Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Propriedades de Simetria e Monotonicidade para Soluções Positivas de EDP's Semi Lineares Elípticas

Patrícia Lisandra Guidolin

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, 14 de Janeiro de 2010.

Dissertação submetida por Patrícia Lisandra Guidolin como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)

Banca Examinadora:

Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)

Dr. José Afonso Barrionuevo (UFRGS)

Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (UFRGS)

Data da Apresentação: 01/04/2010.

AGRADECIMENTOS

Agredeço a todos os professores que cruzaram meu caminho e que de alguma forma acrescentaram em mim um pouco de seu conhecimento, suas experiências de vida, sua garra e determinação.

Agradeço ao meu orientador, professor Leonardo Bonorino, que com sua paciência, dedicação, exigência e um dom incontestável de dar uma boa aula, conseguiu me transmitir ensinamentos que foram importantes para a realização deste trabalho e, sem dúvida, será uma referência de bom professor que levarei para minha vida profissional.

Agradeço ao professor Eduardo Brietzke, que me acompanhou em algumas disciplinas, me ajudou na dissertação e foi uma grande influência na minha paixão pela análise.

Agradeço aos meus queridos amigos que me acompanharam durante esses dois anos de mestrado, me apoiando nos momentos difíceis, compartilhando minhas alegrias, trocando conhecimentos, mas principalmente, sempre torcendo por mim. Não posso deixar de citar seus nomes:

Adri, muito obrigada pelo carinho, pelos beijinhos que sempre dá quando chega na UFRGS, pela sua companhia.

Adilson, muito obrigada pelas partidas de futebol, pelos churrascos e pela companhia em muitos eventos que realizamos.

André, muito obrigada pela ajuda em análise na época do DAEMA, por ter sido um veterano querido e muito engraçado.

Carlos, muito obrigada pela agradável companhia e por todas as dicas, tanto de apresentação, como também na digitação deste trabalho.

Carol, muito obrigada pela confiança, pelo carinho e alegria que manifesta

quando estamos juntas.

Charles, muito obrigada por me emprestar a Pati, pelo carinho e por sempre me acolher tão bem em sua casa.

Clarissa, muito obrigada pelo companheirismo, pelas comidinhas gostosas, pelos quindins e pelas conversas tão agradáveis que tivemos.

Day, muito obrigada pela companhia no futebol e por esse seu jeito carinhoso e meigo que nos trata.

Debby, muito obrigada pelo carinho e por ter me acolhido tão bem quando entrei no mestrado.

Deinha, muito obrigada pelo carinho, pela confiança, pelos estudos em EDO e pelas longas convesas no banheiro, no momento mais difícil do mestrado.

Di, muito obrigada pelo ombro amigo, pelas nossas conversas, pela confiança, por aquele dia que foi pela primeira vez em minha casa e por sempre ser muito sincero.

Diegão, muito obrigado pelo ombro amigo, pelas noites de jogos, sempre muito divertidas, pelas comidas vencidas, pela companhia nos filmes, pelas grandes idéias e por sempre estar preocupado com o bem estar dos amigos.

Diego Marcon, muito obrigada pelos estudos em EDP, pela companhia no futebol, pelas piadas que só você faz ser engraçada, pelas caronas de moto, por ser tão prestativo e sempre parceiro nos programas, principalmente os que tem comida.

Douglas, muito obrigada pelos passeios, pelos churrascos, pelas danças, pela companhia na UFF e por ser tão companheiro.

Duda, muito obrigada pelas explicações em matemática que sempre iam bem além do que eu esperava e eu sempre aprendia muito, agradeço também a confiança, o carinho e a preocupação que teve comigo.

João, muito obrigada por todos os momentos que aproveitamos juntos, pela ajuda em geometria diferencial, por ter sido meu irmão uma vez, pelas lindas músicas que tivemos o prazer de ouvir e por nos emprestar a Aline algumas vezes.

Ju grande, muito obrigada pela confiança, pelo abraço amigo, por todos os momentos que passamos juntas, que não foram poucos, e por esse teu jeito meigo que conquista a todos.

Ju pequena, muito obrigada pelos momentos que passamos juntas, pelas conversas na UFF, pelos passeios de roller, pelas caretinhas e pela sinceridade.

Lucas, muito obrigada por toda ajuda que você me deu, sendo na minha formatura ou quando o Patropy estava viajando, mas principalmente por ser essa figura engraçada, sincera, um verdadeiro amigo.

Lendro, muito obrigada pelas ajudas em análise na época do DAEMA, pelas escaladas, pela companhia e pelas conversas interessantes que tivemos.

Lucinéia, muito obrigada pela companhia, por sua alegria e simplicidade, por ter aceitado ser goleira do time de futebol e assim tive o prazer de te conhecer.

Márcio, muito obrigada por sua amizade desde muito tempo, pela parceria no futebol, pelas caronas e por cuidar bem da minha baixinha.

Mirian, muito obrigada pela ajuda nos estudos e na dissertação, pelas caronas, por sua amizade e preocupação, por ser tão dedicada aos amigos.

Nicolau, muito obrigada pelos jogos de futebol, pelos estudos em EDP, pelos passeios a cavalo, por limpar a cuia de chimarrão quando eu me esquecia e pelas conversas que cada um acrescentava um pouquinho e se tornavam muito engraçadas.

Pati KK, muito obrigada pela ajuda em EDP e na dissertação, pelo carinho e por todos os momentos que passamos juntas, principalmente nesses últimos meses, que foram muito legais e importantes pra mim.

Pati de Uruguaiana, muito obrigada pela confiança, pelos três meses que moramos juntas, pelas longas conversas, pelas comidinhas, e pelo carinho e preocupação que tem por mim.

π, muito obrigada pelos ensinamentos em matemática e no futebol, por esse seu jeito malandro e marrento que alegra e cativa a todos.

Raquel, muito obrigada pela companhia em praticamente todos os eventos, porque com certeza você foi. Pelo carinho, pelas caronas, por se preocupar comigo e sempre tentar me animar com esse jeito mineiro de ser.

Rafinha, muito obrigada pela companhia no Rio, pelas partidas de futebol e pelas cantorias gaudéria que tivemos o privilégio de escutar.

Renezinho, muito obrigada pelas dicas de EDO, pela parceria no futebol e pelo café maravilho que sempre estava disposto a fazer.

Ricardo, muito obrigada por me emprestar o seu material de EDO, pelas partidas de futebol e por sempre nos animar com esse seu "TRI MASSA".

Rosane, muito obrigada pela dedicação e ótimo atendimento que fornece aos alunos, pelo chimarrão e pelas agradáveis conversas após o almoço.

Samuel, muito obrigada pela companhia no Rio, pela confiança e por ter me ajudado em variável complexa.

Sarádia, muito obrigada pela companhia em algumas festas e pelas conversas que tive o prazer de ter contigo.

Thaísa Morena, muito obrigada pela confiança, pelos momentos diver-

tidos que passamos juntas, por toda a ajuda que me deste durante a dissertação, que não foi pouca, pelas caronas e por ter sido tão companheira.

Thaisa Loira, muito obrigada por todas as caronas, pela parceria em muitos momentos, pelos estudos em analise funcional, pelo carinho e sinceridade.

Tadeu, muito obrigada pelos jogos de futebol e pelas conversas que tivemos a oportunidade de ter, sempre muito agradáveis.

Vitalino, muito obrigada pelos ensinamentos a respeito do vegetarianismo, e por ter me recebido tão bem quando eu entrei no mestrado.

Gostaria também de agradecer a companhia do Gabriel, da Karla e da Aline, que também fazem parte deste grupo tão unido. À Ká e ao Cleber por ter me ajudado com as figuras deste trabalho, os meus sinceros agradecimentos.

É com um imenso prazer que agradeço a minha família, em especial aos meus pais, Jacir Guidolin e Sandra Chagas, minha madrasta Maria Helena, meu irmão, Luiz Gustavo e meus avós Maria e Homero. Eles me apoiaram muito, e desde o começo confiaram em mim, amo vocês e obrigada por todo carinho.

Agradeço ao meu namorado, noivo e meu melhor amigo, Patropy. Sem dúvida, um dos grandes responsáveis por eu ter seguido o caminho da matemática. Muito obrigada por acreditar em mim e me apoiar em todos os momentos. Com você, me sinto mais forte, mais segura e os meus problemas praticamente desaparecem quando estou ao seu lado. Com você meus dias são mais alegres e eu sou muito mais feliz. Muito obrigada por fazer parte da minha vida.

Dedico esta dissertação aos meus querido avós, Homero e Maria, vocês são um tesouro em minha vida, e suas palavras estarão sempre guardadas no meu coração.

RESUMO

Nesta dissertação, estudamos propriedades de monotonicidade e simetria da solução do problema de valor de fronteira da forma

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

É claro que são feitas algumas hipóteses sobre f e o domínio Ω. Começamos apresentando os pré-requisitos necessários ao entendimento do trabalho. A seguir introduzimos algumas definições e provamos alguns lemas preliminares que serão usadas na prova do nosso resultado principal.

ABSTRACT

In this master dissertation, we study symmetry and monotonicity properties for solutions of boundary value problems of the form

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}.$$

Of course, we make some assumptions on f and the domain Ω. We begin presenting some prerequisites for the study of the work. Next, we introduce some definitions and prove some preliminary lemmas that are used in the proof of our main result.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho desenvolveremos o estudo de algumas propriedades qualitativas de soluções positivas para a equação diferencial parcial semi-linear elíptica com o problema de fronteira dado por

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

onde o domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ satisfaz algumas propriendades que serão vistas no próximo capítulo e a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz:

(H1) f é continua em $[0, +\infty)$.

(H2) $f(0) > 0$ ou existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{u>0, u\to 0} \frac{f(u)}{u} \geq c.$$

(H3) Se $\overline{u} \in (0, +\infty)$ é tal que $f(\overline{u}) = 0$, então existe uma constante

$C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{u \neq v \; u,v \to \overline{u}} \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \geq C.$$

Nosso objetivo principal é provar o Teorema 3.2.1 e, para isto, consideramos o caso em que a direção $\beta = e_1$, e a linha de simetria de Ω é o eixo x_2.

Para mostrar propriedades de monotonicidade e simetria da solução de (1.1) vamos usar o método dos planos deslizantes. Este método tem sido usado por Serrin [17] e Gidas, Ni e Nirenberg [9] e [10]. Mais tarde, muitos outros autores tem dado atenção a estas questões, como por exemplo, Li [13], Berestycki e Nirenberg [1], Li e Ni [14], Esteban e Lions [7] e recentemente o trabalho de Berestycki, Caffarell e Nirenberg [2].

Todos acima tomam f sendo de Lipschitz continua. No entanto esta propriedade pode ser enfraquecida, como o trabalho desenvolvido por Lions [16], onde f é meramente mensurável, mas não negativa e n=2.

