

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**COMPORTAMENTO CONSTITUTIVO DE REJEITO DE  
MINÉRIO DE FERRO FILTRADO E COMPACTADO**

**João Vítor de Azambuja Carvalho**

Porto Alegre  
2023

JOÃO VÍTOR DE AZAMBUJA CARVALHO

**COMPORTAMENTO CONSTITUTIVO DE REJEITO DE  
MINÉRIO DE FERRO FILTRADO E COMPACTADO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre  
2023

### CIP - Catalogação na Publicação

Carvalho, João Vítor de Azambuja  
Comportamento constitutivo de rejeito de minério de  
ferro filtrado e compactado / João Vítor de Azambuja  
Carvalho. -- 2023.  
135 f.  
Orientador: Nilo Cesar Consoli.

Coorientador: Hugo Carlos Scheuermann Filho.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 2023.

1. Rejeito de minério de ferro. 2. Mecânica dos  
Solos do Estado Crítico. 3. Dilatância. 4.  
Empilhamento à seco. 5. Altas tensões. I. Consoli,  
Nilo Cesar, orient. II. Scheuermann Filho, Hugo  
Carlos, coorient. III. Título.

**JOÃO VÍTOR DE AZAMBUJA CARVALHO**

**COMPORTAMENTO CONSTITUTIVO DE REJEITO DE  
MINÉRIO DE FERRO FILTRADO E COMPACTADO**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de concentração Geotecnia, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 14 de Março de 2023

Prof. Nilo Cesar Consoli  
Ph.D. pela Concordia University, Canadá  
Orientador

Dr. Hugo Carlos Scheuermann Filho  
Dr. pela Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul  
Coorientador

Lucas Festugato  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Erdin Ibraim (University of Bristol)**  
Ph.D. pela Institut National des Sciences  
Appliquées

**Dr. Beatrice Baudet (University College  
London)**  
Ph.D. pela City, University of London

**Prof. Matthew Richard Coop (University  
College London)**  
Ph.D. pela University of Oxford

**Prof. Lucas Festugato (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul

**Dr. João Paulo de Sousa Silva (VALE S.A.)**  
Dr. pela Universidade de Brasília

Dedico este trabalho à minha família e à minha  
namorada Morgana Mesquita.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Flávia Azambuja, Gustavo Zechlinski e Delmar Carvalho, pelo apoio e carinho de sempre. Agradeço pela dedicação de vocês em proporcionar todo suporte necessário para que eu pudesse cumprir meus objetivos e ambições. A dedicação de vocês me motiva ainda mais nessa caminhada. Agradeço também, aos meus irmãos Pedro Henrique Carvalho e Luís Felipe Zechlinski, pelo companheirismo e amizade, daqueles que desde sempre foram meus primeiros amigos.

À minha namorada, Morgana Mesquita, agradeço pelo amor, carinho, apoio e coragem de enfrentar ao meu lado cada novo desafio. Tua parceria me traz a tranquilidade necessária para correr atrás de tudo que sonhamos. Muito obrigado por estar ao meu lado em todos momentos, sempre disponível para tudo, te amo. Aos meus sogros, Ivanilda Neitzke e Eno Mesquita, pelas constantes palavras de incentivo e confiança de sempre, o apoio de vocês foi fundamental.

Expresso minha gratidão e reconhecimento a todos os professores que fizeram parte da minha formação, é graças ao trabalho de vocês que pude chegar até aqui. Em especial, agradeço aos professores do grupo de Geotecnia da Universidade Federal do Rio Grande, Cezar Bastos, Diego Fagundes, Antonio Alves e Karina Camargo, que proporcionaram aprendizado ímpar durante a graduação e me apresentaram a Geotecnia.

Ao meu orientador, Nilo Consoli, pelo aprendizado, oportunidades, muitas conversas, amizade e incentivo constante na busca do conhecimento. Com certeza a experiência sob sua orientação foi fundamental na minha formação enquanto engenheiro e pessoa, muito obrigado por tanto. Agradeço ao meu coorientador, Hugo Scheuermann Filho, pela disponibilidade e amizade sempre demonstradas e que contribuíram muito para o desenvolvimento do trabalho.

À parceira de trabalho e estudos, Alexia Wagner, pelo companheirismo e amizade, que foram fundamentais para realização do trabalho. Obrigado pela ajuda com os ensaios, cafés e almoços no LEGG, parceria de artigos e discussões, e por poder aprender contigo diariamente. Aos demais amigos de LEGG, em especial Helder Chaves e João Pedro Guedes, que tornaram os dias de trabalho mais leves e proporcionaram boas risadas e grandes histórias. Agradeço também aos amigos que me acompanham desde muito, Vinícius Caetano, Rodrigo Pires e Gabriel Martínez, pela parceria de sempre e boas conversas.

Por fim, agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil pelo ensino de distinta qualidade, onde pude encontrar profissionais da mais alta estirpe e amigos que levarei para a vida. Agradeço ainda à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa que possibilitou o desenvolvimento dessa pesquisa e à VALE pela cessão do material utilizado e apoio ao projeto.

*“Enquanto um homem tiver forças pra sonhar,  
ele pode redimir sua alma e voar”*

***Elvis Presley***

## RESUMO

CARVALHO, J. V. A. **Comportamento constitutivo de rejeito de minério de ferro filtrado e compactado**. 2023. 135p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) -- Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

A ocorrência de desastres de grandes magnitudes envolvendo os métodos convencionais de disposição de rejeitos endossou a busca por alternativas viáveis para dispor esses subprodutos dos processos de extração e beneficiamento de minérios de forma mais segura e sustentável. Uma possibilidade é a disposição em pilhas de rejeito compactado e filtrado. Para isso, faz-se necessário o entendimento do comportamento desses materiais em estados densos e a influência dos estados de tensões aos quais estarão submetidos durante a vida útil da estrutura. Além disso, durante a etapa de projeto, a fim de prever o comportamento de Estruturas de Armazenagem de Rejeitos (EAR), usualmente são empregados modelos constitutivos. Porém, as hipóteses e condições assumidas no desenvolvimento dos modelos aplicados precisam ser verificadas e adequadas à sua aplicação. Portanto, este trabalho busca descrever o comportamento constitutivo de um rejeito de minério de ferro filtrado e compactado em uma ampla faixa de tensões e estados a fim de promover um maior entendimento da resposta mecânica desse material. São investigados aspectos relativos ao comportamento tensão-deformação, tensão-dilatância, forma da superfície de plastificação e direção de fluxo plástico do material sob uma ampla faixa de tensões e diferentes compacidades. Observou-se que a quebra de partículas apresenta reflexos no comportamento constitutivo do material desde tensão mais baixas. Além disso, foi verificada a forma da superfície de plastificação de um rejeito de minério de ferro e que esse segue uma lei de fluxo não associada. Por fim, a partir das observações sobre o comportamento constitutivo do rejeito, são propostas condições para definição de uma equação de dissipação de energia consistente.

**Palavras-chave:** *rejeito de minério de ferro, estado crítico, dilatância, empilhamento à seco, materiais granulares, altas tensões.*

## ABSTRACT

CARVALHO, J. V. A. **Comportamento constitutivo de rejeito de minério de ferro filtrado e compactado**. 2023. 135p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) -- Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

The recent disasters involving conventional tailings storage facilities highlighted the need for viable alternatives to safely and sustainably dispose of these by-products of ore extraction and beneficiation. One possibility is the disposal of filtered compacted tailings in stacks. In this regard, a better understanding of tailings behaviour in dense states and the influence of stress history occurring during the structure lifetime is needed. Furthermore, constitutive models are usually considered in previewing the behaviour of tailings storage facilities during design stages. However, the assumptions made during the models' development and their validity to the applications being considered are not usually verified. Accordingly, this work aims at describing the constitutive response of filtered compacted iron ore tailings in a broad range of pressures and states. Besides, the tailings' stress-strain and stress-dilatancy response, the shape of the yield surface, and the plastic flow direction are investigated. Particle breakage was found to influence the constitutive behaviour from low pressures. Also, the shape of the yield surface for the iron ore tailings was verified, and the tailings followed a non-associated flow rule. Finally, conditions for defining a consistent energy dissipation equation are proposed from the observed behaviour.

**Keywords:** *iron ore tailings, critical state, dilatancy, dry stacking, granular materials, high pressures.*

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 – Gerenciamento de Estruturas de Armazenagem de Rejeitos (EAR). Adaptado de Spitz et al. (2019). . . . .   | 25 |
| Figura 2.2 – Exemplos de geometrias de pilhas de rejeito filtrado. . . . .  | 29 |
| Figura 2.3 – Comportamento volumétrico de materiais granulares em diferentes compacidades. . . . .  | 31 |
| Figura 2.4 – Representação da Linha de Estado Crítico (LEC) e da Linha Isotrópica de Compressão (LIC) no plano $v-\ln p'$ . . . . .   | 35 |
| Figura 2.5 – Comportamento volumétrico esperado de um material em diferentes posições em relação à LEC. . . . .   | 36 |
| Figura 2.6 – Mecanismo de deformação volumétrica idealizado por Rowe (1962) para um arranjo uniforme de esferas em seu estado (a) inicial e (b) final. Adaptado de Rowe (1962). . . . .           | 38 |
| Figura 2.7 – Mecanismo de deformação volumétrica para um arranjo irregular de partículas angulares em seu estado (a) inicial e (b) final. . . . .   | 39 |
| Figura 2.8 – Leis de dilatação dependentes exclusivamente da razão de tensões. . . . .  | 40 |
| Figura 2.9 – Variação da relação tensão-dilatação de Nova (1982) conforme o valor de $N$ . . . . .  | 41 |
| Figura 2.10 – Dependência da relação estado-dilatação de Xiang Song Li et al. (2000) nos parâmetros de ajuste (a) $d_0$ e (b) $m$ . . . . .   | 42 |
| Figura 2.11 – Representação esquemática de resposta tensão-deformação para diferentes modelos constitutivos. . . . .  | 45 |
| Figura 2.12 – Definições (a) da pressão equivalente ( $p'_e$ ) de Hvorslev no plano $v - \ln p'$ , (b) das superfícies limites de estado e (c) da pressão equivalente no plano $q - p'$ . . . . . | 47 |
| Figura 2.13 – Representação da superfície de plastificação e vetores de incremento de deformações plásticas para (a) fluxo associado e (b) fluxo não associado. . . . .                           | 48 |
| Figura 3.1 – Estados considerados no programa experimental. . . . .   | 54 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 3.2 – Cadeia de processamento do minério de ferro e estágio de obtenção dos rejeitos Ultrafino (UF) e Flotação (F). Adaptado de Silva et al. (2022). . . . .  | 56 |
| Figura 3.3 – Amostras originais do (a) Rejeito UF e (b) Rejeito F previamente à mistura. . . . .   | 56 |
| Figura 3.4 – Curva granulométrica do material antes de ser testado. . . . .  | 57 |
| Figura 3.5 – Imagens de MEV dos rejeitos (a, b) UF, (c, d) F e (e, f) 80F20UF. . . . .   | 58 |
| Figura 3.6 – Imagens MEV do Rejeito 80F20UF retido nas peneiras (a) 0.075 mm e (b) 0.425 mm. . . . .   | 59 |
| Figura 3.7 – Curva de compactação do material considerando a energia normal. . . . .   | 60 |
| Figura 3.8 – Esquema de instrumentação interna utilizado na realização dos ensaios triaxiais. . . . .  | 63 |
| Figura 3.9 – Métodos de correção de área empregados na análise de ensaios triaxiais de acordo com o modo de deformação observado (a) embarrigamento, (b) plano de cisalhamento considerando dois corpos rígidos deslizando um sobre o outro e (c) plano de cisalhamento. . . . . | 64 |
| Figura 3.10 – Hipótese de enrijecimento isotrópico e esboço de uma superfície de plastificação para materiais que experimentaram uma mesma tensão efetiva média máxima na compressão isotrópica. . . . .   | 65 |
| Figura 3.11 – Definições das pressões de normalização para determinação das superfícies limites de estado. Adaptado de Todisco et al. (2016). . . . .  | 67 |
| Figura 4.1 – Comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica para (a) amostras densas e (b) amostras densas sob tensão confinante de até 250 <i>kPa</i> . . . . .   | 71 |
| Figura 4.2 – Comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostras fofas. . . . .   | 73 |
| Figura 4.3 – Comportamento tensão-deformação normalizado de amostras fofas e densas. . . . .   | 74 |
| Figura 4.4 – Comparativo entre o comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostra inicialmente fofa, compactada ou sobreconsolidada sob tensão confinante de 50 <i>kPa</i> . . . . .  | 76 |
| Figura 4.5 – Comparativo entre o comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostra inicialmente fofa, compactada ou sobreconsolidada sob tensão confinante de 500 <i>kPa</i> . . . . .   | 77 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 4.6 – Comparativo entre o comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostra inicialmente fofa, compactada ou sobreconsolidada sob tensão confinante de 1000 <i>kPa</i> . . . . .               | 78 |
| Figura 4.7 – Comparativo entre o comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostra inicialmente fofa, compactada ou sobreconsolidada sob tensão confinante de 2000 <i>kPa</i> . . . . .               | 80 |
| Figura 4.8 – Ajuste da envoltória de resistência de pico de ensaios densos por polinômio de 2 <sup>o</sup> grau. . . . .  | 81 |
| Figura 4.9 – Comparativo de envoltórias de resistência de pico de ensaios densos e sobreconsolidados. . . . .   | 81 |
| Figura 4.10 – Linha de Estado Crítico no plano $q - p'$ . . . . .   | 82 |
| Figura 4.11 – Envoltórias de pico para amostras compactadas e sobreconsolidadas e LEC no plano $q - p'$ . . . . .   | 83 |
| Figura 4.12 – Razão de tensões vs deformação distorcional para as amostras fofas e compactas. . . . .   | 84 |
| Figura 4.13 – Razão de tensões vs deformação distorcional para as amostras sobreconsolidadas em relação às amostras fofas e densas. . . . .   | 85 |
| Figura 4.14 – Estimativa do lócus de estados críticos no plano $v - \ln p'$ . . . . .   | 86 |
| Figura 4.15 – Representação do lócus de estados críticos estimado em escala natural no plano $v - p'$ . . . . .   | 87 |
| Figura 4.16 – Comparativo de LEC obtida para o rejeito estudado com outros resultados disponíveis na literatura . . . . .   | 87 |
| Figura 4.17 – Variação do Módulo de Elasticidade tangente ( $E_{tan}$ ) com as deformações axiais para amostra fofa, compactada e sobreconsolidada sob tensão confinante efetiva de 50 <i>kPa</i> . . . . .           | 89 |
| Figura 4.18 – Influência da tensão máxima de compressão isotrópica e da história de tensões na degradação do Módulo de Elasticidade tangente. . . . .   | 89 |
| Figura 4.19 – Variação do Módulo de Elasticidade tangente e determinação de pontos de plastificação por variação na rigidez de ensaios sobreconsolidados em (a) escala natural e (b) escala semi-logarítmica. . . . . | 90 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 4.20 – Superfícies de plastificação estimadas a partir de variações na rigidez do material. . . . .   | 92  |
| Figura 4.21 – Superfícies de plastificação normalizadas em relação (a) à pressão de compressão isotrópica e (b) à pressão de compressão isotrópica e o efeito das deformações cisalhantes. . . . . | 93  |
| Figura 4.22 – Estimativa da superfície limite de estado através da normalização dos invariantes pelas tensões no estado crítico. . . . .   | 94  |
| Figura 4.23 – Razão entre o comprimento do vetor de deformações plásticas e vetor de deformações totais em função da deformação distorcional. . . . .  | 95  |
| Figura 4.24 – Comparativo de curvas tensão-dilatância obtidas a partir de deformações totais ou plásticas. . . . .   | 96  |
| Figura 4.25 – Curvas tensão-dilatância plástica de amostras fofas e compactas. . . . .   | 96  |
| Figura 4.26 – Comparativo de dilatância para amostras compactas e sobreconsolidadas sob tensão confinante de (a) 50 kPa e (b) 1000 kPa. . . . .  | 97  |
| Figura 4.27 – Curvas tensão-dilatância de ensaios sobreconsolidados. . . . .   | 98  |
| Figura 4.28 – Relação entre $D^P_{min}$ e $\eta_{max}$ para o material estudado. . . . .   | 99  |
| Figura 4.29 – Ajuste de relações $D^P_{min}$ e $\eta_{max}$ a partir de leis tensão-dilatância da literatura. . . . .  | 99  |
| Figura 4.30 – Influência do estado através de $\psi$ em (a) $D^P_{min}$ e (b) $\eta_{max}$ . . . . .   | 100 |
| Figura 4.31 – Sobreposição dos vetores de deformação plástica às trajetórias normalizadas para ensaios de 1000, 2000 e 4000 kPa. . . . .   | 101 |
| Figura 4.32 – Sobreposição dos vetores de deformação plástica à superfície de plastificação dos ensaios sobreconsolidados à 2000 kPa. . . . .  | 102 |
| Figura 4.33 – Distribuição granulométrica de amostras antes e após o cisalhamento sob altas tensões. . . . .   | 103 |
| Figura 4.34 – Porcentagem retida para cada tamanho equivalente de grãos antes e após o cisalhamento. . . . .   | 104 |
| Figura 4.35 – Características das partículas retidas em duas distintas aberturas de peneiras a partir da imagens Microscopia Eletrônica de Varredura (MEV). . . . .                                | 105 |

## LISTA DE TABELAS

|  |    |
|--|----|
| Tabela 2.1 – Tipos de rejeitos para disposição (ULRICH, 2019). . . . .   | 25 |
| Tabela 2.2 – Exemplos de operações de rejeito filtrado de grande capacidade. Adaptado de Ulrich et al. (2013). . . . .   | 27 |
| Tabela 2.3 – Relação de leis de dilatação encontradas na literatura. . . . .   | 40 |
| Tabela 3.1 – Faixas de tensões e exemplos de aplicações em engenharia geotécnica. Adaptado de Liu et al. (2020). . . . . | 53 |
| Tabela 3.2 – Resumo do programa experimental proposto. . . . .   | 54 |
| Tabela 3.3 – Resultado de Espectroscopia de raios-X por Dispersão em Energia (EDE). . . . .                              | 59 |
| Tabela 3.4 – Resumo da caracterização dos materiais originais e da mistura utilizada. . . . .                            | 61 |
| Tabela 4.1 – Resumo dos ensaios triaxiais realizados. . . . .  | 75 |

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

**CID** Consolidado Isotropicamente Drenado

**EAR** Estruturas de Armazenagem de Rejeitos

**EDE** Espectroscopia de raios-X por Dispersão em Energia

**F** Rejeito de Flotação

**LEC** Linha de Estado Crítico

**LEGG** Laboratório de Ensaaios Geotécnicos e Geoambientais

**LIC** Linha de Isotrópica de Compressão

**MED** Método dos Elementos Discretos

**MEV** Microscopia Eletrônica de Varredura

**QF** Região do Quadrilátero Ferrífero (MG)

**SC** Sobreconsolidado

**UF** Rejeito Ultrafino

**UFRGS** Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_{cp}$  Área da amostra

$B$  Módulo volumétrico

$c'$  Intercepto coesivo

$\delta\Phi$  Função de energia dissipada pelo sistema

$\dot{\epsilon}_s^p$  Incremento de deformações distorcionais plásticas

$\dot{\epsilon}_v^p$  Incremento de deformações volumétricas plásticas

$D^p$  Dilatância plástica

$e$  Índice de vazios

$E$  Módulo de Young

$\epsilon_a$  Deformação axial ( $\Delta H/H_i$ )

$e_c$  Índice de vazios no estado crítico

$\epsilon_r$  Deformação radial ( $\Delta D/D_i$ )

$\epsilon_s$  Deformação distorcional ( $2/3 \cdot [\epsilon_a - \epsilon_r]$ )

$\epsilon_s^e$  Deformação distorcional elástica

$\eta$  Razão de tensões ( $q/p'$ )

$\epsilon_v$  Deformação volumétrica ( $\epsilon_a + 2 \cdot \epsilon_r$ )

$\epsilon_v^e$  Deformação volumétrica elástica

$f_c$  Teor de finos

$F_d$  Força desviadora

$\delta\Psi$  Função de energia disponível no sistema

$G$  Módulo Cisalhante

$\Gamma$  Intercepto da linha de estado crítico quando  $p' = 1 \text{ kPa}$

$\theta$  Ângulo de Lode

**OCR** Grau de sobreadensamento ( $p'_{max}/p'_0$ )

- $p'$  Tensão efetiva média ( $[\sigma'_1 + 2 \cdot \sigma'_3]/3$ )
- $p'_0$  Tensão média efetiva no início do cisalhamento
- $p'_{max}$  Máxima tensão média efetiva na consolidação isotrópica
- $\pi'$  Tensão média no espaço dissipativo
- $p'_e$  Pressão equivalente de Hvorslev
- $\phi'$  Ângulo de atrito efetivo
- $q$  Tensão desviadora ( $\sigma'_1 - \sigma'_3$ )
- $\tau$  Tensão desviadora no espaço dissipativo
- $\sigma'_1$  Tensão efetiva principal maior
- $\sigma'_3$  Tensão efetiva principal menor
- $\sigma'_h$  Tensão efetiva horizontal
- $\lambda$  Inclinação da linha de estado crítico no plano  $e - \ln p'$
- $\psi$  Parâmetro de estado
- $\sigma'_v$  Tensão efetiva vertical
- $\xi$  Parâmetro de estado termomecânico
- $\kappa$  Gradiente da linha de recompressão
- $v$  Volume específico
- $v_0$  Volume específico inicial
- $v_c$  Volume específico no estado crítico
- $\dot{W}$  Trabalho plástico

## SUMÁRIO

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                       | <b>19</b> |
| 1.1      | OBJETIVOS                               | 21        |
| 1.1.1    | Objetivos gerais                        | 21        |
| 1.1.2    | Objetivos específicos                   | 22        |
| 1.2      | ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO                | 22        |
| <b>2</b> | <b>REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO</b>        | <b>23</b> |
| 2.1      | REJEITOS DE MINERAÇÃO                   | 23        |
| 2.2      | REJEITO FILTRADO                        | 25        |
| 2.2.1    | Métodos de filtragem                    | 25        |
| 2.2.2    | Pilhas de rejeito filtrado              | 27        |
| 2.3      | COMPORTAMENTO DE MATERIAIS GRANULARES   | 31        |
| 2.3.1    | Aspectos gerais                         | 31        |
| 2.3.2    | Mecânica dos Solos dos Estados Críticos | 33        |
| 2.3.3    | Dilatância em materiais granulares      | 37        |
| 2.3.4    | Modelagem Constitutiva                  | 43        |
| <b>3</b> | <b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>              | <b>53</b> |
| 3.1      | PROGRAMA EXPERIMENTAL                   | 53        |
| 3.2      | CARACTERIZAÇÃO GEOTÉCNICA DOS MATERIAIS | 55        |
| 3.3      | ENSAIOS TRIAXIAIS                       | 61        |
| 3.3.1    | Preparação das amostras                 | 61        |
| 3.3.2    | Realização dos ensaios                  | 62        |
| 3.3.3    | Correções de área                       | 64        |
| 3.3.4    | Quebra de grãos                         | 65        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.4      | DETERMINAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE PLASTIFICAÇÃO .  | 65         |
| 3.5      | DETERMINAÇÃO DA DIREÇÃO DE FLUXO PLÁSTICO . .  | 66         |
| 3.6      | DETERMINAÇÃO DAS SUPERFÍCIES LIMITES DE ESTADO | 67         |
| <b>4</b> | <b>RESULTADOS . . . . .</b>                    | <b>69</b>  |
| 4.1      | COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO-RESISTÊNCIA    | 69         |
| 4.2      | ESTADO CRÍTICO . . . . .                       | 82         |
| 4.2.1    | Plano $q - p'$ . . . . .                       | 82         |
| 4.2.2    | Plano $v - \ln p'$ . . . . .                   | 85         |
| 4.3      | SUPERFÍCIE DE PLASTIFICAÇÃO . . . . .          | 88         |
| 4.4      | LEI DE DILATÂNCIA . . . . .                    | 94         |
| 4.5      | DIREÇÃO DE FLUXO PLÁSTICO . . . . .            | 100        |
| 4.6      | QUEBRA DE PARTÍCULAS . . . . .                 | 102        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÕES . . . . .</b>                    | <b>107</b> |
| 5.1      | CONCLUSÕES ESPECÍFICAS . . . . .               | 107        |
| 5.1.1    | Rigidez . . . . .                              | 107        |
| 5.1.2    | Resistência . . . . .                          | 107        |
| 5.1.3    | Lócus de estados críticos . . . . .            | 108        |
| 5.1.4    | Superfície de plastificação . . . . .          | 108        |
| 5.1.5    | Dilatância . . . . .                           | 109        |
| 5.1.6    | Direção de fluxo plástico . . . . .            | 109        |
| 5.1.7    | Quebra de partículas . . . . .                 | 109        |
| 5.2      | IMPLICAÇÕES À EQUAÇÃO DE ENERGIA . . . . .     | 110        |
| 5.3      | SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .     | 111        |

**REFERÊNCIAS . . . . . 111**

**APÊNDICES . . . . . 132**

# 1 INTRODUÇÃO

Os recentes desastres envolvendo a ruptura de barragens de rejeitos de mineração (e.g., SANTAMARINA et al., 2019; WISE, 2022) voltaram as atenções da sociedade para a segurança dessas estruturas. No Brasil, em especial, as rupturas nas minas de Fundão (MORGENSTERN et al., 2016) e Córrego do Feijão (CIMNE, 2021; ROBERTSON et al., 2019) representaram, respectivamente, os maiores desastres em termos de perdas ambientais e de vidas humanas da história do país. Santamarina et al. (2019) destacaram o crescente número de desastres no mundo todo nos últimos anos e também o maior impacto ocasionado por esses.

Essas situações motivaram, por exemplo, a decisão por parte de agências regulatórias de proibir a adoção de determinados métodos construtivos e reforçar fiscalizações e legislações. No Brasil, foram proibidas novas barragens de rejeitos no sistema de elevação à montante, o mesmo utilizado nas duas barragens que romperam no país (ANM, 2019a,b). Em razão disso, alternativas para a disposição desses rejeitos vêm sendo buscadas, de forma a garantir a segurança das estruturas e minimizar riscos enquanto mantendo a capacidade operacional das plantas de beneficiamento.

A disposição de rejeito, filtrado e compactado, em pilhas é uma das alternativas (CONSOLI et al., 2022; DAVIES, 2011). Nesse sistema, o rejeito é filtrado até que atinja teores de umidade mais baixos, próximos ao seu teor de umidade ótimo para compactação, e então disposto compactado de forma a se obter uma pilha estável (LUPO et al., 2011). Essas estruturas podem atingir centenas de metros de altura submetendo assim o material na sua base a estados de tensões de grandes magnitudes. Embora diminuídos, em razão do material não se encontrar em um estado fofo e saturado, os riscos ainda existem e precisam ser devidamente considerados durante as etapas de projeto do empilhamento. Santamarina et al. (2019) reforçam que são necessários maior conhecimento do comportamento dos materiais, gerenciamento e engenharia eficientes e reforço das legislações, a fim de prevenir futuros desastres com Estruturas de Armazenagem de Rejeitos (EAR).

Uma das etapas mais importantes para a garantia da segurança e eficiência das estruturas projetadas é o desenvolvimento dos conhecimentos referentes ao comportamento mecânico de rejeitos de mineração. Esses rejeitos apresentam características dependentes da rocha de origem, angularidades salientes, comportamento predominantemente friccional e partículas com diferentes tamanhos e mineralogias por causa do seu processo de obtenção e beneficiamento (FOURIE et al., 2022; LI, W. et al., 2018). Além disso, como materiais granulares, o comportamento desses materiais é dependente do seu estado de tensões e da sua compacidade, assim como o

de solos naturais. O plano de fundo teórico que baseia as relações entre estados de tensões e compactidade usualmente adotado na engenharia geotécnica é a Mecânica dos Solos dos Estados Críticos (CSSM, na sigla em inglês) (SCHOFIELD et al., 1968). Este modelo teórico de descrição dos comportamentos de meios particulados teve sucesso durante o seu desenvolvimento para aplicação em argilas levemente pré-adensadas ou normalmente adensadas. Já para materiais puramente friccionais, como siltes e areias, houve algumas dificuldades, contornadas com o desenvolvimento dos conhecimentos estabelecidos e de novos modelos constitutivos baseados na Mecânica dos Solos dos Estados Críticos (e.g., JEFFERIES, 1993; GAJO et al., 1999b; LI, X. S. et al., 2012).

A modelagem constitutiva é a área responsável por partir de dados experimentais ou comportamentos idealizados e construir modelos para o cálculo e previsão de deformações a partir de tensões ou o contrário (MUIR WOOD, 1990; YU, 2006). Com os avanços na capacidade de processamento dos computadores, a realização de projetos de obras de engenharia tem sido cada vez mais eficiente e complexa. Por vezes, esses avanços tecnológicos e teóricos são inseridos na prática de engenharia sem o devido cuidado no entendimento das hipóteses assumidas quando do seu desenvolvimento (MUIR WOOD, 2004).

Diversos modelos constitutivos e teorias foram propostos para o tratamento de meios particulados e porosos, como é o solo (SCHOFIELD et al., 1968; LADE, 1977; JEFFERIES, 1993; YU, 1998; GAJO et al., 1999b). Os modelos mais bem-sucedidos, no entanto, foram aqueles capazes de descrever o estado do material em termos da sua compactidade (representada pelo índice de vazios) e do estado de tensões ao qual está submetido. Autores como Wroth et al. (1965) e Poorooshasb (1989) já haviam sugerido que a descrição do comportamento de materiais granulares deveria se dar pela correta determinação do estado desses, através de parâmetros de estado condizentes.

Entretanto, grande parte desses modelos foi desenvolvido majoritariamente suportado por resultados experimentais obtidos em areias quartzosas uniformes, com baixo ou nenhum teor de finos (BEEN et al., 1991; VERDUGO et al., 1996; MUIR WOOD, 2007; RUSSELL et al., 2004). Os rejeitos de mineração diferem desses materiais usuais, tanto por sua mineralogia quanto pela forma, tamanho e rugosidade das partículas (YANG, Y. et al., 2019). Diferentes autores estudaram individualmente cada um desses efeitos no comportamento de materiais granulares, incluindo rejeitos, como a influência do teor de finos (e.g., CARRERA et al., 2011; SHIPTON et al., 2015; GOUDARZY et al., 2016; LADE et al., 1997; THEVANAYAGAM et al., 2002), da forma das partículas (e.g., DE BONO et al., 2016; XIAO, Yang et al., 2019; CAVARRETTA et al., 2017) e da mineralogia (e.g., COOP, 1990; MCDOWELL et al., 2002; GUIDA et al., 2019).

Além disso, o comportamento mecânico de rejeitos de mineração usualmente é avaliado do ponto

de vista de carregamentos não drenados, ou ainda drenados em estados extremamente fofos. Isto se dá em razão da disposição usual destes rejeitos em grandes barragens, nas quais esses são encontrados em estados fofos e saturados (LI, W. et al., 2018; ISLAM et al., 2021). Comumente, esses materiais são avaliados sob a ótica da avaliação do seu potencial de liquefação ou ainda definição de estados críticos em tensões relativamente baixas (e.g., CARRERA et al., 2011; BEDIN et al., 2012). Sendo assim, um maior entendimento desses materiais em estados densos é necessário para a correta avaliação e previsão do comportamento de estruturas nessas condições (WAGNER et al., 2023).

No que tange o projeto de estruturas de rejeito filtrado e compactado, é crucial a determinação do comportamento mecânico desses materiais nas diferentes faixas de tensões e estados aos quais possa estar submetido durante a vida útil da estrutura. A fim de viabilizar a utilização de novas estruturas de armazenagem, é preciso estabelecer formas seguras para o futuro descomissionamento dessas (EDRAKI et al., 2014). Outro aspecto é a possibilidade do reprocessamento dos rejeitos no futuro. Ainda que atualmente possa não se apresentar como uma alternativa economicamente viável, a necessidade de uma gestão mais eficiente dos resíduos gerados, o avanço nas tecnologias de extração, ou ainda o esgotamento de jazidas, pode ocasionar a viabilização da reexploração de rejeitos já dispostos (LÈBRE et al., 2017). Essas situações podem vir a ocasionar diferentes estados de tensões e solicitações na estrutura que necessitam ser devidamente previstos.

Sendo assim este trabalho busca estudar o comportamento constitutivo de um rejeito de mineração de ferro em estados densos para a aplicação na construção de pilhas de rejeito filtrado. Para isso, definiu-se uma série de ensaios triaxiais com diferentes histórias de tensões que permitam a análise do material sob a luz da mecânica dos solos dos estados críticos, e avaliação das suas relações constitutivas fundamentais. Pretende-se avaliar com detalhe as relações tensão-deformação e tensão-dilatância de um rejeito de minério de ferro até tensões elevadas a fim de descrever a resposta mecânica desse para o correto projeto e previsão do comportamento de pilhas de rejeito filtrado, nos diferentes estados que possam se encontrar durante a sua vida útil.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivos gerais

Este trabalho tem por objetivo avaliar o comportamento constitutivo de um rejeito de mineração de ferro em uma ampla faixa de tensões, diferentes estados de compactidade e histórias de tensões visando a sua disposição em pilhas de rejeito filtrado.

### 1.1.2 Objetivos específicos

São objetivos específicos deste trabalho:

- Avaliar a resposta tensão-deformação-resistência de rejeitos de mineração até pressões elevadas (< 4 MPa de confinamento) sob diferentes estados de compactidade e histórias de tensões;
- Estabelecer os requisitos para uma lei de dissipação de energia consistente com comportamento de um rejeito de minério de ferro;
- Avaliar a possibilidade de quebra de partículas em um rejeito de minério de ferro quando submetido a pressões elevadas de confinamento;
- Estimar a forma da superfície de plastificação de um rejeito de minério de ferro em uma ampla faixa de tensões;

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Este documento está organizado em cinco capítulos:

No **Capítulo 1**, é apresentada uma introdução ao tema e à relevância do trabalho realizado, bem como seus objetivos principais e a estrutura proposta para o documento.

No **Capítulo 2**, é apresentada uma revisão bibliográfica dos principais tópicos abordados no desenvolvimento do trabalho e que forneçam a base necessária para realização desse.

No **Capítulo 3**, são apresentados os materiais a serem utilizados e os métodos empregados para obtenção e análise dos resultados experimentais.

No **Capítulo 4**, são apresentados e discutidos os resultados experimentais obtidos.

No **Capítulo 5**, estão colocadas as conclusões atingidas com a realização da pesquisa e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

### 2.1 REJEITOS DE MINERAÇÃO

Os subprodutos da operação de extração mineral podem ser separados em dois grandes grupos: o estéril, solos e rochas removidos a fim de viabilizar o acesso à jazida com concentração do mineral de interesse, e os rejeitos, sub-produtos do processo de extração e beneficiamento de minérios (SPITZ et al., 2019). Usualmente, esses materiais são armazenados separadamente em diferentes tipos de estruturas, sejam elas pilhas, dentro de cavas, em grandes barragens, entre outros tipos (BLIGHT, 2010).

Os rejeitos (*tailings*, em inglês) são, essencialmente, um meio particulado constituído de duas fases: uma matriz mineral e os espaços entre as partículas, que podem estar preenchidos por água, ar ou outros fluidos. A grande diferença entre os rejeitos e outros materiais geotécnicos é o seu processo de formação, dado que os rejeitos são obtidos através de uma combinação de processos industriais químicos e físicos, enquanto os solos são formados ao longo de vastos períodos de tempo pela ação do intemperismo, transporte e sedimentação (FOURIE et al., 2022; SCHNAID, 2022).

Apesar de os rejeitos de mineração serem materiais geotécnicos aos quais são aplicáveis as teorias e planos de fundo teóricos desenvolvidos na mecânica dos solos, o número de falhas de EARs reforçam que esses materiais não apresentam comportamento convencional (SANTAMARINA et al., 2019). O comportamento de rejeitos apresenta particularidades específicas oriundas do seu processo de obtenção. Entre essas especificidades pode-se citar: o formato das partículas, a sua distribuição granulométrica, a variabilidade dos minerais constituintes e a estrutura recente sob a qual se formam (FOURIE et al., 2022; SCHNAID, 2022). Além disso, os materiais convencionais (areias e argilas), normalmente apresentam relações diretas entre o tamanho das partículas e sua composição mineralógica, enquanto que os rejeitos de mineração apresentam faixas amplas de tamanhos de partículas, incluindo tamanhos de argila, sem necessariamente apresentar argilominerais na sua composição.

No caso dos rejeitos oriundos da produção do minério de ferro, o esgotamento gradual de jazidas com minerais com alta concentração de ferro e a demanda acabam por incentivar a exploração de minérios com concentrações mais baixas (SOUZA et al., 2021). As etapas para exploração de minérios de baixa concentração consistem de: cominuição, classificação dos tamanhos e concentração (LIMA et al., 2011; SILVA et al., 2022). A concentração de ferro

no minério impacta diretamente o volume de rejeitos gerados, sendo que os minérios com menor concentração implicam no aumento do volume de rejeito gerado na produção (SOUZA et al., 2021). Os minérios encontrados na Região do Quadrilátero Ferrífero (MG) (QF) têm concentrações de Ferro da ordem de 31-45% e, portanto, o beneficiamento destes segue os processos descritos e é mandatório (DAUCE et al., 2019).

Historicamente, o principal método de disposição dos rejeitos era o transporte ainda enquanto lama e disposição atrás de grandes barragens, dada a facilidade de disposição nesse método e o estado do material após o processo de beneficiamento, com umidades muito altas e baixo teor de sólidos (CONSOLI et al., 2000; XIAOLONG et al., 2021). Porém, dadas as preocupações com a estabilidade à longo prazo dessas estruturas, impactos ambientais e custos envolvidos na sua operação de gerenciamento o esquema de disposição considerado passou a ser determinado pela estrutura que melhor satisfaça condições econômicas, ambientais e de segurança (LI, 2017; SPITZ et al., 2019). Ainda assim, em razão da prática na operação dessas estruturas, do baixo custo operacional e da condição dos rejeitos usualmente obtida ao final dos processos de beneficiamento, a disposição em grandes represas continua sendo o método mais comum de disposição de rejeitos (LI, W. et al., 2018; KOSSOFF et al., 2014; GLOBAL TAILINGS PORTAL, 2021).

A disposição desses rejeitos em estados fofos e saturados está associada a riscos, principalmente em métodos de elevação em que o rejeito seja parte da estrutura de contenção (ISLAM et al., 2021; YAO, C. et al., 2021). Estima-se que, atualmente, cerca de 45 bilhões de metros cúbicos de rejeitos estejam dispostos em barragens no mundo e que esse volume deve crescer pelo menos 26% nos próximos 4 anos (GLOBAL TAILINGS PORTAL, 2021). Esse volume de rejeitos armazenados alerta a sociedade pela segurança das estruturas e o impacto catastrófico que a sua ruptura pode ocasionar. Santamarina et al. (2019) relatam um volume acumulado de, aproximadamente, 280 milhões de metros cúbicos liberados no meio ambiente desde 1910 em razão de rupturas de EARs.

As causas dessas rupturas e o tipo de estruturas envolvidas (tamanho, tipo de rejeito, volume armazenado, método construtivo, etc.) são variados. No entanto, um aspecto em comum levantado por autores (e.g., LYU et al., 2019; SANTAMARINA et al., 2019; ARMSTRONG et al., 2019) é a lacuna de conhecimento do comportamento desses materiais. Questões econômicas e operacionais da gestão dessas estruturas estão também relacionadas à ocorrência de falhas (ARMSTRONG et al., 2019).

Logo, alternativas são buscadas para os métodos convencionais de disposição, de forma a aumentar a segurança e reduzir os riscos associados à disposição de rejeitos de mineração. Essas alternativas estão vinculadas aos avanços em tecnologias de processamento e na filtragem desses materiais (GOMES et al., 2016). O rejeito a ser disposto pode estar em diferentes condições

tais como: lama, pasta, espessado ou filtrado (MEND, 2017). Cada uma destas condições está relacionada a uma concentração de sólidos e permite a adoção de diferentes esquemas de disposição.

Apesar das características de cada esquema serem distintas, o processo de concepção da estratégia de disposição se assemelha. Esse processo é representado na Fig. 2.1.

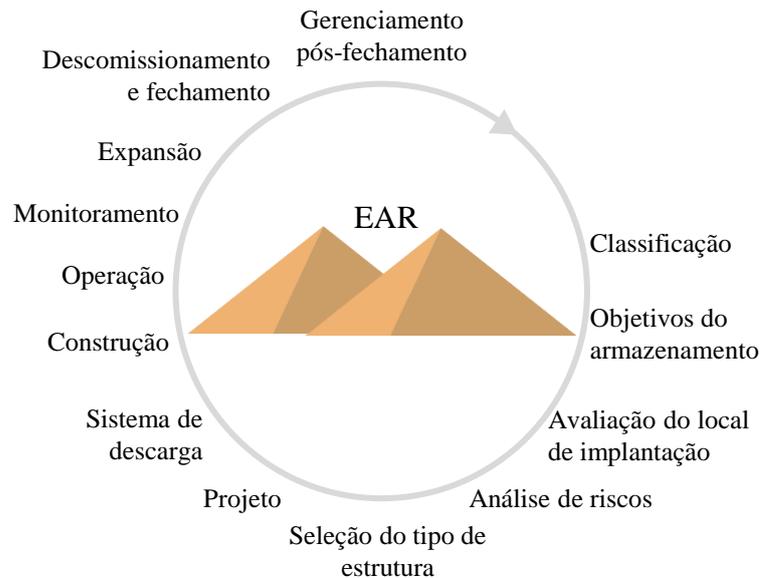


Figura 2.1 – Gerenciamento de Estruturas de Armazenagem de Rejeitos (EAR). Adaptado de Spitz et al. (2019).

## 2.2 REJEITO FILTRADO

### 2.2.1 Métodos de filtragem

A condição dos rejeitos antes da disposição normalmente é classificada de acordo com a sua concentração de sólidos. Usualmente, são classificados nos seguintes tipos: rejeito em lama, rejeito espessado, rejeito em pasta e filtrado (SPITZ et al., 2019). A Tabela 2.1 apresenta estimativas para o teor de sólidos presente em cada tipo.

Tabela 2.1 – Tipos de rejeitos para disposição (ULRICH, 2019).

| Classificação dos rejeitos | Concentração de sólidos típica (%) |
|----------------------------|------------------------------------|
| Rejeito em lama            | <50                                |
| Rejeito espessado          | 50 a 70                            |
| Rejeito em pasta           | 70 a 85                            |
| Rejeito filtrado           | >85                                |

O alto custo de implementação é normalmente considerado como uma das razões para não adoção da disposição de rejeitos filtrados. Porém, a escassez de água originada por crises hídricas e a pressão para que os processos de extração mineral sejam adaptados a práticas mais sustentáveis têm tornado esse método uma alternativa a ser considerada, especialmente pela possibilidade de reutilização de parte da água (LARA et al., 2013; EDRAKI et al., 2014; MEND, 2017). Em especial, o processo de flotação pode apresentar alto consumo de água (3-7 toneladas para cada 1 tonelada de minério). O impacto do reaproveitamento de água do processo, nesses casos, é altamente positivo e potencializado em regiões com deficiência hídrica (FURNELL et al., 2022).

As tecnologias para redução da umidade dos rejeitos estão em constante evolução, tendo atingido estágios elevados de eficiência nos últimos anos (SCHOENBRUNN, 2011). Essas tecnologias podem ser classificadas em três tipos: sedimentação, filtração e secagem térmica. A filtração é o processo de separação de sólidos do líquido através de um meio poroso (filtro), seguido da aplicação de um gradiente de pressão que pode ser aplicado de diferentes formas. Na extração mineral, esse processo usualmente ocorre após a etapa de espessamento (WILLS et al., 2016; WANG et al., 2014). Entre as tecnologias de filtração estão: filtros de malha, filtros de disco de vácuo, filtros de banda e filtros de pressão. Sendo o último tipo aquele que apresenta melhor eficiência (LARA et al., 2013; ULRICH et al., 2013).

O princípio geral de funcionamento dos filtros de vácuo é um mecanismo em forma de anel que gira enquanto uma porção é submergida na lama. Durante o giro dessa peça, a lama adere ao filtro. Após, a pressão de vácuo aplicada do lado oposto do filtro suga a água da amostra úmida. Ao completar o ciclo de rotação, o rejeito filtrado resultante é permitido cair do filtro. Já os filtros de pressão operam de maneira diferente. Filtros de placa, ou quadro, são dispositivos que utilizam pressão para remoção da parte líquida da mistura. Nesses dispositivos, o rejeito fino fica entre duas placas as quais os filtros são fixados. Os sólidos são mantidos entre as placas enquanto o líquido flui através dos filtros com o aumento da pressão. Tipicamente os sólidos resultantes desse processo de filtração são dispostos diretamente em comboios para serem direcionados para a próxima etapa do tratamento (ULRICH et al., 2013; BEDELL, 2006).

A escolha do método de filtração depende de aspectos físicos e mineralógicos da amostra, bem como financeiros e operacionais da planta de beneficiamento. Do ponto de vista das características dos materiais, alguns dos aspectos fundamentais na escolha são: o tamanho das partículas, em especial a quantidade de finos, a mineralogia e a densidade específica dos rejeitos. Além disso, aspectos operacionais como a taxa de produção e a meta de umidade relativa final são considerados na decisão do tipo e quantidade de filtros a serem utilizados (LARA et al., 2013; ULRICH, 2019). Em relação à produção da mina, alguns projetos piloto ao redor do mundo vêm sendo testados em minas de alta produção. O sucesso destes projetos pode significar um importante precedente para adoção de novas tecnologias na indústria (ULRICH, 2019). A Tabela

2.2 apresenta algumas operações existentes de rejeitos filtrados de grande capacidade.

Tabela 2.2 – Exemplos de operações de rejeito filtrado de grande capacidade.  
Adaptado de Ulrich et al. (2013).

| <b>Mina</b>         | <b>Localidade</b> | <b>Tipo de minério</b> | <b>Produção (ton/dia)</b> |
|---------------------|-------------------|------------------------|---------------------------|
| Alcoa               | Austrália         | Alumínio               | 35500                     |
| Chingola            | Zâmbia            | Cobre                  | 24000                     |
| La Coipa            | Chile             | Ouro e prata           | 16000                     |
| Mantos de Oro       | Chile             | Ouro e prata           | 15000                     |
| Vaal Reef           | África do Sul     | Ouro e urânio          | 10000                     |
| Randfontein Estates | África do Sul     | Ouro e urânio          | 10000                     |
| Lihir Island        | Papua Nova Guiné  | Ouro                   | 7500                      |
| El Sauzal           | Chihuahua, México | Prata e ouro           | 5300                      |
| Gecamines           | Zaire             | Cobre                  | 5000                      |
| Nabalco             | Austrália         | Alumínio               | 5000                      |
| Mantos Blanco       | Chile             | Cobre                  | 4000                      |
| Alamo Dorado        | Sonora, México    | Prata e ouro           | 3500                      |
| Pogo                | Alaska, USA       | Ouro                   | 2500                      |
| Raglan              | Quebec, Canadá    | Zinco                  | 2000                      |
| Greens Creek        | Alaska, USA       | Ouro, prata e zinco    | 1500                      |
| Eskay Creek         | BC, Canadá        | Cobre                  | 300                       |
| Nixon Fork          | Alaska, USA       | Ouro                   | 150                       |

Do ponto de vista operacional, o processo de filtração pode ser dividido em duas etapas principais: separação, cujos produtos são a torta e o filtrado, e o tratamento da torta, como lavagem e secagem. No processamento por lote, ao fim de cada ciclo o equipamento é desmontado, limpo e preparado para um novo ciclo, até que seja filtrada toda a lama. Já no processo contínuo, a perda de tempo é minimizada sendo o fator determinante para o tempo a permeabilidade do conjunto torta-filtro (GUPTA et al., 2016).

