UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MODELAGEM MATEMÁTICA E GEOMETRIA DO TÁXI: ANÁLISE DE UMA PRÁTICA

WESLEY FREDERICO MACHADO DE SOUZA

Porto Alegre
2023

WESLEY FREDERICO MACHADO DE SOUZA

MODELAGEM MATEMÁTICA E GEOMETRIA DO TÁXI: ANÁLISE DE UMA PRÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora:
Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre
2023

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Modelagem Matemática e geometria do táxi: análise de uma prática

Wesley Frederico Machado de Souza

Banca examinadora:

___

Profª Drª Marilaine de Fraga Sant'Ana
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

___

Profª Drª Débora da Silva Soares
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

___

Profª Drª Miriam Telichevesky
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais e aos familiares que de alguma maneira contribuíram para que eu concluísse esse ciclo que permeou cinco anos da minha vida, os meus sinceros agradecimentos a vocês.

Agradeço aos amigos que fiz durante a graduação: Tiffany, Dani, Jeremy, Felipe, Júlia, João, Emanuel e Luís, sem a companhia de vocês essa jornada não teria sido concluída com êxito.

Agradeço a Diovana, que tive a oportunidade de conhecer na reta final da graduação, obrigado pelas leituras atentas que realizou do meu trabalho indicando sugestões de melhorias.

À Fran, minha amiga da vida, meus sinceros agradecimentos por estar ao meu lado sempre e em especial pelas leituras atentas indicando correções e direcionamentos para a melhoria desse trabalho.

Ao Ivan, meu colega de quarto da Casa dos Estudantes das Faculdades de Agronomia e Veterinária – CEFAV, que se tornou um amigo, muito obrigado pela paciência e por aguentar os meus momentos de estresse ao decorrer do meu último semestre de graduação.

À professora Marilaine, obrigado pelo aceite em me orientar nesse trabalho.

Às professoras Débora e Miriam, por aceitarem participar da minha banca examinadora, obrigado por todas as sugestões de melhoria para esse trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por me proporcionar um ensino de qualidade e excelência, promovendo o desenvolvimento de profissionais pensantes e críticos.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre”.
(Paulo Freire)

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso visa analisar uma prática desenvolvida em uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Utilizou-se da Modelagem Matemática para abordar problemas acerca da geometria do táxi, uma geometria não euclidiana. Os propósitos essenciais que nortearam esta pesquisa compreenderam a exploração das semelhanças e discrepâncias entre a métrica do táxi e a métrica euclidiana, a identificação das vantagens inerentes à utilização de mapas em um contexto de Modelagem Matemática, bem como a investigação da aplicabilidade da geometria do táxi na resolução de problemas do mundo real, particularmente na determinação da distância entre dois pontos geográficos. Para atingir esses objetivos tornou-se necessário realizar uma pesquisa de cunho qualitativo, o que se justifica pelo interesse no aprofundamento dos dados produzidos pelos alunos participantes. A gravação de áudio dos grupos e as devolutivas dos alunos acerca dos problemas propostos constituíram os dados para a elaboração desse trabalho. A pergunta diretriz que permeou este estudo - "Quais articulações são realizadas pelos alunos em um ambiente de Modelagem Matemática que explora a geometria do táxi?" - orientou as análises realizadas. Verificou-se, a partir da análise dos dados, que os alunos, ao participarem ativamente das discussões e comparações, foram capazes de articular conceitos pertinentes à geometria do táxi por meio da Modelagem Matemática, mesmo quando se valiam de referências à métrica euclidiana. A geometria do táxi, embora apresente maior proximidade com cenários da realidade, demonstrou ser mais acessível e viável em contextos que envolviam a construção de modelos de cidades ideais, ressaltando, desse modo, a importância da Modelagem Matemática como uma eficaz ferramenta pedagógica para a exploração de conceitos matemáticos presentes no cotidiano.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Geometria do táxi. Geometria não euclidiana. Métrica.

ABSTRACT

This course conclusion work aims to analyze a practice developed in a subject of the Mathematics Degree course at UFRGS. Mathematical Modeling was used to address problems regarding the geometry of the taxi, a non-Euclidean geometry. The essential purposes that guided this research included the exploration of the similarities and discrepancies between the taxi metric and the Euclidean metric, the identification of the advantages inherent to the use of maps in a Mathematical Modeling context, as well as the investigation of the applicability of taxi geometry in solving real-world problems, particularly in determining the distance between two geographic points. To achieve these objectives, it became necessary to carry out qualitative research, which is justified by the interest in deepening the data produced by the participating students. The audio recording of the groups and the students' feedback on the proposed problems constituted the data for the preparation of this work. The guiding question that permeated this study - "What articulations are made by students in a Mathematical Modeling environment that explores the geometry of the taxi?" - guided the analyzes carried out. It was verified, based on data analysis, that the students, by actively participating in discussions and comparisons, were able to articulate concepts relevant to taxi geometry through Mathematical Modeling, even when using references to Euclidean metrics. Taxi geometry, although closer to reality scenarios, proved to be more accessible and viable in contexts that involved the construction of models of ideal cities, thus highlighting the importance of Mathematical Modeling as an effective pedagogical tool for exploration of mathematical concepts present in everyday life.

Keywords: Mathematical Modeling. Taxi geometry. Non-Euclidean geometry. Metric

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa analisar uma prática, elaborada pelo autor, que tem como objetivo abordar conceitos geométricos em uma geometria não euclidiana, a saber, a geometria do táxi. Para a elaboração dessa prática foi fundamental o embasamento teórico acerca da Modelagem Matemática. A partir da escolha do uso de mapas de cidades urbanizadas, obteve-se o ponto-chave para essa tendência em Educação Matemática compor a referida pesquisa.

Devido ao apreço pela área de geometria desde o início da graduação, bem como, as experiências advindas da participação do minicurso “Introdução às geometrias não euclidianas no ensino fundamental II e médio” no IV Simpósio Nacional de Formação do Professor de Matemática, realizado na Universidade Federal do Espírito Santo — UFES em Vitória/ES em novembro de 2019, desencadeou-se o interesse em desenvolver essa pesquisa. métrica[1]

Com base em tópicos que envolvem essa temática, delimitou-se o atual trabalho e, ademais, conheceu-se a geometria do táxi. Essa geometria foi definida pelo matemático russo, Hermann Minkowski (1864–1909), que substitui a forma euclidiana de medir distâncias no plano pela distância definida como a soma das diferenças absolutas das coordenadas dos pontos, quando vistos em um sistema cartesiano de coordenadas. Essa nova maneira de definir a distância entre dois pontos refere-se a sistematizar uma geometria que se faça mais real e próxima ao deslocamento que veículos e pedestres realizam ao longo das quadras de uma cidade.

Assim sendo, Kallef e Nascimento (2004, p. 13) apontam que:

> [...] a geometria do táxi pode ser apresentada com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno, pois está se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço das “ruas”. Desta forma, confrontado com esta nova geometria, o aluno pode ser levado a perceber que existem outras geometrias além da euclidiana. Possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos (Kallef; Nascimento, 2004, p. 13).

[1] Neste trabalho, o termo “métrica” é tomado como uma generalização da ideia geométrica de distância.

Em direção ao que Kallef e Nascimento (2004) discorrem, Krause (1975) apresenta três pilares para justificar a escolha de se abordar a geometria do táxi em sala de aula:

> [...] A geometria não euclidiana escolhida deveria (1) estar próxima da geometria euclidiana na estrutura axiomática (2) ter aplicações significativas e (3) ser compreendida por qualquer pessoa que tenha uma pequena base na geometria euclidiana (Krause, 1975, p. 6).

Por essa geometria fazer referência ao deslocamento de um pedestre ou de um veículo ao longo de uma cidade, ela pode atender os critérios estabelecidos por Kreuse (1975). Assim sendo, se mostrando uma alternativa acessível para introduzir uma nova geometria aos alunos.

A elaboração desta pesquisa deriva-se da associação direta com o projeto de Iniciação Científica denominado “Modelagem Matemática no Ensino Superior”, coordenado pela professora orientadora Marilaine de Fraga Sant’Ana, do qual tive a oportunidade de fazer parte no último semestre da graduação. Com base nesse marco, uniu-se a temática de estudo desse projeto de iniciação com o propósito desse trabalho, sendo possível elaborar uma prática integrativa utilizando a Modelagem Matemática.

No aporte teórico elencam-se algumas concepções que distintos autores da Educação Matemática têm acerca da Modelagem Matemática. Nesta pesquisa, adotamos a perspectiva de Barbosa (2004) para Modelagem Matemática, a qual pode ser compreendida como um ambiente de aprendizagem em que o aluno problematiza e investiga, por meio da matemática, situações com referência na realidade. O interesse em abordar a Modelagem Matemática se dá pelo fator de envolvimento dos alunos em situações cotidianas, como por exemplo, deslocar-se pela cidade. Assim, apresentando um meio para explorar alguns conceitos geométricos na geometria do táxi.

Considerando o interesse particular em trabalhar com alunos do ensino superior e com a inserção no projeto supracitado de Iniciação Científica, foi delimitado que a produção dos dados desse estudo fosse obtida na disciplina de Educação Matemática e Docência II[2], ministrada pela orientadora desse trabalho. A coleta de dados deu-se em

---

[2] Disciplina obrigatória da terceira etapa do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS.

três encontros com os alunos dessa disciplina entre os meses de julho e agosto de 2023, correspondendo ao semestre de 2023/1.

Por fim, tem-se a temática desse trabalho, a Modelagem Matemática, que visa investigar quais articulações um grupo de alunos realizam mediante problemas que confrontam a métrica euclidiana, dispondo de atividades que utilizam mapas da localidade de Porto Alegre-RS para abordar se a geometria do táxi é a que melhor se enquadra em problemas reais de deslocamento em cidades urbanas. Assim, objetivou-se com esse estudo:

- Analisar comparações e distinções que estudantes realizam diante de problemas envolvendo uma métrica diferente da euclidiana;
- Identificar quais as possíveis potencialidades que a utilização de mapas de cidades proporciona para um ambiente de Modelagem Matemática;
- Investigar se os alunos assumem que a geometria do táxi é uma escolha viável em situações envolvendo deslocamentos em cidades urbanizadas;
- Identificar o que os alunos compreendem empiricamente por modelo a partir da prática desenvolvida.

Considerando esses objetivos a pergunta diretriz dessa pesquisa é: quais articulações são realizadas pelos alunos em um ambiente de Modelagem Matemática que explora a geometria do táxi?

No próximo capítulo apresentamos apontamentos sobre diferentes perspectivas de Modelagem Matemática, bem como algumas concepções consolidadas por autores acerca de modelos. Nesse capítulo também constam apontamentos referentes a geometria do táxi. Em seguida, no terceiro capítulo, encontram-se considerações sobre a metodologia adotada, a descrição das atividades desenvolvidas e a caracterização do ambiente onde foi realizada a coleta dos dados. O quarto capítulo contempla a análise dos dados obtidos, tal e qual, algumas relações dessa análise com o referencial teórico delimitado anteriormente. Por fim, traçam-se algumas considerações finais e possíveis encaminhamentos para práticas futuras.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresenta-se o aporte teórico acerca da Modelagem Matemática e da geometria do táxi. Inicialmente, será discorrido sobre diferentes concepções que pesquisadores da Educação Matemática têm da Modelagem Matemática, bem como conceitualizações do que se entende por modelo matemático. Em seguida, é apresentada a geometria do táxi, contexto histórico de como se consolidou essa geometria, algumas conceitualizações acerca da temática e por fim o lugar geométrico compreendido como circunferência nessa geometria.

2.1 Modelagem Matemática

Nessa seção objetiva-se discorrer sobre Modelagem Matemática, bem como diferentes concepções que alguns autores têm de sua utilização na Educação Matemática. Neste texto a tendência de Modelagem Matemática será escrita com iniciais maiúsculas por assumir que está sendo discorrido sobre um campo de estudo dentro da Educação Matemática. Será conveniente em alguns momentos referir-se a essa tendência apenas como “Modelagem” para evitar repetições.

A Modelagem Matemática estava inicialmente associada à área da Matemática Aplicada, na qual surgiram os primeiros conceitos e procedimentos do que viria ser uma atividade de Modelagem Matemática (Almeida; Silva; Vertuan, 2022). Matemáticos utilizavam conceitos e conteúdos matemáticos para resolver problemas oriundos de diversas áreas, por meio da criação de modelos que os representassem. Conforme aponta Soares e Javaroni (2013) a Modelagem Matemática começou a ser incorporada nas reflexões de seu uso no meio educacional a partir da década de 1980.

A Modelagem Matemática pode ser conceituada de maneira ampla como “a abordagem de problemas da realidade, usando conteúdos matemáticos” (Souza; Barbosa, 2014, p. 33), sendo desenvolvida de diversas maneiras, segundo o interesse particular de cada pesquisador ou professor. No âmbito da Educação Matemática no Brasil a Modelagem Matemática começou a ser introduzida no fazer pedagógico a partir das contribuições de Rodney Carlos Bassanezi, Ubiratan D’Ambrósio e Aristides Camargo Barreto. A seguir discorre-se acerca das concepções que alguns pesquisadores em Educação Matemática têm sobre Modelagem Matemática.

Para Bassanezi (2002):

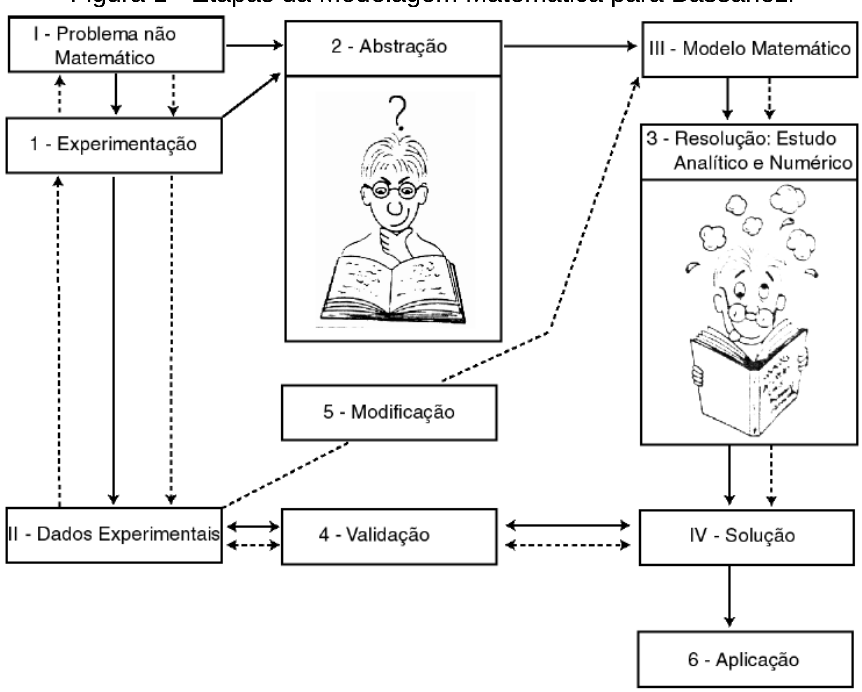
> A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente no momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele (Bassanezi, 2002, p. 24).

O autor denota que ao trabalharmos com problemas oriundos da realidade, sempre estaremos diante do pressuposto que por mais dados disponíveis que tenhamos da situação, estaremos omitindo parte desse sistema ou mesmo abordando apenas uma fração.

De forma geral, Bassanezi (2002) compreende a Modelagem Matemática de forma bem estruturada, seguindo algumas etapas ilustradas abaixo. Para o autor, a criação de um modelo é uma etapa indispensável para a utilização da Modelagem na Educação Matemática.

Na figura 1 as setas contínuas indicam uma primeira aproximação do problema e as setas pontilhadas indicam a busca de uma melhor descrição matemática do problema, tornando o processo dinâmico.

Figura 1 - Etapas da Modelagem Matemática para Bassanezi



Fonte: Bassanezi, 2002, p. 27

As atividades intelectuais indicadas na figura acima, podem ser compreendidas como:

1. Experimentação: etapa em que se obtém os dados, sendo a mesma uma atividade essencialmente “laboratorial”;

2. Abstração: é a etapa em que se formula o modelo matemático, procurando estabelecer as variáveis e a adequação numa linguagem própria da área em que se está trabalhando, é nesse momento que também são formuladas hipóteses e simplificações do problema em questão;

3. Resolução: momento em que pode desvincular-se da problemática inicial e focar apenas na resolução do modelo traçado anteriormente;

4. Validação: nessa etapa se busca aceitar ou refutar o modelo proposto, há uma validação se o modelo consegue prever novos fatos da problemática inicial;

5. Modificação: momento destinado a realizar adequações e modificações ao modelo delimitado para realização de uma melhor aproximação do problema.

Como mencionado anteriormente, Bassanezi tem uma conceitualização muito bem delimitada ao tocante da Modelagem Matemática. Conforme aponta Pinheiro (2019), outros autores têm concepções distintas, como, por exemplo, a não obrigatoriedade da elaboração de um modelo, mas essa sendo uma consequência do ato da modelagem.

Uma concepção mais ampla acerca da Modelagem Matemática pode ser compreendida como “[...] um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a questionar ou investigar situações com referência na realidade por meio da Matemática” (Barbosa, 2007, p. 162).

Barbosa (2004) pontua que a Modelagem pode intensificar a intervenção das pessoas em discussões e nas tomadas de decisões sociais que estejam relacionadas com aplicações da matemática. O autor tem interesse no âmbito social da Modelagem Matemática, ou seja, numa perspectiva sócio-crítica, argumentando que atividades nessa perspectiva auxiliam às discussões acerca do papel da matemática na sociedade, “nem a matemática nem a Modelagem são “fins”, mas “meios” para questionar a realidade vivida” (Barbosa, 2008, p. 4).

A partir do que Barbosa (2008) concebe o que é Modelagem Matemática, também delimita três casos:

> No caso 1, o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação. Aqui, os alunos não precisam sair da sala de aula para coletar novos dados e a atividade não é muito extensa. [...] Nesse caso, os estudantes trataram com “um problema” que qualquer pessoa poderia enfrentar no dia-a-dia.
> [...] Já no caso 2, os alunos deparam-se apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial. Nesse caso, os alunos são mais responsabilizados pela condução das tarefas.
> [...] E, por fim, no caso 3, trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não-matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos. (Barbosa, 2004, p. 4-5).

A prática dessa pesquisa assemelha-se com o caso 2, pois os problemas foram formulados pelo professor pesquisador e coube aos alunos buscarem os dados necessários para realização das atividades propostas. Ao que se refere o estudante coletar os dados fora da sala de aula, entende-se que a prática desenvolvida tem esse pressuposto, uma vez que os dados mais relevantes para o desdobramento das atividades foram coletados em aplicativos de mapas e transporte, o que configura um ambiente externo à sala de aula.

Para sintetizar esses três casos de flexibilização da Modelagem nos diversos contextos é apresentado o quadro 1, em que cada tarefa está relacionada com o papel no qual professor e aluno exercem numa tarefa de Modelagem.

Quadro 1 – aluno e professor nas tarefas de Modelagem Matemática

Tarefa	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração da situação-problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Coleta de Dados	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Resolução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Fonte: (Barbosa, 2004, p. 5)

Temos ainda a concepção de que uma atividade de Modelagem Matemática:

> [...] pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de um uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. (Almeida; Silva; Vertuan, 2022, p 12).

Esses autores consideram que a situação inicial é uma situação-problema[3] e para chegar numa situação final associa-se a uma representação matemática, podendo ser um modelo matemático. Ademais, esses autores também concordam que uma atividade de Modelagem tem que passar por algumas etapas, sendo elas: inteiração, matematização, resolução e interpretação de resultados e validação:

• **Inteiração:** o termo faz referência ao ato de "informar-se sobre", sendo o primeiro contato com a situação-problema, afim de conhecer as características e especificidades da situação em questão;

• **Matematização:** momento em há a transição das linguagens: transformação de representação da linguagem natural para a representação da linguagem matemática, fazendo relações entre as características do problema e procedimentos matemáticos;

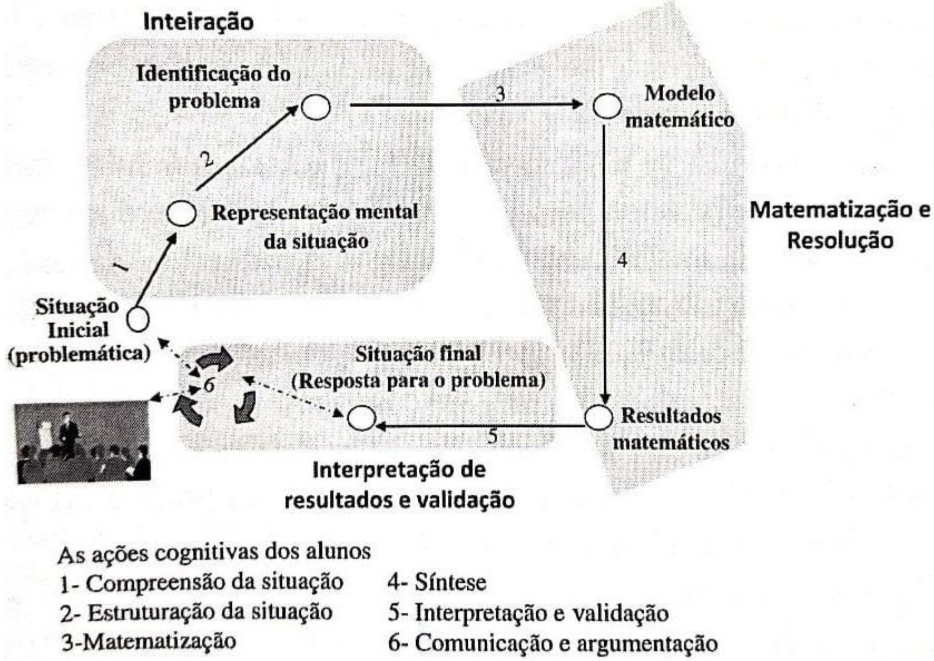
• **Resolução:** nessa etapa há a elaboração de um modelo matemático com finalidade de descrever e analisar a situação por meio da matemática. Momento destinado a responder perguntas traçadas inicialmente acerca da problemática;

• **Interpretação de resultados e validação:** fase para realizar a validação da representação matemática do problema e adequação dessa representação para a situação originária do problema, ou seja, sair do meio matemático para fazer conclusões acerca da situação-problema.

