

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Os Teoremas de Lie por uma perspectiva Poisson

Dissertação de Mestrado

Victor Henrique Huff

Porto Alegre, outubro de 2023.

Dissertação submetida por Victor Henrique Huff como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Pedro Walmsley Frejlich (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Álvaro Krüger Ramos (PPGMat-UFRGS)

Francisco Vanderson Moreira de Lima (PPGMat-UFRGS)

Olivier Brahic (UFPR)

Data da Apresentação: 18/09/2023.

Conteúdo

Capítulo 1. Introdução	3
1. Agradecimentos	5
Parte 1. O grupóide fundamental	7
Capítulo 2. Categorias	9
1. Categorias	9
2. Grupóides	11
3. Functores	12
4. Grupóides topológicos	13
Capítulo 3. O grupóide fundamental	15
1. O grupóide fundamental	15
2. Espaços de recobrimento	19
3. Recobrimento universal	20
Capítulo 4. O grupóide fundamental como grupóide topológico	23
1. Topologia laço	23
2. O grupóide fundamental como grupóide topológico	26
3. A Topologia compacto-aberto	29
4. O functor recobrimento universal	31
Parte 2. Grupos de Lie	37
Capítulo 5. Grupos de Lie	39
1. Definições básicas	39
2. Exemplos	39
3. O produto pontual	40
4. O recobrimento universal de um grupo de Lie	41
Capítulo 6. Campos vetoriais em grupos de Lie	45
1. Campos de vetores em um grupo de Lie	45
2. Álgebras de Lie	46
3. A álgebra de Lie de um grupo de Lie	47
4. O mapa exponencial	50
Capítulo 7. Estruturas Poisson	53

1. Definições básicas	53
2. Estruturas de Poisson e campos de bivectores	55
3. Exemplos	59
4. Splitting de Weinstein	61
Capítulo 8. O grupo Hamiltoniano	65
1. Campos vetoriais completos	65
2. Variação de parâmetros	66
3. O grupo Hamiltoniano	68
4. Folheações simpléticas	69
5. A folheação simplética linear	73
Parte 3. Os teoremas de Lie	75
Capítulo 9. Os espaços de caminhos	77
1. Grupos de Banach-Lie	77
2. O espaço de caminhos $P(\mathfrak{g})$ como variedade Banach	79
3. Os espaços de caminhos como grupos	81
4. Os espaços de caminhos como grupos de Banach-Lie	83
5. A álgebra de Lie do espaço de caminhos	84
Capítulo 10. Os teoremas de Lie	87
1. O subgrupo nulomotópico	88
2. O grupo Hamiltoniano de uma álgebra de Lie	90
3. O Primeiro Teorema de Lie	92
4. O Segundo Teorema de Lie	94
5. O Terceiro Teorema de Lie	97
6. Os Teoremas de Lie como um functor adjunto	100
7. A falha do Terceiro Teorema de Lie	102
Bibliografia	105

CAPÍTULO 1

Introdução

Os Teoremas de Lie criam uma conexão clara (e functorial) entre duas estruturas incrivelmente interessantes: A categoria dos grupos de Lie e a categoria das álgebras de Lie. Um grupo de Lie G é uma variedade com estrutura de grupo a qual sua multiplicação e inversão são diferenciáveis.

Como veremos, podemos induzir no espaço tangente da unidade de um grupo de Lie uma estrutura de álgebra de Lie \mathfrak{g} . Esta construção é relativamente simples e será bem especificada neste trabalho. A luz dessa construção temos o Primeiro Teorema de Lie, que nos permite associar a cada grupo de Lie, o seu recobrimento universal que continuará sendo um grupo de Lie e, além disso, possuirá a mesma estrutura de álgebra de Lie do grupo original.

As discussões para grupos de Lie simplesmente conexos terão grande ênfase, já que, como o parágrafo acima indica, os teoremas de Lie se baseiam em tais estruturas. Neste trabalho faremos uma construção functorial dos chamados recobrimentos universais para espaços topológicos com propriedades suficientemente boas usando estruturas denominadas grupóides fundamentais. Quando aplicada em um grupo de Lie, mostraremos que tal construção se relaciona muito bem com o produto, tendo assim uma descrição em termos deste último.

Voltando a discussão do segundo parágrafo, vemos que tal construção é feita sem nenhuma hipótese adicional com relação ao grupo de Lie dado, o que induz a perguntar: Dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , existe um grupo de Lie G que a integre? Ou seja, de modo que no espaço tangente a unidade desse grupo, obtemos a mesma estrutura desta álgebra de Lie.

A resposta é positiva, no caso em que \mathfrak{g} tem dimensão finita. O Terceiro Teorema de Lie nos garante a existência de tal grupo, e este será um dos principais focos das discussões aqui presentes.

Existem muitas demonstrações possíveis para o Terceiro Teorema de Lie, tomando por exemplo, podemos citar a demonstração que se utiliza do Teorema de Ado, que associa a cada álgebra de Lie, uma álgebra de matrizes via o comutador, que pode ser interpretado como um grupo de Lie. Porém Duistermaat & Kolk ([8]) apresentam uma demonstração construtiva, na qual é utilizada o espaço de caminhos $P(\mathfrak{g})$ de uma determinada álgebra de Lie \mathfrak{g} quocientado pelo conjunto de caminhos nulomotópicos $N(\mathfrak{g})$ visto como um grupo de Lie, a qual integrará \mathfrak{g} . O subgrupo $N(\mathfrak{g})$ é, em um primeiro momento, descrito em termos da fórmula de variação de parâmetros, que descreve como homotopias se comportam em variedades a partir das variações infinitesimais com relação aos parâmetros adotados.

Neste trabalho, faremos uso de construções análogas, porém a estrutura de grupo e a descrição de $N(\mathfrak{g})$ serão feitos em termos dos chamados grupos Hamiltonianos. Campos Hamiltonianos surgem naturalmente do estudo de estruturas Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$, já que, como tais estruturas são compostas por colchetes no espaço das funções que satisfazem Leibniz, para cada função fixada teremos por resultado um campo vetorial $H_f \in \mathfrak{X}(M)$ que age em funções a partir da derivada de Lie. Veremos que, via folheações simpléticas de uma variedade Poisson, ou seja, uma folheação em que cada folha é uma variedade imersa e possui uma estrutura simplética, podemos mostrar com uma riqueza muito maior de detalhes como o grupo de nulomotopias se comporta em $P(\mathfrak{g})$, o descrevendo apenas em termos da álgebra de Lie \mathfrak{g} , já que teremos uma noção natural da fórmula de variação de parâmetros sem fazer menção de um grupo de Lie que integre \mathfrak{g} .

A dissertação esta dividida em três partes. Na primeira parte faremos a introdução dos conceitos básicos da teoria de categorias, em especial, o conceito de grupóide fundamental. Tal grupóide será munido de uma estrutura topologia denominada topologia laço. Tal construção é importante, pois a partir desta teremos condições de munir todo grupo de Lie de um recobrimento universal, que por consequência de suas estruturas diferenciáveis, terá a mesma álgebra de Lie do primeiro. Este é denominado o Primeiro Teorema de Lie.

Na segunda parte serão discutidos grupos e álgebras de Lie, mostrando explicitamente a ligação destas estruturas. Em especial, será descrita a construção functorial da álgebra de Lie de um grupo de Lie. Também será introduzido os conceitos mais básicos de Geometria de Poisson. Nestes último, discutiremos o grupo hamiltoniano de uma determinada variedade, bem como a construção das referidas folheações simpléticas.

Na terceira parte, inicialmente daremos ênfase para os chamados Grupos de Banach-Lie. Estudaremos os espaços de caminhos de grupos de Lie e de álgebras, exibindo uma correspondência homeomórfica entre estas estruturas, que serão tratadas como grupos de Banach-Lie posteriormente. Com tais construções, daremos as demonstrações dos três teoremas de Lie, juntamente com a relação entre os funtores Lie e Int. Por fim, exibiremos um caso em que o Terceiro Teorema de Lie falha, mais especificamente, tomando uma estrutura de álgebra de Lie com dimensão infinita que não pode ser “integrada” a um grupo de Lie G .

1. Agradecimentos

Dedico este trabalho à minha família e amigos. Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa à mim conferida, a qual me permitiu prosseguir na carreira acadêmica. Também agradeço profundamente aos professores e orientador pela paciência e empenho no ensino.

Parte 1

O grupóide fundamental

CAPÍTULO 2

Categorias

1. Categorias

Na matemática, é comum a generalizações de conceitos, onde uma definição “engloba” outras definições, aumentando a quantidade de resultados aplicáveis nestas últimas. A teoria de Categorias faz isso com perfeição, generalizando conceitos como funções entre conjuntos, por exemplo.

