que podem ser construídos? **Quais são eles? Por quê?**

O problema 4 apresenta um potencial para a transição entre os Três Mundos, pois envolve a utilização de palitos de fósforo, do mundo corporificado, símbolos matemáticos para operar com as medidas de lados (Mundo Simbólico) e o Mundo Formal na generalização da condição de existência de um triângulo. Com esse objetivo, foram entregues palitos de fósforo aos grupos para conseguirem representar manualmente as condições que eles pensaram para resolver o problema e, após isso, simbolizar no papel. A expectativa é que os alunos compreendam que nem sempre é possível formar um triângulo. Os palitos de fósforos são empregados como unidades de medida, permitindo observar a transição do mundo concreto para o simbólico, chegando a uma definição axiomática das condições para a existência de um triângulo.

3.2.5 Problema 5

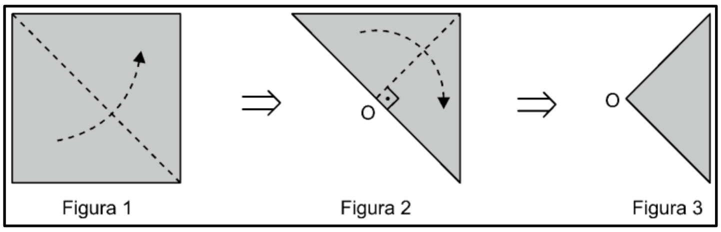
O quinto problema foi extraído da prova do ENEM de 2022, questão 156 da prova azul do segundo dia de aplicação. Pela análise dos Microdados ENEM, a questão é de nível médio e aborda a habilidade 7 da matriz de referência do ENEM. Não foram feitas grandes adaptações. Foram excluídas as alternativas e adicionada uma pergunta ao final do problema: "**Qual a sua área?**". É uma pergunta aberta que tem por objetivo não necessariamente saber se os alunos conseguem chegar na expressão que indica a área da figura resultante, mas sim quais relações que conseguem fazer para resolver, pelo menos de forma aproximada. Pensando que os alunos podem não conseguir responder a essa pergunta, bastaria que registrasse quais foram as estratégias que eles utilizam para buscar solucionar essa questão. Segue o problema:

5**.** (Enem 2022 - Adaptada) O professor de artes orientou seus estudantes a realizarem a seguinte sequência de atividades:

- Dobrar uma folha de papel em formato quadrado duas vezes, em sequência, ao longo das linhas tracejadas conforme ilustrado nas Figuras 1 e 2, para obter o papel dobrado, conforme Figura 3.

Figura 7. Imagem do Problema "Dobradura na folha de papel"

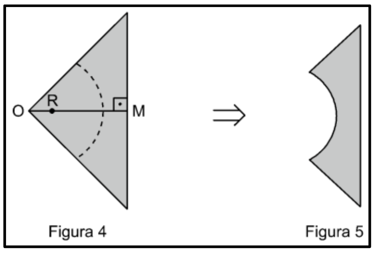
Fonte: ENEM 2022



Em seguida, no papel dobrado da Figura 3, considerar o ponto R, sobre o segmento OM, sendo M o ponto médio do lado do quadrado original, de modo que $OR = \frac{1}{4}OM$ traçar um arco de circunferência de raio medindo $\frac{1}{2}OM$ com centro no ponto R, obtendo a Figura 4. Por último, recortar o papel ao longo do arco de circunferência e excluir a parte que contém o setor circular, obtendo o papel dobrado, conforme Figura 5.

Figura 8. Imagem do Problema “Dobradura na folha de papel”- recorte

Fonte: ENEM 2022



Após desdobrado o papel que restou na Figura 5, qual a figura plana obtida? **Qual a sua área?**

Nesse problema, assim como na questão 3, envolve a utilização de um quadrado de papel para que os alunos sigam as instruções fornecidas. Foi fornecido folhas de papel quadradas de tamanho 10,5 cm x 10,5 cm para que os estudantes realizem as instruções que o problema traz. Pretendemos analisar como eles interpretam essas instruções pelo ponto de vista matemático, observando a transição do mundo simbólico para o concreto na representação na folha quadrada. A resolução envolve determinar a figura correta e, pelo menos, indicar qual a estratégia mais eficaz para calcular a área da figura resultante.

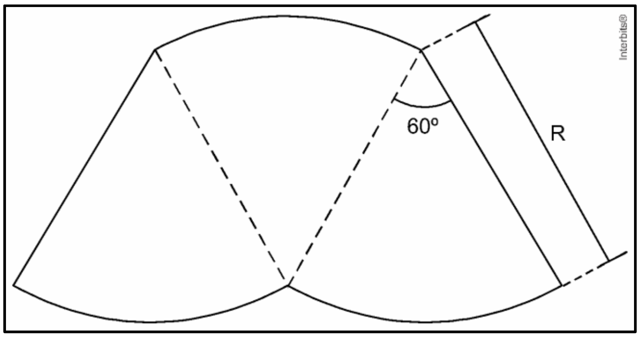
3.2.6 Problema 6

O sexto problema foi extraído da prova do ENEM de 2015, questão 165 da prova azul do segundo dia de aplicação. Pela análise dos Microdados ENEM, a questão é de nível médio e aborda a habilidade 9 da matriz de referência do ENEM. Não foram feitas adaptações além da retirada das alternativas. Segue o problema:

6. (Enem 2015 - Adaptada) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio deve ser um número natural.

Figura 9. Imagem do Problema “Piscina”

Fonte: ENEM 2015



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m. O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3 como aproximação para π

Qual o maior valor possível para R em metros?

No problema de número 6 será apresentado aos alunos um material de papelão que representa os três setores circulares com um ângulo de 60 graus, unidos por palitos de dente. A manipulação desse objeto visa levar os alunos a perceber que a área é equivalente à metade da área de um círculo. Em seguida, espera-se que realizem uma transição para o mundo simbólico, representando essa observação por meio de equações que relacionem áreas de semicírculos e retângulos.

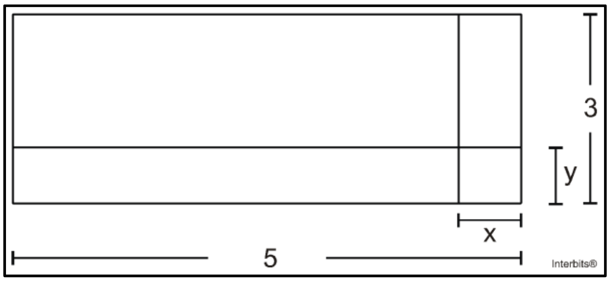
3.2.7 Problema 7

O sétimo problema foi extraído da prova do ENEM de 2012, questão 141 da prova azul do segundo dia de aplicação. Pela análise dos Microdados ENEM, a questão é de nível fácil e aborda a habilidade 8 da matriz de referência do ENEM. Não foram feitas adaptações além da retirada das alternativas. Segue o problema:

7**.** (Enem 2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem, mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).

Figura 10. Imagem do Problema “Forro retangular”

Fonte: ENEM 2012



Nessas condições, qual a expressão que representa a área perdida do forro, após a primeira lavagem?

Na questão 7, a proposta é analisar se os alunos conseguem fazer a transição do mundo concreto para o mundo simbólico. Isso ocorreu por meio da montagem das partes no papelão, em conjunto com palitos de dente, para alcançar o entendimento simbólico das expressões matemáticas. Será investigado como eles chegam à compreensão das propriedades distributivas, fatoração e produtos notáveis.

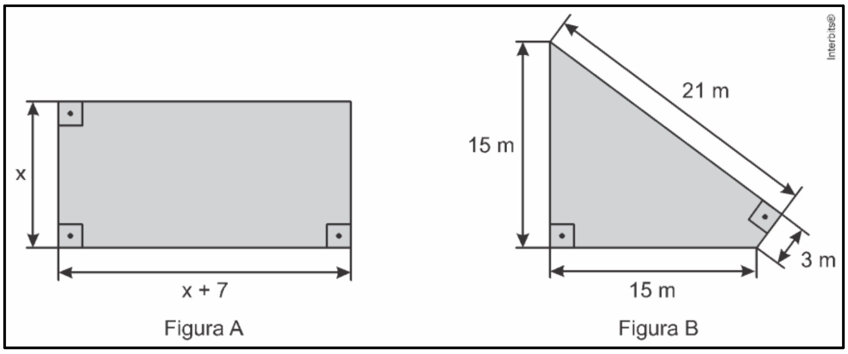
3.2.8 Problema 8

O oitavo (e último) problema foi extraído da prova do ENEM de 2016, questão 166 da prova amarela do segundo dia de aplicação. Pela análise dos Microdados ENEM, a questão é de nível médio e aborda a habilidade 9 da matriz de referência do ENEM. Além da retirada das alternativas, foi adicionada a pergunta “**Como chegou nesse resultado?**” para ter registros de como que o grupo pensou a resolução da questão. Segue o problema:

8**.** (Enem 2016- Adaptada) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

Figura 11. Imagem do Problema “Terrenos”

Fonte: ENEM 2016



Para satisfazer o filho mais novo, quantos cm devem medir o comprimento e a largura desse terreno retangular? **Como chegou nesse resultado?**

Nessa última questão, novamente com o auxílio de material de papelão, busca-se explorar a compreensão dos alunos sobre o cálculo de áreas. O objetivo é igualar as duas áreas, conceitualmente, e observar como eles transitam do mundo concreto para o simbólico, dividindo a figura B em partes que possam ser calculadas. A ideia é verificar se os alunos utilizam conceitos e estratégias semelhantes aos vistos em questões anteriores, reforçando a abordagem por resolução de problemas como uma base para desafios posteriores.

Utilizei as mencionadas questões porque estou convencido de que elas possuem o potencial de estimular os alunos a transitar entre os Três Mundos da Matemática descritos por Tall. Para facilitar essa transição, um material feito de papelão foi preparado, permitindo que os alunos visualizem certas situações do mundo concreto, buscando auxiliar no processo de resolução dos problemas.