Essas etapas, conforme apontam Almeida, Silva e Vertuan (2022) podem acontecer de forma não linear, ou seja, ser uma atividade matemática repleta de movimentos de "ida e vinda" em cada uma das etapas supracitadas. Ao realizar uma atividade de Modelagem os alunos estão diante da interação entre conhecimento matemático e conhecimento extramatemático e essa interação serve de "pano de fundo" para ações cognitivas. A figura 2 ilustra algumas dessas ações relacionadas com as etapas que os autores traçam.

[3] Os autores compreendem o termo "problema" como uma situação a qual não se tem um método de resolução a *priori.*

Figura 2 – Fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos

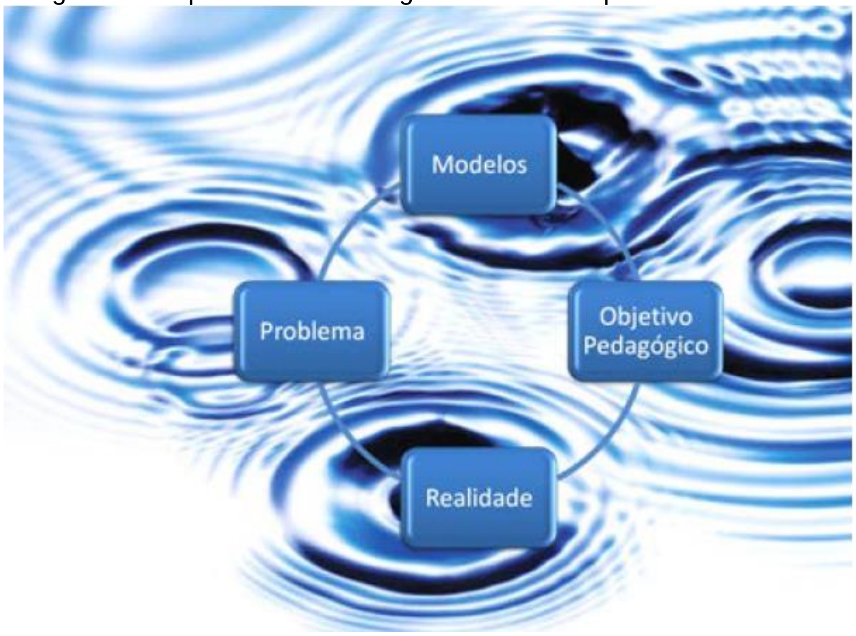


Fonte: Almeida; Silva; Vertuan, 2022, p.19

Dalla Vecchia (2012), aborda a Modelagem Matemática como um processo em que também não há a obrigatoriedade de um percurso linear apresentado por etapas pré definidas como é apontado, por exemplo, em Bassanezi (2002). Para o autor a Modelagem pode ser compreendida como a "visão alegórica de problema, entendo que as características múltiplas de cada um se entrelaçam, influenciando o processo de MM[4], do mesmo modo que as pedras atiradas em um lago de águas paradas influenciam as ondulações do mesmo" (Dalla Vecchia, 2012, p. 271). A figura 7 abaixo ilustra a concepção do autor acerca da tendência.

[4] Dalla Vecchia (2012) utiliza "MM" para se referir a Modelagem Matemática.

Figura 3 – Aspectos da Modelagem Matemática para Dalla Vecchia



Fonte: Dalla Vecchia, 2012, p. 271

Esse autor também apresenta que a Modelagem tem um modo fluido e em constante transformação que está relacionado com quatro aspectos relevantes: objetivo pedagógico, modelos/linguagem, problema e realidade (Dalla Vecchia, 2012).

- **Objetivo pedagógico:** como indica Dalla Vecchia (2012, p. 71) o objetivo pedagógico pode ser compreendido como “o conjunto de fins ou metas que se deseja atingir quando se desenvolve qualquer tipo de proposta com os alunos que visa a contribuir para o processo educacional”. Para o autor o objetivo pedagógico deve estar sempre em consonância com a prática desenvolvida pelo professor;
- **Modelos:** Dalla Vecchia (2012) compreende que um modelo faz referência à simbologia utilizada, à finalidade específica e a sua relação com a realidade. Esses três pilares são fundamentais para o modelo refletir aquilo que se deseja mostrar através de uma linguagem estruturada por uma sequência de ideias matemáticas;
- **Problema:** “diz respeito a uma dada situação que gera um campo de conflitos que vai assumindo gradativamente um caráter mais ou menos estável, à medida que vai se determinando” (Dalla Vecchia, 2012, p. 71). A maneira em que o aluno encara o problema pode influenciar o processo de Modelagem Matemática (Pinheiro, 2019);

- **Realidade:** a conceitualização de realidade é uma inquietação que permeia toda a tese de Dalla Vecchia, o autor concebe distintas concepções à realidade incluindo o mundo cibernético, que é um dos pressupostos de seu trabalho.

Concluímos que a abordagem apresentada pelo autor é um processo que está em constante transformação, onde qualquer alteração pode influenciar o encaminhamento na busca de uma solução para a problemática traçada inicialmente, assim como é ilustrado na figura 3 acima. Portanto, a Modelagem Matemática não se torna um processo estático e linear, mas um processo imerso em dinamismo e modificações.

2.1.1 Modelos

Na tendência de Modelagem Matemática, deparamo-nos com o conceito de modelo. No capítulo anterior esse termo foi mencionado algumas vezes sem a preocupação de abordá-lo em aspectos de significação. Essa seção é destinada a abordar algumas significações que são atribuídas a esse termo, bem como, algumas concepções que os autores citados anteriormente atribuem à temática. Conforme aponta Dalla Vecchia (2012), a palavra modelo ultrapassa o contexto das ciências, podendo ser utilizada em outras áreas do conhecimento como na arte e na moda, mas havendo empiricamente uma consonância entre os seus significados.

A palavra “modelo” deriva do latim *modulus* que é diminutivo de *modus,* que significa “pequena medida”. No dicionário etimológico de Cunha (1989) a palavra modelo é abordada como "representação de alguma coisa”. No dicionário Ferreira (2009, p. 1409) existem 18 maneiras de compreender o termo, a saber:

> 1.Objeto destinado a ser reproduzido por imitação.
> 2.Representação em pequena escala de algo que se pretende executar em grande.
> 3.Molde.
> 4.Pessoa ou coisa cuja imagem serve para ser reproduzida em escultura, pintura, fotografia etc.
> 5.Aquilo que serve de exemplo ou norma; molde: modelo literário.
> 6.Aquele a quem se procura imitar nas ações, no procedimento, nas maneiras etc.; molde: tomar alguém por modelo.
> 7.Pessoa ou ato que, por sua importância ou perfeição, é digno de servir de exemplo.
> 8.Pessoa que, posando, serve para estudo prático do corpo humano, em pintura ou escultura; modelo vivo.

> 9.Pessoa que, empregada em casa de modas, por conta própria ou através de agência, traja vestes ou adereços para exibi-los a clientela; manequim, maneca (fem.), maneco, modelo de passarela.
> 10.Modelo fotográfico.
> 11.Vestido, terno, chapéu, sapato etc., que é criação de uma casa de modas: os mais recentes modelos da estação.
> 12.Impresso (2), com dizeres apropriados para cada fim, utilizado em escritórios, empresas, bancos etc.
> 13.Réplica tridimensional de objeto, artefato, cenário, pessoa, etc., construído em escala normal, reduzida, ou ampliada, para fins didáticos, filmagem de efeitos especiais, teste de segurança etc.; maqueta.
> 14.Estilo ou design de um determinado produto ou criação, como carro, vestido, jóia, penteado etc.
> 15.Econ. Modelo econômico.
> 16.Fís. Conjunto de hipóteses sobre a estrutura ou o comportamento de um sistema físico pelo qual se procuram explicar ou prever, dentro de uma teoria científica, as propriedades do sistema.
> 17.Inform. Representação simplificada e abstrata de fenômeno ou situação concreta, e que serve de referência para a observação, estudo ou análise.
> 18.Inform. Modelo (17) baseado em uma descrição formal de objetos, relações e processos, e que permite, variando parâmetros, simular os efeitos de mudanças de fenômeno que representa (Ferreira, 2009, p.1409).

É do interesse desta pesquisa conceber a noção de modelo em torno dos itens 2, 3, 5, 6 e 17 por apresentarem significações amplas, podendo essas também se referirem a outras áreas além da matemática. Assim não ficando restrito às significações que os autores que estão sendo citados ao longo desse capítulo fornecem para esse termo.

Barbosa (2009) menciona que a palavra modelo tem distintas concepções no âmbito da Educação Matemática e Científica. Sendo cada qual adaptada para o viés de investigação de cada pesquisador da área.

O autor supracitado considera que um modelo matemático é "toda representação matemática da situação, por escrito, [...] podemos também reconhecer como modelo matemático qualquer outro tipo de registro matemático escrito que se refere à situação-problema, como as operações matemáticas básicas" (Barbosa, 2008, p. 48). Assim, o autor atribui ao modelo uma significação de registro por escrito na linguagem matemática.

Barbosa (2009) apresenta três modos distintos para se trabalhar com modelos matemáticos:

- O primeiro modo é acerca de oferecer argumentos para introduzir um novo conceito, assim utilizando resultados matemáticos para justificar a apresentação de novos conceitos, definido como "modelo matemático como justificativa";

- O segundo modo diz respeito ao próprio modelo matemático ser o objeto de estudo, ou seja, um conceito que deve ser aceito mediante a apresentação de um modelo matemático, definido como “modelo matemático como definição”. Nesse caso o aluno deve dominar a própria relação matemática, conforme aponta Barbosa (2009);
- Já o terceiro modo aborda que um modelo matemático auxilia na compreensão, interpretação e conclusão de assuntos de outras áreas, definido assim como “modelo matemático como estruturante”.

Para o autor, “seja qual for a função do modelo matemático na educação científica [...] trata-se de diferentes formas de recontextualizar o discurso da matemática para o discurso pedagógico da ciência” (Barbosa, 2009, p. 80).

Essa pesquisa apoia-se no primeiro modo de se trabalhar um modelo matemático: modelo matemático como justificativa*.* Tendo em vista que o objetivo da prática será introduzir aos alunos a noção da métrica da geometria do táxi, partindo de um problema que faz parte do dia a dia dos indivíduos que utilizam algum meio de transporte.

Dalla Vecchia (2012) tem interesse em abordar o viés das linguagens de programações como referências para a construção de modelos. Em sua tese questiona o que seria considerado como modelo matemático na linguagem *Scratch*[5]. Com esse interesse o autor observa que:

> [...] é possível compreender que a ideia de modelo matemático pode estar associada a distintos aspectos, tais como os relativos à sua simbologia, à sua finalidade específica e à sua relação com a realidade. É levando em consideração esses três aspectos que assumirei uma perspectiva de modelo matemático, entendendo-o como sendo o exemplar de uma situação que se mostra por meio de uma linguagem estruturada por ideais matemáticas (Dalla Vecchia, 2012. p. 116).

Ao interpretar um modelo como um exemplar, o autor considera uma perspectiva dupla, ou seja, pode referir-se tanto a algo quanto servir como referência para nortear decisões.

[5] uma linguagem de programação desenvolvida pelo *Massachusetts Institute of Technology*.

Bassanezi (2002, p. 20) define um modelo matemático como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. O autor apresenta dois tipos de modelos matemáticos:

> *Modelo Objeto* é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser *pictórica* (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc.), *conceitual* (fórmula matemática), ou *simbólica*. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado.
> *Modelo teórico* é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais) (Bassanezi, 2002, p. 20).

Corroborando com a explicação de “modelo objeto”, Bassanezi (2004) explica que a relação entre a realidade e a matemática sempre será mediante a aproximação, ou seja, “[...] estamos laborando sobre representações de um sistema ou parte dele” (Bassanezi, 2004, p. 24). Essa contraposição entre o modelo teórico e a realidade permeia uma das atividades que terá o intuito de colocar em voga as diferenças observadas na teoria da geometria do táxi, sendo observado o que dessa teoria permanece igual e o que sofre alterações quando abordada em situações do cotidiano.

Para Almeida, Silva e Ventuan (2022) um modelo pode ser utilizado em diversas áreas como, por exemplo, na arte, moda, engenharia, matemática, entre outras. Conforme esses autores:

> O que pode variar é a finalidade para a qual os modelos são construídos, podendo prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras. Independente da finalidade, o modelo é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se “torna presente” por meio desse modelo (Almeida; Silva; Ventuan, 2022, p.13).

Esta visão mais ampla descrita pelos autores traz um diálogo em uma posição adversa ao que estamos habituados a entender por modelo no âmbito da Modelagem Matemática, ou seja, muitas vezes ficamos restritos a ideia de um modelo ser um conjunto de equações a serem resolvidas em um processo de Modelagem e não se extrapola os demais sentidos que o termo pode assumir durante uma tarefa de Modelagem.

É no sentido de transgredir essa conceitualização que esse trabalho dialoga, proporcionando ao aluno que compare os modelos da métrica euclidiana e da métrica do táxi para realizar comparações e distinções acerca de um mesmo conceito matemático, mas sob métricas distintas, desse modo, proporcionando representações diferentes para um mesmo objeto matemático. Assim, um modelo matemático pode ser compreendido também como “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática” (Almeida; Silva; Ventuan, 2022, p.13). Nesse trabalho é utilizada a concepção que Barbosa (2008) e Barbosa (2009) tem acerca de modelo, a qual se centraliza na representação matemática de um problema real para a discussão e a análise dessa situação a partir da matemática.

2.1.2 Cenários para Investigação

Barbosa (2004) afirma que a Modelagem Matemática está associada à problematização e a investigação, definindo que:

> O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta (Barbosa, 2004, p. 3)

Na direção dessa afirmação, temos o ambiente de aprendizagem de Modelagem Matemática que se refere à noção de ambientes para aprendizagem que Skovsmose (2000) apresenta ser às condições nas quais os alunos são convidados a desenvolverem atividades. Skovsmose (2000) classifica a sala de aula em duas configurações: paradigma do exercício e cenários para investigação.

- **Paradigma do exercício:** faz referência a educação matemática tradicional, por exemplo, o professor entra em sala de aula passa determinado conteúdo no quadro e posteriormente os alunos resolvem exercícios de repetições pautados naquilo que o professor explanou no quadro;
- **Cenários para investigação:** oposição ao paradigma do exercício. Nessa configuração os alunos são convidados a explorarem e argumentarem sobre o que está sendo abordado em sala de aula, Skovsmose (2000) define como

cenário para investigação o ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação, onde os alunos são responsáveis pelo processo.

A cada uma dessas configurações o autor associa três tipos de referências: referência à matemática pura, referência à semirrealidade e referência à realidade. A partir da combinação dos tipos de referências com o paradigma do exercício e os cenários para investigação, o autor caracteriza seis ambientes de aprendizagem. Abaixo, no quadro 2, transcreve-se a ideia apresentada por Skovsmose (2000).

Quadro 2 — Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenários para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose, 2000, p. 8.

- **Ambiente (1) —** é caracterizado por apresentar exercícios estritamente no contexto da matemática pura.
- **Ambiente (3) —** exercícios de semirrealidade criados pelo professor ou por autores de livros didáticos. Nesse tipo de situação todas as informações contidas nos exercícios são suficientes para a solução do problema, sem haver necessidade de investigação (Pinheiro, 2022);
- **Ambiente (5) —** exercícios baseados na vida real (realidade), mas ainda estabelecidos no paradigma do exercício, assim não havendo questionamentos e investigação por parte dos alunos;
- **Ambiente (2) —** é caracterizado por investigações no contexto da matemática, atividades de enigmas e demonstrações, por exemplo, podem ser classificadas nesse ambiente;
- **Ambiente (4) —** "assim como o ambiente (3), o ambiente (4) também contém referências a uma semi-realidade, mas agora ela não é usada como um recurso para a produção de exercícios: é um convite para que os alunos façam explorações e explicações" (Skovsmose, 2000, p. 10). A terceira etapa desse trabalho se assemelha com esse ambiente de aprendizagem;

- **Ambiente (6) —** nesse ambiente o problema em questão pode ser proposto tanto pelo professor quanto pelos alunos, sendo problemas oriundos da realidade. Há também a possibilidade de desenvolvimento de projetos nesse ambiente de aprendizagem. Portanto, diferentemente do ambiente (5) agora há espaço para questionamento e investigação.

Acerca dos ambientes de aprendizagem (3) e (4) “[...] é possível se referir a uma semi-realidade — não se trata de uma realidade que "de fato" observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático de matemática” (SKOVSMOSE, 2000, p. 8). Para o autor, a semirrealidade oferece suporte na resolução de problemas, sendo assim, a Educação Matemática estabelece padrões próprios de como operar em uma semirrealidade.

A última etapa da prática desse trabalho foi desenvolvida tendo como referência o ambiente de aprendizagem entendido como semirrealidade, extraída de Leivas (2019), a atividade será pautada em um contexto da realidade, mas como terá dados extremamente precisos contidos em um plano cartesiano e uma idealização de uma situação com base na realidade, então se enquadra em um ambiente de semirrealidade. Bem como, um contexto criado para poder introduzir um lugar geométrico em uma métrica nova, ou seja, a noção de circunferência na geometria do táxi. Portanto, se faz pertinente essa discussão acerca desse ambiente de aprendizagem.

Barbosa (2004) defende que a Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem do tipo (6), pautado pelo paradigma dos cenários para investigação, fazendo relação à problematização e investigação por parte dos alunos. O autor também delimita que esse ambiente de aprendizagem é propício para o desenvolvimento de atividades na perspectiva sócio-crítica, já que essa tem preocupação na compreensão crítica do mundo através da matemática. Com a discussão acerca de ambientes de aprendizagem se consegue um maior aporte de como Barbosa caracteriza e aborda a Modelagem Matemática.

2.2 Geometria do Táxi

Essa seção sintetiza o conteúdo matemático que permeia a análise de dados desse trabalho. Discorre-se sobre a métrica de uma geometria não euclidiana, sobre a obtenção da quantidade de caminhos que se pode traçar entre dois pontos a partir dessa nova métrica e finalmente a explanação do lugar geométrico estabelecido como circunferência.

A geometria do táxi foi concebida pelo matemático russo, Hermann Minkowski (1864-1909), que foi um dos professores de Albert Einstein. Conforme aponta Rocco (2022), Minkowski realizou contribuições no âmbito de espaços geométricos não euclidianos e principalmente no desenvolvimento matemático do espaço-tempo referente a Teoria da Relatividade, que por meio deste que obteve maior reconhecimento da sociedade científica da época. No tocante à geometria do táxi, Hermann Minkowski foi responsável por definir a métrica que é utilizada nela.

De acordo com Loiola, Sakaguti e Pires (2017), a designação do nome geometria do táxi surgiu pela primeira como *Taxicab Geometry* através da publicação de um livreto denominado *"You Will like geometry"* escrito pelo matemático austríaco Karl Menger em 1951. Posteriormente, em 1975 o matemático Eugene F. Krause foi o pioneiro a sistematizar didaticamente o conhecimento acerca dessa geometria na obra denominada "*Taxicab Geometry: An adventure in non-euclidian geometry*", o qual até os dias atuais serve de referência para quem almeja aprofundar os estudos nessa geometria (Barbaresco; Morgado, 2013).

Leivas (2019) cita que a geometria do táxi também pode ser intitulada como geometria urbana por fazer referência ao deslocamento que automóveis realizam ao longo das ruas de uma cidade. Cézar (2010) menciona que essa geometria também pode elucidar o trajeto que um pedestre realiza ao ir de um ponto a outro, andando exclusivamente pelas ruas. Essa geometria faz alusão a uma cidade ideal, ou seja, uma cidade que apresenta ruas paralelas ou perpendiculares entre si, ademais apresenta que essa cidade idealizada não apresenta ruas de um único sentido, ou seja, o trânsito é livre para ambos os sentidos (Cézar, 2010). Assim, sendo "capaz de modelar as trajetórias, por "linhas quebradas" dos cidadãos e dos veículos que se deslocam entre quarteirões" (Barbaresco; Morgano, 2013, p. 4).

Pode-se associar esse modelo de cidade ideal a uma malha quadriculada, pois a estrutura básica dessa geometria são retas paralelas verticais e horizontais, ambas contidas em um mesmo plano. Portanto, as ruas dessa cidade ideal equivalem a retas perpendiculares e paralelas e os espaços entre elas são designados de quarteirões (Altóe *et al*, 2022), a figura 4 ilustra essa conversão para a malha quadriculada.

