Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Estados KMS sobre Álgebras de Cuntz-Krieger

Fagner Bernardini Rodrigues

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, 23 de Agosto de 2009.

Dissertação submetida por Fagner Bernardini Rodrigues [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Alexandre Tavares Baraviera (PPGMat - UFRGS)

Banca Examinadora:
Dr. Artur Oscar Lopes (PPGMat - UFRGS)
Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPGMat - UFRGS)
Dr. Ruy Exel (UFSC)

Data da Apresentação: 23 de Agosto de 2009.

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

AGRADECIMENTOS

Para este trabalho poder ser realizado foram importantes algumas pessoas e a UFRGS e o CNPQ. Gostaria então de começar agradecendo a UFRGS por todo o suporte que me ofereceu e ao CNPQ pelo suporte financeiro e o incento ao desenvolvimento da pesquisa no Brasil.

Gostaria também de agradecer aos meus amigos: Diegão, obrigado pelas ajudas e pelas horas estudando junto comigo as várias disciplinas nas quais fomos colegas, pelos jogos de futebol e outros jogos também, por ser o melhor goleiro do nosso time, pela força excessiva nos abraços e “tapinhas”no peito e pelas belas gargalhadas que ecoam aqui onde estou e sempre me deixam mais alegre.

Nicolau obrigado por ter me ajudado enquanto fomos colegas em disciplinas e também em dois exemplos deste trabalho, por ser do meu time no campeonato e entender perfeitamente onde eu vou lhe passar a bola, pelas caronas de moto e por ser meu parceiro sempre.

Douglas obrigado por me ajudar (explicar), aos domingos de sol de janeiro no DAEMA, a estudar logo e geometria 1. Obrigado pelas caronas na moto, pelos excelentes churrascos que sempre assa, pelos conselhos que sempre me deste, por ser como um irmão para mim e por todas as viagens que fizemos juntos, foram muito boas.

Lucas obrigado pelas gargalhadas que sempre me proporciona, por me levar aos jogos do Grêmio, pelas jantas, pelas parcerias na praia, pelas sempre bem elaboradas e criativas explicações a respeito das coisas da vida, por ser meu amigo de verdade.

Renê obrigado pelas judas em álgebra, por ter se disposto a ouvir o ensaio para a apresentação deste trabalho, por sempre estar disposto a conversar, na UFRGS, no skype e no msn. És um grande amigo e agora parceiro no futebol da gurizada.

Diego Chaves obrigado pelas ajudas em álgebra, por ter ajudado a Pati na ”festinha de despedida”, pelos cafés no bar do Antônio, pela boa vontade de sempre tentar melhorar o pouco que eu falo de inglês. Como lhe falei, nos conhecemos a pouco mas o suficiente para te admirar como todos os outros acima.

Joâo obrigado pelas ajudas em Geometria Algébrica, por ser o cantor junto com o Kleiton nas nossas festinhas, pela parceria no verão do IMPA, pelo futebol que quase nunca foi jogar, pelos conselhos, pelas jantas lá em casa, pelas risadas juntos e pelo barranco que nós quase não subimos.

Carlos Filipe obrigado pelos conselhos a respeito de uma boa apresentação, por ter se disposto a ouvir o ensaio da apresentação deste trabalho, por ter torcido pelo nosso time no campeonato, pelos convites para um café sempre relaxante no Antônio. Valeu pela força amigo.

Diego Marcon obrigado pelas explicações de matemática, sempre muito claras, pelas caronas de moto, por saber escutar as pessoas, pelos chás sempre bons nas aulas de geometria riemanniana, por correr pelos outros quatro do nosso time, pelas curtíssimas caminhadas que me proporcionou enquanto fomos colegas la no IMPA (tu nunca sabia a distância, mas sempre dizia que era menor do que a que nós haviamos percorrido antes, e sempre se enganava por uma hora a mais de diferença). Obrigado também por ajudar na finalização deste trabalho.

Rodrigo (π) obrigado pelas explicações de EDP, pelos gargalhadas que tu proporciona com essa malandragem que é só tua. Obrigado pelos ensinamentos de futebol, sem os quais eu não seria o craque sou hoje. Obrigado por ser do meu time e, juntos termos sido campeões. Valeu meu "veio"!

Ricardo muito obrigado pela mágicas, pelas histórias que me contou enquanto íamos para os jogos. Pena que não pode estar presente lá na festinha. Espero que contínue jogando lá com a gurizada e se preparando, afinal ano que vem tem campeonato de novo e tu é do time.

Eládio obrigado pelas ajudas com informática, sempre muito solícito, tua ajuda foi muito importante. Espero poder assistir a um show teu. Pelas três músicas que escutei tens muito talento.

Duda obrigado pelas inúmeras vezes que me ajudou com matemática, com conselhos e até financeiramente. Obrigado por ser meu amigo. Te admiro muito, e quero sempre poder estar perto de ti. Muito obrigado.

Thaísa "morena"obrigada pelas gargalhadas constantes, pois assim como o Diegão, és uma pessoa de sorriso fácil que está sempre alegre, e que assim alegra a todos. Obrigada pelas caronas, pelas parcerias nas festinhas, por ter chegado na Redenção, no dia da despedida, exatamente na hora (hahaha).

Carol obrigada pelos bolos feitos nas festinhas, pela parceria forte na organização de nossas festinhas, pela confecção das bandeirinhas da festa junina, pela parceria no verão no IMPA, por ter a voz meio parecida com a da Nair Belo logo pela manhã, por aqueles balas meio esquisitas que tu e o Rene trouxeram do nordeste (hahaha).

Míriam obrigado pelas ajudas em diversas disciplinas, pela parceria sempre muito eficiente na hora de organizar uma festinha, elaborar um cartão de aniversário ou fazer uma surpresa. Obrigado também pelas caronas.

Ju obrigado pelas parcerias na praia, pelos convites para o vôlei, pelas jantas lá em casa, pelas histórias engraçadas que conta, como a da tua tremenda sorte em sempre ganhar prêmios muito interessantes (ser sorteada para assistir a três dias de palestras que tratavam do portal da CAPES é uma demonstração de que tens muita sorte). Obigado por ajudar a cuidar da Pati, por ter pedido para o Lucas ajudar ela a domar o comptutador lá de casa. Te admiro muito e ó cuida bem do Lucas.

Déinha obrigado pelas ajudas em álgebra, pela força na elaboração de um video para mim. Obrigado pelos cafés no Antônio, pelas conversas na sala de estudo, por sempre ir ao banheiro conversar não sei o que com a Pati (hahhah). Obrigado amiga.

Lucinéia obrigado pelas ajudas em geometria riemanniana, pelo jeito simples e engraçado que tens, pela amizade. Obrigado também por morar em Viamão, representar essa cidade que é a capital mundial do desenvolvimento tecnológico, ciêntífico, humano e cultural(hahha).

Rosane obrigado por todas as vezes que me ouviu, que me aconselhou, pelas vezes que me emprestou o telefone para eu ligar para o Grê..., é melhor eu não

falar. Sei que dentro de ti existe uma gremista escondida, que está louca para sair. Deixa ela sair, vai ser feliz, ser gremista. Muito obrigado por tudo Rosane, devo muito do que consegui (quase nada, hahah) a você.

Juju obrigado pelas parcerias nas festas no opinião, pelos convites para o vôlei, pela disposição na organização das nossas festinhas. Obrigado pelas caretinhas, sempre muito engraçadase , muitas vezes, sem motivo, acontecem simplesmente porque é sua marca registrada.

Raquel obrigada por ser a mineira mais engraçada do doutorado. Parceira para todas as festinhas, festas e festões, topa até o show do Padre Marcelo Rossi, ou mesmo o do Reginaldo Rossi (só para ficar poético). Obrigado pela parceria lá em SC e por todas as milhões de fotos que tira, eu que para você cada mergulho é um flash (hahaah).

Lisane, "e aí qualé", obrigada por ser parceira para tudo. Obrigado pelas cuquinhas, adorei elas. No futuro teremos uma matemática mestre cuca. Terá então de dividir essa função com o Marcon.

Thaísa "Loira"obrigada pelas gargalhadas que sempre proporciona com o teu jeito meio malandrinho de ser (as vezes é quase um gurizinho, cheia de pegadinhas, tenho que cuidar o que eu falo, se não tu vai folgar). Obrigado também pelas caronas e pela super disposição para fazer uma festa.

Alexandre muito obrigado ter aceitado me orientar, por ter me ajudado muito, por ter me mostrado que simpliicando as coisas se vai muito mais longe em matemática. Te admiro muito, pela simplicidade, pela calma e pela clareza com que consegue expor algo. Muito obrigado.

Leonardo Bonorino muito obrigado por estar sempre disposto a ajudar a todos, inclusive a mim. Me ajudou muito na parte de análise funcional deste trabalho. Lhe admiro muito pela dedicação que tem a todos os seus alunos. Muito obrigado.

Ivan muito obrigado por ter me dado uma oportunidade lá no início da graduação, por ser um grande amigo, pelos vinhos tomados, pelas histórias malucas que sempre tem para contar. Gostaria de dizer que o fato de eu estar terminando o mestrado hoje devo muito a você. Muito obrigado.

Agradeço também a família da Pati. Ao seu Pavão pelas conversas e histórias sempre muito boas e criativas, e à Dona Maria pelo carinho e os ótimos almoços que sempre proporciona para a Pati e para mim, à Dona Sandra por sempre ser muito amiga e companheira. Também agradeço ao seu Jacir, amigão que sempre me recebe muito bem em sua casa com ótimas conversas conselhos e que, com sua paciência, tem me ensinado muito. Agradeço à Dona Maria Helena pelo carinho, pelos bolos e tortas de bolachas, pelas coisas engraçadas que está sempre falando. Obrigado ao Gustavo, meu parceiro de corridas no Marinha, de futebol, de tênis no Gaúcho e de muitos jogos do Grêmio.

Agradeço muito a minha família, minha mãe, minha irmã e o Vini, que foram assistir a apresentação e me dar apoio. Agradeço ao meu pai, que é e sempre será um exemplo para mim e que, sempre quando chego em sua casa, está lá me esperando com minha mãe, sempre os dois muito alegres e cheios de abraços e beijos para me dar, amo vocês demais. Agradeço aos meu vô Edgar e a minha vó Julieta pela carinho e ajuda em toodos os momentos que sempre me deram.

Por fim agradeço aos meus irmãos Vagner, Cíntia e Vini. O Vini é o meu clone, como quem eu aprendi a jogar bola, meu irmãozinho de 18 anos, que sempre foi e sempre será meu companheirinho do futebol, do jogo do Grêmio, de algumas poucas corridas no Marinha.

O último dos agradecimentos é para a minha namorada, a **Pati**, minha noiva, ,ulher da minha vida, futura esposa, excelente cozinheira, cabelereira, excelente jogadora de futebol, matemática, baita companheira, linda, que tem um grande coração, que tem os dedinhos tortos, e a paletinha de nadadora. Pessoa muita amorosa e carinhosa, que odeia informática, companheiríssima de estudos, que me ajudou muito quando fomos colegas, que me faz a maior falta, que adora um "cafézinho da máquina do Antônio", que já viajou muito junto comigo, que já ficou acampada no meio de uma praça em pleno Rio de Janeiro, que acho que eu sou o maior desastrado, que faz eu suspirar cada vez que lembro que ela não está comigo. Muito obrigado Pati meu amor da minha vida, tu és muito especial para mim, e sem você eu sou muito, mais muito, menos feliz. Te amo, te amo.

RESUMO

O objetivo desta dissertação é estudar os*estados KMS* sobre Álgebras de Cuntz-Krieger. Um estado é um funcional linear sobre uma álgebra-C* A que deve satisfazer

$$\psi(a^*a) \geq 0, \quad \forall\ a \in A, \quad \text{e} \quad \psi(1) = 1 \ \text{ se } A \text{ possui unidade.}$$

Então considerando uma *dinâmica*, isto é, uma aplicação $\sigma : \mathbb{R} \times A \to A$, $(t, a) \mapsto \sigma_t(a)$ tal que cada σ_t é um automorfismo de A e

$$\sigma_0 = Id_A, \qquad \sigma_s \circ \sigma_t = \tau_{s+t},$$

então (A, τ) é um *sistema dinâmico*.

Dado ψ um estado sobre A e $\beta \geq 0$. Dizemos que ψ é um estdao KMS se

$$\psi(a\sigma_{i\beta}(b)) = \psi(ba), \quad \text{para quaisquer } a, b \in A$$

onde a dinâmica é estendida de forma que $\sigma_{i\beta}$ faça sentido. As álgebras de Cuntz-Krieger são, na sua essência, as álgebras geradas por uma família de isometrias parciais $\{s_x\}_{x\in\mathcal{G}}$ sobre um espaço de Hilbert. Esta família é indexada por um conjunto discreto e satisfaz as três condições de Cuntz-Krieger e mais

$$\sigma_t(s_x) = N(x)^{it} s_x,$$

onde $N(x) \in (1, \infty)$, para todo $x \in \mathcal{G}$. Usando o Teorema de Representação de Riesz, alguns reultados sobre Grupos Livres e álgebras-C*, tentaremos mostrar que dado um estado KMS, podemos passar a estudar a medida associada a ele pelo Teorema de Represntação de Riesz. Concluiremos assim que o trabalho de encontrar estados KMS se resume a buscar certas medidas com algumas propriedades.

Ao longo desta dissertação serão usadas muitas ferramentas, como Análise Funcional, Teoria de Grupos, Teoria de Ações Parciais, entre outras. Este trabalho se deteve básica á explorar e tentar encontrar aplicações para os conceitos abordados em [3] e [2].

ABSTRACT

The objective of this dissertation is to study the *KMS* states on algebras of Cuntz-Krieger. A state is a linear functional on a C *-algebra A which satisfies

$$\psi(a^*a) \geq 0, \quad \forall\ a \in A, \quad \text{and} \quad \psi(1) = 1 \ \text{ if } A \text{ has unit.}$$

Given a *dynamic*, ie, a map $\sigma : \mathbb{R} \times A \to A$, $(t, a) \mapsto \sigma_t(a)$ such that each σ_t is an automorphism of A and

$$\sigma_0 = Id_A, \qquad \sigma_s \circ \sigma_t = \tau_{s+t},$$

then we say that (A, τ) is a *(*dynamical system).

For ψ a state on A and $\beta \geq 0$ we say that ψ is a KMS state if

$$\psi(a\sigma_{i\beta}(b)) = \psi(ba), \quad \text{for all } a, b \in A$$

where the dynamic is extended so that $\sigma_{i\beta}$ makes sense. The algebras of Cuntz-Krieger are, in essence, the algebras generated by a family of partial isometries $\{s_x\}_{x\in\mathcal{G}}$ on a Hilbert space. This family is indexed by a discrete set and satisfies the three conditions of Cuntz-Krieger and also

$$\sigma_t(s_x) = N(x)^{it}s_x,$$

where $N(x) \in (1, \infty)$, $x \in \mathcal{G}$. Using the Theorem of Riesz and some results about Free Groups and C*-algebras we show that given a KMS state there is a unique measure associated with its Riesz-representation. We conclude therefore that the work of finding KMS states comes down to finding some measures with some properties.

Throughout this dissertation will use many tools such as Functional Analysis, Group Theory, Theory of Partial Actions, among others. This basic work will explore and try to find applications for the concepts discussed in [3] and [2].

Conteúdo

Capítulo 1

Alguns resultados sobre Espaços de Hilbert

Aqui veremos alguns resultados sobre espaços de Hilbert que nos serão úteis ao longo do trabalho. Como precisaremos de poucos resultados sobre a teoria de espaços de Hilbert, seremos breves.

Definição 1.0.1. Seja H espaço vetorial. Um produto interno é uma aplicação

$$\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$$

tal que para $x, x', y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos

$(\imath)$ $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$
$(\imath\imath)$ $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
$(\imath\imath\imath)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
(iv) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

Definição 1.0.2. Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial H, munido de um produto interno, e completo em relação à norma definida por esse produto interno.

1.1 Conjuntos Ortonormais

Nesta seção veremos um teorema muito importante na teoria de espaços de Hilbert. Este teorema nos permitirá, mais adiante, caracterizar os elementos de um espaço de Hilbert.

Definição 1.1.1. Seja H um espaço de Hilbert. Um conjunto $S \subseteq H$ é ortonormal se

(i) $\forall x \in S$, $\|x\| = 1$
(ii) $\forall x, y \in S$, $x \neq y \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$

Teorema 1.1.2. *Seja H espaço de Hilbert e $S \subseteq H$ ortonormal. Então existe T tal que $S \subseteq T \subseteq H$ e T é ortonormal maximal.*

Prova: A prova deste teorema é uma aplicação do Lema de Zorn. Começamos definindo

$$P = \{T \subseteq H : S \subseteq T,\ T \text{ ortonormal}\}$$

que é ordenado pela inclusão $\subseteq$. Agora observamos que se $\{T_\alpha : \alpha \in I\}$ é uma cadeia em P, então $T = \cup_{\alpha\in I} T_\alpha$ é uma cota superior para a cadeia e está em P. Logo P é totalmente ordenado, e assim pelo Lema de Zorn, existe elemento maximal em P e o resultado segue.

$\square$

Definição 1.1.3. Uma base (Hilbertiana) é um conjunto $S \subseteq H$ ortonormal maximal.

1.2 Uma Decomposição para um Espaço de Hilbert

Nesta seção nós veremos como decompor um espaço de Hilbert H como uma soma direta de espaços ortogonais. Essa decomposição será obtida em função de um subespaço fechado M de H.

Proposição 1.2.1. *Sejam H espaço de Hilbert e $S \subseteq H$ ortonormal. São equivalentes*

(i) S é ortonormal maximal
(ii) $\overline{[S]} = H$
(iii) $\forall x \in H$, $x = \sum_{e\in S} \langle x, e\rangle e$ (esta série converge e não depende da ordem dos termos)
(iv) $\forall x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_{e\in S} \langle x, e\rangle \overline{\langle y, e\rangle}$
(v) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2$ (Identidade de Parseval).

Para provarmos a proposição acima nós necessitamos de dois outros resultados, que não provaremos. São eles:

Teorema 1.2.2. *Sejam H um espaço de Hilbert, $K \subseteq H$ convexo fechado, $x \in H$. Então existe um único $y \in K$ tal que*

$$\|x - y\| = d(x, K).$$

Prova: Ver [4].

$\square$

Teorema 1.2.3. *Sejam H espaço de Hilbert e $M \neq \{0\} \subseteq H$ subespaço vetorial fechado. Para todo $x \in H$, seja $P(x) \in M$ o único elemento de M tal que $\|x - P(x)\| = d(x, M)$. Então*

(i) $x - P(x) \in M^\perp$
(ii) $m \in M$, $x - m \perp M \Rightarrow m = P(x)$

□

Prova: Ver [4].

Do teorema 1.2.3 seguem alguns corolários, que provaremos.

Corolário 1.2.4. *$M \subseteq H$ subespaço vetorial fechado $\Rightarrow M^\perp$ é subespaço vetorial fechado e $H = M \oplus M^\perp$.*

Prova: Como sabemos

$$M^\perp = \{x \in H : \langle x, m \rangle = 0 \ \forall m \in M\} = \cap_{m \in M} f_m^{-1}(\{0\})$$

onde $f_m \in H'$ tal que $f_m(x) = \langle x, m \rangle$, logo $M^\perp$ é fechado. Agora notamos que como P é linear temos que

$$\forall x \in H, \ x = P(x) + P(x - P(x)) \ e \ H = M \cap M^\perp = \{0\} \Rightarrow M \oplus M^\perp.$$

□

Corolário 1.2.5. *Seja M subespaço fechado de H. Então $(M^\perp)^\perp = M$.*

Prova: Seja $m \in M$. Então notamos que

$$\forall m \in M^\perp, \ \langle m, m' \rangle = 0 \Rightarrow m \in (M^\perp)^\perp \Rightarrow M \subseteq (M^\perp)^\perp$$

Agora tomamos $m' \in (M^\perp)^\perp$. Pelo Corolário 1.2.4 temos que $m' = m_1 + m_2$, onde $m_1 \in M$ e $m_2 \in M^\perp$. Então observamos que

$$\forall m \in M^\perp, \ 0 = \langle m', m \rangle = \langle m_1 + m_2, m \rangle = \langle m_1, m \rangle + \langle m_2, m \rangle.$$

E como $\langle m_1, m \rangle = 0$ para todo $m \in M^\perp$, pois $m_1 \in M$ e $m \in M^\perp$, segue que $\langle m_2, m \rangle = 0$ para todo $m \in M^\perp$. Em particular temos que $\langle m_2, m_2 \rangle = 0$, logo $m_2 = 0$ e assim $m' = m_1 \in M$.

□

Corolário 1.2.6. *Seja $A \subseteq H$ subespaço vetorial. Então $(A^\perp)^\perp = \bar{A}$.*

Prova: Pelo Corolário 1.2.5 temos que $(\bar{A}^\perp)^\perp = \bar{A}$. Então notamos que como $A \subseteq \bar{A}$ temos que $\bar{A}^\perp \subseteq A^\perp$. Resta então mostrar a inclusão inversa. Seja então $a_n \in A$, com $a_n \to a$. Logo $a \in \bar{A}$. Seja $b \in A^\perp$, então $\langle a_n, b \rangle = 0, \ \forall n$. Como a aplicação

$$x \mapsto \langle x, b \rangle$$

é contínua vem que

$$a_n \to a \Rightarrow \langle a_n, b \rangle \to \langle a, b \rangle \Rightarrow \langle a, b \rangle = 0 \Rightarrow b \in \bar{A}^\perp \Rightarrow A^\perp \subseteq \bar{A}^\perp.$$

□

Observação 1.2.7. Um fato interessante, e que segue dos resultados acima, é que um subespaço $A \subseteq H$ é denso se e só se $A^\perp = \{0\}$.

Faremos agora o último teorema antes de mostrarmos a Proposição 1.2.1. Este nos dará uma desigualdade muito importante e também muito usada em análise funcional, a Desigualdade de Bessel.

Teorema 1.2.8. *(Desigualdade de Bessel) Se $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é ortonormal em H então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \ \forall x \in H.$$

Prova: Para N arbitrário, seja $M = [e_1, e_2, ..., e_N]$. Então consideramos a projeção ortogonal

$$P : H \to M$$

$$x \mapsto P(x) = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle$$

Com isso teremos que

$$\|P(x)\|^2 \leq \|x\|^2, \text{ pois } x = P(x) + (x - P(x)) \quad \text{e} \quad \|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|x - P(x)\|^2.$$

Mas

$$\|P(x)\|^2 = \Big\| \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|\langle x, e_n\rangle e_n\|^2$$

logo

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \ \forall N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

O Teorema acima nos dá um Corolário muito interessante na medida em que trata da cardinalidade de um conjunto.

Corolário 1.2.9. *Seja $S = \{e_\alpha : \alpha \in I\}$ ortonormal em H, $x \in H$. Então $\{\alpha \in I : \langle e_\alpha, x\rangle \neq 0\}$ é enumerável.*

Prova: Para cada $n \in I$ definimos o conjunto $J_n = \{\alpha \in I : |\langle x, e_\alpha\rangle| \geq \frac{1}{n}\}$. Agora para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N \in J_n$, pela Deigualdade de Bessel, temos

$$\frac{N}{n^2} \leq \sum_{i=1}^{N} |\sum \langle x, e_{\alpha_j}\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow N \leq n^{2\|}\|x\|^2,$$

logo J_n é finito e o número de elementos deste conjunto é menor do que $n^2\|x\|^2$. Logo

$$\{\alpha \in I : \langle e_\alpha, x\rangle \neq 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} J_n \Rightarrow \{\alpha \in I : \langle e_\alpha, x\rangle \neq 0\}$$

é enumerável, pois é uma união enumerável de conjuntos finitos.

$\square$

Agora já temos as ferramentas necessárias para provarmos a Proposição1.2.1.

Prova da Proposição1.2.1: $((i) \Rightarrow (ii))$ Supomos S maximal. Então sabemos pelo Corolário1.2.6 que $\overline{[S]} = ([S]^{\perp})^{\perp}$. Então para mostrar que $\overline{[S]} = H$, basta mostrar que $[S]^{\perp} = \{0\}$. Mas isto decorre do fato de S ser maximal.

$((ii) \Rightarrow (iii))$: seja $x \in H$, pelo Corolário da Desigualdade de Bessel $J = \{e \in S : \langle x, e\rangle \neq 0\}$ é enumerável. Logo podemos considerar J como sendo da forma $J = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$. Agora consideramos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$. Então notamos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n\rangle e_n \Big\|^2 = \sum_{N}^{M} \|\langle x, e_n\rangle e_n\|^2 = \sum_{N}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 \to 0,$$

pois pela Desigualdade de Bessel temos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$. Pelo Critério de Cauchy (H é completo) temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n = y$ converge em H. Temos agora que ver que $y = x$. Para isso notamos que

$$\langle y, e_m\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, e_m = \langle x, e_m\rangle \Rightarrow \langle x - y, e_m\rangle = 0, \ \forall m.$$

Por outro lado temos que se $e \in S \backslash J = \{e_1, e_2, ...\}$, então

$$\langle x, e\rangle = 0, \ \langle y, e\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, e\rangle = 0 \Rightarrow \langle x - y, e\rangle = 0 \ \forall e \in S \Rightarrow x - y = 0,$$

e assim $x = y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.