Cortázar, Elgueta e Felmer em [4] e [5], e Gui em [12], f é localmente de lipschitz em $(0, \infty)$ e continua em $[0, \infty)$, isto é, sua propriedade de Lipschitz é perdida na origem.

Também obtemos um resultado de simetria local para a função u do problema (1.1), no caso de Ω ser uma bola e f continua, mostrando assim, que toda solução de (1.1) é localmente simétrica, como pode ser visto em [3].

A questão em pauta é saber se podemos usar o argumento dos planos deslizantes para obter a simetria da solução de (1.1), quando f satisfaz (H1), (H2) e (H3), e o domínio Ω é mais geral, isto é, satisfaz as propriedades (O1) e (O2). Neste trabalho respondemos esta questão na dimensão n=2, cujos resultados conjecturamos para as demais dimensões. Esta pesquisa foi baseada no artigo desenvolvido por Jean Dolbeault e Patricio Felmer [6].

Num primeiro momento, usando a hipótes (H1) e (H2) sobre f, obtemos monotonicidade na direção e_1 da soluçõe u, próximo da fronteira do domínio Ω, como pode ser visto no Lema (3.1.3). A seguir, definimos

$$\overline{\lambda} = inf\{\lambda \in (0,1) : \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0 \ em \ \Sigma_\lambda\},$$

e aplicamos o método dos planos deslizantes.

Através do Lema 3.1.3, temos que $\{\lambda \in (0,1) : \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0 \ em \ \Sigma_\lambda\} \neq \emptyset$, e portanto $\overline{\lambda} \in [0,1)$. Assim, podemos começar o movimento dos planos.

Depois, analisamos a situação onde o plano atinge uma posição crítica, isto é, o momento onde o movimento dos planos para porque encontramos um ponto $\overline{x} \in T_{\overline{\lambda}}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) = 0.$$

Isto pode ser visto nos Lemas 3.1.4 e 3.1.5, concluindo assim, que no ponto $\overline{x} \in T_{\overline{\lambda}}$ encontrado, onde $\overline{\lambda} > 0$, temos

$$\nabla u(\overline{x}) = 0 \ e \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\overline{x}) = 0.$$

Desta forma, pelo Teorema 3.2.1, usando as propriedades do domínio, as hipóteses (H1) e (H2) da f e supondo $\overline{\lambda} > 0$, conseguimos provar que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\overline{x}) = 0$. Com este resultado, usando a propriedades (H3) da função f, e um refinamento do Lema de Hopf na função $\omega_{\overline{\lambda}}$, chegamos num absurdo, concluindo que $\overline{\lambda} = 0$, o que implica a simetria de u em relação ao eixo x_2, como veremos adiante.

Capítulo 2

Considerações Iniciais

Neste capítulo começamos a desenvolver a teoria e os pré-requisitos necessários ao bom entendimento de todos os resultados deste trabalho. Enunciamos resultados clássicos da teoria das EDP´s, incluindo principios do máximo e lemas que resultam de suas aplicações e, finalmente, enunciamos e provamos um refinamento do Lema de Hopf.

2.1 Teoria Clássica de EDP

Definição 2.1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Considere o operador L definido em $C^2(\Omega)$ por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

Dizemos que o operador L é uniformemente elíptico se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = \langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \lambda|\xi|^2$$

para todo $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, onde $A(x) := (a_{ij})_{n\times n}$ é uma matriz simétrica de coeficientes mensuráveis a_{ij}.

Definição 2.1.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Para $u \in C^2(\Omega)$. Definimos o *Laplaciano de u* por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}.$$

Teorema 2.1.3. *(Princípio Fraco do Máximo) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, e seja L uniformemente elíptico em Ω, com $c = 0$. Suponhamos que $Lu \leq 0$ $(Lu \geq 0)$ em Ω, onde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right).$$

Teorema 2.1.4. *(Princípio Forte do Máximo) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e conexo. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ em Ω, e L uniformemente elíptico em Ω, com $c = 0$.*
(i) Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge máximo em um ponto interior a $\bar{\Omega}$ então u é constante em Ω.
(ii) Se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge mínimo em um ponto interior a $\bar{\Omega}$ então u é constante em Ω.

Observação 2.1.5. Os dois teoremas acima são provados em [8], no caso geral em que Lu é um operador diferencial linear da forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u,$$

onde L é uniformemente elíptico em Ω.

Lema 2.1.6 (Lema de Hopf)**.** *Suponhamos que L é uniformemente elíptico, $c = 0$ e $Lu \leq 0$ em Ω. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que* *(i) u é continua em x_0;*

(ii) $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$;

(iii) $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0;

Então,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é o vetor unitário normal exterior a Ω em x_0.

Se $c \leq 0$ e c/λ é limitado, a mesma conclusão é valida desde que $u(x_0) \geq 0$, e se $u(x_0) = 0$ a mesma conclusão é valida indiferente do sinal de c.

Observação 2.1.7. Este teorema acima é provado em [11], no caso geral em que Lu é um operador diferencial linear da forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

onde L é uniformemente elíptico em Ω.

Lema 2.1.8 (Um refinamento do lema de Hopf)**.** *Seja um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, e $c \in L^\infty(\Omega)$. Suponhamos que*

$$-\Delta u + cu \geq 0 \text{ em } \Omega$$
$$u \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Além disso vamos supor que $u \not\equiv 0$.

(i) Se $x_0 \in \partial\Omega$, $v(x_0) = 0$, e Ω satisfaz a condição da esfera interior em x_0, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

(ii) Mais ainda,

$$u > 0 \ em \ \Omega.$$

Demonstração. Seja $\omega := e^{-\lambda x_1} u$, onde $\lambda > 0$ a ser escolhido depois. Então $u = e^{\lambda x_1}\omega$, e

$$cu \geq \Delta u = \Delta(e^{\lambda x_1}\omega) = \lambda^2 u + 2\lambda e^{\lambda x_1}\omega_{x_1} + e^{\lambda x_1}\Delta\omega.$$

Logo,

$$-\Delta\omega - 2\lambda\omega_{x_1} \geq e^{-\lambda x_1}u(\lambda^2 - c) = \omega(\lambda^2 - c) \geq 0.$$

Se $\lambda = \| c \|_{L^\infty}^{1/2}$.

Consequentemente ω é solução do operador uniformemente elíptico $K\omega := -\Delta\omega - 2\lambda\omega_{x_1}$, e $K\omega \geq 0$. Então, pelo Princípio Forte do Máximo, temos que $\omega > 0$ em Ω. De fato, como $u \geq 0$ em Ω, temos que $\omega \geq 0$ em Ω, se existisse um ponto $x \in \Omega$, tal que $\omega(x) = 0$, então pelo Príncipio Forte do Máximo, teriamos $\omega \equiv 0$ em Ω e consequentemente $u \equiv 0$, o que é absurdo pela hipótese. Portanto $\omega > 0$ em Ω. Agora aplicando o Lema de Hopf, concluimos que $\frac{\partial\omega}{\partial\nu}(x_0) < 0$. Mas

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu}(x_0) = \nabla\omega(x_0).\nu(x_0) = e^{-\lambda(x_0)_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)$$

pois $u(x_0) = 0$. Como $e^{-\lambda(x_0)_1} > 0$, então $\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)$.

Agora para concluir (ii) basta notar que $\omega > 0$ em Ω. $\square$

Capítulo 3

Propriedades de Simetria e Monotonicidade

3.1 Preliminares

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\gamma \in S^1$, definimos o conjunto

$$\Sigma_\lambda(\gamma) = \{x \in \Omega \mid \gamma \cdot x > \lambda\};$$

a reta

$$T_\lambda(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \gamma \cdot x = \lambda\};$$

e a reflexão de $\Sigma_\lambda(\gamma)$ com respeito à $T_\lambda(\gamma)$ como

$$\widetilde{\Sigma}_\lambda(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^2 | 2(\lambda - \gamma \cdot x)\gamma + x \in \Sigma_\lambda(\gamma)\}.$$

Definição 3.1.1. Seja $\lambda \in S^1$. Dizemos que o domínio limitado Ω é γ-

convexo, se para qualquer $x \in \Omega$ o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : x + t\gamma \in \Omega\}$ é um intervalo.

Observação 3.1.2. Quando Ω é γ-convexo e simétrico com respeito a $T_{\lambda_s}(\gamma)$, $\lambda_s \in R$, então

$$\widetilde{\Sigma}_\lambda(\gamma) \subset \Omega \ \forall \lambda \geq \lambda_s.$$

Neste trabalho tomamos o domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

O1) Ω satisfaz a condição da esfera interior e sua fronteira é C^1.

O2) Ω é γ-convexo e simétrico com respeito a $T_{\lambda_s}(\gamma)$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\forall d \in S^1 \quad \text{com} \quad \mid d - \gamma \mid < \delta \quad \text{temos} \ \ \widetilde{\Sigma}_\lambda(d) \subset \Omega \ \forall \lambda > \lambda_s + \varepsilon.$$

Veja a figura (3.1).

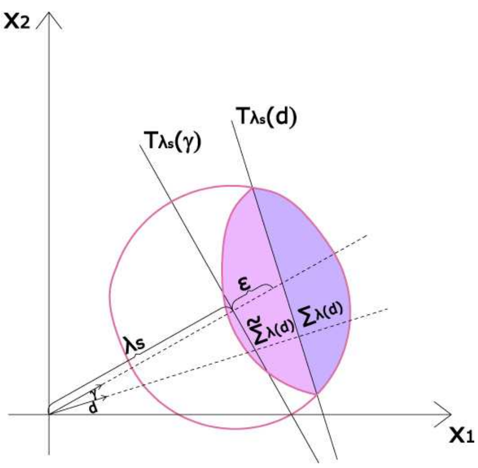

Figura 3.1:

A partir daqui, sem perda de generalidade, tomamos $\lambda = e_1 = (1,0)$, a linha de simetria de Ω como sendo $T_0(e_1)$. E denotamos $\Sigma_\lambda = \Sigma_\lambda(e_1)$, $T_\lambda = T_\lambda(e_1)$ e supomos que $\Sigma_\lambda = \emptyset \Leftrightarrow \lambda > 1$. Consideramos também a reflexão de $x \in \Omega$ com respeito a T_λ como $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x_2)$ e definimos $\omega_\lambda(x) = u_\lambda(x) - u(x)$ para $x \in \Sigma_\lambda$ onde $u_\lambda(x) = u(x_\lambda)$.

O resultado principal será provado para este domínio particular, mas com isto conseguimos o resultado para um domínio geral, isto é, para um $\gamma \in S^1$ qualquer e o domínio simétrico em relação a uma linha T ortogonal a γ, já que a equação $\Delta u + f(u) = 0$ é invariante por rotações e translações e com a homotetia, pode aparecer uma constante k multiplicando a equação, desta forma, dividindo a equação por k, as propriedades da função f se mantêm.