Figura 4 – Malha quadriculada

Fonte: elaborado pelo autor, 2023.

A definição de métrica, que se baseia em suas propriedades mais fundamentais, é abstrata e independe de qual geometria está sendo abordada. No entanto, como veremos, é possível que um mesmo conjunto (plano) carregue mais de uma métrica (por exemplo, a euclidiana e a do táxi), de modo que as distâncias entre dois pontos são realizadas por trajetórias diferentes, o que traz consequências diversas para toda a geometria. Bem como, o que difere é a função que define a métrica em cada geometria. Segundo Kallef e Nascimento (2004) a malha quadriculada auxilia os alunos nos estudos da geometria do táxi por simplificar a métrica táxi[6]. Neste trabalho o conjunto a ser considerado é o de pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são números inteiros.

[6] Assim como denomina-se “métrica euclidiana”, denomina-se “métrica táxi” para se referir a maneira de obter a distância entre dois pontos na geometria do táxi.

2.2.1 Métrica

Em Barbaresco e Morgado (2013) temos a seguinte definição.

Definição 1: Considere $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. d é uma métrica se satisfaz as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{i})$ $d(A,B) \geq 0,\ \forall\, A,B\ \in\ \mathbb{R}^2$ e $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow\ A = B$;

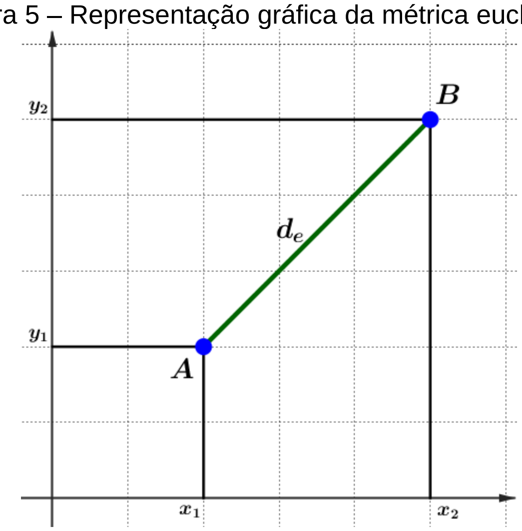
$\boldsymbol{ii})$ $d(A,B) = d(B,A),\ \forall\, A,B\ \in\ \mathbb{R}^2$;

$\boldsymbol{iii})$ $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B),\ \forall\, A,B,C\ \in\ \mathbb{R}^2$;

O número real $d(A,B)$ é denominado distância do ponto A ao ponto B.

A figura 5 ilustra a função distância euclidiana, denotada por d_e, que é obtida através do teorema de Pitágoras.

Figura 5 – Representação gráfica da métrica euclidiana



Fonte: elaborado pelo autor, 2023.

Tendo os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, temos que:

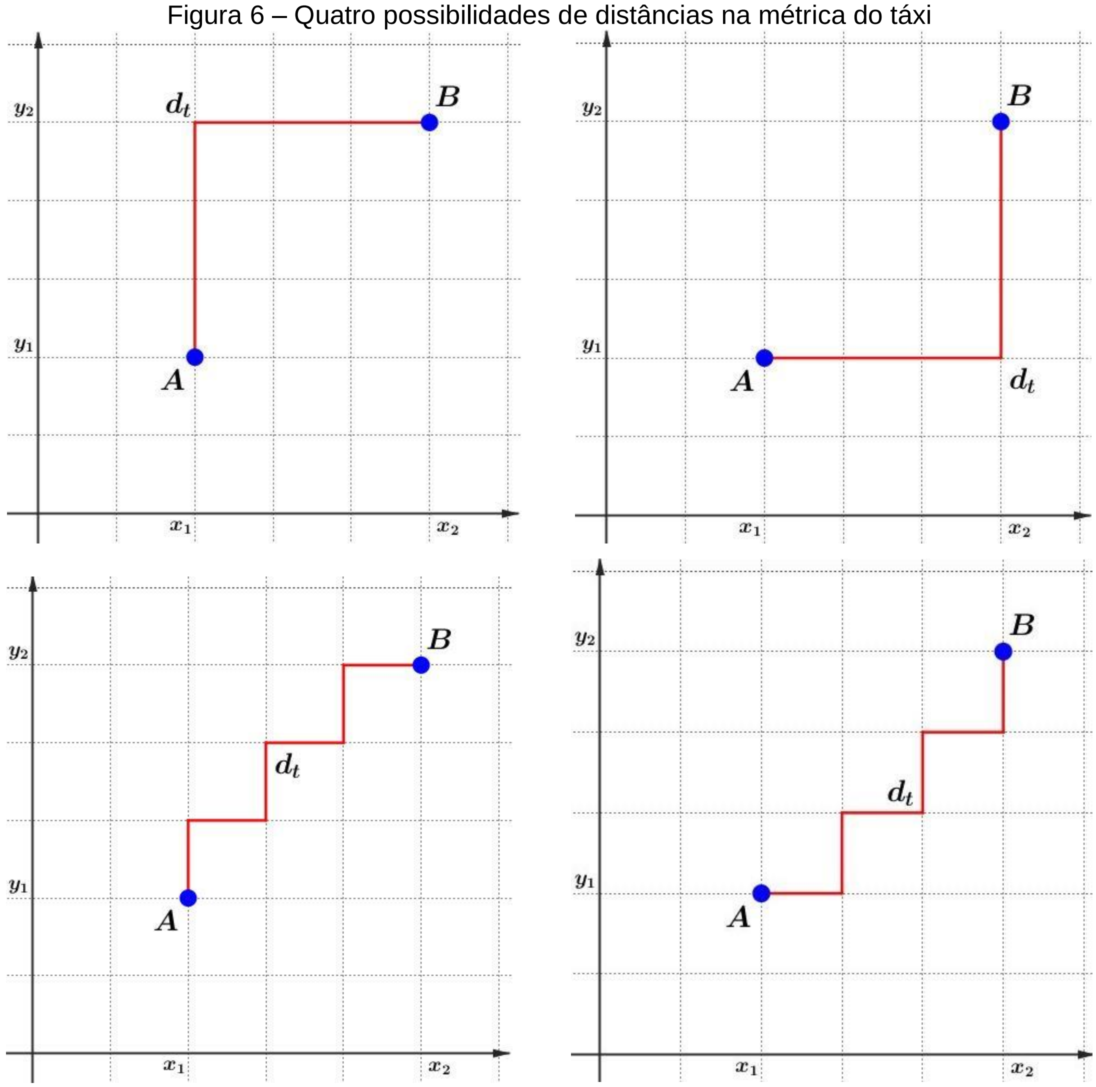
$$d_e(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

Entretanto, a métrica euclidiana não é apropriada para calcular a distância entre duas localidades de uma cidade, tendo em vista que essa não leva em consideração o trajeto realizado por veículos e pedestres. Como ilustra a figura 6, a função distância do táxi, denotada por d_t, é definida como a soma das diferenças absolutas entre as coordenadas dos pontos que se deseja obter a menor distância.

Tendo os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, temos que:

$$d_t(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \tag{2}$$

Figura 6 – Quatro possibilidades de distâncias na métrica do táxi



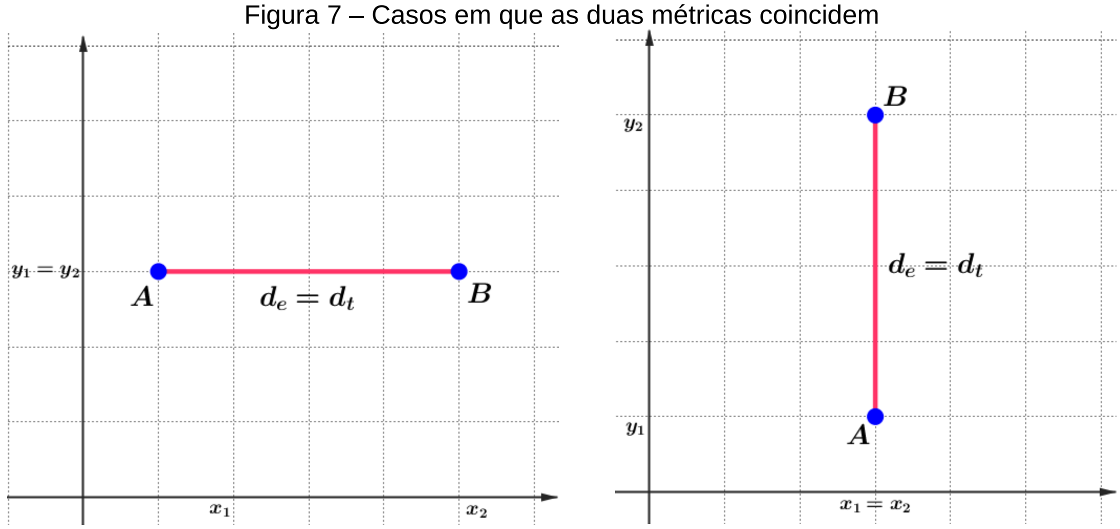
Fonte: elaborado pelo autor, 2023.

A distância do táxi entre os pontos A e B não é realizada pelo segmento de reta que liga os pontos A e B, mas sim por “linhas quebradas” que os unem (Loiola, 2014). Pode-se determinar mais do que um caminho que representa a distância entre os pontos A e B como é ilustrado na figura 6 acima. Ademais, conforme aponta Barbaresco e

Morgado (2013, p. 7) “os objetos matemáticos serão considerados na interseção de uma rua vertical com uma rua horizontal”, ou seja, os pontos serão considerados apenas na interseção das ruas e não há elementos que são considerados dentro de cada quadra.

Essas duas métricas coincidem apenas nos casos que os pontos A e B estão em uma reta paralela ao eixo X ou paralela ao eixo Y, conforme indica a figura 7.

Figura 7 – Casos em que as duas métricas coincidem



Fonte: elaborado pelo autor, 2023.

Com exceção dos casos mencionados acima, a distância do táxi sempre será maior que a distância euclidiana. Tomando $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, pode-se determinar a seguinte relação algébrica:

$$d_t(A, B) \geq d_e(A, B) \tag{3}$$

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \geq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4}$$

2.2.2 Caminhos mínimos entre dois pontos

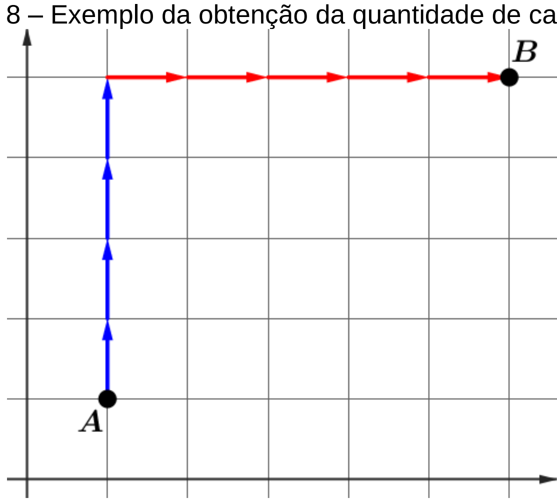
Conforme ilustrado na figura 6 anteriormente, pode-se obter mais de uma possibilidade de menor caminho entre dois pontos na geometria do táxi, diferentemente do que ocorre na geometria euclidiana, que sempre será o segmento de reta que une esses dois pontos. Tendo isso em vista, utilizaremos a noção de combinação da análise combinatória para determinar a quantidade de caminhos mínimos.

Definição 2: uma combinação de p dentre n objetos distintos, sendo $n \geq 1$ e $p \leq n$ são todos os grupos, ou escolhas, de p desses objetos distintos, independente da ordem. Denotado por C_n^p e lê-se como “combinação de n escolhe p”.

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \quad (5)$$

Como visto anteriormente e com base em Loiola (2014) os deslocamentos na malha do táxi são possíveis apenas em movimentos horizontais e verticais, respectivamente, paralelos ao eixo x e ao eixo y e considerando cada um desses deslocamentos como sendo unitários. Utiliza-se, nesse contexto, a fórmula (5) admitindo que n seja a soma dos deslocamentos unitários horizontais e verticais e p sendo o número de deslocamentos feitos na horizontal ou na vertical. Temos que o número de caminhos mínimos entre dois pontos vai depender da escolha entre essas direções, ou seja, do número de maneiras de escolher p dentre os n segmentos. Assim, tal número é C_n^p. Com base na figura 8 será abordado um exemplo para elucidar a utilização da fórmula (5).

Figura 8 – Exemplo da obtenção da quantidade de caminhos



Fonte: elaborado pelo autor, 2023

Considerando $n = 9$ e $p = 4$, temos que:

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} \quad (6)$$

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \tag{7}$$

$$C_9^4 = 126 \tag{8}$$

O resultado 126 representa a quantidade de caminhos mínimos que se pode fazer entre os pontos A e B, sendo que cada um desses caminhos representa igualmente a menor distância entre esses dois pontos. A utilização da combinação se faz necessária nesse tipo de situação, pois não interfere a ordem de escolha dos deslocamentos unitários, por exemplo, se o primeiro deslocamento for vertical e o segundo horizontal ou ao contrário. Portanto, todos os caminhos determinados não modificam o resultado final, assim justificando a utilização do método de contagem definido acima como combinação.

Pode-se também associar o cálculo da obtenção dos caminhos possíveis à noção de permutação com repetição, como é abordado em Oliveira (2020), relacionando com a ideia de anagrama com repetição, ou seja:

$$\underbrace{VVV\ldots V}_{v\ vezes}\ \underbrace{HHH\ldots H}_{h\ vezes} \tag{9}$$

Considerando a palavra acima composta por p letras, v a quantidade de repetições de V, h a quantidade de repetições de H e N a quantidade de anagramas formados, temos que:

$$N = \frac{p!}{v! \cdot h!} \tag{9}$$

Pode-se associar o exemplo ilustrado na figura 8 com a palavra VVVVHHHHH, composta por nove letras (nove deslocamentos unitários), sendo que V se repete quatro vezes (quatro deslocamentos verticais) e H se repete cinco vezes (cinco deslocamentos horizontais), assim obtendo:

$$N = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \tag{10}$$

$$N = 126 \tag{11}$$

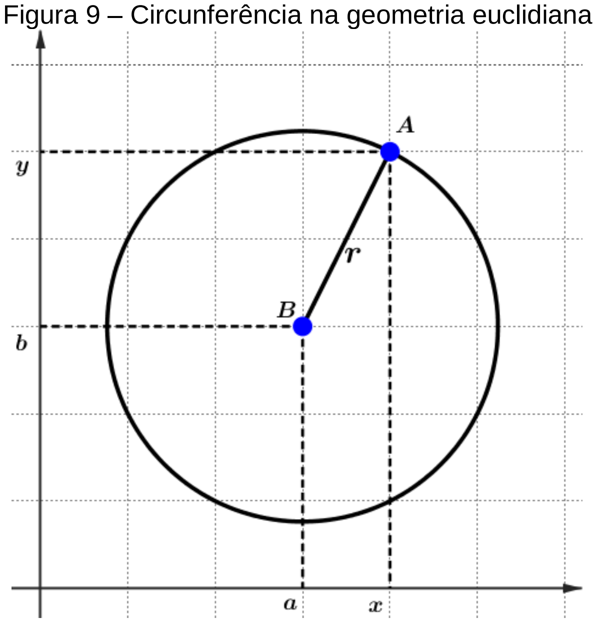
Assim sendo, há duas maneiras da área de análise combinatória para determinar a quantidade de caminhos entre dois pontos na geometria do táxi.

2.2.3 Circunferência na geometria do táxi

Define-se circunferência como sendo o lugar geométrico de todos os pontos que estão a uma mesma distância de um ponto fixo denominado centro. A definição de circunferência permanece igual na geometria do táxi, o que difere é a sua representação gráfica e a sua equação. Desta forma, dados os pontos $A = (x, y)$ e $B = (a, b)$ tal que A é um ponto que pertence a circunferência em que B é seu centro, ou seja $d(A, B) = r$, temos na geometria euclidiana a seguinte equação que caracteriza a circunferência, bem como a figura 9 a sua representação.

$$d_e(A, B) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow C_e: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (12)$$

Figura 9 – Circunferência na geometria euclidiana

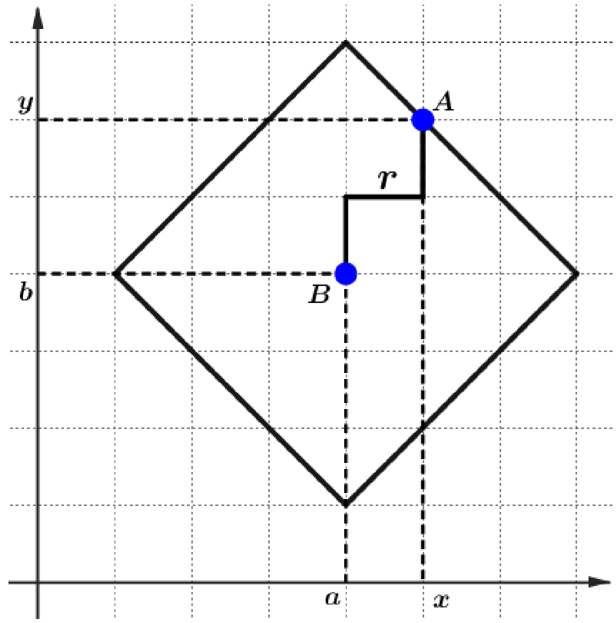


Fonte: elaborado pelo autor, 2023

Na geometria do táxi temos a equação (13) que caracteriza a circunferência, bem como na figura 10 a sua representação. Neste caso, r necessita ser um número natural, ou seja, $n \in \mathbb{N}$.

$$d_t(A, B) = r \Leftrightarrow C_t: |x-a| + |y-b| = r \qquad (13)$$

Figura 10 – Circunferência na geometria do táxi



Fonte: elabora pelo autor, 2023

Gusmão, Sakaguti e Pires (2017) estabelecem que C_e é a representação gráfica euclidiana e que C_t é a representação gráfica da geometria do táxi de uma circunferência. Nota-se que essa nova representação de circunferência na métrica do táxi tem o formato de um quadrado na métrica euclidiana, tal circunferência tem as diagonais paralelas aos eixos coordenados.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo é apresentada a abordagem metodológica qualitativa, que a partir dessa foi possível realizar a produção e a coleta de dados para responder a pergunta diretriz deste trabalho. Também é abordado o contexto no qual foi realizada a coleta de dados, bem como a exposição e os objetivos das atividades propostas para os participantes desta pesquisa.

A metodologia adotada caracteriza-se como qualitativa, pois “a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória, etc.” (Goldenberg, 2004, p. 14). Ao descrever o processo de investigação desse trabalho, retomo a pergunta diretriz: quais articulações são realizadas pelos alunos em um ambiente de Modelagem Matemática que explora a geometria do táxi?

Em vista dessa pergunta norteadora, Bogdan e Biklen (1994, p. 16) apontam que “as questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objetivo de investigar os fenômenos em toda a sua complexidade e em contexto natural”. Para obter a resposta frente à metodologia adotada, como mencionado acima, pôr não lidar com dados puramente quantitativos, mas sim analisar a interação dos alunos e como eles dialogam em prol de encontrar respostas pertinentes a problemática proposta, dando ênfase no processo de obtenção de respostas e não apenas no produto final.

Corroborando a abordagem escolhida, Bogdan e Biklen (1994) afirmam que os dados obtidos numa investigação são ricos em detalhes relativos às pessoas, ao local e às conversas. Assim, destacando o desenvolvimento da proposta aplicada e não apenas nos resultados finais, para Goldenberg (1997) a pesquisa qualitativa é importante para ressaltar dados e características que passam despercebidas em uma pesquisa quantitativa. Diante dessa perspectiva, D’ambrosio (2020) menciona que a pesquisa qualitativa tem como foco entender e interpretar dados e discursos mesmo quando envolvem grupos de participantes. Ou seja, a pesquisa qualitativa tem caráter exploratório, seu foco está no caráter subjetivo do objeto analisado.

3.1 Cenário da pesquisa

A prática desenvolvida nessa pesquisa envolveu a participação dos alunos de uma disciplina focada na área da Educação Matemática do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. As aulas dessa disciplina ocorreram nas segundas-feiras e quartas-feiras. A turma contava com 18 alunos matriculados, mas em nenhuma das três aulas houve a totalidade desses estudantes. Os estudantes dessa disciplina ingressaram no curso entre os anos de 2019 e 2022.

Cada um dos participantes dessa pesquisa foi identificado por um código alfanumérico, para assim estar em conformidade com o termo de consentimento livre e esclarecido (apêndice A). Os dados obtidos para a análise desse trabalho foram adquiridos através das devolutivas das atividades realizadas pelos grupos e a partir, também, da gravação de áudio do diálogo ocorrido entre os membros dos grupos.

A proposta aplicada foi dividida em três partes, cada parte foi aplicada em uma aula. Assim, totalizando 4h20 de prática desenvolvida. Em cada uma das partes há objetivos específicos, os quais serão discutidos ao decorrer da próxima seção.