$((ii) \Rightarrow (iv))$: dados $x, y \in H$, $\{e \in S : \langle x, e\rangle \neq 0\} \cup \{e \in S : \langle y, e\rangle \neq 0\}$ é enumerável. Consideramos então $\{e_1, e_2, ...\}$ uma enumeração deste conjunto. Então por (iii) temos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \ y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n\rangle e_n,$$

com convergência na norma de H. Então sabemos que

$$z \in H \to f(z) = \langle z, y\rangle$$

é um funcional linear contínuo em H, portanto

$$\langle x, y\rangle = f(x) = f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, y\rangle,$$

e como $\langle e_n, y\rangle = \overline{\langle y, e_n\rangle}$, segue que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}.$$

$((iv) \Rightarrow (v))$: Assumindo que (iv) vale, para concluir (v) basta observarmos que $\langle x, e_n\rangle \overline{\langle x, e_n\rangle} = |\langle x, e_n\rangle|^2$. $((v) \Rightarrow (i))$: Supõe que $\langle x, e\rangle = 0 \ \forall \in S$. Então, por (v), $\|x\|^2 = 0$, e assim $x = 0$.

□

1.3 O Teorema de Representação de Riesz e a Definição de Isometria

Definiremos agora o que é uma isometria entre espaços de Hilbert. Uma observação importante é que nosso trabalho depende muito de certas isometrias. Também enunciaremos o Teorema de Representação de Riesz.

Definição 1.3.1. Sejam H, K espaços de Hilbert. Uma isometria é um operador linear $T : H \to K$, tal que

$$\langle T(x), T(y)\rangle_K = \langle x, y\rangle_H \forall x, y \in H$$

O último resultado que enunciaremos será muito importante quando trabalharmos com os estados KMS_β. Este resultado faz uma importante relação entre funcionais lineares e medidas. Este Teorema nós não provaremos.

Teorema 1.3.2. *(Teorema de Representação de Riesz) Se X é compacto e $\mu \in \mathcal{M}(X)$ é uma medida em X no espaço de medidas $\mathcal{X}$. Defina $F_\mu : C_0(X) \to \mathbb{F}$, por*

$$F_\mu(f) = \int f d\mu.$$

Então $F_\mu \in C_0(X)^*$ e a aplicação $\mu \to F_\mu$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{M}(X)$ sobre $C_0(X)^*$.

Prova: Ver [5].

$\square$

Capítulo 2

Álgebras-C* e a definição de Ação Parcial

Neste capítulo daremos a definição de álgebra-C^*, um importante exemplo de álgebra-C^* e o que é uma ação parcial de um grupo G sobre uma álgebra-C^* A.

2.1 Álgebras-C*

Definição 2.1.1. Uma álgebra A sobre $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial complexo equipado com uma operação bilinear e associativa:

$$\bullet : A \times A \to A$$

chamada *operação de multiplicação.*

Uma outra definição que surge quando temos uma norma é a de Álgebra de Banach.

Definição 2.1.2. Uma álgebra normada é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ equipada com uma *função norma*

$$a \in A \mapsto \|a\| \in \mathbb{R}$$

que faz com que A seja um espaço normado, ou seja, para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tenhamos:

(i) $\|a\| \geq 0$
(ii) $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$
(iii) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$, onde $|\lambda|$ indica o módulo do número complexo λ.
(iv) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$,
(v) $\|ab\| \leq \|a\| \; \|b\|$.

Se a álgebra for completa com relação a esta norma então ela será dita uma *álgebra de Banach.*

Dada uma álgebra de Banach A unital e $a \in A$, consideramos o seguinte conjunto

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \cdot 1 - a \ \text{ é inversível}\},$$

que é chamado de conjunto resolvente do elemento a. Nós definiremos como espectro de a, e o denotaremos por $\sigma(a)$, o conjunto $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$.

Definição 2.1.3. Seja A uma Álgebra de Banach. Uma *involução* em A é uma função

$$* : A \to A$$

satisfazendo para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

(i) $(a + b)^* = a^* + b^*$,
(ii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$,
(iii) $(ab)^* = b^* a^*$,
(iv) $(a^*)^* = a$,
(v) $\|a^*\| = \|a\|$.

Uma *álgebra-C^** é uma Álgebra de Banach com involução para a qual vale

(vi) $\|a^* a\| = \|a\|^2 \ \forall a \in A$.

Definição 2.1.4. Um elemento $a \in A$ será dito positivo se

(i) $a^* = a$, isto é, a é autoadjunto e
(ii) $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$.

Definição 2.1.5. Dadas duas álgebras de Banach A e B diremos que a função $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo se φ for linear e além disto

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

para todo $a, b \in A$. O espectro de A é definido como sendo o conjunto $\widehat{A}$ formado por todos os homomorfismos não nulos de A em $\mathbb{C}$.

Dada a definição de espectro de uma Álgebra de Banach, definiremos a *transformada de Gelfand.* Algo que será útil logo mais.

Definição 2.1.6. Dado $a \in A$, definimos $\widehat{a}$ como a aplicação

$$\widehat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$$

$$\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a).$$

A *transformada de Gelfand* é a aplicação definida por

$$k : A \to C_0(\widehat{A})$$

$$a \mapsto \widehat{a}.$$

A teoria de Álgebras de Banach é extremamente delicada e difícil. Entretanto olhando para a sub-classe das álgebras C^* pode-se obter resultados muito mais profundos.

Vejamos um exemplo que será muito importante ao longo de nosso estudo.

Exemplo 2.1.7. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $\mathfrak{B}(H)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos

$$T : H \to H$$

Levando em consideração a estrutura de espaço vetorial complexo em $\mathfrak{B}(H)$ definimos o produto TS, para $T, S \in \mathcal{B}(H)$, como sendo a composição de operadores $T \circ S$. A norma de um operador $T \in \mathfrak{B}(H)$ é definida por

$$\|T\| = \sup\{\|T(\xi)\| : \xi \in H, \|\xi\| \leq 1\},$$

enquanto que a involução de um operador T é definida como o adjunto usual de um operador T, isto é, T^* é o único aperador linear em H que satisfaz

$$\langle T(\xi), \eta\rangle = \langle \xi, T^*(\eta)\rangle \ \forall\ \xi, \eta \in H$$

Exemplo 2.1.8. Seja $A = C_0(\mathbb{R})$. Afirmamos então que definindo em A a involução e a norma como seguem

$$a^*(x) = \overline{a(x)} \text{ e } \|a\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

temos uma álgebra-C*

Definição 2.1.9. Sejam A, B álgebras-C* e $\Phi : A \to B$ um isomorfismo. Diremos que Φ é um $*$-isomorfismo se

$$\Phi(a^*) = \Phi(a)^* \ \forall\ a \in A.$$

Dada a definição de álgebra-C^* já podemos dar a definição de estado, que é tema central deste trabalho.

Definição 2.1.10. Seja A uma álgebra-C* e $\Phi : A \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Então Φ será dito um estado se

$$\Phi(aa^*) \geq 0 \ e\ \Phi(1) = 1, \quad \forall\ a \in A$$

Exemplo 2.1.11. Consideramos A a álgebra-C* do exemplo anterior. Agora dada uma medida de probabilidade μ, consideramos sobre A o funcional

$$\phi : a \mapsto \int_{\mathbb{R}} a(x) d\mu.$$

Então note que

$$\phi(aa^*) = \int_{\mathbb{R}} |a(x)|^2 d\mu \geq 0 \ \text{ e } \ \phi(1) = \int_{\mathbb{R}} 1 d\mu = 1,$$

logo ϕ é um estado sobre A.

Enunciaremos agora um resultado muito bonito e importante na teoria das álgebras-C*.

Teorema 2.1.12. *Seja A uma álgebra-C* comutativa. A transformada de Gelfand $k : A \to C_0(\widehat{A})$ é um *-isomorfismo de A sobre $C_0(\widehat{A})$.*

Prova: Ver Teorema 8.2 de [1].

□

2.2 A definição de Ação Parcial

Definição 2.2.1. Uma *ação parcial* de um grupo G sobre uma álgebra-C* A é um par

$$\Theta = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$$

tal que, para cada $g \in G$, D_g é um ideal fechado de A,

$$\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$$

é um $^*-$isomorfismo, e para todo $g, h \in G$ tem-se

(i) $D_e = A$ e θ_e é o automorfismo identidade de A,
(ii) $\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, e
(iii) $\theta_g(\theta_h(a)) = \theta_{gh}(a)\ \forall a \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$.

Exemplo 2.2.2. Seja X um conjunto qualquer e $f : X \to X$. Então consideramos a ação global abaixo de $\mathbb{Z}$ sobre X

$$\theta : \mathbb{Z} \to X$$

$$f_n(x) = f \circ ... \circ f(x).$$

Agora seja $Y \subseteq X$, consideramos $Y_n = Y \cap f_n(Y)$ e

$$\theta_n : X_{-n} \to X_n,$$

onde $\theta_n = f_n|_{X_{-n}}$. Deste modo temos uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre X.

Vejamos agora um exemplo que se enquadra no contexto de álgebra-C*

Exemplo 2.2.3. A ação parcial acima induz uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $C(X)$

$$\Theta = (\{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}; \{\theta_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$$

onde $D_n = C_0(\Delta_n)$ e

$$\theta_n : f \in D_{-n} \mapsto f \circ \alpha_{-n} \in D_n.$$

Capítulo 3

Algumas idéias sobre o Grupo Livre e o espaço $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$

Neste capítulo veremos alguns resultados que serão importantes nos próximos capítulos.

3.1 Como construir o Grupo Livre.

Começamos considerando um conjunto enumerável $G = \{x_\imath : \imath \in \mathbb{N}\}$. Então a partir de G, definimos o Grupo Livre $\mathbb{F}$ como sendo o grupo gerado por G. De uma maneira menos abstrata: definindo $G^{-1} = \{x_\imath^{-1} : x_\imath \in G\}$, teremos que $\mathbb{F}$ é o conjunto de todas as concatenações finitas , obtidas a partir do alfabeto $G \cup G^{-1}$.

Faremos agora algumas definições que serão muito úteis mais adiante.

Definição 3.1.1. • Chamaremos de palavra toda sequência, finita ou infinita, $\omega = (x_1, x_2, ...)$, onde cada $x_i \in G$
• O comprimento de ω, denotado por $|\omega|$, é o número de coordenadas de ω. (pode ser finito ou infinito)
• Para cada i, nós denotaremos por ω_i a i-ésima coordenada de ω, onde $\omega = (\omega_1, \omega_2 ...)$.
• Dada uma palavra ω e um inteiro n, com $0 \leq n \leq |\omega|$, nós denotaremos por $\omega|_n$ a $sub-palavra$ de ω definida por $\omega|_n = (\omega_1, \omega_2 ..., \omega_n)$.

Se $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ é uma palavra finita nós identificaremos ω com o produto formal de suas coordenadas, $\omega = \omega_1 ... \omega_n$. A palavra vazia será identificada com a unidade do grupo $\mathbb{F}$. Também denotaremos por $\mathbb{F}_+$ o conjunto de todas as palavras de comprimento finito.

Definição 3.1.2. Dada uma palavra ω nós denotaremos por $[[\omega]]$ o subconjunto de $\mathbb{F}_+$ consistindo de todas as subpalavras de ω. Logo

$$[[\omega]] = \{e, \omega_1, \omega_1\omega_2, ..., \omega_1 ... \omega_n\}.$$

Consideramos agora uma aplicção $A : G \times G \to \{0,1\}$ que pode ser vista como uma matriz $A = \{A(i,j)\}_{i,j \in G}$ com entradas no conjunto $\{0,1\}$, finita ou infinita (depende do fato de G ser finito ou infinito, respectivamente), com linhas não identicamente nulas.

Definição 3.1.3. Uma palavra ω será dita admissível se $A(\omega_i, \omega_{i+1}) = 1$, para todo i. Se $|\omega| < 2$ então ω é admissível por definição. O conjunto das palavras admissíveis de comprimento finito será denotado por P_A ($P_A \subseteq \mathbb{F}_+$).

Faremos agora mais algumas definições que usaremos mais adiante.

Definição 3.1.4. Seja $2^{\mathbb{F}}$ o conjunto das partes de $\mathbb{F}$. Um elemento $\xi \in 2^{\mathbb{F}}$ é dito convexo se

$$t,\ s\ \in \xi,\quad |t^{-1}s| = |t^{-1}r| + |r^{-1}s|,\ r \in \mathbb{F} \Rightarrow\ r \in \xi.$$

3.2 Uma Topologia para $2^{\mathcal{G}}$

Uma observação importante é que dado um conjunto $\mathcal{G}$ enumerável, e sendo $2^{\mathcal{G}}$ o conjunto das partes de $\mathcal{G}$, podemos colocar em $2^{\mathcal{G}}$ uma topologia, chamada de *Topologia Fraca*. Daremos uma breve idéia de como é essa topologia.

Começamos observando que existe uma bijeção entre os conjuntos $2^{\mathcal{G}}$ e $\mathcal{F} = \{f : \mathcal{G} \to \{0,1\}\}$ dada da seguinte maneira

$$\phi : 2^{\mathbb{F}} \to \mathcal{F}$$

$$\phi(A)(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Logo para obtermos uma topologia em $2^{\mathcal{G}}$ basta induzirmos uma topologia em $\mathcal{F}$.

Dados $\varepsilon > 0$, $X \subseteq \mathcal{G}$ finito e $f \in \mathcal{F}$, consideramos o seguinte conjunto

$$V(X, f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{F} : |f(x) - g(x)| < \varepsilon,\ \forall\ x\ \in\ X\}.$$

Então definimos τ como sendo a topologia gerada pelos conjuntos da forma $V(X, f, \varepsilon)$.

Com isto podemos induzir uma topologia em $2^{\mathcal{G}}$, definindo os abertos de $2^{\mathcal{G}}$ como a imagem inversa dos abertos de $\mathcal{F}$, ou seja a imagem inversa dos conjuntos da forma $V(X, f, \varepsilon)$ e de suas uniões uniões quaisquer de interseções finitas.

Agora consideramos $X,\ Y \in \mathcal{G}$ finitos disjuntos. Então tomamos a união desses dois conjuntos $X \cup Y$, $\varepsilon < 1$ e $f(z) = 1_X$, onde 1_X é a funções caracteristica de X . Agora consideramos o seguinte aberto

$$V(X \cup Y, f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{F} : f(z) = g(z)\ \forall\ z\ \in\ X \cup Y\}.$$

Consideramos agora o seguinte conjunto

$$V(X, Y) = \{C \in 2^{\mathcal{G}} : X \subseteq C,\ Y \cap C = \emptyset\},$$

então notamos que se $g \in V(X \cup Y, f, \varepsilon)$ temos que $g(x) = 1$ para todo $x \in X$ e $g(y) = 0$ para todo $y \in Y$. E como temos que se $C \in V(X, Y)$, segue que $\phi(C)(x) = 1$ para todo $x \in \ X$ e $\phi(C)(y) = 0$ para todo $y \in Y$, logo $\phi(V(X,Y)) \subseteq V(X \cup Y, f, \varepsilon)$. Também temos que se $g \in V(X \cup Y, f, \varepsilon)$, sendo $\mathcal{G}$ enumerável, podemos associar um conjunto C, tal que $C \in V(X, Y)$ e $\phi(C) = g$. Logo temos que $\phi(V(X,Y)) = V(X \cup Y, f, \varepsilon)$, portanto segue $V(X, Y)$ é aberto em $2^{\mathcal{G}}$.

Uma observação importante e que poderá ser usada ao longo deste texto é que dada $g \in \mathcal{F}$, sempre existem X, $Y \in \mathcal{G}$ finitos e $\varepsilon < 1$, tais que $g \in V(X \cup Y, f, \varepsilon)$, onde $f(z) = 1_X(z)$. Logo dado $C \in 2^{\mathcal{G}}$, sempre existe $V(X, Y)$ tal que $C \in V(X, Y)$.

Observação 3.2.1. O mesmo processo acima pode ser usado para se obter uma topologia para $2^{\mathbb{F}}$, onde $\mathbb{F}$ é o grupo livre gerado pelo conjunto enumerável $\mathcal{G}$

Definição 3.2.2. Seja $\widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$ o subconjnto fechado do espaço topológico $2^{\mathbb{F}}$ dado por

$$\widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}} = \left\{ \begin{array}{ll} \xi \in 2^{\mathbb{F}}: & e \in \xi,\ \xi \text{ é convexo} \\ & \text{se } g \in \xi \text{ existe no máximo um } x \text{ tal que } gx \in G, \text{ e} \\ & \text{se } g \in G,\ y \in G, \text{ e } gy \in \xi \text{ então } gx^{-1} \in \xi \Leftrightarrow A(x,y) = 1 \end{array} \right\}$$

As proposições abaixo são importantes para a caracterização de $\widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$ e nos darão uma definição que será muito importante nos próximos capítulos e uma importante caracterização dos elementos de $\widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$.

Proposição 3.2.3. *Seja $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$. Então existe uma única palavra admissível $\sigma(\xi)$ tal que*

$$\xi \cap \mathbb{F}_+ = [[\sigma(\xi)]].$$

Prova: Ver Teorema 5.4 de [3].

Teorema 3.2.4. *Se $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$ e $g \in \xi$ então*

(a) $g = \alpha\beta^{-1}$ onde $|g| = |\alpha| + |\beta|$
(b) α é uma subpalavra finita de $\sigma(\xi)$
(c) β é uma palavra admissível tal que ou $\beta = e$ ou $\beta_{|\beta|} \in R_\xi(\alpha)$

Prova: Ver Teorema 5.8 de [3].

Definição 3.2.5. Seja $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$. A palavra $\sigma(\xi)$ mencionada acima será chamada o *stem* de ξ. Nós diremos que ξ é limitada se o seu *stem* $\sigma(\xi)$ for de comprimento finito. Caso contrário ξ será dito ilimitado.

Definição 3.2.6. Seja $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$ e seja $t \in \xi$. A *raiz de t relativa a ξ*, denotada por R_ξ , é o subconjunto de G definido por $R_\xi = \{x \in G : tx^{-1} \in \xi\}$.

Observação 3.2.7. Suponha que $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$ e seja $t \in \xi$. Como sabemos da definição de $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$, existe no máximo um $j \in G$ tal que $tj \in \xi$. Suponhamos, por um momento, que tal j existe. Mais uma vez pela definição de $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$, temos que $tx^{-1} \in \xi$ se e somente se $A(x,j) = 1$. Portanto a *raiz* de t relativa a ξ é dado por $R_\xi(t) = \{x \in G : A(x,j) = 1\}$. A última afirmação é importante na medida em que ela mostra que, identificando cada coluna de A como um elemento de $\Sigma_A \subseteq 2^G$, onde Σ_A é fecho das colunas de A em 2^G, teremos que $R_\xi(t)$ coincide com a j-ésima coluna de A.

A observação acima dá uma outra caracterização para R_ξ, e é bem interessante na medida que ela faz uso explícito da definição de $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$.

3.3 Uma Topologia para $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$

Nesta seção tentaremos descrever uma topologia para $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$, exibindo, para cada $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$, um sistema fundamental de vizinhanças em termos de seu stem e de sua raiz.

Proposição 3.3.1. *Seja $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$, e assuma que $\omega = \sigma(\xi)$ é infinito. Defina*

$$V_n = \{\eta \in \widetilde{\Omega}_{\tau o_A} : \omega|_n \in \eta\}.$$

Então a coleção $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças para ξ.

Prova: Pela seção anterior temos que cada V_n é aberto em $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$, e contém ξ.

Agora seja U uma vizinhança de ξ. Sabemos então que U contém uma vizinhança de ξ da forma

$$W = \{\eta \in \widetilde{\Omega}_{\tau o_A} : \ s_1, ..., s_p \in \eta, \ t_1, ..., t_q \notin \eta\},$$

onde $s_1, ..., s_p, t_1, ..., t_q \in \mathbb{F}$. Como $\xi \in W$ segue que $s_1, ..., s_p \in \xi$ e $t_1, ..., t_q \notin \xi$.

Consideramos agora $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \max\{|s_1|, ..., |s_p|, |t_1|, ..., |t_q|\}$. Afirmamos então que V_n está contido em W. Suponha então que $\eta \in V_n$, isto é, $\omega|_n \in \eta$. Então

$$\omega|_n \in \eta \cap \mathbb{F}_+ = [[\sigma(\eta)]].$$

Com isso temos que $\sigma(\eta)$ e $\sigma(\xi)$ coincidem até a n-ésima coordenada. Nosso objetivo agora é mostrar que $s_i \in \eta$ para $1 \leq i \leq p$ e que $t_j \notin \eta$ para $1 \leq j \leq q$.

Para isso notamos que, por (3.2.4), cada s_i é da forma $s_i = \alpha\beta^{-1}$, onde α é subpalavra finita de $\sigma(\xi)$ e $\beta = e$ ou $\alpha\beta_{|\beta|}^{-1} \in \xi$. Então como n é maior do que $|s_i|$ e $\sigma(\eta)$ coincide com $\sigma(\xi)$ até a n-ésima coordenada temos que α é subpalavra de $\sigma(\eta)$. Basta então mostrar que β também satisfaz (3.2.4.*iii*), para isso suponhamos que $\beta_{|\beta|} \in R_\xi(\alpha)$, ou seja, que $\alpha\beta_{|\beta|^{-1}} \in \xi$. Como o stem de ξ é infinito, temos que existe $y \in \mathcal{G}$, tal que $\alpha y \in \xi$, e assim pela definição de $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$, segue que $A(y, \beta_{|\beta|}) = 1$. Agora observamos que como $\sigma(\xi)$ e $\sigma(\eta)$ coincidem até a n-ésima coordenada, $|\alpha y| \leq n$, e $\alpha y \in \mathbb{F}_+ \cap \xi = [[\sigma(\xi)]]$, então $\alpha y \in \mathbb{F}_+ \cap \eta = [[\sigma(\eta)]]$. Mais uma vez pela definição de $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$ segue que $\alpha\beta_{|\beta|^{-1}} \in \eta$, ou seja, $\beta_{|\beta|} \in R_\eta(\alpha)$.

Para vermos que $t_j \notin \eta$ o raciocínio é análogo ao acima.

$\square$

Proposição 3.3.2. *Seja $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$ um elemento limitado e ω seu stem. Dados X, Y e Z subconjuntos finitos de $\mathcal{G}$, com $X \subseteq R_\xi(\omega)$, $Y \cap R_\xi(\omega) = \emptyset$ e defina*

$$W_{X,Y,Z} = \left\{ \begin{array}{ll} \eta \in \widetilde{\Omega}_{\tau o_A}, & \omega \in \eta \\ & \omega x^{-1} \in \eta, \;\; \forall\ x \in \ X \\ & \omega y^{-1} \notin \eta, \;\; \forall\ y \in \ Y \\ & \omega z \notin \eta, \qquad \forall\ z \in \ Z \end{array} \right\}.$$

Então a coleção $\{W_{X,Y,Z}\}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças para ξ em $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$.

Prova: Ver Teorema 6.2 de [2].

Capítulo 4

Estados KMS para Álgebras-C* Graduadas

Neste capítulo veremos as definições de álgebra graduada e estados KMS e alguns resultados sobre estados KMS em uma álgebra G-graduada.

4.1 Álgebras G-graduadas

Seja B uma álgebra-C* e seja G um grupo discreto. Nós diremos que B é graduada sobre G, ou simplesmente G-graduada se existe uma família $\{B_g\}_{g\in G}$ de subespaços lineares fechados de B tais que, para todo $g, h \in G$,

(i) $B_g B_h \subseteq B_{gh}$,
(ii) $B_g^* = B_{g^{-1}}$, e
(iii) $\oplus_{g\in G} B_g$ é denso em B.

A partir de agora nós fixaremos B como sendo uma álgebra-C* G-graduada. Nós também fixaremos um grupo fortemente contínuo $\sigma = \{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, a um parametro, de automorfismos de B tal que cada σ_t restrita a cada B_g é um múltiplo da identidade. Logo para cada $g \in G$, existe um número real positivo $N(g)$ tal que

$$\sigma_t(b) = N(g)^{it} b,\ t \in \mathbb{R},\ b \in B_g. \tag{4.1.1}$$

Nós também assumiremos que N é um homomorfismo do grupo G sobre o grupo multiplicativo dos números reais positivos R_+^*

Obviamente σ é determinado por N. Outro fato importante é que não necessariamente existe um grupo σ satisfazendo (4.1.1).

Exemplo 4.1.1. Seja $A = C_0(\mathbb{R})$. Dado $a \in A$, consideramos

$$\sigma_t(a(x)) = e^t a(x).$$

Notamos que $\sigma_{t+s}(a) = \sigma_t(\sigma_s(a))$. Outra observação importante é que fixado $b \in A$ a aplicação

$$t \mapsto \sigma_t(b),$$

estende-se a uma aplicação inteira.

4.2 Os Estados KMS

Faremos agora algumas definições para facilitar nossa escrita.

Definição 4.2.1. Um elemento $b \in B$ é dito *inteiro analítico* se a aplicação

$$t \ \in \ \mathbb{R} \ \mapsto \ \sigma_t(b)$$

estende-se a uma função inteira sobre o plano complexo. Por simplicidade nós nos referiremos aos elementos inteiros analíticos como elementos *analíticos.*

Definição 4.2.2. Um estado ψ sobre B é dito um estado $\sigma - KMS$ *no valor* $\beta \in (0, \infty)$- *a temperatura inversa na terminologia de Física Matemática-* ou simplesmente um *estado* KMS_β se para todo par de elementos a, b em uma sub-álgebra-C* (de B) de elementos analíticos que é densa e σ-invariante, tem-se

$$\psi(a\sigma_{i\beta}(b)) = \psi(ba) \tag{4.2.1}$$

Pelo resultado 5.3.7 de [8] tem-se que, para um estado KMS, a identidade acima vale para todo $a \in B$ e todo elemento analítico b em B.