3.3 Recursos utilizados para os registros da prática

Foram considerados neste trabalho todos os registros produzidos pelos alunos, áudios captados por aplicativos nos *smartphones* dos alunos e enviados para o pesquisador por meio da plataforma *Microsoft Teams*. Além dos recursos tecnológicos, disponibilizamos aos alunos materiais concretos de papelão simulando algumas figuras dos problemas propostos. Foram também distribuídos folhas quadradas em branco, réguas e compassos para que os alunos tivessem todos os recursos disponíveis para estabelecer quaisquer estratégias para a resolução dos problemas.

4 PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo apresentamos os dados produzidos a partir da prática com a turma da 2ª série do Ensino Médio. Em cada seção, é abordada uma das cinco questões utilizadas na prática, as competências que a questão contempla, além da resolução de cada grupo.

4.1 Problema 1

O primeiro problema é uma questão que envolve a competência 3 e habilidade 8 de acordo com a matriz de referência do ENEM. Como os alunos do segundo ano do ensino médio ainda não viram o conteúdo de geometria plana, era esperada dificuldade para o entendimento e resolução do problema. Tal dificuldade se dá pelo fato de que eles não tiveram ainda acesso às propriedades do triângulo equilátero nem as relações métricas entre o lado do triângulo e sua altura. Portanto, espera-se que os alunos tenham dificuldade de interpretar e entender como se resolve esse problema. A maneira que eu esperava que eles solucionassem era entender que pode ser formado um triângulo retângulo no interior da representação dos canos e aplicar o Teorema de Pitágoras para descobrir a altura. Após isso, somar as partes que compõem a altura que o viaduto precisava ter para que o caminhão pudesse entrar juntamente com sua carga e com uma folga de 0,50 metros.

Quatro dos cinco grupos resolveram de uma mesma forma. O grupo, que resolveu o problema de maneira diferente, tinha um novo aluno, transferido de uma outra escola particular. Na outra escola ele já havia visto o conteúdo de geometria plana e, inclusive, já tinha resolvido esse problema. Portanto, esse grupo não teve nenhuma dificuldade para a resolução dessa questão. Os outros grupos, no entanto, tiveram grande dificuldade no entendimento da questão. Um grupo em específico (o que será analisado no primeiro problema) realizou mais rapidamente e, inclusive, ajudou os outros grupos a entenderem.

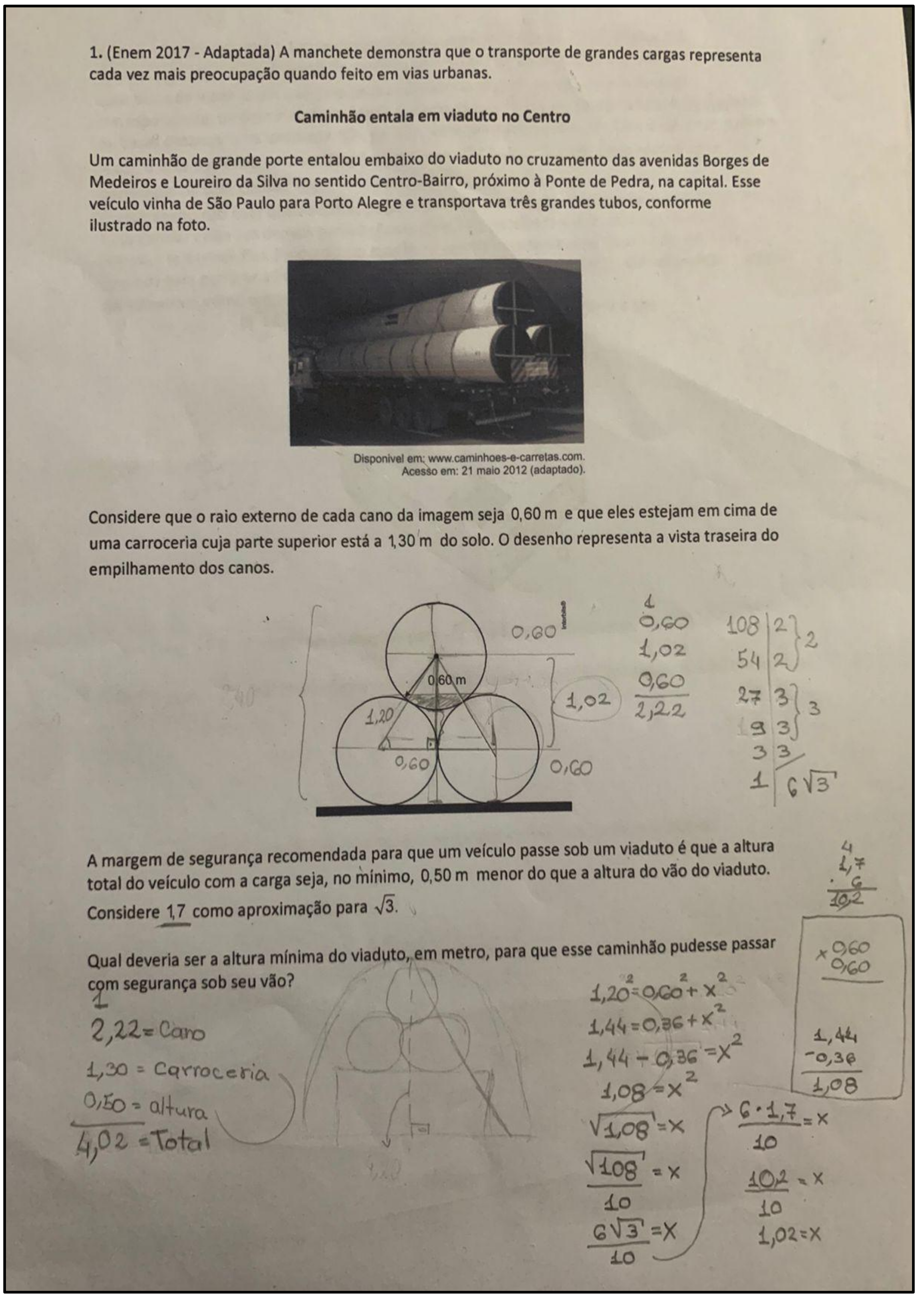
Um dos grupos, em especial, mostrou certa dificuldade em entender o enunciado do problema. Talvez por ter sido uma aula logo após o recesso escolar, o entendimento da questão tenha sido prejudicado pelo fato dos alunos passarem um tempo considerável longe da sala de aula. Além disso, por ser uma questão de geometria do ENEM, os conceitos teórico-matemáticos são inseridos em um contexto de aplicação na prática, o que dificulta a interpretação, por vezes, dos alunos. Na primeira lida, o aluno A falou "*Aí já deu problema*", por exemplo. Em meio a discussões, o aluno B disse: "*Tá, vamos desenhar então*". Primeiro de tudo, desenhou o esboço do caminhão com os canos em cima da carroceria e uma espécie de arco em cima, o que representaria o viaduto. Mesmo que o "viaduto" não tenha sido representado da melhor maneira possível, houve o entendimento que o caminhão precisaria entrar embaixo de outra construção, precisando, ainda, haver uma folga O desenho está no centro, na parte inferior da Figura 10. Após isso, começou uma discussão no grupo de como seria feito o cálculo. No início, havia muita insegurança dos três alunos ao tentar esboçar alguma relação no desenho que eles mesmo tinham criado, mas quando fui perguntado sobre como fazer, disse apenas que o grupo tinha que descobrir um jeito de medir, o aluno A me respondeu que era para pegar uma régua e eu continuei com as perguntas para induzir o pensamento matemático. Segue transcrição de parte do áudio:

"Aluno A - Só pegar uma régua, "sor".
Eu - E como tu mediria se fosse só pegar uma régua?
Aluno A - Assim só (medindo longitudinalmente a figura).
Eu - Isso mesmo, e tu consegue descobrir qual é toda essa parte?
Aluno A - Até aqui eu sei que é 0,60.
Eu - E as outras partes, vocês conseguem descobrir?
Aluno C - Já sei!"

A partir da resolução deles, faltava descobrir a altura do triângulo equilátero cujos vértices são os centros dos círculos que formam a representação dos canos na folha, mas não tinha sido trabalhado ainda a parte conceitual dos triângulos equiláteros. Como, no fim do primeiro semestre foi trabalhado trigonometria e, em muitos casos, os alunos utilizavam o Teorema de Pitágoras para resolver as questões propostas, a solução para encontrar a altura faltante encontrada pelo grupo foi de resolver a altura pela relação de pitágoras (canto inferior direito da folha). Após isso, bastou somar todos os segmentos para que o grupo encontrasse a solução para o problema, figura 12.

Figura 12. Resolução do Problema 1

Fonte: Arquivos do autor



1. (Enem 2017 - Adaptada) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.

$0{,}60 + 1{,}02 + 0{,}60 = 2{,}22$

$108 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto. Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

2,22 = Cano
1,30 = Carroceria
0,50 = altura
4,02 = Total

$1{,}20^2 = 0{,}60^2 + x^2$
$1{,}44 = 0{,}36 + x^2$
$1{,}44 - 0{,}36 = x^2$
$1{,}08 = x^2$
$\sqrt{1{,}08} = x$
$\frac{\sqrt{108}}{10} = x$
$\frac{6\sqrt{3}}{10} = x$
$\frac{6 \cdot 1{,}7}{10} = x$
$\frac{10{,}2}{10} = x$
$1{,}02 = x$

Podemos perceber as transições entre os mundos de David Tall na resolução do problema proposto. Ao ler a questão e desenhar a representação do caminhão passando por um túnel há uma corporização abstrata que facilita a compreensão do problema e insere o aluno com maior facilidade no contexto exigido na questão. Ao enxergar o triângulo cujos vértices são formados pelos centros dos círculos que representam os canos, e utilizar o Teorema de Pitágoras, os alunos passam pelo mundo simbólico, sendo indicado pela compreensão que a figura pode ser repartida em triângulos que representam parte do todo que se quer calcular.