O avanço nas tecnologias de filtração, associados tanto à capacidade de redução da umidade quanto à produtividade, são aspectos fundamentais à popularização e implementação desse em processos de beneficiamento. A necessidade de novos meios de disposição, principalmente aqueles em que o rejeito não necessite ser disposto em grandes represas, impulsiona o desenvolvimento desse setor a fim de viabilizar a implementação com melhor custo-benefício. Para isso, é fundamental o entendimento do estado-da-prática no que tange a filtração de rejeitos e o comportamento mecânico do material resultante.

### 2.2.2 Pilhas de rejeito filtrado

O empilhamento de rejeito filtrado ganhou notoriedade como alternativa viável à disposição dos rejeitos de mineração em barragens, especialmente após a ocorrência de grandes desastres envolvendo os métodos convencionais que ocasionaram mudanças em legislações (SCHAPER

et al., 2020). Apesar disso, esse método é aplicado em regiões secas e com escassez de recursos hídricos há algum tempo (CALDWELL et al., 2015; LARA et al., 2013; DAVIES et al., 2001). As primeiras operações envolvendo a disposição de rejeitos filtrados datam do fim dos anos 1980 (CALDWELL et al., 2015). Davies et al. (2010) apresentam um levantamento das estruturas de armazenagem de rejeitos filtrados sugerindo uma crescente desde os anos 1990.

O conceito por trás da implementação de estruturas de rejeito filtrado é bastante direto. Os rejeitos são inicialmente espessados utilizando tecnologias convencionais, a seguir são levados para a planta de filtragem, onde terão sua umidade reduzida para teores próximos à umidade ótima de compactação a ser utilizada em campo. Por fim, os rejeitos são transportados por caminhões até o local de disposição, onde são dispostos com diferentes graus de compactação de forma que se atinja uma pilha estável (ULRICH et al., 2013).

A adoção da disposição dos rejeitos em condição filtrada pode impactar a operação da mina positivamente. Esse método de disposição oferece a possibilidade de redução dos volumes armazenados de forma convencional, em barragens, e promove também um melhor aproveitamento da área utilizada para disposição (LARA et al., 2013). Algumas das vantagens da utilização de pilhas de rejeito filtrado em comparação à disposição convencional são: melhor aproveitamento da água (EDRAKI et al., 2014; LUPO et al., 2011); melhor aproveitamento da área disponível para disposição (maior volume armazenado com uma menor projeção em planta) (OLDECOP et al., 2021; SPITZ et al., 2019); adequação dos materiais ao projeto e não do projeto aos materiais, como ocorre em métodos convencionais (VARGAS et al., 2022; CONSOLI et al., 2022); redução dos riscos associados à operação e manutenção (FRANKS et al., 2011); entre outros.

As estruturas construídas podem ser de diferentes geometrias, a depender das condições do relevo no local de disposição. Assim como outros métodos de disposição, o empilhamento de rejeito filtrado pode ser *side hill*, *cross-valley* ou autoportantes (ULRICH et al., 2013). A Figura 2.2 ilustra alguns desses tipos.

Uma forma comum para estruturas autoportantes é a pirâmide. Essa geometria do empilhamento oferece uma capacidade inferior às demais e uma área maior a ser coberta no fechamento. Em compensação, é a forma mais estável (CALDWELL et al., 2015). Associada à uma gestão eficiente da água, os riscos são ainda menores e os impactos, no caso de alguma falha, também (EDRAKI et al., 2014; EAST et al., 2021). Uma alternativa para contornar uma das desvantagens, a fim de aumentar a capacidade de armazenamento sobre uma mesma projeção em planta (maiores alturas e inclinações mais íngremes), é a utilização de agentes cimentantes. Esses agentes ainda contribuem para minimização dos riscos referentes à liquefação em zonas suscetíveis (CONSOLI et al., 2022; CARVALHO et al., 2023; MAFESSOLI et al., 2023).

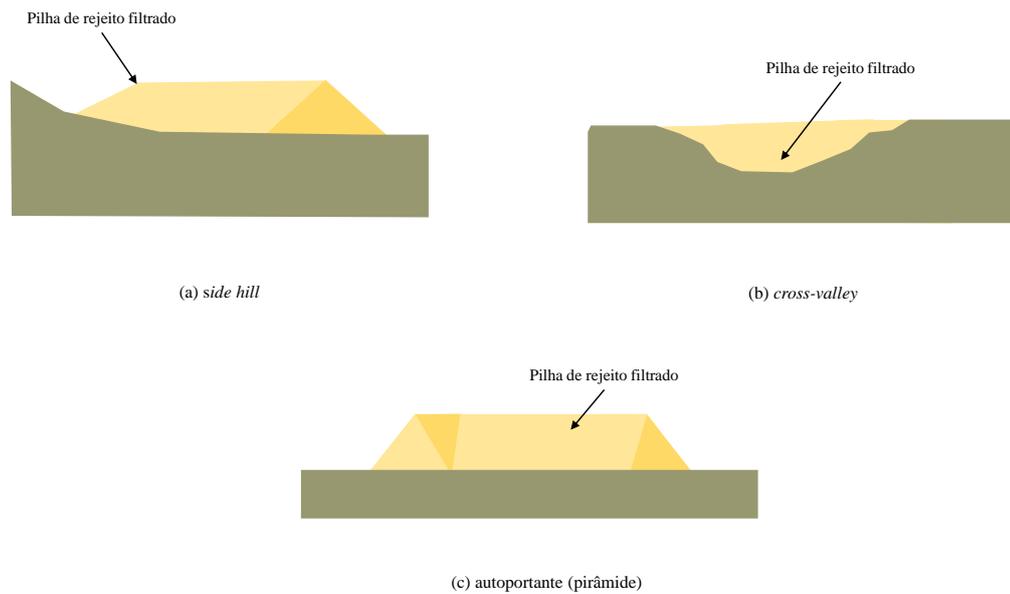


Figura 2.2 – Exemplos de geometrias de pilhas de rejeito filtrado.

Além das classificações de geometrias esquemáticas, as pilhas podem contar com aterros ao redor de seu perímetro, de forma a permitir o acesso para novas disposições e operação da pilha (SPITZ et al., 2019). Os rejeitos utilizados na construção normalmente são transportados por caminhões e comboios, dado que não é possível bombeá-los em razão do seu teor de sólidos. Na pilha os rejeitos são dispostos e, no caso das zonas estruturais, compactados (CALDWELL et al., 2015).

A fim de acompanhar a taxa de produção das plantas de beneficiamento e otimizar a construção da estrutura de contenção, normalmente a pilha é construída com regiões apresentando diferentes graus de compactidade. Essas regiões são divididas em dois grupos: as zonas estruturais, em que o rejeito é compactado para uma dada energia de compactação a fim de atingir a sua compactidade máxima; e as zonas não-estruturais, nas quais o rejeito é disposto com baixo grau de compactidade ou até em condições fofas (DAVIES, 2011).

Apesar da adoção de zonas estruturais ser prática comumente encontrada na literatura de empilhamentos de rejeitos, e efetivamente aplicada, a existência de regiões com pouca ou nenhuma compactação pode impactar a segurança das estruturas. Os critérios de definição dos limites das zonas estruturais precisam ser claros e fundamentados do ponto de vista teórico, dado que a compactação dos materiais dos taludes apenas desloca as possíveis superfícies de ruptura, além de promover deformações distintas no topo da pilha. Além disso, como citado anteriormente, a prática da construção de pilhas de rejeitos apresenta relatos bem sucedidos e experiências em regiões de clima árido. No entanto, a utilização desse sistema no Brasil envolve a adaptação ao clima e aos regimes pluviométricos locais. A ocorrência de chuvas pode impactar tanto as etapas de construção quanto de operação da pilha. Em relação à construção, as chuvas afetam

a capacidade de redução de umidade e compactação dos materiais no campo. Já em relação à operação da pilha construída, ocorre a infiltração de água na estrutura que associada à existência de zonas não compactadas pode induzir o risco de suscetibilidade à liquefação na base.

Algumas características-chave para os rejeitos a serem utilizados em instalações de rejeitos filtrados são: alta resistência quando compactos, baixa condutividade hidráulica e baixa compressibilidade. Em relação ao projeto da estrutura devem ser observadas considerações relativas à altura da pilha, à velocidade de crescimento da pilha, quanto à gestão dos recursos hídricos e quanto à infiltração (LUPO et al., 2011).

Já em relação ao risco associado à operação dessas estruturas, algumas situações a serem evitadas são: disposição de rejeitos em estados mais úmidos que o especificado e formação de poças, de forma que seja gerada uma linha freática na base do empilhamento causando susceptibilidade à geração de poropressão. Os riscos associados a essas instalações usualmente são menores que o de sistemas de disposição convencionais e, caso bem previstos e administrados, não costumam oferecer dificuldades, tornando o empilhamento de rejeitos filtrados uma solução estável a longo prazo (CALDWELL et al., 2015).

Apesar de ser um dos métodos de disposição mais promissores (SPITZ et al., 2019), a literatura sobre diretrizes de projeto e operação de instalações envolvendo rejeito filtrado é limitada. Um dos fatores preponderantes para que isso ocorra pode ser o entendimento de que a construção e operação dessas estruturas é simples e o conceito bem entendido. Porém, conforme cresce a capacidade das plantas de filtragem e aumentam os volumes dispostos seguindo esse esquema de disposição, cresce também a complexidade das estruturas. Pilhas altas construídas em plantas de beneficiamento de alta produtividade dão origem a problemas de comportamento relacionados às altas tensões desenvolvidas na base, além de risco aumentado em caso de falhas.

Existem relatos da operação bem sucedida de estruturas de contenção de rejeitos filtrados bem como de projetos recentes que optaram por essa metodologia (e.g., CARRASCO, 2021; VARGAS et al., 2022; CONNELLY, 2021; GOMES et al., 2016; DIMITRIADIS et al., 2022; KWAN et al., 2011). Algumas operações e projetos atraem especial atenção devido à sua alta produção, seja ela real ou prevista. A operação de extração de minério de ferro de Karara, na Austrália (HORE et al., 2014), com produção diária de 50000 toneladas, e as previsões de Metales (120000 ton/dia), no México (EAST et al., 2021), e Rosemont (75000 ton/dia), no Canadá (NEWMAN et al., 2011), são alguns exemplos.

## 2.3 COMPORTAMENTO DE MATERIAIS GRANULARES

### 2.3.1 Aspectos gerais

No passado, ensaios triaxiais eram realizados com o principal objetivo de determinar a resistência ao cisalhamento dos solos. Buscava-se determinar, fundamentalmente, os parâmetros para o critério de ruptura de Mohr-Coulomb, isto é, ângulo de atrito ( $\phi'$ ) e intercepto coesivo ( $c'$ ) (MUIR WOOD, 1984). Com o passar do tempo, passou a ser de interesse, também, o comportamento dos solos em estágios anteriores e, até, posteriores à ruptura. A previsão de deformações das estruturas passou a ser tópico relevante e presente nos projetos de engenharia.

Um aspecto fundamental do comportamento de geomateriais são as deformações volumétricas que ocorrem durante o seu cisalhamento. No caso de solos não-coesivos, desde o trabalho pioneiro de Casagrande (1936) o seu comportamento é entendido como sendo função da sua compactidade. De acordo com a compactidade inicial do material era esperado um comportamento de aumento de volume (dilatante) ou redução de volume (compressivo) durante o carregamento (Fig. 2.3).

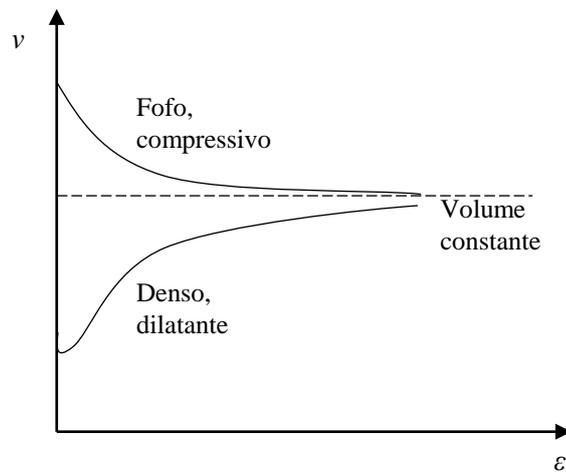


Figura 2.3 – Comportamento volumétrico de materiais granulares em diferentes compactidades.

Esse comportamento é representativo para um mesmo material, sob uma mesma tensão de confinamento efetiva. Nos solos, a resistência ao cisalhamento é fruto principalmente do atrito entre as partículas, sendo assim é proporcional à tensão normal efetiva experimentada pelo material (TAYLOR, 1948). Essencialmente, dois mecanismos são responsáveis pela mobilização da resistência ao cisalhamento: o atrito entre as superfícies das partículas e o intertravamento originado pelo arranjo entre elas. O intertravamento é tão maior quanto menor for o índice de vazios da amostra, ou seja quanto mais próximos estejam os grãos de forma que seja necessário dispendir uma energia adicional para que ocorra o movimento relativo das partículas dentro da

massa de solo. Assim, os aspectos fundamentais que determinam a resistência ao cisalhamento dos solos são de natureza do material (e.g., formato, tamanho e composição mineralógica das partículas) ou das condições de contorno impostas (e.g., tensão efetiva, taxa de carregamento, compactação do material) (LAMBE et al., 1979).

A variação de volume durante o cisalhamento experimentada pelos geomateriais é uma consequência da sua natureza particulada. Esses materiais, diferentemente de outros materiais usuais, existem na forma de um agregado de partículas em equilíbrio. Reynolds (1885) foi quem primeiro ressaltou a natureza única do comportamento de meios granulares, cuja resposta macroscópica é controlada por efeitos microscópicos advindos do movimento relativo entre partículas e que resultam em alterações de volume da amostra.

Quando os geomateriais submetidos a um carregamento aumentam de volume, é dito que esses dilatam. Por sua vez, quando esses experimentam redução de volume é dito que contraem. À variação de volume dos geomateriais durante o carregamento é dado o nome de dilatância, sendo essa assumida como positiva no caso da contração e negativa no caso de expansão, de acordo com as convenções usualmente adotadas na engenharia geotécnica. A dilatância é um fenômeno físico de dissipação de energia, principalmente daquela relacionada ao arranjo dos grãos, que provê a parcela de resistência associada ao intertravamento. Essa tendência de aumento de volume é suprimida à medida que aumentam as tensões de confinamento. Isto ocorre pela maior restrição proporcionada pelo confinamento e também em virtude de uma maior deformação nos contatos das partículas que reduz os efeitos do intertravamento (MUIR WOOD, 1990).

Sob a abordagem dos mecanismos de movimento das partículas dentro da massa de solo, Rowe (1962) deu continuidade aos avanços no entendimento dos mecanismos relacionados à dilatância de meios granulares porosos. O autor baseou-se no princípio da razão de energia mínima para formulação teórica dos conceitos de dilatância. Esse princípio consiste da consideração de que uma areia sempre irá deslizar na direção na qual a taxa de energia interna absorvida é mínima.

Os estudos de dilatância em materiais granulares, seja do ponto de vista macroscópico ou microscópico, geralmente baseiam-se na variação volumétrica resultante de amostras em ensaios a fim de obter relações físicas de mecanismos de dissipação de energia na mobilização da sua resistência ao cisalhamento. Sendo assim, é importante definir matematicamente o parâmetro de dilatância considerado (Eq. 2.1). Geralmente, a avaliação da dilatância tem o intuito de estabelecer relações entre as tensões experimentadas e o comportamento volumétrico observado, que pode ser chamada como uma relação tensão-dilatância cujo resultado final é a obtenção de uma lei que explique a ocorrência da dilatância (e.g., ROWE, 1962; MATSUOKA, 1974; BOLTON, 1986; LI, X. S. et al., 2000; JEFFERIES et al., 2002).

$$D^p = \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_s^p} \quad (2.1)$$

onde  $\dot{\varepsilon}_v$  é o incremento de deformação volumétrica,  $\dot{\varepsilon}_s$  é o incremento de deformação distorcional ( $2/3 \cdot [\varepsilon_a - \varepsilon_r]$ , em condições do ensaio triaxial convencional) e o índice  $p$  refere-se à parcela irreversível das deformações.

Conforme dito anteriormente, a tensão confinante efetiva tem influência direta no comportamento volumétrico observado e, portanto, na dilatância. À medida que essas tensões aumentam, a quebra de grãos passa a se tornar um mecanismo de deformação, e de dissipação de energia, relevante, podendo se tornar inclusive o mecanismo principal a depender do nível de tensões atingido. Alguns autores buscaram investigar a influência dessas condições nas leis de dilatância desenvolvidas, tanto teórica quanto experimentalmente (COOP, 1990; UENG et al., 2000; DE BONO et al., 2014). Em relação aos efeitos da quebra de grãos no comportamento tensão-deformação, trabalhos como o de Vesić et al. (1968) e de Yamamuro et al. (1996) atingiram tensões de confinamento extremamente altas e discutiram extensivamente os mecanismos físicos envolvidos, enquanto que Muir Wood (2007) e Muir Wood et al. (2008) trataram em detalhe da modelagem desses comportamentos.

Os efeitos de outras características específicas de rejeitos de mineração na dilatância são também pouco observados. A falta de um arcabouço teórico estabelecido dificulta a consideração de novas variáveis. Além disso, os dados sobre análises de tensão-dilatância para rejeitos são limitados na literatura, muito provavelmente pelo foco dos estudos desses geomateriais ser a sua disposição em estados fofos (WAGNER et al., 2023).

### 2.3.2 Mecânica dos Solos dos Estados Críticos

O estado de um meio granular em que ele escoar como um fluido friccional na ausência de variações volumétricas ou do estado de tensões é denominado o estado crítico (SCHOFIELD et al., 1968). Esse estado é atingido após o desenvolvimento de grandes deformações (ATKINSON, 2007). As primeiras observações da existência de um índice de vazios crítico foram feitas por Casagrande (1936). Após, Taylor (1948) observou a dependência das tensões de confinamento efetivas no índice de vazios crítico determinado. Esse conceito foi então formalizado por Roscoe et al. (1958) que incluiu a densidade como uma variável no tratamento de geomateriais. A representação matemática dessa condição pode ser dada no espaço  $v$ - $p'$ - $q$  através da Eq. 2.2.

$$\frac{\partial p'}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_s} = 0 \quad (2.2)$$

onde  $p'$  e  $q$  são os invariantes de tensão conforme as Eq. 2.3 e 2.4 para as condições de ensaio triaxial e  $v$  é o volume específico do material.

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2 \cdot \sigma'_3) \quad (2.3)$$

$$q = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad (2.4)$$

A Equação 2.2 foi posteriormente estendida por Poorooshasb (1989) para contabilizar a condição de um ângulo de Lode constante (Eq. 2.5).

$$\frac{\partial p'}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_s} = 0 \quad (2.5)$$

Portanto pode-se definir no espaço de tensões e densidade uma superfície limite em que meios particulados porosos conseguem deformar sem variação volumétrica ou de tensões, chamada de superfície última e que define um lócus de estados críticos. Essa superfície costumeiramente é representada pelas suas projeções nos planos derivados  $q$ - $p'$  e  $v$ - $\ln p'$ , sendo a sua projeção denominada Linha de Estado Crítico (LEC).

Uma premissa fundamental na teoria de estado crítico é de que os materiais granulares evoluem para esse estado através de deformações cisalhantes (JEFFERIES et al., 2016). Portanto, quando carregados os materiais granulares irão desenvolver tensões cisalhantes e deformações distorcionais que eventualmente conduzem o material até o lócus de estados críticos. A observação desse estado normalmente é dada pela verificação da estabilidade nas deformações volumétricas observadas e na tensão desviadora. Ainda que as deformações atingidas em ensaios triaxiais convencionais em geral sejam insuficientes para atingir o estado crítico, seja por limitações do equipamento ou questões relativas à localização, é possível estimar com certa precisão a região próxima a essa superfície.

A LEC no plano  $v$ - $\ln p'$  foi inicialmente aproximada por uma função linear (Eq. 2.6) (SCHOFIELD et al., 1968).

$$e_c = \Gamma + \lambda \ln p' \quad (2.6)$$

Essencialmente, a LEC é assumida como linear e paralela a Linha Isotrópica de Compressão (Linha de Isotrópica de Compressão (LIC)), que por sua vez, define o limite de estados possíveis de materiais particulados no plano  $v$ - $\ln p'$  (Fig. 2.4).

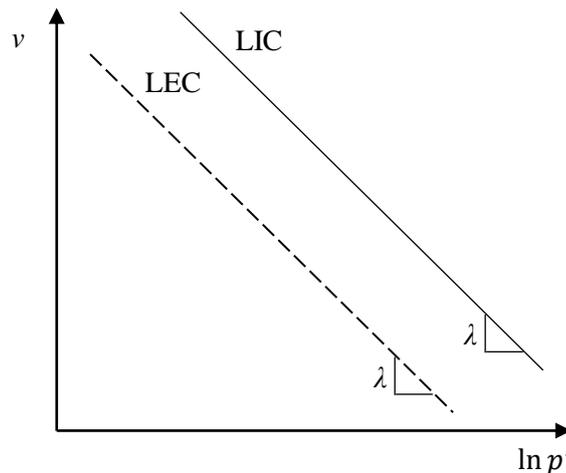


Figura 2.4 – Representação da Linha de Estado Crítico (LEC) e da Linha de Isotrópica de Compressão (LIC) no plano  $v$ - $\ln p'$ .

Há outras idealizações matemáticas para a LEC que variam desde condições bi-lineares (BEEN et al., 1991), tri-lineares (RUSSELL et al., 2004) e funções de maior ordem (GUDEHUS, 1996; JEFFERIES et al., 2016). Alguns estudos sobre a liquefação estática de materiais granulares (SCHNAID et al., 2013; BEDIN et al., 2012; CARRERA et al., 2011) e sobre o comportamento geral de rejeitos de mineração (WAGNER et al., 2023; LI, W. et al., 2019) demonstraram a existência de linhas de estado crítico não-lineares desde baixas tensões. Assim, optou-se neste trabalho por adotar a formulação da LEC proposta por Jefferies et al. (2016), dada pela Eq. 2.7.

$$e_c = \Gamma + A \cdot \left( \frac{p'}{p'_{ref}} \right)^B \quad (2.7)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de ajuste da curva.

A partir da definição da LEC é possível descrever o comportamento de materiais com base em sua posição relativa à ela. Logo, se um material está em um estado correspondente a um ponto abaixo da LEC no plano  $v$ - $\ln p'$  ele necessariamente deverá aumentar de volume para que atinja o estado crítico (ou, no caso de carregamento não drenado, desenvolver poropressão negativa, resultando no aumento da tensão efetiva média), dado que esse necessariamente será o seu estado final. Da mesma forma, caso o estado do material esteja acima da LEC o seu comportamento deverá ser compressivo (poropressão positiva, no caso não drenado), a fim de atingir o estado crítico (Fig. 2.5).

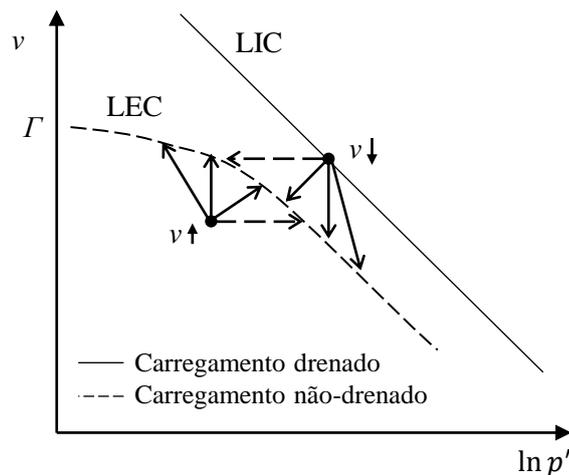


Figura 2.5 – Comportamento volumétrico esperado de um material em diferentes posições em relação à LEC.

Logo, a magnitude das deformações volumétricas e da mobilização de tensões que um material desenvolverá para atingir o estado crítico é dependente do seu estado inicial e do quão distante ele está do estado final (WROTH et al., 1965). Uma forma de descrever o estado inicial do material é através de parâmetros de estado condizentes. Uma grandeza apropriada para a descrição do estado de um material deve ser tal que influencie de alguma forma o comportamento observado, esteja associada a amostra e possa ser medida diretamente (POOROOSHASB, 1989). Usualmente, utiliza-se o índice de vazios como um parâmetro de estado, porém essa definição não é suficiente dado que é necessária a conjugação entre a compacidade e estado de tensões de forma a descrever completamente o comportamento de um material (BEEN et al., 1985). Sendo assim é tomado como parâmetro de estado ( $\psi$ ) a definição de Been et al. (1985), dada pela Eq. 2.8.

$$\psi = e - e_c(p') \quad (2.8)$$

A partir da Equação 2.8 é possível verificar que, quando apresentar uma tendência de comportamento compressivo, o material apresentará parâmetro de estado positivo ( $e > e_c$ ). Já quando o comportamento for dilatante, o valor será negativo ( $e < e_c$ ).

É importante ressaltar que outras tentativas de descrever o estados dos materiais foram feitas, incluindo descrição da anisotropia inerente a esses (LI, X. S. et al., 2012). A adoção do escalar definido na Eq. 2.8 é uma possibilidade, autores como Bolton (1986) e Ishihara (1993) propuseram escalares de outras formas, a fim de descrever o estado de geomateriais para as aplicações desejadas.

O parâmetro de estado pode ser interpretado como uma medida de estado inicial, anterior ao carregamento, ou como uma variável de descrição do comportamento. No segundo caso, esse

valor evolui com o desenvolvimento de deformações volumétricas descrevendo a mudança de estado do material durante o carregamento. Alguns modelos constitutivos incluem essa condição, de forma a obter uma descrição condizente do estado do material ao longo de toda a sua história de tensões (JEFFERIES, 1993; YU, 2006; GAJO et al., 1999b,a).

A utilização da teoria de estado crítico é fundamental para a descrição do comportamento dos geomateriais dado que permite a descrição e previsão dos comportamentos esperados. A interdependência entre compacidade e estado de tensões em meios granulares porosos é um aspecto fundamental da resposta mecânica desses e não pode ser ignorada. O entendimento do comportamento macroscópico dos materiais em função de seu estado é uma premissa básica para a correta modelagem e previsão desses.

### 2.3.3 Dilatância em materiais granulares

Os mecanismos envolvidos nas alterações de volume sofridas por geomateriais quando carregados constituem o cerne da mecânica dos solos e engenharia geotécnica. Desde a compreensão de Reynolds (1885) de que os comportamentos macroscópicos eram fruto das interações a nível de partícula que ocorriam na massa de solo, pesquisadores buscam compreender os mecanismos envolvidos na dilatância dos solos e como essa governa a resposta mecânica desses materiais (e.g., TAYLOR, 1948; ROWE, 1962; MATSUOKA, 1974; DE JOSSELIN DE JONG, 1976; FROSSARD, 1979; BOLTON, 1986; HOULSBY, 1991; LI, X. S. et al., 2000; JEFFERIES et al., 2002; TSEGAYE et al., 2014; GUIDA et al., 2019; CHANG et al., 2022). O caráter inovador do trabalho de Rowe (1962) foi um passo fundamental no entendimento dos mecanismos envolvidos no fenômeno físico da dilatância.

Rowe (1962) estabeleceu a partir de considerações teóricas para um arranjo ideal de esferas (Fig. 2.6), relações entre as tensões experimentadas e as deformações volumétricas. Os conceitos partiram da consideração de uma direção preferencial de deslizamento das partículas, que modificaria o arranjo. Sendo assim, as partículas deslizariam sempre na direção na qual a taxa de energia interna absorvida é mínima.

Da Figura 2.6b pode ser visto que, em razão do formato uniforme das partículas os movimentos em cada direção são equivalentes e proporcionais ao grau de liberdade das partículas na massa de solo. Além disso, o formato esférico induz que esse movimento é independente de possível rotação das partículas, como a orientação de uma partícula esférica não causará diferenças no arranjo. Rowe (1962), portanto, definiu baseado em idealizações micromecânicas dos movimentos das partículas dentro da massa de solo uma relação entre a deformação volumétrica observada e as tensões experimentadas, que pode ser representada pela Eq. 2.9.

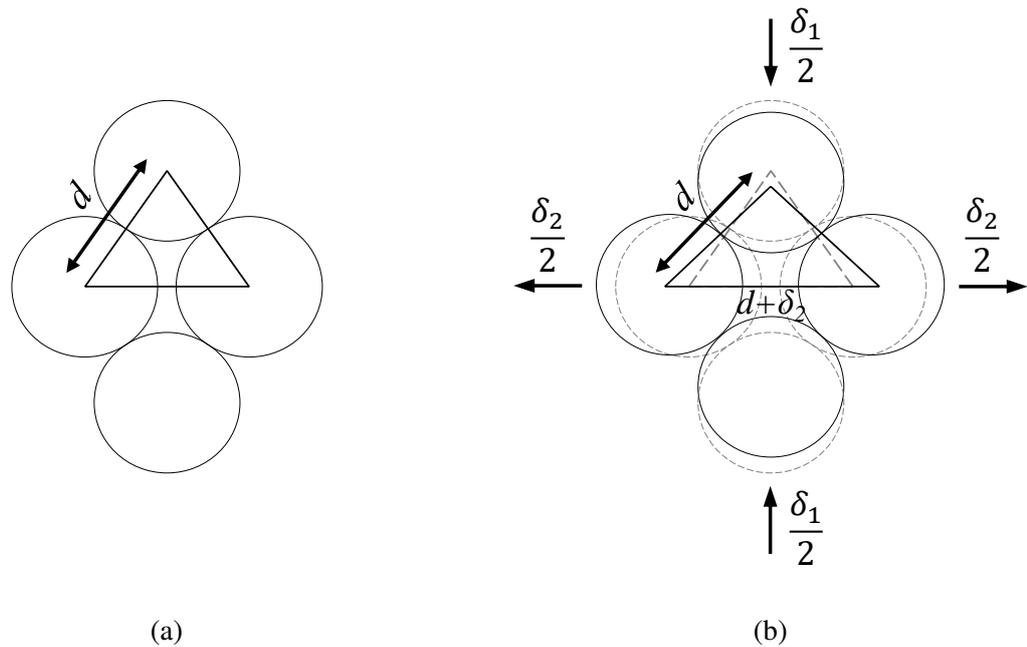


Figura 2.6 – Mecanismo de deformação volumétrica idealizado por Rowe (1962) para um arranjo uniforme de esferas em seu estado (a) inicial e (b) final. Adaptado de Rowe (1962).

$$D^P = \frac{9(M_f - \eta)}{9 + 3M_f - 2M_f\eta} \quad (2.9)$$

Porém, para materiais naturais, as partículas geralmente diferem consideravelmente do formato esférico. Apesar de não considerar os efeitos do formato das partículas, Rowe (1962) faz considerações sobre a possibilidade de reorientação dessas. O autor coloca que a irregularidade da forma dos grãos pode induzir uma energia extra a ser dissipada durante o carregamento, conforme o movimento relativo entre elas ocorre e elas se reorientam em direções preferenciais, de acordo com o grau de restrição ao movimento na região adjacente. A Figura 2.7 ilustra uma possibilidade de movimento entre um arranjo de partículas angulares e os efeitos nas considerações feitas na Fig. 2.6.

Outro aspecto relevante à previsão de dilatância em materiais é a presença de variados tamanhos de partículas na matriz mineral, em contrapartida a arranjos uniformes. A presença de finos, plásticos ou não plásticos, afeta diretamente o comportamento do material. Dependendo da quantidade e da plasticidade dos finos presentes, a resposta mecânica do material granular difere daquela obtida para o caso de granulometria uniforme (CARRARO et al., 2009; SHIPTON et al., 2015). No caso de finos não plásticos, é visto que a resistência aumenta conforme cresce o teor de finos ( $f_c$ ), enquanto que o comportamento volumétrico é também afetado. As amostras fofas se tornam mais contráteis e as densas mais dilatantes com o aumento na quantidade de finos não plásticos presentes (SALGADO et al., 2000).

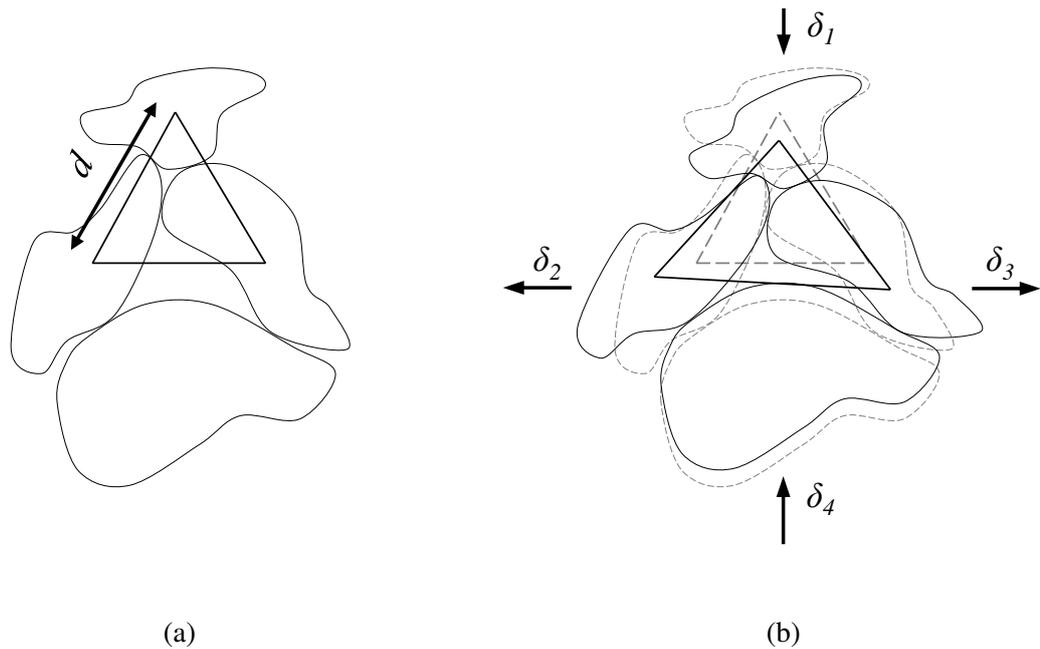


Figura 2.7 – Mecanismo de deformação volumétrica para um arranjo irregular de partículas angulares em seu estado (a) inicial e (b) final.

Os efeitos da presença de finos nas relações tensão-dilatância ainda carecem de melhor entendimento, tendo poucos exemplos na literatura (YILMAZ et al., 2021). Alguns autores apresentaram considerações sobre o assunto (e.g., SALGADO et al., 2000; CARRARO et al., 2009; XIAO, Y. et al., 2017), no entanto, para teores de finos de no máximo 30%. Yilmaz et al. (2021) identificaram a existência de um teor de finos a partir do qual o comportamento na dilatância é alterado. Comumente o teor de finos em que ocorre a mudança na tendência de comportamento é chamado de teor de finos de transição (THEVANAYAGAM et al., 2000; ZUO et al., 2015), porém essa propriedade normalmente não é avaliada em termos da relação tensão-dilatância. Wagner et al. (2023), ao estudarem dois rejeitos de mineração com teores de finos distintos avaliaram a relação tensão-dilatância dos materiais bem como a relação entre a resistência de pico e a dilatância mínima observada. Os autores concluíram, para os materiais estudados ( $f_c \approx 50\%$  e  $f_c \approx 30\%$ ), que a variação no teor de finos não implicou em diferenças significativas no comportamento tensão-dilatância dos materiais, sendo possível, inclusive, realizar um ajuste único para os dados de resistência de pico vs dilatância mínima.

Esses e outros aspectos morfológicos das partículas constituintes do material em estudo quando vistos em conjunção podem ser interpretados como uma propriedade de materiais granulares conhecida como *fabric*. A definição, e conseqüentemente a tradução, do termo *fabric* é difícil, dado que ainda hoje parâmetros para quantificação dessa grandeza são difíceis e algumas das propostas são restritas a casos de simulação através do Método dos Elementos Discretos (MED), sendo inaplicáveis para problemas reais (COLLINS et al., 2010). Muitas vezes, os termos *fabric* e estrutura são utilizados indistintamente. Mitchell et al. (2005), porém, diferenciam ambos ao definir estrutura como o conjunto de características e interações entre as partículas, combinando

efeitos morfológicos, mineralógicos e de cimentação, enquanto o *fabric* estaria relacionado exclusivamente ao arranjo formado pelas partículas.

Em geral, as relações tensão-dilatância propostas assumem relações dependentes apenas da razão de tensões, desconsiderando fatores como, por exemplo, os efeitos do *fabric*. A Tabela 2.3 apresenta algumas das relações propostas na literatura.

Tabela 2.3 – Relação de leis de dilatância encontradas na literatura.

| Autor                                      | Relação tensão-dilatância                   |
|--|---|
| Schofield et al. (1968) (Camclay original) | $D^P = M - \eta$                            |
| Roscoe et al. (1968) (Camclay Modificado)  | $D^P = (M^2 - \eta^2)/2\eta$                |
| Rowe (1962)                                | $D^P = 9(M_f - \eta)/(9 + 3M_f - 2M_f\eta)$ |
| Nova (1982)                                | $D^P = (M - \eta)/(1 - N)$                  |

Dentre as relações apresentadas na Tab. 2.3, apenas a proposta por Nova (1982) pode ser considerada como ter em conta um parâmetro relacionado ao *fabric*, ainda que indiretamente. Nova (1982) inseriu o parâmetro  $N$  como um parâmetro de acoplamento volumétrico, ou seja, um fator redutor na energia dissipada. Logo, segundo a lei de Nova, nem todo o trabalho plástico realizado seria dissipado. Jefferies (1997) investigou o significado físico de  $N$  como sendo a energia plástica confinada (ou não-dissipada) no arranjo de partículas. Esse conceito é melhor discutido na seção seguinte, a partir de considerações termodinâmicas e microestruturais. Sendo assim,  $N$  teria relação com a cadeia de transferência de forças dentro da massa de solo e é esperado estar relacionado com o *fabric* (JEFFERIES, 1993). A Figura 2.8 apresenta um exemplo gráfico das diferentes leis de dilatância apresentadas na Tab. 2.3, enquanto que a Fig. 2.9 mostra como a relação tensão-dilatância de Nova (1982) varia com o valor de  $N$ .

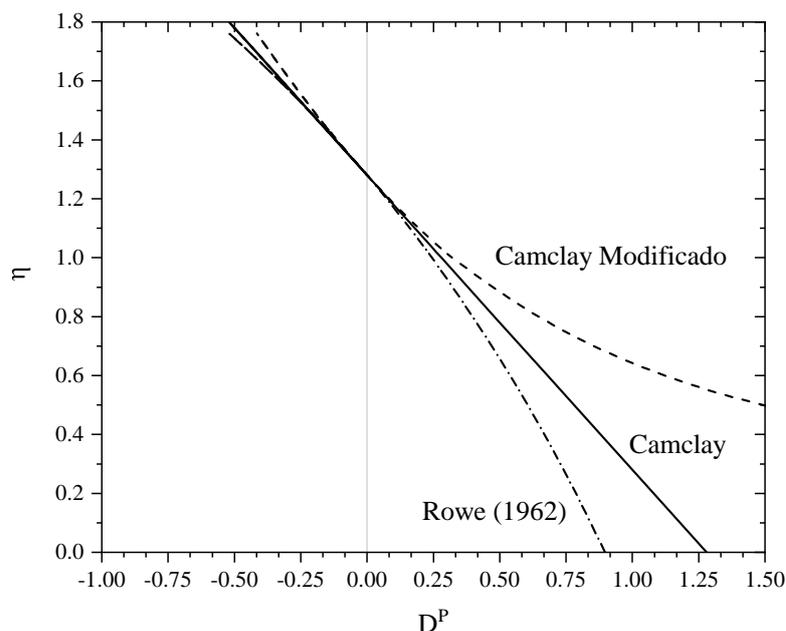


Figura 2.8 – Leis de dilatância dependentes exclusivamente da razão de tensões.

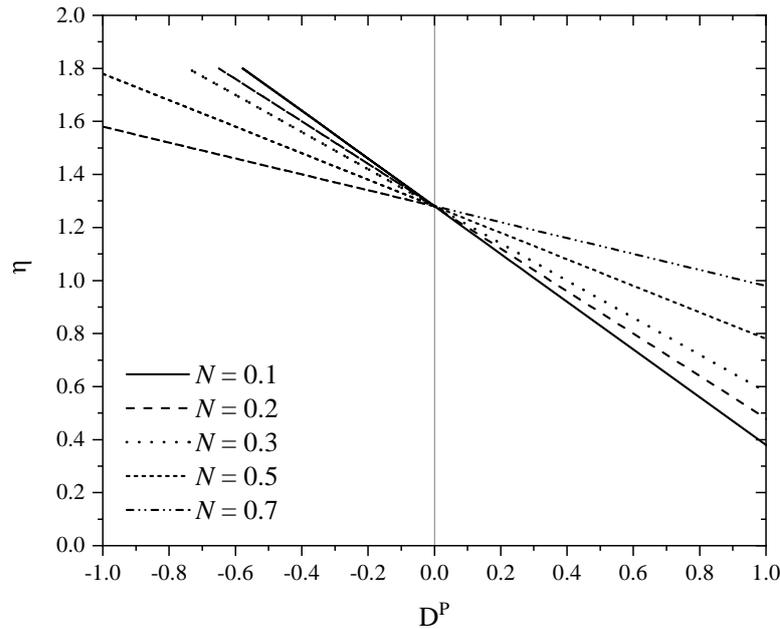


Figura 2.9 – Variação da relação tensão-dilatância de Nova (1982) conforme o valor de  $N$ .

Outro aspecto na relação tensão-dilatância de materiais granulares é dependência dessa no estado do material. Xiang Song Li et al. (2000) ressaltam que observações da dependência da relação proposta por Rowe (1962) (Eq. 2.9) no índice de vazios dos materiais testados foram feitas desde a sua derivação, tendo sido associadas às diferenças entre o arranjo idealizado proposto e aquele que realmente ocorre entre as partículas. Os autores reforçam que a premissa básica que determina a dependência da variação volumétrica no estado do material é a de que uma areia fofa contrai e uma areia densa dilata, ainda que estejam em um dado ponto com uma mesma mobilização de resistência (mesmo valor de  $\eta$ ). Outros autores como Jefferies (2021) reforçam a adoção de uma relação chamada de estado-dilatância, em contrapartida as formalizações usuais de tensão-dilatância. Além disso, como será visto na seção seguinte, Poorooshasb et al. (1966) havia provado a dependência do estado na direção das deformações plásticas, as quais são determinadas a partir da definição de uma lei de dilatância.

Sendo assim, Xiang Song Li et al. (2000) propuseram que uma lei de dilatância geral, teria a forma da Eq. 2.10.

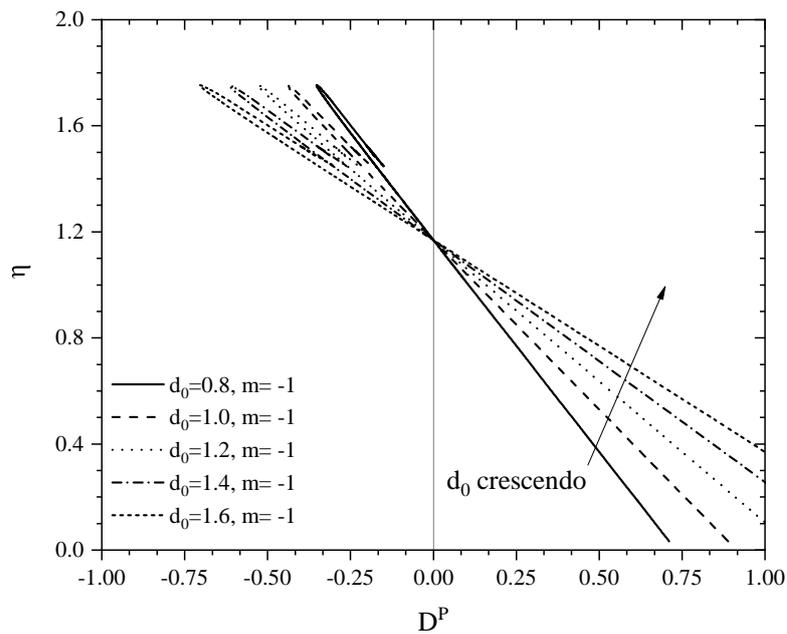
$$D^p = d(\eta, e, Q, C) \quad (2.10)$$

onde  $Q$  e  $C$  são termos que definem o estado interno além do índice de vazios e podem estar relacionados a fatores como a anisotropia e o *fabric*.

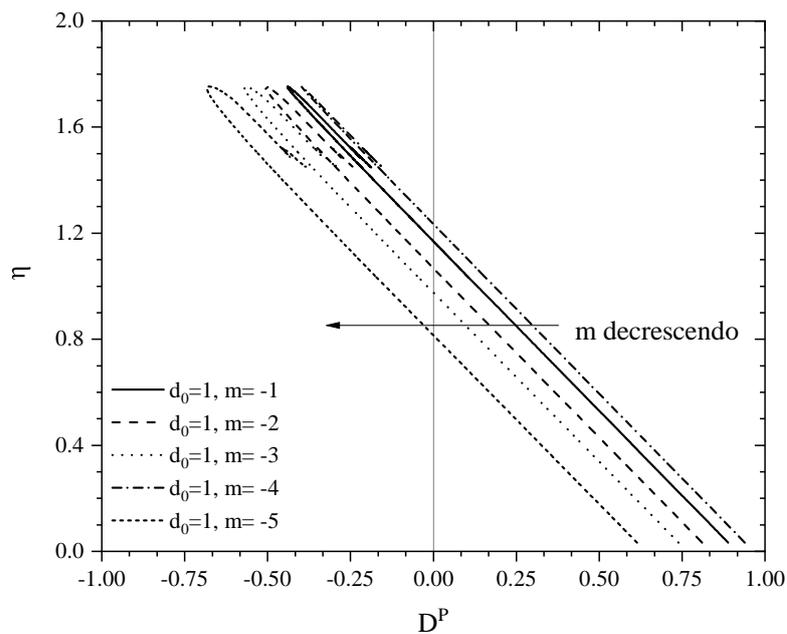
A partir de uma série de considerações teóricas e assumindo o parâmetro de estado, conforme definido na Eq. 2.8, Xiang Song Li et al. (2000) propõem a seguinte relação de dilatância, como função do estado do material.

$$D^P = \frac{d_0}{M} (M e^{m\psi} - \eta) \quad (2.11)$$

A Figura 2.10 ilustra a dependência da Eq. 2.11 nos parâmetros de ajuste  $d_0$  e  $m$ .



(a)



(b)

Figura 2.10 – Dependência da relação estado-dilatância de Xiang Song Li et al. (2000) nos parâmetros de ajuste (a)  $d_0$  e (b)  $m$ .

### 2.3.4 Modelagem constitutiva

Modelos são simplificações apropriadas da realidade. A questão na engenharia é a adoção do nível certo de simplificação, adequado para cada aplicação. A utilização de modelos computacionais acabou popularizando-se juntamente com o acesso à tecnologia, porém o entendimento das hipóteses assumidas na utilização desses modelos nem sempre é completa. Muitas vezes, engenheiros desconhecem as hipóteses e simplificações assumidas no desenvolvimento de modelos e os aplicam, o que pode vir a gerar problemas (MUIR WOOD, 2004). Usualmente, simplificações são feitas no desenvolvimento de modelos, sejam elas visando otimizar os recursos despendidos nos cálculos, viabilizar a implementação matemática ou simplesmente desprezar efeitos cuja magnitude é irrelevante frente às demais grandezas envolvidas. Portanto, ao utilizar essas idealizações matemáticas é crucial que haja o entendimento das premissas assumidas e se essas são válidas para a aplicação desejada.

Os modelos matemáticos que procuram representar o comportamento de materiais são chamados de Leis constitutivas, ou ainda modelos constitutivos. Esses são representações quantitativas de eventos percebidos empiricamente, que permitem a estimativa da resposta dos materiais modelados. Logo, a eficiência de um modelo é diretamente ligada ao grau de entendimento do fenômeno físico a ser modelado (DESAI et al., 1984). Os modelos constitutivos podem ser separados em dois grupos: os modelos descritivos e os modelos idealizados (JEFFERIES et al., 2002). Os modelos descritivos são aqueles que se baseiam no ajuste de funções matemáticas a comportamentos observados experimentalmente. Esses modelos se baseiam em resultados experimentais e podem ser adequados apenas às situações com as condições de contorno ao qual eles foram desenvolvidos. A generalização desses modelos para previsão de condições diferentes daquelas existentes no ensaio não encontram embasamento teórico e o modelo não provê explicações consistentes para os fenômenos físicos. Já os modelos idealizados são embasados em postulados e princípios físicos bem estabelecidos, dos quais os comportamentos são derivados. Eles são aptos a generalizações para diferentes condições e adaptações, mas ainda assim dependem, também, de comprovação experimental das hipóteses e postulados assumidos (JEFFERIES et al., 2002).