No caso especial em que $\beta = \infty$, os estados KMS_β são chamados *estados fundamentais* e eles satisfazem

$$\sup_{Imz \geq 0} |\psi(a\sigma_z(b))| < \infty, \ \forall \ a \ e \ b \in B \tag{4.2.2}$$

Observação 4.2.3. Dado $g \in G$ segue de (4.1.1) que cada $b \in B_g$ é analítico e mais ainda

$$\sigma_z(b) = N(g)^{iz} b, \tag{4.2.3}$$

para $z \in \mathbb{C}$. Segue por linearidade que $\oplus_{g \in G} B_g$ consiste de elementos analíticos. Este último conjunto é claramente uma sub-álgebra-C* densa de B

O resultado abaixo é uma caracterização dos estados KMS sobre B.

Proposição 4.2.4. *Suponha que B é G-graduada e que σ satisfaz (4.1.1) para um homomorfismo de grupos $N : G \to \mathbb{R}_+^*$. Seja ψ um estado sobre B e seja $\beta \in (0, \infty)$. Então*

(i) ψ é um estado $KMS_\beta \Leftrightarrow \psi(ab) = N(g)^\beta \psi(ba)$ sempre que $a \in B$, $g \in G$ $b \in B_g$.
(ii) ψ é um estado fundamental $\Leftrightarrow \psi(BB_g) = \{0\}$ sempre que $N(g) < 1$.

Prova: Começamos por (i).($\Rightarrow$) Consideramos inicialmente $z = i\beta$. Então por (4.2.3) segue que

$$\sigma_{i\beta}(b) = N(g)^{-\beta}b.$$

Suponha que ψ é um estado KMS_β e seja $a \in B$ e $b \in B_g$. Nós então temos

$$\psi(ba) = \psi(a\sigma_{i\beta}(b)) = N(g)^{-\beta}\psi(ab),$$

provando a primeira implicação.

($\Leftarrow$) Suponha agora ψ satisfaz a igualdade em (i). Dado $a \in B$ e $b \in B_g$ nós então temos, por (4.2.3), que $\sigma_{i\beta}(b) = N(g)^{ii\beta}(b) = N(g)^{-\beta}b$ e isto implica que

$$\psi(ba) = N(g)^{-\beta}\psi(ab) = \psi(a\sigma_{i\beta}(b)),$$

provando que (4.1.1) vale para $b \in \oplus_{g\in G}B_g$, por lineridade. Sendo que $\oplus_{g\in G}B_g$ é uma sub-álgebra-C* de elementos analíticos densa em B nós temos que ψ é um estado KMS_β.

Vamos agora mostrar (ii).($\Rightarrow$) Dado $a \in B$ e $b \in B_g$ nós temos

$$|\psi(a\sigma_z(b))| = |N(g)^{iz}\psi(ab)| = N(g)^{-Imz}|\psi(ab)| \tag{4.2.4}$$

Agora observamos que a aplicação

$$z \in \{z \in \mathbb{C} : Imz \geq 0\} \mapsto N(g)^{-Imz}|\psi(ab)|, \tag{4.2.5}$$

é limitada se e somente se ou $N(g) \geq 1$ ou $\psi(ab) = 0$. Logo se ψ é um estado fundamental nós devemos ter $\psi(ab) = 0$.

($\Leftarrow$) Se $\psi(BB_g) = 0$ sempre que $N(g) < 1$, então (4.2.5) é sempre limitada. Logo segue, por lineridade, que (3.1.3) vale para qualquer $b \in \oplus_{g\in G}B_g$. Sendo que o último conjunto é denso, nós vemos que, ψ é um estado fundamental.

$\square$

Definição 4.2.5. Damos o nome de Esperança Condicional Positiva de uma álgebra-C* A sobre uma sub-álgebra-C* B para uma aplicação $E : A \to B$ que satisfaz:

(i) E é linear e sobrejetiva.
(ii) E é positiva, isto é, se $a \geq 0$ então $E(a) \geq 0$.
(iii) E é unitária, isto é, $\|E\| = 1$.
(iv) $E^2 = E$. (*Idempotente*)
(v) $E(b_1ab_2) = b_1E(a)b_2$ $\forall$ $a \in A$ e $\forall$ $b_1, b_2 \in B$.

Definição 4.2.6. B é dita *topologicamente G-graduada* se existe uma esperança condicional positiva contrativa

$$E : B \to B_e$$

que se anula para todo B_g, com $g \neq e$.

Observação 4.2.7. Uma observação importante e que usaremos na próxma proposição, e que segue do Teorema 3.5 de [2] é a seguinte: $\oplus_{g\in G}B_g$ é uma *soma direta topológica* no sentido que as projeções canônicas sobre os B_g se estendem a aplicações lineares limitadas

$$E_g : B \to B_g.$$

Se B é topologicamente G-graduada e nos é dado um estado ϕ sobre B_e, a composição $\psi := \phi \circ E$ é um estado sobre B.

Proposição 4.2.8. *Seja B topologicamente G-graduada com esperança condicional E e suponha que σ satisfaz* (4.1.1) *para um homomorfismo de grupos $N : G \to \mathbb{R}_+^*$. Seja ϕ um estado sobre B_e e seja $\psi = \phi \circ E$. Também seja $\beta \in (0, \infty)]$ Então*

(i) ψ é um estado $KMS_\beta \Leftrightarrow \phi(ab) = N(g)^\beta \phi(ba)$ para todo $g \in G$, $a \in B_{g^{-1}}$, e $b \in B_g$.
(ii) ψ é um estado fundamental $\Leftrightarrow \phi(B_{g^{-1}}B_g) = \{0\}$ sempre que $N(g) < 1$.

Prova: (i) $(\Rightarrow)$ segue diretamente de $(4.2.4.i)$. Para a recíproca de (i) seja $a \in B$ e $b \in B_h$. Começamos considerando primeiro o caso em que $a \in \oplus_{g\in G}B_g$, então observamos que

$$a = \sum_{b_g \in B_g,\ g\in G} b_g \Rightarrow E(ab) = E\Big(\Big(\sum_{b_g \in B_g,\ g\in G} b_g\Big)(b)\Big) = \sum_{g\in G}(E(b_g b)),$$

e que como E é uma esperança condicional contrativa temos que $E(b_g b) = 0$, para todo $g \in G$ com $g \neq h^{-1}$. E se $g = h^{-1}$ temos $b_g b \in B_e$, e então $E(b_{h^{-1}}b) = b_{h^{-1}}b = E_{h^{-1}}(a)b$. Portanto

$$\psi(ab) = \phi(E(ab)) = \phi(E_{g^{-1}}(a)b) = N(g)^\beta \phi(bE_{g^{-1}}(a)) = N(g)^\beta \phi(E(ba)).$$

Como $\psi = \phi \circ E$ segue que $\psi(ab) = N(g)^\beta \psi(ba)$. Portanto, por $(4.2.4.i)$, ψ é um estado KMS_β.

Agora vamos mostrar (ii). Suponhamos então que ψ é um estado fundamental. Logo por $(4.2.4.i)$ temos que $\psi(BB_g) = \{0\}$ sempre que $N(g) < 1$. Como $E(B_{g^{-1}}B_g) \subseteq E(B_e) = B_e$, pois $B_gB_h \subseteq B_{gh}$ e $E|_{B_e} = Id$. Então tomando $a \in B_{g^{-1}}$ e $b \in B_g$ teremos que

$$0 = \psi(ab) = \phi(E(ab)) = \phi(ab),$$

logo $\phi(ab) = 0$, e assim $\phi(B_{g^{-1}}B_g) = 0$.

Para a recíproca de (ii) tomamos $a \in \oplus_{g\in G}B_g$ e $b \in B_g$ com $N(g) < 1$. Nós então temos

$$\psi(ab) = \phi(E(ab)) = \phi(E(a)b) = \phi(E_{g^{-1}}(a)b) = 0,$$

pois $E_{g^{-1}}(a) \in B_{g^{-1}}$ e $E_{g^{-1}}(a)b \in B_e$, logo

$$\phi(\oplus_{h\in G}B_hB_g) = \{0\} \Rightarrow \phi(BB_g) = \{0\},$$

pela densidade de $\oplus_{h\in G}B_h$.

$\square$

4.3 Álgebras Graduadas por Ações Parciais

Ao longo desta seção trabalharemos com um grupo G, uma álgebra-C* A e uma ação parcial Θ, do grupo sobre a álgebra-C*. Agora denotamos por $\mathcal{L}$ o conjunto de todas funções $f : G \to A$ tal que $f(g) \in D_g$ para todo $g \in G$ e tal que $\sum_{g\in G} \|f(g)\| < \infty$. Claramente $\mathcal{L}$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\| = \sum_{g\in G} \|f(g)\|,\ f \in \mathcal{L}.$$

É muitas vezes conveniente denotar por $\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g$ a função f tal que $f(g) = a_g$.

Empregando esta notação nós definimos uma estrutura de álgebra-* de Banach sobre $\mathcal{L}$ por meio das operações

$$(a\delta_g) * (b\delta_h) = \theta_g(\theta_g^{-1}(a)b)\delta_{gh} \text{ e } (a\delta_g)^* = \theta_g^{-1}(a^*)\delta_{g^{-1}} \tag{4.3.1}$$

para $a \in D_g$ e $b \in D_h$.

Definição 4.3.1. O produto cruzado da álgebra-C* A pelo grupo G sobre a ação parcial Θ é a álgebra-C* envolvente da Álgebra-* de Banach $\mathcal{L}$. Nós denotaremos ela por $A \rtimes_\Theta G$, ou simplesmente $A \rtimes G$ se Θ é subentendida.

Proposição 4.3.2. *A coleção de subespaços $\{B_g\}_{g\in G}$ de $A \rtimes G$, onde $B_g = D_g\delta_g$, faz de $A \rtimes G$ uma álgebra topologicamente G-graduada.*

Prova: Ver Teorema 2.3 de [2].

□

Observação 4.3.3. Observamos então que A é canonicamente isomorfa a B_e via a aplicação $a \mapsto a\delta_e$. Nós, assim, identificaremos A e B_e e pensaremos na esperança condicional como a única aplicação limitada $E : A \rtimes G \to A$ tal que

$$E\Big(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\Big) = a_e.$$

Notamos que como $A \rtimes G$ é topologicamente G-graduada basta conhecer E em $\oplus_{g\in G} B_g$, pois o último conjunto é denso em $A \rtimes G$.

Nos preocuparemos agora com a questão de definir a dinâmica sobre $A \rtimes \mathcal{G}$ em termos de um dado homomorfismo de grupos N.

Proposição 4.3.4. *Seja $N : G \to \mathbb{R}_+^*$ um homomorfismo de grupos. Então existe um grupo σ, de *-automorfismos de $A \rtimes \mathcal{G}$, a parâmetros fortemente contínuos, tal que*

$$\sigma_t(b) = N(g)^{it} b$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $g \in G$, $b \in B_g$.

Prova: Para cada $t \in \mathbb{R}$ considere o operador linear σ_t sobre $\mathcal{L}$ dado por

$$\sigma_t\Big(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\Big) = \sum_{g\in G} N(g)^{it} a_g\delta_g.$$

Começamos mostrando que cada σ_t é uma bijeção de $\mathcal{L}$. Para isso observamos que

$$\Big\|\sigma_t\Big(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{g\in G} N(g)^{it} a_g\delta_g\Big\| = \sum_{g\in G} \|N(g)\|^{it}\|a_g\delta_g\| = \sum_{g\in G} \|a_g\delta_g\|,$$

onde a segunda e a terceira igualdade seguem da definição da norma de $\mathcal{L}$, ou seja, $\|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\| = \sum_{g\in G}\|a_g\delta_g\|$, e assim

$$\Big\|\sigma_t\Big(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\Big\|.$$

Logo σ_t é uma isometria e consequentemente é injetiva. Para ver que é sobrejetiva notamos que dado $\Sigma_{g\in G} a_g\delta_g \in \oplus_{g\in G} B_g$, temos que

$$\sigma_t\Big(\sum_{g\in G} N(g)^{-it} a_g\delta_g\Big) = \sum_{g\in G} a_g\delta_g.$$

Nosso próximo passo é mostrar que σ_t é um *-isomorfismo. Para isso observamos que

$$(\sigma_t(a_g\delta_g))^* = (N(g)^{it} a_g\delta_g)^* = N(g)^{it}\theta_g^{-1}(a_g^*)\delta_{g^{-1}} = \sigma_t((a_g\delta_g)^*).$$

Para o caso de tomarmos um elemento da forma $\sum_{g\in G} a_g\delta_g$ o raciocínio é muito parecido com o acima.

Por fim observamos que considerando σ como uma aplicação de grupos

$$\sigma : \mathbb{R} \to Aut(\mathcal{L}),$$

$$t \mapsto \sigma_t$$

teremos que este é um homomorfismo fortemente contínuo. De fato temos que $\sigma_t\sigma_s = \sigma_{t+s}$ e, que dado $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_t - \sigma_{t_0} = \sigma_{t-t_0}\circ\sigma_{t_0} - \sigma_{t_0-t}\circ\sigma_t,$$

aí quando $t \to t_0$ temos que

$$|\sigma_{t-t_0}\circ\sigma_{t_0} - \sigma_{t_0-t}\circ\sigma_t| \to |\sigma_0\circ\sigma_{t_0} - \sigma_0\circ\sigma_{t_0}| = 0.$$

Logo σ é fortemente contínuo. O resultado agora segue estendendo cada σ_t a um isomorfirmo-* sobre $A \rtimes \mathcal{G}$.

$\square$

O resultado acima nos coloca no contexto da seção 4.2 e então nós podemos aplicar (4.2.4) para caracterizar os estados KMS sobre $A \rtimes G$. O resultado seguinte facilita verificar as condições de (4.2.4).

Proposição 4.3.5. *Seja Θ uma ação parcial do grupo G sobre uma álgebra-C^* A. Considerando a gradução standard $\{B_g\}_{g\in G} = \{D_g\delta_g\}_{g\in G}$ de $A \rtimes G$. Seja $N : G \to \mathbb{R}_+^*$ um homomorfismo de grupos.*

(i) Se $\beta \in (0,\infty)$ e $g \in G$ então

$$\phi(ab) = N(g)^{\beta}\phi(ba),\ \forall a \in B_{g^{-1}},\ b \in B_g$$

se e somente se ϕ é um traço e

$$\phi(\theta_g(a)) = N(g)^{-\beta}\phi(a),\ \forall a \in D_g.$$

(ii) $B_{g^{-1}}B_g = D_{g^{-1}}$.

Prova: Ver Teorema 2.5 de [2].

□

Capítulo 5

Álgebras Graduadas pelo Grupo Livre

A partir de agora nós assumiremos que o grupo que gradua nossa álgebra é o grupo livre gerado pelo conjunto enumerável $\mathcal{G}$, obtido conforme vimos acima. Daremos agora a definição de graduação semi-saturada e ortogonal.

Definição 5.0.6. Uma graduação $\{B_g\}_{g\in\mathbb{F}}$ de uma álgebra-C* é dita:

(i) semi-saturada se $B_{gh} = B_g B_h$ sempre que $g, h \in \mathbb{F}$ são tais que

$$|gh| = |g| + |h|.$$

(ii) ortogonal se $B_x^* B_y = \{0\}$ sempre que $x, y \in \mathcal{G}$ e $x \neq y$.

O próximo resultado deste capítulo é um lema que será peça chave em nosso trabalho, na medida em que dá uma importante caracterização dos estados KMS sobre uma álgebra-C* $\mathbb{F}$-graduada.

Lema 5.0.7. *Seja B uma álgebra-C* que é $\mathbb{F}$-graduada por meio de uma graduação semi-saturada e ortogonal $\{B_g\}_{g\in\mathbb{F}}$. Também seja σ um grupo, a um-parâmetro fortemente contínuo, de automorfismos de B satisfazendo* (4.1.1) *para algum homomorfismo de grupos $N : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_+^*$. Suponha que $N(x) > 1$ para todo $x \in \mathcal{G}$ e seja ψ um estado KMS_β sobre B, para $\beta \in (0, \infty]$. Então $\psi(B_g) = \{0\}$, para todo $g \in \mathbb{F}$ com $g \neq e$.*

Prova: Devido ao fato de a prova ser muito extensa recomendamos ao leitor ver o Teorema 3.2 de [2] . Apesar de longa a demonstração é de fácil compreensão.

□

No caso topologicamente graduado nós podemos usar (4.2.4) e (5.0.7) para obter uma caracterização muito precisa dos estados KMS:

Teorema 5.0.8. *Seja B uma álgebra-C^* que é topologicamente $\mathbb{F}$-graduada por meio de uma graduação semi-saturada e ortogonal $\{B_g\}_{g\in\mathbb{F}}$. Também seja σ um grupo, a um-parâmetro fortemente contínuo, de automorfismos de B satisfazendo (4.1.1) para um dado homomorfismo de grupos $N : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_+^*$. Suponha que $N(x) > 1$ para todo $x \in \mathcal{G}$ e seja $\beta \in (0, \infty]$. Então a aplicação*

$$\phi \mapsto \phi \circ E$$

define um homomeorfismo afim do conjunto S, definido abaixo, sobre o conjunto dos estados KMS_β sobre B.

(i) Se $\beta \in (0,\infty)$, então S é o conjunto de traços sobre B_e tais que

$$\phi(ab) = N(x)^\beta \phi(ba),\ \forall\ x \in \mathcal{G},\ a \in B_{x^{-1}},\ b \in B_x.$$

(ii) Se $\beta = \infty$ então S é o conjunto de estados ϕ de B_e tais que

$$\phi(B_x B_{x^{-1}}) = \{0\},\ \forall\ x \in \mathcal{G}$$

Prova: Começamos assmindo que ϕ pertence ao conjunto descrito em (i). Nós então afirmamos que

$$\phi(ab) = N(g)^\beta \phi(ba),\ \forall\ g \in \mathbb{F},\ a \in B_{g^{-1}},\ b \in B_g.$$

Claramente isto vale para $g = e$, pois ϕ é um traço sobre B_e. Agora consideramos o caso em que $g = x^{-1} \in \mathcal{G}^{-1}$. Então seja $a \in B_{g^{-1}}$ e $b \in B_g$. Assim $b \in B_{x^{-1}}$ e $a \in B_x$, então $\phi(ba) = N(x)^\beta \phi(ab)$, de onde nós obtemos

$$\phi(ab) = N(x)^{-1.\beta}\phi(ba) = N(x^{-1})^\beta \phi(ba) = N(g)^\beta \phi(ba).$$

Agora seguindo por indução sobre $|g|$, seja $|g| > 1$ e escrevemos $g = hx$ com $x \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$ e $|g| = |h| + 1$. Dado $a \in B_{g^{-1}}$ e $b \in B_g$ suponha que $b = b_h b_x$ onde $b_h \in B_h$ e $b_x \in B_x$. Então $ab_h \in B_{x^{-1}}$ e

$$\phi(ab) = \phi(ab_h b_x) = N(x)^\beta \phi(b_x a b_h) = ...$$

Agora notando que $b_x a \in B_{h^{-1}}$, por hipótese de indução, temos que a igualdade acima fica

$$... = N(x)^\beta N(h)^\beta \phi(b_h b_x a) = N(g)^\beta \phi(ba).$$

Sendo que a gradução é semi-saturada, segue que as combinações lineares dos b, tomados como acima, é densa em B_g. Consequentemente a afirmação está provada. Então notamos que por (4.2.4) segue que ϕ é um estado KMS_β.

Agora suponhamos que S é como em (ii). Nós então afirmamos que

$$\phi(B_{g^{-1}} B_g) = \{0\},\ \forall\ g \in \mathbb{F} \text{ tal que } N(g) < 1.$$

Como uma consequêcia da semi-saturação e pelo Teorema 3.2 de [2] , temos que $B_g = \{0\}$, a menos que $g = \mu\nu^{-1}$, onde $\mu, \nu \in \mathbb{F}_+$ e $|g| = |\mu| + |\nu|$. Suponhamos então que g tem esta forma. Então observamos que $N(g) = N(\mu)N(\nu)^{-1}$ e $N(\mu) \geq 1$, nós devemos então ter $\nu \neq e$. Escrevemos então $\nu = x\nu'$ com $x \in \mathcal{G}$ e $\nu' \in \mathbb{F}_+$. Pela condição de semi-saturação temos que

$$B_{g^{-1}}B_g = B_\nu B_{\mu^{-1}} B_\mu B_{\nu^{-1}} = B_x B_{\nu'} B_{\mu^{-1}} B_\mu B_{\nu'^{-1}} B_{x^{-1}} \subseteq B_x B_{x^{-1}},$$

consequentemente temos $\phi(B_{g^{-1}}B_g) = \{0\}$. Por (4.2.4) temos que ϕ é um estado fundamental.

Agora temos que mostrar que a correspondência $\phi \mapsto \phi \circ E$ é um homeomorfismo afim. Para tanto observamos que $\phi \mapsto \phi \circ E|_{B_e}$ é uma aplicação injetiva, pois $E|_{B_e} = Id$, e assim $\phi \mapsto \phi \circ E$ é injetiva. Para ver que é sobrejetiva tomamos ψ um estado KMS_β sobre B. Então definindo $\phi = \psi|_{B_e}$, nós temos que $\psi = \phi \circ E$ por (5.0.7). Também temos que $\phi \in S$ por (4.2.4).

Claramente temos que $\phi \mapsto \phi \circ E$ é uma aplicação afim. Ela é também uma aplicação contínua com respeito a topologia fraca. De fato dados

$$\phi \in S \text{ e } V(\phi \circ E, x_1, ..., x_n, \varepsilon) = \{\psi : |\phi \circ E(x_i) - \psi(x_i)| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n\},$$

uma vizinhança de $\phi \circ E$, considerando $y_i = E(x_i)$ e $\delta = \varepsilon$, teremos que se

$$\varphi \in V(\phi, y_1, ..., y_n, \delta) = \{\rho : |\phi(y_i) - \rho(y_i)| < \delta, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

então $\varphi \circ E \in V(\phi \circ E, x_i, ..., x_n, \varepsilon)$. Sabendo que S é compacto nós então temos um homeomorfismo.

□

5.1 Ações Parciais do Grupo Livre

Nesta seção nós tentaremos juntar os resultados obtidos anteriormente, para determinar os estados KMS sobre a álgebra-C* obtida pelo produto cruzado de uma álgebra-C* pelo grupo livre. Começamos então fixando uma álgebra-C* A e uma ação parcial

$$\Theta = (\{D_g\}_{g \in \mathbb{F}}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}}).$$

Por (4.3.2) temos que $A \rtimes \mathbb{F}$ é topologicamente graduada via os subespaços $B_g = D_g \delta_g$.

Proposição 5.1.1. *A graduação acima de* $A \rtimes \mathbb{F}$ *é:*

(i) semi-saturada se e somente se $D_{gh} \subseteq D_g$ *sempre que* $|gh| = |g| + |h|$.
(ii) ortogonal se e somente se $D_x \cap D_y = \{0\}$ *para todo* $x, y \in \mathcal{G}$ *com* $x \neq y$.

Se assumimos que A *é abeliana, com espectro sendo um espaço localmente compacto* X *e que* Θ *é obtida por meio de uma ação parcial*

$$\alpha = (\{U_g\}_{g \in \mathbb{F}}, \{\alpha_g\}_{g \in \mathbb{F}})$$

de $\mathbb{F}$ *sobre* X*. Então* $A \rtimes \mathbb{F}$ *é:*

(a) semi-saturada se e somente se $U_{gh} \subseteq U_g$ sempre que $|gh| = |g| + |h|$.
(b) ortogonal se e somente se $U_x \cap U_y = \{0\}$ para todo $x, y \in \mathcal{G}$ com $x \neq y$.

Prova: Dado $g, h \in \mathbb{F}$ nós temos

$$B_g B_h = (D_g \delta_g)(D_h \delta_h) = \theta_g(\theta_g^{-1}(D_g) D_h)\delta_{gh} = \theta_g(D_{g^{-1}} D_h)\delta_{gh},$$

onde a segunda igualdade é dada pela definição da operação de $\mathcal{L}$ (ver 4.3.1). Logo nossa graduação é semi-saturada se e somente se $\theta_g(D_{g^{-1}} D_h) = D_{gh}$ quando $|gh| = |g| + |h|$. Mas, notando que $D_{g^{-1}} D_h = D_{g^{-1}} \cap D_h$ (D_g é ideal de A para todo $g \in \mathbb{F}$), aplicar θ_g no produto $D_{g^{-1}} D_h$ é o mesmo que aplicar na interseção $D_{g^{-1}} \cap D_h$. Logo, o que queremos na verdade é que $\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_{gh}$. Então da definição de ação parcial temos que $\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$. E assim ser semi-saturada é o mesmo que dizer que $D_{gh} \subseteq D_g$.

Se nós fazemos $g = x^{-1}$ e $h = y$ na equação acima, obtemos

$$B_{x^{-1}} B_y = \theta_{x^{-1}}(D_x D_y)\delta_{x^{-1}y}.$$

Logo nossa graduação é ortogonal se e somente se $D_x \cap D_y = \{0\}$.

Para a segunda parte da Proposição observamos que se Θ é obtida por meio de uma ação parcial α, então (por definição) temos que dada $\alpha_g : U_{g^{-1}} \to U_g$, sabemos por (2.1.12) que $D_g = C_0(U_g)$ e também que $D_g \cap D_h = C_0(U_g \cap U_h)$ para todo g, h. Portanto

$$D_{gh} \subseteq D_g \Leftrightarrow U_{gh} \subseteq U_g$$

e

$$D_x \cap D_y = \{0\} \Leftrightarrow U_x \cap U_y = \{0\},$$

e o resultado segue.

□

O resultado acima motiva uma definição, que faremos agora.

Definição 5.1.2. Nós diremos que Θ é uma ação parcial semi-saturada se a condição (5.1.1.i) vale. Nós diremos que Θ é uma ação parcial ortogonal se a condição (5.1.1.ii) vale.