4.2 Problema 2

No segundo problema, junto com a folha contendo a questão, foi entregue aos grupos um material feito de papelão com as mesmas medidas da figura, para que eles pudessem manipular os objetos para que eles consigam ter um melhor entendimento dos objetos, de acordo com a Figura 13.

Figura 13. Material de Papelão para o Problema 2.

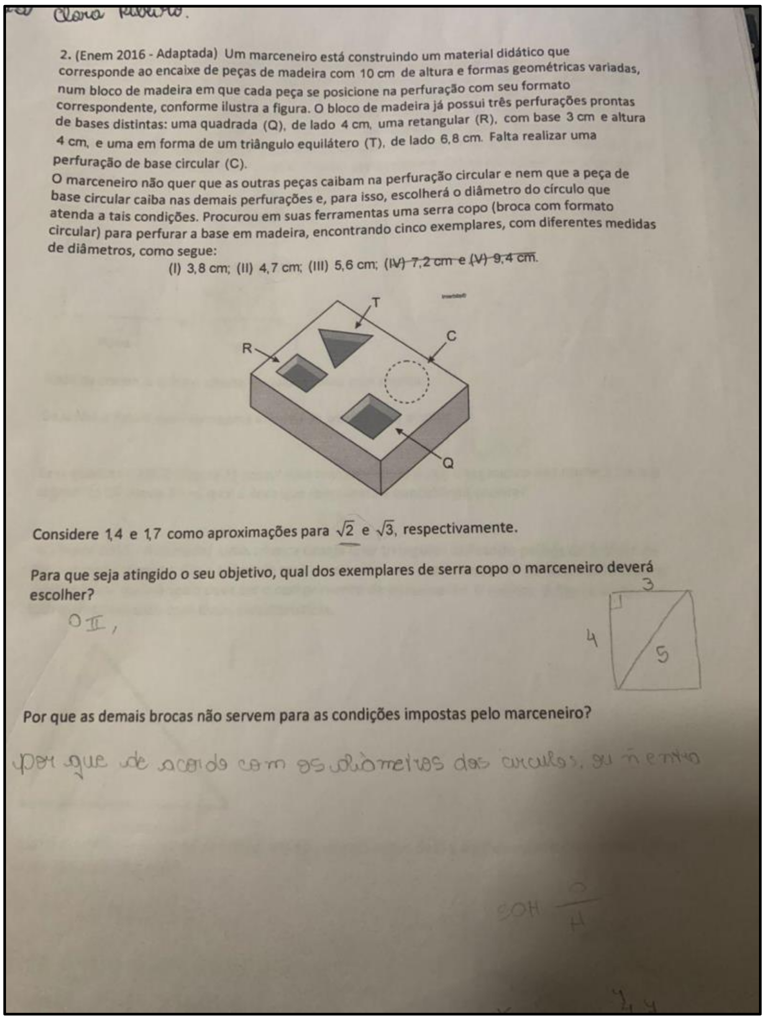
Fonte: Arquivos do autor

Esperava-se dos alunos que, a partir do material concreto, percebessem os elementos que satisfazem a condição imposta e realizassem as contas, principalmente o Teorema de Pitágoras, para verificar qual círculo funcionava para a solução imposta. Como a ordem dada aos alunos era que eles precisavam resolver os problemas respondendo as perguntas como eles conseguissem, os grupos acabaram respondendo utilizando o material de papelão, sem realizarem contas. Inicialmente, todos os grupos facilmente descartaram o círculo menor e os dois círculos maiores, ficando entre a II e a III. Após o descarte, um grupo explicou a escolha pelo círculo II a partir de uma explicação aritmética. Mediram o quadrado de lado 4 cm e verificaram que sua diagonal se aproximava de 5,6, o que resulta exatamente na dimensão do diâmetro do círculo, o que indica que o quadrado caberia nessa perfuração. Apenas sobrando a broca com 4,7cm.

Outro grupo teve a estratégia de pegar o retângulo e descobrir a diagonal, relacionando com o diâmetro do círculo.

Figura 14. Resolução do Problema 2 de um dos grupos

Fonte:Arquivo do autor



Podemos perceber que, na conta, o grupo descobriu que a diagonal resultou em 5 cm. Assim, conseguiram afirmar que esse retângulo entraria na perfuração circular de diâmetro 5,6 cm, sobrando apenas a perfuração circular de diâmetro 4,7 cm, como ilustra a figura 12. Como resposta para a pergunta: “Por que as demais brocas não servem para as condições impostas pelo marceneiro?”, os registros escritos dos alunos indicam apenas que, de acordo com as medidas, a única que satisfaz a condição é a II, como também ilustra a Figura 14.

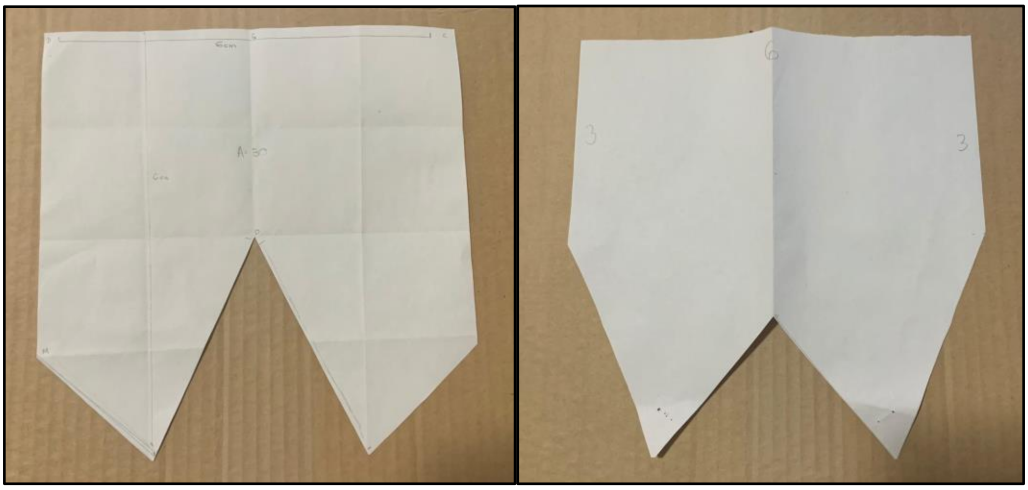
4.3 Problema 3

No terceiro problema foi disponibilizado uma folha quadrada para que os alunos pudessem reproduzir em um material concreto a ordem da questão. Esperava-se dos alunos certa facilidade em entender o problema e fazer os cortes para chegar na bandeirinha final e dificuldade para o cálculo da área, pois isso não foi trabalhado previamente nas aulas.

Curiosamente, alguns grupos não conseguiram manipular a folha de forma correta. Foi observado que os grupos que conseguiram recortar a folha quadrada foram os que, no início, escreveram os pontos dos vértices do quadrado e, ao realizar a dobra na metade, escreveram os pontos conforme estava na ordem do problema. Seguem as fotos das representações:

Figura 15. Resolução do Problema 3 - À esquerda o recorte correto e à direita o recorte errado

Fonte: Arquivo do autor



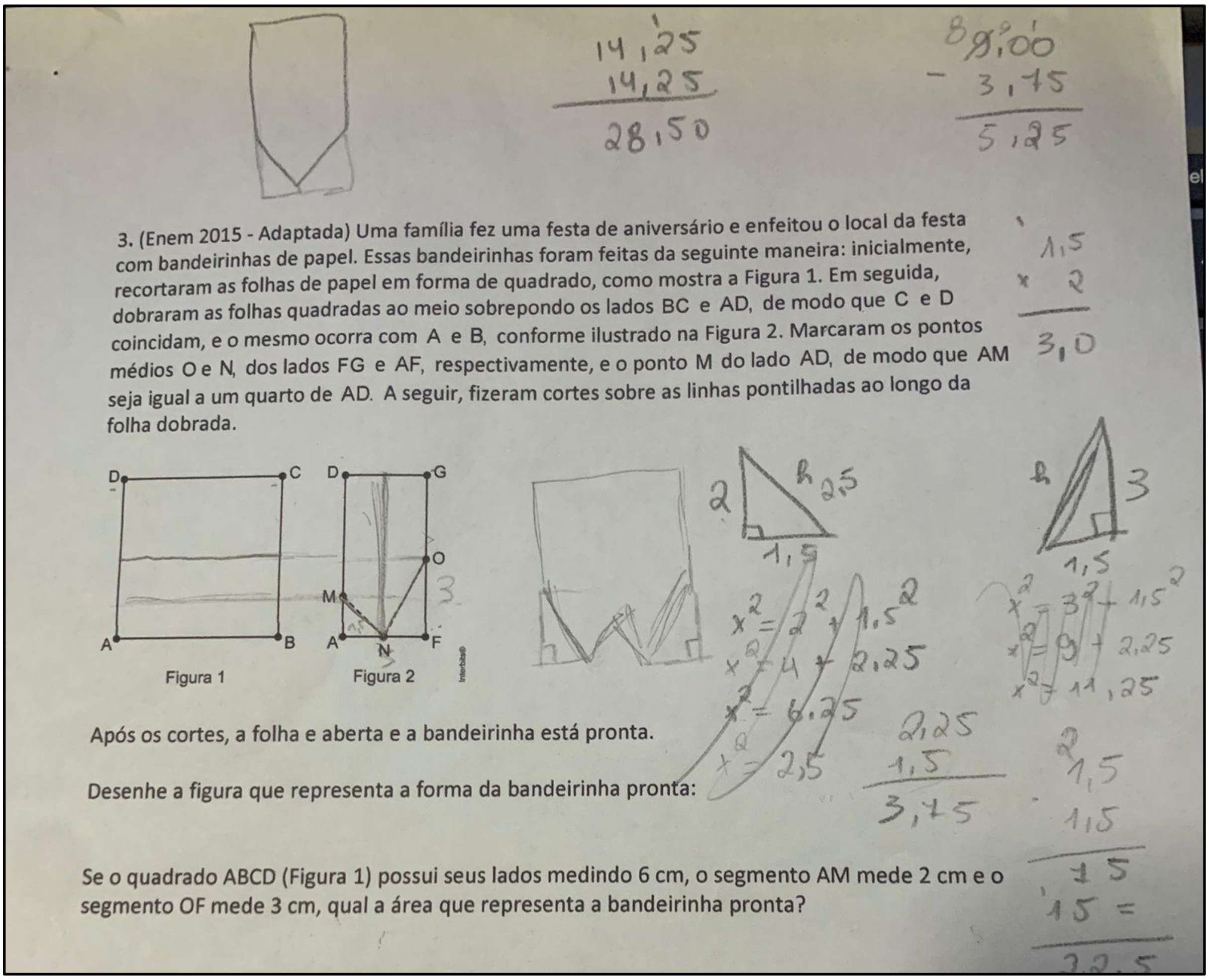
Podemos reparar que na Figura 15 à esquerda estão representados os pontos que o problema traz no seu enunciado e na Figura 15 à direita não há essa mesma representação. É fundamental que haja o entendimento do Mundo Corporificado do objeto a ser estudado para que o aluno, primeiramente, entenda o enunciado da questão para depois buscar a incógnita por meio das estratégias estabelecidas durante o desenvolvimento da resolução do problema.