DEFINIÇÃO 2.1. *Uma categoria \mathcal{C} consiste em:*

- 1) *Uma coleção C_0 de objetos;*
- 2) *Uma coleção C_1 de morfismos (ou setas);*
- 3) *Mapas*

$$\mathbf{u} : C_0 \rightarrow C_1, \quad \mathbf{s}, \mathbf{t} : C_1 \rightarrow C_0,$$

chamados respectivamente unidade, source, target e uma multiplicação (ou composição)

$$\mathbf{m} : C_1 \times_{(\mathbf{s}, \mathbf{t})} C_1 \rightarrow C_1, \quad \mathbf{m}(g, h) := gh,$$

definida na coleção

$$C_1 \times_{(\mathbf{s}, \mathbf{t})} C_1 = \{(g, h) \in C_1 \times C_1 \mid \mathbf{s}(g) = \mathbf{t}(h)\}$$

de setas componíveis, que satisfazem:

- a) $\mathbf{u}(\mathbf{t}(g))g = g = g\mathbf{u}(\mathbf{s}(g))$.
- b) $\mathbf{s}(gh) = \mathbf{s}(h)$,
- c) $\mathbf{t}(gh) = \mathbf{t}(g)$
- d) $(gh)k = g(hk)$,

para todos $(g, h, k) \in C_1 \times_{(\mathbf{s}, \mathbf{t})} C_1 \times_{(\mathbf{s}, \mathbf{t})} C_1$.

Desta forma, podemos pensar em uma categoria \mathcal{C} como uma coleção de objetos $C_0 = \text{Ob}(\mathcal{C})$ e uma coleção de setas $C_1 = \text{Ar}(\mathcal{C})$, munidos de algumas operações:

O mapa source \mathbf{s} e o mapa target \mathbf{t} , os quais tomam setas $f \in C_1$ e associam elementos $x, y \in C_0$, tais que $x = \mathbf{s}(f)$ e $y = \mathbf{t}(f)$. Além disso, essas tais setas podem ser denotadas por

$$f : x \rightarrow y \quad \text{ou} \quad x \xrightarrow{f} y$$

Uma Identidade

$$\mathbf{u} : C_0 \rightarrow C_1,$$

que a cada objeto $x \in C_0$ associa a seta identidade $\text{id}_x = 1_x : x \rightarrow x$.

Uma multiplicação

$$\mathbf{m} : C_1 \times_{(\mathbf{s}, \mathbf{t})} C_1 \rightarrow C_1,$$

a qual associa a cada par de mapas (g, f) componíveis, uma seta gf que chamamos de multiplicação de g e f , de modo que $\mathbf{s}(gf) = \mathbf{s}(f)$ e $\mathbf{t}(gf) = \mathbf{t}(g)$. Teremos o seguinte diagrama comutativo para a multiplicação:

$$\begin{array}{ccc} & & z \\ & \nearrow^{gf} & \uparrow g \\ x & \xrightarrow{f} & y \end{array}$$

Tal multiplicação deve ser **associativa**, ou seja, dadas $f : x \rightarrow y$, $g : y \rightarrow z$ e $k : z \rightarrow w$, então

$$k(gf) = (kg)f.$$

A associatividade da multiplicação implica que o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ gf \downarrow & \searrow^g & \downarrow kg \\ z & \xrightarrow{k} & w \end{array}$$

Além disso, para todas as setas $f : x \rightarrow y$ e $g : y \rightarrow z$,

$$(\text{id}_y)f = f \qquad \text{e} \qquad g(\text{id}_y) = g.$$

OBSERVAÇÃO 2.1. A multiplicação de setas é usualmente chamada de **composição**, e sua notação será feita tanto por $f \circ g$ quanto pela simples concatenação dos elementos f e g . Essa alternância na notação ocorrerá por conveniência.

Visto a existência das setas identidades $\text{id}_x \in \text{Ar}(\mathcal{C})$ para cada $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, podemos fazer uma identificação natural destas com cada elemento da coleção de objetos. Logo, a coleção de setas carrega, de certa forma, todas as informações necessárias de uma determinada categoria.

A seguir seguem exemplos intuitivos de categorias, que expressam bem a generalidade citada no início da seção.

EXEMPLO 2.1. Podemos definir dois exemplos triviais, começando pela categoria nula, que não possui elementos e setas, e a categoria formada por um elemento e pela sua seta unitária.

EXEMPLO 2.2. Conjuntos e mapas entre estes formam a categoria Sets, onde a multiplicação é a composição (no sentido usual). Deste, vemos que grupos e homomorfismos formam uma categoria.

EXEMPLO 2.3. Espaços topológicos e mapas contínuos entre estes formam uma categoria Top , novamente com a composição de mapas como multiplicação. Neste caso, restringindo estes mapas a homeomorfismo, podemos obter uma estrutura de subcategoria, que será apresentada a seguir.

DEFINIÇÃO 2.2. Uma subcategoria \mathcal{S} de uma categoria \mathcal{C} é composta por uma subcoleção de objetos e por uma subcoleção de setas, a qual inclui os objetos $\mathbf{s}(f)$ e $\mathbf{t}(f)$ para cada $f \in \mathcal{S}$, contém id_x para cada $x \in \mathcal{S}$ e ainda contém a composição/multiplicação de setas componíveis em $\text{Ar}(\mathcal{S})$.

2. Grupóides

Dada uma categoria \mathcal{C} e uma seta $f : x \rightarrow y$ em $\text{Ar}(\mathcal{C})$, dizemos que f é **invertível** se existe uma seta $g : y \rightarrow x$ em $\text{Ar}(\mathcal{C})$, tal que

$$gf = \text{id}_x, \quad fg = \text{id}_y.$$

Se um tal elemento existe, então ele é único, em cujo caso o denotamos por f^{-1} .

DEFINIÇÃO 2.3. Um grupóide \mathcal{G} é uma categoria em que toda seta é invertível.

Como inversas são únicas, podemos equivalentemente pedir a existência de uma função **inversa**

$$\mathbf{i} : G_1 \rightarrow G_1, \quad \mathbf{i}(g) = g^{-1}$$

tal que para todo $g \in G_1$,

$$g^{-1}g = \mathbf{i}(\mathbf{s}(g)), \quad gg^{-1} = \mathbf{i}(\mathbf{t}(g)).$$

DEFINIÇÃO 2.4. Um **subgrupóide** \mathcal{G}' de um grupóide \mathcal{G} é uma subcategoria que, além disso, é um grupóide com as operações induzidas.

EXEMPLO 2.4. Um grupo G pode ser interpretado como um grupóide com apenas um objeto. Mais precisamente, a coleção de objetos terá apenas um elemento genérico, a coleção de setas é identificada com G e multiplicação identificada com o produto herdado deste último.

EXEMPLO 2.5. Se um grupo G age em um conjunto X , existe um **grupóide de ação** $G \times X$ com

$$\mathbf{s}(g, x) = x, \quad \mathbf{t}(g, x) = g \cdot x, \quad \mathbf{m}((g, h \cdot x), (h, x)) = (gh, x), \quad \mathbf{i}(g, x) = (g^{-1}, g \cdot x), \quad \mathbf{u}(x) = (1, x).$$

EXEMPLO 2.6. Seja X um conjunto, $X \times X$ é um grupóide com

$$\mathbf{s}(x, y) = y, \quad \mathbf{t}(x, y) = x, \quad \mathbf{m}((x, y), (y, z)) = (x, z), \quad \mathbf{i}(x, y) = (y, x), \quad \mathbf{u}(x) = (x, x).$$

Este é chamado **grupóide par**.

EXEMPLO 2.7. Uma relação de equivalência $R \subset X \times X$ em um conjunto X é um subgrupóide do grupóide par, a qual é denotado por $X \times X \rightrightarrows X$.

OBSERVAÇÃO 2.2. O Exemplo 2.7 mostra que, de certa forma, grupóides generalizam o conceito de relação de equivalência.

3. Functores

Dados os exemplos mais simples e naturais, podemos nos perguntar se podemos relacionar categorias, de modo a preservar determinadas propriedades e fazer identificações entre elementos. No contexto das categorias, isto é feito pelos **functores**, definidos a seguir:

DEFINIÇÃO 2.5. Um **functor** entre duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{B} , é um mapa

$$T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B},$$

que associa a cada objeto $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ um objeto $T(c) \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, e a cada seta $f : c \rightarrow c' \in \text{Ar}(\mathcal{C})$ uma seta $Tf : Tc \rightarrow Tc' \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ com as seguintes propriedades:

$$T(\text{id}_c) = \text{id}_{Tc}$$

e

$$T(f \circ g) = T(f) \circ T(g) \in \text{Ar}(\mathcal{B})$$

para cada $f, g \in \text{Ar}(\mathcal{C})$ componíveis.

