

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO

THALES DUTRA MARTINS

**DESEMPENHO DAS CARTEIRAS DE MÍNIMA VARIÂNCIA NO MERCADO
ACIONÁRIO BRASILEIRO**

PORTO ALEGRE

2023

THALES DUTRA MARTINS

**DESEMPENHO DAS CARTEIRAS DE MÍNIMA VARIÂNCIA NO MERCADO
ACIONÁRIO BRASILEIRO**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Ciências Administrativas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Administração.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Scherer Perlin

PORTO ALEGRE

2023

THALES DUTRA MARTINS

**DESEMPENHO DAS CARTEIRAS DE MÍNIMA VARIÂNCIA NO MERCADO
ACIONÁRIO BRASILEIRO**

Conceito final: A

Aprovado em: 31/08/2023

Orientador Prof. Dr. Marcelo Scherer Perlin

Prof.^a Dra. Fernanda Maria Müller

PORTO ALEGRE

2023

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo avaliar se as Carteiras de Mínima Variância (CMVs), formadas por métodos de otimização de portfólio, têm capacidade de superar a Carteira Igualmente Ponderada (1/N), o Ibovespa (índice referência do mercado acionário brasileiro) e o CDI (considerado como ativo livre de risco) no horizonte de longo-prazo. Para tanto, a literatura sobre a Teoria Moderna de Portfólio foi resgatada, dando luz às contribuições de Markowitz (1952) e aos aprimoramentos recentes de Ledoit e Wolf (2003, 2004a, 2004b) no âmbito das otimizações de portfólio. Dados da plataforma Yahoo Finance foram coletados para o período amostral de 2010 a 2022 (13 anos). A otimização das carteiras e análise dos dados foi realizada com ferramentas da linguagem de programação Python. Duas carteiras de mínima variância foram formadas: uma obtida pelo método clássico de estimação da matriz de covariância amostral e outra pelo método de encolhimento (*shrinkage*) da matriz de covariância amostral, sendo este um estimador robusto. Os resultados mostram que as carteiras de mínima variância superaram todos os benchmarks utilizados em termos de retorno, volatilidade e retorno ajustado ao risco (Índice de Sharpe). Além disso, as carteiras otimizadas mostraram-se mais resilientes que a Carteira Igualmente Ponderada (CIP) e o Ibovespa em ciclos de alta na taxa de juros e em momentos de turbulência no mercado brasileiro de ações. A volatilidade das carteiras otimizadas foi significativamente menor que a CIP e o Ibovespa em todo período. Apesar disso, os retornos e Índice de Sharpe das CMVs não foram estatisticamente superiores aos demais.

Palavras-chave: Carteiras de mínima variância. Otimização de carteiras. Teoria Moderna de Portfólio. Markowitz.

ABSTRACT

This research aimed to evaluate whether the Minimum Variance Portfolios (CMVs), created by portfolio optimization methods, can overcome the Equally Weighted Portfolio (1/N), the Ibovespa (reference index of the Brazilian stock market) and the CDI (considered as a risk-free asset) over the long-term horizon. To this end, the literature on Modern Portfolio Theory was revisited, putting in evidence Markowitz's contributions (1952) and the recent improvements by Ledoit and Wolf (2003, 2004a, 2004b) on portfolio optimizations. Data from the Yahoo Finance platform were collected for the sample period from 2010 to 2022 (13 years). Portfolio optimization and data analysis were performed using tools of Python programming language. Two minimum variance portfolios were formed: the first was obtained by the classic method of estimating the sample covariance matrix and the second one was obtained by the shrinkage method of the sample covariance matrix, which is a robust estimator. The results show that the minimum variance portfolios outperformed all benchmarks of return, volatility and risk-adjusted return (Sharpe Ratio). In addition, the optimized portfolios proved to be more resilient than the Equally Weighted Portfolio (CIP) and the Ibovespa in cycles of high-interest rates and in periods of turbulence in the Brazilian stock market. The volatility of the optimized portfolios was significantly lower than the CIP and Ibovespa throughout the period. Despite this, the returns and Sharpe Ratio of CMVs were not statistically superior.

Keywords: Minimum variance portfolios. Portfolio optimization. Modern Portfolio Theory. Markowitz.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

API - *Application Programming Interface*

CAPM - *Capital Asset Pricing Model*

CDI - Certificados de Depósitos Interbancários

CEO - *Chief Executive Officer*

CIP - Carteira Iguamente Ponderada

CMV - Carteira de Mínima Variância

EUA - Estados Unidos da América

IBOV - Índice Ibovespa

IPCA - Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo

LW - Carteira de Mínima Variância, obtida pelo método de Ledoit e Wolf

MKW - Carteira de Mínima Variância, obtida pelo método de Markowitz

SGS - Sistema Gerenciador de Séries Temporais

SUMÁRIO

1. DEFINIÇÃO DO TEMA DE ESTUDO	8
2. OBJETIVOS	11
2.1. OBJETIVO GERAL	11
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	11
3. REFERENCIAL TEÓRICO	12
3.1. TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO	12
3.2. ESTIMAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA	14
3.3. RISCO DE LIQUIDEZ	16
4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	18
4.1. COLETA, TRATAMENTO E FILTRAGEM DOS DADOS	18
4.2. CARTEIRA IGUALMENTE PONDERADA (CIP)	20
4.3. CUSTOS DE TRANSAÇÃO	20
4.4. RETORNO AJUSTADO AO RISCO	21
5. ANÁLISE DOS RESULTADOS	23
5.1. 2013 A 2016: 1º CICLO DE ALTA NA TAXA DE JUROS	24
5.2. 2017 A 2020: CICLO DE QUEDA NA TAXA DE JUROS	26
5.3. 2021 A 2022: 2º CICLO DE ALTA NA TAXA DE JUROS	27
5.4. VISÃO GERAL E COMPOSIÇÃO DAS CARTEIRAS	28
5.5. DIVERSIFICAÇÃO E NÚMERO DE ATIVOS EM CARTEIRA	32
5.6. TESTES DE HIPÓTESES	34
6. CONCLUSÃO	37
REFERÊNCIAS	38

1. DEFINIÇÃO DO TEMA DE ESTUDO

Com o crescente avanço das tecnologias de informação e meios de comunicação no mundo contemporâneo, o conhecimento sobre educação financeira e sobre o funcionamento do próprio mercado financeiro tem sido difundido de forma mais orgânica no Brasil. Para além das universidades, redes sociais como Youtube e Instagram têm sido utilizadas para transmissão de conteúdo sobre investimentos, tornando o mercado financeiro mais acessível ao cidadão comum que até então investia o seu dinheiro somente em ativos mais conhecidos e assumidos como livres de risco, como a Poupança.

Esse movimento tem se mostrado importantíssimo, pois em países desenvolvidos, sobretudo nos Estados Unidos da América (EUA), maior economia global e que também tem a maior bolsa de valores do mundo, cerca de 60% da população já investe o seu dinheiro no mercado acionário, enquanto no Brasil, esse número não chega a 3% (B3, 2022; GALLUP INC, 2023). Um dos motivos, pode-se especular, é o fato de que, historicamente, o Brasil sofre com altos índices de inflação, o que geralmente mantém a taxa de juros também em níveis mais elevados que os Estados Unidos, por exemplo. Em um cenário desses, o investidor comum no Brasil não vê motivos suficientes para tomar mais riscos com seus investimentos, pois o retorno esperado em ativos de renda variável (ações, por exemplo) é geralmente muito próximo ao retorno esperado em investimentos de renda fixa (considerados como ativos livres de risco). A economia americana, em contrapartida, teve, historicamente, uma taxa de juros baixíssima - entre 0,25% e 2,50% ao ano, de 2008 a 2021 -, tornando os ativos de renda variável mais atrativos que os de renda fixa em termos de retorno (FOMC, [s.d.]).

Mais recentemente, no Brasil, a taxa básica de juros (Selic) teve uma série de reduções a partir de 2017 (que iniciou o ano com a taxa em 13,75% e chegou a 2,00% ao ano no final de 2020). Esse movimento tornou os investimentos em renda fixa bem menos atrativos, incentivando uma migração forte de investidores para a bolsa de valores, que em 2018 tinha cerca de 700 mil Investidores Pessoa Física e em 2022 chegou a 5 milhões (aumento de mais de 600%). Com o retorno do aumento da inflação no país, o Comitê de Política Monetária (Copom) tornou a elevar a taxa Selic a partir de março de 2021, retornando em agosto de 2022 ao patamar de 13,75%. Apesar disso, em 2022, o número de investidores na bolsa de valores brasileira não parou de crescer, demonstrando que o interesse dos brasileiros nos investimentos em renda variável permanece vivo. Neste ano (2023), a

tendência de queda no principal índice de inflação do país (IPCA - Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo) contribuiu para o início de um provável novo ciclo de queda na taxa Selic no início de agosto. A taxa de juros que permaneceu por 1 ano em 13,75% ao ano teve um corte de 0,50 pontos percentuais (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2023).