Na segunda parte do problema, para o cálculo da área, um grupo me chamou para perguntar qual era a fórmula para calcular a área da bandeirinha. Após indagações, o próprio grupo, ao se dar conta que eu não ia falar o que era para eles fazer, disseram que iriam "dar um jeito". Tal intervenção e resposta do aluno me fez refletir que, muitas vezes os alunos fazem perguntas aos professores esperando uma resposta pronta, para que não precisem pensar e terem certeza que a resposta é a correta. Ao transferirmos a responsabilidade da resolução do problema aos alunos e devolver mais perguntas a eles, os estudantes passam a traçar estratégias próprias para resolver a questão.

A estratégia utilizada para a resolução desse problema foi exatamente a que eu imaginei que aconteceria. Foi calculada a área do quadrado original e subtraída as áreas das figuras que foram cortadas na confecção da bandeirinha. Conseguimos verificar a partir da Figura 14 logo abaixo.

Figura 16. Cálculos da Resolução do Problema 3

Fonte: Arquivos do autor



Podemos verificar a transição entre os mundos Corporificado e Simbólico, feito pelos estudantes ao pensarem que a área resultante é oriunda do quadrado inicial, extraindo as partes que foram excluídas por meio dos cortes na figura inicial para termos a bandeirinha. Houve uma certa dificuldade dos alunos em simbolizar por meio de operações aritméticas daquilo que os alunos queriam operar. Em outras palavras, eles sabiam o que fazer, mas tiveram muita dificuldade em como fazer. O que aponta uma diferença entre entender o problema e a corporização dos elementos que a questão traz e a simbolização dos elementos para realizar as contas.

4.4 Problema 4

No quarto problema, foram entregues a cada grupo 17 palitos de fósforo para ajudar a resolver o que era questionado. Era esperado que os alunos pegassem os palitos, tentassem formar os triângulos possíveis e irem anotando as possibilidades. Inicialmente todos os grupos perguntaram o que era “não-congruentes dois a dois”. O pesquisador foi até o quadro e fazer a explicação ao grande grupo de o que esses termos significavam. Foi notada uma grande dificuldade no entendimento já no início do problema por conta disso foi necessário ir em todos os grupos para explicar o que se pedia.

Acreditamos que esse problema trouxe um grande desafio aos estudantes, pois gerou grande engajamento e muitas discussões sobre as diferentes possibilidades e o porquê delas existirem. A maioria dos grupos, para utilizar os palitos de fósforo na verificação das possibilidades, saíram das carteiras e foram para o chão, como mostra a Figura 17.

Figura 17. Desenvolvimento do Problema 4

Fonte: Arquivos do autor

Os alunos conseguiram chegar na resposta correta de forma empírica, testando as possibilidades uma a uma. Perceberam que apenas 3 triângulos não-congruentes dois a dois podem ser formados com as condições impostas pelo problema. Quando perguntei o porquê, houve certa dificuldade para explicar. Utilizarei como exemplo a transcrição do áudio de um grupo. Segue a transcrição do áudio:

“Eu - Ta, e por quê só tem essas 3 (possibilidades)?

Aluno D - Como Assim, “sor”?.

Eu - Por que, por exemplo, não tem triângulo com as medidas 6, 2 e 9?

Aluno D - Porque o 9 é muito grande, tinha que ser menor.

Eu - O quão menor?

Aluno D - Tipo assim, se tu pegar o 6 e o 2, da 8. Pra ligar eles nas pontinhas, tem que ter menos que 8, porque se for maior não cabe.

Eu - Certo… e como que vocês vão escrever a resposta?

Aluno D - Mas tem que escrever, “sor”? A gente já te falou tudo.

Eu - Claro… eu tenho que ter registro de vocês. Daqui há 1 mês eu não me lembro como vocês pensaram.

Aluno E - E como que a gente coloca que esse aqui tem que ser menor que os outros dois juntos?

Eu - Ok, qual a conclusão que vocês tiraram sobre o problema?

Aluno D - Isso que o “E” falou, esses dois juntos tem que ser maior do que o outro.

Eu - Tem alguma operação que indica o que vocês falaram? O que é “esses dois juntos”

Aluno E - Esse aqui mais esse aqui (mostrando os lados 6 e 2).

Eu - Ta, e isso que tu falou tem que ser… tem que ser…

Aluno D - Esse tem que ser menor que a esse mais esse..

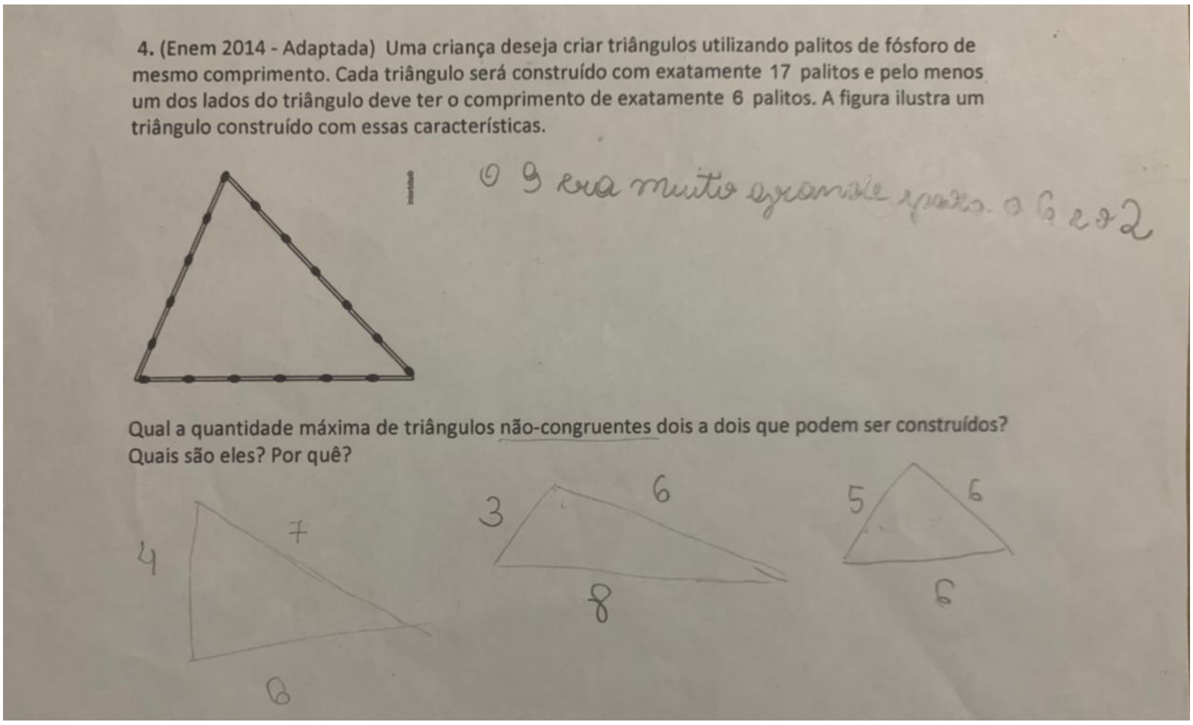
Eu - Beleza… como que a gente simboliza isso em matemática?

Aluno D - Ai “sor”, muito dificil.

Eu - Ok, pensem e vamos tentar escrever em matemática isso que vocês me falaram!”

Figura 18. Resolução do Problema 4

Fonte: Arquivos do autor



No diálogo apresentado, é possível observar uma transição gradual da perspectiva do "Mundo Corporificado" para o "Mundo Simbólico" da teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall. Iniciando com uma discussão sobre medidas de triângulos, os alunos expressam suas ideias em termos concretos, relacionando as medidas dos lados a objetos manipuláveis e ações físicas, exemplificando assim a abordagem do primeiro Mundo.

À medida que o diálogo progride, os alunos são questionados sobre limitações nas possibilidades dos triângulos, o que os leva a considerar relações abstratas entre as medidas. Ao discutir por que certas medidas não funcionam, um aluno ressalta a importância do tamanho de um dos lados e a relação com a soma dos outros dois lados. Esse é um ponto crucial em que ocorre uma transição para o Mundo Simbólico, à medida que os alunos começam a explorar relações matemáticas além das ações físicas, mesmo sem fazer a sua representação no papel.

A transição para o Mundo Simbólico foi instigada a partir dos desafios para expressar suas conclusões em termos matemáticos e simbólicos. A resistência inicial deles em relação à notação matemática reflete a dificuldade de traduzir intuições abstratas em representações formais.