A primeira parte das atividades (apêndice B) foi aplicada em 26 de julho de 2023 das 10h30 às 12h10. Nesta aula havia 14 alunos presentes. Inicialmente ocorreu a apresentação do professor pesquisador e a explicação do termo de consentimento livre e esclarecido. Posteriormente, foi solicitado que os alunos se dividissem em grupos para a realização das atividades, a organização dos grupos ficou a critério dos próprios estudantes. Não houve nenhum tipo de explanação acerca do conteúdo que seria abordado nas atividades, justamente para que se pudesse analisar o que os alunos desenvolveriam com base em seus conhecimentos prévios.

Para a análise de dados os grupos foram codificados em: grupo A, grupo B, grupo C e grupo D. O grupo A foi constituído pelos alunos A1, A2, A3 e A4. O grupo B foi formado pelos estudantes B1, B2, B3 e B4. No grupo C haviam os alunos C1, C2 e C3. Por fim, o grupo D foi formado pelos alunos D1, D2 e D3. Todo o planejamento da parte I foi concluído nessa primeira aula.

A parte II da proposta (apêndice C) foi aplicada em 31 de julho de 2023 das 10h30 às 12h10. Nesta aula haviam nove alunos presentes. Devido ao número reduzido de estudantes houve uma reconfiguração dos grupos. O grupo A foi formado pelos estudantes A2, A3, A4 e D2. O Grupo B foi constituído pelos alunos B3, B4 e B5 (o qual não estava presente na primeira aula, por isso só está sendo mencionado neste momento). O grupo C foi formado pelos alunos C2 e C3, antes do término da aula os alunos B3 e B5 foram embora, portanto o aluno B4 integrou o grupo C. Toda a parte II foi concluída nessa aula.

Por fim, a parte III foi aplicada em 02 de agosto de 2023 das 11h10 às 12h10. Nesta aula haviam 14 alunos presentes. Como a prática começou a ser desenvolvido a partir da metade para o final da aula, a turma já estava dividida em dois grandes grupos, sendo eles: grupo A composto pelos alunos A1, A3, A4, B2, B3, B3, B5 e o grupo B composto pelos alunos A2, C1, C2, D1, D2, D3 e D4. Essa configuração, a princípio, não interferiu no resultado final dos grupos, pois, mesmo separados em grandes grupos foram perceptíveis as discussões em subgrupos.

3.2 Proposta desenvolvida

Na primeira aula foi abordada a parte I da proposta desenvolvida. A primeira questão entregue para os alunos foi a seguinte[7]:

Parte I: métrica

1. Em grupo, determine dois pontos de interesse dentro de um mesmo bairro na cidade de Porto Alegre/RS. Enuncie o endereço e o que mais achar pertinente dessas duas localidades e, posteriormente, determine qual o comprimento de menor caminho entre elas. Registre detalhadamente como estabeleceu essa distância, bem como quais fatores foram levados em consideração.

O objetivo de propor essa questão como a primeira foi de analisar o que os alunos trariam como resposta sem haver nenhum tipo de discussão prévia acerca da geometria do táxi, ou seja, investigar se os alunos já iriam propor uma nova maneira de determinar a distância entre duas localidades de um bairro, considerando as ruas e as quadras e como iriam fazer isso, ou se ficariam restritos ao conhecimento da geometria plana. Assim, a primeira questão foi planejada para que os alunos já tivessem contato com um assunto da realidade deles, para partirem de uma situação real e não de uma situação artificial.

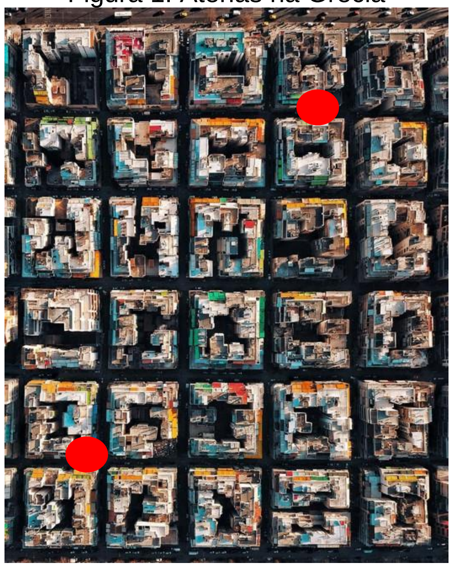
As questões dois ao oito foram entregues em uma única folha, sendo elas:

[7] Para destacar os problemas propostos aos alunos os mesmos constam em fonte de tamanho 10 e espaçamento simples.

Parte I: métrica

2. Qual a distância entre os dois pontos em destaque no mapa abaixo? Descreva como chegou no determinado resultado, assim como o que foi levado em consideração para determiná-lo.

Figura 1: Atenas na Grécia



Fonte: archdaily[8]

3. Qual a distância euclidiana entre esses dois pontos?
4. Considerando que só se pode andar pelas ruas desse mapa, qual a distância entre esses dois pontos?
5. Quais diferenças são estabelecidas entre as respostas das questões 3 e 4?
6. Existe um único trajeto que resulta na distância entre esses pontos? Disserte sobre. Caso haja outros trajetos como podemos determiná-los?
7. Na atividade 1 como determinamos os possíveis trajetos que sempre resultam na distância entre as duas localidades escolhidas?
8. Quais as facilidades/dificuldades encontradas nas atividades 6 e 7? Compare-as e disserte sobre.

O objetivo dessas questões foi de proporcionar um ambiente de discussão acerca da métrica da geometria plana e da geometria do táxi, sendo essa segunda de maneira intuitiva. Assim, proporcionando um confronto entre as métricas euclidianas e do táxi, incentivando que os alunos por si só percebessem que a métrica euclidiana não se enquadra em problemas do cotidiano quando almeja-se ir de uma localidade a outra dentro de uma cidade, já que essa não leva em considerações as ruas e quadras de uma cidade. Deste modo, fazendo com que percebessem a necessidade de uma geometria que atenda melhor os problemas de mapas de cidades reais. Com as questões cinco e seis esperava-se que os alunos trabalhassem com tópicos da área de análise combinatória para determinarem a quantidade de caminhos possíveis entre dois pontos

[8] Disponível em <https://www.archdaily.com.br/br/962040/tipologias-de-quadras-urbanas-diferentes-formas-de-ocupar-a-cidade?ad_medium=gallery>. Acesso em 18.jul.2023.

do mapa, mas sempre considerando a menor distância entre esses pontos. Também a partir dessas questões almejava-se proporcionar uma discussão acerca das limitações que a obtenção da quantidade de caminhos pode ter ao se trabalhar com situações cada vez mais próximas da realidade, ou seja, no mapa de Atenas as quadras são quase equidistantes, assim não havendo problemas para a obtenção da resposta, mas na situação da primeira questão já há o fator que as quadras provavelmente não são equidistantes e assim não havendo uma regularidade entre elas.

Na segunda aula foi abordada a parte II da proposta, sendo ela:

Parte II: trabalhando com aplicativos de mapas e transportes

1. A turma deverá escolher em consenso dois pontos na cidade de Porto Alegre/RS e registrar seus endereços.
2. Cada grupo deverá escolher um dos seguintes aplicativos: Uber, 99 Pop, Waze, Google Maps e Moovit. Registre o aplicativo escolhido.
3. Faça o registro (captura de tela) do trajeto que aparece no aplicativo escolhido, bem como o tempo de deslocamento e demais considerações que o grupo acha que o aplicativo leva em consideração para traçar tal trajeto.
4. Comparando a resposta da atividade 3 com as respostas obtidas na parte I, quais apontamentos podem ser feitos?
5. Momento de socialização dos resultados e discussão.
6. Registre neste espaço as conclusões que o grupo obteve a partir da socialização dos demais grupos. Por exemplo, todos os aplicativos mostraram o mesmo trajeto? Quais semelhanças e diferenças observadas nos aplicativos?
7. De todos os trajetos apresentados há algum que represente o comprimento de menor caminho entre esses dois pontos? Conseguimos obter essa informação, caso afirmativo, como? Caso negativo, por quê?

Comparações e limitações

8. Há elementos que aparecem nos trajetos que a geometria do taxi não leva em consideração? Se sim, cite alguns.
9. Os elementos citados acima são levados em consideração no trajeto determinado pelo aplicativo? Explique.
10. Há semelhanças e diferenças na distância entre os dois pontos no mapa que consta na primeira parte e nos mapas trabalhados na segunda parte? Argumente sobre.
11. O que podemos concluir acerca das observações elencadas na questão anterior?

Na parte II objetiva-se lidar com questões cada vez mais reais e próximas do que os alunos podem presenciar ao se deslocarem em uma cidade. Assim sendo, foi proposto que trabalhassem com aplicativos de mapas e transportes para realizarem comparações e discussão sobre o que deixa de ser coerente e o que modifica ao se distanciarem cada vez mais de uma cidade ideal. A utilização de aplicativos de transporte se tornou um aliado a essa parte, pois se almejava lidar com ferramentas e situações que são do cotidiano dos estudantes para assim se trabalhar com o mais próximo da realidade para abordar a temática da geometria do táxi. Com isso, podendo haver possibilidade de comparações entre o modelo de cidade ideal e de uma cidade real abordada a partir de aplicativos que mostram o mapa real da cidade.

A última parte, exposta a seguir, tem por objetivo abordar uma situação de semirrealidade para trabalhar com a noção de circunferência na geometria do táxi. Esse problema foi extraído de Leivas (2019):

1. Certa região de um bairro é limitada a oeste pelo ponto localizado em B=(-5,0); ao norte pelo ponto C=(0,5), a leste pelo D=(5,0) e ao sul pelo ponto E= (0,-5). Existem construções históricas e árvores milenares localizadas nesses pontos e nos pontos J=(-3,4), K=(-4,3), L=(0,2), M=(-4,2), N=(3,3), O=(0,0), P=(-2,3), Q=(2,2), R=(3,0), S=(-1,3), T=(1,-1), U=(4,-2), V=(-2,-4), X=(-3,1), Z=(-2,2).

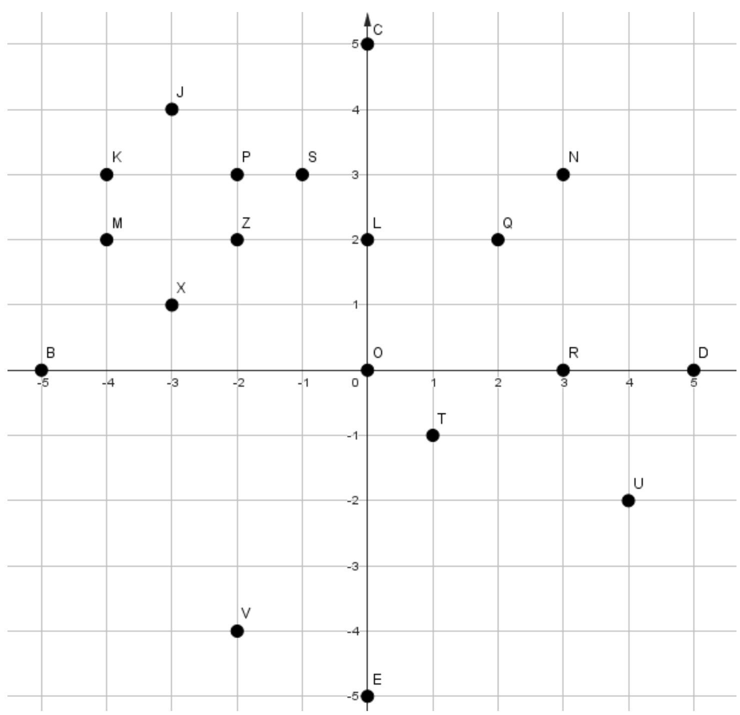
A prefeitura local quer construir um espaço público nesta região no entorno do ponto O. Deseja preservar o patrimônio histórico e o meio ambiente, tendo o menor gasto com desapropriações, cortes das árvores e ocupar o maior espaço possível.

Ajude a resolver o problema. Para tal, faça uso das Geometrias Euclidiana e do Táxi para decidir qual a que oferece maior vantagem. Faça um layout desse espaço. Para isso:

a) Faça uma representação gráfica do problema.
b) Defina o lugar geométrico envolvido.
c) Obtenha as leis matemáticas que definem o lugar geométrico nas duas Geometrias.
d) Descreva verbalmente as duas situações.
e) Argumente sobre sua decisão tomada.

A figura 11 ilustra os pontos mencionados no problema acima.

Figura 11 - Pontos mencionados no problema de Leivas (2019)



Fonte: elabora pelo autor, 2023

A semirrealidade se faz presente nesse problema, pois conforme aponta Skovsmose (2000) é uma realidade construída a fim de proporcionar um suporte para resolver determinado problema, assim a resolução não considera todos os fatores que seriam levados em consideração em uma situação real. Assim sendo, a semirrealidade contribui para que aluno consiga fazer uma relação com um problema da realidade, mas levando em consideração a sua parcialidade. O objetivo desse problema foi de proporcionar um ambiente em que os alunos conseguissem determinar que o formato da circunferência se altera na geometria do táxi, mas que a sua definição se mantém a mesma, conforme foi abordado na seção 2.2.3 do segundo capítulo.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo é realizada a análise dos dados obtidos no decorrer dos três encontros mencionados no capítulo anterior. Alguns diálogos entre os participantes serão transcritos ao longo das sessões subsequentes, tais transcrições serão destacadas no texto com recuo à esquerda. São analisados os dados produzidos pelo grupo A, optou-se por fazer essa escolha para assim poder focar nos detalhes produzidos pelos integrantes desse grupo, bem como, apenas nesse grupo cada um dos alunos entregou sua própria folha com as questões respondidas. Sendo assim, mesmo ocorridas discussões acerca de uma resposta final cada integrante registrou suas próprias impressões, assim, tendo um acervo maior de dados para analisar.

4.1 Primeiro encontro

A primeira parte da proposta (apêndice B) foi dividida em dois momentos, o primeiro acerca da questão um e o segundo acerca das questões dois a oito. Conforme os grupos iam finalizando a primeira atividade o professor pesquisador entregava a segunda folha. Foi decidido agir de tal forma para que as questões dois a oito não interferissem na maneira que os alunos elaborassem a resposta da primeira atividade. Todos os grupos resolveram a primeira atividade utilizando a ferramenta *Google Maps*[9].

O grupo A foi constituído pelos alunos A1, A2, A3 e A4. Para a primeira atividade o grupo escolheu como ponto de partida o Sest Senat (Avenida José Aloísio Filho, nº 695) e como ponto de chegada o CTG Vaqueanos da Tradição (Rua Doutor Caio Brandão de Melo, nº250) ambos no bairro Humaitá, Porto Alegre/RS. Na folha entregue pelo aluno A2 havia apenas essa observação anotada. O bairro escolhido era conhecido por três membros do grupo. O seguinte diálogo ocorreu durante a escolha das localidades mencionadas acima:

> **A4:** A gente tem que usar a geometria analítica? Distância entre dois pontos no plano cartesiano?
> **A3:** Não, acho que não, acho que determinar a menor distância do mapa mesmo.
> [...]
> **A4:** Tem que ver a escala, né?
> (áudio de 26/07/2023)

---

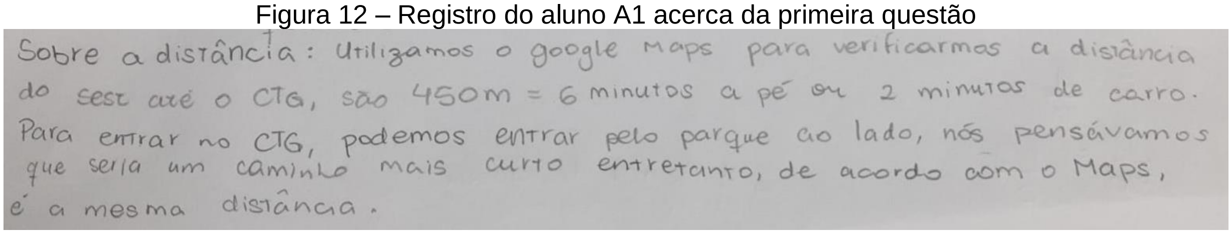
[9] Ferramenta *Global Positioning System (GPS)* de pesquisa e visualização de mapas e imagens de satélite.

A partir disso, o grupo determinou que iria registrar as duas distâncias mencionadas: a distância tendo como referência a geometria euclidiana e a distância real que o *Google Maps* forneceu. Posteriormente, o aluno A4 traz o seguinte ponto para discussão:

> **A4:** Tem que considerar a velocidade? A gente pode fazer uma regra de três considerando a velocidade média de uma caminhada.
> **A2:** Mas isso é o que o Google Maps faz.
> **A3:** Ele [Google Maps] faz uma estimativa da velocidade média.
> **A4:** Pesquisa aí a velocidade média de uma pessoa.
> **A1:** O Google diz que é entre 5km/h e 6,5km/h.
> **A4:** 6km/h vou colocar então.
> [..]
> **A4:** Deu 600 metros.
> (áudio de 26/07/2023)

Esse resultado conflitou com o resultado que o *Google Maps* registrou acerca da distância entre as duas localidades. Contudo, o grupo decidiu não se aprofundar nesse tópico da velocidade média e começou a analisar mais de uma opção de entrada no ponto de destino, mas isso não interferiu na resposta final, conforme consta na figura 12. O grupo também observou que a distância percorrida a pé ou de carro não sofreu alteração, apenas no tempo de deslocamento.

Figura 12 – Registro do aluno A1 acerca da primeira questão


Sobre a distância: Utilizamos o google Maps para verificarmos a distância do sesc até o CTG, são 450m = 6 minutos a pé ou 2 minutos de carro. Para entrar no CTG, podemos entrar pelo parque ao lado, nós pensávamos que seria um caminho mais curto entretanto, de acordo com o Maps, é a mesma distância.

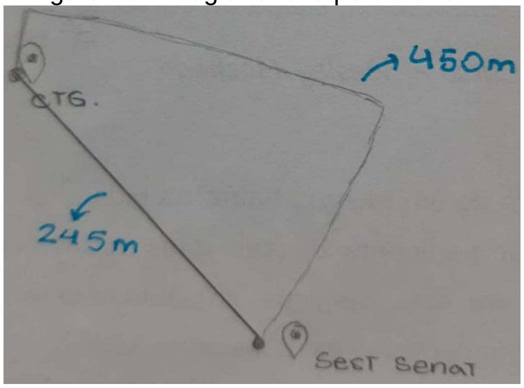
Fonte: coleta de dados, 2023.

A distância determinada inicialmente foi de 450 metros, considerando o que o *Google Maps* informou, ou seja, percorrendo apenas entre as ruas do mapa. Entretanto, o grupo decidiu utilizar a geometria euclidiana para determinar uma nova resposta, conforme consta no diálogo transcrito abaixo.

> **A1:** No caso, a menor distância mesmo vai ser a diagonal, essa reta aqui.
> **A2:** A menor distância.
> **A1:** A menor distância pra gente ir até lá é essa aqui.
> [...]
> **A3:** A distância até lá é a que aparece no mapa.
> **A2:** A menor distância é a diagonal.
> (áudio de 26/07/2023)

A figura 13 ilustra os apontamentos realizados no diálogo acima, o grupo determinou a distância de 245 metros utilizando a métrica euclidiana.

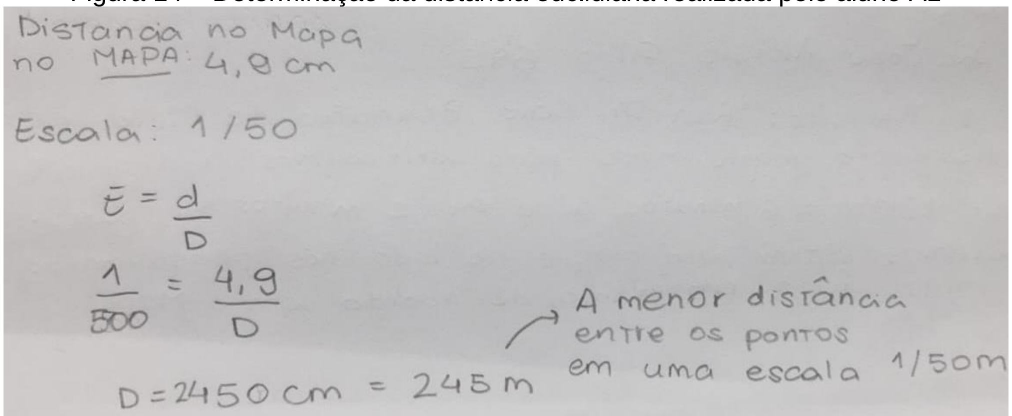
Figura 13 – Registro feito pelo aluno A1



Fonte: coleta de dados, 2023.

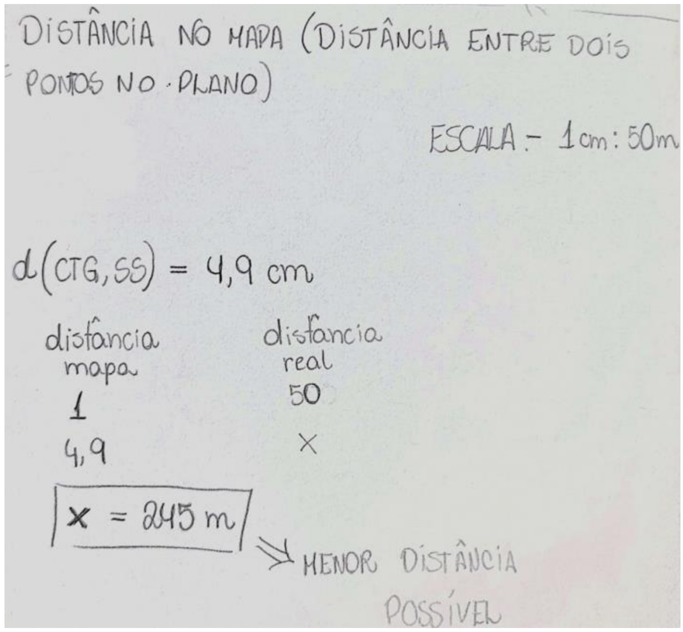
O grupo A determinou essa nova distância de 245 metros de duas maneiras diferentes, conforme consta nas figuras 14 e 15, ambas maneiras utilizando a escala que o *Google Maps* forneceu.

