Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

FRAÇÕES E O MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA: UMA ANÁLISE SEMIÓTICA DAS ARGUMENTAÇÕES DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

LUIZ AUGUSTO RICHIT

Porto Alegre - RS

2023

LUIZ AUGUSTO RICHIT

FRAÇÕES E O MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA: UMA ANÁLISE SEMIÓTICA DAS ARGUMENTAÇÕES DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Professor(a) Orientador(a): Vandoir Stormowski

Porto Alegre - RS

2023

CIP - Catalogação na Publicação

Richit, Luiz Augusto
FRAÇÕES E O MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA: UMA ANÁLISE SEMIÓTICA DAS ARGUMENTAÇÕES DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA / Luiz Augusto Richit. -- 2023.
94 f.
Orientador: Vandoir Stormowski.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2023.

1. Modelo de Barras de Singapura. 2. Frações. 3. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 4. Futuros professores de Matemática. I. Stormowski, Vandoir, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

FRAÇÕES E O MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA: UMA ANÁLISE SEMIÓTICA DAS ARGUMENTAÇÕES DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Luiz Augusto Richit

Banca Examinadora:

Prof. Dr. (Orientador) Vandoir Stormowski - IME-UFRGS

Profª. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti - IME-UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva - IME-UFRGS

Porto Alegre - RS, 2023.

Agradecimentos

Aos meus pais e meu irmão, aos meus tios e meus exemplos de trabalho dedicado à profissão.

Aos meus amigos do curso que dividiram comigo momentos importantes dessa trajetória, sejam aqueles que continuaram ou seguiram outros caminhos.

Aos meus dois orientadores: Vandoir Stormowski (TCC-UFRGS) e Adriana Richit (Projeto-UFFS) pelo suporte e apoio durante esse processo desafiador e de muito aprendizado.

Aos licenciandos que permitiram o nascimento desse texto por meio de sua participação e envolvimento durante as atividades da oficina.

Aos professores da banca pelo aceite em avaliar esse trabalho e por suas contribuições valiosas.

Resumo

Este trabalho apresenta uma pesquisa que busca evidências para responder a seguinte questão norteadora: "Como o Modelo de Barras de Singapura influencia os futuros professores de matemática na elaboração de argumentos no contexto de frações?". Para constituir dados para responder essa questão norteadora, foi organizada uma oficina intitulada "Frações e o Modelo de Barras de Singapura" oferecida aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. As gravações dos diálogos nos grupos de trabalho durante a realização da oficina foram transcritos e juntamente com os registros escritos forneceram as evidências para formulação de respostas à questão norteadora. As evidências obtidas durante essa atividade foram discutidas a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica através dos conceitos de Tratamento e Conversão. Como conclusão, encontrou-se que os licenciandos, ao pensarem em suas intervenções docentes, seguem uma abordagem guiada por tratamentos numéricos próprios do contexto de frações. Também foi possível observar que, quando analisaram a resposta de um aluno, os licenciandos manifestaram *prioridade dos tratamentos numéricos na atribuição da interpretação do estudante*. Por outro lado, ao empregarem e produzirem representações pictóricas com o Modelo de Barras, os licenciandos ultrapassam a abordagem guiada por tratamentos numéricos e transitam pelas representações estabelecendo conexões entre tratamentos pictóricos e numérico-aritméticos. Sob essa perpectiva, destaca-se a relevância das Conversões e coordenação de distintas representações para ultrapassar argumentos baseados principalmente em tratamentos numéricos e o enriquecimento desse processo por meio do Modelo de Barras.

Palavras-chave: Frações, Futuros Professores de Matemática, Modelo de Barras de Singapura, Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Abstract

This study presents a research aimed at providing evidence to address the following guiding question: "How does the Singapore Bar Model influences future mathematics teachers in formulating arguments within the context of fractions?". To gather data that could answer this guiding question was organized a workshop titled "Fractions and the Singapore Bar Model", which was offered to students in the Mathematics Degree course at UFRGS. The dialogues within the working groups during the workshop were transcribed, and in conjunction with written records, they provided evidence to formulate responses to the guiding question. The evidence collected during this activity was discussed using the Theory of the Registers of Semiotic Representation, through on the concepts of Treatment and Conversion. As a conclusion, it was found that undergraduates, when thinking about their teaching interventions, follow an approach guided by numerical treatments proper to the context of fractions. It was also possible to observe that, when analyzing a student's response, the undergraduates expressed *priority of numerical treatments in student's interpretation attribution*. On the other hand, when employing and producing pictorial representations with the Bar Model, the undergraduates go beyond the issue of Treatments and transit through representations, establishing connections between pictorial and numerical-arithmetical treatments. From this perspective, the relevance of Conversions and coordination of different representations is highlighted to overcome arguments based mainly on Treatments and the enrichment of this process through the Bar Model.

Keywords: Fracions, Future Mathematics Teachers', Singapore Bar Model, Theory of the Registers of Semiotic Representations.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Durante os anos de 2020 e 2021 cursei as disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática I e II (Lab. I e Lab. II). Essas disciplinas, responsáveis por inserir os graduandos de Licenciatura ao ambiente escolar sob orientação de professores de matemática do Colégio de Aplicação da UFRGS (CAP), remetem ao meu primeiro contato com o Modelo de Barras de Singapura.

Naquela ocasião - início do semestre 01 de 2020, a perpectiva de atuar no contexto escolar e experenciar a prática docente no âmbito da disciplina de Lab. I foi interrompida ainda na primeira semana do semestre pela suspensão de aulas devido à pandemia de Covid-19. Após um período de adaptação, ao retornarmos ao semestre com aulas virtuais e constituir um grupo de licenciandos para conduzir atividades matemáticas com alunos do 7º ano do CAP e no âmbito de Lab. I, definimos o tópico a ser trabalhado com esses alunos: as frações.

Sob essa perpectiva, a preocupação com a abordagem do tópico e com a forma de interação imposta pelo contexto levou-me à busca por estratégias para conduzir essa tarefa desafiadora. Dessa circunstância surge o Modelo de Barras de Singapura. A seguir, durante o semestre de 2021/01, uma nova experiência no âmbito do Lab. II, também envolvendo o uso do Modelo de Barras com alunos do 9º ano, reforçou a apropriação dessa estratégia. Nesse sentido, tanto para o trabalho com alunos pré-algébricos do 7º ano e quanto em processo de letramento algébrico do 9º ano do Fundamental (uso de letras para representar incógnitas, variáveis e equações), respectivamente, o *Modelo de Barras de Singapura* foi empregado para resolução e representação pictórica de problemas.

No trabalho desenvolvido com os alunos do 7º ano, em 2020/01, as tarefas foram disponibilizadas de forma virtual e em formato pdf[1]. Eles deveriam elaborar suas respostas, entregá-las e comunicar-se via e-mail. As tarefas desenvolvidas naquele contexto envolveram a resolução de problemas de frações de números inteiros e foram desenhadas a partir do *Modelo de Barras* como mediador. No caso das atividades conduzidas com os alunos do 9º ano (ERE 2021/01), o *Modelo de Barras* foi empregado para resolver equações algébricas do primeiro grau. Para isso, dois vídeos de resolução de problemas com frações de quantidade desconhecida, um deles envolvendo acréscimo, foram produzidos. Em ambos os vídeos, os problemas selecionados foram resolvidos através de duas abordagens: algébrica e pictórica (*Modelo de Barras*). Nesse sentido, para um panorama de aplicação dinâmica do *Modelo de Barras (Model Method)* na resolução de problemas de equações de primeiro grau, acessar os vídeos produzidos naquele contexto e disponíveis nas referências Richit e dos Santos (2021a[2], 2021b[3]).

Além disso, a descoberta do Modelo de Barras se deu mediante a busca por uma estratégia visual para abordar o tópico de fração (7º ano, ERE-2020/02) nas revistas *ZDM* (*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*) e *ESM* (*Educational Studies in Mathematics*). Nessa busca, o trabalho de autoria da professora Dra. Berinderjeet Kaur foi o primeiro mediador dessa experiência (Kaur, 2019). Na sequência, mais materiais de apoio foram rastreados, contribuindo para compreensão sobre as possibilidades e potencialidades da abordagem para Ensino da Matemática.

Transcorridas as experiências com os alunos do CAP mediante as disciplinas de Lab.s, atuei em duas escolas no âmbito das disciplinas de Estágio Docência e, ao interagir individualmente com os alunos como professor regente, percebi algumas dificuldades relacionadas à transposição e comunicação de conceitos matemáticos. Assim, dessas experiências, constituiu-se uma percepção pessoal de que o uso do Modelo de Barras poderia contribuir para a abordagem de conceitos matemáticos ao mesmo tempo que pode beneficiar o diálogo com os alunos. Essa inquietação pessoal sobre como o futuro professor pode desenvolver suas halibidades de argumentar e justificar aspec-

[1]Para verificar as tarefas mencionadas, consultar a tarefa envolvendo o *Modelo de Barras* para resolver problemas de frações, disponível em: https://www.ufrgs.br/colegiodeaplicacao/wp-content/uploads/2020/09/Assessorias_Semana24_AmoraII.pdf. Acesso em: 9 jul. de 2023. Ou seu complemento na tarefa (p. 3-5) disponível em: https://www.ufrgs.br/colegiodeaplicacao/wp-content/uploads/2020/09/amora2_completo.pdf. Acesso em: 9 de jul. de 2023. Acessar tarefa na qual o *Modelo de Barras* é empregado para ordenação de números naturais e sua representação simbólica através do link disponível em: https://www.ufrgs.br/colegiodeaplicacao/wp-content/uploads/2020/11/Assessorias_Semana33_AmoraII.pdf. Acesso em: 9 jul. de 2023.

[2]Disponível em: https://zenodo.org/record/5070509. Acesso em: 9 jul. 2023

[3]Disponível em: https://zenodo.org/record/5070472. Acesso em: 9 jul. 2023.

tos conceituais durante seu ensino e o conhecimento do Modelo de Barras motivaram a proposição de uma investigação a fim de problematizar essa questão.

Uma vez que o *Modelo de Barras* de Singapura tem sido investigado majoritariamente no contexto da aprendizagem dos estudantes e pouco se investigou a respeito do papel do professor e suas influências para sua prática, esse trabalho busca explorar e analisar o uso do *Modelo de Barras* e a argumentação dada por futuros professores de matemática. Mais especificamente, para essa investigação, fornece a oportunidade de analisar a argumentação de futuros professores no contexto das frações, já que o uso de múltiplas representações e estratégias de ensino podem ter implicações sobre a produção de argumentos.

Dessa forma, o trabalho pretende mostrar-se inovador ao conectar um problema conhecido do ensino (dificuldades e desafios da abordagem de frações, operações e resolução de problemas relacionados) à uma abordagem mediada pelo *Modelo de Barras* e discutida a partir de um aporte teórico baseado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Além disso, a perspectiva de como o futuro professor pensa sua abordagem no contexto das frações pode sinalizar desdobramentos na compreenção de seu ensino futuro. Do mesmo modo, o conhecimento dessa dinâmica também agrega às discussoes sobre os conhecimentos que esse professor possui e que formação continuada pode ter relevância para seu desenvolvimento como professor em sua carreira e prática docente.

Assim, a fim de discutir essas possibilidades, conduzimos uma pesquisa no âmbito de uma oficina intitulada "Frações e o Modelo de Barras de Singapura" e oferecida aos estudante do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Por meio dessa oficina e de uma atividade planejada para constituição de dados, buscamos responder a questão norteadora da pesquisa: "Como o Modelo de Barras de Singapura influencia os futuros professores de matemática na elaboração de argumentos no contexto de frações?". Essa questão norteadora decorre do objetivo principal da pesquisa e que se refere a investigar o efeito do uso do *Modelo de Barras* de Singapura sobre as argumentações dadas por futuros professores de matemática em um contexto de problemas de matemática que envolvem frações. Adicionalmente, no âmbito desse objetivo principal, conduzimos esse processo segundo os objetivos específicos:

- Analisar o efeito do uso representações pictóricas sobre a argumentação em futuros professores de Matemática no contexto de frações;

- Analisar as evidências obtidas e discuti-las a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval em face a responder a questão norteadora;
- Formular conclusões baseadas nas evidências constituídas durante a pesquisa.

Finalmente, a apresentação feita neste texto para a pesquisa realizada segue 5 capítulos principais. A partir desse capítulo de Introdução (1), o Capítulo 2 apresenta o quadro teórico para os tópicos pertinentes, enquanto os Capítulos seguintes apresentam os Materiais e Métodos (3), os Resultados e Discussão (4) e o Capítulo 5 apresenta as considerações finais para a pesquisa.

Capítulo 2

Quadro teórico

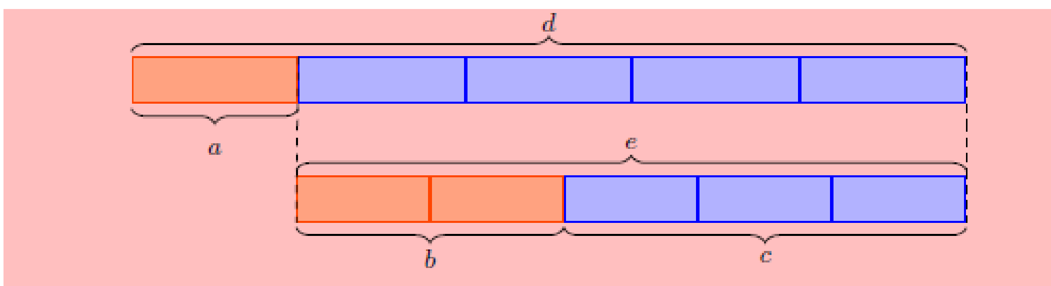
Neste capítulo são apresentadas 5 seções que correlacionam, com base em consulta à literatura corrente, os tópicos teóricos centrais envolvidos no desenvolvimento da pesquisa. As seções 2.1 e 2.2 apresentam o Modelo de Barras de Singapura e perspectivas sob a ótica de Professores de Matemática. Nas seções seguintes são apresentados os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (seção 2.3), o papel das representações para aprendizagem e compreensão em matemática correlaciadas às três atividades cognitivas fundamentais definidas por Duval (seção 2.4) e reflexões que articulam o Modelo de Barras e a Teoria de Duval (seção 2.5).

2.1 O Modelo de Barras de Singapura (‘Model’ Method)

O *Modelo de Barras de Singapura* como é comumente conhecido em português (Richit; Richit, 2022a) - sendo a denominação empregada nesse trabalho, e em espanhol (Urbano; Fernández; Fernández, 2016) ou *Model Method* (Ng; Lee, 2009a; Kaur, 2019), *Singapore Modelling Method* - *SMM* (Clement; Auslander, 2021), *Block Models* (Garzon; Casinill, 2021) e *Bar Model Method* (Hoffer, 2015; Koleza, 2015; Matzin; Mundia, 2020; Mei; Soo, 2014) em inglês, tem recebido destaque devido ao *Método de Singapura*. Por essa razão, o Modelo de Barras de Singapura é, muitas vezes, inadequadamente referido como *Método de Singapura*. Autores discutem e abordam essa questão com o objetivo de desmistificar a ideia de que a ‘Matemática de Singapura seja o Modelo de Barras’ (Kaur, 2019). Nesse sentido, o *Método de Singapura* refere-se a um programa curricular (de matemática) estruturado e de desenvolvimento em espiral (Baldin, 2018). Por outro lado, entre os objetivos para ensino de Matemática desse país está o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas pelos alunos (Kaur, 2019). É nesta perspectiva que o *Modelo de Barras* assume um papel mediador para acessar esse objetivo curricular (Kaur, 2019; Cheong, 2002).

Ao mencionar o Modelo de Barras como potencial mediador no ensino de tópicos desde os anos iniciais até os finais do Ensino Fundamental no Brasil, Richit e Richit (2022a) considera-o como uma ferramenta potencialmente articuladora destes dois níveis de ensino (Fundamental anos iniciais e anos finais) com base nas produções correntes. De fato, o uso sistemático do Modelo de Barras pode auxiliar a instrução matemática escolar para uma multiplicidade de tópicos e de forma não-particionada entre esses dois níveis (o que comumente ocorre). Nesse sentido, essas representações constituem-se de desenhos na forma de retângulos e que são sistematicamente empregados em Singapura para resolver problemas verbais de matemática. A figura 2.1 ilustra uma representação visual do Modelo de Barras.

Figura 2.1: Imagem de uma representação visual pelo Modelo de Barras de Singapura



Fonte: elaborado pelo autor

Outros materiais que empregam 'representações retangulares' similarmente ao *Modelo de Barras*, com manuseio concreto ou pictórico, incluem os conhecidos métodos de *Algebra Tiles* (ver, por exemplo, Almeida *et al.* (2020), Hall (1999), Kayser (2023), Meinerz (2020) ou Sharp (1995)), *a Escala Cuisenaire* (*Cuisenaire rods* - para mais detalhes verificar as referências Abreu-Mendoza *et al.* (2021), Rumbelow (2019), Constantinides e Neale (2018) e de Bock (2020)), o *Método de Área para Multiplicação* (*Area Method for Multiplication* ou *Grid Model* - para mais detalhes, ver por exemplo, Lee (2014), Graeber (1993), Tsankova e Pjanic (2009) ou Strickland e Maccini (2013)), e representações pictóricas-simbólicas e variáveis perceptivas no método de Zoltán Pál Dienes (para detalhes, ver Gningue (2006) ou Gningue (2016)), por exemplo.

As representações figurais desempenham um papel de suporte bem conhecido na resolução de problemas matemáticos (Arcavi, 2003; Berends; Van Lieshout, 2009), sendo reconhecida como a principal estratégia empregada para a resolução de problemas pelos alunos (Intaros; Inprasitha; Srisawadi, 2014). Isso sugere que as representações pictóricas podem mediar a aprendizagem da matemática e melhorar as habilidades de resolução de problemas dos alunos, como apontado por Kaur (2019), por exemplo.

Pesquisas recentes com o Modelo de Barras destacaram o seu potencial para o ensino de alunos com dificuldades de aprendizagem de Matemática (Morin *et al.*, 2017; Shin*;* Bryant, 2017), ensino em classes de dois idiomas (Ramasamy; Puteh, 2018), como uma ferramenta estratégica para a mediação do letramento álgebrico - uso de letras para representar quantidades (Looi; Lim, 2009), para melhorar as habilidades de resolução de problemas (Osman *et al.*, 2018) e abordar problemas desafiadores para a educação primária[1] (Cheong, 2002). Adicionalmente, Lee *et al.* (2007) verificaram que o uso do Modelo de Barras demandou menores recursos de atenção e sua eficácia não dependeu de competências técnicas entre os participantes do estudo.

Segundo Kaur (2019), o texto publicado por Kho (1987) é o primeiro a apresentar os modelos pictóricos para resolver problemas aritméticos, atualmente conhecido como *Modelo de Barras*. Essencialmente, caracteriza-se pelo desenho de barra(s) retangular(es) representando quantidades conhecidas ou desconhecidas (Ho; Lowrie, 2014), de forma que os alunos identificam as relações numéricas declaradas no problema e criam representações visuais com base na sua compreensão para o problema (Osman *et al.*, 2018). O trabalho de Kho (1987) apresenta três modelos principais como base do *Modelo de Barras*. São eles: *O Modelo Parte-Todo* (também referido como Parte-Parte-Todo), *O Modelo de Comparação* e *O Modelo de Modificação* ou *Modelo Antes-Depois* (Kaur, 2019; Richit; Richit, 2022; Urbano; Fernández; Fernández, 2016). Esses três Modelos pictóricos padrão do Modelo de Barras de Singapura são discutidos por Richit e Richit (2022a).

No contexto das frações, Dennis, Knight e Jerman (2016) apresentam exemplos de problemas fracionários envolvendo soma, multiplicação e divisão de frações e frações de quantidades os quais são resolvidos por meio do *Modelo de Barras*. Nesse sentido, exemplos mais amplos de problemas aditivos e multiplicativos resolvidos através do *Modelo de Barras* podem ser verificados nos trabalhos de Kaur (2019), Morin *et al.* (2017) e Richit e Richit (2022a).

Assim, por meio dessa seção buscou-se apresentar o Modelo de Barras, objeto central da

[1]Equivalente ao nosso atual Ensino Fundamental em faixa etária.

pesquisa aqui discutida. Além disso, para além da representação e resolução de problemas por alunos, o Modelo de Barras pode ser discutido a partir da perspectiva do professor que ensina matemática. Nesse sentido, a seção seguinte procura explorar esse aspecto com base em trabalhos que discutem essa possibilidade.

2.2 O Modelo de Barras e os professores de Matemática

Estudos relacionando potencialidades do Modelo de Barras no desenvolvimento de habilidades de ensino dos professores são uma lacuna latente. Uma vez que o foco principal dado ao Modelo de Barras é a aprendizagem dos alunos e o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas (Richit; Richit, 2022a), investigação relacionadas aos professores parece ser uma razão para essa lacuna.

Especialmente em países cujo uso do Modelo de Barras é raro e esparço no ensino da Matemática, investigações que envolvam futuros professores de matemática, e portanto em formação, favorecem pesquisas que possam discutir dimensões relacionadas às habilidades de ensino do professor e a abordagem de tópicos matemáticos através do Modelo de Barras. Nesse contexto, investigar habilidades de argumentação na abordagem de conceitos matemáticos constitui-se de uma oportunidade particular de avaliar seu potencial em face ao fato dos professores em formação que não tiveram contato prévio com o Modelo de Barras não estarem influenciados pelo seu uso sistemático.

Mesmo em Singapura, onde o uso do Modelo de Barras é extensivo, Cheong (2002) argumenta em favor da formação de professores para proficiência no uso e aplicação do Modelo de Barras nas aulas de Matemática. Segundo esse autor, há uma demanda pela formação dos professores de matemática, pois os professores da equipe que liderou sua implementação em materiais didáticos vinculados ao desenvolvimento curricular têm progressivamente se aposentado. No contexto de Singapura, mais recentemente, Kaur (2019) discute o Modelo de Barras na perspectiva de professores atuantes no ensino escolar.

Através de entrevistas com professores envolvidos com o ensino promulgado em Singapura, Kaur (2019) propôs um conjunto de 3 questões em que os inqueriu sobre sua percepção do uso do Modelo de Barras no ensino primário. Essas três questões estiveram relacionadas ao *suporte* (na percepção dos professores) que o Modelo de Barras tem *na representação de problemas*; sobre a *confiança e tópicos* que eles percebem que os alunos mais se beneficiam pelo uso do Modelo de Barras e para que ano escolar empregariam cada um dos *problemas* listados em uma ficha entregue aos entrevistados e qual *estratégia de resolução sugeririam aos alunos* para esses problemas.

Como resultado, Kaur (2019) observou que os professores comumente incluem o Modelo de Barras em suas aulas para antecipar a resolução de problemas desafiadores, mas que o Modelo de Barras é uma das muitas estratégias heurísticas sugeridas pelos professores a fim de evitar que os alunos restrinjam seu repertório e a ideia de que "apenas modelos de barras devem ser desenhados para resolver problemas" (Kaur, 2019, p. 164, tradução minha). Além disso, embora o uso do Modelo de Barras dependa do conhecimento e preferência dos alunos, os professores confirmam que o Modelo de Barras ajuda os alunos com dificuldade a resolver problemas e na representação e visualização de relacionamentos entre os dados, mostrando que o Modelo de Barras permanece cumprindo a meta para o qual foi inicialmente introduzido no Ensino de Matemática de Singapura.

Outro exemplo relacionado ao trabalho do professor enquanto ensina tópicos de matemática em Singapura é apresentado por Ng (2015). Através de um estudo que adotou protocolos dos Estudos de Aula (planejar, lecionar e refletir uma aula específica), os autores discutem sobre os desafios do professor abordando o conceito parte-todo por meio do Modelo de Barras para alunos do 1º ano do ensino regular de Singapura. Segundo Ng (2015), embora o Modelo de Barras possa parecer 'incrivelmente simples', ele não necessariamente o é aos alunos. Para manipulá-lo adequadamente, o aluno deve generalizar propriedades dos números, terminologias matemáticas e representar os números (naturais) de forma mais complexa do que se utilizando contadores ou a estratégia *'Number bonds'* comumente empregada em Singapura (Ng, 2015). Assim, a 'simplicidade' do Modelo de Barras mostrou que os professores comumente omitem, informam diretamente ou revelam aspectos-chave relacionados ao Modelo de Barras ao invés de desenvolverem-nos com os alunos (Ng, 2015).