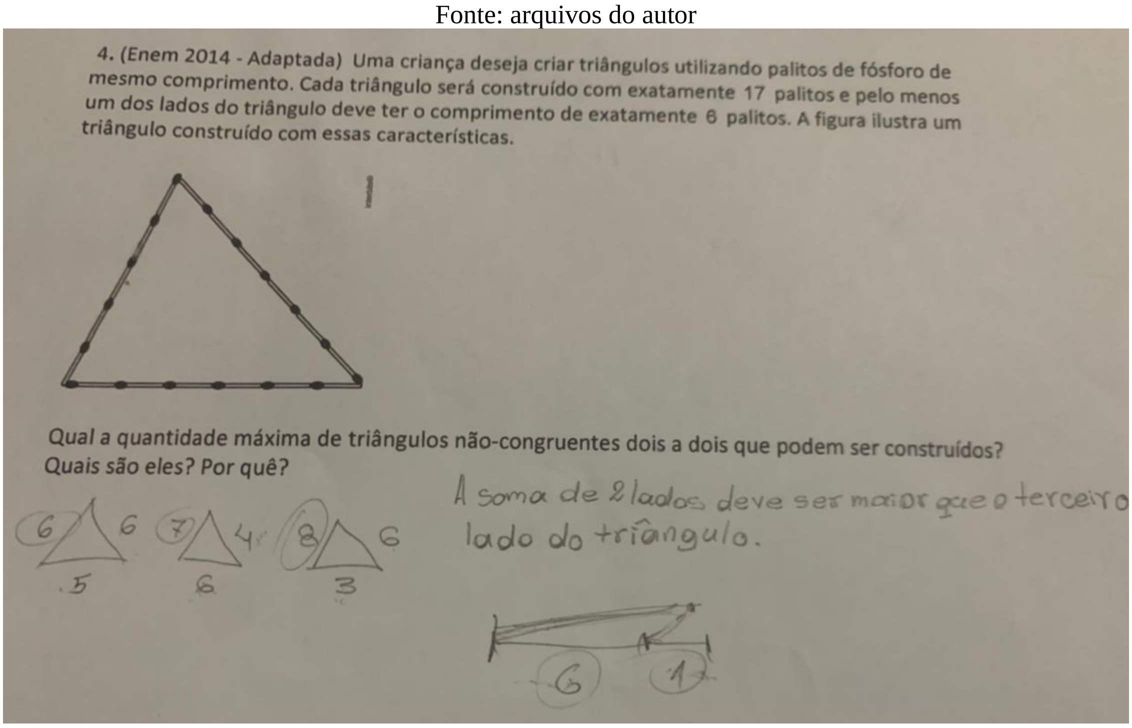
Apesar dos questionamentos, os alunos não conseguiram representar o que pensaram em linguagem matemática, que marcaria a transição completa para o Mundo Simbólico de Tall.

Contudo, houve o entendimento da condição de existência dos triângulos, mesmo que não tenham conseguido expressar isso de maneira formal ou simbólica.

O processo da transição entre os Três Mundos faz parte, também, do amadurecimento cognitivo do aluno. Nesse momento, é importante os estudantes compreenderem os conceitos do objeto, sendo o primeiro passo para adentrar no Mundo da Simbolização desses conceitos, é saber realmente como e os porquês dos conceitos inerentes àquele objeto. Outro exemplo da dificuldade dessa simbolização nesse primeiro contato com a condição de existência de um triângulo pode ser observado do registro de um outro grupo. Segue a imagem:

Figura 19. Resolução do Problema 4 (outro grupo)

Fonte: arquivos do autor



Nesse registro, podemos encontrar mais desenhos além dos que estão no primeiro registro documentado no problema 4. Consegue-se perceber que os alunos tentaram representar dois segmentos (um com 6 unidades e outro com 1 unidade) para pensar nas possibilidades e limitações para o terceiro lado do triângulo. Mesmo sem conseguir chegar no simbolismo formal, a frase “A soma de 2 lados deve ser maior que o terceiro lado do triângulo” pode ser entendida como o início de uma simbolização que indica essa condição de existência. É um passo importante para o início da transição do Mundo Corporificado para o Mundo Simbólico descrito por David Tall, possibilitado pelo manuseio dos palitos de fósforo, pois traz mais dinamismo nas investigações dos alunos.

4.5 Problema 5

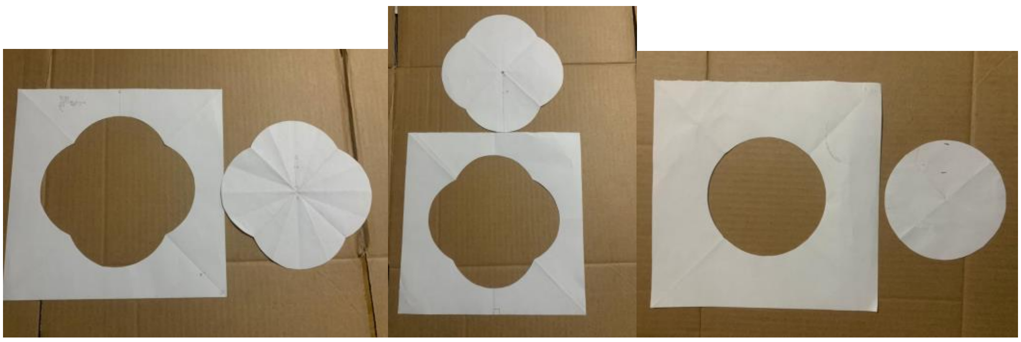
No problema de número 5, novamente foram disponibilizados aos grupos uma folha quadrada, além de régua e compasso para que eles fizessem manualmente as instruções dadas pela questão para depois apresentarem as representações em forma de desenho na folha. A ideia era repetir os processos que deram certo na questão 3, pois é possível seguir os passos parecidos do problema 3 para solucionar a questão proposta. Nesse problema, era esperado que, como já foi resolvido um problema parecido, não teriam muitas dificuldades no entendimento da incógnita e na resolução do problema.

Alguns grupos não leram atentamente o enunciado e começaram a operacionalizar com a folha quadrada sem os mesmos critérios que o problema pedia. Saíram dobrando e cortando de qualquer jeito a folha, sem respeitar o tamanho dos segmentos. Assim como no problema de número 3, os alunos que representaram corretamente os pontos que o enunciado da questão explicava tiveram mais facilidade ao recortarem a folha de maneira assertiva.

Foi observado que os mesmos grupos que tiveram não conseguiram seguir o passo a passo no problema 3, por não repetir a representação dos pontos e segmentos, cometeram o mesmo erro quando abordaram o problema 5. O mesmo foi percebido nos grupos que fizeram as operações de forma correta com a folha de papel quadrada, estes fizeram novamente as representações dos pontos e segmentos. Seguem algumas representações:

Figura 20. Resolução do Problema 5

Fonte: Arquivos do autor



O objetivo ao avaliar as respostas acerca da área da figura resultante era com objetivo de determinar se os alunos demonstravam compreensão não apenas do procedimento de resolução, mas também da abordagem estratégica apresentada no problema em comparação com o problema 3. As respostas foram coletadas em formato de áudio, uma vez que os alunos solicitaram permissão para explicar verbalmente, argumentando que podiam expressar-se com mais clareza dessa maneira do que por escrito. A coleta dos áudios foi realizada pelos próprios alunos e compartilhada comigo por meio da plataforma *Microsoft Teams*, o que se mostrou uma solução eficaz. Sobre o cálculo, os grupos não conseguiram chegar na expressão que culminaria no resultado da área da figura resultante após a operacionalização feita.

Seguem a transcrição de áudio de um grupo:

"Aluno A - O "sor', vem aqui… como que eu vou fazer a conta da área disso que sobrou?
Eu - Vamos lá. Como tu chegou nessa figura aqui.
Aluno A - Eu tirei essa "flor" aqui que a questão pediu.
Eu - Tirou de onde? O que vocês tinham?
Aluno A - A folha inteira
Eu - Ok, dessa folha inteira vocês tiraram o que?
Aluno A - Eu não sei o nome disso. A gente não sabe calcular
Eu - O que vocês querem calcular?
Aluno A - Tipo assim, "sor", que nem a gente fez na outra, mas antes tinha triângulo, agora é tipo uma flor. Não dá pra calcular essa área aqui (mostrando a parte extraída).
Eu - Na outra questão? Qual delas?
Aluno A - Essa aqui (mostrando o problema 3), a gente tinha o quadrado e fez menos o que a gente tirou. Queremos fazer a mesma coisa, mas a gente não sabe fazer essa conta.

Como podemos perceber na transcrição, o Aluno A procura ajuda para calcular a área de uma figura após remover uma parte dela (a que ele chama de *flor*). O grupo pretende calcular a área da parte removida, comparando com um problema anterior. Há dificuldade em aplicar conceitos e adaptá-los nesse novo problema.