EXEMPLO 2.8. A partir do nosso exemplo Set podemos definir o functor $\mathcal{P} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$, onde cada conjunto X é associado ao conjunto de suas partes, com elementos todos os subconjuntos $S \in X$, enquanto cada seta $f : X \rightarrow Y$ é associada ao mapa $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}Y$, que associa cada subconjunto $S \subset X$ a sua imagem $f(S)$.

EXEMPLO 2.9. Categorias e functores formam a categoria denotada por Cat .

EXEMPLO 2.10. Grupóides e functores formam a categoria denotada por Grpd .

EXEMPLO 2.11. Dada uma categoria \mathcal{C} e uma subcategoria \mathcal{S} , então o operador inclusão $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$ (a inclusão tanto para objetos quanto para setas) será um functor.

DEFINIÇÃO 2.6. Uma transformação natural $\alpha : F \rightarrow G$ entre dois functores $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um mapa de functores, a qual consiste de uma seta $\alpha_a : F(a) \rightarrow G(a)$ para cada objeto a de \mathcal{C} , de modo que para cada seta $f : a \rightarrow b$, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{F(f)} & F(b) \\ \alpha_a \downarrow & & \downarrow \alpha_b \\ G(a) & \xrightarrow{G(f)} & G(b) \end{array}$$

4. Grupóides topológicos

Assim como é natural, entre funções contínuas entre espaços topológicos, introduzir uma noção de proximidade, é natural introduzir o conceito de **grupóide topológico**:

DEFINIÇÃO 2.7. *Um grupóide topológico é um grupóide onde as coleções de elementos e setas são espaços topológicos, e os mapas estruturais são contínuos.*

Neste trabalho, estamos interessados em munir um grupóide específico de uma estrutura de grupóide topológico, o *grupóide fundamental*, que será introduzido nas seções a seguir.

DEFINIÇÃO 2.8. *Um functor contínuo $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ entre grupóides topológicos é um functor cujos mapas $F : Ob(\mathcal{G}) \rightarrow Ob(\mathcal{G}')$ e $F : Ar(\mathcal{G}) \rightarrow Ar(\mathcal{G}')$ são contínuos.*

Desta forma, podemos definir a seguinte categoria:

DEFINIÇÃO 2.9. *A coleção de objetos formada por grupóides topológicos e a coleção de setas formada pelos funtores contínuos entre estes, define a categoria denominada TopGrps.*

O exemplo mais simples de grupóide topológico não trivial é análogo ao exemplo mais simples de grupóide também não trivial:

DEFINIÇÃO 2.10. *Um grupo G é dito um **grupo topológico**, se este é um espaço topológico de tal forma que os mapas estruturais são contínuos.*

EXEMPLO 2.12. Seja G um grupo topológico. Então G é grupóide topológico com $G_1 = G$ e $G_0 = \{*\}$ (ver exemplo 2.4).

CAPÍTULO 3

O grupóide fundamental

1. O grupóide fundamental

Neste trabalho, o termo caminho significará uma função contínua $f : I \rightarrow X$, onde $I = [0, 1]$ e X é um espaço topológico. Dado um espaço topológico X , dizemos que os caminhos $c_0, c_1 : I \rightarrow X$ são **homotópicos** se existe uma aplicação contínua

$$H : I \times I \rightarrow X,$$

de modo que

$$(1) \quad H(0, t) = c_0(t), \quad H(1, t) = c_1(t).$$

Se ambos caminhos têm os mesmos extremos

$$c_0(0) = x = c_1(0), \quad c_0(1) = y = c_1(1),$$

dizemos que uma homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ entre esses caminhos tem **extremos fixos** se

$$H(\epsilon, 0) = x, \quad H(\epsilon, 1) = y, \quad H(0, t) = c_0(t), \quad H(1, t) = c_1(t).$$

Esta aplicação é chamada de homotopia de extremos fixos, e caso exista tal aplicação entre dois caminhos $f, g : I \rightarrow X$, denotaremos $f \sim g$. Além disso, tal relação define uma relação de equivalência:

- (1) $f \sim f$, já que podemos tomar a aplicação $H(\epsilon, t) = f(t)$.
- (2) Se $f \sim g$, então existe $H(\epsilon, t)$ tal como (1). Assim, tomando $F(\epsilon, t) = H(1 - t, t)$, vemos que $g \sim f$.
- (3) Se $f \sim g$ e $g \sim h$, então existe uma homotopia $H_0(\epsilon, t)$ entre f e g e uma homotopia $H_1(\epsilon, t)$ entre g e h , desta forma

$$H(\epsilon, t) = \begin{cases} H_0(2\epsilon, t), & 0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2} \\ H_1(2\epsilon - 1, t), & \frac{1}{2} < \epsilon \leq 1 \end{cases}$$

é homotopia de caminhos entre f e h .

OBSERVAÇÃO 3.1. Denotaremos por $[f]$ a classe de equivalência de um caminho $f : I \rightarrow X$ em X .

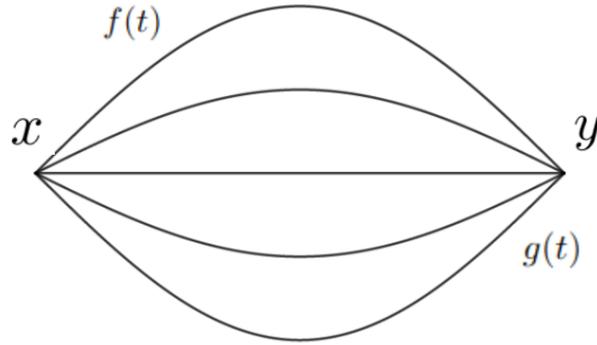


FIGURA 1. Uma homotopia é uma deformação contínua entre duas curvas. No caso desta figura, temos os pontos finais fixados.

LEMA 3.1. *Dados $f, g : I \rightarrow X$ caminhos e $F : X \rightarrow Y$ contínua. Então se $f \sim g$, teremos $Ff \sim Fg$.*

DEMONSTRAÇÃO. De fato, se $f \sim g$, deve existir homotopia de extremos fixos $H : I \times I \rightarrow X$ entre estas. Desta forma basta tomarmos $FH : I \times I \rightarrow X$, a composição da homotopia H com a aplicação F . \square

Além disso, uma importante classe de caminhos são os loops em um ponto $x \in X$, ou seja, os caminhos em X tais que $f(0) = f(1) = x$. Dizemos que um loop é **nulomotópico** se este é homotópico a um ponto (visto como o caminho constante).

DEFINIÇÃO 3.1. *Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Então definimos $\pi_1(X, x)$ como o conjunto das classes de equivalência de loops em x .*

Agora, dados caminhos $f, g : I \rightarrow X$ tais que $f(1) = g(0)$, podemos definir a sua concatenação via a fórmula

$$(g \odot f)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Quando tomamos $f \odot (g \odot h)$ e $(f \odot g) \odot h$, as partições do intervalo I podem, em geral, gerar imagens diferentes tempo a tempo. Para “solucionar” esta não associatividade, podemos definir $[f] \odot [g] := [f \odot g]$ no conjunto das classes de equivalência, que através do Lema a seguir, esta bem definida:

LEMA 3.2. *Sejam $f, f' : I \rightarrow X$ caminhos que ligam $x, y \in X$ e $g, g' : I \rightarrow X$ caminhos que ligam $y, z \in X$, tais que $f \sim f'$ e $g \sim g'$. Nessas condições, teremos $f \odot g \sim f' \odot g'$.*

DEMONSTRAÇÃO. De fato, tomando $H_0 : I \times I \rightarrow X$ homotopia entre f e f' e $H_1 : I \times I \rightarrow X$ homotopia entre g e g' , então podemos definir

$$H(\epsilon, t) = H_1(\epsilon, t) \odot H_0(\epsilon, t)$$

homotopia de extremos fixos entre $f \odot g$ e $f' \odot g'$. \square

Definindo c_x como o caminho constante em x e o caminho $f^{-1}(t) := f(t-1)$, é razoável tentarmos transformar o conjunto $\pi_1(X, x)$ em um grupo através da operação de concatenação de caminhos. Isto de fato ocorre, e o conjunto $\pi_1(X, x)$ com tal operação é chamado de **Grupo Fundamental** em $x \in X$:

PROPOSIÇÃO 3.1. *O conjunto $\pi_1(X, x)$, através da multiplicação $[f] \odot [g] := [f \odot g]$, é um grupo com inverso de $[f]$ definido como $[f^{-1}]$, e elemento neutro $[c_x]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente, mostremos que $[f \odot c_x] = [c_x \odot f] = [f]$: Tomemos $f \in \pi_1(X, x)$, então definindo

$$H(\epsilon, t) = \begin{cases} f(\frac{2\epsilon}{1+t}), & 0 \leq \epsilon \leq \frac{1+t}{2} \\ c_x, & \frac{1+t}{2} < \epsilon \leq 1 \end{cases}$$

e

$$H(\epsilon, t) = \begin{cases} c_x, & 0 \leq \epsilon \leq \frac{1+t}{2} \\ f(\frac{(2-t)\epsilon+t}{1+t}), & \frac{1+t}{2} < \epsilon \leq 1 \end{cases}$$

teremos homotopias de extremos fixos entre c_x e f e entre f e c_x , respectivamente.