Fora de Singapura, Clement e Auslander (2021) conduziram uma pesquisa envolvendo o Modelo de Barras e professores de matemática em formação. Nesse trabalho, os autores discutem possibilidades do Modelo de Barras para melhorar a preparação e o conhecimento matemático de futuros professores do nível de ensino equivalente ao nosso fundamental nos Estados Unidos.

Segundo Clement e Auslander (2021), essa experiência promoveu uma melhora de habilidades que incluem “analisar e interpretar o pensamento e as ideias matemáticas dos alunos, usar múltiplas representações de conceitos matemáticos e definir termos de maneira matematicamente correta e acessível” (Clement; Auslander, 2021, p. 1125, tradução minha). Assim, considerando que o professor iniciante tem pouca experiência e precisa mediar a instrução de uma linguagem terminológica específica, mas também precisa (clara e acessível), relacionada aos conceitos matemáticos em sua prática letiva, o Modelo de Barras mostrou-se um mediador eficiente para preparação daqueles futuros professores (Clement; Auslander, 2021).

Dessa forma, as poucas investigações conduzidas sob a perpectiva do ensino ou da prática do professor parecem reforçar a promessa do Modelo de Barras. E, embora sua reputação esteja principalmente relacionada a sua efetividade na apredizagem dos alunos, o Modelo de Barras parece beneficiar tanto os alunos quanto os professores. De fato, Clement e Auslander (2021) verificaram que os professores participantes passaram a ter maior confiança em seus conhecimentos matemáticos sobre frações e que foi o objeto de estudo daquela pesquisa.

Nesta seção e na seção prévia se encontra a apresentação do Modelo de Barras e o relaciona a sua importância para formação docente com base na literatura atual, respectivamente. Na seção seguinte, é apresentada a Teoria de dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a qual fornece a lente teórica pela qual os resultados constituídos na pesquisa foram analisados.

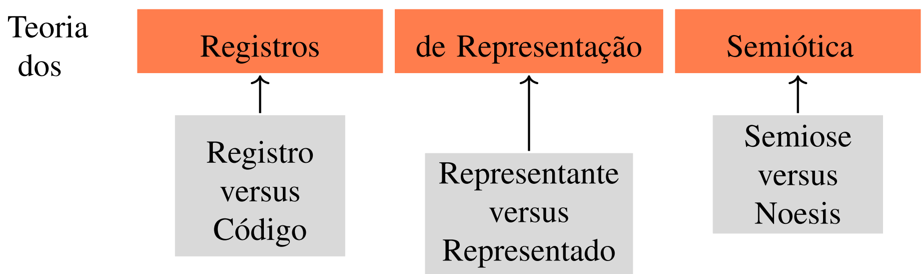
2.3 A Teoria de Duval e a articulação de representações em Matemática

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS (Duval, 1993)[2] é formulada por Raymond Duval a partir de um conjunto de evidências (Duval, 1988a, 1988b, 1988c) até a sua sistematização em 1995, como Tese de Doutorado no *Insituto de Rechersches en Education Matematiquè* (IREM) e intitulada *Semiosis et pensee humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* (Duval, 1995). A partir de precedentes teóricos, Duval articulou os conceitos de Sentido e Referência (Frege), Signo e Significado, Representante e Representado, e Semiósis e Noesis (a partir de conceitos formulados por Platão na antiguidade grega) para fundamentar a sua teoria

[2]O referido texto é intitulado *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, cuja tradução em português foi apresentada pelo Professor Méricles Tadeu Moretti (Moretti; Duval, 2012a).

relativa às representações em matemática e seu papel na aprendizagem da matemática. A figura 2.2 sintetiza os aspectos teóricos que envolvem a designação dada por Duval à sua Teoria:

Figura 2.2: Fundamentos da designação de Duval para sua teoria



Fonte: elaborado pelo autor

O nome dado à teoria incorpora a diferença entre Registro e Código, Representante e Representado e Noesis e Semiose (Duval, 2004; Duval; Moretti, 2012a). Assim, se *noesis* é a apreensão conceitual e *semiose* é a produção de símbolos e signos, o termo Semiótica (derivado de semiose) refere-se aos sistemas simbólicos em que as representações são produzidas (Duval, 2004; Duval; Moretti, 2012a).

Além disso, o termo Representação é empregado de forma coerente com a compreensão de que o objeto matemático não pode ser acessado senão por meio de uma representação, e cada representação é um representante semiótico parcial do objeto matemático (conceito abstrato) - o representado. Finalmente, por compreender que a produção de uma representação em matemática se diferencia de um simples processo de codificação e decodificação de informações, Duval emprega o termo Registro em distinção ao termo Código.

Embora seu trabalho baseie-se em pesquisas e conceitos discutidos anterioremente, Duval forneceu uma teoria particularmente preocupada com o papel das representações em Matemática e em fundamentos cognitivos que explicam a aprendizagem. Duval e Moretti (2012a) consideram que, embora, os objetos matemáticos não sejam as representações que deles são produzidas, não podem ser mobilizados senão através delas. Além disso, argumentam que as representações dos objetos matemáticos permitem explicitar propriedades distintas ao serem mobilizadas entre si e fundamentais para sua compreensão integral (Duval; Moretti, 2012a).

Segundo Duval e Moretti (2012a, p. 269), “as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento [...] e desempenham um papel primordial" *no desenvolvimento das representações mentais*; *na realização de diferentes funções cognitivas* como a objetivação (expressão particular que independe da função de comunicação) e o tratamento de informações; e *produção de conhecimentos* (sobre os objetos de aprendizagem).

Assim, na TRRS, para que um Sistema Semiótico possa ser considerado como um Registro de Representação Semiótica ele deve permitir as três *atividades cognitivas fundamentais*, que Duval nomeou: **Formação**, **Tratamento** e **Conversão** (Duval; Moretti, 2012a). Esses conceitos basilares da Teoria de Duval são explicitados na seção seguinte, complementando os aspectos gerais relacionados a essa teoria e discutidos nessa seção.

2.4 As três atividades cognitivas fundamentais da Teoria de Duval

Duval (2004) considera o uso do termo Registro em contraposição ao termo Código, uma vez que a atividade matemática, diferentemente de um sistema de Códigos, permite a manipulação das informações. Para Duval (2004) essa distinção é necessária pelo fato de que a mobilização de representações em matemática se afasta de um simples processo de codificação e decodificação de informações (que são basedas em regras de correspondência termo a termo). Assim, Duval conceitua Registro (Semiótico) como um sistema semiótico que permite três atividades cognitivas fundamentais: **Formação, Tratamento** e **Conversão** (Duval; Moretti, 2012a) e as define:

- **A Formação de uma representação identificável** respeita regras cuja função "é de assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamentos" (Duval; Moretti, 2012a, p. 271). Extensivamente, Duval explica que essas regras não representam "regras de produção efetiva por um sujeito", mas somente relacionadas à capacidade de reconhecê-las (Duval; Moretti, 2012a, p. 271-272). Assim, a **Formação** refere-se a identificação das representações como produção semiótica reconhecível em um dado Registro (de Representação Semiótica). Nesse sentido, são cinco (5) os Registros principais: Língua Natural, Registro Aritmético/Numérico, Registro Algébrico, Registro Figural e Registro Gráfico.

- **O Tratamento de uma representação** “é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro” (Duval; Moretti, 2012a, p. 272). São exemplos de tratamentos: a paráfrase e a inferência na caso da língua natural; os cálculos em expressões simbólicas (aritmética, algébrica, proposicional); a reconfiguração no caso das figuras geométricas, as translações e rotações em funções dadas graficamente (Duval; Moretti, 2011, 2012a), entre outras.

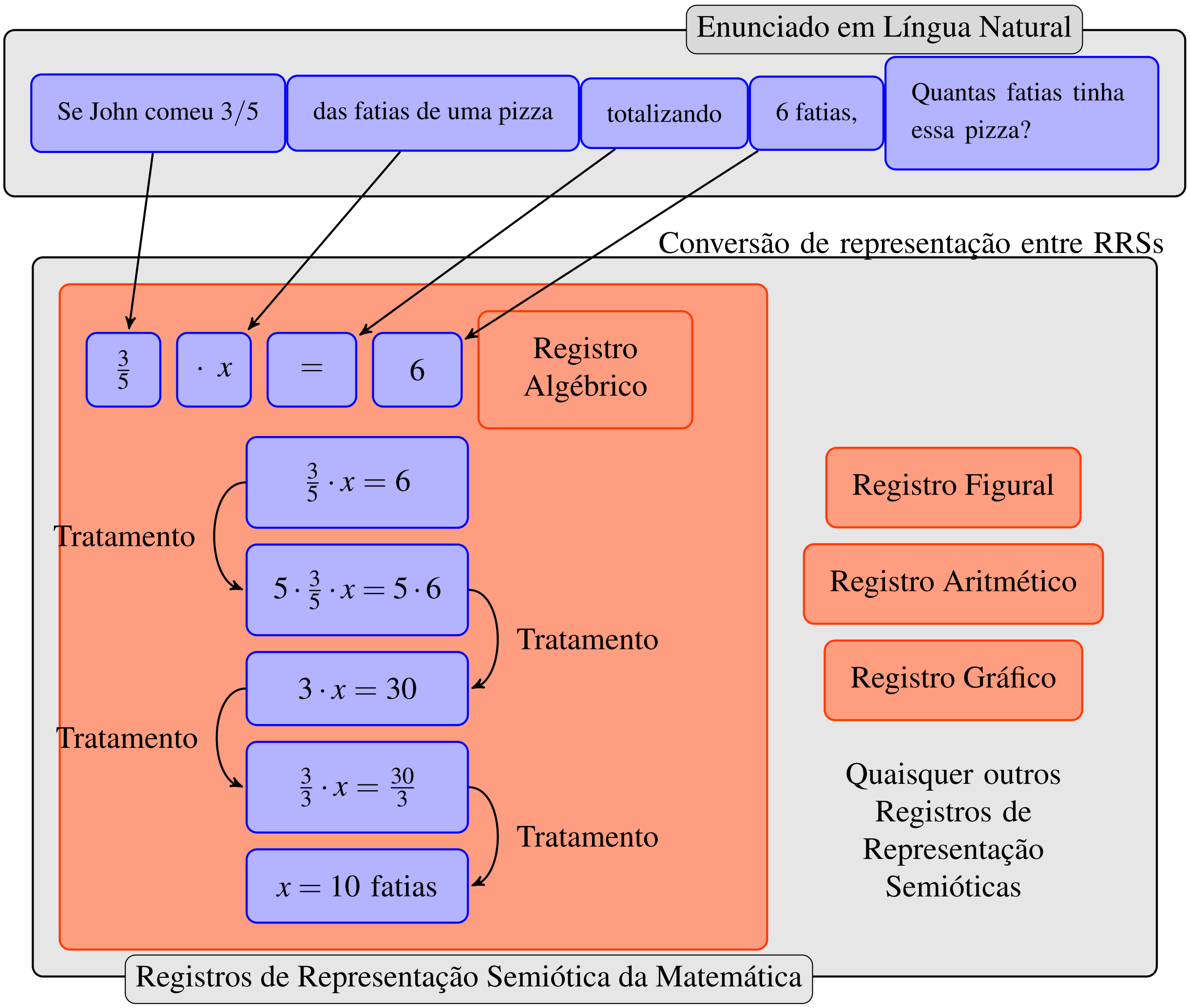
- **A Conversão de uma representação** “é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial” (Duval; Moretti, 2012a, p. 272). Por exemplo, a “ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística” (Duval; Moretti, 2012a, p. 272).

Nesse sentido, as discussões correntes relacionadas a teoria de Duval têm-se concentrado principalmente sobre as duas últimas atividades cognitivas. Assim, embora não seja o objetivo deste trabalho realizar exemplificações, para melhor contextualização desses dois conceitos, recorre-se a um exemplo. Tomando-se o seguinte problema verbal típico da matemática escolar:

Exemplo 1. *Se John comeu* $\frac{3}{5}$ *das fatias de uma pizza totalizando* 6 *fatias, quantas fatias tinha essa pizza?*

Uma possível resolução envolve escrever uma expressão algébrica correspondente (conversão) a fim de obter-se, mediante tratamentos, a quantidade solicitada. Esse processo é ilustrado na figura 2.3.

Figura 2.3: Conversão do Enunciado em Língua Natural para sua representação algébrica no Registro Algébrico - Exemplo (1).



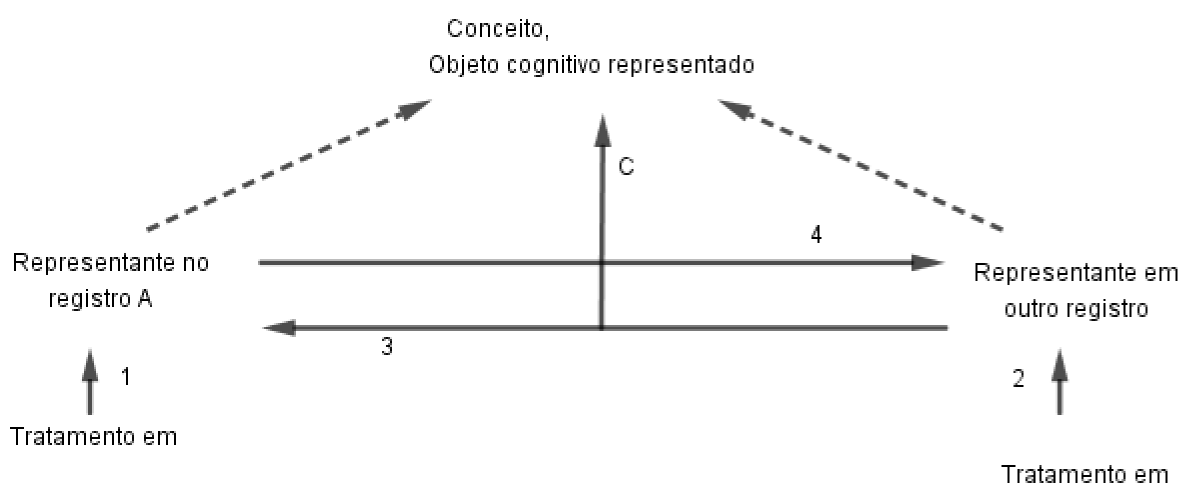
Fonte: elaborado pelo autor

O processo de conversão mostrado na figura 2.3 envolve estabelecer a correspondência dos elementos da declaração verbal em uma representação algébrica. As setas apresentadas nessa figura representam esse processo e que nesse caso é ordenado, o que pode ser percebido como a presença das setas lado a lado. Essa passagem entre a representação em Língua Natural e a representação Algébrica (equação obtida) corresponde à definição de Conversão em Duval. A seguir, a equação pode ser resolvida mediante o uso de um conjunto de operações de manipulação da representação algébrica dentro do próprio Registro Algébrico. Essas operações de mudança de uma representação interna ao próprio registro são denominadas por Duval e Moretti (2012) de Tratamento. Finalmente, após a manipulação da equação algébrica obtem-se o valor solicitado no problema verbal: a quantidade de fatias (x) que a pizza tinha.

Tais processos são considerados por Duval para explicar e compreender a aprendizagem. Nesse sentido, para explicar a aprendizagem e a compreensão em Matemática, Duval (1995) deu maior destaque à Conversão. Assim, a TRRS tem por hipótese fundamental que a aprendizagem em Matemática ocorre pela Conversão de Representações entre ao menos dois Registros (de Representação Semiótica). Como consequência, Duval postula que a aprendizagem em Matemática é indissossiável da Conversão entre Representações (Duval; Moretti, 2012). Apesar disso, o ensino regular privilegia o desenvolvimento de Tratamentos nos seus diferentes Registros Semióticos, o que contribui para a problemática identificada por Duval: a recorrente dificuldade de conversão entre representações (Duval; Moretti, 2012a). Dessa forma, o ensino prioriza os tratamentos sobre as representações e, por outro lado, as dificuldades de aprendizagem se relacionam à Conversão de representações (Duval; Moretti, 2012a, Richit; Richit, 2022b).

Para sistematizar a relação entre Conversões, Tratamentos e a Aprendizagem, Duval (2004) e Duval e Moretti (2012a) apresentam o esquema mostrado na figura 2.4.

Figura 2.4: Hipótese fundamental da aprendizagem em função da Conversão entre Representações



Fonte: Adaptado de Duval e Moretti (2012a)

Nessa figura, segundo Duval e Moretti (2012a, p. 282), "as flechas 1 e 2 correspondem às transformações internas a um registro e as flechas 3 e 4 às transformações externas, quer dizer, mudança de registro por conversões" (ver esquema mostrado na figura 2.4). Além disso, "a flecha C corresponde a compreensão integral de uma representação: ela supõe uma coordenação de dois registros. As flechas pontilhadas marcam a distinção clássica entre representante e representado" (Duval; Moretti, 2012a, p. 282), e como mostrado, a conceituação e a compreensão do objeto matemático estão relacionadas às conversões (flechas 3 e 4).

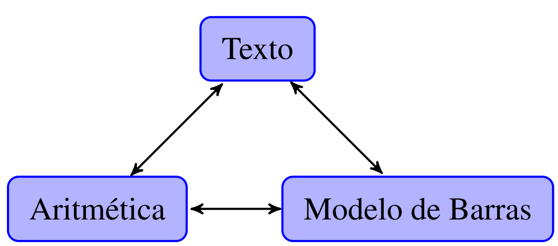
Assim, nessa seção, buscou-se discutir os conceitos-chaves pelo qual os dados constituídos a partir da experiência realizada foram analisados. Esses conceitos referem-se ao conceito de Tratamento e Conversão. Adicionalmente, a seção seguinte busca relacionar o Modelo de Barras à Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Assim, o processo de resolução de problemas via Modelo de Barras (com base na literatura disponível atualmente) é discutido de forma articulada aos conceitos de Tratamento e Conversão apresentados nessa seção.

2.5 O Modelo de Barras e reflexões a partir da Teoria de Duval

Segundo Ng e Lee (2009b), quatro pesquisas financiadas pelo governo de Singapura através do Ministério de Educação examinaram, entre 2001 e 2007, como os alunos usavam o Modelo de Barras para resolver problemas matemáticos. Nesse texto, Ng e Lee (2009b) retratam, entre as quatro pesquisas, uma investigação com professores de matemática.

Nessa investigação, o processo de resolução de problemas através do uso do Modelo de Barras foi descrito pelos professores participantes a partir da própria experiência docente. Assim, conforme as contribuições desses professores, revelou-se que o processo de resolução de problemas via Modelo de Barras envolve três modos de representação: na forma de *Texto*, de *Modelo de Barras* e *Aritmética*. Ng e Lee (2009b) sintetizam essa dimensão dos modos de representação no contexto do uso do Modelo de Barras na resolução de problemas no esquema mostrado na figura 2.5.

Figura 2.5: Esquema mostrando o movimento entre diferentes modos de representação para a resolução de problemas conforme Ng e Lee (2009b).



Fonte: Adaptado de Ng e Lee (2009b)

De forma complementar, Ng e Lee (2009a) discutem o processo de resolução de problemas via Modelo de Barras por meio de três etapas integradas, as quais se denominou por *fases Textual, Estrutural* e *Procedimental-Simbólica*. Essas três fases caracterizam-se por:

Textual: "as crianças lêem as informações apresentadas em forma de texto" (Ng; Lee, 2009a, p. 291, tradução minha) e as interpretam.

Estrutural: "as crianças representam as informações do texto na estrutura do modelo (de Barras). As crianças podem alternar entre o texto e o modelo para verificar se o modelo descreve com precisão a informação do texto" (Ng; Lee, 2009a, p. 291, tradução minha).

Procedimental-Simbólica: é a terceira fase descrita por Ng e Lee (2009a) e está associada a manipulação simbólica dos números por meio de operações que são determinadas com base no modelo elaborado para representar o problema. Nesse sentido, Ng e Lee (2009) afirmam que "depois de construírem o modelo, as crianças usam o modelo para planejar e desenvolver uma sequência de equações aritméticas lógicas, que permitem a solução do problema. Novamente, a alternância entre as duas representações Estrutural e Procedimental-Simbólica permite verificar a acurácia das equações aritméticas com base no modelo" (Ng; Lee, 2009a, p. 291, tradução minha).

Tomando esse processo sob a lente da TRRS, a resolução de problemas por meio do Modelo de Barras pode ser descrita como um processo que envolve a conversão entre distintas representações as quais se complementam e se articulam. Esse processo de três fases descrito por Ng e Lee (2009a) e três modos de representação (Ng; Lee, 2009b) podem ser exemplificados a partir do problema apresentado na seção anterior (Exemplo 1) conforme sintetiza a figura 2.6 que segue.

Figura 2.6: As três fases do processo de resolução de problemas de Ng e Lee (2009a, 2009b) para o Exemplo 1.

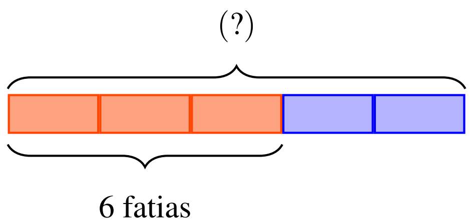
Se John comeu $\frac{3}{5}$ das fatias de uma pizza totalizando 6 fatias, quantas fatias tinha essa pizza?

Fase Textual

$\nearrow\swarrow$ $\searrow\nwarrow$

Fase Estrutural $\rightleftarrows$ *Fase Procedimental-Simbólica*

Modelo de Barras:



Cálculos:

3 unidades $\rightarrow$ 6 fatias;
1 unidade $\rightarrow 6 \div 3 = 2$ fatias;
5 unidades $\rightarrow 2 \times 5 = 10$ fatias.

Resposta: A pizza tinha 10 fatias.

Fonte: Elaborado pelo autor

Como observado, a resolução do problema envolve a interpretação textual, identificação das suas informações pertinentes e reescrita a partir de uma representação pictórica (Modelo de Barras). Esse movimento envolve ‘idas e vindas’ entre essas duas formas de representação, porquanto o enunciado é escrutinado, reformulado e reescrito sob a forma pictórica a fim de representar as informações verbais dadas.

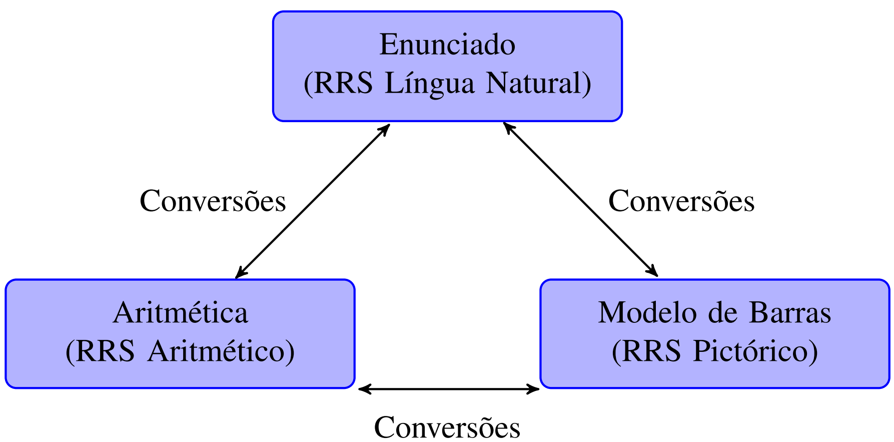
A seguir, esse processo é complementado com a manipulação das quantidades de forma simbólica no Registro Aritmético: tomada de decisão sobre as operações e realização de cálculos. Nesse caso, ocorre a conversão entre as representações pictórica e aritmética, mantida a relação com a solicitação dada na forma verbal (Língua Natural).

Assim, o processo de resolução de problemas a partir do Modelo de Barras se desenvolve a partir de uma perpectiva multirepresentacional, cujo foco não envolve a aplicação direta de Tratamentos sobre as quantidades do problema, mas sim um processo de complementariedade das distintas representações empregadas. Nesse sentido, Ng e Lee (2009b) estabelecem que o trânsito entre o texto e o desenho do Modelo de Barras permite a verificação da precisão da produção da representação pictórica enquanto a verificação da acurácea da manipulação das expressões aritméticas e cálculos faz parte do movimento entre os modos de representação aritmético e o desenho do Modelo de Barras (pictórica).

Esses aspectos permitem estabelecer um relação com a noção de coordenação de representações e trânsito entre registros na perpectiva da TRRS. A hipótese fundamental na Teoria de Duval (2004) refere-se a imprescindibilidade da conversão das representações entre registros para compreensão dos objetos matemáticos enunciados e, nesse contexto, o Modelo de Barras articula um processo multirepresentacional no qual as conversões ocorrem em complementariedade a fim de se obter a solução do problema.

