

## Matemática Dinâmica e Arte: uma proposta com projeção ortogonal para o desenvolvimento da visualização espacial

Lucas Daniel Retore, IME/UFRGS, retore34@gmail.com,  
<https://orcid.org/0009-0007-5663-6058>

Márcia Rodrigues Notare, PPGEMAT/IME/UFRGS, marcia.notare@ufrgs.br,  
<https://orcid.org/0000-0002-2897-8348>

**Resumo:** Este artigo apresenta e analisa uma atividade realizada com o software GeoGebra que envolve matemática e arte pela construção de uma obra com técnicas de projeção ortogonal. A atividade faz parte do experimento empírico de uma pesquisa cujo objetivo foi identificar potencialidades de softwares de matemática dinâmica como o GeoGebra para o desenvolvimento da visualização espacial e tem inspiração nas esculturas de arame do artista francês Matthieu Robert-Ortis. A análise baseia-se nas teorias da matemática dinâmica e da visualização de Gutiérrez (1996) e os resultados apontam que o software de matemática dinâmica contribui para a criação de imagens mentais dos conceitos abordados e para o emprego e desenvolvimento de habilidades de visualização.

**Palavras-chave:** projeção ortogonal, visualização, matemática dinâmica, GeoGebra, arte.

### Dynamic Mathematics and Art: a proposal with orthogonal projection to develop spatial visualization

**Abstract:** This paper presents and analyzes an activity carried out with the GeoGebra software involving Mathematics and Art through the construction of an artwork using orthogonal projection techniques. The activity is part of the empirical experiment of a research project whose objective was to identify the potential of Dynamic Mathematics software such as GeoGebra for the development of spatial visualization and is inspired by the wire sculptures of French artist Matthieu Robert-Ortis. The analysis is based on the theories of Dynamic Mathematics and visualization by Gutiérrez (1996) and the results indicate that Dynamic Mathematics software contributes to the creation of mental images of the concepts covered and to the use and development of visualization abilities.

**Keywords:** orthogonal projection, visualization, Dynamic Mathematics, GeoGebra, Art.

### 1. Introdução

Nos últimos anos, temos observado a geometria ganhando mais espaço nos currículos escolares de diversos países (International Commission On Mathematical Instruction, 2022), o que tem ocorrido paralelamente a um aumento de publicações e pesquisas na linha do uso de tecnologias digitais na educação matemática (Notare; Basso, 2016). Tais tendências encontram-se na consolidação de tecnologias com ferramentas que possibilitam novas abordagens ao estudo de conteúdos da matemática, dentre as quais destacamos os softwares educativos de matemática dinâmica (MD) (Basso; Notare, 2015).

Nesse cenário, a importância da visualização na compreensão de conceitos e relações matemáticas tem sido evidenciada, assim como a necessidade de desenvolver habilidades de visualização e meios efetivos de utilizar esse raciocínio na resolução de problemas (Gutiérrez et al., 2018). Desse modo, nos questionamos "como a matemática dinâmica pode contribuir para o desenvolvimento da visualização espacial?", e pela análise de uma atividade envolvendo projeção ortogonal e arte, que teve como inspiração as obras de observação em perspectiva de Matthieu Robert-Ortis, realizada em um ambiente de MD buscamos responder a esta pergunta.

## 2. Matemática Dinâmica

Conforme Notare e Basso (2016), com os ambientes de MD surgiram novas formas de lidar com objetos que até então eram tratados de maneira estática e abstrata, mas que agora podem ser tomados como fenômenos observados na tela de um aparelho, bem como propriedades podem ser identificadas por invariantes ao se movimentar componentes de uma construção (Basso; Notare, 2015). Softwares de MD possibilitam um ambiente no qual o aluno tem maior participação em sua aprendizagem, pois comanda as ações do software por meio de ferramentas ao investigar um problema, ao testar conjecturas ou criar algum objeto segundo suas propriedades, por exemplo.

O movimento dos elementos construídos em ambientes de MD facilita a distinção das propriedades que dizem respeito ao objeto ou à figura estudada, das propriedades que são próprias do desenho que as representa. Conforme Gravina (2001, p. 88-89), *figura* é “um objeto matemático inserido no modelo euclidiano, dado pelas propriedades que lhe são impostas, por via de construção geométrica”, enquanto *desenho* é “a representação do componente figural, quer seja ela um desenho em papel, quer seja um desenho na tela do computador”. Essa distinção entre os termos se faz necessária para evitar a associação de uma figura a um desenho prototípico ou para reconhecer que nem todas as propriedades de um conceito geométrico podem ser expressadas por um desenho.

