

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Estudo da Gravidade Conforme

Ramiro Ramos Boere de Souza

Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil.
Maio de 2022

Ramiro Ramos Boere de Souza

Estudo da Gravidade Conforme

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef para a obtenção do grau de Bacharel em Física

Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil
Maio de 2022

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, ao meu orientador, Professor Dimiter, pela disposição para sanar minhas dúvidas e para me ajudar nos extensos cálculos deste objeto de estudo, motivando-me a concluir tal trabalho mesmo neste formato digital, no qual ainda não tivemos a chance de nos encontrar pessoalmente. Agradeço também a todos os professores que já tive, tanto na educação básica quanto — e especialmente — no ensino superior, exercendo sua função de fomentar a minha curiosidade em inúmeras ocasiões e em diversos assuntos.

Agradeço profundamente a minha mãe, Ana Paula, e a meu pai, Ivan, por terem me dado vida e, durante toda ela, terem me incentivado a perseguir meus sonhos, sempre me contagiando com sua paixão pelo conhecimento e com seu respeito à dignidade humana. Também expresso meus agradecimentos aos meus outros familiares, pelo carinho e pelos vários tipos de apoio que me deram ao longo de minha jornada. Por fim, agradeço a meus amigos, sem os quais provavelmente não teria tido a condição emocional necessária para chegar ao fim deste curso e concluir este trabalho tão rapidamente quanto o fiz em ensino remoto.

Obrigado a todos que dão sentido a minha vida em um mundo com leis físicas, mas sem sentido inerente.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar a teoria da Gravidade Conforme (GC) enquanto alternativa de modelo para a gravidade. Expomos o contexto em que essa teoria se situa e os problemas que ela se propõe a resolver, nominalmente, Matéria Escura e Energia Escura. Começamos pela revisão dos conceitos e resultados matemáticos fundamentais da teoria da Relatividade Geral (RG), introduzindo-a através do princípio variacional. A Lagrangiana utilizada pela RG é então substituída pelo quadrado do tensor de Weyl com o princípio da invariância conforme. Mostramos como obter, a partir da ação resultante, a equação de Bach, substituta das equações de campo de Einstein para a teoria.

Concluindo, solucionamos a equação de Bach para o caso de uma métrica estática e isotrópica no vácuo, mostrando como obter uma descrição das curvas de rotação de galáxias e da expansão acelerada do Universo em uma única solução. Argumentamos que a GC é então um exemplo de teoria que dispensa a existência da Matéria Escura e da Energia Escura para explicar os fenômenos apresentados.

Abstract

This work aims to present the theory of Conformal Gravity (CG) as an alternative model for gravity. We expose the context in which the theory is situated and the problems that it proposes itself to solve, namely Dark Matter and Dark Energy. We start with the review of the fundamental mathematical concepts and results of General Relativity (GR), introducing it through the variational principle. The Lagrangian utilized by GR is then replaced by the square of the Weyl tensor with the conformal invariance principle. We show how to obtain from the resulting action the Bach equation, the replacement of the Einstein field equations for the theory.

In conclusion, we solve the Bach equation for the case of a static, isotropic metric in the vacuum, showing how to obtain a description of the galactic rotation curves and the expansion of the Universe in a single solution. We argue that CG is then an example of a theory that dispenses with the existence of Dark Matter and Dark Energy to explain the presented phenomena.

Sumário

Introdução	11
1 Conceitos Fundamentais	13
1.1 Convenções, simbologia e resultados tensoriais	13
1.2 Princípio variacional da Relatividade e equações de campo	15
2 Gravidade Conforme	20
2.1 Motivação teórica	20
2.2 Transformações conformes e o tensor de Weyl	20
2.3 Equação de Bach	22
2.4 Solução da equação de Bach no vácuo	24
2.5 Ajustes de curvas de rotação de galáxias	27
3 Considerações finais	31
Referências	33
Apêndices	36
Apêndice A: Variação de $g_{\mu\nu}$ e de $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$	36
Apêndice B: Contração do tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu}$	38
Apêndice C: Cálculo da integral em (2.15)	40

Introdução

A introdução da teoria da Relatividade Geral (RG) por Albert Einstein em 1915 é um marco para a história da física. Através da sua descrição do espaço-tempo como uma variedade 4-dimensional, a teoria foi capaz de explicar fenômenos que a Gravitação Universal de Newton se mostrara incapaz de descrever ou prever, como a precessão do periélio de Mercúrio, o efeito da gravidade sobre a luz e o desvio para o vermelho de um fóton em um campo gravitacional — os três testes clássicos de Einstein [1].

Apesar do sucesso da RG no amplo escopo de testes aos quais a teoria já foi submetida, evidências astronômicas coletadas ao longo do século XX revelam a existência de fenômenos anômalos na natureza, incompatíveis com as previsões da Relatividade ou com a gravidade de Newton. Entre os principais fenômenos, está a excessiva velocidade na curva de rotação das galáxias, analisada famosamente por Vera Rubin [2]. Perante isso, a comunidade científica, na intenção de preservar a Relatividade Geral em seu estado atual, entendeu como principal linha de raciocínio para solucionar esse problema a existência de uma substância que interaja gravitacionalmente, mas que não interaja através das outras forças da natureza, especialmente através do eletromagnetismo. Esta substância, inicialmente proposta por Fritz Zwicky para explicar anomalias gravitacionais no Aglomerado de Coma [3], é amplamente denominada como Matéria Escura.

Desde o surgimento das primeiras evidências de anomalias gravitacionais que apontassem para a existência de um novo tipo de matéria, a Física de Partículas especulou sobre a composição dessa nova componente do Universo, produzindo teorias que previssem a existência de partículas compatíveis com os efeitos da Matéria Escura, como os WIMPS (*Weakly Interacting Massive Particles*), Áxions e Neutrinos [4]. Muito comumente, essas partículas são exportadas de um outro contexto na física, no qual foram concebidas a fim de resolver algum problema particular (violação carga-paridade e supersimetria, por exemplo). Após algumas décadas de experimentos em aceleradores de partículas como o LHC (*Large Hadron Collider*), no entanto, ainda não foram encontradas evidências conclusivas para a existência de tais partículas [4], colocando possivelmente em xeque o próprio conceito de matéria escura.

Um outro fenômeno de pouco entendimento (na medida em que sua origem física é desconhecida) é o da Energia Escura. Após a descoberta da expansão acelerada do Universo, físicos começaram a conceber a ideia de uma densidade de energia intrínseca do vácuo, identificando-a como o termo da constante cosmológica Λ introduzido por Einstein [5]. Tal densidade de energia teria sua origem em efeitos de natureza quântica, que poderiam então ser computados para obter o valor da constante cosmológica. Por outro lado, Λ também é definido pela taxa de expansão do Universo, sendo possível calculá-la indiretamente através da observação de galáxias distantes. Em uma das mais famosas discrepâncias da história da física, a constante cosmológica teórica é 10^{120} vezes maior que a sua contraparte observacional, caracterizando o “problema da constante cosmológica” [5].

Com base nesse cenário em que não se pode confirmar a existência da Matéria Escura para além de seus efeitos gravitacionais, e em que a Energia Escura não tem sua origem microscópica bem compreendida, alguns físicos têm desenvolvido teorias alternativas da gravidade, modificando as equações de campo de Einstein a fim de obter um modelo que não necessite de componentes desconhecidas do Universo para explicar as anomalias gravitacionais supracitadas. Neste trabalho, será apresentada uma dessas teorias alternativas: a Gravidade Conforme (GC). Essa teoria substitui a ação da Relatividade Geral — caracterizada pelo escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ na Lagrangiana — por uma ação baseada no quadrado do tensor de Weyl, $C_{\alpha\beta\mu\nu}$; tal tensor possui invariância conforme (ou seja, é invariante por dilatações e contrações da métrica) e traço nulo.

A partir da variação da ação da GC, será obtida a equação de Bach, que substitui as equações de campo de Einstein para descrever a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de matéria. A solução da equação para o vácuo mostra então comportamento semelhante àquele previsto pela Relatividade para escalas menores, mas que se distingue para distâncias maiores. Tal comportamento de maior escala consegue explicar, sem supor a existência de Matéria Escura, as curvas de rotação galáctica, ajustando-se bem aos parâmetros observacionais.

1 Conceitos Fundamentais

1.1 Convenções, simbologia e resultados tensoriais

Em todo este trabalho, como de costume na Relatividade Geral, trataremos de uma variedade quadridimensional diferenciável M , com fronteira ∂M , e com métrica $g_{\mu\nu}$ pseudo-riemanniana, isto é, sem elemento de linha ds^2 positivo-definitivo. Utilizaremos a convenção de sinais na qual ds^2 para o espaço de Minkowski (em coordenadas cartesianas) é escrito como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Tal convenção, denominada $+---$, informa que o elemento temporal é acompanhado por um sinal positivo, enquanto que os elementos espaciais contribuem para ds^2 com sinal negativo. Ressalta-se que serão utilizadas majoritariamente unidades naturais, em que a velocidade da luz c é igual à unidade ($c = 1$), de modo a equiparar medidas de distância a intervalos de tempo, e assim simplificar os cálculos. Indicaremos quando outras unidades forem utilizadas.

Também seguiremos a convenção típica na Relatividade para a qual quantidades com um índice em letra grega indicam que o índice pode assumir os valores de 0 a 3, sendo 0 correspondente à coordenada temporal e 1, 2, 3 às coordenadas espaciais. Será utilizada também a convenção de Einstein para somatórios, na qual índices repetidos em uma expressão indicam soma sobre aquele índice para todos os valores de 0 a 3 (denominada contração de índices):

$$V^\mu W_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 V^\mu W_\mu.$$

Nota-se que o índice μ de soma é um índice “mudo”, já que pode ser substituído por qualquer outra letra sem mudar o sentido da expressão. Dentre os vários objetos matemáticos com índices neste trabalho, a maioria são tensores. Tensores podem ser definidos pela maneira como se transformam de um referencial para outro. Se $A_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ é um tensor em um determinado referencial (de coordenadas x^μ), e $A_{\beta'_1 \dots \beta'_m}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_n}$ é o mesmo tensor em outro referencial (coordenadas $x^{\mu'}$), então a transformação entre eles é dada por

$$A_{\beta'_1 \dots \beta'_m}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} = \Lambda_{\alpha'_1}^{\alpha_1} \dots \Lambda_{\alpha'_n}^{\alpha_n} \Lambda_{\beta'_1}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\beta'_m}^{\beta_m} A_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (1.1)$$

onde $\Lambda_{\mu'}^{\mu} = \partial x^{\mu'} / \partial x^{\mu}$. Nota-se daí que a contração de todos os índices entre dois tensores não depende do referencial, sendo denominada um escalar. Por exemplo:

$$A^{\mu'\nu'} B_{\mu'\nu'} = (\Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu}) A^{\mu\nu} (\Lambda_{\mu}^{\mu'} \Lambda_{\nu}^{\nu'}) B_{\mu\nu} = A^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

pois $\Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\mu'} = 1$. Índices superiores podem ser transformados em índices inferiores e vice-versa através da contração com a métrica:

$$g^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu \quad \text{e} \quad g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu.$$

Assim, vemos que podemos mudar livremente a posição (superior ou inferior) dos índices em uma contração de dois tensores:

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} A_{\alpha\beta}) B_{\mu\nu} = A_{\alpha\beta} (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} B_{\mu\nu}) = A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Um último resultado importante de contração tensorial é a contração de um tensor simétrico por um antissimétrico nos índices. Sejam A e B tensores tais que $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ e $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. Nessas condições, a contração dos dois tensores é nula, pois

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = A^{\nu\mu} B_{\nu\mu} = (A^{\mu\nu})(-B_{\mu\nu}) = -A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \implies A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = 0. \quad (1.4)$$

No primeiro passo, renomeamos os índices mudos, fazendo $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$.