Figura 14 – Determinação da distância euclidiana realizada pelo aluno A1



Fonte: coleta de dados, 2023.

Figura 15 – Determinação da distância euclidiana realizada pelo aluno A4



Fonte: coleta de dados, 2023.

Pode-se observar que o grupo conseguiu identificar uma métrica diferente da métrica euclidiana com o auxílio do *Google Maps*, já que determinaram duas menores distâncias entre dois pontos, assim, resultando em duas respostas para a questão. Inicialmente, determinaram a distância de 450 metros, com base, empiricamente na métrica do táxi e, posteriormente, determinaram a distância de 225 metros com base na métrica euclidiana.

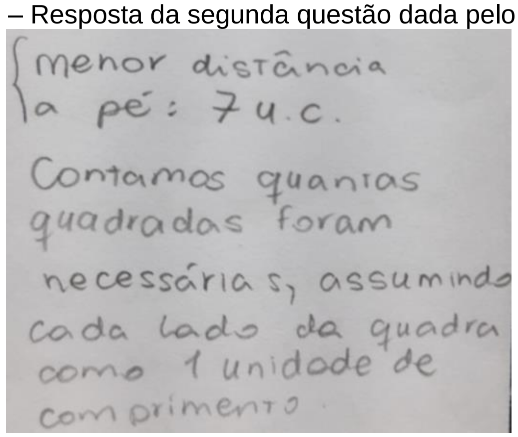
Logo, o grupo A inicialmente já conseguiu fazer essa comparação entre as duas métricas, o que pode ser constatado no primeiro e no terceiro diálogo transcritos anteriormente. Mesmo que não apresentados formalmente à métrica do táxi, considero que a união de uma questão para determinar a menor distância entre dois pontos e a utilização de uma ferramenta que aborda a utilização de mapas foi um ponto-chave para haver essa comparação de maneira intuitiva e natural.

Na folha contendo as perguntas dois a oito, novamente, cada integrante fez a sua própria devolutiva. Ao iniciar a segunda questão o grupo assumiu que cada lado dos quarteirões equivalia a uma unidade de comprimento, o grupo também havia sugerido pesquisar o mapa apresentado na folha no *Google Maps* e fazer da mesma maneira que na questão anterior, mas resolveram não adotar essa abordagem. No diálogo transcrito abaixo, pode-se observar novamente um confronto em como determinar a menor distância entre dois pontos contidos em um mapa.

> **A1**: Vocês querem fazer a menor distância como?
> **A3:** A menor distância seria cinco?
> **A2:** Eu acho que a menor distância seria o caminho.
> **A4:** Depois é que ele pede pra calcular a distância euclidiana.
> [...]
> **A3:** Se tu andar assim vai dar sete.
> **A4:** Eu acho que só não dá sete se tu der uma enrolada no caminho.
> **A3:** Só se desse uma voltar maior.
> (áudio de 26/07/2023)

O diálogo acima evidencia o confronto em determinar em um primeiro instante a menor distância entre duas localidades em um mapa. A partir desse diálogo e na produção por escrito da resposta final o grupo conseguiu atingir o objetivo que era considerar intuitivamente a geometria do táxi, descrevendo que a distância obtida é a partir do ponto de vista de um pedestre, conforme consta na figura 16 a resposta do aluno A1.

Figura 16 – Resposta da segunda questão dada pelo aluno A1



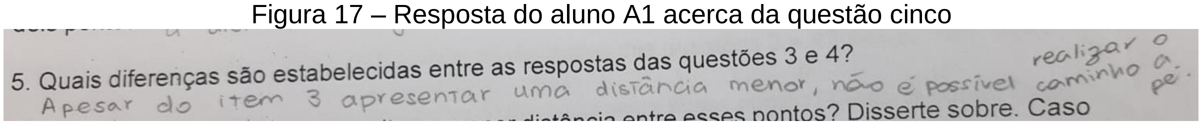
Fonte: coleta de dados, 2023.

O aluno A2 registra em sua folha que “se saíssemos do ponto A para a direita 3 unidades, virasse para a esquerda e andasse mais 4 unidades seria o trajeto mais curto”. O aluno A3 também fez a seguinte registro em sua folha “vários trajetos resultam em 7 considerando o trajeto a pé”. Pode-se observar que ao anotarem isso, os alunos A2 e A3 estão tomando uma decisão do ponto de vista de um pedestre, assim fazendo relação direta com uma situação do cotidiano.

Na questão três, o grupo registrou que a distância euclidiana era cinco unidades de comprimento, definindo essa resposta a partir do teorema de Pitágoras, e na questão quatro a distância foi igual a sete unidades de comprimento. Os alunos concluíram que a resposta obtida na questão quatro foi a mesma que na encontrada na questão dois.

A partir das respostas das questões três e quatro o grupo conseguiu fazer a comparação que se almejava na questão cinco, registrando que a métrica euclidiana é menor que a métrica do táxi. Entretanto a distância euclidiana não se aplica na situação por considerar o percurso realizado por um pedestre, conforme consta na figura 17.

Figura 17 – Resposta do aluno A1 acerca da questão cinco

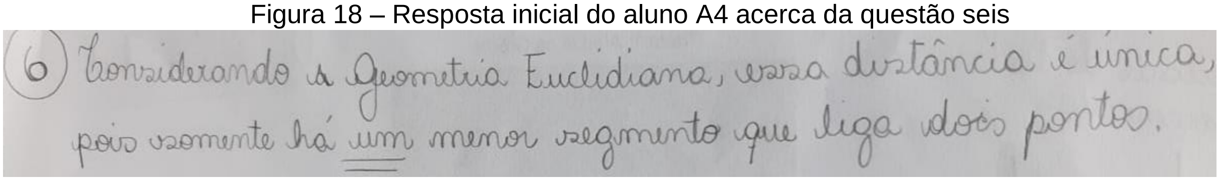

5. Quais diferenças são estabelecidas entre as respostas das questões 3 e 4?
Apesar do item 3 apresentar uma distância menor, não é possível realizar o caminho a pé.

Fonte: coleta de dados, 2023.

Corroborando com a resposta acima o aluno A4 ainda complementa em sua devolutiva que “a distância percorrida no item 3 não pode ser realizada por cima das edificações, então essa possibilidade é descartada no item 4. No entanto ambas são medidas em u.c (unidades de comprimento)”. Essa questão foi respondida de forma mais individual por cada aluno em sua própria folha, assim não havendo muitas discussões acerca dela.

Na questão seis o grupo inicialmente afirma que na geometria euclidiana existe apenas uma maneira de determinar a distância entre os dois pontos, conforme consta na figura 18.

Figura 18 – Resposta inicial do aluno A4 acerca da questão seis


6) Considerando a Geometria Euclidiana, essa distância é única, pois somente há um menor segmento que liga dois pontos.

Fonte: coleta de dados, 2023.

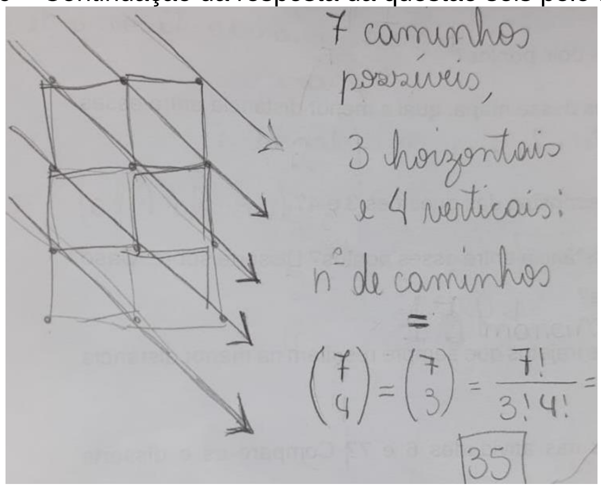
Logo em seguida, o grupo A conseguiu associar os conhecimentos de análise combinatória ao problema proposto, devido os alunos A1 e A4 já terem cursado a disciplina de combinatória I[10]. Abaixo consta a transcrição da discussão inicial acerca do problema:

> **A1:** Tem que fazer combinação né, a seis, pra gente achar quantas possibilidades dá pra ir.
> **A4:** Boa.
> **A1:** De três e quatro.
> [...]
> **A3:** Mas tu faz em linha horizontal e vertical? Se fizer em escada não necessariamente é três e quatro né?
> [...]
> **A1:** Em escada dá 1, 2, 3, 4, 1, 2 e 3. Então sempre vai ser três e quatro, só que ou em horizontal ou em vertical. Por isso a gente faz combinação. Pode ser cima, cima, cima, cima ou cima, lado, cima, lado, cima, lado, cima.
> **A2:** A gente sempre vai ter que andar quatro unidades pra cima e três unidades pro lado então.
> **A3:** Isso.
> **A4:** Eu não lembro como funciona isso.
> **A3:** Vou pesquisar.
> **A1:** Eu lembro que envolvia combinatória, mas não lembro como fazia.
> **A4:** Tipo aqui pra sair desse ponto eu tenho duas possiblidades, posso ir pra esse ou pra esse, daí pra esse eu tenho duas possibilidades também e assim vai.
> **A1:** Aqui pra cá vai ter sempre quatro possiblidades pra cima e três possiblidades pro lado.
> **A3:** Então não altera.
> **A1:** Se não altera então é combinação.
> [...]
> **A1:** É uma combinação de três e quatro, por que a ordem não importa.
> (áudio de 26/07/2023)

Após essa discussão, os alunos fizeram os registros que constam nas figuras 19 e 20. Pode-se perceber nessas figuras que o grupo novamente deixa duas respostas, uma fazendo referência a geometria euclidiana e a outra fazendo referência a geometria do táxi. Assim sendo, o grupo conseguiu aplicar os conhecimentos de análise combinatória e determinam que há 35 opções de caminhos que determinam a menor distância entre os dois pontos.

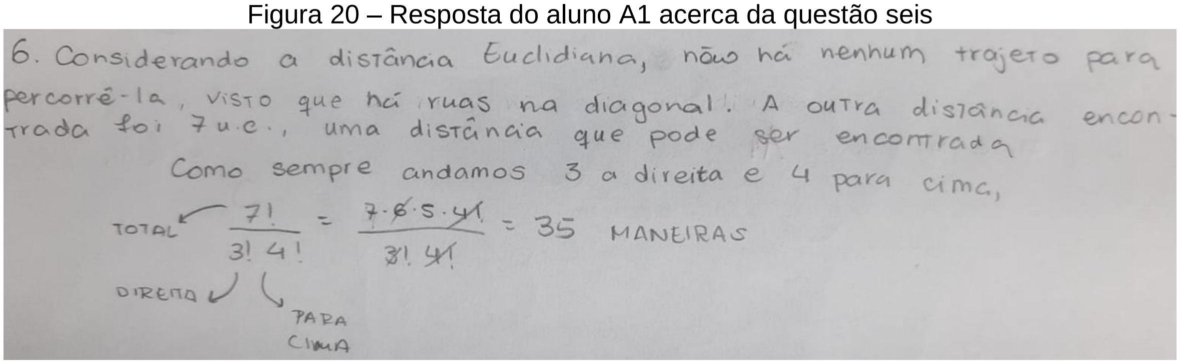
[10] Disciplina obrigatória da quarta etapa do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Nessa disciplina estuda-se métodos de contagem.

Figura 19 – Continuação da resposta da questão seis pelo aluno A4



Fonte: coleta de dados, 2023.

Figura 20 – Resposta do aluno A1 acerca da questão seis



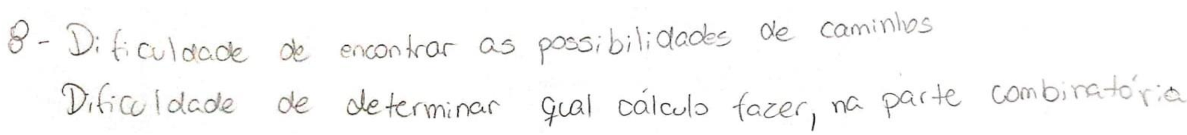
Fonte: coleta de dados, 2023.

Sobre a questão seis conclui-se que o grupo A conseguiu atingir o objetivo estabelecido. Os alunos A1 e A4 tiveram papel fundamental para que o grupo conseguisse realizar a discussão acerca do tópico de combinação, explicando para os dois outros colegas como se poderia aplicar a análise combinatória na problemática de determinar menores distâncias em um mapa.

Na questão sete, que fazia referência as localidades do Sest Senat e do CTG Vaqueanos da Tradição o objetivo era que os alunos discorressem se seria possível utilizar a análise combinatória para determinar os trajetos possíveis. Entretanto, em vez disso os integrantes do grupo A mencionaram como obtiveram as respostas, descrevendo que utilizaram o *Google Maps* e a noção de escala para determinar a distância euclidiana. A partir da análise do áudio pode-se perceber que o grupo não cogitou a aplicação da analise combinatória, isso pode ser pelo fato de que os dois pontos escolhidos eram bem próximos em quadras adjacentes.

Na resposta da questão oito não houve grandes discussões no grupo, os alunos responderam de forma mais individual a questão. Conforme observamos na figura 21 a dificuldade do aluno A2 foi acerca da análise combinatória, o aluno em questão não havia cursado a disciplina de combinatória ainda.

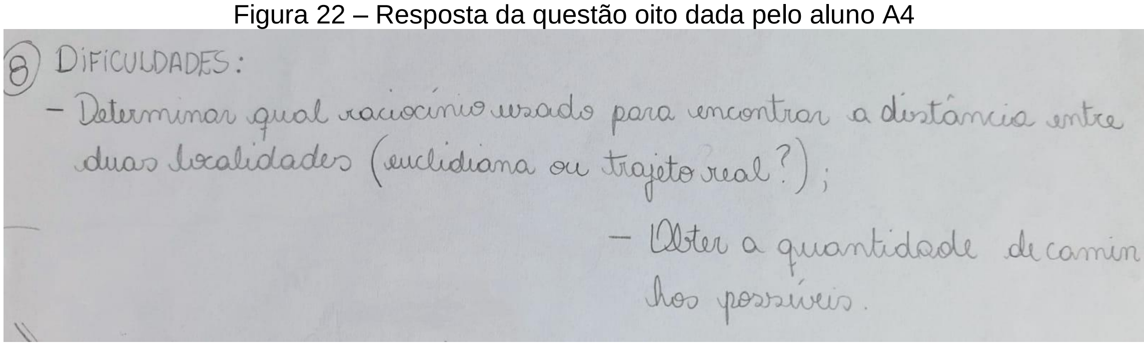
Figura 21 – Resposta da questão oito dada pelo aluno A2



Fonte: coleta de dados, 2023.

Para o aluno A4 a dificuldade centrou-se em que tipo de raciocínio utilizar para obter a menor distância entre dois pontos, conforme consta na figura 22.

Figura 22 – Resposta da questão oito dada pelo aluno A4



Fonte: coleta de dados, 2023.

O grupo A conseguiu atingir os objetivos que foram traçados para esse encontro, principalmente por realizarem discussões sobre comparar e confrontar maneiras diferentes em determinar menor distância. A reflexão por parte do grupo de como obter a menor distância entre dois pontos em um mapa permeou toda a aula. Mesmo que de maneira não formal o grupo teve contato com uma métrica diferente do habitual.

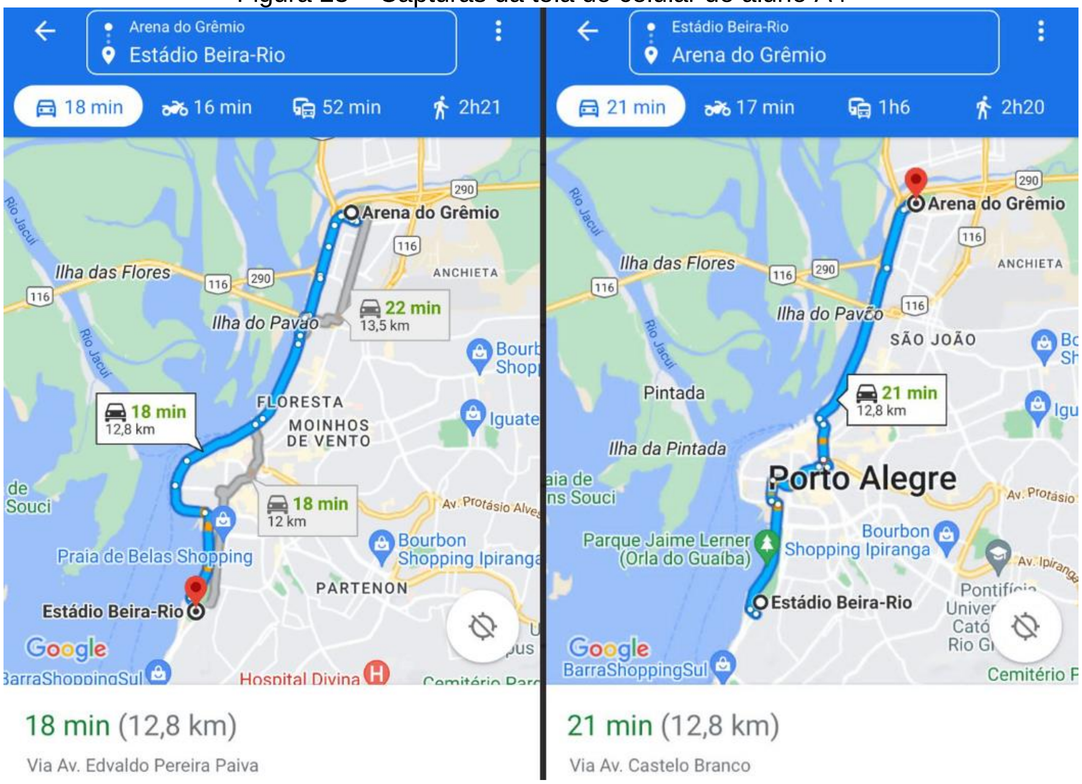
4.2 Segundo encontro

O segundo encontro foi destinado à aplicação da segunda parte da proposta (apêndice C). Como a turma já estava realizando confrontos entre a métrica euclidiana e a métrica do táxi, mas sem haver a formalização dessa segunda, então, antes de iniciar a aplicação da parte II, o professor pesquisador expôs no quadro brevemente as métricas euclidiana e do táxi, apresentando as figuras 5 e 8, que constam na sessão 2.2.1, para ilustrar aos alunos que o intuito da prática era abordar essas duas geometrias. Esse momento foi breve e sem muitos detalhes para não induzir as discussões dos grupos. Os alunos não fizeram nenhum questionamento acerca do que foi exposto. Optou-se por uma suscinta exposição, pois também haviam alunos presentes na aula que estavam ausentes na aula anterior.

Assim como no encontro anterior, cada membro do grupo A entregou sua própria folha contendo anotações e conforme mencionado no capítulo da metodologia os alunos A2, A3, A4 e D2 compuseram o grupo A nessa aula. Como resposta da primeira questão a turma escolheu como ponto de partida o estádio José Pinheiro Borba, conhecido popularmente como estádio Beira Rio (Av. Padre Cacique. nº 891 – Praia de Belas) e como ponto de chegada o estádio Arena do Grêmio (Av. Padre Leopoldo Brentano, nº 110 – Humaitá). Na segunda questão o grupo A escolheu utilizar a ferramenta *Google Maps* para realizar a atividade subsequente.

A partir da escuta da gravação de áudio percebeu-se que inicialmente o grupo discutiu se havia diferença de caminho, distância e tempo de deslocamento se alterasse o ponto de partida pelo ponto de chegada. O grupo chegou à conclusão com o auxílio do *Google Maps* que há diferença em relação ao tempo e ao caminho, mas não há diferença em relação a distância, a figura 23 é a união das capturas de tela do celular do aluno A4 em que constam essas diferenças e semelhanças. O grupo B escolheu o aplicativo *Waze* e o grupo C escolheu o aplicativo *Moovit*.

Figura 23 – Capturas da tela do celular do aluno A4



Fonte: Dados obtidos pelo grupo A, ferramenta *google maps*, 2023.

Acerca da terceira questão o grupo registrou o tempo e a distância que apareceram na figura 23, bem como que o tempo e o percurso mudam se é alterado o ponto de partida pelo ponto de chegada.