Para mostrar que o inverso de $[g]$ é de fato $[g^{-1}]$, defina

$$H(\epsilon, t) = \begin{cases} g(1-2t\epsilon), & 0 \leq t \leq \frac{1+t}{2} \\ g(2\epsilon t-1), & \frac{1+t}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

que será homotopia de extremos fixos entre os caminhos $g^{-1} \odot g$ e c_x , implicando que $[g^{-1} \odot g] = [c_x]$. O caso da homotopia entre $g \odot g^{-1}$ é similar.

Por fim, basta mostrarmos que, dados $f, g, h \in \pi_1(X, x)$, então $[f \odot g] \odot [h] = [f] \odot [g \odot h]$. Da definição teremos

$$[f \odot g] \odot [h] = [(f \odot g) \odot h]$$

e

$$[f] \odot [g \odot h] = [f \odot (g \odot h)],$$

desta forma, tomando a homotopia de extremos fixos entre $(f \odot g) \odot h$ e $f \odot (g \odot h)$

$$H(\epsilon, t) = \begin{cases} h(\frac{4\epsilon}{1+t}), & 0 \leq \epsilon \leq \frac{1+t}{4} \\ g(4\epsilon-1-t), & \frac{1+t}{4} \leq \epsilon \leq \frac{2+t}{4} \\ f(\frac{4(\epsilon-1)+2-t}{2-t}), & \frac{2+t}{4} \leq \epsilon \leq 1 \end{cases}$$

temos o resultado pretendido. \square

OBSERVAÇÃO 3.2. *As homotopias apresentadas na proposição acima são válidas para quaisquer caminhos f, g, h em X que podem ser concatenados. Ou seja, para caminhos quaisquer concatenáveis, a multiplicação também é associativa a menos de classes de equivalência.*

DEFINIÇÃO 3.2. *Dada $F : X \rightarrow Y$ função contínua entre espaços topológicos tal que $F(x) = y$ para algum $x \in X$, definimos $\pi_1(F) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ por*

$$\pi_1(F)([c]) := [F \circ c] \in \pi_1(Y, y).$$

DEFINIÇÃO 3.3. *Dado um espaço topológico X , então X é dito **simplesmente conexo** se X for conexo por caminhos e $\pi_1(X, x) = \{c_x\}$ para qualquer $x \in X$.*

É natural perguntarmos a respeito da dependência do grupo fundamental em relação aos pontos base adotados, a próxima proposição relaciona $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ caso x_0 e x_1 estejam na mesma componente conexa por caminhos.

De fato, caso isto ocorra, então podemos tomar $h : I \rightarrow X$ caminho que liga x_0 e x_1 , e “transformar” um loop $f \in \pi_1(X, x_1)$ através da concatenação $h^{-1} \odot (f \odot h)$ em um loop de $\pi_1(X, x_0)$. Neste caso, como $h^{-1} \odot (f \odot h) \sim (h^{-1} \odot f) \odot h$, então para esta expressão específica, escreveremos simplesmente $h^{-1} \odot f \odot h$.

PROPOSIÇÃO 3.2. *Dados $x_0, x_1 \in X$ pontos em uma mesma componente conexa por caminhos, então o mapa $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ definido por $[h^{-1} \odot f \odot h]$ é um isomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $H(\epsilon, t)$ é uma homotopia de extremos fixos de loops baseados em x_1 , então $h^{-1} \odot H(\epsilon, t) \odot h$ é homotopia de extremos fixos de loops baseados em x_0 , e assim β_h é bem definido. Além disso, β_h é um homomorfismo entre grupos, já que

$$\begin{aligned} \beta_h[f \odot g] &= [h^{-1} \odot f \odot g \odot h] \\ &= [h^{-1} \odot f \odot h \odot h^{-1} \odot g \odot h] \\ &= \beta_h[f] \beta_h[g] \end{aligned}$$

Finalmente, β_h é um isomorfismo, já que $\beta_{h^{-1}}$ define a sua inversa. \square

Estamos interessados no conjuntos de todos os caminhos em um determinado espaço topológico X , sem necessariamente precisar de pontos fixados. Esta estrutura será o grupóide fundamental, que generaliza o conceito de grupo fundamental.

DEFINIÇÃO 3.4. *Dado um espaço topológico X , definimos o **grupóide fundamental** $\pi_1(X) \rightrightarrows X$, como o grupóide que possui a coleção de elementos os pontos de X , e coleção de setas as classes de equivalência com relação a extremos fixos dos caminhos que ligam tais pontos. Além disso, dados $[c_0], [c_1] \in \text{Ar}(\pi_1(X) \rightrightarrows X)$ e $x \in X$, teremos*

$$\mathbf{s}([c]) = c(0), \quad \mathbf{t}([c]) = c(1),$$

para os mapas source e target. E também

$$\mathbf{u}(x) = [c_x], \quad \mathbf{m}([c_0], [c_1]) := [c_0] \odot [c_1], \quad \mathbf{i}([c_0]) = [c_0^{-1}],$$

para os mapas unidade, multiplicação e inversão, respectivamente.

É interessante notar que o grupóide fundamental contém, de certa forma, as informações dos grupos fundamentais de um espaço topológico X , já que o conjunto das setas em $\pi_1(X) \rightrightarrows X$ tais que $c : x \rightarrow x$, é justamente $\pi_1(X, x)$.

Construiremos nos próximos capítulos uma estrutura topológica para a coleção de setas do grupóide fundamental de um espaço topológico X , de forma que este se torne um grupóide topológico.

2. Espaços de recobrimento

DEFINIÇÃO 3.5. *Um espaço de recobrimento de um espaço topológico X é um espaço \tilde{X} juntamente com um mapa $p : \tilde{X} \rightarrow X$, tal que existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X a qual para cada α , $p^{-1}(U_\alpha)$ é a união disjunta de conjuntos abertos em \tilde{X} , que são mapeados homeomorficamente por p até U_α .*

Seguem alguns exemplos simples (porém importantes) de espaços de recobrimento:

EXEMPLO 3.1. *Todo homeomorfismo entre espaços topológicos é um recobrimento.*

EXEMPLO 3.2. *O mapa $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definido por $p(t) = \exp(2\pi it)$ é um recobrimento.*

EXEMPLO 3.3. *$p : S^1 \rightarrow S^1$ definido por $p(z) = z^n$, com $n \in \mathbb{N}$, forma um recobrimento.*

DEFINIÇÃO 3.6. *Dado um recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$, então se o diagrama de mapas*

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

onde $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ e $f : Y \rightarrow X$, comuta, dizemos que \tilde{f} é um levantamento de f .

O resultado a seguir nos garante a unicidade de levantamentos de caminhos, e é de grande utilidade na construção de recobrimentos mais específicos de um determinado espaço. Exibiremos uma ideia da demonstração de tal proposição, maiores detalhes a respeito podem ser encontrados em [18].