Para encurtar certas expressões que se seguem, derivadas parciais com relação às coordenadas serão ora denotadas pelo símbolo ∂_μ , e ora denotadas por um índice com vírgula. Assim, para uma função f qualquer das coordenadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu f \equiv f_{,\mu} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu f \equiv f^{,\mu}.$$

Não obstante a importância das derivadas parciais nas equações que se seguem, um conceito igualmente importante é aquele da derivada covariante de um tensor. A partir de (1.1), percebemos que derivadas parciais de um tensor não resultam, em geral, noutro tensor. As derivadas covariantes são definidas justamente como uma correção para as derivadas parciais tradicionais, preservando o caráter tensorial dos objetos derivados. A derivada covariante de um vetor contravariante V^ν é dada por:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda. \quad (1.5)$$

onde $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ são os símbolos de Christoffel de segundo tipo, idênticos à chamada conexão da métrica.

Para um tensor em geral, a derivada covariante é escrita como [6]:

$$\nabla_\mu A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} = \partial_\mu A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} + \sum_{i=1}^n \Gamma^{\alpha_i}_{\mu\lambda} A^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \lambda \alpha_{i+1} \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} - \sum_{i=1}^m \Gamma^\lambda_{\mu\beta_i} A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \lambda \beta_{i+1} \dots \beta_m}. \quad (1.6)$$

Em (1.6), primeiramente escrevemos o termo da derivada parcial, e depois os termos que envolvem os símbolos de Christoffel; estes últimos são compostos por um termo para cada índice contravariante e covariante do tensor A , em que substituímos o respectivo índice por λ , que aparece no símbolo de Christoffel do termo. Termos oriundos de índices covariantes têm sinal negativo, enquanto os de índices contravariantes têm sinal positivo. Destaca-se a notação $\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\nu$, que é a derivada covariante com índice elevado.

Assumiremos neste trabalho que a variedade M sobre a qual trabalhamos não tem propriedade de torsão; dessa condição, decorre que a conexão é simétrica nos índices inferiores ($\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$). É um resultado fundamental da geometria Riemanniana que sempre podemos escolher a conexão de modo que a derivada covariante da métrica seja nula:

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.7)$$

Tendo em mente a simetria da conexão, podemos expandir (1.7) utilizando (1.6) para obter uma expressão explícita para os símbolos de Christoffel de segundo tipo a partir da métrica:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (1.8)$$

Como a métrica é simétrica, fica evidente que os símbolos de Christoffel são também simétricos nos índices inferiores.

Neste trabalho também faremos uso extensivo do cálculo das variações. Tendo isso em vista, destaca-se que (1.1) implica que a variação de um tensor continua sendo um tensor. Ademais, a variação de uma derivada parcial é a derivada da variação, $\delta(f_{,\mu}) = (\delta f)_{,\mu}$. Desse modo, podemos utilizar a notação $\delta f_{,\mu}$ sem a problemática de ambiguidades. A propriedade (1.3) não é válida para tensores variacionais, como veremos.

Por fim, um resultado de grande importância que usaremos é o teorema da divergência. No contexto da RG e de suas teorias modificadas, o teorema da divergência escreve-se:

$$\int_M \nabla_\mu A^\mu \sqrt{-g} d^4x = \int_{\partial M} A^\mu \sqrt{-g} d\Sigma_\mu, \quad (1.9)$$

onde $g = \det([g_{\mu\nu}])$ e $d\Sigma_\mu$ é o elemento de superfície tridimensional cuja normal é paralela ao vetor A^μ .

1.2 Princípio variacional da Relatividade e equações de campo

As equações de campo da RG descrevem como a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo se comporta na presença de matéria e energia, representadas pelo tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$. Essas equações podem ser obtidas, assim como em outras áreas da física, através de um princípio variacional aplicado a uma ação adequada. Em geral, uma ação S na variedade M supracitada pode ser escrita como:

$$S = \int_M \mathcal{L} dV = \int_M \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.10)$$

em que \mathcal{L} é a Lagrangiana e dV é o elemento de volume 4-dimensional. A conversão entre o elemento de volume dV e as coordenadas espaço-temporais escolhidas é feita através de $\sqrt{-g}$, que é o Jacobiano das coordenadas.

Para especificar a ação, precisamos apenas saber então qual é a função Lagrangiana \mathcal{L} . Tal função deve ser invariante em relação às coordenadas, ou seja, um escalar. Há vários escalares possíveis que podemos escolher; no entanto, é evidente que os candidatos precisam ter suas origens na geometria Riemanniana, a fim de que tratemos, ao final, da curvatura do espaço-tempo.

Portanto, faz-se necessário lembrar de um dos objetos mais fundamentais da geometria diferencial: o tensor de Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$. Em termos dos símbolos de Christoffel, o tensor é escrito como [7]:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu}. \quad (1.11)$$

Analisando a definição acima em conjunção com (1.8), percebe-se claramente que o tensor de Riemann é função de derivadas segundas da métrica. Vale ressaltar que existem convenções alternativas, que definem o tensor em (1.11) com um sinal contrário [8]. Geometricamente, o tensor de Riemann pode ser definido a partir do transporte paralelo de um vetor em torno de uma curva fechada [7, 8]. Uma alternativa equivalente, mais operacional, é defini-lo como sendo a medida de não-comutatividade das derivadas covariantes:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)V^\alpha = -R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta. \quad (1.12)$$

Para um tensor qualquer [7],

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} = - \sum_{i=1}^n R^{\alpha_i}_{\lambda\mu\nu} A^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \lambda \alpha_{i+1} \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} + \sum_{i=1}^m R^\lambda_{\beta_i \mu\nu} A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \lambda \beta_{i+1} \dots \beta_m}. \quad (1.13)$$

Novamente, destacamos que essas expressões têm sinal contrário se definirmos o tensor de Riemann com sinal oposto. Um outro fato notável é que derivadas covariantes que atuam num escalar (tensor sem índices) comutam.

Há uma propriedade muito importante da versão totalmente covariante $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^\lambda_{\beta\mu\nu}$ do tensor de Riemann: a antissimetria nos índices, representada nas igualdades abaixo.

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (1.14)$$

Dessas relações vemos, contraindo com a métrica, que $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$, já que os pares (α, β) e (μ, ν) são, um a um, antissimétricos. Assim, sobram apenas 4 pares possíveis de índices para a contração com a métrica. Não é difícil mostrar, utilizando novamente (1.14), que todas essas pares resultam essencialmente na mesma contração, a menos de um sinal global [8]. Desse modo, escolhemos o par (α, μ) para a contração, por exemplo. Com isso, fica definido o tensor de Ricci a partir de (1.11):

$$R_{\mu\nu} \equiv g^{\lambda\alpha} R_{\alpha\mu\lambda\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}. \quad (1.15)$$

Esse tensor é simétrico ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$) devido à igualdade entre a primeira e a última parte de (1.14). Por fim, contraindo os dois índices restantes, obtemos o escalar de curvatura de Ricci:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

O escalar de curvatura é um candidato natural para compor a Lagrangiana da ação na RG. A identificação de R como gerador das equações de campo de Einstein foi primeiramente feita pelo matemático David Hilbert [9]. Por questões de dimensionalidade, temos que envolver a constante $\kappa = 8\pi$ ($\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ no Sistema Internacional de Unidades) na função Lagrangiana. Assim, a ação de Einstein-Hilbert é escrita como:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_M R \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.17)$$

Temos que então tomar a variação da ação com relação à métrica, pois ela é a variável (ou conjunto de variáveis, por ser um tensor com componentes) a partir da qual o funcional é variado. Assim:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\kappa} \int_M \delta (R \sqrt{-g}) d^4x = \frac{1}{2\kappa} \int_M \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (R \sqrt{-g}) \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int_M \left[\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g}) \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Destaca-se que $\delta/\delta g^{\mu\nu}$ denota a derivada funcional em relação a $g^{\mu\nu}$ [10]. Podemos escrever, como mostrado em (A.6) no apêndice A, que:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \quad (1.19)$$

Utilizando a definição do escalar de curvatura R para calcular a sua variação, obtém-se:

$$\delta R = \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

Como o primeiro termo já está na forma que queremos, basta descobrir como $\delta R_{\mu\nu}$ é expresso em termos da variação da métrica $\delta g^{\mu\nu}$. Para isso, variemos a equação (1.15):

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} - \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \delta (\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}) - \delta (\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) \\ &= \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} - \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \\ &= [\partial_{\nu} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} (\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}) - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda}) - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma})] \\ &\quad - [\partial_{\lambda} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} (\delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}) - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma})]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Na última linha de (1.21), foi adicionado e subtraído o termo $\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma})$. O agrupamento acima mostra que, se compararmos cuidadosamente com (1.6) e lembrarmos a simetria dos símbolos de Christoffel $\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}$, podemos reescrever $\delta R_{\mu\nu}$ como a diferença de duas derivadas covariantes:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\nu} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) - \nabla_{\lambda} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}). \quad (1.22)$$

Para uma derivada covariante fazer sentido, ela precisa atuar em um tensor de alguma ordem. A variação do símbolo de Christoffel é um tensor (ver apêndice A), mesmo que o símbolo em si não seja. Com esses elementos, e lembrando que a métrica é constante frente à derivação covariante, a variação fica:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{-g} [\nabla_{\nu} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) - \nabla_{\lambda} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})].$$

Na expressão acima, o segundo integrando possui duas divergências perfeitas. Pelo teorema da divergência, a segunda integral pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2\kappa} \int_{\partial M} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d\Sigma_\lambda. \quad (1.23)$$

Escolhendo que $\delta g_{\mu\nu}$ seja nulo na fronteira ∂M da variedade, obtemos que a variação do símbolo de Christoffel é nula pela equação (A.7). Assim, por sua vez, a integral (1.23) fica nula, de modo que a variação final seja simplesmente:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

O princípio variacional exige $\delta S = 0$. Como $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário, a única maneira de garantir que a integral seja nula é se:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (1.25)$$

Essa é a equação de campo de Einstein na ausência de massa ou energia, que fundamentalmente implica que $R = 0$, por contração simples de (1.25) com a métrica, acarretando, por sua vez, $R_{\mu\nu} = 0$. Para introduzirmos massa nesse modelo, temos que redefinir (1.17), adicionando uma Lagrangiana \mathcal{L}_m , referente exclusivamente à massa e à energia:

$$S = \int_M (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_m) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.26)$$

onde $\mathcal{L}_G = R/2\kappa$ é a Lagrangiana que utilizamos anteriormente, de caráter puramente geométrico. A variação dessa ação, combinada com (1.24), fica:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

Oportunamente, definimos então o tensor de energia-momento, $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m). \quad (1.28)$$

Dessa definição, ficamos com:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \kappa T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

Impondo $\delta S = 0$, finalmente se obtêm as equações de campo de Einstein com a presença de massa-energia:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.30)$$

O tensor da esquerda, é definido como sendo o tensor de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$. No espaço-tempo quadridimensional, os índices μ e ν podem assumir 4 valores, resultando em 16 equações escalares. No entanto, o lado esquerdo de (1.30) é simétrico, de modo que qualquer tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ fisicamente aceitável tenha de ser simétrico. Assim, há apenas 10 equações de campo escalares realmente independentes (aquelas com $\mu \geq \nu$, por exemplo).