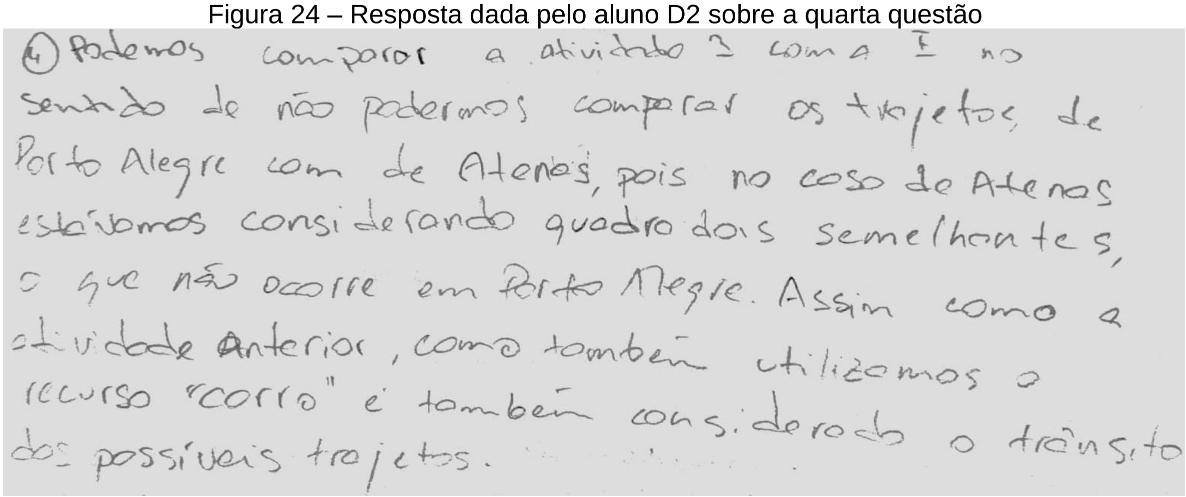
Na quarta questão o grupo questionou o professor pesquisador sobre o que poderiam inserir como resposta, pedindo auxílio de qual direcionamento ter na questão, como consta na transcrição abaixo. Será utilizada a abreviação PP para indicar a fala do professor pesquisador.

> **PP:** Pensem na atividade da aula anterior que vocês escolheram as localidades para determinar a menor distância e a do mapa de Atenas, tipo, um é uma situação idealizada e o outro é o que realmente acontece na vida real.
> **A4:** Ah, verdade!
> **PP:** Essas comparações, sabe?!
> **D2:** Eu não sei o que vocês coloram em uma das últimas resposta da aula passada, vocês eram tudo do mesmo grupo, né?
> **A3:** Sim.
> **D2:** Tipo, a gente colocou em uma das que falava das dificuldade, a gente [fazendo referência ao grupo que D2 fazia parte no primeiro encontro] colocou que em si não tinha achado dificuldade, mas a gente colocou que se deve considerar que tipo comparando quando a gente pegou os pontos que queríamos e quando pegamos os pontos no mapa de Atenas, tipo, as coisas que a gente

considerou no trajeto de Atenas não podem ser consideradas no trajeto em Porto Alegre, principalmente, sei lá, a gente estava contando por quadra, imagino que vocês também.
A4: Sim, sim.
D2: Tipo, que dava cinco quadras e sete quadras, tipo, a gente não pode ter a mesma métrica se a gente for falar em três quadras em Porto Alegre, pode ser três quadras de 100 metros e outras de 500 metros.
A4: E nem ser em linha reta também, né.
[...]
A2: Agora é muito mais real também, né.
[...]
A4: As quadras não são perfeitas igual na atividade da aula passada.
(áudio de 31/07/2023)

A partir desse diálogo o grupo sintetizou em suas folhas que não é possível replicar o que foi feito na parte I, especificamente na questão que aborda a distância entre dois pontos no mapa de Atenas, conforme consta na figura 24 a resposta do aluno D2.

Figura 24 – Resposta dada pelo aluno D2 sobre a quarta questão

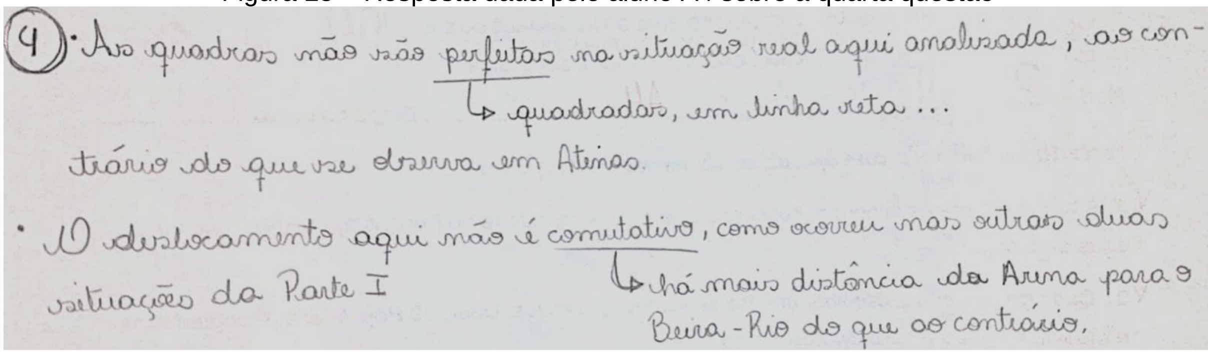


(4) Podemos comparar a atividade 3 com a I no
sentido de não podermos comparar os trajetos de
Porto Alegre com de Atenas, pois no caso de Atenas
estávamos considerando quadrados semelhantes,
o que não ocorre em Porto Alegre. Assim como a
atividade anterior, como também utilizamos o
recurso "carro" e também considerado o trânsito
dos possíveis trajetos.

Fonte: coleta de dados, 2023.

Já o aluno A4 faz menção ao conceito de comutatividade, conforme ilustra a figura 25, para explicar as diferenças de trajetos ao trocar o ponto de partida pelo ponto de chegada na primeira questão.

Figura 25 – Resposta dada pelo aluno A4 sobre a quarta questão


4 • As quadras não são perfeitas na situação real aqui analisada, ao con-
quadradas, em linha reta ...
trário do que se observa em Atenas.
• O deslocamento aqui não é comutativo, como ocorreu nas outras duas
situações da Parte I
há mais distância da Arena para o
Beira-Rio do que ao contrário.

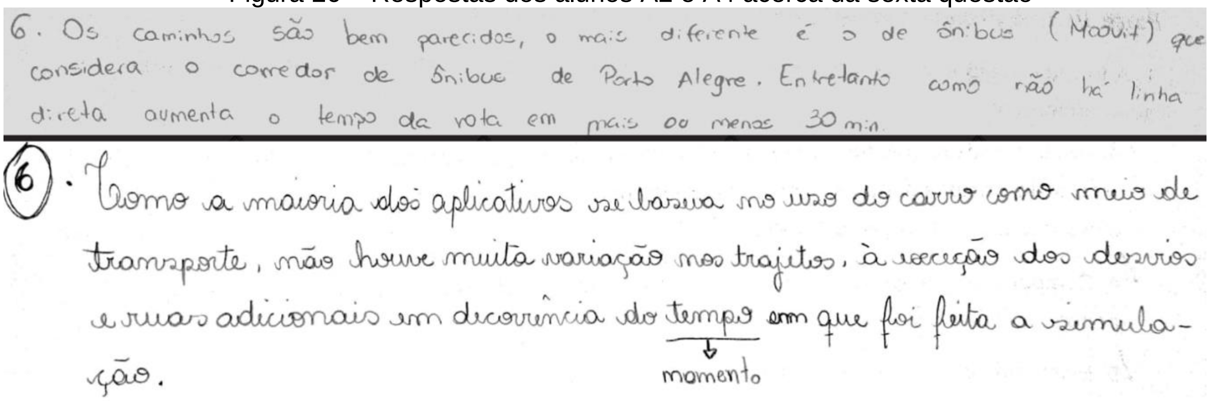
Fonte: coleta de dados, 2023.

O item cinco foi o momento em que cada grupo compartilhou com a turma as respostas obtidas nos aplicativos, houveram apontamentos sobre o que cada aplicativo levou em consideração para traçar cada trajeto. Cada grupo mostrou a captura de tela do caminho determinado pelo aplicativo, foi utilizado o projetor para reproduzir as imagens. O grupo A apresentou os dois trajetos determinados ao trocarem o ponto de partida pelo ponto de chegada. Na transcrição do áudio abaixo consta uma parte da explanação do grupo.

> **A3:** Outra coisa que nos chamou a atenção é que ele [*Google Maps*] nos pede pra dizer exatamente da onde estamos saindo, de qual portão, de qual estacionamento.
> **PP:** Os dois vocês determinaram pelo mesmo portão ou estacionamento?
> **D2:** Sim.
> **A3:** No Beira Rio pediu de qual estacionamento e na Arena qual portão estava saindo.
> (áudio de 31/07/2023)

A partir desse momento da socialização dos resultados, o grupo A respondeu na questão seis que, de modo geral, os aplicativos mostram caminhos bastante similares, mas com algumas diferenças pertinentes principalmente no aplicativo *Moovit* que é referente a locomoção de ônibus e não de carro, a qual os outros aplicativos levam em consideração, na figura 26 há o compilado das respostas do aluno A2 e A4, respectivamente. Os demais alunos forneceram respostas similares a essas duas.

Figura 26 – Respostas dos alunos A2 e A4 acerca da sexta questão


6. Os caminhos são bem parecidos, o mais diferente é o de ônibus (Moovit) que considera o corredor de ônibus de Porto Alegre. Entretanto como não há linha direta aumenta o tempo da rota em mais ou menos 30 min.

6. Como a maioria dos aplicativos se baseia no uso do carro como meio de transporte, não houve muita variação nos trajetos, à exceção dos desvios e ruas adicionais em decorrência do tempo em que foi feita a simulação.
momento

Fonte: coleta de dados, 2023.

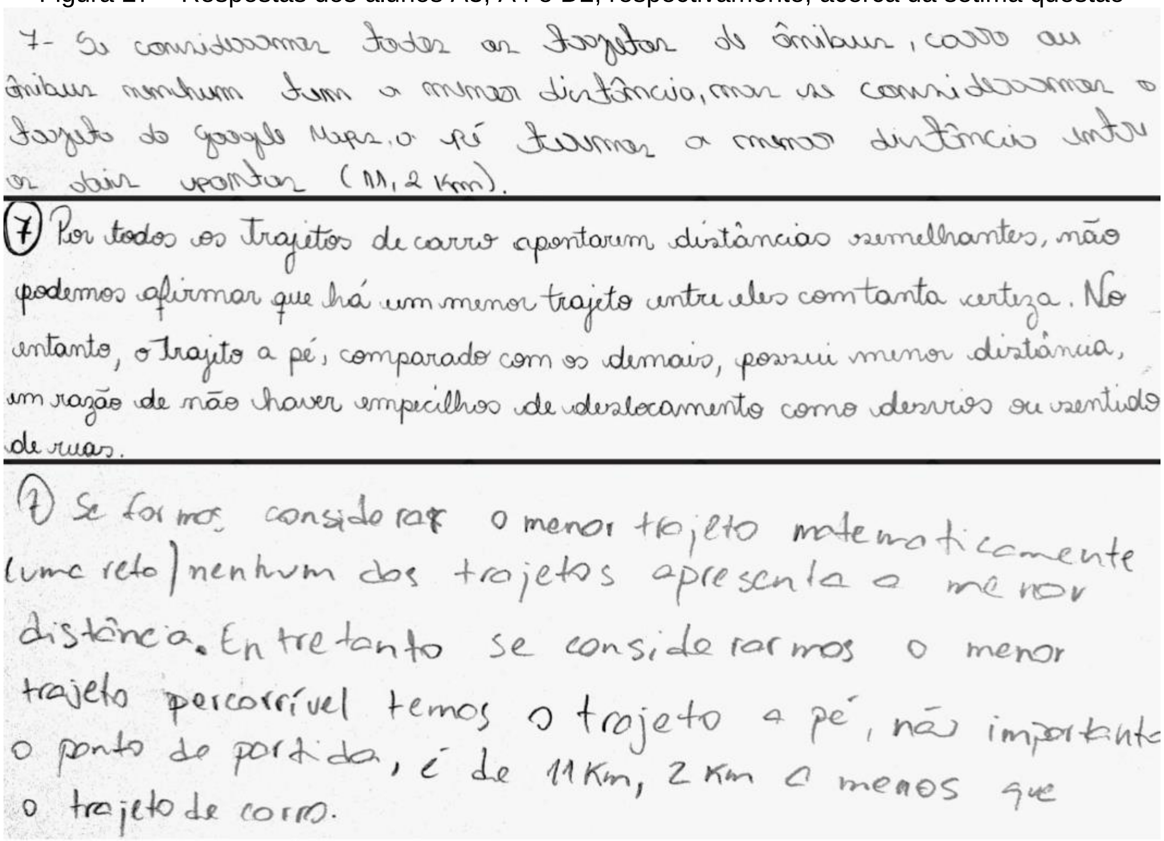
Ao elaborar a resposta acima o grupo teve o seguinte diálogo:

> **D2:** Comentar que a maioria deu praticamente o mesmo trajeto com pequenas mudanças, que o que mais foi diferente foi o do ônibus.
> **A4:** Acho que por isso né, por causa do meio de transporte.
> **D2:** Até se a gente for olhar o trajeto que ele dá a pé, é um trajeto muito mais reto, ele tendia muito mais a ser uma reta, pra ser realmente o menor trajeto, né. (áudio de 31/07/2023)

Na última fala do aluno D2 pode-se perceber que o aluno entende que a menor distância entre dois pontos é a euclidiana, no trecho “...pra ser realmente o menor trajeto” fica explícito que o aluno ainda não concretizou internamente com êxito a nova métrica que está sendo abordada.

Na sétima questão pode-se observar que o grupo ainda não interpreta a métrica da geometria do táxi como uma nova maneira de determinar a menor distância entre dois pontos, a figura 27 traz o compilado das respostas de três integrantes do grupo.

Figura 27 – Respostas dos alunos A3, A4 e D2, respectivamente, acerca da sétima questão



7- Se considerarmos todos os trajetos do ônibus, carro ou ônibus nenhum tem a menor distância, mas se considerarmos o trajeto do google Maps, o pé forma a menor distância entre os dois pontos (11,2 Km).

(7) Por todos os trajetos de carro apontarem distâncias semelhantes, não podemos afirmar que há um menor trajeto entre eles com tanta certeza. No entanto, o trajeto a pé, comparado com os demais, possui menor distância, em razão de não haver empecilhos de deslocamento como desvios ou sentido de ruas.

(7) Se formos considerar o menor trajeto matematicamente (uma reta) nenhum dos trajetos apresenta a menor distância. Entretanto se considerarmos o menor trajeto percorrível temos o trajeto a pé, não importando o ponto de partida, é de 11Km, 2 Km a menos que o trajeto de carro.

Fonte: coleta de dados, 2023.

Ao discutir a questão sete o aluno D2 deixa explícito que as distância estabelecidas nos aplicativos não são matemáticamente aceitas, conforme a transcrição abaixo:

> D2: Se a gente for considerar a menor distância mesmo nenhuma delas representa, mas a menor distância percorrível a gente pode considerar a pé. (áudio de 31/07/2023)

As últimas questões foram respondidas de forma mais individual pelos integrantes do grupo A, deste modo, não houve tantas discussões entre os alunos. Em um primeiro instante, o grupo A não compreendeu o que a questão oito demandava, todavia, após uma conversa entre os integrantes, entraram em acordo de como prosseguir com a resolução da mesma. O aluno A2 anotou em sua folha que “sim, principalmente a irregularidade das ruas e quadras, pois as mesmas não são simétricas”, o aluno A3 escreveu que “não leva em consideração as irregularidades das quadras e ruas, além de não poder andar em curvas”. Os demais integrantes do grupo forneceram respostas similares às mencionadas acima.

A partir dessas respostas percebe-se que o grupo traz o entendimento que a geometria do táxi é aplicável num contexto muito restrito quando apresenta quadras e ruas simétricas, ocasionando que a cidade seja simétrica e que não é aplicável em situações como as abordadas nessa parte II da proposta.

Na questão nove que faz referência a contrapor elementos na geometria do táxi e nos aplicativos utilizados o aluno A3 menciona que “não, por que o aplicativo leva em consideração a situação real”, o aluno A4 escreve que “não, pois as ruas de Porto Alegre na vida real não são definidas por retas e os quarteirões por retângulos”. A partir dessas respostas pode-se intuir que os alunos têm um modelo de cidade ideal, trabalhado a partir do mapa de uma certa região de Atenas e um modelo de cidade real que foi o objeto de trabalho dessa parte da prática.

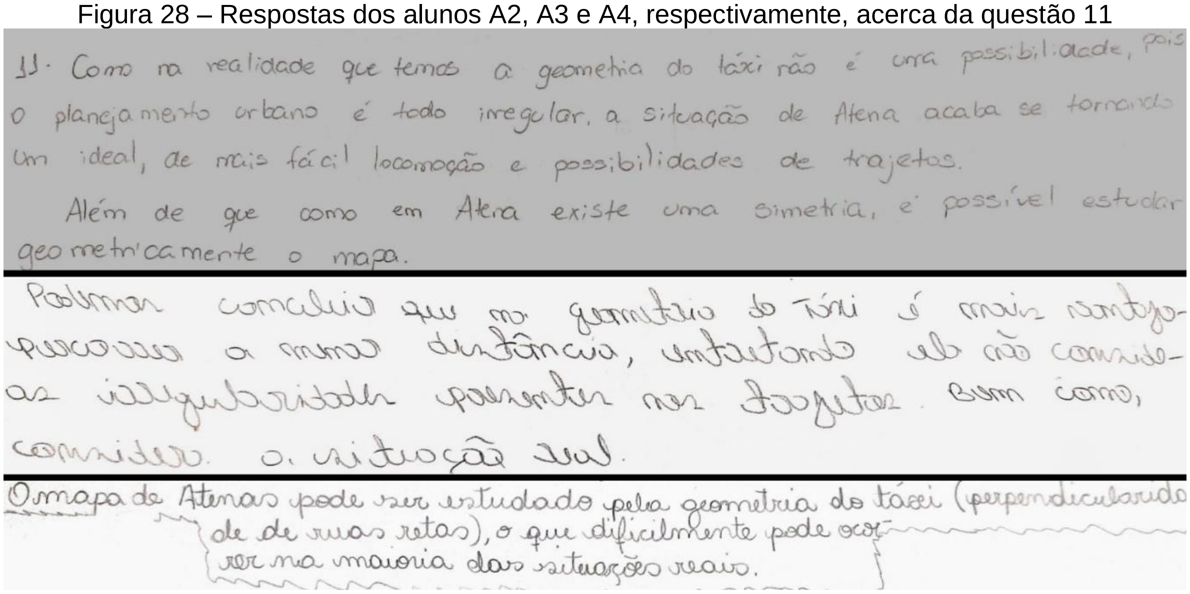
Acerca da questão dez o aluno D2 faz os seguintes apontamentos para o grupo sobre o que pode ser escrito na resposta da atividade:

> **D2:** Na atividade da aula passada, quando a gente considerou os trajetos de Porto Alegre são semelhantes os de agora, que estamos usando situações reais, trajetos possíveis, não considerando realmente a menor distância entre os dois lugares, mas sim como se pode fazer a menor distância na vida real.
> [...]
> **D2:** Então, tipo, a gente pode comparar com a situação real da semana passada, há muitas semelhanças no sentido dos tipos de trajetos que se faz, mas tipo, não dá pra comparar os trajetos de Atenas com os trajetos de agora.
> [...]
> **A2:** Nas diferenças deu o que mesmo?
> **D2:** Se a gente for pegar a parte I, a parte de Atenas, a gente entra na idealização do que daria para se aplicar.
> (áudio de 31/07/2023)

O grupo A consegue trazer termos chaves para realizar o confronto entre um modelo real e um modelo idealizado de cidade, sendo eles “situações reais”, “trajetos possíveis” e “idealização”, termos que o aluno D2 menciona em sua fala. O aluno A2 escreve em sua folha que “em relação ao mapa de Atenas é difícil comparar, pois é uma situação idealizada, e desconsidera o planejamento urbano existente em Porto Alegre”. O aluno A4 menciona que “o mapa de Atenas, por ser bem organizado em ruas retas, permite a realização de vários trajetos com a mesma distância percorrida”. Novamente, percebe-se o confronto entre os dois modelos de cidade, assim mais uma vez corroborando com os objetivos traçados para a prática.

A última questão propõe realizar um fechamento para as ideias discutidas até o momento, considerando os aspectos trabalhos nessa segunda parte. Na figura 28 consta as respostas dos alunos A2, A3 e A4. Pode-se observar que há uma concordância que a geometria do táxi é aplicável em situações idealizadas e não em situações reais, por exemplo, em situações envolvendo mapas de Porto Alegre/RS.

Figura 28 – Respostas dos alunos A2, A3 e A4, respectivamente, acerca da questão 11


11. Como na realidade que temos a geometria do táxi não é uma possibilidade, pois o planejamento urbano é todo irregular, a situação de Atena acaba se tornando um ideal, de mais fácil locomoção e possibilidades de trajetos.

Além de que como em Atena existe uma simetria, é possível estudar geometricamente o mapa.

Podemos concluir que na geometria do Táxi é mais vantajoso percorrer a mesma distância, entretanto ela não considera as irregularidades presentes nos trajetos. Bem como, considero a situação real.

O mapa de Atenas pode ser estudado pela geometria do táxi (perpendicularidade de ruas retas), o que dificilmente pode ocorrer na maioria das situações reais.

Fonte: coleta de dados, 2023.