No estudo da geometria espacial, construções em ambientes de MD podem auxiliar a criação de imagens mentais menos restritas que aquelas fundamentadas em desenhos estáticos no papel (Notare; Basso, 2016). Com softwares de MD, os alunos podem observar sólidos geométricos em diferentes posições e, por consequência, ter mais propriedade para criar imagens mentais dinâmicas e compreender um desenho apenas como uma dentre um “continuum” de imagens atribuídas ao objeto observado (Gutiérrez, 1996).

A precisão das construções, a possibilidade de investigar relações e propriedades, e a natureza dinâmica dos objetos são alguns dos principais benefícios do uso dos softwares de MD. Nessa categoria de software, o GeoGebra é um dos mais conhecidos atualmente, pois possui diversas ferramentas, apresenta uma interface de fácil compreensão, está disponível para acesso online, além de ser um software de código aberto que pode ser acessado em vários tipos de aparelhos. Para o estudo da geometria plana e espacial, as versões do software Geometria e Calculadora 3D (Figura 01) são, respectivamente, as de interface mais adequadas.

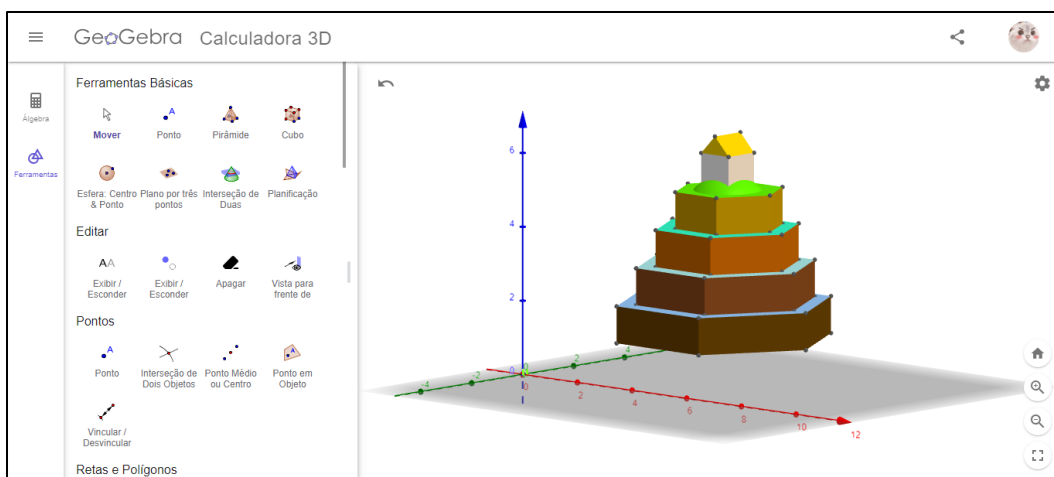


Figura 01 - Interface do aplicativo GeoGebra Calculadora 3D

Fonte: produção autoral

Por conta de suas funcionalidades, a Calculadora 3D do GeoGebra foi o aplicativo escolhido para a realização da atividade que teve como fim contribuir ao desenvolvimento da visualização espacial.

### 3. Visualização Espacial

Desenhos, diagramas, esquemas espaciais ou geométricos frequentemente aparecem ou são utilizados para resolver problemas da matemática e do cotidiano que podem ser organizados de maneira visual. Para lidar com esse tipo de informação é essencial ter certo domínio da visualização. No contexto da matemática, Gutiérrez (1996, p. 9) define a visualização como “o tipo de atividade de pensamento baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, realizada para resolver problemas ou provar propriedades”.

Em tal atividade, dois tipos de elementos se fazem presentes: externos e internos (Gutiérrez et al., 2018). Os primeiros, conceituados como representações externas, são “quaisquer tipos de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo imagens, desenhos, diagramas, etc. que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e a conceber o raciocínio visual” (Gutiérrez, 1996, p. 9-10). Já os elementos internos, conceituados como imagens mentais, são “quaisquer tipos de representação cognitiva de um conceito ou uma propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais” (Gutiérrez, 1996, p. 9).

A comunicação entre os elementos internos e externos ocorre por meio de processos de visualização e do emprego de várias habilidades de visualização. Os processos de visualização citados por Gutiérrez (1996) são a “interpretação visual da informação”, para criar imagens mentais a partir de representações externas, e a “interpretação de imagens mentais”, da qual o autor destaca três subprocessos: a observação e análise de imagens mentais, a transformação de uma imagem mental em outra, e a transformação de imagens mentais em outros tipos de informação. Por sua vez, as habilidades de visualização, ou habilidades espaciais, são mobilizadas conforme o problema enfrentado, têm natureza psico-fisiológica ou intelectual e precisam ser adquiridas e desenvolvidas ao longo da vida. A Tabela 01 apresenta as habilidades de visualização espacial apresentadas por Gutiérrez (1992; 1996) e suas descrições por meio de exemplos.