Depois de todos os resultados acima estamos em condições de caracterizar os estados KMS sobre $A \rtimes \mathbb{F}$.

Teorema 5.1.3. *Seja Θ uma ação parcial ortogonal e semi-saturada do grupo livre $\mathbb{F}$ sobre uma álgebra-C*. Sobre $A \rtimes \mathbb{F}$ considere a gradução standard e a esperança condicional $E : A \rtimes \mathbb{F} \to A$. Também seja $\{N(x)\}_{x \in \mathcal{G}}$ uma coleção de números reais no intervalo $(1, \infty)$. Então existe um único grupo a um-parâmetro fortemente contínuo σ, de automorfismos de $A \rtimes \mathbb{F}$ tal que*

$$\sigma_t(b) = N(x)^{it} b, \ \forall \ x \in \mathcal{G}, \ b \in B_x.$$

Os estados $\sigma - KMS$ na temperatura inversa β sobre $A \rtimes \mathbb{F}$ são precisamente aqueles da forma $\psi = \phi \circ E$, onde ϕ é um estado sobre A satisfazendo:

(i) Se $\beta < \infty$: ϕ é um traço e $\phi(\theta_x(a)) = N(x)^{-\beta}\phi(a)$, para todo $x \in \mathcal{G}$ e todo $a \in D_{x^{-1}}$.
(ii) Se $\beta = \infty$: $\phi(D_x) = \{0\}$, para todo $x \in \mathcal{G}$.

Prova: Começamos então estendendo N a um homomorfismo de grupos $N : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_+^*$. E então usando (4.3.4) concluimos que existe um grupo σ, como queremos. Dada que a ação parcial é semi-saturada, não é difícil ver que σ satisfaz a identidade acima e que é unicamente determinado. Agora notamos que dado ψ um estado KMS_β sobre A com $\beta < \infty$, por (5.0.8.i), existe ϕ traço sobre B_e tal que

$$\psi = \phi \circ E \text{ e } \phi(ab) = N(g)^\beta \phi(ba) \ \forall \ g \in \mathbb{F}, \ a \in B_{g^{-1}}, \ b \in B_g.$$

Então por (4.3.5.i) temos que

$$\phi(\theta_x(a)) = N(x)^{-\beta}\phi(a), \ \forall \ a \in D_{x^{-1}}.$$

Agora se $\beta = \infty$ temos, por (5.0.8.ii), que $\phi(B_x B_{x^{-1}}) = \{0\}$. Mas por (4.3.5.$ii$) , segue que $B_x B_{x^{-1}} = D_x$, e assim $\phi(D_x) = \{0\}$.

$\square$

Capítulo 6

Condições de Cuntz-Krieger

Neste capítulo veremos as Condições de Cuntz-Krieger, condições estas que nortearão nosso trabalho. Também construiremos certas isometrias que satisfazem as condições antes citadas.

6.1 As Condições de Cuntz-Krieger

Começamos então fixando um conjunto enumerável $\mathcal{G}$ e uma aplicação $A : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \{0,1\}$, que pode ser vista como uma matriz finita ou infinita ($\mathcal{G}$ finito ou infinito respectivamente) $A = \{A(i,j)\}$ com entradas no conjunto $\{0,1\}$, não tendo linhas identicamente nulas.

A partir de então consideramos a álgebra de Toeplitz-Cuntz-Krieger unital universal denotada por $\widetilde{\mathcal{T}}_{O_A}$ e gerada por uma famíla de isometrias parciais $\{s_x\}_{x\in\mathcal{G}}$ sobre um espaço de Hilbert: tal álgebra é denotada por $\widetilde{\mathcal{T}}_{O_A}$, e cujas projeções iniciais $q_x = s_x^* s_x$ e finais $p_x = s_x s_x^*$ satisfazem:

$CK1) q_x q_y = q_y q_x$
$CK2) s_x^* s_y$ se $x \neq y$
$CK3) q_x s_y = A(x,y) s_y$

Vamos agora construir um exemplo de espaço de Hilbert e de isometrias parciais que satistisfazem as propriedades $CK1, CK2$ e $CK3$.

6.2 Um Exemplo sobre Isometrias

Veremos agora como obter isometrias que satizfazem as (CK1), (CK2) e (CK3).

Exemplo 6.2.1. Consideremos $\mathcal{G}$ e A como acima. Consideremos também o conjunto P_A, que é dado na definição (3.1.3).

Agora associado a P_A consideramos o espaço de Hilbert

$$H = \ell^2(P_A) = \Big\{ f : P_A \to \mathbb{C} : \sum_{\omega \in P_A} |f(w)|^2 < \infty \Big\}.$$

Como H é um espaço de Hilbert é natural determinarmos uma base de Hilbert para H, e é o que vamos fazer:

Definimos então as seguintes aplicações:

$$e_\omega : P_A \to \mathbb{C}$$

$$e_\omega(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \omega \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então lembrando que o produto interno de H é dado por

$$\langle f, g \rangle = \sum f(\omega)\overline{g(\omega)},$$

logo

$$\langle e_\omega, e_\beta \rangle = \sum e_\omega(\alpha)\overline{e_\beta(\alpha)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega = \beta \\ o, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Logo $\{e_\omega\}_{\omega \in P_A}$ é um conjunto ortonormal. Já temos então um conjunto que pode ser um candidato a uma base de Hilbert. Vamos mostrar que este conjunto é maximal. De fato se dado $\omega \in P_A$ e $f \in H$ temos que

$$\langle f, g \rangle = \sum f(\alpha)\overline{e_\omega(\alpha)} = 0,$$

então $f \equiv 0$, e assim sendo $\{e_\omega\}_{\omega \in P_A}$ é um conjunto maximal, portanto uma base de Hilbert para H.

Tendo uma base para H vamos agora construir o conjunto de isometrias parciais $\{s_x\}_{x \in G}$.

Seja $x \in G$, consideramos as aplicações lineares definidas da seguinte maneira:

$$s_x(e_\omega) = \begin{cases} e_{x\omega}, & \text{se } A(x, \omega_1) = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Logo dada $f \in H$ temos que $f = \sum \langle f, e_\omega \rangle e_\omega$, então definimos $s_x(f) = \sum \langle f, e_\omega \rangle s_x(e_\omega)$.

Definidas as aplicações s_x, vamos então mostrar que:

(a) s_x é limitada, $\forall\ x \in \mathcal{G}$

(b) s_x é uma isometria de um subespaço, que denotaremos por D_x, gerado pelo conjunto $\{e_\omega \in H : A(x, \omega_1) = 1\}$ na imagem desse subespaço que é dada pelo subespaço gerado pelo conjuto $\{e_{x\omega} : A(x, \omega_1) = 1\}$. O subespaço dado pela imagem de D_x denotaremos por I_x .

Começamos mostrando (a): Seja $f \in H$, como $f = \sum_{\omega \in P_A} \langle f, e_\omega \rangle e_\omega$, segue que $\| f \|^2 = \sum | \langle f, e_\omega \rangle|^2$, logo

$$\|s_x(f)\|^2 = \Big\| \sum \langle f, e_\omega \rangle e_\omega \Big\|^2 \leq \|f\|^2$$

pela definição de s_x, e assim s_x é limitado. Agora para (b) note que

$$f \in D_x \Rightarrow f = \sum_{\omega \in P_A} \langle f, e_\omega \rangle e_\omega \Rightarrow s_x(f) = \sum_{\omega \in P_A, A(x,\omega_1)=1} \langle f, e_\omega \rangle e_{x\omega}$$

$$\Rightarrow \|s_x\|^2 = \Big\| \sum_{\omega \in P_A, A(x,\omega_1)=1} \langle f, e_\omega \rangle e_\omega \Big\|^2 = \sum |\langle f, e_\omega \rangle|^2 = \|f\|^2,$$

logo s_x é isometria.

O próximo passo é determinar quem é s_x^*. Por definição devemos ter

$$\langle s_x(e_\omega), e_\beta \rangle = \langle e_\omega, s_x^*(e_\beta) \rangle,$$

e como

$$s_x(e_\omega) = \begin{cases} e_{x\omega}, & \text{se } A(x, \omega_1) = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

temos

$$\langle s_x(e_\omega), e_\beta \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } A(x, \omega_1) = 1 \text{ e } x\omega = \beta \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Definimos então

$$s_x^*(e_\beta) = \begin{cases} e_\omega, & \text{se } \beta = x\omega \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

por linearidade definimos s_x^* num elemento qualquer de H, ou seja, dada $f \in H$ segue que

$$f = \sum_{\omega \in P_A} \langle f, e_\omega \rangle e_\omega \Rightarrow s^*(f) = \sum_{\omega \in P_A} \langle f, e_\omega \rangle s_x^*(e_\omega)$$

Não é difícil mostrar que s_x^* é limitado. Precisamos agora mostrar que $(s_x^*) = (s_x)^*$, ou seja, que s_x^* é de fato a adjunta de s_x. Para isso sejam $u, v \in H$, então

$$u = \sum_{\omega \in P_A} \langle u, e_\omega \rangle e_\omega, v = \sum_{\beta \in P_A} \langle v, e_\beta \rangle e_\beta$$

logo

$$\langle s_x(u), v \rangle = \Big\langle s_x\Big(\sum_{\omega \in P_A} \langle u, e_\omega \rangle e_\omega \Big), \sum_{\omega \in P_A} \langle v, e_\beta \rangle e_\beta \Big\rangle$$

então pelo capítulo 1 sabemos que o somatório que define u é enumerável, assim como o que define v. Então

$$\langle s_x(u), v \rangle = \Big\langle s_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_\omega^{(n)} \rangle e_\omega^{(n)} \Big), \sum_{m=1}^{\infty} \langle v, e_\beta^{(m)} \rangle e_\beta^{(m)} \Big\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle u, e_\omega^{(n)} \rangle \langle v, e_\beta^{(m)} \rangle \langle e_\omega^{(n)}, s_x^*(e_\beta^{(m)}) \rangle = \langle u, s_x^*(v) \rangle,$$

logo s_x^* é adjunta de s_x.

Agora conhecendo a adjunta de s_x, passamos a estudar as aplicações da forma $q_x = s_x^* s_x$ e $p_x = s_x s_x^*$. Nosso objetivo é mostrar que são projeções e que satisfazem as condições (CK1), (CK2) e (CK3).

Começamos mostrando que q_x e p_x são projeções sobre D_x e I_x respectivamente. Seja $e_\omega \in D_x$, então segue que

$$q_x(e_\omega) = s_x^*(s_x(e\omega)) = s_x^*(e_{x\omega}) = e_\omega \Rightarrow q_x|_{D_x} = Id_{D_x}$$

Consideremos agora $e_\beta \in I_x$, então

$$p_x(e_\beta) = s_x s_x^*(e_\beta) = e_\beta$$

pois $e_\beta \in I_x$ e assim $\beta = x\beta_1\beta_2....$ Logo $p_x|_{I_x} = Id_{I_x}$. Também não é difícil de ver que

$$p_x(H) = D_x,\ q_x(H) = I_x,\ \|q_x\| = \|p_x\| = 1,\ (q_x)^2 = q_x \text{ e que } (p_x)^2 = p_x,$$

e assim p_x e q_x são projeções.

Vamos agora verificar as condições (CK1), (CK2) e (CK3). Começamos mostrando $(CK1)$. Sejam $x, y \in G$ e q_x, q_y. Observe que dada $f \in H$ se $f \notin D_x \cap D_y$ então teremos que $q_x q_y(f) = 0 = q_y q_x(f)$, logo $q_y q_x = q_x q_y$ em $H \backslash D_x \cap D_y$. Quando $f \in D_x \cap D_y$ é trivial, pois restritas a este espaço q_x e q_y são identidades.

Agora verificamos (CK2): $e_\omega \in D_y \Rightarrow A(y, \omega_1) = 1$ e $s_y(e_\omega) = e_{y\omega}$. Então tomando $x \neq y$ vem que

$$s_x^* s_y(e_\omega) = s_x^*(e_{y\omega}) = 0 \Rightarrow s_x^* s_y = 0$$

Por último mostraremos que $(CK3)$ vale:

$$e_\omega \in D_y \Rightarrow q_x s_y(e_\omega) = s_x^* s_x(e_{y\omega}) = s_x^*\Big(\begin{cases} e_{xy\omega}, & \text{se } A(x,y) = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}\Big) =$$
$$= \begin{cases} e_{y\omega}, & \text{se } A(x,y) = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} = A(x,y) s_y(e_\omega),$$

como queriamos.

Definição 6.2.2.

Para cada $g \in \mathbb{F}$ seja Δ_g o subconjunto aberto e fechado de $\widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$ dado por

$$\Delta_g = \{\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}} : g \in \xi\}$$

e considere o homeomorfismo

$$\alpha_g : \xi \in \Delta_{g^{-1}} \mapsto g\xi \in \Delta_g.$$

Observação 6.2.3. Para ver que cada Δ_g é aberto na topologia fraca notamos que $\Delta_g = V(X,Y) = \{\xi : X \subseteq \xi,\ Y \cap \xi = \emptyset\}$, onde $X = \{g\}$ e $Y = \emptyset$. Para ver que é fechado notamos que $\Delta_g^c = V(\emptyset, Y)$, onde $Y = \{g\}$, ou seja, é o complementar de um aberto.

Lema 6.2.4. *$\alpha := (\{\Delta_g\}_{g\in\mathbb{F}}; \{\alpha_g\}_{g\in\mathbb{F}})$ é uma Ação Parcial de $\mathbb{F}$ sobre $\widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$.*

Prova: Como $\Delta_e = \widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$, a primeira condição da definição de Ação Parcial é verificada. Para a segunda condição note que

$$\xi \in \Delta_{g^{-1}} \cap \Delta_h \Rightarrow g, h^{-1} \in \xi e g^{-1}, gh \in g\xi \Rightarrow g\xi \in \Delta_g \cap \Delta_{gh} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_g(\xi) \in \Delta_g \cap \Delta_{gh} \Rightarrow \alpha_g(\Delta_{g^{-1}} \cap \Delta_h) \subset \Delta_g \cap \Delta_{gh},$$

a outra inclusão segue facilmente, e assim a segunda condição da definição de Ação Parcial está verificada. Para a última condição note que

$$\xi \in \Delta_g \cap \Delta_{h^{-1}g^{-1}} \Rightarrow h^{-1}, h^{-1}g^{-1} \in \xi \Rightarrow \alpha_g(\alpha_h(\xi)) = \alpha_g(h\xi) = gh\xi = \alpha_{gh}(\xi)$$

e segue a última condição.

$\square$

A ação parcial acima induz uma ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_{o_A}})$

$$\Theta = (\{D_g\}_{g\in\mathbb{F}}; \{\theta_g\}_{g\in\mathbb{F}})$$

onde $D_g = C_0(\Delta_g)$ e

$$\theta_g : f \in D_{g^{-1}} \mapsto f \circ \alpha_{g^{-1}} \in D_g.$$

Um Teorema que provaremos mais adiante assegura que $\widetilde{\mathcal{T}}_{O_A}$ é isomorfa a $C(\widetilde{\Omega}_{\tau O_A}) \rtimes \mathbb{F}$ através de um isomorfismo que leva cada s_x em $1_{\Delta_x}\delta_x$, onde 1_{Δ_x} é a função característica de Δ_x.

Faremos agora duas definições que serão importantes para estudar a próxima álgebra com a qual trabalharemos.

Definição 6.2.5. Dados dois conjuntos X, Y $\subset \mathcal{G}$, finitos, nós definimos

$$A(X,Y,z) = \prod_{x\in X} A(x,z) \prod_{y\in Y} (1 - A(y,z)), \quad z \in \mathcal{G}$$

e

$$q(X,Y) = \prod_{x\in X} q_x \prod_{y\in Y} (1 - q_y)$$

Definição 6.2.6. Dado um conjunto enumerável $\mathcal{G}$ e uma matriz $A = A\{(x,y)\}_{x,y\in G}$ com entradas no conjunto $\{0,1\}$ e linhas não identicamente nulas, nós denotaremos por $\widetilde{\mathcal{T}_A}$ a álgebra-C* universal e unital gerada por uma família de isometrias parciais $\{s_x\}_{x\in\mathcal{G}}$ sujeitas as condições (CK1), (CK2), (CK3) e que também satisfaz

(CK_4^0) $q(X,Y) \equiv 0$ sempre que X, Y são subconjuntos finitos de $\mathcal{G}$ tais que $A(X,Y,z) \equiv 0$ como função de z.

Observação 6.2.7. Observamos que as isometrias definidas no exemplo (6.2.1) estão contidas em $\mathcal{T}_{O_A}$, ou seja, elas satisfazem (CK_4^0) (e isso vai implicar $\widetilde{\Omega}_{\tau_{OA}} = \widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$) . Vamos mostrar isto: consideramos então $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $Y = \{y_1, ..., y_m\} \subset \mathcal{G}$ e suponha que $A(X,Y,z) = 0$, para todo $z \in \mathcal{G}$. Então dado $z \in \mathcal{G}$ existe algum $x_i \in X$ ou $y_j \in Y$ tal que $A(x_i, z) = 0$ ou $A(y_j, z) = 1$. Tomamos agora $e_\omega \in H$, se $\omega = \omega_1 ... \omega_k$, com $\omega_1 = z$, segue que $q_{x_i} = s_{x_i}^* s_{x_i}(e_\omega) = s_{x_i}^* s_{x_i}(e_{z\omega_2...\omega_k}) = 0$, logo $q(X,Y)(e_\omega) = 0$ se $A(x_i, z) = 0$ para algum $x_i \in X$. Agora se $A(y_j, z) = 1$ para algum $y_j \in Y$ então $q(X,Y)(e_\omega) = 0$.

Lembrando do capítulo anterior que

• A raiz relativa de g a ξ é o subconjunto definido por
$R_\xi(g) = \{x \in G : gx^{-1} \in \xi\}$.
• O stem de um elemento $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_{OA}}$ é a única palavra maximal (finita ou infinita), no alfabeto G tal que suas subpalavras iniciais pertencem à ξ.
• ξ é dito limitado se o seu stem é finito, caso contrário é ilimitado.
• $\sum_A$ é o espaço topológico obtido tomando o fecho, dentro do espaço compacto $2^{\mathcal{G}}$, do conjunto de colunas de A.

Teorema 6.2.8. *Seja $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ o conjunto de todos $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}}$ tais que ξ ou é ilimitado, ou ele é limitado e $R_\xi(\omega) \in \sum_A$, onde ω é o stem de ξ. Então $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ é um subespaço compacto de $\widetilde{\Omega}_{\tau_{OA}}$. Mais ainda, definindo para cada $g \in \mathbb{F}$*

$$\Delta_g^\iota := \Delta_g \cap \widetilde{\Omega}_{\tau_{OA}} = \{\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A} : g \in \xi\}$$

e

$$\alpha : \xi \in \Delta_{g^{-1}}^\iota \mapsto g\xi \in \Delta_g^\iota$$

nós temos que $(\{\Delta^\iota\}_{g \in \mathbb{F}}, \{\alpha\}_{g \in \mathbb{F}})$ é uma ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ tal que o produto cruzado $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A}) \rtimes \mathbb{F}$ é isomorfa a $\widetilde{\mathcal{T}}_A$ sobre um isomorfismo que aplica cada $1_{\Delta_x^\iota}\delta_x$ em s_x.

Prova: Ver Teorema 5.3 de [2].

□

Definiremos agora um subespaço de $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ que será relevante mais tarde.

Definição 6.2.9. Seja $\widetilde{\Omega}_e$ o subconjunto de $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ consistindo de todos os ξ em $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ cujo stem é igual a e.

Teorema 6.2.10. *$\widetilde{\Omega}_e$ é um retrato de $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ no sentido que existe uma função contínua $r : \widetilde{\Omega}_{\tau_A} \to \widetilde{\Omega}_e$ tal que $r(\xi) = \xi$, $\forall\ \xi \in \widetilde{\Omega}_e$. Mais ainda, tal função pode ser escolhida de modo que $R_{r(\xi)}(e) = R_\xi(e)$.*

Prova: Dado qualquer $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$, seja $\eta \in \widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$ tal que $\sigma(\eta) = e$ e $R_\eta(e) = R_\xi(e)$. Tal elemento existe pelo Teorema 5.14 de [3]. Então afirmamos que $\eta \in \widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$. E para ver isso nós temos que considerar dois casos: se ξ tem stem trivial, então $\eta = \xi$ pela unicidade dada pelo Teorema 5.14 de [3] e consequentemente $\eta \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$. E por outro lado se o stem de η é não trivial então existe algum $\jmath \in G \cap \xi$.

Então notamos que $x^{-1} \in \xi \Leftrightarrow A(x, j) = 1$ (definição de $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$), segue então que $R_\xi(e)$ coincide com a $\jmath$ −ésima coluna de A e consequentemente $R_\xi(e) \in \sum_A$. Deste modo, como $R_\eta(e) = R_\xi(e)$, $R_\eta(e) \in \sum_A$ e então $\eta \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$.

Definimos então $r(\xi) = \eta$, obtendo assim, uma função de $\widetilde{\Omega}_{\tau o_A}$ em $\widetilde{\Omega}_e$ que claramente restrita à $\widetilde{\Omega}_e$ é a identidade. Agora resta mostrar que r é contínua. Consideramos então $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ e observamos que uma vizinhaça de $r(\xi)$ na topologia fraca é da forma

$$V(X, Y) = \{\eta \in \widetilde{\Omega}_e : s_1, ..., s_p \in \eta \text{ e } t_1, ..., t_q \notin \eta\},$$

onde $X = \{s_1, ..., s_p\} \subseteq \mathbb{F}$ e $Y = \{t_1, ..., t_q\} \subseteq \mathbb{F}$. Queremos então encontrar W vizinhança de ξ, tal que $r(W) \subseteq V(X, Y)$. Para tanto consideramos $W = V(X', Y')$, onde $X' = \{s_1, ..., s_p\}$ e $Y' = \{t_j \in Y : t_j = x_j h, \text{ com } x_j \in \mathcal{G}^{-1}\}$, afirmamos que esta vizinhança é suficiente. De fato, tomamos $g \in \mathbb{F}$ e escrevemos $g = xg'$, com $x \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$ e $|g| = 1 + |g'|$. Suponhamos inicialmente que $x \in \mathcal{G}$ então, da convexidade de $r(\xi)$ e do fato que o stem de $r(\xi)$ é e, segue que $g \notin r(\xi)$, $\forall\, \xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$. Agora para $x \in \mathcal{G}^{-1}$, usando a convexidade bem como o Teorema 5.11 de [3], temos que $g \in r(\xi) \Leftrightarrow g \in \xi$. Logo concluimos que W satisfaz a afirmação desejada e assim r é contínua.

$\square$

Capítulo 7

Representações Parciais

7.1 Construindo uma Representação Parcial

Começamos esta seção fazendo uma definição.

Definição 7.1.1.

Agora consideramos a seguinte aplicação

$$S : \mathbb{F} \to \widetilde{\mathcal{T}}_A$$

definida como segue: se $x \in G$ definimos $S(x) = s_x$ e $S(x^{-1}) = s_x^*$. Para $g \in \mathbb{F}$, com $g = x_1 x_2 ... x_n$, onde $x_\imath \in G \cup G^{-1}$ e $x_{k+1} \neq x_k^{-1}$, definimos $S(g) = s(x_1)s(x_2)...s(x_n)$.

A característica mais importante de S é que ela é uma *representação parcial* de $\mathbb{F}$ no sentido que

Lema 7.1.2. *Seja S a aplicação acima. Então S satisfaz*

- $S(e) = I$
- $S(g^{-1}) = S(g)^*$
- $S(g)S(h)S(h^{-1}) = S(gh)S(h^{-1})$, *para todo* $g, h \in \mathbb{F}$

Prova: Ver [2].

$\square$

Definição 7.1.3. Quando S satisfaz o Lema [**?**] é dita uma representação parcial.

Nós usaremos, para cada $g \in \mathbb{F}$, a notação

- $p_g = S(g)S(g)^*$
- $q_g = S(g)^*S(g)$

Lema 7.1.4. *Dado $g \in \mathbb{F}$, $S(g)$ é uma isometria parcial com projeções inicial e final q_g e p_g respectivamente. S é uma representação semi-saturada no sentido que*

$$S(g)S(h) = S(gh) \quad \textit{sempre} \quad \textit{que} \quad |gh| = |g| + |h|.$$

Também temos que S é uma representação parcial ortogonal no seguinte sentido

$$S(x)^*S(y) = 0 \quad \textit{sempre} \quad \textit{que} \quad x, y \in \mathcal{G} \quad e \quad x \neq y.$$

Prova: Ver Teorema 3.2 de [3]

□

7.2 Uma Caraterização para a Representação Parcial

Nós agora relacionaremos S com a estrutura de produto cruzado de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$. Lembrando o Teorema 6.2.8 que $(\{\Delta_g^\iota\}_{g\in\mathbb{F}}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathbb{F}})$ é uma ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ cujo produto cruzado é isomorfo a $\widetilde{\mathcal{T}}_A$. Este isomorfismo leva cada s_x em $1_{\Delta_x^\iota}\delta_x$.

Teorema 7.2.1. *Seja $g \in \mathbb{F}$. Então*

($\imath$) $S(g) = 1_{\Delta_g^\iota}\delta_g$,
($\imath\imath$) $p_g = 1_{\Delta_g^\iota}$,
($\imath\imath\imath$) $q_g = 1_{\Delta_{g^{-1}}^\iota}\delta_g$.
($\imath v$) $S(g)aS(g)^* = \theta_g(a)$ *para todo* $a \in C_0(\Delta_{g^{-1}}^\iota)$,
(v) $S(g)aS(g)^* = \theta_g(q_g a)$ *para todo* $a \in C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$, *e*
($v\imath$) $\theta_g(q_g) = p_g$.