Nesse sentido, a ideia subjacente apresentada na figura 2.5 alinha-se à concepção de Duval sobre as conversões e a compreensão dos objetos matemáticos (Duval; Moretti, 2012). Uma ideia complementar possível de ser adicionada, a partir das contribuições de Duval sobre o processo de aprendizagem, corresponde ao esquema apresentado na figura 2.7.

Figura 2.7: Esquema reformulado de Ng e Lee (2009b) para incluir o conceito de Registro e Conversão de Representações.



Fonte: elaborado pelo autor

Nessa figura (2.7), as setas entre os três modos de representação representam as conversões entre essas representações em seus respectivos Registros de Representação. Sob essa perspectiva, as afirmações relativas à efetividade do modelo de Barras na resolução de problemas (Cheong, 2002; Kaur, 2019) e o aprofundamento das relações e conceitos matemáticos (Richit; Richit, 2022a) podem encontrar amparo na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. O processo de resolução via Modelo de Barras envolve a conversão entre representações e o trânsito entre elas, o que pode ser uma justificativa para o maior desempenho dos estudantes nessa perpectiva de resolução de problemas. Além disso, sob a perpectiva da pesquisa aqui apresentada, esse movimento entre as distintas representações relacionadas ao Modelo de Barras e às frações pode influenciar os argumentos produzidos por futuros professores. Nesse sentido, na seção seguinte, é apresentada a metodologia da investigação realizada com os futuros professores de Matemática participantes.

Capítulo 3

Materiais e Métodos

3.1 Contexto e participantes

A oficina **Frações e o Modelo de Barras de Singapura** foi oferecida aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul em duas edições. A primeira edição ocorreu ao final do semestre 2022/02 (abril-2023) e a segunda edição ocorreu na segunda e terceira semanas do semestre 2023/01 (maio-2023). Para isso, os interessados deveriam se inscrever via formulário (*google forms*) divulgado entre os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática (Apêndice 5, figuras 5.1, 5.2 e 5.3).

Para participarem nessa oficina, os estudantes foram inicialmente solicitados a informar sobre seu andamento nas disciplinas do curso relacioandas à atuação direta com os estudantes no contexto escolar: as disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem de Matemática (I, II e III) e as disciplinas de Estágio de Docência em Educação Matemática (I, II e III). Essa solicitação tem uma dupla motivação. A primeira foi garantir a participação de licenciandos que haviam vivenciado o contato com estudantes no ambiente escolar e portanto experienciaram a atividade docente. Esse critério é condizente com o objetivo principal da pesquisa e que se concentra em avaliar os argumentos de futuros professores de matemática relacionados ao ensino. A razão secundária referiu-se a divulgação antecipada de critérios de exclusão de inscritos junto ao formulário (figura 5.3), caso ultrapassassem o número de 15 inscritos em cada edição.

Por fim, os dados coletados durante essa etapa da pesquisa também permitiram caracterizar os participantes de acordo com as experiências docentes no âmbito dessas disciplinas e são apresentados no decorrer do texto. No que se refere à pesquisa realizada durante a oficina, a seção seguinte aborda a organização da atividade realizada, a tarefa desenvolvida pelos participantes e a coleta de dados para formulação de respostas a questão norteadora do trabalho.

3.2 Organização da oficina, tarefa e coleta de dados

A oficina foi organizada em três seções de trabalho. Cada seção foi desenvolvida em um encontro, totalizando os três encontros realizados em cada edição. A segunda seção foi aquela cuja coleta de dados esteve direcionada à pesquisa desenvolvida nesse trabalho. De forma sintética, a oficina foi planejada e seguiu o cronograma de atividades apresentado na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Planejamento geral das seções da oficina.

Seção	**Tema**	**Descrição**	**Materiais empregados**
01	O Modelo de Barras de Singapura: Fundamentos e História.	Apresentação da Oficina, convite e coleta de autorizações para participação de pesquisa;	Documentos relacionados;
		Tarefas relacionadas ao tema Frações;	Materiais impressos;
		História do Modelo de Barras de Singapura e Fundamentos Teóricos;	Apresentação dialogada com o organizador da oficina;
		Modelo de Barras de Singapura e frações.	Tarefa coletiva envolvendo Frações via Modelo de Barras de Singapura;
02	O Modelo de Barras para Comparações Aditivas e Multiplicativas de Frações	Explorando problemas, resoluções e estratégias empregadas por alunos do ensino básico em problemas de comparações aditivas de frações com partições desiguais do Inteiro;	*Tarefa (em grupos) para pesquisa do TCC;
		Os três modelos pictóricos do Modelo de Barras (para resolução de problemas com frações);	Apresentação dialogada com o organizador da oficina;
03	O Modelo de Barras na resolução de problemas multietapas	Os três modelos pictóricos do Modelo de Barras (para resolução de problemas com frações);	Apresentação dialogada com o organizador da oficina;
		Tarefa Desafio envolvendo o Modelo de Barras e fechamento.	Materiais impressos.

Fonte: elaborado pelo autor

Especificamente para o contexto deste trabalho, conforme planejamento do segundo encontro, as atividades desenvolvidas pelos licenciandos foram organizadas de forma desencadeada e em três etapas. Essas atividades, ao serem desenvolvidas pelos participantes, forneceram as evidências para responder à questão norteadora do trabalho. A figura 3.1 (subfiguras 3.2a, 3.2b e 3.2c) apresenta essas três atividades que se referem a um mesmo problema verbal da matemática escolar.

Nessa perspectiva, as três partes (I, II e III) da tarefa buscam explicitar diferentes circunstâncias da intervenção docente ainda que restrita a um contexto parcialmente simulado. Nesse sentido, os licenciandos foram solicitados a responder as três partes considerando como o fariam com estudantes em sala de aula. Para isso, deveriam indicar o ano escolar (educação básica) que acreditavam ser mais indicado e articular suas respostas supondo o contexto da sala de aula.

A parte I (figura 3.2a) tem por objetivo verificar os argumentos produzidos pelos participantes e decorrentes de sua própria perspectiva e experiência profissional à ocasião. Por essa razão a parte I refere-se apenas a proposição do problema e a sua resposta sob a perspectiva dos licenciandos para o contexto de sala de aula.

Na parte II (figura 3.2b) a questão deveria ser respondida para uma situação que envolvia a resposta de um estudante real (dados coletados do contexto escolar), transformando a questão inicial 1b e demandando argumentos e justificativas específicos direcionados a um estudante e sua resposta autêntica.

Finalmente, na parte III (figura 3.2b), os licenciandos foram solicitados a argumentar a respeito de uma questão relacionada ao mesmo problema, porém articulando o Modelo de Barras de Singapura. A proposição dessa última questão decorre também do contexto de uma resposta real dada por alunos à questão 1a. Assim, embora não seja discutido diretamente, está implicitamente associado ao aprofundamento do argumento "Maria come 1 parte e João come 2, então João come mais porque 2 é maior do que 1" apresentado por estudantes (11-12 anos) para justificar sua resposta à questão 1a.

Para constituição dos dados necessários à análise foram informadas as condições de participação e coletadas as assinaturas de consentimente segundo o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE (Apêndice 5). Os dados produzidos durante a oficina constituem-se dos registros escritos produzidos e dos diálogos dos licenciandos enquanto discutiam e elaboravam suas respostas para cada uma das três partes da tarefa. Os diálogos foram gravados através de gravadores

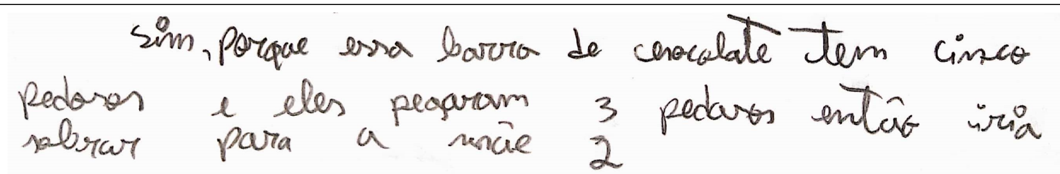
Figura 3.1: Tarefa desenvolvida pelos licenciandos participantes.

1) Os irmãos João e Maria ganharam uma barra de chocolate cada um (barras iguais). Eles combinaram que vão comer uma parte de suas barras e o restante ficará para a mãe. Como estavam aprendendo sobre frações na escola, eles brincaram de dizer a quantidade que vão comer através de frações. Maria disse que vai comer $\frac{1}{2}$ da sua barra de chocolate e João disse que vai comer $\frac{2}{3}$ da sua.
a) Quem vai comer mais chocolate, João ou Maria? Por quê?

b) João e Maria poderiam comer essas mesmas quantidades de chocolate se tivessem ganhado apenas uma barra para dividirem entre si? Por quê?

(a) Parte I da Tarefa.

2) A figura abaixo mostra a resolução apresentada por um aluno de 6º ano (12 anos) para a questão 1(b):

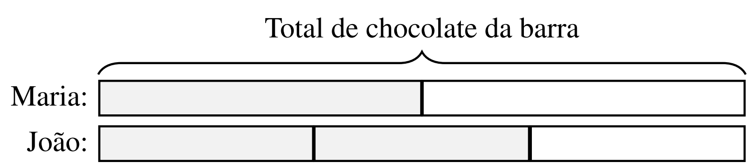


Transcrição literal:
Sim, porque essa barra de chocolate tem cinco pedasos e eles pegaram 3 **pedasos então iria sobrar para a mãe** 2

Como você dialogaria com esse aluno a fim de dar-lhe retorno para sua interpretação? Justifique.

(b) Parte II da Tarefa.

3) Para resolver a questão 1(a), o trio Rafaela, Raquel e Helena fez um desenho. A figura abaixo ilustra uma representação mais precisa da estratégia empregada por esse trio:



A partir desse diagrama, como podemos respoder às seguintes perguntas: ‘De uma barra de chocolate, quanto aquele que come mais chocolate come a mais do que o outro? Justifique.’

(c) Parte III da Tarefa.

Fonte: elaborado pelo autor

ICD-PX240 4GB (Sony) e posteriormente transcritos com auxílio do digitador de voz disponível em editor de texto do Google Drive. As transcrições, de posse consentida pelos participantes, serão mantidas por 5 anos e as quais serão destruídas dado esse prazo de armazenamento.

Finalmente, considerando a organização adotada para a constituição de dados da pesquisa, a seção seguinte aborda a análise dos resultados a partir dos princípios da pesquisa qualitativa.

3.3 Análise dos resultados

Pesquisas comumente são conduzidas de modo a considerar os dados contituídos de forma quantitativa, qualitativa ou mista. Em ambos os casos, o objetivo é obter evidências sobre o fenômeno avaliado, sejam por meio de quantificadores ou qualificadores que permitem observar e obter resultados que vão além de 'descrever puramente o objeto'.

No campo das ciências humanas e áreas de ensino, a pequisa qualitativa assume um papel destacado, pois fornece elementos que guiam análises que envolvem dimensões pouco acessadas por uma pesquisa do tipo quantitativa. De fato, a pesquisa qualitativa tem o potencial de privilegiar dimensões analíticas que perpassam os quantificadores de desempenho e de escala. Por exemplo, Bogdan e Biklen (1994) discutem a pesquisa qualitativa através de 5 dimensões e destacam a sua natureza analítica específica. Segundo esses autores, temos as seguintes cinco características da pesquisa qualitativa (Bodgan; Biklen, 1994, p 47-51):

1. *A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.* Assim, a abordagem qualitativa exige um contato com o ambiente para o qual o objeto de estudo está inserido que por sua vez é indispensável à sua compreensão;

2. *Os dados coletados são predominantemente descritivos.* Nesse sentido, as informações são geralmente constituídas a partir de entrevistas, gravações, fotos, depoimentos, etc., fornecendo os meios que registram ou descrevem detalhadamente as situações investigadas. Dessa forma, o pesquisador registra o máximo possível de elementos da realidade estudada como forma de reduzir a possibilidade de desconsiderar aspectos fundamentais à compreensão do objeto de estudo;

3. *A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto.* Ao estudar certo fenômeno, o pesquisador se concentrará em verificar como ele se manifesta em diferentes situações e como ele altera a realidade onde está inserido;

4. *O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador*: entre os objetivos do pesquisador é registrar a perspectiva dos próprios participantes em relação à questão de pesquisa com a intensão de acessar informações que escapam ao observador externo. Os autores também sugerem que se requer verificação, com os próprios participantes e outros pesquisadores, a respeito da validade das informações em função de posicionamentos e pontos de vista descritos na pesquisa, e;

5. *A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.* Os resultados e conclusões são formulados com base nos dados observados, não necessariamente fixados a partir de evidências que comprovem hipóteses *a priori*, como ocorre em um processo dedutivo. Assim, o estudo inicia-se a partir de focos de interesse e questões mais gerais, que vão se especificando no decorrer da investigação.

Além disso, a pesquisa qualitativa pode ser desenhada a partir de inúmeras metodologias analíticas que permitem acessar alguma das dimensões de investigação do seu *corpus investigativo* de interesse. Nesse sentido, a proposta aqui apresentada privilegia uma análise qualitativa dos dados constituídos e que se baseia no papel do uso de múltiplas representações na elaboração de argumentos por futuros professores de matemática. Assim, a partir das evidências produzidas e registradas durante a execução da oficina (ver tabela 3.1), conduziu-se uma análise fundamentada na Teoria de Duval, isto é, uma análise do papel de diferentes representações sobre os argumentos e justificativas dadas por futuros professores de matemática em um contexto de exploração de frações através do Modelo de Barras de Singapura. Nesse sentido, a pesquisa e as análises seguem uma perspectiva qualitativa, uma vez que "envolve uma abordagem naturalista, interpretativa [em que se] estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem" (Denzin; Lincoln, 2006, p. 17).

Dado o exposto, nessa seção são fixadas as características principais da pesquisa qualitativa e suas dimesões intrínsecas com base em Bodgan e Biklen (1994). Adicionalmente, considerando-se essas dimesões como pressuposto da pesquisa, esse trabalho vale-se da Teoria dos Registros de Representação Semiótica como metodologia qualitativa da análise dos resultados. Sob essa perspectiva, os resultados e a discussão, a partir da atividade realizada, são apresentados no capítulo seguinte (4).

Capítulo 4

Resultados e Discussão

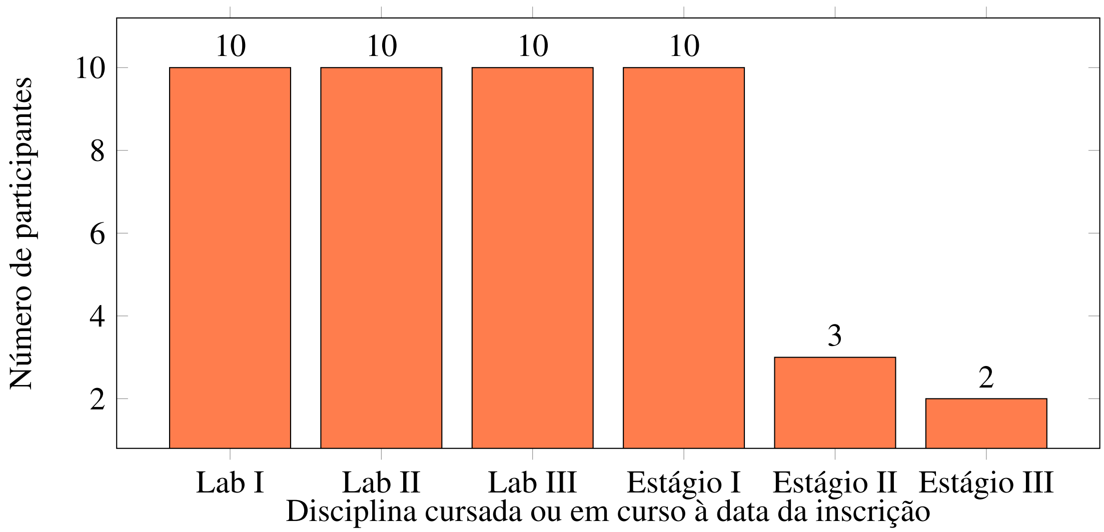
Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos durante o segundo encontro da oficina nas duas edições. A discussão e análise dos resultados segue cada uma das três partes da Tarefa desenvolvida pelos participantes a partir dos conceitos de Tratamento e Conversão da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

4.1 Participantes da pesquisa e constituição dos dados

Duas edições da Oficina foram realizadas, mediante as quais 10 futuros professores em formação inicial participaram. Cada edição da oficina se constituiu de três seções de trabalho em três encontros de cerca de 2 horas cada. Os participantes desenvolveram distintas atividades durante o processo, as quais aquelas desenvolvidas no segundo encontro compuseram os resultados para discussão abordada neste texto.

Os licenciandos participantes foram divididos em três duplas e um trio durante o segundo encontro (9 participantes presentes ao todo) conforme suas preferências. Uma das duplas foi formada e participou da primeira edição da oficina, sendo que os demais participaram da segunda edição. A figura 4.1 representa os resultados coletados mediante o formulário de inscrição (Apêndice 5) para as disciplinas cursadas ou em andamento no período de inscrição de cada edição da oficina - sem distinção por edição.

Figura 4.1: Respostas dadas pelos inscritos na oficina ao formulário de inscrição.



Fonte: elaborado pelo autor

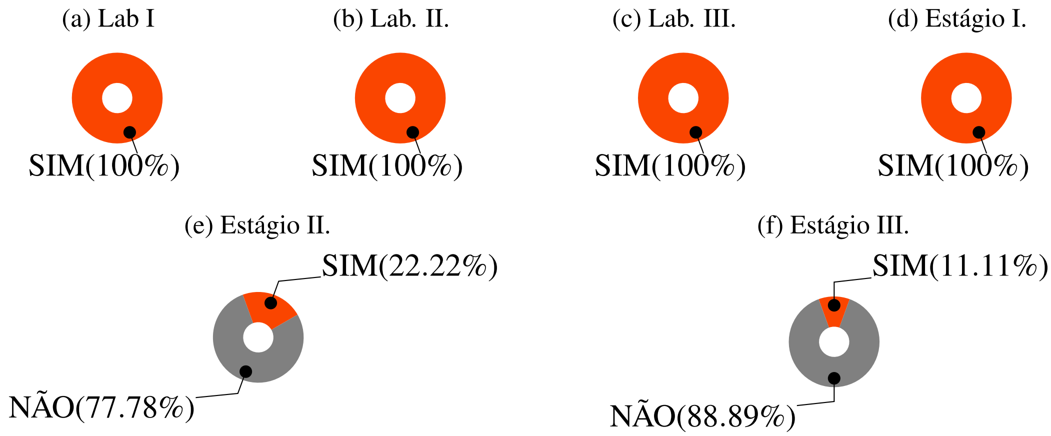
O gráfico apresentado na figura 4.1 demonstra que todos os participantes declararam terem cursado (ou em andamento) as disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem de Matemática e Estágio de Docência em Educação Matemática I, enquanto uma menor parte cursou (ou está cursando) os demais estágios.

Além disso, os licenciandos receberam nomes fictícios afim de preservar seu anonimato conforme o TCLE. Os nomes fictícios foram Clara, Fernando, Gabriel, Leonardo, Lina, Mateus, Mel, Rodrigo e Sara. Além disso, as duplas receberam as nomemclaturas D1, D2, D3 para Dupla 1, Dupla 2, Dupla 3 e T1 para o Trio 1; respectivamente.

A D1 foi constituída pelos participantes Sara e Gabriel; a D2 foi constituída pelos participantes Rodrigo e Clara; a D3 foi constituída pelos participantes Mateus e Lina; e o T1 foi constituído por Mel, Leonardo e Fernando.

Nesse sentido, considerando-se as respostas ao formulário de inscrição, apenas em D3 seus participantes responderam terem cursado/estar cursando todas as disciplinas questionadas. Além disso, tanto os participantes de D1 quanto os de T1 registraram não terem cursado as disciplinas de Estágio II e III. A dupla D2, foi constituída por participantes que cursaram todos os Laboratórios e o Estágio I, porém um deles relatou não ter cursado o Estágio II enquanto outro registrou positivamente à solicitação ter cursado/estar cursando. Na mesma dupla, ambos não registraram ter cursado Estágio III. Todas essas informações podem ser sintetizadas conforme a figura 4.2.

Figura 4.2: Frequência registrada entre os participantes para as disciplinas solicitadas na inscrição.



Fonte: elaborado pelo autor

Com isso, caracteriza-se os licenciandos participantes quanto ao seu contato com as disciplinas de docência presentes na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática (UFRGS).

Durante o encontro, os futuros professores de Matemática participantes da oficina produziram registros escritos a partir de suas discussões para cada uma dessas partes. Esses registros foram recolhidos com o consentimento (TCLE) dos participantes e integraram os materiais físicos de posse do pesquisador. Além disso, durante a realização da tarefa, o trabalho de cada dupla e o trio foi registrado por meio de gravador de voz. Esses registros em voz foram salvos e arquivados para uso posterior. Assim, tanto as produções manuscritas como os diálogos gravados compuseram o material base da pesquisa. Os quatro registros em voz resultantes da investigação, correspondentes aos quatro (4) grupos de trabalho e com cerca de uma (1) hora de duração, foram transcritos para dar suporte à análise e escrita deste texto em etapa posterior.

Em relação à constituição dos dados durante a oficina, a atividade realizada com os licenciandos seguiu três momentos consecutivos durante o início do segundo encontro. Por sua vez, a tarefa proposta constituiu-se de três fichas, cada uma pertencente a um dos três (3) momentos. Essa divisão do trabalho em três (3) fichas teve por objetivo evitar equívocos posteriores de correlação entre registros escritos, partes distintas da tarefa e as gravações em áudio. Assim, os estudantes trabalharam em cada parte e, ao concluírem-nas, tiveram seus registros escritos recolhidos para evitar sobreposição de registros e diminuir o risco de não-vinculação de anotações manuscritas e parte da tarefa correspondente com seus respectivos diálogos.

Durante o processo de transcrição, os nomes dos participantes foram mantidos, tendo sido substituídos por nomes fictícios após o término dessa etapa. Depois disso, cada dupla recebeu a atribuição de uma sigla de identificação. Ainda durante o processo de transcrição, para aumentar a clareza dos diálogos na forma textual, foram incluídas notas complementares entre parênteses e não presentes originalmente no diálogo verbal. Essas notas adicionais foram baseadas no contexto dos diálogos e serviram como esclarecimento adicionais. Além disso, a transcrição dos áudios foi acompanhada da análise paralela dos registros manuscritos a fim de se correlacionar uma à outra.

Cada registro escrito com seu respectivo registro de voz e transcrição foram analisados e, a partir destes, excertos representativos foram apresentados e discutidos na seção seguinte. A análise dos dados, baseadas nos excertos dos participantes e nos registros escritos produzidos, seguem as três partes da Tarefa (capítulo de Metodologia 3, figura 3.1). A seção seguinte inicia a discussão dos resultados obtidos durante a atividade desenvolvida.

4.2 Discussão dos achados para a Parte I

Inicialmente, para responder as três partes da tarefa (figura 3.1, subfiguras 3.2a, 3.2b e 3.2c), os participantes foram solicitados verbalmente a escolherem um ano escolar a que a tarefa (após receber a ficha da parte I da tarefa) seria adequada. Além disso, os participantes foram solicitados a responder tal questão pensando a interação com os estudantes dessa turma escolhida. Assim, mais do que responder a questão proposta em cada uma das partes, os participantes deveriam considerar como o fariam com estudantes do ano escolar escolhido. Nesse sentido, todas as duplas e o trio participantes consideraram que o ano mais apropriado era o 6º ano, embora durante o diálogo as duplas apresentaram dúvidas entre o 7º e o 6º anos e o trio inicialmente considerou o final do 5º ano, antes de decidirem pelo 6º ano. Após essa escolha, os licenciandos iniciaram sua discussões para a tarefa (3.2a) e cujos resultados coletados são analisados nessa seção.

A análise dos diálogos dos licenciandos mostrou que, ao desenvolverem a parte I da Tarefa (figura 3.2a), eles empregaram distintas representações para caracterizarem o objeto matemático do problema e formularem uma resposta à solicitação. Por outro lado, no que se refere aos argumentos empregados para justificar as suas conclusões, os participantes priorizam substancialmente os tratamentos operatórios de representações numéricas na forma de fração. Esse aspecto fornece uma evidência da importância dada aos tratamentos numéricos durante o ensino regular. Segundo Duval e Moretti (2012a) os tratamentos são os mais desenvolvidos com os estudantes no contexto escolar.