Tabela 01 - Habilidades de visualização

Habilidade	Descrição
Coordenação Motora dos Olhos	Habilidade de acompanhar com os olhos o movimento de um objeto de forma ágil e eficaz
Identificação Visual	Habilidade de reconhecer uma figura isolando-a de seu contexto
Conservação da Percepção	Habilidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) independem de tamanho, cor, textura ou posição, mesmo que deixe de ser visto total ou parcialmente, por exemplo, por ter sido girado ou ocultado; e de não se confundir quando observando um objeto ou figura por diferentes orientações
Reconhecimento de Posições Espaciais	Habilidade de relacionar a posição de um objeto com si mesmo (o observador) ou com outro objeto, que atua como um ponto de referência
Reconhecimento de Relações Espaciais	Habilidade que permite identificar corretamente as características de relações entre diversos objetos situados no espaço ou consigo mesmo (observador)
Discriminação Visual	Habilidade que permite comparar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais identificando suas semelhanças e diferenças

Memória Visual	Habilidade de recordar características visuais e posicionais que tinham em um momento dado um conjunto de objetos que estavam à vista mas que já não se veem ou que tenham sido mudados de posição
Rotação Mental	Habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas e visualizar uma configuração em movimento

Fonte: Gutiérrez (1992; 1996)

São as habilidades espaciais de visualização, por serem mais perceptivas aos pesquisadores nas representações externas dos alunos, que constituem o principal material de análise em pesquisas sobre visualização na matemática (Gutiérrez et al., 2018). Portanto, pela identificação dessas habilidades na atividade desenvolvida pelos alunos com o GeoGebra, buscamos indícios de um desenvolvimento da visualização espacial dos alunos potencializado pelo uso do software.

#### 4. Metodologia

Com o objetivo de identificar potencialidades da MD para o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial pelo estudo da projeção ortogonal foi realizada uma pesquisa de natureza qualitativa na qual foram analisados os dados produzidos em um experimento prático com atividades de exploração e construção com o software GeoGebra. O experimento teve cinco momentos: a introdução ao GeoGebra com atividades na versão do software Geometria, a introdução à projeção ortogonal em uma aula com atividades de exploração com RA e de desenho de vistas ortográficas, o estudo do tópico realizado por três atividades de construção no GeoGebra Calculadora 3D, a atividade que analisamos neste texto que buscou abordar a projeção ortogonal com arte, e, por fim, a finalização do experimento na qual os alunos puderam comentar as atividades.

A pesquisa em que se deu tal experimento prático foi realizada a fim de compor a monografia do trabalho de conclusão de curso do primeiro autor (Retore, 2023), e a atividade selecionada para discussão neste texto foi chamada de Arte com Projeção Ortogonal, uma proposta que envolveu construções nas versões online do GeoGebra Geometria e Calculadora 3D. A análise da atividade é fundamentada nas teorias da matemática dinâmica e da visualização espacial pelas lentes de Gutiérrez (1996), isto é, é pautada pela identificação de habilidades de visualização empregadas pelos alunos e pelos usos que foram dados à tecnologia utilizada.

Participaram da investigação 27 alunos de uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de Porto Alegre. Desses, 12 estudantes consentiram o uso de seus dados produzidos e 11 participaram da atividade em questão. O laboratório da escola dispunha de chromebooks em número suficiente para todos os alunos, porém, a turma pouco o utilizava e o GeoGebra era desconhecido aos estudantes até o início das atividades do experimento prático. Para a atividade analisada, os alunos formaram duplas ou trabalharam individualmente e dispuseram de duas aulas de 50 minutos, que ocorreram no mês de julho de 2023.

A fim de manter o anonimato dos alunos e alunas participantes da atividade, seus nomes foram ocultados e identificados pelo código Ai, onde  $i = 1, 2, \dots, 11$ . Os dados do experimento foram produzidos por meio de registros fotográficos das telas dos chromebooks, gravações de áudio das manifestações dos participantes, anotações no caderno de campo do pesquisador e pelos arquivos em que foram feitas as construções da atividade, recolhidos ao final de cada aula.

#### 5. Arte Com Projeção Ortogonal

A atividade Arte Com Projeção Ortogonal foi inspirada nas obras do artista francês Matthieu Robert-Ortis, conhecido por construir esculturas de arame que interagem com o

público, que só é capaz de identificar a imagem formada pela escultura ao observá-la de uma certa posição. Algumas de suas obras são esculturas anamórficas, isto é, o que inicialmente aparenta ser um emaranhado de arames toma a forma de uma imagem conforme o observador caminha em torno da escultura até uma determinada posição. Outras, como a *Eléphant-Girafes* (Figura 02), são esculturas metamórficas e, ao contornar a escultura, o observador acompanha uma imagem se desfazendo e formando outra completamente diferente<sup>a</sup>.