Nesse contexto, é importante destacar que para operar em ativos de renda variável, é recomendável ter uma boa estratégia e gerenciar bem os riscos envolvidos. Em finanças, há uma máxima que diz que quanto maior o risco, maior tende a ser o retorno esperado (e vice-versa). No entanto, o investidor típico avesso ao risco sempre buscará por maiores retornos com os menores riscos possíveis. Com base nessa constatação é que Markowitz (1952), em sua publicação *Portfolio Selection*, forneceu as bases teóricas para a chamada Teoria Moderna de Portfólio, contribuindo significativamente para o avanço da teoria financeira no século XX. Markowitz (1952) percebe que analisar o retorno esperado e risco da carteira é mais importante do que fazer uma análise dos retornos e riscos de cada ativo isoladamente. Isso acontece, pois o risco da carteira depende também da correlação e covariância entre os ativos escolhidos. Nesse sentido, Markowitz propõe um método de otimização da carteira de investimentos, ou seja, uma forma de definir os pesos de cada ativo dentro da carteira, de modo a alcançar um portfólio eficiente. Portfólio eficiente, para o autor, é aquele que apresenta o menor risco possível para um determinado retorno esperado. Ou ainda, aquele que apresenta o maior retorno possível para um certo risco incorrido. Apesar de ser uma teoria de longa data, os métodos de média-variância e mínima-variância propostos por Markowitz seguem sendo estudados e testados, junto a outros métodos que buscam aprimorar os modelos clássicos, como os propostos por Ledoit e Wolf (2003, 2004a, 2004b). Há muitas evidências, mas não há um consenso com relação à efetividade dessas metodologias no sentido de superar os *benchmarks* de mercado ou a chamada carteira ingênua, que considera o mesmo peso para todos os ativos dentro de uma carteira.

DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) aplicaram variados métodos de otimização de carteiras no mercado acionário americano, incluindo a carteira de mínima variância, e chegaram à conclusão de que nenhum dos modelos utilizados na literatura conseguiu superar consistentemente a carteira ingênua em termos de risco-retorno (Índice Sharpe). Dois anos depois, Thomé Neto, Leal e Almeida (2011) formaram uma carteira de variância mínima global e compararam com o índice Ibovespa e uma carteira ingênua ao longo de 11 anos. Segundo os autores, a carteira de variância mínima global e a carteira ingênua tiveram desempenhos similares. Com relação ao Ibovespa, as duas metodologias foram capazes de superar o índice.

Em contrapartida, outros trabalhos que compararam o desempenho de carteiras otimizadas pelo método de variância mínima com os mesmos *benchmarks* (índice Ibovespa e carteira ingênua), evidenciaram um resultado a favor das carteiras otimizadas nos períodos analisados (SANTOS; TESSARI, 2012; RUBESAM; BELTRAME, 2013; CAVALCANTE et al., 2016). Por conta dos possíveis erros de estimação da matriz de covariância amostral na utilização do modelo clássico de Markowitz, Santos e Tessari (2012) e Rubesam e Beltrame (2013) testaram modelos alternativos, propostos por Ledoit e Wolf (2003, 2004a, 2004b). Nos dois trabalhos, tanto as carteiras de mínima e média variância calculadas pela matriz de covariância amostral, quanto as calculadas pelos métodos de encolhimento propostos por Ledoit e Wolf (2003, 2004a, 2004b) tiveram desempenhos estatisticamente superiores ao *benchmark* de mercado, Índice Ibovespa, e à carteira ingênua em termos de retorno médio e retorno ajustado ao risco (Índice de Sharpe).

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é avaliar o método clássico de otimização de carteiras, seja pela abordagem tradicional com a matriz de covariância amostral, seja pelo modelo de correlação constante proposto por Ledoit e Wolf (2004b), frente ao desempenho do índice de mercado mais utilizado como referência, Ibovespa, uma carteira ingênua e a taxa CDI. As carteiras de investimentos terão rebalanceamentos recorrentes, de três em três meses, para atualização dos parâmetros de covariância e será estruturada e automatizada de forma a facilitar a usabilidade do usuário por meio da linguagem de programação Python. Espera-se que esse trabalho contribua para a aplicação de estratégias de investimentos em ações, agilizando o processo de tomada de decisão, com base em premissas claras da literatura financeira sobre o tema.

Esse trabalho mostra-se necessário, pois ainda há incerteza sobre a efetividade dos modelos de otimização mencionados como estratégias de investimentos que superem os índices de mercado no longo-prazo. Os resultados deste trabalho poderão contribuir para os investidores brasileiros como uma alternativa de estratégia de investimentos, bem como servirá como literatura acadêmica para futuras pesquisas sobre o tema. Além disso, essas teorias de otimização de carteiras costumam atingir um público muito restrito devido à sua complexidade na aplicação. Por meio da linguagem de programação Python, esse trabalho também visa facilitar o acesso dos pequenos investidores a uma metodologia de atualização dos ativos da carteira de forma mais automatizada.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

Avaliar se as carteiras de mínima variância, obtidas através de métodos de otimização, superam consistentemente o índice de mercado, a carteira ingênua e o CDI no longo prazo.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Estabelecer critérios para a elegibilidade das ações nas carteiras teóricas e filtragem dos dados utilizados.
2. Aplicar as metodologias de otimização de carteiras de Markowitz (1952) e de Ledoit e Wolf (2004b) com rebalanceamento trimestral.
3. Avaliar o desempenho das carteiras no período, de acordo com medidas de risco-retorno.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

Essa seção trará os principais conceitos da Teoria Moderna de Portfólio, que ficou amplamente conhecida após o trabalho de Harry Markowitz em *Portfolio Selection*. Além disso, apresentará as contribuições posteriores acerca das metodologias de otimização de portfólio, a fim de contextualizar o que será tratado nas seguintes seções.

3.1. TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO

Harry M. Markowitz, economista e professor de finanças, recebeu o Prêmio de Ciências Econômicas em 1990 por sua grande contribuição na área de finanças com seus trabalhos sobre seleção de portfólios eficientes, dando origem à Teoria Moderna de Portfólio, ou Teoria de Markowitz. Uma das grandes contribuições de Markowitz foi ter formalizado matematicamente a ideia de diversificação no mundo dos investimentos. A noção de diversificação a fim de minimizar os riscos é muito anterior a Markowitz e pode ser exemplificada pelo antigo ditado popular que diz “Não coloque todos os ovos em uma única cesta!”. No entanto, apesar do conhecimento empírico sobre essa máxima, Markowitz foi quem conseguiu formular uma teoria robusta de investimentos, envolvendo o conceito de diversificação com o objetivo de reduzir os riscos do investidor (RUBINSTEIN, 2002).

Nas premissas da sua pesquisa, Markowitz (1952) considera que o investidor é racional e sempre quer maximizar o retorno esperado da sua carteira, enquanto minimiza o risco. No entanto, não necessariamente o portfólio com o maior retorno esperado será aquele com o menor risco. Existe um momento em que o investidor só consegue aumentar o retorno esperado da sua carteira, aumentando também a variância dos seus retornos (risco). Do mesmo modo, só é possível reduzir a variância esperada da carteira, abrindo mão de parte do retorno esperado.

O retorno esperado de um ativo geralmente é medido pela média dos retornos históricos. Essa é uma prática amplamente difundida no mercado financeiro, seja ela calculada por média aritmética ou geométrica. Já o risco de um determinado ativo é

mensurado pela variância dos seus retornos históricos. Em outras palavras, quanto maior for a variabilidade dos seus retornos, entende-se que há maior risco. Nesse sentido, uma das grandes descobertas de Markowitz foi que o mais importante para o investidor não é o risco específico de um ativo, mas o quanto aquele ativo contribui para o risco do portfólio, haja vista que, diferentemente do retorno esperado da carteira, a variância do portfólio não é uma média ponderada das variâncias dos ativos.

O retorno esperado de uma carteira é dado pela média ponderada dos ativos que a compõem:

$$R_p = \sum_{i=1}^n R_i w_i$$

Onde:

R_p = Retorno do portfólio

n = Número de ativos

R_i = Retorno médio do ativo i

w_i = Participação do ativo i no portfólio

Conforme observado por Cavalcante et al. (2016), a relação entre o retorno da carteira e o retorno esperado dos ativos que a compõem é diretamente proporcional. De outro modo, ao analisar o cálculo do risco da carteira, chegaremos a uma conclusão diferente. Mas para entender o cálculo da variância da carteira, é necessário primeiro apreender os conceitos de risco sistemático e risco não-sistemático.

De acordo com Ross et al. (2013), o verdadeiro risco de um investimento é aquela parte não prevista dos retornos. Não é possível prever com certeza qual será o retorno de um ativo, pois se assim fosse possível, o ativo seria, por definição, livre de risco. Esse risco pode ser separado em dois tipos: sistemático e não-sistemático. O risco sistemático, ou risco de mercado, é aquele que afeta uma grande parte de ativos no mesmo sentido, em maior ou menor grau. Mudanças na expectativa da inflação ou da taxa de juros são exemplos de fatores que podem compor o risco sistemático dos ativos. O risco não-sistemático, ou risco específico, é aquele que afeta uma ou poucas empresas, como uma notícia relevante sobre a mudança no CEO ou no Conselho de Administração, anúncio de greve, etc (ROSS et al., 2013).

O entendimento desses conceitos é importante, pois de acordo com a teoria moderna de finanças, o risco não-sistemático pode ser eliminado pela diversificação do portfólio. Ou seja, ao formar uma carteira com vários ativos diferentes, o efeito negativo de um ativo

específico tende a ser anulado por efeitos positivos em outros ativos. Quando o investimento está concentrado em apenas um ativo, o valor investido flutuará de acordo com a sua performance. Por esse motivo, o único risco que importa ao investidor que diversifica sua carteira é o risco sistemático (ROSS et al., 2013).