Prova: Começamos provando ($\imath$). A prova se dará por indução sobre $|g|$. Se $|g| = 0$, então $g = e$ e o resultado segue pois $S(e) = I$ é levado em $1_{\Delta_e^\iota}\delta_e$ pelo isomorfismo acima (isomorfismo leva identidade em identidade e $1_{\Delta_e^\iota}$ é a identidade da álgebra $C_0(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$) Agora se $g = x \in \mathcal{G}$, nós temos $S(x) = s_x = 1_{\Delta_x^\iota}\delta_x$ como já mencionamos. Agora se $x \in \mathcal{G}$ então

$$S(x^{-1}) = s_x^* = (1_{\Delta_x^\iota}\delta_x)^* = \theta_x^{-1}(1_{\Delta_x^\iota})^*\delta_{x^{-1}}$$

onde a última igualdade segue de (4.3.1). Como

$$(1_{\Delta_x^\iota})^* = 1_{\Delta_x^\iota} \quad \text{e} \quad \theta_x^{-1}(1_{\Delta_x^\iota}) = 1_{\Delta_x^\iota} \circ \alpha_x = 1_{\Delta_{x^{-1}}^\iota} \quad \text{logo} \quad s_x^* = 1_{\Delta_{x^{-1}}^\iota}\delta_{x^{-1}}.$$

Suponhamos agora que $|g| > 1$ e escrevemos $g = rs$ $|g| = |r| + |s|$ e $|r|, |s| < |g|$. Então usando que S é semi-saturada e a hipótese de indução nós teremos

$$\begin{aligned} S(g) = S(r)S(s) &= (1_{\Delta_r^\iota}\delta_r)(1_{\Delta_s^\iota}\delta_s) = \theta_r(\theta_r^{-1}(1_{\Delta_r^\iota})1_{\Delta_s^\iota})\delta_{rs} \\ &= \theta_r(1_{\Delta_{r^{-1}}^\iota}1_{\Delta_s^\iota})\delta_{rs} = (1_{\Delta_{r^{-1}}^\iota \cap \Delta_s^\iota})\delta_{rs} = 1_{\alpha_r(\Delta_{r^{-1}}^\iota \cap \Delta_s^\iota)}\delta_{rs}. \end{aligned}$$

Por outro lado observamos que

$$\alpha_r(\Delta^\iota_{r^{-1}} \cap \Delta^\iota_s) = \Delta^\iota_r \cap \Delta^\iota_{rs}.$$

Agora como $|rs| = |r| + |s|$ e $|e.rs| = |e.r| + |r^{-1}rs|$, temos que se $\xi \in \Delta^\iota_{rs}$ então ele é convexo, e pela convexidade temos que se $|ers| = |er| + |r^{-1}rs|$ então $r \in \xi$, logo $\xi \in \Delta^\iota_r$, ou seja, $\Delta^\iota_{rs} \subset \Delta^\iota_r$. Assim

$$\alpha(\Delta^\iota_{r^{-1}} \cap \Delta^\iota_r) = \Delta^\iota_r \cap \Delta^\iota_{rs} = \Delta^\iota_{rs}.$$

Portanto

$$S(g) = 1_{\alpha_r(\Delta^\iota_{r^{-1}} \cap \Delta^\iota_s)}\delta_{rs} = 1_{\Delta^\iota_{rs}}\delta_{rs} = 1_{\Delta^\iota_g}\delta_g$$

o que conclui a prova do ítem $(\imath)$.

Provaremos agora $(\imath\imath)$. Tomamos $g \in \mathbb{F}$ e notamos que

$$\begin{aligned} p_g = S(g)S(g)^* = S(g)S(g^{-1}) &= (1_{\Delta^\iota_g}\delta_g)(1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}}\delta_{g^{-1}}) = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(1_{\Delta^\iota_g})1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}})\delta_{gg^{-1}} \\ &= \theta_g(1_{\Delta^\iota_g} \circ \alpha_g.1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}})\delta_e = \theta_g(1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}}1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}})\delta_e = 1_{\Delta^\iota_g}\delta_e = 1_{\Delta^\iota_g} \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade acima se deve ao ítem $(\imath)$ e a quarta à (4.3.1). Também vale observar que nós estamos identificando, de maneira usual, a e $a\delta_e$.

Para a afirmação $(\imath\imath\imath)$ trocamos g por g^{-1} em $(\imath\imath)$ e assim o resultado segue facilmente.

Vamos então para $(\imath v)$. Seja $a \in C_0(\Delta^\iota_{g^{-1}})$. Nós temos

$$S(g)a = (1_{\Delta^\iota_g}\delta_g).(a\delta_e) = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(1_{\Delta^\iota_g})a)\delta_{ge} = \theta_g(1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}}.a)\delta_g = \theta_g(a)\delta_g$$

(a última igualdade se deve ao fato de que como $a \in C_0(\Delta^\iota_{g^{-1}})$ então $a.1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}} = a$)

Portanto

$$\begin{aligned} S(g)aS(g)^* &= (\theta_g(a)\delta_g)(1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}}\delta_{g^{-1}}) = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(\theta_g(a)).1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}})\delta gg^{-1} = \\ &= \theta_g((a)1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}})\delta_e = \theta_g(a)\delta_e = \theta_g(a). \end{aligned}$$

Para (v), seja $a \in C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ e notamos que

$$S(g)aS(g)^* = S(g)aS(g^{-1}) = S(g)S(g^{-1})S(g)aS(g^1) = S(g)q_gaS(g)^*,$$

onde a terceira igualdade se deve ao lema 7.1.2. Agora por $(\imath\imath\imath)$

$$q_g = 1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}}, \quad \text{logo} \quad q_ga = 1_{\Delta^\iota_{g^{-1}}}.a, \quad \text{logo} \quad q_ga \in C_0(\Delta^\iota_{g^{-1}}).$$

Por $(\imath v)$ vem que

$$S(g)aS(g)^* = S(g)q_gaS(g)^* = \theta_g(q_ga).$$

Finalmente para (v) observamos que esta segue de $(\imath v)$ fazendo $a = 1$.

$\square$

Nós agora queremos dar nome a uma sub-álgebra de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$ que desempenhará um papel importante de agora em diante no estudo da reresentação parcial S.

Definição 7.2.2. Nós definiremos por $\widetilde{\mathcal{Q}}$ a subálgebra de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$ gerada pelo conjunto $\{q_x : x \in \mathcal{G}\} \cup \{1\}$.

Teorema 7.2.3. *Para $\mu, \nu \in \mathbb{F}_+$ tem-se:*

($\imath$) Se $|\mu| \geq 1$ e z é o último gerador de μ então $q_\mu = \varepsilon q_z$, onde $\varepsilon \in \{0, 1\}$, de acordo com o fato de μ ser ou não palavra admissível (isto é, $A(\mu_i, \mu_{i+1}) = 1$ $\forall i$).
($\imath$) Se $|\mu| = |\nu|$ mas $\mu \neq \nu$ então $S(\mu)^* S(\nu) = 0$.
($\imath\imath\imath$) Se $|\mu|$ e z são como em ($\imath$) então $S(\mu)^* \widetilde{\mathcal{Q}} S(\mu) \subset \mathbb{C} q_z \subset \widetilde{\mathcal{Q}}$.
($\imath v$) Se $|\mu| \leq |\nu|$ então $(S(\mu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\mu)^*)(S(\nu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^*) \subseteq S(\nu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^*$.

Prova. Começaremos por ($\imath$). Faremos a prova por indução em $|\mu| = m$. Se $m = 1$ claramente a afirmação vale. Agora suponhamos que $m > 1$ e seja $\beta = x_1 x_2 ... x_{m-1}$, $\mu = \beta z$ e $\varepsilon = \Pi_{k=1}^{n-2} A(x_k, x_{k+1})$. Nós temos então

$$S(\mu)^* S(\mu) = S(\beta z)^* S(\beta z) = S(z)^* S(\beta)^* S(\beta) S(z)$$

Logo, por hipótese de indução,

$$S(\beta)^* S(\beta) = \delta S(x_{n-1}^*) S(x_{n-1}), \text{ com } \delta \in \{0, 1\}, \text{ logo}$$

Então observamos que por $(CK3)$ segue que

$$S(\mu)^* S(\mu) = \delta S(z)^* S(x_{n-1})^* S(x_{n-1}) S(z) = \delta A(x_{n-1}, z) S(z)^* S(z) = \varepsilon q_z.$$

onde $\varepsilon = \delta A(x_{n-1}, z) \in \{0, 1\}$. Vamos então para ($\imath\imath$). A prova também se dará por indução em $|\mu| = |\nu| = m$. Se $m = 1$ temos que $\mu, \nu \in G$ e então $S(\mu)^* S(\nu) = s_\mu^* s_\nu$ e por $(CK2)$ nós temos que $s_\mu^* s_\nu = 0$. Se $m > 1$, escrevemos $\mu = \bar{\mu} x$ e $\nu = \bar{\nu} y$ onde $\bar{\mu}, \bar{\nu} \in \mathbb{F}_+$ e $x, y \in G$. E assim

$$S(\mu)^* S(\nu) = S(\bar{\nu} x)^* S(\bar{\nu} y) = S(x)^* S(\bar{\mu})^* S(\bar{\nu}) S(y).$$

Agora suponhamos, por contradição, que $S(\mu)^* S(\nu) \neq 0$, e assim

$$S(\mu)^* S(\nu) \neq 0 \Rightarrow S(\bar{\mu})^* S(\bar{\nu}) \neq 0.$$

Assim escrevendo

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \cdots \bar{\mu}_{m-1} \quad e \quad \bar{\nu} = \bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \cdots \bar{\nu}_{m-1},$$

temos

$$S(\bar{\mu})^* S(\bar{\nu}) = S(\bar{\mu}_{m-1})^* \cdots S(\bar{\mu}_1)^* S(\bar{\nu}_1) \cdots S(\bar{\nu}_{m-1})$$

Notamos então que $\bar{\mu}_1 = \bar{\nu}_1$, caso contrário $S(\bar{\mu}_1)^* S(\bar{\nu}_1) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} S(\bar{\mu}_1) = S(\bar{\nu}_1) = q_{\bar{\nu}_1} \Rightarrow S(\bar{\mu})^* S(\bar{\nu}) &= S(\bar{\nu}_{m-1}) \cdots S(\bar{\mu}_2)\ q_{\bar{\mu}_1}\ S(\bar{\nu}_2) \cdots S(\bar{\nu}_{m-1}) \\ = S(\bar{\mu})^* S(\bar{\nu}) &= S(\bar{\mu}_{m-1})^* \cdots S(\bar{\mu}_2)^* S(\bar{\nu}_2) \cdots S(\bar{\nu}_{m-1}) A(\bar{\mu}_2, \bar{\nu}_2), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de $(CK3)$. Se usamos mais uma vez $(CK1)$ vemos que $\bar{\mu}_2 = \bar{\nu}_2$, e seguindo por indução concluimos que $\bar{\mu} = \bar{\nu}$. Agora usando o ítem $(\imath)$ teremos que $S(\bar{\mu})^* S(\bar{\mu}) = \varepsilon S(z)^* S(z)$, onde $z = \bar{\mu}_{m-1} \in G$ e $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Portanto

$$0 \neq S(\mu)^* S(\nu) = \varepsilon S(x)^* S(z)^* S(z) S(y) = \varepsilon A(z, y) S(x)^* S(y),$$

onde a última igualdade segue de $(CK3)$. Logo

$$S(\mu)^* S(\nu) \neq 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \mu = \nu$$

o que é uma contradição.

Para provarmos $(\imath\imath\imath)$ tomamos $x \in G$ e observamos que

$$S(\mu)^* q_x S(\mu) = S(\mu)^* S(x)^* S(x) S(\mu) = S(x\mu)^* S(x\mu) = q_{x\mu} = \varepsilon q_z \text{ por } (\imath\imath). \quad (\star)$$

Agora sejam $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ e observando que

$$S(\mu)^* = S(\mu^{-1}) = S(\mu^{-1}) S(\mu) S(\mu^{-1}) = S(\mu)^* S(\mu) S(\mu)^*, \quad \text{pelo lema 7.1.2}$$

e, pelo resultado 2.4.(iii) de [7], as projeções q_g e p_g formam um conjunto comutativo, segue que

$$\begin{aligned} S(\mu)^* q_{x_1} ... q_{x_n} S(\mu) &= S(\mu)^* S(\mu) S(\mu)^* q_{x_1} ... q_{x_n} S(\mu) S(\mu)^* S(\mu) = \\ &= S(\mu)^* q_{x_1} S(\mu) S(\mu)^* q_{x_2} ... q_{x_{n-1}} S(\mu) S(\mu)^* q_{x_n} S(\mu). \end{aligned}$$

Agora voltando a usar o fato de que

$$S(\mu)^* = S(\mu)^* S(\mu) S(\mu)^* \ e \ S(\mu) = S(\mu) S(\mu)^* S(\mu),$$

teremos, por indução, que

$$\begin{aligned} S(\mu) q_{x_1} ... q_{x_n} S(\mu)^* &= S(\mu)^* q_{x_1} S(\mu) S(\mu)^* q_{x_2} S(\mu) ... S(\mu)^* q_{x_n} S(\mu) = \\ &= \varepsilon_1 q_z \varepsilon_2 q_z ... \varepsilon_n q_z, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de $(\star)$. Logo $S(\mu)^* \widetilde{\mathcal{Q}} S(\mu) \subseteq \mathbb{C}_{q_z}$, pois o primeiro é dado pela soma de produtos da forma $S(\mu)^* q_{x_\imath} S(\mu)$.

Provamos agora $(\imath v)$: escrevemos então $\nu = \nu' \nu''$, com $|\nu'| = |\mu|$ e notamos que se $\nu' \neq \mu$, por (ii),

$$S(\nu)^* S(\nu) = S(\mu)^* S(\nu') S(\nu') = 0.$$

Então, assumindo que $\nu' = \mu$, nós temos

$$(S(\mu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\mu)^*)(S(\nu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^*) = S(\mu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\mu)^*S(\mu)S(\nu'')\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu) \tag{7.2.1}$$

e observando que

$$\begin{aligned} S(\mu)^*S(\mu)S(x)^*S(x) &= S(\mu^{-1})S(\mu)S(x^{-1})S(x) \\ &= S(\mu^{-1}\mu x^{-1})S(x) = S(x)^*S(x), \end{aligned}$$

teremos $S(\mu)^*S(\mu)\widetilde{\mathcal{Q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}$. Logo (7.2.1) fica igual à $S(\mu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu'')\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^*$. Então como $\mu = \mu\nu(\nu'')^{-1}$, segue que

$$\begin{aligned} S(\mu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu'')\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^* &= S(\mu)S(\nu'')S(\nu'')^*\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu'')\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^* \\ &\overset{(pois\ \nu=\nu'\nu''=\mu\nu'')}{=} S(\nu)S(\nu'')^*\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu'')\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu'')\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^* \\ &\overset{por\ (iii), S(\nu'')^*\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu'')\subseteq\widetilde{\mathcal{Q}}}{\subseteq} S(\nu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^* \end{aligned}$$

□

Teorema 7.2.4. *$C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ coincide com o espaço linear gerado por*

$$\{S(\mu)aS(\mu)^* : \mu \in \mathbb{F}_+,\ a \in \widetilde{\mathcal{Q}}\}.$$

Prova: Por (7.2.1.ii) nós temos que $p_g = 1_{\Delta_g^i}$. O conjunto de todos p_g separa, portanto, pontos de $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ e consequentemente gera $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ como uma álgebra C*. Nós afirmamos que todo p_g não nulo pertence ao conjunto da afirmação. Para ver isto notamos que $S(g) = 0 = p_g$ a menos que $g = \mu\nu^{-1}$, onde $\mu, \nu \in \mathbb{F}_+$ são palavras admissíveis tais que $|g| = |\mu| + |\nu|$, porque S é semi-saturada e ortogonal. Suponhamos então que $g = \mu\nu^{-1}$. Se $|\nu| = 0$ então a afirmação é óbvia. Caso contrário seja z o último gerador na decomposição reduzida de ν e observamos que

$$p_g = S(g)S(g)^* = S(\mu)S(\nu)^*S(\nu)S(\mu)^* = S(\mu)q_\nu S(\mu)^* = S(\mu)q_z S(\mu)^*,$$

pelo Teorema 7.2.1, logo p_g está no conjunto da afirmação acima. Temos agora que provar que o conjunto da afirmação é fechado para a multiplicação, mas isto segue mais uma vez do Teorema 7.2.1.

□

Capítulo 8

Estados Scaling e a Função Partição $Z(\beta)$

Começamos com algumas hipóteses com as quais trabalharemos durante todo o capítulo.

8.1 Algumas Hipóteses e Teoremas Muito Importantes

Sejam

(i) $\mathcal{G}$ um conjunto enumerável,
(ii) $A = \{A(x,y)\}_{x,y\in\mathcal{G}}$ matriz não tendo linhas identicamente nulas,
(iii) $\{N(x)\}_{x\in\mathcal{G}}$ uma coleção de números reais no intervalo $(1,\infty)$,
(iv) σ o único grupo, a um-parâmetro contínuo, de automorfismos (de uma das álgebras anteriores) satisfazendo $\sigma_t(s_x) = N(x)^{it}s_x$ e
(v) Todas as referências a estados KMS serão com respeito ao grupo σ acima citado.

Observamos que a existência de σ se dá por (4.3.4). Outra observação importante é que usaremos a seguinte notação $\widetilde{\Omega} \setminus \{\epsilon\} = \Omega$, onde $\epsilon = \{e\}$.

Veremos agora um importante resultado, que pode ser obtido como consequência de (5.1.3) e do Teorema 7.3 de [2].

Teorema 8.1.1. *Assumindo as hipóteses acima, seja B uma das álgebras-C^* abaixo:*

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{O_A},\ \mathcal{T}_{O_A},\ \widetilde{\mathcal{T}}_A \text{ e } \mathcal{T}_A,$$

e seja Ω o respectivo espaço escolhido de

$$\widetilde{\Omega}_{\tau_{O_A}},\ \Omega_{\tau_{O_A}},\ \widetilde{\Omega}_{\tau_A},\ \Omega_{\tau_A},$$

tal que $B \simeq C_0(\Omega) \rtimes \mathbb{F}$. Dado $\beta \in (0,\infty]$ a correspondência $\phi \mapsto \phi\circ E$ é um homeomorfismo afim entre o conjunto de estados ϕ sobre $C_0(\Omega)$ satisfazendo

(i) Se $\beta < \infty$: $\phi(\theta_x(a)) = N(x)^{-\beta}\phi(a)$, para todo $x \in \mathcal{G}$ e todo $a \in C_0(\Delta_{x^{-1}} \cap \Omega)$.
(ii) Se $\beta = \infty$: $\phi(C_0(\Delta_x \cap \Omega)) = \{0\}$, para todo $x \in \mathcal{G}$.

e os estados KMS_β sobre B. Se λ é uma medida de probabilidade sobre Ω correspondente a ϕ , via o Teorema de Representação de Riesz, então $(i - ii)$ são respectivamente equivalentes a :

(i′) Se $\beta < \infty$: $\lambda(\alpha_x(S)) = N(x)^{-\beta}\lambda(S)$, para todo subconjunto de Borel $S \subseteq \Delta_{x^{-1}} \cap \Omega$.
(ii′) Se $\beta = \infty$: $\lambda(\Delta_x \cap \Omega) = 0$, para todo $x \in \mathcal{G}$.

Prova: Não provaremos este resultado, mostraremos apenas a equivalência citada nele. A prova do Teorema pode ser vista em [2].

Começamos então vendo que $(i) \Leftrightarrow (i')$. Para isso suponhamos (i) e tomamos $a = 1_S$, onde S é um subconjunto de Borel contido em $\Delta_{x^{-1}} \cap \Omega$. Agora λ a medida de probabilidade correspondente a ϕ. Logo temos que

$$\phi(\theta_x(1_S)) = \phi(1_S \circ \alpha_{x^{-1}}) = \int_\Omega 1_S \circ \alpha_{x^{-1}} d\lambda = \int_\Omega 1_{\alpha_x(S)} = \lambda(\alpha_x(S)).$$

Por outro lado temos que

$$\phi(\theta_x(1_S)) = N(x)^{-\beta}\phi(1_S) = N(x)^{-\beta}\int 1_\Omega d\lambda = N(x)^{-\beta}\lambda(S).$$

Logo temos que

$$\lambda(\alpha_x(S)) = N(x)^{-\beta}\lambda(S).$$

O raciocínio para ver que $(ii) \Leftrightarrow (ii')$ e a recíproca acima é totalmente análogo ao anterior.

$\square$

O resultado acima motiva uma definição muito interessante.

Definição 8.1.2. Seja Ω um dos espaços acima, seja ϕ um estado sobre $C_0(\Omega)$ e seja λ a medida de probabilidade associada a ϕ via o Teorema de Representação de Riesz. Então ϕ será dito um estado β-*scaling*, e λ será dita uma medida β-*scaling*, onde $\beta \in (0, \infty]$, se as condições do teorema acima são satisfeitas.

A partir de agora nós concentraremos nossas forças na álgebra $\mathcal{T}_A$, que é a sub-álgebra-C* (não necessariamente unital) de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$ gerada por um conjunto de isometrias parciais $\{s_x : x \in \mathcal{G}\}$. A escolha dessa álgebra se dá por inúmeras razões, uma delas é que o estudo de estados KMS é mais interssante neste caso.

Proposição 8.1.3. *Seja $\epsilon = \{e\}$, e suponha que $\epsilon \in \widetilde{\Omega}_{\mathcal{T}_A}$. Então:*

(i) δ_ϵ *é uma medida* β*-scaling, para todo* $\beta \in (0, \infty]$*, onde* δ_ϵ *é a medida de Dirac.*
(ii) para $\beta \in (0, \infty]$ *as medidas* β*-scaling sobre* $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ *consistem precisamente de* δ_ϵ *e as combinações convexas de medidas* β*-scaling sobre* Ω_{τ_A} *e* δ_ϵ*.*

Prova: Vamos começar mostrando que (i) vale. Para tanto precisamos mostrar que se $\beta < \infty$ tem-se $\delta_\epsilon(\alpha_g(S)) = N(g)^{-\beta}\delta_\epsilon(S)$, onde S é um subconjunto de Borel tal que $S \subseteq \Delta_{x^{-1}} \cap \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$. E para $\beta = \infty$, tem-se $\delta_\epsilon(\Delta_x \cap \widetilde{\Omega}_{\tau_A}) = \{0\}$. Notamos então que se $g \neq e$ então $\{e\}$ não pertence a Δ_g, caso contrário deveriamos ter que $g \in \epsilon$, mas $g \neq e$. Logo

$$S \subseteq \Delta_{g^{-1}} \Rightarrow \alpha_g(S) \subseteq \Delta_g \Rightarrow \delta_\epsilon(\alpha_g(S)) = 0$$

e assim, como $\delta_\epsilon(S) = 0$, segue que

$$\delta_\epsilon(\alpha_g(S)) = N(g)^{-\beta}\delta_\epsilon(S).$$

Notamos também que $\delta_\epsilon(\Delta_x \cap \widetilde{\Omega}_{\tau_A}) = 0$. O caso $g = e$ é trivial.

Provaremos agora que (ii) vale. Para isso , consideramos $\{t_1, ..., t_n\} \subset [0, 1]$ tal que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ medidas β-scaling. Então definimos $\lambda = \sum_{i=1}^n t_i\lambda_i$. Notamos então que

$$\lambda(\alpha_x(S)) = \sum_{i=1}^n t_i\lambda_i(\alpha_x(S)) = \sum_{i=1}^n N(x)^{-\beta}t_i\lambda_i(S) = N(x)^{-\beta}\lambda(S).$$

Para a outra igualdade de 8.1.1 fazemos o mesmo raciocínio.

□

Pela proposição anterior nós temos classificados todos os estados KMS sobre $\widetilde{\mathcal{T}}_A$. Vamos agora nos restringir a estudar $\mathcal{T}_A$.

Proposição 8.1.4. *Seja* $\beta \in (0, \infty)$ *e seja* ϕ *um estado* β*-scaling sobre* $C_o(\Omega_{\tau_A})$*. Então para todo* $\mu \in \mathbb{F}_+$ *tem-se que*

$$\phi(p_\mu) = N(\mu)^{-\beta}\phi(q_\mu).$$

Prova: Por $(7.2.1.vi)$ nós temos que $\theta_g(q_g) = p_g$, logo por (8.1.1.i)

$$\phi(p_\mu) = \phi(\theta_\mu(q_\mu)) = N(\mu)^{-\beta}\phi(q_\mu).$$

□

Nós agora introduziremos algumas notações que facilitarão nossa vida ao longo do trabalho.

Definição 8.1.5. Nós denotaremos por:

(i) Ω_μ o subconjunto de Ω_{τ_A} formado pelos $\xi \in \Omega_{\tau_A}$ cujo o stem coincide com μ, para $\mu \in \mathbb{F}_+$.
(ii) Ω_e^μ a interseção $\Omega_e \cap \Delta^\iota_{\mu^{-1}}$ para $\mu \in \mathbb{F}_+$.
(iii) Ω_f o conjunto de elementos limitados de Ω_{τ_A}, isto é, com stem finito.
(iv) Ω_∞ o conjunto formado pelos elementos ilimitados de Ω_{τ_A}.
(v) P_A^n o subconjunto de P_A formado pelas palavras admissíveis de comprimento n.

Faremos agora algumas observações a respeito da definição 8.1.5.