Os primeiros desenvolvimentos de modelos de previsão de comportamento de geomateriais surgiram ainda com as teorias de Rankine (1857) e Coulomb (1773). Ambos os autores estavam preocupados com as condições limites do material e acabavam por considerar o material como um corpo rígido-perfeitamente plástico em suas teorias. Ou seja, não haveria deformações até que o material atingisse um estado de tensões no qual deformasse indefinidamente sem que houvesse novo incremento de tensões. Com o desenvolvimento das teorias e crescimento da complexidade dos problemas fez-se necessário conhecer o comportamento em estágios anteriores aos estados limites.

Durante muito tempo, a fim de prever as deformações, os geomateriais eram assumidos como materiais elásticos, nos quais há relação direta entre os incrementos de tensões e as deformações, sendo essas recuperáveis (MUIR WOOD, 2004). Os geomateriais, porém, são essencialmente materiais plásticos. Logo, as deformações são em grande parte irrecuperáveis. Além disso, a resposta do material é diretamente relacionada ao seu estado atual, que, por sua vez, evolui durante o carregamento.

A fim de tratar matematicamente essas nuances foram estabelecidas teorias que permitam contabilizar esses e outros efeitos. O fundamento mais utilizado para isso costuma ser a Teoria da Plasticidade. Hill (1998) define a teoria da plasticidade como o nome dado para o estudo de tensões e deformações em sólidos deformados plasticamente. O ponto de partida para sua definição são observações experimentais do comportamento macroscópico de um sólido plástico submetido a uma combinação de tensões.

O desenvolvimento da teoria da plasticidade para os geomateriais partiu da adaptação de pesquisas realizadas sobre o comportamento plástico de metais. Porém, diferentemente dos metais, geomateriais sofrem deformações volumétricas quando submetidos a carregamentos (YU, 2006). Sendo assim, trabalhos como o de Drucker et al. (1957) sobre o enrijecimento de solos e Roscoe et al. (1958) sobre a plastificação de solos estabeleceram as bases para o desenvolvimento de teorias da plasticidade aplicadas à modelagem de geomateriais.

A Figura 2.11 representa esquematicamente a resposta tensão-deformação de diferentes modelos de comportamento. A condição **1** representa o comportamento rígido-perfeitamente plástico, em que não há deformações até que se atinja a tensão limite do material. A condição **2** é representativa de um modelo elástico linear-perfeitamente plástico, em que o material se comporta de maneira linear até atingir o limite elástico e então passa a deformar sob um estado constante de tensões. Já a condição **3** apresenta a idealização de um comportamento de enrijecimento com a ocorrência de deformações (*strain-hardening*) nesse caso a componente de deformações do material é composta por uma parte elástica ( $\epsilon^e$ ) e outra plástica ( $\epsilon^p$ ) e a medida que as deformações plásticas se desenvolvem o material se torna mais rígido. Por fim, a condição **4** apresenta a condição de amolecimento com as deformações (*strain-softening*). Nessa situação o material tem a sua rigidez reduzida com a ocorrência de deformações.

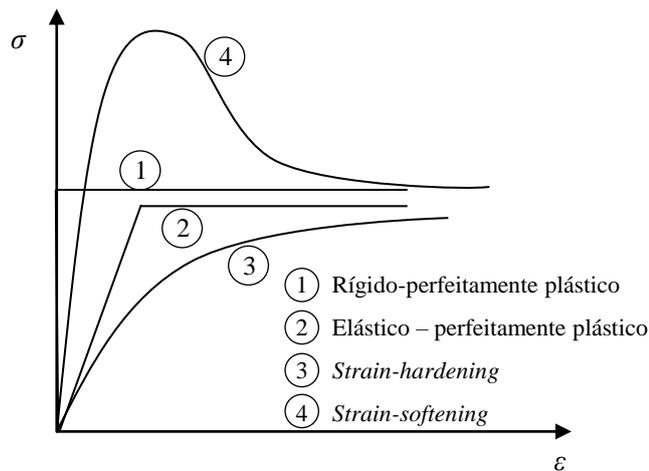


Figura 2.11 – Representação esquemática de resposta tensão-deformação para diferentes modelos constitutivos.

Atualmente, entende-se que a resposta dos meios particulados quando carregados é um conjunto de comportamento elástico e plástico. Portanto, a fim de estabelecer um modelo de previsão de comportamento alguns pré-requisitos devem ser atendidos (JEFFERIES, 2021; MUIR WOOD, 1990):

1. Descrição do comportamento elástico;
2. Definição do limite até o qual a resposta é elástica (Plastificação);
3. Descrição da forma como ocorrem as deformações plásticas (Lei de fluxo);
4. Definição da evolução do material devido às deformações sofridas (Lei de enrijecimento).

A relação mais simples entre tensões e deformações para modelos elásticos é a linearidade, que implica numa proporcionalidade entre os incrementos de tensão e deformação (MUIR WOOD, 2004). A elasticidade linear e isotrópica é o modelo mais comum para o tratamento do comportamento dos materiais antes da plastificação. Essa relação linear pode ser representada na forma da lei de Hooke (Eq. 2.12).

$$[\varepsilon] = [C^e][\sigma] \quad (2.12)$$

A expressão dada pela Eq. 2.12 é conhecida como Lei de Hooke generalizada, em que a matriz  $[C^e]$  é a matriz tensão-deformação.

Outros modelos de relação tensão-deformação foram propostos para o trecho de comportamento elástico de geomateriais, como a elasticidade não linear de Duncan et al. (1970). Outra possibilidade é a consideração da resposta anisotrópica do material, ou seja, resposta diferente em diferentes direções de carregamento. Essas representações, porém, adicionam complexidades de modelagem sem ganho significativo na resposta, dado que o comportamento de geomateriais é essencialmente plástico. Sendo assim, sua adoção acaba por se restringir a situações específicas, enquanto que no geral é assumido um comportamento elástico-linear para representação dos geomateriais em estados anteriores à plastificação (JEFFERIES et al., 2016). Nos geomateriais, é comum ainda associar o comportamento elástico às pressões efetivas experimentadas através de relações entre os parâmetros elásticos (e.g., módulo volumétrico, módulo cisalhante, coeficiente de poisson) e o primeiro invariante de tensão  $p'$ .

O ponto em que o comportamento do material deixa de ser elástico e passa a ser plástico é chamado de ponto de plastificação, ou *yield point* em inglês. Formalmente esse ponto corresponderia ao estado a partir do qual deformações plásticas ocorrem, sendo os estados anteriores a esse compostos apenas de deformações recuperáveis (elásticas). No caso de geomateriais, essa definição pode ser convenientemente adotada como o estado de tensões no qual a resposta do material muda de uma resposta mais rígida, para uma menos rígida (YU, 2006; MUIR WOOD, 1990).

Roscoe et al. (1958) investigaram a plastificação de materiais coesivos e não-coesivos ante condições drenadas e não drenadas. Esse estudo partiu do surgimento de ensaios conduzidos sob a condição de deslocamento controlado, em contrapartida aos ensaios com apenas tensão controlada anteriormente, onde não era possível se obter uma análise do comportamento após o pico de resistência do material. Experimentalmente, Roscoe et al. (1958) determinaram o ponto de plastificação para materiais em diferentes estados, a conexão desses pontos, por sua vez, dá origem à superfície de plastificação. Os autores reportam ainda a similaridade dos conceitos estabelecidos para os tipos de materiais estudados, indicando a natureza mecânica da plastificação em meios granulares.

A partir desse estudo, duas condições limites de estado para geomateriais podem ser definidas, as chamadas superfícies de Hvorslev e de Roscoe. Essas superfícies são definidas em um domínio  $p' - q$  normalizado pela chamada pressão equivalente ( $p'_e$ ), definida da Fig. 2.12a. A conjunção dessas superfícies dá origem a superfície limite de estado, representada na Fig. 2.12b para uma dada seção de volume específico ( $v$ ) constante.

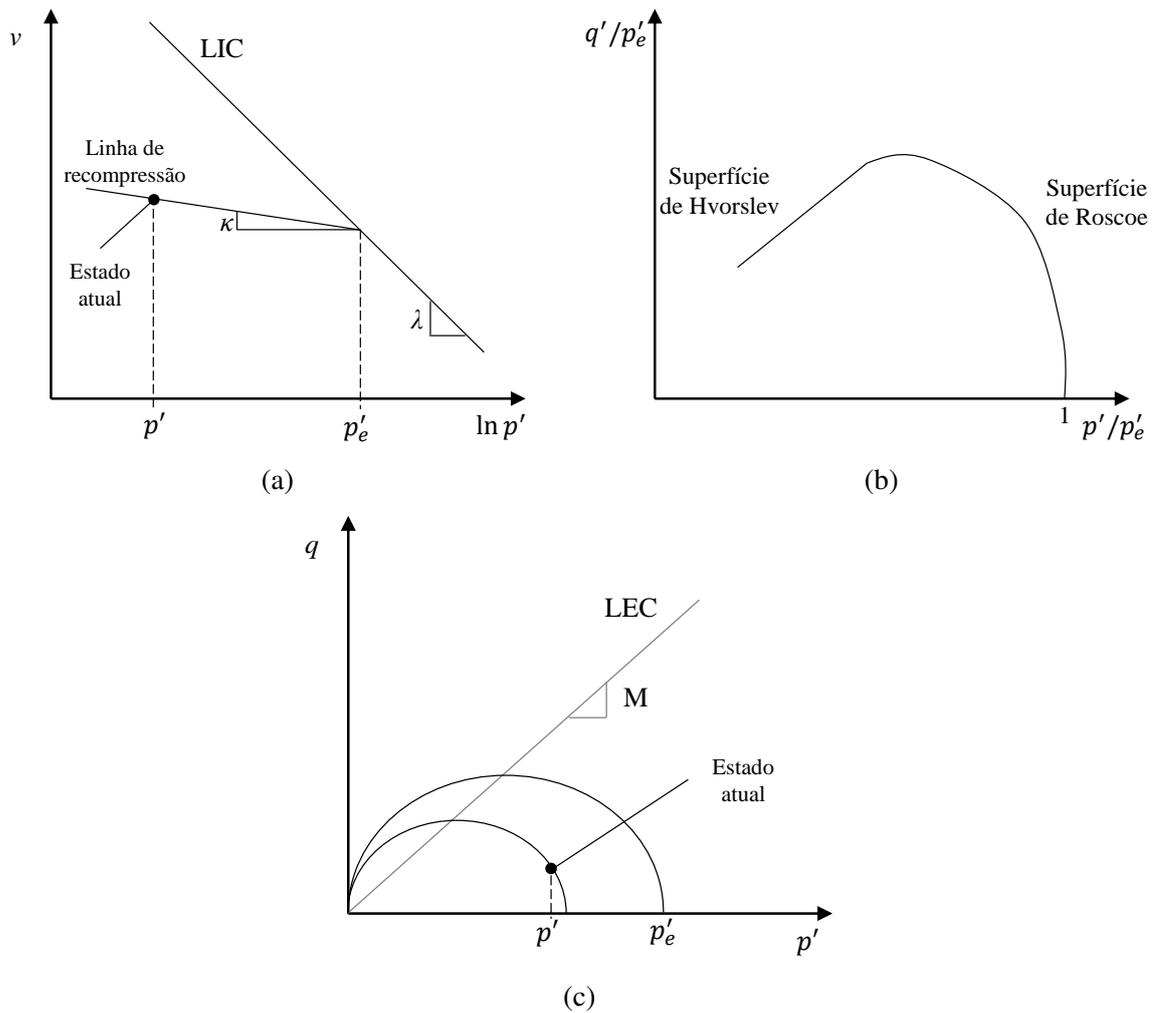


Figura 2.12 – Definições (a) da pressão equivalente ( $p'_e$ ) de Hvorslev no plano  $v - \ln p'$ , (b) das superfícies limites de estado e (c) da pressão equivalente no plano  $q - p'$ .

A definição da superfície de plasticização pode ser um dos pontos de maior incerteza na definição do comportamento. Em geral, um procedimento adotado para identificação do ponto de plasticização é a variação no módulo de elasticidade tangente, sob pequenos incrementos de tensão (POOROOSHASB, 1971; TATSUOKA et al., 1974). Nova et al. (1978) sugerem um método baseado em derivações teóricas para a determinação da superfície de plasticização. Enquanto que de Bono et al. (2018) definiram para seus resultados em MED o ponto de plasticização como sendo o ponto no qual o módulo tangente passa a ser inferior à metade do módulo tangente inicial. Kuwano et al. (2007), por sua vez, apresentaram uma forma de determinação das superfícies de plasticização considerando a plasticização cinemática em modelos de múltiplas superfícies, sendo cada uma dessas definida a partir de contornos de mesma razão entre as deformações plásticas e as deformações totais.

Poorooshab et al. (1966) ampliaram os conhecimentos relativos à plasticização de materiais

granulares não-coesivos. Enquanto que os conceitos elaborados por Roscoe et al. (1958) eram válidos, algumas considerações feitas que indicavam a normalidade da direção das deformações em relação às deformações para solos não-coesivos foram revistas. A condição de normalidade refere-se à direção das deformações plásticas em relação à direção do incremento de tensões. Essa condição implica nos vetores de deformações plásticas serem normais à superfície de plastificação (Fig. 2.13a), logo, nesse caso a superfície de potencial plástico é igual à superfície de plastificação e diz-se que é seguida uma lei de fluxo associada (MUIR WOOD, 1990).

Poorooshasb et al. (1966), no entanto, definem que, para materiais não-coesivos: “*a direção da componente plástica do vetor de deformações é independente da direção do incremento de tensões, sendo função somente do estado do elemento*”. Essa afirmação, sugere uma forma de comportamento diferente daquela assumida anteriormente. Nesse caso, o vetor de deformações plásticas não precisa respeitar a condição de normalidade e a superfície de plastificação e a de potencial plástico não coincidem, sendo essa condição denominada de lei de fluxo não associada (Fig. 2.13b) (MUIR WOOD, 1990).

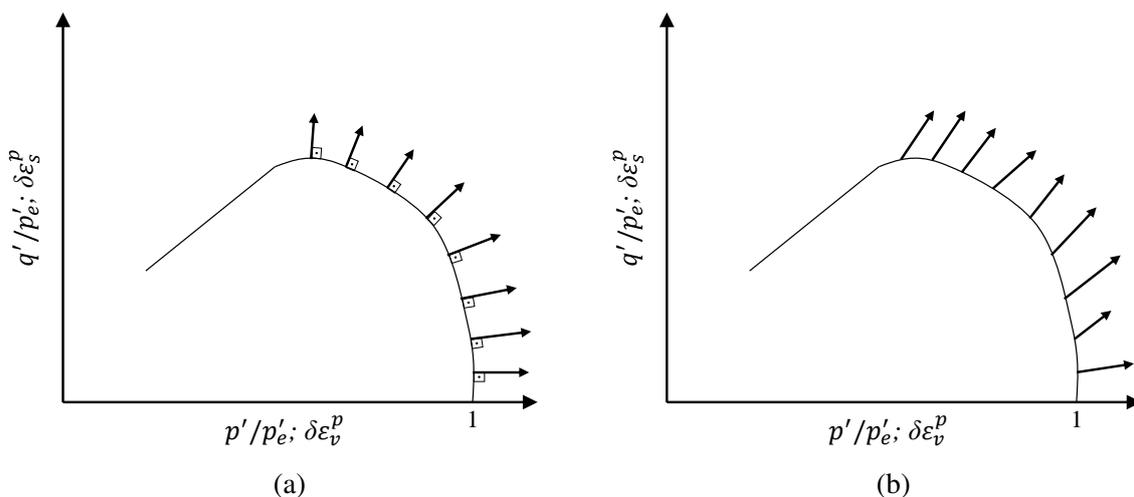


Figura 2.13 – Representação da superfície de plastificação e vetores de incremento de deformações plásticas para (a) fluxo associado e (b) fluxo não associado.

A existência de uma lei de fluxo não associada para materiais não coesivos é bastante aceita e foi verificada por diversos autores (e.g., COOP, 1990; CHANDLER, 1985). Na verdade, para materiais friccionais, a existência de uma lei de fluxo não associada é uma consequência termodinâmica, inerente à natureza desses (COLLINS et al., 1997). Essa condição foi também considerada na modelagem constitutiva (POOROOSHASB, 1989; YU, 1998; GAJO et al., 1999b; LADE, 1977). Porém, a consideração de uma lei de fluxo não associado através da forma usual de derivação de modelos constitutivos implica na determinação de parâmetros para a superfície de potencial plástico. Além disso, a consideração de duas superfícies diferentes ao invés de uma única implica também na complexidade da solução, fazendo com que alguns autores optem pela

consideração de leis de fluxo associadas no desenvolvimento de modelos (JEFFERIES, 1993; JEFFERIES et al., 2016; SCHOFIELD et al., 1968; ROSCOE et al., 1968).

Outro aspecto relativo à superfície de plastificação, fundamental à definição de um modelo constitutivo, é a descrição da evolução da superfície durante o desenvolvimento das deformações. Esse fenômeno é denominado enrijecimento (*hardening*) e representa a mudança em posição, tamanho ou até forma da superfície de plastificação de acordo com a história de tensões (YU, 2006). Em modelos como o Camclay (SCHOFIELD et al., 1968; ROSCOE et al., 1968) a lei de enrijecimento é assumida como dependente exclusivamente da pressão efetiva média ( $p'$ ) experimentada, esse caso é conhecido como enrijecimento isotrópico.

Durante o enrijecimento isotrópico é assumido que a superfície de plastificação mantém sua forma e posição, expandindo apenas em tamanho (YU, 2006). O enrijecimento isotrópico, porém, pode ser expandido para consideração de um enrijecimento devido às deformações plásticas de cisalhamento e não unicamente das deformações volumétricas, o que provê um comportamento mais realista de meios granulares (JEFFERIES et al., 2002). Outra forma de enrijecimento é o chamado enrijecimento cinemático, utilizado para casos de carregamentos cíclicos em solos. Nesse modelo de enrijecimento a superfície mantém sua forma e tamanho, porém é transladada no espaço de tensões (DESAI et al., 1984).

Outra forma de se obter a superfície de plastificação é a partir do desenvolvimento de relações teóricas. No desenvolvimento de modelos constitutivos idealizados, a premissa básica para definição da lei constitutiva é uma equação de dissipação de energia (JEFFERIES et al., 2002; SCHOFIELD et al., 1968). A partir de uma lei de dissipação de energia em função das deformações volumétricas e cisalhantes, podem ser derivadas as formas da superfície de plastificação e da função de potencial plástico, que podem ser iguais ou não (YU, 2006).

No entanto, é importante diferenciar a lei de dissipação de energia da lei de trabalho plástico. Isso ocorre em razão de o trabalho plástico conter uma parcela de energia livre no sistema. Variáveis conjugadas de trabalho são aquelas cujo produto é o trabalho realizado. Isso ocorre, por exemplo em relação às tensões efetivas e suas deformações correspondentes (i.e., o produto entre  $p'$  e  $\delta\varepsilon_v$  é o trabalho de deformação volumétrica). No caso do trabalho plástico as tensões efetivas são conjugadas às deformações plásticas, porém essas não correspondem à totalidade da energia dissipada. Em geral a equação de trabalho de deformação isotérmica em um geomaterial pode ser dada pela Eq. 2.13 (COLLINS et al., 1997).

$$p' \delta\varepsilon_v + q \delta\varepsilon_s = \delta\Psi + \delta\Phi : \delta\Phi \geq 0 \quad (2.13)$$

A diferença entre a lei de dissipação de energia  $\delta\Phi$  e a lei de trabalho plástico  $\dot{W}$  é que a lei de

dissipação de energia é conjugada com as chamadas tensões dissipativas  $\pi'$  and  $\tau$ , relacionadas às tensões efetivas pelas Eq. 2.14 e 2.15, respectivamente. Isso ocorre porque, devido à natureza particulada dos geomateriais, as deformações plásticas são consequência do movimento relativo das partículas e também das cadeias de forças transmitidas nos contatos das partículas, que não são uniformes (MUIR WOOD et al., 2008; O'SULLIVAN et al., 2013). Sendo assim, apesar de deformar plasticamente, uma parte dos contatos das partículas na massa de solo ainda se encontra no regime elástico, o que oferece uma energia armazenada durante trabalho plástico e não incluída na energia dissipada pelo sistema (PALMER, 1967; JEFFERIES, 1997; COLLINS et al., 2002b; COLLINS, 2005).

$$p' = p' + \pi' \quad (2.14)$$

$$q = \zeta + \tau \quad (2.15)$$

Logo, a Eq. 2.13 pode ser vista como o enunciado da segunda lei da termodinâmica e a condição de  $\delta\Phi$  maior que 0, como a condição de que a entropia precisa sempre aumentar. Sendo assim, a determinação da direção de fluxo plástico assumindo uma lei de trabalho plástico como a dissipação de energia é uma violação direta de princípios da termodinâmica e não está de acordo com a formulação robusta de um modelo constitutivo condizente (COLLINS et al., 2002b, 1997; YAO, Y. et al., 2022).

A forma geral da equação de energia proposta no desenvolvimento original do modelo Camclay é dada pela Eq. 2.16.

$$\delta\Phi = Mp'|\dot{\varepsilon}_v^p| \quad (2.16)$$

Porém, no desenvolvimento, o incremento de fluxo plástico é igualado à função de dissipação de energia. Portanto, conforme posto anteriormente, essa condição implica na violação de princípios básicos da termodinâmica (COLLINS et al., 2002b).

A teoria de Collins e Houlsby (HOULSBY, 1979, 1981, 1991; COLLINS et al., 1997, 2002a,b; COLLINS, 2003; COLLINS et al., 2007, 2010) fornece uma base teórica sólida, apoiada nos princípios da termodinâmica, para o desenvolvimento, ou verificação, de modelos constitutivos aplicados a geomateriais. Os conceitos centrais da teoria estão na definição completa da equação de energia, base para o desenvolvimento. A partir do entendimento dos conceitos estabelecidos, os autores propõe um método de derivação de ambas as funções de plastificação e de potencial plástico, sem a necessidade de assumir uma lei de fluxo associada ou definir outras funções, dado que ambas são derivadas da lei de dissipação de energia definida.

A abordagem termodinâmica proposta por Collins (2003) pode ser utilizada na verificação da adequabilidade de modelos existentes, como demonstrado para os modelos Camclay original e modificado e outros (COLLINS et al., 2002a; YAO, Y. et al., 2022). Yangping Yao et al. (2022) desenvolveram uma abordagem denominada método termodinâmico indireto baseado nos conceitos de Collins (2003). Nessa abordagem é considerada a existência de uma superfície de potencial plástico elíptica no espaço dissipativo como a forma mais simples que atenda aos princípios da termodinâmica. Os autores colocam que a abordagem de Collins, chamada de método termodinâmico direto, insere dificuldades na determinação dos modelos visto que há alguma arbitrariedade na definição da lei de dissipação sendo difícil partir de um conjunto de dados e determinar as condições necessárias para o desenvolvimento do modelo. No método de Yangping Yao et al. (2022), portanto, as formas da lei de trabalho plástico e da superfície de plastificação no espaço de tensões efetivas reais, são pré-definidas com base em dados experimentais e, após determinado, o modelo é verificado de acordo com os princípios da termodinâmica. Essa abordagem também pode ser utilizada na verificação de modelos existentes, como feito pelo autores para os modelos da família Camclay. No Apêndice A deste trabalho encontra-se uma verificação do modelo *NorSand* (JEFFERIES, 1993; JEFFERIES et al., 2016) pelo método termodinâmico indireto de Yangping Yao et al. (2022).

Um aspecto em comum entre a abordagem de Collins e a de Yangping Yao et al. (2022) é a forma da função de dissipação adotada (Eq. 2.17). Essa forma foi proposta por Collins et al. (1997) como uma equação linear que sempre provê uma lei de fluxo associada no plano dissipativo, mas não necessariamente no plano de tensões efetivas verdadeiras. Isso ocorre a partir de uma série de considerações teóricas que podem ser trazidas para o contexto dos geomateriais. A adoção de uma função de dissipação linear atende aos requisitos físicos e termodinâmicos sem que seja adicionada complexidade matemática desnecessária. Os autores colocam ainda que pode ser assumido que, para um material isotrópico, essa forma pode sempre ser adotada.

$$\delta\Phi = \sqrt{(A\dot{\epsilon}_v^p)^2 + (B\dot{\epsilon}_s^p)^2} \quad (2.17)$$

Collins et al. (2010), porém, apresentam uma forma modificada da equação de energia, a qual leva em conta a dependência da lei de dissipação no estado do material (Eq. 2.18). Na seção anterior, a existência de uma relação estado-dilatância já havia sido discutida. A partir das considerações de Rowe (1962), Poorooshab et al. (1966), Nova (1982) e Xiang Song Li et al. (2000) foi apresentada a necessidade da consideração do estado da determinação da lei de dilatância e, conseqüentemente, na direção das deformações plásticas. Através da abordagem de Collins e Housby para definição de um modelo constitutivo completo, adequado aos princípios da termodinâmica moderna, foi mostrada a interdependência das características constitutivas do material da lei de dissipação. Logo, o estado deve também estar incluído na definição da lei de

dissipação a ser adotada.

$$\delta\Phi = p\sqrt{A(\xi)^2\dot{\epsilon}_v^{p2} + M^2B(\xi)^2\dot{\epsilon}_s^{p2}} \quad (2.18)$$

onde  $A$  e  $B$  são funções do parâmetro de estado termomecânico ( $\xi$ ) definido por Collins et al. (2010).

Portanto, a determinação da superfície de plastificação e da correspondente superfície de potencial plástico é uma tarefa árdua na modelagem de geomateriais. Para obtenção, tanto experimental quanto teórica, são necessárias várias hipóteses que devem ser comprovadas ou refutadas através de dados experimentais e da coerência nos comportamentos observados. O entendimento dos fenômenos físicos envolvidos é fundamental para descrição completa da plastificação em meios granulares e a influência de aspectos fundamentais como a morfologia e mineralogia das partículas pode interferir nas diferentes condições adotadas. Efeitos como a presença de finos não-plásticos em materiais não coesivos também aparecem com menos frequência na literatura, onde os conhecimentos foram mais desenvolvidos para aplicações em areias puras.

A definição de uma equação de dissipação de energia, pode ser feita através de considerações teóricas e uma lei de dilatância apropriada. A consistência entre as hipóteses assumidas é crucial para a definição de modelos robustos, capazes de prever o comportamento de geomateriais em diferentes estados. A adoção de uma lei de fluxo não associada, apesar de incorrer em um custo computacional, pode ser realizada através de ensaios convencionais e de forma consistente com a lei de dilatância e superfície de plastificação adotadas, além de ser uma consequência teórica para materiais de natureza friccional.

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo descreve os materiais empregados na realização do trabalho e os métodos utilizados para a obtenção e análise dos dados experimentais. Além disso, é descrito o programa experimental proposto a fim de cumprir os objetivos previamente elencados.

#### 3.1 PROGRAMA EXPERIMENTAL

O programa experimental proposto abrange um amplo espectro de tensões de confinamento para avaliação da resposta mecânica de um rejeito de minério de ferro. Normalmente, as aplicações em mecânica dos solos são restritas a tensões de até 1 MPa, enquanto que estudos envolvendo tensões maiores são menos comuns. Além disso as denominações relativas às diferentes faixas de tensões não são unânimes. Sendo assim, a Tabela 3.1 apresenta a denominação adotada, as respectivas tensões a qual se referem e exemplos de aplicações possíveis para geomateriais. Neste trabalho optou-se pela nomenclatura de Vesić et al. (1968).

Tabela 3.1 – Faixas de tensões e exemplos de aplicações em engenharia geotécnica.  
Adaptado de Liu et al. (2020).

|                         | <b>Baixas</b>     | <b>Elevadas</b>                     | <b>Altas</b>                 | <b>Muito Altas</b>           |
|-------------------------|-------------------|-------------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Faixa de tensões        | 10 kPa-1 MPa      | 1-10 MPa                            | 10-100 MPa                   | 100-1000 MPa                 |
| Aplicações em geotecnia | Aplicações usuais | Pilhas de rejeitos de grande altura | Aberturas em minas profundas | Solos submetidos a explosões |

Para a descrição dos estados iniciais dos materiais foi adotada nomenclatura conforme Coop (1990). A Figura 3.1 resume a nomenclatura adotada.

Os estados fofo e denso referem-se ao comportamento esperado das amostras em relação ao seu comportamento volumétrico no cisalhamento. Sendo assim, as amostras fofas foram moldadas em índices de vazios maiores a fim de se obter um parâmetro de estado inicial ( $\psi$ ) positivo e, portanto, comportamento volumétrico contrátil. Já as amostras densas foram moldadas em índices de vazios mais baixos, com o objetivo de se obter um parâmetro de estado inicial negativo, representativo de um comportamento dilatante.

A Tabela 3.2 resume o programa experimental proposto e a motivação da realização de cada ensaio.

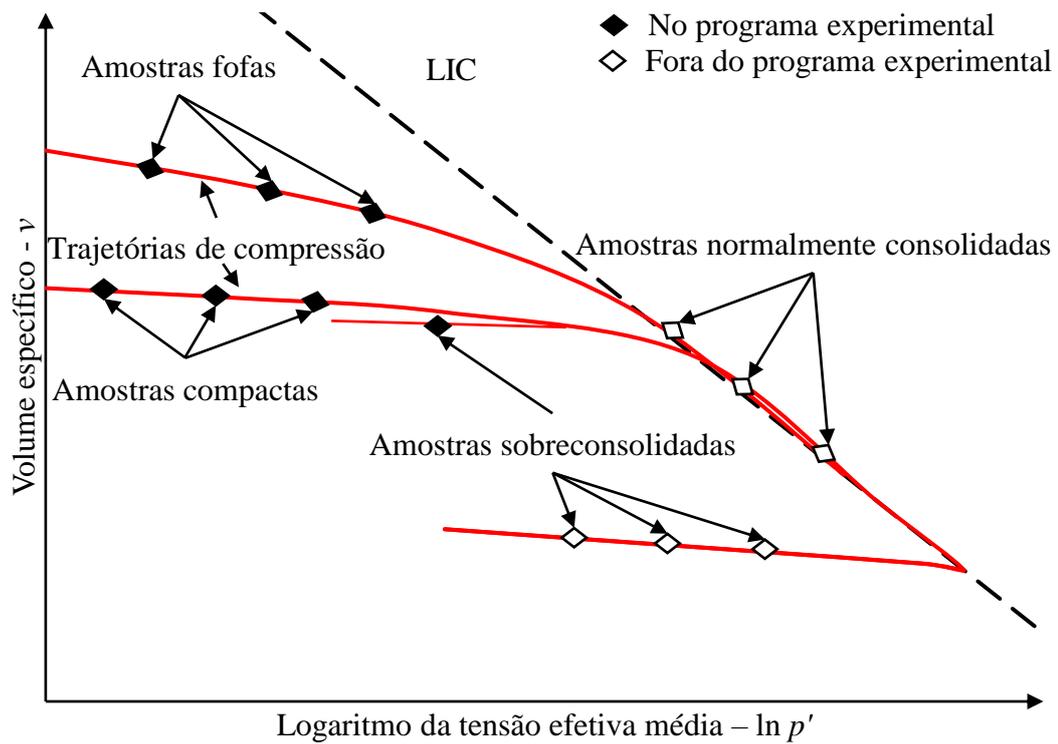


Figura 3.1 – Estados considerados no programa experimental.

Tabela 3.2 – Resumo do programa experimental proposto.

| Estado | Objetivo                                  | História de tensões | OCR  | $p'_{max}$ (kPa) | $p'_0$ (kPa) | Condição |
|--------|---|---------------------|------|------------------|--------------|----------|
| Denso  | Análise de dilatância                     | Compactado          | 1    | 50               | 50           | Drenado  |
|        |   |                     | 1    | 125              | 125          |          |
|        |   |                     | 1    | 250              | 250          |          |
|        |   |                     | 1    | 500              | 500          |          |
|        |   |                     | 1    | 1000             | 1000         |          |
|        | Estimativa da superfície de plastificação | SC                  | 2    | 200              | 100          |          |
|        |   |                     | 4    | 200              | 50           |          |
|        |   |                     | 2    | 2000             | 1000         |          |
|        |   |                     | 4    | 2000             | 500          |          |
|        |   |                     | 2    | 4000             | 2000         |          |
| Fofa   | Estimativa da LEC                         | -                   | 1    | 50               | 50           |          |
|        |   | 1                   | 250  | 250              |              |          |
|        |   | 1                   | 500  | 500              |              |          |
|        |   | 1                   | 1000 | 1000             |              |          |
|        |   | 1                   | 2000 | 2000             |              |          |

A fim de identificar cada um dos ensaios realizados em função das variáveis controladas, foi determinada uma nomenclatura de seguinte forma:



Além dos ensaios triaxiais, foi realizada a caracterização geotécnica dos materiais, incluindo análise granulométrica (ASTM, 2021a), limites de Atterberg (ASTM, 2017), peso específico real dos grãos (ASTM, 2014) e determinação da curva de compactação (ASTM, 2021b). Foi ainda realizada MEV e Espectroscopia de raios-X por Dispersão em Energia (EDE) para caracterizar o material do ponto de vista químico e morfológico.

### 3.2 CARACTERIZAÇÃO GEOTÉCNICA DOS MATERIAIS

Neste trabalho será utilizado um material oriundo da mistura de dois rejeitos de minério de ferro em uma proporção determinada. Ambos os rejeitos são provenientes da região do Quadrilátero Ferrífero (QF), no estado de Minas Gerais (MG). Essa região é responsável pela produção de aproximadamente, 65% de toda a produção de minério de ferro do Brasil (DAUCE et al., 2019; VILAÇA et al., 2022). As atividades de mineração e beneficiamento de minério de ferro incluem desde processos de quebra e triagem até processos mais sofisticados. Os rejeitos considerados foram obtidos de uma mesma planta de beneficiamento, sendo as suas diferenças originadas pelos diferentes estágios do processo de beneficiamento do qual foram extraídos. Após a triagem, o material considerado fino (partículas com diâmetros entre 0.15 e 0.63mm), segue para a etapa de deságue, através de uma sequência de hidrociclonagens. Em seguida, o Rejeito Ultrafino (UF) é retirado e armazenado. O restante segue para um processo de flotação catiônica reversa no qual o minério de partículas menores (*pellet feed*) é isolado e o rejeito granular é o material resultante. Esse rejeito é também chamado de Rejeito de Flotação (F), sendo sua composição majoritariamente de grãos de quartzo (ou outros minerais presentes na rocha de origem) (SILVA et al., 2022).

A Figura 3.2 ilustra as etapas da produção do minério e os estágios no qual os rejeitos originais são recuperados.

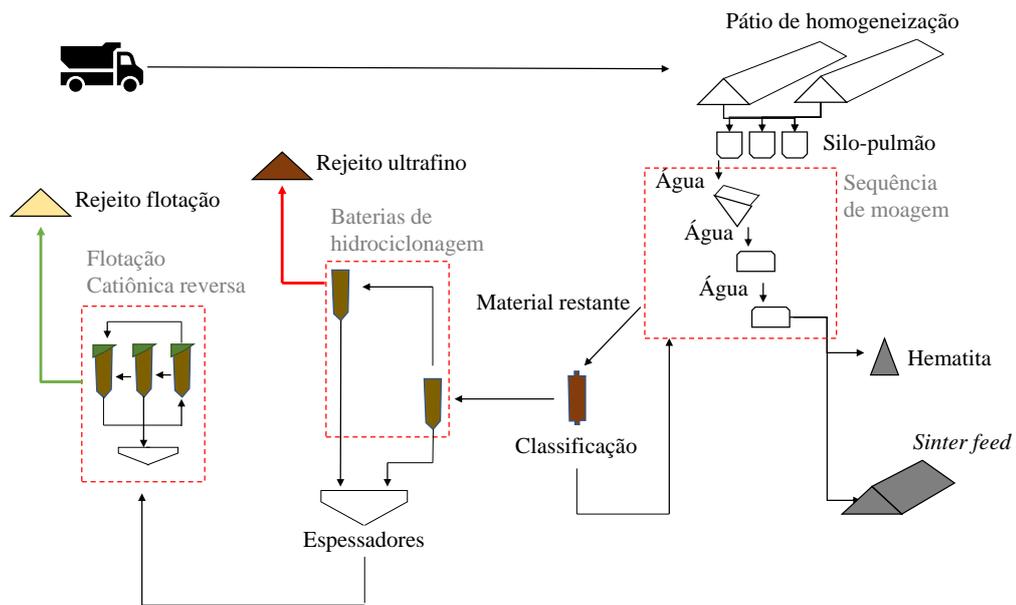


Figura 3.2 – Cadeia de processamento do minério de ferro e estágio de obtenção dos rejeitos Ultrafino (UF) e Flotação (F). Adaptado de Silva et al. (2022).

O material utilizado foi então obtido a partir da mistura a seco dos materiais seguindo a proporção, em peso, de 80% de F e 20% de UF. A Figura 3.3 apresenta cada um dos materiais previamente à mistura. As curvas granulométricas da mistura e dos rejeitos originais foram obtidas de acordo com a norma ASTM D7928 (ASTM, 2021a) e são apresentadas na Fig. 3.4.



Figura 3.3 – Amostras originais do (a) Rejeito UF e (b) Rejeito F previamente à mistura.

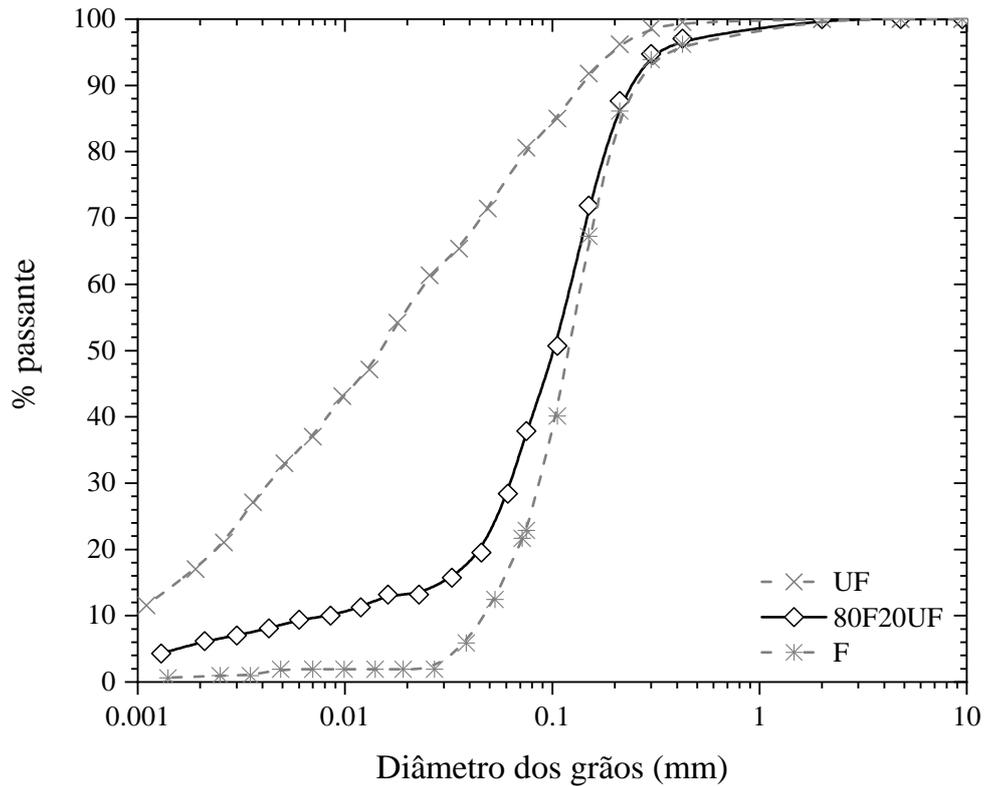
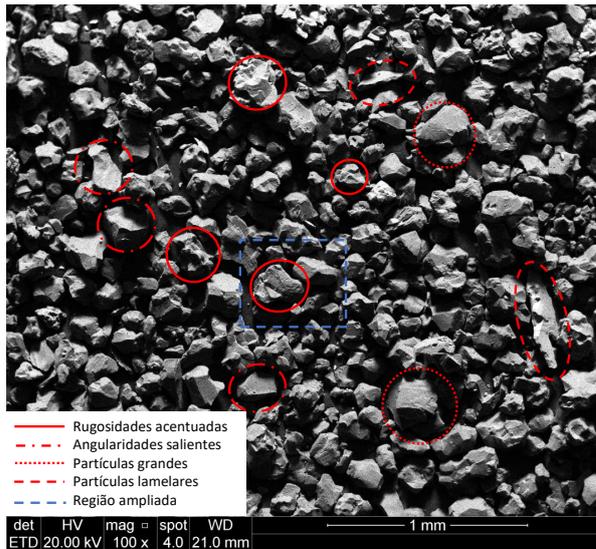
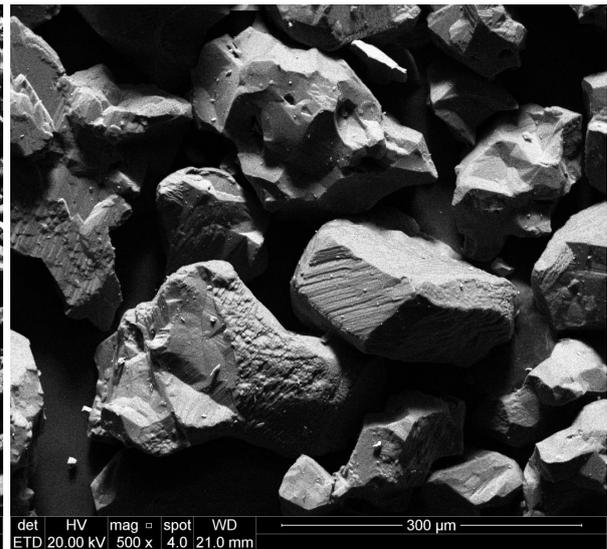


Figura 3.4 – Curva granulométrica do material antes de ser testado.

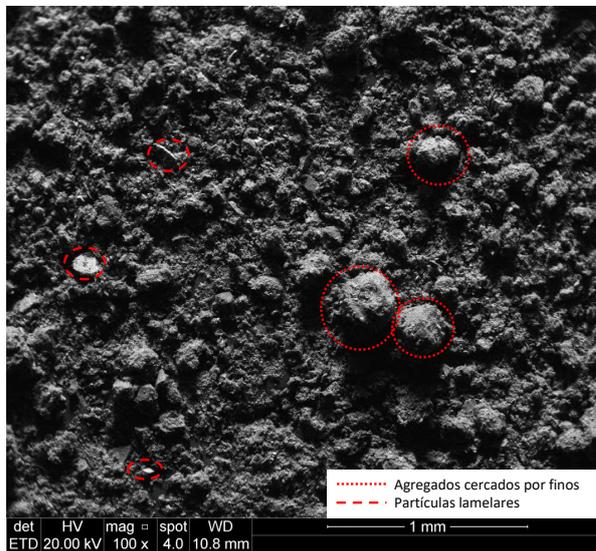
Conforme referido na seção 2.1, o processo de formação industrial ao qual os rejeitos são submetidos propicia características particulares a esses materiais. De forma a visualizar características proeminentes em rejeitos de mineração (e.g., angularidade, rugosidade, presença de partículas alongadas, lamelares, entre outras) foi realizada análise de MEV nas amostras originais e após mistura. A Figura 3.5 apresenta os resultados obtidos.



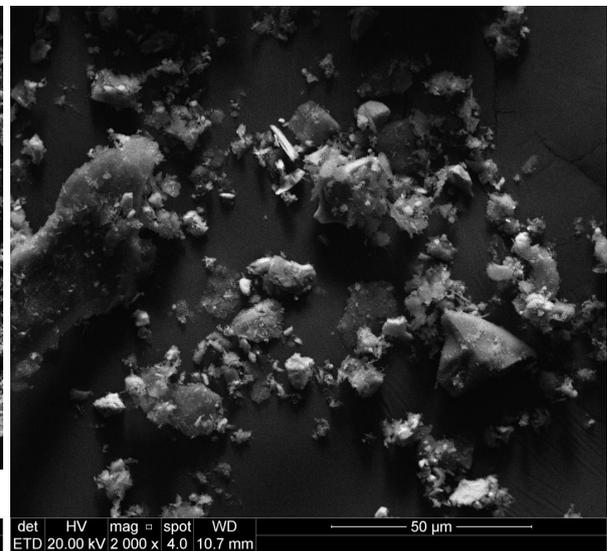
(a) Rejeito F



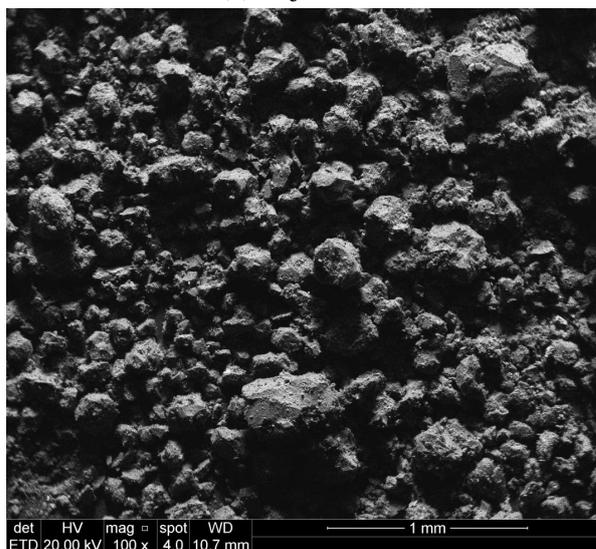
(b) Rejeito F



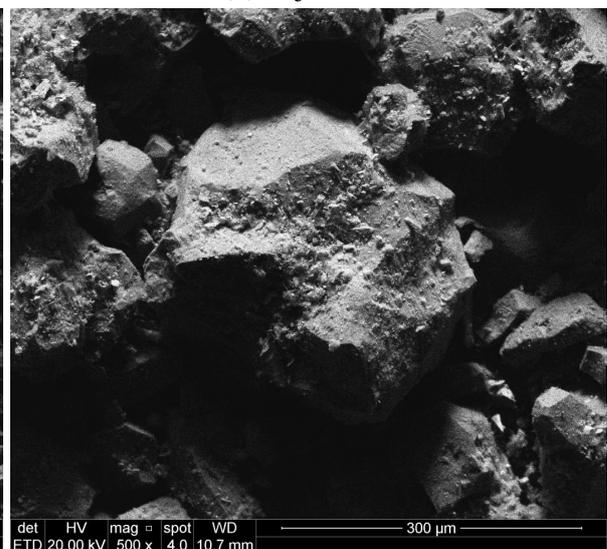
(c) Rejeito UF



(d) Rejeito UF



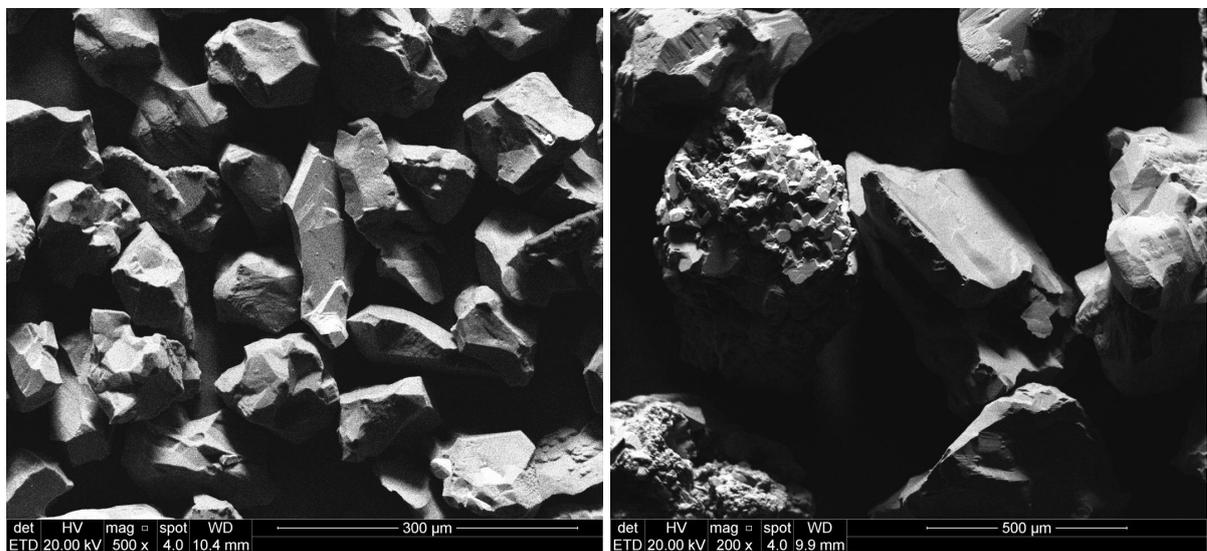
(e) Rejeito 80F20UF



(f) Rejeito 80F20UF

Figura 3.5 – Imagens de MEV dos rejeitos (a, b) UF, (c, d) F e (e, f) 80F20UF.