No entanto, não basta selecionar um número x de ativos, sem critério de escolha, para ter uma carteira diversificada que minimize o risco não-sistemático. Isso é verdade, pois os retornos dos ativos têm uma correlação entre si e, portanto, também uma covariância. Segundo Markowitz (1952), para minimizar a variância de uma carteira, é necessário calcular a covariância existente entre os retornos dos ativos que a compõem. A variância dos retornos de uma carteira pode ser calculada pela equação abaixo:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n COV_{ij} w_i w_j$$

Onde:

σ^2 = variância da carteira

n = número de ativos no portfólio

COV_{ij} = covariância entre os ativos i e j (caso $i=j$, então variância do ativo i)

w_i = peso do ativo i na carteira

w_j = peso do ativo j na carteira

Markowitz (1952) defende que é possível otimizar a escolha e os pesos dos ativos que compõem uma carteira de investimentos, de forma a minimizar o seu risco e maximizar seu retorno. As diversas combinações possíveis que maximizam o retorno com a mínima variância possível formam a chamada Fronteira Eficiente. Uma vez encontrada, o investidor pode escolher qual nível de risco ele está disposto a correr para obter um determinado retorno.

3.2. ESTIMAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA

A estimação dos retornos futuros de um ativo geralmente é feita com base no desempenho histórico. Por consequência, a estimação da variância dos seus retornos também. Portanto, para otimizar uma carteira de investimentos, é preciso estar atento à qualidade

dessas estimativas, haja vista que impactam diretamente na escolha dos ativos e nos seus respectivos pesos. As carteiras otimizadas por métodos de média-variância precisam de uma estimativa tanto dos retornos, quanto da variância futura. Já as carteiras de mínima variância têm seu foco na estimação das variâncias e covariâncias entre os ativos. Alguns trabalhos aplicados em mercados estrangeiros tiveram resultados mais favoráveis para carteiras de mínima variância, sugerindo que os erros de estimação dos retornos médios tendem a ter um impacto muito grande na escolha dos pesos dos ativos, gerando resultados ruins fora da amostra (MERTON, 1980). Nesses casos, sem um método acurado de estimação dos retornos médios futuros, Jagannathan e Ma (2003) sugerem que o foco em métodos de mínima variância pode ser mais relevante.

O modelo clássico de estimação da matriz de covariância é o proposto por Markowitz (1952) ao selecionar uma amostra dos retornos históricos e considerá-la como parâmetro para o futuro. Esse é também o modelo mais simples, que apesar de ser um estimador não-viesado, quando o número de ativos da amostra é grande, alguns autores argumentam que a matriz de covariância amostral tende a ser muito ruidosa, além do fato de que o modelo clássico considera que a matriz não muda ao longo do tempo e que todas as observações, as mais antigas e as mais recentes, têm o mesmo peso (RUBESAM; BELTRAME, 2013; SANTOS; TESSARI, 2012). No entanto, vale ressaltar que, em ambos os trabalhos, a carteira formada com a matriz de covariância amostral teve um dos melhores desempenhos, superando o Ibovespa e a carteira ingênua.

De acordo com Santos e Tessari (2012), uma forma de reduzir esse ruído em estimadores de médias e covariâncias são os estimadores de encolhimento. Com base em Stein (1956), os autores explicam o método de encolhimento:

[...] a partir da aplicação do método de encolhimento na estimação das médias, [Stein] encontrou que o *trade-off* ótimo entre viés e erro de estimação pode ser manipulado simplesmente tomando uma média ponderada do estimador viesado e do não-viesado. Este método consiste em “encolher” o estimador não-viesado, mas que contém erro de estimação, em direção a um alvo fixo representado pelo estimador viesado, puxando-se os coeficientes mais extremos em direção aos valores centrais e, desta forma, produzindo uma matriz de covariância positiva-definida e bem condicionada (SANTOS; TESSARI, 2012, p. 376-377).

A partir dessa teoria, o método de Ledoit e Wolf para o encolhimento da matriz de covariância pode ser representado por:

$$\Sigma_t = \alpha F_t + (1 - \alpha) S_t$$

Onde:

Σ_t = matriz de covariância encolhida

α = intensidade do encolhimento ou peso atrelado ao estimador estruturado

F_t = estimador estruturado

S_t = matriz de covariância amostral

Três modelos foram formulados pelos autores (LEDOIT; WOLF, 2003, 2004a, 2004b):

- 1) Fator único de Sharpe: combinação linear entre o modelo de fator único de Sharpe e a matriz de covariância amostral.
- 2) Correlação constante: combinação linear entre a matriz de covariância de correlação constante entre os ativos da carteira e a matriz de covariância amostral.
- 3) Matriz identidade: combinação linear entre a matriz de covariância amostral e a matriz identidade.

Conforme resultados encontrados por Santos e Tessari (2012), os três estimadores tiveram resultados muito similares em termos de desempenho. O estimador robusto a ser utilizado neste trabalho é o da matriz de covariância de correlação constante, pois apresentou custos de implementação menores.

3.3. RISCO DE LIQUIDEZ

Os riscos envolvidos na formação de carteiras de investimentos não se restringem à variabilidade dos retornos dos ativos. Um risco importante a ser considerado é o risco de liquidez dos ativos que compõem a carteira. De acordo com Pereira et al. (2015), caso o investidor não considere o possível impacto que a liquidez dos ativos pode causar na seleção da carteira, estaria expondo-se a riscos de forma desnecessária. De forma mais ilustrativa, o risco de liquidez pode se tornar um problema quando, por exemplo, um fundo de investimentos tem um volume muito grande de ações de um determinado ativo e quer desfazer-se dele em um curto espaço de tempo. Conforme explica Pereira (2014), essa ação pode impactar em um excesso de oferta daquele ativo, que o mercado pode não ser capaz de absorver ou até impactar negativamente nos preços do ativo.

Segundo Pereira (2014), no seu trabalho a respeito da inclusão de restrições de liquidez em processos de otimização de portfólio, as medidas de liquidez são variadas, portanto algumas das possibilidades de medição da liquidez de um ativo são por meio de métricas envolvendo volume e preço do ativo. O volume total transacionado em um período t de um ativo pode ser, segundo o autor, uma medida simples de calcular e ao mesmo tempo robusta, pois é intuitivo ao investidor pensar que quanto mais transações o ativo tiver, mais líquido ele tende a ser, devido ao número de investidores que emitem ordens de compra e venda. Neste trabalho, uma variação dessa medida será utilizada como filtro de liquidez dos ativos elegíveis às carteiras otimizadas.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1. COLETA, TRATAMENTO E FILTRAGEM DOS DADOS

Este trabalho terá como foco o mercado brasileiro de ações, pois sendo um mercado ainda em expansão, devido ao baixo percentual de brasileiros investindo nesse mercado e ao aumento expressivo de investidores nos últimos anos, pode apresentar grandes oportunidades para o investidor comum. Para compor as carteiras eficientes de Markowitz, é necessário realizar a coleta das cotações históricas dos ativos listados na B3, bolsa de valores brasileira. Por meio da linguagem de programação Python, a biblioteca *yfinance* será utilizada para coletar os dados da plataforma Yahoo Finance. Como o objetivo é avaliar a consistência dos métodos de otimização no longo-prazo, a janela de observações da amostra será de 13 anos (2010 a 2022). O período utilizado para cálculo da matriz de covariância será de 3 anos móveis, começando em janeiro de 2010 e, portanto, iniciando os testes de desempenho dos modelos a partir de janeiro de 2013.

Os períodos de testes serão trimestrais - ou seja, a cada trimestre, a matriz de covariância será recalculada, mantendo o intervalo de 3 anos móveis e incluindo os dados dos 3 meses mais recentes que resultarão nos pesos e ativos ideais do próximo trimestre. O rebalanceamento trimestral foi escolhido, baseando-se nos resultados de Rubesam e Beltrame (2013) que concluíram que essa frequência de atualização demonstrou-se preferível em termos de desempenho, custo e facilidade de implementação. Foram consideradas cotações diárias em todas as análises.

O conjunto de ativos elegíveis para a formação das carteiras foi extraído em junho de 2023 da base de dados do Status Invest, plataforma de análises do mercado financeiro, que contém um vasto histórico de cotações e ativos. A base de dados extraída continha 620 *tickers* (código utilizado na bolsa de valores para negociar um determinado ativo), incluindo ações ordinárias e preferenciais de mesma empresa. Dessa lista, 486 ativos tinham cotações e/ou volume negociado disponíveis na biblioteca *yfinance* e, por isso, formaram o conjunto inicial de ativos elegíveis para as carteiras desta pesquisa.

O segundo critério de elegibilidade dos ativos foi aplicado separadamente em cada período de análise. Isso quer dizer que um mesmo ativo pode ter sido considerado na otimização das carteiras em um período e desconsiderado em outro, a depender dos seguintes

parâmetros: no período de “treino” (3 anos móveis, utilizados para o cálculo da matriz de covariância), o ativo deveria ter média diária de volume negociado maior do que R\$1 milhão e ter negociação em pelo menos 75% dos dias do período analisado. O filtro de negociação em pelo menos 75% dos dias é similar ao adotado por Rubesam e Beltrame (2013) e tem o objetivo de manter na base apenas os ativos que estavam ativos na maior parte do período, evitando possíveis distorções com ativos que pararam de negociar na Bolsa de Valores no meio do período. O primeiro filtro foi escolhido para amenizar o risco de liquidez na escolha de ativos com baixo volume de negociação. Além disso, foram desconsiderados dias em que não houve negociação (feriados, por exemplo) e as chamadas *penny stocks*, que possuem média de preços menor que R\$1,00 (um real) no período analisado.