Observação 8.1.6. Notamos que pela definição de Ω_{τ_A}, quando μ é palavra não trivial admissível tem-se que $\Delta^\iota_{\mu^{-1}} = \Delta^\iota_{x^{-1}}$. De fato, supondo que $\mu = y_1...y_k x$ palavra admissível, temos que

$$\xi \in \Delta^\iota_{\mu^{-1}} \Rightarrow \mu^{-1} \in \xi \Rightarrow x^{-1} \in \xi,$$

pois

$$|\mu.e| = |\mu.x^{-1}| + |e.x| \Rightarrow x^{-1} \in \xi \Rightarrow \xi \in \Delta^\iota_{x^{-1}} \Rightarrow \Delta^\iota_{\mu^{-1}} \subseteq \Delta^\iota_{x-1}.$$

Para a outra inclusão notamos que se $\xi \in \Delta^\iota_{x^{-1}}$, então $x^{-1} \in \xi$. Então como μ é admissível temos que $A(x, y_k) = 1$, e assim $x^{-1} y_k^{-1} \in \xi$ pela definição de Ω_{τ_A}. Seguindo assim teremos que $\mu^{-1} \in \xi$, então $\xi \in \Delta^\iota_{\mu^{-1}}$.

Observamos que se μ não é admissível então $\Omega_\mu = \emptyset$. De fato, supondo que $\mu = y_1 y_2 ... y_n$ não seja admissível, temos que $y_1, y_1 y_2, ..., y_1 ... y_n \in \xi$ pela convexidade de ξ. E como μ não é admissível temos que $A(y_i, y_{i+1}) = 0$ para algum i, isto contradiz a definição de Ω_{τ_A}.

Proposição 8.1.7. *Indicando por $\sqcup$ a união disjunta de conjuntos nós temos:*

(i) $\Omega_{\tau_A} = \Omega_\infty \sqcup \Omega_f$,
(ii) $\Omega_f = \sqcup_{\mu \in \mathbb{F}_+} \Omega_\mu = \sqcup_{\mu \in P_A} \Omega_\mu$,
(iii) $\Omega_{\tau_A} = \Omega_e \sqcup (\sqcup_{x \in \mathcal{G}} \Delta^\iota_x)$,
(iv) *Se* $\mu \in \mathbb{F}_+$ *é admissível então* $\Omega_\mu = \alpha_\mu(\Omega_e^\mu)$

Prova: A demonstração decorre da definição 8.1.5 e da obsevação acima. Note que como P_A é um conjunto enumerável, segue que as uniões acima são enumeráveis.

□

Definição 8.1.8. Seja ϕ um estado sobre $C_0(\Omega_{\tau_A})$ e seja λ a medida de probabilidade sobre Ω_{τ_A} associada a ϕ via o Teorema de Representação de Riesz. Então ϕ e λ serão ditos de

(i) tipo finito se $\lambda(\Omega_f) = 1$,
(ii) tipo infinito se $\lambda(\Omega_\infty) = 1$.

Proposição 8.1.9. *Toda medida β-scaling λ sobre Ω_{τ_A} que não é de tipo finito nem de tipo infinito pode ser escrita de modo único como uma combinação convexa de uma medida β-scaling de tipo finito e uma β-scaling de tipo infinito.*

Prova: Suponhamos então que λ seja uma medida β-scaling que não é de tipo finito nem de tipo infinito. Logo $\lambda(\Omega_f),\ \lambda(\Omega_\infty) \neq 0$. Então definimos

$$\lambda_f = \frac{\lambda}{\lambda(\Omega_f)} \ \text{ e } \lambda_\infty = \frac{\lambda}{\lambda(\Omega_\infty)}$$

e tomando $t = \lambda(\Omega_\infty)$ teremos que

$$\lambda = (1-t)\lambda_f + t\lambda_\infty.$$

$\square$

O resultado pode ser usado para caracterizar as medidas β-scaling de tipo infinito.

Proposição 8.1.10. *Seja $\beta \in (0,\infty)$ e seja λ uma medida β-scaling sobre Ω_{τ_A}. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\lambda(\Omega_e) = 0$
(ii) λ é de tipo infinito.

Prova: Vamos primeiro mostrar que $(i) \Rightarrow (ii)$. Por $(8.1.7.iv)$ temos que

$$\lambda(\Omega_\mu) = \lambda(\alpha_\mu(\Omega_e^\mu)) = N(\mu)^{-\beta}\lambda(\Omega_e \cap \Delta_{x^{-1}}^{\iota}) = 0$$

para toda palavra admissível $\mu \in \mathbb{F}_+$ terminada em x. Então usando $(8.1.7.ii)$ e o fato de que $\mathcal{G}$ é enumerável temos que $\lambda(\Omega_f) = 0$.

Para ver que $(ii) \Rightarrow (i)$, notamos que como $\Omega_e \subseteq \Omega_f$, então

$$\lambda(\Omega_e) \leq \lambda(\Omega_f) = 1 - \lambda(\Omega_\infty) = 0 \Rightarrow \lambda(\Omega_e) = 0.$$

$\square$

A forma apropriada para o resultado acima é dado por:

Proposição 8.1.11. *Uma medida de probabilidade λ sobre Ω_{τ_A} é uma medida ∞-scaling se e somente se $\lambda(\Omega_e) = 1$. Em particular toda medida ∞-scaling é de tipo finito.*

Prova: Segue imediatamente de $(8.1.7.iii)$.

$\square$

Dada uma medida β-scaling, podemos calcular a medida de Ω_∞ como segue abaixo (se λ for de tipo finito ou infinito não precisamos fazer uso do resultado abaixo):

Lema 8.1.12. *Seja $\beta \in (0,\infty)$ e seja ϕ um estado β-scaling sobre $C_0(\Omega_{\tau_A})$ com medida associada λ. Então*

$$\lambda(\Omega_\infty) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu \in\ P_A^n} N(\mu)^{-\beta}\phi(q_\mu).$$

Prova: Dado $n \in \mathbb{N}$ considere o subconjunto $S_n = \{\xi \in \Omega_{\tau_A} : |\sigma(\xi)| \geq n\}$, onde $\sigma(\xi)$ é o stem de ξ. Observamos então que

$$S_n = \sqcup_{\mu \in P_A^n} \Delta_\mu^\iota,$$

e que $\Delta_\mu^\iota = \emptyset$ a menos que $\mu \in P_A$. Agora usando (7.2.1.ii) temos que $p_\mu = 1_{\Delta_\mu^\iota}$, e pelo Teorema de Representação de Riesz

$$\phi(p_\mu) = \int_{\Omega_{\tau_A}} p_\mu d\lambda = \int_{\Omega_{\tau_A}} 1_{\Delta_\mu^\iota} d\lambda = \lambda(\Delta_\mu^\iota),$$

e por 8.1.4

$$\phi(p_\mu) = N(\mu)^{-\beta} \phi(q_\mu),$$

então

$$\lambda(S_n) = \sum_{\mu \in P_A^n} \lambda(\Delta_\mu^\iota) = \sum_{\mu \in P_A^n} \phi(p_\mu) = \sum_{\mu \in P_A^n} N(\mu)^{-\beta} \phi(q_\mu).$$

Então observando que $\Omega_\infty = \cap_{n \in \mathbb{N}} S_n$, que $S_1 \supseteq S_2 \supseteq ... \supseteq S_n \supseteq ...$ e assim $\{\lambda(S_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente, temos

$$\lambda(\Omega_\infty) = \lim_{n \to \infty} \lambda(S_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\mu \in P_A^n} N(\mu)^{-\beta} \phi(q_\mu).$$

$\square$

Uma importante consequência do resultado acima é dado por:

Proposição 8.1.13. *Seja $\beta \in (0, \infty)$ e suponha que*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\mu \in P_A^n} N(\mu)^{-\beta} = 0.$$

Então todo estado β-scaling sobre $C_0(\Omega_{\tau_A})$ é de tipo finito.

Prova: Seja ϕ um estado β-scaling com medida λ associada. Então lembramos que

$$\phi(q_\mu) = \int_{\Omega_{\tau_A}} 1_{\Delta_{\mu^{-1}}^\iota} = \lambda(\Delta_{\mu^{-1}}^\iota) \leq \lambda(\Omega_{\tau_A}) = 1$$

De (8.1.12) nós temos

$$\lambda(\Omega_\infty) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\mu \in P_A^n} N(\mu)^{-\beta} \phi(q_\mu) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{\mu \in P_A^n} N(\mu)^{-\beta} = 0,$$

e consequentemente $\lambda(\Omega_f) = 1 - \lambda(\Omega_\infty) = 1$

$\square$

Definição 8.1.14. A função partição para o sistema dinâmico $(\mathcal{T}_A, \sigma, \mathbb{R})$ é a função $Z(\beta)$ dada pela série de Dirichlet

$$Z(\beta) = \sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta}.$$

Observação 8.1.15. Observando que $P_A = \sqcup_{n\in\mathbb{N}} P_A^n$, segue que $Z(\beta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\mu \in P_A^n} N(\mu)^{-\beta}$. Portanto a convergência da série para $Z(\beta)$ implica as hipóteses de (8.1.13).

Nós então consideramos o seguinte caso especial de (8.1.13):

Corolário 8.1.16. *Suponha que $\beta \in (0, \infty)$ é tal que a série para $Z(\beta)$ converge. Então todo estado β-scaling sobre $C_0(\Omega_{\mathcal{T}_A})$ é de tipo finito.*

Algo interessante, e que pode ser visto no nosso próximo resultado, é que a convergência da série que define $Z(\beta)$ não é um fenômeno extremamente raro.

Proposição 8.1.17. *Se $\beta \in (0, \infty)$ e $\sum_{x\in\mathcal{G}} N(x)^{-\beta} < 1$ então*

$$Z(\beta) \leq \frac{1}{1 - \sum_{x\in\mathcal{G}} N(x)^{-\beta}}.$$

Prova: Começamos observando que $P_A \subseteq \mathbb{F}_+ = \sqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_+^n$, onde $\mathbb{F}_+^n$ denota o subconjunto de $\mathbb{F}_+$ das palavras de comprimento n. Portanto temos

$$Z(\beta) = \sum_{\mu \in \mathbb{F}_+} N(\mu)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu \in \mathbb{F}_+^n} N(\mu)^{-\beta} = ...$$

agora usamos o fato de que N é um homomorfismo temos que

$$... = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{x\in\mathcal{G}} N(x)^{-\beta})^n = \frac{1}{1 - \sum_{x\in\mathcal{G}} N(x)^{-\beta}},$$

onde a última igualdade segue da soma de uma série geométrica.

□

Para toda série de Dirichlet existe um valor crítico $\bar{\beta}$ tal que a série converge para $\beta > \bar{\beta}$ e diverge para $\beta < \bar{\beta}$. Analizar o comportamento para $\beta = \bar{\beta}$ nem sempre é fácil e muitas vezes depende de considerações sobre a série ao qual se está trabalhando. Este valor crítico é muitas vezes chamado de *abcissa de convergência.*

Definição 8.1.18. A abcissa de convergência de $Z(\beta)$ será dita a *temperatura crítica inversa* e será denotada por β_c. O conjunto

$$I_c = \{\beta \in (0, \infty) : Z(\beta) < \infty\} \cup \{\infty\}$$

será chamado o *intervalo de temperatura super-crítica inversa.*

As possibilidades para I_c são portanto $(\beta_c, \infty]$ ou $[\beta_c, \infty]$ quando $\beta_c < \infty$. Se $\beta_c = \infty$ então nós devemos ter $I_c = \{\infty\}$.

Corolário 8.1.19. *Para $\beta \in I_c$ todo estado β-scaling sobre $C_0(\Omega_{\tau_A})$ é de tipo finito.*

Prova: Como $\beta \in I_c \Rightarrow Z(\beta) < \infty \Rightarrow \sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta}$. E o resultado segue por 8.1.15 e por (8.1.13).

$\square$

8.2 Existência de Estados Scaling de Tipo Finito

Nesta seção nós veremos o primeiro resultado de existência não trivial. A principal ferramenta que irá ajudar a fazer isso são as medidas scaling restritas a Ω_e.

Proposição 8.2.1. *Seja $\beta \in (0, \infty)$ e seja λ uma medida β-scaling sobre Ω_{τ_A}. Então*

$$\lambda(\Omega_f) = \sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta} \lambda(\Omega_\mu^e).$$

Prova: Tomamos $\mu \in P_A$. Por (8.1.7.*iv*) nós temos que

$$\lambda(\Omega_\mu) = \lambda(\alpha_\mu(\Omega_\mu^e)) = N(\mu)^{-\beta} \lambda(\Omega_\mu^e).$$

Agora por (8.1.7.*ii*) temos que $\Omega_f = \sqcup_{\mu \in P_A} \Omega_\mu$, logo

$$\lambda(\Omega_f) = \lambda(\sqcup_{\mu \in P_A} \Omega_\mu) = \sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta} \lambda(\Omega_\mu^e),$$

onde a última igualdade segue do fato que P_A é um conjunto enumerável.

$\square$

O lado direito da expressão da proposição acima motiva a seguinte definição:

Definição 8.2.2. Para uma medida (positiva) γ sobre algum espaço contendo Ω_e nós definimos

$$Z(\beta, \gamma) = \sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta} \gamma(\Omega_e^\mu), \quad \beta \in \ (0, \infty).$$

Lembramos então que se μ é uma palavra admissível não trivial, tem-se que $\Omega_e^\mu = \Omega_e \cap \Delta_{x^{-1}}^\iota$, onde x é o último gerador na decomposição reduzida de μ. Isso quer dizer que Ω_e^μ depende apenas de x.

Observação 8.2.3. Tomamos γ uma medida sobre algum espaço contendo Ω_e. Então observamos que $\Omega_e \cap \Omega_{\tau_A} = \Omega_e$, $\Omega_e \cap \Delta^{\iota}_{x^{-1}} = \Omega^e_{x^{-1}}$, $N(e)^{-\beta} = 1$, e se μ não pertence P^x_A, onde P^x_A é o conjunto das palavras admissíveis que terminam em x temos $\Omega^\mu_e = \emptyset$, e assim $\gamma(\Omega^\mu_e) = 0$. Logo

$$Z(\beta,\gamma) = \gamma(\Omega_e) + \sum_{x\in\mathcal{G}} (\sum_{\mu\in P^x_A} N(\mu)^{-\beta})\gamma(\Omega^e_x).$$

Isto motiva a introdução de nossa segunda função partição:

Definição 8.2.4. Seja $x \in \mathcal{G}$. A *função partição alvo-fixo relativa ao gerador x para o sistema dinâmico* $(\mathcal{T}_A, \sigma, \mathbb{R})$ é a função $Z_x(\beta)$ dada pela série de Dirichlet

$$Z_x(\beta) = \sum_{\mu\in P^x_A} N(\mu)^{-\beta}, \quad \beta \in (0,\infty).$$

Da definição acima temos:

Proposição 8.2.5. *Para toda medida γ definida sobre algum espaço contendo Ω_e nós temos:*

$$Z(\beta,\gamma) = \gamma(\Omega_e) + \sum_{x\in\mathcal{G}} Z_x(\beta)\gamma(\Omega^x_e) \quad \beta \in (0,\infty).$$

Veremos agora um resultado muito importante na medida em que ele estabelece uma correspondência entre dois conjuntos de medidas.

Proposição 8.2.6. *Seja $\beta \in (0,\infty)$ e seja γ uma medida sobre Ω_e, tal que $Z(\beta,\gamma) = 1$. Seja λ a medida sobre Ω_{τ_A} dada para todo subconjunto mensurável $S \subseteq \Omega_{\tau_A}$ por*

$$\lambda(S) = \sum_{\mu\in P_A} N(\mu)^{-\beta}\gamma(\alpha_{\mu^{-1}}(S \cap \Omega_\mu)).$$

Então λ é uma medida β-scaling de tipo finito sobre Ω_{τ_A}. A correspondência $\gamma \mapsto \lambda$ dá uma aplicação afim bijetiva do conjunto de todas as medidas sobre Ω_e tal que $Z(\beta,\gamma) = 1$, sobre o conjunto de medidas β-scaling de tipo finito sobre Ω_{τ_A}.

Prova: Dado um conjunto mensurável $S \subseteq \Omega_{\tau_A}$ observamos que $S \cap \Omega_\mu \subseteq \Omega_\mu \subseteq \Delta^\iota_\mu$, que é o domínio de $\alpha_{\mu^{-1}}$. Também temos que $\alpha_{\mu^{-1}}(S \cap \Omega_\mu) \subseteq \alpha_{\mu^{-1}}(\Omega_\mu) = \Omega^\mu_e$ por (8.1.7.*iv*). Sendo que $\Omega^\mu_e \subseteq \Omega_e$ e γ está definida sobre Ω_e, nós vemos que cada parcela do somatório da definição de λ está bem definida. Mais ainda

$$\gamma(\alpha_{\mu^{-1}}(S \cap \Omega_\mu)) \leq \gamma(\alpha_{\mu^{-1}}(\Omega_\mu)) = \gamma(\Omega^\mu_e),$$

logo a série que define $\lambda(S)$ é dominada por $Z(\beta,\gamma)$ e, consequentemente, converge. Para $S = \Omega_{\tau_A}$ tem-se que

$$\lambda(S) = \sum_{\mu\in P_A} N(\mu)^{-\beta}\gamma(\alpha_{\mu^{-1}}(\Omega_\mu)) = \sum_{\mu\in P_A} N(\mu)^{-\beta}\gamma(\Omega^\mu_e) = Z(\beta,\gamma) = 1,$$

e assim λ é uma medida de probabilidade. Vejamos agora que λ é de tipo finito. Tomamos então $S = \Omega_f$, lembramos que $\Omega_f = \sqcup_{\mu \in P_A}$, logo $\Omega_f \cap \Omega_\mu = \Omega_\mu$. Assim temos

$$\alpha_{\mu^{-1}}(\Omega_f \cap \Omega_\mu) = \alpha_{\mu^{-1}}(\Omega_\mu) = \Omega_e^\mu \Rightarrow \lambda(\Omega_f) = \sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta}\gamma(\Omega_e^\mu) = Z(\beta,\gamma) = 1.$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que λ é uma medida β-scaling. Para isso devemos mostrar que λ satisfaz

$$\lambda(\alpha_x(S)) = N(x)^{-\beta}\lambda(S)$$

para todo $x \in \mathcal{G}$ e todo subconjunto de Borel $S \subseteq \Delta^\iota_{x^{-1}}$. Observando que Ω_f e Ω_∞ são invariantes por α, e que $\lambda(\Omega_\infty) = 0$, nós podemos supor que $S \subseteq \Omega_f$. Então, por (8.1.7.ii), temos que $S \subseteq \Omega_\mu$ para algum $\mu \in P_A$. Logo

$$S \subseteq \Delta^\iota_{x^{-1}} \cap \Omega_\mu,$$

e assim $x\mu$ é palavra admissível, pois o stem de $x\xi$ é $x\mu$ onde μ é o stem de ξ . Mais anida $\alpha_x(S) \subseteq \Omega_{x\mu}$ e

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha_x(S)) &= N(x\mu)^{-\beta}\gamma(\alpha_{(x\mu)^{-1}}(\alpha_x(S)))\\ &= N(x)^{-\beta}N(\mu)^{-\beta}\gamma(\alpha_{\mu^{-1}}(S)) = N(x)^{-\beta}\lambda(S).\end{aligned}$$

Agora queremos ver que a nossa aplicação é injetiva. Para isso notamos que tomando $S \subseteq \Omega_e$ subconjunto de Borel, $S \cap \Omega_\mu = \emptyset$ sempre que $\mu \neq e$, logo

$$\lambda(S) = N(e)^{-\beta}\gamma(\alpha_e(S \cap \Omega_e)) = 1 \cdot \gamma(S) = \gamma(S),$$

e assim $\lambda|_{\Omega_e} = \gamma$, o que implica a injetividade.

Tomamos agora λ uma medida β-scaling de tipo finito sobre Ω_{τ_A}. Definimos $\gamma := \lambda|_{\Omega_e}$ e observamos que como λ é β-scaling então

$$N(\mu)^{-\beta}\lambda(\Omega_e \cap \Delta^\iota_{\mu^{-1}}) = \lambda(\alpha_\mu(\Omega_e \cap \Delta^\iota_{\mu^{-1}})) = \lambda(\alpha_\mu(\Omega_e^\mu)) = \lambda(\Omega_\mu)$$

onde a última igualdade se deve á (8.1.7.iv). Logo teremos

$$Z(\beta,\gamma) = \sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta}\lambda(\Omega_e^\mu) = \sum_{\mu \in P_A} \lambda(\Omega_\mu) = 1,$$

pois λ é de tipo finito. Agora como γ é levada em λ, concluimos que nossa aplicação é sobrejetiva. Que a aplicação acima é afim é claro.

□

Observação 8.2.7. Tomamos γ uma medida sobre Ω_e tal que $Z(\beta,\gamma) < \infty$. Notamos então que γ deve ser finita pois $\gamma(\Omega_e) \leq Z(\beta,\gamma)$. Considerando

$$\gamma' = \frac{1}{Z(\beta,\gamma)}\gamma,$$

nós obtemos uma medida γ' que satisfaz as hipóteses de (8.2.6), logo ela dá origem a uma medida β-scaling. Com isto poderá acontecer de duas medidas diferentes γ_1, γ_2 serem levadas na mesma medida β-scaling λ. Mas a aplicação definida em (8.2.6) é injetiva, logo $\gamma_1' = \gamma_2'$. Mas

$$\gamma_1' = \gamma_2' \Leftrightarrow \frac{1}{Z(\beta,\gamma_1)}\gamma_1 = \frac{1}{Z(\beta,\gamma_2)}\gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{Z(\beta,\gamma_1)}{Z(\beta,\gamma_2)}\gamma_2.$$

Desse modo concluímos que γ_1, γ_2 definem a mesma medida β-scaling se e somente se $\gamma_1 = K\gamma_2$ com $K \in \mathbb{R}$.

Definição 8.2.8. Dado $\beta \in (0,\infty)$ e uma medida não nula γ sobre Ω_e nós denotaremos por $T_\beta(\gamma)$ a medida β-scaling de tipo finito λ obtida aplicando a Proposição 8.2.6 à medida $\frac{\gamma}{Z(\beta,\gamma)}$. Se $\beta = \infty$ e γ é uma medida qualquer finita não nula sobre Ω_e nós definiremos $T_\beta(\gamma)$ sobre Ω_{τ_A} por

$$T_\beta(\gamma)(S) = \frac{\gamma(S \cap \Omega_e)}{\gamma(\Omega_e)},$$

para todo $S \subseteq \Omega_{\tau_A}$ subconjunto de Borel.

No Teorema abaixo assumiremos as hipóteses iniciais seção 1 deste capítulo.

Teorema 8.2.9. *Seja $\beta \in I_c$. Então a correspondência $\gamma \mapsto T_\beta(\gamma)$ estabelece uma aplicação sobrejetiva do conjunto de medidas finitas não nulas γ, que estão definidas sobre Ω_e, no conjunto de medidas β-scaling sobre Ω_{τ_A} de tipo finito. Esta correspondência não é injetiva, mas $T_\beta(\gamma_1) = T_\beta(\gamma_2)$ se e somente se γ_1 é múltipla de γ_2.*

Prova: Começamos lembrando que I_c é o intervalo de convergência da série de Dirichlet $\sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta}$ e tomando γ medida não nula e finita sobre Ω_e. Então como $\Omega_e^\mu = \Omega_e \cap \Delta_{\mu^{-1}}^{\iota}$, segue que $\gamma(\Omega_e^\mu) \leq \gamma(\Omega_e)$. E assim

$$Z(\beta,\gamma) = \sum_{\mu \in P_a} N(\mu)^{-\beta}\gamma(\Omega_e^\mu) \leq \gamma(\Omega_e) \sum_{\mu \in P_a} N(\mu)^{-\beta} < \infty.$$

Logo dado $\beta \in I_c$, temos que $T_\beta(\gamma)$ está definido para toda medida γ finita e não nula sobre Ω_e.

Para obtermos a afirmação do Teorema aplicamos agora a observação 8.2.7 e o resultado segue.

□

O Teorema acima nos dá uma caracterização completa das medidas β-scaling sobre Ω_{τ_A} quando $\beta \in I_c$. Consequentemente ele também nos dá uma caracterização completa dos estados KMS_β sobre $\mathcal{T}_A$.

Capítulo 9

Matrizes Irredutíveis e a Função Partição Alvo-Fixo $Z_x(\beta)$

9.1 Algumas Hipóteses Adcionais

Introduziremos nesta seção algumas hipóteses que utilizaremos durante os próximos capítulos. São elas:

(IRR) A é *irredutível,* isto é, para todo x e $y \in \mathcal{G}$ existe uma palavra admissível $\mu = \mu_1 ... \mu_{|\mu|}$, com $\mu_1 = x$ e $\mu_{|\mu|} = y$.

(COL) A não tem colunas identicamente nulas.

(FTS) Existe *um conjunto alvo finito* , isto é, um conjunto finito $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq \mathcal{G}$ tal que para todo $x \in \mathcal{G}$ tem-se que $A(x, y_i) = 1$ para no mínimo um i.

(INF) $\inf_{x \in \mathcal{G}} N(x) > 1$.

Note que, exceto para a implicação $(IRR) \Rightarrow (COL)$, não existe nenhuma outra relação lógica entre as condições acima.

9.2 Alguns Resultados Sobre $Z_x(\beta)$

Proposição 9.2.1. *Sejam $x, y \in \mathcal{G}$. Suponha que exista uma palavra admissível $\nu \in P_A$ começando em x e terminando em y. Então para $\beta \in (0, \infty)$ tem-se que*

$$Z_x(\beta) \leq N(x^{-1}\nu) Z_y(\beta).$$

Com isto, se A for irredurível, então para todo $\beta \in (0, \infty)$, tem-se que ou

- $Z_x(\beta) < \infty$ *para todo* $x \in \mathcal{G}$ *ou*
- $Z_x(\beta) = \infty$ *para todo* $x \in \mathcal{G}$.