Lema 3.1.3. *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a solução de (1.1), onde f satisfaz (H1) e (H2), e o domínio Ω satisfaz (O1) e (O2). Então dado $\eta > 0$, $\exists$ $\varepsilon > 0$ tal que se $x = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ é tal que $x_1 \geq \eta$ e $dist(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$, então $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} < 0$.*

Demonstração. As seguintes afirmações serão usadas na prova.

Afirmação 1) Se $f(0) > 0$, temos $\Delta u(x) \leq 0$, para x próximo de $\partial\Omega$.

De fato, por (H1) temos que f é continua em $[0, +\infty)$ e como $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é continua e $u(x) \geq 0$, temos que $f \circ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é continua e se $\overline{x} \in \partial\Omega$ então $f \circ u(\overline{x}) = f(0) > 0$, logo para $x \in \Omega$ suficientemente próximo de $\partial\Omega$ temos $f(u(x)) \geq 0$. Assim,

$$\Delta u(x) + f(u(x)) = 0 \quad \text{e} \quad f(u(x)) \geq 0 \Rightarrow \Delta u(x) \leq 0.$$

Afirmação 2) Se $f(0) \leq 0$, temos $\Delta u + (c-1)u \leq 0$ para x próximo de

$\partial\Omega$.

De fato, por (H2) temos $\liminf \frac{f(u)}{u} \geq \overline{c}$ quando $u > 0$ e $u \to 0$. Assim, existe $c < \overline{c}$ tal que $\frac{f(u)}{u} \geq c$ para $x \in \Omega$ suficientemente próximo de $\partial\Omega$ e

$$\Delta u + (c-1)u \leq \Delta u + \frac{f(u)}{u}u - u \leq \Delta u + \frac{f(u)}{u}u = 0 \Rightarrow \Delta u + (c-1)u \leq 0.$$

Agora supomos que o lema não vale. Então existe $\eta > 0$ e uma sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_1^k > \eta, \quad x^k \to \partial\Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x^k) \geq 0.$$

Podemos supor esta que esta sequência seja convergente. Seja $\overline{x} = lim(x^k)$, então

$$\overline{x} \in \partial\Omega \quad \text{e} \quad \overline{x} = (\overline{x}_1, \ \ \overline{x}_2), \quad \text{com} \ \ \overline{x}_1 \geq \eta \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) \geq 0.$$

Mas por outro lado, se ν é o vetor normal a $\partial\Omega$ no ponto $\overline{x}$, então temos $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\overline{x}) < 0$, pois aplicamos o Lema de Hopf para $Lu = \Delta u$ (afirmação1) ou $Lu = \Delta u + (c-1)u$ (afirmação2).

Além disto $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$, portanto a derivada no ponto $\overline{x}$ na direção t é zero, onde t é o vetor tangente a $\partial\Omega$ no ponto $\overline{x}$. Sabendo que t e ν formam uma base em $\mathbb{R}^2$, temos

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\nu) + \frac{\partial u}{\partial t}(t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}\alpha_1 e_1 + \frac{\partial u}{\partial \nu}\alpha_2 e_2,$$

já que $\nu = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ e $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Sabendo que por (O2) o vetor $\nu = (\alpha_1, \alpha_2)$

tem sempre a componente na direção de e_1 positiva, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) = \nabla u.e_1 = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\nu).e_1 = \frac{\partial u}{\partial \nu}\alpha_1(\overline{x}) < 0,$$

pois $\alpha_1 > 0$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$. □

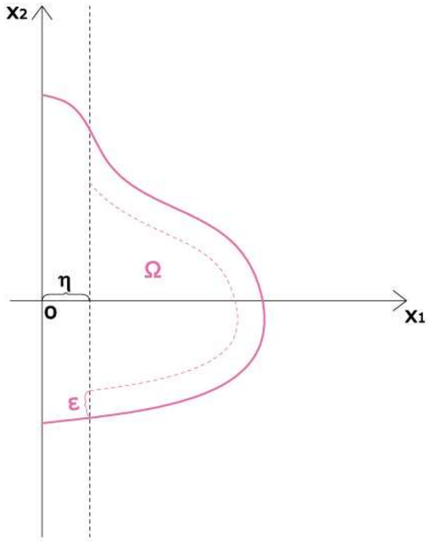

Figura 3.2:

Antes de apresentar o próximo lema definimos o seguinte conjunto

$$\overline{\lambda} = inf\{\lambda \in (0,1) : \frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) < 0 \ em \ \Sigma_\lambda\}.$$

Pelo lema anterior podemos observar que o conjunto $\{\lambda \in (0,1) | \frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) < 0 \ em \ \Sigma_\lambda\} \neq \emptyset$ pois, para λ suficientemente próximo de 1, temos $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ em Σ_λ.

Então faz sentido tomar o ínfimo deste conjunto, e $\overline{\lambda} \in [0,1)$. Nosso objetivo é mostrar que $\overline{\lambda} = 0$, pois assim mostraremos que u é simétrico com respeito à linha T_0, que é o eixo x_2.

Mas se $\overline{\lambda} > 0$, temos que existe $\overline{x} \in T_{\overline{\lambda}}$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) = 0$, devido a continuidade uniforme de $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e a hipótese de que $\overline{\lambda}$ é o ínfimo. Note que $\overline{x}$ não pertence a $\partial\Omega$, por causa do lema anterior, pois tomando $\eta = \overline{\lambda}$, sabemos que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $\forall\ x \in \overline{\Omega}$ com $x_1 \geq \overline{\lambda}$ e $dist(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$ temos $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$, logo se $\overline{x} \in T_{\overline{\lambda}}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) = 0$ então $dist(\overline{x}, \partial\Omega) > \varepsilon$.

Desta forma, supondo $\overline{\lambda} > 0$, conseguiremos alguns resultados importantes que serão fundamentais para provar o resultado final.

Lema 3.1.4. *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a solução de (1.1), onde f satisfaz (H1) e (H2), e Ω satisfaz (O1) e (O2). Então, as seguintes propriedades ocorrem:*

i) $\forall\lambda > \overline{\lambda}$, temos $\omega_\lambda(x) > 0\ \forall x \in \Sigma_\lambda$,
Caso $\overline{\lambda} > 0$, então:
ii) $\forall x \in \Sigma_{\overline{\lambda}}$ temos $\omega_{\overline{\lambda}} > 0$,
iii) Se $x \in T_{\overline{\lambda}}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = 0$, então $\nabla u(x) = 0$.

Demonstração. i) Observe que do lema anterior temos $\omega_\lambda(x) > 0$, para qualquer $x \in \Sigma_\lambda$, e para todo $\lambda < 1$, mas próximo de 1. Agora supomos que (i) é falso, isto é,

$$\exists\ \lambda_0 > \overline{\lambda} \ \text{ tal que } \ \omega_{\lambda_0}(x) \leq 0 \ \text{ para algum } \ x \in \Sigma_{\lambda_0}.$$

Consideramos então

$$\lambda^* = \inf\{\widetilde{\lambda}\ :\ \omega_\lambda(x) > 0, \quad \text{para} \quad x \in \Sigma_\lambda, \quad \text{onde} \lambda > \widetilde{\lambda}\},$$

logo $\overline{\lambda} < \lambda_0 \leq \lambda^*$, assim $\lambda^* > \overline{\lambda}$. Note que tomando $\overline{\lambda} < \lambda' < \lambda^*$, temos que

$$\exists \lambda_k \in (\lambda', \lambda^*) \quad \text{e} \quad x_k \in \Sigma_{\lambda_k} \quad \text{tal que} \quad \omega_{\lambda_k}(x_k) \leq 0,$$

pois caso contrário λ^* não seria o ínfimo. Portanto, existem sequências $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\lambda_k \in (\overline{\lambda}, \lambda^*)$ e $x_k \in \Sigma_{\lambda_k}$, onde $\lambda_k \to \lambda^*$ quando $k \to \infty$ e $\omega_{\lambda_k}(x_k) \leq 0$. Além disso, podemos extrair da sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência, a qual denotaremos por $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ para não carregar a notação, com

$$x_k \to x^*, \quad \text{onde} \quad x^* \in \overline{\Sigma}_{\lambda^*} \quad \text{e} \quad \omega_{\lambda^*}(x^*) = 0.$$

De fato $\omega_{\lambda^*}(x^*) = 0$, pois $\omega_{\lambda_k}(x_k) \leq 0$ e $\omega_{\lambda_k}(x_k) \to \omega_{\lambda^*}(x^*)$ já que

$$\begin{aligned} |\ \omega_{\lambda_k}(x_k) - \omega_{\lambda^*}(x^*)\ | &= |\ u_{\lambda_k}(x_k) - u(x_k) - (u_{\lambda^*}(x^*) - u(x^*))\ | \\ &\leq |\ u_{\lambda_k}(x_k) - u_{\lambda^*}(x^*)\ | + |\ u(x^*) - u(x_k)\ | \\ &= |\ u(2\lambda_k - x_{1k}, x_{2k}) - u(2\lambda^* - x_1^*, x_2^*)\ | \\ &+ |\ u(x_k) - u(x^*)\ | = d_k, \end{aligned}$$

onde $x_k = (x_{1k}, x_{2k})$ e $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lambda_k \to \lambda^*$, $x_k \to x^*$ e u contínua, temos que $d_k < \varepsilon$ para k suficientemente grande, e assim, $\omega_{\lambda^*}(x^*) \leq 0$. Mas por outro lado, $x^* \in \overline{\Sigma}_{\lambda^*}$. Logo, existe uma sequência $\overline{\lambda}_k \geq \lambda^*$ tal que $\overline{\lambda}_k \to \lambda^*$ e $\overline{x}_k \to x^*$ onde $\overline{x}_k \in \Sigma_{\overline{\lambda}_k}$ e $\omega_{\overline{\lambda}_k}(\overline{x}_k) > 0$. Portanto, $\omega_{\lambda^*}(x^*) \geq 0$ e concluimos então que $\omega_{\lambda^*}(x^*) = 0$.

Observamos que x^* não pode pertencer a $\partial\Omega$, pois se $x^* \in \partial\Omega$ temos que

$x^*_{\lambda^*} = (2\lambda - x_1^*, x_2^*) \in \Omega$, pela propriedade (O2), e

$$\omega_{\lambda^*}(x^*) = u_{\lambda^*}(x^*) - u(x^*) = u_{\lambda^*}(x^*) = u(2\lambda - x_1^*, x_2^*) > 0,$$

o que é um absurdo, pois $\omega_{\lambda^*}(x^*) = 0$.