Com os dados prontos para serem trabalhados, foi utilizada a biblioteca *PyPortfolioOpt*, que fornece um acervo muito rico de funções de otimização de carteiras, baseada nas teorias e pesquisas de Markowitz (1952), Ledoit e Wolf (2003, 2004a, 2004b), Estrada (2007) e outros pesquisadores do tema (detalhes sobre a biblioteca podem ser encontrados no site <https://pyportfolioopt.readthedocs.io/en/latest/UserGuide.html>). As funções de cálculo da matriz de covariância amostral e da matriz encolhida por correlação constante dessa biblioteca, bem como a resolução da otimização dos pesos das carteiras em cada período auxiliaram no encontro dos resultados desta pesquisa. Os dados do Ibovespa, índice utilizado como *benchmark* de mercado, também foram extraídos da biblioteca *yfinance*. De outro modo, o histórico diário da taxa CDI (considerada como um ativo livre de risco) foi acessado via API (Interface de Programação de Aplicação) do Banco Central do Brasil, disponível no Sistema Gerenciador de Séries Temporais (SGS).

No total, foram 40 períodos analisados. Para exemplificar todo processo, no primeiro período, o intervalo de treino para cálculo da matriz de covariância e estimação dos pesos ótimos de cada ativo foi de janeiro de 2010 a dezembro de 2012 (3 anos). Os pesos otimizados foram aplicados na carteira do trimestre subsequente (janeiro a março de 2013). No segundo período, avançou-se um trimestre, com o intervalo de treino sendo de abril de 2010 a março de 2013 (3 anos), e os pesos otimizados desse período foram aplicados de abril a junho de 2013. E assim por diante até o último trimestre testado (outubro a dezembro de 2022). Vale pontuar que essa metodologia de considerar janelas móveis para atualizar a matriz de covariância ajuda a contornar uma das críticas ao modelo clássico de Markowitz, no qual a matriz de covariância é estática ao longo do tempo e todos os períodos da amostra têm o mesmo peso.

4.2. CARTEIRA IGUALMENTE PONDERADA (CIP)

A Carteira Igualmente Ponderada (CIP) é aquela na qual todos os ativos disponíveis recebem o mesmo peso na carteira. Esse tipo de carteira, também conhecida como Carteira Ingênua, é geralmente comparada com as carteiras otimizadas, a fim de avaliar se o esforço despendido em otimização de carteiras realmente traz resultados melhores do que uma simples alocação igualmente dividida ($1/N$) entre as ações. Essa abordagem é comumente utilizada também pelos investidores que não conhecem ou não sabem como otimizar sua carteira, mas desejam investir em renda variável a fim de obter retornos acima da média.

4.3. CUSTOS DE TRANSAÇÃO

No processo de otimização das carteiras foram mensurados custos de transação a fim de medir o impacto no custo de um rebalanceamento trimestral das carteiras. Como estimativa, foi considerado 0,1% de custos de transação por cada compra ou venda no período, baseado nas premissas de Rubesam e Beltrame (2013). A estimativa foi feita da seguinte forma: A cada novo trimestre, calculou-se a diferença de peso de cada ativo de um trimestre para outro e essa diferença foi multiplicada por 0,1% do saldo final do trimestre anterior. Por exemplo, o ativo A teve um peso de 10% na carteira do trimestre t , que no final do período tinha um saldo de R\$10.000 (ou seja, o saldo do ativo A no final do trimestre t era de R\$1.000 (10% do total da carteira). No trimestre $t+1$, a carteira foi rebalanceada e o ativo A passou a representar 5% da carteira. Considerou-se que para atingir esse peso na carteira, o investidor teve que vender uma parte das ações que possuía a um custo de transação C . Nesse caso, o valor de C seria 5% (diferença entre os pesos dos trimestres, 10% e 5%) multiplicado pelo saldo do ativo A no trimestre t (R\$1.000) e multiplicado por 0,1%. O mesmo cálculo foi feito para todos os ativos, independentemente de ser uma operação de compra ou venda.

4.4. RETORNO AJUSTADO AO RISCO

Uma das medidas de performance de portfólio mais conhecidas no mercado de capitais é o Índice de Sharpe (SHARPE, 1966). Esse índice foi criado por William F. Sharpe, economista estadunidense que, juntamente com Harry Markowitz, foi premiado com o Prêmio de Ciências Econômicas em 1990 por suas grandes contribuições na área. Seu principal trabalho foi a criação do modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), que avalia o retorno e o risco de uma carteira de forma conjunta e permite verificar se o retorno esperado do investimento compensa o risco incorrido, considerando a taxa livre de risco. O Índice de Sharpe decorre desta ideia e mede o excesso de retorno do investimento sobre o risco inerente a ele. A Razão de Sharpe (outro nome dado ao índice) pode ser representada por:

$$IS = \frac{Rp - Rf}{\sigma}$$

onde:

IS = Índice de Sharpe

Rp = Retorno do portfólio

Rf = Retorno do ativo livre de risco (neste trabalho, foi utilizada a taxa CDI)

σ = Variância do portfólio

Esse indicador é amplamente usado no mercado financeiro devido à sua capacidade de consolidar retorno e risco e ao mesmo tempo compará-lo com a rentabilidade do ativo livre de risco. Desta forma, é possível comparar diferentes tipos de investimentos em renda variável, com níveis de retorno e risco distintos, facilitando o processo decisório do investidor que busca encontrar o investimento com melhor retorno ajustado ao risco.

Outra medida importante que será utilizada neste trabalho é a rentabilidade real do portfólio. Rentabilidade real é a rentabilidade descontada a inflação do período. Para o investidor, não seria suficiente avaliar a rentabilidade nominal de um investimento ao longo do tempo, afinal os seus ganhos só são efetivos, caso estejam acima da inflação, haja vista que todos os produtos e serviços do mercado sofrem reajustes de preço. Para fechar a tríade

de economistas estadunidenses citados neste trabalho, Irving Fisher formulou uma equação que ficou conhecida pelo seu próprio nome, Equação de Fisher. Por meio dela, o investidor pode descobrir qual o retorno real do seu investimento, se descontada a inflação do período. Como ilustrado por Neto e Lima (2017), a equação de Fisher pode ser representada da seguinte forma:

$$r = \frac{(1 + Rp)}{(1 + infl)} - 1$$

onde:

r = Retorno real

Rp = Retorno nominal do portfólio

$infl$ = taxa de inflação (neste trabalho, foi utilizado o IPCA)

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

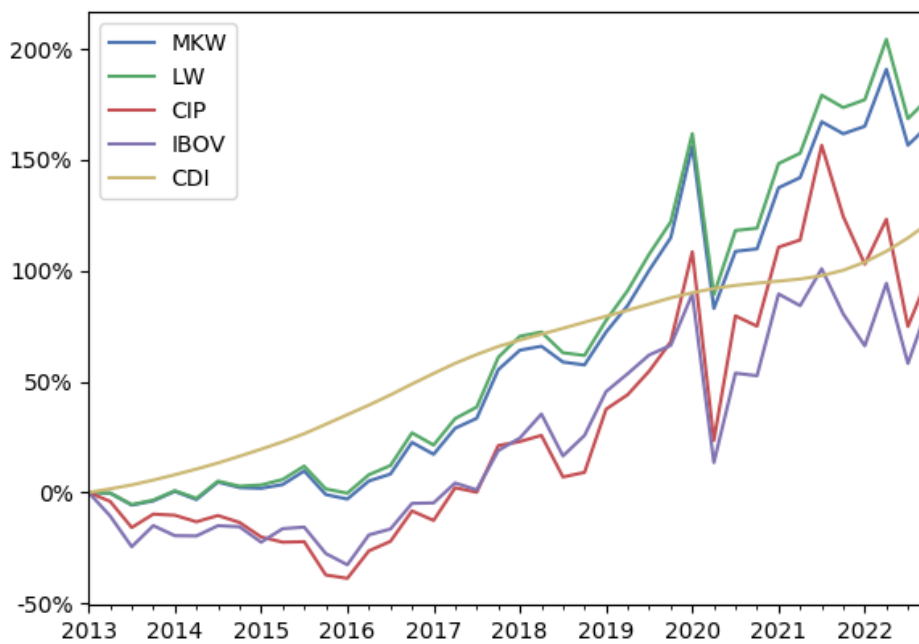
Como já mencionado em seções anteriores, o objetivo dessa pesquisa é avaliar se as carteiras de mínima variância, obtidas por métodos de otimização propostos por Markowitz e aprimorados por Ledoit e Wolf, superam o índice Ibovespa (IBOV), o CDI e a Carteira Igualmente Ponderada no longo-prazo. A carteira obtida com a matriz de covariância encolhida (LW) foi a que obteve melhores resultados com retorno de 10,3% ao ano e índice de Sharpe (IS) de 0,20. A carteira otimizada com a matriz de covariância amostral (MKW) ficou na segunda posição, apresentando retorno de 9,8% ao ano e IS de 0,14. Logo atrás das duas carteiras otimizadas, o maior retorno no período foi do ativo livre de risco, CDI, que atingiu cerca de 8,6% ao ano em rentabilidade nominal. Dentro do período analisado, tanto a Carteira Ingênua quanto o Ibovespa tiveram retornos de 5,8% ao ano. Os resultados encontrados convergem com aqueles relatados pelos autores aqui citados no que diz respeito à superação das carteiras otimizadas pelo método clássico e pelo método de encolhimento frente ao Ibovespa (CAVALCANTE et al., 2016; RUBESAM; BELTRAME, 2013; SANTOS; TESSARI, 2012; THOMÉ NETO; LEAL; ALMEIDA, 2011). Já na comparação com a CIP, os resultados dessa pesquisa divergem de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) e Thomé Neto, Leal e Almeida (2011) e convergem com os demais, pois as Carteiras de Mínima Variância (CMV) também superaram a CIP no longo-prazo. Vale ressaltar que, quando calculado o retorno real das carteiras CIP e IBOV no período, percebe-se que as duas carteiras apresentam retornos anualizados negativos (-2,1% ou -0,2% ao ano), ou seja, perdem valor por render menos do que a inflação acumulada no período (inflação acumulada foi de 79,7% ou 6,0% ao ano). As demais carteiras têm retornos reais positivos no período. Em termos de volatilidade, o Ibovespa teve um índice de 13,1% enquanto a CIP teve desvio padrão de 15,4%, sendo estas as carteiras mais voláteis no período, como mostra a Tabela 1. As carteiras otimizadas, com o objetivo de minimização da variância, apresentaram desvios-padrão de 8,6% (MKW) e 8,5% (LW).