Prova: Começamos considerando a aplicação $\mu \in P_A^x \mapsto \mu x^{-1} \in P_A^y$. Notamos então que essa aplicação é injetiva. Com isso temos que

$$\begin{aligned} Z_y(\beta) = \sum_{\mu \in P_A^y} N(\mu)^{-\beta} &\geq \sum_{\mu \in P_A^x} N(\mu x^{-1}\nu)^{-\beta} \\ &= N(x^{-1}\nu)^{-\beta} \sum_{\mu \in P_A^x} N(\mu)^{-\beta} = N(x^{-1}\nu)^{-\beta} Z_x(\beta). \end{aligned}$$

□

Observamos então que se assumimos que a matriz A é irredutível, pela Proposição anterior, temos que o conjunto dos β para os quais tem-se $Z_x(\beta) < \infty$ não depende x. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 9.2.2. Se A é irredutível a abcissa de convergência para cada uma, e portanto para todas, das séries de Direchlet $Z_x(\beta)$ será chamada a *temperatura crítica inversa alvo-fixo* e será denotada por $\dot{\beta}_c$. O conjunto dos β onde cada uma das séries converge, incluindo $\beta = \infty$, será chamado o *intervalo de temperaturas super críticas alvo-fixo* e será denotado $\dot{I}_c$.

Como antes $\dot{I}_c$ pode ser ou $(\dot{\beta}_c, \infty)$ ou $[\dot{\beta}_c, \infty)$ quando $\dot{\beta}_c < \infty$, e $\dot{I}_c = \{\dot{\beta}\}$ quando $\dot{\beta}_c = \infty$.

Proposição 9.2.3. $\dot{\beta}_c \leq \beta_c$ *e* $\dot{I}_c \supseteq I_c$.

Prova: Começamos lembrando que I_c é o intervalo de convergência da série de Direchlet $Z(\beta) = \sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta}$, e que I_c é intervalo de convergência para a série $Z_x(\beta) = \sum_{\mu \in P_A^x} N(\mu)^{-\beta}$. Com isso temos que $Z_x(\beta) \leq Z(\beta)$, e assim segue que $\dot{\beta}_c \leq \beta_c$ e $\dot{I}_c \supseteq I_c$.

□

Agora relembrando o Corolário 8.1.19 que diz que para $\beta \in I_c$ toda medida β-scaling é de tipo finito. O próximo resultado diz o que acontece, em relação a ser de tipo finito ou infinito, com a medida β-scaling quando β não pertence a $\dot{I}_c$.

Proposição 9.2.4. *Sob as hipóteses iniciais da seção* 8.1 *assuma que* A *é irredutível e seja* $\beta \notin \dot{I}_c$. *Então toda medida* β*-scaling sobre* Ω_{τ_A} *é de tipo infinito. Consequentemente não existem medidas* β*-scaling de tipo finito.*

Prova: Começamos tomando λ uma medida β-scaling sobre Ω_{τ_A}. Então por (8.2.1) e (8.2.5) nós temos que

$$\lambda(\Omega_f) = \lambda(\Omega_e) + \sum_{x \in \mathcal{G}} Z_x(\beta) \lambda(\Omega_e^x).$$

Agora como $\beta \notin \dot{I}_c$ nós temos $Z_x(\beta) = \infty$ para todo $x \in \mathcal{G}$, e como λ é uma medida de probabilidade isto implica que $\lambda(\Omega_e^x) = 0$ e assim $\lambda(\Omega_f) = \lambda(\Omega_e)$. Agora usando o fato de que $\mathcal{G}$ é enumerável nós temos que

$$0 = \lambda(\cup_{x\in\mathcal{G}}\Omega_e^x) = \lambda(\cup_{x\in\mathcal{G}}(\Omega_e \cap \Delta^\iota_{x^{-1}})) = \lambda(\Omega_e \cap (\cup_{x\in\mathcal{G}}\Delta^\iota_{x^{-1}})).$$

Nós afirmamos então que $\Omega_e \subseteq (\cup_{x\in\mathcal{G}}\Delta^\iota_{x^{-1}})$. Para vermos isto suponhamos por contradição que exista $\xi \in \Omega_e \backslash (\cup_{x\in\mathcal{G}}\Delta^\iota_{x^{-1}})$. Então, por definição, temos que $x^{-1} \notin \xi$ para todo x, e com isso $R_\xi(e) = \{x \in \mathcal{G} : ex^{-1} \in \xi\} = \emptyset$. Sendo que $\xi \in \Omega_e$ nós temos que o stem de ξ é e. Agora usando o Teorema 5.12 de [3] nós concluimos que $\xi = e$. Mas isto é uma contradição pois $\Omega_e \subseteq \Omega_{\tau_A} = \tilde{\Omega}_{\tau_A} \backslash \{e\}$. Logo $\Omega_e \subseteq (\cup_{x\in\mathcal{G}}\Delta^\iota_{x^{-1}})$ e isto implica que $\lambda(\Omega_e) = 0$ e assim $\lambda(\Omega_f) = 0$.

□

9.3 Um Exemplo

Nesta seção tentaremos aplicar um pouco da teoria construida até agora.

Exemplo 9.3.1. O objetivo deste exemplo é obter alguns estados β-scaling sobre $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$. Começamos considerando $\beta \in (1, \infty)$, $\mathcal{G} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, e $A = \{A(i,j)\}_{i,j\in\mathcal{G}}$ onde

$$A(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{se } (i,j) = (0,0) \\ 1, & \text{se } (i,j) = (k,k+1) \\ 1, & \text{se } (i,j) = (k,k-1) \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Ou seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & ... & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \end{pmatrix}$$

Então definimos a seguinte aplicação:

$$N : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \{0, 1\}$$

$$k \mapsto 2^{2k+2}.$$

desta aplicação podemos obter, de maneira natural, um homomorfismo de $\mathbb{F}$ sobre $\mathbb{R}^*_+$. Observamos então que $A(k) > 1 \ \forall \ k \in \mathcal{G}$. Agora consideramos o conjunto de palavras admissíveis de comprimento n, que notaremos por P^n_A, e $P_{A^n_k}$, o subconjunto de P^n_A, formado pelas palavras que começam por $x = k$. Então teremos que

$$P^n_A = \cup_{k=0}^{\infty} P_{A^n_k}.$$

Agora notamos que tomando $\mu \in P_{A_x^n}$,

$$\mu = k.\mu_2...\mu_n \Rightarrow N(\mu) = N(k)N(\mu_1)...N(\mu_n) \geq N(k)N(0)^{n-1}$$
$$= 2^{2k+2}(2^2)^{n-1} \Rightarrow N(\mu)^{-\beta} \leq \frac{1}{2^{2k+2}}\frac{1}{2^{2(n-1)}}.$$

Notamos também que

$$\mu \neq k00...0 \Rightarrow N(\mu) \geq N(k)N(1)N(0)^{n-2} = 2^{2k+2}.2^4(2^2)^{n-2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N(\mu)^{-\beta} \leq \frac{1}{2^{2k+2}} \quad \frac{1}{2^4} \quad \frac{1}{2^{2(n-2)}}.$$

E como temos que fixado $x = k$, existem no máximo 2^{n-2} palavras que começam com k e o 1 aparece apenas uma vez, segue que

$$\sum_{\mu \in P_{A_k^n}} N(\mu)^{-\beta} \leq \frac{1}{2^{2k+2}} \ \frac{1}{2^{2(n-1)}} + \frac{1}{2^{2k+2}} \ \frac{1}{2^4} \ \frac{1}{2^{2(n-2)}}.2^{n-2}$$
$$= \frac{1}{2^{2k+2n}} + \frac{1}{2^{2k+n+4}}.$$

Então notamos que como

$$P_A^n = \cup_{k=0}^{\infty} P_{A_k^n},$$

segue que

$$\sum_{\mu \in P_A^n} N(\mu)^{-\beta} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\mu \in P_{A_i^n}} N(\mu)^{-\beta} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i+2n}} + \frac{1}{2^{2i+n+4}}$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}} + \frac{1}{2^{n+4}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}} = \frac{17}{12}.\frac{1}{2^n} \Longrightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu \in P_A^n} N(\mu)^{-\beta} = \frac{17}{12} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Logo, pela Proposição 8.1.13, segue dado um $\beta \in (0, \infty)$, e construindo o homomorfismo como definimos, teremos que toda medida β-scaling λ será de tipo finito.

Agora temos que $Z(\beta) = \sum_{\mu \in P_A} N(\mu)^{-\beta}$. Então como $\sum_{k \in \mathcal{G}} N(k)^{-\beta} = \frac{1}{3}$, segue, pela Proposição 8.1.17, que

$$Z(\beta) \leq \frac{1}{1 - \sum_{k \in \mathcal{G}} N(k)^{-\beta}} = \frac{3}{2},$$

e assim da observação 8.1.15 não precisariamos fazer as contas acima para ver que toda medida β-scaling é de tipo finito. O nosso próxmo objetivo é majorar a função partição relativa ao gerador k, $Z_k(\beta) = \sum_{\mu \in P_A^k} N(\mu)^{-\beta}$. Para fazermos isso vamos definir e relembrar algumas coisas:

(i) $P_A^k = \{\mu \in P_A : \mu = \mu' k, \;\; \mu \in P_A\}$.
(ii) $P_{A^n}^k = \{\mu \in P_A^k : |\mu| = n\}$.

Com isto temos que $P_A^k = \cup_{n=1}^{\infty} P_{A^n}^k$. Logo Agora notamos que se $\mu \in P_{A^n}^k$, temos que

$$\mu = \begin{cases} a_1 ... a_{n-2}(k-1)k, & \text{ou} \\ a_1 ... a_{n-2}(k+1)k. \end{cases}$$

Onde $a_i \in \mathcal{G}$. Logo temos que

$$N(\mu) \geq 2^{2k+2} 2^{2(k-1)+2} 2^{2(n-2)} \Rightarrow N(\mu)^{-\beta} \leq \frac{1}{2^{2k+2}} \frac{1}{2^{2(k-1)+2}} \frac{1}{2^{2(n-2)}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{\mu \in P_{A^n}^k} N(\mu)^{-\beta} \leq \frac{1}{2^{2k+2}} \frac{1}{2^{2(k-1)+2}} \frac{1}{2^{2(n-2)}} \cdot 2^{n-2} = \frac{1}{2^{4k+n}}$$

Agora observamos que

$$Z_k(\beta) = \sum_{\mu \in P_A^k} N(\mu)^{-\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu \in P_{A^n}^k} N(\mu)^{-\beta}.$$

Logo

$$Z_k(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu \in P_{A^n}^k} N(\mu)^{-\beta} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+n}} = \frac{1}{2^{4k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{4k}} \leq 1.$$

Com o que fizemos acima teremos que

$$Z(\beta, \gamma) = \gamma(\Omega_e) + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\beta) \gamma(\Omega_e^k) \leq \gamma(\Omega_e) + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\beta) \gamma(\Omega_e)$$
$$\leq \gamma(\Omega_e)(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k}}) = \gamma(\Omega_e)(1 + \frac{1}{15}) = \gamma(\Omega_e) \frac{16}{15}.$$

Com isso chegamos á seguinte conclusão:

$$\gamma(\Omega_e) \leq Z(\beta, \gamma) \leq \frac{16}{15} \gamma(\Omega_e).$$

Observação 9.3.2. Começamos observando que se tomamos $\beta = 1$ e consideramos $Z(\beta)$, teremos que $Z(\beta) = \infty$. Logo $I_c = (1, \infty)$, e também teremos que $\dot{I}_c = (1, \infty)$.

Tentaremos voltar a este exemplo mais tarde e por isso não nos estenderemos mais neste momento.

Capítulo 10

A Estrutura de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$

Nós continuamos assumindo as hipóteses listadas na seção 1 do capítulo 8. Neste capítulo nós trabalharemos sobre $\widetilde{\mathcal{T}}_A$.

Nosso maior desejo é descrever, para cada temperatura inversa β, os estados KMS_β de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$, e que nós faremos caracterizando o simplexo formado por todas as medidas de probabilidade β-scaling sobre $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$. Como um objetivo intermediário nós mostraremos que estas medidas são parametrizadas por certos estados sobre $\widetilde{\mathcal{Q}}$.

10.1 O Estudo de $\widetilde{\mathcal{Q}}$ e Outras Sub-álgebras de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$

Proposição 10.1.1. *Considere a aplicação* $R : \widetilde{\Omega}_{\tau_A} \to \Sigma_A$ *dada por* $R(\xi) = R_\xi(e)$ *e seja* $r : \widetilde{\Omega}_{\tau_A} \to \Omega_e$ *dada por* (6.2.10). *Então:*

(i) Existe um homeomorfismo $h : \Sigma_A \to \widetilde{\Omega}_e$ *tal que o diagrama*

$$\widetilde{\Omega}_{\tau_A} \to \widetilde{\Omega}_e$$

comuta.
(ii) Sejam $\hat{R} : C(\Sigma_A) \to C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ *e* $\hat{r} : C(\widetilde{\Omega}_e) \to C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ *onde* $\hat{R}(f) = f \circ R$ *e* $\hat{r}(g) = g \circ r$. *Então as imagens de* $\hat{R}$ *e* $\hat{r}$ *coincidem com* $\widetilde{\mathcal{Q}}$.
(iii) $\hat{R}$ *e* $\hat{r}$ *são isomorfismos sobre* $\widetilde{\mathcal{Q}}$ *e consequentemente*

$$\widetilde{\mathcal{Q}} \simeq C(\Sigma_A) \simeq C(\widetilde{\Omega}_e).$$

(iv) Para todo $a \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ *e todo* $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ *tem-se que* $a(\xi) = a(r(\xi))$

Prova: Nós começamos observando que

$$R(\xi) = R_\xi(e) = \{x \in \mathcal{G} : x^{-1} \in \xi\} \subseteq \mathcal{G}$$

pode ser visto como uma sequência de 0 e 1 ´s, pois $\mathcal{G}$ é enumerável, e assim $R(\xi) \in \mathcal{G}$. Agora afirmamos que para ξ, η tem-se que

$$R(\xi) = R(\eta) \Leftrightarrow r(\xi) = r(\eta).$$

De fato se $R(\xi) = R(\eta)$, então, pela definição de R, temos $R_\xi(e) = R_\eta(e)$. Agora lembrando da definição de r temos que sendo $R_\xi(e) = \{x \in \mathcal{G} : ex^{-1} \in \xi\}$ a raiz de e em relação á ξ, temos que $R_{r(\xi)}(e) = R_\xi(e)$. E assim

$$R(\xi) = R(\eta) \Rightarrow R_\xi(e) = R_\eta(e) \Rightarrow R_{r(\xi)}(e) = R_{r(\eta)}(e).$$

Agora pelo Teorema 5.14 de [3] segue que $r(\xi) = r(\eta)$. Agora suponhamos que $r(\xi) = r(\eta)$ então teremos que

$$R(\xi) = R_\xi(e) = R_{r(\xi)}(e) = R_{r(\eta)}(e) = R_\eta(e) = R(\eta).$$

Agora notamos que como R e r são sobrejetivas, existe uma bijeção h tal que $h \circ R = r$.

Afirmamos então que se R e r forem contínuas então h também será. De fato tomando $F \subseteq \widetilde{\Omega}_e$ fechado, temos que

$$(h \circ R)^{-1}(F) = r^{-1}(F) \Rightarrow R^{-1}(h^{-1}(F)) = r^{-1}(F) \Rightarrow h^{-1}(F) = R(r^{-1}(F)).$$

Então como r é contínua $r^{-1}(F)$ e fechado, e se R for contínua, como $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ é compacto e R é sobrejetiva, R levará fechados em fechados e assim $h^{-1}(F)$ será fechado. Para vermos que R é contínua consideramos $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ e sua imagem por R, $R(\xi) = R_\xi(e)$. Tomamos então V vizinhança de $R(\xi)$. Lembrando da topologia produto temos que

$$V = V_{X,\ Y} = \{c \in \Sigma_A : t_1, ..., t_n \in R(\xi), \quad s_1, ..., s_m \notin R(\xi)\},$$

onde $t_1, ..., t_n \in \mathbb{F}$ e $s_1, ..., s_m \in \mathbb{F}$. Então como $R(\xi) = R_\xi(e) = \{x \in \mathcal{G} : x^{-1} \in \xi\} \subseteq \mathcal{G}$, vemos que $t_1, ..., t_n \in \mathcal{G}$. Então definindo

$$X^{-1} = \{t_1^{-1}, ..., t_n^{-1}\}, \quad Y^{-1} = \{s_1^{-1}, ..., s_m^{-1}\}$$

e

$$W = W_{X^{-1},\ Y^{-1}} = \{a \in \tilde{\Omega}_{\tau_A} : t_1^{-1}, ..., t_n^{-1} \in a, \quad s_1^{-1}, ..., s_m^{-1} \notin a\},$$

teremos que W é aberto, contém ξ e $R(W) \subseteq V$, logo R é contínua. Agora como h é uma bijeção contínua entre compactos então é homeomorfismo e a prova de (i) está concluída.

Por $(7.2.1.iii)$ nós temos que $q_x = 1_{\Delta^{\iota}_{x^{-1}}}$, logo

$$q_x(\xi) = [x^{-1} \in \xi] = \begin{cases} 1, & se \ \ x^{-1} \in \xi \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Agora lembramos que $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é sub-álgebra gerada pelo conjunto $\{q_x : x \in \mathcal{G}\} \cup \{1\}$. Assim para $a \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ temos que o valor de $a(\xi)$ depende apenas do conjunto $\{x \in \mathcal{G} : x^{-1} \in \xi\} = R_\xi(e) = R(\xi)$. Logo se $\xi, \eta \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$

$$R(\xi) = R(\eta) \Rightarrow (\forall\ a \in \ \widetilde{\mathcal{Q}}, \quad a(\xi) = a(\eta)),$$

e assim obtemos (iv), pois $R(r(\xi)) = R(\xi)$.

Por último observamos que como R é sobrejetiva então ela possui uma inversa a direita, isto é, existe A tal que $R \circ A = Id|_{\Sigma_A}$. Logo

$$\hat{R}(f) = f \circ R = \hat{R}(g) = g \circ R \Rightarrow f = g,$$

e assim $\hat{R}$ é injetiva e (iii) segue.

$\square$

Observação 10.1.2. Seja $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\tau_A}$ e seja $c \in \Sigma_A$ tal que $R(\xi) = c$. Então observamos que para todo $x \in \mathcal{G}$, $q_x(\xi) = [x^{-1} \in \xi] = [x \in c]$. Logo identificando $\widetilde{\mathcal{Q}}$ com $C(\Sigma_A)$, via $\hat{R}$, nós podemos pensar q_x como a função

$$q_x(c) = [x \in c] = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in c \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}.$$

Agora dados subconjuntos finitos X e Y de $\mathcal{G}$ e lembrando que

$$q(x, Y) = \prod_{x \in X} q_x \prod_{y \in Y} (1 - q_y),$$

temos que $q(X, Y)$ está identificada com a função característica do conjunto

$$V_{X,\ Y} = \{c \in \Sigma_A : x \in c,\ y \notin c,\ \forall\ x \in X,\ \forall\ y \in Y\}.$$

Estes conjuntos formam uma base para a topologia produto de $2^{\mathcal{G}}$.

Lema 10.1.3. *Para cada $a \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ e cada $\varepsilon > 0$ existem subconjuntos finitos $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_n$ de $\mathcal{G}$ e números reais positivos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tais que o elemento*

$$b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q(X, Y)$$

satisfaz

(i) $0 \leq b \leq a$, *e*
(ii) $\|a - b\| \leq \varepsilon$.

Prova: Começamos então definindo $K = \{c \in \Sigma_A : a(c) \geq 2\|a\|/3\}$ e $U = \{c \in \Sigma_A : a(c) > \|a\| > 3\}$, onde $\|a\| = sup_{c \in \Sigma_A} \|a(c)\|$. Notamos então que K é compacto, U é aberto e $K \subseteq U \subseteq \Sigma_A$. Com isto podemos tomar uma subcobertura finita de K por conjuntos $V(X_i, Y_i) \subseteq U$, tais que $V(X_i, Y_i) \cap V(X_j, Y_j) = \emptyset$, se $i \neq j$. Agora definimos

$$b_1 = \frac{\|a\|}{3} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q(X_i, Y_i).$$

Afirmamos então que $0 \leq b_1 \leq a$. De fato, dado $c \in \Sigma_A$, temos que se $c \in U$ então $c \in \cup_{i=1}^n V(X_i, Y_i)$ ou $c \notin \cup_{i=1}^n V(X_i, Y_i)$. Se $c \in \cup_{i=1}^n V(X_i, Y_i)$ então existe j tal que $c \in V(X_j, Y_j)$, logo

$$b_1(c) = \frac{\|a\|}{3} \sum_{i=1}^{n} q(X_i, Y_i)(c) = \frac{\|a\|}{3} q(X_j, Y_j)(c) = \frac{\|a\|}{3} < a(c) \leq \|a\|.$$

Se $c \notin \cup_{i=1}^n V(X_i, Y_i)$ então $q(X_i, Y_i)(c) = 0$ para todo i, e assim $b_1(c) = 0 < \|a\|/3 < a(c)$, pois $c \in U \setminus \cup_{i=1}^n V(X_i, Y_i)$. Agora se $c \in \Sigma_A \setminus U$ então teremos que $0 = b_1(c) \leq a(c)$.

Também temos que $\|a - b_1\| \leq 2\|a\|/3$. De fato se $c \in \cup_{i=1}^n V(X_i, Y_i)$ então $0 \leq a(c) - b_1(c) \leq \|a\| - \|a\|/3 = 2\|a\|/3$, para os outros casos o raciocínio é análogo. Deste modo nós construimos um elemento b_1 tal que

$$0 \leq b_1 \leq a, \quad \|a - b_1\| \leq 2\|a\|/3.$$

Agora aplicamos o procedimento acima ao elemento $a - b_1$, e então obteremos b_2 tal que

(i) $0 \leq a - b_1 - b_2 \leq a - b_1 \leq a$
(ii) $\|a - b_1 - b_2\| \leq \frac{2}{3}\|a - b_1\| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\|a\| = (\frac{2}{3})^2\|a\|$

Seguindo assim obteremos, após n etapas, um elemento b_n tal que

$$0 \leq b_n \leq a - b_1 - ... - b_{n-1}, \ e \ \|a - b_1 - ... - b_{n-1} - b_n\| \leq (2/3)^n\|a\|.$$

Logo para obtermos o elemento desejado tomamos n tal que $(2/3)^n < \varepsilon$ e $b = b_1 + ... + b_n$.

□

Nós vamos agora estudar outras sub-álgebras de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$.

Proposição 10.1.4. *Para cada $\mu \in \mathbb{F}_+$ seja $\mathcal{I}^\mu = S(\mu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\mu)^*$. Então*

(i) Se μ, $\nu \in \mathbb{F}_+$ tais que $|\mu| = |\nu|$ mas $\mu \neq \nu$ então $\mathcal{I}^\mu\mathcal{I}^\nu = \{0\}$.
(ii) Se μ, $\nu \in \mathbb{F}_+$ são tais que $|\mu| \leq |\nu|$ então $\mathcal{I}^\mu\mathcal{I}^\nu \subseteq \mathcal{I}^\nu$.
(iii) Cada $\mathcal{I}^\mu$ é uma $*$-subálgebra fechada e unital de $\widetilde{\tau}_A$ e $S(\mu)S(\mu)^*$ é sua unidade.

Prova: Começamos observando que por $(7.2.3.i)$ vale que se $\mu \neq \nu$ e $|\mu| = |\nu|$ então $S(\mu)^*S(\nu) = 0$ e assim dados $S(\mu)aS(\mu)^* \in \mathcal{I}^\mu$ e $S(\nu)bS(\nu) \in \mathcal{I}^\nu$, com a e $b \in \widetilde{\mathcal{Q}}$, $S(\mu)aS(\mu)^*S(\nu)bS(\nu)^* = 0$ e assim $\mathcal{I}^\mu\mathcal{I}^\nu = \{0\}$.

Para a parte (ii) temos, por $(7.2.3.ii)$, que se $|\mu| \leq |\nu|$ então temos $S(\mu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\mu)^*S(\nu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^* \subseteq S(\nu)\widetilde{\mathcal{Q}}S(\nu)^*$, e o resultado segue.

Por último vamos mostrar (iii). Notamos que $\mathcal{I}^\mu$ é ideal por (ii). Para ver que $S(\mu)S(\mu)^*$ é a unidade de $\mathcal{I}^\mu$ tomamos $S(\mu)aS(\mu)^* \in \mathcal{I}^\mu$ teremos que

$$\begin{aligned} S(\mu)S(\mu)^*S(\mu)aS(\mu)^* &= S(\mu)S(\mu^{-1})S(\mu)aS(\mu)^* = S(\mu\mu^{-1}\mu)aS(\nu)^* \\ &= S(e)S(\mu)aS(\mu)^* = S(\mu)aS(\mu)^*. \end{aligned}$$

Nos falta mostrar que $\mathcal{I}^\mu$ é fechado. Para isso tomamos uma sequência $\{S(\mu)a_nS(\mu)^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \widetilde{\mathcal{Q}}$, convergindo para algum $b \in \widetilde{\mathcal{T}}_A$. Então

$$\begin{aligned}
b = \lim_n S(\mu)a_nS(\mu)^* &= \lim_n S(\mu)S(\mu)^*S(\mu)a_nS(\mu)^*S(\mu)S(\mu)^* \\
&= S(\mu)S(\mu)^*bS(\mu)S(\mu)^*,
\end{aligned}$$

logo precisamos mostrar que $S(\mu)^*bS(\mu) \in \tilde{\mathcal{Q}}$. Para isso notamos que

$$S(\mu)^*bS(\mu) = \lim_n S(\mu)^*S(\mu)a_nS(\mu)^*S(\mu),$$

que pertence à $\widetilde{\mathcal{Q}}$ por (7.2.3.*ii*).