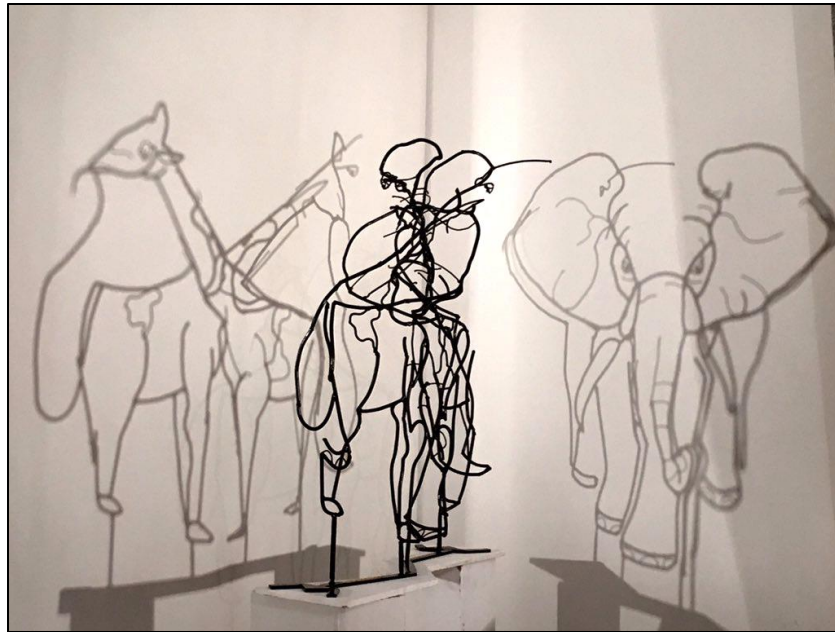


Figura 02 - *Eléphant-Girafes*, por Matthieu Robert-Ortis (2016)  
Fonte: Leona Creob<sup>b</sup>

A atividade proposta iniciou com uma visita ao acervo digital do artista, para que os alunos observassem as obras em fotos e vídeos e para que comentassem aproximações e distanciamentos da técnica empregada com a projeção ortogonal, que estavam conhecendo naquela semana. Inspirado nas esculturas de arame de Robert-Ortis, o desafio proposto aos participantes foi o de construir, com segmentos no espaço, uma imagem que apenas pode ser visualizada a partir da projeção ortogonal destes elementos geométricos no plano.

Uma sequência de etapas de construção foi sugerida aos alunos: (1) escolher uma imagem poligonal do acervo do pesquisador, (2) com o GeoGebra Geometria, construir pontos sobre a imagem<sup>c</sup>, (3) com o GeoGebra 3D, construir retas perpendiculares ao plano  $xy$  passando por cada ponto, construir pontos nas retas, ocultar os pontos do plano  $xy$  e as retas e, por fim, construir segmentos com os pontos que permaneceram no espaço.

Com esta sequência de etapas, remetemos ao processo de visualização interpretação visual da informação, pelo qual o visualizador cria uma imagem mental de um objeto espacial a partir da observação de uma representação plana do mesmo (Gutiérrez, 1996), neste caso, uma projeção ortogonal desse objeto.

A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é a interseção desse plano com a reta perpendicular ao plano que passa pelo ponto; já a projeção ortogonal de um segmento, uma reta, uma figura ou um objeto sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais de cada um de seus pontos sobre esse plano (Dolce; Pompeo, 2013). Retas, segmentos ou pontos colineares perpendiculares ao plano têm como projeção ortogonal no plano um único ponto. Desse modo, a posição exata de um ponto no espaço cartesiano não pode ser determinada por apenas uma projeção ortogonal, pois há infinitas posições possíveis sobre uma reta perpendicular ao plano que resultam naquela projeção.

Esse fato, no entanto, não compromete a atividade proposta, visto que posições aleatórias e diversas dos pontos sobre as retas são até mesmo desejáveis para que a identificação da imagem seja possível apenas ao observar os segmentos construídos por um determinado referencial, e este é perpendicularmente ao plano  $xy$ . Quando observando assim, a componente posicional referente à direção do eixo  $z$  não influencia a imagem observada, mas quando observando por outras posições, essa mesma componente faz com que a imagem seja indistinguível e o observado é apenas uma coleção de segmentos no espaço.