Na Mecânica Newtoniana se soubermos a força à qual uma partícula está sujeita, saberemos como sua trajetória evolui no tempo. Similarmente, conhecer o conteúdo de energia presente no espaço-tempo nos informa como este será curvado através da métrica, já que, em última instância, $R_{\mu\nu}$ e R são construídos de $g_{\mu\nu}$. Uma vez conhecida a métrica, podemos determinar a trajetória de partículas no espaço-tempo curvo supondo que estas seguem geodésicas (curvas de menor caminho) no espaço-tempo. Esse comportamento está englobado na equação

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (1.31)$$

denominada equação geodésica, que descreve a evolução no tempo próprio τ (ou noutro parâmetro escalar de movimento) das coordenadas x^γ das partículas [7, 8].

Por fim, precisamos lembrar que a equação (1.30) não está na forma mais geral que as equações de campo de Einstein podem estar. Podemos introduzir um termo de $-\Lambda/\kappa$ na Lagrangiana L_G , onde Λ é a constante cosmológica. A introdução desse termo resulta nas seguintes equações de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

A constante cosmológica foi primeiramente introduzida por Einstein em 1917, após a sua conclusão de que um Universo com $\Lambda = 0$ (descrito por (1.30)) não poderia permanecer estático com o passar do tempo [11]. Atualmente, a constante cosmológica é interpretada por muitos físicos como sendo a consequência matemática da energia escura, uma componente energética do Universo tão pouco compreendida quanto a matéria escura e cujo efeito principal é a aceleração da expansão do Universo em grande escala [12].

Na situação em que $T_{\mu\nu} = 0$ (vácuo) em (1.32), podemos mostrar que o tensor de Riemann fica proporcional à métrica:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 &\implies g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = 0 \implies R - 2R + 4\Lambda = 0 \\ &\implies R = 4\Lambda \implies R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(4\Lambda) + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \implies R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Percebemos que o termo da constante cosmológica permite então que obtenhamos uma solução no vácuo com curvatura diferente de zero ($R = 4\Lambda$), o que não era possível com $\Lambda = 0$.

Para concluir esta introdução de fundamentos da RG, destacamos que os dois lados da equação (1.32) são simétricos e têm divergente covariante (derivada covariante contraída em algum índice) igual a zero, pois, individualmente:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) &= 0, \\ \nabla^\mu (\Lambda g_{\mu\nu}) &= 0, \\ \nabla^\mu T_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

A primeira das equações de (1.34) é nula pela identidade de Bianchi [7],

$$\nabla^\alpha R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\nabla_\beta R; \quad (1.35)$$

já a segunda é nula pela derivada covariante da métrica em geral ser nula; por fim, é um teorema da Relatividade que o tensor de energia-momento é conservado covariantemente, justificando a terceira equação [7].

2 Gravidade Conforme

2.1 Motivação teórica

Como já discutido na introdução, a astrofísica atualmente se encontra em um impasse. Por um lado, existe convergência de evidências acerca da existência da Matéria Escura, uma componente do Universo que comporia $\approx 26\%$ de seu conteúdo energético [13]; por outro, não há dados que apontem para a detecção de uma partícula compatível com as propriedades necessárias pelo modelo da Matéria Escura [4]. Epistemologicamente, há de se especular se a comunidade científica não está em uma situação análoga àquela em que se encontrava quando buscava o éter luminífero. No final do século XIX, acreditava-se que a luz precisava de um meio para se propagar, o éter; a existência dessa substância começou a ser mais amplamente questionada com o célebre experimento de Michelson-Morley [14], e foi celeremente rejeitada após a publicação da Relatividade Especial por Einstein, em 1905 [15]. Assim como reescrever certas leis da mecânica permitiu entender certos fenômenos sem o conceito do éter, talvez uma modificação das equações de campo da Relatividade Geral permita descrever as anomalias gravitacionais como as curvas de rotação de galáxias sem pressupor a existência da Matéria Escura.

Na seção anterior, mostramos que as equações de campo de Einstein podem ser obtidas a partir da escolha da Lagrangiana geométrica $\mathcal{L}_G = R/2\kappa$, isto é, escolhendo o escalar de Ricci R como o invariante que compõe a Lagrangiana. Um dos requisitos ao qual tal escolha obedece é o de que as equações de campo resultantes sejam de até segunda ordem nas derivadas da métrica. Entretanto, se flexibilizarmos essa condição, haveria outros invariantes possíveis que poderíamos ter escolhido. Por exemplo, R^2 , $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ou $R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$ (denominado escalar de Kretschmann), além de combinações lineares dos mesmos. Embora cada possibilidade de Lagrangiana produza uma dinâmica teórica de interesse, no mínimo, matemático, não é surpreendente que nem toda Lagrangiana será adequada se o objetivo for reproduzir a física do mundo real. O que normalmente falta a uma Lagrangiana arbitrária é algum princípio físico que a distinga das demais possibilidades, tornando-a plausível como escolha.

Com esse contexto, vamos substituir o princípio de invariância local de calibre utilizado para obter as equações da RG, introduzindo o princípio de invariância conforme local; este princípio requer que a ação permaneça invariante frente a contrações ou dilatações locais da métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow \omega^2 g_{\mu\nu}$, onde ω é um escalar [16]. Como veremos em seguida, a contração/dilatação por ω altera a forma dos escalares candidatos a Lagrangiana que mencionamos até agora, de modo que eles não sejam escolhas adequadas para compor individualmente a ação dessa nova teoria, fazendo-se necessário introduzir um novo tensor.

2.2 Transformações conformes e o tensor de Weyl

Examinemos o resultado de transformações conformes na métrica em alguns dos objetos da geometria diferencial que definimos até agora. Seja uma nova métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$, conforme a $g_{\mu\nu}$ pela relação $\hat{g}_{\mu\nu} = \omega^2 g_{\mu\nu}$. Utilizando a expressão (1.8), obtemos a nova conexão $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ a partir da conexão e métricas antigas por substituição simples:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\lambda\alpha} (\hat{g}_{\alpha\nu,\mu} + \hat{g}_{\alpha\mu,\nu} - \hat{g}_{\mu\nu,\alpha}) \\
 &= \frac{1}{2} \omega^{-2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu(\omega^2 g_{\alpha\nu}) + \partial_\nu(\omega^2 g_{\alpha\mu}) - \partial_\alpha(\omega^2 g_{\mu\nu})) \\
 &= \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}) + \frac{\omega_{,\mu}}{\omega} g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\nu} + \frac{\omega_{,\nu}}{\omega} g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\mu} - \frac{\omega_{,\alpha}}{\omega} g^{\lambda\alpha} g_{\mu\nu} \\
 &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \omega^{-1} (\omega_{,\mu} \delta^\lambda_\nu + \omega_{,\nu} \delta^\lambda_\mu - \omega^{,\lambda} g_{\mu\nu}).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Assim como construímos o tensor de Riemann a partir dos símbolos de Christoffel pela definição (1.11), podemos construir o tensor $\hat{R}^\alpha_{\beta\mu\nu}$ modificado pela transformação. Por brevidade, deixaremos apenas indicado o resultado [17]:

$$\hat{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = R^\alpha_{\beta\mu\nu} + g_{\beta\mu}B^\alpha_\nu - g_{\beta\nu}B^\alpha_\mu + \delta^\alpha_\nu g_{\beta\lambda}B^\lambda_\mu - \delta^\alpha_\mu g_{\beta\lambda}B^\lambda_\nu, \quad (2.2)$$

onde definimos

$$B^\alpha_\beta \equiv g^{\alpha\gamma}\nabla_\beta(\omega^{-1}\omega_{,\gamma}) + \omega^{-2}\left(\frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta g^{\gamma\sigma}\omega_{,\gamma}\omega_{,\sigma} - g^{\alpha\gamma}\omega_{,\beta}\omega_{,\gamma}\right). \quad (2.3)$$

Por extensão, o tensor de Ricci fica

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}B^\lambda_\lambda - 2B_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

e o escalar de curvatura resulta ser

$$\hat{R} = \omega^{-2}[R - 6B^\lambda_\lambda]. \quad (2.5)$$

Como podemos observar por (2.2), (2.4) e (2.5), $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ e R não são invariantes frente a uma transformação conforme da métrica. No entanto, podemos construir uma combinação desses três objetos com a métrica para conseguir um tensor conformemente invariante, o tensor de Weyl $C^\alpha_{\beta\mu\nu}$. Deixando (2.2) em sua forma totalmente covariante, o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ em 4 dimensões é definido como [7, 17, 18]:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}) + \frac{R}{6}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}). \quad (2.6)$$

O cálculo direto mostra que $\hat{C}_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{\alpha\beta\mu\nu}$; novamente, por brevidade, deixamos apenas indicado tal resultado.