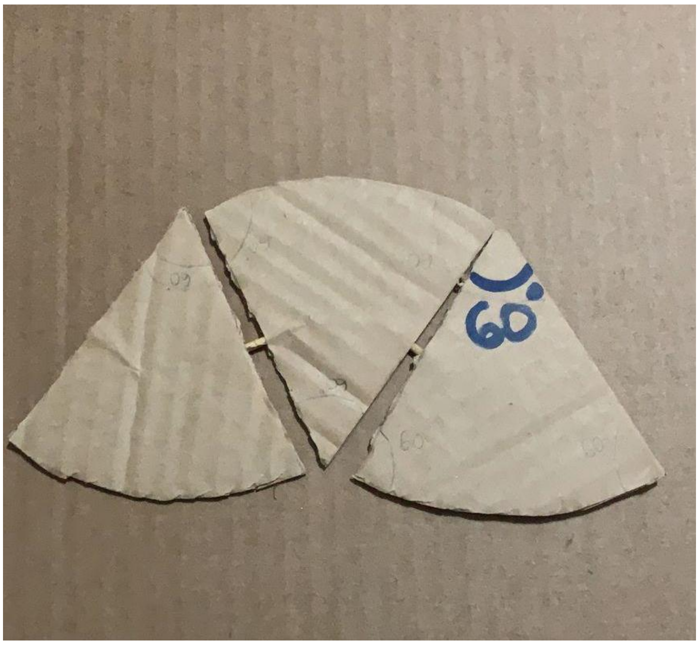
Nesse diálogo, podemos observar um desafio na transição do aluno do mundo corporificado para o simbólico, de acordo com a teoria dos três mundos de David Tall. Inicialmente, o Aluno A descreve a figura como uma "flor" e parece ter uma compreensão mais visual e concreta da situação. No entanto, quando questionado sobre o que eles tiraram da figura original, ele não consegue identificar o conceito matemático necessário. Tentei conduzir a discussão buscando que os discentes fizessem a transição do corporificado para o simbólico, pedindo para definirem o que desejam calcular, mas os alunos ainda mantiveram uma abordagem mais concreta e visual. A dificuldade em fazer essa transição para o mundo simbólico é evidente, já que o aluno não consegue relacionar a situação atual com o processo de subtração usado anteriormente em uma questão semelhante com figuras diferentes. Isso ressalta a importância de desenvolver habilidades de abstração e representação simbólica na aprendizagem matemática.

4.6 Problema 6

Na questão 6, foi disponibilizado, junto com a folha com o problema, um material de papelão com três setores circulares unidos por meio de palitos de dente para os alunos manipularem. Segue a foto do material:

Figura 21. Material de papelão para o problema 6.

Fonte: Arquivos do autor



Esperava-se que, ao manipular o material concreto, os alunos percebessem que os três setores circulares com o mesmo raio, ao organizá-los de outra maneira, formasse um semicírculo e, a partir daí, solucionar o problema por meio do cálculo relacionando a área do semicírculo com a área da piscina retangular.

Figura 22. Material de papelão para o problema 6.

Fonte: Arquivos do autor

Se espera, também, que os alunos igualem os resultados, ao invés de trabalhar com a desigualdade, bem como uma certa insegurança com relação à resposta final na apresentação do problema.

Na prática, percebeu-se uma grande interação entre os grupos para solucionar esse problema, pois os alunos discutiam formas de resolver os problemas não apenas nos seus grupos, mas com os outros alunos. Demorou cerca de 15 minutos para que um aluno desmontasse os setores circulares e formasse com eles um semicírculo e falando pros seus colegas.

Figura 23. Registro da interação entre grupos no problema 6

Fonte: Arquivos do autor

A partir do momento em que os grupos de estudantes perceberam que o formato em questão era a área de um semicírculo em comparação com a área de um retângulo, não foi difícil para os alunos entenderem o que se pedia. No entanto, esse passo aparentemente simples deu origem a algumas confusões. Os grupos evidenciaram uma dificuldade notável em traduzir para o papel o simbolismo matemático correspondente às suas percepções corporificadas. Percebeu-se uma certa facilidade de compreender que era necessário calcular a área do semicírculo e estabelecer alguma relação com a área do retângulo que representava a piscina anterior. O dilema surgiu quando tiveram que expressar o conceito de "menor que (<)" matematicamente, levando a uma confusão entre igualdade e desigualdade. A partir dessa situação, é possível observar uma dificuldade na tradução das ideias abstratas em símbolos matemáticos precisos, evidenciando a importância de desenvolver a compreensão conceitual da matemática, além de apenas reconhecer formas e figuras no mundo real. A transição do mundo corporificado para o simbólico, nesse caso, revelou a necessidade de uma maior ênfase na compreensão das relações matemáticas e na representação simbólica para a resolução dos problemas.

Talvez essa confusão tenha surgido devido à falta de familiaridade dos alunos em lidar com valores numéricos de forma comparativa e relacioná-los através de desigualdades. Isso nos conduz a uma reflexão importante acerca da compreensão do problema por parte dos alunos. Um dos objetivos característicos da resolução de problemas é desenvolver no cognitivo do estudante a habilidade não apenas de identificar a incógnita, mas também de desenvolver estratégias hábeis para solucioná-la. Contudo, uma etapa muitas vezes deixada de lado é a verificação e interpretação dos resultados obtidos.

Em resumo, o que se busca é fazer com que os alunos entendam bem o que o problema está perguntando (sua incógnita), pensem em como chegar à resposta certa (planejamento e execução das estratégias), mas, acima de tudo, se perguntem se a resposta faz sentido (verificação e interpretação dos resultados obtidos). Na situação específica desse problema, houve fortes indícios de que os alunos se concentraram principalmente em fazer os cálculos matemáticos em si, deixando de lado a importância de entender o que os resultados que encontraram realmente queriam dizer.

Portanto, esse problema revelou a tendência dos alunos em se concentrar apenas na manipulação numérica, deixando de lado o contexto conceitual e a interpretação significativa que a matemática oferece nesse contexto. Isso ressalta a importância não somente de realizar os cálculos, mas também de compreender profundamente os princípios subjacentes e refletir sobre as implicações lógicas dos resultados.

Segue o registro da resolução do problema de alguns grupos:

Figura 24. Resolução I do problema 6.

Fonte: Arquivos do autor

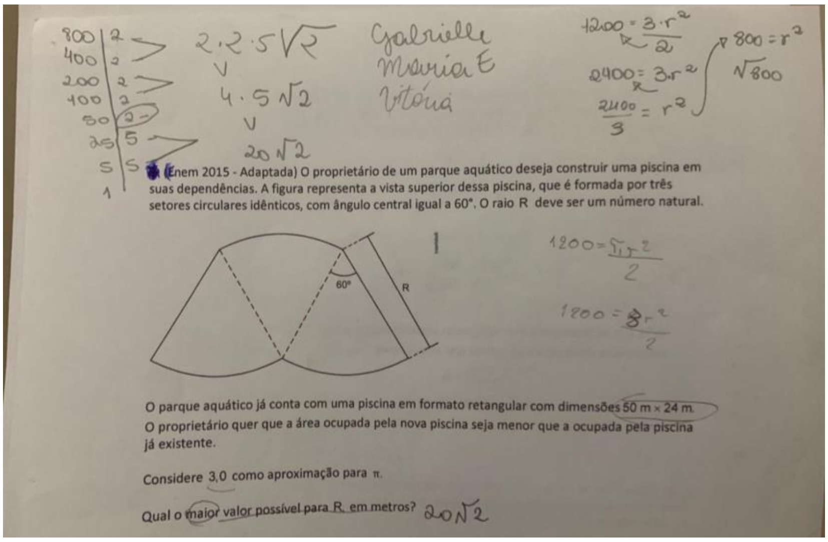
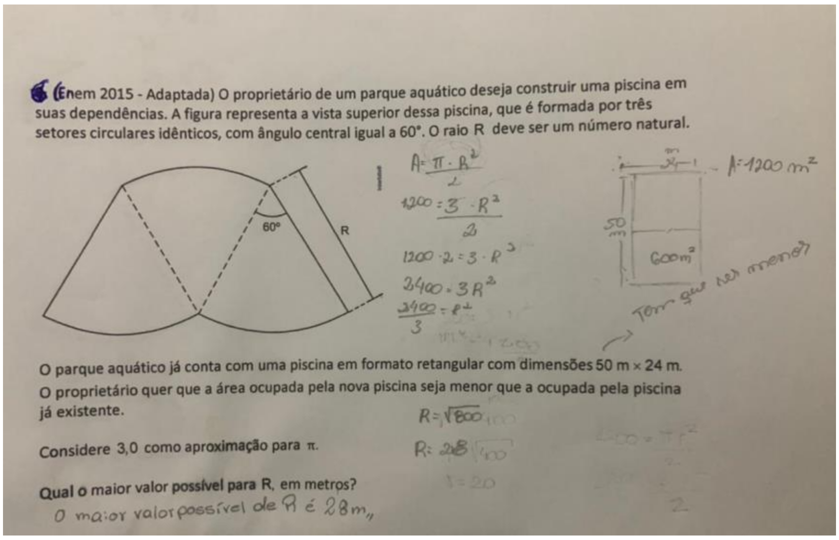


Figura 25. Resolução II do problema 6.

Fonte: Arquivos do autor



No contexto da teoria dos três mundos da matemática de David Tall, a situação apresentada oferece uma oportunidade de análise dos mundos "corporificado" e "simbólico". No mundo corporificado, os alunos foram capazes de chegar a uma compreensão superficial da relação entre às duas áreas presente no problema, demonstrando habilidades em manipular os números. No entanto, ao entrar no mundo simbólico, onde símbolos matemáticos são usados para representar relações, os alunos enfrentaram dificuldades em compreender o significado da desigualdade presente no contexto.

A resposta correta fornecida pelos alunos sobre o valor máximo de "R" (28 ou $20\sqrt{2}$)indica que eles conseguiram extrair informações relevantes do contexto e aplicar seus conhecimentos numéricos no mundo corporificado. Isso sugere uma competência na abordagem prática da matemática, usando abstrações concretas.