□

Proposição 10.1.5. *Para cada $n \geq 0$ inteiro seja $\mathcal{I}_n$ o fecho de $\oplus_{\mu\in\mathbb{F}_+}\mathcal{I}_\mu$ dentro de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$. Então $\mathcal{I}_n$ é uma subálgebra-C^* de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$ que é isomorfa a álgebra-C^* formada pelas famílias $(a_\mu)_{\mu\in\mathbb{F}_+}$ tais que $lim_\mu\|a_\mu\| = 0$. Em particular a net de idempotentes $\{\sum_{\mu\in J} p_\mu\}_J$, onde J vive na coleção de subconjuntos finitos de $\mathbb{F}_+^n$, forma uma unidade aproximada para $\mathcal{I}_n$.*

Fazer a prova com atenção.

Proposição 10.1.6. *Seguindo as definições da Proposição acima temos:*

(i) *Para todo n e m tem-se $\mathcal{I}_n\mathcal{I}_m \subseteq \mathcal{I}_{max\{n,m\}}$.*
(ii) *Para $n \geq 1$ e $x \in \mathcal{G}$ tem-se que $s_x^*\mathcal{I}_ns_x \subseteq \mathcal{I}_{n-1}$.*
(iii) *Para $n \geq 0$ e $x \in \mathcal{G}$ tem-se que $s_x\mathcal{I}_ns_x^* \subseteq \mathcal{I}_{n+1}$.*

Prova: O ítem (i) segue de (10.1.*ii*). Agora para (ii) tomamos $a \in \widetilde{Q}$ e $\mu \in \mathbb{F}_+^n$. Queremos mostrar que $s_x^*S(\mu)aS(\mu)^*s_x$ pertence à $\mathcal{I}_{n-1}$. Seja então y o primeiro gerador na decomposição reduzida de μ, tal que $\mu = y\mu'$ onde $\mu' \in \mathbb{F}_+$.

Agora observamos que se $x \neq y$ então

$$s_x^*S(\mu) = s_x^*S(y\mu') = s_x^*s_yS(\mu') = 0,$$

por (CK_2). Assumiremos então que $x = y$. Começamos observando que $|\mu| = 1$ então $\mu = x$, e assim

$$s_x^*S(\mu)aS(\mu)^*s_x = q_xaq_x \in \widetilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{I}_0.$$

Se $|\mu| \geq 2$ então $\mu = x\mu'$ e assim

$$s_x^*S(\mu) = s_x^*S(x\mu') = s_x^*s_xS(\mu') = q_xS(\mu') = \varepsilon S(\mu'),$$

onde $\varepsilon \in \{0, 1\}$, por (CK_3). Portanto

$$s_x^*S(\mu)aS(\mu)^*s_x = \varepsilon S(\mu')aS(\mu')^* \quad \in \mathcal{I}_{n-1}.$$

Por último vamos mostrar (iii). Para isso notamos que se $\mu \in \mathbb{F}_+^n$ então dado $x \in \mathcal{G}$ $|x\mu| = n + 1$, ou seja, $x\mu \in \mathbb{F}_+^{n+1}$. Logo teremos que

$$s_xS(\mu)aS(\mu)^*s_x^* = S(x\mu)aS(x\mu)^* \quad \in \mathcal{I}_{n+1}.$$

□

Proposição 10.1.7. *Para cada inteiro $n \geq 0$ seja A_n o fecho de $\mathcal{I}_0 + ... + \mathcal{I}_n$ dentro de $\widetilde{\mathcal{T}}_A$. Então*

(i) A_n é uma álgebra-C.*
(ii) $\mathcal{I}_n$ é um ideal de A_n.
(iii) $A_{n+1} = \mathcal{I}_{n+1}$.
(iv) $C(\widetilde{\Omega}_{\mathcal{T}_A})$ é o fecho de $\cup_n A_n$.
(v) Para $n \geq 1$ e $x \in \mathcal{G}$ tem-se que $s_x^* A_n s_x \subseteq A_{n-1}$.
(vi) Para $n \geq 0$ e $x \in \mathcal{G}$ tem-se que $s_x A_n s_x^* \subseteq A_{n+1}$.

Prova: Começamos observando que (i) e (ii) seguem de $(10.1.7.i)$. Agora usando o resultado 1.5.8 de [6] tem-se (iii).

Para provarmos (iv) observamos que pelo Teorema 7.2.4 temos que $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ é o fecho do espaço gerado pelo conjunto $\{S(\mu)aS(\mu)^* : \mu \in \mathbb{F}_+,\ a \in \widetilde{\mathcal{Q}}\}$, ou seja,

$$C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A}) = \{S(\mu)aS(\mu)^* : \mu \in \mathbb{F}_+,\ a \in \widetilde{\mathcal{Q}}\} = \overline{\cup_n A_n}.$$

Para (v) observamos que se $n \geq 1$ então, por $(10.1.7.ii)$ temos que $s_x^*\mathcal{I}_n s_x \subseteq \mathcal{I}_{n-1}$. Agora por $(7.2.3.iii)$ temos que $s_x^*\mathcal{I}_0 s_x = s_x^* \widetilde{\mathcal{Q}} s_x \subseteq \widetilde{\mathcal{Q}}$. Logo

$$s_x^* A_n s_x = s_x^* \mathcal{I}_0 s_x + ... + s_x^* \mathcal{I}_n s_x \subseteq \mathcal{I}_0 + ... + \mathcal{I}_{n-1} = A_{n-1}.$$

Para provarmos (vi) usamos um raciocínio muito parecido ao acima, e por isso não o faremos.

□

Proposição 10.1.8. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $A_n \cap \mathcal{I}_{n+1} = \{0\}$.*

Prova: Assumimos primeiro que $n = 0$, e então observamos que $A_0 = \overline{\mathcal{I}_0} = I^e = \widetilde{\mathcal{Q}}$. Seja $a \in \widetilde{\mathcal{Q}} \cap \mathcal{I}_1$. Usando a Proposição 10.1.5, temos que $\mathcal{I}_1$ é *-isomorfo á sub-álgebra-C* formada pelas famílias $(a_z)_{z \in \mathcal{G}}$, com $\lim_z \|a_z\| = 0$ podemos escrever $a = \sum_{z \in \mathcal{G}} a_z$, onde $a_z \in \mathcal{I}^z$ e $\lim_z \|a_z\| = 0$. Nós afirmamos que cada a_z é um múltiplo escalar de p_z. De fato observamos que, dado que $a \in \widetilde{\mathcal{Q}}$, nós temos por $(10.1.7.iii)$, que $s_z^* a s_z = \lambda_z q_z$, para algum $\lambda_z \in \mathbb{C}$. Agora observando que

$$p_z a p_z = s_z s_z^* \Big(\sum_{x \in \mathcal{G}} a_x \Big) s_z s_z^* = s_z s_z^* a_z s_z^*,$$

pois $a_x \in \mathcal{I}^x = s_x \widetilde{Q} s_x^*$ e $s_z^* s_x = 0$ sempre que $x \neq y$. Logo

$$a_z = p_z a_z p_z = s_z (s_z^* a s_z) s_z^* = \lambda_z s_z q_z s_z^* = \lambda_z q_z.$$

E assim temos que $a = \sum_{z \in \mathcal{G}} \lambda_z q_z$, com $\lim_z \lambda_z = 0$.

Suponhamos então, por contradição, que $a \neq 0$. Então existe no mínimo um $\lambda_{z_0} p_{z_0}$ que é não nulo. Dado que $\lim_z \lambda_z = 0$, nós temos que λ_{z_0} é um ponto isolado no conjunto de todos os λ_z. Podemos então considerar uma função contínua $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $f(\lambda_{z_0}) = 1$ e $f(\lambda_z) = 0$ sempre que $\lambda_z \neq \lambda_{z_0}$. Segue então que $f(a) = \sum_{z \in Z} p_z$, onde $Z = \{z \in \mathcal{G} : \lambda_z = \lambda_{z_0}\}$ (que deve ser finito, pois λ_{z_0} é ponto isolado). Afirmamos então que $0 \neq f(a) \in \widetilde{\mathcal{A}} \cap \mathcal{I}_1$. De fato, observamos que como $s_z s_e^* s_e s_z^* = p_z$, segue que $p_z \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ e assim $f(a) \in \widetilde{\mathcal{Q}} \cap \mathcal{I}_1$.

Dado $\xi \in \widetilde{\Omega}_{\mathcal{T}_A}$, nós temos, por (10.1.1.iv), que

$$f(a)|_\xi = f(a)|_{r(\xi)} = \sum_{z \in Z} p_z(r(\xi)) = \sum_{z \in Z} [z \in r(\xi)] = 0,$$

porque $r(\xi) \in \Omega_e$, e assim sendo o stem de $r(\xi)$ é e. Logo segue que $f(a) = 0$, contradição.

Agora assumimos que $n \geq 1$ e seja $a \in A_n \cap \mathcal{I}_{n+1}$. Dado $\nu \in \mathbb{F}_+^n$ nós temos que $S(\nu)^* a S(\nu) \in A_0 \cap \mathcal{I}_1$ por (10.1.6.ii) e (10.1.7.v) e assim $S(\nu)^* a S(\nu) = 0$. Com isto concluímos que $S(\mu)^* a S(\mu) = 0$ para $\mu \in \mathbb{F}_+^{n+1}$. Agora notamos que

$$p_\mu a = S(\mu)S(\mu)^* a = S(\mu)S(\mu)^* S(\mu)S(\mu)^* a = S(\mu)S(\mu)^* a S(\mu)S(\mu)^* = 0,$$

para todo $\mu \in \mathbb{F}_+^{n+1}$. E assim teremos que considerando todos os subconjuntos finitos $J \subseteq \mathbb{F}_+^{n+1}$

$$0 = \sum_{\mu \in J} a p_\mu = a\Big(\sum_{\mu \in J} p_\mu\Big)$$

onde as famílias da forma $\{\sum_{\mu \in J} p_\mu\}_J$ formam uma aproximação da unidade para $\mathcal{I}_{n+1}$ e assim sendo $a = 0$.

$\square$

Capítulo 11

Estados Invariantes e Subinvariantes sobre $\widetilde{\mathcal{Q}}$

Nosso objetivo agora é mostrar que os estados β-scaling sobre $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$, e consequentemente os estados KMS_β sobre $\widetilde{\mathcal{T}}_A$, estão em correspondência bijetiva com certos estados sobre $\widetilde{\mathcal{Q}}$.

11.1 Uma Motivação para Os Estados da Correspondência Bijetiva

Proposição 11.1.1. *Seja $\beta \in (0,\infty)$ e seja ϕ um β-scaling sobre $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$. Denote por ρ a restrição de ϕ à $\widetilde{\mathcal{Q}}$. Então para todo par de subconjuntos finitos X e Y de $\mathcal{G}$, nós temos*

$$\sum_{z\in\mathcal{G}} A(X,Y,z)N(z)^{-\beta}\rho(q_z) \leq \rho(q(X,Y)).$$

Prova: Lembramos de CK_3 que $q_x s_z = A(x,z)s_z$ e assim teremos que $(1-q_y)s_z = (1-A(y,z))s_z$. Logo

$$\begin{aligned} q(X,Y)s_z &= \Big(\prod_{x\in X} q_x \prod_{y\in Y}(1-q_y)\Big)s_z = \\ &= \Big(\prod_{x\in X} A(x,z) \prod_{y\in Y}(1-A(y,z))\Big)s_z = A(X,Y,z)s_z, \end{aligned}$$

para todo $z\in\mathcal{G}$. Agora multiplicando ambos os lados da igualdade acima por s_z^* nós temos que

$$q(X,Y)p_z = A(X,Y,z)p_z.$$

Afirmamos então que $T = q(X,Y) - A(X,Y,z)p_z$ tem seu espectro contido em $\mathbb{R}_+$ e T é auto-adjunto. De fato, notamos que dado $x\in X$, $y\in Y$, z

$\in \mathcal{G}$, temos que q_x, p_z, $(1 - q_y)$ são auto-adjuntos. Logo T é auto-adjunto. Agora observamos que dado $v \in H$, onde H é o espaço de Hilbert onde estamos trabalhando, podemos escrever

$$v = v_z + w,$$

onde $v_z \in M_z$, $M_z = p_z(H)$ e $w \in M^{\perp}$. E assim temos que

$$\begin{aligned} T(v) = T(v_z + w) &= q(X,Y)(v_z + w) - A(X,Y,z)p_z(v_z + w) = \\ &= q(X,Y)p_z(v) - A(X,Y,z)p_z(v) + q(X,Y)(w) \\ &= q(X,Y)(w) \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(v_z + w) = q(X,Y)(w). \end{aligned}$$

Disto segue que T é positivo.

Agora, por CK_2, nós temos que os p_z são dois a dois disjuntos. Logo dado um subconjunto finito $Z \in \mathcal{G}$ e escrevendo $v = \sum_{z \in Z} v_z + w$, onde $v_z \in M_z = p_z(H)$ e $w \perp M_z$ para todo $z \in Z$, segue que

$$q(X,Y)(v) - \sum_{z \in Z} A(X,Y,z)p_z(v) = q(X,Y)(w),$$

logo $q(X,Y)(v) - \sum_{z \in Z} A(X,Y,z)p_z(v)$ é positivo, e assim como ϕ é um estado, por [1] temos que

$$\phi\Big(\sum_{z \in Z} A(X,Y,z)p_z\Big) \leq \phi(q(X,Y)).$$

Agora lembramos de (8.1.4) que $\phi(p_z) = N(z)^{-\beta}\phi(q_z)$. E assim

$$\sum_{z \in Z} A(X,Y,z)N(z)^{-\beta}\rho(q_z) \leq \rho(q(X,Y)).$$

Como a desigualdade acima independe do conjunto Z, o resultado segue.

□

A Proposição acima motiva a seguinte definição:

Definição 11.1.2. Seja $\beta \in (0, \infty)$. Um estado ρ sobre $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é dito

(i) β-subinvariante quando a desigualdade da Proposição 11.1.1 vale para todos subconjuntos finitos X, $Y \in \mathcal{G}$.
(ii) β-invariante quando a desigualdade da Proposição 11.1.1 torna-se uma igualdade para todos subconjuntos finitos X, $Y \in \mathcal{G}$.

Uma medida sobre Σ_A será dita β-subinvariante (respectivamente β-invariante) se o funcional associado á ela define um estado sobre $C(\Sigma_A) = \widetilde{\mathcal{Q}}$.

Observação 11.1.3. A Proposição 11.1.1 implica que a correspondência $\phi \mapsto \phi|_{\widetilde{\mathcal{Q}}}$ leva o conjunto dos estados β-scaling sobre $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ no conjunto de estados β-subinvariantes sobre Σ_A. Nós tentaremos agora provar que está correspondência é bijetiva, deste modo obteremos uma nova caracterização dos estados KMS que será muito melhor que a obtida em (8.1.1), na medida que Σ_A é um espaço muito mais fácil de trabalhar que $\widetilde{\Omega}_{\tau_A}$.

Nós começaremos mostrando que a correspondência $\phi \mapsto \phi|_{\widetilde{\mathcal{Q}}}$ é injetiva.

Proposição 11.1.4. *Seja $\beta \in (0,\infty]$ e sejam ϕ e ϕ' estados β-scaling sobre $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ tais que $\phi|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} = \phi'|_{\widetilde{\mathcal{Q}}}$. Então $\phi = \phi'$.*

Prova: Nós começamos afirmando que ϕ e ϕ' coincidem nos elementos da forma $S(\mu)aS(\mu)^*$, onde $\mu \in \mathbb{F}_+$ e $a \in \widetilde{\mathcal{Q}}$. Então usando (7.2.1.$v$) nós temos que

$$\phi(S(\mu)aS(\mu)^*) = \phi(\theta_\mu(q_\mu a)) = N(\mu)^{-\beta}\phi(q_\mu).$$

Como, por (7.2.3.ii), $q_\mu a = \varepsilon q_z a$ onde $\varepsilon \in \{0,1\}$ e z é o último gerador na decomposição de μ. Logo $q_\mu a \in \widetilde{\mathcal{Q}}$, e a afirmação vale. Agora como $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ é o espaço linear gerado pelo conjunto $\{S(\mu)aS(\mu)^* : a \in \widetilde{\mathcal{Q}}\}$, temos que $\phi = \phi'$ em $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$.

□

Nosso próximo objetivo é mostrar que a correspondência é sobrejetiva. Para isso nós necessitamos o seguinte resultado geral sobre estados.

Proposição 11.1.5. *Seja B uma álgebra C^* unital contendo um ideal fechado I e A uma sub-C^*-álgebra tal que $1 \in A$ e $B = A + I$. Também seja ϕ um estado sobre A e ψ um funcional linear positivo sobre I. Denote por $\widetilde{\psi}$ a extensão canônica de ψ a um funcional positiva sobre B (isto é, $\widetilde{\psi}(b) = lim_i \psi(bu_i)$, onde $\{u_i\}_i$ é uma aproximação da unidade para I). Suponha que*

(i) $\phi \geq \widetilde{\psi}$ sobre A, e
(ii) $\phi = \psi$ sobre $A \cap I$.

Então existe um estado ρ sobre B tal que $\rho|_A = \phi$ e $\rho|_I = \psi$.

Prova: Dado $b \in B$ escreva $b = a + x$, onde $a \in A$ e $x \in I$, e definimos $\rho(b) = \phi(a) + \psi(x)$. Notamos então que por (ii), ρ é um funcional linear bem definido sobre B. Vamos agora mostrar que ρ é positivo, ou seja, que dado $b \in B$, $\rho(b^*b) \geq 0$. Seja então $b = a + x$, observamos que

$$\begin{aligned}\rho(b^*b) = \rho(a^*a + a^*x + x^*a + x^*x) = \phi(a^*a) + \psi(a^*x + x^*a + x^*x) \geq \\ \geq \widetilde{\psi}(a^*a) + \psi(a^*x + x^*a + x^*x) = \widetilde{\psi}(b^*b) \geq 0.\end{aligned}$$

Agora como $1 \in A$, temos que $\rho(1) = \phi(1) = 1$, pois ϕ é um estado. Assim ρ é um estado.

$\square$

Com o próximo resultado nós completamos a parametrização de estados β-scaling sobre $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$ por meio de estados β-subinvariantes sobre $\widetilde{\mathcal{Q}}$.

Proposição 11.1.6. *Seja β e seja ρ um estado β-subinvariante sobre $\widetilde{Q}$. Então existe um (necessariamente único) estado β-scaling sobre $C(\widetilde{\Omega}_{\tau_A})$, tal que $\phi|_{\widetilde{Q}} = \rho$.*

Prova: Ver [2].

$\square$

Juntando agora as três últimas proposições nós temos o seguinte resultado:

Teorema 11.1.7. *Assumindo as hipótese inicias da seção* (8.1)*, consideramos $\beta \in (0, \infty)$. Então a correspondência $\phi \mapsto \phi|_{\widetilde{Q}}$ define uma bijeção do conjunto de estados β-scaling sobre $\widetilde{Q}$*

$\square$

Capítulo 12

Um Exemplo de Comportamento no Ponto Crítico

Neste capítulo nós mostraremos que, mesmo assumindo todas as hipóteses listadas em (9.1), não se pode afirmar mais nada sobre a natureza dos estado KMS na temperatura crítca inversa β_c. Duas situações antagonicas podem acontecer:

(a) O estado KMS_{β_c} pode ser único e de tipo finito.
(b) Existir uma quantidade infinita de estados KMS_{β_c}, todos de tipo finito.

12.1 Um exemplo para a situção (b)

Começamos considerando

$$\zeta(\beta) = \Sigma_{k=1}^{\infty} N_k^{-\beta}$$

uma série de Dirichlet qualquer que converge na sua abcissa de convergência, que denotaremos por $\bar{\beta}$, com $\bar{\beta} \in (0, \infty)$.

Tomamos também $\mathcal{G} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, e assim $\mathcal{G}_* = \mathbb{N}$. Agora consideramos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... \end{pmatrix}$$

indexada por $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Observamos então que a 0-ésima coluna e a 0-ésima linha de consistem de uns, exceto para $A(0, 0)$ que é 0. Todos as outras entradas são zero.

Notamos que A é irredutível e que satisfaz (9.1) (COL). Observamos também que A satisfaz (9.1) (FTS), onde o conjunto $\{0,1\}$ é um conjunto alvo finito.

Agora descartando um número finito de termos nós podemos supor que

$$\zeta(\beta) = \Sigma_{k=1}^{\infty} N_k^{-\beta} < 2^{\bar{\beta}}.$$

A convergência da série de Direchlet acima implica que $\lim_{k\to\infty} = \infty$ e mais uma vez descartando um número finito de termos, nós podemos supor que $N_k \geq 2$ para todo k. Suponhamos então que $N(0) = 2$ e $N(k) = N_k$ para todo $k \in \mathcal{G}_*$, e assim temos que (9.1) (INF) vale. Assim temos que todas as hipóteses de (9.1) valem.

Nosso objetivo agora é calcular a função partição $Z_0(\beta)$. Para fazer isto observamos que as palavras admissíveis terminando em zero são precisamente da forma

$$\mu = \begin{cases} x_1 0 x_2 0 ... 0 x_n 0, & \text{se } |\mu| = 2n, \text{ ou} \\ 0 x_1 0 x_2 0 ... 0 x_n 0, & \text{se } |\mu| = 2n+1, \end{cases}$$

onde $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ é um elemento arbitrário de $\mathcal{G}_*^n$. Logo

$$Z_0(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\beta} \sum_{\vec{x}\in\mathcal{G}_*^n} N(x_1)^{-\beta} \cdots N(x_n)^{-\beta} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)\beta} \sum_{\vec{x}\in\mathcal{G}_*^n} N(x_1)^{-\beta} \cdots N(x_n)^{-\beta}.$$

Agora observamos que considerando $n = 1$ no somatório acima vemos que $Z_0(\beta)$ diverge quando $\zeta(\beta)$ diverge. Logo o intervalo de convergência de $Z_0(\beta)$ está contido em $[\bar{\beta}, \infty)$. Também temos que para todo n que

$$\sum_{\vec{x}\in\mathcal{G}_*^n} N(x_1)^{-\beta} \cdots N(x_n)^{-\beta} = \Big(\sum_{x\in\mathcal{G}_*} N(x)^{-\beta} \Big)^n = \zeta(\beta)^n$$

E assim,

$$Z_0(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\beta} \zeta(\beta)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)\beta} \zeta(\beta)^n = (1 + 2^{-\beta}) \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-\beta}\zeta(\beta))^n.$$

Como $\zeta(\bar{\beta}) < 2^{\bar{\beta}}$, nós temos que $2^{-\bar{\beta}} \cdot \zeta(\bar{\beta}) < 1$, e assim $Z_0(\bar{\beta})$ é uma série convergente.

Como A é irredutível a convergência de $Z_0(\beta)$ implica na convergência de $Z_x(\beta)$ para todo $x \in \mathcal{G}$. Então vemos que se $\sum_{k=1}^{\infty} N_k^{-\beta}$ diverge então $Z_0(\beta)$ também diverge. Agora observamos que $\dot{I}_c$ é o intervalo para o qual $Z_x(\beta)$ converge, temos que $\dot{I}_c \subseteq [\bar{\beta}, \infty)$, e como $Z_0(\bar{\beta})$ converge então $\dot{I}_c = [\bar{\beta}, \infty)$, e assim $\beta_c = \bar{\beta}$.

Combinando o Teorema 8.2.9 deste trabalho com o Teorema 15.2 de [2], nós obtemos o seguinte:

Proposição 12.1.1. *Sejam A, N e $\bar{\beta}$ como acima. Então*

(i) Para $\beta < \bar{\beta}$ não existem estados KMS_β sobre $\mathcal{T}_A$.
(ii) Para $\beta \geq \bar{\beta}$, existe um homeomorfismo afim do simplexo dos estados KMS_β sobre $\mathcal{T}_A$ no simplexo de medidas finitas sobre Ω_e tal que $Z(\beta, \gamma) = 1$.

$\square$

Observação 12.1.2. Dada uma medida γ sobre Ω_e temos que

$$Z(\beta,\gamma) = \gamma(\Omega_e) + \sum_{x\in\mathcal{G}} Z_x(\beta)\gamma(\Omega_e^x) \leq \gamma(\Omega_e) + \sum_{x\in\mathcal{G}} Z_x(\beta)\gamma(\Omega_e) =$$
$$= \gamma(\Omega_e)(1 + \sum_{x\in\mathcal{G}} Z_x(\beta)) = \gamma(\Omega_e)Z(\beta),$$

e então temos que quando $\beta \geq \bar{\beta}$ e γ é uma medida finita sobre Ω_e, a medida $\gamma/Z(\beta,\gamma)$ se encaixa no caso de (12.1.1.ii). Portanto existem infinitos estados KMS de tipo finito na temperatura crítica inversa $\bar{\beta}$.

Bibliografia

[1] Ruy Exel, Uma Introdução ás C*-álgebras, apostila encontrada na home page do autor.

[2] Ruy Exel, Marcelo Laca: Partial Dynamical Systems and the KMS Condition. Communications in Mathematical Physics, 223 − 277 (2003)

[3] Ruy Exel, Marcelo Laca. Cuntz-Krieger Algebras for infinite Matrices.

[4] César R. de Oliveira. Introdução á Análise Funcional. Publicações Matemáticas. IMPA

[5] J. Conway

[6] Pedersen, G.K: C*-Algebras and their automorphisms groups. London-New York: Acad. Press, 1979

[7]

[8]

[9] W. Rudin. Real and Complexs Analisys