É possível observar a presença de partículas angulares e lamelares em ambos os rejeitos originais (UF e F). No rejeito UF é possível observar (Fig. 3.5d) o formato das partículas menores, que cercam as maiores. As partículas menores apresentam características variadas, porém mantendo angularidades salientes e formato alongado. Já no rejeito utilizado para realização de ensaios triaxiais (80F20UF), observa-se a predominância das características do rejeito F, devido à sua maior quantidade na mistura, porém com a adição de finos que acabam por envolver as partículas maiores. Com o intuito de caracterizar morfológicamente o rejeito ser ensaiado e comparar com resultados após os ensaios, foram selecionadas duas gradações de peneiras para serem realizadas análises de MEV (aberturas 0.075mm e 0.425 mm). A Figura 3.6 apresenta características adicionais das amostras antes de serem ensaiadas.



(a) Peneira 0.075 mm

(b) Peneira 0.425 mm

Figura 3.6 – Imagens MEV do Rejeito 80F20UF retido nas peneiras (a) 0.075 mm e (b) 0.425 mm.

Durante a realização da MEV, foi realizada análise EDE em uma região ampla da cada uma das amostras. Os resultados são apresentados na Tab. 3.3. É possível observar que o rejeito obtido da mistura dos rejeitos originais preserva as características desses e, conforme esperado, apresenta teores de sílica ( $SiO_2$ ) e hematita ( $Fe_2O_3$ ) elevados.

Tabela 3.3 – Resultado de Espectroscopia de raios-X por Dispersão em Energia (EDE).

| Rejeito | $SiO_2$<br>% | $Fe_2O_3$<br>% | $MnO$<br>% | $Al_2O_3$<br>% |
|---------|--------------|----------------|------------|----------------|
| F       | 94           | 6              | -          | -              |
| UF      | 32           | 55             | 1          | 12             |
| 80F20UF | 64           | 28             | 1          | 7              |

Foram ainda realizados ensaios de compactação dos materiais considerados. A Figura 3.7 apresenta as curvas de compactação para cada um dos rejeitos e para a mistura utilizada neste trabalho, enquanto a Tab. 3.4 resume os resultados de caracterização.

O rejeito UF apresenta um peso específico seco maior, devido ao maior peso específico dos grãos ocasionado pela sua maior concentração de óxido de ferro. Já o rejeito F, apresenta peso específico seco e teor de umidade ótimas menores. O formato da curva de compactação da mistura 80F20UF se assemelha bastante ao do rejeito F, dada a maior porcentagem deste na mistura, sendo apenas deslocada para cima, devido ao aumento do peso específico dos grãos, e para esquerda (teor de umidade ótima reduzido).

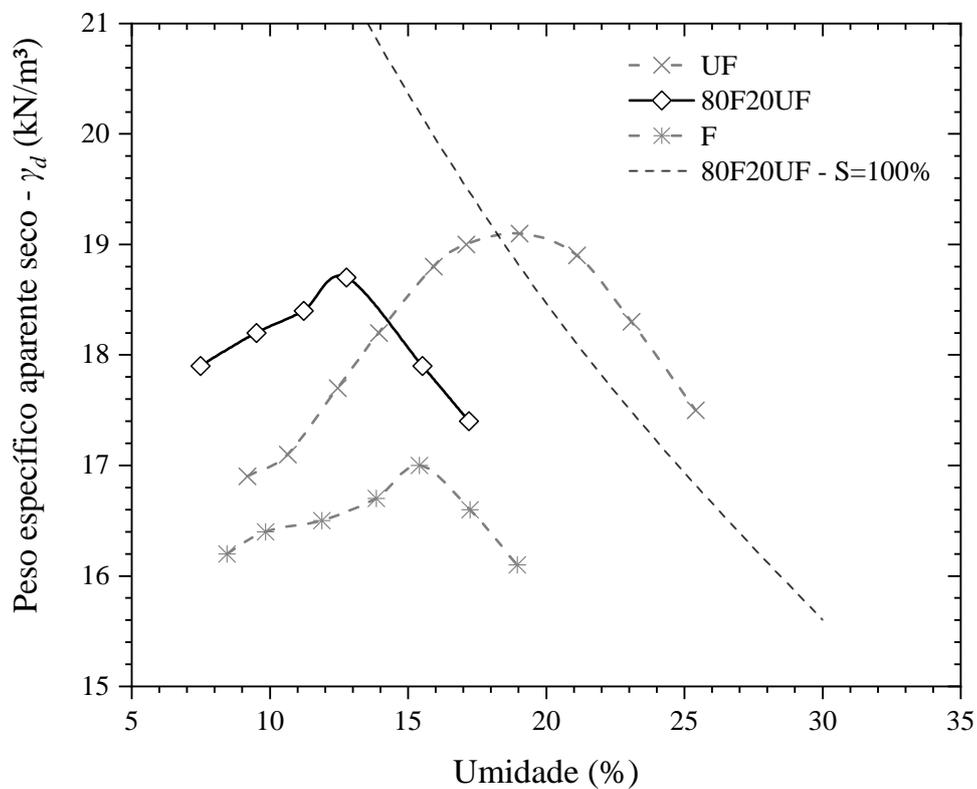


Figura 3.7 – Curva de compactação do material considerando a energia normal.

Tabela 3.4 – Resumo da caracterização dos materiais originais e da mistura utilizada.

| Parâmetros                    | UF    | F            | 80F20UF      |
|-------------------------------|-------|--------------|--------------|
| Gravidade específica – $G_s$  | 3.402 | 2.717        | 2.917        |
| Pedregulho (%)                | 0%    | 0%           | 0%           |
| Areia grossa (%)              | 0%    | 4%           | 2%           |
| Areia média (%)               | 3%    | 10%          | 13%          |
| Areia fina (%)                | 18%   | 69%          | 57%          |
| Silte (%)                     | 64%   | 16%          | 22%          |
| Argila (%)                    | 15%   | 1%           | 6%           |
| $w_L$ (%)                     | 30.8% | -            | -            |
| PI (%)                        | 6.5   | Não plástico | Não plástico |
| Classificação ASTM-USCS       | ML    | SM           | SM           |
| $w_{opt}$ (%)                 | 19.0% | 15.4%        | 12.7%        |
| $\gamma_{d,max}$ ( $kN/m^3$ ) | 19.1  | 17.0         | 18.7         |

### 3.3 ENSAIOS TRIAXIAIS

#### 3.3.1 Preparação das amostras

As amostras para os ensaios triaxiais foram moldadas através de compactação estática, seguindo o método de *undercompaction* (LADD, 1978; SUITS et al., 2003). Inicialmente os materiais (rejeito ultrafino, rejeito de flotação e água destilada) foram pesados individualmente a fim de atingir as metas de índice de vazios e umidade de moldagem. A seguir os dois rejeitos originais foram misturados secos, foi adicionada água destilada à mistura e realizada a moldagem dos corpos de prova, que foram levados diretamente ao equipamento triaxial para serem ensaiados. Para cada corpo de prova foi pesada individualmente a proporção de 80% de rejeito F e 20% de rejeito UF, de forma a garantir a maior homogeneidade possível entre as amostras.

A partir dos resultados de caracterização geotécnica dos materiais empregados, foi definida a adoção de duas condições de moldagem distintas, uma com objetivo de obter amostras densas considerando 100% do grau de compactação ( $v_0 \approx 0.59$ ) e outra a fim de obter amostras fofas considerando 85% do grau de compactação ( $v_0 \approx 0.80$ ). Para ambas as moldagens foi usado como meta o teor de umidade ótima do material de, aproximadamente, 13% (ver Tab. 3.4). Utilizou-se durante toda a realização do trabalho corpos de prova com dimensões de, aproximadamente, 5 cm de diâmetro e 10 cm de altura.

### 3.3.2 Realização dos ensaios

Os ensaios triaxiais foram realizados no Laboratório de Ensaio Geotécnicos e Geoambientais (LEGG) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Durante a realização do programa experimental, foram utilizados dois equipamentos, a fim de atender a ampla faixa de tensões propostas, um equipamento triaxial do tipo Bishop-Wesley (BISHOP et al., 1975) e um equipamento triaxial para pressões elevadas ( $< 10 \text{ MPa}$ ). Ambos os equipamentos utilizados foram inteiramente concebidos e construído no LEGG. O equipamento triaxial de altas pressões consiste de um equipamento em aço inoxidável, a fim de suportar pressão confinante de até 10 MPa, com controle das pressões confinante e contrapressão completamente independente e automatizado e conta com um sistema de controle e aquisição eletrônica dos dados da instrumentação (MARQUES, 2016). O equipamento do tipo Bishop-Wesley, por sua vez, é composto por uma câmara em acrílico e um pedestal em aço inox, que conectado a um motor de passo, aplica o carregamento ao deslocar a amostra contra um pistão conectado a um sistema de reação. Assim como o equipamento triaxial de altas pressões, o triaxial Bishop-Wesley conta também com sistemas automatizados de controle e aquisição de dados.

Todos os ensaios foram conduzidos com deslocamento controlado e contaram com instrumentação interna (Fig. 3.8), para melhor avaliar o comportamento do material à pequenas deformações, possibilitar a avaliação da rigidez e garantir uma medida mais fiel da deformação real da amostra. O uso de instrumentação interna pode oferecer medidas mais confiáveis ao evitar erros oriundos de alinhamento, deformação do arranjo, entre outros (LADE, 2016). O controle das deformações volumétricas foi realizado através de um dispositivo do tipo pistão, no caso do triaxial de pressões elevadas (MENZIES, 1975). Neste sistema a água é confinada, como em um sistema hidráulico de aplicação de carga, e um transdutor conectado na linha, conforme a água é expulsa ou succionada pela amostra saturada a pressão gerada é compensada pelo sistema eletrônico de aplicação de carga e o deslocamento do pistão dentro do êmbolo é conhecido. Logo, a partir da área da seção transversal do êmbolo e o deslocamento medido do pistão é possível determinar o volume deslocado (LADE, 2016; MENZIES, 1975; MARQUES, 2016). No triaxial Bishop-Wesley foi utilizado um medidor volumétrico do tipo *imperial college*.

Foram realizados ensaios Consolidado Isotropicamente Drenado (CID) seguindo as recomendações da norma ASTM D7181 (ASTM, 2020). Cada amostra foi saturada através de um processo constituído das seguintes etapas:

1. Percolação de  $\text{CO}_2$ ;
2. Percolação de água destilada;
3. Incrementos constantes na contra pressão (mantendo  $p' = 15 \text{ kPa}$ ) até a obtenção de parâmetro B superior a 0.95.

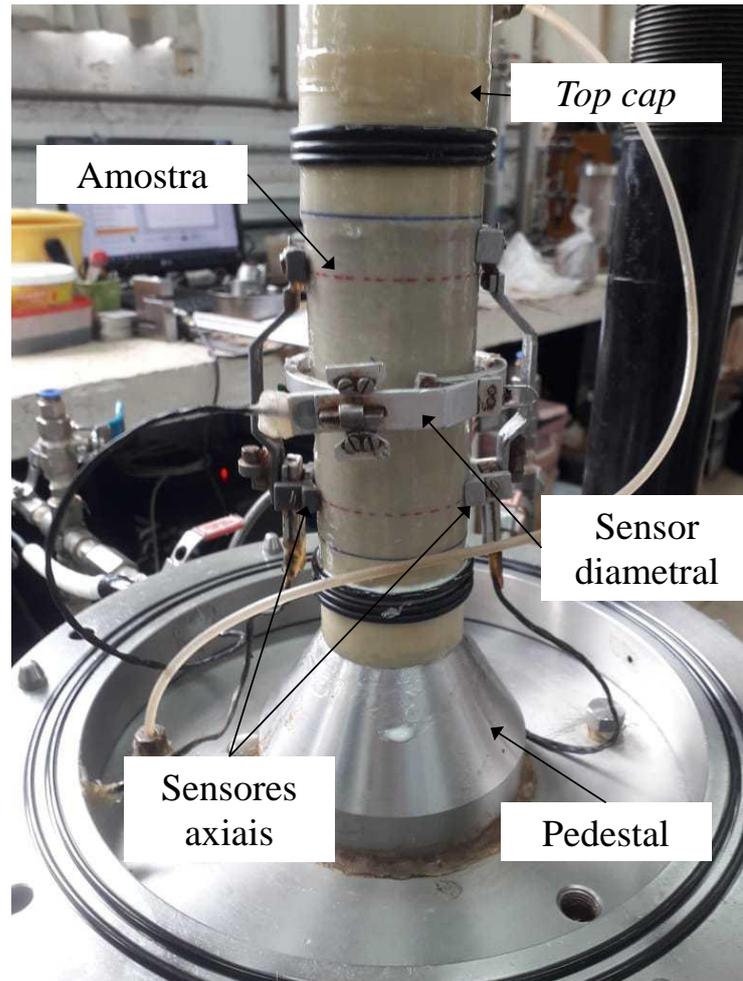


Figura 3.8 – Esquema de instrumentação interna utilizado na realização dos ensaios triaxiais.

A fase seguinte, de consolidação, foi conduzida de forma a produzir um aumento da tensão confinante até a tensão desejada para o ensaio, esse estágio foi encerrado somente após cessarem as deformações volumétricas e o excesso de poropressão gerado ter sido totalmente dissipado. No caso dos ensaios Sobreconsolidado (SC), além da elevação da tensão confinante até a tensão máxima estipulada, houve um estágio de descarregamento da amostra até a tensão efetiva determinada para que fosse realizado o cisalhamento. O cisalhamento foi realizado a uma taxa constante de  $2 \text{ mm/h}$ , suficiente para garantia de drenagem da amostra (ensaio CID). A deformação volumétrica foi controlada externamente, via dispositivo do tipo pistão (triaxial de pressões elevadas) ou via medidor volumétrico do tipo *imperial college* (triaxial Bishop-Wesley), e internamente pela utilização de sensores de efeito Hall (CLAYTON et al., 1986). A carga vertical foi medida digitalmente utilizando uma célula de carga eletrônica e as tensões confinante e de contrapressão pelo uso de transdutores de pressão.

### 3.3.3 Correções de área

A determinação da tensão principal ( $\sigma'_1$ ) atuante na amostra durante o ensaio triaxial se dá pela soma da tensão confinante ( $\sigma'_h = \sigma'_3$ ) com a tensão vertical ( $\sigma'_v$ ), obtida através da medida da célula de carga. A Equação 3.1 relaciona a medida de força obtida pela célula de carga com a tensão vertical.

$$\sigma'_v = \frac{F_d}{A_{cp}} \quad (3.1)$$

onde  $F_d$  é a força desviadora medida pela célula de carga e  $A_{cp}$  é a área da amostra.

A área da amostra, porém, varia durante o ensaio triaxial, sendo necessária corrigi-la conforme a carga é aplicada. O método de correção da área varia de acordo com o modo de deformação desenvolvido. Neste trabalho foram consideradas as correções de área propostas por La Rochelle et al. (1988). A Figura 3.9 ilustra os diferentes modos de deformação observados e os procedimentos adotados para correção de área em cada um dos casos.

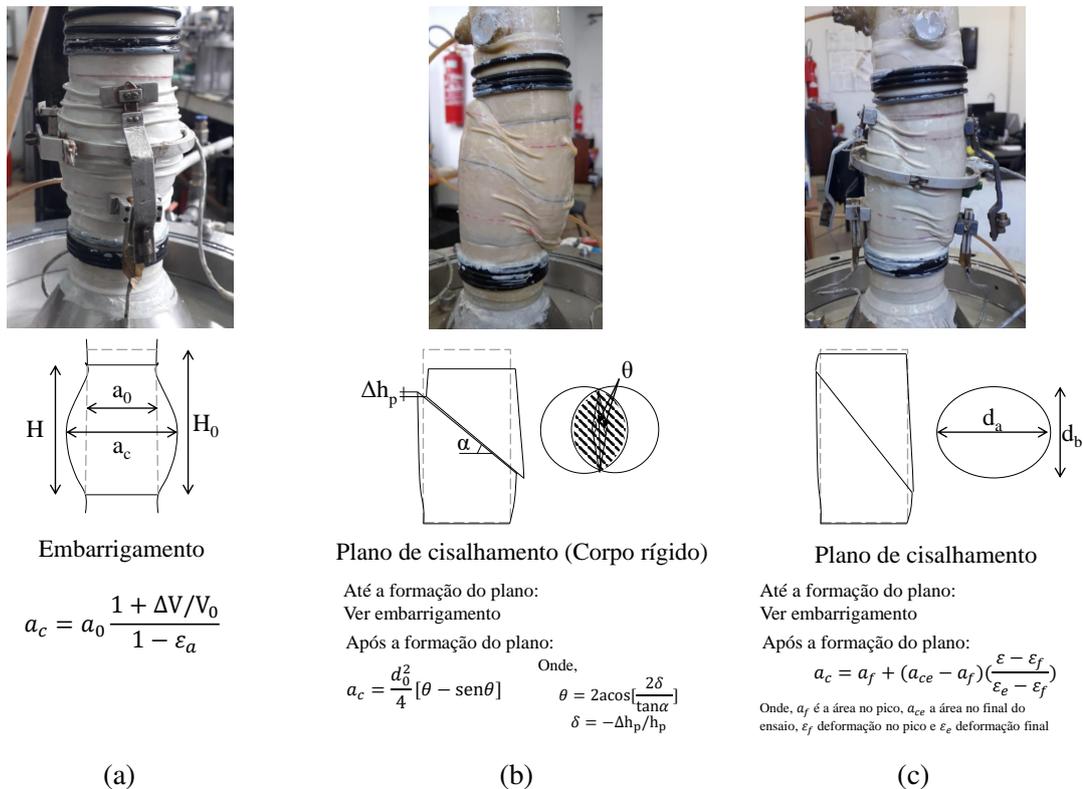


Figura 3.9 – Métodos de correção de área empregados na análise de ensaios triaxiais de acordo com o modo de deformação observado (a) embarreamento, (b) plano de cisalhamento considerando dois corpos rígidos deslizando um sobre o outro e (c) plano de cisalhamento.

### 3.3.4 Quebra de grãos

A ocorrência de quebra de partículas foi investigada para os ensaios que experimentaram as maiores tensões de confinamento aplicadas. Para tal, foi realizada a análise granulométrica das amostras posteriormente à realização dos ensaios triaxiais, bem como microscopia eletrônica dos materiais originais e após testados. Após a realização da análise granulométrica para as amostras que experimentaram a tensão de 4000 kPa em algum momento (ensaios **0.60\_4000 kPa\_C**, **0.60\_2000 kPa\_SC (2)** e **0.60\_1000 kPa\_SC (4)**), o material resultante foi lavado e separado nas correspondentes frações granulométricas a fim de avaliar mudanças morfológicas nas partículas.

## 3.4 DETERMINAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE PLASTIFICAÇÃO

A partir dos dados obtidos pretende-se estimar a superfície de plastificação do rejeito de minério de ferro, através da avaliação de mudanças na rigidez do material (POOROOSHASB, 1971; TATSUOKA et al., 1974; DE BONO et al., 2018). Para tal assume-se algumas hipóteses, tais como a isotropia do material e o enrijecimento isotrópico. A partir disso, tendo sido realizados os ensaios na condição SC, pode-se assumir que ao respeitar o enrijecimento isotrópico os ensaios SC que experimentaram uma mesma tensão média efetiva máxima na compressão isotrópica ( $p'_{max}$ ) estarão sob uma mesma superfície de plastificação (Fig. 3.10).

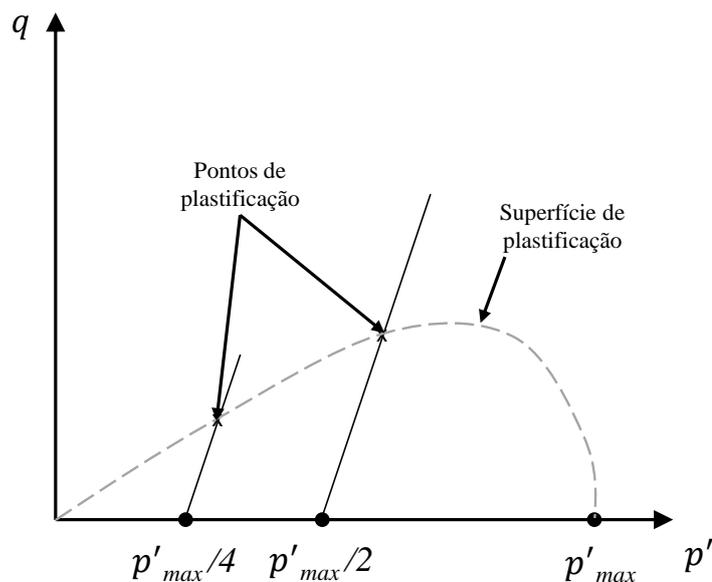


Figura 3.10 – Hipótese de enrijecimento isotrópico e esboço de uma superfície de plastificação para materiais que experimentaram uma mesma tensão efetiva média máxima na compressão isotrópica.

### 3.5 DETERMINAÇÃO DA DIREÇÃO DE FLUXO PLÁSTICO

Para definir a magnitude das deformações plásticas, é necessária a definição de um modelo para as deformações elásticas. O modelo adotado é o de elasticidade incremental, assumindo o desacoplamento de deformações elásticas e plásticas. Em geomateriais, usualmente é considerada a variação do módulo volumétrico ( $B$ ) com a tensão efetiva média, sendo o módulo cisalhante mantido constante. Além disso, assume-se que  $B$  em um dado instante depende do índice vazios atual (MUIR WOOD, 1990). Dessa forma, o parâmetro de elasticidade relacionado as deformações volumétricas é obtido pelo trecho de descarregamento dos ensaios SC. O módulo cisalhante ( $G$ ), por sua vez, é obtido a pequeníssimas deformações na etapa de cisalhamento dos ensaios triaxiais, possibilitado pelo uso de instrumentação interna. As Equações 3.2 e 3.3 resumem os parâmetros elásticos empregados.

$$\delta \varepsilon_v^e = \frac{\kappa \dot{p}'}{v p'} \quad (3.2)$$

$$\delta \varepsilon_s^e = \frac{q}{3G} \quad (3.3)$$

A direção das deformações plásticas foi determinada a partir da consideração do modelo elástico estabelecido pelas Eq. 3.2 e 3.3. Sendo definida a magnitude das deformações elásticas e tendo as deformações totais, as respectivas deformações plásticas foram calculadas considerando:

$$d\varepsilon^P = d\varepsilon - d\varepsilon^e \quad (3.4)$$

Foram então determinadas as deformações plásticas correspondentes aos invariantes de tensão adotados, sendo essas a deformação volumétrica e a deformação distorcional. Por definição a superfície de potencial plástico  $g$  define a direção das deformações plásticas. Dessa forma, a Eq. 3.5 define o vetor normal à essa superfície.

$$\vec{\nabla}g(p', q) = \left( \lambda \frac{\partial g(p', q)}{\partial p'}, \lambda \frac{\partial g(p', q)}{\partial q} \right) \quad (3.5)$$

onde,

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \lambda \frac{\partial g(p', q)}{\partial p'} \quad (3.6)$$

$$\dot{\varepsilon}_s^p = \lambda \frac{\partial g(p', q)}{\partial q} \quad (3.7)$$

O vetor unitário de deformações plásticas, por sua vez, é dado pela Eq. 3.8.

$$\vec{\varepsilon}^P = \left( \frac{\dot{\varepsilon}_v^P}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_v^{P2} + \dot{\varepsilon}_s^{P2}}}, \frac{\dot{\varepsilon}_s^P}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_v^{P2} + \dot{\varepsilon}_s^{P2}}} \right) \quad (3.8)$$

### 3.6 DETERMINAÇÃO DAS SUPERFÍCIES LIMITES DE ESTADO

Uma hipótese comum é a de que a superfície limite de estado, bem como a superfície de plastificação, varia em tamanho com as tensões efetivas experimentadas, mas mantém o mesmo formato. Sendo assim, pode-se adotar uma forma de normalização a fim de avaliar a forma das superfícies sem que a pressão efetiva seja uma variável (COOP, 1990). Algumas formas de normalização foram propostas ao longo do tempo, sejam elas dependentes da tensão efetiva média equivalente à LIC, relativas à tensão de sobreconsolidação atual, em relação à pressão equivalente no estado crítico ou ainda em relação a outros fatores (TODISCO et al., 2016; CHANDLER, 1985). A Figura 3.11 apresenta algumas das formas de normalização que podem ser adotadas.

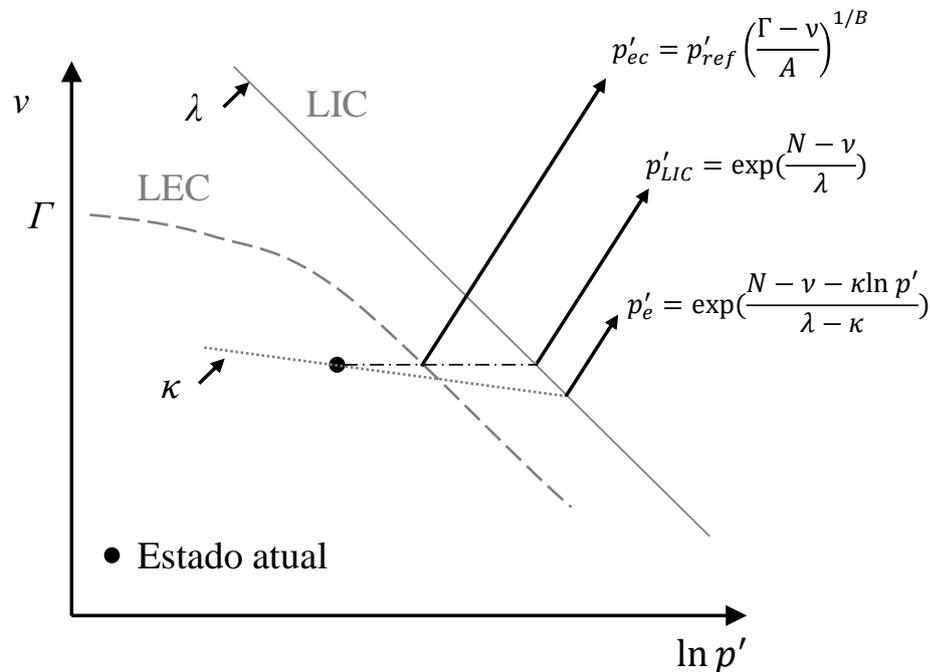


Figura 3.11 – Definições das pressões de normalização para determinação das superfícies limites de estado. Adaptado de Todisco et al. (2016).

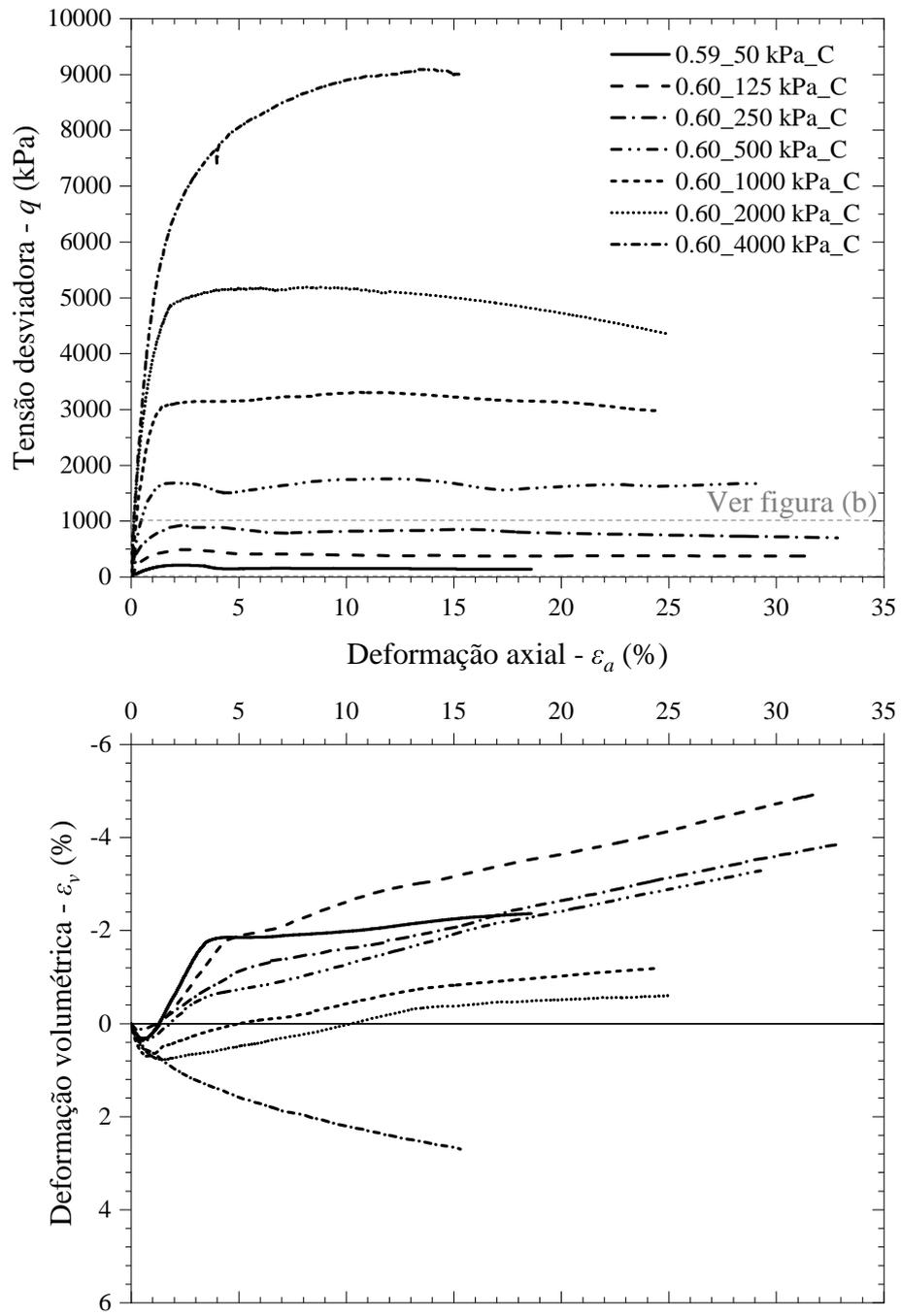
A fim de avaliar a forma da superfície de plastificação, irrespectivamente ao seu tamanho, determinado pela pressão efetiva experimentada em dado instante, adotou-se a utilização das normalizações para análise dos resultados experimentais obtidos. Portanto, adotou-se uma normalização referente à LEC e outra referente à LIC. A normalização em função da pressão sobre a LIC escolhida foi a que leva em conta os efeitos da parcela recuperável das deformações no descarregamento, assim como a adotada por Coop (1990) e de Bono et al. (2017).

## 4 RESULTADOS

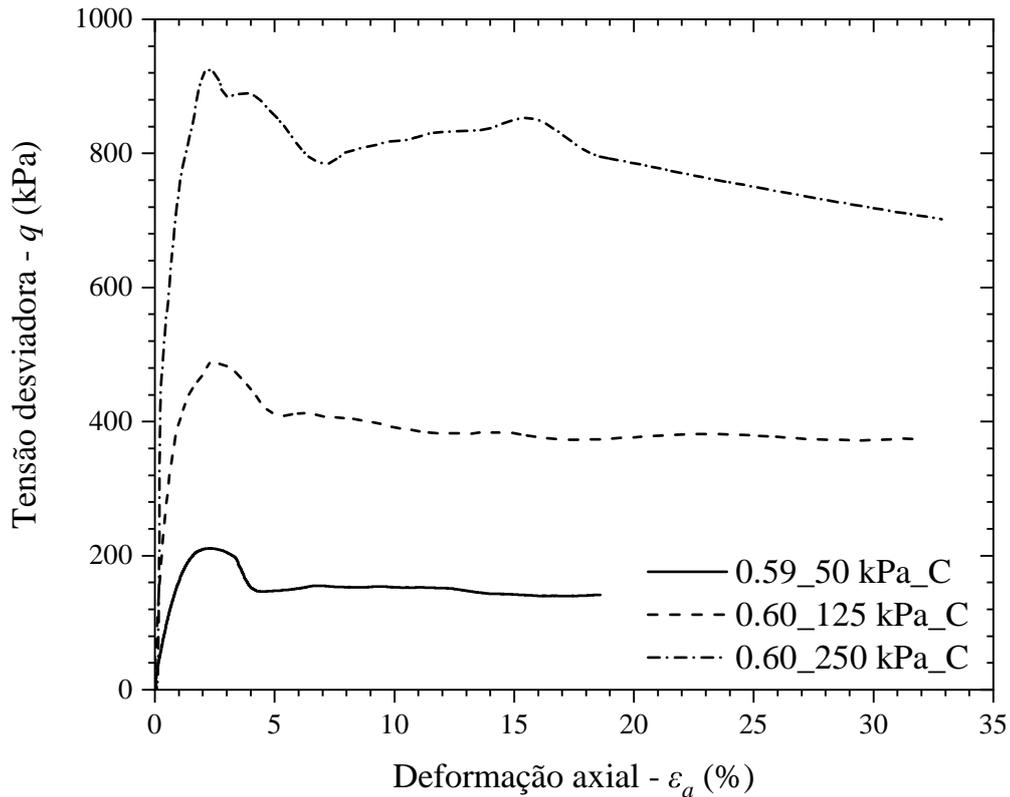
Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados experimentais obtidos. Inicialmente, são apresentados os resultados de ensaios triaxiais de maneira convencional, sob a luz da Mecânica dos Solos dos Estados Críticos, de forma a caracterizar o comportamento mecânico do material estudado. A seguir, o comportamento constitutivo do material estudado é analisado, sendo investigados aspectos relativos à superfície de plastificação, lei de dilatância e direção das deformações plásticas.

### 4.1 COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO-RESISTÊNCIA

O comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica é um dos conceitos principais da mecânica dos solos, visto que caracteriza a resposta mecânica do material e oferece as bases necessárias para a previsão dos comportamentos. É sabido que efeitos como a morfologia, a mineralogia e as condições do material no início do carregamento afetam diretamente a resposta observada (MITCHELL et al., 2005; LAMBE et al., 1979). Como visto anteriormente, devido ao processo de obtenção dos rejeitos de mineração, esses efeitos são ainda mais pronunciados, principalmente a influência da presença de finos não-plásticos, a forma das partículas e como elas se organizam na massa de solo de forma a transmitir as solicitações externas através dos seus contatos. Na Figura 3.5(e, f), é possível identificar a presença de finos e ainda a forma tanto desses quanto das partículas maiores. J. Yang et al. (2012) observaram que a forma dos finos presentes afeta diretamente a resistência e o comportamento tensão-deformação do material. Os autores sugerem que finos angulares, em contrapartida a finos arredondados, requerem maior esforço para se movimentarem, o que induz um aumento da resistência. A Figura 4.1 apresenta o comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica obtido para as amostras ditas compactadas. É importante ressaltar que todas as amostras foram preparadas através de compactação estática. Porém, utiliza-se a denominação de amostras compactas a fim de distingui-las das amostras sobreconsolidadas e ressaltar que as amostras não atingiram a LIC. Apesar de terem sido moldadas com o mesmo índice de vazios inicial ( $v_0 \approx 0.6$ ), as amostras compactas estão sob a máxima tensão de compressão experimentada no início do cisalhamento, enquanto que as amostras SC foram levadas a tensões maiores durante a etapa de compressão isotrópica e descarregadas até a tensão determinada para realização do cisalhamento sob trajetória de compressão triaxial convencional.



(a)



(b)

Figura 4.1 – Comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica para (a) amostras densas e (b) amostras densas sob tensão confinante de até 250 kPa.

Na Fig. 4.1b, é possível verificar o pico pronunciado das amostras, seguido de um comportamento de amolecimento com o desenvolvimento das deformações (*strain-softening*). Esse comportamento é esperado e confirma a expectativa de moldagem de amostras do lado seco da LEC ( $\psi_i < 0$ ), com o intuito de observar comportamento dilatante durante o cisalhamento (Fig. 4.1a). Verifica-se ainda que o pico se torna menos pronunciado com o aumento da tensão confinante, de forma que a amostra ensaiada sob tensão confinante de 4000 kPa apresenta comportamento de enrijecimento com as deformações (*strain-hardening*) e compressivo durante todo o ensaio. Isso ocorre devido à maior restrição ao movimento das partículas existente sob tensões confinantes maiores e a uma maior deformação nos contatos das partículas.

Outro aspecto a ser observado é a irregularidade das curvas tensão-deformação após o pico, em especial para as amostras cisalhadas sob tensão confinante de 250, 500 e 1000 kPa. Esse comportamento foi também observado por Carraro et al. (2009) ao estudar os efeitos da inclusão de finos em uma areia uniforme e foi característico de um *fabric* não-flutuante. Nesse caso, as partículas finas preenchem os vazios deixados pelo arranjo das partículas maiores, porém o comportamento geral é dominado pelas cadeias de esforços formadas pelos contatos dos grãos maiores.

Além disso, o comportamento de deformação volumétrica observado é característico de amostras densas, em que há uma pequena tendência contrativa no início do ensaio seguido de aumento de volume. Observa-se ainda a ocorrência de localização de deformações, relacionada à mudança abrupta na curva de deformação volumétrica por deformação axial. A localização de deformações dificulta a precisão da determinação dos estados finais do ensaio e, conseqüentemente, do lócus de estados críticos para essas amostras. Sendo assim, foi prevista no programa experimental a realização de ensaios em amostras fofas para melhor delimitar a região de estados críticos com amostras tendendo para essa a partir de estados iniciais acima e abaixo da LEC. A Figura 4.2 apresenta os resultados das amostras fofas.

Novamente, o comportamento observado confirma a intenção de moldagem ( $\psi_i > 0$ ). As amostras apresentaram comportamento de enrijecimento com as deformações, sem pico pronunciado e com tendência contrativa durante todo o ensaio. É interessante ressaltar que as amostras ensaiadas sob tensão confinante de 250, 500 e 1000 *kPa* apresentaram curvas de deformação volumétrica semelhantes entre si. Isso se dá em razão dessas amostras atingirem valores de  $\psi_i$  semelhantes após a etapa de compressão isotrópica (BEEN et al., 1985), conforme pode ser verificado na Tab. 4.1 e será apresentado na seqüência do trabalho com a definição da LEC.

Os resultados de ensaios triaxiais foram analisados ainda através da normalização da tensão desviadora pela tensão efetiva de confinamento aplicada em cada caso. A Figura 4.3 apresenta as curvas tensão-deformação normalizadas das amostras densas e fofas.

Nesse caso, é possível verificar a influência da tensão de confinamento na redução do pico de resistência para as amostras densas, bem como a sua ocorrência sob deformações maiores. Esse deslocamento dos picos está relacionado à maior deformação dos grãos nos contatos, devido à maior tensão atuante, que reduz os efeitos de intertravamento entre as partículas. Verifica-se ainda que há uma tendência de deslocamento das curvas tensão-deformação das amostras fofas com a tensão de confinamento aplicada. As amostras com maior de tensão de confinamento apresentam uma inclinação mais suave, com mobilização gradual da resistência, enquanto que para tensões confinantes menores a inclinação é mais acentuada. Yamamuro et al. (1996) relacionaram as mudanças no comportamento tensão-deformação normalizada das amostras à ocorrência de quebra de partículas. Segundo os autores, a porção inicial menos inclinada indicaria a quebra de grãos e a mobilização de resistência através de mecanismos além do rearranjo dos grãos e atrito entre as partículas. A possibilidade de quebra de partículas durante o cisalhamento sob tensões confinantes maiores foi investigada nesse trabalho e é discutida mais adiante.

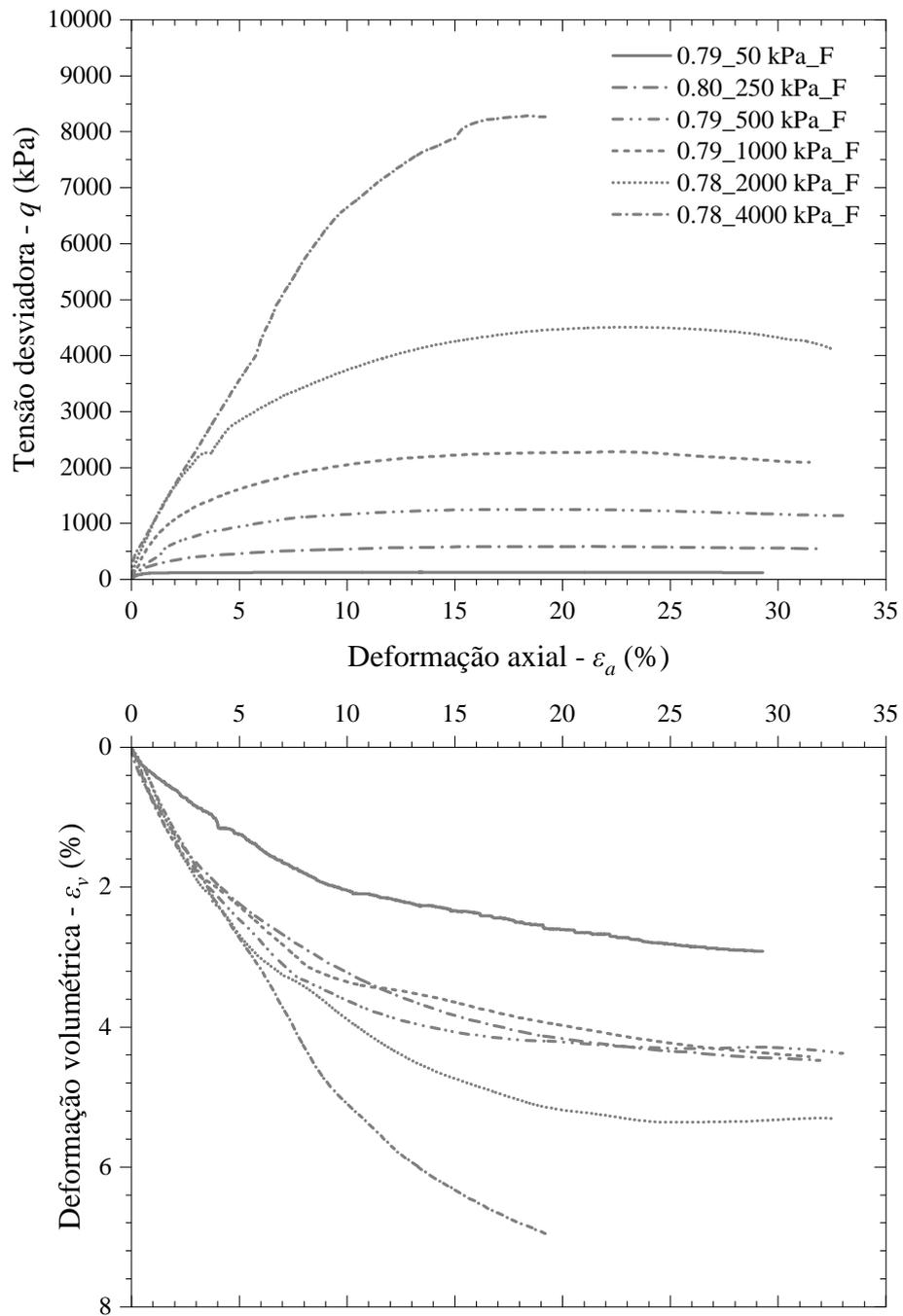


Figura 4.2 – Comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostras fofas.

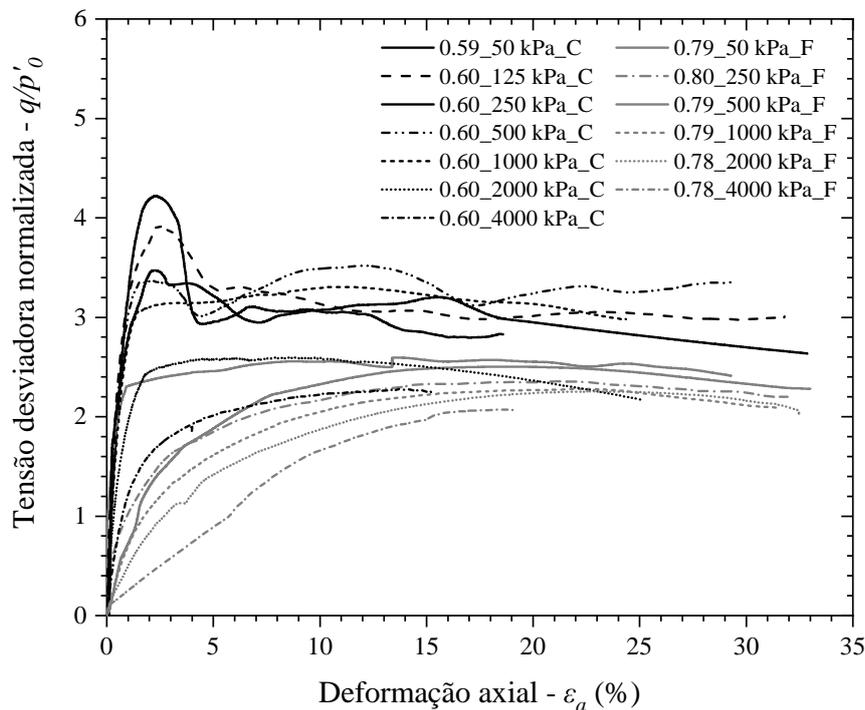


Figura 4.3 – Comportamento tensão-deformação normalizado de amostras fofas e densas.

Tendo sido verificado o comportamento das amostras fofas e densas, passa-se ao estudo da influência da história de tensões na resposta mecânica do rejeito de minério de ferro. Para tal, os resultados de ensaios sobreconsolidados a três distintos níveis de tensão são apresentados nas Figs. 4.4 a 4.7 e Tab. 4.1.

No caso dos ensaios cisalhados sob tensão confinante de 50 *kPa* (Fig. 4.4) é possível verificar que o sobreadensamento da amostra não apresentou efeitos significativos na resposta tensão-deformação, como esperado para materiais granulares (MITCHELL et al., 2005). Isso se dá pela mobilização de resistência nesses materiais ser fruto apenas do atrito entre os grãos, sem interferência de fatores químicos ou de agentes cimentantes. Tanto a resistência máxima atingida quanto a rigidez inicial do material são muito semelhantes para amostras densas ou sobreconsolidadas e inclusive o índice de vazios no início do cisalhamento é equivalente, indicando o pequeno efeito oriundo do carregamento e descarregamento. A principal característica que distingue os ensaios sob a tensão confinante de 50 *kPa* é a tendência inicial de compressão que é suprimida no caso do ensaio sobreconsolidado em razão desse já ter experimentado essas deformações durante a etapa de compressão isotrópica.