Tabela 1 – Desempenho geral das carteiras no período (2013 a 2022)

Indicador	MKW	LW	CIP	IBOV	CDI
Retorno	154,5%	166,2%	76,0%	75,9%	128,8%
Retorno Real	41,6%	48,1%	-2,1%	-2,1%	27,3%
Retorno Anualizado	9,8%	10,3%	5,8%	5,8%	8,6%
Retorno Real Anualizado	3,5%	4,0%	-0,2%	-0,2%	2,4%
Volatilidade	8,6%	8,5%	15,4%	13,1%	0,9%
Índice de Sharpe	0,14	0,20	-0,18	-0,22	0,00

Fonte: elaborado pelo autor.

Gráfico 1 – Retorno Acumulado no Período



Fonte: elaborado pelo autor.

5.1. 2013 A 2016: 1º CICLO DE ALTA NA TAXA DE JUROS

De forma geral, é possível perceber que nos primeiros 4 anos da amostra analisada, a taxa CDI teve uma performance melhor comparada a todas as outras carteiras, atingindo

rentabilidade anual de 11,3% de 2013 a 2016. É possível correlacionarmos esses resultados com o ciclo de alta na taxa Selic que iniciou no primeiro semestre de 2013 em cerca de 7,20% e quase duplicou até a metade de 2015 (14,25%), permanecendo nessa faixa até setembro de 2016. Nesse mesmo período, o IBOV teve um resultado negativo de -0,9% ao ano, enquanto as carteiras de mínima variância (MKW e LW) cresceram respectivamente 4,0% e 5,0% ao ano. Como já comentado no início deste trabalho, é comum que com a taxa de juros elevada, os investidores migrem seu patrimônio para ativos de renda fixa, pois o risco de se investir em renda variável torna-se maior em comparação com o retorno esperado, o que tende a reduzir a atratividade desse mercado. No entanto, é importante ressaltar que, mesmo nesse cenário, as Carteiras de Mínima Variância (CMVs) tiveram performance positiva no acumulado, demonstrando mais resiliência do que o índice referência de mercado (IBOV) e que a Carteira Iguamente Ponderada (CIP), como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Retornos de 2013 a 2016 (Ciclo de alta no CDI)

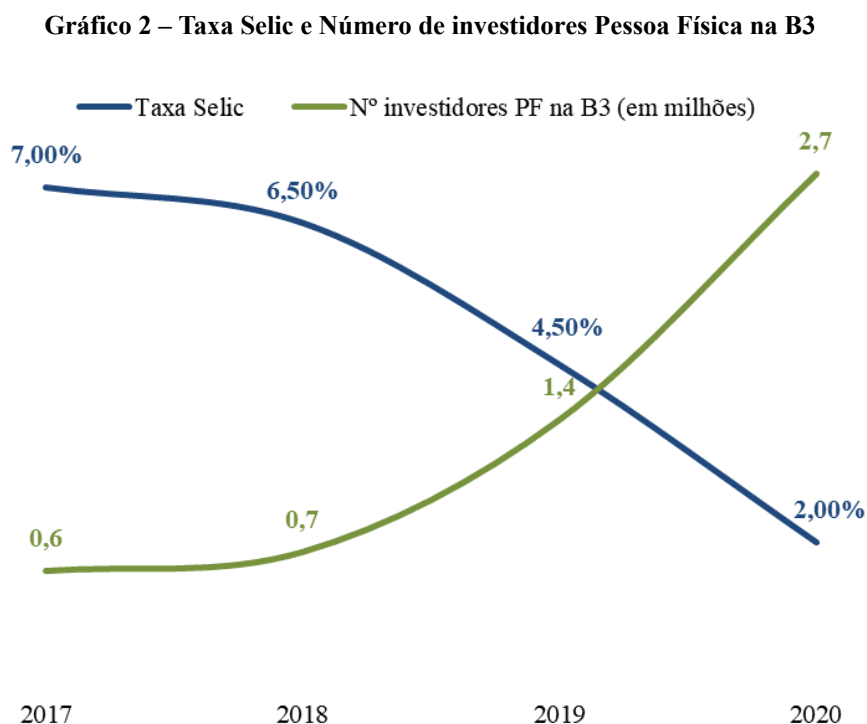
Carteira	Retorno Total	Retorno Anualizado	Retorno Máximo	Retorno Médio	Máximo Drawdown
MKW	17,2%	4,0%	13,2%	1,2%	-9,7%
LW	21,4%	5,0%	13,1%	1,4%	-9,2%
CIP	-12,6%	-3,3%	20,2%	-0,4%	-19,3%
IBOV	-3,7%	-0,9%	21,6%	0,6%	-16,4%
CDI	53,7%	11,3%	3,4%	2,7%	-

Fonte: elaborado pelo autor.

Analisando os anos isoladamente, é possível confirmar a robustez das CMVs frente a CIP e ao IBOV. Nesses 4 anos de alta na Selic, a CIP e o IBOV apresentaram retornos negativos nos 3 primeiros, enquanto as CMVs retraíram apenas em 1 ano. Além disso, o máximo drawdown da CIP em um ano fiscal foi de -23,4% enquanto a maior retração do IBOV foi de -17,7%. Esses valores, quando comparados às carteiras de mínima variância, são ruins. As maiores retrações das CMVs nesse mesmo período foram de -4,8% e -3,6% (MKW e LW, respectivamente).

5.2. 2017 A 2020: CICLO DE QUEDA NA TAXA DE JUROS

O próximo período (2017 a 2020) foi marcado pelo longo ciclo de queda na taxa de juros e, ao mesmo tempo, um aumento importante no número de investidores na Bolsa de Valores do Brasil. A taxa Selic, nesses 4 anos, teve uma redução de 85% entre janeiro de 2017 e dezembro de 2020. Isso significa dizer que a taxa de juros diminuiu, em média, 37% em cada ano. No Gráfico 2, é possível verificar o movimento inversamente relacionado entre a Taxa Selic e o Número de investidores Pessoa Física na B3.



Fonte: elaborado pelo autor, baseado nos dados do Banco Central do Brasil e da B3.

Em termos de retorno das carteiras no período, todas tiveram retornos positivos. Nota-se um desempenho melhor da Carteira Igualmente Ponderada, com crescimento de 141,1% no acumulado (24,6% ao ano), seguido da carteira otimizada LW com 104,7% no acumulado e 19,6% ao ano, a carteira MKW com 102,6% no acumulado e 19,3% ao ano e o IBOV com 100,2% no acumulado e 19,0% ao ano. Desta vez, o retorno do CDI apresentou distanciamento grande das demais carteiras, crescendo 27,1% no acumulado, o que

corresponde a 6,2% ao ano. Apesar do ótimo desempenho da carteira CIP, ela também apresentou o maior *drawdown* no período (-40,8%), número bastante expressivo e que significa que em determinado momento o saldo da carteira reduziu quase à metade. O IBOV teve máximo *drawdown* similar à CIP (-37,1%), enquanto a maior queda da carteira LW foi de -27,7% e a MKW de -28,6%. É importante destacar que as maiores quedas em todas as carteiras aconteceram no 1º trimestre de 2020, período em que a Bolsa de Valores do Brasil sofreu o maior impacto negativo no preço das ações devido à incerteza e expectativa de recessão futura com o aumento dos casos de Covid-19 no Brasil e no mundo. Nesse cenário, também é relevante pontuar que, neste tempo de crise no mercado, a otimização das CMVs pela minimização da variância das carteiras mostrou-se efetiva, pois tiveram as menores quedas entre as carteiras analisadas.

Tabela 3: Retornos de 2017 a 2020 (Ciclo de queda no CDI)

Carteira	Retorno Total	Retorno Anualizado	Retorno Máximo	Retorno Médio	Máximo Drawdown
MKW	102,6%	19,3%	19,3%	5,1%	-28,6%
LW	104,7%	19,6%	17,9%	5,2%	-27,7%
CIP	141,1%	24,6%	45,5%	7,5%	-40,8%
IBOV	100,2%	19,0%	34,9%	5,4%	-37,1%
CDI	27,1%	6,2%	3,0%	1,5%	-

Fonte: elaborado pelo autor.