No excerto apresentado a seguir, é possível observar parte do diálogo da Dupla 1 ao desenvolver a questão 1a ("**Quem vai comer mais chocolate, João ou Maria? Por quê?**"). A discussão inicia-se pela justificativa baseada no algoritmo do mínimo múltiplo comum (mmc a partir daqui) para somar frações de denominadores distintos. E mesmo que, a seguir, os próprios licenciandos tenham elencado uma série de raciocínios de conferência e validação a partir de representações pictóricas - o que pode sugerir a necessidade de distintas representações - a justificativa apresentada por eles reforça o uso de tratamentos numéricos tradicionais do ensino.

Sara [D1]: *Ok! Então João comeu mais.*

Gabriel [D1]: *Sim! Então dois terços é maior que um meio.*

Sara [D1]: *Aham* (consentindo).

Gabriel [D1]: *Dois terços é maior que um meio, então João vai comer mais!*

Sara [D1]: *É isso, e se quisesse justificar porque que dois terços é maior que um meio era só colocar tudo no mesmo denominador.*

Gabriel [D1]: *Botar todo mundo no mesmo denominador, usar o algoritmo do mmc para [colocar] no mesmo denominador. [...]*

Gabriel [D1]: [...] *Na verdade, acho que eu explicaria usando uma régua e faria o desenho de duas barras de chocolate iguais, aí partia uma em duas partes iguais, outra em três partes iguais e riscava três, riscava duas, achando a unidade comum* (1/6).

Sara [D1]: *Eu também. E, na verdade, eu fiz o desenho primeiro na minha cabeça para depois eu passar para fração.*

Gabriel [D1]: *É!*

Sara [D1]: *É, então podemos usar o algoritmo do mmc para comparar as frações e ficar todas com o denominador seis, aí temos três sextos* (3/6) *da barra de Maria, quatro sextos* (4/6) *da de João, e três sextos* (3/6) *é menor que quatro sextos* (4/6). *[...]*

Esse excerto do diálogo pela Dupla 1 permite observar a forma como esses licenciandos pensam a interação com o aluno. Ambos os processos de Tratamento e Conversão podem ser evidenciados em suas falas. Primeiramente, a Conversão da representação verbal da situação dada em Língua Natural para representação na forma de fração e, então, o uso de tratamentos numéricos sobre as frações: aplicação do algoritmo do mmc. A seguir, Gabriel vê no uso de uma representação pictórica a possibilidade de esclarecimento do estudante ("*Na verdade, acho que eu explicaria usando uma régua e faria o desenho de duas barras de chocolate iguais*"**- Gabriel**, 2023, questão 1a) o que é corroborado por Sara *("Eu também. E, na verdade, eu fiz o desenho primeiro na minha cabeça para depois eu passar para fração*"- **Sara**, 2023, questão 1a). Esses dois trechos demonstram o uso de tratamentos próprios sobre as representações pictóricase que se referem à realização de partições nas partes (pictóricas) a fim de obter-se a unidade pictórica comum.

Adicionalmente, apesar de essas falas demonstrarem a importância da Conversão da forma verbal para outro tipo de representação (pictórica nesse caso) para esses licenciandos, eles próprios não visualizam no trânsito das representações pictóricas (após tratamentos para 'descoberta' da unidade comum) para a numérica (manipulação do mmc sobre as frações) uma possibilidade de 'argumentação' articulada. Isso pode ser observado mediante o fecho dado pelo grupo: "*É, então podemos usar o algoritmo do mmc para comparar as frações e ficar todas com o denominador seis* [...]" (**Sara**, 2023, questão 1a). Assim, a manipulação da representação pictórica pensada por eles se apresentou como independente dos processos de tratamento aplicados sobre as frações na forma numérica (uso do algoritmo do mmc) e também sugere a priorização dos tratamentos numéricos sobre as frações como forma de justificar a conclusão sobre a situação. De fato, tal observação se alinha às conclusões de Duval e Moretti (2012a) referentes à forma em que o processo de aprendizagem da matemática é majoritariamente conduzido: "centrada nos custos de tratamentos e nas limitações representativas de cada registro" (Duval e Moretti, 2012a, p. 278).

Essa observação pode ser similarmente verificada nos diálogos dos demais grupos sobre a questão 1a ("**Quem vai comer mais chocolate, João ou Maria? Por quê?**"). Um segundo excerto, da Dupla 3, apresentado a seguir, pode exemplificar essa circunstância.

Lina [D3]: *O que a gente pode fazer é usar frações equivalentes, multiplicar em cima e em baixo.*

Mateus [D3]: *Sim, aí aqui fica três sextos e aqui fica quatro sextos.*

Lina [D3]: *E aí, como o denominador é igual, tu compara só os numenadores para dizer qual é maior.*

Mateus [D3]: *Concordo. E pensando para um aluno?*

Lina [D3]: *Eu acho que a ideia é multiplicar para achar um mesmo denominador. Queremos deixar as duas frações com o mesmo denominador.*

Mateus [D3]: *Para comparar as frações.*

Lina [D3]: *Então pegamos o denominador de um e multiplicamos pelo denominador da outra* (fração)*, mas para não alterar o resultado, a gente multiplica os numeradores também* (anotando na ficha de trabalho - ver figura 4.3).

Mateus [D3]: *A gente tá fazendo o mínimo múltiplo comum. Será que a gente não teria que ensinar o mínimo múltiplo comum ? Porque na escola a gente vê desse jeito [...]*

Lina [D3]: *Eu lembro que com o 6º ano* (CAP-UFRGS)*, eles pegavam e multiplicavam em cima e em baixo, sabe?*

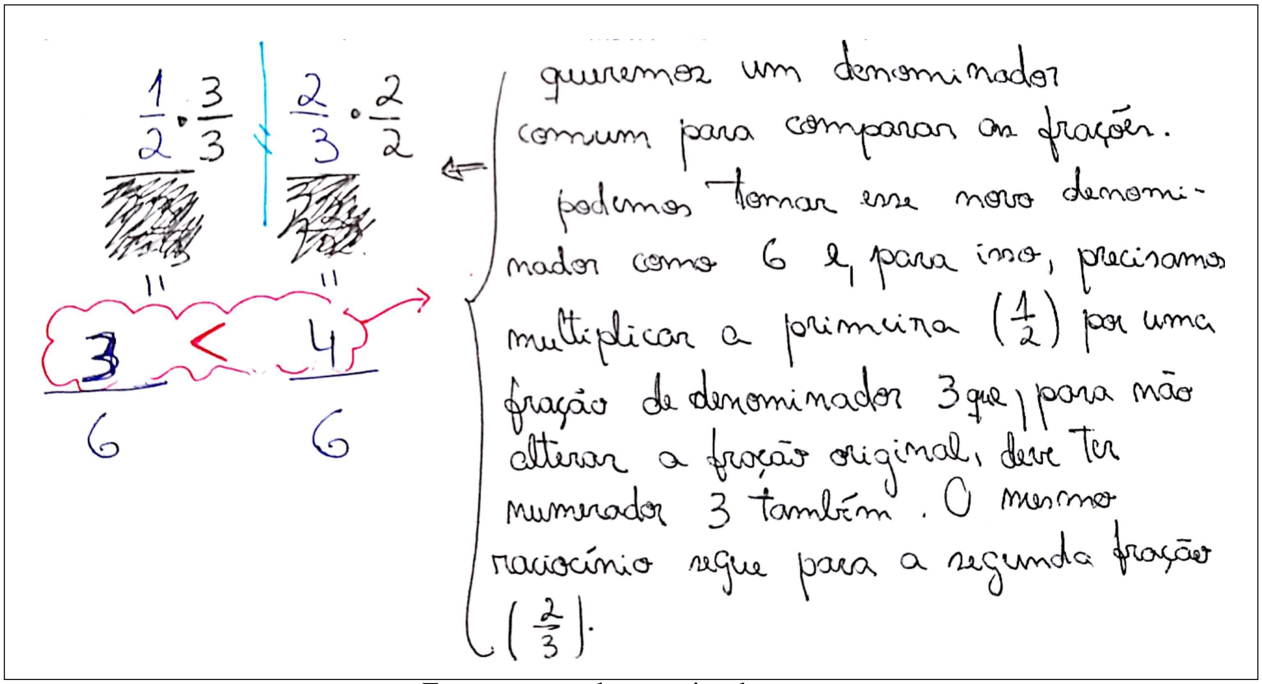
Mateus [D3]: *De uma* (fração) *na outra?*

Lina [D3]: *Isso, por exemplo aqui* (anotando na folha de rascunho - figura 4.3)*, eu peguei o dois e multipliquei o denominador da outra fração e ai pra não alterar eu multipliquei em cima também por dois. E a outra eu faço a mesma coisa, pego o três e multiplico o numerador e o denominador. Então desse jeito eu sei que eles entendem.*

Além disso, enquanto a dupla (D3) dialoga, produz seus registros escritos que reafirmam a sua discussão. Esses registros são os mostrados na figura 4.3.

Assim, a dupla D3 justifica o seu raciocínio a partir de frações equivalentes, mediante operações de multiplicação de numeradores e denominadores por fatores que produzam um mesmo denominador em ambas as frações. Tal Tratamento pode ser compreendido pelo procedimento (na forma algébrica) de, assim tomando-se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, obter duas frações de denominador iguais mediante multiplicação cruzada dos denominadores, tal que $\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}$, e o que permite a comparação direta dos numeradores. Dessa comparação resulta a escolha do número maior: aquela fração

Figura 4.3: Registros produzidos por D3 ao responder a questão 1a



Fonte: acervo da pesquisa do autor

que tiver o maior numerador (sendo os denominadores iguais) representa o maior número.

No contexto das frações da questão, o destaque dado a esses tratamentos numéricos pode ser observado diretamente na fala "*Então pegamos o denominador de um e multiplicamos pelo denominador da outra* (fração)*, mas para não alterar o resultado, a gente multiplica os numeradores também*" (**Lina**, 2023, questão 1a) e seu complemento na última fala do excerto, também de **Lina** (2023, questão 1a). Dessa forma, o diálogo dessa dupla corrobora a preferência dada aos tratamentos numéricos como argumentos válidos para justificar uma possível abordagem do problema em sala de aula.

Outro aspecto que manifestou-se durante os diálogos das duplas refere-se à não-vinculação entre diferentes representações e conceitos operatórios. Por exemplo, embora os participantes tenham utilizado representações pictóricas intermediárias, eles não suporam utilizá-las como forma de argumento e mais especificamente, não cogitaram explicitamente a relação entre os tratamentos operatórios numéricos e as representações pictóricas para suas justificativas. De forma pontual, foi possível observar tal aspecto durante o diálogo entre os participantes da Dupla 2 (questão 1a: **"Quem vai comer mais chocolate, João ou Maria? Por quê?"**) que segue.

Clara [D2]: *Tá, Maria vai comer mais, né?*

Rodrigo [D2]: *Não, dois terços é maior que um meio!*

Clara [D2]: *É!*

Rodrigo [D2]: *Esse* (mostrando a fração 1/2 na ficha da tarefa) *dá zero vírgula cinco* (0,5) *e esse* (fração 2/3), *zero vírgula seis seis seis seis...* (0,6666...)

Clara [D2]: *Verdade! Tá, João, pois dois terços é maior do que um meio. [E] é assim que tu explicaria para um aluno?*

Rodrigo [D2]: *Não, eu faria o desenho. Eu escrevi assim* (na ficha)*, mas eu complementaria com um desenho. Se a gente pegar a barra...* (faz um desenho no papel - figura 4.4)

Clara [D2]: *Desenha uma debaixo da outra!*

Rodrigo [D2]: *Aí divide a Maria ao meio* (as partes) *e o João divide por três. Maria come a metade e João duas de três. Sei lá, eu explicaria assim. Tu faria algo diferente? Tu dividiria dois por três?*

Clara [D2]: *Dá pra deixar tudo pelo mesmo denominador né? Outra maneira de fazer seria botando no mesmo denominador, que seria seis. Uma seria três sextos, que é a Maria. Um meio dai tu multiplica por três em cima e embaixo, que vai dar três sobre seis pra Maria.*

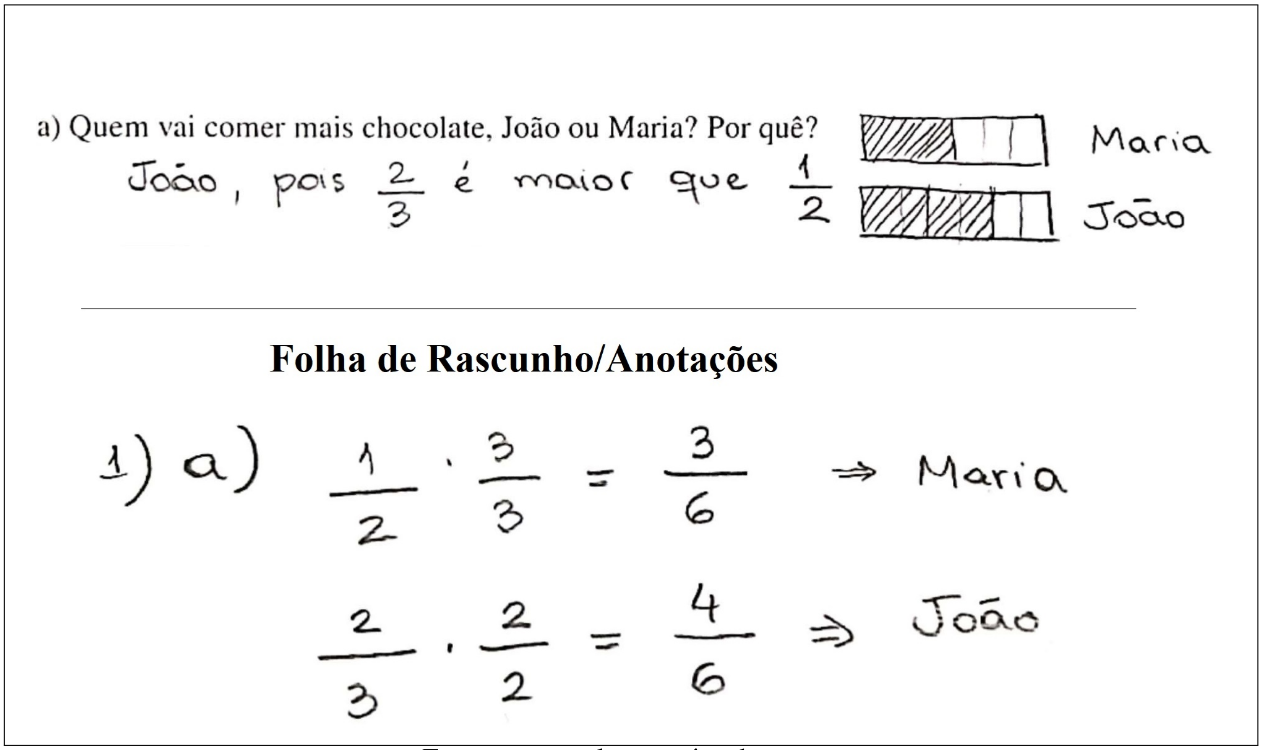
Rodrigo [D2]: *E quatro sextos* (para o João).

Clara [D2]: *E dois terços que multiplica por dois em cima e embaixo e fica quatro sextos do João. É isso!* (e registra no rascunho as operações sobre as representações numéricas das frações - ver figura 4.4, "Folha de Rascunho/Anotações")

Complementando as menções de registros e desenhos presentes na trancrição desse diálogo, a figura 4.4 contempla os registros escritos produzidos pela Dupla 2 (D2) em sua ficha de trabalho e rascunho.

Ao analisar o diálogo e registros escritos, como mencionado, percebemos que os licenciandos tiveram preferência por argumentos baseados nas operações com frações na representação numérica. Inicialmente, durante a fase de interpretação, os licenciandos transitaram pelas representações numéricas na forma decimal e de fração, conforme destaca o excerto "*Esse* (mostrando as fração

Figura 4.4: Registros produzidos por D2 ao responder a questão 1a.



Fonte: acervo da pesquisa do autor

1/2 na ficha da tarefa) *dá zero vírgula cinco* (0,5) *e esse* (fração 2/3)*, zero vírgula seis seis seis seis...* (0,6666...)" (**Rodrigo**, 2023, questão 1a).

A seguir, ao pensarem sua abordagem voltada ao estudante, os licenciandos dessa dupla consideram a produção de uma representação pictórica vinculada à representação verbal (Enunciado). Nesse processo, os licenciandos também empregaram tratamentos pictóricos sobre o Modelo de Barras por eles desenhado para produzir iguais partições dos inteiros nos dois casos, ou, dito de outra forma, para estabelecer uma unidade comum pictórica.

Esse processo revela a preocupação dos licenciandos com a clareza ao aluno, porém, ao seguirem adiante, os licenciandos aplicam uma série de operações sobre as frações numéricas para obter frações de denominadores iguais, não vislumbrando a possibilidade de arguir a partir da correlação direta entre esse tratamento pictórico (novas partições para se obter a unidade comum) e os procedimentos de cálculo de frações equivalentes (tratamento sobre as frações na representação numérico-aritmética). Dessa forma, esses dois modos de representação não aparentam, nas falas dos participantes, terem sido articulados e sugere-se que assumiram uma relação de independência entre si.

Apesar disso, entre os quatros grupos de trabalho, destaca-se o Trio 1 que apresentou uma argumentação (dirigida à sala de aula) baseada na articulação entre representações e de forma mais explícita. No excerto abaixo, é possível observar o diálogo desenvolvido entre os integrantes desse trio (Parte I, 1a).

Leonardo [T1]: *O João!* (que come mais)

Fernando [T1]: *Essa não é difícil.*

Mel [T1]: *O João!*

Leonardo [T1]: *Como que a gente explicaria isso para uma criança?*

Fernando [T1]: *Eu acho que isso é bem o inicial das frações.*

Mel [T1]: *É bem as barrinhas. Tem como fazer pintando, tem como fazer aquele negócio de frações equivalentes pra igualar denominador.*

Leonardo [T1]: *Tá, a gente pode pensar no mesmo princípio de pintar e no mesmo princípio*[1] *de fração equivalente e pensar assim: Maria vai comer um meio de sua barra. Então, digamos que esses* (mostrando no desenho - figura 4.5) *dois pedaços ela* (Maria) *divide em três, e cada um dos três pedaços do João divide em dois e aí cada um vai ter seis pedaços.*

Mel [T1]: *Então podia fazer duas barras com seis e mostrar que um vai comer três pedaços e outro vai comer quatro pedaços.*

Leonardo [T1]: *Aí dá pra explicar desse jeito que eu acho que fica tranquilo de ver. Uma barrinha pintada do mesmo tamanho vai mostrar que ele comeu uma parte maior pintando.*

Mel [T1]: *A gente pode dizer que essas divisões são tipos as listrinhas mesmo do chocolate, sabe? Eu acho que dá pra desenhar* (desse jeito).

Leonardo [T1]: *Isso. Tá, eu faço dividido por seis?* (desenhando na ficha - ver figura 4.4)

Mel [T1]: *Faz dividido por seis e ai a gente vai falar que a barra tem exatamente seis tirinhas.*

Fernando [T1]: *Talvez fazer um risquinho maior na divisória original* (de cada barra - ver figura 4.5).

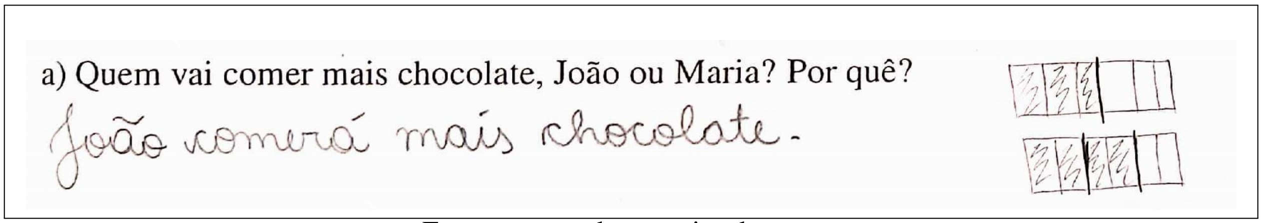
[1] O sublinhado foi adicionado durante a transcrição para fazer a marcação da ênfase na fala.

Leonardo [T1]: *Faz sentido!* (registram na ficha de trabalho)

Fernando [T1]: *E também é bom trabalhar com material manipulativo nessas coisas de fração.*

Esse diálogo é complementado pelos registros na ficha de trabalho e os quais são apresentados na figura 4.5.

Figura 4.5: Registros produzidos pelo T1 ao responder a questão 1a



Fonte: acervo da pesquisa do autor

Assim, esse Trio apresentou um olhar mais articulado entre as representações pictóricas e operações numéricas com frações (para obter frações equivalentes), isto é, não há referência no diálogo a olhares independentes entre essas duas formas diferentes de representação. Isso pode ser observado no diálogo quando **Leonardo** (2023, questão 1a) sugere que "*a gente pode pensar no mesmo princípio de pintar e no mesmo princípio de fração equivalente*", indicando uma simultaneidade e, também, complementariedade do uso de representações sob a perspectiva de como fazê-lo para abordar tal situação com alunos. Nesse sentido, o olhar desses licenciandos voltados ao aluno apontaram para a coordenação de registros, alinhando-se as considerações de Duval e Moretti (2012a) de que o principal caminho da aprendizagem matemática:

> [...] não pode ser somente a automatização de certos tratamentos [...], mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos (Duval e Moretti, 2012a, p. 284).

Por outro lado, de forma geral também é possível observar que os licenciandos, tenham ou não priorizado os tratamentos numéricos sobre as frações, e articulado ou não as representações pictóricas e as representações numéricas; não se preocuparam explicitamente com a conversão entre as representações nos registros empregados (em especial a verbal-pictórica). Por exemplo, nenhuma indagação sobre os entendimentos dos alunos a respeito de "Qual a razão para se fazer novas divisões nos modelos de barra?" e "Quais argumentos são requeridos para estabelecer uma divisão que permita reescrever os inteiros em função de uma mesma unidade comum?" foi considerada como necessária por todos os participantes da oficina. Nesse sentido, a evidência visual presumida (por professores) no uso do Modelo de Barras é um dos aspectos críticos para seu uso e discutido por Ng (2015), por exemplo.

Além disso, do ponto de vista da Conversão de representações, esse aspecto elucida que 'os Tratamentos são os priorizados e a Conversão é considerada como um processo natural/automático'. Por outro lado, Duval (2004) e Duval e Moretti (2012) argumentam as dificuldades dos estudantes como relacionadas à Conversão de representações, enquanto nessa pesquisa observou-se que a atenção dos licenciandos concentrou-se nos tratamentos numéricos requeridos para validar a resposta final.

Por outro lado, ao resolverem a questão 1b (parte I), os licenciandos manifestaram uma mudança quanto a forma de justificar. A maioria dos participantes apresentou argumentos que se fundam na coerência circunstancial e representações pictóricas. De fato, a questão 1b ("**João e Maria poderiam comer essas mesmas quantidades de chocolate se tivessem ganhado apenas uma barra para dividirem entre si? Por quê?**") evoca uma abordagem que não sucita a aplicação direta de procedimentos algorítmicos como a comparação numérica de frações. Enquanto que a comparação das quantidades se apresenta, na questão 1a, como uma comparação de frações alinhável aos tradicionais procedimentos de comparação numérica de frações, a questão 1b apresenta-se com um tarefa não-rotineira (não se ajusta à aplicação direta de um procedimento usual). Como consequência, os licenciandos apresentaram argumentos de outras naturezas, ao mesmo tempo que foram mais sucintos. O excerto abaixo apresenta a abordagem sugerida pelos licenciandos (pensada para o contexto de sala de aula) para a segunda questão (1b).

Sara [D1]: *Não, porque João comeu mais que metade da barra.* (enquanto Gabriel escreve na ficha da tarefa)

Gabriel [D1]: [...] *pois João comeu mais de meia barra, enquanto Maria comeu meia barra, logo faltaria chocolate!*

Para essa dupla (D1), a questão pode ser resolvida pelo argumento de que uma metade e uma quantidade maior que uma metade juntas ultrapassam um inteiro. Assim, a prioridade dada aos tratamentos numéricos na questão 1a passa a dar lugar a um raciocínio baseado em coerência, mas ao mesmo tempo presumindo que isso seja 'evidente visualmente', isto é, $2/3$ é maior que metade da barra de chocolate. Além disso, essa dupla considerou esse argumento como suficiente, não detalhando aspectos adicionais e limitando a análise aqui apresentada.