A Figura 03<sup>d</sup> exemplifica uma construção conforme a atividade, observada por três posições distintas, como se o observador que estava à frente da obra se inclinasse para observá-la por cima.



Figura 03 - Construção conforme a atividade proposta  
Fonte: produção autoral

Após uma breve discussão sobre as obras do artista, os alunos passaram a escolher as imagens que iriam construir com o GeoGebra. As imagens foram pré-selecionadas e se encontravam em uma pasta online a qual os alunos tinham acesso. A etapa que utiliza o GeoGebra Geometria transcorreu rapidamente, visto que os alunos não encontraram dificuldade ao construir pontos sobre a imagem. A Figura 04 apresenta as imagens escolhidas pelos participantes da pesquisa, após a construção dos pontos sobre os vértices dos desenhos.

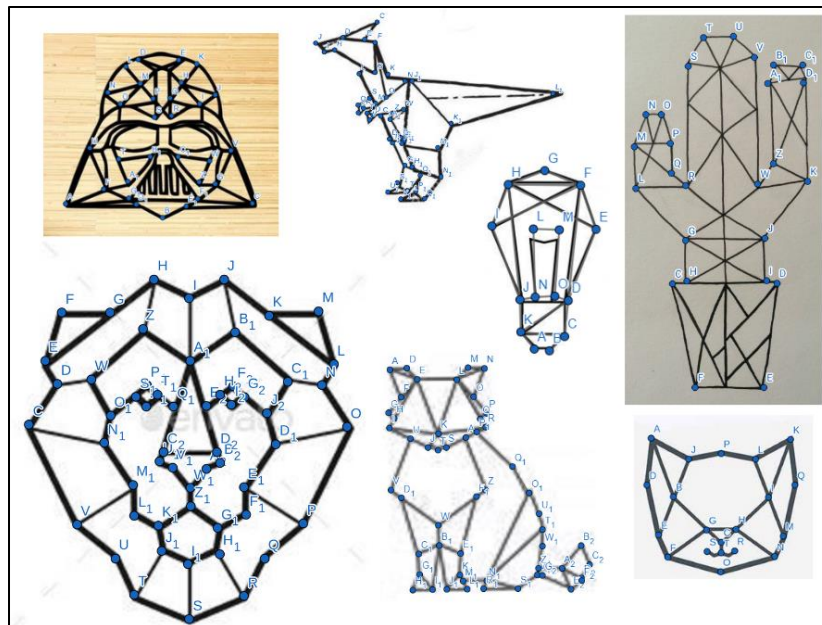


Figura 04 - Imagens escolhidas com pontos já construídos sobre seus vértices  
Fonte: dados da pesquisa

Nas etapas seguintes os alunos tiveram pouca autonomia em seu trabalho, pois ainda estavam se apropriando da tecnologia. A turma havia conhecido o software há poucos dias e, por isso, dependiam de orientações, em sua maioria individuais, o que resultou em diferentes

ritmos na realização da atividade. Alguns alunos reconheciam que suas construções estavam equivocadas, como a reta não perpendicular ao plano na Figura 05, mas não dominavam as ferramentas para fazer as correções necessárias e, portanto, solicitavam auxílio técnico; outros confundiam as etapas da atividade, como também exibido na Figura 05 pelos segmentos construídos no plano  $xy$ .



Figura 05 - Construções equivocadas  
Fonte: dados da pesquisa

A complexidade da atividade estava na organização dos grupos para seguirem a sequência de etapas da proposta, visto que as construções se limitavam ao emprego de ferramentas básicas do software. Dos participantes, até mesmo nas construções mais triviais e repetitivas, se fizeram necessárias habilidades de visualização, como a identificação visual e coordenação motora dos olhos, para acompanhar os elementos já selecionados em cada etapa e reconhecimento de posições espaciais para distinguir os pontos pertencentes ao plano  $xy$  dos construídos sobre as retas, por exemplo (Gutiérrez, 1992; 1996).

A Figura 06 evidencia o quão complexa pode ser essa organização e coordenação de diferentes habilidades espaciais, pela quantidade de elementos apresentados na tela. Ao final da primeira aula, as alunas A1 e A5 haviam construído, com o GeoGebra Calculadora 3D, retas perpendiculares ao plano  $xy$  em cada um dos pontos do plano e estavam construindo pontos sobre cada uma das retas, de onde deram continuidade na aula seguinte.