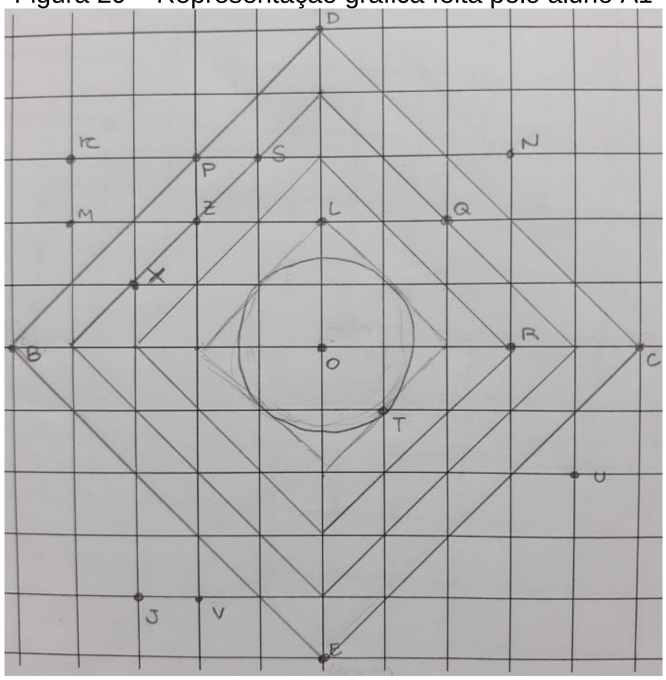
4.3 Terceiro encontro

Nesta aula foi aplicada a parte III da proposta (apêndice D). Dos sete alunos que constituíram o grupo A, apenas os alunos A1, A3, A4, B2 e B5 entregaram algum tipo de devolutiva por escrito.

O objetivo do terceiro encontro foi promover um ambiente que incentivasse a discussão e a descoberta do formato da circunferência na geometria do táxi. Observou-se que nesse encontro os alunos tiveram bastante dificuldade de compreender o que o problema extraído de Leivas (2019) estava solicitando. Dúvidas acerca de como determinar o espaço geométrico foi um consenso entre os dois grupos. Alguns alunos também questionaram se era para considerar os pontos dentro ou fora do espaço geométrico determinado para tomar a decisão solicitada no problema. Os estudantes também apresentaram dificuldade em abstrair a definição de circunferência para assim conseguir assimilar um novo formato para a circunferência na geometria do táxi.

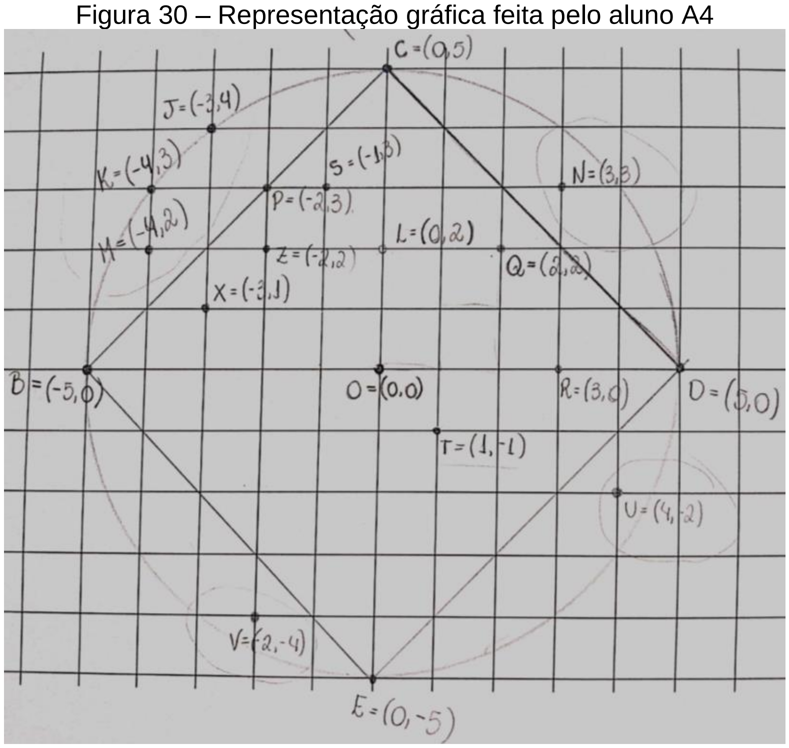
No primeiro item do problema, pode-se destacar as representações feitas pelos alunos A1 e A4, conforme constam as figuras 29 e 30.

Figura 29 – Representação gráfica feita pelo aluno A1



Fonte: Coleta de dados, 2023

Figura 30 – Representação gráfica feita pelo aluno A4



Fonte: Coleta de dados, 2023

A transcrição abaixo elucida o diálogo do aluno B5 com o professor pesquisador acerca do primeiro item. No momento do diálogo o aluno havia traçado apenas a circunferência na métrica do táxi, mas ainda não compreendendo que esse formato de quadrado representa a circunferência na geometria do táxi. Após o diálogo o aluno B5 conseguiu realizar a mesma representação gráfica que o aluno A4.

> **B5:** Ligando esses quatro pontos vou ter um quadrado.
> **PP:** E será esse quadrado tem o nome de quadrado na geometria do táxi? Pensa na definição de uma circunferência.
> **B5:** Todos os pontos que estão sobre a circunferência estão a uma mesma distância do centro, já nesse quadrado só os pontos dos vértices têm a mesma distância do centro os outros tem distâncias diferentes.
> **A4:** Segundo a geometria euclidiana.
> **PP:** Isso mesmo.
> **PP:** Lembra que na geometria do táxi não dá pra fazer uma linha reta assim, tem que seguir essas linhas quebradas aqui.
> (áudio de 02/08/2023)

Observa-se, a partir das figuras acima, que houveram maneiras diferentes de realizar a construção. O aluno A4 complementa a sua representação registrando na folha que “desenho me influenciou a desconsiderar J, K, M, N, V e U”, assim como o aluno A2 complementa a representação escrevendo “maior área selecionada com menos pontos” e “o ponto O tem que estar incluso e de modo equidistante”.

Em outro momento o aluno A4 inicia a seguinte discussão no grupo:

> **A4:** Mas precisa ter uma forma específica? Precisa ser um quadrado?
> [..]
> **B5:** Eu acho que essa é a ideia, a gente tem que definir, tem que pensar as regiões que cabem esses pontos e que daria menos custos com desapropriações e ocupando o maior espaço possível.
> **A4:** Ou seja, as regiões não podem conter esses pontos, né.
> **PP:** Tem que conter os pontos, não todos, mas o maior número possível de pontos.
> **B5:** Tem que conter.
> **A1:** Como é que é?
> **B5:** Tudo o que tiver fora, por exemplo, se a gente escolher esse quadrado desse jeito assim, que a gente fez no método tradicional esses pontos aqui ficaram fora, então teoricamente essas árvores vão ser arrancadas e ele não quer que sejam arrancadas.
> **A1:** Tem que preservar.
> [...]
> **B5:** Vou dar o exemplo tipo assim, é como se ele pegasse a redenção e cercasse com aquelas fitas de cercar as coisas e cercar toda a redenção, então todas as árvores estão dentro.
> **PP:** Daí tudo vai ser arrancado.

B5: Isso, daí tudo seria arrancado, tipo se tiver uma árvore que tiver fora daí teoricamente não seria arrancada, esse seria a ideia.
PP: Ser arrancadas as árvores vai ser, mas agora de qual maneira vai ser arrancada o menor número possível de árvores?
B4: A gente tem que achar uma forma de englobar o máximo desses pontos aqui.
[...]
PP: O que está dentro é o que vai arrancar.
A1: E a gente tem que definir esse lugar de forma a ter menos pontos possíveis.
A4: E ocupar maior área possível.
A3: Tá, então o que tá dentro é arranco, né?
PP: Isso.
A3: E a gente pode fazer tanto pela do táxi ou normal?
PP: Isso. A gente tem dois lugares geométricos. Mas antes, o que é um lugar geométrico?
A4: São os pontos que satisfazem a mesma propriedade.
PP: Isso, a gente tem o mesmo lugar geométrico na geometria euclidiana e na geometria do táxi, mas eles vão ter formatos diferentes, até por que estamos lidando com uma métrica, uma geometria diferente.
(áudio de 02/08/2023)

A partir do diálogo acima o grupo finalizou o primeiro item e iniciou o item b. O aluno A4 em discussão com o grupo menciona que:

A4: Eu acho que por isso esse entorno quer dizer que todas as extremidades do espaço público têm que estar equidistantes do ponto O. Por que se for pensar na geometria euclidiana eu vou ter que fazer um círculo. [...] se eu pensar na geometria do táxi eu vou ter um quadrado assim [fazendo referência ao que desenho do item a] que é menor que o círculo.
B4: Dá pra perguntar o que significa esse entorno também.
A4: Ele tem que estar no centro?
PP: Isso, o ponto O tem que estar no centro da figura.
(áudio de 02/08/2023)

Em consenso os integrantes que fizeram a devolutiva das folhas escreveram que o lugar geométrico é “o espaço público que será delimitado pelo conjunto dos pontos equidistantes a O”. O aluno A4 complementa em sua folha especificando que é uma circunferência esse espaço definido. Anteriormente, os alunos apresentaram dificuldade para conseguir relacionar o lugar geométrico a uma circunferência, o professor pesquisador teve que intervir algumas vezes sugerindo alguns encaminhamentos, como elucida os diálogos transcritos acima.

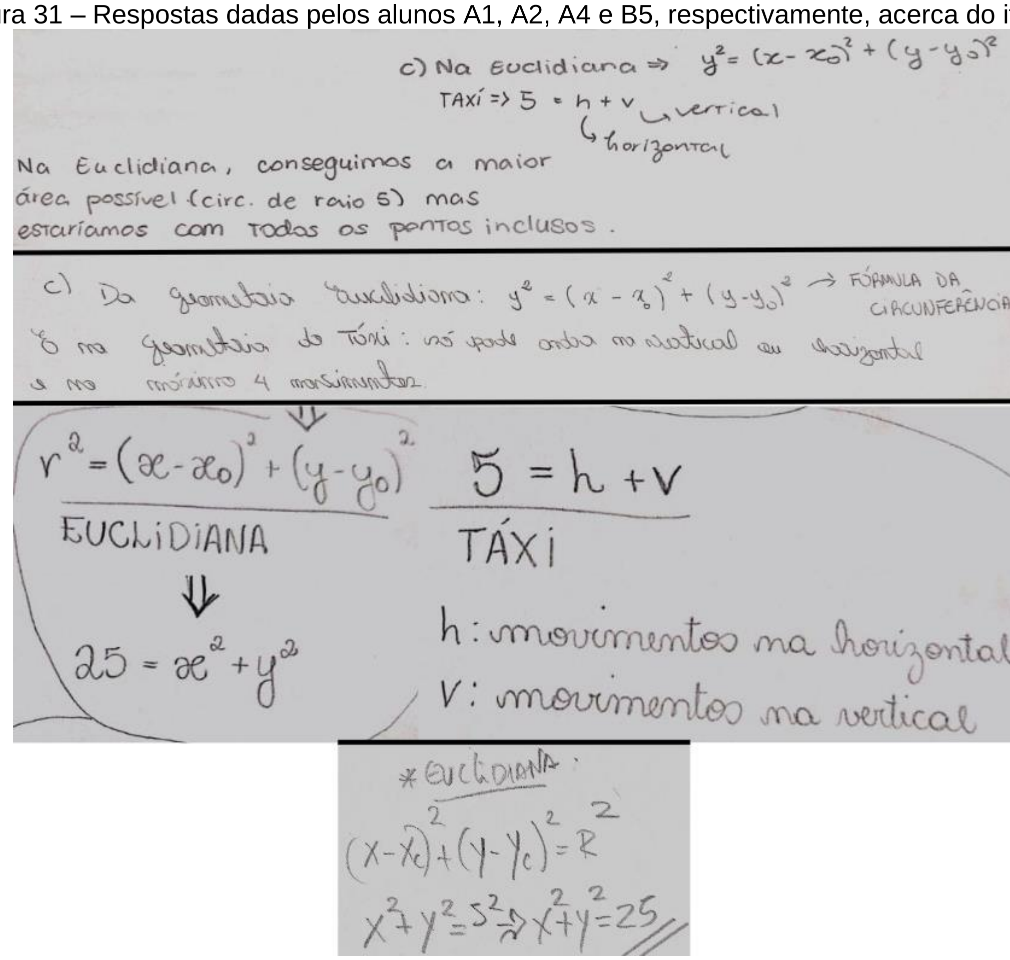
O diálogo transcrito abaixo aborda os alunos discutindo sobre o raio dessa circunferência.

B5: A distância sempre vai ser cinco, né? Pra qualquer um dos pontos?
A3: Cinco?
B5: É, por que tipo essa distância do ponto O até o ponto D é cinco.
A4: É. Por que tem que estar dentro da região.
B5: Então é isso, todos os quadradinhos que eu andar vai dar cinco.

> **A4:** Aham, sempre vai achar cinco.
> **B5:** Entendi, então escolher todos os pontos que vai andar cinco.
> **A4:** Por isso que vai dar esse quadrado.
> (áudio de 02/08/2023)

Os integrantes que interagiram nos dois diálogos acima sempre conversavam fazendo apontamentos no desenho que consta na figura 30. A conversa sobre o raio da circunferência contribuiu para o início da resolução do item C. Esse item solicitava as leis matemáticas que definissem o lugar geométrico nas duas geometrias, na figura 31 consta as respostas fornecidas pelos alunos A1, A3, A4 e B5.

Figura 31 – Respostas dadas pelos alunos A1, A2, A4 e B5, respectivamente, acerca do item C



Fonte: Coleta de dados, 2023

Analisando a gravação do áudio do grupo A foi constatado que em um primeiro instante foi definida a equação da circunferência obtida através da geometria analítica e em um segundo momento foi definida a resposta para a geometria do táxi. Contudo, apenas o aluno B5 não fez o registro por escrito dessa segunda. Nota-se também que o aluno A2 não especificou a equação da circunferência na métrica euclidiana aplicando os valores abordados na representação gráfica do problema e ele se equivocou em mencionar “4 movimentos” em vez de cinco movimentos se referindo a geometria do táxi.

Analisou-se que as respostas dos itens A e B produzidas pelo grupo A são similares com as que constam na análise dos dados de Leivas (2019). Entretanto, acerca do item C, os alunos do grupo A forneceram uma resposta distinta da que foi apresentada na análise dos dados do autor. Abaixo consta a resposta dada por um dos participantes da pesquisa de Leivas (2019) acerca das leis matemáticas que determinaram a circunferência na métrica do táxi abordada no problema.

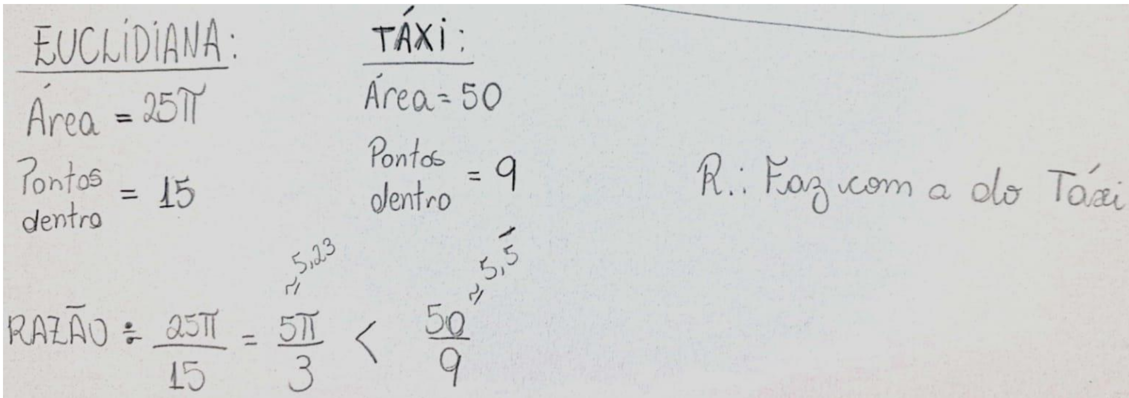
$$x \leq 0,\ y \leq 0 \Rightarrow -x - y = 5 \Rightarrow y = -5 - x;$$
$$x \leq 0,\ y > 0 \Rightarrow -x + y = 5 \Rightarrow y = x + 5;$$
$$x > 0,\ y \leq 0 \Rightarrow x - y = 5 \Rightarrow y = x - 5;$$
$$x > 0,\ y > 0 \Rightarrow x + y = 5 \Rightarrow y = -x + 5.$$

Almejava-se que o grupo conseguisse determinar essas leis matemáticas juntamente com as restrições de x e y, entretanto, os alunos ficaram restritos na relação entre movimentos horizontais e verticais, abordada na figura 30, assim, não fornecendo a devida resposta.

O item D solicitava a descrição verbal das duas situações (circunferência euclidiana e circunferência do táxi). Analisando a gravação do áudio percebeu-se que essa descrição foi realizada naturalmente nas discussões feitas nos itens anteriores, conforme ilustrado nos diálogos transcritos e nas devolutivas dos alunos inseridas acima.

No último item era solicitado uma argumentação sobre a escolha feita. O aluno A4 comparou a área da circunferência euclidiana e do táxi para determinar que a região delimitada pela circunferência do táxi é a mais vantajosa em termos de ocupar maior espaço, mas com menor número de pontos contidos dentro, a figura 32 ilustra essa conclusão.

Figura 32 – Resolução do item E dada pelo aluno A4



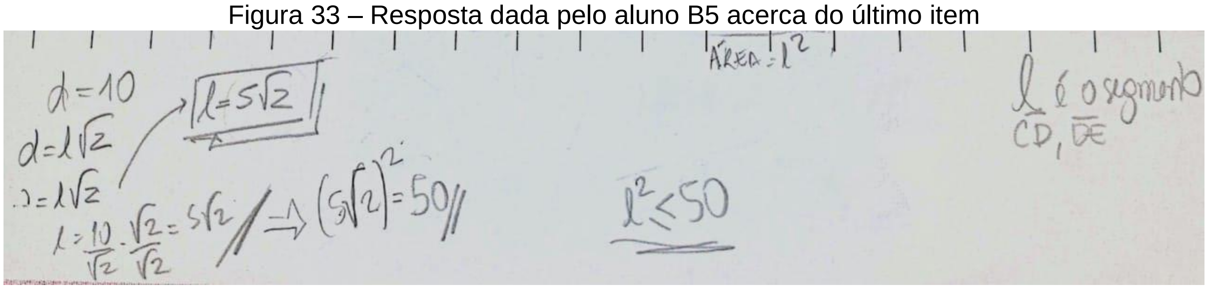
Fonte: Coleta de dados, 2023

Os alunos A1 e A4 têm a seguinte discussão para elaborar a resposta ilustrada acima.

> **A4:** Se tu for pensar a euclidiana abriga mais área, vamos fazer aqui os cálculos.
> **A1:** Tá, a circunferência usando o raio cinco que é o máximo abrigaria todos os pontos.
> [...]
> **A1:** Dá todos os pontos, mas dá a maior área também.
> **A4:** Realmente. Tem que ver a razão, vamos fazer a razão e ver o que dá daí. (áudio de 02/08/2023)

Já os alunos B2 e B5 determinaram que a diagonal do quadrado equivalia a 10 unidades de comprimento, assim, obtendo a medida do lado do quadrado para determinar a área da região definida, conforme consta na figura 33.

Figura 33 – Resposta dada pelo aluno B5 acerca do último item



Fonte: Coleta de dados, 2023

Ao analisar a gravação do áudio foi constatado que o aluno A1 menciona que se perdeu na resolução desde o item C, então o aluno B5 faz a seguinte intervenção, explicando o raciocínio que utilizou no item C e o que estava fazendo no item E:

> **B5:** Na euclidiana deu cinco e dá pra ir em qualquer direção e sempre andando cinco na do táxi tu só pode andar por cima das linhas e sempre seguindo cinco. Então, tipo, na euclidiana eu vou andar cinco e vou cair lá daí eu vou formar um círculo, tudo com distância cinco, agora na do táxi eu não posso seguir na diagonal de cada quadradinho, cada quadradinho vale um, então se eu seguir por cima das linhas eu vou cair nesse ponto [fazendo referência ou ponto P], esse ponto faz parte da circunferência da geometria do táxi. Vamos pegar outro ponto qualquer, a gente sai daqui [fazendo referência ao ponto O] a gente anda um, dois, três, quatro e cinco e vai cair aqui [fazendo referência a um ponto que não está destacado no enunciado da questão], agora escolhe um lado aí.
> **A1**: Pra baixo.
> **B5:** Tu vai começar a marcar todos os pontos que tu anda cinco, eu andaria um, dois, três, quatro e cinco, chegou nesse ponto e assim vai, andei um, dois, três, quatro e cinco e cheguei aqui e assim vai, então vou formar esse lado da circunferência, se eu aplicar isso em todos os lados olha a figura que eu tenho, é um quadrado, ok?
> **A1:** Aham.
> **B5:** Agora eu quero pontos que estejam dentro ou sobre essas linhas, então se eu calcular a área dele eu quero valores que os pontos estejam dentro da área ou até o limite da área, então eu quero uma área menor que a área do quadradão ou igual a área do quadradão. Entendeu.
> **A1:** Entendi.
> **B5:** Então eu quero a área menor ou igual, por que calculando a área maior a gente já estaria fora do quadrado. A gente calculado a área chega em 50. Então, logo, na geometria do táxi eu quero área menor ou igual a 50.
> (áudio de 02/08/2023)

Mesmo que o aluno B5 não tenha registrado em sua folha que a geometria do táxi apresenta uma melhor solução para a situação descrita no problema, fica explicito a partir da discussão transcrita acima que o aluno considerava a abordagem através da geometria do táxi a mais vantajosa.