Passemos agora à análise das propriedades deste novo tensor. Relembrando-nos das relações de antisimetria dos índices em (1.14), concluiremos que o tensor de Weyl em (2.6) respeita às mesmas trocas de sinais frente a trocas de índices que o tensor de Riemann:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = -C_{\beta\alpha\mu\nu} = -C_{\alpha\beta\nu\mu} = C_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.7)$$

Graças às mesmas relações de antissimetria entre pares, verifica-se que $g^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta\mu\nu} = g^{\mu\nu}C_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$. Ademais, poderíamos tentar definir um novo tensor de forma equivalente ao tensor de Ricci, contraindo dois índices “cruzados” (não pertencentes ao mesmo par de antissimetria):

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu}C_{\alpha\beta\mu\nu} &= g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} - g^{\alpha\mu}g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} + g_{\beta\nu}g^{\alpha\mu}R_{\alpha\mu} - g^{\alpha\mu}g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}) \\ &\quad + \frac{R}{6}(g^{\alpha\mu}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g^{\alpha\mu}g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}). \end{aligned}$$

Contudo, esta tentativa mostrar-se-á infrutífera quando computarmos a expressão acima. Pela contração de índices e pela equação (1.15), temos que $g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = R^\mu_{\beta\mu\nu} = R_{\beta\nu}$. Além disso, como $g^{\alpha\beta}$ é a matriz inversa de $g_{\alpha\beta}$, temos a relação $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$, em que δ^μ_ν é a delta de Kronecker. Juntando todos esses resultados, ficaremos com:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu}C_{\alpha\beta\mu\nu} &= R^\mu_{\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(4R_{\beta\nu} - \delta^\mu_\nu R_{\beta\mu} + g_{\beta\nu}R - \delta^\alpha_\beta R_{\alpha\nu}) + \frac{R}{6}(4g_{\beta\nu} - \delta^\mu_\nu g_{\beta\mu}) \\ &= R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}(4R_{\beta\nu} - R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R - R_{\beta\nu}) + \frac{R}{6}(4g_{\beta\nu} - g_{\beta\nu}) \\ &= R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}(2R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R) + \frac{1}{2}g_{\beta\nu}R = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

o que mostra que o traço de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ é nulo ($C^\mu_{\beta\mu\nu} = 0$). Assim, como mostramos que todos os traços não-nulos do tensor de Riemann resultavam essencialmente no tensor de Ricci através das relações (1.14), as relações em (2.7) mostram que todos os traços possíveis do tensor de Weyl são identicamente nulos. Este

é um fato curioso, pois não esperaríamos, *a priori*, que a imposição de invariância conforme construísse um tensor de traço nulo. Assim, da equação (2.6), podemos também interpretar $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ como sendo a parte de traço nulo do tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$.

2.3 Equação de Bach

Como visto na seção 1.2, a base de uma teoria no escopo da interação massa-energia-curvatura, introduzido por Einstein, jaz na escolha de um escalar adequado para compor uma Lagrangiana. Ao aplicar o princípio variacional à ação resultante, obtém-se a dinâmica à qual a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo deve obedecer, embutida nas equações de campo. Para a teoria da Gravidade Conforme, o escalar escolhido é o quadrado do tensor de Weyl, mediado por uma constante de proporcionalidade $-\alpha$. Assim, teremos uma ação com o mesmo formato daquela em (1.26), porém com a diferença de que $\mathcal{L}_G = -\alpha C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu}$. Assim como fizemos antes, ignoremos inicialmente a existência de massa e comecemos analisando o novo ingrediente da teoria, isto é, a ação

$$S_G = -\alpha \int_M C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = -\alpha \int_M \left(R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{R^2}{3} \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.9)$$

Para a segunda igualdade em (2.9), utilizamos o resultado (B.4) no apêndice B. Para simplificar essa expressão, podemos lançar mão de um resultado do cálculo tensorial. Em quatro dimensões, verifica-se que a seguinte Lagrangiana é nula:

$$\int_M (R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2) \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (2.10)$$

O integrando de (2.10) é uma divergência covariante perfeita em quatro dimensões e é conhecido como Lagrangiana de Lanczos [19, 20]. Utilizando tal identidade, podemos eliminar $R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$, obtendo a expressão consideravelmente mais simples:

$$S_G = -2\alpha \int_M \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.11)$$

Para obter o equivalente das equações de campo de Einstein para a GC, temos que então aplicar o princípio variacional a esta Lagrangiana, explicitando novamente a dependência variacional de $\delta g^{\mu\nu}$ pela integral. Assim, tomando a variação de S e definindo o escalar $J \equiv R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2$:

$$\begin{aligned} \delta S_G &= -2\alpha \int_M d^4x \delta (J \sqrt{-g}) = -2\alpha \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(\delta J + \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}} J \right) \\ &= -2\alpha \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(\delta J - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} J \delta g^{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para alcançar a forma que desejamos, precisamos colocar a primeira parte da integral no formato

$$\int_M d^4x \sqrt{-g} \delta J = \int_M d^4x \sqrt{-g} A_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

para algum tensor $A_{\mu\nu}$. Para tanto, precisamos calcular δJ explicitamente:

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) = \delta \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) \\ &= \delta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} \delta g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} \delta R_{\mu\nu} - \frac{2R}{3} \delta R. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Analisando (2.13) e fazendo a troca adequada de índices mudos, vemos que o primeiro e segundo termo da última linha são idênticos; idem para o terceiro e o quarto. Substituindo δR pela expressão em (1.21), obteremos então:

$$\begin{aligned}
\delta J &= 2g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\alpha} + 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} - \frac{2R}{3} \delta R \\
&= 2R^\nu{}_\alpha R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\alpha} + 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} - \frac{2R}{3} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \\
&= \left(2R^\lambda{}_\nu R_{\mu\lambda} - \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \left(2R^{\mu\nu} - \frac{2}{3} g^{\mu\nu} R \right) \delta R_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Desse modo, como o primeiro termo está na forma que desejamos, resta-nos apenas reescrever a seguinte integral no mesmo formato:

$$I_1 = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(2R^{\mu\nu} - \frac{2}{3} g^{\mu\nu} R \right) \delta R_{\mu\nu}. \tag{2.15}$$

O cálculo detalhado para reescrever I_1 está no apêndice C. A expressão resultante é aquela da equação (C.3):

$$I_1 = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu R - \nabla_\lambda \nabla^\lambda R_{\mu\nu} - 2R^\lambda{}_\mu R_{\lambda\nu} + 2R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} + \frac{1}{6} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda R \right) \delta g^{\mu\nu}.$$

Unindo esse resultado à equação (2.14), a substituição em (2.12) implica:

$$\begin{aligned}
\delta S_G &= -2\alpha \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\left(2R^\lambda{}_\nu R_{\mu\lambda} - \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 \right) \delta g^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu R - \nabla_\lambda \nabla^\lambda R_{\mu\nu} - 2R^\lambda{}_\mu R_{\lambda\nu} + 2R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} + \frac{1}{6} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda R \right) \delta g^{\mu\nu} \right] \\
&= -2\alpha \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu R - \nabla_\lambda \nabla^\lambda R + \frac{1}{6} g_{\mu\nu} (R^2 + \nabla_\lambda \nabla^\lambda R - 3R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}) \right. \\
&\quad \left. + 2R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Finalmente, podemos aplicar o princípio variacional. Como $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário, $\delta S = 0$ implica que o integrando é nulo. Portanto, definindo o tensor de Bach $W_{\mu\nu}$ [21]:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu R - \nabla_\lambda \nabla^\lambda R_{\mu\nu} + \frac{1}{6} g_{\mu\nu} (R^2 + \nabla_\lambda \nabla^\lambda R - 3R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}) + 2R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{2}{3} R R_{\mu\nu}, \tag{2.17}$$

temos que a equação obtida pelo princípio variacional é $W_{\mu\nu} = 0$. Novamente, esta equação não leva em conta a possível existência de matéria e energia, decorrente de uma Lagrangiana \mathcal{L}_m , como havíamos definido na seção 1.2. Seguimos o mesmo procedimento para obter as equações de campo que envolvem o tensor de energia-momento, definido pela equação (1.28):

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta S_G + \delta S_m = -2\alpha \int_M W_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int_M \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\
&= -2\alpha \int_M \left(W_{\mu\nu} + \frac{1}{4\alpha} T_{\mu\nu} \right).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Fazendo $\delta S = 0$, ficamos finalmente com

$$W_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\alpha}T_{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Novamente, essa expressão é simétrica e de derivada covariante nula nos dois lados, sendo possível mostrar isso a partir de (2.17) por cálculo explícito.

2.4 Solução da equação de Bach no vácuo

Na Relatividade Geral, uma métrica é dita estática se ela não muda no tempo [7]. Esse conceito é de grande utilidade matemática, pois apesar de ser aplicável a um subconjunto restrito de métricas, há grande simplificação nos cálculos que levam às equações de campo de Einstein. Na natureza também é típico nos depararmos com objetos de simetria esférica — planetas e estrelas, por exemplo — em que não haja direção preferencial em relação ao seu centro (isotropia). A imposição dessas duas condições força um elemento de linha ds^2 a ter esta forma:

$$ds^2 = b(r)dt^2 - a(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (2.20)$$

onde r é a coordenada radial e $d\Omega$ é um elemento de ângulo sólido na esfera, tipicamente parametrizado pelos ângulos polar e azimutal, θ e ϕ , como $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

A primeira solução analítica não-trivial encontrada para as equações de campo de Einstein tem uma métrica justamente no formato (2.20); Karl Schwarzschild, responsável por descobri-la, publicou a solução em 1916, pouco depois de Einstein ter publicado a sua Teoria da Relatividade Geral [22]. A solução de Schwarzschild é obtida supondo a inexistência de matéria onde o espaço-tempo está sendo analisado, isto é, através da imposição $T_{\mu\nu} = 0$. Como já visto em (1.25), isso acarreta $R_{\mu\nu} = 0$, uma equação simples para os padrões da RG. Não obstante a falta de massa-energia no local de análise das equações, supõe-se a existência de uma massa M externa, que gere uma perturbação no tecido do espaço-tempo, percebida como um campo gravitacional no local de análise. A métrica de Schwarzschild, que obedece a todas essas condições, é então escrita como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.21)$$

onde R_s é o raio de Schwarzschild, escrito em unidades naturais com $c = G = 1$ como $R_s = 2M$ ($R_s = \frac{2GM}{c^2}$ no Sistema Internacional). O raio de Schwarzschild serve como um fator de escala para o sistema, e depende da massa M que gera o campo gravitacional, não surpreendentemente. Para $r \rightarrow \infty$, a expressão se torna a métrica de Minkowski para o espaço plano, como também se esperaria. Tomando o limite clássico em que as velocidades $|dx^\alpha/d\tau| \ll 1$, podemos obter, através de (1.31) e (2.21), o potencial gravitacional clássico:

$$\Phi = -\frac{R_s}{2r} = -\frac{M}{r}. \quad (2.22)$$

Nosso objetivo é obter o equivalente da métrica de Schwarzschild para a equação de Bach. Para isso, partimos de (2.20), substituindo $r \rightarrow \rho$ por conveniência.

$$ds^2 = b(\rho)dt^2 - a(\rho)d\rho^2 - \rho^2d\Omega^2. \quad (2.23)$$

Vamos executar uma transformação de coordenadas nesse elemento de linha. Começemos definindo

uma função p tal que $\rho = p(r)$, onde r é a coordenada que substitui ρ . Temos então que:

$$\begin{aligned} ds^2 &= b(r)dt^2 - a(r)p'(r)^2 dr^2 - p(r)^2 d\Omega^2 \\ &= \frac{p(r)^2}{r^2} \left[\frac{r^2 b(r)}{p(r)^2} dt^2 - \frac{r^2 a(r) p'(r)^2}{p(r)^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \right] \\ &= \frac{p(r)^2}{r^2} [B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2], \end{aligned}$$

onde definimos

$$A(r) = \frac{r^2 a(r) p'(r)^2}{p(r)^2} \quad \text{e} \quad B(r) = \frac{r^2 b(r)}{p(r)^2}.$$

Podemos então escolher a função $p(r)$ de modo a simplificar a expressão. Uma escolha típica é impor que $B(r) = 1/A(r)$. Tal escolha equivale à seguinte expressão para $p(r)$:

$$\frac{r^2 b(r)}{p(r)^2} = \frac{p(r)^2}{r^2 a(r) p'(r)^2} \implies \left[\frac{p'(r)}{p(r)^2} \right]^2 = \frac{1}{r^4 a(r) b(r)} \implies -\frac{1}{p(r)} = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{a(r) b(r)}}.$$

Assim, o elemento de linha torna-se

$$ds^2 = \frac{p(r)^2}{r^2} \left[B(r)dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.24)$$

Nota-se que esse elemento de linha possui um fator de escala $p(r)^2/r^2$. Sabemos que o elemento em (2.23) está associado a um tensor $W_{\mu\nu}(\rho)$. Imaginemos agora uma transformação conforme na métrica em (2.24) tal que $g_{\mu\nu} \rightarrow \omega^2 g_{\mu\nu}$, com $\omega = \frac{r}{p(r)}$. Essa transformação resultaria no elemento de linha

$$ds^2 = B(r)dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - r^2 d\Omega^2, \quad (2.25)$$

que está associado ao tensor $W_{\mu\nu}(r)$. Assim como há uma transformação conforme da métrica entre os dois elementos de linha, há também uma relação de conformalidade entre $W_{\mu\nu}(\rho)$ e $W_{\mu\nu}(r)$, em particular, $W_{\mu\nu}(\rho) \rightarrow W_{\mu\nu}(r) = \omega^{-2} W_{\mu\nu}(\rho)$ [16]. Portanto, a forma mais geral de uma métrica estática e esfericamente simétrica é aquela apresentada em (2.25), a menos de um fator multiplicativo dependente de r .