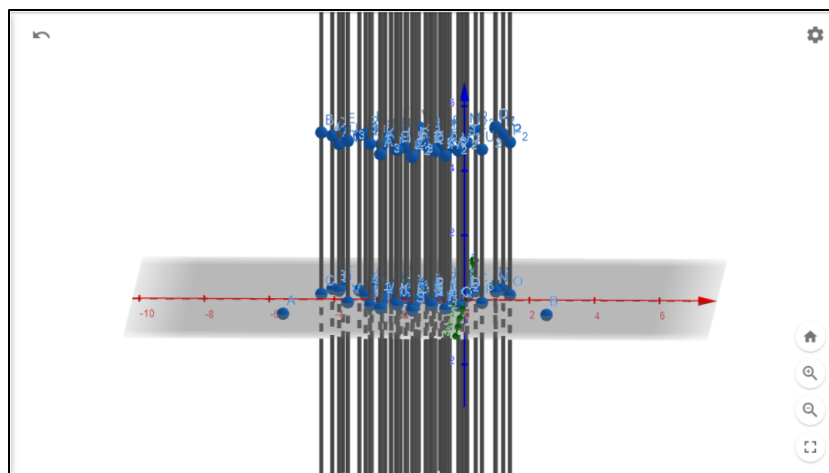


Figura 06 - Construções das alunas A1 e A5 ao final da primeira aula  
Fonte: dados da pesquisa

Na segunda aula a atividade foi finalizada pela maior parte dos grupos. Os alunos A2, A8 e A9 foram os participantes da pesquisa que não conseguiram finalizar a atividade, ainda

que fossem os mais empolgados, pois despenderam muito tempo em uma busca online por uma imagem poligonal que não encontraram no acervo. Ao abandonar a busca, a dupla formada pelos alunos A2 e A9 e o aluno A8 escolheram, respectivamente, um dinossauro e um gato dentre as imagens do acervo. A Figura 07 mostra as construções desses alunos ao final da segunda aula, observadas por dois referenciais: um que permite a identificação da imagem e outro que não.

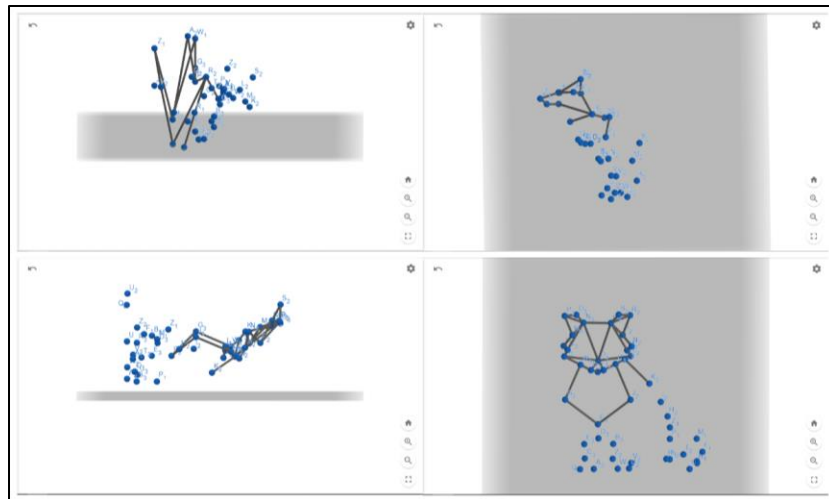


Figura 07 - Construções inacabadas  
Fonte: dados da pesquisa

Ainda que incompletas, as construções dos alunos indicaram que os mesmos estavam realizando a atividade corretamente e se encontravam na etapa final, construindo segmentos conforme as imagens escolhidas. Os pontos do espaço com distâncias variadas em relação ao plano xy também indicaram que os alunos compreenderam a proposta da atividade e como ela dialoga com as obras de Robert-Ortis. De fato, ao observarem o acervo do artista, estes alunos comentaram sobre as relações espaciais entre observador e objeto que identificaram tanto nas obras quanto na projeção ortogonal, manifestando a habilidade de reconhecimento de relações espaciais (Gutiérrez, 1992; 1996).

Posteriormente, em uma entrevista no momento final do experimento, quando questionados pelo pesquisador acerca das projeções ortogonais de dois pontos colineares perpendiculares ao plano de projeção, os alunos A8 e A9 demonstraram, por meio de suas falas, compreender que as projeções coincidem em um único ponto do plano, ao afirmarem que a projeção do segundo ponto “é a mesma coisa [que a projeção do primeiro, porque] ele é perpendicular, igual à reta” (isto é, ele está alinhado ao primeiro ponto, perpendicularmente ao plano), o que é o cerne da atividade e das construções dos pontos sobre as retas perpendiculares.