PROPOSIÇÃO 3.3. *(Propriedade do levantamento único de caminhos) Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ recobrimento de um espaço X , seja $x_0 \in X$ e $x_1, x_2 \in p^{-1}(\{x_0\}) \subset \tilde{X}$. Então*

- (1) *Dado $f : I \rightarrow X$ com $f_0 = x_0$, este é levantado de maneira única até um caminho $g : I \rightarrow \tilde{X}$ de modo que $g_0 = x_1$ e $p \circ g = f$*
- (2) *Dois caminhos $f, g : I \rightarrow X$ tais que $f \sim g$ (ou seja, tenham extremos iguais) e $f_0 = g_0 = x_1$, são levantados a caminhos $f', g' : I \rightarrow \tilde{X}$, respectivamente, de modo que $f' \sim g'$, e consequentemente $f'(1) = g'(1)$.*

IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO. Para o item 1, escrevamos $I = \cup I_j$ de modo que cada $f(I_j) \subset U_{\alpha_j}$, onde U_{α_j} é um aberto da cobertura de X na Definição 3.5. Desta forma, podemos levantar f em g indutivamente usando o fato de que p ser homeomorfismo em cada aberto disjunto que compõe $p^{-1}(U_{\alpha_j})$.

Para o item 2, seja $H : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia de extremos fixos entre os mapas f e g . Subdividindo o quadrado $I \times I$ em quadrados menores, os quais são mapeados por H em uma vizinhança U_{ij} pertencentes a cobertura de X como na Definição 3.5. De maneira indutiva, vemos que H é levantada a uma homotopia de extremos fixos $H' : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $(H')_0^0 = x_1$ e $p \circ H' = H$. Pela unicidade, H' é uma homotopia de extremos fixos entre f' e g' , onde $(f')_1 = x_2 = (g')_1$. \square

3. Recobrimento universal

Neste trabalho, estamos interessados em um tipo específico de recobrimento: o recobrimento universal de um determinado espaço topológico conexo X .

DEFINIÇÃO 3.7. *Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre conjuntos quaisquer, dizemos que $g : Z \rightarrow X$ fatora f , se existe $h : X \rightarrow Z$ (Z qualquer conjunto) de tal forma que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{h}{\dashrightarrow} & Z \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & Y & \end{array}$$

DEFINIÇÃO 3.8. *Um recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é **universal** se todo recobrimento $q : Y \rightarrow X$ fatora p :*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \dashrightarrow & Y \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

A proposição a seguir nos garante uma boa condição para decidir se um determinado espaço de recobrimento é universal, e para sua demonstração precisaremos do Lema 3.3, que nos dá um critério para a existência de levantamentos.

PROPOSIÇÃO 3.4. *Um recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ em que \tilde{X} é simplesmente conexo é universal.*

LEMA 3.3. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, e Y um espaço conexo por caminhos. Então um mapa contínuo $f : Y \rightarrow X$ levanta a mapa contínuo $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$*

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

exatamente quando

$$\pi_1(f)\pi_1(Y, y) \subset \pi_1(p)\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}).$$

IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO. Evidentemente, a condição $\pi_1(f)\pi_1(Y, y) \subset \pi_1(p)\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ é necessária para a existência de um levantamento. Dado $y' \in Y$, escolha curva $c : I \rightarrow Y$ com $y = c(0)$ e $y' = c(1)$. Então defina

$$\tilde{f}(y') := \tilde{f}c(1)$$

onde

$$\tilde{f}c : I \rightarrow \tilde{X} \text{ levanta } fc : I \rightarrow X.$$

Para ver que \widetilde{f} está bem-definida, considere uma segunda curva $\gamma : I \rightarrow Y$ com $y = \gamma(0)$ e $y' = \gamma(1)$. Então

$$c^{-1} \odot \gamma : I \rightarrow Y, \quad (c^{-1} \odot \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ c(1 - 2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é um loop em y , e por hipótese,

$$f(\widetilde{c^{-1} \odot \gamma}) = \widetilde{f}c^{-1} \odot \widetilde{f}\gamma$$

é um loop em \widetilde{x} . Portanto f está bem-definida, e é contínua pois f é contínua e p é recobrimento. \square

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 3.4. Seja $q : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ um recobrimento, e considere o problema

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \widetilde{p} & \downarrow q \\ (\widetilde{X}, \widetilde{x}) & \xrightarrow{p} & (X, x) \end{array}$$

Então observe que \widetilde{X} é universal se e só se existe levantamento para todo recobrimento $q : (Y, y) \rightarrow (X, x)$. Pelo Lema 3.3, tal levantamento existe se e só se

$$\pi_1(p)\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \subset \pi_1(q)\pi_1(Y, y).$$

Portanto se \widetilde{X} é simplesmente conexo, então é um recobrimento universal. \square

EXEMPLO 3.4. O recobrimento

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad p(t) = \exp(2\pi it)$$

é universal.

EXEMPLO 3.5. Considere a relação de equivalência em \mathbb{R}^2 definida por $(x, y) \sim (x + n, y + m)$, com $n, m \in \mathbb{N}$. Então o operador quociente $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim$ define um recobrimento universal para o toro.

CAPÍTULO 4

O grupóide fundamental como grupóide topológico

Vimos no capítulo anterior que todo espaço topológico tem associado a ele um grupóide de conjuntos que codifica a estrutura homotópica em caminhos. Neste capítulo seguimos [27] para mostrar que esse grupóide pode ser promovido universalmente a um grupóide topológico que provê o modelo para o recobrimento universal desse espaço (quando este existe [5]).

Nas próximas seções, denotaremos por $\pi_1(X)$ o conjunto das setas do grupóide fundamental de um espaço topológico X , por $\pi_1(X, x)$ o grupo fundamental em $x \in X$, e por $\pi_1(x, X, y)$ as classes de equivalência com extremos fixos dos caminhos que ligam os pontos $x, y \in X$. Além disso, quando não gerar problemas de notação, omitiremos os colchetes quando tratarmos das setas de $\pi_1(X) \rightrightarrows X$.

1. Topologia laço

Seja \mathcal{U} uma cobertura aberta de X . Um loop λ em X , isto é, um caminho contínuo

$$\lambda : I \rightarrow X, \quad \lambda(0) = x = \lambda(1),$$

será chamado de **\mathcal{U} -pequeno** se é produto de elementos da forma

$$\lambda = \sigma^{-1} \mu \sigma,$$

onde

$$\sigma : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x, y), \quad \mu : (I, 0, 1) \rightarrow (U, y, y)$$

para algum membro U de \mathcal{U} .

Para

$$c \in \pi_1(X), \quad \mathbf{t}(c) \in U_f \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{s}(c) \in U_i \in \mathcal{U},$$

defina

$$\mathcal{N}(c; \mathcal{U}, U_f, U_i) \subset \pi_1(X)$$

para denotar o conjunto de todos os elementos da forma

$$[\sigma_f \odot \lambda_f] \odot c \odot [\lambda_i \odot \sigma_i],$$

onde λ_\bullet são loops \mathcal{U} -pequenos, e σ_\bullet têm a imagem contida em U_\bullet .

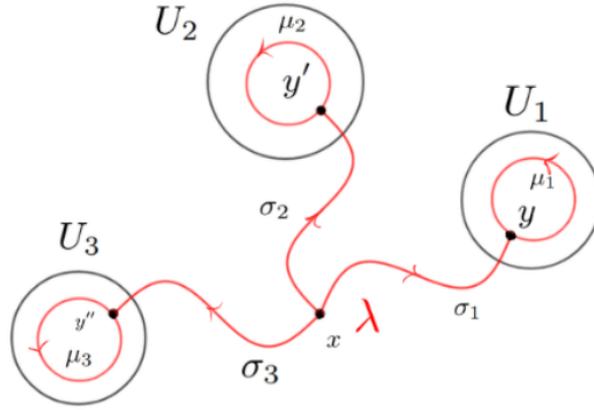


FIGURA 1. Elemento \mathcal{U} -pequeno. No caso da figura, $\lambda = \sigma_3^{-1} \odot \mu_3 \odot \sigma_3 \odot \sigma_2^{-1} \odot \mu_2 \odot \sigma_2 \odot \sigma_1^{-1} \odot \mu_1 \odot \sigma_1$

LEMA 4.1. Para cada cobertura aberta \mathcal{U} de X , denote por $\Omega(\mathcal{U})$ a coleção dos subconjuntos de $\pi_1(X)$ da forma

$$(2) \quad \mathcal{N}(c; \mathcal{U}, U_f, U_i)$$

como acima.

a) A topologia $\tau_{\mathcal{U}}$ gerada por $\Omega(\mathcal{U})$ tem $\Omega(\mathcal{U})$ por base.

b) Se \mathcal{U} refina \mathcal{V} , então

$$\text{id} : (\pi_1(X), \tau_{\mathcal{U}}) \rightarrow (\pi_1(X), \tau_{\mathcal{V}})$$

é contínua.

c) A menor topologia τ_{Lasso} em $\pi_1(X)$ em que

$$\text{id} : (\pi_1(X), \tau_{\text{Lasso}}) \rightarrow (\pi_1(X), \tau_{\mathcal{U}})$$

é contínua para cada cobertura aberta \mathcal{U} de X , tem por base $\Omega(X) := \bigcup_{\mathcal{U}} \Omega(\mathcal{U})$.