5.3. 2021 A 2022: 2º CICLO DE ALTA NA TAXA DE JUROS

Com o aumento da inflação em 2020, tendência crescente em 2021 e outros fatores econômicos externos, o Copom, em março de 2021, tornou a elevar a taxa de juros com o objetivo de convergir a inflação para a meta. Esse ciclo de aumentos só terminou em agosto de 2022, quando a taxa Selic chegou a 13,75% ao ano. Nesse mesmo período, os retornos das carteiras de renda variável foram mais tímidos, como esperado. O investimento em renda

fixa, representado aqui pelo CDI, teve o melhor retorno no período (17,1% no acumulado e 4,0% ao ano). A segunda carteira com maior retorno foi a MKW, seguida de LW (7,2% para as duas no acumulado, sendo 1,8% e 1,7% ao ano, respectivamente). Desta vez, a CIP, que foi a carteira com maior retorno de 2017 a 2020, teve o pior resultado no período (-16,5% no acumulado e -4,4% ao ano). O índice referência de mercado (IBOV) recuou -7,2% no período (-1,8% ao ano), perdendo para as carteiras otimizadas.

Tabela 4 – Retornos de 2021 e 2022 (Ciclo de alta no CDI)

Carteira	Retorno Total	Retorno Anualizado	Retorno Máximo	Retorno Médio	Máximo Drawdown
MKW	7,2%	1,8%	10,4%	1,1%	-11,8%
LW	7,2%	1,7%	10,4%	1,1%	-11,8%
CIP	-16,5%	-4,4%	20,0%	-1,3%	-21,7%
IBOV	-7,2%	-1,8%	15,7%	-1,1%	-18,1%
CDI	17,1%	4,0%	3,3%	2,0%	-

Fonte: elaborado pelo autor.

5.4. VISÃO GERAL E COMPOSIÇÃO DAS CARTEIRAS

Percebe-se que, apesar da carteira LW ser a vencedora no acumulado, tanto em Retorno Total, Volatilidade e Índice de Sharpe, quando observado somente os resultados anuais de retorno (Tabela 5), ela não vence em nenhum ano isolado. Em compensação, dos 10 anos analisados, em 6 a carteira LW foi a menos volátil. Esses indicadores reforçam a superioridade e consistência das carteiras otimizadas por mínima-variância. Não foi necessário a carteira ser a mais rentável em cada um dos períodos para, no acumulado, ser a carteira de maior retorno.

Tabela 5 – Retorno, Volatilidade e Índice de Sharpe por ano e carteira

Ano	Retorno						Volatilidade					Índice de Sharpe				
	MKW	LW	CIP	IBOV	CDI	Maior	MKW	LW	CIP	IBOV	Menor	MKW	LW	CIP	IBOV	Maior
2013	0,5%	0,8%	-10,3%	-17,7%	8,0%	CDI	4,2%	4,1%	8,1%	12,6%	LW	-1,78	-1,74	-2,26	-2,04	LW
2014	1,4%	2,6%	-10,9%	-0,7%	10,7%	CDI	5,3%	5,1%	4,5%	4,8%	CIP	-1,74	-1,59	-4,82	-2,35	LW
2015	-4,8%	-3,6%	-23,4%	-10,6%	13,0%	CDI	6,6%	6,4%	8,9%	9,5%	LW	-2,68	-2,58	-4,08	-2,48	IBOV
2016	20,8%	21,7%	42,7%	42,9%	13,8%	IBOV	7,6%	7,4%	11,5%	9,9%	LW	0,93	1,07	2,52	2,96	IBOV
2017	40,1%	40,5%	40,7%	28,2%	9,8%	CIP	5,7%	5,4%	11,3%	9,4%	LW	5,28	5,65	2,74	1,96	LW
2018	5,0%	4,2%	11,9%	12,8%	6,4%	IBOV	5,8%	6,3%	16,9%	12,1%	MKW	-0,24	-0,35	0,33	0,53	IBOV
2019	48,7%	47,5%	51,6%	27,4%	5,9%	CIP	5,9%	5,1%	8,8%	3,5%	IBOV	7,31	8,09	5,19	6,13	LW
2020	-7,4%	-5,2%	1,0%	0,6%	2,7%	CDI	19,9%	19,8%	36,6%	32,3%	LW	-0,51	-0,40	-0,05	-0,07	CIP
2021	11,7%	11,6%	-3,6%	-11,6%	4,4%	MKW	5,3%	5,3%	14,7%	9,6%	LW	1,37	1,37	-0,55	-1,67	MKW
2022	-4,0%	-4,0%	-13,3%	5,9%	12,2%	CDI	9,4%	9,4%	16,9%	15,0%	MKW	-1,73	-1,72	-1,51	-0,42	IBOV
Total Anualizado	9,8%	10,3%	5,8%	5,8%	8,6%	LW	8,6%	8,5%	15,4%	13,1%	LW	0,14	0,20	-0,18	-0,22	LW
Média	11,2%	11,6%	8,6%	7,7%	8,7%	LW	7,6%	7,4%	13,8%	11,9%	LW	0,62	0,78	-0,25	0,26	LW
Máximo	48,7%	47,5%	51,6%	42,9%	13,8%	CIP	19,9%	19,8%	36,6%	32,3%	LW	7,31	8,09	5,19	6,13	LW
Mínimo	-7,4%	-5,2%	-23,4%	-17,7%	2,7%	CDI	4,2%	4,1%	4,5%	3,5%	IBOV	-2,68	-2,58	-4,82	-2,48	IBOV

Fonte: elaborado pelo autor.

Analisando os retornos trimestrais das carteiras (Gráfico 3), é possível perceber que as carteiras otimizadas seguiram o movimento do índice Ibovespa em quase todos os períodos. No entanto, como a volatilidade das carteiras é menor, os retornos positivos e negativos tenderam a ser menos positivos e menos negativos que o Ibovespa. Esse comportamento é fundamental para entender o resultado de longo-prazo dessas carteiras, pois quanto mais negativo for o retorno de uma carteira em um determinado período, mais custoso será recuperar o seu saldo anterior. Para elucidar melhor, eis um exemplo:

Há R\$1.000 investidos na carteira A no período t. O retorno da carteira A no período t foi de -50% (novo saldo é de R\$500). Para a carteira A retornar aos mesmos R\$1.000 investidos no período t, não basta crescer +50% no próximo período e sim +100% (o dobro da queda no período anterior). Daí a dificuldade de carteiras com alta volatilidade superarem as carteiras de mínima variância. Quando uma carteira tem uma retração menor em comparação com outra, a necessidade de recuperação daquela é também menor em termos percentuais.

Gráfico 3 – Retornos das carteiras no período (2013 a 2022)

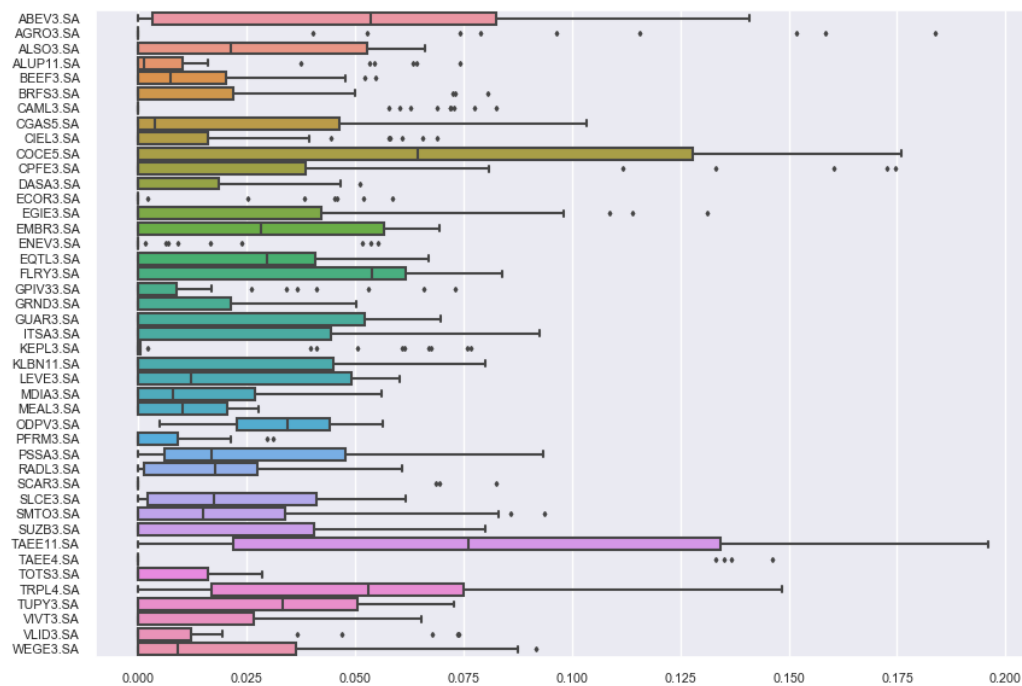


Fonte: elaborado pelo autor.