Se $x^* \in T_{\lambda^*}$ então, por um lado, temos que

$$\frac{\partial \omega_{\lambda^*}}{\partial x_1}(x^*) = \frac{\partial u_{\lambda^*}}{\partial x_1}(x^*) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*) = -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*) > 0,$$

pois $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*) < 0$, já que $\lambda^* > \overline{\lambda}$. Mas, por outro lado, $\omega_{\lambda_k}(x_k) \leq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta_k \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\theta_k x_k + (1-\theta_k)(x_k)_{\lambda_k}) = \frac{u(x_k) - u_{\lambda_k}(x_k)}{2(x_{1k} - \lambda_k)} = \frac{-\omega_{\lambda_k}(x_k)}{2(x_{1k} - \lambda_k)} \geq 0,$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \mid (x_k)_{\lambda_k} - x_k \mid = 0.$$

Como

$$(\theta_k x_k + (1-\theta_k)(x_k)_{\lambda_k}) \in ((x_k)_{\lambda_k}, x_k) \ \text{ e } \ \lim_{k\to\infty}(x_k) = x^*,$$

temos que

$$\lim_{k\to\infty} \theta_k x_k + (1-\theta_k)(x_k)_{\lambda_k}) = x^*.$$

Assim

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\theta_k x_k + (1-\theta_k)(x)_{\lambda_k}) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*),$$

logo $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*) \geq 0$, obtendo uma contradição.

Agora vamos ver que x^* não pode pertencer a Σ_{λ^*}. Note que $\lambda^* > \overline{\lambda}$ e então $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*) < 0$, pela definição de $\overline{\lambda}$. Como $\omega_{\lambda^*}(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \Sigma_{\lambda^*}$, supondo $x^* \in \Sigma_{\lambda^*}$, temos que $\frac{\partial \omega_{\lambda^*}}{\partial x_1}(x^*) = 0$, já que $\omega_{\lambda^*}(x^*) = 0$ e x^* é um ponto de mínimo. Sabendo que

$$\frac{\partial \omega_{\lambda^*}}{\partial x_1}(x^*) = \frac{\partial u_{\lambda^*}}{\partial x_1}(x^*) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*) = 0,$$

concluimos também que $\frac{\partial u_{\lambda^*}}{\partial x_1}(x^*) < 0$. Então, pelo Teorema da função Implícita, existe uma vizinhança V de $(u(x^*), x_2^*) \in \mathbb{R}^2$ e duas funções v e $\overline{v}$ de classe C^2 que satisfazem

$$t = u(v(t, x_2), x_2)$$

$$t = u_{\lambda^*}(\overline{v}(t, x_2), x_2).$$

Agora por alguns cálculos, que deixamos para o apêndice (1ª parte), a função v satisfaz a equação quase-linear

$$\left(1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x_2} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^3 f(t)$$

Note que em V esta equação é uniformemente elíptica, pois a matriz $(a_{ij}(t, x_2))_{i,j} =: (a_{ij})_{i,j}$ relativa às derivadas de segunda ordem da equação satisfaz

$$\langle (a_{ij})\xi, \xi \rangle \geq \lambda \mid \xi \mid^2 > 0 \quad \forall \quad (t, x_2) \in V \quad \text{e} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

A conclusão acima também deixamos para o apêndice (2ª parte).

Consideramos agora a função $z(t, x_2) = v(t, x_2) - \overline{v}(t, x_2)$ que satisfaz a equação

$$\left(1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x_2} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + b_1\frac{\partial z}{\partial t} + b_2\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$$

onde os coeficientes b_i são dados por:

$$b_1(t, x_2) = -2\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x_2 \partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x_2^2} + f(t)\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}\right)^2\right\}$$

$$b_2(t, x_2) = \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x_2 \partial t}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Observe que todos os coeficientes do operador diferencial são limitados.

Como $z \leq 0$ em V, pois

$$u(v(t, x_2), x_2) = t = u_\lambda(\overline{v}(t, x_2), x_2) \geq u(\overline{v}(t, x_2), x_2),$$

já que $\omega_\lambda(x) \geq 0$, e como $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$, temos $\overline{v}(t, x_2) \geq v(t, x_2)$. Além disso,

$$z(u(x^*), x_2^*) = 0,$$

pois as curvas de nível

$$\gamma = \{u(x) = u(x^*)\} \quad \text{e} \quad \overline{\gamma} = \{u_{\lambda^*}(x) = u(x^*)\},$$

são gráficos das funções $x_2 \mapsto v(u(x^*), x_2)$ e $x_2 \mapsto \overline{v}(u(x^*), x_2)$, respectivamente. Observamos que

$$x^* \in \gamma \cap \overline{\gamma} \quad \text{e} \quad v(x_2^*) = x_1^* = \overline{v}(x_2^*),$$

e portanto em $(u(x^*), x_2^*)$ temos

$$v(u(x^*), x_2^*) = x_1^* = \overline{v}(u(x^*), x_2^*).$$

Então, pelo Princípio Forte do Máximo, temos $z \equiv 0$ em V. Logo, próximo de x^* temos $\omega_{\lambda^*} \equiv 0$ em Σ_{λ^*}, pois

$$\omega_{\lambda^*} = u_{\lambda^*}(v(t,x_2),x_2) - u(v(t,x_2),x_2) = u_{\lambda^*}(\overline{v}(t,x_2),x_2) - u(v(t,x_2),x_2) = t - t = 0$$

em uma vizinhança de $(v(u(x^*), x_2^*), x_2^*) = (x_1^*, x_2^*) = x^*$. Este argumento poderia ter sido feito para qualquer ponto de Σ_{λ^*}, sendo assim $\omega_{\lambda^*} \equiv 0$ em Σ_{λ^*}. Agora observamos que

$$\omega_{\lambda^*}(x) = u_{\lambda^*}(x) - u(x) = u_{\lambda^*}(x) > 0, \quad \forall x \in \ \partial\Omega \cap \overline{\Sigma}_{\lambda^*}.$$

Logo, existe uma vizinhança V_0 de $x \in \partial\Omega \cap \overline{\Sigma}_{\lambda^*}$ tal que $\omega_{\lambda^*}(x) > 0$. Mas isto é um absurdo, pois $\omega_{\lambda^*} = 0$ em Σ_{λ^*}.

(ii) $\forall \lambda > \overline{\lambda}$ temos $\omega_\lambda(x) > 0$ em Σ_λ, por (i). Então, fazendo $\lambda \to \overline{\lambda}$, temos $\omega_{\overline{\lambda}}(x) \geq 0$ em $\Sigma_{\overline{\lambda}}$. Agora se $\omega_{\overline{\lambda}}(\overline{x}) = 0$ para algum $\overline{x} \in \Sigma_{\overline{\lambda}}$, da mesma forma que foi demonstrado acima, usando o Princípio Forte do Máximo, temos que $\omega_{\overline{\lambda}} \equiv 0$ em $\Sigma_{\overline{\lambda}}$, mas novamente isto não pode, pois $u > 0$ em Ω e $\omega_{\overline{\lambda}}(x) = u_{\overline{\lambda}}(x) > 0$ em $\partial\Omega \cap \overline{\Sigma}_{\overline{\lambda}}$.

iii) Supomos que $\overline{x} \in T_{\overline{\lambda}}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) = 0$ e $\nabla u(\overline{x}) \neq 0$. Então, temos que

$\frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x}) \neq 0$ e também $\frac{\partial u_{\overline{\lambda}}}{\partial x_2}(\overline{x}) \neq 0$, já que $\frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x}) = \frac{\partial u_{\overline{\lambda}}}{\partial x_2}(\overline{x})$. Desta forma, podemos fazer o mesmo como anteriormente, usando o Teorema da Função Implícita, existem v e $\overline{v}$ que satisfazem as seguintes equações:

$$t = u(x_1, v(x_1, t))$$

$$t = u_\lambda(x_1, \overline{v}(x_1, t)).$$

Seja $z(x_1, t) = v(x_1, t) - \overline{v}(x_1, t)$. Logo, z satisfaz uma equação similar à do item (i), isto é, uma equação diferencial parcial uniformemente elíptica, onde $c = 0$ e $f = 0$. Observamos que $z(\overline{x}_1, u(\overline{x})) = 0$, pois $v(\overline{x}_1, u(\overline{x})) = \overline{v}(\overline{x}_1, u(\overline{x}))$. Também temos que $z(x_1, t) > 0$, para $x_1 > \overline{\lambda} = \overline{x}_1$, pois para $x_1 > \overline{\lambda}$ temos $\omega_{\overline{\lambda}}(x_1, x_2) > 0$, então

$$u(x_1, \overline{v}(x_1, t)) < u_{\overline{\lambda}}(x_1, \overline{v}(x_1, t)) = t = u(x_1, v(x_1, t)),$$

e, portanto,

$$u(x_1, \overline{v}(x_1, t)) < u(x_1, v(x_1, t)).$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x_2} > 0$, temos que $\overline{v}(x_1, t) < v(x_1, t)$, isto é, $z(x_1, t) > 0$. Desta forma, podemos aplicar o Lema de Hopf para função z no ponto $(\overline{x}_1, u(\overline{x}))$, concluindo que $\frac{\partial z}{\partial x_1}(\overline{x}_1, u(\overline{x})) < 0$.

Derivando as equações dadas em relação a x_1, temos

$$(1)\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\frac{\partial v}{\partial x_1}(\overline{x}_1, u(\overline{x}))$$

$$(2)\ 0 = \frac{\partial u_{\overline{\lambda}}}{\partial x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \frac{\partial u_{\overline{\lambda}}}{\partial x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_1}(\overline{x}_1, u_{\overline{\lambda}}(\overline{x})).$$

Como

$$0=\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=\frac{\partial u_{\overline{\lambda}}}{\partial x_1}(\overline{x}_1,\overline{x}_2),\frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=\frac{\partial u_{\overline{\lambda}}}{\partial x_2}(\overline{x}_1,\overline{x}_2),u(\overline{x})=u_{\overline{\lambda}}(\overline{x}),$$

igualando (1) e (2) temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x})\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(\overline{x}_1,u(\overline{x}))-\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_1}(\overline{x}_1,u(\overline{x}))\right)=\frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x})\frac{\partial z}{\partial x_1}(\overline{x}_1,u(\overline{x}))=0,$$

e então

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x})=0,$$

o que é absurdo pela hipótese. □

Lema 3.1.5. *Considerando mesmas hipóteses do lema anterior e* $\overline{\lambda}>0$. *Então* $\forall\ \overline{x}\in T_{\overline{\lambda}}$ *tal que* $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x})=0$ *temos* $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x})=0$.

Demonstração. Suponhamos $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x})>0$, como $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x})=0$, temos

$$0<\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x})=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}+he_1)}{h}$$

então $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}+he_1)>0$ para h suficientemente pequeno, isto é, $\frac{\partial u}{\partial x_1}>0$ para pontos a direita de $\overline{x}$, o que é absurdo pela hipótese de $\overline{\lambda}$.