DEMONSTRAÇÃO. Observe que

$$c \in \mathcal{N}(c'; \mathcal{U}, U_f, U_i) \implies \mathcal{N}(c; \mathcal{U}, U_f, U_i) \subset \mathcal{N}(c'; \mathcal{U}, U_f, U_i).$$

Por definição, $\tau_{\mathcal{U}}$ tem $\Omega(\mathcal{U})$ por subbase. Porém se

$$c \in \bigcap_{j=1}^k \mathcal{N}(c_j; \mathcal{U}, U_{f_j}, U_{i_j})$$

então

$$c \in \mathcal{N}(c; \mathcal{U}, U_f, U_i) \subset \bigcap_{j=1}^k \mathcal{N}(c_j; \mathcal{U}, U_{f_j}, U_{i_j}), \quad U_f := \bigcap_{j=1}^k U_{f_j}, \quad U_i := \bigcap_{j=1}^k U_{i_j}.$$

Isto prova a). Para b), observe que se \mathcal{U} refina \mathcal{V} , e $c \in \mathcal{N}(c'; \mathcal{V}, V_f, V_i)$ então

$$c \in \mathcal{N}(c; \mathcal{U}, V_f, V_i) \subset \mathcal{N}(c; \mathcal{V}, V_f, V_i) \subset \mathcal{N}(c'; \mathcal{V}, V_f, V_i).$$

Portanto $\mathcal{N}(c'; \mathcal{V}, V_f, V_i)$ é aberto em $\tau_{\mathcal{U}}$, e portanto $\text{id} : (\pi_1(X), \tau_{\mathcal{U}}) \rightarrow (\pi_1(X), \tau_{\mathcal{V}})$ é uma função contínua.

Para c), observe que a menor topologia que contém cada $\tau_{\mathcal{U}}$ tem por subbase $\Omega(X) := \bigcup_{\mathcal{U}} \Omega(\mathcal{U})$. Para ver que se trata de uma base, basta notar que, se

$$c \in \bigcap_{j=1}^k \mathcal{N}(c_j; \mathcal{U}_j, U_{f_j}, U_{i_j})$$

para coberturas abertas $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$, então defina a cobertura aberta \mathcal{U} , cujos membros são da forma

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k, \quad U_j \in \mathcal{U}_j.$$

Então

$$U_f := U_{f_1} \cap \dots \cap U_{f_k}, \quad U_i := U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$$

são membros de \mathcal{U} . Portanto

$$c \in \mathcal{N}(c; \mathcal{U}, U_f, U_i) \subset \bigcap_{j=1}^k \mathcal{N}(c; \mathcal{U}_j, U_{f_j}, U_{i_j}) \subset \bigcap_{j=1}^k \mathcal{N}(c_j; \mathcal{U}_j, U_{f_j}, U_{i_j})$$

prova c). □

DEFINIÇÃO 4.1. A **topologia laço** é a topologia τ_{Lasso} no grupóide fundamental $\pi_1(X) \rightrightarrows X$ de um espaço topológico X descrita no Lema 4.1.

Concretamente, um aberto em τ_{Lasso} é a reunião de abertos da forma (2).

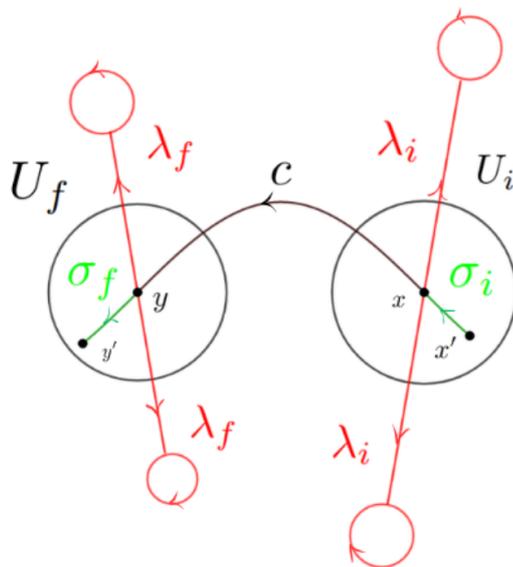


FIGURA 2. Elemento de um aberto $\mathcal{N}(c; \mathcal{U}, U_f, U_i)$ em τ_{Lasso} .

2. O grupóide fundamental como grupóide topológico

TEOREMA 4.1. *O grupóide $\pi_1(X) \rightrightarrows X$, equipado com a topologia laço, é um grupóide topológico.*

DEMONSTRAÇÃO. Como na definição, precisamos mostrar que os mapas dados no grupóide fundamental são contínuos na topologia induzida.

Passo 1 (Source e target). Para mostrar que $\mathbf{s} : \pi_1(X) \rightarrow X$ é contínuo, seja $U_i \subset X$ um conjunto aberto, e $c \in \mathbf{s}^{-1}U_i$. Seja \mathcal{U} um cobertura aberta de X que contém U_i e seja $U_f \in \mathcal{U}$ que contém $\mathbf{t}(c)$. Então

$$\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) \subset \mathbf{s}^{-1}U_i$$

é uma cobertura aberta em torno de c em $\mathbf{s}^{-1}U_i$. Portanto, \mathbf{s} é contínuo. O mesmo pode ser feito para o mapa target \mathbf{t} .

Passo 2 (Unidade). Note que

$$\mathbf{u}^{-1}\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) = U_i \cap U_f,$$

ou seja, \mathbf{u} é contínua.

Passo 3 (Inversão). Note que

$$\mathbf{i}\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) = \mathcal{N}(c^{-1}, \mathcal{U}, U_i, U_f),$$

então \mathbf{i} é contínua.

Passo 4 (Multiplicação). Dados $c \in \pi_1(X)$ e conjuntos abertos $U_f, U_i \in \mathcal{U}$, seja

$$(\beta, \alpha) \in \mathbf{m}^{-1}(\mathcal{N}_c) \subset \pi_1(X) \times_{(\mathbf{s}, \mathbf{t})} \pi_1(X),$$

onde

$$\mathcal{N}_c := \mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i)$$

Então

$$\beta\alpha = \sigma_f(c)\lambda_f(c)c\lambda_i(c)\sigma_i(c).$$

Seja $V \in \mathcal{U}$ que contém $\mathbf{s}(\beta) = \mathbf{t}(\alpha)$. Considere vizinhanças

$$\mathcal{N}_\beta := \mathcal{N}(\beta, \mathcal{U}, U_{\mathbf{t}(c)}, V), \quad \mathcal{N}_\alpha := \mathcal{N}(\alpha, \mathcal{U}, V, U_{\mathbf{s}(c)}),$$

contendo respectivamente os elementos

$$\beta' := \sigma_f(\beta)\lambda_f(\beta)\beta\lambda_i(\beta)\sigma_i(\beta), \quad \alpha' := \sigma_f(\alpha)\lambda_f(\alpha)\alpha\lambda_i(\alpha)\sigma_i(\alpha).$$

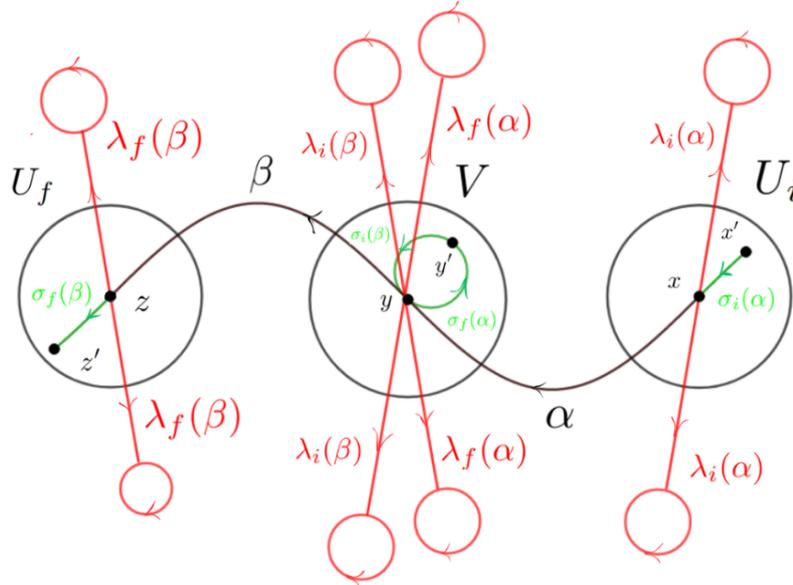


FIGURA 3. Vizinhanças dos caminhos concatenados

O par (β', α') ser componível significa que

$$\mathbf{s}\lambda_i(\beta) = \mathbf{t}\lambda_f(\alpha),$$

e nesse caso

$$l := \sigma_i(\beta)\sigma_f(\alpha) \in \pi_1(\mathcal{U}, \mathbf{s}(\beta)).$$