Tabela 4.1 – Resumo dos ensaios triaxiais realizados.

| Ensaio               | Moldagem |                               | Após a compressão isotrópica |             |          | Após o cisalhamento |             |            |        | Pico      |             |            |              |           |
|----------------------|----------|-------------------------------|------------------------------|-------------|----------|---------------------|-------------|------------|--------|-----------|-------------|------------|--------------|-----------|
|                      | $V_0$    | $\gamma$<br>kN/m <sup>3</sup> | $\nu$                        | $p'$<br>kPa | $\psi_i$ | $\nu$               | $p'$<br>kPa | $q$<br>kPa | $\eta$ | $\phi'_o$ | $p'$<br>kPa | $q$<br>kPa | $\eta_{max}$ | $\phi'_o$ |
| 0.79_50 kPa_F        | 1.79     | 16.3                          | 1.79                         | 50          | 0.057    | 1.74                | 90.2        | 120.6      | 1.34   | 33.1      | 90.2        | 120.6      | 1.34         | 33.1      |
| 0.80_250 kPa_F       | 1.80     | 16.2                          | 1.78                         | 250         | 0.064    | 1.70                | 433.8       | 551.3      | 1.27   | 31.6      | 433.8       | 551.3      | 1.27         | 31.6      |
| 0.79_500 kPa_F       | 1.79     | 16.3                          | 1.76                         | 500         | 0.057    | 1.68                | 880.2       | 1140.5     | 1.30   | 32.2      | 880.2       | 1140.5     | 1.30         | 32.2      |
| 0.79_1000 kPa_F      | 1.79     | 16.3                          | 1.73                         | 1000        | 0.051    | 1.65                | 1694.9      | 2084.6     | 1.23   | 30.7      | 1694.9      | 2084.6     | 1.23         | 30.7      |
| 0.78_2000 kPa_F      | 1.78     | 16.4                          | 1.71                         | 2000        | 0.068    | 1.62                | 3352.8      | 4058.4     | 1.21   | 30.2      | 3352.8      | 4058.4     | 1.21         | 30.2      |
| 0.78_4000 kPa_F      | 1.78     | 16.4                          | 1.67                         | 4000        | 0.087    | 1.55                | 6756.0      | 8268.1     | 1.22   | 30.5      | 6756.0      | 8268.1     | 1.22         | 30.5      |
| 0.59_50 kPa_C        | 1.59     | 18.4                          | 1.59                         | 50          | -0.150   | 1.62                | 97.1        | 141.4      | 1.46   | 35.9      | 120.4       | 211.1      | 1.75         | 42.7      |
| 0.60_125 kPa_C       | 1.60     | 18.2                          | 1.60                         | 125         | -0.132   | 1.68                | 250.5       | 376.6      | 1.50   | 36.9      | 288.3       | 489.8      | 1.70         | 41.5      |
| 0.60_250 kPa_C       | 1.61     | 18.1                          | 1.60                         | 250         | -0.119   | 1.66                | 484.0       | 701.9      | 1.45   | 35.7      | 558.1       | 924.4      | 1.66         | 40.5      |
| 0.60_500 kPa_C       | 1.60     | 18.2                          | 1.57                         | 500         | -0.132   | 1.62                | 1059.0      | 1677.1     | 1.58   | 38.8      | 1086.3      | 1758.9     | 1.62         | 39.6      |
| 0.60_1000 kPa_C      | 1.60     | 18.3                          | 1.57                         | 1000        | -0.106   | 1.59                | 1994.2      | 2982.5     | 1.50   | 36.8      | 2101.7      | 3305.0     | 1.57         | 38.5      |
| 0.60_2000 kPa_C      | 1.60     | 18.2                          | 1.55                         | 2000        | -0.087   | 1.56                | 3448.8      | 4346.5     | 1.26   | 31.4      | 3728.5      | 5185.6     | 1.39         | 34.4      |
| 0.60_4000 kPa_C      | 1.60     | 18.2                          | 1.55                         | 4000        | -0.033   | 1.51                | 7002.5      | 9007.5     | 1.29   | 32.0      | 7034.1      | 9110.7     | 1.30         | 32.2      |
| 0.60_50 kPa_SC (4)   | 1.60     | 18.2                          | 1.60                         | 50          | -0.142   | 1.65                | 88.1        | 114.2      | 1.30   | 32.2      | 118.5       | 205.5      | 1.73         | 42.3      |
| 0.60_100 kPa_SC (2)  | 1.60     | 18.2                          | 1.60                         | 100         | -0.132   | 1.63                | 191.6       | 274.8      | 1.43   | 35.4      | 222.9       | 368.6      | 1.65         | 40.4      |
| 0.60_500 kPa_SC (4)  | 1.60     | 18.2                          | 1.58                         | 500         | -0.117   | 1.64                | 858.0       | 1073.9     | 1.25   | 31.2      | 1020.6      | 1565.8     | 1.53         | 37.7      |
| 0.60_1000 kPa_SC (4) | 1.60     | 18.2                          | 1.57                         | 1000        | -0.107   | 1.60                | 1513.5      | 1548.8     | 1.02   | 25.9      | 1925.2      | 2797.2     | 1.45         | 35.8      |
| 0.60_1000 kPa_SC (2) | 1.60     | 18.2                          | 1.57                         | 1000        | -0.107   | 1.62                | 1652.0      | 1955.9     | 1.18   | 29.6      | 1927.6      | 2782.7     | 1.44         | 35.6      |
| 0.60_2000 kPa_SC (2) | 1.60     | 18.2                          | 1.54                         | 2000        | -0.100   | 1.58                | 3119.6      | 3358.8     | 1.08   | 27.2      | 3659.9      | 4979.7     | 1.36         | 33.7      |

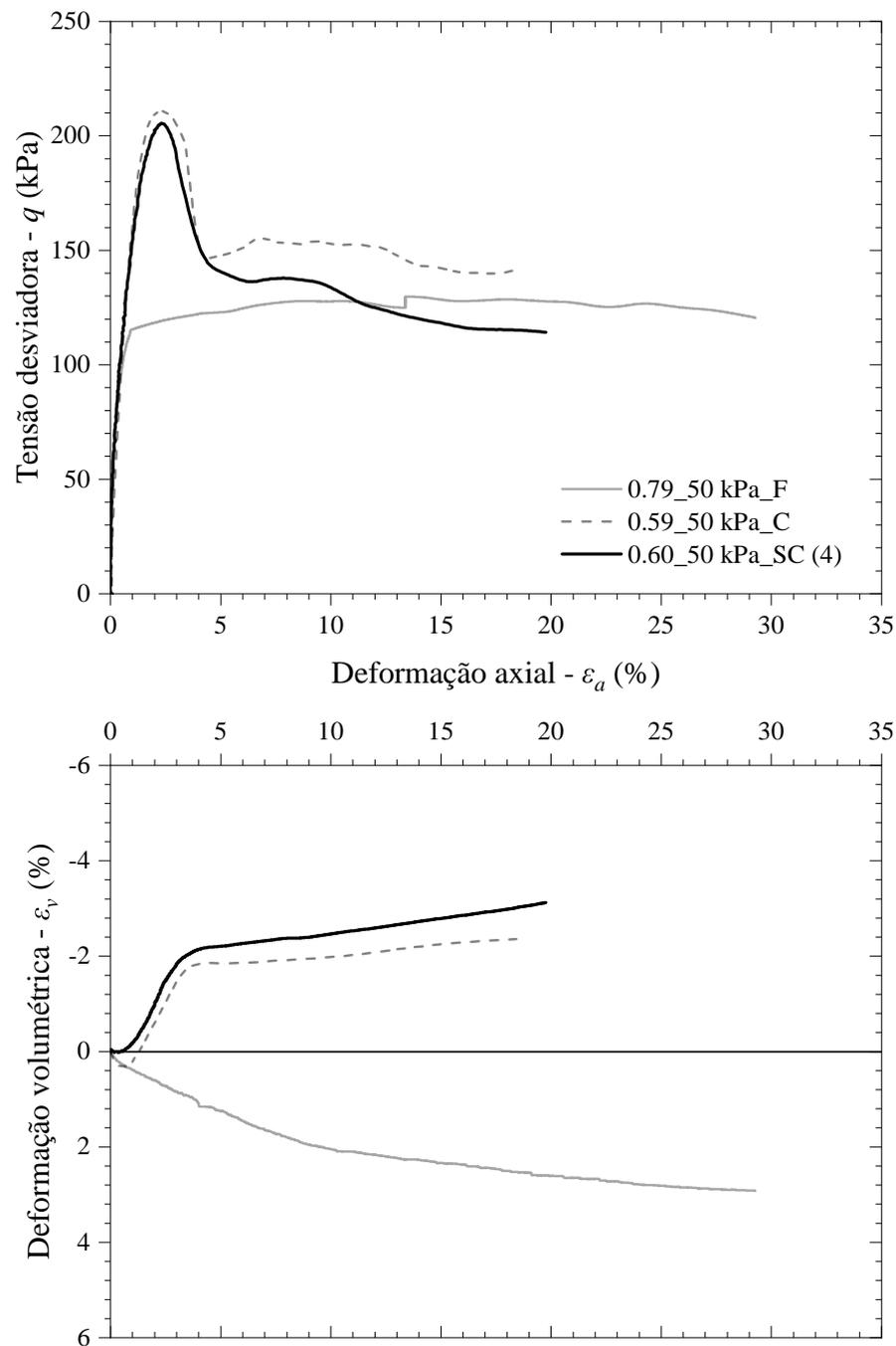


Figura 4.4 – Comparativo entre o comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostra inicialmente fofa, compactada ou sobreconsolidada sob tensão confinante de 50  $kPa$ .

Já nos ensaios sob tensão confinante maior (500  $kPa$ , 1000  $kPa$  e 2000  $kPa$ ), os efeitos da história de tensões são mais marcados. Em especial para os ensaios cisalhados sob 1000  $kPa$ , é possível verificar a influência do grau de sobreadensamento (razão entre  $p'_{max}$  e tensão efetiva média no início do cisalhamento) na resposta. A Figura 4.6 apresenta os resultados dos ensaios. Em relação ao grau de sobreadensamento, não é possível verificar influência significativa dado que

a resistência atingida por ambas as amostras foi idêntica, assim como a curva de deformação volumétrica é muito semelhante. As diferenças na resistência final das amostras, por sua vez, são de difícil comparação em função da localização bastante marcada para esses corpos de prova. Já em relação à amostra densa, ambas as amostras sobreconsolidadas apresentaram rigidez um pouco menor e menor resistência de pico.

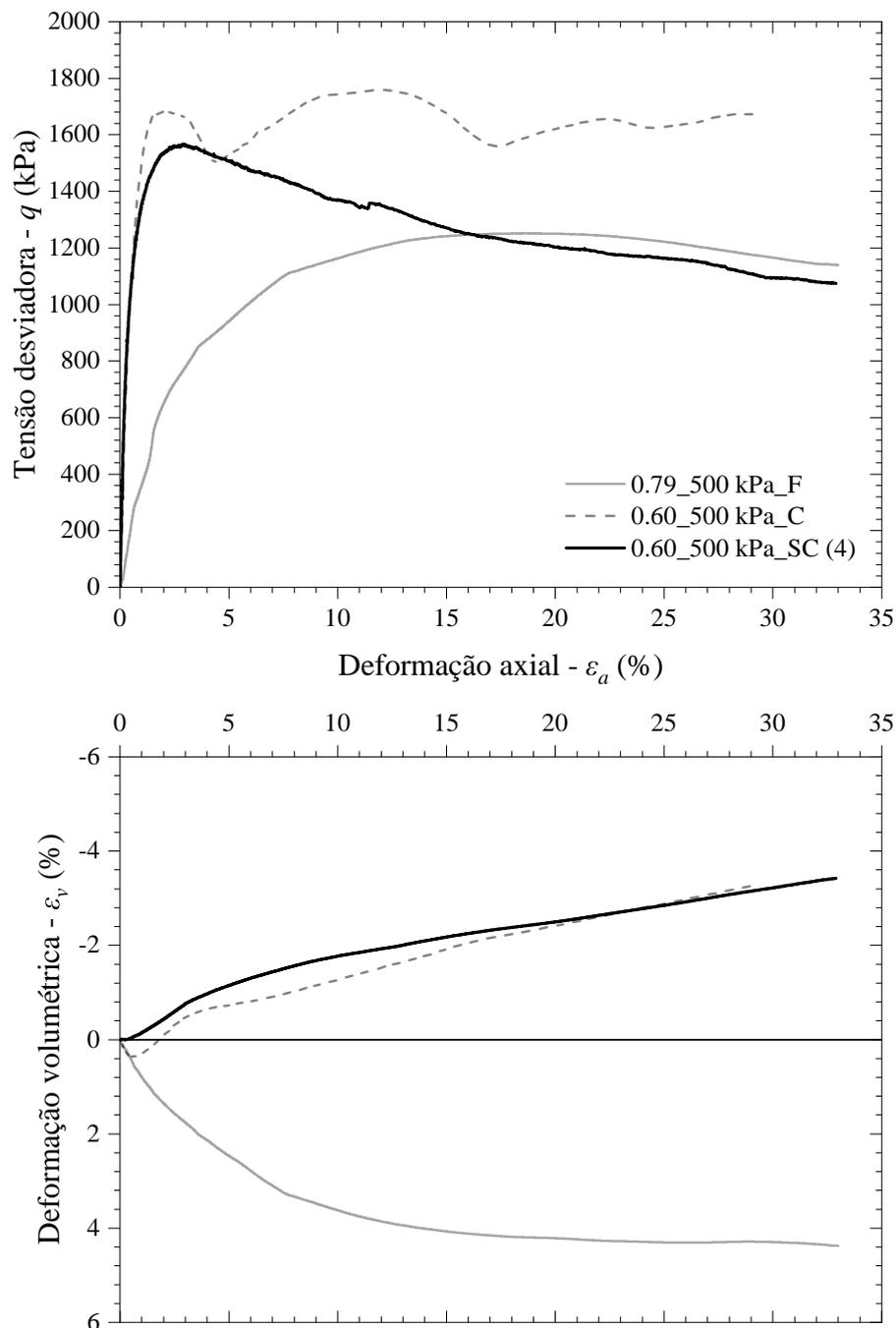


Figura 4.5 – Comparativo entre o comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostra inicialmente fofa, compactada ou sobreconsolidada sob tensão confinante de 500 kPa.

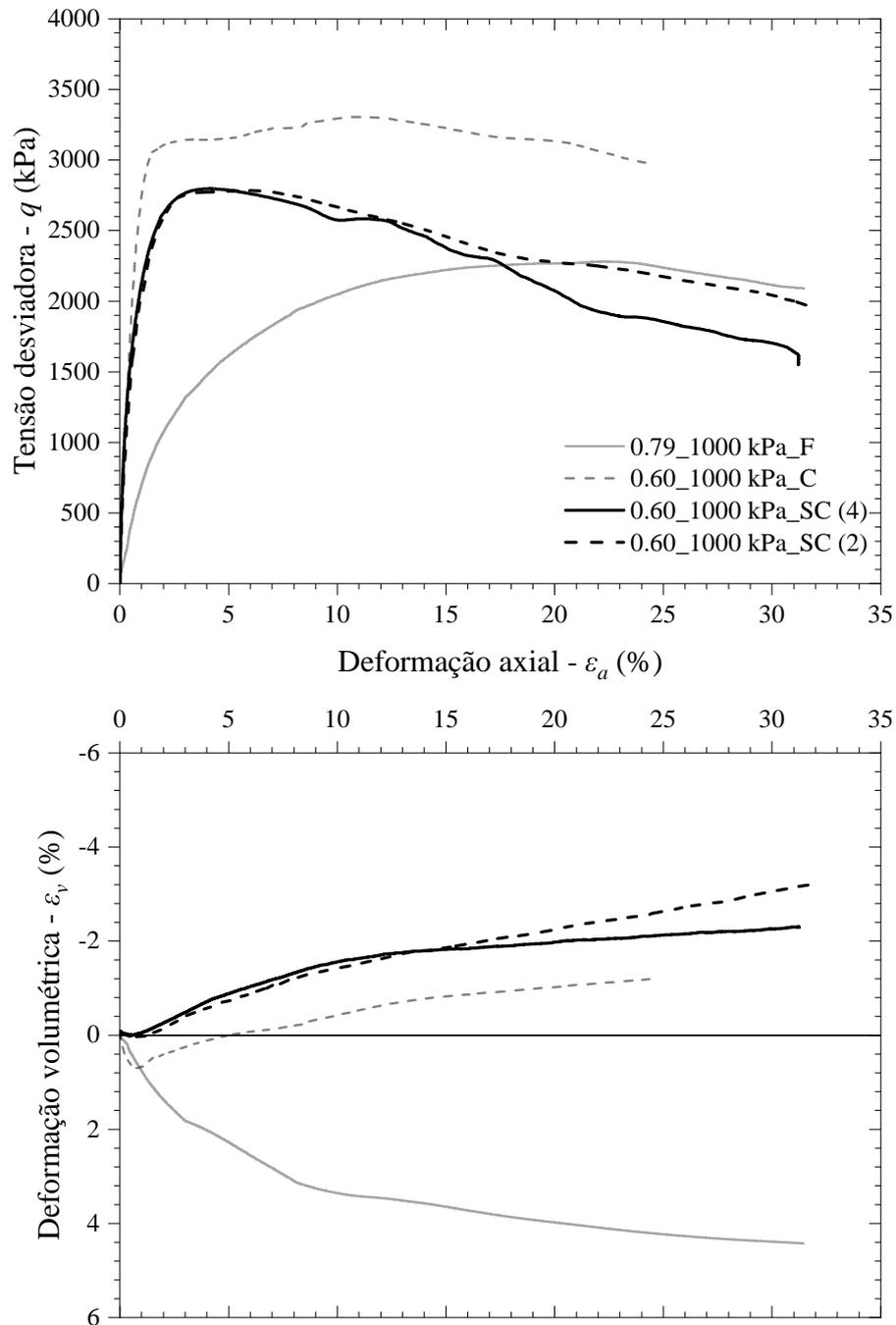


Figura 4.6 – Comparativo entre o comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostra inicialmente fofa, compactada ou sobreconsolidada sob tensão confinante de 1000 *kPa*.

As amostras sobreconsolidadas apresentarem resistência de pico inferior às amostras compactas o que pode estar associado à ocorrência de quebra de partículas durante a compressão isotrópica e no cisalhamento. Na amostra densa, a tensão média efetiva em cada ponto é a maior que a amostra experimentou, propiciando deformações dos grãos nos contatos e mobilizando a resistência a partir do grau de restrição ao movimento encontrado pelas partículas dentro da massa de solo. Conforme as partículas são mais angulares e rugosas, o grau de liberdade para rearranjo de partículas é restringido. Nos ensaios sobreconsolidados, por outro lado, o arranjo dos grãos já foi modificado a fim de se adaptar a uma sollicitação maior que a experimentada em dado instante. Aliado a isso, esses grãos foram desgastados ou ainda tiveram algumas asperidades quebradas pelas tensões superiores que experimentaram, permitindo um grau de restrição ao movimento relativo das partículas menor. Os mecanismos envolvidos na quebra de partículas e a influência desses no comportamento são discutidos adiante no trabalho.

Os ensaios cisalhados sob tensão confinante de 2000 *kPa* (Fig. 4.7) apresentam comportamento análogo àqueles cisalhados sob 1000 *kPa*. A resistência de pico é inferior à atingida para o ensaio denso, rigidez pouco inferior e comportamento volumétrico predominantemente dilatante, tendo sido suprimida a tendência contrativa inicial observada para a amostra densa.

Logo, nos ensaios cujo parâmetro de estado no início do cisalhamento é negativo, é observado tendência dilatante durante todo o ensaio e um pico seguido de queda abrupta no comportamento tensão-deformação. Para o caso dos ensaios sobreconsolidados à 2000 *kPa* e 4000 *kPa* o pico de resistência é inferior ao observado para amostras densas, sendo efeito de possíveis mudanças na morfologia dos grãos e do rearranjo dos grãos durante o carregamento e descarregamento. Esses resultados podem ser analisados também sob a ótica da determinação da envoltória de resistência do material. A partir dos pontos finais dos ensaios densos, é possível traçar uma envoltória que delimita os estados possíveis de serem atingidos no plano  $q-p'$ . Essa envoltória de resistência normalmente é adotada como uma aproximação linear de uma envoltória que, na verdade, é não linear, o que dá origem à existência de um intercepto coesivo ( $c'$ ), apesar do material não apresentar resistência à tração.

Na Figura 4.8 é apresentado um ajuste parabólico para a envoltória de resistência no plano  $q-p'$ . Apesar de não incorrer em dificuldades de cálculo devido à modernização das ferramentas existentes, a adoção de envoltórias curvas não é usual e por vezes considerada de difícil interpretação por não oferecer parâmetros constantes. Porém, o ajuste dessa envoltória de resistência pode ser transferido para os planos de Mohr-Coulomb ( $\tau \times \sigma'$ ), de forma que os parâmetros de resistência podem ser interpretados como a inclinação da reta tangente à envoltória em dado ponto e obtém-se uma formulação para  $\phi'_t$  (BAKER, 2004; COLLINS et al., 1988).

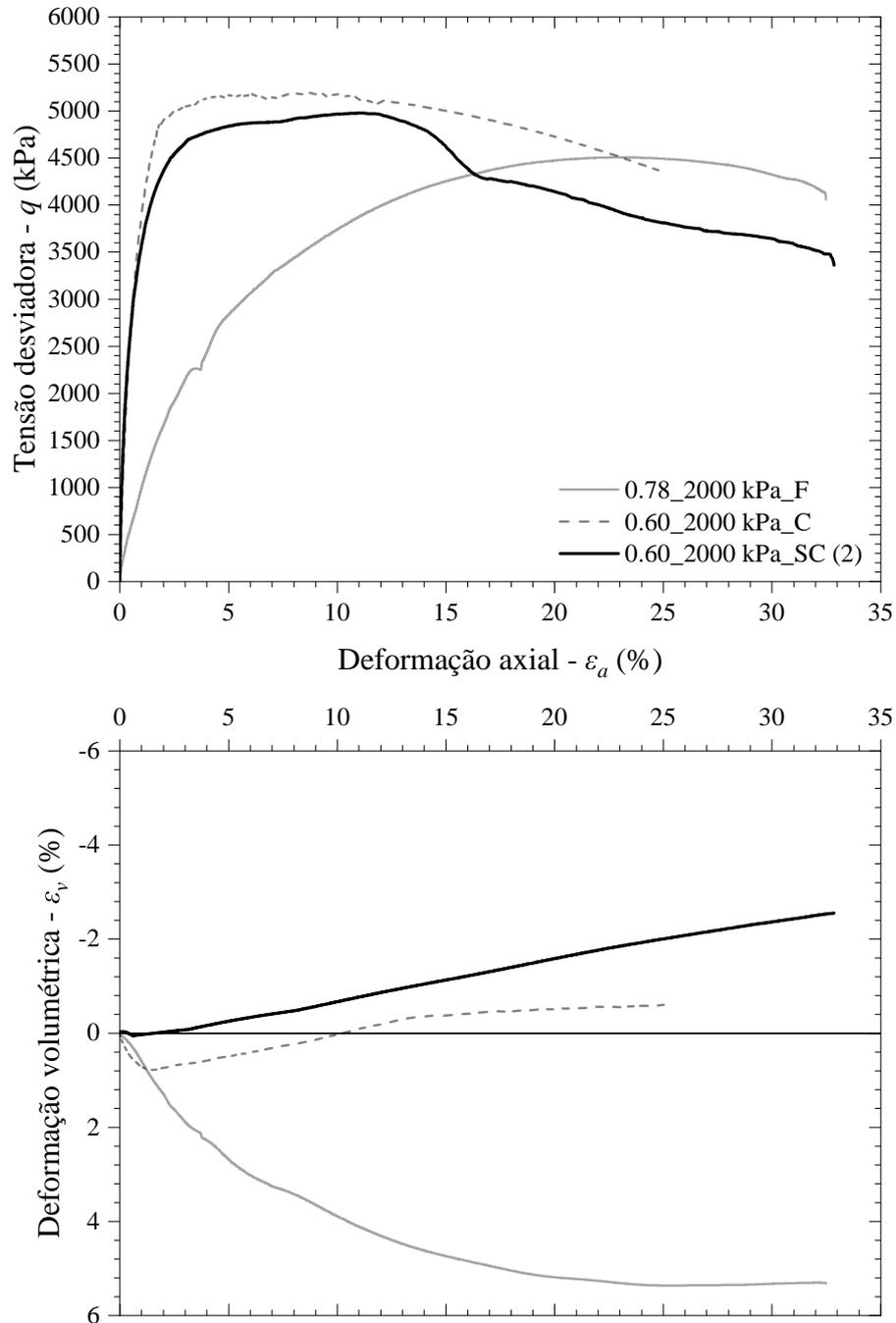


Figura 4.7 – Comparativo entre o comportamento tensão-deformação-deformação volumétrica de amostra inicialmente fofa, compactada ou sobreconsolidada sob tensão confinante de 2000 *kPa*.

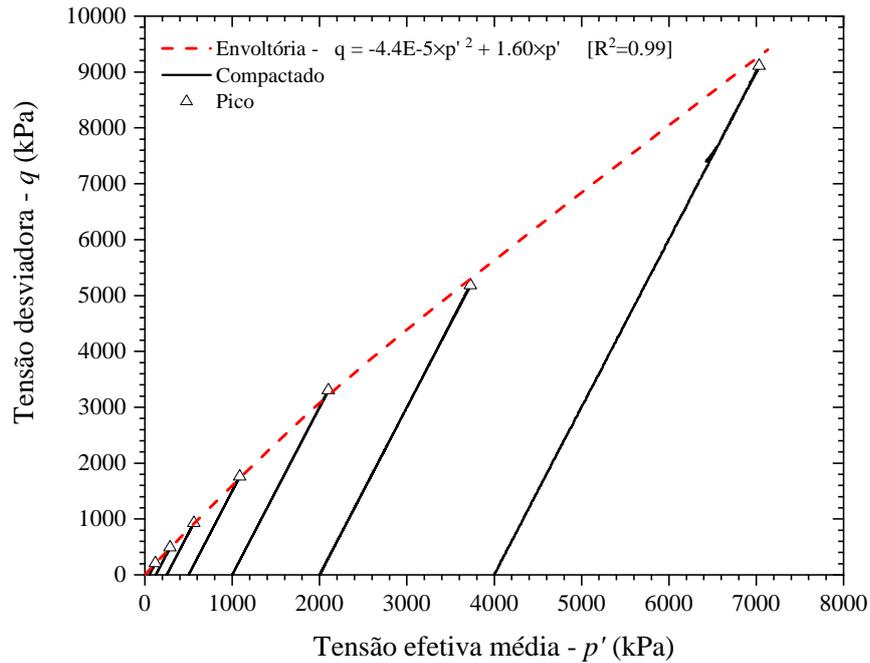


Figura 4.8 – Ajuste da envoltória de resistência de pico de ensaios densos por polinômio de 2<sup>o</sup> grau.

Conforme dito anteriormente, os ensaios sobreconsolidados apresentaram resistência de pico inferior às amostras densas. Sendo assim, a Fig. 4.9 compara duas envoltórias, uma obtida apenas considerando as amostras densas e outra considerando as amostras sobreconsolidadas.

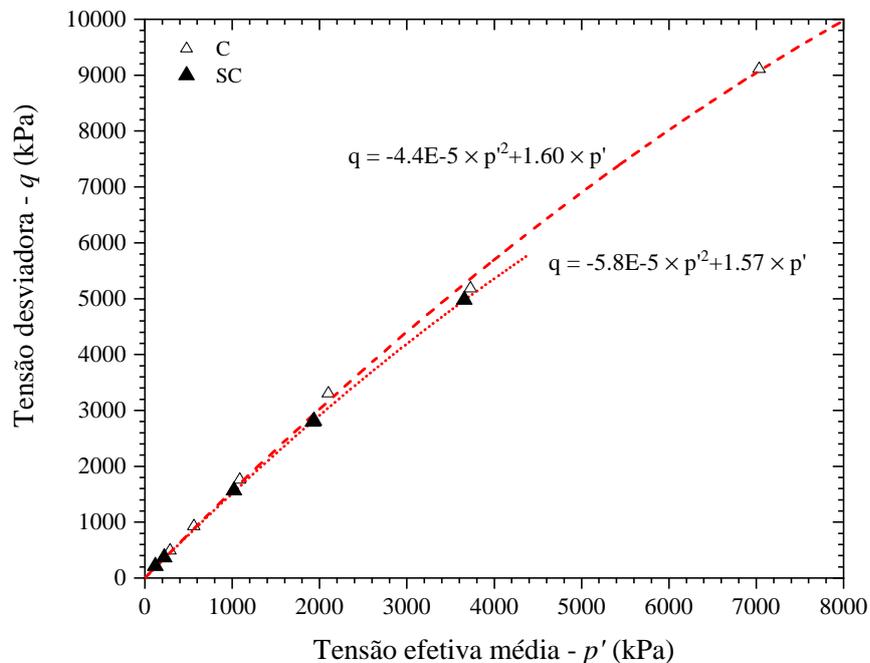


Figura 4.9 – Comparativo de envoltórias de resistência de pico de ensaios densos e sobreconsolidados.

## 4.2 ESTADO CRÍTICO

### 4.2.1 Plano $q-p'$

A projeção da Linha de Estado Crítico (LEC) no plano  $q-p'$  foi estimada com base nos pontos finais dos ensaios que foram considerados estarem mais próximos do estado crítico. Para tal foi avaliada a estabilidade na tensão desviadora e nas deformações volumétricas. Além disso, foram considerados no ajuste apenas os pontos relativos a ensaios realizados em amostras fofas, visto que a ocorrência de localização de deformações dificulta a identificação dos estados críticos para amostras densas. A Figura 4.10 apresenta a envoltória de estado crítico estimada e os pontos considerados nessa estimativa.

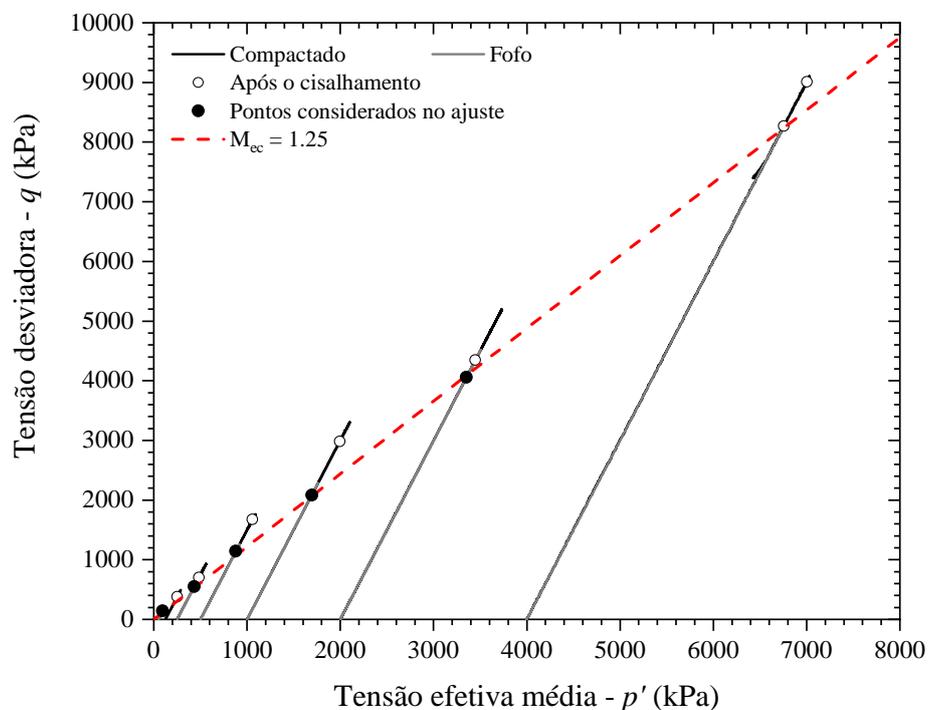


Figura 4.10 – Linha de Estado Crítico no plano  $q-p'$ .

O valor de  $M$  de 1.25 corresponde a um ângulo de atrito no estado crítico de, aproximadamente,  $31.1^\circ$  (Eq. 4.1). Esse valor é levemente inferior ao encontrado para outros rejeitos de ferro (LI, 2017; WAGNER et al., 2023) e bastante próximo ao obtido para areias quartzosas com pequenas quantidades de finos não plásticos (SALGADO et al., 2000; CARRARO et al., 2009; YILMAZ et al., 2021). Os resultados são condizentes com as características mineralógicas observadas na seção 3.2, em que o mineral predominante é o  $SiO_2$ . Os valores de ângulo de atrito no estado crítico obtidos serem semelhantes aos obtidos para areias quartzosas com pequenas quantidades de finos não plásticos indica ainda que o mecanismo de resistência principal para o *fabric*

formado para essas amostras continua sendo a cadeia de transmissão de forças nos contatos das partículas maiores.

$$M = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \quad (4.1)$$

Na Figura 4.11 as envoltórias de pico determinadas anteriormente para amostras compactas ou sobreconsolidadas são comparadas com a envoltória de estado crítico determinada. São ainda apresentados os pontos finais de cada um dos ensaios realizados.

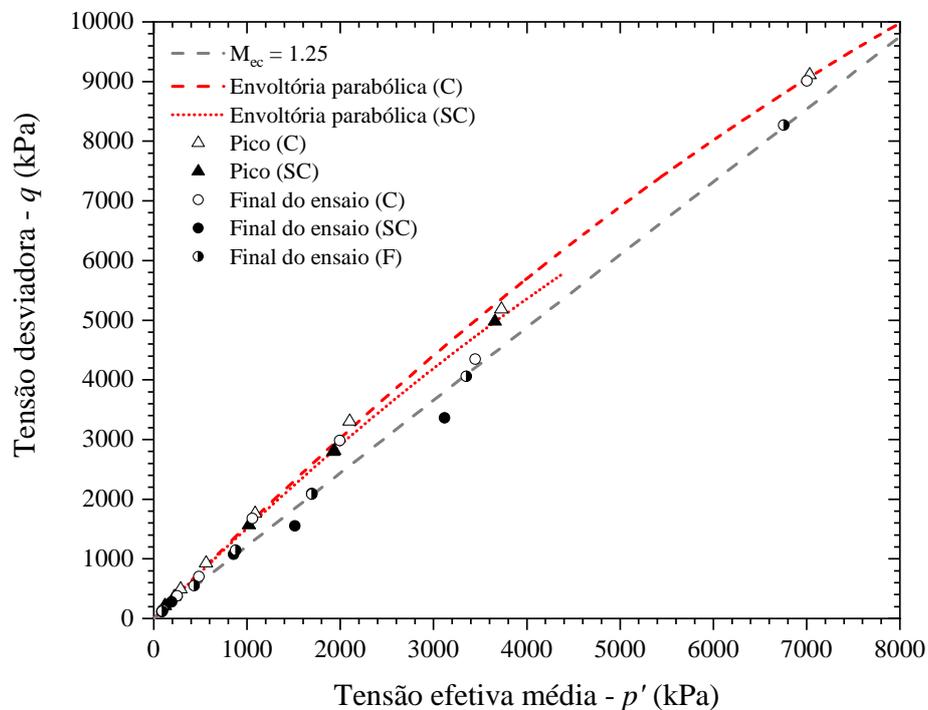


Figura 4.11 – Envoltórias de pico para amostras compactadas e sobreconsolidadas e LEC no plano  $q$ - $p'$ .

Pode-se verificar ainda a adequabilidade da envoltória de estado crítico estimada através da análise dos resultados normalizados em relação à razão de tensões ( $\eta = q/p'$ ). A Figura 4.12 apresenta o gráfico de  $\eta$  em função da deformação distorcional para as amostras em estados iniciais fofos e compactos.

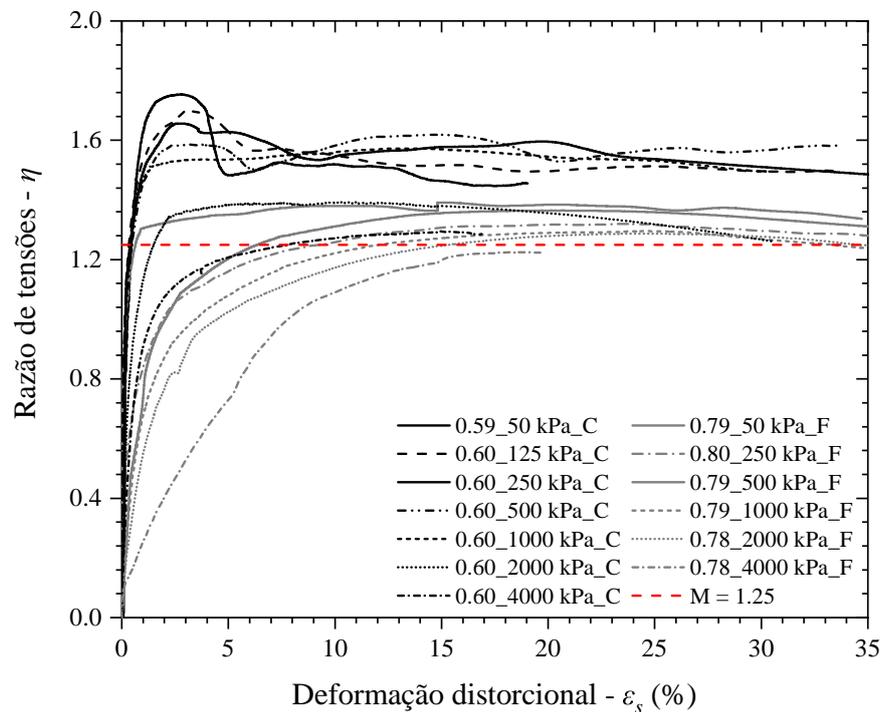


Figura 4.12 – Razão de tensões vs deformação distorcional para as amostras fofas e compactas.

É possível observar que o valor de  $M = 1.25$  estabelecido está próximo de um limite inferior para as amostras fofas, que apresentam comportamento de enrijecimento com as deformações. Além disso, observa-se na Fig. 4.12 uma tendência de redução na razão de tensões com o aumento das tensões confinantes, o que pode ser comprovado na Tab. 4.1. A projeção da LEC no plano  $q-p'$  é usualmente assumida como linear, porém a sua determinação dificilmente é verificada para faixas de tensões mais amplas, tais como a estudada neste trabalho. A mudança na razão de tensões atingida pode também estar relacionada à quebra das partículas e modificação da morfologia dessas, modificando a mobilização de resistência. Ainda assim, dado a pequena variação observada para os dados experimentais e o ajuste satisfatório de uma envoltória linear, foi adotada essa formulação.

Os resultados são analisados em comparação com as amostras sobreconsolidadas (Fig. 4.13). Assim como para o comportamento normalizado em relação à tensão confinante, é possível perceber a diferença entre os picos das amostras densas e sobreconsolidadas. Além disso, apesar de os efeitos de localização, o comportamento pós-pico dos ensaios sobreconsolidados apresentou tendência em direção à razão de tensões no estado crítico definida.

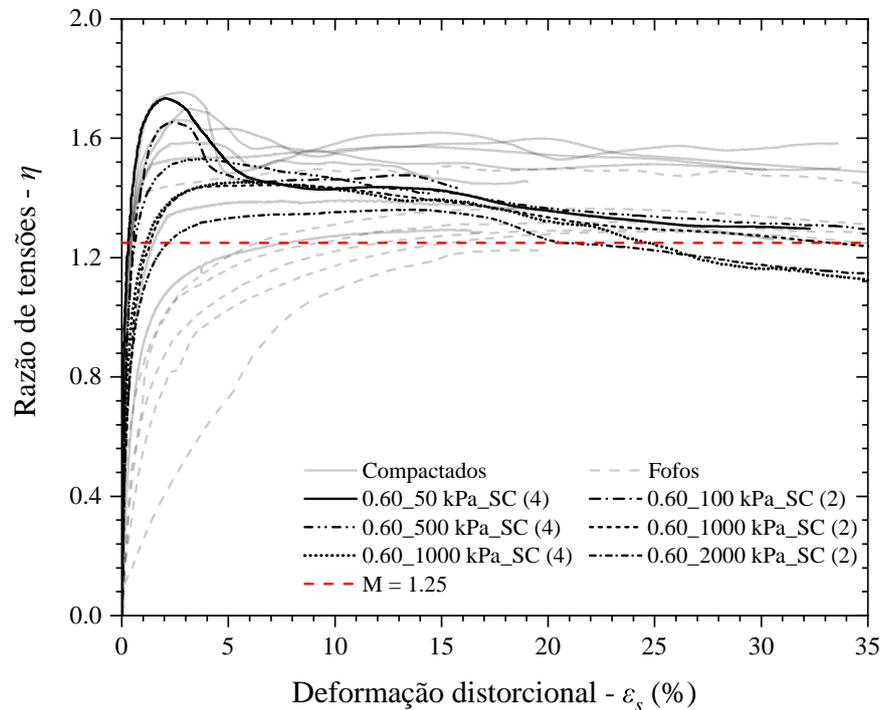


Figura 4.13 – Razão de tensões vs deformação distorcional para as amostras sobreconsolidadas em relação às amostras fofas e densas.

#### 4.2.2 Plano $v$ - $\ln p'$

A Figura 4.14 apresenta as trajetórias de estado dos ensaios triaxiais realizados no plano volume específico vs logaritmo da tensão efetiva média. É também indicada a LEC ajustada para os dados experimentais conforme a Eq. 2.7.

$$v_c = \Gamma + A \cdot \left( \frac{p'}{p'_{ref}} \right)^B \quad (2.7 \text{ rep.})$$

Foram determinados parâmetros de 1.75, 0.0012, 0.6 e 1 kPa para  $\Gamma$ ,  $A$ ,  $B$  e  $p'_{ref}$ , respectivamente. Apesar de o estado crítico ser atingido apenas sob grandes deformações (ATKINSON, 2007), a região do lócus de estados críticos aparece bem delimitada e pode ser inferida através dos resultados de ensaios triaxiais.

Historicamente, a interpretação do lócus de estados críticos é visualizada em um espaço semilogarítmico do volume específico (ou índice de vazios) em função do primeiro invariante de tensão. Isso se deu, principalmente, pela identificação da linearização da LEC nesse espaço no caso dos estudos de argilas normalmente adensadas que deu origem ao modelo Camclay (ROSCOE

et al., 1958; SCHOFIELD et al., 1968). A identificação de uma LEC curva para materiais granulares, porém, fez com que alguns autores buscassem outras formas de representação, ou normalizações, buscando a representação linear do lócus de estados críticos (COLLINS et al., 2010; BUTTERFIELD, 1979). Independentemente do espaço escolhido, em escala natural, o lócus de estados críticos pode ser identificado como uma curva que desce monotonicamente em direção a um limite assintótico. A Figura 4.15 apresenta as trajetórias de estado e a LEC estimada em escala natural.

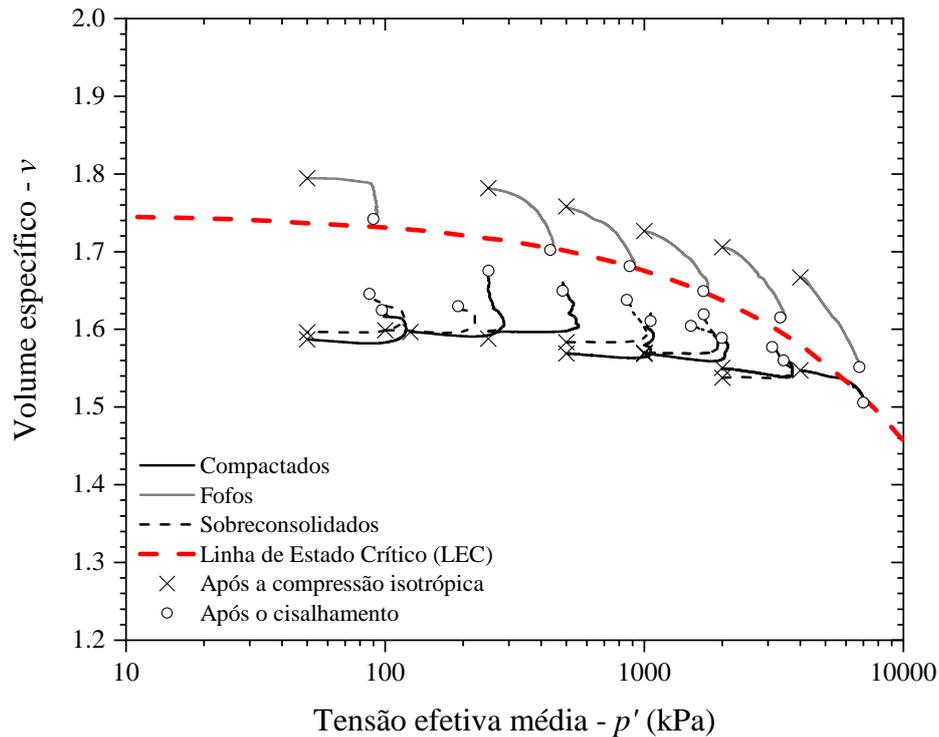


Figura 4.14 – Estimativa do lócus de estados críticos no plano  $v-\ln p'$ .

Normalmente, a existência de uma LEC curva no plano  $v-\ln p'$  é associada com a ocorrência de quebra de partículas (MUIR WOOD, 2007; BEEN et al., 1991). Bedin et al. (2012), no entanto, descrevem uma LEC curva desde baixas tensões, associada à mudança na suscetibilidade à liquefação conforme aumentam as tensões. Essas observações foram também realizadas por Carrera et al. (2011), ambos os trabalhos estudando diferentes rejeitos de mineração. Wagner et al. (2023) associaram as LECs obtidas para os dois materiais estudados à existência de estados metaestáveis em tensões baixas, indicando claramente uma não linearidade desde pequenas tensões. Apesar de não terem sido realizados ensaios não drenados neste trabalho, e, portanto, não ter sido avaliada a suscetibilidade à liquefação do material, é possível verificar na Fig. 4.14 a não linearidade da LEC desde pequenas tensões, tendo assim sido adotada a Eq. 2.7.

A LEC definida é comparada com outras obtidas para diferentes rejeitos de mineração na Fig. 4.16. É possível ver a similaridade no formato da LEC definida com os dados de Wagner et al. (2023). Essa semelhança pode estar vinculada a origem geológica comum dos rejeitos, dado que todos são originários do QF.

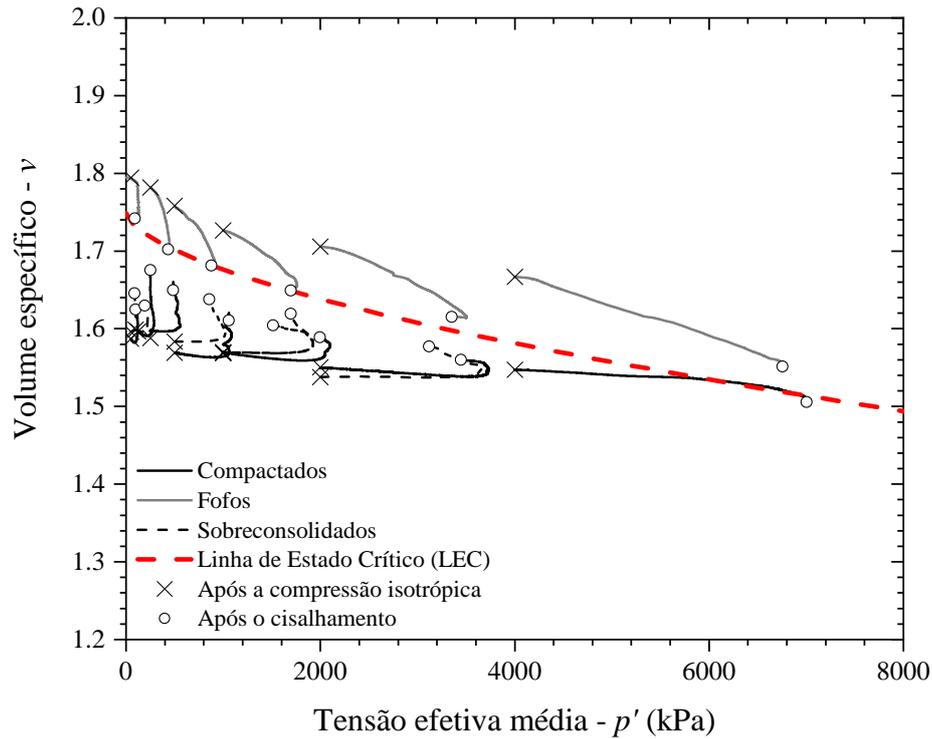


Figura 4.15 – Representação do locus de estados críticos estimado em escala natural no plano  $v-p'$ .