Agora suponhamos que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x})<0$. Isto é, temos que

$$\exists\quad a>0\quad\text{tal que}\quad -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x})=a>0.$$

Primeiro observamos que se $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$ está próximo de $\overline{\lambda}$, então a função

$$x_1 \mapsto \omega_\lambda(x_1, \overline{x}_2), \quad \forall x_1 \in [\lambda, b],$$

tem um mínimo negativo em (λ, b) onde $b > \overline{\lambda}$ e $(b, \overline{x}_2) \in \partial\Omega$. De fato, usando o desenvolvimento de Taylor em torno de $\overline{x} = (\overline{\lambda}, \overline{x}_2)$ e sabendo que $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{\lambda}, \overline{x}_2) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_1}(x_1, \overline{x}_2) = \frac{\partial u_\lambda}{x_1}(x_1, \overline{x}_2) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \overline{x}_2) &= -\frac{\partial u}{\partial x_1}(2\lambda - x_1, \overline{x}_2) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \overline{x}_2) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial x_1}(2\lambda - x_1 + \overline{\lambda} - \overline{\lambda}, \overline{x}_2) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + \overline{\lambda} - \overline{\lambda}, \overline{x}_2) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{\lambda}, \overline{x}_2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{\lambda}, \overline{x}_2)(2\lambda - x_1 - \overline{\lambda}) + o(|2\lambda - x_1 - \overline{\lambda}|) \\
&- \frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{\lambda}, \overline{x}_2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{\lambda}, \overline{x}_2)(x_1 - \overline{\lambda}) + o(|x_1 - \overline{\lambda}|) \\
&= -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{\lambda}, \overline{x}_2)(2\lambda - x_1 - \overline{\lambda}) + o(|2\lambda - x_1 - \overline{\lambda}) \\
&- \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{\lambda}, \overline{x}_2)(x_1 - \overline{\lambda}) + o(|x_1 - \overline{\lambda}|) \\
&= 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{\lambda}, \overline{x}_2)(\overline{\lambda} - \lambda) + o(|2\lambda - x_1 - \overline{\lambda}|) + o(|x_1 - \overline{\lambda}|) \\
&= -2a(\overline{\lambda} - \lambda) + o(|2\lambda - x_1 - \overline{\lambda}|) + o(|x_1 - \overline{\lambda}|).
\end{aligned}$$

Logo, para $\overline{\lambda} - \lambda > 0$ e $\lambda < x_1 < \overline{\lambda}$, com $\overline{\lambda} - \lambda$ suficientemente pequeno, temos que $\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_1}(x_1, \overline{x}_2) < 0$ e, portanto, a função $\omega_\lambda(x_1, \overline{x}_2)$ possui um mínimo negativo, já que $\omega_\lambda(\lambda, \overline{x}_2) = 0$ e $\omega_\lambda(b, \overline{x}_2) = u_\lambda(b, \overline{x}_2) - u(b, \overline{x}_2) = u_\lambda(b, \overline{x}_2) > 0$.

Agora, seja $x_1(\lambda) \in (\lambda, b)$ o ponto onde o mínimo global da função

$\omega_\lambda(x_1, \overline{x}_2)$, que sabemos ser atingido, então

$$\omega_\lambda(x_1(\lambda), \overline{x}_2) < 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_1}(x_1(\lambda), \overline{x}_2) = 0. \tag{3.1}$$

Afirmamos então que

$$\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} \frac{\overline{\lambda} - \lambda}{x_1(\lambda) - \lambda} = 0. \tag{3.2}$$

Para provarmos esta afirmação usaremos o lema anterior que afirma que $\omega_{\overline{\lambda}}(x) > 0$ em $\Sigma_{\overline{\lambda}}$. Observamos, então, que

$$\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} \max\{x_1 - \lambda : \lambda < x_1 \ \text{ e } \ \omega_\lambda(x_1, \overline{x}_2) \leq 0\} = 0.$$

De fato, como $\max\{x_1 - \lambda : \lambda < x_1 \ \text{ e } \ \omega_\lambda(x_1, \overline{x}_2) \leq 0\} > 0$, temos que

$$\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} \max\{x_1 - \lambda : \lambda < x_1 \ \text{ e } \ \omega_\lambda(x_1, \overline{x}_2) \leq 0\} \geq 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} \max\{x_1 - \lambda : \lambda < x_1 \ \text{ e } \ \omega_\lambda(x_1, \overline{x}_2) \leq 0\} \leq 0,$$

pois caso contrário, existiria $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(x_{1n}, \lambda_n)_n$ tal que $x_{1n} - \lambda_n > \varepsilon$ para $|\lambda_n - \overline{\lambda}| < \frac{\varepsilon}{2}$, assim

$$\varepsilon < x_{1n} - \lambda_n = x_{1n} - \lambda_n + \overline{\lambda} - \overline{\lambda} < x_{1n} - \overline{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} < x_{1n} - \overline{\lambda} \Rightarrow x_{1n} > \overline{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow (\widetilde{x}_1, \overline{x}_2) \in \Sigma_{\overline{\lambda}} \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda_n \to \overline{\lambda}} \omega_{\lambda_n}(x_{1n}, \overline{x}_2) = \omega_{\overline{\lambda}}(\widetilde{x}_1, \overline{x}_2) > 0,$$

onde $\widetilde{x}_1 = \lim_{\lambda_n \to \overline{\lambda}} x_{1n}$, pois podemos supor x_{1n} convergente. Obtendo uma contradição. Com isto, concluimos que

$$\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} x_1(\lambda) - \lambda = 0,$$

pois

$$0 < x_1(\lambda) - \lambda < \max\{x_1 - \lambda : \lambda < x_1 \ \text{ e } \ \omega_\lambda(x_1, \overline{x}_2) \leq 0\},$$

e, portanto,

$$0 \leq \lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} x_1(\lambda) - \lambda \leq \lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} \max\{x_1 - \lambda : \lambda < x_1 \ \text{ e } \ \omega_\lambda(x_1, \overline{x}_2) \leq 0\} = 0.$$

Desta forma, temos a seguinte situação

$$\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} x_1(\lambda) - \lambda = 0 \ \text{ e } \ \lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} \overline{\lambda} - \lambda = 0$$

e nosso objetivo é mostrar a afirmação (3.2). Suponhamos que a afirmação seja falsa. Aplicando novamente o desenvolvimento de Taylor e usando (3.1), temos

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_1}(x_1(\lambda), \overline{x}_2) \\
&= -\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1}(x_1(\lambda), \overline{x}_2) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(\lambda), \overline{x}_2) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}(2\lambda - x_1(\lambda), \overline{x}_2) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(\lambda), \overline{x}_2) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x})(2\lambda - x_1(\lambda) - \overline{\lambda}) \\
&+ o(|2\lambda - x_1(\lambda) - \overline{\lambda}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x})(x_1(\lambda) - \overline{\lambda}) + o(|x_1(\lambda) - \overline{\lambda}|) \\
&= -2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x})(\overline{\lambda} - \lambda) + o(|2\lambda - x_1(\lambda) - \overline{\lambda}| + |x_1(\lambda) - \overline{\lambda}|).
\end{aligned}
$$

Como a afirmação não é verdadeira, então para alguma sequência temos que $x_1(\lambda) - \lambda = O(\overline{\lambda} - \lambda)$ e então

$$0 = -2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x})(\overline{\lambda} - \lambda) + o(\overline{\lambda} - \lambda),$$

onde $\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}} \frac{o(\overline{\lambda} - \lambda)}{\overline{\lambda} - \lambda} = 0$. Assim, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x}) = 0$, absurdo pela hipótese.

De agora em diante, para tornar a notação mais clara, como $x_2 = \overline{x}_2$ está fixo, vamos ocultar $\overline{x}_2$.

Para $\lambda < \overline{\lambda}$, definimos $\varepsilon(\lambda) = x_1(\lambda) - \lambda$, $\eta(\lambda) = u(\overline{x}_1) - u(x_1(\lambda))$ e $\zeta(\lambda) = u_\lambda(\overline{x}_1) - u_\lambda(x_1(\lambda))$, e consideramos as seguintes funções

$$v^\lambda(y) = (\eta(\lambda))^{-1}[u(\varepsilon(\lambda)y + \lambda) - u(\overline{x}_1)]$$

$$\overline{v}^\lambda(y) = (\zeta(\lambda))^{-1}[u_\lambda(\varepsilon(\lambda)y + \lambda) - u(\overline{x}_1)].$$

Então, temos que

$$-1 = v^\lambda(1) = \min_{s\in(0,1)} v^\lambda(s) \leq v^\lambda(y) \leq \max_{s\in(0,1)} v^\lambda(s) = v^\lambda(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = 0.$$

De fato, as desigualdades são triviais e a primeira e a última igualdade são fáceis de verificar pelos cálculos abaixo

$$v^\lambda(1) = \frac{u(\varepsilon(\lambda)+\lambda) - u(\overline{x}_1)}{\eta(\lambda)} = \frac{u(x_1(\lambda)) - u(\overline{x}_1)}{-u(x_1(\lambda)) + u(\overline{x}_1)} = -1$$

$$v^\lambda(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = \frac{u(\overline{\lambda}-\lambda+\lambda) - u(\overline{x}_1)}{\eta(\lambda)} = \frac{u(\overline{\lambda}) - u(\overline{x}_1)}{u(\overline{x}_1) - u(x_1(\lambda))} = 0,$$

pois $\overline{\lambda} = \overline{x}_1$ e $u(\overline{x}_1) - u(x_1(\lambda)) \neq 0$.

Basta agora mostrar que $v^\lambda(1) = \min_{s\in(0,1)} v^\lambda(s)$ e $v^\lambda(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = \max_{s\in(0,1)} v^\lambda(s)$. Para isto, primeiro note que $\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}$ é um ponto de máximo local de v^λ, isto é, para qualquer $y \in (\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)} - \delta_\lambda, \frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)} + \delta_\lambda)$ temos $v^\lambda(y) \leq v^\lambda(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)})$, onde δ_λ depende da função v^λ, pois $\frac{\partial v^\lambda}{\partial y}(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = 0$ e $\frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial y^2}(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) < 0$. Além disto, $\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)} \to 0$ quando $\overline{\lambda} \to \lambda$. Como estamos interessados em λ próximos de $\overline{\lambda}$, então, para λ suficientemente próximos de $\overline{\lambda}$, temos que

$$v^\lambda(y) \leq v^\lambda(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}), \quad \forall y \in (0, \frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}).$$

Agora para qualquer $y > \frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}$ temos $\varepsilon(\lambda)y + \lambda > \overline{\lambda}$, logo $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\varepsilon(\lambda)y+\lambda) < 0$, pela definição de $\overline{\lambda}$. Desta forma,

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial y}(y) = \frac{\varepsilon(\lambda)}{\eta(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(\varepsilon(\lambda)y+\lambda), \quad \forall y \in (\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}, 1).$$

Como $\frac{\varepsilon(\lambda)}{\eta(\lambda)} > 0$, então $\frac{\partial v^\lambda}{\partial y}(y) < 0$ e, portanto, v^λ é decrescente em $(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}, 1)$, concluindo que

$$v^\lambda(1) = \min_{s\in(0,1)} v^\lambda(s) \text{ e } v^\lambda(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = \max_{s\in(0,1)} v^\lambda(s).$$

Também temos

$$-1 = \overline{v}^\lambda(1) = \min_{s\in[-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)},1]} \overline{v}^\lambda(s) \leq \overline{v}^\lambda(y) \leq \max_{s\in[-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)},1]} \overline{v}_\lambda(s) = \overline{v}^\lambda(-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = 0.$$

Da mesma forma que antes, as desigualdades são triviais e a primeira e a última igualdade seguem dos cálculos abaixo

$$\overline{v}^\lambda(1) = \frac{u_\lambda(\varepsilon(\lambda)+\lambda) - u(\overline{x}_1)}{\zeta(\lambda)} = \frac{u_\lambda(x_1(\lambda)) - u(\overline{x}_1)}{u(\overline{x}_1) - u_\lambda(x_1(\lambda))} = -1$$

$$\overline{v}^\lambda(-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = \frac{u_\lambda(2\lambda - \overline{\lambda}) - u(\overline{x}_1)}{\zeta(\lambda)} = \frac{u(\overline{\lambda}) - u(\overline{x}_1)}{\zeta(\lambda)} = 0,$$

pois $\zeta(\lambda) \neq 0$ e $\overline{\lambda} = \overline{x}_1$.