Definamos

$$\sigma_f := \sigma_f(\beta)\sigma_f(c) \in \pi_1(\mathbf{t}(c), \mathbf{t}(\beta'))$$

$$\lambda_f := \sigma_f(c)^{-1}\lambda_f(\beta)\sigma_f(c)\lambda_f(c) \in \pi_1(\mathbf{t}(c), \mathbf{t}(c))$$

$$\begin{aligned}\lambda_i &:= \lambda_i(c)\sigma_i(c)L'\sigma_i(c)^{-1} \in \pi_1(\mathcal{U}, \mathbf{s}(c)) \\ \sigma_i &:= \sigma_i(c)\sigma_i(\alpha) \in \pi_1(\mathbf{s}(\alpha'), \mathbf{s}(c))\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}L &:= \lambda_i(\beta)l\lambda_f(\alpha) \in \pi_1(\mathcal{U}, \mathbf{t}(\alpha)) \\ L' &:= \alpha^{-1}L\alpha\lambda_i(\alpha) \in \pi_1(\mathcal{U}, \mathbf{s}(\alpha)).\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\beta'\alpha' &= \sigma_f(\beta)\lambda_f(\beta)\beta\lambda_i(\beta)\sigma_i(\beta)\sigma_f(\alpha)\lambda_f(\alpha)\alpha\lambda_i(\alpha)\sigma_i(\alpha) \\ &= \sigma_f(\beta)\lambda_f(\beta)\beta L\alpha\lambda_i(\alpha)\sigma_i(\alpha) \\ &= \sigma_f(\beta)\lambda_f(\beta)\beta\alpha L'\sigma_i(\alpha) \\ &= \sigma_f(\beta)\lambda_f(\beta)\sigma_f(c)\lambda_f(c)c\lambda_i(c)\sigma_i(c)L'\sigma_i(\alpha) \\ &= \sigma_f\lambda_f c\lambda_i\sigma_i.\end{aligned}$$

Portanto

$$\beta'\alpha' \in \mathcal{N}_c,$$

de onde deduzimos que

$$(\beta', \alpha') \in \mathcal{N}_\beta \times_{(\mathbf{s}, \mathbf{t})} \mathcal{N}_\alpha \subset m^{-1}\mathcal{N}_c.$$

Mostrando assim, que \mathbf{m} é contínua. □

Como a estrutura da topologia laço de $\pi_1(X)$ está diretamente ligada com a estrutura topológica de X , podemos introduzir o mapa

$$\pi_1 : X \mapsto (\pi_1(X) \rightrightarrows X).$$

O próximo teorema mostra que tal operação induz um functor entre a categoria dos espaços topológicos e a categoria dos grupóides topológicos.

TEOREMA 4.2. *Existe um functor bem definido*

$$\pi_1 : \text{Top} \longrightarrow \text{TopGrpd}$$

dos espaços topológicos até grupóides topológico.

DEMONSTRAÇÃO. De fato, tomemos a aplicação entre categorias que associa a cada espaço topológico X , o grupóide fundamental $\pi(X) \rightrightarrows X$ munido da topologia laço. Além disso, dada uma função contínua $f : X \rightarrow Y$, é associada $\pi_1(f)$ que age sobre as setas c em $\pi_1(X) \rightrightarrows X$ da seguinte maneira:

$$\pi_1(f)(c) = f \circ c \in \pi_1(Y),$$

a qual esta bem definida pelo Lema 3.1.

Agora, tomando X, Y e Z espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funções contínuas, teremos para cada seta c em $\pi_1(X)$

$$\pi_1(g \circ f)(c) = (g \circ f) \circ c = \pi_1(g)(f \circ c) = (\pi_1(g) \circ \pi_1(f))(c),$$

e desta forma π_1 é de fato functor entre as categorias Top e TopGrpd .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_1} & \pi_1(X) \rightrightarrows X \\ f \downarrow & & \downarrow \pi_1(f) \\ Y & \xrightarrow{\pi_1} & \pi_1(Y) \rightrightarrows Y \\ g \downarrow & & \downarrow \pi_1(g) \\ Z & \xrightarrow{\pi_1} & \pi_1(Z) \rightrightarrows Z \end{array}$$

Agora, devemos mostrar que $\pi_1(f)$ é functor contínuo entre os grupóides topológicos $\pi_1(X) \rightrightarrows X$ e $\pi_1(Y) \rightrightarrows Y$, ambos munidos da topologia τ_{Lasso} .

Para $c \in \pi_1(X)$, seja $\mathcal{N}(f \circ c, \mathcal{U}', U'_f, U'_i)$ uma vizinhança de $f \circ c$. Como f é contínua, então $\mathcal{U} := f^{-1}(\mathcal{U}')$ é uma cobertura aberta de X e esta forma, pondo $U_i := f^{-1}(U'_i)$ e $U_f := f^{-1}(U'_f)$, podemos definir a vizinhança de c , $\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i)$. Devemos mostrar que

$$\pi_1(f)(\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i)) \subset \mathcal{N}(f \circ c, \mathcal{U}', U'_f, U'_i).$$

De fato, tomando $c' \in \mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i)$, então este será da forma

$$\sigma_f \odot \lambda_f \odot c' \odot \lambda_i \odot \sigma_i,$$

onde cada λ_\bullet é um caminho \mathcal{U} -pequeno e cada σ_\bullet tem imagem contida em U_\bullet . Desta forma, $f \circ c'$ será descrito como

$$f \circ \sigma_f \odot f \circ \lambda_f \odot f \circ c' \odot f \circ \lambda_i \odot f \circ \sigma_i.$$

Mas como $f \circ \lambda_\bullet$ será novamente \mathcal{U}' -pequeno, e cada $f \circ \sigma_\bullet$ tem imagem contida em U'_\bullet , então $\pi_1(f)(c') \in \mathcal{N}(f \circ c, \mathcal{U}', U'_f, U'_i)$. \square

3. A Topologia compacto-aberto

Tomando uma família qualquer de funções $F(X, Y)$ entre dois espaços topológicos X e Y , é razoável pensarmos quando $f(x)$ é contínua simultaneamente tomando f e x como variáveis.

Dado X espaço topológico localmente compacto Hausdorff e Y Hausdorff, tomemos o conjunto $C^0(X, Y)$ de todas as funções contínuas $f : X \rightarrow Y$. Assim, para cada $K \subset X$ compacto e cada $U \subset Y$ aberto, definamos $\mathcal{M}(K, U) = \{f \in C^0(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$. A coleção de conjuntos $\mathcal{M}(K, U)$ forma uma sub-base para uma topologia em $C^0(X, Y)$, como veremos na próxima proposição. Desta forma, a interseção finita de elementos da forma $\mathcal{M}(K, U)$, para $K \subset X$ compacto e $U \subset Y$ aberto, forma uma base para a topologia, que é chamada de **topologia compacto-aberto**, denotada por τ_{CO} .

PROPOSIÇÃO 4.1. *Seja \mathcal{K} uma coleção de subconjuntos do espaço topológico localmente Hausdorff X , contendo uma vizinhança da base em cada ponto de X . Seja \mathcal{B} uma sub-base para os conjuntos abertos do espaço topológico Hausdorff Y . Então os conjuntos $\mathcal{M}(K, U)$, para $K \in \mathcal{K}$ e $U \in \mathcal{B}$, formam uma sub-base para a topologia compacto-aberto.*

DEMONSTRAÇÃO. Notemos que $\mathcal{M}(M, U) \cap \mathcal{M}(K, V) = \mathcal{M}(K, U \cap V)$, logo é suficiente considerar o caso em que \mathcal{B} é base. Precisamos mostrar que os conjuntos dados na proposição formam uma vizinhança básica em cada ponto $f \in C^0(X, Y)$. Portanto é suficiente mostrar que se $K \subset X$ é compacto, $U \subset Y$ é aberto e $f \in \mathcal{M}(K, U)$, então existem $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$ e $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{B}$ tais que $f \in \cap \mathcal{M}(K_i, U_i) \subset \mathcal{M}(K, U)$. Para cada $x \in K$, existe um conjunto aberto $U_x \in \mathcal{B}$ com $f(x) \in U_x$, e então existe $K_x \in \mathcal{K}$ que é uma vizinhança de x tal que $f(K_x) \subset U_x$. E assim, $f \in \mathcal{M}(K_x, U_x)$

Pela compacidade de K , existem pontos x_1, \dots, x_n tais que $K \subset K_{x_1} \cup \dots \cup K_{x_n}$. Daí, $f \in \cap \mathcal{M}(K_{x_i}, U_{x_i}) \subset \mathcal{M}(K, U)$. \square

No que segue, todos os espaços de funções contínuas desta seção serão munidos da topologia τ_{CO} .