Vamos então calcular o tensor de Bach para essa situação. Primeiramente, parametrizamos $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$, de modo que as coordenadas utilizadas sejam $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$. Vamos optar, sem perda de generalidade, por calcular o tensor misto de Bach W^μ_ν para essa situação. Apesar de extenso, este processo consiste em substituição direta nas equações (1.8), (1.15), (1.16) e (2.17), nessa ordem. Denotaremos uma derivação da função B em relação a r por uma linha; derivadas de ordem 4 são denotadas por $B^{(4)}$.

Iniciamos computando os símbolos de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Os únicos símbolos não nulos são:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} &= \frac{B'}{2B} & \Gamma^1_{33} &= -rB \sin^2(\theta) \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} BB' & \Gamma^2_{33} &= -\sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma^1_{11} &= -\frac{B'}{2B} & \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} &= \cot(\theta) \\ \Gamma^1_{22} &= -rB & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Com esses símbolos calculamos o tensor de Ricci misto $R^\mu_\nu = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\nu}$. O resultado é um tensor diagonal de componentes:

$$R^0_0 = R^1_1 = -\frac{B''}{2} - \frac{B'}{r} \quad \text{e} \quad R^2_2 = R^3_3 = \frac{1-B}{r^2} - \frac{B'}{r}.$$

Já o escalar de curvatura é obtido somando os valores da diagonal de R^μ_ν ($R = R^\mu_\mu$), resultando em:

$$R = \frac{2(1-B)}{r^2} - \frac{4B'}{r} - B''.$$

Finalmente, o tensor de Weyl também acaba sendo diagonal, com componentes [18]:

$$\begin{aligned} W^0_0 &= f(r) - \frac{1}{3r^4} - \frac{BB'''}{r} - \frac{BB^{(4)}}{3}, \\ W^1_1 &= f(r) - \frac{1}{3r^4} + \frac{BB'''}{3r}, \\ W^2_2 = W^3_3 &= -f(r) + \frac{1}{3r^4} + \frac{BB'''}{3r} + \frac{BB^{(4)}}{6}. \end{aligned}$$

onde $f(r)$ é uma função explícita e implícita de r , dependendo também de B e de suas derivadas:

$$f(r) = B^2 \left[\frac{1}{3r^4} + \frac{1}{3r^2} \left(\frac{B''}{B} + \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - \frac{2B'}{3B} \right) - \frac{1}{3r} \frac{B'B''}{B^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{B''}{B} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{B'B'''}{B^2} \right].$$

Destacamos que $f(r)$ é de terceira ordem nas derivadas de B . As seguintes identidades são então válidas.

$$W^0_0 - W^1_1 = -\frac{B}{3r}(4B''' + rB^{(4)}) = -\frac{B}{3r} \frac{d^4}{dr^4}(rB), \quad (2.26)$$

$$W^1_1 + W^2_2 = \frac{B}{6r}(4B''' + rB^{(4)}) = \frac{B}{6r} \frac{d^4}{dr^4}(rB). \quad (2.27)$$

Se estivermos tratando da situação no vácuo, $T^\mu_\nu = 0$, implicando $W^\mu_\nu = 0$. Das equações (2.26) e (2.27), temos então uma equação diferencial de quarta ordem de solução elementar:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dr^4}(rB) = 0 &\implies rB = c_0 + c_1r + c_2r^2 + c_3r^3 \\ B(r) &= \frac{c_0}{r} + c_1 + c_2r + c_3r^2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde c_i são constantes, a princípio arbitrárias. No entanto, temos mais constantes do que deveríamos; se analisarmos W^1_1 , percebemos que a sua expressão é de terceira ordem em derivadas de $B(r)$. Portanto, não devemos ter quatro constantes arbitrárias, já que $W^1_1 = 0$. Substituindo (2.28) na expressão de W^1_1 , chegamos a uma equação bastante simples:

$$W^1_1 = \frac{1 - c_1^2 + 3c_0c_2}{3r^4} = 0 \implies c_1^2 = 1 + 3c_0c_2. \quad (2.29)$$

Nota-se que, caso $c_0 = 0$ ou $c_2 = 0$, $c_1^2 = 1$. Nesta situação, escolhemos $c_1 = 1$ e não $c_1 = -1$, a fim de que preservemos a métrica de Schwarzschild como um caso particular da métrica geral. Uma maneira de parametrizar esses coeficientes então é fazer $c_1 = 1 - 3\beta\gamma$, $c_2 = \gamma$, $c_3 = -k$, sendo β , γ e k arbitrários. c_0 fica então:

$$c_1^2 = 1 + 3c_0c_2 \implies (1 - 3\beta\gamma)^2 = 1 + 3\gamma c_0 \implies c_0 = -\beta(2 - 3\beta\gamma).$$

Assim, ficamos com a nossa expressão final para $B(r)$:

$$B(r) = A^{-1}(r) = 1 - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} - 3\beta\gamma + \gamma r - kr^2. \quad (2.30)$$

Percebe-se, de imediato, que esta métrica se reduz à métrica de Schwarzschild, no limite $r \rightarrow 0$, contanto que $-3\beta\gamma$ seja desprezível. Por outro lado, se fizermos $\gamma = 0$, temos a solução de Schwarzschild com um termo quadrático extra, $-kr^2$. Esta métrica é obtida através da solução da equação (1.33), e é denominada métrica de Schwarzschild-de-Sitter. Tal solução também permite escrever a constante k como $k = \Lambda/3$ [16, 23]. Vamos agora examinar dois casos de interesse para $B(r)$.

Em primeiro lugar, se fizermos $k = 0$, obtemos a métrica de Schwarzschild com um termo que cresce linearmente com a coordenada radial r . Como veremos adiante, este termo é providencial para explicar a alta velocidade das curvas de rotações de galáxias, pois indica que o potencial não decai para escalas suficientemente grandes, mas sim cresce.

Em segundo lugar, examinemos o caso em que $\beta = 0$, equivalente a considerar r suficientemente grande e desprezar $-3\beta\gamma$. A função $B(r)$ resulta ser, simplesmente:

$$B(r) = 1 + \gamma r - kr^2. \quad (2.31)$$

Façamos agora uma nova transformação conforme fazendo as substituições de coordenadas $r \rightarrow q$ e $t \rightarrow \tau$, definidas por:

$$q = \frac{4r}{2\sqrt{1 + \gamma r - kr^2} + 2 + \gamma r} = \frac{4r}{2\sqrt{B(r)} + 2 + \gamma r} \quad \text{e} \quad dt = \frac{d\tau}{\alpha}, \quad (2.32)$$

onde $\alpha = \alpha(\tau)$. A partir delas, é possível mostrar que a métrica (2.25) toma a seguinte forma:

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha(\tau)^2} \left[\frac{1 - q^2(\gamma^2/16 + k/4)}{(1 - \gamma q/4)^2 + kq^2/4} \right]^2 \left\{ d\tau^2 - \frac{\alpha(\tau)^2}{[1 - q^2(\gamma^2/16 + k/4)]^2} (dq^2 + q^2 d\Omega^2) \right\}. \quad (2.33)$$

Mas esta métrica é conforme à métrica:

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{\alpha(\tau)^2}{[1 - q^2(\gamma^2/16 + k/4)]^2} (dq^2 + q^2 d\Omega^2), \quad (2.34)$$

que é a métrica de Robertson-Walker (RW) [16], utilizada extensivamente para descrever modelos cosmológicos, inclusive com a constante cosmológica Λ presente. No entanto, este modelo não supôs a existência de tal constante, fazendo surgir a métrica de RW a partir da exploração da estrutura conforme da teoria. Portanto, conseguimos, a partir de uma mesma solução da Gravidade Conforme, obter um modelo para descrever as curvas de rotação de galáxias e a expansão do Universo, sendo esses dois fenômenos separados nesta teoria pelas escalas em que ocorrem.

2.5 Ajustes de curvas de rotação de galáxias

Concentremo-nos agora no problema das curvas de rotação de galáxias. Na Mecânica Clássica, uma partícula de massa m que orbita uma galáxia tem de obedecer à Lei da Gravitação Universal. Supondo que tal partícula tenha uma trajetória circular de raio r em torno do centro galáctico e aproximando que toda a massa M esteja concentrada nesse centro (plausível para a periferia galáctica), temos que a força gravitacional equivale a uma força centrípeta, implicando (em unidades do SI) que:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \implies \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \rightarrow 0, \text{ para } r \rightarrow \infty, \quad (2.35)$$

ou seja, esperaríamos que a velocidade v de tal partícula — que poderia ser facilmente interpretada como sendo uma estrela — deveria ter a dependência $v \sim r^{-1/2}$ com o tamanho de sua órbita. Tal resultado

é inclusive esperado na RG, já que obtemos fundamentalmente o mesmo perfil newtoniano (ver potencial (2.22)). No entanto, isso não é o que se observa, sendo identificada uma curva que não cai no infinito, mas que sim fica constante (ou até mesmo cresce, como argumentaremos em seguida). Esta é a origem da ideia de Matéria Escura, uma substância cuja distribuição de massa ainda se prolonga muito além do limite visível das galáxias, impossibilitando a suposição de massa concentrada no centro galáctico que fizemos e, de fato, acarretando um perfil aproximadamente constante para a periferia luminosa da galáxia.