Basta mostrar que

$$\overline{v}^\lambda(1) = \min_{s\in[-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)},1]} \overline{v}^\lambda(s) \quad \text{e} \quad \max_{s\in[-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)},1]} \overline{v}_\lambda(s) = \overline{v}^\lambda(-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}).$$

Primeiro note que $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{\lambda}) = 0$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{\lambda}) = -a$, logo $\overline{\lambda}$ é ponto de máximo local e existe uma vizinhança $(\overline{\lambda}-\delta, \overline{\lambda})$ tal que para qualquer $y \in (\overline{\lambda}-\delta, \overline{\lambda})$, temos $\frac{\partial u}{\partial x_1}(y) > 0$. Sabendo que

$$\frac{\partial \overline{v}^\lambda}{\partial y}(y) = \frac{-x_1(\lambda)+\lambda}{u(\overline{x}_1)-u_\lambda(x_1(\lambda))}\frac{\partial u}{\partial x_1}(\lambda-(x_1(\lambda)-\lambda)y), \quad y \in [-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}, 1],$$

temos

$$-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)} \leq y \leq 1 \Rightarrow \overline{\lambda} \geq -(x_1(\lambda)-\lambda)y+\lambda \geq -x_1(\lambda)+2\lambda.$$

Desta forma, considerando λ próximos de $\overline{\lambda}$ tal que $-x_1(\lambda)+2\lambda > \overline{\lambda}-\delta$, temos que $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\lambda-(x_1(\lambda)-\lambda)y) > 0$ e $\frac{-x_1(\lambda)+\lambda}{u(\overline{x}_1)-u_\lambda(x_1(\lambda))} < 0$, já que $-x_1(\lambda)+\lambda < 0$ e $u(\overline{x}_1)-u_\lambda(x_1(\lambda)) > 0$. Concluimos, então, que $\frac{\partial \overline{v}^\lambda}{\partial y}(y) < 0$ para qualquer $y \in [-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}, 1]$ e λ suficientemente próximo de $\overline{\lambda}$, ou seja, $\overline{v}^\lambda$ é decrescente e, portanto,

$$\overline{v}^\lambda(1) = \min_{s\in[-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)},1]} \overline{v}^\lambda(s) \;\text{ e }\; \max_{s\in[-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)},1]} \overline{v}_\lambda(s) = \overline{v}^\lambda(-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}).$$

Derivando as funções v^λ e $\overline{v}^\lambda$, obtemos as seguintes equações

$$-\frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon^2}{\eta}(\lambda)g^\lambda(y)$$

$$-\frac{\partial^2 \overline{v}^\lambda}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon^2}{\eta}(\lambda)h^\lambda(y),$$

onde $g^\lambda(y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\varepsilon(\lambda)y+\lambda)$ e $h^\lambda(y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\lambda-\varepsilon(\lambda)y)$.

Note que g^λ e h^λ convergem uniformente para $-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}(\overline{x}) = a > 0$. Temos também que $\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} v^\lambda(1) = \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \overline{v}^\lambda(1) = -1$, pois $v^\lambda(1) = \overline{v}^\lambda(1) = -1$ e $\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} v^\lambda(0) = \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \overline{v}^\lambda(0) = 0$. Mostramos esta ultima igualdade para

$\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} v^\lambda(0) = 0$, para $\overline{v}^\lambda$ é análogo.

Como
$$\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{\overline{\lambda}-\lambda}{x_1(\lambda)-\lambda} = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{x_1(\lambda)-\lambda}{\overline{\lambda}-\lambda} = +\infty,$$
segue que

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{x_1(\lambda)-\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}-\lambda} &= \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{x_1(\lambda)-\lambda}{\overline{\lambda}-\lambda} + \frac{\lambda-\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}-\lambda} \\ &= -1 + \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{x_1(\lambda)-\lambda}{\overline{\lambda}-\lambda} = +\infty \Rightarrow \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{\overline{\lambda}-\lambda}{x_1(\lambda)-\overline{\lambda}} = 0.\end{aligned}$$

Note que

$$v^\lambda(0) = \frac{u(\lambda)-u(\overline{\lambda})}{u(\overline{\lambda})-u(x_1(\lambda))}$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{\lambda})(\lambda-\overline{\lambda}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{\lambda})\frac{(\lambda-\overline{\lambda})^2}{2} + o(|\lambda-\overline{\lambda}|^2)}{-[\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{\lambda})(\overline{\lambda}-x_1(\lambda)) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{\lambda})\frac{(\overline{\lambda}-x_1(\lambda))^2}{2} + o(|\overline{\lambda}-x_1(\lambda)|^2)]}$$

$$= \frac{-\frac{a}{2}(\lambda-\overline{\lambda})^2 + o(|\lambda-\overline{\lambda}|^2)}{\frac{a}{2}(\overline{\lambda}-x_1(\lambda))^2 + o(|\overline{\lambda}-x_1(\lambda)|^2)} = \frac{-(\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}-x_1(\lambda)})^2 + \frac{o(|\overline{\lambda}-\lambda|^2)}{\frac{a}{2}(\overline{\lambda}-x_1(\lambda))^2}}{1 + \frac{o(|\overline{\lambda}-x_1(\lambda)|^2)}{\frac{a}{2}(\overline{\lambda}-x_1(\lambda))^2}}.$$

Sabendo que $-(\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}-x_1(\lambda)})^2 \to 0$ por (3.2), e $\frac{o(|\overline{\lambda}-\lambda|^2)}{\frac{a}{2}(\overline{\lambda}-x_1(\lambda))^2} \to 0$, já que

$$\frac{o(|\overline{\lambda}-\lambda|^2)}{\frac{a}{2}(\overline{\lambda}-x_1(\lambda))^2} = \frac{o(|\overline{\lambda}-\lambda|^2)}{|\overline{\lambda}-\lambda|^2}\frac{|\overline{\lambda}-\lambda|^2}{\frac{a}{2}|\overline{\lambda}-x_1(\lambda)|^2},$$

onde $\frac{o(|\overline{\lambda}-\lambda|^2)}{|\overline{\lambda}-\lambda|^2} \to 0$ por definição e $\frac{|\overline{\lambda}-\lambda|^2}{\frac{a}{2}|\overline{\lambda}-x_1(\lambda)|^2} \to 0$ por (3.2),
e $\frac{o(|\overline{\lambda}-x_1(\lambda)|^2)}{\frac{a}{2}(\overline{\lambda}-x_1(\lambda))^2} \to 0$ por definição, concluindo assim que $\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} v^\lambda(0) = 0$.

Assim temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{\varepsilon^2(\lambda)}{\eta(\lambda)} &= \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{(x_1(\lambda)-\lambda)^2}{u(\overline{\lambda})-u(x_1(\lambda))} \\
&= \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{(x_1(\lambda)-\lambda)^2}{-[\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{\lambda})(x_1(\lambda)-\overline{\lambda}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{\lambda})\frac{(x_1(\lambda)-\overline{\lambda})^2}{2} + o(|x_1(\lambda)-\overline{\lambda}|^2)} \\
&= \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{(x_1(\lambda)-\lambda)^2}{\frac{a}{2}(x_1(\lambda)-\overline{\lambda})^2 + o(x_1(\lambda)-\overline{\lambda})^2} = \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{\frac{(x_1(\lambda)-\lambda)^2}{(x_1(\lambda)-\overline{\lambda})^2}}{\frac{a}{2} + \frac{o(x_1(\lambda)-\lambda)^2}{(x_1(\lambda)-\overline{\lambda})^2}} \\
&= \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{x_1(\lambda)-\overline{\lambda}} + \frac{x_1(\lambda)-\overline{\lambda}}{x_1(\lambda)-\overline{\lambda}})^2}{\frac{a}{2} + \frac{o(x_1(\lambda)-\overline{\lambda})^2}{(x_1(\lambda)-\overline{\lambda})^2}} = \frac{2}{a}.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, mostramos que $\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{\varepsilon^2(\lambda)}{\zeta(\lambda)} = \frac{2}{a}$. E, consequentemente, $\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{\partial v^\lambda}{\partial y}(1) = \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{\partial \overline{v}^\lambda}{\partial y}(1) = -2$, pois

$$
\frac{\partial v^\lambda}{\partial y}(1) = \frac{\partial v^\lambda}{\partial y}\left(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}\right) + \frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial y^2}\left(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}\right)\left(1-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}\right) + o\left(\left|1-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}\right|\right),
$$

onde

$$
\frac{\partial v^\lambda}{\partial y}(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = 0, \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}}(1-\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = 1
$$

e

$$
\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial y^2}(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = \lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} -\frac{\varepsilon^2(\lambda)}{\eta(\lambda)} g^\lambda(\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\varepsilon(\lambda)}) = -\frac{2}{a}.a = -2.
$$

Da mesma forma mostramos para $\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}} \frac{\partial \overline{v}^\lambda}{\partial y}(1) = -2$.

Então,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(\lambda)) = \frac{\eta(\lambda)}{\varepsilon(\lambda)}\frac{\partial v^\lambda}{\partial y}(1) = -2\frac{\eta(\lambda)}{\varepsilon(\lambda)}(1+o(1)),$$

e

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1}(x_1(\lambda)) = \frac{\zeta(\lambda)}{\varepsilon(\lambda)}\frac{\partial v^\lambda}{\partial y}(1) = -2\frac{\zeta(\lambda)}{\varepsilon(\lambda)}(1+o(1)),$$

onde $o(1) \to 0$ quando $\lambda \to \overline{\lambda}$.