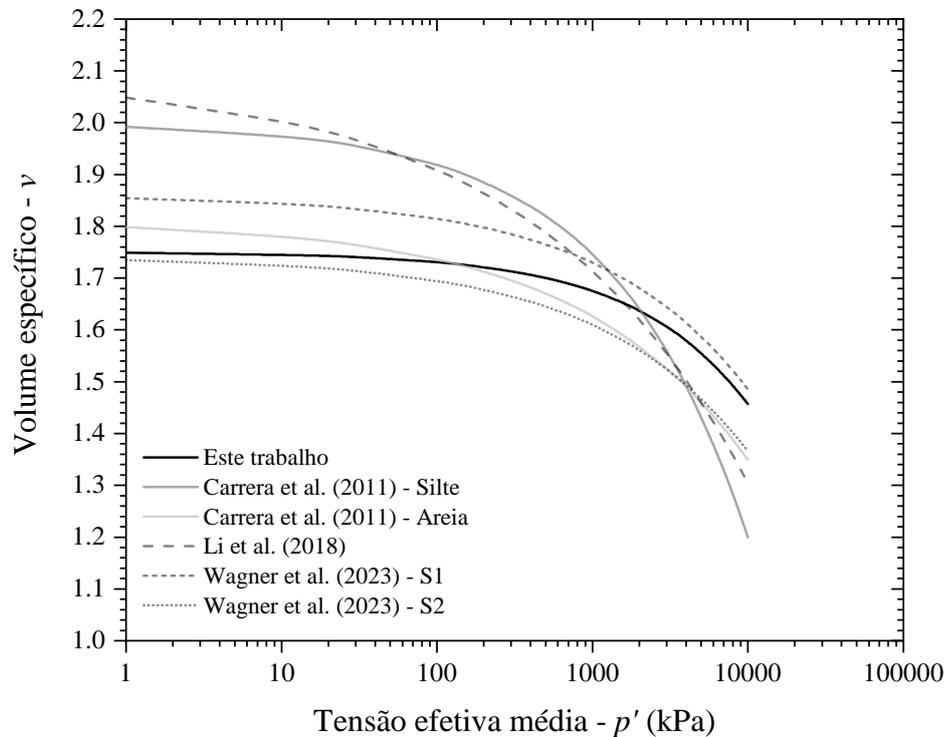


Figura 4.16 – Comparativo da LEC obtida para o rejeito estudado com outros resultados disponíveis na literatura.

### 4.3 SUPERFÍCIE DE PLASTIFICAÇÃO

Formalmente, a superfície de plastificação delimita o espaço no qual a resposta do material é elástica. Quando o material se encontra em um estado interno à superfície de plastificação o seu comportamento deve ser governado pela teoria da elasticidade e as deformações são recuperáveis. Já quando o material atinge a superfície de plastificação uma parcela das deformações passa a ser irrecuperável e o material deforma numa trajetória sobre a superfície. Nos geomateriais, o ponto exato a partir do qual há a mudança de comportamento é de difícil definição, dado que a característica do material é de um comportamento não linear, predominantemente plástico e dependente da tensão efetiva atuante. Sendo assim, a superfície de plastificação nesses casos acaba sendo definida a partir da percepção de uma mudança no comportamento do material. Um dos aspectos avaliados para identificação do ponto em que se dão majoritariamente deformações plásticas é através de variações na rigidez do material (MUIR WOOD, 1990; POOROOSHASB et al., 1966; TATSUOKA et al., 1974).

A Figura 4.17 apresenta a variação do Módulo de Elasticidade Tangente ( $E_{tan}$ ) com as deformações para uma amostras fofa, densa e sobreconsolidada. Na figura, pode ser visto claramente a degradação gradual do módulo inicial, de forma que definições arbitrárias sobre o ponto de plastificação podem ser adotadas com base em análises prévias do comportamento do material (DE BONO et al., 2018). Em relação à variação da rigidez do material é possível observar que a rigidez das amostras densa e sobreconsolidada são semelhantes, indicando que não há diferença significativa oriunda da pré-compressão da amostra SC.

O comportamento observado para as amostras ensaiadas a  $50\text{ kPa}$  é condizente com o esperado para materiais granulares, com pequena influência do sobreadensamento. Essa resposta, porém, não ocorre para os materiais que sofreram sobreadensamento até níveis de tensões maiores. A Figura 4.18 apresenta a variação da rigidez para os ensaios cisalhados sob tensão confinante de  $1000\text{ kPa}$ . Nesse caso, a amostra compacta apresentou rigidez inicial superior à rigidez das amostras sobreconsolidadas. Assim como referido anteriormente, esse efeito é associado à uma quebra de partículas e rearranjo durante o carregamento e descarregamento. A quebra de asperidades, redução de angularidades e redução da heterogeneidade de forma das partículas, favorece a capacidade de rearranjo dos grãos, reduzindo o esforço necessário para o movimento relativo das partículas.

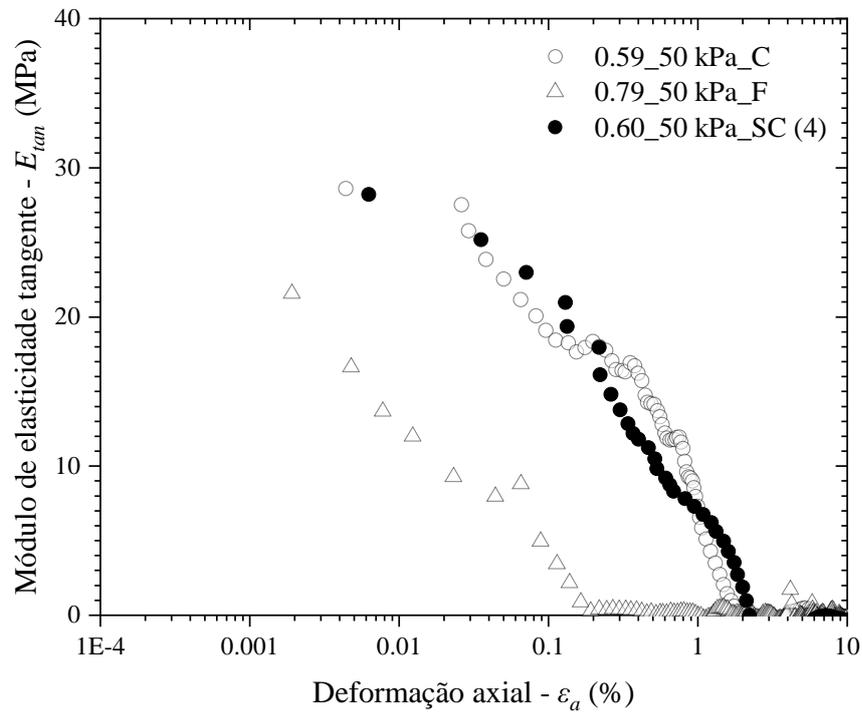


Figura 4.17 – Variação do Módulo de Elasticidade tangente ( $E_{tan}$ ) com as deformações axiais para amostra fofa, compactada e sobreconsolidada sob tensão confinante efetiva de 50 kPa.

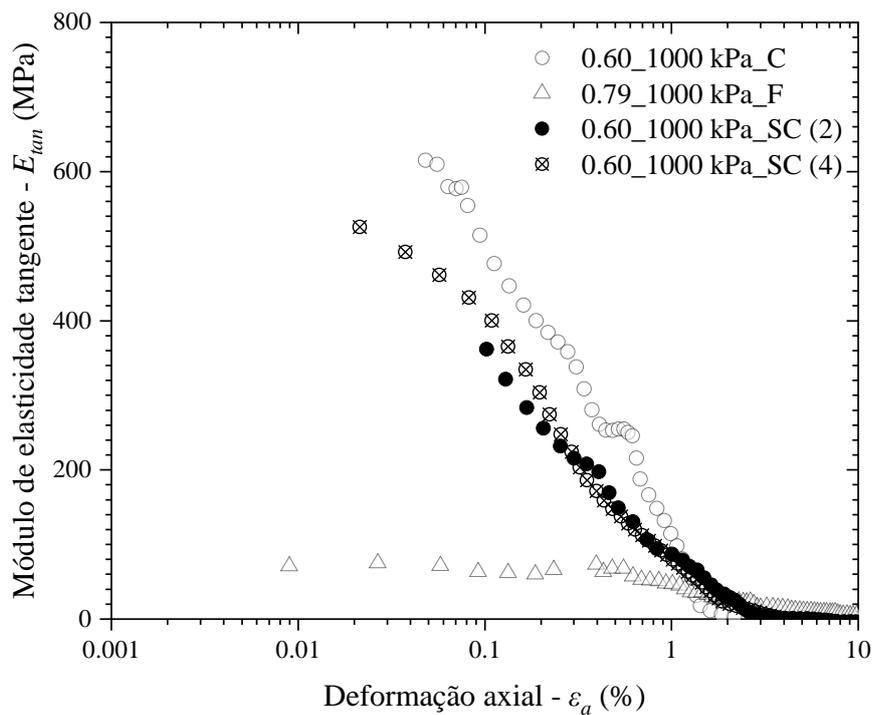


Figura 4.18 – Influência da tensão máxima de compressão isotrópica e da história de tensões na degradação do Módulo de Elasticidade tangente.

Para estimar a forma da superfície de plastificação e avaliar efeitos da morfologia das partículas e da quebra, foi definido no programa experimental a utilização de amostras sobreconsolidadas, conforme explicitado na seção 3.4. A hipótese principal adotada nesse caso é a de que as amostras pré-comprimidas a uma mesma tensão máxima estariam sob uma mesma superfície de plastificação. Ou seja, o material estaria sujeito a uma lei de enrijecimento isotrópica em que a superfície de plastificação expande em tamanho com a ocorrência de deformações volumétricas.

Sendo assim, a variação da rigidez das amostras sobreconsolidadas é apresentada na Fig. 4.19. É também identificado na figura o ponto em que  $E_{tan}$  corresponde a metade do seu valor inicial. de Bono et al. (2018) apresentaram esse critério para definição do ponto de plastificação na análise de simulações utilizando MED. Apesar de ser uma definição arbitrária (outros níveis de deformação poderiam ser escolhidos), espera-se que não haja efeitos diretos da definição na estimativa da forma da superfície, apenas no seu tamanho. Além disso, objetiva-se avaliar a interferência dos parâmetros avaliados na forma da superfície de forma qualitativa, sem definição da localização exata dessa.

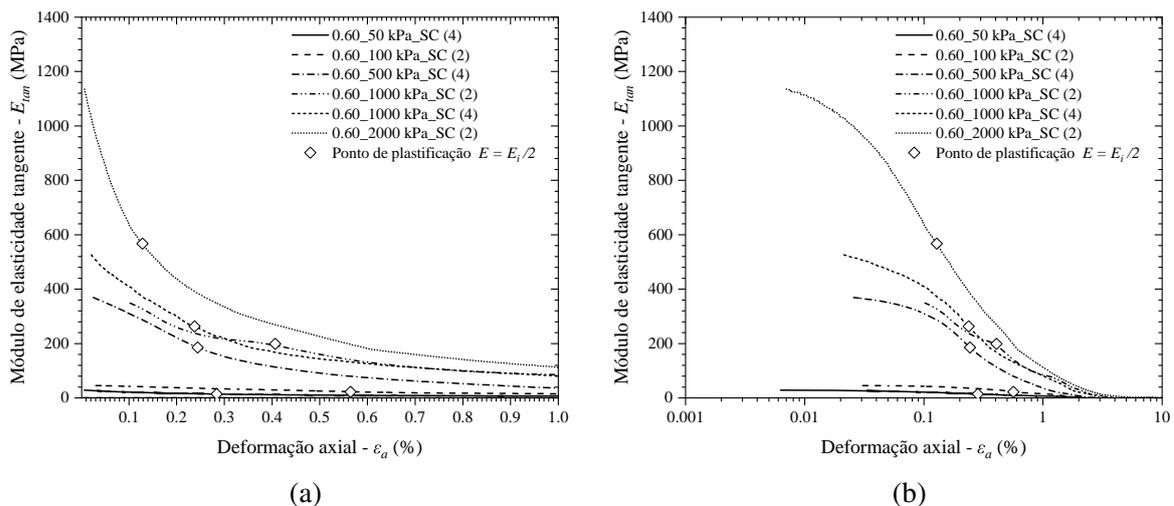


Figura 4.19 – Variação do Módulo de Elasticidade tangente e determinação de pontos de plastificação por variação na rigidez de ensaios sobreconsolidados em (a) escala natural e (b) escala semi-logarítmica.

Para o cálculo de  $E_{tan}$  foram necessárias algumas considerações que facilitem a interpretação, dada a usual dispersão encontrada em ensaios triaxiais e aos pequenos incrementos de tensão e deformação que puderam ser medidos pela utilização de instrumentação interna. Portanto, foi considerado um método de regressão linear utilizando os pontos vizinhos para determinação do módulo tangente em um dado ponto (JOVICIC et al., 1997). Além disso, foi assumido que o módulo tangente apenas decresce com a ocorrência de deformações, sendo eliminados os pontos em que o módulo fosse maior que o anterior (DE BONO et al., 2018).

A partir da definição dos pontos de plastificação esses podem ser sobrepostos à trajetória de

tensões dos ensaios, para estimativa da forma da superfície de plastificação. A definição da equação para ajuste de uma superfície partiu de alguns pressupostos:

1. A resistência do material é fruto exclusivamente do atrito entre os grãos ( $q = 0$  quando  $p' = 0$ );
2. É assumido enrijecimento isotrópico ( $q = 0$  quando  $p' = p'_c$ );
3. A superfície de plastificação tem um formato de gota, tendendo para a origem (CHANDLER, 1985; COOP, 1990; MUIR WOOD, 1990).

A partir dessas hipóteses uma forma possível para a superfície de plastificação é dada pela Eq. 4.2 (COLLINS et al., 2002b).

$$q = \beta \cdot M \cdot \Pi [p'(p'_c - p')]^{1/2} \quad (4.2)$$

onde,

$$\Pi = [\alpha + (1 - \alpha)(p'/(p_c/2))] \quad (4.3)$$

Logo, a Fig. 4.20 apresenta as superfícies de plastificação estimadas para cada par de ensaios sobreconsolidados a uma mesma tensão máxima. Na Figura, é possível verificar que a forma da superfície de plastificação foi mantida para os ensaios sobreconsolidados a 200 *kPa* e 2000 *kPa*, enquanto que não foi possível determinar uma superfície de plastificação com o mesmo formato que ajuste os dois ensaios sobreconsolidados a 4000 *kPa*. As superfícies estimadas foram ainda normalizadas em relação ao seu tamanho em  $p'$  (Fig. 4.21) e em  $p'$  e  $q$  (Fig. 4.21b). A normalização das superfícies permite a avaliação da forma dessas, supostamente constante como característica intrínseca do material, que expandiria apenas em tamanho.

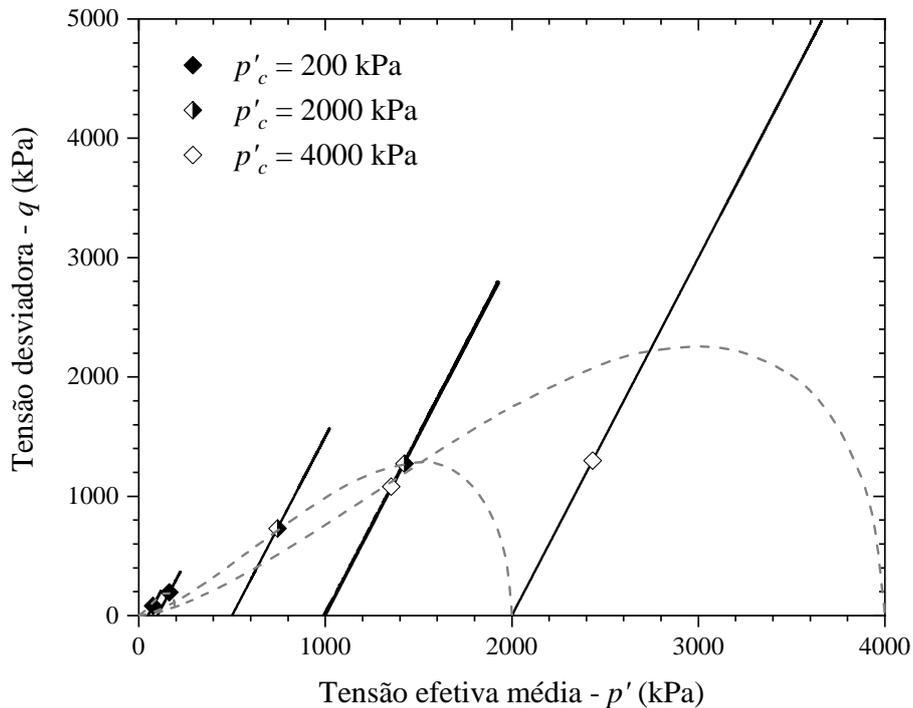


Figura 4.20 – Superfícies de plastificação estimadas a partir de variações na rigidez do material.

A existência de dois tipos de plastificação em materiais granulares é bastante aceita, uma relacionada à deformação permanente e rearranjo dos grãos (distorcional) e outra relacionada à quebra de partículas (MUIR WOOD, 1990; DE BONO et al., 2018). Chandler (1985) propôs uma formulação teórica para a plastificação de materiais não coesivos através da teoria de envelopes e considerando dois mecanismos distintos de deformação, um pela distorção dos grãos e um pelo rearranjo de partículas, porém sem considerar a energia dissipada através da quebra. Outros autores como McDowell (2000) e Einav (2007) propuseram modelos de plastificação considerando a dissipação de energia através da quebra de partículas. de Bono et al. (2020) identificam que a superfície relacionada a porção de compressiva da plastificação é única e característica intrínseca do material, já a plastificação por distorção é dependente da trajetória de carregamento, formato da partícula, nível de tensões, entre outros aspectos. A tendência de redução do tamanho da superfície em  $q$  observada na Fig. 4.21a concorda com os resultados de de Bono et al. (2020) em que a superfície de plastificação reduz em  $q$  com a mudança no formato das partículas e nível de tensões experimentado.

Além disso, na Fig. 4.21b, as superfícies são coincidentes em forma, porém, retornando à Fig. 4.20, a superfície definida para os ensaios sobreconsolidados a 4000 kPa não foi coincidente com os dois pontos de plastificação indicados para esses ensaios. Isso indica que além da mudança em

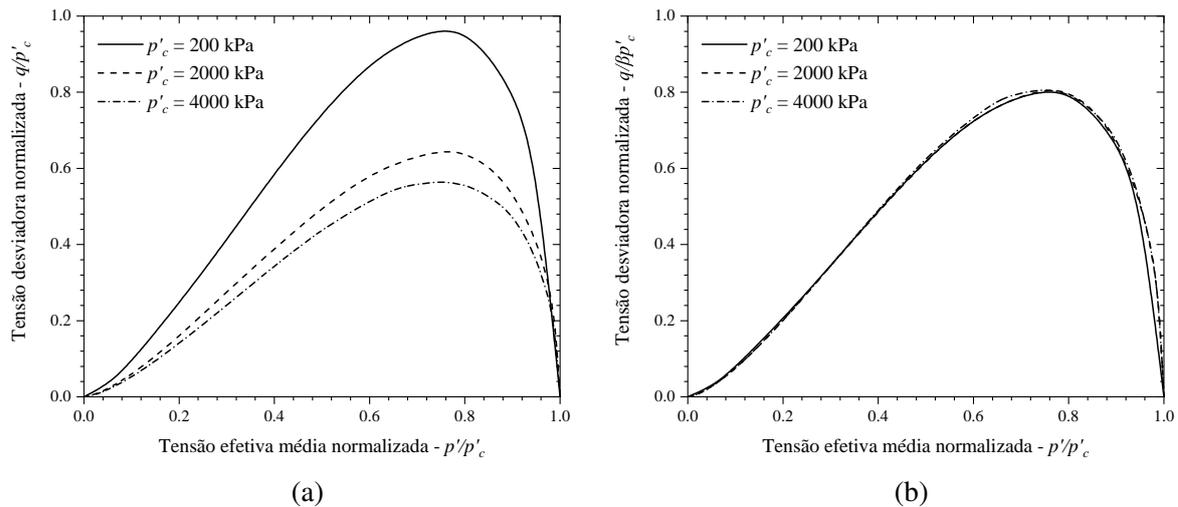


Figura 4.21 – Superfícies de plastificação normalizadas em relação (a) à pressão de compressão isotrópica e (b) à pressão de compressão isotrópica e o efeito das deformações cisalhantes.

escala, a superfície de plastificação do material pode estar mudando em forma conforme se dá a quebra de partículas e mudança do formato das partículas.

As superfícies de plastificação representadas nas Figs. 4.20 e 4.21a referem-se à plastificação geral, pelo efeito combinado da compressão e distorção. A superfície relacionada unicamente à compressão, no entanto, é assumida como tendo uma forma única (DE BONO et al., 2020). A existência dessa superfície com forma única dá origem a possível determinação da superfície limite de estado, dado que qualquer ensaio que esteja sobre a LIC percorrerá uma trajetória de estado sobre a superfície de compressão definida. Essa superfície é também dependente da pressão de pré-compressão em tamanho, mantendo a sua forma constante. Sendo assim, a fim de obter a superfície limite de estado do material é necessária a adoção de uma normalização em relação à tensão de referência. A Figura 4.22 apresenta as trajetórias dos ensaios triaxiais realizadas normalizadas em relação à tensão efetiva média no estado crítico.

No entanto, as tensões consideradas neste trabalho não foram suficientes para que se atinja a LIC, de forma que a superfície limite de estado acaba variando, em decorrência também da existência de uma LEC curva (LI, W. et al., 2019). Ainda assim, apesar de não ser possível a determinação com precisão da superfície limite de estado, a forma dessa é verificada e está em acordo com as previsões de Chandler (1985) da existência de um pico na superfície antes do estado crítico ser atingido, o que foi também verificado experimentalmente por Coop (1990).

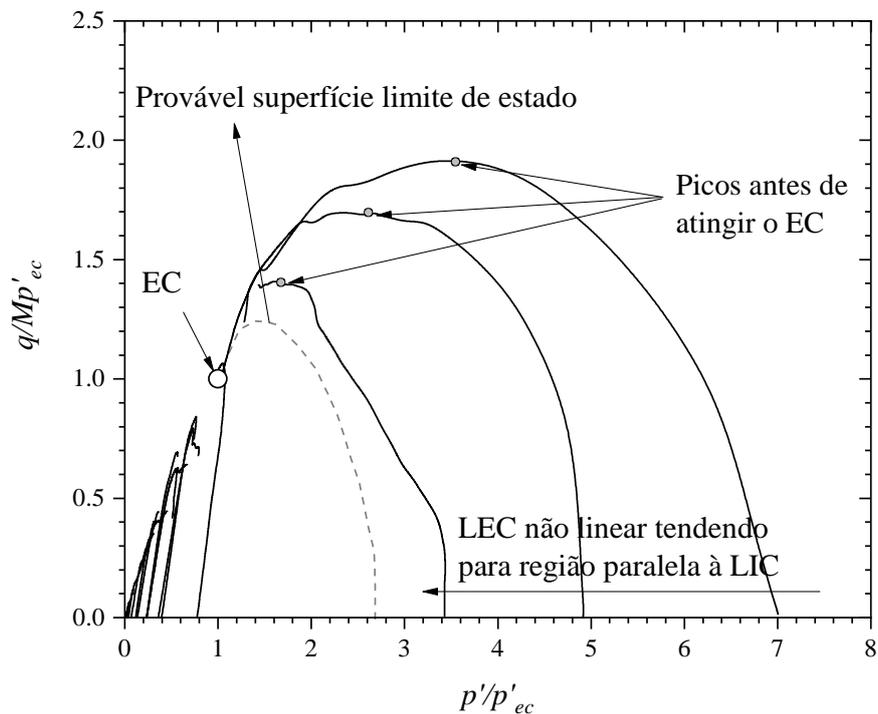


Figura 4.22 – Estimativa da superfície limite de estado através da normalização dos invariantes pelas tensões no estado crítico.

#### 4.4 LEI DE DILATÂNCIA

O estudo de dilatância se torna fundamental na descrição do comportamento constitutivo do material, pois fornece informações relevantes referentes à direção das deformações plásticas e sobre o trabalho plástico realizado. Uma consideração importante nessa análise é a separação das deformações plásticas (ou irrecuperáveis) das não-plásticas (recuperáveis), dado que muitas vezes as análises são realizadas em termos de deformações totais. Para tal, foi definido um modelo elástico incremental para definição das deformações elásticas experimentadas em cada estágio de carregamento, conforme estabelecido na seção 3.4.

A Figura 4.23 apresenta a relação entre as deformações plásticas e as deformações totais experimentadas para uma amostra fofa, uma compacta e uma sobreconsolidada sob tensão confinante de 500 *kPa*. Na figura, é possível ver que a partir de pequenos níveis de deformação quase a totalidade das deformações experimentadas é plástica ( $\delta\varepsilon^P/\delta\varepsilon \approx 1$ ). Isso indica que o cálculo da dilatância em termos de deformações totais não incorre em erros grandes, quando avaliada em termos de dilatância mínima ou no fim do ensaio. Além disso, a Fig. 4.23 ressalta uma outra importância da consideração de amostras SC no programa experimental. A superfície de plastificação pode ser determinada por variações na rigidez, como feito na seção anterior, ou ainda em termos de contornos de relação entre deformação plástica e deformação total

(KUWANO et al., 2007). Sendo assim, a consideração de amostras SC, além de estarem sob uma mesma superfície de plastificação, apresenta uma faixa maior de valores de relação entre deformações plásticas e totais que as amostras fofas ou compactas. Essas apresentam razões altas desde estágios iniciais do carregamento, com as deformações plásticas iniciais correspondendo a, aproximadamente, 70% no caso das fofas. Essas relações altas dificultam a determinação de contornos das diferentes superfícies de plastificação existentes, como por exemplo a superfície correspondente à razão  $\delta\varepsilon^P/\delta\varepsilon = 0.5$  proposta por Kuwano et al. (2007).

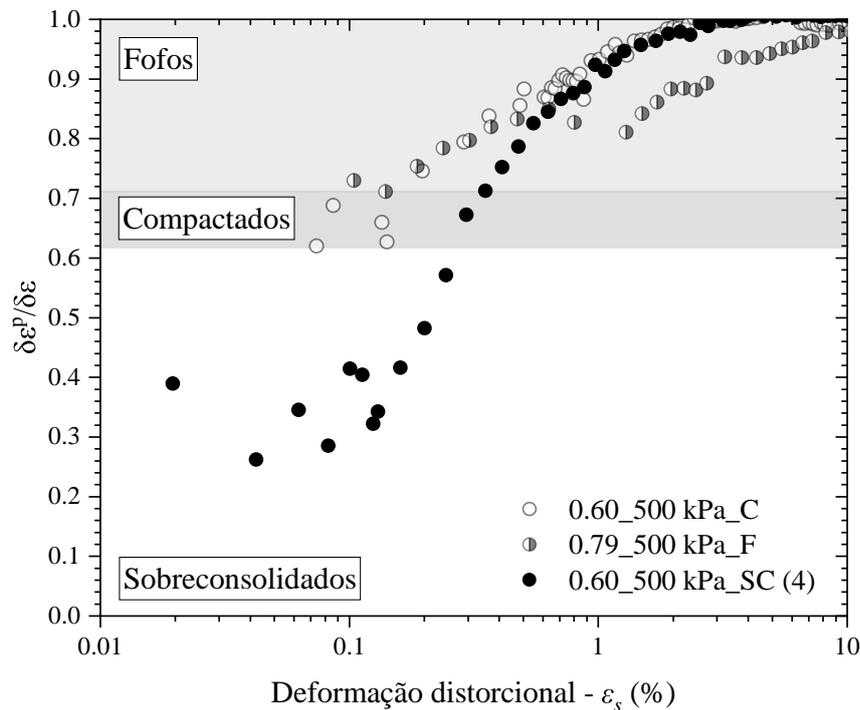


Figura 4.23 – Razão entre o comprimento do vetor de deformações plásticas e vetor de deformações totais em função da deformação distorcional.

As diferenças entre a dilatância ( $\delta\varepsilon_v/\delta\varepsilon_s$ ) calculada em termos de deformações totais ou em termos de deformações plásticas é investigada em detalhes na Fig. 4.24. É possível perceber que o formato das curvas é semelhante, com uma pequena diferença no valor da dilatância mínima, que pode ser atribuído à quantidade de pontos considerada na diferenciação numérica.

Apesar da representatividade da dilatância calculada em termos de deformações totais para as análises a serem realizadas nesse trabalho, optou-se pela adoção do cálculo de dilatância em termos de deformações plásticas a fim de manter a consistência das análises realizadas e permitir a determinação da direção de fluxo plástico na sequência. A Figura 4.25 apresenta as curvas tensão-dilatância plástica obtidas para cada uma das amostras fofas e compactas ensaiadas.

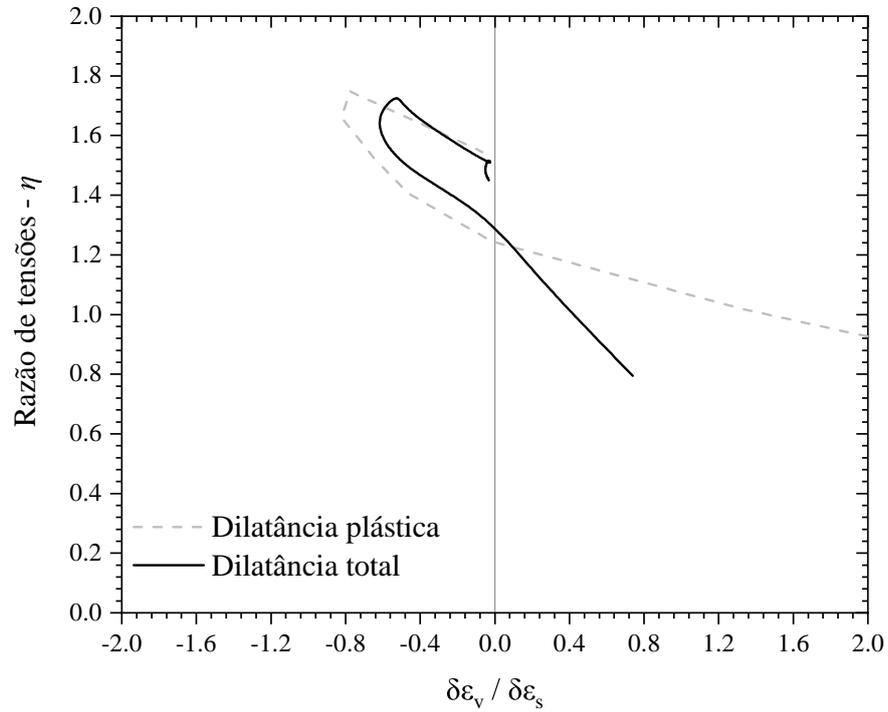


Figura 4.24 – Comparativo de curvas tensão-dilatância obtidas a partir de deformações totais ou plásticas.

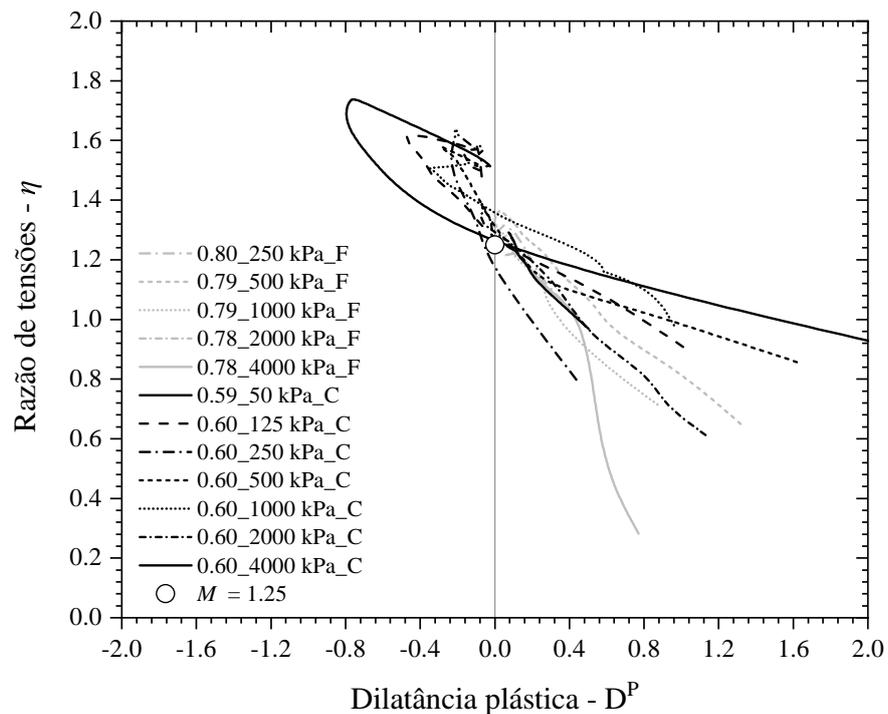


Figura 4.25 – Curvas tensão-dilatância plástica de amostras fofas e compactas.

É possível ver que as curvas tensão-dilatância diferem significativamente daquelas observadas na Fig. 2.8. Por outro lado, o formato da lei proposta por Xiang Song Li et al. (2000) se aproxima dos resultados obtidos. Esse formato caracteriza-se pela existência de um estado de imagem, no qual a curva cruza o eixo  $\eta$  em um valor diferente do valor de  $M$ . Isso ocorre por uma mobilização gradual da resistência ao cisalhamento no estado crítico e o valor em que a curva cruza o eixo sem que tenha sido atingido o estado crítico é chamado de  $M$  operacional (LI, X. S. et al., 2000; JEFFERIES et al., 2011). Esse aspecto reforça a dependência da dilatância no estado, sendo mais apropriadas leis de estado-dilatância do que puramente tensão-dilatância.

Os ensaios sobreconsolidados foram analisados separadamente, a fim de avaliar a influência da pré-compressão na dilatância dos materiais. A Figura 4.26 compara os resultados em amostras densas e sobreconsolidadas para tensões de confinamento de 50 e 1000  $kPa$ , respectivamente.

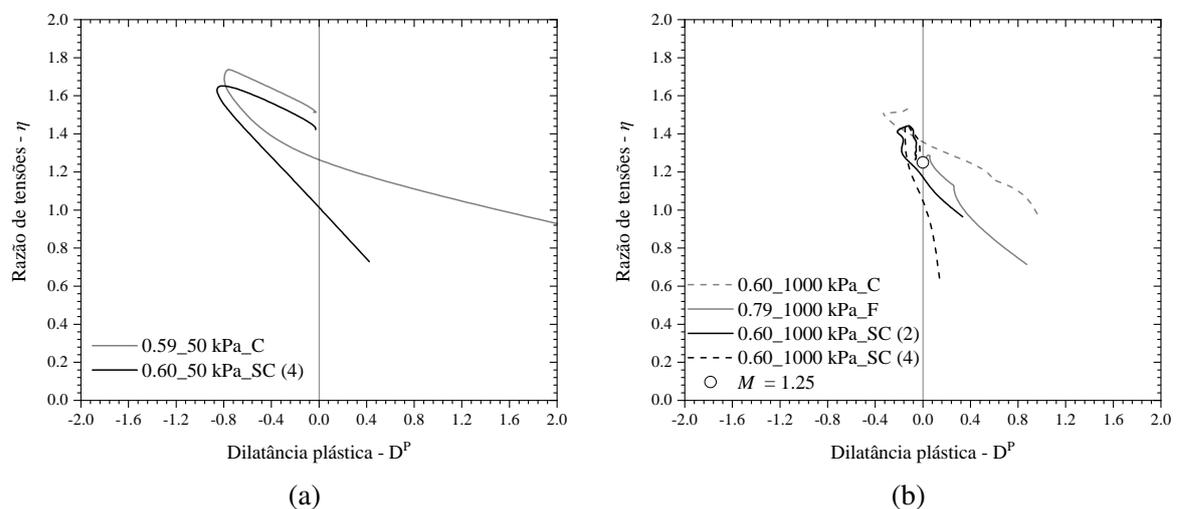


Figura 4.26 – Comparativo de dilatância para amostras compactas e sobreconsolidadas sob tensão confinante de (a) 50  $kPa$  e (b) 1000  $kPa$ .

No caso das amostras cisalhadas sob tensão confinante de 50  $kPa$ , verifica-se que a pré-compressão teve pouco efeito sobre a dilatância do material sendo que a curva obtida é muito semelhante à da amostra compacta. As diferenças existentes são oriundas da mudança no estado inicial do material devido à compressão e variabilidade na moldagem. Já nos ensaios cisalhados sob 1000  $kPa$ , observa-se uma pequena redução na magnitude da dilatância mínima e na resistência máxima mobilizada, fatores associados às mudanças na morfologia das partículas devido à quebra de grãos, como citado anteriormente. O grau de sobreadensamento, por sua vez, não demonstrou interferência na resposta mecânica do material. A Figura 4.27 apresenta as curvas dos demais ensaios sobreconsolidados.

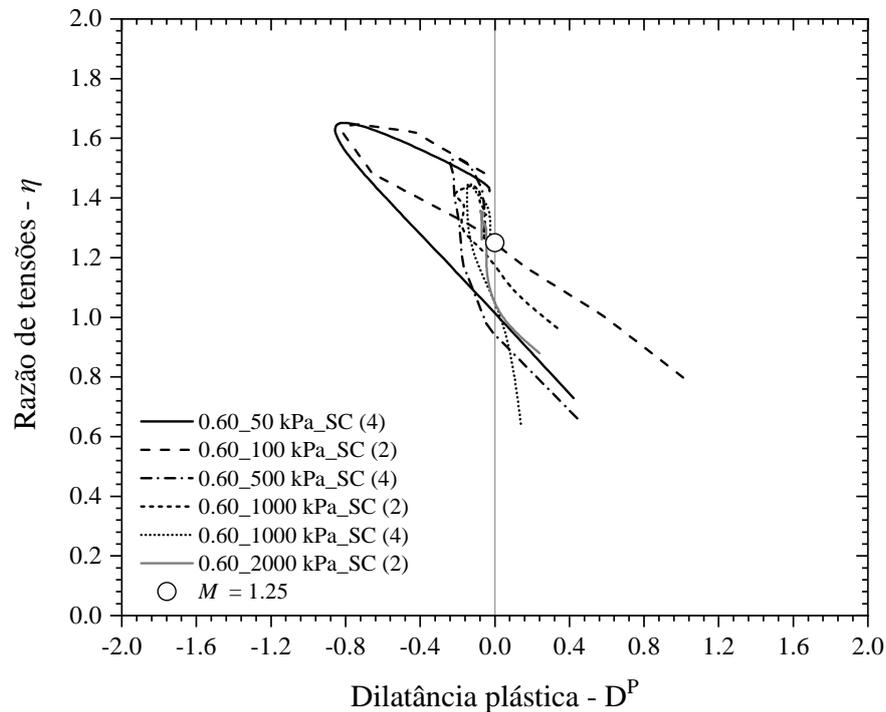


Figura 4.27 – Curvas tensão-dilatância de ensaios sobreconsolidados.

Após verificar o comportamento de tensão-dilatância dos ensaios realizados, parte-se para a análise em termos da dilatância mínima ( $D^P_{min}$ ). Normalmente, o ponto em que a dilatância é mínima corresponde à proximidade do ponto de resistência máxima para ensaios densos, de forma que a energia dissipada é máxima. A partir disso, é possível definir relações entre os fatores com intuito de buscar uma lei que explique a mobilização da resistência em função da dilatância. A Figura 4.28 apresenta os resultados em termos de  $D^P_{min}$  e o ajuste linear para definição do parâmetro  $N$  de Nova (1982), conforme proposto por Jefferies et al. (2011).

Apesar de ser possível traçar ajustes lineares com bom coeficiente de ajuste para os dados, fica claro na figura a baixa representatividade da relação para os dados obtidos. Quando realizada regressão linear, o valor do intercepto no eixo de  $D^P = 0$ , que deveria corresponder ao valor de  $M$  no estado crítico, difere significativamente do obtido através de ensaios fofos (1.25). Já quando fixado o valor do intercepto para realização da regressão linear, o ajuste obtido não captura nenhum dos pontos obtidos experimentalmente. Essa situação provê algumas informações sobre a forma de dissipação de trabalho plástico e da inadequabilidade de algumas leis de tensão dilatância (ilustrado na Fig. 4.29).

Nenhuma das relações tensão-dilatância avaliadas na Fig. 4.29 apresentou resultados satisfatórios para toda faixa de tensões ensaiadas. Isso pode estar associado a diferentes fatores, entre eles a

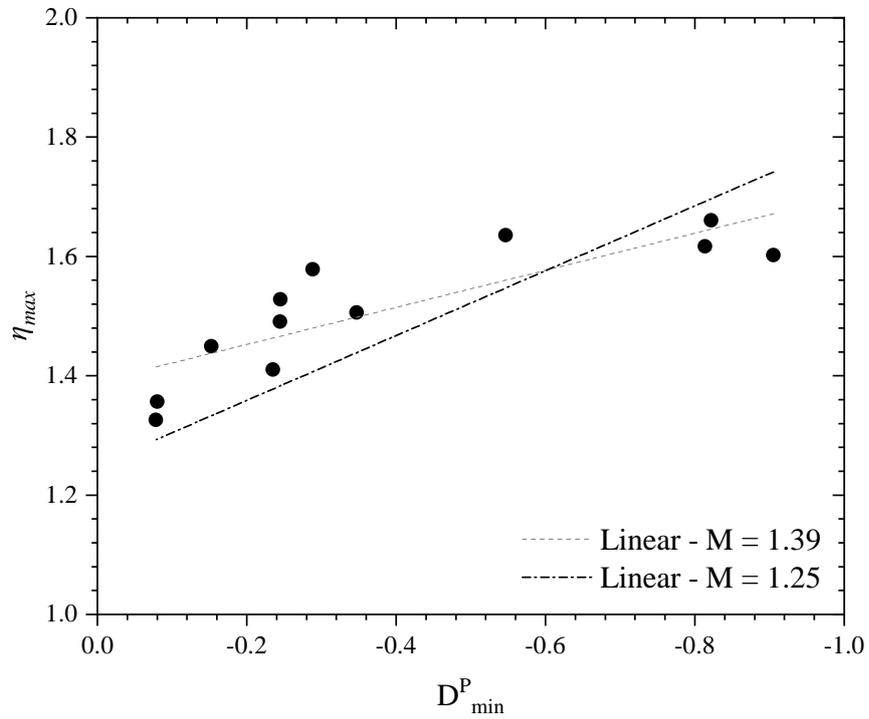


Figura 4.28 – Relação entre  $D_{min}^P$  e  $\eta_{max}$  para o material estudado.

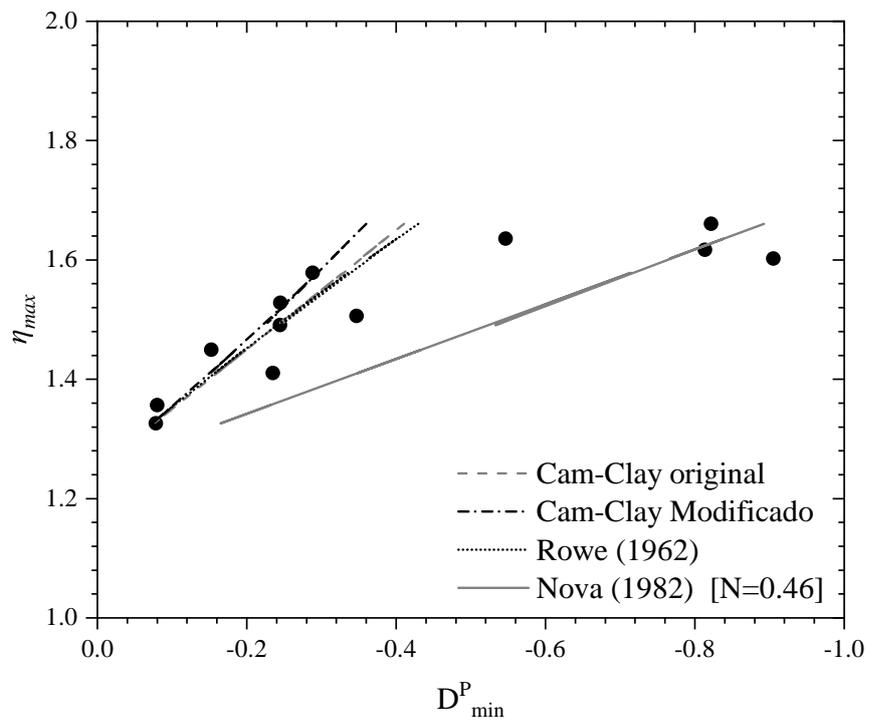


Figura 4.29 – Ajuste de relações  $D_{min}^P$  e  $\eta_{max}$  a partir de leis tensão-dilatância da literatura.

redução gradual do valor de  $M$  no estado crítico devido à quebra de partículas e a dependência da dilatância no estado do material. No último caso, a Fig. 4.30 investiga as características da dependência de  $D_{min}^P$  e  $\eta_{max}$  no estado.

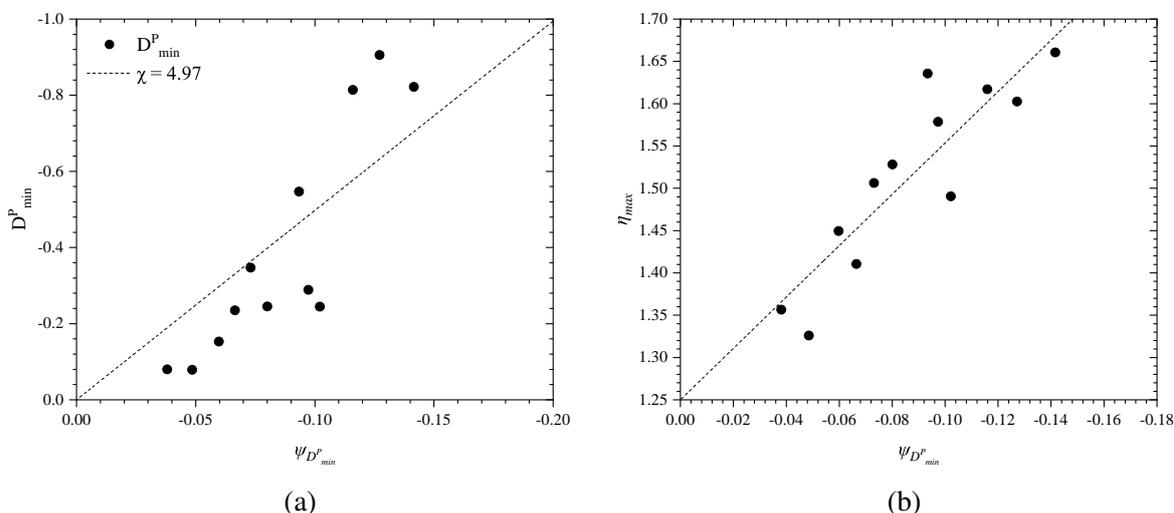


Figura 4.30 – Influência do estado através de  $\psi$  em (a)  $D_{min}^P$  e (b)  $\eta_{max}$ .

Nas figuras, foi indicada ainda a tendência linear para os dados. É importante ressaltar que são necessárias algumas considerações, que são consequências da teoria de estado crítico, para realização da regressão linear nesses casos. No caso da relação  $D_{min}^P - \psi$  quando  $\psi = 0$ , ou seja, quando o material se encontra no estado crítico (i.e., estado em que o material escoar como fluido viscoso sob volume constante), a dilatância precisa ser 0. Já para a relação entre  $\eta_{max}$  e  $\psi$  quando  $\psi = 0$ , necessariamente,  $\eta = M$ .