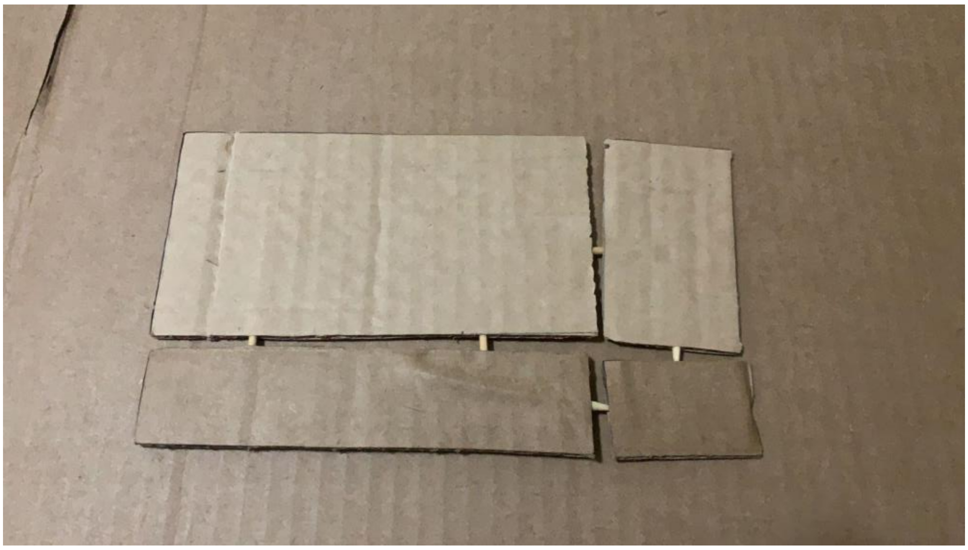
No entanto, ao se depararem com a tarefa de representar matematicamente essa desigualdade, os alunos parecem ter enfrentado obstáculos. Isso pode indicar que a transição do mundo corporificado, onde as relações são percebidas intuitivamente, para o mundo simbólico, onde essas relações são formalizadas por símbolos matemáticos, não foi tão eficiente. A falta de clareza sobre a representação simbólica da desigualdade aponta para a necessidade de fortalecer a compreensão conceitual dos símbolos matemáticos e sua relação com os conceitos do mundo corporificado.

4.7 Problema 7

No sétimo problema, assim como na sexta, foi oferecido um material de papelão e palitos de dente para a manipulação dos objetos com a finalidade de melhor compreender a incógnita do problema.

Figura 26. Material de Papelão para o Problema 7.

Fonte: Arquivos do autor



A abordagem baseada na resolução de problemas foi empregada, aproveitando um cenário para auxiliar na solução do outro. A expectativa era que os estudantes compreendessem imediatamente o que precisavam fazer, embora o "como fazer" não fosse evidente. No entanto, devido às lacunas educacionais, possivelmente resultantes da pandemia da COVID-19, os alunos demonstraram dificuldades em lidar até mesmo com conceitos de álgebra simples, como produtos notáveis, que o problema pressupunha como conhecimento prévio.

A presença do material concreto foi crucial para auxiliar na compreensão dos elementos necessários para a realização dos cálculos e para a posterior formulação da expressão algébrica que representa a porção que encolheria ao lavar o tecido em questão. No entanto, um desafio inesperado surgiu quando os alunos tiveram que lidar com o conceito abstrato da palavra "expressão" no contexto do problema. Ainda que todos os grupos tenham identificado e removido a parte da equação do canto do material duas vezes, somente após serem orientados a trabalhar com os materiais concretos é que perceberam que haviam cometido erros nos cálculos.

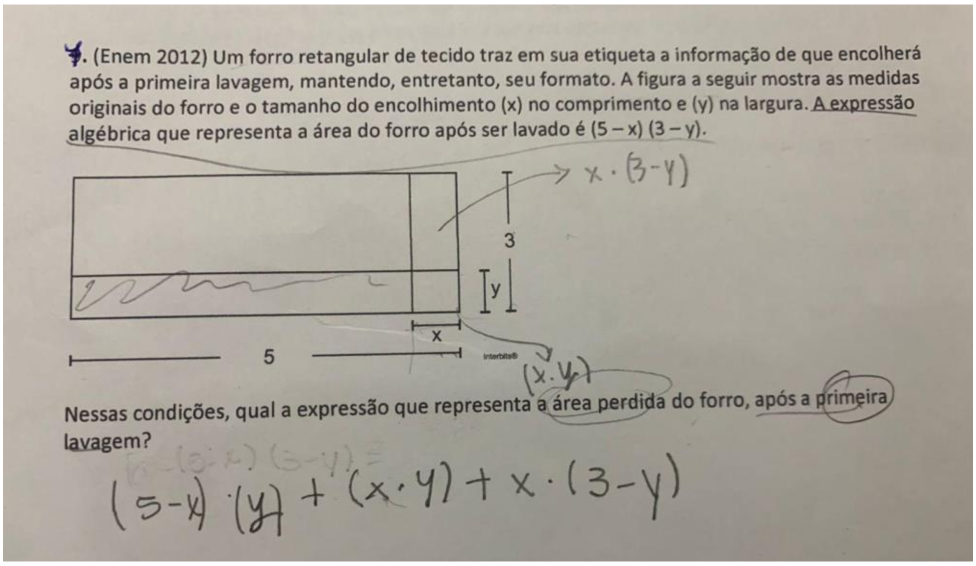
Assim, uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos foi a representação escrita e simbólica de cada componente que correspondia à porção que encolheria, fundamental para a resolução do problema. Isso sugere que a habilidade de traduzir conceitos matemáticos em notação formal ainda não está bem desenvolvida entre esses estudantes.

Esse contexto deixa indícios de como a interação entre a resolução de problemas e a manipulação de materiais concretos pode ser uma abordagem pedagógica eficaz. A lacuna na compreensão da linguagem simbólica ressalta a necessidade de reforçar o entendimento conceitual e a capacidade de tradução entre as representações concretas e abstratas, a fim de que os alunos possam desenvolver uma compreensão matemática mais profunda, como sinaliza David Tall.

Em particular, seguem duas resoluções de dois grupos distintos, figuras 27 e 28.

Figura 27. Resolução I do Problema 7.

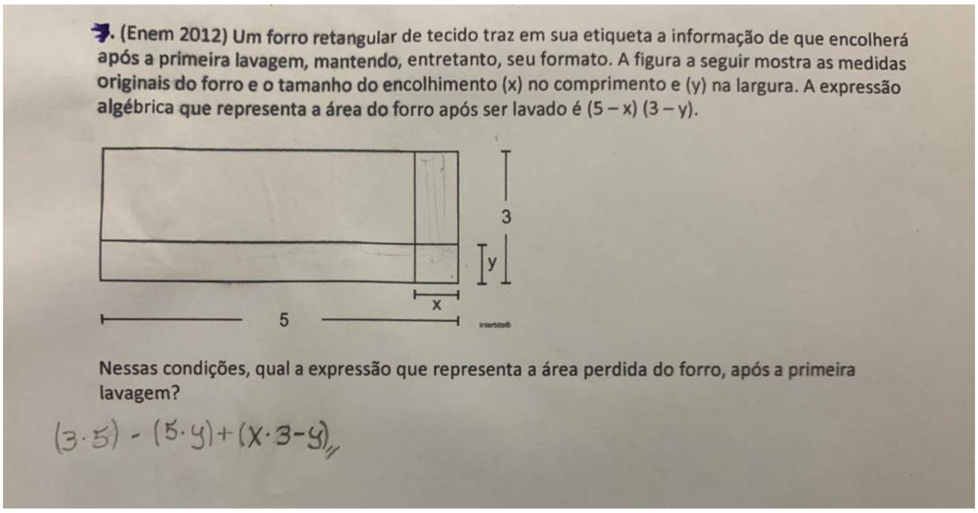
Fonte: Arquivos do autor



Na Figura 25, consegue-se perceber que eles dividiram a área que seria perdida em 3 partes diferentes e calcularam a sua área. É provável que essa estratégia tenha advindo do material de papelão, pois existem essas mesmas divisões no material entregue a eles. Com isso, conseguimos perceber uma certa evolução. Previamente, nos problemas anteriores, houve certas dificuldades em representar simbolicamente os conceitos de percepção física do objeto estudado, o que pode-se resumir que a transição do mundo corporificado para o mundo simbólico não estava acontecendo de forma natural.

Figura 28. Resolução II do problema 7.

Fonte: Arquivos do autor



Já na segunda resolução (Figura 26), não houve um entendimento do problema. Embora o grupo tenha conseguido dividir a figura, a solução encontrada não era a referente à incógnita do problema. A pergunta era a expressão que representa a área **perdida** da figura. Além do grupo ter buscado a área que ficou após a redução, há um erro de simbolização, a conta correta deveria ser $3.5 - [5y \ + (3x - y)]$. Isso mostra a diferença que os dois grupos estão quando se refere à cognição matemática para David Tall. Enquanto um grupo de alunos conseguem transitar com certa facilidade entre os mundos Corporificado e Simbólico, o outro grupo tem dificuldades para representar algebricamente aquilo que se percebe fisicamente. Ademais, esse último grupo não conseguiu ter a compreensão da incógnita do problema, o que impossibilita estabelecer estratégias assertivas para solucioná-lo.

4.8 Problema 8

No último problema, não fornecemos qualquer material concreto adicional, apenas o enunciado do exercício. O propósito era que os estudantes tentassem calcular de alguma forma a área da figura 2 e igualá-la à área da figura 1, levando-os a uma equação de segundo grau. O esperado era que as duas aulas fossem suficientes para a conclusão de todos os problemas, porém não houve tempo hábil para a resolução do último problema. Portanto, entendemos que para uma próxima prática, é necessário dispor de mais períodos para a realização dos problemas.

Ao longo desta seção, apresentamos, descrevemos e analisamos como a prática da resolução dos problemas selecionados aconteceu com os estudantes participantes da pesquisa. Além de constatar que o tempo disposto para o desenvolvimento das soluções foi curto, também observamos aspectos que nos indicam se a prática realizada promoveu aprendizagens matemáticas considerando a Teoria dos Três Mundos, conforme descrevemos na seção a seguir.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito deste estudo consistiu em investigar o processo de resolução de problemas relacionados à geometria plana adotado pelos alunos ao se depararem com questões do ENEM, identificando as estratégias por eles empregadas para a solução destes desafios. A escolha da utilização de problemas do ENEM como base para esta análise se justifica pelo fato de que a instituição educacional em que atuo tem por compromisso a preparação dos estudantes desde o primeiro ano do ensino médio para provas de bancas externas, como o ENEM e vestibulares de diversas regiões do país.