Daí e da definição de $x_1(\lambda)$, temos

$$0 = \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_1}(x_1(\lambda)) = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1}(x_1(\lambda)) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(\lambda)) = -2\frac{\zeta(\lambda)-\eta(\lambda)}{\varepsilon(\lambda)}(1+o(1)).$$

Como $(1+o(1)) \neq 0$, temos $\zeta(\lambda) - \eta(\lambda) = 0$.

Mas, por outro lado, temos

$$\begin{aligned} 0 > \omega(x_1(\lambda)) &= u_\lambda(x_1(\lambda)) - u(x_1(\lambda)) \\ &= [u_\lambda(x_1(\lambda)) - u(\overline{\lambda})] - [u(x_1(\lambda)) - u(\overline{\lambda})] = \zeta(\lambda) - \eta(\lambda), \end{aligned}$$

o que é um absurdo. $\square$

3.2 Resultado Final

Teorema 3.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio aberto limitado e $\beta \in S^1$. Supomos que Ω é $\beta -$ convexo e simétrico com respeito a linha T ortogonal a β e satisfaz (O1) e (O2). Supomos também que f satisfaz (H1), (H2) e (H3). Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é solução de (1.1). Então u é simétrico com respeito a T.*

Demonstração. Supomos sem perda de generalidade que $\beta = e_1$ e Ω simétrico com respeito a linha $T_0(e_1)$, além disso $\Sigma_\lambda = \emptyset \Leftrightarrow \lambda > 0$. Com isto consideramos $\overline{\lambda} = inf\{\lambda \in (0,1) : \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \ em \ \Sigma_\lambda\}$ e pelo Lema 3.1.3 temos que $\{\lambda \in (0,1) : \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \ em \ \Sigma_\lambda\} \neq \emptyset$, logo $\overline{\lambda} \in [0,1)$.

Precisamos mostra que $\overline{\lambda} = 0$, caso contrário existe $\overline{x} \in T_{\overline{\lambda}}$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) = 0$ e portanto $\nabla u(\overline{x}) = 0$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0$, pelo Lema 3.1.4 e 3.1.5 .

Afimação:$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$

Primeiro escolhemos entre os $\overline{x} \in T_{\overline{\lambda}}$ tal que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}(\overline{x}) = 0$ o ponto de maior coordenada x_2.

Além disso pela propriedade (O2), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\gamma \in S^1$ com $|\gamma - e_1| < \delta$, temos $\overline{\Sigma}_\lambda(\gamma) \subset \Omega$ para todo $\lambda > \varepsilon$. Assim rotamos e_1 ligeiramente num ângulo positivo θ, até obter γ, onde γ satisfaz a propriedade (O2) para ε suficientemente pequeno.

Observe que para λ grande, $\Sigma_\lambda(\gamma) = \emptyset$. Logo existe $c > 0$ tal que $\Sigma_\lambda(\gamma) \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \in [0,c)$ e usando uma nova versão do Lema 3.1.3 .

Lema 3.2.2. *Dado $\eta > \varepsilon$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$ com $x.\gamma \geq \eta$ e $dist(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon_0$ temos $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) = \nabla u(x).\gamma < 0$.*

Concluimos que para $\lambda < c$ suficientemente próximo de c temos $\nabla u.\gamma < 0$ em Σ_λ. Consideramos então

$$\overline{\lambda}(\gamma) = inf\{\lambda \in [0,c) : \frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0 \ em \ \Sigma_\lambda(\gamma)\}.$$

Observe que $\overline{\lambda}(\gamma)$ esta bem definido e $\overline{\lambda}(\gamma) \in [0,c)$.

Começamos assim o movimento dos planos deslizantes, isto é, deslizamos $T_\lambda(\gamma)$ na direção γ até encontrar um ponto $x \in \Omega$ tal que $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) = 0$.

Pela definição acima este ponto pertence a $T_{\overline{\lambda}(\gamma)}$. Observe também que $\overline{x} \notin \Sigma_{\overline{\lambda}}(\gamma)$, pois $\nabla u(\overline{x}) = 0$ e portanto $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(\overline{x}) = \nabla u(\overline{x}).\gamma = 0$. Logo $\overline{x} \notin \Sigma_{\overline{\lambda}}(\gamma)$ pela definição de $\overline{\lambda}(\gamma)$.

Entre os pontos $x \in T_{\overline{\lambda}(\gamma)}$ tal que $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) = 0$, escolhemos o de maior componente x_2 e denotamos este ponto por $x(\gamma)$.

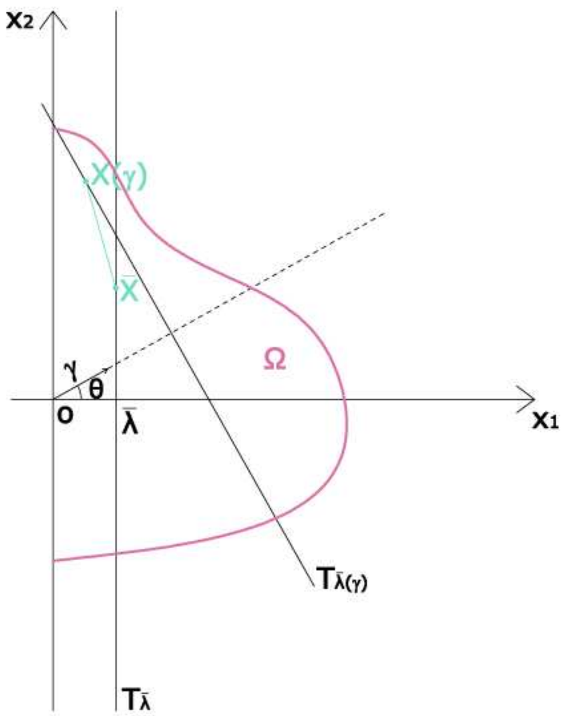

Figura 3.3:

Note que $\nabla u(x(\gamma)) = 0$, basta aplicar o lema (3.1.4) para a direção γ. Assim concluimos que $x(\lambda) \notin \Sigma_{\overline{\lambda}}$, pois $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x(\gamma)) = \nabla u(x(\gamma)).e_1 = 0$ e portanto $x(\gamma) \notin \Sigma_{\overline{\lambda}}$ pela definição de $\overline{\lambda}$.

Com estas observações temos que $T_{\overline{\lambda}(\gamma)}$ intercepta $t_{\overline{\lambda}}$ em um ponto $\widetilde{x} = (\overline{x}_1, \widetilde{x}_2)$ onde $\widetilde{x}_2 \geq \overline{x}_2$ e $x(\gamma) = (x_1(\gamma), x_2(\gamma))$ satisfaz $x_2(\gamma) \geq \widetilde{x}_2$ e portanto

$x_2(\gamma) \geq \overline{x}_2$. Se $x_2(\gamma) = \overline{x}_2$ então $x(\gamma) = \overline{x}$. Logo o movimento dos planos deslizantes para no ponte $\overline{x}$ ou antes de atingi-lo, isto é, para em um ponto onde o gradiente se anula, apenas por isso já que a propriedade $(O2)$ garante que não ocorre uma obstrução do domínio, ou seja, $\widetilde{\Sigma}_{\overline{\lambda}(\gamma)} \subset \Omega$. Observe a figura abaixo:

Podemos analisar dois casos, o primeiro quando o movimento do plano para no ponto $\overline{x}$ ou o segundo caso quando o movimento para antes e desta forma concluir a afirmação. Para isto vamos fazer a seguinte construção: consideramos uma sequencia $\gamma_n \in S^1$ onde θ_n é o ângulo positivo entre γ_n e e_1, $\gamma_n \to e_1$ e $|e_1 - \gamma| \geq |e_1 - \gamma_n| \forall n$. Da mesma forma que fizemos acima, podemos aplicar o método dos planos deslizantes e o movimento para quando encontramos um ponto $x(\gamma_n)$ de maior componente $x_2(\gamma_n)$ tal que $\nabla x(\gamma_n) = 0$. Assim temos dois casos

1º caso: $x(\gamma_n) = \overline{x}$ para algum n.

Note que se $x(\gamma_n) = \overline{x}$ então para qualquer $\theta_m < \theta_n$ temos $x(\gamma_m) = \overline{x}$, pois caso contrário $x(\gamma_m) \in \Sigma_{\overline{\lambda}(\gamma_n)} \cup \Sigma_{\overline{\lambda}}$ e $\nabla x(\gamma_m) = 0$, absurdo. Portanto, temos $x(\gamma_n) = \overline{x} = x(\gamma_m)$ e pelo Lema 3.1.5 temos $u_{\gamma_n\gamma_n}(\overline{x}) = u_{x_1x_1}(\overline{x}) = u_{\gamma_m\gamma_m}(\overline{x}) = 0$. Como as direções γ_n,γ_m e e_1 são linearmente independentes duas a duas e estamos em $\mathbb{R}^2$, então $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\overline{x}) = 0$.

2º caso: $x(\gamma_n) \neq \overline{x}\ \forall n$.

Seja $\tau_n = \frac{x(\gamma_n)-\overline{x}}{|x(\gamma_n)-\overline{x}|}$. Note que o ângulo do segmento $\overline{\overline{x}x(\gamma_n)}$ e e_2, o qual denotamos por α_n, ver figura (3.4), satisfaz

$$\alpha_n \leq \angle(T_{\overline{\lambda}(\gamma_n)}, e_2) = \angle(\gamma_n, e_1) = \theta_n.$$

Como $\theta_n \to 0$ então $\alpha_n \to 0$ e consequentemente $\tau_n \to e_2$.

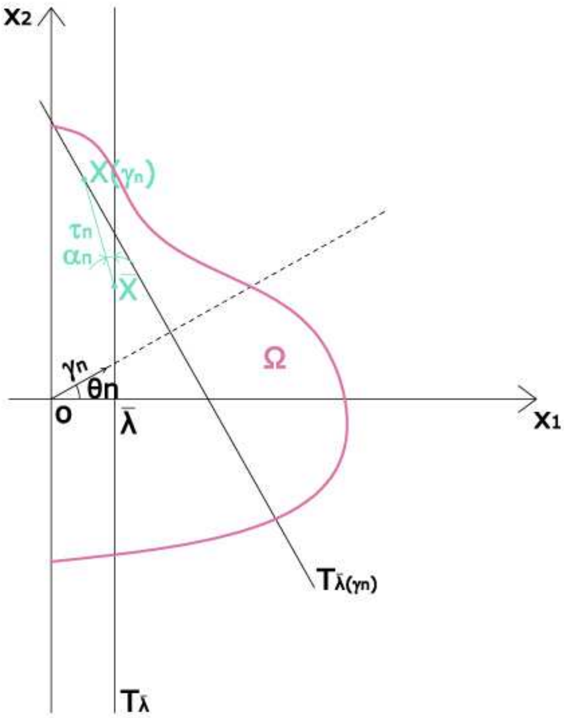

Figura 3.4:

Além disso a menos de uma subsequência, $x(\gamma_n) \to y$ onde $y \in T_{\overline{\lambda}}$. Note que $y = \overline{x}$, pois caso contrário, teríamos $y_2 > \overline{x}_2$, obtendo uma contradição pois $\nabla u(y) = 0$ e $\overline{x}$ não seria o ponto com maior componente x_2 tal que o gradiente se anula.

Agora observe que $\frac{\partial u}{\partial \tau_n}(x(\gamma_n)) = \frac{\partial u}{\partial \tau_n}(\overline{x}) = 0$ e pelo Teorema do Valor Médio, existe $\widetilde{x}(\gamma_n) \in [\overline{x}, x(\gamma_n)]$ tal que $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau_n^2}(\widetilde{x}(\gamma_n)) = 0$. Como

$$\widetilde{x}(\gamma_n) \to \overline{x} \text{ e } \tau_n \to e_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_n^2}(\widetilde{x}(\gamma_n)) \to \frac{\partial^2 u}{\partial e_2^2}(\overline{x}).$$

Concluindo assim que $\frac{\partial^2 u}{\partial e_2^2}(\overline{x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\overline{x}) = 0$ e provando a afirmação.

Assim temos $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\overline{x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\overline{x}) = 0$ e portanto $f(u(\overline{x})) = 0$ pois $\Delta u(x) + f(u(x)) = 0$. Pelo Lema 3.1.4 temos que $\omega_{\overline{\lambda}}(x) = u_{\overline{\lambda}}(x) - u(x) > 0$ em $\Sigma_{\overline{\lambda}}$ e $\omega_{\overline{\lambda}}(x)$ satisfaz a equação

$$\Delta\omega_{\overline{\lambda}}(x) + \frac{\{f(u_{\overline{\lambda}}) - f(u(x))\}}{u_{\overline{\lambda}}(x) - u(x)}\omega_{\overline{\lambda}} = 0 \ em \ \Sigma_{\overline{\lambda}},$$

basta substituir em $\Delta u + f(u) = 0$.

Usando a hipótese (H3) obtemos $\Delta\omega_{\overline{\lambda}} + c\omega_{\overline{\lambda}} \leq 0$ em $\Sigma_{\overline{\lambda}}$ onde $c \in \mathbb{R}$.

Ficamos então com a seguinte situação:

$$\Delta\omega_{\overline{\lambda}} + c\omega_{\overline{\lambda}} \leq 0 \ em \ \Sigma_{\overline{\lambda}}$$
$$\omega_{\overline{\lambda}} > 0 \ em \ \Sigma_{\overline{\lambda}}$$

Então aplicando o refinamento do lema de Hopf, temos que $\frac{\partial \omega_{\overline{\lambda}}}{\partial x_1}(\overline{x}) > 0$. E como $\frac{\partial \omega_{\overline{\lambda}}}{\partial x_1}(\overline{x}) = -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}) > 0$, absurdo pela hipótese. Concluimos então que $\overline{\lambda} = 0$.

Portanto $u(-x_1, x_2) \geq u(x_1, x_2)$ pelo Lema 3.1.4, pois $\forall\lambda > \overline{\lambda}$ temos $\omega_\lambda(x) > 0$ em Σ_λ, isto é, $u_\lambda(x) > u(x)$, $u(2\lambda - x_1, x_2) > u(x_1, x_2)$, fazendo $\lambda \to \overline{\lambda} = 0$ e como u é continua temos $u(-x_1, x_2) \geq u(x_1, x_2)$.

Agora usando todos esses argumentos para o outro lado, obtemos $u(-x_1, x_2) \geq u(x_1, x_2)$ e portanto $u(-x_1, x_2) = u(x_1, x_2)$. $\square$

Capítulo 4

Apêndice

1ª Parte) No capítulo anterior usamos o Teorema da Função Implícita para função u sabendo que $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*) < 0$ e chegamos na seguinte equação

$$t = u(v(t, x_2), x_2). \tag{4.1}$$

Desta forma, estamos definindo um novo sistema de coordenadas (t, x_2). E queremos mostrar que a funçaõ v satisfaz a equação

$$\left(1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x_2} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^3 f(t), \tag{4.2}$$

sabendo que $\Delta u(x_1, x_2) + f(u(x_1, x_2)) = 0$.

Definimos a seguinte mudança de coordenadas:

$$t = u(x_1, x_2) = u(v(t, s), h(t, s)) = \widetilde{u}(t, s) = \widetilde{u}(t(x_1, x_2), s(x_1, x_2)),$$

onde $h(t, s) = s$ e $s(x_1, x_2) = x_2$. Fazendo os cálculos temos os seguintes resultados:

1^{a}) Afirmação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)}.$$

De fato, primeiro observamos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_1}(t(x_1,x_2), s(x_1,x_2)) = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_1} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_1}$$

Como $\dfrac{\partial s}{\partial x_1} = 0$ e $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = 1$, então $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial t}{\partial x_1}$.

Mas derivando (4.1) em relação a t temos

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Então $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial v}{\partial t}}$.

Com isto, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right).\frac{\partial t}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right).\frac{\partial s}{\partial x_1} \\ &= \frac{-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)}\frac{\partial t}{\partial x_1} = \frac{-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)}\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}} = \frac{-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}.\end{aligned}$$

Concluindo a 1^{a} afirmação.

2^{a}) Afirmação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{2\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^3}.$$

De fato, derivando (4.1) em relação a s, temos

$$0 = \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x_2},$$

pois $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial v}{\partial t}}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial s} = 1$. Então

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial s}}{\dfrac{\partial v}{\partial t}}.$$

Com isto temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^2}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial s}}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial s}}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right)\frac{\partial t}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial s}}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right)\frac{\partial s}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial s}}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right)\left(\frac{-\frac{\partial v}{\partial s}}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial s}}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right).1 \\
&= -\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial s}}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right) - \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t}}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{2\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial s}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^3}.
\end{aligned}$$

Concluindo a 2ª afirmação.

Agora substituindo em $\Delta u(x_1, x_2) + f(u(x_1, x_2)) = 0$, temos

$$\left(1 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial s} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^3 f(t).$$

Substituindo $s = x_2$, obtemos (4.2).

2ª Parte) Outro resultado importante que foi usado no capítulo anterior é o fato da equação (4.2) ser uniformemente elíptica.

Note que em V esta equação é uniformemente elíptica, pois a matriz $(a_{ij}(t, x_2))_{i,j} =: (a_{ij})_{i,j}$ relativa às derivadas de segunda ordem da equação satisfaz

$$\langle (a_{ij})\xi, \xi\rangle \geq \lambda \mid \xi \mid^2 > 0 \quad \forall \quad (t, x_2) \in V \quad \text{e} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

De fato, $(a_{ij})_{i,j}$ é uma matriz simétrica, portanto diagonalizável, assim

$$\lambda(x) \mid \xi \mid^2 \leq \langle a_{ij}\xi, \xi \rangle \leq \Lambda(x) \mid \xi \mid^2,$$

onde $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ são o menor e o maior autovalor de $(a_{ij})_{i,j}$, respectivamente. Precisamos garantir que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $x \in V$ e $\xi \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ temos $\lambda_0 \mid \xi \mid^2 \leq \langle (a_{ij})_{i,j}\xi, \xi \rangle$. Mas note que $\det(a_{ij}) = \lambda(x)\Lambda(x)$ e, pelos cálculos, $\det(a_{ij}) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x_1}}\right)^2$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$. Então, $\det(a_{ij}) = \lambda(x)\Lambda(x) > c > 0$ em uma vizinhança de x^*. Suponhamos, sem perda de generalidade, que essa vizinhança seja V. Além disso $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ são limitados superiormente em V, isto é existe um $M > 0$ tal que $M > \lambda(x)$ e $M > \Lambda(x)$. Logo

$$M > \lambda(x) > \frac{c}{\Lambda(x)} > \frac{c}{M} > 0 \quad \text{e} \quad M > \Lambda(x) > \frac{c}{\lambda(x)} > \frac{c}{M} > 0.$$

Tomamos, então, $\lambda_0 = \frac{c}{M}$ e conseguimos o desejado.

Bibliografia

[1] H.Berestycki, L.Nirenberg; *On the method of moving planes and the sliding method*, Bol.Soc.Bras.Mat.22 (1), 1-37, 1991.

[2] H.Berestycki, L.Caffarelli, L.Nirenberg; *Monotonicity for elliptc equations in unbounded Lipschitz domains*, Comm.Pure Appl. Math. 50 (11), 1089-1111, 1997.

[3] F. Brock; *Continuous rearrangement and symmetry of solutions of elliptc problems*, Preprint.

[4] C.Cortázar, M.Elgueta, P.Felmer; *On a semilinear elliptic problem with a non-Lipschitzian non-linearity*, Advances in Differential Equations 1 (2), 199-218, 1996.

[5] C.Cortázar, M.Elgueta, P.Felmer; *Symmetry in an elliptic problem and the blow-up set of a quasilinear heat equation*, Comm. in Partial Diff. Equations, 21 (3 e 4), 507-520, 1996.

[6] J.Dolbeault, P.Felmer; *Symmetry and monotonicity properties for positive solutions of semi-linear elliptic PDE´s*, commun. in partial differential equations, 25 (5 e 6), 1153-1169, 2000.

[7] M.J.Esteban, P.L.Lions; *Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problens in unbounded domains*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 93, (1-2), 1-14, 1982/83.

[8] L. C. Evans; *Partial Differential Equations*, Graduated Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society (1998).

[9] B.Gidas, W.M.Ni, L.Nirenberg; *Simmetry and Related Properties via the Maximum Principle*, Commun. Math. Phys. 68, 209-243, 1979.

[10] B.Gidas, W.M.Ni, L.Nirenberg; *Simmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Advances in Math. Studies 7 A, 209-243, 1979.

[11] D. Gilbarg e N. Trudinger; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin, New York: Springer-Verlag (2001).

[12] C.Gui; *Symmetry of the blow up set of a porous medium type equation*, Comm. Pure Appl. Math. $\underline{XLVIII}$, 471-500, 1995.

[13] C.Li; *Monotonicity and symmetry of solutions of fully nonlinear elliptic equations in unbounded domains*, Comm. in Partial Diff.Equations 16 (4 e 5), 585-615, 1991.

[14] Y.Li, W.M.Ni; *Radial symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. in Partial Diff.Equations 18 (5 e 6), 1043-1054, 1993.

[15] E. L. Lima; *Análise Real Vol. 3 - Análise Vetorial*, Coleção Matemática Universitária, SBM, (2007).

[16] P. L. Lions; *Two geometrical properties of solutios of semilinear problems*, Applicable Anal. 12 (4),267-272, 1981.

[17] J. Serrin; *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Rat. Mech. Anal.43, 304-318, 1971.