Logo após esse diálogo o aluno A4 conclui o que obteve em sua resposta do item E:

> **A4:** Ou seja, quem é que compensa mais?
> **B4:** É a maior área com o menor gasto.
> **A4:** Então, resposta, considerar com a do táxi.
> (áudio de 02/08/2023)

A escuta do áudio dessa aula proporcionou ao professor pesquisador compreender que os itens C e E foram resolvidas quase que concomitantemente e que o item D permeou todos os itens, não ficando restrito a um momento isolado. Em Leivas (2019) não foram apresentados indícios que os alunos participantes da pesquisa obtiveram algum tipo de discussão envolvendo as áreas das figuras para concluir o item E, tal fato já foi constatado na presente análise.

4.4 Algumas relações da prática com o aporte teórico

A partir da análise dos dados produzidos no primeiro e no segundo encontro, pode-se verificar que o primeiro problema proposto na parte I se enquadra no caso 2 de Modelagem Matemática, corroborando assim o que é mencionado no capítulo do referencial teórico. Barbosa (2004) aborda que o caso 2 de Modelagem descreve o ambiente em que o professor desenvolve os problemas que são apresentados para os alunos e esses são responsáveis por produzir os dados para resolver a problemática proposta. Ao longo do primeiro e do segundo encontro pode-se observar que os alunos conseguiram produzir os dados com base no manuseio das ferramentas de mapas. O *Google Maps* se configurou como o ambiente externo à sala de aula, posto que os alunos precisaram buscar informações externas para concluírem com êxito as atividades, correlacionando-se com o que Barbosa (2004) traz que no caso 2 de Modelagem o aluno realiza a coleta de dados fora da sala de aula.

Já a proposta aplicada e os dados produzidos pelo grupo A no terceiro encontro se enquadram no caso 1 de Modelagem e no cenário para investigação denominado de semirrealidade, pois o problema proposto por Leivas (2019) traz dados suficientes no próprio enunciado para ser resolvido, mas possibilitando a discussão entre os alunos conforme observado na análise realizada da sessão anterior. Skovsmose (2000) menciona que esse cenário para investigação é pautado no convite ao aluno em realizar explorações e explicações acerca da problemática abordada. Pode-se observar que houve explorações entre os integrantes do grupo A para determinar um novo formato da circunferência na geometria do táxi, mas a partir dos próprios dados contidos no problema, também foi observado que entre os estudantes houve discussões acerca da problemática proposta, entretanto, não sendo necessário buscar dados externos ao problema.

De modo geral, a prática aplicada teve como aporte teórico a Modelagem Matemática, mas não se enquadrando apenas em uma única concepção de Modelagem. Conforme aponta Dalla Vecchia (2012) uma atividade de Modelagem não precisa seguir rigorosamente um percurso linear, seguindo uma sequência de etapas pré estabelecidas. Ademais, esse autor estabelece alguns pilares fundamentais para uma atividade de Modelagem Matemática, sendo eles: objetivo pedagógico, realidade, problema e modelos. A prática dessa pesquisa se entrelaça com esses quatro pilares, sendo os objetivos traçados no primeiro capítulo e que serão retomados nas considerações finais. Os problemas acerca da geometria do táxi são abordados nos três encontros fazendo referência à realidade dos alunos ou a uma semirrealidade. Por isso, os dados do contexto dos estudantes se fizeram presentes nessa pesquisa a partir da escolha por parte deles em pontos de interesse no mapa de Porto Alegre para prosseguirem com as atividades.

No momento em que um dos integrantes do grupo A menciona que certa distância não é percorrível, pois passaria por cima de edificações, essa reflexão do aluno dialoga com a etapa de validação abordada por Almeida, Silva e Vertuan (2022). Momento destinado a questionar se aquilo que foi determinado faz sentido ou não e busca-se uma readequação da resposta obtida para entrar em consonância com a situação real.

Ao que concerne os modelos, Dalla Vecchia (2012) menciona que é àquilo que se almeja mostrar a partir de uma sequência de ideias matemáticas, não sendo necessariamente uma equação que representa algum fenômeno, por exemplo. No primeiro encontro, os integrantes do grupo A apresentaram resistência em assumir um modelo de métrica distinta do habitual, pode-se perceber isso quando na primeira atividade do primeiro encontro o grupo A definiu duas menores distâncias entre as localidades dentro de um bairro e não apenas uma única menor distância como solicitava o enunciado. Pode-se compreender que esse acontecimento se relaciona com o fato de que, quando se está trabalhando com Modelagem Matemática há a oportunidade de questionar aquilo que se está fazendo e é justamente isso que os alunos fizeram, questionaram-se entre o que viria a ser uma resposta matematicamente correta e o que viria a ser correto na situação real.

Tangenciando as concepções de modelo, abordadas no referencial teórico, Cesar (2010), Barbaresco e Morgano (2013) utilizam o termo modelo para se referenciarem a um modelo de cidade idealizada, onde se tem quadras equidistantes, algo que se pode tomar como base para desencadear uma sequência de raciocínios matemáticos. Com isso em vista, percebeu-se que os alunos formularam relações matemáticas que descreveram o problema de se obter os possíveis caminhos que determinam a menor distância entre duas localidades em um mapa de cidade idealizada, isso envolve a tradução de uma situação real para um modelo onde se torna possível aplicar conhecimentos acerca da análise combinatória, nesse caso o cálculo de combinações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar essa pesquisa pode-se inferir que a intersecção da temática da Modelagem Matemática com a geometria do táxi favoreceu um ambiente de discussão acerca de uma geometria não euclidiana, que está mais próxima à realidade dos alunos. Ademais, a utilização de mapas de uma cidade urbanizada foi um ponto-chave para que os alunos pudessem fazer comparações e distinções acerca desse conteúdo em contraposição à geometria euclidiana, assim proporcionando um maior engajamento da turma na realização das tarefas.

Optou-se por realizar a análise apenas do grupo A, pois cada integrante do grupo entregou sua própria devolutiva, assim dispondo de um maior acervo de dados para analisar. A análise desse grupo foi realizada a partir da devolutiva de cada integrante do grupo e pela escuta das gravações de áudio produzidos pelos próprios alunos durante os três encontros.

Se torna essencial ao finalizar uma pesquisa retomar os objetivos traçados no início do trabalho para discorrer o que foi observado e analisado na prática para atingi-los. Os objetivos propostos foram:

- Analisar comparações e distinções que estudantes realizam diante de problemas envolvendo uma métrica diferente da euclidiana;
- Identificar quais as possíveis potencialidades que a utilização de mapas de cidades proporciona para um ambiente de Modelagem Matemática;
- Investigar se os alunos assumem que a geometria do táxi é uma escolha viável em situações envolvendo deslocamentos em cidades urbanizadas;
- Identificar o que os alunos compreendem empiricamente por modelo a partir da prática desenvolvida.

Acerca do primeiro objetivo, pode-se concluir que os alunos conseguiram realizar comparações e distinções entre a métrica do táxi e a métrica euclidiana, conforme discorrido na análise dos dados. No primeiro encontro os alunos realizaram tais ações trabalhando com um modelo de cidade real e um modelo de cidade ideal. Já no segundo encontro os estudantes envolveram-se em discussões acerca do que é possível transpor da teoria da geometria do táxi para a realidade, a partir do manuseio de ferramentas de mapas, havendo discussões do que realmente era viável em uma situação real e as limitações da geometria do táxi ao transpor sua métrica para um problema de determinação de menor distância entre duas localizações reais.

A utilização dos mapas potencializou a realização dessa prática, pois os alunos tiveram contato com situações de seu cotidiano através do manuseio de mapas em aplicativos disponíveis em seus celulares, assim ancorando as atividades em um contexto do mundo real. Isso é um pressuposto fundamental da Modelagem Matemática, pois ajuda os alunos a entenderem como os conceitos matemáticos se aplicam a situações concretas. Assim tornando a prática desenvolvida mais concreta já que a todo o momento se fez referência ao deslocamento entre as ruas de uma cidade.

O grupo analisado teve, inicialmente, certa resistência ou até mesmo dificuldade em assumir a métrica do táxi como uma nova métrica possível para se trabalhar a menor distância entre duas localidades em um mapa. Todavia, ao decorrer das atividades notou-se que os alunos assumiram que essa nova métrica é mais coerente do que a métrica euclidiana no momento em que se está abordando a menor distância entre dois pontos em uma cidade ideal.

Por fim, mesmo que não discutido formalmente durante os encontros, foi percebido que o modelo que os alunos adotaram como base para resolver as atividades propostas foi o modelo de métrica euclidiana. Ao decorrer da prática os estudantes foram incorporando ao seu pensamento uma métrica não euclidiana, partindo do modelo de uma cidade ideal, assim conseguindo fazer comparações do que é possível em um modelo de cidade real e em um modelo de cidade ideal.

Considerando esses objetivos, retoma-se a pergunta diretriz dessa pesquisa: quais articulações são realizadas pelos alunos em um ambiente de Modelagem Matemática que explora a geometria do táxi? A discussão acerca dos objetivos elencados acima consolida uma possibilidade de responder à pergunta norteadora. Deste modo, com base na escuta das gravações dos áudios e da análise das devolutivas dos integrantes do grupo A, percebeu-se que as articulações observadas e analisadas foram discussões e comparações entre o que era possível e o que não era possível em uma situação real e em uma situação idealizada, bem como, a preocupação do grupo em registrar respostas ditas por eles mesmos de matematicamente possível e respostas da situação real. A partir desses pontos específicos percebeu-se que os alunos mesmo que diante de uma nova métrica ainda ficavam restritos a se referenciarem a métrica euclidiana. Com base na análise dos dados conclui-se adicionalmente que, mesmo se aproximando da realidade, a geometria do táxi ainda é mais acessível e viável em situações que se referem a modelos de cidade ideais.

Portanto, atingiu-se os objetivos traçados, pois a prática desenvolvida teve como função propiciar um ambiente de discussões e comparações entre a métrica euclidiana e a métrica do táxi. À vista disso, explorou-se um ambiente de Modelagem Matemática e sua contribuição na resolução de problemas acerca da geometria do táxi, fazendo referência a situações que podem ser do cotidiano dos alunos. Ao trabalhar com mapas de determinadas regiões de Porto Alegre/RS, os alunos podem precisar simplificar a complexidade da situação para torná-la tratável matematicamente. Sendo essa habilidade de simplificar uma característica importante da Modelagem.

Para uma possível continuidade dessa pesquisa, sugere-se que o professor faça mais direcionamentos durante a prática para que os alunos reflitam e discutam mais pontualmente sobre modelos para assim proporcionar ao aluno transgredir a concepção que um modelo matemático não é apenas uma equação que retrata uma dada situação.

No problema que aborda o formato da circunferência na geometria do táxi, os alunos demonstraram certa dificuldade ao interpretarem o que a questão solicitava. Os estudantes ficaram confusos, inicialmente, se era para considerar os pontos dentro ou fora do lugar geométrico estabelecido, bem como disseram que sentiram falta de mais alguma informação no enunciado da questão.

Portanto, sugere-se que numa próxima aplicação desse problema seja, inicialmente, proporcionado maior tempo para desenvolver a atividade, bem como fazer uma readequação no enunciado: adicionar que é para considerar as ruas sendo paralelas aos eixos e considerar apenas os pontos de coordenadas inteiras. Sugere-se também que seja explorado com mais atenção o item que solicita obter as equações que determinaram a circunferência na geometria do táxi, para assim haver um fechamento mais inciso acerca dessa problemática. Ainda, um possível direcionamento é propor que os alunos compartilhem com a turma os resultados encontrados acerca desse problema para que em conjunto consigam realizar um fechamento da questão.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** 1. ed., 2ª reimpressão - São Paulo: Contexto, 2016.

ALTOÉ, Renan Oliveira *et al*. Contribuições de uma oficina sobre geometria do táxi na formação de professores que ensinam matemática: entre descobertas, aprendizagens e práticas docente. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática.** v. 6, n. 2, p.193-216. 2022.

BARBARESCO, Evelin M.; MORGADO, Michelle F. Z.. Geometria do Taxi e suas aplicações. In: XXV SEMANA DA MATEMÁTICA, 25., 2013, São José do Rio Preto. **Anais [...]**. São Paulo: IBILCE/UNESP, 2013. p. 2-26.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como?** Veritati, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BARBOSA, J. C. **A prática dos alunos no ambiente de modelagem matemática: o esboço de um framework**. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (orgs.). Modelagem matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM. Cap. 10, p.161-174, 2007.

BARBOSA, J. C. **As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem Modelagem Matemática**. Acta Scientiae, v.10, n. 1, p. 47-50, 2008.

BARBOSA, J. C. **Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica.** Alexandria Revista de educação em Ciências e Tecnologia, v. 2. n. 2, p. 69-85, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Ed. Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Ed. Contexto, 2004.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Tradução M.J. Alvarez, S.B. Santos e T.M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

CÉSAR, Sulamita Maria Comini. **Minicurso de geometria táxi**. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2010.

CUNHA, A. G. da. **Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

DALLA VECCHIA, R. **A modelagem matemática e a realidade do mundo cibernético**. 2012. 275 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102151>.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio para **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**, de Marcelo de C. Borba e Jussara L Araújo (Orgs.). 6ª ed., p. 11-22. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.** 5ª ed. Positivo, 2010.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8 ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GUSMÃO, Nathan Lascoski; SAKAGUTI, Fernando Yudi; PIRES, Liceia Alves. A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**. São Paulo. v. 19, n. 2, p.211-235. 2017.

KALEFF, A.M.; NASCIMENTO, R.S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. **Boletim Gepem**, n. 44, p. 11-42, 2004.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometria Euclidiana e do Taxi: um problema concreto e os Registros de Representações Semióticas. **Revista de Educação Matemática**, v. 16, n. 22, p. 252-269, 2019.

LOIOLA, Carlos Augusto Gomes. **Um táxi para Euclides**: Uma Geometria Não Euclidiana na Educação Básica. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2014.

LOIOLA, Carlos Augusto Gomes; COSTA, Christine Sertã. As Cônicas na Geometria do Taxi. **Ciência e Natureza.** v. 37, Ed. Especial PROFMAT, p.179–191, 2015.

OLIVEIRA, Mariana Mercúrio de. **Geometria do táxi**: uma introdução na escola básica. 2020. Dissertação (mestrado profissional em matemática) – Universidade Federal de Lavras. Lavras. 2020.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação**. Bolema - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Org.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p.195-219.

SOUZA, Elizabeth G.; BARBOSA, Jonei C. Contribuições teóricas sobre aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetike**, [s. l.], v. 22, n. 1, p. 31-58, 2014.
ROCCO, L. R. O. Hermann Minkowski (1864-1909) e o desenvolvimento matemático do espaço-tempo. **Unicentro**. 2022. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2022/06/17/hermann-minkowski-1864-1909-e-o-desenvolvimento-matematico-do-espaco-tempo/>. Acesso em: 27.jul. 2023.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu,____, R.G.____________________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada Modelagem Matemática e Geometria do Táxi: análise de uma prática, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Wesley Frederico Machado de Souza. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marilaine de Fraga Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51) 3308-6182 ou e-mail marilaine@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são: investigar como se desenvolve um ambiente de modelagem matemática a partir de problemas envolvendo a Geometria do Taxi.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A minha colaboração se dará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da minha participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que serei observado(a) e terei a produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a minha participação aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho.

A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que você poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre como a modelagem matemática pode contribuir para abordar a temática da geometria do taxi, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável, telefone: (51) 98927-5178, e-mail: wesley.f.machado@hotmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de _________________ de _______.

Assinatura do participante:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura da orientadora da pesquisa:

APÊNDICE B – PRIMEIRA PARTE DA PRÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DOCÊNCIA II

Nome: .... Etapa do curso: ....

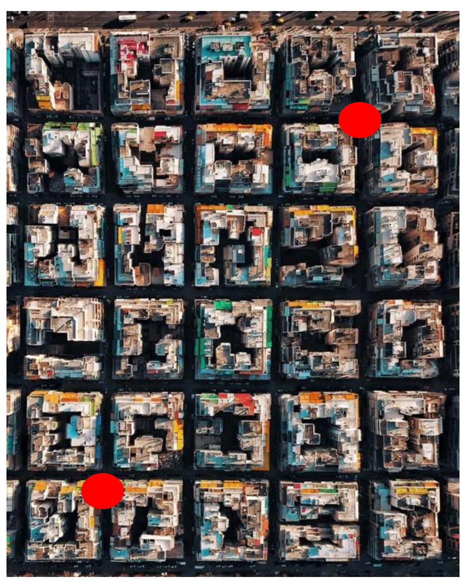
Prática de Trabalho de Conclusão de Curso – Wesley Machado

Parte 1: Métrica

1. Em grupo, determine dois pontos de interesse dentro de um mesmo bairro na cidade de Porto Alegre/RS. Enuncie o endereço e o que mais achar pertinente dessas duas localidades e, posteriormente, determine qual o comprimento de menor caminho entre elas. Registre detalhadamente como estabeleceu essa distância, bem como quais fatores foram levados em consideração.

2. Qual a distância entre os dois pontos em destaque no mapa abaixo? Descreva como chegou no determinado resultado, assim como o que foi levado em consideração para determiná-lo.

Figura 1: Atenas na Grécia



Fonte: archdaily[11]

[11] Disponível em <https://www.archdaily.com.br/br/962040/tipologias-de-quadras-urbanas-diferentes-formas-de-ocupar-a-cidade?ad_medium=gallery>. Acesso em 18.jul.2023.

3. Qual a distância euclidiana entre esses dois pontos?

4. Considerando que só se pode andar pelas ruas desse mapa, qual a distância entre esses dois pontos?

5. Quais diferenças são estabelecidas entre as respostas das questões 3 e 4?

6. Existe um único trajeto que resulta na distância entre esses pontos? Disserte sobre. Caso haja outros trajetos como podemos determiná-los?

7. Na atividade 1 como determinamos os possíveis trajetos que sempre resultam na distância entre as duas localidades escolhidas?

8. Quais as facilidades/dificuldades encontradas nas atividades 6 e 7? Compare-as e disserte sobre.

APÊNDICE C – SEGUNDA PARTE DA PRÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DOCÊNCIA II

Nome: .... Etapa do curso: ....

Parte II: Trabalhando com aplicativos de mapas e transportes

1. A turma deverá escolher em consenso dois pontos na cidade de Porto Alegre/RS e registrar seus endereços.

2. Cada grupo deverá escolher um dos seguintes aplicativos: Uber, 99 Pop, Waze, Google Maps e Moovit. Registre o aplicativo escolhido.

3. Faça o registro (captura de tela) do trajeto que aparece no aplicativo escolhido, bem como o tempo de deslocamento e demais considerações que o grupo acha que o aplicativo leva em consideração para traçar tal trajeto.

4. Comparando a resposta da atividade 3 com as respostas obtidas na parte I, quais apontamentos podem ser feitos?

5. Momento de socialização dos resultados e discussão.

6. Registre neste espaço as conclusões que o grupo obteve a partir da socialização dos demais grupos. Por exemplo, todos os aplicativos mostraram o mesmo trajeto? Quais semelhanças e diferenças observadas nos aplicativos?

7. De todos os trajetos apresentados há algum que represente o comprimento de menor caminho entre esses dois pontos? Conseguimos obter essa informação, caso afirmativo, como? Caso negativo, por quê?

Comparações e limitações

8. Há elementos que aparecem nos trajetos que a geometria do taxi não leva em consideração? Se sim, cite alguns.

9. Os elementos citados acima são levados em consideração no trajeto determinado pelo aplicativo? Explique.

10. Há semelhanças e diferenças na distância entre os dois pontos no mapa que consta na primeira parte e nos mapas trabalhados na segunda parte? Argumente sobre.

11. O que podemos concluir acerca das observações elencadas na questão anterior?

APÊNDICE D – TERCEIRA PARTE DA PRÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DOCÊNCIA II

Nome: .... Etapa do curso: ....

Parte III: Atividade extraída de Leivas (2019)

1. Certa região de um bairro é limitada a oeste pelo ponto localizado em B=(-5,0); ao norte pelo ponto C=(0,5), a leste pelo D=(5,0) e ao sul pelo ponto E= (0,-5). Existem construções históricas e árvores milenares localizadas nesses pontos e nos pontos J=(-3,4), K=(-4,3), L=(0,2), M=(-4,2), N=(3,3), O=(0,0), P=(-2,3), Q=(2,2), R=(3,0), S=(-1,3), T=(1,-1), U=(4,-2), V=(-2,-4), X=(-3,1), Z=(-2,2).

A prefeitura local quer construir um espaço público nesta região no entorno do ponto O. Deseja preservar o patrimônio histórico e o meio ambiente, tendo o menor gasto com desapropriações, cortes das árvores e ocupar o maior espaço possível.

Ajude a resolver o problema. Para tal, faça uso das Geometrias Euclidiana e do Táxi para decidir qual a que oferece maior vantagem. Faça um layout desse espaço. Para isso:

a) Faça uma representação gráfica do problema.

b) Defina o lugar geométrico envolvido.

c) Obtenha as leis matemáticas que definem o lugar geométrico nas duas Geometrias.

d) Descreva verbalmente as duas situações.

e) Argumente sobre sua decisão tomada.