Tal constatação não pôde ser observada nas construções de outros alunos, que concluíram a atividade, mas construíram os pontos sobre as retas a uma mesma distância do plano xy. Esse padrão foi identificado nas construções do aluno A7, que escolheu a imagem do Darth Vader, e da dupla formada pelas alunas A1 e A5, que escolheram um leão, como mostrado na Figura 08. Possivelmente as construções foram assim feitas devido à região de recorte do GeoGebra, parte do espaço virtual na qual são exibidos os objetos que faz com que elementos de tamanho infinito como as retas perpendiculares da atividade apareçam como segmentos do tamanho da região interseccionada. Os pontos equidistantes ao plano provavelmente foram construídos na extremidade superior desses segmentos.



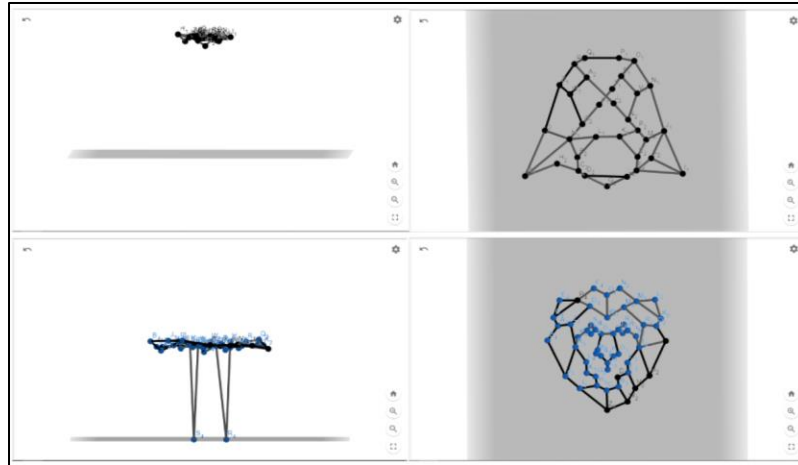


Figura 08 - Construções equidistantes do plano xy  
Fonte: dados da pesquisa

O padrão presente nessas atividades poderia ter sido identificado caso os estudantes tivessem rotacionado os elementos na tela e os observado por mais de um referencial. Poderiam ter alterado esse padrão pelo arrastar dos pontos sobre as retas, como fizeram os alunos A2, A8 e A9. No entanto, uma vez iniciada a construção dos pontos, as alunas A1 e A5 e o aluno A7 utilizaram o GeoGebra como um ambiente estático, não tirando proveito de seu potencial dinâmico e, por isso, não constatararam que suas construções não se assemelhavam às esculturas de arame que proporcionam a surpresa da descoberta de uma imagem formada em um aparente emaranhado de fios.

No arquivo da dupla A1 e A5 também observamos dois pontos no plano xy que foram acrescentados na etapa de construção de segmentos conforme a imagem poligonal, para os quais não foram construídos pontos colineares perpendiculares no espaço por opção das alunas. O mesmo ocorre na atividade do aluno A6, uma das três finalizadas. O aluno A6 escolheu a imagem de um cacto, e as outras finalizadas foram um gato, pelas alunas A4 e A12, e uma lâmpada, pelos alunos A3 e A10 (Figura 09).

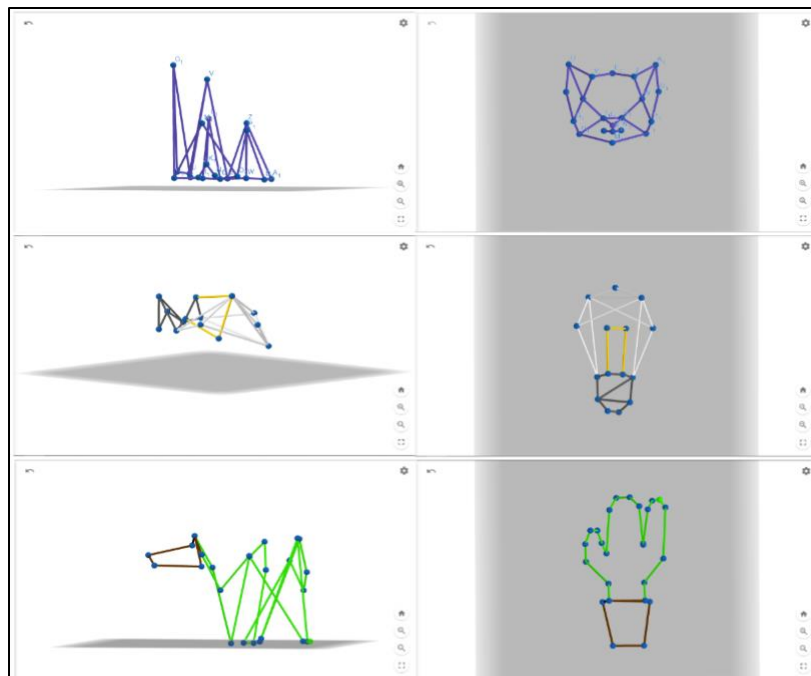


Figura 09 - Construções finalizadas  
Fonte: dados da pesquisa

Os alunos que concluíram a atividade receberam a proposta como um desafio que cumpriram ao construir esculturas anamórficas que proporcionam a emoção da descoberta. As produções dos alunos revelam que estes possuem habilidades espaciais, organizacionais e computacionais determinantes para a execução de tarefas e resolução de problemas matemáticos que dependem ou se beneficiam da visualização.