Nessa mesma questão, a Dupla 3 articulou distintas representações, dando destaque as representações pictóricas. Outro aspecto notável referiu-se à aproximação entre as representações pictórica para a situação-problema, a partição pertinente para obter-se uma unidade comum (tratamento da representação pictórica) e a operação de adição de frações (tratamento da representação numérica no Registro Aritmético/Numérico). Esta circunstância está presente no excerto a seguir.

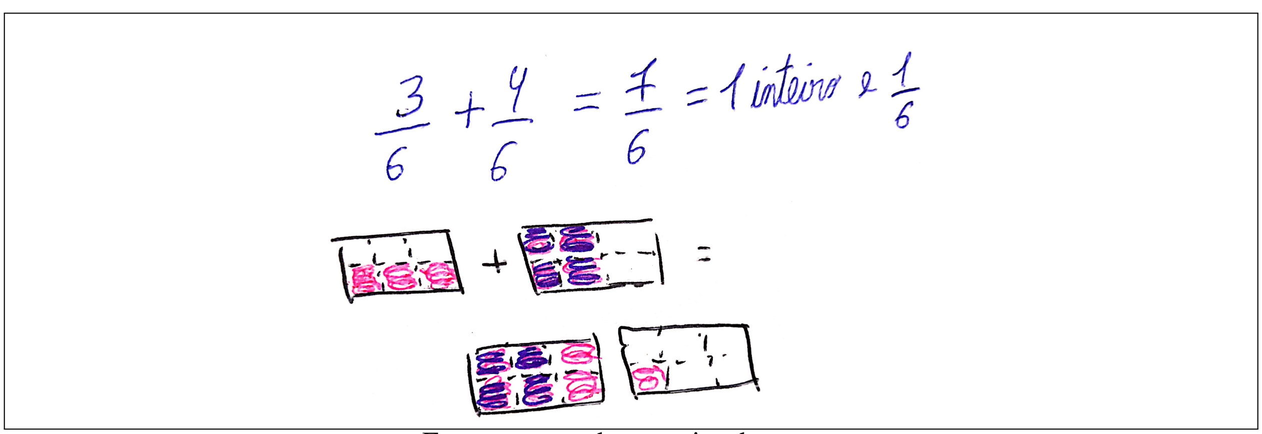
Lina [D3]: *Não, porque aqui* (desenhando no papel - ver figura 4.6) *teria seis no total e aqui teria sete.*

Mateus [D3]: *[Então a justificativa é:] Não, pois precisariam de sete pedaços e a barra tem seis pedaços.*

Lina [D3]: *E também dá pra colocar aqui três mais quatro [sextos], essa ideia de soma de frações, sete sextos que é igual a um inteiro mais um sexto.* (registrando no papel e articulando aos desenhos - ver figura 4.6)

Nesse sentido, essa dupla fez os registros escritos que são apresentados na figura 4.6. Inicialmente, eles desenharam as barras e, após análise, registraram a soma numérica das frações mostrada na parte superior desse registro.

Figura 4.6: Registros produzidos por D3 ao responder a questão 1b.



Fonte: acervo da pesquisa do autor

Assim, embora breves em seu diálogo, os licenciandos da Dupla 3 exploraram a situação (questão 1b) através das distintas representações e a correlação entre elas, enriquecendo a forma de justificar a resposta da questão 1b direcionada ao aluno. De fato, embora a Conversão entre as representações não foi, novamente, considerada como um aspecto a ser refletido no processo, nesse caso, os licenciandos estabeleceram conexões mais próximas entre as distintas representações, com tratamentos sobre as representações pictóricas (partições) e tratamentos operatórios de adição numérica das frações (reescrita de frações equivalentes pós-partição para $^1/_2$ e $^2/_3$ na forma pictórica e adição das frações $^3/_6$ e $^4/_6$ na notação numérica - figura 4.6).

Nesse sentido, a abordagem empregada caracterizou-se pelo raciocínio a partir das representações pictóricas e, como base nelas, a representação numérica na forma de fração foi estabelecida. Assim, nesse caso, a conversão seguiu do sentido Verbal para Pictórica, e a seguir, centrando-se na representação pictórica, representou-se a situação na forma numérica. Isso evidencia que as representações não foram empregadas como uma ilustração adicional para a adição das frações, pois os licenciandos viram uma possibilidade de estabelecer a adição numérica das frações a partir das representações pictóricas. Esse movimento envolveu a Conversão do enunciado para uma representação pictórica e da representação pictórica para a numérica, interrelacionando-se os tratamentos pictóricos e as operações de tratamentos numéricos das frações. Dessa forma, no contexto da discussão dessa dupla (D3), a vinculação das operações de tratamento sobre as frações em notação numérica a partir das representações pictóricas manifesta um raciocínio distinto daquele privilegiado anteriormente (questão 1a).

Similarmente, a Dupla 2 também iniciou a discussão considerando as representações pictóricas produzidas, mas, na sequência, considerou que a justificativa precisava estar baseada em tratamentos numéricos sobre as frações - o mmc. A seguir, de forma semelhante à Dupla 3, surge no diálogo da Dupla 2 uma busca pela correlação entre a representação pictórica e a numérica a respeito da operação de adição de frações na forma numérica. Esse processo pode ser observado a partir do excerto do diálogo dessa dupla a seguir:

Rodrigo [D2]: *Não poderiam, porque daria mais de uma barra!* (a partir do desenho produzido pela dupla em 1a)

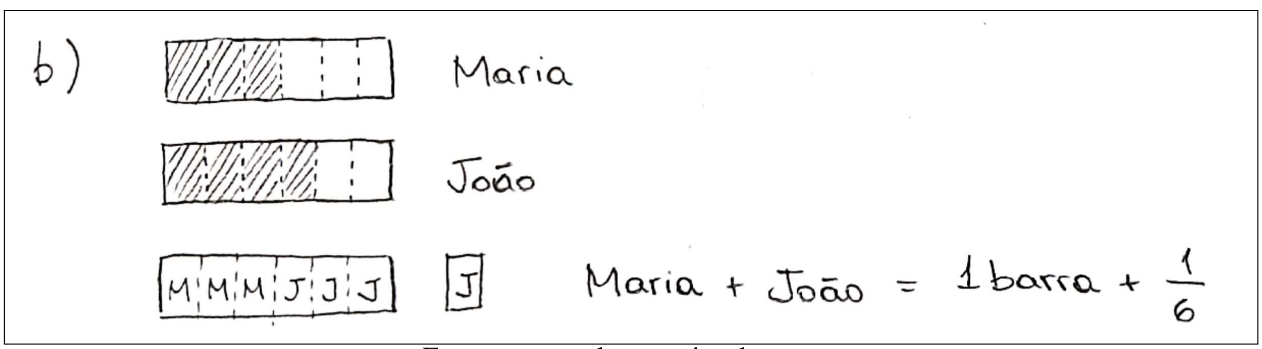
Clara [D2]: *Isso aí!*

Rodrigo [D2]: *Porque a soma dá maior do que um inteiro.*

Clara [D2]:	*[...] Se somarmos as quantidades teríamos mais de uma barra.*
Rodrigo [D2]:	*E algebricamente isso dá?*
Clara [D2]:	*O quê? Um meio mais dois terços?*
Rodrigo [D2]:	*Ou três sextos mais quatro sextos.*
Clara [D2]:	*Na real não daria para somar um meio mais dois terços. Teria que fazer o mmc e somar. Tá, e como tu faria isso pictoricamente?* (desenham no papel - figura 4.7)
Rodrigo [D2]:	*A gente junta os pedaços das barrinhas. Ela já está dividida em seis, ai a gente aqui tem quatro e aqui tem três, aí quando a gente juntar os dois em uma só vai sobrar uma barrinha, né?*
Clara [D2]:	*Sim! Uma barra mais um sexto, por isso não daria. É isso.*

Nesse excerto os estudantes discutem a respeito da representação pictórica correspondente à discussão sobre a soma de frações na forma numérica e produzem o registro mostrado na figura 4.7.

Figura 4.7: Registros produzidos por D2 ao responder a questão 1b.



Fonte: acervo da pesquisa do autor

Dessa forma, o diálogo da Dupla 2 reforça as observações anteriores referentes à prioridade dada as operações de tratamento sobre as frações na forma numérica. Para responderem a questão 1b, a dupla conclui com base no desenho produzido por eles em 1a que "*Não poderiam, porque daria mais de uma barra!*" (**Rodrigo**, 2023, questão 1b), porém prioriza o tratamento numérico sobre as frações como argumento de justificativa. Isso pode ser verificado nas falas de Clara e Rodrigo que seguem: "*Porque a soma dá maior do que um inteiro.*" e "*Se somarmos as quantidades teríamos mais de uma barra*" (**Rodrigo**, 2023, questão 1b). Apesar disso, nessa questão os licenciandos também se preocuparam em produzir uma representação pictórica equivalente, como elucida a fala de Clara: "*Teria que fazer o mmc e somar. Tá, e como tu faria isso pictoricamente?*" (**Clara**, 2023, questão 1b).

Na sequência, o diálogo permite observar que os licenciandos fizeram a Conversão entre as representações numérica e a pictórica, estabelecendo a relação entre a soma de frações ($1/2 + 2/3 = 3/6 + 4/6$) e os tratamentos pictóricos partitivos para reduzir os inteiros à mesma unidade comum. Esse aspecto elucida a complementariedade entre esses dois modos de representação e permite ultrapassar a conclusão *"dá maior do que um inteiro"* (**Rodrigo**, 2023, questão 1b) para estabelecer quanto é a quantidade a mais do que o inteiro (i.e. $1/6$), isto é, "*Uma barra mais um sexto*" (**Clara**, 2023, questão 1b).

Por fim, a discussão do Trio 1 sobre a questão 1b iniciou-se por argumentos circunstanciais como na Dupla 1 e, a seguir, valeu-se de argumentos baseados nas representações pictóricas e na equipartição do inteiro em 6 partes. O excerto abaixo demonstra esse processo:

Leonardo [T1]: *Não, porque aí ia dar mais de um chocolate. Porque se eles tivessem só uma barra, um teria comido a metade e outro teria comido mais do que a metade, então não tem como eles comerem a mesma quantidade de chocolate.*

Mel [T1]: *Ah, sim... Ia faltar ainda um pedacinho.* (a partir do desenho que o trio fez em 1a - figura 4.5)

Leonardo [T1]: *Aí, no caso, faltaria um sexto.*

Fernando [T1]: *Sim, um sexto.*

Leonardo [T1]: *Usando a ideia das tirinhas da questão anterior, que a gente dividiu em dois e dividiu em três, eles vão ter uma barra de chocolate dividida em 6 pedaços, então a Maria comeu três, o João comeu 4, então juntos eles vão ter 7 pedaços. Então, consequentemente, 7 é maior do que 6, então não tem como comer uma barra só.*

Mel [T1]: *Para que eles pudessem comer ia ter que ter uma tirinha a mais de chocolate.*

Fernando [T1]: *Isso ou eles teriam que comer a mesma quantidade, ele a mesma quantidade que a Maria.*

Como se pode observar, esse grupo visualizou nas representações pictóricas uma possibilidade de articular a sua argumentação. Nesse caso, eles não usaram representações aritméticas ou operações numéricas com frações para pensar a sua justificativa. Ao utilizar o Modelo de Barras e retomar as partições (questão 1a), estes licenciandos concentraram-se em fornecer uma justificativa articulada com a interpretação da situação. Além disso, as frações se manifestaram como a representação das partes pictóricas discutidas no diálogo (parte a mais da representação pictórica - 1/6). Complementarmente, ao priorizarem as representações pictóricas, esses licenciandos exploram, como parte da argumentação, os tratamentos pictóricos: as partições dos inteiros. Assim, o diálogo dos participantes do Trio 1 mostrou que as operações ou tratamentos próprios das frações sob representação numérica-aritmética não foram mais uma preocupação final, como ocorreu anteriormente ou com as outras duplas.

Para esse trio, a manipulação de modelos de barras, a partição para obter a unidade comum e a coerência circunstancial são argumentos suficientes. Adicionalmente, a conversão entre as três distintas representações (pictórica, numérica e verbal) e a não priorização do uso de algoritmos operatórios numéricos revelam uma argumentação ampliada em relação àquela apresentada em 1a.

Como observação geral, os participantes foram mais sucintos na apresentação dos argumentos para abordar a questão 1b. O fato de eles usarem majoritariamente representações pictóricas (modelos de barras) para justificarem as conclusões pode sugerir que os conceitos envolvidos admitem uma evidência visual que dispensa justificativa ou argumentação. Nesse sentido, a apresentação de argumentos adicionais ou de justificativas vinculadas a esse tipo específico de articulação podem ter sido negligenciados. De fato, Ng (2015) mostrou que mesmo os professores em exercício (em Singapura) costumam negligenciar aspectos importantes da manipulação de modelos de barras pela sua 'simplicidade visual aparente'.

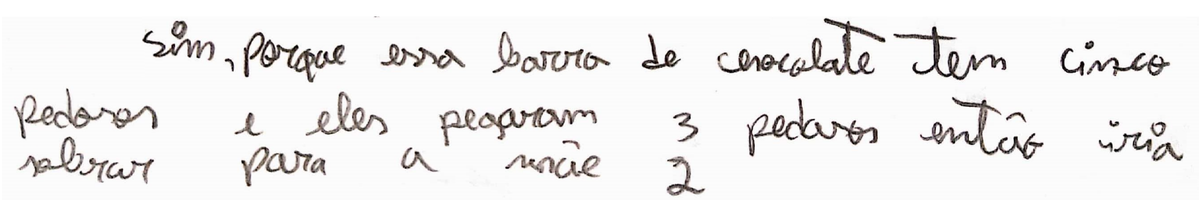
Sistematizando os achados para a parte I, no âmbito da questão 1a, os dados evidenciam que os licenciandos estão mais preocupados com o uso de repertórios vinculados aos tratamentos numéricos de frações aprendidos pelos estudantes e mesmo que tenham feito desenhos em sua ficha de trabalho, não consideraram inicialmente utilizá-los, por exemplo, para relacionar essas operações com as modificações partitivas nas representações pictóricas que produziram. Essa relação entre distintas representações na conversão das representações entre registros (numérico, pictórico e declaração verbal) e os tratamentos pertinentes são uma possibilidade que explora significados relacionados ao tópico, mas apesar disso, houve uma preferência latente pelo uso de tratamentos numéricos entre os licenciandos para responder a questão 1a. Nesse sentido, esses futuros professores de Matemática elaboram justificativas a partir de sua própria demanda de raciocínio (que mostrou-se vinculado ao uso de distintas representações), mas que em sua versão formal considera como justificativa a articulação de tratamentos usuais do ensino de frações sob notação numérica. Por outro lado, para abordar a questão 1b, há maior destaque das representações pictóricas e, embora houve uma preocupação com o uso dos tratamentos sobre as frações na versão numérica por parte dos participantes, esses tratamentos mostram-se mais articulados com as representações e os tratamentos partitivos realizados sobre essas representações pictóricas.

Assim, uma vez discutidos os resultados obtidos para a parte I da tarefa, na seção seguinte são discutidos os resultados obtidos para a parte II.

4.3 Discussão dos achados para a Parte II

Após concluírem a parte I da tarefa, os licenciandos receberam uma ficha contendo a parte II (figura 3.2b). Nessa questão, os participantes deveriam responder, mediante a apresentação de uma resposta dada por um estudante à questão 1b (parte I da tarefa - figura 3.2a), a solicitação: "**Como você dialogaria com este estudante a fim de dar-lhe retorno para sua interpretação? Justifique**". A figura 4.8 a seguir retoma a resposta dada pelo estudante para a questão 1b ("**João e Maria poderiam comer essas mesmas quantidades de chocolate se tivessem ganhado apenas uma barra para dividirem entre si? Por quê?**").

Figura 4.8: Resposta de um estudante à questão 1b.


sim, porque essa barra de chocolate tem cinco
pedaços e eles pegaram 3 pedaços então iria
sobrar para a mãe 2

Fonte: acervo de pesquisa do autor

Dessa forma, os participantes discutiram a resolução desse estudante e propuseram suas intervenções conforme a solicitação feita nessa etapa. Tais intervenções variaram entre os participantes, mas, apesar disso, uma maior atenção às representações pictórica e seu potencial foi dado por todos os grupos. O excerto a seguir destaca o diálogo da Dupla 1 a respeito da intervenção por eles hipotetizada para com o estudante.

Gabriel [D1]: *Ele somou frações com denominadores diferentes. [...] Então, primeiramente, perguntar por que cinco pedaços e, a partir da resposta do aluno, explicar que não dá pra você somar coisas com denominadores diferentes. [E] Como é que [se] explica isso pra ele?*

Sara [D1]: *Exato!* (reforçando compartilhar a dúvida) *[...] Fazer um desenho, usar os desenhinhos!*

Gabriel [D1]: *Isso! Então usando desenhos explicar que [...]* (desenha no papel - ver figura 4.9)

Sara [D1]: *[. . .] que a soma está incorreta.*

Gabriel [D1]: *[E] a gente tá levando o fator geométrico em conta pra fazer o desenho, porque a gente imaginou que desenharia a barra de chocolate com escala e daí a gente usa diferença de escala pra exemplificar aqui. "Ah, bom, não dá certo, são coisas diferentes!"* (referindo-se a diferença de tamanho dos pedaços na divisão de Maria e na de João - figura 4.9)

Sara [D1]: *É, porque de outro jeito, sem dividir em seis pedacinhos eu não sei como que se explica.*

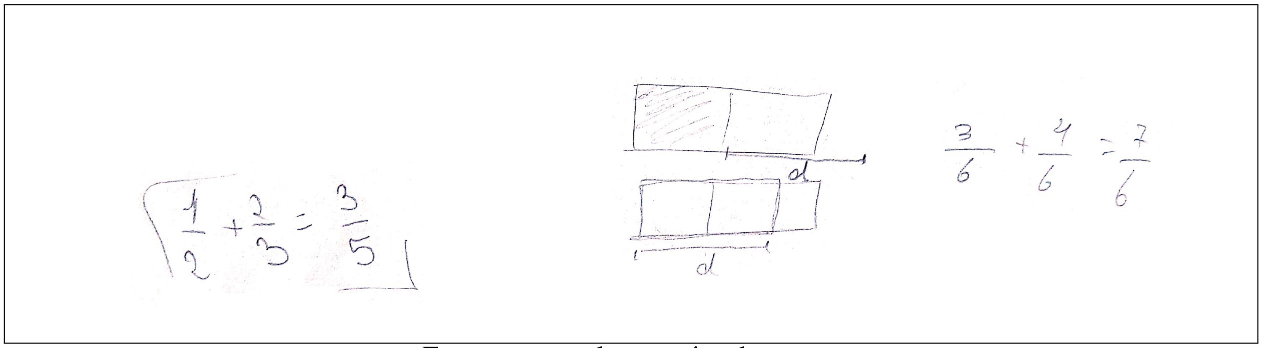
Gabriel [D1]: *Tem um outro jeito, mais ele é muito abstrato para um aluno do 6º ano. Quer dizer, o nome disso aqui* (mostrando no papel) *é um meio, pra metade da barra e o outro são dois terços, então como é que você vai pegar coisas diferentes se uma coisa é metade e outra é terça parte? Tem essa ideia, só que isso é uma coisa mais abstrata deles fazerem relação entre o nome da coisa com a coisa mesmo.*

Sara [D1]: *É, e relacionar com o nome da coisa, não tem o que fazer, tem que pensar no diagrama. E aí, a partir do momento que a gente tem o resultado* (referindo-se as frações equivalentes com mesmo denominador) *a gente consegue comparar. três sextos e quatro sextos.*

Gabriel [D1]: *E chegar em sete sextos.*

O desenho mencionado como nota de esclarecimento e que integra a discussão dos participantes da Dupla 1, é o mostrado na figura 4.9.

Figura 4.9: Registros produzidos por D1 ao responder a questão 2.



Fonte: acervo da pesquisa do autor

O registro apresentado na figura 4.9 foi realizado enquanto os licenciandos buscavam justificar a impossibilidade de somar frações com denominadores diferentes. Dessa forma, a representação pictórica teve a finalidade de demonstrar que *"Ah, bom, não dá certo, são coisas diferentes"* (**Gabriel**, 2023, questão 2) com relação à diferença de tamanho das partes de Maria e João.

Assim, pela análise do diálogo, é possível observar que os licenciandos interpretaram a resposta do estudante sob a perpectiva do uso de tratamentos próprios do contexto de frações na notação numérica (e.g. "*Ele somou frações com denominadores diferentes*" (**Gabriel**, 2023, questão 2). Nesse sentido, os licenciandos analisaram a resposta do estudante a partir dos tratamentos numéricos possíveis relacionados à adição de frações. Por outro lado, os participantes também viram na abordagem diretamente numérica sobre as frações um caminho menos efetivo para a compreensão do estudante em uma possível intervenção. Por essa razão, propuseram o uso de representações pictóricas como mediadoras.

Dessa forma, essa dupla demonstrou uma preocupação com a articulação de distintas representações para compreensão da situação-problema, convertendo enunciado para uma representação pictórica, articulando as conclusões pertinentes a essas representações e ultrapassando a proposição de procedimentos de adição numérica de frações como argumento voltado ao aluno. Assim, embora o raciocínio não estivesse centrado nas representações pictóricas, os licenciandos viram nelas uma possibilidade para esclarecer a problemática dos denominadores diferentes na adição numérica de frações e para a qual concentraram sua abordagem.

A preocupação com os termos, seus sentidos e suas representações também sugerem que os participantes passam a usar argumentos que articulam conversões. Por exemplo, quando vinculam os termos **terço** e **metade** à necessidade de produção de uma representação em forma de diagrama, esses licenciandos estão implicitamente dando destaque a importância de distintas representações do mesmo objeto e a conversão entre representações para compreensão do aluno.

De forma mais geral, os licenciandos dessa dupla, que anteriormente deram maior destaque à adição numérica de frações, articularam as representações pictóricas como argumentos esclarecedores. Esse aspecto demostra que as Conversões entre representações são fundamentais para compreensão dos objetos matemáticos, conforme afirma Duval (2004).

Sintetizando o trabalho desses licenciandos, observamos que a dupla preocupou-se em justificar o porquê não é possível somar frações com denominadores diferentes (destaque aos tratamentos numéricos). Para isso, valeu-se de Conversões entre representações ao ter por referência uma intervenção voltada para o estudante, ainda que tenham acabado por não responder se João e Maria poderiam dividir uma barra de chocolate nas condições dadas.

Observações semelhantes a respeito da leitura feita pelos licenciandos para a resposta dada pelo estudante podem ser encontradas nos diálogos dos demais participantes. A seguir, é apresentado o excerto do diálogo dos licenciandos da Dupla 3 enquanto respondiam a solicitação feita na questão 2.

Mateus [D3]: *Eu ia pedir para ele desenhar primeiro.*

Lina [D3]: *Peraí, eles pegaram três pedaços? Ele entendeu que os dois [eram] juntos, [e] pegaram três, porque ele não considerou o denominador diferente e somou dois com um. E daí sobrou dois pedaços para a mãe.*

Mateus [D3]: *[Sim,] porque ele somou os denominadores também, que deu cinco.*

Lina [D3]: *Somou!*

Mateus [D3]: *Ele considerou que os pedaços eram iguais depois de dividir a barra em dois* (pedaços)*, e comer um, e de dividir em três* (pedaços) *e comer dois* (pedaços).

Lina [D3]: *Ele considerou que eram do mesmo tamanho os pedaços. Como que ele pensou e deu cinco no total? Por quê?* (pausa de reflexão).

Mateus [D3]: *A gente pode pedir pra desenhar e mostrar que esse tamanho não é igual a esses dois* (mostrando no desenho produzido pela dupla - figura 4.10). *Esses dois tamanhos não são iguais a esses três.* (comparando o tamanho das partes das duas barras que estão uma sobre a outra na figura 4.10)

Lina [D3]: *Aí, pela resposta dele, provavelmente ele desenharia pedaços iguais, as duas barras de tamanhos iguais nas divisões das duas barras. E aí analisando o desenho, perguntaríamos se os pedaços eram do mesmo tamanho. E aí explicaríamos o porque não são* (do mesmo tamanho).