As teorias da Gravitação Universal e da Relatividade Geral não explicam os perfis observados das curvas galácticas de rotação. Vejamos então como podemos abordar este problema utilizando a solução que obtivemos para a Gravidade Conforme. Partimos da função (2.30) para o caso com r da ordem de um raio galáctico ($r \approx 10$ kpc). Suponhamos que esse raio seja pequeno o suficiente para desconsiderarmos o termo $-kr^2$, mas grande o bastante para que γr importe. Isso equivale a fazer $k \approx 0$; supondo também que $-3\beta\gamma$ seja desprezível, a função $B(r)$ se encaixa no primeiro caso que havíamos discutido:

$$B(r) = 1 - \frac{2\beta}{r} + \gamma r. \quad (2.36)$$

Façamos procedimento semelhante ao que foi feito para obter o potencial Φ em (2.22). Isto consiste em fazer a substituição $-\frac{R_s}{r} \rightarrow -\frac{2\beta}{r} + \gamma r$, resultando no potencial:

$$\Phi = -\frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{2}r. \quad (2.37)$$

Para obter a força radial associada a esse potencial, temos que fazer $F = -m\frac{d\Phi}{dr}$, resultando em

$$F = -m\left(\frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{2}\right). \quad (2.38)$$

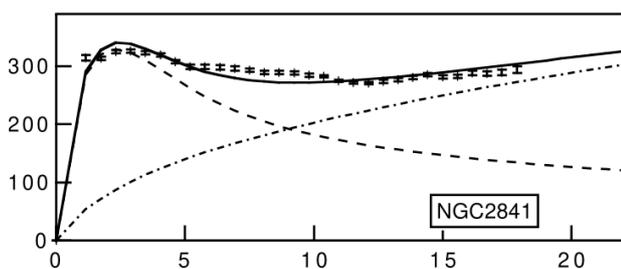
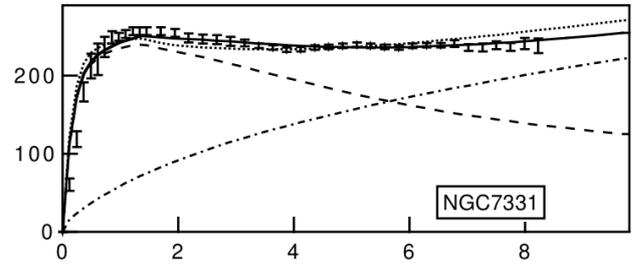
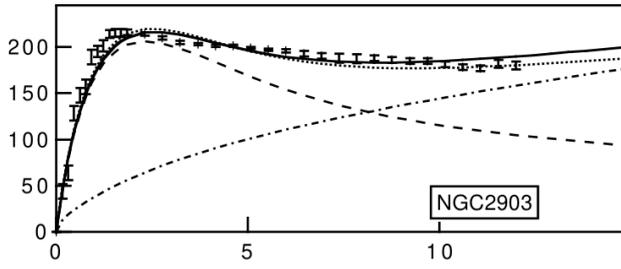
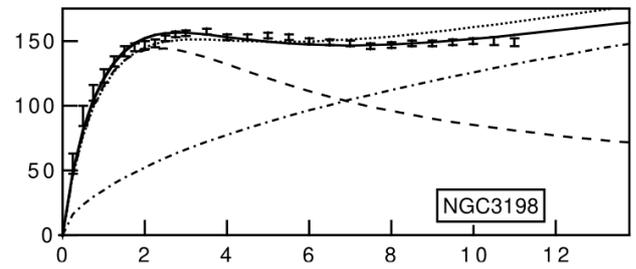
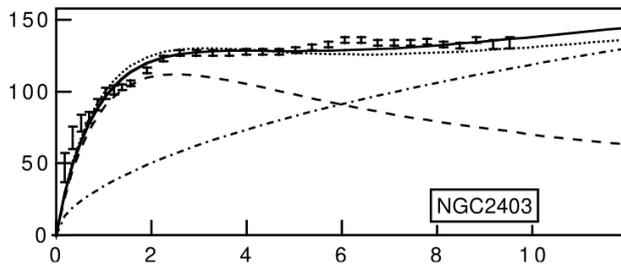
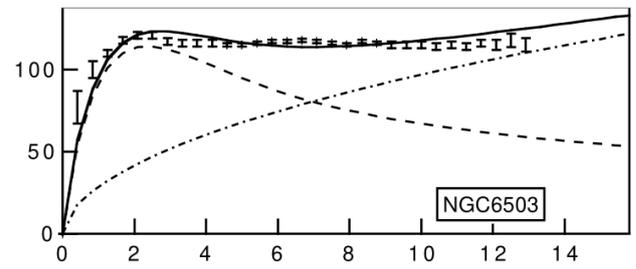
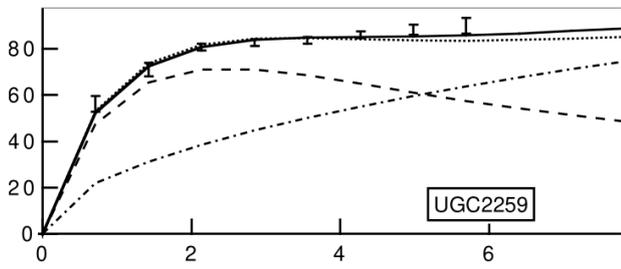
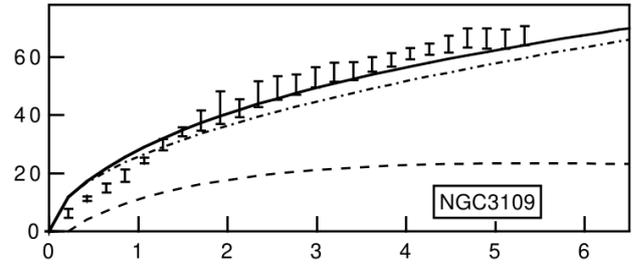
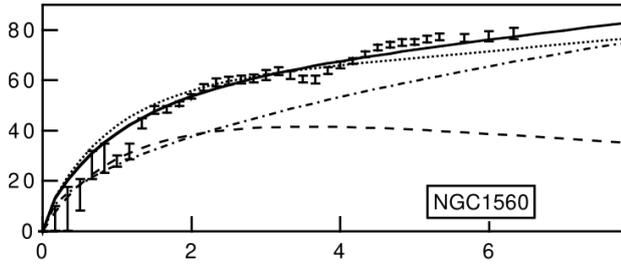
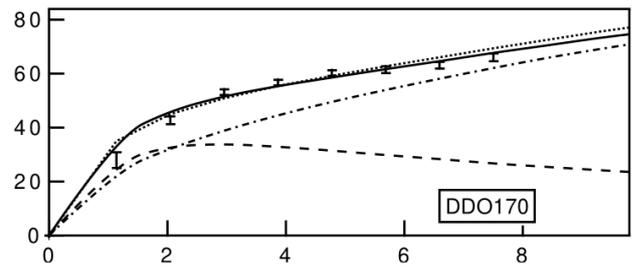
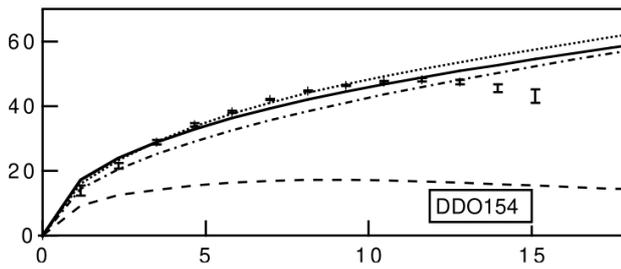
Igualando à força centrípeta:

$$-m\frac{v^2}{r} = -m\left(\frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{2}\right) \implies v^2 = \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{2}r. \quad (2.39)$$

Percebamos que, neste modelo, v não é nula para $r \rightarrow \infty$, mas sim tem dependência do tipo $v \sim r^{1/2}$, o que de fato indica crescimento das velocidades para r suficientemente grande (dentro dos limites que estabelecemos para que o termo quadrático $-kr^2$ não importe). Ainda assim, para r suficientemente pequeno, o perfil volta a ter a forma clássica, com $v \sim r^{-1/2}$. A figura 1 mostra como tal perfil de velocidades é condizente com as observações obtidas para galáxias de diferentes perfis, com luminosidades que variam por um fator de 10^3 . Nota-se que alguns dados aparentam estar aumentando sua velocidade na medida em que há um aumento do raio r , como previsto pela GC. Para mais detalhes acerca dos dados dessas galáxias, ver a referência [24].

Faz-se necessário destacar que o modelo da Gravidade Conforme não faz quaisquer suposições sobre a existência de Matéria Escura, sendo autossuficiente para descrever as curvas de rotações de galáxias observadas. Tal exemplo de teoria, independentemente da sua verossimilhança última com outras observações, mostra que há teorias modificadas da gravidade que podem replicar eficazmente resultados experimentais interpretados como o efeito da Matéria Escura sem supor a sua existência.

Figura 1: Curvas de rotação de 11 galáxias. O eixo vertical são as velocidades (km/s) e o eixo horizontal é a distância ao centro de cada galáxia em unidades do raio R_0 do disco da galáxia na região do visível. Os pontos com barra de erro são os dados observacionais. A linha sólida é o resultado da GC, levando em conta as incertezas dos dados; a linha tracejada mostra o potencial Newtoniano e a linha tracejado-pontilhada mostra o termo linear. A curva pontilhada é o ajuste da GC tomando apenas o valor médio dos dados observacionais, desconsiderando as barras de incerteza. Fonte: Mannheim, 1997 [24]



3 Considerações finais

Neste trabalho, foi examinada a teoria da Gravidade Conforme, uma proposta de teoria alternativa da gravidade à Relatividade Geral. Sua base fundamental é a substituição do princípio de invariância local de calibre pelo princípio de invariância conforme, levando naturalmente a uma Lagrangiana construída a partir do tensor conforme de Weyl. O resultado é uma teoria matematicamente mais complexa, já que suas equações de campo são a equação de Bach. Contudo, a teoria é capaz, numa das situações não-triviais mais simples, de adequadamente descrever dois fenômenos de extrema importância para a astrofísica: as curvas de rotação de galáxias e a expansão acelerada do Universo. Sua maior conquista é o fato de fazê-lo sem invocar conceitos consolidados na literatura, mas que não possuem um entendimento mais profundo de seu funcionamento, como a Matéria Escura e a Energia Escura. Tal autossuficiência pode ser inspiradora para a confecção de novas teorias da gravidade, pois não presuppõe nem faz asserções sobre substâncias que, para todos os efeitos além dos gravitacionais, nunca foram observadas.

Obviamente, a GC permanece com o status de proposta, não sendo parte da corrente principal que vigora na astrofísica, que é a de que a Relatividade Geral está correta (desconsiderando possíveis efeitos quânticos da gravidade) e de que tanto Matéria Escura quanto Energia Escura possuem realidade física, como substância e como densidade de energia do vácuo, respectivamente. Ainda assim, propostas alternativas às correntes principais estão na essência da quebra de paradigma característica da ciência e, embora nem toda proposta resulte em uma revolução do conhecimento, há um valor intrínseco em buscar novas possibilidades para explicar fenômenos pouco compreendidos. Há valor inclusive no âmbito didático, pois teorias como essa estimulam a criatividade e mantêm os cientistas mais vigilantes, tornando-os mais preparados para reconhecer quando grandes saltos teóricos estiverem prestes a serem dados, mesmo que sejam resistidos em um primeiro momento.