A composição da carteira vencedora (LW) no período analisado pode ser visualizada nos Gráficos 4 e 5. O Gráfico 4 é um gráfico boxplot, ou diagrama de caixa, muito utilizado

na área da estatística descritiva para evidenciar a distribuição dos dados analisados. Nele, é possível perceber que o ativo com maior mediana de peso na carteira foi a Taesa (TAEE11) com 7,6%. O restante dos 5 ativos com maior mediana de pesos foram Coelce (COCE5) com mediana de 6,4%, Fleury (FLRY3) com 5,4%, Ambev (ABEV3) com 5,4% e Transmissão Paulista de Energia (TRPL4) com 5,3% de mediana. Nota-se que dos 5 ativos do topo da lista, 3 são do mesmo setor de Energia Elétrica, conhecido no mundo dos investimentos por ser um setor perene, estável por ter uma demanda praticamente constante ao longo do tempo. Outro ponto fundamental é avaliar o peso máximo alocado em um só ativo. Nesse caso, o ativo que obteve maior peso em algum dos trimestres foi a própria Taesa (TAEE11) com peso máximo de 19,6% na carteira.

Gráfico 4 – Boxplot de ativos e pesos na carteira LW (2013 a 2022)

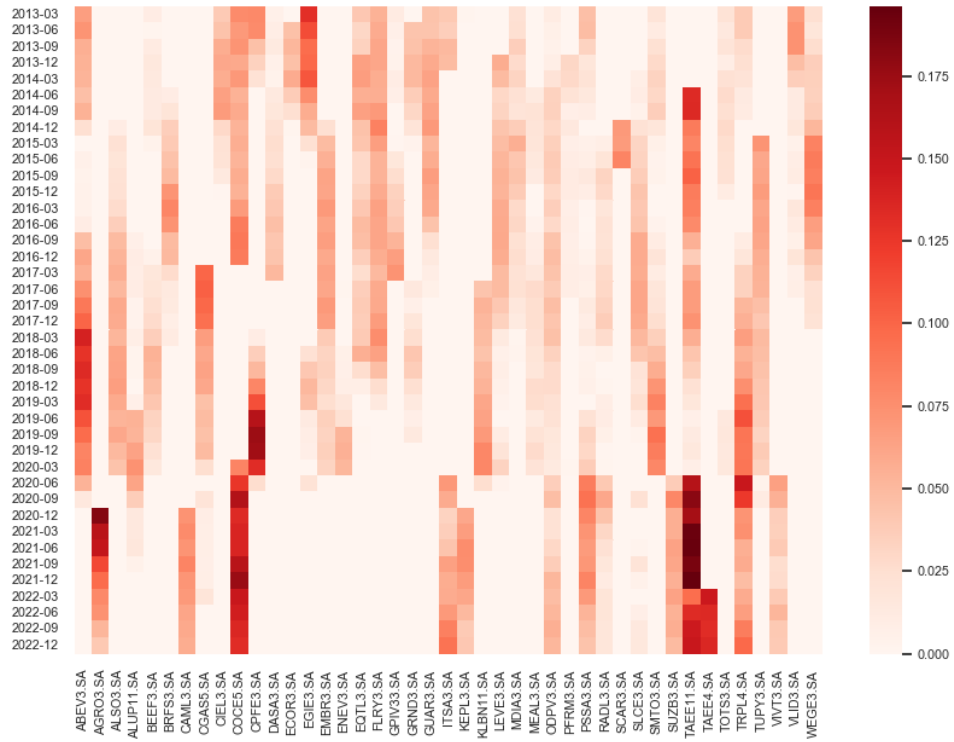


Fonte: elaborado pelo autor.

No Gráfico 5, observa-se a mudança dos ativos e pesos ao longo do tempo na Carteira LW. A Taesa, apesar de ter a maior mediana em todo período, apresentou uma participação mais forte na carteira a partir do 2º trimestre de 2020. Coelce teve comportamento muito similar a Taesa, figurando na carteira de 2020 a 2022 junto de ativos que, até então não

participavam ou tiveram pequena participação na carteira, como Brasil Agro (AGRO3), Camil (CAML3), Itaúsa (ITSA3), Kepler Weber (KEPL3) e Porto Seguro (PSSA3).

Gráfico 5 – Mapa de calor dos pesos dos ativos na carteira LW (2013 a 2022)



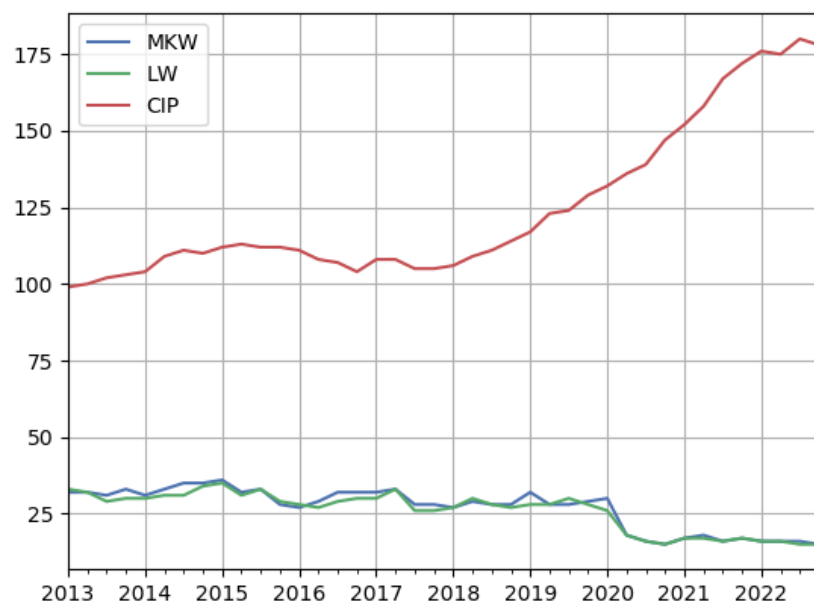
Fonte: elaborado pelo autor.

5.5. DIVERSIFICAÇÃO E NÚMERO DE ATIVOS EM CARTEIRA

A teoria da diversificação postula que o risco diversificável da carteira pode ser reduzido conforme o investimento for distribuído em um número maior de ativos. No entanto, Ross et al. (2013) pontuam que, baseado em uma análise do mercado de ações americano, quando a carteira tem cerca de 10 ativos, a maior parte do efeito da diversificação já ocorreu e quando ultrapassado o número de 30 ativos, o ganho marginal torna-se muito pequeno. Nesse sentido, pode-se dizer que para o investidor comum, após um certo número de ativos na carteira, a gestão da carteira pode acabar se tornando mais complexa e trabalhosa.

Durante o período analisado e com os critérios estabelecidos para a formação das carteiras MKW, LW e CIP, percebe-se uma diferença grande entre o número médio de ativos nas CMVs e na CIP. Enquanto o número de ativos das carteiras otimizadas varia entre 15 e 36 ativos, a CIP parte de 99 e chega a ter 180 ativos em carteira no terceiro trimestre de 2022. Um dos motivos que levou a CIP a ter tanta variedade de ativos na carteira é o fato de que todos os ativos com dados disponíveis e que atingiram os critérios estabelecidos de liquidez, estavam aptos a participar da carteira. Operar uma carteira com esse número de ativos é inviável para o investidor comum e, no mínimo, desnecessário do ponto de vista de risco-retorno. Possivelmente, o estabelecimento de um critério adicional de peso mínimo dos ativos na carteira pode filtrar melhor o número de ativos na CIP.

Gráfico 6 – Número de ativos em carteira (MKW, LW e CIP)

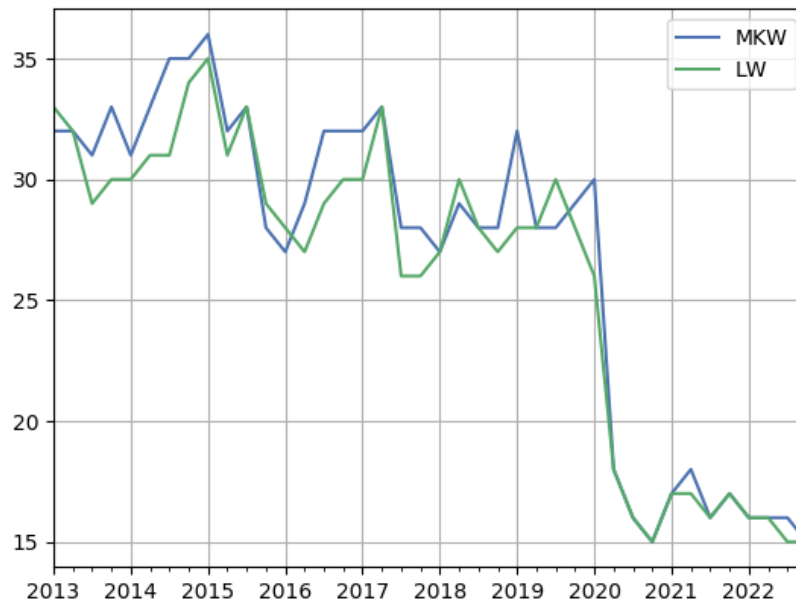


Fonte: elaborado pelo autor.