Mateus [D3]: *Acho que pode ver aqui* (desenho no papel) *um embaixo do outro* (duas barras em comparação). *A gente precisa dividir eles do mesmo jeito para poder ter o mesmo tamanho. Tipo ah, perguntar: "vamos dividir a barra em 10 pedaços? os pedaços vão ser bem menores do que se dividir em dois pedaços. Então, se a gente dividiu em três e aqui em dois, são pedaços menores quando dividiu em três". [...] Então não dá pra dividir a barra e dividir em cinco pedaços porque os pedaços são diferentes.*

Lina [D3]: *São diferentes e não dá pra somar três com dois.*

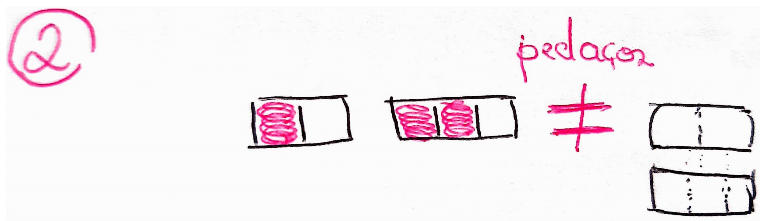
Mateus [D3]: *Porque quando ele pega a barra e diz que tem 5 pedaços e comeram três ele tá considerando que todos os pedaços são iguais. Então se eles são diferentes não dá para fazer isso. O que que a gente precisa fazer então? Tornar os pedaços de tamanhos iguais.*

Lina [D3]: *Isso! Que foi o que a gente fez aqui na divisão* (referindo-se a figura 4.10).

Mateus [D3]: *Então explicaríamos que não dá pra fazer do jeito que ele fez porque os pedaços são de tamanhos diferentes e não daria para dividir a barra em 5 pedaços iguais como ele considerou.*

Ao hipotetizarem a interação com o estudante, os licenciandos pensam em solicitar que ele represente a situação por meio de desenhos. Para dar andamento à discussão, esses licenciandos também estabelecem o caminho a ser traçado para discutir a diferença no tamanho dos pedaços incluindo um desenho em sua ficha de trabalho (supostamente como aquela que o aluno produziria). Esse registro é o apresentado na figura abaixo.

Figura 4.10: Registros produzidos por D3 ao responder a questão 2.



Fonte: acervo da pesquisa do autor

Assim, como anteriormente mencionado, a Dupla 3 fez uma leitura da resposta dada pelo aluno a partir dos tratamentos próprios da adição numérica de frações, como corroboram as afirmações de **Lina** (2023, questão 2) - "*ele não considerou o denominador diferente e somou dois com um*" - e de **Mateus** (2023, questão 2) - *"[Sim,] porque ele somou os denominadores também, que deu cinco"*. Assim, evidencia-se entre os participantes dessas duplas (D3 e D1) *a prioridade dos tratamentos numéricos na atribuição da interpretação do estudante*, e para a qual uma análise que considere a Conversão entre as representações e suas possíveis influências aparecem de forma secundarizada. Os processos de Conversão passam a ficar mais evidentes quando os licenciandos buscam compreender a resposta do estudante sob as suas próprias perspectivas. Assim, consideram importante discutir a respeito da diferença entre os tamanhos dos pedaços nas duas situações, inclusive considerando a possibilidade de solicitar ao estudante representar a sua resposta por meio de um desenho e com objetivo de esclarecer esse aspecto. Dessa forma, a intervenção sugerida busca usar de argumentos pictóricos para desenvolver a compreensão de que as partes de João e Maria são diferentes, o que justifica a impossibilidade de somar numericamente frações com denominadores diferentes.

Paralelamente, o diálogo dos integrantes dessa dupla sugere que os licenciandos elaboraram um conjunto de argumentos empregando representações pictóricas, mas voltadas a um objetivo específico: argumentar a respeito do fato dos denominadores das frações serem diferentes e disso estabelecer uma justificativa que elucidasse que a adição numérica das frações está incorreta. Dessa forma, a dupla viu nas representações pictóricas um argumento válido para discutir o aspecto crítico relacionado à adição numérica de frações de denominadores diferentes. Esse aspecto reforça, novamente, o olhar voltado às operações de tratamento numérico no contexto das frações. Dado o exposto, verificou-se que os licenciandos priorizaram as representações numéricas das frações valendo-se das representações pictóricas com objetivo maior de esclarecer que os denominadores eram diferentes. Nessa direção, Duval e Moretti (2012a, p. 286, negrito dos autores) esclarecem que "a aprendizagem dos tratamentos específicos em um registro de representação é proposta não mais do que para **os registros em que os tratamentos são unicamente do tipo cálculo**". Isso pode ser uma justificativa para a não-vinculação de tratamentos pictóricos e tratamentos numéricos que revelasse 'a soma numérica correta das frações', já que o repertório priorizado no ensino relaciona-se à aquisição de tratamentos próprios sobre as representações numéricas e algébricas.

De forma sucinta, esses licenciandos buscaram compreender a interpretação do aluno sob a lente de tratamentos e manifestaram uma intervenção voltada à operação de adição numérica de frações. Como consequência disso, pode-se fazer pertinente problematizar: "O estudante necessariamente raciocinou guiado pelo tratamento de adição numérica de frações?". Além disso, ao discutirem e argumentarem sob a perpectiva de uma intervenção com o estudante, os licenciandos dessa dupla centraram-se em mostrar a impossibilidade de realizar a 'soma que o estudante efetuou', deixando de estabelecer possíveis relações entre as representações pictóricas e numéricas e seus tratamentos que levassem à conclusão de que a soma é $7/6$.

Dando continuidade à análise das respostas dos grupos, essa primeira leitura da resposta do estudante a partir de tratamentos numéricos de adição de frações também é observado na interpretação da Dupla 2. Parte do diálogo, apresentado no excerto abaixo, explicita esse aspecto durante o trabalho da dupla na questão 2.

Clara [D2]: *Ele somou as frações direto e somou os de baixo. [...] Eu começaria dizendo que ele está falando de pedaços diferentes, de tamanhos diferentes, então ele não pode somar direto.*

Rodrigo [D2]: *Eu ia tentar mostrar geometricamente. Eu ia mostrar isso aqui* (indicando os desenhos feitos na letra b da questão 1, folha de rascunho que permaneceu com a dupla)*[, mas] é dificil fazer ele pensar sem começar falando que a soma tá errada. Porque para mim o intuitivo é dizer que não pode somar com bases* (denominadores) *diferentes, mas como fazer isso fazendo ele pensar?*

Clara [D2]: *Sim, são coisas diferentes, são tamanhos diferentes. [...] Eu acho que talvez a gente pudesse fazer ele pensar: "Bom, se eles pegaram três pedaços e a mãe pegou 2, então quer dizer que a barra tem cinco pedaços no total?"*

Rodrigo [D2]: *Muito bom!*

Clara [D2]: *Então se eu pegar três pedaços mais dois pedaços, eu teria cinco pedaços no total? Só que Maria comeu a metade e ela* (barra) *tem cinco* (partes).

Rodrigo [D2]: *Mas tem os pedaços que João comeu, que foi mais do que Maria comeu. Tu nem precisa dizer quanto é* ($2/3$ de cinco partes)*, tu pode dizer só que ele comeu mais que Maria, então já daria toda a barra.*

Clara [D2]: *Então daria mais do que a barra.*

Rodrigo [D2]: *Assim a gente mostra que está errado, mas ele vai refletir e pensar: então onde que está errado* (o que eu respondi)*?*

Clara [D2]: *Eu acho que não precisa colocar onde que está o erro!*

Rodrigo [D2]: *Tá, mas dai ele vai continuar sem saber quanto sobraria para mãe. [...] Tá, então aí você pode dizer: "Tá, mas vamos olhar para as frações, elas tem o que diferente?" O numerador e o denominador. [... Aí] tu diria pra ele colocar em mesma base* (denominador) *que é em seis pedaços, que é o comum entre dois e três.*

Clara [D2]: *Tá, utilizaríamos a explicação da 1b e que não é possível fazer soma com denominadores diferentes e é necessário achar um denominador comum.*

Através do diálogo da Dupla 2 observam-se os processos pelos quais os licenciandos pensam a interação com o estudante e a forma como eles percebem a interpretação do estudante para a questão. À luz dos conceitos de Tratamento e Conversão, o excerto destaca duas diferenças importantes. Primeiramente, a interação pensada para o aluno conduz os licenciandos a empregar conversões entre representações verbal e pictórica a fim de justificar a impossibilidade de somar as frações com denominadores diferentes. Por fim, a leitura dos licenciandos para a interpretação do estudante mostrou-se guiada por tratamentos numéricos sobre as frações, uma vez que os licenciandos avaliaram a resposta do estudante como sendo "uma soma numérica equivocada das frações $1/2$ e $2/3$ ".

Este aspecto, relacionado à operação de adição numérica de frações, mostra-se sistemático nas falas dos licenciandos: o objetivo final parece ser "a adição numérica das frações". Assim, o excerto apresentado acima (Dupla 2) reforça a importância dada aos Tratamentos numéricos pelos futuros professores na interpretação da resposta do estudante. A fala de **Clara** (2023, questão 2) reforça essa observação: "*Ele somou as frações direto e somou os de baixo. [...]*".

Adicionalmente, também se observa que esses participantes ampliam o repertório quando preocupados em elaborar argumentos e justificativas para esclarecer o estudante em relação ao seu equívoco: incluíram representações pictóricas. Nesse sentido, a diferença entre o tamanho das partes na representação pictórica é usada como justificativa para a impossibilidade de realizar a soma numérica dessas frações. Nessa mesma direção, entretanto, a dupla não visualizou nas representações pictóricas ($3/6$ e $4/6$) uma possibilidade de justificar a soma correta de $1/2$ e $2/3$. Assim, as as representações pictóricas mostraram que os pedaços são diferentes, mas os $3/6$ e $4/6$ pictóricos parecem não mostrarem explicitamente um caminho para a soma correta de $1/2$ e $2/3$. Isso sugere um grau de desvinculação entre essas representações nos repertórios dos participantes da dupla. Com efeito, embora a dupla tenha se reportado à representação pictórica produzida na questão 1b e que mostrava os dois inteiros como a composição da unidade pictórica $1/6$, os licenciandos não as relacionaram à demanda de esclarecer a assumida soma numérica equivocada das frações.

Avançando no diálogo dessa dupla, também é possível observar uma valorização do raciocínio do aluno quando os licenciandos pensam a intervenção guiada pelo questionamento: *"Bom, se eles pegaram três pedaços e a mãe pegou 2, então quer dizer que a barra tem cinco pedaços no total?"* (**Clara**, 2023, questão 2). Porém, em face aos obstáculos de justificar quanto seria $1/2$ e $2/3$ de cinco partes, a dupla usa do argumento de que juntos precisariam mais do que uma barra: "*Tu nem precisa dizer quanto é* ($2/3$ de cinco partes)*, tu pode dizer só que ele comeu mais que Maria, então já daria toda a barra.*" (**Rodrigo**, 2023, questão 2). A partir desse obstáculo, os licenciandos se voltam novamente para as frações (na notação numérica) e a imprescindibilidade dos denominadores serem iguais para operacionalização da soma numérica de $1/2$ e $2/3$, como destaca a fala "*Tá, mas vamos olhar para as frações, elas tem o que diferente?*"(**Rodrigo**, 2023, questão 2).

Por fim, os participantes estabeleceram como o melhor caminho o uso das representações pictóricas elaboradas na questão 1b para mostrar que o inteiro 'não tem 5 partes' e reafirmam que "[...] *não é possível fazer soma com denominadores diferentes e é necessário achar um denominador comum*". Sob esse fecho dado pela dupla, observa-se um novo reforço relativo à não-vinculação entre as representações das frações equivalentes $3/6$ e $4/6$ na forma pictórica e o procedimento de encontrar o mmc para somar as frações na representação numérica. Como consequência e para além da intervenção pensada ao aluno, esses resultados sugerem que os futuros professores participantes, por vezes, *não vinculam representações equivalentes*. Sobre isso, Duval e Moretti (2012a) afirmam, em relação as Conversões, que a coordenação de representações "está longe de ser natural", podendo-se observar em todos os níveis de ensino um "**isolamento de registros de representação**" (Duval e Moretti, 2012a, p. 283, negrito dos autores). Isso se reforça, ainda segundo Duval e Moretti (2012a), pelo fato de que a grande maioria do alunos não reconhece "o mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes", o que aqui se evidenciou também na forma como os futuros professores pensaram sua intervenção.

Finalizando a parte II, apresentamos excertos do diálogo do Trio 1.

Mel [T1]: *Ele somou.*

Leonardo [T1]: *Ele pegou a soma dos numeradores e dos denominadores.*

Fernando [T1]: *Sim! Eu iria desenhar* (para mostrar).

Mel [T1]: *Pois é, eu to tentando mostrar* (visualizar no pesamento) *que o desenho da imaginação dele está errado.*

Leonardo [T1]: *Eu pensei assim: vamos pegar uma pizza inteira, se a gente dividir a pizza pela metade, tu vai comer a metade da pizza. Se a gente dividir uma outra pizza em três pedaços, tu vai comer mais ou menos do que tu comeu? Esse pedaço é maior ou menor que o pedaço anterior? Eu suponho que ele ia responder menor, pela lógica. Agora supõe que vai comer dois pedaços* (dos três)*, então vai ser maior ou menor que o pedaço do outro? E aí, eles comeram a mesma coisa?*

Leonardo [T1]: [...] *Aí dá pra pegar e vir nesse sentido que um comeu mais que o outro. Então a gente poderia dizer que se a gente pegar esses dois pedaços de pizza, da* (pizza) *que foi dividida em três, e o pedaço da metade, eles são do mesmo tamanho?*

Mel [T1]: *Não [são do mesmo tamanho]!*

Leonardo [T1]: *Então não dá pra considerar, porque os pedaços tem que ser do mesmo tamanho pra dividir igualmente entre os irmãos e a mãe. Essa é a primeira justificativa do porque essa resposta estaria errada. Porque esses três pedaços não tem o tamanho igual.*

Mel [T1]: *E se a gente fizesse, já que ele tentou fazer aqui uma soma, e se a gente mostrasse pra ele como que faz soma de fração, na operação mesmo, e mostrar que no final a gente vai ter uma barra de chocolate dividida em seis.*

Fernando [T1]: *Eu acho que ele tentou fazer cálculo só que errou no cálculo.*

Leonardo [T1]: *Eu acho que o que a gente fez na outra* (Parte I, 1b) *é uma forma de justificar. Que a gente dividiu em dois e três.*

Mel [T1]: *Tá, mas eu acho que ele sozinho não teria essa lógica de dividir denovo pra chegar no denominador seis. Eu acho que ele não conseguiria isso, então se a gente mostrasse no cálculo ele conseguiria ver, né? Mas, ao mesmo tempo, ir direto pro cálculo, para operação, eu acho que não parece muito certo, sabe? Tentar justificar com cálculo. Mas eu acho que é uma boa isso, botar uma barra embaixo da outra de mesmo tamanho.*

Leonardo [T1]: *E pegar aquela ideia que a gente teve* (em 1a) *e dividir.*

Fernando [T1]: (Talvez mostrar) *que é um pouco mais da metade. Eu acho que mostrando isso ele já conseguiria entender.*

Leonardo [T1]: *Por conta do desenho que a gente já vê que são duas metades mais um pouquinho. E aí como que a gente justificaria que essa resposta está errada?*

Mel [T1]: *A gente pode tentar fazer ele enxergar* (faz um desenho - figura 4.11) *que isso não encaixa nisso. A gente pode mostrar que o que sobrou a gente não consegue dar para a Maria [...]*

Fernando [T1]: *Dá pra recortar e quem sabe colocar em cima.*

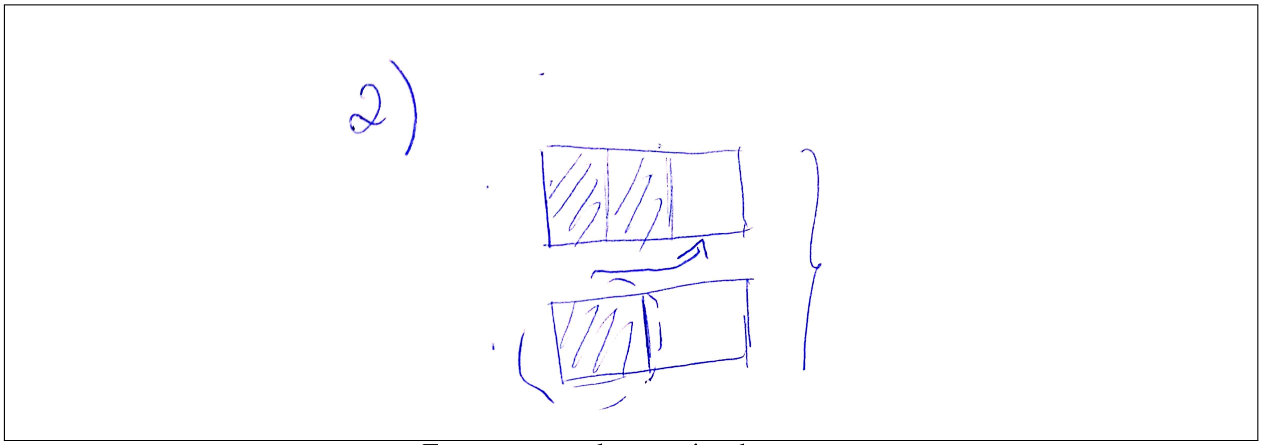
Mel [T1]: *Só que eu acho que sete sobre seis não vem ao caso. Talvez ele nem precise oferecer* (para a mãe).

Leonardo [T1]: *Eu acho que é melhor não, sabe por quê? Eu tava pensando em frações impróprias. Sabe quando tem onze sobre dez, aí tu tem que apresentar como um barra cheia* (com dez partes) *e outra barra cheia com um pintadinho. E aí, por que que isso não é dez sobre vinte e é onze sobre dez se tu tem duas barras pra representar? Isso pode confundir.*

Mel [T1]: *Ah, então a gente fala: Tá, e agora a gente consegue dar o que sobrou daqui (do João) pra Maria, ou dar o que sobrou daqui* (da Maria) *pro João? Ah, não consegue, então não é possível. Algo assim. É isso!*

A respeito desse diálogo, a representação pictórica elaborada pelo Trio 1 durante a discussão é apresentada na figura 4.11.

Figura 4.11: Registros produzidos por T1 ao responder a questão 2.



Fonte: acervo da pesquisa do autor

Inicialmente, encontramos que a interpretação dos participantes a reispeito da interpretação do estudante baseiou-se nos tratamentos próprios de adição numérica de frações. Essa conclusão se manifestou na fala: "*Ele somou*" (**Mel**, 2023, questão 2) reforçada em "*Ele pegou a soma dos numeradores e dos denominadores*" **(Leonardo**, 2023, questão 2) evidenciando *a prioridade dos tratamentos numéricos na atribuição da interpretação do estudante*. A partir desse momento, pensando a forma de esclarecer aspectos relacionados ao equívoco, o trio aposta em diferentes estratégias. Em especial, eles articulam o uso de representações pictóricas ou se amparam no exemplo da pizza e suas fatias a fim de elucidar que os pedaços são diferentes. Com isso, os licenciandos preocuparam-se em usar outras representações além das frações numéricas para esclarecer que não é possível juntar os pedaços das duas divisões como se fossem iguais. Essa observação aponta para a importância das diferentes representações na elucidação e compreensão da situação, como assinalam Duval e Moretti (2012a).

Adicionalmente, os licenciandos pensam no uso e tratamento de representações pictóricas para explicitar a diferença entre terços e meios, relacionando-os com suas representações pictóricas e encontram nelas as justificativas para a impossibilidade de computar a adição numérica de frações pela soma direta dos numeradores e denominadores. Assim, esses licenciandos pensaram a intervenção por meio da conversão entre representações (representações das frações numéricas para pictóricas).

Após pensarem nesse aspecto, os participantes buscam fazer um fechamento, mas retornam para a questão operacional. A fala chave que representa essa retomada é a fala de **Mel** (2023, questão 2): "*E se a gente fizesse, já que ele tentou fazer aqui uma soma, e se a gente mostrasse pra ele como que faz soma de fração, na operação mesmo, e mostrar que no final a gente vai ter uma barra de chocolate dividida em seis*". Analisando-se essa fala observa-se, por um lado, o destaque dado às operações de tratamento (tratamentos de adição numérica) e uma aparente *não-vinculação das representações equivalentes* (pictórica e numérica). Nesse último caso, a fala sugere que a barra terá seis divisões porque a soma das frações resulta em uma fração de denominador 6 (i.e. $1/2+2/3=7/6$). Isso pode ser corroborado pelas falas que seguem, quando Leonardo proprõe justificar o denominador 6 com base nas 6 divisões (unidade comum) da representação pictórica produzida para responder a questão 1b, mas **Mel** (2023, questão 2) afirma que *"Tá, mas eu acho que ele sozinho não teria essa lógica de dividir denovo pra chegar no denominador seis"*.

Sob esse contexto, os dados conduzem à percepeção de que a forma pensada pelos licenciandos para interação com o estudante valeu-se de argumentos baseados na articulação de diferentes representações, mas mostrou limitações de duas dimensões diferentes. A primeira é a *não vinculação direta entre representações equivalentes* e a segunda refere-se *à suposição de que o estudante poderia não transitar entre as representações sozinho* e o uso disso como uma justificativa que limitou a intervenção pensada por eles para a situação. Nesse sentido, os tratamentos nas representações pictóricas, como argumento de convencimento, limitaram-se a 'demonstrar' a diferença dos tamanhos dos terços e meios e da conclusão baseada em coerência circunstancial de não-encaixe entre as partes, evidenciado em: "*A gente pode tentar fazer ele enxergar* (faz um desenho - figura 4.11) *que isso não encaixa nisso*" (**Mel**, 2023, questão 2). A seguir, retomando o resultado correto da soma numérica das frações (7/6), Leonardo crê não ser conveniente apresentá-la pictoricamente sob o argumento de que, por ser uma fração imprópria, a representação pictórica correspondente poderia gerar ruptura conceitual com a ideia inicial da noção parte-todo (parte<todo).

Esses dados manifestam que os licenciandos também estiveram atentos às nuances e complexidades do uso das representações pictóricas, seus inconvenientes e aspectos conceituais, levando-os a adaptá-las da maneira que pensaram ser conveniente e articularem-nas na construção de argumentos para elucidar o equívoco do estudante.

Através desse excerto de diálogo, evidencia-se que esse grupo acabou por dar menos importância aos tratamentos que poderiam estar relacionados ao registro numérico do que os anteriores. Assim, a forma como esse trio pensou a intervenção com o estudante também transmite uma visão mais próxima de uma construção do conhecimento por meio do trânsito de representações e significados, e que não tem como objetivo final argumentos de convencimento baseados puramente em tratamentos numéricos tradicionalmente focados no ensino. Os participantes refletiram sobre o objeto matemático presente no problema e a forma como o estudante respondeu a questão proposta, levando-os a considerar diferentes representações, em especial as pictóricas, que os levaram a problematizar propriedades e aspectos distintos do uso dessas representações.

Como síntese, os diálogos desenvolvidos pelos licenciandos das duplas e do trio demonstraram que eles ampliaram o olhar ao serem confrontados com a resposta proveniente de um estudante. Sob essa perspectiva, os participantes passaram a utilizar representações pictóricas na elaboração de seus argumentos, o que na parte I ficou secundarizado à interpretação pessoal, pois as justificativas ficaram concentradas em tratamentos númericos das frações na abordagem desse problema. Nesse sentido, os participantes articularam distintas representações como necessárias para o esclarecimento do estudante, excedendo a prioridade inicial atribuída aos tratamentos de adição numérica de frações.

Por fim, a seção seguinte apresenta a discussão dos resultados para a terceira parte da tarefa desenvolvida com os licenciandos participantes.

4.4 Discussão dos achados para a Parte III

Após concluírem o trabalho com a Parte II, os participantes receberam uma ficha contendo a Parte III da tarefa (figura 3.2b) e trabalharam nela. Essa parte trouxe de forma explícita o Modelo de Barras para representar os objetos matemáticos do problema e para o qual, relacionado a respostas reais de estudantes que desenvolveram a Questão 1a e 1b, foi proposta a questão: "**De uma barra de chocolate, quanto aquele que come mais chocolate come a mais do que o outro? Justifique**".

A partir dos diálogos dos participantes, foi possível observar que a inclusão de representações pictórica à estrutura da própria tarefa levou os licenciandos a considerá-la de forma mais destacada. Embora, anteriormente, os grupos tenham produzido de forma independente esquemas visuais, seja para seu próprio raciocínio ou como abordagem possível com os estudantes, a inclusão do Modelo de Barras para representar a situação levou os licenciandos aprofundarem a compreensão e as possibilidades de abordagem dessa questão.