Referências

- [1] Albert Einstein. Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie. In *Das Relativitätsprinzip*, pages 81–124. Springer, 1923.
- [2] Vera C Rubin and W Kent Ford Jr. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, 159:379, 1970.
- [3] Fritz Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica physica acta*, 6:110–127, 1933.
- [4] Gianfranco Bertone, Dan Hooper, and Joseph Silk. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Physics reports*, 405(5-6):279–390, 2005.
- [5] Sean M Carroll. The cosmological constant. *Living reviews in relativity*, 4(1):1–56, 2001.
- [6] Ken-ji Hamada. *Quantum Gravity and Cosmology based on conformal field theory*. Cambridge Scholars Publishing, 2019.
- [7] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. 1972.
- [8] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [9] David Hilbert. Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung.). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1915:395–408, 1915.
- [10] Nivaldo A Lemos. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [11] Albert Einstein. Kosmologische Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie. In *Das Relativitätsprinzip*, pages 130–139. Springer, 1922.
- [12] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2017.
- [13] Peter AR Ade, Nabila Aghanim, MIR Alves, Charmaine Armitage-Caplan, M Arnaud, M Ashdown, F Atrio-Barandela, J Aumont, H Aussel, C Baccigalupi, et al. Planck 2013 results. i. overview of products and scientific results. *Astronomy & Astrophysics*, 571:A1, 2014.
- [14] Albert A Michelson and Edward W Morley. On the relative motion of the earth and of the luminiferous ether. *Sidereal Messenger*, vol. 6, pp. 306-310, 6:306–310, 1887.
- [15] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der physik*, 4, 1905.
- [16] Philip D Mannheim and Demosthenes Kazanas. Exact vacuum solution to conformal weyl gravity and galactic rotation curves. *The Astrophysical Journal*, 342:635–638, 1989.
- [17] Wytler Cordeiro dos Santos. Notes on the weyl tensor, decomposition of riemann tensor, ruse-lanczos identity and duality of the curvature tensor. *researchgate.net*.
- [18] Y Brihaye and Y Verbin. Spherical structures in conformal gravity and its scalar-tensor extension. *Physical Review D*, 80(12):124048, 2009.
- [19] Cornelius Lanczos. A remarkable property of the riemann-christoffel tensor in four dimensions. *Annals of Mathematics*, pages 842–850, 1938.
- [20] Cecile DeWitt and Bryce DeWitt. Relativity, groups and topology. *Relativité*, 1964.

- [21] Rudolf Bach. Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs. *Mathematische Zeitschrift*, 9(1):110–135, 1921.
- [22] Karl Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 189–196, 1916.
- [23] Li-Feng Sun, Mu-Lin Yan, Ya Deng, Wei Huang, and Sen Hu. Schwarzschild–de sitter metric and inertial beltrami coordinates. *Modern Physics Letters A*, 28(29):1350114, 2013.
- [24] Philip D Mannheim. Are galactic rotation curves really flat? *The Astrophysical Journal*, 479(2):659, 1997.
- [25] Kaare Brandt Petersen, Michael Syskind Pedersen, et al. The matrix cookbook. *Technical University of Denmark*, 7(15):510, 2008.

Apêndices

Apêndice A: Variação de $g_{\mu\nu}$ e de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

A métrica $g_{\mu\nu}$ e sua inversa possuem uma relação de ortogonalidade:

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad (\text{A.1})$$

onde δ^μ_ν é a delta de Kronecker, caracterizada por $\delta^\mu_\nu = 1$ se $\mu = \nu$ e $\delta^\mu_\nu = 0$ se $\mu \neq \nu$. Tomando a variação de (A.1), obteremos:

$$\delta g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu} = 0 \implies g_{\alpha\nu}\delta g^{\mu\alpha} = -g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu}.$$

Multiplicando por $g^{\lambda\nu}$ a expressão acima (e somando em ν), obteremos:

$$g^{\lambda\nu}g_{\alpha\nu}\delta g^{\mu\alpha} = -g^{\lambda\nu}g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu} \implies \delta g^{\mu\lambda} = -g^{\lambda\nu}g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu}, \quad (\text{A.2})$$

onde, novamente, utilizamos a propriedade de ortogonalidade no lado esquerdo da equação. A equação (A.2) permite-nos transformar variações da métrica covariante em variações da métrica contravariante e vice-versa, por inversão simples da equação utilizando novamente (A.1). Além disso, podemos obter uma igualdade que nos será de grande utilidade; multipliquemos, a expressão anterior por um tensor $U_{\mu\lambda}$. O resultado, após renomeação adequada de índices, será:

$$U_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -U^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Ou seja, para trocar a contração de um tensor com a variação covariante da métrica pela contração com a variação contravariante ou vice-versa, basta trocar o sinal da expressão e “elevar ou rebaixar” índices. Notamos que essa expressão é flagrantemente distinta de (1.3); isso ocorre porque temos que levar em conta a variação da métrica para elevar ou rebaixar índices.

Outro resultado que desejamos é sobre a variação do determinante da métrica, δg . Para deduzi-lo, vamos utilizar a fórmula de Jacobi para o cálculo matricial. Seja $A = A(t)$ uma matriz cujas entradas dependam de um parâmetro t . A fórmula de Jacobi diz que [25]:

$$\frac{d}{dt} \det(A) = \det(A) \cdot \text{tr} \left[A^{-1} \frac{dA}{dt} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Essa expressão também é válida se substituirmos a derivada em relação a t pelo operador δ que simboliza a variação do objeto. Fazendo também $A = [g_{\mu\nu}]$, teremos:

$$\delta \det([g_{\mu\nu}]) = \det([g_{\mu\nu}]) \cdot \text{tr} ([g_{\mu\nu}]^{-1} \delta [g_{\mu\nu}]) \implies \delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.5})$$

Para os cálculos da variação da ação desse trabalho, é necessário conhecer a expressão $\delta(\sqrt{-g})$ em função de $\delta g^{\mu\nu}$. A partir de (A.3) e (A.5), tal cálculo torna-se simples:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{g}{2\sqrt{-g}}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.6})$$

Passemos agora ao cálculo da variação do símbolo de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Variando (1.8), obtém-se:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\alpha}(g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}) + \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\delta g_{\alpha\nu,\mu} + \delta g_{\alpha\mu,\nu} - \delta g_{\mu\nu,\alpha}).$$

Utilizando (A.2), podemos reescrever o primeiro termo, obtendo:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = -g^{\lambda\eta}\Gamma_{\mu\nu}^\sigma\delta g_{\eta\sigma} + \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\delta g_{\alpha\nu,\mu} + \delta g_{\alpha\mu,\nu} - \delta g_{\mu\nu,\alpha}).$$

Vamos agora substituir as derivadas parciais do segundo termo pelas derivadas covariantes equivalentes, invertendo a expressão (1.6):

$$\begin{aligned}\delta g_{\alpha\nu,\mu} &= \nabla_\mu(\delta g_{\alpha\nu}) + \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\delta g_{\beta\nu} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\delta g_{\alpha\beta} \\ \delta g_{\alpha\mu,\nu} &= \nabla_\nu(\delta g_{\alpha\mu}) + \Gamma^\beta_{\nu\alpha}\delta g_{\beta\mu} + \Gamma^\beta_{\nu\mu}\delta g_{\alpha\beta} \\ \delta g_{\mu\nu,\alpha} &= \nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu}) + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\delta g_{\beta\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\delta g_{\mu\beta}.\end{aligned}$$

O resultado disso será:

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\nu}) + \nabla_\nu(\delta g_{\alpha\mu}) - \nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})) + \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\Gamma^\beta_{\mu\nu}\delta g_{\alpha\beta} + \Gamma^\beta_{\nu\mu}\delta g_{\alpha\beta}) - g^{\lambda\eta}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta g_{\eta\sigma}.$$

Porém, os últimos termos se cancelam, pois $\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \Gamma^\beta_{\nu\mu}$, restando apenas a expressão em derivadas covariantes da variação da métrica:

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\nu}) + \nabla_\nu(\delta g_{\alpha\mu}) - \nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})). \quad (\text{A.7})$$

(A.7) mostra claramente que a variação do símbolo de Christoffel é um tensor, pois resulta da soma de derivadas covariantes de outros tensores.

Apêndice B: Contração do tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu}$

A partir da equação (2.6), podemos obter a versão contravariante do tensor de Weyl levantando os índices:

$$C^{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} (g^{\alpha\mu} R^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} R^{\beta\mu} + g^{\beta\nu} R^{\alpha\mu} - g^{\beta\mu} R^{\alpha\nu}) + \frac{R}{6} (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}). \quad (\text{B.1})$$

Para facilitar na visualização dos cálculos podemos definir:

$$A^{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{2} (g^{\alpha\mu} R^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} R^{\beta\mu} + g^{\beta\nu} R^{\alpha\mu} - g^{\beta\mu} R^{\alpha\nu}),$$

$$B^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{R}{6} (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}).$$

Assim:

$$C^{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\alpha\beta\mu\nu} + A^{\alpha\beta\mu\nu} + B^{\alpha\beta\mu\nu},$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + A_{\alpha\beta\mu\nu} + B_{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Ou seja, a expressão que precisamos calcular é

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}B^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &+ A_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} + A_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta\mu\nu} + A_{\alpha\beta\mu\nu}B^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &+ B_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} + B_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta\mu\nu} + B_{\alpha\beta\mu\nu}B^{\alpha\beta\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Pelo argumento apresentado em (1.3), vemos que:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} + A_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta\mu\nu} + B_{\alpha\beta\mu\nu}B^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &+ 2 (R_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}B^{\alpha\beta\mu\nu} + A_{\alpha\beta\mu\nu}B^{\alpha\beta\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Resta-nos calcular os termos que envolvem os tensores A e B :