Nesse contexto, o desenvolvimento da capacidade de solucionar problemas, exercícios e questões típicas de vestibulares tornam-se um ponto relevante para a escola. Muitas vezes, os alunos se deparam com desafios cujas abordagens ainda não dominam, o que os instiga a aprimorar sua habilidade de interpretar enunciados, extrair informações relevantes, identificar as incógnitas, traçar planos e elaborar processos eficazes para superar as barreiras impostas pelos problemas. Todo esse processo resulta na obtenção das soluções das questões, que devem ser criteriosamente avaliadas quanto à sua coerência.

Tendo em vista esse contexto, a pergunta de pesquisa que norteia o presente trabalho consiste em: **"De que forma os estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Canoas desenvolvem estratégias para a resolução de problemas relacionados aos conteúdos de geometria plana?"**

Sob essa ótica, a escolha pela resolução de problemas de geometria plana foi pautada pelo fato de este ser o conteúdo programático do início do segundo semestre da segunda série do Ensino Médio na instituição onde o pesquisador atua. A intenção foi analisar o processo da dos alunos por meio da Teoria dos três Mundos da Matemática de David Tall: Corporificado, Simbólico e Formal.

O domínio corporificado engloba a identificação das características físicas dos objetos, sejam eles concretos ou abstratos. No entanto, em se tratando da geometria plana, que lida majoritariamente com figuras bidimensionais, a relação com o mundo físico nem sempre é direta. Em contraste, o domínio simbólico compreende as representações matemáticas, símbolos, conceitos de igualdade e desigualdade, constituindo uma parte fundamental do processo de resolução de problemas.

Por sua vez, o domínio formal, mais complexo, envolve generalizações e demonstrações teóricas. Esse aspecto é frequentemente mais abordado no ensino superior devido à sua natureza abstrata. Entretanto, é importante mencionar que, ao longo da prática realizada, os alunos demonstraram significativo progresso na formulação e expressão das estratégias adotadas. Esse avanço refletiu-se na abordagem das questões de forma mais autônoma e confiante, como propunha Polya.

Assim, nesse contexto, percebeu-se que os estudantes que mais conseguiram transitar entre os mundos Corporificado e o Simbólico foram os alunos que solucionaram as questões de maneira mais assertiva, em detrimento aos discentes que tiveram maiores dificuldades para simbolizar as características corporificadas dos objetos estudados. Com base nisso, conseguimos perceber de que forma os estudantes estabelecem as estratégias para resolver os problemas do ENEM propostos a eles.

Um dos pontos observados na prática foi a dificuldade inicial dos alunos em compreender integralmente as questões propostas, evidenciando a necessidade de uma compreensão mais profunda do enunciado. A identificação das incógnitas também se mostrou um desafio inicial. Além disso, a etapa de simbolização, que envolve a tradução das situações-problema para a linguagem matemática, apresentou dificuldades, tanto nas suas representações quanto nos cálculos.

Considerando o tempo de execução da prática, que envolveu oito problemas a serem solucionados em grupos, distribuídos ao longo de cinco períodos de quarenta e cinco minutos, foi percebida a necessidade de uma gestão mais criteriosa do tempo, possivelmente reduzindo o número de questões ou selecionando aquelas de abordagem mais acessível no início.

A prática mostrou-se relevante, portanto, no contexto da preparação dos alunos para enfrentar problemas complexos em avaliações externas e vestibulares. Por meio desse processo, os estudantes foram instigados a pensar de maneira autônoma, aprimorar suas estratégias de resolução, fortalecer a capacidade de interpretação e desenvolver habilidades simbólicas.

Ao longo da prática identificamos que houve algumas limitações. Não esperávamos que os primeiros problemas causassem tanto desconforto aos alunos. Talvez, para uma próxima prática, os primeiros problemas sejam trocados por problemas com menor nível de dificuldade. Por esse motivo, também, não houve tempo hábil para os alunos terminarem todos os 8 problemas. Uma possibilidade para sanar essa questão é, nas futuras práticas, selecionarmos menos problemas e melhor explorá-los. Outra alternativa seria realizar a prática em mais períodos, proporcionando maior tempo para que os alunos possam solucionar todos os problemas explorando-os e discutindo as melhores maneiras para suas resoluções.

REFERÊNCIAS

ABNT: INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Microdados do Enem. Brasília: Inep, 2020. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos/microdados/enem Acesso em: 27 jul. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BÓ, D.; SANTOS, M. **Resolução de problemas do ENEM como uma alternativa para desenvolver o raciocínio e melhorar o nível de leitura e compreensão do aluno**. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_uepg_durvalaparecidodalbo.pdf. Acesso em 28 jul. 2023.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo, SP. Editora Ática, 2007.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos.** São Paulo: Editora Autores Associados, 2012, p. 116-117.

LIMA, N. R. Equações algébricas no ensino médio: Uma Jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MESQUITA, Daniel da Rosa. Resolução de problemas relacionados à Teoria dos Grafos no Ensino Fundamental. 2015. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática Licenciatura, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/. Acesso em 28 jul. 2023.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos? In: Jornada Nacional de Educação Matemática, 4; Jornada Regional de Educação Matemática, 17., 2012, Passo fundo. Atas...Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2012, p. 13

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf. Acesso em 01 de agosto de 2023.

POLYA, GEORGE. **A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995, 179 p. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2ª Reimpressão.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Método de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009, p. 31-42.

TALL, David. Orme. How Humans Learn to Think Mathematically, Chapter I. [from the book, CUP (NY)]. The full book is now available for purchase from standard booksellers e.g. from, 2014.

TALL, David. Orme. The Three Worlds of Mathematics. For the Learning of Mathematics, v.23, n. 3, p. 29-33, 2004a.

TALL, David. Orme. Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, 4, 281–288, 2004b.

TALL, David. Orme. Reflections on research and teaching of equations and inequalities. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, 1, 158–161, 2004c.

TALL, David. Orme; RAMOS, Juan Pablo Mejia. Reflecting on Post-Calculus-Reform. Plenary for *Topic Group 12: Calculus, International Congress of Mathematics Education*, Copenhagen, Denmark, 2004d.

TALL, David. Orme. Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23 (3). 29–33, 2004e.

ANEXOS

ANEXO A - MODELO CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA

CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA

O(A) Diretor(a) da escola..localizada na cidade de..declara estar ciente e de acordo com a participação dos estudante(s) e/ou professor(es) desta escola nos termos propostos no projeto de pesquisa intitulado “GEOMETRIA PLANA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM ESTUDO DE CASO COM ESTUDANTES DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.”, que tem como objetivo investigar como os estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Canoas desenvolvem estratégias para a
resolução de problemas relacionados aos conteúdos de geometria plana. Este projeto de pesquisa encontra-se sob responsabilidade do(a) professor (a)/pesquisador(a) Marilaine Fraga Sant’Ana, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e é desenvolvido pelo(a) acadêmico(a) Pedro Henrique da Silva Monteiro vinculado(a) ao PPGEMAT (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática).

A presente autorização está condicionada ao cumprimento dos requisitos das resoluções 466/2012 e 510/2016 do Conselho Nacional da Saúde, Ministério da saúde, comprometendo-se os pesquisadores a usar os dados pessoais dos sujeitos da pesquisa exclusivamente para fins científicos, mantendo o sigilo e garantindo a não utilização das informações em prejuízo dos sujeitos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Nome do(a) Diretor(a):

Assinatura____

Professor(a)/Pesquisador(a) responsável (UFRGS):

Assinatura ____

ANEXO B - MODELO TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TALE

Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário do projeto de pesquisa "GEOMETRIA PLANA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM ESTUDO COM ESTUDANTES DA 2a SÉRIE DO ENSINO MÉDIO." sob responsabilidade do(a) professor/pesquisador(a) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) Marilaine de Fraga Sant'Ana. O estudo será realizado com os estudantes de uma escola particular de Canoas, no mesmo horário das aulas, sem trabalhos extras àqueles que já estão programados no calendário da escola, por meio de análise qualitativa das estratégias para resoluções de questões ENEM para a finalidade de investigar como os estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Canoas desenvolvem essas estratégias para a resolução de problemas relacionados aos conteúdos de geometria plana, fazendo uma pesquisa qualitativa por meio de um Resolução de Problemas.

Os seus pais (ou responsáveis) autorizaram você a participar desta pesquisa, caso você deseje. Você não precisa se identificar e está livre para participar ou não. Caso inicialmente você deseje participar, posteriormente você também está livre para, a qualquer momento, deixar de participar da pesquisa. O responsável por você também poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento.

Você não terá nenhum custo e poderá consultar o(a) pesquisador(a) responsável sempre que quiser, por e-mail ou pelo telefone da instituição, para esclarecimento de qualquer dúvida.

Todas as informações por você fornecidas e os resultados obtidos serão mantidos em sigilo, e estes últimos só serão utilizados para divulgação em reuniões e revistas científicas. Você será informado de todos os resultados obtidos, independentemente do fato de estes poderem mudar seu consentimento em participar da pesquisa. Você não terá quaisquer benefícios ou direitos financeiros sobre os eventuais resultados decorrentes da pesquisa. Este estudo é importante porque seus resultados fornecerão informações para investigar se a abordagem via resolução de problemas é relevante para o desenvolvimento de algumas habilidades que a BNCC exige.

Diante das explicações, se você concorda em participar deste projeto de pesquisa, forneça o seu nome e coloque sua assinatura a seguir.

Nome:____

Data: _____________________ , _____ de ________________ de 20__

____ ____

Participante Pesquisador(a) responsável

OBS.: Termo apresenta duas vias, uma destinada ao participante e a outra ao pesquisador.

Nome Pesquisador(a):
Cargo/função:
E-mail:
Instituição:
Endereço:
Telefone:

ANEXO C - MODELO TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada ____, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) ______________________________. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por ___________________________, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone __________ ou e-mail _________________.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:..........

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre __________________________, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço _____________/telefone__________/e-mail_________.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: