Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Regularidade, Birregularidade e Propriedades Relacionadas em Skew Extensões por Ações Parciais Torcidas

Tese de Doutorado

Simone Francisco Ruiz

Porto Alegre, 15 de dezembro de 2017

Tese submetida por Simone Francisco Ruiz*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Matemática, pelo Programa de Pós Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Wagner de Oliveira Cortes

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (IM-UFRGS)
Profª. Drª. Barbara Seelig Pogorelsky (IM-UFRGS)
Prof. Dr. Laerte Bemm (DMA-UEM)
Profª. Drª. Thaisa Raupp Tamusiunas (UFCSPA)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

À minha família

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, que foi infinitamente misericordioso comigo em todos os momentos e à Nossa Senhora, que sempre atendeu aos meus pedidos de intercessão.

À minha família, meus pais Bernadete e Antonio, e minhas irmãs, Ana Claudia, Adriana e Fernanda, por terem sido minha razão, minha fé e meu chão quando mais precisei.

Ao meu orientador, Professor Wagner Cortes, pela paciência e atenção que teve comigo durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos. Àqueles que foram presentes, apesar da distância geográfica e aos que me acolheram em Porto Alegre e fizeram cada dia destes últimos quatro anos serem inesquecíveis.

Por fim, à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superir), pelo auxílio financeiro.

“Ore como se tudo dependesse de Deus
e trabalhe como se tudo dependesse de você.”
(Santo Agostinho)

Resumo

Neste trabalho consideramos ações parciais torcidas de um grupo G sobre um anel A com unidade. Neste sentido, investigamos algumas propriedades do produto cruzado parcial $A *_\alpha G$, tais como a sua birregularidade e o seu radical regular. Também introduzimos o skew anel das séries de potências parciais torcidas e o skew anel das séries de Laurent parciais torcidas. No que diz respeito a estes anéis, estudamos a primalidade, a semiprimalidade e as propriedades de Goldie dos mesmos. Apresentamos ainda o skew anel da séries de potências parciais generalizadas torcidas, denotado por $A[[G, \alpha]]$ e investigamos quando este anel é regular e fortemente regular.

Palavras-Chave: Ação parcial torcida, produto cruzado parcial, skew anel das séries de Laurent parciais torcidas, skew anel das séries de potências parciais generalizadas torcidas, skew anel das séries de potências parciais torcidas.

Abstract

In this work we consider twisted partial actions of a group G on a unital ring A. In this sense, we investigate some properties of the partial crossed product $A *_\alpha G$, such as biregularity and its regular radical. We also introduce the twisted partial skew power series ring and the twisted partial skew Laurent series ring. About these rings, we study the primality, the semiprimality and the Goldie properties. Moreover, we present the twisted partial skew generalized power series ring $A[[G, \alpha]]$ and we study when this ring is regular and strong regular.

Keywords: Twisted partial action, partial crossed product, twisted partial skew Laurent series ring, twisted partial skew generalized power series ring, twisted partial skew power series ring.

índice

Introdução

A noção de ação parcial de um grupo é uma extensão da noção de ação (global) de grupo. Ações parciais de grupos apareceram primeiramente na teoria de álgebra de operadores como uma ferramenta geral para a pesquisa de C^*-álgebras geradas por isometrias parciais, permitindo caracterizar diversas classes destas álgebras como produtos cruzados por ações parciais (ver, em particular, [11] e [12]). Os produtos cruzados se encontram no centro de uma rica interação entre sistemas dinâmicos e álgebras de operadores e os esforços em generalizá-los geram um novo conhecimento estrutural sobre álgebras, que podem ser vistos como produtos cruzados mais gerais.

A versão puramente algébrica de ações parciais de grupos sobre conjuntos (e sobre anéis) foi dada em [6], onde os autores mostraram que, sob certas condições, existe uma ação envolvente para uma dada ação parcial. Além disso, estudaram sob quais condições o skew anel de grupo parcial é uma álgebra associativa. Este trabalho desencadeou uma série de outros trabalhos sobre ações parciais de grupos.

As ações parciais torcidas são uma generalização da noção de ação parcial e foram introduzidas em [7]. Neste trabalho, entre outros resultados, os autores provaram que o produto cruzado parcial é um anel associativo. Em seguida, em [8], os autores deram condições necessárias e suficientes para a existência de uma ação envolvente, quando o anel possui unidade.

O objetivo desta tese é estudar algumas propriedades do produto cruzado parcial e também investigar propriedades importantes de alguns anéis que podem ser construídos quando temos uma ação parcial torcida.

No primeiro capítulo, introduzimos as principais definições e resultados que serão fundamentais para a compreensão do que seguirá nos demais capítulos.

No capítulo dois, estudamos a birregularidade do produto cruzado parcial, generalizando parte dos resultados obtidos por S. V. Mihoviski em [23] e por M. M. Parmenter e E. Spiegel em [24]. Também nos atentamos em investigar algumas propriedades do radical regular do produto cruzado parcial.

No capítulo três, consideramos uma ação parcial torcida do grupo aditivo $\mathbb{Z}$ sobre um anel com unidade A e, neste contexto, introduzimos o skew anel das séries de potências parciais torcidas e o skew anel das séries de Laurent parciais torcidas. No tocante a estes anéis, investigamos a primalidade, a semiprimalidade e as propriedades de Goldie dos mesmos.

Finalmente, no capítulo quatro, apresentamos o skew anel das séries de potências parciais generalizadas torcidas. Quando G é um grupo munido com uma relação de ordem estrita e α é uma ação parcial torcida de G sobre um anel unitário A, é possível definir o skew anel da séries de potências parciais generalizadas torcidas, denotado por $A[[G,\alpha]]$. No que tange a este anel, estudamos quando $A[[G,\alpha]]$ é regular e fortemente regular. Além disso, se G é um grupo bem ordenado, definimos o skew anel Malcev-Neumann parcial $A*_\alpha [[G]]$ e verificamos que este anel e o skew anel das séries de Laurent parciais torcidas são casos particulares de $A[[G,\alpha]]$.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é destinado a fornecer alguns conceitos e propriedades que serão utilizados no decorrer deste trabalho. A maioria dos resultados aqui apresentados já fazem parte da literatura e, por esta razão, suas demonstrações serão omitidas, sendo possível encontrá-las nas referências indicadas.

1.1 O Produto Cruzado Global

Iniciaremos a seção definindo o produto cruzado global e apresentaremos algumas propriedades a respeito deste produto.

Sejam T um anel com identidade, $Aut(T)$ o grupo de todos os automorfismos de T e G um grupo com elemento neutro 1_G. Assumiremos que G age (globalmente) sobre T, isto é, existe um homomorfismo de grupos $\beta : G \longrightarrow Aut(T)$ que associa a cada $g \in G$ um automorfismo β_g de T.

Suponhamos que exista uma aplicação $u : G \times G \longrightarrow U(T)$ (twisting) que a cada par $(g,h) \in G \times G$, associa o elemento inversível $u_{g,h}$ de T, onde $U(T)$ denota o grupo das unidades de T. O produto cruzado global $T *_\beta G$ de G sobre T é um T-módulo à esquerda livre formado por todas as somas finitas $\sum_{g \in G} t_g \delta_g$, onde os $\delta_g{}'s$ são símbolos, isto é,

$$T *_\beta G = \{\sum_{g \in G} t_g \delta_g : t_g \in T \text{ e } t_g \neq 0 \text{ para um número finito de } g \in G\}.$$

Em $T *_\beta G$ a soma é definida de forma usual e a multiplicação é dada por

$$(s_g \delta_g)(t_h \delta_h) = s_g \beta_g(t_h) u_{g,h} \delta_{gh},$$

para todos $s_g, t_h \in T$ e $g, h \in G$.

Notemos que os elementos $u_{g,h} \in U(T)$ satisfazem as condições do próximo lema, para todos $g, h \in G$. Com isso, a multiplicação definida anteriormente é associativa.

Lema 1.1.1. *[25, Lemma 1.1] A associatividade do produto cruzado global* $T *_\beta G$ *é equivalente as seguintes afirmações, para todos* $g, h, l \in G$ *:*

(i) $\beta_g \circ \beta_h(t) = u_{g,h} \beta_{gh}(t) u_{g,h}^{-1}$, *para todo* $t \in T$*;*

(ii) $\beta_g(u_{h,l}) u_{g,hl} = u_{g,h} u_{gh,l}$.

Observemos ainda que se $u_{g,h} = 1_T$, para todos $g, h \in G$, então o produto cruzado global $T *_\beta G$ é o skew anel de grupo global .

Seja β uma ação global torcida de um grupo G sobre um anel T. Um ideal I de T é denominado *β-invariante* se $\beta_g(I) = I$, para todo $g \in G$. O subanel dos elementos invariantes pela ação de G é o conjunto

$$B^G = \{b \in B : \beta_g(b) = b, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Se G é um grupo finito, podemos definir a *aplicação traço global* $tr_G : B \longrightarrow B^G$ dada por

$$tr_G(b) = \sum_{g \in G} \beta_g(b),$$

para todo $b \in B$.

Além disso, um ideal P de T é denominado *β-primo* se, dados ideais I e J de T β-invariantes, se $IJ \subseteq P$, então $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Se o ideal nulo for β-primo, então T será um *anel β-primo* .

O próximo torema nos apresenta uma propriedade interessante sobre ideais primos do produto cruzado global.

Teorema 1.1.2. *[25, Theorem 16.6 (iii)] Seja $T *_{\beta} G$ um produto cruzado global de um anel T sobre um grupo finito G. Se P_1 e P_2 são ideais primos de $T *_{\beta} G$ tais que $P_1 \cap T = P_2 \cap T$, então $P_1 = P_2$.*

1.2 Ações Parciais Torcidas

Apresentaremos aqui a definição de ação parcial torcida unitária de um grupo sobre uma K-álgebra, conceito este introduzido por M. Dokuchaev, R. Exel e J. J. Simón em [7]. Em [8], os autores dão condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial torcida (sobre um anel com unidade) possua envolvente.

Começamos definindo a álgebra dos multiplicadores. Mais detalhes sobre esta álgebra podem ser encontradas em [6].

Sejam K um anel comutativo com unidade, A uma K-álgebra associativa não necessariamente com unidade e I um ideal de A. Consideremos um elemento $x \in I$ e as respectivas multiplicações à esquerda e à direita de x em A,

$$L_x : A \longrightarrow A \quad \text{e} \quad R_x : A \longrightarrow A$$

dadas por $L_x(a) = xa$ e $(a)R_x = ax$, para todo $a \in A$. Então, L_x e R_x são transformações lineares que satisfazem as seguintes propriedades, para todos $a, b \in A$:

(i) $L_x(ab) = (L_x a)b$;

(ii) $(ab)R_x = a(bR_x)$;

(iii) $(aR_x)b = a(L_x b)$.

Definição 1.2.1. A álgebra dos multiplicadores de uma K-álgebra A é o conjunto $\mathcal{M}(A)$ de todos os pares ordenados (R, L), onde R e L são transformações lineares que satisfazem as propriedades $(i) - (iii)$ dadas anteriormente. Para quaisquer $\lambda \in K$ e $(R, L), (R', L') \in \mathcal{M}(A)$, as operações em $\mathcal{M}(A)$ são dadas por:

(i) $(R, L) + (R', L') = (R + R', L + L')$;

(ii) $(R, L)(R', L') = (R' \circ R, L' \circ L)$;

(iii) $\lambda(R, L) = (\lambda R, \lambda L)$.

Sejam $w = (R, L) \in \mathcal{M}(A)$ e $a \in A$. Escrevemos $aw = aR$ e $wa = La$ e, desta forma, temos que $(aw)b = a(wb)$, para quaisquer $a, b \in A$. A primeira (respectivamente, segunda) componente dos elementos de $\mathcal{M}(A)$ é denominada de *multiplicador à direita* (respectivamente, *multiplicador à esquerda*) de A. Uma importante informação sobre esta álgebra é que, no caso em que A é uma K-álgebra com unidade, A é isomorfa a $\mathcal{M}(A)$. Para mais detalhes, veja [6, Proposition 2.3].

Tendo esclarecido estes conceitos, estamos aptos a apresentar a definição de ação parcial torcida.

Definição 1.2.2. [7, Definition 2.1] Sejam G um grupo e A uma K-álgebra com unidade. Uma ação parcial torcida de G sobre A é uma tripla

$$\alpha = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h) \in G \times G}),$$

onde para cada $g \in G$, D_g é um ideal bilateral de A, $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ é um isomorfismo de K-álgebras , e para cada $(g, h) \in G \times G$, $w_{g,h}$ é um elemento inversível de $\mathcal{M}(D_g D_{gh})$, satisfazendo as seguintes condições, para todos $g, h, t \in G$:

(i) $D_g^2 = D_g, \;\; D_g D_h = D_h D_g$;

(ii) $D_{1G} = A$ e α_{1G} é a aplicação identidade;

(iii) $\alpha_g(D_{g^{-1}} D_h) = D_g D_{gh}$;

(iv) $\alpha_g \circ \alpha_h(a) = w_{g,h} \alpha_{gh}(a) w_{g,h}^{-1}$, para todo $a \in D_{h^{-1}} D_{h^{-1}g^{-1}}$;

(v) $w_{g,1_G} = w_{1_G,g} = 1$ (aplicação identidade de D_g);

(vi) $\alpha_g(a w_{h,t}) w_{g,ht} = \alpha_g(a) w_{g,h} w_{gh,t}$, para todo $a \in D_{g^{-1}} D_h D_{ht}$.

Quando $D_g = A$ para todo $g \in G$, temos uma *ação global torcida*. Uma outra notação para uma ação parcial torcida é dada por (A, α, w).

Segue imediatamente do item (i) que um produto finito de ideais $D_g D_h \cdots$ é idempotente. Além disso, pelo item (iii), temos que $\alpha_g(D_{g^{-1}} D_h D_f) = D_g D_{gh} D_{gf}$, para todos $g, h, f \in G$. Desta forma, todos os multiplicadores no item (iv) podem ser aplicados.

No decorrer deste trabalho, a maior parte dos resultados serão demonstrados tendo como principal ferramenta esta ação que acabamos de definir, sendo primordial fazermos uso de algumas igualdades que decorrem dos itens $(i) - (vi)$. Duas delas apresentaremos a seguir. Maiores detalhes podem ser encontrados em [7].

Proposição 1.2.3. *Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h) \in G \times G})$ uma ação parcial torcida de um grupo G sobre uma K-álgebra A. As seguintes propriedades são válidas, para todos $g, h \in G$:*

(a) $\alpha_g(a w_{g^{-1},g}) = \alpha_g(a) w_{g,g^{-1}}$, *para todo* $a \in D_{g^{-1}}$*;*

(b) $\alpha_g{}^{-1}(a) = w_{g^{-1},g}^{-1} \alpha_{g^{-1}}(a) w_{g^{-1},g}$, *para todo* $a \in D_g$.

Observação 1.2.4. Lembremos que, dado um anel A, um elemento $x \in A$ é chamado de *idempotente central* se $x^2 = x$ e $xr = rx$, para todo $r \in A$. Desta forma, se cada $D_g \subset A$ é gerado por um idempotente central $1_g \in D_g$, então $D_g = 1_g A$. Logo, $D_g D_h = D_g \cap D_h$ é um anel com unidade $1_g 1_h$, para todos $g, h \in G$. Consequentemente, $\mathcal{M}(D_g D_{gh}) \simeq D_g D_{gh}$ e cada multiplicador inversível $w_{g,h}$ pode ser considerado um elemento inversível em $D_g D_{gh}$, para todos $g, h \in G$.

Um exemplo interessante de ação parcial torcida é dada pela restrição de uma ação global.

Exemplo 1.2.5. Sejam $\beta = (T, \{\beta_g\}_{g \in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h) \in G \times G})$ uma ação global torcida de um grupo G sobre um anel T, não necessariamante com unidade, e R um ideal de T gerado por um idempotente central 1_R. Podemos restringir β à R tomando $D_g = R \cap \beta_g(R) = R\beta_g(R)$. Assim, cada D_g tem unidade dada por $1_R \beta_g(1_R)$. Considerando $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$, os itens $(i), (ii)$ e (iii) da Definição 1.2.2 são satisfeitos. Além disso, se definirmos $w_{g,h} = u_{g,h} 1_R \beta_g(1_R) \beta_{gh}(1_R)$ temos que as condições $(iv), (v)$ e (vi) também são satisfeitas. Desta forma, temos uma ação parcial torcida sobre R.

A seguir, definiremos a ação envolvente e apresentaremos um resultado que dá condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial torcida sobre uma K-álgebra com unidade possua envolvente.

No que segue, $\alpha = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h) \in G \times G})$ denotará uma ação parcial torcida de um grupo G sobre uma K-álgebra A.

Definição 1.2.6. [8, Definition 2.2] Uma ação global torcida

$$\beta = (B, \{\beta_g\}_{g \in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h) \in G \times G})$$

de um grupo G sobre uma K-álgebra B é uma globalização (ou ação envolvente) para uma ação parcial torcida α de G sobre uma K-álgebra A se existe um monomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$ satisfazendo:

(i) $\phi(A)$ é um ideal de B;

(ii) $B = \sum_{g \in G} \beta_g(\phi(A))$;

(iii) $\phi(D_g) = \phi(A) \cap \beta_g(\phi(A))$, para todo $g \in G$;

(iv) $\phi \circ \alpha_g = \beta_g \circ \phi$ em $D_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$;

(v) $\phi(aw_{g,h}) = \phi(a)u_{g,h}$, $\phi(w_{g,h}a) = u_{g,h}\phi(a)$, para todos $g, h \in G$ e $a \in D_g D_{gh}$.

Se a ação parcial torcida $\alpha = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h) \in G \times G})$ tem uma ação envolvente $\beta = (B, \{\beta_g\}_{g \in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h) \in G \times G})$, podemos identificar A com o ideal $\phi(A)$ de B. Desta forma, sem perda de generalidade, podemos afirmar que β é uma ação envolvente para α se A é um ideal de B e se as seguintes condições são satisfeitas:

(i') $B = \sum_{g \in G} \beta_g(A)$;

(ii') $D_g = A \cap \beta_g(A)$, para todo $g \in G$;

(iii') $\alpha_g(x) = \beta_g(x)$, para todo $x \in D_{g^{-1}}$ e $g \in G$;

(iv') $aw_{g,h} = au_{g,h}, \quad w_{g,h}a = u_{g,h}a$, para todos $g, h \in G$ e $a \in D_g D_{gh}$.

Definição 1.2.7. Dizemos que uma ação global torcida β de G sobre B é uma envolvente fraca para uma ação parcial torcida α de G sobre A se existe um monomorfismo de anéis $\phi : A \longrightarrow B$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\phi \circ \alpha_g = \beta_g \circ \phi$ em $D_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$;

(ii) $\phi(aw_{g,h}) = \phi(a)u_{g,h}, \ \ \phi(w_{g,h}a) = u_{g,h}\phi(a)$, para todos $g, h \in G$ e $a \in D_g D_{gh}$.

Exemplo 1.2.8. Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial (não torcida) de um grupo G sobre um anel A com unidade, tal que α admite uma ação envolvente. Neste caso, os ideias D_g de A tem unidade, para todo $g \in G$ (ver [6, Theorem 4.5]). Assim, considerando $w_{g,h} = 1_g 1_{gh}$, para todos $g, h \in G$, temos que $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ é uma ação parcial torcida.

Dada uma ação parcial torcida $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$, em [6, Definition 2.2] os autores definiram o *produto cruzado parcial* $A *_\alpha G$, que é a soma direta

$$\bigoplus_{g\in G} D_g \delta_g,$$

onde os δ_g são símbolos, a adição é a usual e a multiplicação é dada por

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_g^{-1}(a_g)b_h)w_{g,h}\delta_{gh}.$$

Notemos que aqui $w_{g,h}$ age como um multiplicador à direita sobre

$$\alpha_g(\alpha_g^{-1}(a_g)b_h) \in \alpha_g(D_{g^{-1}}D_h) = D_g D_{gh}.$$

Por [6, Theorem 2.4], temos que $A *_\alpha G$ é um anel associativo cuja unidade é $1_A\delta_{1_G}$. Além disso, temos um morfismo injetivo $\phi : A \longrightarrow A *_\alpha G$ definido por $a \mapsto a\delta_1$ e podemos considerar $A *_\alpha G$ como uma extensão de A.

Apresentaremos agora dois teoremas que dão condições necessárias e suficientes para a existência da ação envolvente, no caso em que A é um anel com unidade.

Teorema 1.2.9. *[8, Theorem 4.1] Seja α uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel com unidade A tal que cada D_g é um anel com elemento identidade 1_g, para todo $g \in G$. Então, α admite uma ação envolvente se, e somente se, para cada par $(g, h) \in G \times G$, existe um elemento $\tilde{w}_{g,h} \in U(A)$, tal que $\tilde{w}_{g,h}1_g 1_{gh} = w_{g,h}$ e $\alpha_g(\tilde{w}_{h,t}1_{g^{-1}})\tilde{w}_{g,ht} = 1_g\tilde{w}_{g,h}\tilde{w}_{gh,t}$, para quaisquer $g, h, t \in G$.*

Teorema 1.2.10. *[8, Theorem 7.2] Seja A um anel com unidade que é produto (não necessariamente finito) de anéis indecomponíveis. Uma ação parcial torcida α de um grupo G sobre A admite uma ação envolvente se, e somente se, cada ideal D_g possui unidade, para todo $g \in G$.*

A próxima definição nos fala sobre o subanel dos elementos invariantes de uma ação parcial torcida.

Definição 1.2.11. O subanel dos elementos invariantes de A sob a ação parcial torcida α, denotado por A^α, é dado por

$$A^\alpha = \{x \in A : \alpha_g(xa_{g^{-1}}) = x\alpha_g(a_{g^{-1}}), \quad \text{para todos} \quad g \in G, a_{g^{-1}} \in D_g\}.$$

No caso em que os ideais D_g tem elemento identidade 1_g, para todo $g \in G$, podemos escrever simplesmente

$$A^\alpha = \{x \in A : \alpha_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g, \quad \text{para todo} \quad g \in G\}.$$

Neste caso, se $a \in A^\alpha$, dizemos que α é constante sobre a ou que a é um elemento α-invariante .

Quando G for um grupo finito e cada ideal D_g tiver elemento identidade 1_g, podemos considerar a aplicação *traço parcial* $tr_\alpha : A \longrightarrow A^\alpha$, definida por

$$tr_\alpha(a) = \sum_{g \in G} \alpha_g(a1_{g^{-1}}),$$

para todo $a \in A$.

Se α é uma ação parcial torcida unitária de G sobre A, podemos também definir os ideais α-invariantes, como segue.

Definição 1.2.12. Um ideal I de A é denominado α-invariante se

$$\alpha_g(I \cap D_{g^{-1}}) \subseteq I \cap D_g,$$

para todo $g \in G$.

Notemos que I é α-invariante se, e somente se, $\alpha_g(I \cap D_{g^{-1}}) = I \cap D_g$, para todo $g \in G$. Ainda, se I é um ideal α-invariante, então podemos definir

$$I *_\alpha G = \{\sum_{g \in G} a_g \delta_g : a_g \in D_g \cap I\}.$$

O conjunto $I *_\alpha G$ é um ideal de $A *_\alpha G$.

Exemplo 1.2.13. Dado A um anel, sejam $J(A)$ e $nil_*(A)$ os radical de Jacobson e o radical primo de A, respectivamente. Então $J(A)$ e $nil_*(A)$ são ideais α-invariantes de A. Para mais detalhes, ver [14, pág. 33 e pág 42].

Para finalizar esta seção, observamos que se α é uma ação parcial torcida unitária de G sobre A, então α pode ser estendida para uma ação parcial torcida $\overline{\alpha}$ de G sobre $\frac{A}{I}$. De fato, basta considerar $\overline{\alpha}_g : D_{g^{-1}} + I \longrightarrow D_g + I$, para cada $g \in G$, colocando $\overline{\alpha}_g(a + I) = \alpha_g(a) + I$, sempre que $a \in D_{g^{-1}}$. Além disso, para cada $(g, h) \in G \times G$, estendemos cada $w_{g,h}$ para $\frac{A}{I}$ por $\overline{w}_{g,h} = w_{g,h} + I$.

Capítulo 2

A Birregularidade e o Radical Regular do Produto Cruzado Parcial

Norteados por importantes resultados obtidos por S. V. Mihoviski em [23] e por M. M. Parmenter e E. Spiegel em [24], apresentaremos neste capítulo interessantes generalizações sobre a birregularidade do produto cruzado parcial e o seu radical regular.

2.1 A Birregularidade do Produto Cruzado Parcial

Durante esta seção, denotaremos por $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ uma ação parcial torcida unitária de um grupo G sobre um anel com unidade A. Além disso, o ideal gerado por um elemento a de A será denotado por $< a >$, isto é, $< a >= AaA$.

Um anel A é denominado *birregular* se todo ideal principal de A é gerado por um elemento idempotente central. Notemos que se I é um ideal de A, então I é em particular um anel (não necessariamente com identidade). Desta forma, destacamos que todo ideal de um anel birregular é também birregular. Para mais detalhes, ver [15, pág. 89].

Nesta seção, nosso objetivo é investigar quando $A *_\alpha G$ é um anel birregular.

Começamos relacionando a birregularidade entre (A, α, w) e sua ação envolvente (B, β, u), quando esta existir.

Proposição 2.1.1. *Seja (A, α, w) uma ação parcial torcida unitária de G sobre A com ação envolvente (B, β, u). Então A é um anel birregular se, e somente se, B é um anel birregular.*

Demonstração: Suponhamos que A é um anel birregular e seja $x \in B$. Então $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(a_i)$, pois $B = \sum_{g \in G} \beta_g(A)$. Desta forma, $x \in \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(A) = B_1$, e este é um ideal de A.

Notemos que

$$BxB = B(1_{B_1} x 1_{B_1})B = (B1_{B_1})x(1_{B_1}B) = B_1 x B_1$$

e B_1xB_1 é um ideal principal de B_1. Como A é birregular e B_1 é um ideal de A, temos que B_1 é birregular. Desta maneira, existe um idempotente central e em B_1 tal que $B_1xB_1 = B_1e \subseteq Be$ e, com isto, $BxB \subseteq Be$. Logo,

$$Be = (Be)e \subseteq B_1e = B_1xB_1 \subseteq BxB$$

e segue que $BxB = Be$. Além disso, é fácil ver que e é um idempotente central de B. Portanto B é um anel birregular

Reciprocamente, suponhamos que B é um anel birregular. Como A é um ideal de B, segue que A é birregular. $\square$

Os próximos resultados que apresentaremos tem como objetivo auxiliar na demonstração do Teorema 2.1.4. No primeiro destes resultados, consideramos a ação parcial torcida de um grupo qualquer G sobre um anel A. No entanto, no Lema 2.1.3 e no Teorema 2.1.4 será necessário impor algumas condições sobre G.

Antes de continuarmos, esclarecemos que, dado $a = \sum_{g \in G} a_g \delta_g \in A *_\alpha G$, o *suporte* de a é o conjunto

$$supp(a) = \{g \in G : a_g \neq 0\}.$$

Lema 2.1.2. *Se A é um anel birregular, então todo (A, A)-submódulo finitamente gerado do (A, A)-módulo $A *_\alpha G$ é um somando direto de $A *_\alpha G$.*

Demonstração: Seja L um (A, A)-submódulo finitamente gerado de $A *_\alpha G$. Então L é um A-bimódulo. Consideremos o (A, A)-módulo

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} D_{g_i} \delta_{g_i},$$

onde $\{g_1, \dots, g_n\} = \bigcup_{f \in L} supp(f)$. Claramente L pode ser visto como um $(A, A)-$ submódulo finitamente gerado de M. Afirmamos que L é um somando direto de M.

De fato, seja $\pi_n : L \to A$ definida como sendo a projeção dos coeficientes de δ_{g_n}. Então $\pi_n(L)$ é um ideal de A pois, para cada $a \in A$ e $x = \sum_{i=1}^{n} a_{g_i} \delta_{g_i} \in L$, temos que

$$a\pi_n(x) = \pi_n(\sum_{i=1}^{n} (a a_{g_i}) \delta_{g_i}) = \pi_n(a \sum_{i=1}^{n} a_{g_i} \delta_{g_i}) \in \pi_n(AL) \subseteq \pi_n(L).$$

Além disso, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ podemos escrever $a1_{g_i} = \alpha_{g_i}(b_i 1_{g_i^{-1}})$, para algum $b_i \in A$. Assim,

$$\begin{aligned} \pi_n(x)a = \pi_n(x)1_{g_n}a &= \pi_n(\sum_{i=1}^{n} a_{g_i} \delta_{g_i}) \alpha_{g_n}(b_n 1_{g_n^{-1}}) \\ &= a_{g_n} \alpha_{g_n}(b_n 1_{g_n^{-1}}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi_n(\sum_{i=1}^{n} a_{g_i}\alpha_{g_i}(b_i 1_{g_i^{-1}})\delta_{g_i}) \\
&= \pi_n(\sum_{i=1}^{n} a_{g_i}\delta_{g_i} b_i 1_{g_i^{-1}}) \in \pi_n(xA) \subseteq \pi_n(L).
\end{aligned}
$$

Como L é um submódulo finitamente gerado de $A *_\alpha G$, então $\pi_n(L)$ é um ideal finitamente gerado de A e, por [1, Lemma 3], existe um idempotente central $e \in A$ tal que $\pi_n(L) = Ae$.

Se $n = 1$, afirmamos que $L = e(D_{g_1}\delta_{g_1})$. De fato, sabemos que $L \subseteq M = D_{g_1}\delta_{g_1}$. Então, dado $f \in L$, podemos escrever $f = b\delta_{g_1}$, para algum $b \in D_{g_1}$. Uma vez que $\pi_1(L) = Ae$, existe $a \in A$ tal que $\pi_1(f) = ae$. Mas também temos que $\pi_1(f) = b$ e, consequentemente, $b = ae = ea$. Assim,

$$f = b\delta_{g_1} = ea\delta_{g_1} = e(a1_{g_1})\delta_{g1} \in eD_{g_1}$$

e temos que $L \subseteq eD_{g_1}\delta_{g_1}$. Reciprocamente, seja $\lambda \in eD_{g_1}\delta_{g_1}$. Então $\lambda = e(a\delta_{g_1})$, para algum $a \in D_g$. Como $\pi_1(L) = Ae$ e $a \in D_{g_1} \subseteq A$, existe $f \in L$ tal que $\pi_1(f) = ae = ea$, onde $f = b\delta_{g_1}$, para algum $b \in D_{g_1}$. Assim, $b = \pi_1(f) = ea$ e temos que $\lambda = e(a\delta_{g_1}) = b\delta_{g_1} = f \in L$. Portanto, $eD_{g_1}\delta_{g_1} \subseteq L$.

Desta forma, podemos escrever

$$M = eD_{g_1}\delta_{g_1} \oplus (1_{g_1} - e)D_{g_1}\delta_{g_1}.$$

Suponhamos que $n > 1$ e que o resultado seja válido para todo $p < n$. Sejam $c \in L$ tal que $\pi_n(c) = e$ e $x_1, \ldots, x_k$ os elementos de M que geram L. Então $\pi_n(x_i) \in Ae$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Consideremos o (A, A)-submódulo L' de M gerado pelos elementos

$$y_i = x_i - c\pi_n(x_i),$$

onde $i \in \{1, \ldots k\}$. Uma vez que $\pi_n(x_i) \in Ae$, existe $r_i \in A$ tal que $\pi_n(x_i) = r_i e$. Desta forma,

$$e\pi_n(x_i) = e(r_i e) = r_i e = \pi_n(x_i)$$

e temos

$$\begin{aligned}
\pi_n(y_i) &= \pi_n(x_i) - \pi_n(c\pi_n(x_i)) \\
&= \pi_n(x_i) - \pi_n(c)\pi_n(x_i) \\
&= \pi_n(x_i) - e\pi_n(x_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como π_n é a projeção dos coeficientes de δ_{g_n}, temos que L' pode ser visto como um (A, A)-submódulo de $M' = \bigoplus_{i=1}^{n-1} D_{g_i}\delta_{g_i}$.

Afirmamos que $L =< c > +L'$, onde $< c >$ é um A-submódulo cíclico de M gerado pelo elemento $c \in L \subseteq M$. De fato, como L é gerado pelos elementos $x_1, \ldots, x_k$, L' é gerado pelos elementos $y_1, \ldots, y_k$ e $x_i = y_i + c\pi_n(x_i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, temos que $L \subseteq L'+ < c >$. Por outro lado, já temos que $L' \subseteq L$ e, como $< c >\subseteq L$, pois $c \in L$, temos que $L'+ < c >\subseteq L$.

Aplicando a hipótese de indução sobre n, temos que $M' = L' \oplus N'$ para algum submódulo N' de M'. Seja $N =< (1_{g_n} - e)\delta_{g_n} > +N'$. Queremos mostrar que $M = L \oplus N$.

De fato, sejam $m \in M$ e $\gamma \in D_{g_n}$ tal que $\pi_n(m) = \gamma$. Então

$$m' = m - c\gamma - (\gamma - \gamma e)\delta_{g_n} \in M',$$

pois

$$\begin{aligned}
\pi_n(m') &= \pi_n(m) - \pi_n(c)\gamma - \pi_n((\gamma - \gamma e)\delta_{g_n}) \\
&= \gamma - e\gamma - \gamma + \gamma e \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, $m \in L + N$, para qualquer $m \in M$.

Agora, dado $x \in L \cap N$, existem $m_1 \in< c >$, $m_2 \in L'$, $n_1 \in< (1_{g_n} - e)\delta_{g_n} >$ e

$n_2 \in N'$ tais que

$$x = m_1 + m_2 = n_1 + n_2.$$

Então,

$$\pi_n(m_2) = \pi_n(n_2) = 0$$

e disto segue que $\pi_n(x) = \pi_n(m_1) \in Ae$ e $\pi_n(x) = \pi_n(n_1) \in A(1_{g_n} - e)$, ou seja,

$$\pi_n(x) \in Ae \cap A(1_{g_n} - e).$$

Logo, $\pi_n(x) = 0$ e, consequentemente, temos que

$$x = m_2 = n_2,$$

isto é, $x \in L' \cap N' = 0$, o que implica $L \cap N = \{0\}$. Como já tínhamos que $M = L + N$, podemos concluir que $M = L \oplus N$ e, portanto,

$$A *_\alpha G = L \bigoplus N \bigoplus_{g \neq g_i} D_g \delta_g, \forall i = 1, \dots n.$$

□

Lema 2.1.3. *Seja α uma ação parcial torcida unitária de G sobre A. Se A satisfaz a condição de cadeia descendente para os ideais principais e G é finito, então $A *_\alpha G$ também satisfaz a condição de cadeia descendente para os seus ideais principais.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que $A *_\alpha G$, visto como um (A, A)-bimódulo, satisfaz a condição de cadeia descendente para os seus (A, A)-submódulos cíclicos.

De fato, consideremos a cadeia descendente

$$< x_1 > \supseteq < x_2 > \supseteq \cdots \supseteq < x_n > \supseteq \cdots \tag{2.1}$$

de (A, A)-submódulos cíclicos de $A *_\alpha G$. Para cada $g \in G$, seja

$$K_i(g) = \{a \in D_g : \exists f = a\delta_g + s \in < x_i >\}.$$

Afirmamos que $K_i(g)$ é um ideal principal de A. De fato, é fácil ver que $K_i(g)$ é um ideal de A, para todo $i \geq 1$. Para cada $y \in K_i(g)$, existem $a_j, b_j \in A$ tais que

$$y\delta_g + s = \sum_{j=1}^{n} a_j x_i b_j \in < x_i > .$$

Escrevamos $x_i = \sum_{h \in G} x_h^i \delta_h$. Desta forma,

$$y\delta_g + s = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{h \in G} x_h^i \delta_h b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h \in G} a_j x_h^i \alpha_h^i (b_j 1_{h^{-1}}) \delta_h$$

e, comparando os coeficientes de δ_g, temos que $y = \sum_{j=1}^{n} a_j x_g^i \alpha_g^i (b_j 1_{h^{-1}})$. Assim, $y \in A x_g^i A$, o que implica $K_i(g) \subseteq A x_g^i A$. Claramente, temos que $A x_g^i A \subseteq K_i(g)$ e, com isto, concluímos que $K_i(g) = A x_g^i A$. Logo, $K_i(g)$ é um ideal principal de A.

Usando (2.1) temos a cadeia de ideais principais $K_1(g) \supseteq K_2(g) \cdots$. Por hipótese, existe $n = n(g)$ tal que $K_n(g) = K_{n+1}(g) = \cdots$. Como G é um grupo finito, podemos tomar $m = max\{n(g) : g \in G\}$. Assim, $< x_m >=< x_{m+j} >$, para todo $j \geq 1$ e, com isto, a cadeia (2.1) é estacionária. Portanto, $A *_\alpha G$ satisfaz a condição de cadeia descendente para os (A, A)-submódulos cíclicos e, consequentemente, para os seus ideais principais. □

Estamos aptos a apresentar o próximo teorema, que nos diz sob quais condições a birregularidade de A se estende para $A *_\alpha G$.

Teorema 2.1.4. *Se A é um anel birregular e G um grupo finito de ordem n tal que $tr_\alpha(1_A)$ é invertível em A, então $A *_\alpha G$ é birregular.*

Demonstração: Seja I um ideal principal de $A *_\alpha G$ gerado por $a \in A *_\alpha G$. Então a pode ser escrito da forma

$$a = a_1 \delta_{g_1} + \cdots + a_n \delta_{g_n},$$

com $a_i \in D_{g_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Notemos que o ideal I, visto como (A, A)-submódulo de $A *_\alpha G$, é gerado pelos elementos $a_1\delta_{g_1}, \dots, a_n\delta_{g_n}$. Então I é finitamente gerado como (A, A)-submódulo de $A *_\alpha G$ e, pelo Lema 2.1.2, existe um (A, A)-submódulo I' de $A *_\alpha G$ tal que $A *_\alpha G = I \bigoplus I'$.

Consideremos as projeções canônicas $\pi_I : A *_\alpha G \longrightarrow I$ e $\pi_{I'} : A *_\alpha G \longrightarrow I'$ como (A, A)-bimódulos. Para cada $x \in A *_\alpha G$, podemos escrevê-lo da forma

$$x = \pi_I(x) + \pi_{I'}(x).$$

Seja $k = tr_\alpha(1_A) = \sum_{g\in G} 1_g$ e definamos $\psi : A *_\alpha G \longrightarrow I'$ por

$$\psi(x) = \frac{1}{k^2} \sum_{g\in G} \sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g} 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} \pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l \delta_l) w^{-1}_{l^{-1},l} 1_{l^{-1}} \delta_{l^{-1}},$$

para todo $x \in A *_\alpha G$.

Afirmamos que $\psi(u) = u$, sempre que $u \in I'$. De fato, observemos primeiramente que

$$\pi_{I'}(1_g\delta_g u 1_l \delta_l) = 1_g\delta_g u 1_l \delta_l,$$

para todo $u \in I'$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \frac{1}{k^2} \sum_{g\in G} \sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g} 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} \pi_{I'}(1_g\delta_g u 1_l \delta_l) w^{-1}_{l^{-1},l} 1_{l^{-1}} \delta_{l^{-1}} \\
&= \frac{1}{k^2} \sum_{g\in G} \sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g} 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} 1_g\delta_g u 1_l \delta_l w^{-1}_{l^{-1},l} 1_{l^{-1}} \delta_{l^{-1}} \\
&= \frac{1}{k^2} \sum_{g\in G} \sum_{l\in G} \alpha_{g^{-1}}(\alpha^{-1}_{g^{-1}}(w^{-1}_{g^{-1},g} 1_{g^{-1}}) 1_g) w_{g^{-1},g} \delta_1 u \alpha_l(\alpha^{-1}_l(1_l) w^{-1}_{l^{-1},l} 1_{l^{-1}}) w_{l,l^{-1}} \delta_1. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.3, item (a), temos que

$$\alpha_l(w^{-1}_{l^{-1},l} 1_{l^{-1}}) = 1_l w^{-1}_{l,l^{-1}}.$$

Assim, substituindo esta igualdade em (2.2), vemos que

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}w_{g^{-1},g}\delta_1 u1_l w_{l,l^{-1}}^{-1}w_{l,l^{-1}}\delta_1\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} 1_{g^{-1}}u1_l\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}u\sum_{l\in G}1_l\\ &= \frac{1}{k^2}kuk\\ &= u.\end{aligned}$$

Logo, $\psi(u) = u$, para todo $u \in I'$. Veremos agora que ψ é um homomorfismo de $A *_\alpha G$-módulo à esquerda e à direita. De fato, sejam $x \in A *_\alpha G$ e $h \in G$ um elemento fixado. Então, como $\pi_{I'}$ é uma A-projeção, temos que

$$\begin{aligned}\psi(1_h\delta_h x) &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g 1_h\delta_h x1_l\delta_l)w_{l^{-1},l}^{-1}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(\alpha_g({\alpha_g}^{-1}(1_g)1_h)w_{g,h}\delta_{gh}x1_l\delta_l)w_{l^{-1},l}^{-1}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)w_{g,h}\pi_{I'}(1_{gh}\delta_{gh}x1_l\delta_l)w_{l^{-1},l}^{-1}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} \alpha_{g^{-1}}({\alpha_{g^{-1}}}^{-1}(w_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}})\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)w_{g,h})\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_{gh}\delta_{gh}x1_l\delta_l)w_{l^{-1},l}^{-1}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}1_h\alpha_{g^{-1}}(w_{g,h})\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_{gh}\delta_{gh}x1_l\delta_l)w_{l^{-1},l}^{-1}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Pela Definição 1.2.2, item (vi), para cada $g, h \in G$,

$$\alpha_{g^{-1}}(w_{g,h}) = \alpha_{g^{-1}}(1_g1_{gh}w_{g,h}) = \alpha_{g^{-1}}(1_g1_{gh})w_{g^{-1},g}w_{g^{-1},gh}^{-1} = 1_{g^{-1}}1_hw_{g^{-1},g}{w^{-1}}_{g^{-1},gh}.$$

Desta forma, temos

$$\psi(1_h\delta_h x) = \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} 1_{g^{-1}}1_hw_{g^{-1},gh}^{-1}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_{gh}\delta_{gh}x1_l\delta_l)w_{l^{-1},l}^{-1}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}. \qquad (2.4)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
1_h\delta_h\psi(x) &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} 1_h\delta_h w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l\delta_l)w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} \alpha_h(1_{h^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}})w_{h,g^{-1}}\delta_{hg^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l\delta_l)w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} 1_h\alpha_h(w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}1_{h^{-1}})w_{h,g^{-1}}\delta_{hg^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l\delta_l)w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Novamente pela Definição 1.2.2 item (vi), dados $g,h\in G$, temos que

$$\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{g^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}) = 1_h 1_{hg^{-1}}w^{-1}_{hg^{-1},g}w^{-1}_{h,g^{-1}}$$

e, substituindo em (2.5), obtemos

$$1_h\delta_h\psi(x) = \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} 1_h 1_{hg^{-1}}w^{-1}_{hg^{-1},g}\delta_{hg^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l\delta_l)w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}.$$

Tomando $gh^{-1}=f$, segue que

$$1_h\delta_h\psi(x) = \frac{1}{k^2}\sum_{f\in G}\sum_{l\in G} 1_h 1_{f^{-1}}w^{-1}_{f^{-1},fh}\delta_{f^{-1}}\pi_{I'}(1_{fh}\delta_{fh} x 1_l\delta_l)w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}. \qquad (2.6)$$

Então, comparando (2.4) e (2.6) concluímos que $\psi(1_h\delta_h x) = 1_h\delta_h\psi(x)$.

Resta mostrar que $\psi(x1_h\delta_h) = \psi(x)1_h\delta_h$. Por um lado, temos

$$\begin{aligned}
\psi(x1_h\delta_h) &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_h\delta_h 1_l\delta_l)w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x\alpha_h({\alpha_h}^{-1}(1_h)1_l)w_{h,l}\delta_{hl})w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_h 1_{hl}w_{h,l}\delta_{hl})w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_{hl}\delta_{hl}{\alpha_{hl}}^{-1}(1_h w_{h,l}))w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}\\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_{hl}\delta_{hl}){\alpha_{hl}}^{-1}(1_h w_{h,l})w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}.
\end{aligned}$$

Pelo item (b) da Proposição 1.2.3 e pela Definição 1.2.2, temos que

$$\alpha^{-1}_{hl}(1_h w_{h,l}) \;=\; w^{-1}_{(hl)^{-1},hl}\alpha_{(hl)^{-1}}(1_h w_{h,l})w_{(hl)^{-1},hl}$$

$$= w^{-1}_{(hl)^{-1},hl}(\alpha_{(hl)^{-1}}(1_h 1_{hl})w_{(hl)^{-1},h}w_{l^{-1},l}w^{-1}_{(hl)^{-1},hl})w_{(hl)^{-1},hl}$$
$$= w^{-1}_{(hl)^{-1},hl}1_{l^{-1}}1_{(hl)^{-1}}w_{(hl)^{-1},h}w_{l^{-1},l}.$$

Então,

$$\psi(x1_h\delta_h) = \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_{hl}\delta_{hl})1_{l^{-1}}1_{(hl)^{-1}}w^{-1}_{(hl)^{-1},hl}w_{(hl)^{-1},h}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}. \quad (2.7)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\psi(x)1_h\delta_h &= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l\delta_l)w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}1_h\delta_h \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l\delta_l)\alpha_{l^{-1}}(\alpha_l^{-1}(w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}})1_h)w_{l^{-1},h}\delta_{l^{-1}h} \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l\delta_l)w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}1_{l^{-1}}1_{l^{-1}h}w_{l^{-1},h}\delta_{l^{-1}h} \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l\delta_l)1_{l^{-1}}1_{l^{-1}h}w^{-1}_{l^{-1},l}w_{l^{-1},h}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}h}. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Tomando $h^{-1}l = f$ e substituindo em (2.8), temos que

$$\psi(x)1_h\delta_h = \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_{hf}\delta_{hf})1_{(hf)^{-1}}1_{f^{-1}}w^{-1}_{(hf)^{-1},hf}w_{(hf)^{-1},h}\delta_{f^{-1}}. \quad (2.9)$$

Assim, comparando as equações (2.7) e (2.9) concluímos que $\psi(x1_h\delta_h) = \psi(x)1_h\delta_h$. Logo ψ é um homomorfismo de $A *_\alpha G$-módulo à esquerda e à direita.

Consideremos o ideal $J = \psi(A *_\alpha G)$ de $A *_\alpha G$. Para cada $x \in A *_\alpha G$, podemos escrever

$$x - \psi(x) = \frac{1}{k^2}\sum_{g\in G}\sum_{l\in G} w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi_I(1_g\delta_g x 1_l\delta_l)w^{-1}_{l^{-1},l}1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}}.$$

Como $\pi_I(1_g\delta_g x 1_l\delta_l) \in I$, temos que $x - \psi(x) \in I$, para todo $x \in A *_\alpha G$. Desta forma,

$$x = ((x - \psi(x)) + \psi(x)) \in I + J,$$

de onde concluímos que $A *_\alpha G = I + J$. Além disso, se $x \in I$, então $1_g\delta_g x 1_l\delta_l \in I$, para todos $g, l \in G$. Consequentemente, $\pi_{I'}(1_g\delta_g x 1_l\delta_l) = 0$ para todos $g, l \in G$, o que implica $\psi(x) = 0$, para todo $x \in I$. Pelo fato de que $x - \psi(x) \in I$ para todo $x \in A *_\alpha G$, temos que

$$0 = \psi(x - \psi(x)) = \psi(x) - \psi^2(x)$$

e, desta forma, $\psi(x) = \psi^2(x)$, para todo $x \in A *_\alpha G$. Agora, dado $x \in I \cap J$, existe $y \in A *_\alpha G$ tal que $x = \psi(y)$. Logo,

$$x = \psi(y) = \psi^2(y) = \psi(\psi(y)) = \psi(x) = 0,$$

de onde concluímos que $I \cap J = 0$. Como já tínhamos que $A *_\alpha G = I + J$, obtemos que $A *_\alpha G = I \oplus J$. Então, existem idempotentes centrais $e, f \in A *_\alpha G$ tais que $I = (A *_\alpha G)e$ e $J = (A *_\alpha G)f$. Portanto, $A *_\alpha G$ é birregular. □

2.2 O Radical Regular

Um anel A é von Neumann regular (ou simplesmente regular) se, para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $axa = a$. Analogamente, um ideal I de A é um ideal regular se, dado $b \in I$, existe $y \in I$ tal que $byb = b$. A seguinte proposição nos garante que todo anel A possui um ideal I tal que I é regular e o único ideal regular de $\dfrac{A}{I}$ é o ideal nulo.

Proposição 2.2.1. *[15, Proposition 1.5] Seja A um anel e consideremos o conjunto*

$$I = \{x \in A : AxA \quad \textit{é um ideal regular}\ \}.$$

(a) *I é um ideal regular de A;*

(b) *I contém todos os ideais regulares de A;*

(c) *$\dfrac{A}{I}$ não contém ideais regulares não nulos.*

Este ideal descrito na Proposição 2.2.1 é denominado *radical regular de* A e será denotado por $T(A)$. Além das propriedades de $T(A)$ descritas na proposição anterior, destacamos também que o radical regular $T(A)$ não contém elementos nilpotentes não nulos.

Em [24], M.M. Parmenter e E. Spiegel descreveram propriedades do anel de grupo AG considerando A um anel comutativo e G um grupo qualquer. Inspirados neste trabalho, apresentaremos nesta seção propriedades do radical regular do produto cruzado parcial $A *_\alpha G$.

Aqui, a menos de menção contrária, A é um anel comutativo com identidade 1_A e (A, α, w) é uma ação parcial torcida unitária com ação envolvente (B, β, u). Além disso, dado um anel qualquer A, denotaremos por $J(A)$ o radical de Jacobson de A e por $nil_*(A)$ o radical primo de A.

Começamos apresentando alguns resultados que serão necessários para demonstrarmos o Teorema 2.2.6.

Lema 2.2.2. *Sejam* G *um grupo finito,* $f \in nil_*(A) *_\alpha G$ *e* $h \in A *_\alpha G$ *tais que* $fhf = f$. *Então* $f = 0$.

Demonstração: Seja $f \in nil_*(A) *_\alpha G$ satisfazendo as hipóteses do lema. Uma vez que G é finito, por [14, Teorema 2.3.9] temos que $J(A *_\alpha G) = J(A) *_\alpha G$. Como

$$f \in nil_*(A) *_\alpha G \subset J(A) *_\alpha G = J(A *_\alpha G),$$

então $1 - hf \in U(A *_\alpha G)$, para todo $h \in A *_\alpha G$. Assim, $f(1 - hf) = 0$ e, usando o fato de que $1 - hf \in U(A *_\alpha G)$, temos que $f = 0$. $\square$

Sejam $\alpha = \left(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G}\right)$ uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel com identidade A. Dado um subgrupo H de G, denotaremos por α_H a ação parcial torcida definida pela restrição de α ao subgrupo H. Desta maneira, temos o produto cruzado parcial $A *_{\alpha_H} H$, que é um subanel de $A *_\alpha G$.

Lema 2.2.3. *Se H é um subgrupo de G, então $T(A*_\alpha G)\cap(A*_{\alpha_H} H) \subseteq T(A*_{\alpha_H} H)$.*

Demonstração: Claramente $T(A*_\alpha G)\cap A*_{\alpha_H} H$ é um ideal de $A*_{\alpha_H} H$. Mostraremos que $T(A*_\alpha G)\cap(A*_{\alpha_H} H)$ é um ideal regular de $A*_{\alpha_H} H$. Com efeito, seja $f \in T(A*_\alpha G)\cap(A*_{\alpha_H} H)$. Então, existe $u = \sum\limits_{g\in G} r_g\delta_g \in A*_\alpha G$ tal que $fuf = f$. Podemos escrever $u = u_1 + u_2$, com $u_1 = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g$ e $u_2 = \sum\limits_{g\in G} b_g\delta_g$ satisfazendo

$$a_g = \begin{cases} r_g, & \text{se } g \in H \\ 0, & \text{se } g \in G\setminus H \end{cases} \quad \text{e} \quad b_g = \begin{cases} r_g, & \text{se } g \in G\setminus H \\ 0, & \text{se } g \in H \end{cases}.$$

Desta forma, $f = fu_1f + fu_2f$ e, uma vez que $f, fu_1f \in A*_{\alpha_H} H$, temos que $fu_2f \in A*_{\alpha_H} H$. Pela maneira que u_2 foi contruído, segue que $fu_2f = 0$. Além disso, $u_1fu_1 \in T(A*_\alpha G)$, pois $f \in T(A*_\alpha G)$. Logo, $u_1fu_1 \in T(A*_\alpha G)\cap(A*_{\alpha_H} H)$ e $f = f(u_1fu_1)f$. Disto segue que todo f é um elemento regular de $T(A*_\alpha G)\cap(A*_{\alpha_H} H)$. Portanto, $T(A*_\alpha G)\cap(A*_{\alpha_H} H) \subseteq T(A*_{\alpha_H} H)$. □

O próximo lema está provado em [24, Lemma 3]. Lembremos que um anel qualquer A é dito ser *reduzido* se o elemento nulo for o único elemento nilpotente de A, isto é, se existe $r \in A$ tal que $r^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $r = 0$.

Lema 2.2.4. *Seja S um anel comutativo reduzido e suponhamos que, para cada $a \in S$, existam inteiros positivos $n_a, m_a, z_a \in S$ tais que $n_a > m_a$ e $a^{m_a} = a^{n_a}z_a$. Então S é um anel regular.*

Consideremos agora a projeção

$$\begin{array}{rcl} \pi : A *_\alpha G & \longrightarrow & A \\ \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g & \longmapsto & a_{1_G} \end{array}. \tag{2.10}$$

Temos que π é um homomorfismo sobrejetor de (A, A)-módulos e esta aplicação será muito útil para o desenvolvimentos dos próximos resultados.

Lema 2.2.5. *Seja A um anel reduzido tal que todos os elementos idempotentes de A são α-invariantes. Se $T(A *_\alpha G) \neq 0$, então existe um somando direto A_1 não nulo e regular de A tal que $\pi(T(A_1 *_\alpha G)) = A_1$, onde π é a aplicação definida em* (2.10).

Demonstração: Se A é regular, então $A = A \oplus 0$ e $\pi(T(A *_\alpha G)) = A$ e o resultado está provado.

Suponhamos que A não é regular e seja $a \in \pi(T(A *_\alpha G))$ um elemento não nulo de A. Então existe $f = \sum_{g \in G} a_g \delta_g \in T(A *_\alpha G)$ não nulo tal que $\pi(f) = a$, ou seja, $a = a_{1_G}$. Como $T(A *_\alpha G)$ é um ideal de $A *_\alpha G$, temos que $af \in T(A *_\alpha G)$. Assim, existe $h = \sum_{g \in G} b_g \delta_g \in A *_\alpha G$ tal que

$$af = (af)h(af) = (af)h(af)h(af).$$

Aplicando π em ambos os lados da igualdade anterior e usando o fato de que A é comutativo, podemos considerar $z \in \pi(T(A *_\alpha G))$ tal que

$$\pi((af)h(af)h(af)) = a^3 z.$$

Desta forma, $a^2 = a^3 z$ e consideramos $\gamma = a^2 z^2 \in A$. Notemos que $\gamma^2 = \gamma$. Uma vez que

$$a^4 = (a^3 z)^2 = a^4 (a^2 z^2) = a^4 \gamma$$

e $a \neq 0$, podemos concluir que $\gamma \neq 0$, pois A é reduzido. Agora, se $\gamma = 1_A$, teríamos $1_A \in \pi(T(A *_\alpha G))$, o que implicaria $\pi(T(A *_\alpha G)) = A$, isto é, A seria regular, contradizendo o que assumimos. Suponhamos então que $\gamma \neq 0$ e $\gamma \neq 1_A$.

Escrevamos $A = A\gamma \oplus A(1_A - \gamma)$ e consideremos a aplicação

$$\phi : A *_\alpha G \longrightarrow (\gamma A) *_\alpha G$$

dada por $\phi(f) = \gamma f$. Uma vez que elementos idempotentes de A são α-invariantes, temos que ϕ é um homomorfismo de A-módulos e de $A *_\alpha G$-módulos.

Seja $\lambda \in T(A *_\alpha G)$ tal que $\pi(\lambda) = \gamma$. Como ϕ é um homomorfismo sobrejetor, temos que $\phi(T(A *_\alpha G)) \subset T((\gamma A) *_\alpha G)$ e obtemos que $\phi(\lambda) \in T((\gamma A) *_\alpha G)$. Usando o fato de que $\pi \circ \phi = \phi \circ \pi$, temos

$$\pi(\phi(\lambda)) = \phi(\pi(\lambda)) = \phi(\gamma) = \gamma^2 = \gamma \neq 0.$$

Assim, $\phi(\lambda) \neq 0$ e segue que $T((\gamma A) *_\alpha G) \neq 0$. Afirmamos que

$$\pi(T((\gamma A) *_\alpha G)) = \gamma A.$$

De fato, por um lado temos que

$$\pi(T((\gamma A) *_\alpha G)) \subseteq T(\pi((\gamma A) *_\alpha G)) = T(\gamma A) \subseteq \gamma A.$$

Agora, sejam I um ideal regular não nulo de $A *_\alpha G$ e $f \in I$ tal que $f \neq 0$. Então, $f = fhf$ para algum $h \in A *_\alpha G$. Como A é comutativo e os elementos idempotentes de A são α-invariantes, temos que

$$\gamma f = (\gamma f)(\gamma h)(\gamma f).$$

Assim, $\gamma f \in \gamma I$, que é um ideal regular de $(\gamma A) *_\alpha G$, isto é, para cada $f \in T(A *_\alpha G)$, temos que $\gamma f \in T((\gamma A) *_\alpha G)$. Tomamos $x = \gamma b \in \gamma A$, para algum $b \in A$. Como $\gamma \in \pi(T(A *_\alpha G))$, que é um ideal de A, temos que $x \in \pi(T(A *_\alpha G))$. Logo,

$$x = \gamma b = \gamma(\gamma b) \in \gamma\pi(T(A *_\alpha G)) \subseteq \pi(T((\gamma A) *_\alpha G)),$$

de onde segue que $\gamma A \subseteq \pi(T(\gamma A) *_\alpha G)$.

Por fim, notamos que se consideramos a projeção canônica

$$\pi_\gamma : (\gamma A) *_\alpha G \longrightarrow \gamma A,$$

que é um epimorfismo, temos que $\gamma A = \pi_\gamma(T((\gamma A) *_\alpha G)) \subset T(\gamma A)$, de onde concluímos que γA é regular. $\square$

Esclarecidos estes últimos resultados, estamos em condições de demostrar o seguinte teorema.

Teorema 2.2.6. *Seja α uma ação parcial torcida unitária de G sobre A tal que todos os elementos idempotentes de A são α-invariantes e G é um grupo finito. Se $T(A *_\alpha G) \neq 0$, então existe um somando direto não nulo regular A_1 de A satisfazendo $\pi(T(A_1 *_\alpha G)) = A_1$, onde π é a aplicação definida em (2.10).*

Demonstração: Consideremos o anel quociente $\dfrac{A}{nil_*(A)}$ e a aplicação canônica

$$\begin{array}{rcl} \phi : A & \longrightarrow & \dfrac{A}{nil_*(A)} \\ a & \longmapsto & a + nil_*(A) \end{array}.$$

Como $nil_*(A)$ é um ideal α-invariante de A, temos o anel $\dfrac{A}{nil_*(A)} *_{\bar{\alpha}} G$, onde $\bar{\alpha}$ é a ação parcial torcida (induzida de α) de G sobre $\dfrac{A}{nil_*(A)}$. Desta forma, podemos estender ϕ à um homomorfismo sobrejetor

$$\begin{array}{rcl} \psi : A *_\alpha G & \longrightarrow & \dfrac{A}{nil_*(A)} *_{\bar{\alpha}} G \\ \displaystyle\sum_{g \in G} a_g \delta_g & \longmapsto & \displaystyle\sum_{g \in G} \phi(a_g)\delta_g \end{array}$$

e, neste caso, $\psi(T(A *_\alpha G))$ é um ideal regular de $\dfrac{A}{nil_*(A)} *_{\bar{\alpha}} G$.

Se $\psi(T(A *_\alpha G)) = 0$, então $T(A *_\alpha G) \subseteq Ker(\psi) \subseteq nil_*(A) *_\alpha G$ e, pelo Lema 2.2.2, $T(A *_\alpha G) = 0$, o que contradiz a hipótese. Assim, $\psi(T(A *_\alpha G))$ é um ideal não nulo de $\dfrac{A}{nil_*(A)} *_{\bar{\alpha}} G$.

Consideremos a projeção

$$\begin{array}{rcl} \pi : \dfrac{A}{nil_*(A)} *_{\bar{\alpha}} G & \longrightarrow & \dfrac{A}{nil_*(A)} \\ \displaystyle\sum_{g \in G} (a_g + nil_*(A))\delta_g & \longmapsto & a_{1_G} + nil_*(A) \end{array}.$$

Uma vez que $\psi(T(A *_\alpha G))$ é um ideal não nulo de $\dfrac{A}{nil_*(A)} *_{\bar{\alpha}} G$, temos que $\pi(\psi(T(A *_\alpha G)))$ é um ideal não nulo do anel reduzido $\dfrac{A}{nil_*(A)}$.

Seja $a \in \pi(\psi(T(A *_\alpha G)))$ tal que $a \neq 0$. Então, de maneira análoga ao que fizemos no Lema 2.2.5, existe $z \in \pi(\psi(T(A *_\alpha G)))$ tal que $a^2 = a^3 z$ e $a^2 z^2 = \gamma \in \dfrac{A}{nil_*(A)}$, onde $\gamma \in \pi(\psi(T(A *_\alpha G)))$ é um elemento idempotente não nulo.

Afirmamos que existe um idempotente $\gamma_1 \in A$ tal que $\psi(\gamma_1) = \gamma$. De fato, como $\gamma \neq 0$, temos que $\gamma \notin nil_*(A)$, pois $nil_*(A)$ é um ideal nil. Assim, γ é um elemento não nulo de $\dfrac{A}{nil_*(A)}$ e, desta forma, existe $\gamma_1 \in A$ tal que $\psi(\gamma_1) = \gamma$.

Como $\gamma \in \pi(\psi(T(A *_\alpha G)))$, temos também que existem $f \in \psi(T(A *_\alpha G))$ e $f_1 \in T(A *_\alpha G)$ tais que $\pi(f) = \gamma$ e $\psi(f_1) = f$. Escrevamos $\pi(f_1) = \lambda$.

Da forma como foram definidas π e ψ, vale que $\psi \circ \pi = \pi \circ \psi$. Por consequência, temos que

$$\gamma = \pi(f) = \pi(\psi(f_1)) = \psi(\pi(f_1)) = \psi(\lambda).$$

Notemos que $\lambda - \gamma_1 = n$ para algum $n \in nil_*(A)$. Com efeito, como $\gamma = \psi(\lambda)$, existe $n_1 \in nil_*(A)$ tal que $\gamma - \lambda = n_1$. Além disso, como $\gamma = \psi(\gamma_1)$, existe $n_2 \in nil_*(A)$ tal que $\gamma = \gamma_1 + n_2$. Logo, $\gamma_1 + n_2 = \lambda + n_1$ e, desta forma, $\lambda - \gamma_1 = n_2 - n_1$. Então, basta tomar $n = n_2 - n_1$. Escrevamos

$$A = \gamma_1 A \oplus (1 - \gamma_1)A,$$

a fim de aplicar o Lema 2.2.5 em $\gamma_1 A$.

Consideremos a aplicação $\epsilon : A *_\alpha G \longrightarrow (\gamma_1 A) *_\alpha G$ dada por $\epsilon(h) = \gamma_1 h$. Então,

$$\pi(\epsilon(f_1)) = \pi(\gamma_1 f_1) = \gamma_1 \lambda$$

e, desta forma,

$$\psi(\pi(\epsilon(f_1))) = \psi(\gamma_1\lambda) = \psi(\gamma_1)\psi(\lambda) = \gamma^2 = \gamma \neq 0,$$

o que implica que $\epsilon(f_1) \neq 0$ e obtemos $f_1 \neq 0$. Como $f_1 \in T(A *_\alpha G)$, temos que $\epsilon(T(A *_\alpha G))$ é um ideal regular não nulo de $(\gamma_1 A) *_\alpha G$ e, portanto, $T((\gamma_1 A) *_\alpha G) \neq 0$.

Mostremos agora que $\gamma_1 A$ é reduzido. De fato, seja $y \in nil_*(\gamma_1 A)$. Pelo Lema 2.2.2, temos que $y\epsilon(f_1) = y\gamma_1 f_1 = 0$. Além disso, $\gamma_1 y = y$ pois, como $y \in \gamma_1 A$, existe $b \in A$ tal que $y = \gamma_1 b$. Assim,

$$y = \gamma_1 b = \gamma_1(\gamma_1 b) = \gamma_1 y$$

e, consequentemente,

$$0 = \pi(\gamma_1 y f_1) = \gamma_1 y\lambda = y\lambda.$$

Sendo $\lambda = \gamma_1 + n$, temos que

$$0 = y\gamma_1\lambda = y\gamma_1(\gamma_1 + n) = y\gamma_1 + y\gamma_1 n = \gamma_1 y(1_A + n).$$

Pelo fato de que $1_A + n \in U(\gamma_1 A)$, pois $n \in nil_*(\gamma_1 A) \subset J(\gamma_1 A)$, temos que $y = \gamma_1 y = 0$.

Uma vez que $T((\gamma_1 A) *_\alpha G) \neq 0$, pelo Lema 2.2.5 temos que existe um somando direto regular não nulo A' de A com $\pi(T(A' *_\alpha G)) = A'$ ou seja, $A\gamma_1 = A' \oplus S$, para algum ideal não nulo S de $A\gamma_1$. Portanto,

$$A = \gamma_1 \oplus (1_A - \gamma) = (A' \oplus S) \oplus (1_A - \gamma)A,$$

com $\pi(T(A' *_\alpha G)) = A'$ e A' é regular. $\square$

Finalizamos a seção com um resultado que é consequência do último teorema.

Corolário 2.2.7. *Seja α uma ação parcial torcida unitária de G sobre A tal que G é finito e todos os elementos idempotentes de A são α-invariantes. Se $T(A) = 0$, então $T(A *_\alpha G) = 0$.*

Demonstração: Suponhamos $T(A *_\alpha G) \neq 0$. Pelo Teorema 2.2.6, existe um somando direto não nulo regular A_1 de A tal que $\pi(T(A_1 *_\alpha G) = A_1$. Logo $A_1 \subset T(A)$ e $A_1 \neq 0$. $\square$

Capítulo 3

Dimensão de Goldie do Skew anel das Séries de Laurent Parciais Torcidas

Neste capítulo introduziremos o skew anel das séries de potências parciais torcidas e o skew anel das séries de Laurent parciais torcidas, afim de investigar significantes propriedades destes anéis. Para tanto, vamos considerar o grupo aditivo $\mathbb{Z}$ e $\alpha = \big(\{D_i\}_{i\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}}, \{w_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\big)$ será uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre um anel unitário A.

3.1 A Primalidade e a Semiprimalidade do Skew Anel das Séries de Potências Parciais Torcidas

O escopo desta seção é generalizar alguns resultados de [20], onde os autores estudaram ideais primos e semiprimos no skew anel das séries de potências.

Dada uma ação parcial torcida unitária α de $\mathbb{Z}$ sobre um anel A, definimos o skew anel das séries de Laurent parciais torcidas $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ como a soma direta $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} D_i x^i$, cujos elementos são as séries

$$\sum_{j\geq s} a_j x^j,$$

onde $a_j \in D_j$, para todo $j \geq s$. A adição neste anel é a usual e a multiplicação é definida por

$$(a_i x^i)(b_j x^j) = \alpha_i(\alpha_i^{-1}(a_i)b_j)w_{i,j}x^{i+j},$$

para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}$, $a_i \in D_i$ e $b_j \in D_j$.

Claramente $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é um anel associativo cuja identidade é $1_A x^0$. Além disso, definindo o morfismo injetor $\phi : A \to A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ dado por $r \mapsto rx^0$, podemos considerar $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ como uma extensão de A.

Agora, seja $A[[x;\alpha,w]]$ o subanel de $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ cujos elementos são as séries $\sum_{i\geq 0} b_i x^i$, com a soma e a multiplicação definidas como anteriormente. Nomeamos $A[[x;\alpha,w]]$ como o skew anel das séries de potências parciais torcidas.

Observemos que, se S é um ideal α-invariante de A, então os conjuntos

$$S[[x;\alpha,w]] = \left\{ \sum_{i\geq 0} a_i x^i \ : \ a_i \in S \cap D_i \right\}$$

e

$$S\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle = \left\{\sum_{i\geq m} a_i x^i \ : \ a_i \in S\cap D_i, \quad m\in\mathbb{Z}\right\}$$

são ideais de $A[[x;\alpha,w]]$ e de $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$, respectivamente. Agora, se S é um ideal à direita de A, então

$$S[[x;\alpha,w]] = \left\{\sum_{i\geq 0} a_i x^i : a_i \in S\cap D_i\right\}$$

e

$$S\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle = \left\{\sum_{i\geq m} b_i x^i : b_i \in S\cap D_i\right\}$$

são ideais à direita de $A[[x;\alpha,w]]$ e de $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$, respectivamente.

Antes de prosseguirmos, faz-se necessário apresentarmos a seguinte definição.

Definição 3.1.1. Sejam α uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre A e I um ideal A.

(i) I é um ideal um α-ideal se $\alpha_i(I\cap D_{-i})\subseteq I\cap D_i$, para todo $i\geq 0$.

(ii) I é um ideal α-primo se I é um ideal α-invariante e, para quaisquer ideais α-invariantes J e K de A tais que $JK\subseteq I$, tivermos que $J\subseteq I$ ou $K\subseteq I$.

(iii) I é um ideal fortemente α-primo se I é um ideal α-invariante e, para quaisquer ideais M e N de A tal que N é α-ideal, se $MN\subseteq I$, então $M\subseteq I$ ou $N\subseteq I$.

É importante observar que os conceitos de α-ideal e ideal α-invariantes são distintos, pois dizer que I é um ideal α-invariante significa que $\alpha_i(I\cap D_{-i})\subseteq I\cap D_i$ para todo $i\in\mathbb{Z}$, enquanto que para ser α-ideal, pedimos apenas $i\geq 0$.

Proposição 3.1.2. *Sejam α uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre A e $a\in A$.*

(a) $J=\sum_{i\in\mathbb{Z}} A\alpha_i(a1_{-i})A$ *é um ideal α-invariante de A, denominado ideal α-invariante gerado por a.*

(b) $J' = \sum_{i \geq 0} A\alpha_i(a1_{-i})A$ *é um α-ideal A, denominado α-ideal gerado por a.*

Demonstração: Provaremos apenas o item (a). O item (b) segue de maneira análoga. Claramente J é um ideal de A. Dado $j \in \mathbb{Z}$, seja $z \in J \cap D_{-j}$. Queremos mostrar que $\alpha_j(z) \in J \cap D_j$.

Sejam $c, d \in A$ tais que $z = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c\alpha_i(a1_{-i})d$. Então, para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_j(c\alpha_i(a1_{-i})d) &= \alpha_j(1_{-j}c)\alpha_j(1_{-j}\alpha_i(a1_{-i}))\alpha_j(1_{-j}d) \\
&= \alpha_j(1_{-j}c)w_{i,j}\alpha_{j+i}(1_{-(j+i)}a)w_{j,i}^{-1}\alpha_j(1_{-j}d) \\
&= \in A\alpha_{j+i}(1_{-(j+i)}a)A.
\end{aligned}$$

Então, tomando $k = j + i$, temos que $\alpha_j(c\alpha_i(a1_{-i})d) \in A\alpha_k(1_{-(k)}a)A$, para todos $i, j \in \mathbb{Z}$, de onde segue que $\alpha_j(z) \in \sum_{k \in \mathbb{Z}} A\alpha_k(a1_{-k})A$. Como já tinhamos que $\alpha_j(z) \in D_j$, podemos concluir que $\alpha_j(z) \in J \cap D_j$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. □

No próximo resultado apresentamos condições necessárias e suficientes para garantir a α-primalidade e a forte α-primalidade de um ideal α-invariante do anel A.

Lema 3.1.3. *Seja P um ideal α-invariante de A.*

(a) *P é um ideal α-primo se, e somente se, dados $a, b \in A$ tais que*

$$\alpha_j(a1_{-j})A\alpha_i(b1_{-i}) \subseteq P,$$

para todos $i, j \in \mathbb{Z}$, então $a \in P$ ou $b \in P$.

(b) *P é fortemente α-primo se, e somente se, dados $a, b \in A$ tais que*

$$aA\alpha_j(b1_{-j}) \subseteq P,$$

para todo $j \geq 0$, então $a \in P$ ou $b \in P$.

Demonstração: Provaremos apenas o item (a), pois o item (b) segue de maneira análoga.

Sejam $a, b \in P$ tais que $\alpha_j(a1_{-j})A\alpha_i(b1_{-i}) \subseteq P$, para todos $i, j \in \mathbb{Z}$. Então, fixando j, temos que

$$\alpha_j(a1_{-j}) \sum_{i \in \mathbb{Z}} A\alpha_i(b1_{-i})A \subseteq P.$$

Assim,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} A\alpha_j(a1_{-j})A \sum_{i \in \mathbb{Z}} A\alpha_i(b1_{-i})A \subseteq P.$$

Uma vez que os ideais $\sum_{j \in \mathbb{Z}} A\alpha_j(a1_{-j})A$ e $\sum_{i \in \mathbb{Z}} A\alpha_i(b1_{-i})A$ são α-invariantes, por hipótese temos que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} A\alpha_j(a1_{-j})A \subseteq P$ ou $\sum_{i \in \mathbb{Z}} A\alpha_i(b1_{-i})A \subseteq P$. No primeiro caso temos que $a \in P$ pois

$$a \in AaA \subseteq \sum_{j \in \mathbb{Z}} A\alpha_j(a1_{-j})A \subseteq P.$$

De forma análoga, temos que $b \in P$ se $\sum_{i \in \mathbb{Z}} A\alpha_i(b1_{-i})A \subseteq P$.

Reciprocamente, sejam I e J ideais α-invariantes de A tais que $IJ \subseteq P$. Consideremos $a \in I$ e suponhamos que exista $b \in J \setminus P$. Desta forma,

$$(\sum_{j \in \mathbb{Z}} A\alpha_j(a1_{-j})A)(\sum_{i \in \mathbb{Z}} A\alpha_j(b1_{-i})A) \subseteq P,$$

o que implica que $\alpha_j(a1_{-j})A\alpha_i(b1_{-i}) \subseteq P$. Então, por hipótese, temos que $a \in P$ ou $b \in P$. Como $b \in J \setminus P$, temos que $a \in P$ e, consequentemente, $I \subseteq P$. $\square$

Definição 3.1.4. Seja α uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre A. Dizemos que A é α-primo (fortemente α-primo) se o ideal nulo é α-primo (fortemente α-primo).

O próximo resultado é uma consequência imediata do Lema 3.1.3.

Lema 3.1.5. *Seja α uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre A.*

(a) *A é um anel α-primo se, e somente se, para cada $a, b \in A$ tais que*

$$\alpha_j(a1_{-j})A\alpha_i(b1_{-i}) = 0$$

para todos $i, j \in \mathbb{Z}$, temos que $a = 0$ ou $b = 0$.

(b) *A é um anel fortemente α-primo se, e somente se, para cada $a, b \in A$ tais que $aA\alpha_i(b1_{-i}) = 0$ para todo $i \geq 0$, temos que $a = 0$ ou $b = 0$*

Observação 3.1.6. É importante notar que se L é um ideal à direita não nulo de $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$, então $L \cap A[[x; \alpha, w]]$ é um ideal à direita não nulo $A[[x; \alpha, w]]$ pois para cada elemento não nulo $f \in L$, existe $s \geq 0$ tal que $0 \neq f1_s x^s \in L \cap A[[x; \alpha, w]]$. Além disso, se um ideal à direita M de $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ é tal que $M \cap A[[x; \alpha, w]] = 0$, então temos que $M = 0$.

Com estes dois últimos lemas estamos em condições de provar o próximo resultado, onde relacionamos os anéis A, $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ e $A[[x; \alpha, w]]$ quanto à primalidade, α-primalidade e a forte α-primalidade.

Proposição 3.1.7. *Seja α uma ação parcial torcida unitária. Valem as seguintes afirmações.*

(a) *A é α-primo se, e somente se, $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ é primo.*

(b) *$A[[x; \alpha, w]]$ é primo se, e somente se, A é fortemente α-primo. Em particular, se $A[[x; \alpha, w]]$ é primo, então A é α-primo.*

(c) *Se $A[[x; \alpha, w]]$ é primo, então $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ é primo.*

Demonstração:

(a) Suponhamos que $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é primo e sejam I e J ideais α-invariantes de A tais que $IJ=0$. Então,

$$I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle J\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle \subseteq (IJ)\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle = 0.$$

Como $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é primo, temos que $I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle = 0$ ou $J\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle = 0$. Assim, $I=0$ ou $J=0$ e disto segue que A é α-primo.

Reciprocamente, sejam $f,g\in A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ elementos não nulos tais que

$$fA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle g = 0.$$

Consideremos m e n os menores inteiros tais que $f_m\neq 0$ e $g_n\neq 0$, onde $f=\sum_{i\geq m} f_i x^i$ e $g=\sum_{i\geq n} g_i x^i$. Notemos que, dado $k\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f_m x^m D_k x^k g_n x^n &= f_m\alpha_m(1_{-m}D_k)w_{m,k}x^{m+k}g_n x^n \\ &= f_m 1_m D_{k+m} w_{m,k} x^{m+k} g_n x^n \\ &= f_m D_{k+m} x^{m+k} g_n x^n \end{aligned}$$

e, uma vez que

$$fD_k x^k g \subseteq fA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle g = 0,$$

segue que $f_m D_{k+m} x^{m+k} g_n x^n = 0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Fazendo $i=m+k$, temos que $f_m D_i \alpha_i(1_{-i}g_n) = 0$, para todo $i\in\mathbb{Z}$.

Assim, para cada $j\in\mathbb{Z}$, temos que

$$f_m 1_{-j} D_i 1_{-j}\alpha_i(1_{-i}g_n)1_{-j} = 0$$

e, consequentemente,

$$\alpha_j(f_m 1_{-j} D_i 1_{-j}\alpha_i(1_{-i}g_n)1_{-j}) = 0. \tag{3.1}$$

Mas,

$$\alpha_j(f_m 1_{-j} D_i 1_{-j}\alpha_i(1_{-i}g_n)1_{-j}) = \alpha_j(f_m 1_{-j})\alpha_j(D_i 1_{-j})\alpha_j(\alpha_i(1_{-i}g_n)1_{-j})$$

$$= \alpha_j(f_m 1_{-j})1_j D_{i+j}\alpha_j(\alpha_i(1_{-(j+i)}1_{-i}g_n))$$
$$= \alpha_j(f_m 1_{-j})D_{i+j}w_{j,i}\alpha_{j+i}(1_{-(j+i)}1_{-i}g_n)w_{j,i}^{-1}.$$

Então, de (3.1) temos que

$$\alpha_j(f_m 1_{-j})D_{i+j}w_{j,i}\alpha_{j+i}(1_{-(j+i)}1_{-i}g_n)w_{j,i}^{-1} = 0.$$

Desta forma,

$$\alpha_j(f_m 1_{-j})D_{i+j}w_{j,i}\alpha_{j+i}(1_{-(j+i)}1_{-i}g_n) = \alpha_j(f_m 1_{-j})A1_{i+j}\alpha_{j+i}(1_{-(j+i)}1_{-i}g_n)$$

e, consequentemente,

$$\alpha_j(f_m 1_{-j})A1_{i+j}\alpha_{j+i}(1_{-(j+i)}1_{-i}g_n) = 0.$$

Fazendo $l = j + i$, temos que $\alpha_j(f_m 1_{-j})A\alpha_l(1_{-l}g_n) = 0$, para todo $l \in \mathbb{Z}$.

Então, pelo Lema 3.1.5, temos que $f_m = 0$ ou $g_n = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ é primo.

(b) A prova deste item é análoga ao item (a).

(c) Sejam I e J ideais de $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ tais que $IJ = 0$. Então,

$$(I \cap A[[x; \alpha, w]])(J \cap A[[x; \alpha, w]]) = 0.$$

Uma vez que $I \cap A[[x; \alpha, w]]$ e $J \cap A[[x; \alpha, w]]$ são ideais de $A[[x; \alpha, w]]$, temos que $I \cap A[[x; \alpha, w]] = 0$ ou $J \cap A[[x; \alpha, w]] = 0$ e, pela Observação 3.1.6, temos que $I = 0$ ou $J = 0$. Portanto $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ é primo.

□

Como consequência, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.1.8. *Se A é um anel primo, então $A[[x; \alpha, w]]$ é também um anel primo.*

Em [20, Corollary 2.12] os autores trabalharam com o skew anel das séries de Laurent, denotado por $A\langle\langle x;\alpha\rangle\rangle$ e o skew anel das séries de potências $A[[x;\alpha]]$, assumindo que α é uma ação global(não torcida) de um grupo G no alnel A. Neste contexto, provaram o seguinte resultado.

Proposição 3.1.9. *[20, Corollary 2.12] Sejam A um anel noetheriano e I um ideal α-invariante de A. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(a) *I é um ideal α-primo se, e somente se, $I(A\langle\langle x;\alpha\rangle\rangle)$ é primo.*

(b) *I é semiprimo se, e somente se, $I(A\langle\langle x;\alpha\rangle\rangle)$ é semiprimo.*

(c) *Se I é semiprimo, então $rank\left(\dfrac{A\langle\langle x;\alpha\rangle\rangle}{I(A\langle\langle x;\alpha,\rangle\rangle)}\right) = rank\left(\dfrac{A}{I}\right)$.*

(d) *Os itens anteriores continuam válidos para $A[[x;\alpha]]$*

Na proposição anterior, $rank(A)$ denota a dimensão de Goldie do anel, que será definida na próxima seção deste capítulo.

O objetivo dos próximos resultados desta seção é generalizar parcialmente a Proposição 3.1.9. Para tanto, começamos apresentando um caso particular da Proposição 3.1.7

Proposição 3.1.10. *Seja I um ideal α-invariante de A. As seguintes afirmações são válidas.*

(a) *I é um ideal α-primo se, e somente se, $I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é primo.*

(b) *I é fortemente α-primo se, e somente se, $I[[x;\alpha,w]]$ é primo.*

A proposição que apresentaremos a seguir é uma generalização de [20, Proposition 2.11].

Proposição 3.1.11. *Se K é um ideal primo de $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$, então $K\cap A$ é um ideal α-primo de A.*

Demonstração: Seja K um ideal primo $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$. Não é difícil ver que $K\cap A$ é um ideal de A. Afirmamos que $K\cap A$ é um ideal α-invariante de A. De fato, seja $a\in(K\cap A)\cap D_{-i}$, com $i\in\mathbb{Z}$. Então, $1_ix^iax^{-i}\in K$ e, desta forma,

$$1_ix^iax^{-i}=1_i\alpha_i(a)w_{i,-i}=\alpha_i(a)w_{i,-i}\in K\cap D_i.$$

Como $w_{i,-i}$ é um elemento inversível de D_i, temos que $\alpha_i(a)w_{i,-i}w_{i,-i}^{-1}\in(K\cap A)\cap D_i$. Logo, $\alpha_i(a)\in(K\cap A)\cap D_i$ e segue que $\alpha_i((K\cap A)\cap D_{-i})\subseteq(K\cap A)\cap D_i$. De maneira análoga é possível mostrar que $\alpha_i^{-1}((K\cap A)\cap D_i)\subseteq(K\cap A)\cap D_{-i}$. Consequentemente, $\alpha_i((K\cap A)\cap D_{-i})=(K\cap A)\cap D_i$, para todo $i\in\mathbb{Z}$ e temos que $K\cap A$ é um ideal α-invariante de A. Provaremos agora que $K\cap A$ é um ideal α-primo de A. Consideremos o anel $\dfrac{A}{K\cap A}\langle\langle x;\bar{\alpha},\bar{w}\rangle\rangle$, onde $\bar{\alpha}$ é a extensão de α para $\dfrac{A}{K\cap A}$ e $\bar{w}_{i,j}=w_{i,j}+(K\cap A)$, para todo $i,j\in\mathbb{Z}$. Notemos que a aplicação

$$\psi:\frac{A}{(K\cap A)}\langle x;\bar{\alpha},\bar{w}\rangle\longrightarrow\frac{A\langle x;\alpha,w\rangle}{(K\cap A)\langle x;\alpha,w\rangle}$$

definida por

$$\psi\Big(\sum_{i\geq s}\bar{a}_ix^i\Big)=\sum_{i\geq s}a_ix^i+(K\cap A)\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$$

é um isomorfismo.

Claramente temos que $\dfrac{K}{(K\cap A)\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle}$ é um ideal primo de $\dfrac{A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle}{(K\cap A)\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle}$ e $\bar{K}=\psi^{-1}\left(\dfrac{K}{(K\cap A)\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle}\right)$ é um ideal primo de $\dfrac{A}{(K\cap A)}\langle\langle x;\bar{\alpha},\bar{w}\rangle\rangle$ tal que $\bar{K}\cap\dfrac{A}{(K\cap A)}=\bar{0}$. Desta forma, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $K\cap A=0$. Como, por hipótese, K é um ideal primo e já mostramos que $K\cap A$ é um ideal α-invariante, se mostrarmos que A é um ideal α-primo, teremos que $K\cap A$ é um ideal α-primo. Sejam então I e J ideais α-invariantes de A tais que $IJ=0$. Assim,

$$I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle J\langle\langle x;\alpha w\rangle\rangle\subseteq(IJ)\langle x;\alpha,w\rangle\rangle=0\in K.$$

Como K é primo, temos que $I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle\subseteq K$ ou $J\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle\subseteq K$ e, consequentemente, $I\subseteq(K\cap A)=0$ ou $J\subseteq(K\cap A)=0$. Logo, $I=0$ ou $J=0$ e, portanto, A

é α-primo. $\square$

Para prosseguirmos é essencial a próxima definição. Mais detalhes sobre esta podem ser encontrados em [5].

Definição 3.1.12. Seja α uma ação parcial torcida unitária de um grupo G sobre um anel A. Então o radical α-primo de A é a interseção de todos os ideais α-primos de A e é denotado por $nil_\alpha(A)$.

Agora estamos em condições de descrever o radical primo de $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$.

Proposição 3.1.13. *Seja α uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre A. Então $nil_*(A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle) = nil_\alpha(A)\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$.*

Demonstração: Seja P um ideal primo de $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$. Então, pela Proposição 3.1.11, temos que $P\cap A$ é um ideal α-primo. Logo,

$$nil_*(A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle) \supseteq nil_\alpha(A)\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle.$$

Por outro lado, seja I um ideal α-primo de A. Pela Proposição 3.1.10, temos que $I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é primo e, consequentemente, $nil_\alpha(A)\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle \supseteq nil_*(A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle)$. Portanto, $nil_*(A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle) = nil_\alpha(A)\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$. $\square$

Para finalizar esta seção, apresentamos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.14. *Seja α uma ação parcial torcida unitária $\mathbb{Z}$ sobre A.*

(a) *Se A é semiprimo, então $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é semiprimo. Além disso, se A é Noetheriano e $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é semiprimo, então A é semiprimo.*

(b) *Seja I um ideal α-invariante A. Se I é semiprimo, então $I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é semiprimo.*

Demonstração:

(a) Suponhamos, por contradição, que exista $f = \sum_{i \geq s} f_i x^i$ não nulo tal que

$$fA\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle f = 0.$$

Seja $s \in \mathbb{Z}$ o menor inteiro tal que $f_s \neq 0$. Consideremos um elemento arbitrário $c \in D_s$ e escrevamos $b = \alpha_s^{-1}(c)$, para algum $b \in D_{-s}$. Notemos que $fbx^{-s}f = 0$, pois $fbx^{-s}f \in fA\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle f = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} f_s x^s b x^{-s} f_s x^s &= f_s \alpha_s(b) w_{s,-s} f_s x^s \\ &= f_s \alpha_s(\alpha_s^{-1}(c)) w_{s,-s} f_s x^s \\ &= f_s c w_{s,-s} f_s x^s. \end{aligned}$$

Desta forma, $f_s c w_{-s,s} f_s = 0$, para todo $c \in D_s$, de onde segue que $f_s D_s f_s = 0$. Como A é um anel semiprimo, temos que D_s é também um anel semiprimo. Consequentemente, $f_s = 0$ pois $f_s \in D_s$, o que é uma contradição. Logo, $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ é semiprimo.

Para a segunda parte, observemos que, como A é noetheriano, por [18, Theorem 4.10.30] temos que o radical primo $nil_*(A)$ é nilpotente. Assim, existe $n \geq 1$ tal que $nil_*(A)^n = 0$ e, consequentemente, $nil_*(A)^n \subseteq P$, para todo ideal α-primo P de A. Por [14, pág. 33 e Prop. 2.3.8], $nil_*(A)$ é um ideal α-invariante de A. Logo, $nil_*(A) \subseteq P$, para todo ideal α-primo P de A. Desta forma, obtemos que $nil_*(A) \subseteq nil_\alpha(A)$. Como $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ é semiprimo, temos que $nil_*(A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle) = 0$ e, pela Proposição 3.1.13, podemos concluir que $nil_\alpha(A) = 0$. Assim, $nil_*(A) = 0$ e, portanto, A é semiprimo.

(b) A prova deste item é análoga ao que fizemos em (a).

$\square$

3.2 Propriedades Goldie de $A[[x:\alpha,w]]$ e de $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$

Aqui, continuamos assumindo que α é uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre A.

O propósito desta seção é investigar as propriedades de Goldie do skew anel das séries de potências parciais torcidas e do skew anel das séries de Laurent parciais torcidas. Para tanto, é necessário esclarecermos alguns conceitos primordiais para a compreensão do que aqui será apresentado.

Sejam A um anel qualquer, M um A-módulo à direita não nulo e N um submódulo também não nulo de M. Dizemos que N é um *submódulo essencial* de M se $N \cap L \neq 0$, para todo submódulo à direita não nulo L de M. Se todos os submódulos não nulos de M forem essenciais, então M é chamado de *uniforme*. Mais detalhes sobre módulos uniformes e submódulos essenciais podem ser encontradas em [16, pág. 56 e pág. 71].

Definição 3.2.1. Seja A um anel com unidade. Dizemos que um A-módulo à direita M tem dimensão de Goldie n, e denotamos por $rankM = n$, se existe um submódulo à direita essencial V de M que é uma soma direta de n submódulos uniformes. Por outro lado, se tal n não existe, então $rankM = \infty$.

Notemos que na literatura, a dimensão de Goldie é também chamada de dimensão uniforme.

Da definição anterior segue que $rankM = 0$ se, e somente se $M = 0$. Além disso, a dimensão de Goldie à direita de um anel com unidade A é a dimensão de Goldie de A visto como um A-módulo à direita.

Dado um subconjunto X de um anel A, o anulador à direita de X em A é o conjunto

$$ann_A(X) = \{a \in A : Xa = 0\}.$$

Um ideal anulador à direita é da forma $ann_A(X)$ para algum subconjunto X de A. Desta forma, dizemos que A satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre os ideais anuladores à direita se toda cadeia ascendente de ideais anuladores à direita de A for estacionária.

Munidos destes conceitos, podemos definir anel de Goldie à direita.

Definição 3.2.2. [22, 2.3.1] Um anel A é dito anel de Goldie à direita se A possui dimensão de Goldie finita e A satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre os ideais anuladores à direita.

O próximo lema é fundamental para provar o principal resultado desta seção.

Lema 3.2.3. *Seja V um A-módulo à direita simples. Então $VA[[x;\alpha,w]]$ é um $A[[x;\alpha,w]]$-módulo à direita cujos únicos submódulos não nulos estão ordenados da forma*

$$VA[[x;\alpha,w]] \supset V(\sum_{i\geq 1} D_i x^i) \supset V(\sum_{i\geq 2} D_i x^i) \supset \dots.$$

Demonstração: Claramente temos que $VA[[x;\alpha,w]]$ é um $A[[x;\alpha,w]]$-módulo à direita e notemos que vale a seguinte cadeia

$$VA[[x;\alpha,w]] \supset V(\sum_{i\geq 1} D_i x^i) \supset V(\sum_{i\geq 2} D_i x^i) \subset \dots.$$

Seja S um $A[[x;\alpha,w]]$-submódulo não nulo de $VA[[x;\alpha,w]]$ tal que $S \neq V\sum_{i\geq 1} D_i x^i$ e consideremos $f = \sum_{i\geq 0} v_i x^i$ um elemento não nulo de S com $0 \neq v_0 \in V$. Como V é um A-módulo à direita simples, então $v_0 A = V$. Desta forma, existe $a_i \in A$ tal que $v_i = v_0 a_i$ para todo $i \geq 1$. Seja $g = 1 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots$ e notemos que

$$\begin{aligned} fg &= (v_0 + v_0 a_1 x + v_0 a_2 x^2 + \dots)(1 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots) \\ &= v_0 + (v_0 u_1 + v_0 a_1)x + (v_0 u_2 + \alpha_1(\alpha_1^{-1}(v_0 a_1)u_1)w_{1,1} + v_0 a_2)x^2 \\ &+ (v_0 u_3 + \alpha_1(\alpha_1^{-1}(v_0 a_1)u_2)w_{1,2} + \alpha_2(\alpha_2^{-1}(v_0 a_2)u_1)w_{2,1} + v_0 a_3)x^3 + \dots. \end{aligned}$$

Se considerarmos

$$\begin{aligned} u_1 &= -a_1, \\ u_2 &= -a_2 - a_1\alpha_1(u_1 1_{-1})w_{1,1}, \\ u_3 &= -a_3 - a_2\alpha_2(u_1 1_{-2})w_{2,1} - a_1\alpha_1(u_2 1_{-1})w_{1,2}, \\ &\vdots \\ u_n &= a_n - a_{n-1}\alpha_{n-1}(u_1 1_{-n+1} w_{n-1,1} - \ldots - a_1\alpha_1(u_{n-1}1_{-1})w_{1,n-1}\ldots, \end{aligned}$$

temos que $fg = v_0$.

Agora,

$$VA[[x;\alpha,w]] = (v_0A)A[[x;\alpha,w]] \subseteq v_0A[[x;\alpha,w]] = fgA[[x;\alpha,w]] \subseteq fA[[x;\alpha,w]]$$

e $fA[[x;\alpha,w]] \subseteq VA[[x;\alpha,w]]$. Assim, $VA[[x;\alpha,w]] = fA[[x;\alpha,w]]$, para todo $f \in S$ e segue que $VA[[x;\alpha,w]] \subseteq SA[[x;\alpha,w]] \subseteq S$. Portanto, não existe nenhum submódulo de $VA[[x;\alpha,w]]$ entre $VA[[x;\alpha,w]]$ e $V\sum_{i\geq 1} D_i x^i$.

Ainda precisamos mostrar que não existe nenhum submódulo não nulo de $VA[[x;\alpha,w]]$ entre $V\sum_{i\geq j} D_i x^i$ e $V\sum_{i\geq j+1} D_i x^i$, para todo $j \geq 1$. Para tanto, mostraremos que

$$P = \frac{V\sum_{i\geq 1} D_i x^i}{V\sum_{i\geq 2} D_i x^i} = VD_1x + V\sum_{i\geq 2} D_i x^i$$

é um $A[[x;\alpha,w]]$-módulo à direita simples.

Seja $L \subseteq P$ um $A[[x;\alpha,w]]$-submódulo à direita não nulo de P. Então existe um elemento não nulo $f \in L$, onde $f = a_1x + V\sum_{i\geq 2} D_i x^i$ e $a_i \in VD_1$ é diferente de zero. Afirmamos que $fA[[x;\alpha,w]] = P$. De fato, seja $h = \sum_{i\geq 0} h_i x^i \in A[[x;\alpha,w]]$. Então,

$$fh = (a_1x + V\sum_{i\geq 2} D_i x^i)(h_0 + \sum_{i\geq 1} h_i x^i) \subseteq VD_1x + V\sum_{i\geq 2} D_i x^i = P.$$

Assim, $fA[[x;\alpha,w]] \subseteq P$. Resta ainda ver que $P \subseteq fA[[x;\alpha,w]]$.

Seja $g = bx + V\sum_{i\geq 2} D_i x^i \in P$, com $b \in VD_1$. Como $a_1 \in VD_1 \subseteq VA \subseteq V$, temos que $a_i \in V$ e, uma vez que V é um A-módulo à direita simples, temos que $V = a_1V$. Então, como $b \in VD_1 \subseteq V$, existe $\lambda \in A$ tal que $a_1\lambda = b$. Afirmamos que $f\alpha_1^{-1}(1_1\lambda) = g$. De fato,

$$\begin{aligned}
f\alpha_1^{-1}(1_1\lambda) &= (a_1x + V\sum_{i\geq 2} D_i x^i)(\alpha_1^{-1}(1_1\lambda)) \\
&= a_1\lambda x + (V\sum_{i\geq 2} D_i x^i)\alpha_1^{-1}(1_1\lambda) \\
&= a_1\lambda x + V\sum_{i\geq 2} D_i x^i \\
&= bx + V\sum_{i\geq 2} D_i x^i \\
&= g.
\end{aligned}$$

Logo $P \subseteq fA[[x;\alpha,w]]$ e, como já havíamos mostrado a inclusão contrária, temos que $P = fA[[x;\alpha,w]]$. Desta forma, $P = fA[[x;\alpha,w]] \subseteq L(A[[x;\alpha,w]]) \subseteq L$, pois L é um $A[[x;\alpha,w]]$-módulo à direita. Como já tínhamos que $L \subseteq P$, segue que $L = P$ e, portanto, P é um $A[[x;\alpha,w]]$-módulo á direita simples. Desta forma, não existe $A[[x;\alpha,w]]$-submódulo à direita não nulo entre $V\sum_{i\geq i} D_i x^i$ e $V\sum_{i\geq 2} D_i x^i$. Repetindo este processo para todo $j \geq 2$, segue o resultado. □

Considerando V como um ideal à direita simples de A, o próximo resultado garante que $VA[[x;\alpha,w]]$ e $VA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ são módulos uniformes sobre $A[[x;\alpha,w]]$ e $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$, respectivamente.

Proposição 3.2.4. *Seja V é um ideal à direita simples de A. Então:*

(a) *$VA[[x;\alpha,w]]$ é uniforme como $A[[x;\alpha,w]]$-módulo.*

(b) *$VA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é uniforme como $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$-módulo.*

Demonstração:

(a) Pelo Lema (3.2.3), os únicos submódulos de $VA[[x;\alpha,w]]$ são $V\sum_{i\geq m} D_i x^i$, com $m \geq 0$. Notemos que $V\sum_{j\geq i} D_j x^j \supseteq V\sum_{j\geq i+s} D_j x^j$, para todo $s \geq 0$. Logo,

$$V\sum_{j\geq s} D_j x^j \cap V\sum_{j\geq t} D_j x^j = V\sum_{j\geq s} D_j x^j \neq 0,$$

sempre que $s \geq t$. Portanto, $VA[[x;\alpha,w]]$ é uniforme.

(b) Seja L um submódulo não nulo de $VA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$. Então $L \cap (VA[[x;\alpha,w]])$ é um submódulo não nulo de $VA[[x;\alpha,w]]$. Desta forma, para cada submódulo não nulo C e D de $VA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$, temos que $C \cap (VA[[x;\alpha,w]]) \neq 0$ e $D \cap (VA[[x;\alpha,w]]) \neq 0$. Então,

$$(C \cap D) \cap VA[[x;\alpha,w]] = (C \cap VA[[x;\alpha,w]]) \cap (D \cap VA[[x;\alpha,w]]) \neq 0$$

e, consequentemente, $C \cap D \neq 0$. Portanto, $VA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é uniforme.

$\square$

O próximo teorema é uma generalização de [20, Theorem 2.8], onde os autores trabalharam com o skew anel das séries de potências e o skew anel das séries de Laurent, assumindo uma ação global (não torcida) de um grupo em um anel. Neste caso, os autores provaram que, quando A é um anel semiprimo e noetheriano (à direita ou à esquerda), então as dimensões de Goldie de A, do skew anel nas séries de Laurent e do skew anel das séries de potências coincidem. Com o objetivo de generalizar [20, Theorem 2.8], no próximo teorema substituimos a noetherianidade por uma condição mais fraca, à saber, a propriedade Goldie.

Teorema 3.2.5. *Se A é um anel semiprimo de Goldie, então*

$$rankA = rankA[[x;\alpha,w]] = rankA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle.$$

Demonstração: Pelo fato de que A é semiprimo e Goldie temos, por [22, Theorem 2.3.6], que existe o anel de quociente clássico E de A, que é semissimples e, por [22, Lemma 2.2.12], temos que $rankA = rankE$. Uma vez que

$$A \subseteq A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle \subseteq E\langle\langle x;\alpha^*,w^*\rangle\rangle,$$

temos

$$rankE = rankA \leq rankA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle \leq rankE\langle\langle x;\alpha^*,w^*\rangle\rangle,$$

onde α^* é a extensão da ação parcial torcida unitária α de A para E, (ver [2, Theorem 3.4]). Seja $d = rankA$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $A = E$ e $\alpha = \alpha^*$. Então, podemos escrever

$$A = V_1 \oplus \cdots \oplus V_d$$

onde V_i é um ideal à direita simples de A, para todo $i \in \{1,\ldots,d\}$.

Assim,

$$A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle = V_1A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle \oplus \cdots \oplus V_dA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$$

e, pela Proposição 3.2.4 item (b), cada $V_iA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é uniforme como $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$-módulo à direita. Então, $rankA\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle = d$.

De maneira análoga, temos que

$$A[[x;\alpha,w]] = V_1A[[x;\alpha,w]] \oplus \cdots \oplus V_dA[[x,\alpha.w]]$$

e, pela Proposição 3.2.4 item (b), cada $V_iA[[x;\alpha,w]]$ é um submódulo unifome de $A[[x;\alpha,w]]$, para todo $i \in \{1,\ldots d\}$. Então, $rankA[[x;\alpha,w]] = d$. □

Sejam A um anel e $a \in A$. O *anulador à direita de a em A* é dado por

$$ann_A(a) = \{x \in A : ax = 0\}.$$

Além disso, de acordo com [22, Definition 2.2.4], o *ideal singular de* A é

$$Z(A) = \{a \in A : ann_A(a) \text{ é essencial à direita em A}\}.$$

O anel A é denominado *singular* se $Z(A) = A$ e *não singular* se $Z(A) = 0$.

Estamos, enfim, em condições de apresentar o primeiro resultado principal desta seção.

Teorema 3.2.6. *Seja A um anel semiprimo. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *A é um anel de Goldie.*

(b) *$A[[x;\alpha,w]]$ é um anel de Goldie.*

(c) *$A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é um anel de Goldie.*

Demonstração: $(a) \Rightarrow (c)$ Como A é de Goldie, pelo Teorema 3.2.5 e pela Proposição 3.1.14, item (a) temos que

$$rank A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle = rank A < \infty$$

e $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é semiprimo. Afirmamos que $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é não singular. De fato, sejam I um ideal à direita não nulo de A e $f \in Z(A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle)$ tal que $f \neq 0$. Escrevamos

$$f = a_{-j}x^{-j} + \ldots + a_0 + a_1x + \ldots,$$

onde $-j \in \mathbb{Z}$ o menor inteiro tal que $a_{-j} \neq 0$. Então, $I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ é um ideal à direita de $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ e obtemos que

$$ann_{A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle}(f) \cap I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle \neq 0.$$

Logo, existe $h \in I\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle \cap ann_{A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle}(f)$ tal que $h \neq 0$ e, consequentemente, $fh = 0$. Vamos escrever

$$h = b_{-k}x^{-k} + \cdots + b_0 + b_1x + \cdots$$

e suponhamos, sem perda de generalidade, que $b_{-k} \neq 0$. Então, olhando para o menor grau do produdo fh, obtemos

$$a_{-j}\alpha_{-j}(1_j b_{-k})w_{-j,-k}x^{-j-k} = 0,$$

o que implica que $a_{-j}\alpha_{-j}(1_j b_{-k}) = 0$. Desta forma,

$$\alpha_{-j}^{-1}(a_{-j})\alpha_{-j}^{-1}(\alpha_{-j}(1_j b_{-k})) = 0$$

e isto nos dá que $\alpha_{-j}^{-1}(a_{-j})1_j b_{-k} = 0$. Assim, temos que $\alpha_{-j}^{-1}(a_{-j})b_{-k} = 0$ e, consequentemente, $b_{-k} \in ann_A(\alpha_{-j}^{-1}(a_{-j}))$, com $b_{-k} \neq 0$. Então

$$ann_A(\alpha_{-j}^{-1}(a_{-j})) \cap I \neq 0,$$

de onde concluímos que $\alpha_{-j}^{-1}(a_{-j}) \in Z(A)$. Como A é de Goldie, então $\alpha_{-j}^{-1}(a_{-j}) = 0$ e, uma vez que α_{-j}^{-1} é um isomorfismo, temos $a_{-j} = 0$, o que é uma contradição. Assim, $Z(A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle) = 0$ e, por [22, Theorem 2.3.6], concluímos que $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ é de Goldie.

Precisamos mostrar ainda que $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$. De fato, claramente

$$A \subset A[[x; \alpha, w]] \subset A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$$

e, como A é semiprimo de Goldie, temos, pelo Teorema 3.2.5,

$$rankA = rankA[[x; \alpha, w]] = rankA\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle.$$

Além disso, é bem conhecido da teoria de anéis que se um anel satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre os seus ideais anuladores, então qualquer subanel também satisfaz tal condição. Portanto temos o resultado desejado. $\square$

Em [2], os autores trabalharam com ações parciais torcidas de tipo finito de um grupo sobre anéis com dimensão de Goldie finita. No entanto, não notaram que isto implicaria na existência da ação envolvente. No próximo resultado, mostraremos a existência desta ação envolvente para o caso de ações parciais torcidas unitárias de $\mathbb{Z}$ sobre um anel A, mas é conveniente notar que o resultado é válido para qualquer grupo G.

Teorema 3.2.7. *Sejam A um anel com dimensão de Goldie finita e α uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre A. Se α é de tipo finito, então α tem ação envolvente.*

Demonstração: Por hipótese, existe um conjunto finito $\{g_1, \dots, g_n\}$ de $\mathbb{Z}$ tal que

$$A = D_{g+g_1} + \cdots + D_{g+g_n},$$

para todo $g \in \mathbb{Z}$. Afirmamos que A pode ser escrito como uma soma direta finita de anéis indecomponíveis. De fato, cada D_{g_i} tem identidade 1_{g_i} e, por métodos análogos aos utilizados em [13], podemos escrever

$$A = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n,$$

onde cada F_i é um ideal de D_{g+g_i}, com $i \in \{1, \dots, n\}$, e é gerado por um idempotente central. Se cada F_i é indecomponível, não há o que fazer. Agora, se existe $1 \leq j \leq n$ tal que F_j não é indecomponível, então podemos escrever $F_j = F_j^1 \oplus F_j^2$, e obtemos que

$$A = F_1 \oplus \cdots \oplus F_j^1 \oplus F_j^2 \oplus \cdots F_n.$$

Procedendo desta forma com todas as outras componentes decomponíveis, podemos escrever

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n.$$

Agora, se todos os A_i são indecomponíveis, acabou. Caso contrário, repetimos o processo feito anteriormente. Uma vez que $rankA$ é finito, este processo deve estacionar em algum momento. Então, temos que A é uma soma direta finita de anéis indecomponíveis, onde cada um deles é gerado por um idempotente central de A. Desta forma, por [8, Theorem 7.2], (A, α, w) tem uma ação envolvente. $\square$

Na Proposição 3.1.14, vimos que se A é semiprimo, então $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ também é semiprimo. No entanto, não podemos afirmar o mesmo para $A[[x; \alpha, w]]$. Nosso próximo objetivo é apresentar sob quais hipóteses a semiprimitividade de A pode ser extendida para $A[[x; \alpha, w]]$.

Seja α uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre A que admite ação envolvente (B, β, u). Exibiremos um Contexto de Morita entre $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ e $B\langle\langle x; \beta, u\rangle\rangle$ cuja restrição à $B[[x; \beta, u]]$ nos dá também um contexto de Morita entre $A[[x; \alpha, w]]$ e $B[[x; \beta, u]]$.

Relembremos que, dados anéis A e B, bimódulos ${}_AU_B$ e ${}_BV_A$ e aplicações $\theta : U \otimes_B V \to A$ e $\psi : V \otimes_A U \to B$, a coleção $(A, B, U, V, \theta, \psi)$ é chamada de *Contexto de Morita* se

$$\begin{bmatrix} A & V \\ U & B \end{bmatrix},$$

com as operações usuais de matrizes, é um anel.

O próximo resultado está demonstrado em [22, Theorem 3.6.2], para anéis com elemento identidade. Na verdade, na demonstração do resultado em questão não é usado o fato de que os anéis tem elemento identidade e que os módulos U e V são unitários. Então podemos ver facilmente que o que segue é verdade para anéis que não necessariamente tenham identidade.

Teorema 3.2.8. *Seja $(A, B, U, V, \theta, \psi)$ um contexto de Morita. Então existe uma correspondência bijetora, preservando a ordem, entre o conjunto dos ideais primos P de A, com $P \not\supseteq UV$, e os ideais primos P' de B, com $P' \not\supseteq VU$. A correspondência é dada por $P \longmapsto \{s \in B : UsV \subseteq P\}$ e $P' \longmapsto \{r \in A : VrU \subseteq P'\}$.*

De maneira análoga a feita em [6, Section 5], tomamos

$$U = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i : \ a_i \in A \ , \ \text{para} \quad \text{todo } i \in \mathbb{Z} \right\}$$

e

$$V = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i : a_i \in \beta_i(A) \ , \text{para} \quad \text{todo } i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Então podemos ver que $UB\langle\langle x; \beta, u\rangle\rangle \subseteq U$, $B\langle\langle x; \beta, u\rangle\rangle V \subseteq V$, $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle U \subseteq U$ e $VA\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle \subseteq V$ (para mostrar as relações, relembremos que $\beta_j(A)$ é um ideal de B e $D_j = \beta_j(D_{-j})$). Para construirmos um contexto de Morita entre $A[[x; \alpha, w]]$ e $B[[x; \beta, u]]$ basta restringirmos U e V para ter somente séries de potência e teremos as relações similares.

Então, temos os contextos de Morita

$$(A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle, B\langle\langle x; \beta, u\rangle\rangle, U, V, \theta, \psi)$$

e

$$(A[[x; \alpha, w]], B[[x; \beta, u]], U, V, \theta, \psi),$$

onde θ e ψ são triviais.

A prova do próximo lema é análoga a feita em [4, Lemma 2.2].

Lema 3.2.9. *Seja P um ideal primo de $A[[x; \alpha, w]]$. Então existe um único ideal primo P' de $B[[x; \beta, u]]$ que satisfaz $P' \cap A[[x; \alpha, w]] = P$.*

Como consequência direta do Lema 3.2.9, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.10. *Existe uma correspondência bijetora, via contração, entre o conjunto de todos os ideais primos de $A[[x; \alpha, w]]$ e o conjunto de todos os ideais primos de $B[[x; \beta, u]]$ que não contém A.*

O próximo resultado é essencial para a prova do último resultado desta seção e é uma consequência direta do Lema 3.2.9 e do Corolário 3.2.10.

Corolário 3.2.11. *Seja α uma ação parcial torcida unitária de $\mathbb{Z}$ sobre A com ação envolvente (B, β, u). Então $nil_*(B[[x;\beta,u]]) \cap A[[x;\alpha,w]] = nil_*(A[[x;\alpha,w]])$.*

Alicerçados no último resultado, descreveremos o radical primo de $A[[x;\alpha,w]]$ quando (A,α,w) tem ação envolvente (B,β,u). Para tanto, necessitamos do seguinte lema.

Lema 3.2.12. *Seja β uma ação global torcida de $\mathbb{Z}$ sobre um anel B. Então o radical primo de $B[[x,\beta,u]]$ é*

$$nil_*(B[[x,\beta,u]]) = nil_*(B) \cap N_\beta(B) \oplus \sum_{i\geq 1} N_\beta(B)x^i,$$

onde $N_\beta(B)$ é a interseção de todos os ideais fortemente β-primos de B.

Demonstração: Temos as seguintes classes de ideais primos em $B[[x;\beta,u]]$:

$$\mathcal{F}_1 = \{P : \text{ P é ideal primo tal que } B[[x;\beta,u]]x \subseteq P\}$$

e

$$\mathcal{F}_2 = \{P : \text{ P é ideal primo tal que } B[[x;\beta,u]]x \nsubseteq P\}.$$

Notemos que

$$\bigcap_{P\in\mathcal{F}_1} P = nil_*(B) \oplus \sum_{i\geq 1} Bx^i.$$

Agora, para cada ideal fortemente β-primo Q de B, obtemos de forma análoga à feita no Corolário 3.1.10 que $Q[[x;\beta,u]]$ é primo. Também, para cada ideal primo P de $\mathcal{F}_2$, temos que $P \cap B$ é um ideal fortemente β-primo de B. Desta forma, $\bigcap_{P\in\mathcal{F}_2} P \supseteq N_\beta(B)[[x;\beta;u]]$ e então,

$$\begin{aligned} nil_*(B[[x;\beta,u]]) &= (\bigcap_{P\in\mathcal{F}_1} P) \cap (\bigcap_{Q\in\mathcal{F}_2} Q) \\ &\supseteq (nil_*(B) + \sum_{i\geq 1} Bx^i) \cap (N_\beta(B))[[x;\beta,u]] \end{aligned}$$

$$\supseteq \quad nil_*(B) \cap N_\beta(B) \oplus \sum_{i\geq 1} N_\beta(B)x^i.$$

Por outro lado, para cada ideal primo L de B temos que $L \oplus \sum_{i\geq 1} Bx^i$ é um ideal primo de $B[[x;\beta,u]]$ e, de maneira análoga à feita no Corolário 3.1.10, temos que, para cada ideal fortemente β-primo N de B, o ideal $N[[x;\beta,u]]$ é primo. Logo,

$$nil_*(B[[x;\beta,u]]) \subseteq (nil_*(B) \cap N_\beta(B)) \oplus \sum_{i\geq 1} N_\beta(B)x^i.$$

Portanto, $nil_*(B[[x;\beta,u]]) = nil_*(B) \cap N_\beta(B) \oplus \sum_{i\geq 1} N_\beta(B)x^i$. □

Proposição 3.2.13. *Seja α uma ação parcial torcida unitária com ação envolvente (B,β,u). Então o radical primo de $A[[x;\alpha,w]]$ é*

$$nil_*(A[[x;\alpha,w]]) = (N_\alpha(A) \cap nil_*(A)) \oplus \sum_{i\geq 1}(N_\alpha(A) \cap D_i)x^i,$$

onde $N_\alpha(A)$ é a interseção de todos os ideais fortemente α-primos de A.

Demonstração: De forma análoga à feita em [4, Lemma 2.9] temos que $Q \cap A$ é um ideal fortemente α-primo de A, para cada ideal fortemente β-primo Q de B e, uma vez que A é um ideal de B, temos que $nil_*(B) \cap A = nil_*(A)$. Assim, pelo Corolário 3.2.11, temos

$$\begin{aligned} nil_*(A[[x;\alpha,w]]) &= nil_*(B[[x;\beta,u]]) \cap A[[x;\alpha,w]] \\ &= (nil_*(A) \cap N_\alpha(A)) \oplus \sum_{i\geq 1}(nil_\alpha(A) \cap D_i)x^i. \end{aligned}$$

□

Para finalizar a seção, mostraremos enfim que se A for uma anel semiprimo de Goldie, estas propriedades se transferem para $A[[x;\alpha,w]]$ quando α é uma ação parcial torcida unitária de tipo finito.

Teorema 3.2.14. *Seja α uma ação parcial torcida unitária. Se A é um anel semiprimo de Goldie e α é uma ação de tipo finito, então $A[[x;\alpha,w]]$ é semiprimo de Goldie.*

Demonstração: Uma vez que α é de tipo finito e $rank(A)$ é finito, pelo Teorema 3.2.7 temos que α tem ação envolvente (B,β,u). Neste caso, por [2, Teorema 4.18], B é semiprimo de Goldie e, pelo Teorema 3.2.6, temos que $B[[x;\beta,u]]$ é de Goldie. Afirmamos que $B[[x;\beta,u]]$ é semiprimo. De fato, suponhamos que $nil_*(B[[x;\beta,u]])$ é não nulo. Então, por [18, Lemma 10.10.29], $nil_*(B[[x;\beta,u]])$ contém um ideal não nulo nilpotente L. Como B é semiprimo, $nil_*(B)=0$ e do Lema 3.2.12 temos que

$$nil_*(B[[x;\beta,u]]) = \sum_{i\geq 1} N_\beta(B)x^i.$$

Agora, consideremos o conjunto

$$H = \{0 \neq a \in N_\beta(B) : \exists \;\; 0 \neq f \in L \text{ tal } \text{ que } f = ax^j + \cdots \in L\} \cup 0.$$

Não é difícil ver que H é um ideal não nulo de B com $\beta_i(H) \subseteq H$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Como L é nilpotente, temos que H é também nilpotente e, sendo B um anel semiprimo, temos que $H=0$, o que é uma contradição. Então, $nil_*(B[[x;\beta,u]])=0$. Pelo Corolário 3.2.11, temos

$$nil_*(B[[x;\beta,u]]) \cap A[[x;\alpha,w]] = nil_*(A[[x;\alpha,w]])$$

e isto implica que $nil_*(A[[x;\alpha,w]])=0$. Portanto, $A[[x;\alpha,w]]$ é semiprimo de Goldie. □

Capítulo 4

O Skew Anel das Séries de Potências Parciais Generalizadas Torcidas

Em [21], R. Mazurek e M. Ziembowski investigaram a regularidade do skew anel das séries de potências generalizadas e generalizaram os resultados obtidos por Ribenboim em [26], [27], [28] e [29]. Neste capítulo, introduzimos o skew anel das séries de potências parciais generalizadas torcidas e estudamos a von Neumann regularidade deste anel. Neste sentido, generalizamos a maior parte dos resultados obtidos em [21]. Também investigamos algumas propriedades do skew anel das séries de Laurent parciais torcidas e do skew anel Malcev-Neumann parcial, que são casos particulares do skew anel das séries de potências parciais generalizadas torcidas.

4.1 A Regularidade do Skew Anel das Séries de Potências Parciais Generalizadas Torcidas

Nesta seção, $\alpha = \big(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G}\big)$ continua sendo como uma ação parcial torcida unitária de um grupo G sobre um anel com unidade A. Aqui α não necessariamente possui envolvente, a menos que esta informação seja explicitamente mencionada. Começaremos definindo os conjuntos *narrow e artiniano*, conceito este fundamental para a compreenção do skew anel das séries de potências parciais generalizadas torcidas. Para mais detalhes sobre a próxima definição, ver [17].

Definição 4.1.1. Sejam $(G, \cdot, \leq)$ um grupo parcialmente ordenado e $X \subseteq G$ um subconjunto não vazio de G. Dizemos que X é *artiniano e narrow* se toda sequência estritamente decrescente de X é finita e todo subconjunto de pares ordenados incomparáveis deste conjunto é finito.

Definição 4.1.2. Sejam $(G, \cdot, \leq)$ um grupo munido de uma relação de ordem parcial, A um anel unitário e $\alpha = \big(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G}\big)$ uma ação parcial torcida unitária de G sobre A. O *skew anel das séries de potências parciais generalizadas torcidas* com coeficientes em A e expoentes em G, o qual denotamos por $A[[G, \alpha]]$, é o conjunto formado por todas as aplicações $f : G \longrightarrow A$ tais que $f(s) \in D_s$ e cujo suporte $supp(f) = \{s \in G : f(s) \neq 0\}$ é um subconjunto de G artiniano e narrow. Sejam $f, g \in A[[G, \alpha]]$ e $s \in G$. Definimos o conjunto

$$X_s = \{(u, v) \in supp(f) \times supp(g) : uv = s\}.$$

Desta forma, a soma em $A[[G, \alpha]]$ é a usual e a multiplicação é dada por

$$(fg)(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(u,v)\in X_s} \alpha_u(\alpha_u^{-1}(f(u))g(v))w_{u,v}, & \text{se} \quad X_s \neq \emptyset \\ 0, & \text{se} \quad X_s = \emptyset \end{cases}.$$

No próximo resultado mostraremos que $A[[G,\alpha]]$ é um anel associativo com unidade.

Proposição 4.1.3. *$A[[G,\alpha]]$ é um anel associativo com unidade.*

Demonstração: Sejam $f, g, h \in A[[G,\alpha]]$ e $x \in G$. Então

$$\begin{aligned}
(f(gh))(x) &= \sum_{(u,v)\in X_x} \alpha_u(\alpha_u^{-1}(f(u))(gh)(v))w_{u,v} \\
&= \sum_{(u,v)\in X_x} \alpha_u(\alpha_u^{-1}(f(u)) \sum_{(s,t)\in X_v} \alpha_s(\alpha_s^{-1}(g(s))h(t))w_{s,t})w_{u,v} \\
&= \sum_{(u,v)\in X_x} f(u)\alpha_u(\sum_{(s,t)\in X_v} 1_{u^{-1}}g(s)\alpha_s(1_{t^{-1}}h(t))w_{s,t})w_{u,v} \\
&= \sum_{(u,v)\in X_x} f(u) \sum_{(s,t)\in X_v} \alpha_u(1_{u^{-1}}g(s))\alpha(1_{u^{-1}}\alpha_s(1_{t^{-1}}h(t)))w_{u,s}w_{us,t}w_{u,st}^{-1}w_{u,v} \\
&= \sum_{(u,v)\in X_x} f(u) \sum_{(s,t)\in X_v} \alpha_u(1_{u^{-1}}g(s))\alpha(1_{u^{-1}}\alpha_s(1_{t^{-1}}h(t)))w_{u,s}w_{us,t}w_{u,v}^{-1}w_{u,v} \\
&= \sum_{(u,s,t)\in X_x} f(u)\alpha_u(1_{u^{-1}}g(s))w_{u,s}\alpha_{us}(1_{(us)^{-1}}h(t))w_{us,t}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
((fg)h)(x) &= \sum_{(l,t)\in X_x} \alpha_l(\alpha_l^{-1}((fg)(l))h(t))w_{l,t} \\
&= \sum_{(l,t)\in X_x} \alpha_l(\alpha_l^{-1}(\sum_{(u,s)\in X_l} \alpha_u(\alpha_u^{-1}(f(u))g(s))w_{u,s})h(t))w_{l,t} \\
&= \sum_{(l,t)\in X_x} \sum_{(u,s)\in X_l} \alpha_u(\alpha_u^{-1}(f(u))g(s))w_{u,s}\alpha_l(1_{l^{-1}}h(t))w_{l,t} \\
&= \sum_{(l,t)\in X_x} \sum_{(u,s)\in X_l} f(u)\alpha_u(1_{u^{-1}}g(s))w_{u,s}\alpha_l(1_{l^{-1}}h(t))w_{l,t} \\
&= \sum_{(u,s,t)\in X_x} f(u)\alpha_u(1_{u^{-1}}g(s))w_{u,s}\alpha_{us}(1_{(us)^{-1}}h(t))w_{us,t}
\end{aligned}$$

Assim, $(fg)h = f(gh)$ para quaisquer $f, g, h \in A[[G,\alpha]]$.

Definimos agora

$$\epsilon_{1_G}(x) = \begin{cases} 1_A, & \text{se} \quad x = 1_G \\ 0, & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}.$$

Claramente ϵ_{1_G} é a aplicação identidade de $A[[G,\alpha]]$. Portanto, $A[[G,\alpha]]$ é um anel associativo com unidade, como queríamos. $\square$

Para cada $r \in A$ e $s \in G$, definimos as aplicações $C_r, \quad f_s \in A[[G,\alpha]]$ da seguinte forma:

$$C_r(x) = \begin{cases} r, & \text{se} \quad x = 1_G \\ 0, & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad f_s(x) = \begin{cases} 1_s, & \text{se} \quad x = s \\ 0, & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}.$$

Estas aplicações desempenharão um papel essencial para a prova dos resultados que serão apresentados nesta seção.

De agora em diante, para facilitar a escrita denotaremos a aplicação identidade ϵ_{1_G} simplesmente por 1.

O próximo resultado nos fornece condições para que um elemento de $A[[G,\alpha]]$ seja inversível neste anel.

Proposição 4.1.4. *Sejam A um anel, $(G,\cdot,\leq)$ um grupo parcialmente ordenado, α uma ação parcial torcida unitária de G sobre A e $f \in A[[G,\alpha]]$. Suponhamos que exista um menor elemento $s_0 \in supp(f)$. Se $f(s_0) \in U(A)$, então $f \in U(A[[G,\alpha]])$.*

Demonstração: Primeiramente, notemos que $1_{s_0} = 1_A$, pois $f(s_0) \in D_{s_0}$ e, por hipótese, $f(s_0) \in U(A)$.

Definimos a aplicação $g = 1 - C_{w^{-1}_{s_0,s_0^{-1}}} C_{f(s_0)^{-1}} f f_{s_0^{-1}}$ e afirmamos que $g(1_G) = 0$. De fato, temos que

$$(ff_{s_0^{-1}})(1_G) = \sum_{(p,q)\in X_{1_G}} \alpha_p(\alpha_p^{-1}(f(p)f_{s_0^{-1}}(q))w_{p,q} \tag{4.1}$$

e

$$f_{s_0^{-1}}(q) = \begin{cases} 1_{s_0^{-1}}, & \text{se} \quad q = {s_0}^{-1} \\ 0, & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}.$$

Desta forma, (4.1) é diferente de zero se, e somente se, $p = s_0$. De fato, como $(p,q) \in X_{1_G}$, temos que $pq = 1_G$. Além disso, $f_{s_0^{-1}}(q)$ é não nulo se, e somente se, $q = s_0^{-1}$, o que equivale a dizer que $p = s_0$. Assim,

$$(ff_{s_0^{-1}})(1_G) = f(s_0)1_{s_0}w_{s_0,s_0^{-1}} = f(s_0)1_A w_{s_0,s_0^{-1}}$$

e temos que

$$\begin{aligned} g(1_G) &= 1(1_G) - w_{s_0,s_0^{-1}}^{-1} f(s_0)^{-1} f(s_0) 1_A w_{s_0,s_0^{-1}} \\ &= 1_A - 1_A \\ &= 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que

$$g(x) = w_{s_0,s_0^{-1}}^{-1} f(s_0)^{-1} f(xs_0) w_{xs_0,s_0^{-1}}, \tag{4.2}$$

para cada $x \in G \backslash \{1_G\}$.

Seja $t \in supp(g)$. Como $g(1_G) = 0$, segue que $t \neq 1_G$ e, por (4.2), podemos concluir que $f(ts_0) \neq 0$, isto é, $ts_0 \in supp(f)$ sempre que $t \in supp(g)$. Desta forma, como s_0 é o menor elemento de $supp(f)$, obtemos $s_0 < ts_0$ e, consequentemente, $1_G < t$.

Consideremos $s \in < supp(g) >$. Por [21, Proposition 1.3,(ii)], existe um elemento maximal $n_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $s \in supp(g)^{n_s}$. Assim, podemos definir a aplicação $h : G \longrightarrow A$ da forma

$$h(s) = \begin{cases} (1 + g + g^2 + \cdots + g^{n_s})(s), & \text{se } s \in < supp(g) > \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Claramente temos que $supp(h) \subset < supp(g) >$ e, novamente por [21, Proposition 1.3 (i)], obtemos que $h \in A[[G,\alpha]]$. Afirmamos que $h(1-g) = 1$. De fato, seja $s \in supp(h(1-g))$. Então $s \in supp(h)supp(1-g) \subset < supp(g) >$ e denotamos

$n = n_s$. Pela maximalidade de n_s em $supp(g)$, temos que $g^{n+1}(s) = 0$ e podemos escrever

$$[(1 + g + g^2 + \cdots + g^n)(1 - g)](s) = (1 - g^{n+1})(s) = 1(s).$$

Desta forma, para provar que $h(1 - g) = 1$ basta mostrar que

$$[h(1 - g)](s) = [(1 + g + g^2 + \cdots + g^n)(1 - g)](s),$$

ou seja, precisamos mostrar que, para cada $(x, y) \in X_s$ tal que $(1 - g)(y) \neq 0$, vale $h(x) = (1 + g + \cdots + g^n)(x)$. Para tanto, analisaremos dois casos, a saber, quando $x \in< supp(g) >$ e quando $x \notin< supp(g) >$.

Suponhamos inicialmente $x \in< supp(g) >$. Sabemos que

$$h(x) = 1(x) + g(x) + \cdots + g^{n_x}(x) \tag{4.3}$$

e, para cada $s \in< supp(g) >$, existe um elemento maximal $n = n_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ com $s \in supp(g)^{n_s}$. Como $xy = s$, então $n_x \leq n_x + n_y \leq n$. Assim, $g^{n_x+1}(x) + \cdots + g^n(x) = 0$ e segue que,

$$\begin{aligned} h(x) &= 1(x) + g(x) + \cdots + g^{n_x}(x) \\ &= 1(x) + g(x) + \cdots + g^{n_x}(x) + g^{n_x+1}(x) + \cdots g^n(x) \\ &= (1 + g + \cdots + g^n)(x). \end{aligned}$$

Agora, se $x \notin< supp(g) >$, então $g^m(x) = 0$, para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e novamente vale que $h(x) = (1 + g + \cdots + g^n)(x)$. Logo, em qualquer caso, é válido que $h(1 - g) = 1$. De maneira análoga temos que $(1 - g)h = 1$ e, consequentemente, $1 - g \in U(A[[G, \alpha]])$.

Não é difícil ver que $C_{f(s_0)}$, $C_{w_{s_0^{-1}, s_0}}$ e f_{s_0} são inversíveis em $A[[G, \alpha]]$, onde $C^{-1}_{f(s_0)^{-1}} = C_{f(s_0)}$, $C^{-1}_{w^{-1}_{s_0^{-1}, s_0}} = C_{w_{s_0^{-1}, s_0}}$ e $f^{-1}_{s_0^{-1}} = f_{s_0}$. Desta forma, como

$$g = 1 - C_{w^{-1}_{s_0, s_0^{-1}}} C_{f(s_0)^{-1}} f f_{s_0^{-1}},$$

temos que

$$f = C^{-1}_{f(s_0)^{-1}} C^{-1}_{w^{-1}_{s_0^{-1}, s_0}} (1-g) f_{s_0}$$

e, consequentemente , $f \in U(A[[G,\alpha]])$. $\square$

Proposição 4.1.5. *Sejam A um anel, $(G,\cdot,\leq)$ um grupo onde $\leq$ é uma relação de ordem total e α uma ação parcial torcida unitária de G sobre A. Então $A[[G,\alpha]]$ é um anel com divisão se, e somente se, A é um anel com divisão. Neste caso, a ação parcial torcida unitária é uma ação global torcida.*

Demonstração: Suponhamos que $A[[G,\alpha]]$ é um anel com divisão e seja $r \in A$ um elemento não nulo. Então, existe $g \in A[[G,\alpha]]$ tal que $C_r g = 1$. Desta forma,

$$rg(1_G) = (C_r g)(1_G) = 1_A$$

e, portanto, A é um anel com divisão.

Reciprocamente, suponhamos que A é um anel com divisão e seja $f \in A[[G,\alpha]]$. Como $\leq$ é uma relação de ordem total em G e $supp(f)$ é um subconjunto de G, podemos garantir a existência de um elemento minimal $t \in supp(f)$. Uma vez que $f(t) \in A = U(A)$, segue da Proposição 4.1.4 que $f \in U(A[[G,\alpha]])$. Portanto, $A[[G,\alpha]]$ é um anel com divisão. $\square$

Lema 4.1.6. *Sejam A um anel, $(G,\cdot,\leq)$ um grupo parcialmente ordenado e α uma ação parcial torcida unitária de G sobre A. Se $A[[G,\alpha]]$ é von Neumann regular, então A é também von Neumann regular.*

Demonstração: Seja $r \in A\backslash\{0\}$ e consideremos $C_r \in A[[G,\alpha]]$. Por hipótese, existe $g \in A[[G,\alpha]]$ tal que $C_r = C_r g C_r$. Assim,

$$r = C_r(1_G) = (C_r g C_r)(1_G) = rg(1_G)r$$

de onde segue que A é von Neumann regular. $\square$

Lema 4.1.7. *Sejam $A_1, \ldots, A_n$ anéis com unidade, $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, $(G, \cdot, \leq)$ um grupo parcialmente ordenado e $\alpha = \big(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G}\big)$ uma ação parcial torcida de G sobre A. Então, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe uma ação parcial torcida α^i de G sobre A_i e, além disso, $A[[G, \alpha]] \simeq \prod_{i=1}^{n} A_i[[G, \alpha^i]]$.*

Demonstração: Primeiramente vamos definir uma ação parcial torcida unitária α^i de G sobre A_i, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, dado $g \in G$, temos que $D_g = \prod_{i=1}^{n} D_g^i$, onde $D_g^i = D_g \cap A_i$ é um ideal de A_i, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e, com isto $1_g = (1_g^1, \ldots, 1_g^n)$. Também, para cada $w_{g,h} \in U(D_g D_{gh})$, com $g, h \in G$, temos

$$w_{g,h} = (w_{g,h}^1, \ldots, w_{g,h}^n),$$

onde $w_{g,h}^i \in U(D_g^i D_{gh}^i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sejam $\tau_i : A_i \longrightarrow A$ e $\pi_i : A \longrightarrow A_i$ as aplicações inclusão e a projeção naturais, respectivamente. Para cada $g \in G$, definimos a aplicação $\alpha_g^i : D_{g^{-1}}^i \longrightarrow D_g^i$ por

$$\alpha_g^i = \pi_i \circ \alpha_g \circ \tau_i|_{D_{g^{-1}}^i}.$$

Claramente $\alpha_g|_{D_{g^{-1}}^i} = \alpha_g^i$. Assim, a ação parcial torcida unitária α^i de G sobre A_i que procuramos é dada por $\alpha^i = \big(\{D_g^i\}_{g\in G}, \{\alpha_g^i\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^i\}_{(g,h)\in G\times G}\big)$.

Para ver que $A[[G, \alpha]] \simeq \prod_{i=1}^{n} A_i[[G, \alpha^i]]$, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi : A[[G, \alpha]] & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{n} A_i[[G, \alpha^i]] \\ f & \longmapsto & (f_1, \ldots, f_n) \end{array},$$

onde $f_i = \pi_i \circ f$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $supp(f_i) \subset supp(f)$, segue que $f_i \in A_i[[G, \alpha^i]]$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Não é difícil ver que ψ é um isomorfismo de anéis e, portanto, $A[[G,\alpha]] \simeq \prod_{i=1}^{n} A_i[[G,\alpha^i]]$. $\square$

Enunciaremos agora um importante resultado que relaciona a semissimplicidade com a regularidade e a propriedade de ser ortogonalmente finito. Lembremos que um anel é ortogonalmente finito se possui uma quantidade finita de idempotentes não nulos mutuamente ortogonais. Para mais detalhes sobre este resultado ver [31, Lemma 13.7]

Proposição 4.1.8. *Um anel A é semissimples se, e somente se, A é von Neumann regular e ortogonalmente finito.*

Estamos, enfim, aptos a apresentar o principal resultado desta seção. Nele mostramos que, se A é um anel ortogonalmente finito, então a regularidade de A equivale a regularidade de $A[[G,\alpha]]$.

Teorema 4.1.9. *Sejam A um anel, $(G,\cdot,\leq)$ e α uma ação parcial torcida unitária de G sobre A. Se $\leq$ é uma relação de ordem total e A é ortogonalmente finito, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$A[[G,\alpha]]$ é von Neumann regular;*

(b) *A é von Neumann regular;*

(c) *A é semissimples;*

(d) *$A[[G,\alpha]]$ é semissimples.*

Demonstração: A implicação $(a) \Rightarrow (b)$ segue diretamente do Lema 4.1.6. Já $(b) \Rightarrow (c)$ é consequência da Proposição 4.1.8, uma vez que A é ortogonalmente finito, por hipótese. Novamente da Proposição 4.1.8, temos $(d) \Rightarrow (a)$. Resta mostrar que $(c) \Rightarrow (d)$.

Suponhamos que A é um anel semissimples. Então, existem $n \in \mathbb{N}$ e idempotentes centrais $e_1, \ldots, e_n$ tais que podemos escrever $A = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i A$, onde todos os ideais $e_i A's$ são ideais à direita minimais de A.

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $f \in A[[G, \alpha]]$, consideramos $f_i = \pi_i \circ f$, onde $\pi_i : A \longrightarrow e_i A$ é a projeção natural. Afirmamos que $supp(f_i) \subseteq supp(f)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De fato, se $s \notin supp(f)$, então $f(s) = 0$ e segue que $f_i(s) = \pi_i(f(s)) = 0$, o que implica $s \notin supp(f_i)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Consequentemente, $supp(f_i) \subseteq supp(f)$ e temos que $supp(f_i)$ também é artiniano e narrow, ou seja, $f_i \in A[[G, \alpha]]$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Como $A = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i A$, para cada $l \in G$ existem $r_1, \ldots r_n \in A$ tais que

$$f(l) = \sum_{j=1}^{n} e_j r_j.$$

Desta forma,

$$f_i(l) = \pi_i(f(l)) = \pi_i(\sum_{j=1}^{n} e_j r_j) = e_i r_i = e_i^2 r_i = e_i f_i(l) = C_{e_i} f_i(l),$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Além disso,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(l) = \sum_{i=1}^{n} (\pi_i \circ f)(l) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\sum_{j=1}^{n} e_j r_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i r_i = f(l)$$

e temos que $f(l) = \sum_{i=1}^{n} C_{e_i} f_i(l)$, para todo $f \in A[[G, \alpha]], l \in G$. Assim,

$$A[[G, \alpha]] = C_{e_1} A[[G, \alpha]] + \ldots + C_{e_n} A[[G, \alpha]]. \tag{4.4}$$

Fixemos $i \in \{1, \ldots, n\}$ e escrevamos $e_i = e$. Afirmamos que $C_e A[[G, \alpha]]$ é um ideal à direita minimal de $A[[G, \alpha]]$. De fato, seja I um ideal à direita não nulo de $A[[G, \alpha]]$ tal que $I \subset C_e A[[G, \alpha]]$ e consideremos $g \in I$. Então, $supp(g)$ é artiniano e narrow e, como $\leq$ é uma relação de ordem total, existe um elemento minimal $s_0 \in supp(g)$.

Uma vez que $g \in C_eA[[G,\alpha]]$ e e é idempotente, temos que $g(x) = eg(x)$, para todo $x \in G$. Com efeito, temos que $g = C_eh$, para algum $h \in A[[G,\alpha]]$. Assim,

$$g(x) = \sum_{(m,n)\in X_x} \alpha_m(\alpha_m^{-1}(C_e(m))h(n))w_{m,n} = eh(x) = e(eh(x)) = eg(x),$$

para todo $x \in G$.

Além disso, como eA é um ideal à direita minimal de A, temos que $e = g(s_0)r$, para algum $r \in A$. De fato, suponhamos que $e \neq g(s_0)r$, para todo $r \in A$. Então, $(g(s_0)r)A$ é um ideal à direita de A e $(g(s_0)r)A = eg(s_0)rA \subset A$, o que contraria a minimalidade de eA em A.

Definamos agora $h : G \longrightarrow A$ onde $h(s_0) = 1_A$ e $h(s) = rg(s)$, para todo $s \in G\backslash\{s_0\}$ e observemos que $supp(h) \subseteq supp(g)$. De fato, se $s \notin supp(g)$, então $g(s) = 0$ e, consequentemente, $h(s) = r \cdot 0 = 0$, o que implica $s \notin supp(h)$. Assim, temos que s_0 é também o menor elemento do $supp(h)$ e, como $h(s_0) = 1_A$, pela Proposição 4.1.4, temos que existe $\phi \in A[[G,\alpha]]$ tal que $h\phi = 1$. Além disso, $C_{g(s_0)}h = g$, pois

$$(C_{g(s_0)}h)(x) = \sum_{(m,n)\in X_x} \alpha_m(\alpha_m^{-1}(C_{g(s_0)}(m))h(n))w_{m,n} = g(s_0)h(x),$$

para todo $x \in G$. Assim,

$$g(x) = eg(x) = g(s_0)rg(x) = g(s_0)h(x) = (C_{g(s_0)}h)(x),$$

para todo $x \in G$.

Desta forma,

$$C_e = C_{g(s_0)r} = C_{g(s_0)}C_r = C_{g(s_0)}h\phi C_r = g\phi C_r$$

e temos que

$$C_e = g\phi C_r \in gA[[G,\alpha]] \subset IA[[G,\alpha]] \subset I.$$

Consequentemente, $C_eA[[G,\alpha]] \subset I$ e segue que $I = C_eA[[G,\alpha]]$. Logo, $C_{e_i}A[[G,\alpha]]$ é um ideal à direita minimal de $A[[G,\alpha]]$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Uma vez que (4.4) claramente é uma soma direta, segue que $A[[G,\alpha]]$ é um anel semissimples. □

Suponhamos que (A,α,w) tem uma ação envolvente (B,β,u), então, como consequência do último teorema, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.1.10. *Sejam A um anel , $(G,\cdot,\leq)$ um grupo onde $\leq$ é uma relação de ordem total e $\alpha = \big(\{D_g\}_{g\in G}\{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{(g,h)}\}_{(g,h)\in G\times G}\big)$ ação parcial torcida de G sobre A. Se existe uma ação envolvente (B,β,u) de (A,α,w), então A é von Neumann regular se, e somente se, $A[[G,\alpha]]$ é von Neumann regular.*

Demonstração: Suponhamos que A é von Neumann regular. Então, por [14, Proposição 2.1.12], B também é um anel von Neumann regular. Assim, por [15, Corollary, 1.2], B é J-semissimples e, consequentemente, semissimples. Desta forma, por [21, Theorem 3.3], temos que B é ortogonalmente finito e, portanto, A também o é, uma vez que A é um ideal de B. Então, do Teorema 4.1.9, temos que $A[[G,\alpha]]$ é von Neumann regular.

A recíproca segue diretamente do Lema 4.1.6. □

Se consideramos $G = \mathbb{Z}$, então $A[[\mathbb{Z},\alpha]]$ coincide o skew anel das séries de Laurent parciais torcida $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$. De fato, para cada $f \in A[[\mathbb{Z},\alpha]]$ e $i \in \mathbb{Z}$, podemos denotar a imagem de i por f da forma $f(i) = f_i$. Assim, é possível escrever $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i x^i \in A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$.

Analogamente, seja $g = \sum_{i\geq m} g_i x^i \in A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$. Podemos escrever

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ & i & \longmapsto & g(i) = g_i \end{array}.$$

Então $g_i \in D_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Além disso, o suporte de G é artiniano e narrow. Com efeito, sabemos que $\mathbb{Z}$ é totalmente ordenado. Além disso, dizer que um conjunto é artiniano e narrow equivale a dizer que todos os seus subconjuntos não vazios tem um menor elemento. Mas se $g = \sum_{i \geq m} g_i x^i$ é não nulo, sempre existe um menor inteiro m tal que $g_m \neq 0$. Logo, $supp(g) = \{i \in \mathbb{Z} : g_i \neq 0\}$ sempre tem um menor elemento e, portanto é artiniano e narrow. Logo, $g \in A[[\mathbb{Z}, \alpha]]$.

Nestas condições, decorre do Teorema 4.1.9 o seguinte resultado.

Corolário 4.1.11. *Seja A um anel ortogonalmente finito. São equivalentes:*

(a) $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ *é von Neumann regular;*

(b) $A\langle\langle x; \alpha, w\rangle\rangle$ *é semissimples;*

(c) A *é semissimples.*

A fim de seguirmos investigando a regularidade de $A[[G, \alpha]]$, é fundamental apresentarmos o conceito de *anel fortemente regular*. Para mais detalhes, ver [15, pág. 28].

Definição 4.1.12. Um anel A é dito fortemente regular se, dado $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $a = a^2 b$. Equivalentemente, A é fortemente regular se, e somente se, todos os idempotentes de A são centrais.

É conveniente notar que todo anel fortemente regular é também regular.

Lema 4.1.13. *Sejam A um anel, $(G, \cdot, \leq)$ um grupo parcialmente ordenado e α uma ação parcial torcida unitária de G sobre A. Se $A[[G, \alpha]]$ é fortemente regular, então todos os elementos idempotentes de A são α-invariantes.*

Demonstração: Para cada idempotente $e \in A$, mostraremos que $\alpha_s(1_{s^{-1}}e) = 1_s e$, para todo $s \in G$. De fato, não é difícil ver que $C_e \in A[[G, \alpha]]$ é um idempotente.

Como $A[[G,\alpha]]$ é fortemente regular, temos que C_e é um elemento central e então, $C_e f_s = f_s C_e$, para todo $s \in G$. Desta forma, $(f_s C_e)(s) = (C_{\alpha_s(e1_{s^{-1}})} f_s)(s)$, para todo $s \in G$ e obtemos que

$$\alpha_s(e1_{s^{-1}}) = (C_{\alpha_s(e1_{s^{-1}})} f_s)(s) = (f_s C_e)(s) = (C_e f_s)(s) = e1_s,$$

para cada $s \in G$. Portanto, todos os idempotentes de A são α-invariantes. $\square$

De acordo com o Lema 4.1.13, temos que se $A[[G,\alpha]]$ é fortemente regular, então, para todo $s \in G$,

$$1_s = \alpha_s(1_{s^{-1}}1_{s^{-1}}) = 1_s 1_{s^{-1}}$$

e

$$1_{s^{-1}} = \alpha_{s^{-1}}(1_s 1_s) = 1_s 1_{s^{-1}},$$

o que implica que $1_s = 1_{s^{-1}}$. Assim, $D_s = D_{s^{-1}}$.

No próximo teorema, estudamos condições para que $A[[G,\alpha]]$ seja fortemente regular.

Teorema 4.1.14. *Sejam A um anel, $(G,\cdot,\leq)$ um grupo e α uma ação parcial torcida unitária de G sobre A. Se $\leq$ é uma relação de ordem total e A é ortogonalmente finito, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$A[[G,\alpha]]$ é fortemente regular;*

(b) *A é fortemente regular e todos os idempotentes de A são α-invariantes;*

(c) *A é um produto direto finito de anéis com divisão e todos os idempotentes de A são α-invariantes;*

(d) *$A[[G,\alpha]]$ é um produto direto finito de anéis com divisão.*

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Suponhamos que $A[[G,\alpha]]$ é um anel fortemente regular. Então, pelo Lema 4.1.13, temos que todos os idempotentes de A são α-invariantes. Como $A[[G,\alpha]]$ é um anel von Neumann regular, pois é fortemente regular, pelo Lema 4.1.6 temos que A é von Neumann regular.

Afirmamos que, para cada $r \in A$, existe $b \in A$ tal que $r = r^2 b$. De fato, consideremos $C_r \in A[[G,\alpha]]$. Então, existe $g \in A[[G,\alpha]]$ tal que $C_r = C_r^2 g$. Assim,

$$r = C_r(1_G) = (C_r C_r g)(1_G) = r^2 g(1_G).$$

Portanto, A é fortemente regular.

$(b) \Rightarrow (c)$ Pela Proposição 4.1.8, temos que A é semissimples. Então, existem anéis com divisão D_i, com $i = 1, \ldots, k$, tais que

$$A = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k).$$

Uma vez que A é fortemente regular, todos os idempotentes de A são centrais. Desta forma, temos $n_i = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots k\}$ e, portanto, $A = D_1 \times \cdots \times D_k$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Por hipótese, $A = D_1 \times \cdots \times D_k$, onde D_i é um anel com divisão, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Pelo Lema 4.1.7, temos

$$A[[G,\alpha]] \simeq D_1[[G,\alpha^1]] \times \cdots \times D_k[[G,\alpha^k]],$$

onde α^i é ação parcial torcida unitária de G sobre D_i, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ e, pela Proposição 4.1.5, temos que $D_i[[G,\alpha^i]]$ é um anel com divisão, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Logo, $A[[G,\alpha]]$ é um produto direto finito de anéis com divisão.

$(d) \Rightarrow (a)$ Por hipótese, $A[[G,\alpha]]$ é um produto direto finito de anéis com divisão e, portanto, anéis simples. Então, por [31, Remark 7.1], temos que $A[[G,\alpha]]$ é fortemente regular. $\square$

Finalizamos a seção com o seguinte corolário.

Corolário 4.1.15. *Seja A um anel ortogonalmente finito. São equivalentes:*

(a) $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ *é fortemente regular;*

(b) $A\langle\langle x;\alpha,w\rangle\rangle$ *é um produto direto finito de anéis com divisão;*

(c) *A é um produto direto finito de anéis com divisão e todos os idempotentes de A são α-invariantes.*

4.2 Skew Anel Malcev-Neumann Parcial

Nesta seção trabalharemos com um caso particular do skew anel das séries de potências parciais generalizadas torcidas. Mais precisamente, voltaremos nossa atenção para as aplicações cujo suporte é um conjunto bem ordenado. Para tais retrições, usaremos a notação $A*_\alpha[[G]]$ e a denominamos skew anel Malcev-Neumann parcial. Notemos que, neste caso, o suporte de um elemento de $A*_\alpha[[G]]$ sempre tem um elemento minimal.

Para facilitar o desenvolvimento dos cálculos nas demonstrações, representaremos um elemento $f \in A*_\alpha[[G]]$ da forma $f = \sum_{g\in G} f_g\delta_g$.

Seja $f = \sum_{g\in G} f_g\delta_g \in A*_\alpha[[G]]$ um elemento não nulo. Denotaremos por $min(f)$ o elemento minimal do $supp(f)$ e por $\lambda(f)$ o coeficiente de $min(f)$. Convencionaremos $min(0) = 1_G$.

Se I é um subconjunto de $A*_\alpha[[G]]$, consideremos o conjunto

$$\lambda(I) = \{\lambda(f) : \exists \ \ f \in I \ \ \text{tal que} \ \ min(f) = 1_G\}.$$

Lema 4.2.1. *Para cada ideal à direita (esquerda) I de $A*_\alpha[[G]]$, temos que $\lambda(I)$ é um ideal à direita (esquerda) de A e se I é um ideal próprio, o mesmo acontece* *para $\lambda(I)$. Além disso, se I é um ideal bilateral de $A*_\alpha[[G]]$, então $\lambda(I)$ é um ideal α-invariante de A.*

Demonstração: Claramente temos que se I é um ideal à direita (esquerda) de $A*_\alpha[[G]]$, então $\lambda(I)$ é um ideal à direita (esquerda) de A. Suponhamos que $\lambda(I)=A$. Assim, $1_A\in\lambda(I)$ e existe $f=1_A+\sum\limits_{s>1_G}f_s\delta_s$ com $min(f)=1_G$. Como $f_{1_G}=1_A\in U(A)$, pela Proposição 4.1.4 temos que $f\in U(A*_\alpha[[G]])$. Desta forma, f é um elemento de I que é inverível em $A*_\alpha[[G]]$, o que implica $1_{A*_\alpha[[G]]}\in I$ e, consequentemente, $I=A*_\alpha[[G]]$.

Suponhamos agora que I é um ideal bilateral de $A*_\alpha[[G]]$. Queremos mostrar que $\alpha_g(\lambda(I)\cap D_{g^{-1}})=\lambda(I)\cap D_g$, para todo $g\in G$. De fato, para cada $g\in G$, seja $a\in\lambda(I)\cap D_{g^{-1}}$. Então, existe $f\in I$ tal que

$$f=a+\sum_{s>1_G}f_s\delta_s$$

e $min(f)=1_G$. Fixemos $g\in G$ e consideremos as aplicações $h,\bar{h}:G\longrightarrow A$ definidas da forma:

$$h(s)=h_s=\begin{cases}1_g, & \text{se } s=g\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}\quad \text{e}\quad \bar{h}(s)=\bar{h}_s=\begin{cases}1_{g^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}, & \text{se } s=g^{-1}\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}.$$

Assim, $h=\sum\limits_{s\in G}h_s\delta_s$ e $\bar{h}=\sum\limits_{s\in G}\bar{h}_s\delta_s$ são elementos de $A*_\alpha[[G]]$. Notemos que

$$\begin{aligned}
h f\bar{h} &= (\sum_{s\in G}h_s\delta_s)(a+\sum_{l>1_G}f_l\delta_l)(\sum_{s\in G}\bar{h}_s\delta_s)\\
&= 1_g\delta_g a 1_{g^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}\delta_{g^{-1}}+1_g\delta_g(\sum_{l>1_G}f_l\delta_l)1_{g^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}\delta_{g^{-1}}\\
&= 1_g\alpha_g(1_{g^{-1}}a)\delta_g 1_{g^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}\delta_{g^{-1}}+\sum_{t=gl}1_g\alpha_g(1_{g^{-1}}f_l)w_{g,l}\delta_t 1_{g^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}\delta_{g^{-1}}\\
&= \alpha_g(1_{g^{-1}}a)1_g w^{-1}_{g,g^{-1}}w_{g,g^{-1}}+\sum_{glg^{-1}>1_G}1_g\alpha_g(1_{g^{-1}}f_l)w_{g,l}\alpha_{gl}(1_{gs^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g})w_{gl,g^{-1}}\delta_{glg^{-1}}\\
&= \alpha_g(1_{g^{-1}}a)+\sum_{glg^{-1}>1_G}\alpha_g(1_{g^{-1}}f_l)w_{g,l}\alpha_{gl}\alpha_{gl}(1_{(gl)^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g})w_{gl,g^{-1}}\delta_{glg^{-1}}.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\lambda(hf\bar{h}) = \alpha_g(1_{g^{-1}}a) = \alpha_g(1_{g^{-1}}\lambda(f)) = \alpha_g(\lambda(f))$$

e segue que $\alpha_g(\lambda(I) \cap D_{g^{-1}}) = \lambda(I) \cap D_g$, para todo $g \in G$. Portanto, $\lambda(I)$ é α-invariante. $\square$

Dado um subconjunto J de A, definimos

$$J *_\alpha [[G]] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \delta_g \in A *_\alpha [[G]] : \quad a_g \in J, \forall g \in G \right\}.$$

Quando J for um ideal à direita de A, então $J *_\alpha [[G]]$ também será um ideal à direita de $A *_\alpha [[G]]$. Além disso, se J for um ideal bilateral α-invariante de A, então $J *_\alpha [[G]]$ será um ideal bilateral $A *_\alpha [[G]]$.

Finalizamos esta seção apresentando um resultado onde estudamos condições necessárias para a simplicidade de $A *_\alpha [[G]]$.

Teorema 4.2.2. *O anel $A *_\alpha [[G]]$ é simples se, e somente se, A não tem ideais próprios α-invariantes.*

Demonstração: Suponhamos que $A *_\alpha [[G]]$ não é simples e seja I um ideal próprio de $A *_\alpha [[G]]$. Então, pelo Lema 4.2.1 temos que $\lambda(I)$ é um ideal próprio α-invariante de A.

Reciprocamente, dado um ideal próprio α-invariante de A, claramente $J *_\alpha [[G]]$ é um ideal próprio de $A *_\alpha [[G]]$ e, portanto, $A *_\alpha [[G]]$ não é simples. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] V. A. Andrunakievitch, *Biregular rings*, Math. Sb. 39 (1956), 447-464.

[2] L. Bemm, W. Cortes, M. Ferrero and S. Della Flora, *Partial crossed products and Goldie rings*. Comm. in Algebra 43 (2015), 3705-3724.

[3] J. E. Björk, *Rings satisfying a minimum condition on principal ideals*, J. Reine Angew Math. 23b (1969), 112-119.

[4] W. Cortes and M. Ferrero, *Partial Skew Polynomial Rings: Prime and Maximal Ideals*, Comm. in Algebra 35 (2007), 1183-1199.

[5] W. Cortes and M. Soares, *Partial crossed products and fully weak prime rings*, aceito para publicação em Rocky Mountain Journal of Mathematics.

[6] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by parcial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. AMS 357 (2005), 1931-1952.

[7] M. Dokuchaev, R. Exel and J. J. Simón, *Crossed product by twisted parcial actions and graded algebras*, J. Algebra 320 (2008), 3278-3310.

[8] M. Dokuchaev and R. Exel, *Globalization of twisted parcial actions*, Trans. AMS 362 (2010), 4137- 4160.

[9] M. Dokuchaev, M. Ferrero and A. Paques, *Partial Actions and Galois theory*, J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), 77-87.

[10] R. Exel, *Partial actions of groups ans actions of semigroups*, Proc. AMS 126 (1998), 3481-3494.

[11] R. Exel, *Twisted partial action: a classification of regular C^*-algebraic bundles*, Proc. London Math. Soc. 74 (1997), 417-443.

[12] R.Exel, M. Lacal and J.Quigg, *Partial dynamical system and C^*-algebras generated by partial isometries*, J. Operator Theory 47 (2002), 169-186.

[13] M. Ferrero and J. Lazzarin, *Partial Actions and Partial Skew Group Rings*, J. Algebra 319 (2008), 5247-5264.

[14] S. S. D, Flora, *Sobre ações parciais torcidas de grupos e o produto cruzado parcial*, tese de doutorado, PPG-Mat, UFRGS, 2012.

[15] K. R. Goodearl, *Von Neumann Regular Rings*, Krieger Publishing Company, 2nd ed. (1991)

[16] K. R. Goodearl and R.B. Warfield, Jr., *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press, 1st ed. (1989)

[17] J. B. Kruskal, *The theory of well-quasi-ordering: A frequently discovered concept*, J. Combinatorial Theory (A) 13 (1972), 297-305.

[18] T.Y. Lam, *A First Course on Noncommutative Rings*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., vol. 131, Springer, New York/Berlin/Heidelberg, 2001.

[19] J. R. Lazzarin, *Ações parciais de grupos sobre anéis: o skew anel de grupo parcial e o subanel dos invariantes*, tese de doutorado, PPG-Mat, UFRGS, 2006.

[20] E.S. Letzter and L. Wang, *Goldie Ranks of Skew Power Series Rings of Automorphic Type*, Comm. in Algebra 40(6) (2012), 1911-1917.

[21] R. Mazurek, M. Ziembowski, *On Von Neumann Regular Rings of Skew generalized power series*, Comm. in Algebra 36 (2008), 1855-1868.

[22] J.C. McConnel and J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Pure Appl.Math., JohnWiley and Sons, Chichester (1988).

[23] S. V. Mihovski, *Biregular crossed products*, J. Algebra 114 (1988), 58-67

[24] M. M. Parmenter and E. Spiegel, *On the regular radical of a group ring*, Comm. in Algebra 27(7) (1999) 3317-3327.

[25] D.S. Passman, *Infinite crossed products*, Academic Press, New York, 1989.

[26] P. Ribenboim, *Rings of generalized power series II: Units and zero-divisors*, J. Algebra 168 (1944) 71-89.

[27] P. Ribenboim, *Special properties of generalized power series*, J. Algebra 173 (1995a) 566-586.

[28] P. Ribenboim, *Some examples of valued fields*, J. Algebra 173 (1955b) 668-678.

[29] P. Ribenboim, *Semisimple rings and von Neumann regular rings of generalized power series*, J. Algebra 198 (1997) 327-338.

[30] M. Soares, *Questões sobre produtos cruzados parciais*, tese de doutorado, PPG-Mat, UFRGS, 2013.

[31] A. Tuganbaev, *Rings Close to Regular*, Kluwer Academic Publishers, 1st ed. (2002)

Índice Remissivo