## 6. Conclusões

Realizamos uma pesquisa que teve como objetivo identificar potencialidades da MD para o desenvolvimento da visualização espacial. Para tanto, descrevemos e analisamos a atividade Arte com Projeção Ortogonal para apontar o emprego de habilidades de visualização e usos que os participantes da pesquisa deram ao software GeoGebra, em especial à versão Calculadora 3D.

A atividade proposta buscou relacionar a matemática à arte por meio de construções com base em projeções ortogonais, inspiradas nas obras de Matthieu Robert-Ortis que requerem a visão do apreciador. A projeção ortogonal foi evidenciada pelos elementos do GeoGebra, construídos pelos estudantes segundo as propriedades desse conceito matemático, de modo que relações como colinearidade de pontos no espaço e perpendicularidade da reta com o plano de projeção tornaram-se concretas e observáveis.

A dinamicidade do software foi evidenciada na atividade pelo arrastar de pontos sobre as retas perpendiculares e pelo controle do referencial de observação, realizado por translações, rotações, distanciamentos e aproximações dos objetos manipulados que, na ausência do software, depende unicamente da habilidade espacial rotação mental. Já o potencial visualizador do GeoGebra se destacou pela quantidade de desenhos dos objetos geométricos e das relações desses objetos observados na tela, que certamente contribuíram para a criação de imagens mentais dinâmicas dos mesmos.

A análise dos dados mostra que o ambiente de MD proporcionado pelo GeoGebra tenha auxiliado o desenvolvimento da visualização dos estudantes, pois identificamos o emprego de diferentes habilidades espaciais ao longo da atividade, como a identificação visual, a discriminação visual e o reconhecimento de relações espaciais, bem como a compreensão da projeção ortogonal, pela sua visualização. Desta experiência ressaltamos que os softwares de MD proporcionam abordagens mais significativas e atraentes aos alunos, sendo grandes aliados ao estudo da geometria.

---

<sup>a</sup> No canal do artista podem ser encontrados vídeos curtos (shorts) que apresentam a ilusão criada por algumas de suas esculturas metamórficas: <https://www.youtube.com/@matthieurobert-ortis5470/shorts>

<sup>b</sup> Disponível em: <https://leonacreo.com/sculptures-by-matthieu-robert-ortis/>. Acesso em: 21 out. 2023.

<sup>c</sup> A etapa que envolve o GeoGebra Geometria apenas se fez necessária pela ausência da ferramenta “inserir imagem” na versão do software Calculadora 3D. Ao salvar o arquivo no GeoGebra Geometria e abri-lo no GeoGebra Calculadora 3D, perde-se a imagem, mas os pontos construídos sobre ela permanecem como pontos livres no plano xy.

<sup>d</sup> As construções das Figuras 03, 06, 07, 08 e 09 podem ser visualizadas de maneira dinâmica através do link: [https://youtu.be/hZmorqEa\\_94](https://youtu.be/hZmorqEa_94)

## 7. Referências

BASSO, M. V. A.; NOTARE, M. R. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. *RENTE: Revista Novas Tecnologias na Educação*, Porto Alegre, v. 13, n. 2, dez. 2015.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica, 7 ed., São Paulo, Atual, 2013.

GRAVINA, M. A. Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GUTIÉRREZ, Á. R. Procesos y Habilidades en Visualización Espacial. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría. México: CINVESTAV-PNFAPM, p. 44-59, 1992.

GUTIÉRREZ, Á. R. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In: GUTIÉRREZ, Á. R.; PUIG, L. (Ed). Proceedings of the 20th PME Conference. Valência: Addenda, v. 1, p. 3-19, 1996.

GUTIÉRREZ, Á. R. et al. Visualization abilities and complexity of reasoning in mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task. A networked analysis. In: Mix, K. S.; Battista, M. T. (Ed). Visualizing mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought. Cham: Springer, p. 309-337, 2018.

INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION. The 26th ICMI study: advances in geometry education. 2022.

NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. A. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, v. 14, n. 2, dez. 2016.

RETORE, L. D. Visualização com Matemática Dinâmica: um estudo com projeção ortogonal na educação básica. 2023. 124 f. TCC (Licenciatura em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2023.