Sobre as relações com o parâmetro de estado, a Fig. 4.30a mostra, claramente, que o ajuste linear não foi capaz de representar satisfatoriamente o grupo de dados. A normalização de  $\eta_{max}$ , por outro lado, parece se adequar bem a um ajuste linear. Essas relações com o estado precisam ser interpretadas cuidadosamente, visto que  $D_{min}^P$  e  $\eta_{max}$  são também relacionados. Sendo assim, propõe-se que o estado do material define a dilatância limite experimentada e é a magnitude das deformações volumétricas que define a resistência mobilizada (BEEN et al., 1985; JEFFERIES, 2021).

## 4.5 DIREÇÃO DE FLUXO PLÁSTICO

Dentre os aspectos necessários para estabelecimento de um modelo constitutivo está a definição da direção de fluxo plástico. Essa direção pode ser assumida como ortogonal à superfície de plastificação definida (fluxo associado) ou não (fluxo não associado). Apesar da hipótese de fluxo associado ser considerada no desenvolvimento de alguns modelos, Chandler (1985) e Collins et al. (1997) demonstraram que a existência de uma lei de fluxo não associada é uma

consequência direta da natureza friccional dos geomateriais.

A partir da separação das deformações plásticas e elásticas considerada, foi possível determinar neste trabalho os vetores unitários de deformação plástica, conforme descrito na seção 3.5. Esses vetores indicam a direção das deformações plásticas e definem a superfície de potencial plástico como a função da qual são ortogonais, caso a superfície de potencial plástico e a superfície de plastificação sejam coincidentes, têm-se que os vetores de deformação plástica serão ortogonais a essa e segue-se uma lei de fluxo associada. Os vetores de deformação plástica definidos foram então sobrepostos às trajetórias normalizadas em relação à tensão efetiva média em um espaço compartilhado entre deformações e tensões (Fig. 4.31). Foi definida a sobreposição para as trajetórias normalizadas em razão dos ensaios fofos estarem supostamente sobre a superfície relativa à compressão e portanto, nesses casos, a superfície de plastificação teria o mesmo formato da superfície limite de estado definida no espaço normalizado.

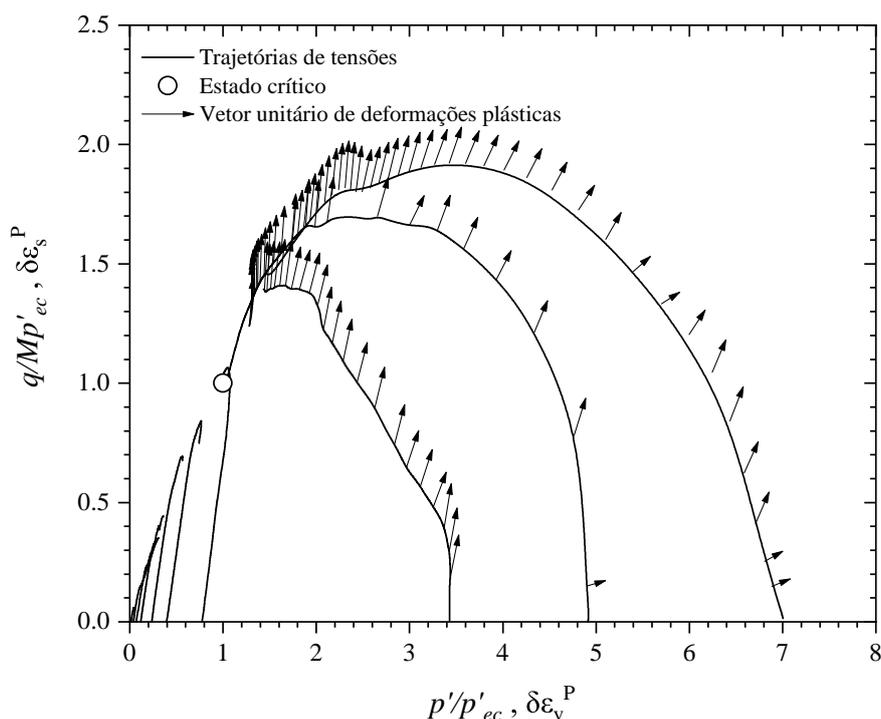


Figura 4.31 – Sobreposição dos vetores de deformação plástica às trajetórias normalizadas para ensaios de 1000, 2000 e 4000  $kPa$ .

Na Figura 4.31 a direção dos vetores de deformação plástica demonstra a existência de fluxo não associado para o material. Esse aspecto é ilustrado além na Fig. 4.32 em que os vetores de deformação plástica no ponto de plastificação foram sobrepostos à superfície estimada para os ensaios sobreconsolidados à tensão máxima de 2000  $kPa$ .

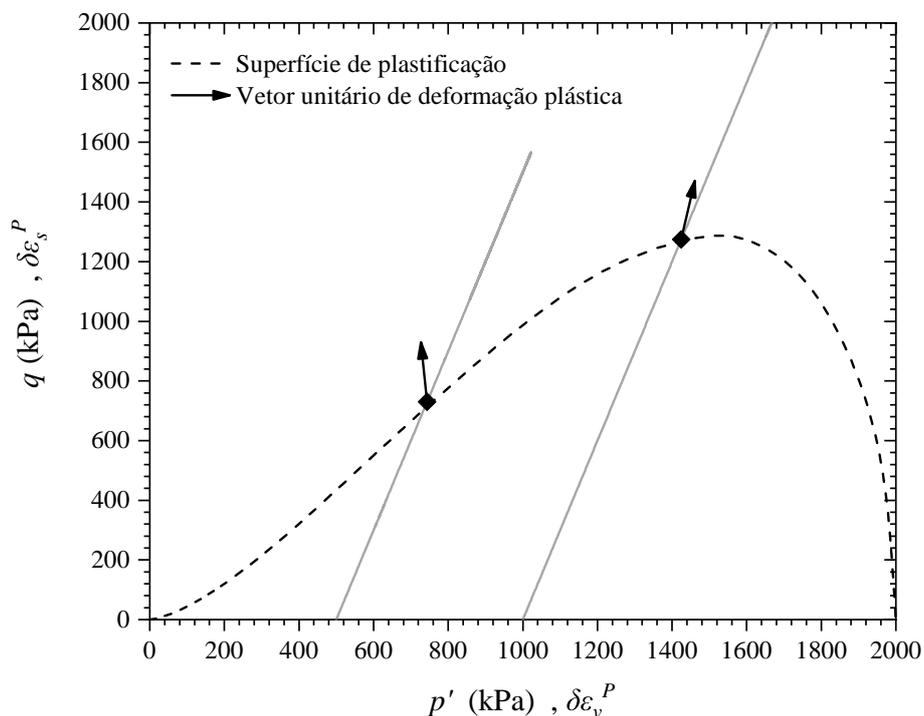


Figura 4.32 – Sobreposição dos vetores de deformação plástica à superfície de plastificação dos ensaios sobreconsolidados à 2000  $kPa$ .

## 4.6 QUEBRA DE PARTÍCULAS

A ocorrência de quebra de partículas em solos normalmente é associada a tensões muito altas. Em especial para areias quartzosas, associa-se a quebra a tensões da ordem de 15  $MPa$  (COOP et al., 1993). Outros materiais, devido à sua natureza e ao formato de suas partículas, podem apresentar quebra de grãos em tensões inferiores (CONSOLI et al., 2007). A relevância da quebra em tensões menores, porém, costuma ser associada a materiais com grãos menos resistentes, que apresentem mineralogia distinta ou ainda se caracterizem pela existência de poros nessas (COOP, 1990).

Ainda que o material predominante na matriz mineral do rejeito de minério de ferro estudado seja quartzo e tenham sido atingidas pressões de confinamento de no máximo 4000  $kPa$ , foi investigada a ocorrência de quebra de partículas para os ensaios triaxiais realizados sob maiores pressões. A Figura 4.33 apresenta os resultados de distribuição granulométrica dos ensaios antes e depois do cisalhamento.

Pode ser observado que a amostra cisalhada sob tensão de confinamento de 4000  $kPa$  experimentou quebra levemente superior às amostras sobreconsolidadas à 4000  $kPa$ , porém cisalhadas a 2000 e 1000  $kPa$ . Isso indica a influência de diferentes mecanismos de quebra de partículas,

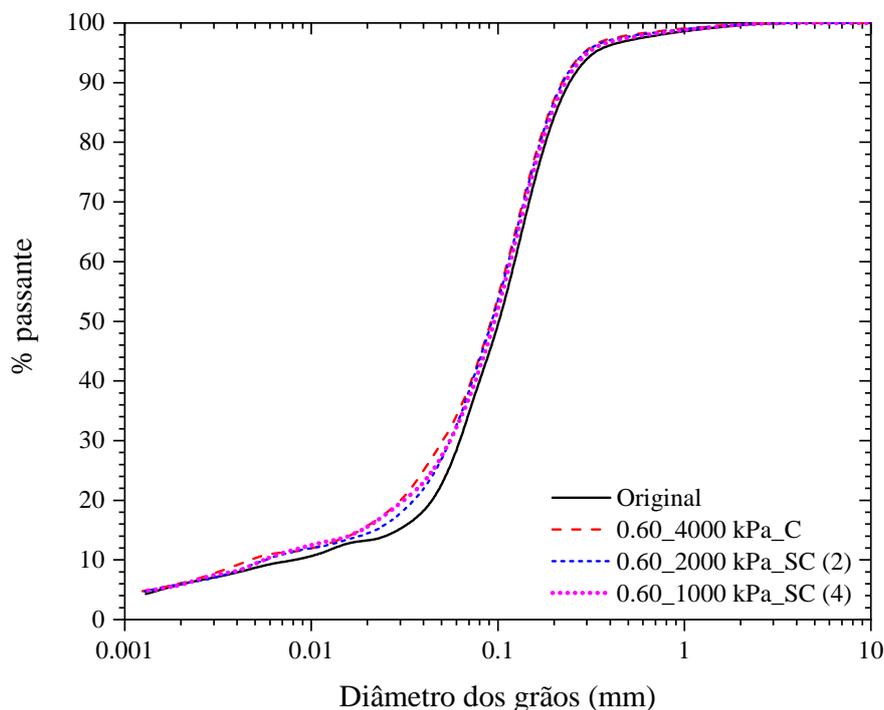


Figura 4.33 – Distribuição granulométrica de amostras antes e após o cisalhamento sob altas tensões.

um relacionado à compressão isotrópica e outro vinculado ao cisalhamento da amostra. Sendo assim, percebe-se a ocorrência de quebra de partículas no material em tensões inferiores àquelas relatadas para areias quartzozas. Alguns aspectos do material podem estar relacionados a isso, em especial a morfologia dos grãos. Conforme observado nas imagens MEV do material original (Fig. 3.5), o rejeito de minério de ferro estudado caracteriza-se pela presença de partículas lamelares, angularidades salientes e rugosidades na superfície, que podem acabar promovendo a mudança na distribuição granulométrica observada na Fig. 4.33.

As análises de curvas granulométricas, de forma geral, são realizadas a partir da avaliação de distribuições cumulativas em massa dos grãos passantes em diferentes peneiras ou obtidos através da interpretação do processo de sedimentação. No entanto, pode-se obter diferentes informações ao avaliar essas distribuições granulométricas sob a ótica de uma distribuição de probabilidade de ocorrência de determinado tamanho de partícula em uma massa de solo. A Figura 4.34 apresenta as distribuições granulométricas antes e após o cisalhamento em função da porcentagem em massa retida na peneira, em contraste a análise usual de distribuição cumulativa de porcentagem passante.

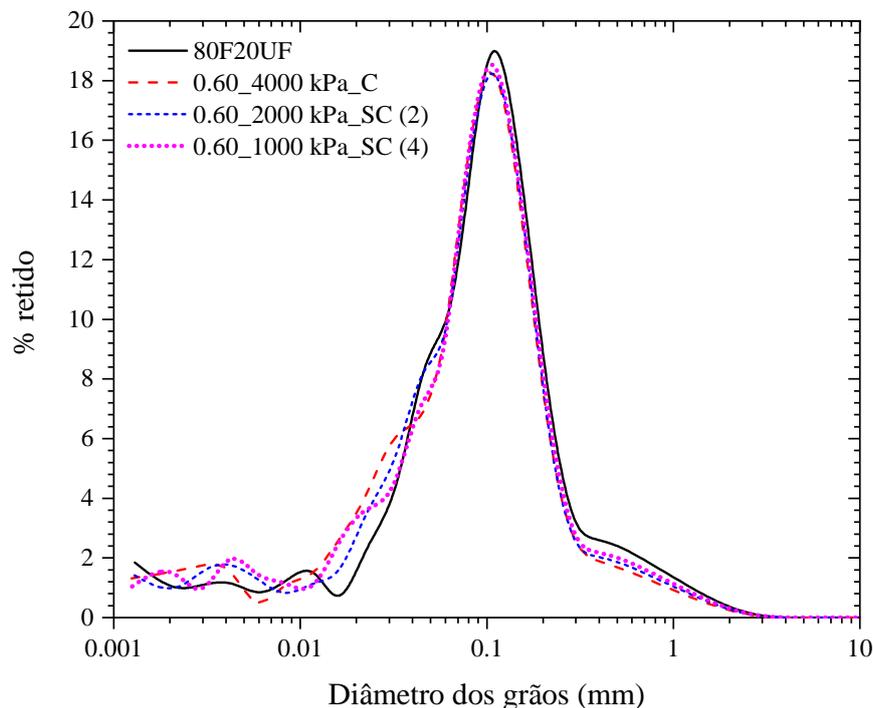


Figura 4.34 – Porcentagem retida para cada tamanho equivalente de grãos antes e após o cisalhamento.

Nota-se, na Fig. 4.34, que as distribuições de tamanhos de partículas das três amostras são bastante semelhantes, ainda assim percebe-se algumas diferenças fundamentais que sugerem a explicação de efeitos observados anteriormente como a mudança na rigidez e resistência máxima observada nos ensaios sobreconsolidados. Em relação às partículas finas, houve um pequeno aumento, conforme esperado, nas amostras após o cisalhamento, sendo difícil estabelecer uma tendência entre essas. Já nas partículas mais grosseiras, percebe-se duas alterações importantes. A primeira refere-se ao tamanho de partícula de  $0.1\text{ mm}$ . Nesse tamanho, a curva do material previamente ao cisalhamento mostra um pico, reduzido para as amostras cisalhadas, sendo a amostra cisalhada sob maior tensão confinante a que apresenta menor pico. Outro aspecto refere-se à faixa de valores entre  $0.02$  e  $0.075\text{ mm}$ . Nessa faixa, percebe-se um aumento da quantidade de partículas em relação à curva original, sendo o maior aumento na maior tensão de confinamento.

Podem ocorrer diferentes tipos de quebra de partículas, sendo quebras catastróficas (i.e., uma partícula sendo partida ao meio), quebra de angularidades ou ainda desgaste (redução da rugosidade). O que se percebe nos resultados obtidos é que o principal efeito da aplicação de tensões elevadas, nesse caso, foi a mudança na morfologia da partícula, em contrapartida a mudanças na distribuição granulométrica propriamente dita. Portanto, atribui-se que os principais mecanismos

de quebra ocorrendo são a quebra de angularidades e o desgaste. A fim de melhor identificar essas mudanças, após a realização do peneiramento e sedimentação, foram separadas as partículas retidas em duas peneiras, aberturas  $0.425\text{ mm}$  e  $0.075\text{ mm}$ , para realização de microscopia eletrônica. A Figura 4.35 apresenta as características do material através das imagens de MEV e distribuição de tamanhos de partículas.

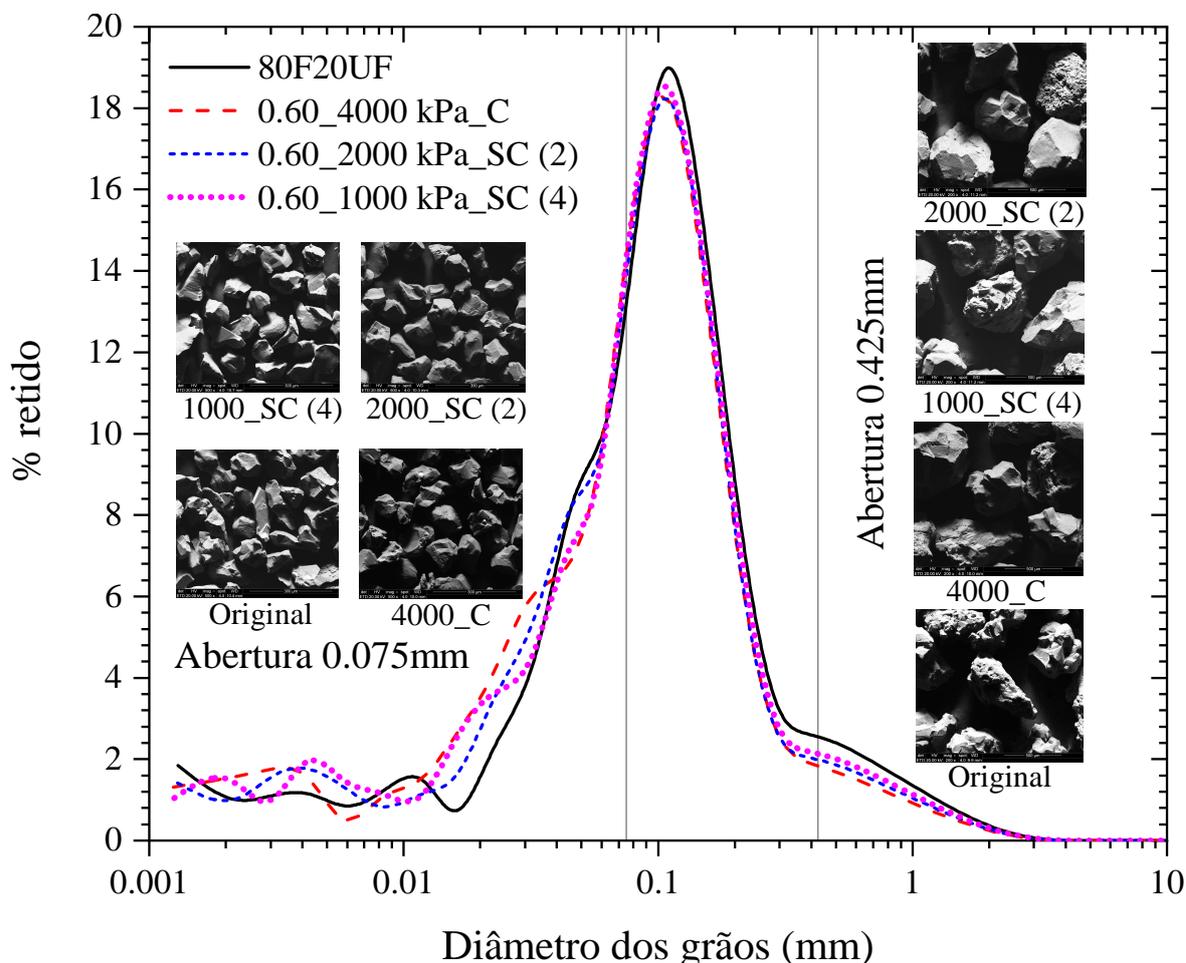


Figura 4.35 – Características das partículas retidas em duas distintas aberturas de peneiras a partir das imagens MEV.

Os resultados obtidos são ainda consistentes com outros estudos experimentais, onde foi demonstrado que a quebra de partículas tende a diminuir a heterogeneidade nas formas das partículas (BOWMAN et al., 2001).

Portanto, sugere-se uma abordagem diferente para a interpretação da quebra de partículas. Em contrapartida à visão de que a quebra ocorreria unicamente sob uma tensão específica (e elevada), a partir da qual ela seria observada de forma macroscópica, propõe-se que a quebra das partículas ocorra desde estágios iniciais de carregamento. Para que as deformações macroscópicas sejam observadas, mecanismos de deformação nos contatos dos grãos e movimento relativo entre esses deve ocorrer. Nesses contatos, com áreas muito pequenas, ocorrem concentrações de tensões que

acabam por deformar a região adjacente e também a promover pequenas quebras. Apesar dessa modificação, por vezes, não se tem sequer a precisão necessária para medir experimentalmente esses efeitos. Sendo assim, à medida que aumentam as tensões aplicadas, esses processos se tornam mais agressivos e os esforços transmitidos maiores, até o ponto em que a quebra de partículas é observada macroscopicamente e interfere significativamente no comportamento do material. Sugere-se que a visão usual da quebra de partículas, associada a altas tensões e alterações no comportamento de compressão isotrópica, na verdade refere-se ao ponto em que a quebra de partículas supera os demais mecanismos existentes e se torna o principal mecanismo de deformação.

No caso de materiais em que as partículas apresentem formas mais uniformes e com maior esfericidade, tanto as cadeias de transferência de esforços quanto a distribuição dos esforços nos contatos tenderão a ser mais uniformes, reduzindo o impacto dos efeitos de mudança de forma observados. Nesses casos, a interpretação usual de que a quebra iniciaria somente sob altas tensões é válida, ao passo que provavelmente o ponto em que a quebra se torna o principal mecanismo corresponda ao ponto em que são observados efeitos da mudança da morfologia das partículas. Já para materiais como o rejeito de minério de ferro estudado, as características intrínsecas da sua obtenção determinam a existência de uma heterogeneidade de formas, angularidades e rugosidades. Logo, os efeitos da mudança na morfologia das partículas são significativos na resposta mecânica do material desde níveis de tensões mais baixos, mesmo antes de a quebra de partículas ser o principal mecanismo de deformação.

## 5 CONCLUSÕES

Este capítulo apresenta as conclusões do trabalho. Inicialmente, são apresentadas as conclusões específicas de cada tópico abordado, a seguir são avaliadas as implicações dos resultados em relação à definição de uma lei de dissipação de energia apropriada.

### 5.1 CONCLUSÕES ESPECÍFICAS

O programa experimental realizado permitiu a avaliação do comportamento constitutivo de um rejeito de minério de ferro em aspectos relativos à rigidez, resistência, lócus de estados críticos, plastificação, dilatância, direção das deformações plásticas e quebra de grãos. Além disso, o programa experimental proposto demonstra a capacidade da definição completa do comportamento de materiais a partir de ensaios triaxiais convencionais. Um aspecto relevante a ser ressaltado é a utilização de instrumentação interna, que permitiu a avaliação da rigidez do material e aumento na confiabilidade das análises. A seguir cada um dos aspectos observados é abordado em detalhes.

#### 5.1.1 Rigidez

Os efeitos da pré-compressão na rigidez do material apresentaram-se dependentes do nível de tensões experimentado. Para ensaios em que a pressão máxima experimentada durante a fase de compressão isotrópica foi de 200 *kPa*, não foram observados efeitos do sobreadensamento na modificação da rigidez. Já para os ensaios sobreconsolidados à tensão máxima de 2000 *kPa* e 4000 *kPa* a rigidez obtida foi inferior à rigidez dos ensaios compactos correspondentes. A alteração na rigidez pode estar relacionada a uma alteração na morfologia das partículas devido à quebra de angularidades e redução da rugosidade, o que reduz o esforço necessário para o rearranjo dos grãos. O grau de sobreadensamento experimentado pelas amostras não demonstrou relevância na alteração da rigidez do material.

#### 5.1.2 Resistência

Foi ajustada envoltória de resistência não linear para os estados de pico do rejeito estudado. As amostras densas chegaram a apresentar ângulo de atrito no pico equivalente a 42.7°, sendo o valor médio obtido de 38.5°. Os ensaios sobreconsolidados, por sua vez, apresentaram resistência inferior às amostras compactadas sendo o ângulo de atrito máximo encontrado de 42.3° e o

valor médio de  $37.6^\circ$ . Foi obtida uma envoltória parabólica para as amostras sobreconsolidadas. Novamente, a redução na resistência máxima mobilizada é associada à quebra de partículas e alteração na morfologia dessas, facilitando o movimento relativo dos grãos e reduzindo o esforço necessário. Do ponto de vista da envoltória de resistência no estado crítico, foi observado um decréscimo da inclinação da envoltória com o aumento das tensões de confinamento, ao avaliar os dados individualmente. Porém, devido à pequena variabilidade, foi ajustada uma envoltória linear considerando os ensaios que tenham apresentado estabilidade nas deformações volumétricas e tensão desviadora. O valor de  $M$  obtido foi de 1.25, que corresponde a um ângulo de atrito no estado crítico de, aproximadamente,  $31.1^\circ$ . Esse valor está de acordo com o encontrado na literatura para outros rejeitos de mineração e areias contendo finos não-plásticos.

### 5.1.3 Lócus de estados críticos

Definiu-se uma Linha de Estado Crítico (LEC) curva desde baixas tensões no plano  $v - \ln p'$  com parâmetros iguais a  $\Gamma=1.75$ ,  $A = 0.0012$  e  $B = 0.6$ , considerando uma pressão de referência igual a  $1 \text{ kPa}$ . A curvatura da LEC não está diretamente associada à ocorrência de quebra de grãos, mas sim à existência de estados metaestáveis em regiões com altos volumes específicos e sob baixas tensões de confinamento. A LEC definida apresenta similaridades com a de outros trabalhos na literatura. Em especial, o formato obtido se assemelha à LEC encontrada por Wagner et al. (2023) para rejeitos de mineração oriundos da mesma região.

### 5.1.4 Superfície de plastificação

A plastificação dos materiais foi considerada a partir da avaliação de mudanças na rigidez e sob a hipótese de enrijecimento isotrópico, de forma que os ensaios sobreconsolidados a uma mesma pressão máxima estariam sob uma mesma superfície de plastificação. Foi possível ajustar superfícies de plastificação em formato de gota com uma forma constante para os ensaios sobreconsolidados à  $200 \text{ kPa}$  e à  $2000 \text{ kPa}$ , reduzindo apenas em tamanho, tanto em  $p'$  como em  $q$ . Para os ensaios sobreconsolidados à  $4000 \text{ kPa}$  não foi possível determinar uma superfície de plastificação única, o que pode indicar uma alteração na forma da superfície de plastificação devido à quebra de grãos.

Foi ainda estimada a superfície limite de estado do material a partir da normalização das trajetórias de tensões pela tensão média efetiva no estado crítico. A forma das superfícies estimadas está de acordo com as previsões de Chandler (1985) e resultados experimentais de Coop (1990). Além disso, a variação das superfícies limites de estado no trecho compressivo confirmam que não foram atingidas tensões suficientes para que seja obtida a Linha de Isotrópica de Compressão (LIC) do material.

### 5.1.5 Dilatância

Avaliou-se na análise de dilatância a influência da adoção de deformações plásticas ou totais no cálculo dessa. Observou-se que a adoção de ensaios sobreconsolidados permitiu a avaliação do comportamento do material com comportamento elástico desde pequenas deformações, enquanto amostras fofas ou compactas apresentam razão entre deformações plásticas e totais altas desde o início do ensaio. Determinou-se também que, a partir de pequenos níveis de deformação, aproximadamente a totalidade das deformações é de natureza plástica, de forma que a adoção da dilatância em termos de deformações totais não incorre em prejuízo nas análises. Ainda assim, optou-se por avaliar a dilatância do material em termos de dilatância plástica.

Em relação à dilatância, verificou-se que o sobreadensamento teve pouca influência sobre a magnitude da dilatância com os principais efeitos estando relacionados à mudança na morfologia das partículas durante o cisalhamento. O grau de sobreadensamento também não demonstrou influência significativa nos resultados obtidos. Foi demonstrada ainda, a inadequabilidade de leis tensão-dilatância usuais para representação do conjunto de dados experimentais. Esses aspectos, conforme explicitado durante a revisão bibliográfica, reforçam a dependência da dilatância no estado do material e no *fabric* formado, sendo necessárias considerações sobre esses aspectos na determinação de uma lei de dilatância apropriada.

### 5.1.6 Direção de fluxo plástico

Demonstrou-se através da sobreposição dos vetores de deformação plástica à superfície limite de estado e à superfície de plastificação a existência de uma lei de fluxo não associada para o material estudado. Os resultados estão de acordo com as formulações teóricas de Collins et al. (1997) e Chandler (1985) que definiram que a existência de uma lei de fluxo não associada é uma consequência formal da natureza friccional dos geomateriais, além das evidências experimentais de Poorooshasb et al. (1966) e Coop (1990).

### 5.1.7 Quebra de partículas

Houve quebra de partículas para as amostras ensaiadas sob as maiores tensões efetivas de confinamento. A ocorrência da quebra foi verificada através de análise granulométrica e de microscopia eletrônica antes e após o cisalhamento. Observa-se que a quebra de partículas, em contraste ao usualmente aceito, ocorre desde estágios iniciais de carregamento estando relacionada principalmente à mudança na morfologia das partículas durante o cisalhamento. A natureza antrópica dos rejeitos de mineração provê a esses materiais formas angulares e heterogêneas o que induz a quebra de saliências e redução da rugosidade ao longo do carregamento. Apesar de pequena magnitude, a quebra de partículas demonstrou efeitos na resposta constitutiva do material do ponto de vista da rigidez, comportamento tensão-deformação e da plastificação.

## 5.2 IMPLICAÇÕES À EQUAÇÃO DE ENERGIA

Como apresentado na revisão bibliográfica, uma forma geral para a equação de dissipação de energia é a seguinte:

$$\delta\Phi = p\sqrt{A(\xi)^2\dot{\epsilon}_v^{p2} + M^2B(\xi)^2\dot{\epsilon}_s^{p2}} \quad (2.18 \text{ rep.})$$

Os parâmetros  $A$  e  $B$  são funções do estado do material e estariam relacionados, respectivamente, à efeitos de compressão e distorção. O trabalho realizado fornece algumas informações adicionais sobre a forma da equação de dissipação de energia, são elas:

1. A existência de uma superfície de plastificação em formato de gota induz o efeito combinado de compressão e distorção na plastificação do material. Logo, devem ser considerados na equação de dissipação de energia cada um dos fenômenos envolvidos: rearranjo dos grãos, distorção dos grãos e quebra de partículas;
2. A dependência do tamanho da superfície de plastificação em  $q$  com o nível de tensões induz a influência da quebra de partículas e o enrijecimento em termos de deformações volumétricas e cisalhantes;
3. A variação do tamanho e da forma da superfície de plastificação com o nível de tensões sugere a dependência da equação de dissipação de energia na quantidade de quebra de partículas experimentada;
4. A existência de uma lei de fluxo não associada implica na dependência da lei de dissipação nas tensões verdadeiras;
5. A dilatância do material sofre influência tanto do *fabric* quanto do estado do material, portanto a equação de dissipação de energia deve ser função do estado.

Sendo assim,

1.  $A$  e  $B$  são funções da quebra de partículas;
2. A equação de energia precisa depender dos invariantes de tensão;
3.  $B$  é função do estado;
4. Existe um outro fator  $C$  que combina os efeitos em  $\dot{\epsilon}_v^p$  e  $\dot{\epsilon}_s^p$ ;
5.  $B$  é função do *fabric*.

Isso implica em algumas dificuldades a serem investigadas em futuros trabalhos, como por exemplo a definição de fatores quantitativos para medida de *fabric* e grau de quebra do material.

### 5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Realização de ensaios sobreconsolidados sob outras trajetórias de tensões a fim de melhor determinar a forma da superfície de plastificação;
- Ensaios triaxiais sob tensões confinantes superiores às atingidas nesse trabalho para melhor caracterizar os efeitos de quebra de partículas no comportamento do material;
- Realização de análise de processamento de imagem e ensaios específicos para a caracterização da morfologia das partículas do rejeito de ferro de forma quantitativa;
- Investigação micromecânica dos comportamentos macroscópicos observados através de simulações utilizando o Método dos Elementos Discretos (MED), considerando efeitos como a inclusão de finos e da forma das partículas;
- Investigação da influência de diferentes teores de finos no comportamento mecânico de rejeitos de mineração.

## REFERÊNCIAS

ANM. Resolução N° 13/2019. Estabelece Medidas Regulatórias Objetivando Assegurar a Estabilidade de Barragens de Mineração, Notadamente Aquelas Construídas Ou Alteadas Pelo Método Denominado "a Montante" Ou Por Método Declarado Como Desconhecido e Dá Outras Providências. **Diário Oficial da União**, ANM 13/2019, p. 44, 13 ago. 2019a.

\_\_\_\_\_. Resolução N° 4/2019. Estabelece Medidas Regulatórias Cautelares Objetivando Assegurar a Estabilidade de Barragens de Mineração, Notadamente Aquelas Construídas Ou Alteadas Pelo Método Denominado "a Montante" Ou Por Método Declarado Como Desconhecido. **Diário Oficial da União**, ANM 4/2019, p. 58, 15 fev. 2019b.

ARMSTRONG, Margaret; PETTER, Renato; PETTER, Carlos. Why Have so Many Tailings Dams Failed in Recent Years? **Resources Policy**, v. 63, p. 101412, out. 2019. ISSN 03014207. DOI: 10.1016/j.resourpol.2019.101412. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S030142071830610X>>. Acesso em: 11 out. 2022.

ASTM. **Standard Test Method for Consolidated Drained Triaxial Compression Test for Soils**. West Conshohocken, PA, 2020. P. 12. (ASTM D7181, 7181).

\_\_\_\_\_. **Standard Test Method for Particle-Size Distribution (Gradation) of Fine-Grained Soils Using the Sedimentation (Hydrometer) Analysis**. West Conshohocken, PA, 2021a. (ASTM D7928, D7928).

\_\_\_\_\_. **Standard Test Methods for Laboratory Compaction Characteristics of Soil Using Standard Effort (12,400 Ft-Lbf/Ft<sup>3</sup> (600 kN-m/M<sup>3</sup>))**. West Conshohocken, PA, 2021b. (ASTM D698, D698).

\_\_\_\_\_. **Standard Test Methods for Liquid Limit, Plastic Limit, and Plasticity Index of Soils**. West Conshohocken, PA, 2017. (ASTM D4318, D4318).

\_\_\_\_\_. **Standard Test Methods for Specific Gravity of Soil Solids by Water Pycnometer**. West Conshohocken, PA, 2014. (ASTM D854, 584).

ATKINSON, John H. **The Mechanics of Soils and Foundations**. 2. ed. London: Taylor & Francis, 2007. 442 p. (Spon Text). ISBN 978-0-203-01288-8 978-0-415-36256-6 978-0-415-36255-9.

BAKER, R. Nonlinear Mohr Envelopes Based on Triaxial Data. **J. Geotech. Geoenviron. Eng.**, v. 130, n. 5, p. 498–506, mai. 2004. ISSN 1090-0241, 1943-5606. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2004)130:5(498). Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%291090-0241%282004%29130%3A5%28498%29>>. Acesso em: 28 fev. 2023.

BEDELL, D. Thickening and Filtration. In: JEWELL, Richard J.; FOURIE, A B (Ed.). **Paste and Thickened Tailings: A Guide**. Nedlands, WA: Australian Centre for Geomechanics [u.a.], 2006. ISBN 978-0-9756756-4-9.

BEDIN, J.; SCHNAID, F.; DA FONSECA, A.V.; COSTA FILHO, L.De M. Gold Tailings Liquefaction under Critical State Soil Mechanics. **Géotechnique**, v. 62, n. 3, p. 263–267, mar. 2012. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.10.P.037. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.10.P.037>>. Acesso em: 23 set. 2022.

BEEN, Ken; JEFFERIES, Michael. A State Parameter for Sands. **Géotechnique**, v. 35, n. 2, p. 99–112, jun. 1985. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1985.35.2.99. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1985.35.2.99>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

BEEN, Ken; JEFFERIES, Michael; HACHEY, J. The Critical State of Sands. **Géotechnique**, v. 41, n. 3, p. 365–381, set. 1991. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1991.41.3.365. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1991.41.3.365>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

BISHOP, A. W.; WESLEY, L. D. A Hydraulic Triaxial Apparatus for Controlled Stress Path Testing. **Géotechnique**, v. 25, n. 4, p. 657–670, dez. 1975. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1975.25.4.657. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1975.25.4.657>>. Acesso em: 26 jan. 2023.

BLIGHT, G. E. **Geotechnical Engineering for Mine Waste Storage Facilities**. Boca Raton: CRC Press, 2010. 634 p. ISBN 978-0-415-46828-2.

BOLTON, M. D. The Strength and Dilatancy of Sands. **Géotechnique**, v. 36, n. 1, p. 65–78, mar. 1986. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1986.36.1.65. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1986.36.1.65>>. Acesso em: 14 nov. 2022.

BOWMAN, E. T.; SOGA, K.; DRUMMOND, W. Particle Shape Characterisation Using Fourier Descriptor Analysis. **Géotechnique**, v. 51, n. 6, p. 545–554, ago. 2001. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2001.51.6.545. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2001.51.6.545>>. Acesso em: 27 fev. 2023.

BUTTERFIELD, R. A Natural Compression Law for Soils (an Advance on e-Log p'). **Géotechnique**, v. 29, n. 4, p. 469–480, dez. 1979. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1979.29.4.469. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1979.29.4.469>>. Acesso em: 24 fev. 2023.

CALDWELL, Jack; CRYSTAL, Colleen. Filter-Pressed Tailings Facility Design, Construction, and Operating Guidelines. In: TAILINGS AND MINE WASTE CONFERENCE. **Tailings and Mine Waste Conference**. Vancouver, Canada: University of British Columbia, 2015. DOI: 10.14288/1.0320844. Disponível em: <<https://doi.library.ubc.ca/10.14288/1.0320844>>. Acesso em: 27 out. 2022.

CARRARO, J. Antonio H.; PREZZI, Monica; SALGADO, Rodrigo. Shear Strength and Stiffness of Sands Containing Plastic or Nonplastic Fines. **J. Geotech. Geoenviron. Eng.**, v. 135, n. 9, p. 1167–1178, set. 2009. ISSN 1090-0241, 1943-5606. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2009)135:9(1167). Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%291090-0241%282009%29135%3A9%281167%29>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

CARRASCO, Ivan. Shifting the Mind Set: Tailings Management at the Las Cruces Mine (Seville, Spain). **Mine Water Environ**, v. 40, n. 1, p. 16–22, mar. 2021. ISSN 1025-9112, 1616-1068. DOI: 10.1007/s10230-020-00735-1. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10230-020-00735-1>>. Acesso em: 5 nov. 2022.

CARRERA, A.; COOP, Matthew Richard; LANCELLOTTA, R. Influence of Grading on the Mechanical Behaviour of Stava Tailings. **Géotechnique**, v. 61, n. 11, p. 935–946, nov. 2011. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.9.P.009. Disponível em: <<https://www.icvirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.9.P.009>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

CARVALHO, João Vítor de Azambuja; WAGNER, Alexia Cindy; SCHEUERMANN FILHO, Hugo Carlos; CHAVES, Helder Mansur; SILVA, João Paulo Sousa; DELGADO, Bruno Guimarães; CONSOLI, Nilo Cesar. Evaluation of Strength Parameters for Application in Cemented Iron Ore Tailings Stacks. **Indian Geotech J**, 8 fev. 2023. ISSN 0971-9555, 2277-3347. DOI: 10.1007/s40098-023-00712-9. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s40098-023-00712-9>>. Acesso em: 9 fev. 2023.

CASAGRANDE, Arthur. Characteristics of Cohesionless Soils Affecting the Stability of Slopes and Earth Fills. **J. Boston Soc. Civil Engineers**, v. 23, n. 1, p. 13–32, 1936.

CAVARRETTA, I.; O’SULLIVAN, C.; COOP, Matthew Richard. The Relevance of Roundness to the Crushing Strength of Granular Materials. **Géotechnique**, v. 67, n. 4, p. 301–312, abr. 2017. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/jgeot.15.P.226. Disponível em: <<https://www.icvirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgeot.15.P.226>>. Acesso em: 23 set. 2022.

CHANDLER, H.W. A Plasticity Theory without Drucker’s Postulate, Suitable for Granular Materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 33, n. 3, p. 215–226, jan. 1985. ISSN 00225096. DOI: 10.1016/0022-5096(85)90012-2. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0022509685900122>>. Acesso em: 31 ago. 2022.

CHANG, Ching S.; DENG, Yibing. Energy Equation and Stress–Dilatancy Relationship for Sand. **Acta Geotech.**, v. 17, n. 7, p. 2675–2696, jul. 2022. ISSN 1861-1125, 1861-1133. DOI: 10.1007/s11440-021-01389-1. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s11440-021-01389-1>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

CIMNE. **Computational Analyses of Dam I Failure at the Crrego Do Feijao Mine in Brumadinho**. 2021. Disponível em: <<https://www.mpf.mp.br/mg/sala-de-imprensa/docs/2021/relatorio-final-cinme-upc-1>>. Acesso em: 15 set. 2022.

CLAYTON, C. R. I.; KHATRUSH, S. A. A New Device for Measuring Local Axial Strains on Triaxial Specimens. **Géotechnique**, v. 36, n. 4, p. 593–597, dez. 1986. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1986.36.4.593. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1986.36.4.593>>. Acesso em: 11 out. 2022.

COLLINS, Ian F. A Systematic Procedure for Constructing Critical State Models in Three Dimensions. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 17, p. 4379–4397, ago. 2003. ISSN 00207683. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00226-9. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020768303002269>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

\_\_\_\_\_. The Concept of Stored Plastic Work or Frozen Elastic Energy in Soil Mechanics. **Géotechnique**, v. 55, n. 5, p. 373–382, jun. 2005. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2005.55.5.373. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2005.55.5.373>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

COLLINS, Ian F.; GUNN, C. I. M.; PENDER, M. J.; YAN, Wang. Slope Stability Analyses for Materials with a Non-Linear Failure Envelope. **Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.**, v. 12, n. 5, p. 533–550, set. 1988. ISSN 0363-9061, 1096-9853. DOI: 10.1002/nag.1610120507. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.1610120507>>. Acesso em: 28 fev. 2023.

COLLINS, Ian F.; HILDER, Tamsyn. A Theoretical Framework for Constructing Elastic/Plastic Constitutive Models of Triaxial Tests. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.**, v. 26, n. 13, p. 1313–1347, nov. 2002a. ISSN 0363-9061, 1096-9853. DOI: 10.1002/nag.247. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.247>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

COLLINS, Ian F.; HOULSBY, Guy Tinmouth. Application of Thermomechanical Principles to the Modelling of Geotechnical Materials. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 453, n. 1964, p. 1975–2001, 8 set. 1997. ISSN 1364-5021, 1471-2946. DOI: 10.1098/rspa.1997.0107. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1997.0107>>. Acesso em: 26 jan. 2023.

COLLINS, Ian F.; KELLY, P. A. A Thermomechanical Analysis of a Family of Soil Models. **Géotechnique**, v. 52, n. 7, p. 507–518, set. 2002b. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2002.52.7.507. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2002.52.7.507>>. Acesso em: 25 jan. 2023.

COLLINS, Ian F.; MUHUNTHAN, B.; QU, B. Thermomechanical State Parameter Models for Sands. **Géotechnique**, v. 60, n. 8, p. 611–622, ago. 2010. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.8.P.127. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.8.P.127>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

COLLINS, Ian F.; MUHUNTHAN, B.; TAI, A. T. T.; PENDER, M. J. The Concept of a ‘Reynolds–Taylor State’ and the Mechanics of Sands. **Géotechnique**, v. 57, n. 5, p. 437–447, jun. 2007. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2007.57.5.437. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2007.57.5.437>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

CONNELLY, Damian. Lessons Learned from Thickening and Filtering Tailings for Dry Stacking. In: PASTE 2021: 24TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON PASTE, THICKENED AND FILTERED TAILINGS, p. 31–42. DOI: 10.36487/ACG\_repo/2115\_04. Disponível em: <[https://papers.acg.uwa.edu.au/p/2115\\_04\\_Connelly/](https://papers.acg.uwa.edu.au/p/2115_04_Connelly/)>. Acesso em: 5 nov. 2022.

CONSOLI, Nilo Cesar; HEINECK, Karla Salvagni; COOP, Matthew Richard; DA FONSECA, António Viana; FERREIRA, Cristiana. Coal Bottom Ash as a Geomaterial: Influence of Particle Morphology on the Behavior of Granular Materials. **Soils and Foundations**, v. 47, n. 2, p. 361–373, abr. 2007. ISSN 00380806. DOI: 10.3208/sandf.47.361. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080620305217>>. Acesso em: 29 out. 2022.

CONSOLI, Nilo Cesar; SILLS, G. C. Soil Formation from Tailings: Comparison of Predictions and Field Measurements. **Géotechnique**, v. 50, n. 1, p. 25–33, fev. 2000. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2000.50.1.25. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2000.50.1.25>>. Acesso em: 11 out. 2022.

CONSOLI, Nilo Cesar; VOGT, Jordanna Chamon; SILVA, João Paulo Sousa; CHAVES, Helder Mansur; SCHEUERMANN FILHO, Hugo Carlos; MOREIRA, Eclesieter Batista; LOTERO, Andres. Behaviour of Compacted Filtered Iron Ore Tailings–Portland Cement Blends: New Brazilian Trend for Tailings Disposal by Stacking. **Applied Sciences**, v. 12, n. 2, p. 836, 14 jan. 2022. ISSN 2076-3417. DOI: 10.3390/app12020836. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2076-3417/12/2/836>>. Acesso em: 24 jun. 2022.

COOP, Matthew Richard. The Mechanics of Uncemented Carbonate Sands. **Géotechnique**, v. 40, n. 4, p. 607–626, dez. 1990. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1990.40.4.607. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1990.40.4.607>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

COOP, Matthew Richard; LEE, I K. The Behaviour of Granular Soils at Elevated Stresses. In: WROTH MEMORIAL SYMPOSIUM. **Predictive Soil Mechanics. Proceedings of the Wroth Memorial Symposium**. Oxford: Thomas Telford Ltda, 1993. P. 186–98.

COULOMB, C. A. Essai Sur Une Application Des Regies Des Maximis et Minimis a Quelques Problemes de Statique Relatifs a l'architecture. , **Mem. pres. pardiv. savants**, v. 7, p. 343–382, 1773.

DAUCE, Pedro Domingos; CASTRO, Guilherme Bernardes de; LIMA, Margarida Márcia Fernandes; LIMA, Rosa Malena Fernandes. Characterisation and Magnetic Concentration of an Iron Ore Tailings. **Journal of Materials Research and Technology**, v. 8, n. 1, p. 1052–1059, jan. 2019. ISSN 22387854. DOI: 10.1016/j.jmrt.2018.07.015. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2238785418300760>>. Acesso em: 7 out. 2022.

DAVIES, Michael. Filtered Dry Stacked Tailings : The Fundamentals. In: TAILINGS and Mine Waste Conference. Vancouver, Canada: The University of British Columbia, 2011. DOI: 10.14288/1.0107683. Disponível em: <<https://doi.library.ubc.ca/10.14288/1.0107683>>. Acesso em: 10 jun. 2022.

DAVIES, Michael; LUPO, J.; MARTIN, Todd; MCROBERTS, Ed; MUSSE, Marcelo; RITCHIE, David. Dewatered Tailings Practice - Trends and Observations. In: TAILINGS AND MINE WASTE (Ed.). **Tailings and Mine Waste 2010**. CRC Press, 12 nov. 2010. ISBN 978-0-415-61455-9. DOI: 10.1201/b10569. Disponível em: <<http://www.crcnetbase.com/doi/book/10.1201/b10569>>. Acesso em: 3 nov. 2022.

DAVIES, Michael; RICE, S. An Alternative to Conventional Tailing Management – “Dry Stack” Filtered Tailings. In: TAILINGS and Mine Waste 01. 1. ed. Denver, 2001. P. 411–420. ISBN 978-1-00-307870-8.

DE JOSSELIN DE JONG, G. Rowe’s Stress—Dilatancy Relation Based on Friction. **Géotechnique**, v. 26, n. 3, p. 527–534, set. 1976. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1976.26.3.527. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1976.26.3.527>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

DE BONO, John P.; MCDOWELL, Glenn R. DEM of Triaxial Tests on Crushable Sand. **Granular Matter**, v. 16, n. 4, p. 551–562, ago. 2014. ISSN 1434-5021, 1434-7636. DOI: 10.1007/s10035-014-0500-x. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s10035-014-0500-x>>. Acesso em: 28 jun. 2022.