No excerto a seguir, proveniente do diálogo da Dupla 1, verifica-se um aprofundamento do uso das representações pictóricas na discussão dos licenciandos e também nas suas argumentações. Adicionalmente, observou-se que os participantes destacaram conexões entre diferentes representações e possibilidades de tratamentos operatórios do registro numérico, bem como articular conversões e dar sentido aos tratamentos relacionados. O excerto é o que se segue:

Gabriel [D1]: *O que a gente poderia fazer agora [?][...] Isso aqui* (pegou lápis e mostrou no desenho da ficha[2] - ver figura 4.12). *Ahhhhhh* (empolgado com o que percebe pelo desenho).

Sara [D1]: *Comeu esse pedacinho a mais* (também entusiasmada e mostrando na ficha). *[...] Dá para raciocinar que isso aqui é a metade desse pedaço* (de $1/3$) *e que esse pedaço [...] Ah, mas não tem o mesmo tamanho* (que as partes de $1/2$). *[...] Tá, o modo mais automático é fazer as seis divisões e tal.*

Gabriel [D1]: *Isso! Tá, mas a gente pode dizer que isso daqui, que esse pedacinho a gente tá pegando na barrinha da João que tem as divisões e daí a gente cortou a partezinha que fica a mais do que* (a parte de) *Maria e a gente está tentando achar uma justificativa, pensando para o sexto ano, de como tu fazer de um jeito mais lúdico para eles.*

Sara [D1]: *Isso, como que tu descobre quanto que João comeu mais do que Maria sem dividir em seis pedacinhos? Porque dividindo em seis pedacinhos, fica mais fácil. Tu dividiu em seis, tem um pedacinho a mais pintado, é um sexto.*

Gabriel [D1]: *É, isso aqui é a metade de um terço* (mostrando no desenho - figura 4.12), *acho que com isso a gente consegue convencer eles* (alunos) *que isso é a metade de um terço. Bom, a gente faz um terço dividido por dois* ($\frac{1}{3} \div 2$).

Sara [D1]: *E todo mundo já sabe o algoritmo da divisão [?]*

[2]Gabriel destaca, riscando com lápis, a parte pintada de João que excede a parte pintada de Maria no diagrama da ficha de trabalho.

Gabriel [D1]: *É, aí depende. Se já aprendeu divisão de frações, se não aprendeu divisão de frações [...] Aí tu vai ter que dividir, fazer, marcar os risquinhos e dividir as duas barras em seis partes.*

Sara [D1]: *É que do jeito que faz a divisão em seis partes é mais fácil.*

Gabriel [D1]: *Ou então [se] tu quer [usando] o mmc, tu pode pegar isso aqui e dizer que é a diferença, a diferença entre um e o outro. Tu pode pegar o que João tem, que é dois terços* ($2/3$), *menos o que Maria tem e aí tu aplica o algoritmo do mmc. Isso aqui é um quatro, isso aqui é um três* (mostrando na ficha - ver figura 4.12), *igual a um sexto.*

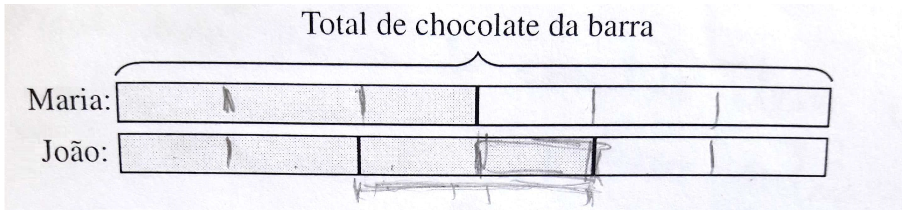
Sara [D1]: *Isso, vamos colocar as várias formas de resolver. [E] outro modo [é] dividir cada barra em seis.*

Gabriel [D1]: *E isso é uma coisa que dá pra ressaltar aqui: que se os alunos entendem que a diferença entre duas coisas é fazer a continha de menos, faz com que eles entendam que problemas que tenham a diferença, você faz uma coisa menos a outra. A relação entre o nome da operação e qual operação usar. Mas eu acho que os alunos eventualmente iam chegar na ideia de: divide isso aqui, divide isso aqui no meio e vê que essa diferença é quanto que tem a mais, e aí tenta descobrir quanto vale essa diferença* (mostrando no desenho a parte correspondente à diferença e igual a $1/6$).

Sara [D1]: *Isso, acho que isso já chega para [que esse aluno consiga] entender.*

Na discussão apresentada no exerceto acima, o Modelo de Barras fornecido junto ao enunciado foi manipulado pelos integrantes da dupla. O resultado dessas ações estão apresentadas na figura 4.12 proveniente da ficha de trabalho dessa dupla.

Figura 4.12: Registro produzido por D1 ao discutir a questão 3.



Fonte: acervo da pesquisa do autor

Nesse diálogo (Dupla 1), é possível observar as possibilidades do Modelo de Barras para explorar as frações. A articulação do Modelo de Barras realizada pelos licenciandos destaca o que Duval e Moretti (2012b) afirmam como sendo a produtividade heurística das figuras (relação entre a busca por modificações figurais e tratamentos operatórios possíveis). Os licenciandos exploraram as diferentes representações e os significados das frações. Por exemplo, metade de um terço pictórico e na forma numérica $\frac{1}{3} \div 2$, e a fração resultante $1/6$ e sua relação com o inteiro pictórico equiparticionado em 6 partes.

A transitividade e conectividade entre distintas representações, passando da representação numérica para pictórica e vice-versa, evidenciam que os argumentos para o esclarecimento do aluno precisam ser baseadas no trânsito entre representações e no aprofundamento dos conceitos conforme apregoa Duval (2004). Isso se revela pelo fato de que os licenciandos não se limitaram à relação "a parte a mais é uma parte de seis que corresponde a $1/6$", mas exploraram a divisão, a relação entre terços, metades e as partição dos inteiros e a fração que representa a diferença entre $1/2$ e $1/3$ e sua parte correspondente na representação pictórica. Nesse sentido, a coordenação das representações pictórica vinculadas à exploração do Modelo de Barras fornecido trouxe diferentes oportunidades de perceber os significados de: "**De uma barra de chocolate, quanto aquele que come mais chocolate come a mais do que o outro**".

Esse processo levou os licenciandos a vincularem diferentes caminhos e estratégias, ainda que o diálogo mostre uma preocupação com o uso do mmc para computar a soma das frações. Nesse caso, essa estratégia foi uma entre as demais pensadas para a interação com o estudante, mesmo que inicialmente tenha-se dado prioridade às operações sobre os números. Essa observação pode se constituir como uma resposta à questão norteadora (*Como o Modelo de Barras de Singapura influencia os futuros professores de matemática na elaboração de argumentos no contexto de frações?*)

uma vez que demonstra que a inclusão do Modelo de Barras mostrou-se favorável à exploração de propriedades e significados, aumentando o repertório argumentativo para esclarecimento e reduzindo a prioridade dada aos tratamentos numéricos no diálogo pensado para o estudante pelos licenciandos dessa Dupla.

De modo similar, os integrantes da Dupla 3 envolveram-se com a questão 3 proposta e com o diagrama fornecido. Isso pode ser observado por meio do excerto que segue:

Lina [D3]: (mostrando na ficha) *Não é só pegar isso* (parte de João que excede a de Maria) *[e que é] quanto comeu a mais?*

Mateus [D3]: *É a fração, tem que pegar a fração do total. Ai tem que dividir a barra toda em pedacinhos de mesmo tamanho. Foi isso que a gente falou para o aluno do 6º ano antes.*

Lina [D3]: *Tá, mas a gente tá comparando isso aqui né?* (parte de João que excede a de Maria no diagrama)

Mateus [D3]: *Quanto que isso aqui* (João) *é maior do que esse* (Maria)*?*

Lina [D3]: *Quanto que esse comeu a mais, né? Então se a gente divide tudo dessa forma...* (estabelecendo a unidade pictórica comum de 1/6). *Isso aí é de olho.*

Mateus [D3]: *Mas nem tudo precisa ser respondido com álgebra* (notação numérico-simbólica). *Tá, mas tá certo isso?*

Lina [D3]: *É que eu não estou convencida de que isso aqui deu certinho dois.* (referindo-se ao 2º terço pintado de João que foi dividido em duas partes. A preocupação concentra-se em ter certeza que a nova divisão coincide com a divisão presente acima na barra de Maria)

Mateus [D3]: *Deu sim, porque se esse aqui* (cada parte do João) *foi dividido em dois e esse aqui* (cada parte da Maria) *foi dividido em três, a gente dividiu* (o inteiro) *em seis* (partes todas iguais) *para ter o mesmo tamanho. Então, se a gente dividir em seis as duas iguais, fica...*

Lina [D3]: *Um sexto?*

Mateus [D3]: *Isso, mas é de uma mesma* (enfatizando) *barra, de uma* (enfatizando) *barra de chocolate. Feito!*

Essa dupla abordou essa situação de forma não direcionada aos tratamentos numéricos. Assim, embora nas questões anteriores a dupla manifestou maior foco nas operações numéricas, nessa questão os Licenciandos exploraram mais os tratamentos pictóricos. Além disso, a dupla preocupou-se com o rigor da manipulação da representação pictórica como destaca **Lina** (questão 3, 2023): "*eu não estou convencida de que isso aqui deu certinho dois*" ao se referir à partição ao meio na porção que corresponde a parte a mais de João. Isso pode ser corroborado pela fala de **Mateus** (questão 3, 2023) ao afirmar que "*nem tudo precisa ser respondido com álgebra*". Assim, à medida que os participantes dessa dupla avançaram nas tarefas, a ênfase em argumentos baseados em tratamentos numéricos foi dando lugar à exploração das propriedades pertinentes e relacionadas às frações, mediante o trânsito entre as representações verbal, pictórica e numérica. De fato, a exploração da representação pictórica realizada pela dupla mostra uma perpectiva distinta. Os participantes raciocinaram a partir da representação pictórica, realizaram tratamentos pictóricos pertinentes, e pelo trânsito dela para a representação numérica, concluíram a quantidade a mais: $1/6$.

A Dupla 2 também manifestou menor foco nos tratamentos numéricos, bastante valorizados anteriormente, dando lugar ao raciocínio pictórico da situação, como mostra o excerto do diálogo abaixo:

Clara [D2]: *Utilizando isso aqui* (desenho da ficha) *eu traçaria aqui e aí veria que...*

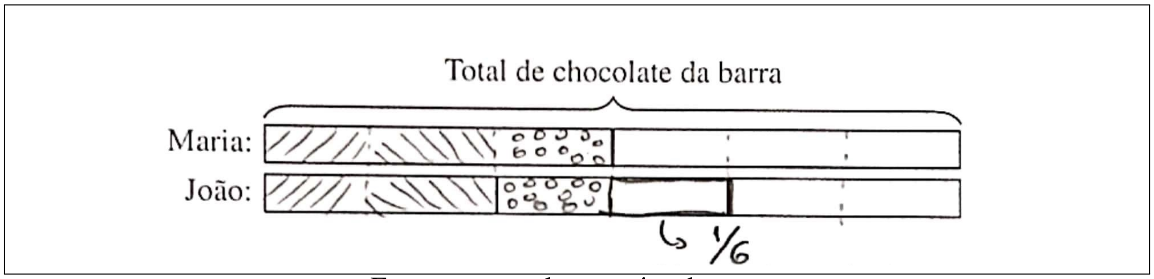
Rodrigo [D2]: *A partir do desenho deles tu dividiria em mais* (partes).

Clara [D2]: *Dividiria de forma a formar pedaços de mesmo tamanho, né? Então eu dividiria aqui, e daí eu veria que aqui tem a mesma quantidade e aqui tem um a mais.* (pintando e mostrando no papel - figura 4.13)

Rodrigo [D2]: *Isso aí, aí com isso a gente faz a questão 3.*

Enquanto discutiam, os integrantes da dupla fizeram novas divisões nos diagramas produzidos e pintaram na ficha, destacando as partes que discutiam. O resultado dessa intervenção e que complementa o diálogo é mostrado na figura 4.13.

Figura 4.13: Registro produzido por D2 ao discutir a questão 3.



Fonte: acervo da pesquisa do autor

Tal dupla (D2) foi mais sucinta em relação às demais, pois empregou bastante tempo na parte anterior da tarefa e, em parte, teve restrição de tempo disponível para aprofundar a questão 3. Por outro lado, é possível observar que a presença do Modelo de Barras que representa a situação-problema foi manipulado pela dupla de forma não direcionada aos tratamentos numéricos, evidenciando uma diferença em relação às questões prévias - especialmente 1a, em que os tratamentos numéricos foram bastante valorizados. De fato, os participantes exploraram a representação pictórica, empregaram tratamentos pictóricos para estabelecer pedaços de mesmo tamanho como forma de estabelecer a conclusão de que *"daí eu veria que aqui tem a mesma quantidade e aqui tem um a mais"* (**Clara**, 2023, questão 3).

Assim, a apresentação do excerto da discussão do Trio 1 para a parte III da tarefa conclui a investigação aqui apresentada. Assim, em face à questão "**De uma barra de chocolate, quanto aquele que come mais chocolate come a mais do que o outro? Justifique**", esse trio discutiu:

Leonardo [T1]: *Tá, então é que nem naquele sentido de pegar e dividir e deixar as duas equivalentes.*

Mel [T1]: *Será que não é usando essa barra aí* (mostrando o diagrama da ficha)*? Eu acho que tem que usar essa!*

Leonardo [T1]: *Mas aí teria que dividir igual, porque senão não tem como. Que pedaço é esse aqui* (apontando para a parte pintada de João que excede a parte pintada de Maria)*? Esse aqui comeu dois pedaços, então aqui seria esse pedaço e esse pedaço* (referindo-se as duas partes pintadas de João, os $2/3$) *e ela comeu só esse pedaço* ($1/2$). *Então o que que ele quer, ele quer o mais? Seria esse pedaço aqui* (apontando na ficha para a parte pintada de João que excede a pintada de Maria). *Só que o que que é isso se a gente não consegue dividir em outros pedaços? [...] Então eu entendi que a gente tem que fazer aquele método de aqui dividir em três* (cada parte da Maria) *e aqui em dois* (cada parte do João). *E aí eu consigo ver que ele comeu um de seis.*

Mel [T1]: *Um de seis.*

Fernando [T1]: *Tá, o João come dois terços e a Mariazinha come um meio.*

Leonardo [T1]: *Tá, por que ele come um sexto a mais?*

Mel [T1]: *Eu acho que quando a gente divide* (as partes) *dá.*

Fernando [T1]: *Eu acho que dá se tu dividir (as partes).*

Leonardo [T1]: *Aí ela comeu três sextos e ele comeu quatro sextos, então ele comeu um sexto a mais.*

Mel [T1]: *Sim, eu acho que essa nossa justificativa é o suficiente.*

Observando-se o diálogo, verifica-se que o Trio 1 também foi mais sucinto em relação a sua abordagem para essa última questão. Isso se deu pelo fato de que esse trio explorou as possíbilidades das representações pictóricas de forma mais aprofundada na parte II (questão 2) e portanto, ao discutir a questão 3, foi mais direta. Nesse sentido, a análise dos argumentos empregados mostra que os licenciandos se valeram tanto de argumentos visuais dos diagramas e de partição para expressar os inteiros na mesma unidade, quanto a comparação de frações equivalentes ($3/6$ e $4/6$). Além disso, ao refletir a questão, a representação pictórica pareceu simplificar o significado da expressão "quanto a mais", favorecendo a identificação da quantidade solicitada, conforme manifesta a fala de **Leonardo** (2023, questão 2): "*Então o que que ele quer, ele quer o mais? Seria esse pedaço aqui* (apontando na ficha para a parte pintada de João que excede a pintada de Maria)". E mesmo que a questão solicitou expressamente o uso do diagrama - o que pode ter afetado a forma de responder - foi possível observar que a dupla também exibiu um afastamento da priorização do uso de procedimentos de cálculos e tratamentos numéricos, que nesse caso voltaram-se à exploração das partições pertinentes e identificação da solicitação ("quanto a mais") a partir da representação pictórica fornecida.

Como conclusão geral, em relação a Parte III da tarefa proposta, observou-se que os licenciandos articularam diferentes propriedades e significados para os objetos em manipulação. Em acréscimo, a priorização de justificativas baseadas em tratamentos numéricos tendeu a ser ultrapassada quando representações distintas das do par Enunciado Verbal-Numérica são articuladas de forma integrada. Esse aspecto é consistente com a importância das Conversões para aprendizagem e compreensão do objeto matemático (Duval, 2004), e o uso do Modelo de Barras parece oferecer uma possibilidade de se explorar esses objetos matemáticos de forma mais ampla àquela centrada em tratamentos numéricos. O uso do Modelo de Barras funcionou como um mediador para observar outros aspectos relacionados aos objetos matemáticos do problema. Por exemplo, correlacionar a representação pictórica à "diferença", "quanto a mais", "unidade comum", "denominador comum a partir da unidade pictórica comum", "equivalência pictórica e numérica de frações", "divisão de quantidades" e "comparação de frações".

Capítulo 5

Considerações Finais

A prática descrita neste texto envolve um tópico desafiador do ensino: uma abordagem de frações. Nesse sentido, embora o Modelo de Barras não tem por pressuposto estabelecer relações contextualizadas quando representando problemas verbais, a apresentação pelo Modelo de Barras emprega desenhos que são os comumente empregados com alunos pré-algébricos. Nesse sentido, a pesquisa aqui apresentada evidenciou que uma abordagem multirepresentacional revelou-se com dupla potencialidade: aparece como pressuposto implícito para comprensão e aprendizagem do aluno nas discussões dos licenciandos e, ao mesmo tempo, estabelece ao futuro professor possibilidades para elaboração de argumentos e justificativas para sua intervenção e clareza.

Embora esse trabalho representa um recorte sobre a forma como os futuros professores participantes pensam a interação com os alunos, as conclusões aqui estabelecidas fornecem evidências a respeito de como futuros professores empregam as distintas representações e as consideram em sua prática. De modo mais específico, verificou-se que os Modelos de Barras produzidos pelos futuros professores participantes (metalmente ou desenhados no papel) podem enriquecer o processo, enquanto eles buscaram justificar as respostas para as tarefas propostas. E, apesar dos argumentos terem inicialmente recaído nas operações de tratamento numérico, à medida que avançavam pela tarefa, seus argumentos passaram a articular tanto operações de tratamento de representações numéricas e pictóricas quanto a articulação e Conversão entre representações. Sobretudo, quando confrontados com a resposta de um estudante, a própria interpretação dessa resposta envolveu o trânsito por diferentes representações, com destaque às representações pictóricas. Nesse mesmo contexto, os futuros professores também apostaram no trânsito por representações pictóricas como mais apropriado à abordagem pensada ao aluno de modo que as representações pelo Modelo de Barras tiveram um papel significativo nos argumentos dos futuros professores.

Outro aspecto observado mediante a análise dos diálogos refere-se à *prioridade dos tratamentos numéricos na atribuição da interpretação do estudante* pelos futuros professores participantes. Apesar disso, como observado, os futuros professores de matemática empregaram diferentes representações em sua comunicação com objetivo de esclarecer ou justificar a sua própria interpretação e também pensar a sua abordagem direcionada aos estudantes. Nesse sentido, é possível estabelecer a seguinte questão para reflexão: "Por que os Tratamentos numéricos foram priorizados pelos futuros professores se eles próprios transitam por múltiplas representações dos objetos matemáticos (Conversões) para formularem argumentos e discutirem esses objetos (sejam pensadas para os estudantes ou como etapa prévia da proposição de intervenção)?". Adicionamente, enquanto discutiam e elaboravam diferentes argumentações pensadas para os estudantes, foi possível observar que os licenciandos exibiram, em diversos momentos, não vincularem representações equivalentes (Numérica à Pictórica). Esse aspecto corrobora a centralidade dadas as representações numéricas e algébricas em detrimento de outras.

Por fim, considerando-se as inquietações referentes ao desafio de argumentar e justificar matematicamente durante a comunicação e transposição didática explicitadas na introdução, a análise dos resultados obtidos durante a oficina permitiu refletir e ressignificar tais dificuldades. Esse processo aparenta estar direcionado à prioridade dada às operações de tratamento numérico, desconsiderando-se aspectos relacionados a riqueza e complexidade do movimento entre múltiplas representações. Assim, a análise realizada levou-me a um olhar distinto para essas dificuldades, mostrando ser necessário um acolhimento do processo de aprendizagem dos estudantes que ultrapasse a prioridade dos tratamentos numéricos. Além disso, ao compreender essas lacunas de forma refletida a partir dessa pesquisa, também observei a importância de não reduzir a experiência de aprendizagem dos alunos, guiando-os mediante interveções, a processos baseados prioritariamente em procedimentos operatórios. Nesse sentido, o professor precisa ampliar seu repertório, enriquecendo sua prática e, no caso desse trabalho, o Modelo de Barras mostrou-se favorável a essa demanda.

Referências

[1] ABREU-MENDOZA, R. A.; COULANGES, L.; ALI, K.; POWELL, A. B.; ROSENBERG-LEE, M. From non-symbolic to symbolic proportions and back: a Cuisenaire rod proportional reasoning intervention enhances continuous proportional reasoning skills. **Frontiers in Psychology**, v. 12, p. 1812, 2021. Disponível em: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2021.633077/pdf. Acesso em: 26 jun. 2023.

[2] ALMEIDA, P.; ALMEIDA, S.; MATEUS, V.; CORREIA, P. Materiais para a aula de Matemática: O produto de polinómios com Algebra Tiles. **Educação e Matemática**, n. 157, p. 25-25, 2020. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2642. Acesso em: 26 jun. 2023.

[3] ALVINE, A.; JUDSON, T. W.; SCHEIN, M.; YOSHIDA, T. What graduate students (and the rest of us) can learn from lesson study. **College Teaching**, v. 55, n. 3, p. 109-113, 2007. https://doi.org/10.3200/CTCH.55.3.109-113.

[4] ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003. https://doi.org/10.1023/A:102431232107.

[5] BALDIN, Y. Y. Desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de escola básica: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San José, v. 17, p. 31-44, 2018. Disponível em: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/34362. Acesso em: 25 jun. 2022.

[6] BERENDS, I. E.; VAN LIESHOUT, E. C. D. M. The effect of illustrations in arithmetic

problem-solving: Effects of increased cognitive load. **Learning and Instruction**, v. 19, n. 4, p. 345-353, 2009. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.06.012.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

[8] BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação -** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Editora. 1994.

[9] CHEONG, Y. K. The Model Method in Singapore. **The Mathematics Educator**, Athens, v. 6, n. 2, p. 47-64, 2002. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.555.5563&rep=rep1&type=pdf. Acesso em: 20 maio 2023.

[10] CLEMENT, G.; AUSLANDER, S. S. The Singapore Modeling Method: Possibilities for Improving Elementary Teacher Mathematics Preparation. **PRIMUS**, p. 1-15, 2021. https://doi.org/10.1080/10511970.2021.1993396.

[11] CONSTANTINIDES, G. A.; NEALE, C. A logical perspective on Cuisenaire and bar modelling. In: **British Society for Research into Learning Mathematics**, London-UK, v. 38, n. 2, p. 1-6, 2018. Disponível em: https://spiral.imperial.ac.uk/handle/10044/1/64021. Acesso em: 09 out. 2021.

[12] DE BOCK, D. Georges Cuisenaire's numbers in colour. A teaching aid that survived the 1950s. In: "Dig where you stand" 6. **Proceedings of the sixth International Conference on the History of Mathematics Education**. WTM-Verlag; Münster, 2020. Disponível em: https://lirias.kuleuven.be/3172307?limo=0. Acesso em: 09 jun. 2023.

[13] DENARDI, D. A. C. Didactic sequence: a dialetic mechanism for language teaching and learning. Revista Brasileira de Linguística Aplicada, v. 17, p. 163-184, 2017. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbla/a/MRttZR5w3Qtp3qhm9rGN9Kr/?lang=en&format=pdf. Acesso em: 10 maio 2023.

[14] DENNIS, M. S.; KNIGHT, J.; JERMAN, O. Teaching high school students with learning disabilities to use model drawing strategy to solve fraction and percentage word problems.

Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, London, v. 60, n. 1, p. 10-21, 2016. https://doi.org/10.1080/1045988X.2014.954514.

[15] DUVAL, R. Approche cognitive des problèmes de geométrie en termes de congruence. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v.1, p. 57-74, IREM de Strasbourg, 1988.

[16] DUVAL, R. Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v.1, p. 7-25, Strasbourg: ULP – IREM, 1988.

[17] DUVAL, R. Graphic et équations: l'articulation de deux régistres. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 1, IREM de Strasbourg, 1988c

[18] DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

[19] DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2004.