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{4} (g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}) (g^{\alpha\mu}R^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}R^{\beta\mu} + g^{\beta\nu}R^{\alpha\mu} - g^{\beta\mu}R^{\alpha\nu}) \\ &= \frac{1}{4} (4R_{\beta\nu}R^{\beta\nu} - \delta^\mu_\nu R_{\beta\mu}R^{\beta\nu} + R^2 - \delta^\alpha_\beta R_{\alpha\nu}R^{\beta\nu} - \delta^\nu_\mu R_{\beta\nu}R^{\beta\mu} + 4R_{\beta\mu}R^{\beta\mu} - \delta^\alpha_\beta R_{\alpha\mu}R^{\beta\mu} + R^2 \\ &+ R^2 - \delta^\beta_\alpha R_{\beta\mu}R^{\alpha\mu} + 4R_{\alpha\mu}R^{\alpha\mu} - \delta^\nu_\mu R_{\alpha\nu}R^{\alpha\mu} - \delta^\beta_\alpha R_{\beta\nu}R^{\alpha\nu} + R^2 - \delta^\mu_\nu R_{\alpha\mu}R^{\alpha\nu} + 4R_{\alpha\nu}R^{\alpha\nu}) \\ &= \frac{1}{4} (4 \times 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - 4 \times 2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + 4R^2) \\ &= 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{1}{2} (g^{\alpha\mu}R^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}R^{\beta\mu} + g^{\beta\nu}R^{\alpha\mu} - g^{\beta\mu}R^{\alpha\nu}) R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} (R^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu} - R^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} + R^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} - R^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} (R^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu} + R^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}R_{\alpha\beta\nu\mu} + R^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\beta\alpha\nu\mu} + R^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}R_{\beta\alpha\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} (R^{\beta\nu}R^\mu_{\beta\mu\nu} + R^{\beta\mu}R^\nu_{\beta\nu\mu} + R^{\alpha\mu}R^\nu_{\alpha\nu\mu} + R^{\alpha\nu}R^\mu_{\alpha\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} (R^{\beta\nu}R_{\beta\nu} + R^{\beta\mu}R_{\beta\mu} + R^{\alpha\mu}R_{\alpha\mu} + R^{\alpha\nu}R_{\alpha\nu}) = -2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{R}{12} (g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}) (g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}) \\
&= -\frac{R}{12} (4R - \delta^\mu_\nu R^\nu_\mu + 4R - \delta^\alpha_\beta R^\beta_\alpha - \delta^\nu_\mu R^\mu_\nu + 4R - \delta^\alpha_\beta R^\beta_\alpha + 4R) \\
&= -\frac{R}{12} (4 \times 4R - 4R) = -R^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}B^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{R}{6} (g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}) R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{R}{6} (g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu}) \\
&= \frac{R}{6} (g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}R_{\alpha\beta\nu\mu}) = \frac{R}{6} (g^{\beta\nu}R^\mu_{\beta\mu\nu} + g^{\beta\mu}R^\nu_{\beta\nu\mu}) \\
&= \frac{R}{6} (g^{\beta\nu}R_{\beta\nu} + g^{\beta\mu}R_{\beta\mu}) = \frac{R}{6} \times 2R = \frac{R^2}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{\alpha\beta\mu\nu}B_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{R^2}{36} (g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}) (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \\
&= \frac{R^2}{36} (4 \times 4 - \delta^\mu_\nu \delta^\nu_\mu - \delta^\nu_\mu \delta^\mu_\nu + 4 \times 4) \\
&= \frac{24R^2}{36} = \frac{2R^2}{3}.
\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (B.3), obteremos finalmente que:

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} + 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2 + \frac{2R^2}{3} + 2 \left(-2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{R^2}{3} - R^2 \right) \\
&= R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{R^2}{3}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Apêndice C: Cálculo da integral em (2.15)

Partimos da integral:

$$I_1 = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(2R^{\mu\nu} - \frac{2}{3}g^{\mu\nu}R \right) \delta R_{\mu\nu}.$$

Vamos definir $S^{\mu\nu} \equiv 2R^{\mu\nu} - \frac{2}{3}g^{\mu\nu}R$. Substituindo $\delta R_{\mu\nu}$ pela expressão obtida em (1.22), ficamos com:

$$I_1 = \int_M d^4x \sqrt{-g} S^{\mu\nu} (\nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) - \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})).$$

Vamos aplicar a versão covariante da integração por partes para reescrever I_1 . O teorema da divergência apresentado em (1.9) afirma que, para um tensor A^μ ,

$$\int_M \nabla_\mu A^\mu \sqrt{-g} d^4x = \int_{\partial M} A^\mu \sqrt{-g} d\Sigma_\mu.$$

Suponhamos que $A^\mu = 0$ na fronteira ∂M da variedade (é o nosso caso, pois $\delta g_{\mu\nu} = 0$ na fronteira); então o lado direito da expressão acima é nulo. Imaginemos em seguida, por exemplo, que $A^\mu = B^{\mu\nu}C_\nu$, onde B e C são outros dois tensores. A regra do produto também se aplica à derivada covariante, de modo que:

$$\int_M B^{\mu\nu} \nabla_\mu C_\nu \sqrt{-g} d^4x = - \int_M C_\nu \nabla_\mu B^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (\text{C.1})$$

Utilizando (C.1), I_1 fica:

$$I_1 = - \int_M d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\nu S^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda S^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}).$$

Substituindo a variação do símbolo de Christoffel pela expressão encontrada em (A.7):

$$I_1 = - \int_M d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left[\nabla_\nu S^{\mu\nu} [\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\lambda}) + \nabla_\lambda(\delta g_{\alpha\mu}) - \nabla_\alpha(\delta g_{\mu\lambda})] \right. \\ \left. - \nabla_\lambda S^{\mu\nu} [\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\nu}) + \nabla_\nu(\delta g_{\alpha\mu}) - \nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})] \right].$$

Mais uma integração por partes em todos os termos resulta em

$$I_1 = \int_M d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left[\nabla_\mu \nabla_\nu S^{\mu\nu} \delta g_{\alpha\lambda} + \nabla_\lambda \nabla_\nu S^{\mu\nu} \delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha \nabla_\nu S^{\mu\nu} \delta g_{\mu\lambda} \right. \\ \left. - \nabla_\mu \nabla_\lambda S^{\mu\nu} \delta g_{\alpha\nu} - \nabla_\nu \nabla_\lambda S^{\mu\nu} \delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\alpha \nabla_\lambda S^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right].$$

Renomeando os índices e evidenciando o fator $\delta g_{\mu\nu}$, obtém-se

$$I_1 = \int_M d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \left[g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta S^{\alpha\beta} + g^{\lambda\nu} [\nabla_\lambda, \nabla_\alpha] S^{\mu\alpha} - g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha \nabla_\lambda S^{\mu\lambda} - g^{\lambda\mu} \nabla_\alpha \nabla_\lambda S^{\alpha\nu} + g^{\lambda\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\lambda S^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu}.$$

Podemos agora utilizar (A.3) para “trocar” $\delta g_{\mu\nu}$ por $\delta g^{\mu\nu}$. Lembrando sempre que $S^{\mu\nu}$ é simétrico, obtemos:

$$I_1 = \int_M d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \left[-g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta S^{\alpha\beta} - g^\lambda{}_\nu [\nabla_\lambda, \nabla_\alpha] S^\alpha{}_\mu + g^\alpha{}_\nu \nabla_\alpha \nabla_\lambda S^\lambda{}_\mu + g^\lambda{}_\mu \nabla_\alpha \nabla_\lambda S^\alpha{}_\nu - g^{\lambda\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\lambda S_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{C.2})$$

Precisamos agora explicitar os termos restantes. O primeiro termo fica:

$$\begin{aligned} -g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta S^{\alpha\beta} &= -2g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} g^{\alpha\beta} R \right) = -2g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta R^{\alpha\beta} + \frac{2}{3} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R \\ &= -g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha R + \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha R \\ &= -\frac{1}{3} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha R. \end{aligned}$$

Na segunda linha, utilizamos a identidade contraída de Bianchi $\nabla_\beta R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \nabla^\alpha R$ [7]. Para o segundo termo, lembremo-nos que $g^\lambda{}_\nu = \delta^\lambda{}_\nu$, e que $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]R = 0$, obtendo

$$\begin{aligned} -g^\lambda{}_\nu [\nabla_\lambda, \nabla_\alpha] S^\alpha{}_\mu &= [\nabla_\alpha, \nabla_\nu] S^\alpha{}_\mu = 2[\nabla_\alpha, \nabla_\nu] \left(R^\alpha{}_\mu - \frac{1}{3} g^\alpha{}_\mu R \right) \\ &= 2[\nabla_\alpha, \nabla_\nu] R^\alpha{}_\mu = -2R^\alpha{}_{\rho\alpha\nu} R^\rho{}_\mu + 2R^\rho{}_{\mu\alpha\nu} R^\alpha{}_\rho \\ &= 2R^{\rho\alpha} R_{\rho\mu\alpha\nu} - 2R_{\rho\nu} R^\rho{}_\mu, \end{aligned}$$

onde utilizamos a expressão geral para o comutador de derivadas covariantes obtida em (1.13) e a propriedade de levantar e rebaixar índices apresentada em (1.3). O cálculo do terceiro termo é semelhante ao do primeiro:

$$\begin{aligned} g^\alpha{}_\nu \nabla_\alpha \nabla_\lambda S^\lambda{}_\mu &= \nabla_\nu \nabla_\lambda S^\lambda{}_\mu = 2\nabla_\nu \nabla_\lambda \left(R^\lambda{}_\mu - \frac{1}{3} g^\lambda{}_\mu R \right) \\ &= 2\nabla_\nu \nabla_\lambda R^\lambda{}_\mu - \frac{2}{3} \nabla_\nu \nabla_\mu R \\ &= \nabla_\nu \nabla_\mu R - \frac{2}{3} \nabla_\nu \nabla_\mu R = \frac{1}{3} \nabla_\nu \nabla_\mu R \\ &= \frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu R. \end{aligned}$$

E o quarto resulta em algo semelhante ao segundo:

$$\begin{aligned} g^\lambda{}_\mu \nabla_\alpha \nabla_\lambda S^\alpha{}_\nu &= \nabla_\alpha \nabla_\mu S^\alpha{}_\nu = \nabla_\mu \nabla_\alpha S^\alpha{}_\nu + [\nabla_\alpha, \nabla_\mu] S^\alpha{}_\nu \\ &= 2\nabla_\mu \nabla_\alpha R^\alpha{}_\nu - \frac{2}{3} g^\alpha{}_\nu \nabla_\mu \nabla_\alpha R + 2[\nabla_\alpha, \nabla_\mu] R^\alpha{}_\nu \\ &= \nabla_\mu \nabla_\nu R - \frac{2}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu R - 2R_{\rho\mu} R^\rho{}_\nu + 2R^{\rho\alpha} R_{\rho\nu\alpha\mu} \\ &= \frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2R^{\rho\alpha} R_{\rho\mu\alpha\nu} - 2R_{\rho\nu} R^\rho{}_\mu. \end{aligned}$$

Da penúltima para a última linha, trocamos μ e ν de lugar nos últimos dois termos (sempre obedecendo às simetrias dos tensores de Riemann e de Ricci), a fim de que eles ficassem idênticos àqueles encontrados no segundo termo. Por fim, o quinto termo fica:

$$\begin{aligned} -g^{\lambda\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\lambda S_{\mu\nu} &= -2\nabla_\alpha \nabla^\alpha \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} g_{\mu\nu} R \right) \\ &= -2\nabla_\alpha \nabla^\alpha R_{\mu\nu} + \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha R. \end{aligned}$$

Ao final, juntando todos esses resultados e substituindo em (C.2), ficamos com a seguinte expressão para I_1 :

$$I_1 = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu R - \nabla_\lambda \nabla^\lambda R_{\mu\nu} - 2R^\lambda{}_\mu R_{\lambda\nu} + 2R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} + \frac{1}{6} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda R \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{C.3})$$