Durante todo período, o número de ativos das carteiras MKW e LW são próximos. No entanto, é notável no Gráfico 7 que até o 1º trimestre de 2020, as duas carteiras mantinham uma média de 30 ativos e, a partir do 2º trimestre de 2020, esse número cai quase pela metade (média de 16 ativos) e permanece nessa faixa até o fim do período analisado. Como já comentado, nessa mesma época, os retornos de quase 100% dos ativos da Bolsa de Valores tiveram fortes impactos, principalmente no 1º e 2º trimestre de 2020 em decorrência da pandemia do Covid-19. As duas metodologias de seleção de ativos têm como objetivo a

minimização da variância da carteira e como muitos ativos tiveram retornos negativos expressivos no 1º trimestre de 2020, essa informação afetou fortemente o histórico de volatilidade dos ativos, influenciando o modelo a distribuir os pesos ideais nos ativos que contribuíssem para uma menor volatilidade da carteira.

Gráfico 7 – Número de ativos em carteira (MKW e LW)



Fonte: elaborado pelo autor.

5.6. TESTES DE HIPÓTESES

A diferença estatística entre os resultados das carteiras foi mensurada por meio de testes paramétrico e não paramétrico. A principal diferença é que o teste paramétrico supõe que os dados testados têm uma distribuição normal. O teste não paramétrico não assume nenhuma distribuição específica. Foram realizados testes com os resultados das carteiras MKW e LW por trimestre comparando com CIP, IBOV e CDI, quando aplicável.

Com intervalo de 95% de confiança, tanto o teste paramétrico t de Student, quanto o teste não-paramétrico de Mann-Whitney, indicaram que não houve diferença significativa entre os retornos das carteiras otimizadas, do Ibovespa e do CDI na amostra. Quanto ao

Índice de Sharpe das carteiras, ao intervalo de confiança de 95%, também não foram encontradas diferenças estatisticamente significativas em nenhum dos dois testes. No teste de volatilidade entre as CMVs, a CIP e o IBOV, o teste t de Student indicou que, com intervalo de confiança de 95%, a volatilidade das carteiras MKW e LW é significativamente menor que a do IBOV no período. Pelo teste de Mann-Whitney, confirmou-se a significância da diferença entre a volatilidade das carteiras MKW e LW em comparação com o IBOV. Além disso, as duas carteiras também tiveram volatilidade estatisticamente inferior à da CIP com o mesmo intervalo de confiança de 95%.

Tabela 6 – Estatística e p-valor dos testes t e Mann-Whitney para os retornos trimestrais

Retornos	Teste t de Student						Teste de Mann-Whitney					
	Estatística			p-valor			Estatística			p-valor		
	CIP	IBOV	CDI	CIP	IBOV	CDI	CIP	IBOV	CDI	CIP	IBOV	CDI
MKW	0,05	0,23	0,47	0,96	0,82	0,64	843	826	861	0,68	0,81	0,56
LW	0,09	0,27	0,56	0,93	0,79	0,58	849	825	880	0,64	0,81	0,44

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 7 – Estatística e p-valor dos testes t e Mann-Whitney para as volatilidades trimestrais

Volatilidade	Teste t de Student						Teste de Mann-Whitney					
	Estatística			p-valor			Estatística			p-valor		
	CIP	IBOV	CDI	CIP	IBOV	CDI	CIP	IBOV	CDI	CIP	IBOV	CDI
MKW	-1,00	-6,61	-	0,32	0,00*	-	19	47	-	0,00*	0,00*	-
LW	-1,00	-6,42	-	0,32	0,00*	-	29	51	-	0,00*	0,00*	-

Fonte: elaborado pelo autor.

Nota: Quando houve diferença estatística, o resultado foi assinalado com um asterisco (*)

Tabela 8 – Estatística e p-valor dos testes t e Mann-Whitney para os Índices de Sharpe trimestrais

Índice de Sharpe	Teste t de Student						Teste de Mann-Whitney					
	Estatística			p-valor			Estatística			p-valor		
	CIP	IBOV	CDI	CIP	IBOV	CDI	CIP	IBOV	CDI	CIP	IBOV	CDI
MKW	0,21	-0,09	-	0,83	0,93	-	846	836	-	0,66	0,73	-
LW	0,27	-0,03	-	0,79	0,97	-	854	840	-	0,61	0,70	-

Fonte: elaborado pelo autor.

6. CONCLUSÃO

Essa pesquisa teve como principal objetivo avaliar se carteiras de mínima variância, obtidas por métodos de otimização, superaram consistentemente o índice referência do mercado de ações brasileiro, Ibovespa, a carteira ingênua (igualmente ponderada) e o CDI no longo-prazo. Filtros de liquidez foram aplicados anteriormente à formação das carteiras, a fim de limitar o número de ativos àqueles com menor risco de liquidez para o investidor. Duas abordagens diferentes foram utilizadas na formação das Carteiras de Mínima Variância (CMVs): a abordagem clássica sugerida por Markowitz (1952), que considera a matriz de covariância amostral, e a abordagem aprimorada por Ledoit e Wolf (2004b), que utiliza a matriz de covariância encolhida.

No acumulado do período analisado, as Carteiras de Mínima Variância (MKW e LW) superaram a Carteira Igualmente Ponderada, o Ibovespa e o CDI em termos de retorno, volatilidade e retorno ajustado ao risco (Índice de Sharpe). A performance das carteiras foi analisada também em recortes específicos, de acordo com os ciclos de alta e de queda na taxa de juros para melhor entendimento do comportamento de cada carteira em épocas de crise e de baixa atratividade do mercado de ações. Foi possível constatar que as CMVs apresentaram retornos positivos nos 3 ciclos analisados (2 de alta e 1 de queda na taxa de juros). Nos dois períodos de alta na taxa de juros, tanto a CIP, quanto o IBOV tiveram retornos negativos, enquanto as CMVs mostraram-se com resultados consistentes e positivos. Além disso, foram as carteiras menos voláteis. Apesar de apresentar resultados consistentes e superiores aos *benchmarks* utilizados, os retornos das CMVs não se mostraram estatisticamente superiores aos da CIP, do IBOV e do CDI, segundo os testes t de Student e de Mann-Whitney.

REFERÊNCIAS

B3. **Pessoas Físicas | Uma análise da evolução dos investidores na B3**. Disponível em: <https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/consultas/mercado-a-vista/perfil-pessoas-fisicas/perfil-pessoa-fisica/>. Acesso em: 18 mar. 2023.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Atas do Comitê de Política Monetária - Copom - 256ª Reunião - 1-2 agosto, 2023**. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/publicacoes/atascopom>>. Acesso em: 2 set. 2023.

CAVALCANTE, D. M. et al. COMPOSIÇÃO DE CARTEIRAS POR MÍNIMA VARIÂNCIA: COMPARAÇÃO COM BENCHMARKS DE MERCADO. **Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade**, v. 6, n. 2, p. 132–159, 30 jun. 2016.

DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? **The Review of Financial Studies**, v. 22, n. 5, p. 1915–1953, 1 maio 2009.

ESTRADA, J. **Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach**. Rochester, NY, 1 nov. 2007. Disponível em: <<https://papers.ssrn.com/abstract=1028206>>. Acesso em: 2 set. 2023.

FOMC. **The Fed - Transcripts and other historical materials**. Disponível em: <https://www.federalreserve.gov/monetarypolicy/fomc_historical.htm>. Acesso em: 13 abr. 2023.

GALLUP INC. **What Percentage of Americans Own Stock?** Disponível em: <<https://news.gallup.com/poll/266807/percentage-americans-owns-stock.aspx>>. Acesso em: 17 jun. 2023.

JAGANNATHAN, R.; MA, T. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. **The Journal of Finance**, v. 58, n. 4, p. 1651–1683, 2003.

LEDOIT, O.; WOLF, M. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 88, n. 2, p. 365–411, 1 fev. 2004a.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. **The Journal of Portfolio Management**, v. 30, n. 4, p. 110–119, 31 jul. 2004b.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. **Journal of Empirical Finance**, v. 10, n. 5, p. 603–621, 1 dez. 2003.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection*. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MERTON, R. C. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. **Journal of Financial Economics**, v. 8, n. 4, p. 323–361, 1 dez. 1980.

NETO, A. A.; LIMA, F. G. **Fundamentos de Administração Financeira**. 3ª edição ed. [s.l.] Atlas, 2017.

PEREIRA, G. M. et al. Restrição de Liquidez para Modelos de Seleção de Carteiras. **Brazilian Review of Finance**, v. 13, n. 2, p. 288, 5 nov. 2015.

PEREIRA, G. M. Integração de restrições de liquidez em modelos de seleção de carteiras. 2014.

ROSS, S. A. et al. **Fundamentos de Administração Financeira**. 9. ed. [s.l.] AMGH Editora, 2013.

RUBESAM, A.; BELTRAME, A. L. Carteiras de Variância Mínima no Brasil. **Brazilian Review of Finance**, v. 11, n. 1, p. 81–118, 30 maio 2013.

RUBINSTEIN, M. Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty-Year Retrospective. **The Journal of Finance**, v. 57, n. 3, p. 1041–1045, 2002.

SANTOS, A. A. P.; TESSARI, C. Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro. **Brazilian Review of Finance**, v. 10, n. 3, p. 369–393, 17 out. 2012.

SHARPE, W. F. Mutual Fund Performance. **The Journal of Business**, v. 39, n. 1, p. 119–138, 1966.

STEIN, C. **Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution**. 1956. Disponível em: <<https://apps.dtic.mil/sti/citations/AD1028390>>. Acesso em: 14 jun. 2023.

THOMÉ NETO, C.; LEAL, R. P. C.; ALMEIDA, V. DE S. E. Um índice de mínima variância de ações brasileiras. **Economia Aplicada**, v. 15, p. 535–557, dez. 2011.