[20] DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 61, n. 1, p. 103-131, 2006. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z.

[21] DUVAL, R.; MORETTI, M. T. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Matemática, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011. DOI: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96.

[22] DUVAL, R. **Understanding the mathematical way of thinking**: The registers of semiotic representations. Cham: Springer International Publishing, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9.

[23] DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012a. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

[24] DUVAL, R.; MORETTI, M. T. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012b. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

[25] GARZON, J. R.; CASINILLO, L. F. Visualizing mathematics: the use of block models for strategic problem solving. **Journal of Education Research and Evaluation**, v. 5, n. 1, p. 112-117, 2021. https://doi.org/10.23887/jere.v5i1.30888.

[26] GNINGUE, S. M. Students working within and between representations: An application of dienes's variability principles. **For the Learning of Mathematics**, v. 26, n. 2, p. 41-47, 2006.

[27] GNINGUE, S. M. Remembering Zoltan Dienes, a maverick of mathematics teaching and learning: applying the variability principles to teach algebra. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, v. 17, n. 2, 2016.

[28] GRAEBER, A. O. Misconceptions about multiplication and division. **Arithmetic Teacher**, v. 40, n. 7, p. 408-412, 1993.

[29] HALL, B. C. **Using Algebra Tiles effectively**. 1999

[30] HO, S. Y.; LOWRIE, T. The model method: Students' performance and its effectiveness. **The Journal of Mathematical Behavior**, Burnaby, v. 35, p. 87-100, 2014. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.06.002.

[31] HOFER, C. The introduction of the Singapore Bar Model in year 1 problem solving: a personal reflection. **The STeP Journal: Student Teacher Perspectives**, London, v. 2, n. 2, p. 107-117, 2015. Disponível em: http://ojs.cumbria.ac.uk/index.php/step/article/view/243. Acesso em: 24 jun. 2021.

[32] INTAROS, P.; INPRASITHA, M.; SRISAWADI, N. Students' problem solving strategies in problem solving-mathematics classroom. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, v. 116, p. 4119-4123, 2014. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.901.

[33] KAUR, B. The why, what and how of the 'Model' method: A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. **ZDM**, Hamburg, v. 51, n. 1, p. 151-168, 2019. https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y.

[34] KAYSER, B. C. O uso do material manipulativo algebra tiles na resolução de equações de 2º grau com uma incógnita. 2023.

[35] KHO, T. H. Mathematical models for solving arithmetic problems. *In*: Southeast Asian conference on mathematics education, 4, 1987, Singapore. **Proceedings of the 4th Southeast Asian conference on mathematics education (ICMI-SEAMS)**, Singapore, 1987, p. 345–351.

[36] KHO, T. H.; YEO, S. M.; FAN, L. Model method in Singapore primary mathematics textbooks. *In*: JONES, K.; BOKHOVE, C.; HOWSON, G.; FAN, L. (Eds). **Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT2014)**. Southampton: University of Southampton, p. 275-282, 2014.

[37] KHO, T. H.; YEO, S. M.; LIM, J. **The Singapore model method for learning mathematics**. Singapura: Marshall Cavendish Education, 2009.

[38] KOLEZA, E. The bar model as a visual aid for developing complementary/variation problems. *In:* NINTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 9, 2015. Praga. **Proceedings of CERME** 9, Praga: Faculty of Education, 2015. p. 1940-1946. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288480/. Acesso em: 24 jun. 2022.

[39] LEE, J-E. Deciphering multiplication algorithms with the area model. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 19, n. 9, p. 556-563, 2014.

[40] LEE, K.; LIM, Z. Y.; YEONG, S. H.; NG, S. F.; VENKATRAMA, V.; CHEE, M. W. Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates. **Brain Research**, Gainesville, v. 1155, p. 163-171, 2007. https://doi.org/10.1016/j.brainres.2007.04.040.

[41] LOOI, C. K.; LIM, K. S. From bar diagrams to letter-symbolic algebra: a technology-enabled bridging. **Journal of Computer Assisted Learning**, Heerlen, v. 25, n. 4, p. 358-374, 2009. https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2009.00313.x.

[42] MATZIN, E. S.; MUNDIA, L. Efficacy of the Bar Model Method of Teaching Mathematics to Year 7 Students: Case Study of Teachers in Brunei Darussalam. Journal of Educational Issues,

Las Vegas, v. 6, n. 1, p. 402-421, 2020. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1259982. Acesso em: 24 jun. 2022.

[43] MEI, L. Y.; SOO, V. L. **Mathematical Problem Solving - the Bar Model Method**: A Professional Learning Workbook on the Key Problem Solving Strategy Used by Global Top Performer, Singapore. Singapura: Scholastic Education International (Singapore) Private Limited, a division of Scholastic Incorporated, 2014.

[44] MEINERZ, F. M. **Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita por meio do uso do material algebra tiles.** Trabalho de Conclusão de Curso (UFRGS). 2020.

[45] MEN, O. L.; ISMAIL, Z.; ABIDIN, M. Using maths model method in solving pre-algebraic problems among year five students. In: International Conference on Teaching, Assessment, and Learning for Engineering (TALE), 2018. **Proceedings of 2018 IEEE**, Wollongong: IEEE, p. 222-227, 2019. https://doi.org/10.1109/TALE.2018.8615364.

[46] MORIN, L. L.; WATSON, S. M.; HESTER, P.; RAVER, S. The use of a bar model drawing to teach word problem solving to students with mathematics difficulties. **Learning Disability Quarterly**, Austin, v. 40, n. 2, p. 91-104, 2017. https://doi.org/10.1177%2F0731948717690116.

[47] NG, S. F. How a Singapore Teacher Used Videos to Help Improve Her Teaching of the Part-Whole Concept of Numbers and the Model Method. In: **Cases of Mathematics Professional Development in East Asian Countries**. Springer, Singapore, 2015. p. 61-82.

[48] NG, S. F.; LEE, K. The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 40, n. 3, p. 282-313, 2009a. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0282.

[49] NG S. F.; LEE, K. Model method: A visual tool to support algebra word problem solving at the primary level. In: **Mathematics education: the Singapore journey**. 2009b. p. 169-203. https://doi.org/10.1142/9789812833761_0008.

[50] OSMAN, S.; YANG, C. N. A. C.; ABU, M. S.; ISMAIL, N.; JAMBARI, H.; KUMAR, J. A. Enhancing students' mathematical problem-solving skills through bar model visualisation

technique. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, Eastbourne, v. 13, n. 3, p. 273-279, 2018. https://doi.org/10.12973/iejme/3919.

[51] RAMASAMY, R.; PUTEH, M. Bar Model Method for Higher Order Thinking Skills Questions in Mathematics for Dual Language Program Pupils. **International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences**, Bahawalpur, v. 8, n. 9, p. 1456-1462, 2018.

[52] RICHIT, L. A.; RICHIT, A. O Modelo de Barras de Singapura na Resolução de Problemas Aritméticos e Algébricos. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 36, n. 73, p. 97-127, 2022a. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05.

[53] RICHIT, L. A.; RICHIT, A. Fenômenos de congruência semântica na representação algébrica de enunciados de problemas de duas equações lineares simultâneas. **Uni-Pluriversidad**, v. 22, n. 1, p. 1-18, 2022b. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.346548.

[54] RUMBELOW, M. Musical bar-modelling - Designing Cuisenaire rod 'object lessons' to bring music back in harmony with mathematics. *In*: **British Society for Research into Learning Mathematics**, v. 39, n. 3, 2019.

[55] STRICKLAND, T. K.; MACCINI, P. The effects of the concrete-representational-abstract integration strategy on the ability of students with learning disabilities to multiply linear expressions within area problems. **Remedial and Special Education**, v. 34, n. 3, p. 142-153, 2013. https://doi.org/10.1177/0741932512441712.

[56] SCHWARZ, V. **Understanding Problems**: Using Bar Models with Common Core Taxonomies. 2021. Acesso em 22 de novembro de 2021. Disponível em: https://teachers.yale.edu/curriculum/viewer/initiative_17.05.03_u. Acesso em: 20 maio 2023.

[57] SHARP, J. M. **Results of Using Algebra Tiles as Meaningful Representations of Algebra Concepts**. 1995.

[58] SHIN, M.; BRYANT, D. P. Improving the fraction word problem solving of students with mathematics learning disabilities: Interactive computer application.

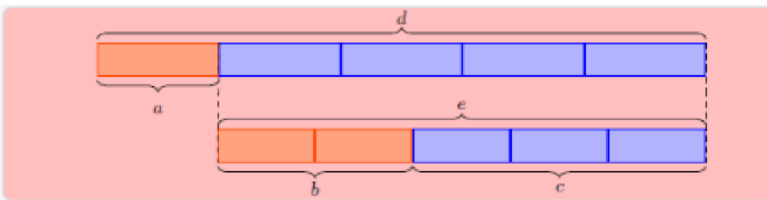
Remedial and Special Education, Lawrence, v. 38, n. 2, p. 76-86, 2017. https://doi.org/10.1177%2F0741932516669052.

[59] TSANKOVA, J. K.; PJANIC, K. The area model of multiplication of fractions. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 15, n. 5, p. 281-285, 2009. https://doi.org/10.5951/MTMS.15.5.0281.

[60] URBANO, S.; FERNÁNDEZ, J. A.; FERNÁNDEZ, M. P. El modelo de barras: una estrategia para resolver problemas de enunciado en Primaria. **Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología**, Madrid, v. 3, n. 1, p. 23-37, 2016. Disponível em: https://journals.epistemopolis.org/index.php/cienciaymat. Acesso em: 20 maio 2023.

Apêndice A: Formulários de Inscrição

Figura 5.1: Formulário de inscrição na Oficina (1ª Edição) - Parte 1.



Inscrição na oficina '***Frações e o Modelo de Barras de Singapura***'

- **Descrição sucinta**: durante a oficina, voltada exclusivamente para estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, serão desenvolvidas atividades que envolvem o Modelo de Barras na ***resolução de problemas escolares envolvendo frações***, ***resolução de alunos*** para esse tipo de problemas, aplicação dos [modelos pictóricos-padrão do Modelo de Barras]() ***no contexto das frações***, ***fundamentação teórica e contextualização da história do Modelo de Barras*** em Singapura. As atividades ocorrerão em três dias, no Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS (*campus* do Vale), em sala e prédio a serem divulgados posteriormente. As datas dos encontros são:

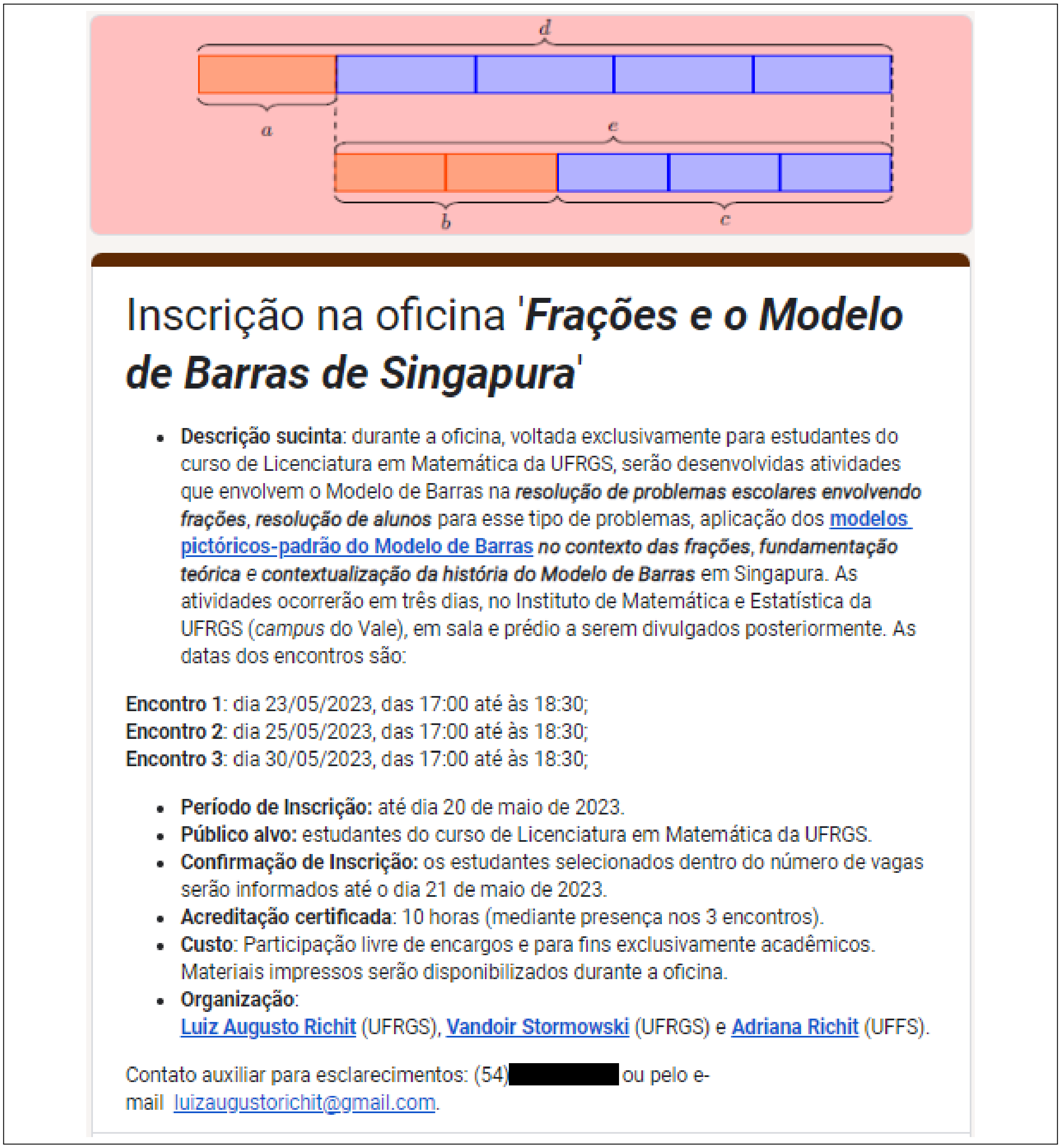
Encontro 1: dia 10/04/2023, das 13h30min até às 15h30min;
Encontro 2: dia 12/04/2023, das 13h30min até às 15h30min;
Encontro 3: dia 14/04/2023, das 13h30min até às 15h30min.

- **Período de Inscrição:** até dia 1 de abril de 2023.
- **Público alvo:** estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS.
- **Número de vagas:** 15 vagas (+5 reserva).
- **Confirmação de Inscrição:** os estudantes selecionados dentro do número de vagas serão informados até o dia 3 de abril de 2023.
- **Acreditação certificada:** 10 horas (mediante presença nos 3 encontros).
- **Custo:** Participação livre de encargos e para fins exclusivamente acadêmicos. Materiais impressos serão disponibilizados durante a oficina.
- **Organização:**
  Luiz Augusto Richit (UFRGS), Vandoir Stormowski (UFRGS) e Adriana Richit (UFFS).

Contato auxiliar para esclarecimentos: (54)[redacted]ou pelo e-mail luizaugustorichit@gmail.com.

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 5.2: Formulário de inscrição na Oficina (2ª Edição) - Parte 1.



Inscrição na oficina '***Frações e o Modelo de Barras de Singapura***'

- **Descrição sucinta**: durante a oficina, voltada exclusivamente para estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, serão desenvolvidas atividades que envolvem o Modelo de Barras na ***resolução de problemas escolares envolvendo frações***, ***resolução de alunos*** para esse tipo de problemas, aplicação dos **modelos pictóricos-padrão do Modelo de Barras** ***no contexto das frações***, ***fundamentação teórica*** e ***contextualização da história do Modelo de Barras*** em Singapura. As atividades ocorrerão em três dias, no Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS (*campus* do Vale), em sala e prédio a serem divulgados posteriormente. As datas dos encontros são:

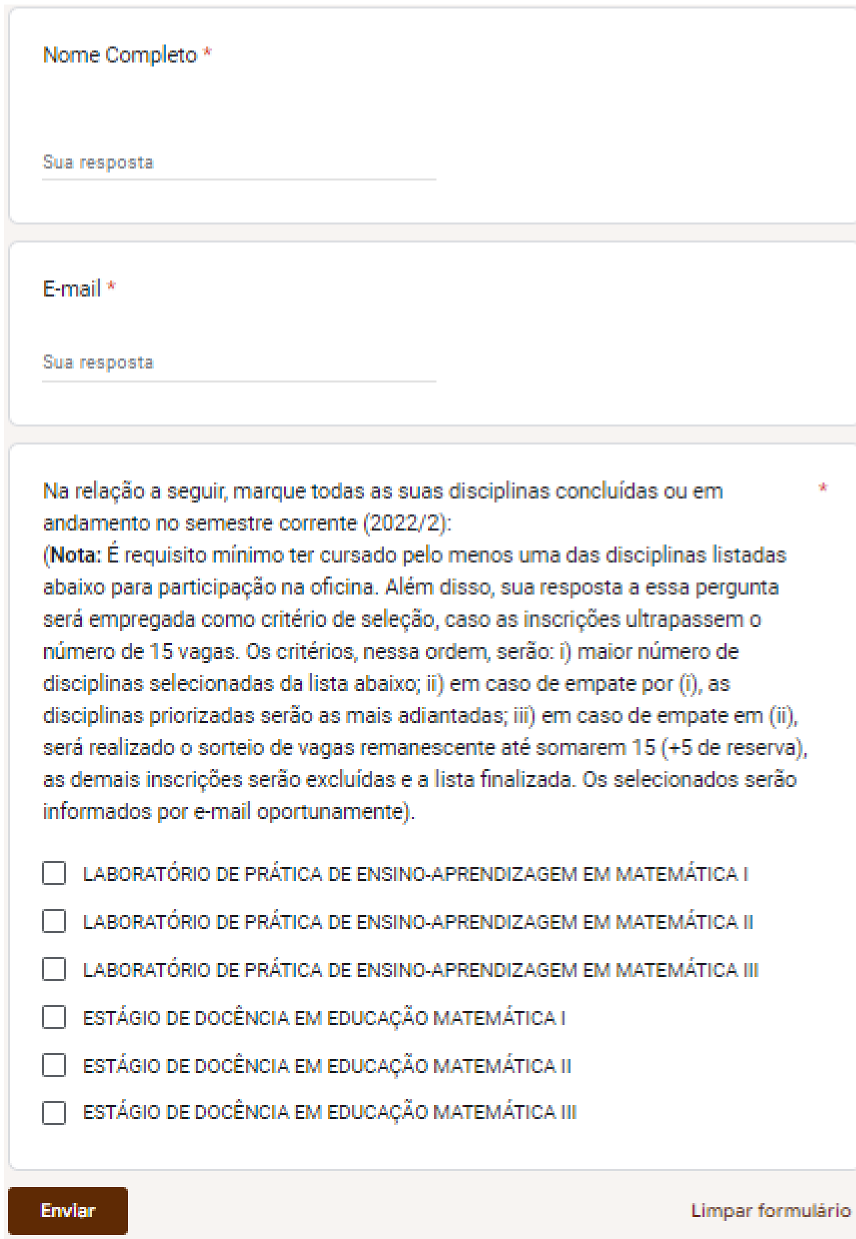
Encontro 1: dia 23/05/2023, das 17:00 até às 18:30;
Encontro 2: dia 25/05/2023, das 17:00 até às 18:30;
Encontro 3: dia 30/05/2023, das 17:00 até às 18:30;

- **Período de Inscrição:** até dia 20 de maio de 2023.
- **Público alvo:** estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS.
- **Confirmação de Inscrição:** os estudantes selecionados dentro do número de vagas serão informados até o dia 21 de maio de 2023.
- **Acreditação certificada**: 10 horas (mediante presença nos 3 encontros).
- **Custo**: Participação livre de encargos e para fins exclusivamente acadêmicos. Materiais impressos serão disponibilizados durante a oficina.
- **Organização**:
  Luiz Augusto Richit (UFRGS), **Vandoir Stormowski** (UFRGS) e **Adriana Richit** (UFFS).

Contato auxiliar para esclarecimentos: (54)[redacted] ou pelo e-mail luizaugustorichit@gmail.com.

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 5.3: Formulário de inscrição e condições para participação da Oficina - Parte 2.



Nome Completo *

Sua resposta

E-mail *

Sua resposta

Na relação a seguir, marque todas as suas disciplinas concluídas ou em andamento no semestre corrente (2022/2): *
(**Nota:** É requisito mínimo ter cursado pelo menos uma das disciplinas listadas abaixo para participação na oficina. Além disso, sua resposta a essa pergunta será empregada como critério de seleção, caso as inscrições ultrapassem o número de 15 vagas. Os critérios, nessa ordem, serão: i) maior número de disciplinas selecionadas da lista abaixo; ii) em caso de empate por (i), as disciplinas priorizadas serão as mais adiantadas; iii) em caso de empate em (ii), será realizado o sorteio de vagas remanescente até somarem 15 (+5 de reserva), as demais inscrições serão excluídas e a lista finalizada. Os selecionados serão informados por e-mail oportunamente).

- [ ] LABORATÓRIO DE PRÁTICA DE ENSINO-APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA I
- [ ] LABORATÓRIO DE PRÁTICA DE ENSINO-APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA II
- [ ] LABORATÓRIO DE PRÁTICA DE ENSINO-APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA III
- [ ] ESTÁGIO DE DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA I
- [ ] ESTÁGIO DE DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA II
- [ ] ESTÁGIO DE DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA III

Enviar

Limpar formulário

Fonte: elaborado pelo autor

Apêndice B: TCLE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Prezado(a) participante,

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa "**Desenvolvimento Profissional de Professores**", desenvolvida por Adriana Richit, professora na Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), *campus* Erechim, e docente permanente no Programa de Pós-Graduação em Educação da mesma Instituição de Ensino Superior. A oficina intitulada "**Frações e o Modelo de Barras de Singapura**" é uma ação deste projeto e tem objetivos estritamente acadêmicos, que, em linhas gerais, são:

i) Refletir sobre as contribuições do Modelo de Barras de Singapura na manipulação de frações e operações com frações por Futuros Professores de Matemática;

ii) Analisar o potencial desta abordagem para o trabalho do professor ensinando o tópico de frações.

Os materiais e resultados dessa ação serão considerados para elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do estudante Luiz Augusto Richit (Licenciatura em Matemática - UFRGS) sob orientação do Professor Dr. Vandoir Stormowski (UFRGS), além de demais produções sob coordenação da Pesquisadora Dra. Adriana Richit (UFFS).

Assentindo com a participação nessa pesquisa, você não terá custos ou receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a). Você não será identificado em nenhuma publicação relacionada a essa pesquisa. Os resultados estarão à sua disposição quando a pesquisa for finalizada e mediante a publicação do Trabalho de Conclusão de Curso e demais produções acadêmicas resultantes (mantido o anonimato dos participantes). Seu nome ou o material que indique sua participação não será publicizado sem a sua permissão. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 (cinco) anos e, após este tempo, serão destruídos. O pesquisador tratará a sua identidade com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resolução Nº 466/12 do Conselho Nacional de Saúde), utilizando as informações somente para fins acadêmicos e científicos.

A pesquisa possui *Certificado de Apresentação de Apreciação Ética* (CAAE), tendo sido aprovada pelo CEP/UFFS em 10/06/2021, sob o número 4.764.981.

Em caso de dúvida quanto à condução ética do estudo, entre em contato com o **Comitê de Ética em Pesquisa da UFFS:**

Tel. e Fax: +55 (49) 2049-3745

E-mail: cep.uffs@uffs.edu.br

Endereço para correspondência:

Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) – Comitê de Ética em Pesquisa da UFFS.

Rodovia SC 484, KM 02, Fronteira Sul

CEP 89815-899

Chapecó – Santa Catarina – Brasil.

O preenchimento da tabela abaixo **anui a sua participação na oficina** e **autoriza o uso dos dados produzidos durante a oficina** para fins de pesquisa e divulgação **anônima** em futuras publicações.

Assim sendo, declaro estar ciente dos objetivos da pesquisa, das condições de minha participação e manifesto estar de ACORDO em participar nos termos acima definidos:

nº	Nome Completo	Matrícula	Assinatura
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Luiz Augusto Richit
Promotor da Oficina (UFRGS)
luizaugustorichit@gmail.com

Vandoir Stormowski
Orientador (UFRGS)
vandoir.stormowski@ufrgs.br

Adriana Richit
Coordenador (UFFS)
adrianarichit@gmail.com

Porto Alegre - RS, _____ de ________________ de 2023