\_\_\_\_\_. Investigating the Effects of Particle Shape on Normal Compression and Overconsolidation Using DEM. **Granular Matter**, v. 18, n. 3, p. 55, ago. 2016. ISSN 1434-5021, 1434-7636. DOI: 10.1007/s10035-016-0605-5. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10035-016-0605-5>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

\_\_\_\_\_. Micro Mechanics of Drained and Undrained Shearing of Compacted and Overconsolidated Crushable Sand. **Géotechnique**, p. 1–15, 26 out. 2017. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/jgeot.16.P.318. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgeot.16.P.318>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

\_\_\_\_\_. On the Micro Mechanics of Yielding and Hardening of Crushable Granular Soils. **Computers and Geotechnics**, v. 97, p. 167–188, mai. 2018. ISSN 0266352X. DOI: 10.1016/j.compgeo.2018.01.010. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0266352X1830020X>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

\_\_\_\_\_. The Effects of Particle Shape on the Yielding Behaviour of Crushable Sand. **Soils and Foundations**, v. 60, n. 2, p. 520–532, abr. 2020. ISSN 00380806. DOI: 10.1016/j.sandf.2020.04.001. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080620336106>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

DESAI, C. S.; SIRIWARDANE, Hema J. **Constitutive Laws for Engineering Materials, with Emphasis on Geologic Materials**. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1984. 468 p. ISBN 978-0-13-167940-5.

DIMITRIADIS, Dimitris; ZACHAREAS, Efstratios; GAZEA, Vithleem. Upgrading of a Tailings Management Facility for the Disposal of Dry Stack Tailings. In: RAWMAT 2021. **International Conference on Raw Materials and Circular Economy**. MDPI, 6 jun. 2022. P. 132. DOI: 10.3390/materproc2021005132. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2673-4605/5/1/132>>. Acesso em: 5 nov. 2022.

DRUCKER, Daniel C.; GIBSON, Robert E.; HENKEL, David J. Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity. **T. Am. Soc. Civ. Eng.**, v. 122, n. 1, p. 338–346, jan. 1957. ISSN 0066-0604, 2690-4071. DOI: 10.1061/TACEAT.0007430. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/TACEAT.0007430>>. Acesso em: 10 nov. 2022.

DUNCAN, James M.; CHANG, Chin-Yung. Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils. **J. Soil Mech. and Found. Div.**, v. 96, n. 5, p. 1629–1653, set. 1970. ISSN 0044-7994, 2690-3369. DOI: 10.1061/JSFEAQ.0001458. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/JSFEAQ.0001458>>. Acesso em: 12 nov. 2022.

EAST, Donald; FERNANDEZ, Ruben. Managing Water to Minimize Risk in Tailings Storage Facility Design, Construction, and Operation. **Mine Water Environ**, v. 40, n. 1, p. 36–41, mar. 2021. ISSN 1025-9112, 1616-1068. DOI: 10.1007/s10230-020-00720-8. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s10230-020-00720-8>>. Acesso em: 5 nov. 2022.

EDRAKI, Mansour; BAUMGARTL, Thomas; MANLAPIG, Emmanuel; BRADSHAW, Dee; FRANKS, Daniel M.; MORAN, Chris J. Designing Mine Tailings for Better Environmental, Social and Economic Outcomes: A Review of Alternative Approaches. **Journal of Cleaner Production**, v. 84, p. 411–420, dez. 2014. ISSN 09596526. DOI: 10.1016/j.jclepro.2014.04.079. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0959652614004429>>. Acesso em: 26 jul. 2022.

EINAV, Itai. Breakage Mechanics - Part I: Theory. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 55, n. 6, p. 1274–1297, jun. 2007. ISSN 00225096. DOI: 10.1016/j.jmps.2006.11.003. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022509606001827>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

FOURIE, A. B.; VERDUGO, Ramon; BJELKEVIK, Annika; TORRES-CRUZ, Luis A.; ZNIDARCIC, Dobroslov. Geotechnics of Mine Tailings: A 2022 State of the Art. In: 20TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING. **Proceedings of the 20th ICSMGE**. Sydney, Australia, 2022. ISBN 978-0-9946261-6-5.

FRANKS, Daniel M.; BOGER, David V.; CÔTE, Claire M.; MULLIGAN, David R. Sustainable Development Principles for the Disposal of Mining and Mineral Processing Wastes. **Resources Policy**, v. 36, n. 2, p. 114–122, jun. 2011. ISSN 03014207. DOI: 10.1016/j.resourpol.2010.12.001.

Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301420710000747>>. Acesso em: 3 nov. 2022.

FROSSARD, E. Effect of Sand Grain Shape on Interparticle Friction; Indirect Measurements by Rowe's Stress Dilatancy Theory. **Géotechnique**, v. 29, n. 3, p. 341–350, set. 1979. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1979.29.3.341. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1979.29.3.341>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

FURNELL, Erin; BILANIUK, Ksenia; GOLDBAUM, Matthew; SHOAIB, Mohammed; WANI, Omar; TIAN, Xinyi; CHEN, Zhirong; BOUCHER, Darryel; BOBICKI, Erin Rae. Dewatered and Stacked Mine Tailings: A Review. **ACS EST Eng.**, v. 2, n. 5, p. 728–745, 13 mai. 2022. ISSN 2690-0645, 2690-0645. DOI: 10.1021/acsestengg.1c00480. Disponível em: <<https://pubs.acs.org/doi/10.1021/acsestengg.1c00480>>. Acesso em: 26 jul. 2022.

GAJO, A.; MUIR WOOD, David. A Kinematic Hardening Constitutive Model for Sands: The Multiaxial Formulation. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.**, v. 23, n. 9, p. 925–965, 10 ago. 1999a. ISSN 0363-9061, 1096-9853. DOI: 10.1002/(SICI)1096-9853(19990810)23:9<925::AID-NAG19>3.0.CO;2-M. Disponível em: <[https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/\(SICI\)1096-9853\(19990810\)23:9%3C925::AID-NAG19%3E3.0.CO;2-M](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1096-9853(19990810)23:9%3C925::AID-NAG19%3E3.0.CO;2-M)>. Acesso em: 15 jul. 2022.

\_\_\_\_\_. Severn–Trent Sand: A Kinematic–Hardening Constitutive Model: The  $q$ – $p$  Formulation. **Géotechnique**, v. 49, n. 5, p. 595–614, out. 1999b. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1999.49.5.595. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1999.49.5.595>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

GLOBAL TAILINGS PORTAL. **Dashboard - Tailing Storage Facility**. Global Tailings Portal. 2021. Disponível em: <<https://tailing.grida.no>>. Acesso em: 19 out. 2022.

GOMES, Reinaldo Brandao; DE TOMI, Giorgio; ASSIS, Paulo Santos. Iron Ore Tailings Dry Stacking in Pau Branco Mine, Brazil. **Journal of Materials Research and Technology**, v. 5, n. 4, p. 339–344, out. 2016. ISSN 22387854. DOI: 10.1016/j.jmrt.2016.03.008. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2238785416300357>>. Acesso em: 28 jul. 2022.

GOUDARZY, Meisam; RAHMAN, Md. Mizanur; KÖNIG, Diethard; SCHANZ, Tom. Influence of Non-Plastic Fines Content on Maximum Shear Modulus of Granular Materials. **Soils and Foundations**, v. 56, n. 6, p. 973–983, dez. 2016. ISSN 00380806. DOI: 10.1016/j.sandf.2016.11.003. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080616301202>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

GUDEHUS, G. A Comprehensive Constitutive Equation for Granular Materials. **Soils and Foundations**, v. 36, n. 1, p. 1–12, mar. 1996. ISSN 00380806. DOI: 10.3208/sandf.36.1. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080620313391>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

GUIDA, G.; SEBASTIANI, D.; CASINI, F.; MILIZIANO, S. Grain Morphology and Strength Dilatancy of Sands. **Géotechnique Letters**, v. 9, n. 4, p. 245–253, dez. 2019. ISSN 2045-2543. DOI: 10.1680/jgele.18.00199. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgele.18.00199>>. Acesso em: 24 set. 2022.

GUPTA, Ashok; YAN, Denis. Solid Liquid Separation – Filtration. In: MINERAL Processing Design and Operations. Elsevier, 2016. P. 507–561. ISBN 978-0-444-63589-1. DOI: 10.1016/B978-0-444-63589-1.00015-0. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780444635891000150>>. Acesso em: 28 out. 2022.

HILL, Rodney. **The Mathematical Theory of Plasticity**. Oxford : New York: Clarendon Press ; Oxford University Press, 1998. 355 p. (Oxford Engineering Science Series, 11). ISBN 978-0-19-850367-5.

HORE, C; LUPPNOW, D. Karara Iron Ore TSF - Design Considerations for a Unique Large Scale Dry Stack Facility. In: TAILINGS AND MINE WASTE CONFERENCE. **Tailings and Mine Waste Conference**. Keystone, Colorado, USA, 2014.

HOULSBY, Guy Tinmouth. How The Dilatancy of Soils Affects Their Behaviour. In: CONFERENCE ON SOIL MECHANICS AND FOUNDATION ENGINEERING. **Proceedings of the Tenth Eutopean Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**. Florence, Italy, 1991.

\_\_\_\_\_. **Study of Plasticity Theories and Their Applicability to Soils**. 16 jun. 1981. 241 f. University of Cambridge, Cambridge, UK. Disponível em: <<https://www.repository.cam.ac.uk/handle/1810/250783>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

\_\_\_\_\_. The Work Input to a Granular Material. **Géotechnique**, v. 29, n. 3, p. 354–358, set. 1979. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1979.29.3.354. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1979.29.3.354>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

ISHIHARA, K. Liquefaction and Flow Failure during Earthquakes. **Géotechnique**, v. 43, n. 3, p. 351–451, set. 1993. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1993.43.3.351. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1993.43.3.351>>. Acesso em: 22 jan. 2023.

ISLAM, Kamrul; MURAKAMI, Shinsuke. Global-Scale Impact Analysis of Mine Tailings Dam Failures: 1915–2020. **Global Environmental Change**, v. 70, p. 102361, set. 2021. ISSN 09593780. DOI: 10.1016/j.gloenvcha.2021.102361. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0959378021001400>>. Acesso em: 24 jun. 2022.

JEFFERIES, Michael. Nor-Sand: A Simle Critical State Model for Sand. **Géotechnique**, v. 43, n. 1, p. 91–103, mar. 1993. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1993.43.1.91. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1993.43.1.91>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

JEFFERIES, Michael. On the Fundamental Nature of the State Parameter. **Géotechnique**, p. 1–10, 12 nov. 2021. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/jgeot.20.P.228. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgeot.20.P.228>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

\_\_\_\_\_. Plastic Work and Isotropic Softening in Unloading. **Géotechnique**, v. 47, n. 5, p. 1037–1042, out. 1997. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1997.47.5.1037. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1997.47.5.1037>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

JEFFERIES, Michael; BEEN, Ken. Implications for Critical State Theory from Isotropic Compression of Sand. **Géotechnique**, v. 50, n. 4, p. 419–429, ago. 2000. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2000.50.4.419. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2000.50.4.419>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

\_\_\_\_\_. **Soil Liquefaction: A Critical State Approach**. 2. ed. London, UK: CRC Press, 2016. 712 p. ISBN 978-0-367-87340-0.

JEFFERIES, Michael; SHUTTLE, Dawn A. Dilatancy in General Cambridge-type Models. **Géotechnique**, v. 52, n. 9, p. 625–638, 2002. DOI: doi.org/10.1680/geot.2002.52.9.625.

\_\_\_\_\_. On the Operating Critical Friction Ratio in General Stress States. **Géotechnique**, v. 61, n. 8, p. 709–713, ago. 2011. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.9.T.032. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.9.T.032>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

JOVICIC, V.; COOP, Matthew Richard. Stiffness of Coarse-Grained Soils at Small Strains. **Géotechnique**, v. 47, n. 3, p. 545–561, jun. 1997. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1997.47.3.545. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1997.47.3.545>>. Acesso em: 28 fev. 2023.

KOSSOFF, D.; DUBBIN, W.E.; ALFREDSSON, M.; EDWARDS, S.J.; MACKLIN, M.G.; HUDSON-EDWARDS, K.A. Mine Tailings Dams: Characteristics, Failure, Environmental Impacts, and Remediation. **Applied Geochemistry**, v. 51, p. 229–245, dez. 2014. ISSN 08832927. DOI: 10.1016/j.apgeochem.2014.09.010. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0883292714002212>>. Acesso em: 26 jul. 2022.

KUWANO, R.; JARDINE, R. J. A Triaxial Investigation of Kinematic Yielding in Sand. **Géotechnique**, v. 57, n. 7, p. 563–579, set. 2007. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2007.57.7.563. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2007.57.7.563>>. Acesso em: 26 jan. 2023.

KWAN, Karvin; DAWSON, Richard; BOESE, Calvin; CHURCHER, Dale. Design of the Eldorado Gold Efemçukuru Filtered Tailings Facility. The University of British Columbia, 2011. DOI: 10.14288/1.0107743. Disponível em: <<https://doi.library.ubc.ca/10.14288/1.0107743>>. Acesso em: 5 nov. 2022.

LA ROCHELLE, P; LEROUÉIL, S; TRAK, B; BLAIS-LEROUX, L; TAVENAS, F. Observational Approach to Membrane and Area Corrections in Triaxial Tests. In: DONAGHE, Rt; CHANEY, Rc; SILVER, MI (Ed.). **Advanced Triaxial Testing of Soil and Rock**. 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959: ASTM International, 1 jan. 1988. P. 715-715–17. ISBN 978-0-8031-0983-4. DOI: 10.1520/STP29110S. Disponível em: <<http://www.astm.org/doiLink.cgi?STP29110S>>. Acesso em: 9 fev. 2023.

LADD, Rs. Preparing Test Specimens Using Undercompaction. **Geotech. Test. J.**, v. 1, n. 1, p. 16, 1978. ISSN 01496115. DOI: 10.1520/GTJ10364J. Disponível em: <<http://www.astm.org/doiLink.cgi?GTJ10364J>>. Acesso em: 11 jun. 2022.

LADE, Poul V. Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces. **International Journal of Solids and Structures**, v. 13, n. 11, p. 1019–1035, 1977. ISSN 00207683. DOI: 10.1016/0020-7683(77)90073-7. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020768377900737>>. Acesso em: 20 set. 2022.

\_\_\_\_\_. **Triaxial Testing of Soils**. Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2016. 1 p. ISBN 978-1-119-10659-3.

LADE, Poul V.; YAMAMURO, Jerry A. Effects of Nonplastic Fines on Static Liquefaction of Sands. **Can. Geotech. J.**, v. 34, n. 6, p. 918–928, 1 dez. 1997. ISSN 0008-3674, 1208-6010. DOI: 10.1139/t97-052. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/t97-052>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

LAMBE, T. William; WHITMAN, Robert v. **Soil Mechanics**. New York, USA: John Wiley & Sons, 1979. 552 p. (Series in Soil Engineering).

LARA, Jose L.; PORNILLOS, Emmanuel; MUNOZ, H. Geotechnical-Geochemical and Operational Considerations for the Application of Dry Stacking Tailings Deposits – State-of-the-Art. In: 16TH INTERNATIONAL SEMINAR ON PASTE AND THICKENED TAILINGS, p. 249–260. DOI: 10.36487/ACG\_rep/1363\_19\_Munoz. Disponível em: <[https://papers.acg.uwa.edu.au/p/1363\\_19\\_Munoz/](https://papers.acg.uwa.edu.au/p/1363_19_Munoz/)>. Acesso em: 27 out. 2022.

LÈBRE, Éléonore; CORDER, Glen; GOLEV, Artem. The Role of the Mining Industry in a Circular Economy: A Framework for Resource Management at the Mine Site Level: The Role of the Mining Industry in a Circular Economy. **Journal of Industrial Ecology**, v. 21, n. 3, p. 662–672, jun. 2017. ISSN 10881980. DOI: 10.1111/jiec.12596. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/jiec.12596>>. Acesso em: 28 jul. 2022.

LI, Wei. **The Mechanics of Tailings**. 2017. 267 f. Doutorado – City University of Hong Kong, Hong Kong.

LI, Wei; COOP, Matthew Richard. The Mechanical Behaviour of Panzhihua Iron Tailings. **Can. Geotech. J.**, v. 56, n. 3, p. 420–435, mar. 2019. ISSN 0008-3674, 1208-6010. DOI: 10.1139/cgj-2018-0032. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/cgj-2018-0032>>. Acesso em: 10 jun. 2022.

LI, Wei; COOP, Matthew Richard; SENETAKIS, K.; SCHNAID, F. The Mechanics of a Silt-Sized Gold Tailing. **Engineering Geology**, v. 241, p. 97–108, jul. 2018. ISSN 00137952. DOI: 10.1016/j.enggeo.2018.05.014. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013795218300711>>. Acesso em: 10 jun. 2022.

LI, Xiang Song; DAFALIAS, Yannis F. Anisotropic Critical State Theory: Role of Fabric. **J. Eng. Mech.**, v. 138, n. 3, p. 263–275, mar. 2012. ISSN 0733-9399, 1943-7889. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000324. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29EM.1943-7889.0000324>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

\_\_\_\_\_. Dilatancy for Cohesionless Soils. **Géotechnique**, v. 50, n. 4, p. 449–460, ago. 2000. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2000.50.4.449. Disponível em: <<https://www.icervirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2000.50.4.449>>. Acesso em: 14 nov. 2022.

LIMA, Rosa Malena Fernandes; LOPES, Gilmara Mendonça; GONTIJO, Carlos de Figueiredo. ASPECTOS MINERALÓGICOS, FÍSICOS E QUÍMICOS NA FLOTAÇÃO CATIONICA INVERSA DE MINÉRIOS DE FERRO DE BAIXOS TEORES, DO QUADRILÁTERO FERRÍFERO-MG. **TMM**, v. 8, n. 2, p. 126–131, 2011. ISSN 19827709. DOI: 10.4322/tmm.2011.020. Disponível em: <<http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/tmm.2011.020>>. Acesso em: 16 out. 2022.

LIU, Lin; YAO, Yangping; LUO, Ting; ZHOU, Annan. A Constitutive Model for Granular Materials Subjected to a Large Stress Range. **Computers and Geotechnics**, v. 120, p. 103408, abr. 2020. ISSN 0266352X. DOI: 10.1016/j.compgeo.2019.103408. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0266352X19304720>>. Acesso em: 15 jan. 2023.

LUPO, J.; HALL, J. Dry Stack Tailings - Design Considerations. In: **Tailings and Mine Waste '10: Proceedings of the 14th International Conference on Tailings and Mine Waste, Vail, Colorado, USA, 17 - 20 October 2010**. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2011. ISBN 978-0-415-61455-9.

LYU, Zongjie; CHAI, Junrui; XU, Zengguang; QIN, Yuan; CAO, Jing. A Comprehensive Review on Reasons for Tailings Dam Failures Based on Case History. **Advances in Civil Engineering**, v. 2019, p. 1–18, 20 jun. 2019. ISSN 1687-8086, 1687-8094. DOI: 10.1155/2019/4159306. Disponível em: <<https://www.hindawi.com/journals/ace/2019/4159306/>>. Acesso em: 11 out. 2022.

MAFESSOLI, Maiki; MARQUES, Sérgio Filipe Veloso; SCHEUERMANN FILHO, Hugo Carlos; CONSOLI, Nilo Cesar. Response of Artificially Cemented Iron Ore Tailings for Dry Stacking Disposal over a Wide Range of Stresses. **Indian Geotech J**, 26 jan. 2023. ISSN 0971-9555, 2277-3347. DOI: 10.1007/s40098-023-00711-w. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s40098-023-00711-w>>. Acesso em: 4 fev. 2023.

MARQUES, Sérgio Filipe Veloso. **Comportamento de Uma Areia Artificialmente Cimentada Até Altas Tensões de Confinamento**. 2016. 239 f. Doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

MATSUOKA, Hajime. Dilatancy Characteristics of Soil. **Soils and Foundations**, v. 14, n. 3, p. 13–24, set. 1974. ISSN 00380806. DOI: 10.3208/sandf1972.14.3\_13. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080620325853>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

MCDOWELL, Glenn R. A Family of Yield Loci Based on Micro Mechanics. **Soils and Foundations**, v. 40, n. 6, p. 133–137, dez. 2000. ISSN 00380806. DOI: 10.3208/sandf.40.6\_133. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080620309690>>. Acesso em: 24 fev. 2023.

MCDOWELL, Glenn R.; HUMPHREYS, A. Yielding of Granular Materials. **GM**, v. 4, n. 1, p. 1–8, fev. 2002. ISSN 1434-5021. DOI: 10.1007/s10035-001-0100-4. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10035-001-0100-4>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

MEND. **Study of Tailings Management Technologies**. 2017. (Mine Environment Neutral Drainage, 2.50.1).

MENZIES, B. K. A Device for Measuring Volume Change. **Géotechnique**, v. 25, n. 1, p. 133–134, mar. 1975. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1975.25.1.133. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1975.25.1.133>>. Acesso em: 7 out. 2022.

MITCHELL, James Kenneth; SOGA, Kenichi. **Fundamentals of Soil Behavior**. 3rd ed. Hoboken, N.J: John Wiley & Sons, 2005. 577 p. ISBN 978-0-471-46302-3.

MORGENSTERN, Norbert R.; VICK, Steven G.; VIOTTI, Cássio B.; WATTS, Bryan D. **Report on the Immediate Causes of the Failure of the Fundão Dam**. 2016.

MUIR WOOD, David. **Geotechnical Modelling**. London ; New York: Spon Press, 2004. 488 p. (Applied Geotechnics, v. 1). ISBN 978-0-415-34304-6.

\_\_\_\_\_. On Stress Parameters. **Géotechnique**, v. 34, n. 2, p. 282–287, jun. 1984. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1984.34.2.282. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1984.34.2.282>>. Acesso em: 22 out. 2022.

\_\_\_\_\_. **Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics**. Cambridge [England] ; New York: Cambridge University Press, 1990. 462 p. ISBN 978-0-521-33249-1.

\_\_\_\_\_. The Magic of Sands - The 20th Bjerrum Lecture. **Can. Geotech. J.**, v. 44, n. 11, p. 1329–1350, nov. 2007. ISSN 0008-3674, 1208-6010. DOI: 10.1139/T07-060. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/T07-060>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

MUIR WOOD, David; MAEDA, Kenichi. Changing Grading of Soil: Effect on Critical States. **Acta Geotech.**, v. 3, n. 1, p. 3–14, mar. 2008. ISSN 1861-1125, 1861-1133. DOI: 10.1007/s11440-007-0041-0. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11440-007-0041-0>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

NEWMAN, L; ARNOLD, K; WITTEWER, D. Dry Stack Tailings Design for the Rosemont Copper Project. In: TAILINGS and Mine Waste Conference. Vancouver, Canada: The University of British Columbia, 2011.

NOVA, R. A Constitutive Model for Soil under Monotonic and Cyclic Loading. In: SOIL Mechanics - Transient and Cyclic Loads. Redigido por G. N. Pande e C. Zienkiewicz. Chichester, 1982. P. 343–373.

NOVA, R.; MUIR WOOD, David. An Experimental Programme to Define the Yield Function for Sand. **Soils and Foundations**, v. 18, n. 4, p. 77–86, dez. 1978. ISSN 00380806. DOI: 10.3208/sandf1972.18.4\_77. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080620322228>>. Acesso em: 22 out. 2022.

O’SULLIVAN, C.; WADEE, M.A.; HANLEY, K.J.; BARRETO, D. Use of DEM and Elastic Stability Analysis to Explain the Influence of the Intermediate Principal Stress on Shear Strength. **Géotechnique**, v. 63, n. 15, p. 1298–1309, dez. 2013. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.12.P.153. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.12.P.153>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

OLDECOP, Luciano; RODARI, Germán. Unsaturated Mine Tailings Disposal. **S&R**, v. 44, n. 3, p. 1–12, 13 ago. 2021. ISSN 19809743, 26755475. DOI: 10.28927/SR.2021.067421. Disponível em: <<http://www.soilsandrocks.com/sr-2021-067421>>. Acesso em: 3 nov. 2022.

PALMER, Andrew C. Stress-Strain Relations For Clays: An Energy Theory. **Géotechnique**, v. 17, n. 4, p. 348–358, dez. 1967. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1967.17.4.348. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1967.17.4.348>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

POOROOSHASB, H B; HOLUBEC, I; SHERBOURNE, A N. Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression: Part I. **Can. Geotech. J.**, v. 3, n. 4, p. 179–190, 1 nov. 1966. ISSN 0008-3674, 1208-6010. DOI: 10.1139/t66-023. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/t66-023>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

POOROOSHASB, Hormoz B. Deformation of Sands in Triaxial Compression. In: 4TH ASIAN CONF. SMFE. **4th Asian Conf. SMFE**. Bangkok, 1971. v. 1, p. 63–66.

\_\_\_\_\_. Description of Flow of Sand Using State Parameters. **Computers and Geotechnics**, v. 8, n. 3, p. 195–218, 1989. ISSN 0266352X. DOI: 10.1016/0266-352X(89)90043-8. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0266352X89900438>>. Acesso em: 20 set. 2022.

RANKINE, W. J. On the Stability of Loose Earth. **Phil. Trans. R. Soc.**, v. 147, p. 9–27, 1857.

REYNOLDS, Osborne. LVII. *On the Dilatancy of Media Composed of Rigid Particles in Contact. With Experimental Illustrations.* **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 20, n. 127, p. 469–481, dez. 1885. ISSN 1941-5982, 1941-5990. DOI: 10.1080/14786448508627791. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14786448508627791>>. Acesso em: 13 nov. 2022.

ROBERTSON, P. K.; DE MELO, Lucas; WILLIAMS, D. J.; WILSON, G. Ward. **Report of the Expert Panel on the Technical Causes of the Failure of Feijão Dam I.** 2019. Disponível em: <<http://www.b1technicalinvestigation.com/>>. Acesso em: 15 set. 2022.

ROSCOE, K. H.; BURLAND, J. B. On the Generalized Stress-Strain Behavior of Wet Clays. In: **ENGINEERING PLASTICITY. Engineering Plasticity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1968. P. 535–608.

ROSCOE, K. H.; SCHOFIELD, A. N.; WROTH, C. P. On The Yielding of Soils. **Géotechnique**, v. 8, n. 1, p. 22–53, mar. 1958. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1958.8.1.22. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1958.8.1.22>>. Acesso em: 1 nov. 2022.

ROWE, P. W. The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 269, n. 1339, p. 500–527, 9 out. 1962. ISSN 0080-4630, 2053-9169. DOI: 10.1098/rspa.1962.0193. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1962.0193>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

RUSSELL, Adrian R; KHALILI, Nasser. A Bounding Surface Plasticity Model for Sands Exhibiting Particle Crushing. v. 41, p. 14, 2004.

SALGADO, R.; BANDINI, P.; KARIM, A. Shear Strength and Stiffness of Silty Sand. **J. Geotech. Geoenviron. Eng.**, v. 126, n. 5, p. 451–462, mai. 2000. ISSN 1090-0241, 1943-5606. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2000)126:5(451). Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%291090-0241%282000%29126%3A5%28451%29>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

SANTAMARINA, J. Carlos; TORRES-CRUZ, Luis A.; BACHUS, Robert C. Why Coal Ash and Tailings Dam Disasters Occur. **Science**, v. 364, n. 6440, p. 526–528, 10 mai. 2019. ISSN 0036-8075, 1095-9203. DOI: 10.1126/science.aax1927. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/10.1126/science.aax1927>>. Acesso em: 7 set. 2022.

SCHAPER, Débora; LESSA, Ricardo; FREITAS, Antônio; WEEKS, Björn. De-Characterization and Closure of TSF: Concepts of the Brazilian Legislation and International Criteria. In: **3RD INTERNATIONAL CONGRESS ON PLANNING FOR CLOSURE OF MINING OPERATIONS. Planning for Closure 2020, 3rd International Congress on Planning for Closure of Mining Operations (Chapter 6)**. Gecamin Digital Publications, 2020. P. 12.

SCHNAID, F.; BEDIN, J.; VIANA DA FONSECA, A. J. P.; DE MOURA COSTA FILHO, L. Stiffness and Strength Governing the Static Liquefaction of Tailings. **J. Geotech. Geoenviron. Eng.**, v. 139, n. 12, p. 2136–2144, dez. 2013. ISSN 1090-0241, 1943-5606. DOI: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000924. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29GT.1943-5606.0000924>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

SCHNAID, Fernando. The Ninth James K. Mitchell Lecture: On The Geomechanics and Geo-characterization of Tailings. **ISSMGE**, jul. 2022. DOI: 10.53243/ISC2020-501. Disponível em: <<https://doi.org/10.53243/ISC2020-501>>. Acesso em: 7 out. 2022.

SCHOENBRUNN, Fred. Dewatering to Higher Densities - an Industry Review. In: 14TH INTERNATIONAL SEMINAR ON PASTE AND THICKENED TAILINGS, p. 19–23. DOI: 10.36487/ACG\_rep/1104\_02\_Schoenbrunn. Disponível em: <[https://papers.acg.uwa.edu.au/p/1104\\_02\\_Schoenbrunn/](https://papers.acg.uwa.edu.au/p/1104_02_Schoenbrunn/)>. Acesso em: 28 out. 2022.

SCHOFIELD, A. N.; WROTH, Peter. **Critical State Soil Mechanics**. London, New York [etc.]: McGraw-Hill, 1968. 310 p. (European Civil Engineering Series). ISBN 978-0-641-94048-4.

SHIPTON, B.; COOP, Matthew Richard. Transitional Behaviour in Sands with Plastic and Non-Plastic Fines. **Soils and Foundations**, v. 55, n. 1, p. 1–16, fev. 2015. ISSN 00380806. DOI: 10.1016/j.sandf.2014.12.001. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S003808061400136X>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

SILVA, João Paulo de Sousa; CACCIARI, Pedro Pazzoto; RIBEIRO, Luís Fernando; JEFFERIES, Michael. Influence of Compaction on Small-Strain Shear Modulus of Iron Ore Tailings. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Geotechnical Engineering**, v. 175, n. 2, p. 247–260, abr. 2022. ISSN 1353-2618, 1751-8563. DOI: 10.1680/jgeen.21.00036. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgeen.21.00036>>. Acesso em: 7 out. 2022.

SOUZA, Arley Henrique de; KRÜGER, Fernando Leopoldo von; ARAÚJO, Fernando Gabriel da Silva; MENDES, Jefferson Januário. Mineralogical Characterization Applied to Iron Ore Tailings from the Desliming Stage with Emphasis on Quantitative Electron Microscopy (Qem). **Mat. Res.**, v. 24, n. 3, e20190677, 2021. ISSN 1980-5373, 1516-1439. DOI: 10.1590/1980-5373-mr-2019-0677. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1516-14392021000300223&tlng=en](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-14392021000300223&tlng=en)>. Acesso em: 11 out. 2022.

SPITZ, Karlheinz; TRUDINGER, John. **MINING AND THE ENVIRONMENT: From Ore to Metal, 2 Edition**. Place of publication not identified: CRC Press, 2019. ISBN 978-0-8153-9472-3.

SUITS, L D; SHEAHAN, Tc; FROST, Jd; PARK, J-Y. A Critical Assessment of the Moist Tamping Technique. **Geotech. Test. J.**, v. 26, n. 1, p. 9850, 2003. ISSN 01496115. DOI: 10.1520/GTJ11108J. Disponível em: <<http://www.astm.org/doiLink.cgi?GTJ11108J>>. Acesso em: 11 jun. 2022.

TATSUOKA, Fumio; ISHIHARA, Kenji. Yielding of Sand in Triaxial Compression. **Soils and Foundations**, v. 14, n. 2, p. 63–76, jun. 1974. ISSN 00380806. DOI: 10.3208/sandf1972.14.2\_63. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080620328948>>. Acesso em: 13 nov. 2022.

TAYLOR, Donald W. **Fundamentals of Soil Mechanics**. New York, USA: John Wiley & Sons, 1948. 711 p.

THEVANAYAGAM, S.; MOHAN, S. Intergranular State Variables and Stress–Strain Behaviour of Silty Sands. **Géotechnique**, v. 50, n. 1, p. 1–23, fev. 2000. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2000.50.1.1. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2000.50.1.1>>. Acesso em: 28 jan. 2023.

THEVANAYAGAM, S.; SHENTHAN, T.; MOHAN, S.; LIANG, J. Undrained Fragility of Clean Sands, Silty Sands, and Sandy Silts. **J. Geotech. Geoenviron. Eng.**, v. 128, n. 10, p. 849–859, out. 2002. ISSN 1090-0241, 1943-5606. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2002)128:10(849). Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%291090-0241%282002%29128%3A10%28849%29>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

TODISCO, Maria Cristina; COOP, Matthew R. Normalisation Techniques for Slowly-converging Soils. **Procedia Engineering**, v. 158, p. 110–115, 2016. ISSN 18777058. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.414. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877705816326224>>. Acesso em: 2 fev. 2023.

TSEGAYE, Anteneh Biru; BENZ, Thomas. Plastic Flow and State-Dilatancy for Geomaterials. **Acta Geotech.**, v. 9, n. 2, p. 329–342, abr. 2014. ISSN 1861-1125, 1861-1133. DOI: 10.1007/s11440-013-0290-z. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11440-013-0290-z>>. Acesso em: 27 jan. 2023.

UENG, Tzou-Shin; CHEN, Tse-Jen. Energy Aspects of Particle Breakage in Drained Shear of Sands. **Géotechnique**, v. 50, n. 1, p. 65–72, fev. 2000. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.2000.50.1.65. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.2000.50.1.65>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

ULRICH, Bryan. Practical Thoughts Regarding Filtered Tailings. In: 22ND INTERNATIONAL CONFERENCE ON PASTE, THICKENED AND FILTERED TAILINGS, p. 71–79. DOI: 10.36487/ACG\_rep/1910\_01\_Ulrich. Disponível em: <[https://papers.acg.uwa.edu.au/p/1910\\_01\\_Ulrich/](https://papers.acg.uwa.edu.au/p/1910_01_Ulrich/)>. Acesso em: 27 out. 2022.

ULRICH, Bryan; COFFIN, Jeffrey. Considerations for Tailings Facility Design and Operation Using Filtered Tailings. In: 16TH INTERNATIONAL SEMINAR ON PASTE AND THICKENED TAILINGS, p. 201–210. DOI: 10.36487/ACG\_rep/1363\_15\_Ulrich. Disponível em: <[https://papers.acg.uwa.edu.au/p/1363\\_15\\_Ulrich/](https://papers.acg.uwa.edu.au/p/1363_15_Ulrich/)>. Acesso em: 28 out. 2022.

VARGAS, Carlos Cacciuttolo; PULIDO, Alex Marinovic. Sustainable Management of Thickened Tailings in Chile and Peru: A Review of Practical Experience and Socio-Environmental Acceptance. **Sustainability**, v. 14, n. 17, p. 10901, 31 ago. 2022. ISSN 2071-1050. DOI: 10.3390/su141710901. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2071-1050/14/17/10901>>. Acesso em: 3 nov. 2022.

VERDUGO, Ramon; ISHIHARA, Kenji. The Steady State of Sandy Soils. **Soils and Foundations**, v. 36, n. 2, p. 81–91, jun. 1996. ISSN 00380806. DOI: 10.3208/sandf.36.2\_81. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080620313615>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

VESIĆ, Aleksandar S.; CLOUGH, G. Wayne. Behavior of Granular Materials Under High Stresses. **J. Soil Mech. and Found. Div.**, v. 94, n. 3, p. 661–688, mai. 1968. ISSN 0044-7994, 2690-3369. DOI: 10.1061/JSFEAQ.0001134. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/JSFEAQ.0001134>>. Acesso em: 15 jul. 2022.

VILAÇA, A.S.I.; SIMÃO, L.; MONTEDO, O.R.K.; NOVAES DE OLIVEIRA, A.P.; RAUPP-PEREIRA, F. Waste Valorization of Iron Ore Tailings in Brazil: Assessment Metrics from a Circular Economy Perspective. **Resources Policy**, v. 75, p. 102477, mar. 2022. ISSN 03014207. DOI: 10.1016/j.resourpol.2021.102477. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301420721004852>>. Acesso em: 7 out. 2022.

WAGNER, Alexia Cindy; SILVA, João Paulo de Sousa; CARVALHO, João Vítor de Azambuja; RISSOLI, Ana Luisa Cezar; CACCIARI, Pedro Pazzoto; CHAVES, Helder Mansur; SCHEUERMAN FILHO, Hugo Carlos; CONSOLI, Nilo Cesar. Mechanical Behavior of Iron Ore Tailings under Standard Compression and Extension Triaxial Stress Paths. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**, s1674775522002396, 2023. ISSN 16747755. DOI: 10.1016/j.jrmge.2022.11.013. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1674775522002396>>. Acesso em: 22 jan. 2023.

WANG, Chen; HARBOTTLE, David; LIU, Qingxia; XU, Zhenghe. Current State of Fine Mineral Tailings Treatment: A Critical Review on Theory and Practice. **Minerals Engineering**, v. 58, p. 113–131, abr. 2014. ISSN 08926875. DOI: 10.1016/j.mineng.2014.01.018. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0892687514000284>>. Acesso em: 28 out. 2022.

WILLS, Barry A.; FINCH, James E. **Wills' Mineral Processing Technology: An Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery**. Eighth edition. Amsterdam Boston, Mass Heidelberg: Elsevier, 2016. 498 p. ISBN 978-0-08-097053-0.

WISE. **Chronology of Major Tailings Dam Failures**. 2022. Disponível em: <<http://www.wise-uranium.org/mdaf.html>>. Acesso em: 16 fev. 2022.

WROTH, C. P.; BASSETT, R. H. A Stress–Strain Relationship for the Shearing Behaviour of a Sand. **Géotechnique**, v. 15, n. 1, p. 32–56, mar. 1965. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.1965.15.1.32. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1965.15.1.32>>. Acesso em: 20 set. 2022.

XIAO, Y.; XIANG, J.; LIU, H.; MA, Q. Strength–Dilatancy Relation of Sand Containing Non-Plastic Fines. **Géotechnique Letters**, v. 7, n. 2, p. 204–210, jun. 2017. ISSN 2045-2543. DOI: 10.1680/jgele.16.00144. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgele.16.00144>>. Acesso em: 28 jan. 2023.

XIAO, Yang; LONG, Leihang; MATTHEW EVANS, T.; ZHOU, Hai; LIU, Hanlong; STUEDLEIN, Armin W. Effect of Particle Shape on Stress-Dilatancy Responses of Medium-Dense Sands. **J. Geotech. Geoenviron. Eng.**, v. 145, n. 2, p. 04018105, fev. 2019. ISSN 1090-0241, 1943-5606. DOI: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0001994. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29GT.1943-5606.0001994>>. Acesso em: 23 set. 2022.

XIAOLONG, Zhang; SHIYU, Zhang; HUI, Liu; YINGLIANG, Zhao. Disposal of Mine Tailings via Geopolymerization. **Journal of Cleaner Production**, v. 284, p. 124756, fev. 2021. ISSN 09596526. DOI: 10.1016/j.jclepro.2020.124756. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0959652620348009>>. Acesso em: 24 jun. 2022.

YAMAMURO, Jerry A.; LADE, Poul V. Drained Sand Behavior in Axisymmetric Tests at High Pressures. **Journal of Geotechnical Engineering**, v. 122, n. 2, p. 109–119, fev. 1996. ISSN 0733-9410, 1944-8368. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9410(1996)122:2(109). Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290733-9410%281996%29122%3A2%28109%29>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

YANG, J.; WEI, L.M. Collapse of Loose Sand with the Addition of Fines: The Role of Particle Shape. **Géotechnique**, v. 62, n. 12, p. 1111–1125, dez. 2012. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/geot.11.P.062. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.11.P.062>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

YANG, Yonghao; WEI, Zuoan; FOURIE, Andy; CHEN, Yulong; ZHENG, Binbin; WANG, Wensong; ZHUANG, Sunning. Particle Shape Analysis of Tailings Using Digital Image Processing. **Environ Sci Pollut Res**, v. 26, n. 25, p. 26397–26403, set. 2019. ISSN 0944-1344, 1614-7499. DOI: 10.1007/s11356-019-05974-6. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11356-019-05974-6>>. Acesso em: 27 nov. 2022.

YAO, Chi; WU, Ligong; YANG, Jianhua; XIAO, Lixing; LIU, Xiaofeng; JIANG, Qinghui; ZHOU, Chuangbing. Influences of Tailings Particle Size on Overtopping Tailings Dam Failures. **Mine Water Environ**, v. 40, n. 1, p. 174–188, mar. 2021. ISSN 1025-9112, 1616-1068. DOI: 10.1007/s10230-020-00725-3. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s10230-020-00725-3>>. Acesso em: 6 jun. 2022.

YAO, Yangping; HE, Guan; LUO, Ting. Study on Determining the Plastic Flow Direction of Soils with Dilatancy. **Acta Geotech.**, 12 dez. 2022. ISSN 1861-1125, 1861-1133. DOI: 10.1007/s11440-022-01770-8. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/s11440-022-01770-8>>. Acesso em: 15 jan. 2023.

YILMAZ, Yuksel; DENG, Yibing; CHANG, Ching S.; GOKCE, Aydin. Strength–Dilatancy and Critical State Behaviours of Binary Mixtures of Graded Sands Influenced by Particle Size Ratio and Fines Content. **Géotechnique**, p. 1–16, 19 out. 2021. ISSN 0016-8505, 1751-7656. DOI: 10.1680/jgeot.20.P.320. Disponível em: <<https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/jgeot.20.P.320>>. Acesso em: 28 jan. 2023.

YU, Hai-Sui. CASM: A Unified State Parameter Model for Clay and Sand. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.**, v. 22, n. 8, p. 621–653, ago. 1998. ISSN 0363-9061, 1096-9853. DOI: 10.1002/(SICI)1096-9853(199808)22:8<621::AID-NAG937>3.0.CO;2-8. Disponível em: <[https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/\(SICI\)1096-9853\(199808\)22:8%3C621::AID-NAG937%3E3.0.CO;2-8](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1096-9853(199808)22:8%3C621::AID-NAG937%3E3.0.CO;2-8)>. Acesso em: 20 set. 2022.

\_\_\_\_\_. **Plasticity and Geotechnics**. New York, N.Y: Springer-Verlag, 2006. (Advances in Mechanics and Mathematics, v. 13). ISBN 978-0-387-33599-5.

ZUO, Lu; BAUDET, Béatrice Anne. Determination of the Transitional Fines Content of Sand-Non Plastic Fines Mixtures. **Soils and Foundations**, v. 55, n. 1, p. 213–219, fev. 2015. ISSN 00380806. DOI: 10.1016/j.sandf.2014.12.017. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038080614001528>>. Acesso em: 28 jan. 2023.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – VERIFICAÇÃO DO MODELO *NORSAND* PELO MÉTODO TERMODINÂMICO INDIRETO

O modelo *NorSand* é um modelo constitutivo baseado na mecânica dos solos dos estados críticos e na dependência da resposta mecânica do material no seu estado atual (JEFFERIES, 1993; BEEN et al., 1985; JEFFERIES, 2021). Esse modelo é dito como da família dos modelos desenvolvidos em Cambridge, sendo apresentado como uma generalização dos casos dos modelos Camclay original (SCHOFIELD et al., 1968) e Camclay modificado (ROSCOE et al., 1968). A principal diferença no desenvolvimento do modelo *NorSand* é a hipótese de que os geomateriais apresentem infinitas linhas de compressão normal, em contrapartida aos modelos originais desenvolvidos em cambridge onde era assumida uma única Linha Isotrópica de Compressão (LIC), paralela à Linha de Estado Crítico (LEC) (JEFFERIES et al., 2000).

Durante o desenvolvimento dos modelos Camclay original e modificado, a hipótese de uma única LIC implicava em duas condições fundamentais (JEFFERIES et al., 2016):

- 1) Previsão de rigidezes elevadas e dilatâncias não correspondentes com a realidade para materiais em estados densos;
- 2) A superfície de plastificação necessariamente cruza a LEC quando atinge o topo, a fim de atender a condição de  $d\varepsilon_v/d\varepsilon_q = 0$  no estado crítico.

Sendo assim, o modelo *NorSand* apresenta formas de contornar esses efeitos, através da consideração de infinitas LICs possíveis para os materiais granulares e pela introdução do conceito do estado de imagem. O estado de imagem seria o estado em que alguma das condições estabelecidas pela Eq. 2.5 é atendida, mas não todas simultaneamente.

$$\frac{\partial p'}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_s} = \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_s} = 0 \quad (2.5 \text{ Rep.})$$

No entanto, apesar de contornar algumas das dificuldades observadas na modelagem de materiais granulares e incluir a consideração dos estados do material no seu desenvolvimento, o modelo *NorSand* ainda mantém considerações como, por exemplo, a existência de uma lei de fluxo associada para materiais granulares, refutada por diversos autores (e.g., POOROOSHASB et al., 1966; CHANDLER, 1985; COOP, 1990; LI, X. S. et al., 2000; COLLINS et al., 2002b; YAO, Y. et al., 2022). Este capítulo tem por intuito realizar a verificação do modelo em relação à segunda

lei da termodinâmica, conforme o método indireto de Yangping Yao et al. (2022) apresentado na seção 2.3.4.

Inicialmente são apresentadas a função da superfície de plastificação (Eq. A.1) e a lei de dissipação do trabalho plástico (Eq. A.2) adotadas no modelo *NorSand*<sup>1</sup> (JEFFERIES et al., 2016):

$$\frac{\eta}{M} = 1 - \ln\left(\frac{p}{p_i}\right) \quad (\text{A.1})$$

$$D^P = M_i \left(\frac{\dot{p}_i}{p_i}\right) - \eta \quad (\text{A.2})$$

onde  $M_i$  é a razão de tensões no estado de imagem.

A partir da Eq. A.1 pode-se resolver a tensão  $p$  na qual o solo encontra-se no estado crítico (i.e.,  $\eta = M$  e  $M_i = M$ ). Isso ocorre quando  $p = p_i$ . Sendo assim os parâmetros de mudança entre o espaço dissipativo e o espaço de tensões real são dados por:

$$p = \rho + \pi \rightarrow \pi = p - p_i \quad (\text{A.3})$$

$$q = \tau \quad (\text{A.4})$$

Segundo Yangping Yao et al. (2022) de forma a verificar a existência de uma superfície elíptica no espaço dissipativo de tensões:

$$\frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_s^p} = \frac{\pi B^2}{\tau A^2} \quad (\text{A.5})$$

Logo, substituindo (A.3) e (A.4) em (A.5), têm-se:

$$\frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_s^p} = \frac{p - p_i B^2}{q A^2} \quad (\text{A.6})$$

$$(\text{A.7})$$

A outra equação é obtida a partir da lei de dissipação do trabalho plástico adotada pelo modelo (Eq. A.2). Portanto,

<sup>1</sup> Equações apresentadas para as condições de ensaio de compressão triaxial.

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_v^p}{\varepsilon_s^p} = \frac{p-p_i}{q} \frac{B^2}{A^2} \\ \frac{\varepsilon_v^p}{\varepsilon_s^p} = M_i \left( \frac{\dot{p}_i}{p} \right) - \eta \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Da Eq. A.8,

$$\frac{B^2}{A^2} = \left( \frac{q}{p-p_i} \right) \left[ M_i \left( \frac{\dot{p}_i}{p} \right) - \eta \right] = \beta \quad (\text{A.9})$$

Outra condição para a existência de uma superfície elíptica no espaço dissipativo é dada pela Eq. A.10.

$$\frac{\pi^2}{A^2} + \frac{\tau^2}{B^2} = 1 \quad (\text{A.10})$$

Substituindo (A.3) e (A.4) em (A.10),

$$\frac{(p-p_i)^2}{A^2} + \frac{q^2}{\beta A^2} = 1 \quad (\text{A.11})$$

A partir das Eqs. A.9 e A.11 pode-se obter A e B como:

$$\begin{cases} A = \sqrt{(p-p_i^2) + \frac{q^2}{\beta}} \\ B = \sqrt{\left[ \frac{q}{p-p_i} (\beta(p-p_i)^2 + q^2) \right] \left( M_i \frac{\dot{p}_i}{p} - \eta \right)} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Das Equações A.9 e A.12 têm-se que, quando  $q = 0$ ,  $B$  pode ser calculado como sendo 0. Isso significa que nenhuma superfície de potencial plástico elíptica correspondente pôde ser determinada no espaço dissipativo, de forma a descrever o fluxo plástico na condição  $q = 0$ . Como consequência o fluxo plástico dissipativo não pode ser determinado nesse espaço e, portanto, o modelo não atende a princípios fundamentais da termodinâmica.