PROPOSIÇÃO 4.2. *Para um espaço topológico X localmente compacto e Hausdorff, o mapa $ev : C^0(X, Y) \times X \rightarrow Y$, definido por $ev(f, x) = f(x)$, é contínuo.*

DEMONSTRAÇÃO. Dados $f \in C^0(X, Y)$ e $x \in X$, seja U uma vizinhança aberta de $f(x)$. Já que f é contínua, existe uma vizinhança compacta de x de modo que $f(K) \subset U$. Portanto $f \in \mathcal{M}(K, U)$ e $\mathcal{M}(K, U) \times K$ é levado em U via o mapa ev . E assim, por $\mathcal{M}(K, U) \times K$ ser uma vizinhança de (f, x) em $C^0(X, Y) \times X$, segue o resultado. \square

PROPOSIÇÃO 4.3. *Seja Y localmente compacto Hausdorff e X e Z espaços Hausdorff. Dada uma função $f : X \times Y \rightarrow Z$, defina a função adjunção $F : C^0(X \times Y, Z) \times X \rightarrow C^0(Y, Z)$ dada por $F(f, x)(y) = f(x, y) = f_x(y)$, para cada $y \in Y$. Então f é contínua se, e só se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- (1) Cada f_x é contínua
- (2) A função $X \rightarrow C^0(Y, Z)$, definida por $x \mapsto f_x$, é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. De fato, vemos que f é a composição do mapa $X \times Y \rightarrow C^0(X, Y) \times Y$ definido por $(x, y) \mapsto (f_x, y)$ com o mapa ev definido na proposição 4.2, desta forma os itens (1) e (2) implicam f contínua.

Para a implicação (\Rightarrow) , o item (1) segue do fato de que f_x é a composição $f \circ i_Y : Y \rightarrow Z$ onde i_Y é a inclusão $i_Y : Y \rightarrow X \times Y$. Para provar (2), sejam $x \in X$ e $f_x \in \mathcal{M}(K, U)$. É suficiente mostrar que existe uma vizinhança W de $x \in X$ tal que $x' \in W$ implica $f_{x'} \in \mathcal{M}(K, U)$.

Para $y \in K$, existem vizinhanças abertas $V_y \subset Y$ de y e $W_y \subset X$ de x tais que $f(W_y, V_y) \subset U$. Por compacidade, $K \subset V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$, para $V_{y_i} \subset Y$ vizinhança de pontos $y_i \in Y$. Colocando $W = W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$. Então $f(W \times K) \subset f(W \times V) \subset U$, e então $x' \in W$ implica que $f_{x'} \in \mathcal{M}(K, U)$, como gostaríamos. \square

TEOREMA 4.3. *(Lei da exponenciação) Sejam X e Y espaços topológicos localmente compactos e Hausdorff e seja Z um espaço arbitrário, então existe um homeomorfismo*

$$C^0(X \times Y, Z) \simeq C^0(X, C^0(Y, Z)),$$

definido pela sua adjunção $F : C^0(X \times Y, Z) \rightarrow C^0(X, C^0(Y, Z))$, ou seja, $F(f) = f(x, \cdot) = f_x$.

DEMONSTRAÇÃO. A Proposição 4.3 nos diz que a operação adjunção definida no teorema é bijeção. Desta forma, devemos mostrar que ela e a sua inversa são contínuas.

Seja $U \subset Z$ aberto, e $K \subset Y$ e $K' \subset X$ compactos. Então

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}(K' \times K, U) &\Leftrightarrow (x \in K', y \in K \Rightarrow f_x(y) = f(x, y) \in U) \\ &\Leftrightarrow (x \in K' \Rightarrow f_x \in \mathcal{M}(K, U)) \\ &\Leftrightarrow (F(f) \in \mathcal{M}(K', \mathcal{M}(K, U))). \end{aligned}$$

Agora, $K' \times K$ nos garante uma vizinhança básica para $X \times Y$. Portanto, $\mathcal{M}(K' \times K, U)$ forma uma sub-base para a topologia τ_{CO} de $C^0(X \times Y, Z)$.

Além disso, $\mathcal{M}(K, U)$ forma uma sub-base para $C^0(Y, Z)$ e portanto $\mathcal{M}(K', \mathcal{M}(K, U))$ nos dá uma sub-base para a topologia τ_{CO} em $C^0(X, C^0(Y, Z))$. Já que as sub-bases estão em correspondência pelo mapa F , temos o teorema. \square

OBSERVAÇÃO 4.1. O termo *exponenciação* é usado em referência a notação utilizada em [3], de onde foram baseados os resultados expostos nesta seção:

$$Y^X := C^0(X, Y).$$

TEOREMA 4.4. Tome X, Y localmente compactos Hausdorff e Z Hausdorff. Então a função

$$C^0(Y, Z) \times C^0(X, Y) \rightarrow C^0(X, Z)$$

definida pela composição de mapas é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 4.3, é suficiente mostrar que a função

$$G : C^0(Y, Z) \times C^0(X, Y) \times X \rightarrow Z$$

definida por $G(f, g, x) = (f \circ g)(x)$, é contínua. Porém, podemos escrever G da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= \text{ev}(f, g(x)) \\ &= \text{ev}(f, \text{ev}(g, x)). \end{aligned}$$

E assim, tal operação deve ser contínua. \square

4. O functor recobrimento universal

DEFINIÇÃO 4.2. Uma cobertura aberta \mathcal{U} de um espaço topológico é **1-conexa** se cada $U \in \mathcal{U}$ é conexo por caminhos, e a inclusão $i_U : U \rightarrow X$ induz mapas triviais em homotopia:

$$\pi_1(i_U) : \pi_1(U, x) \xrightarrow{0} \pi_1(X, x), \quad x \in U.$$

LEMA 4.2. Seja X um espaço topológico, e seja $\pi_1(X) \rightrightarrows X$ seu grupóide fundamental, munido da topologia laço.

a) Se X é conexo por caminhos, então

$$(\mathbf{s}, \mathbf{t}) : \pi_1(X) \longrightarrow X \times X$$

é sobrejetivo;

b) Se X é localmente conexo por caminhos, então ambos

$$\mathbf{s} : \pi_1(X) \longrightarrow X, \quad \mathbf{t} : \pi_1(X) \longrightarrow X$$

são mapas abertos

c) Se \mathcal{U} é uma cobertura aberta 1-conexa de X , então para quaisquer $U_i, U_f \in \mathcal{U}$,

$$(3) \quad (\mathbf{t}, \mathbf{s}) : \mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) \rightarrow U_i \times U_f$$

é um homeomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO. O primeiro item segue diretamente do fato de X ser conexo por caminhos, já que dados $(x_1, x_2) \in X \times X$, podemos tomar $c : I \rightarrow X$ tal que $\mathbf{s}(c) = x_1$ e $\mathbf{t}(c) = x_2$.

Para o segundo item, basta notarmos que

$$\mathbf{s}\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) = U_i, \quad \mathbf{t}\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) = U_f,$$

se U_i, U_f são conexos por caminhos.

Para a última afirmação, sabemos pelo item a) que $(\mathbf{t}, \mathbf{s}) : \mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) \rightarrow U_i \times U_f$ é sobrejetivo. Para a injetividade, tomemos

$$\alpha = \sigma_f^1 \odot \lambda_f^1 \odot c \odot \lambda_i^1 \odot \sigma_i^1 \quad \beta = \sigma_f^2 \odot \lambda_f^2 \odot c \odot \lambda_i^2 \odot \sigma_i^2$$

de tal forma que

$$(\mathbf{t}, \mathbf{s})(\alpha) = (\mathbf{t}, \mathbf{s})(\beta),$$

e assim teríamos

$$\sigma_f^2(1) = \sigma_f^1(1) \quad \text{e} \quad \sigma_i^2(0) = \sigma_i^1(0).$$

Por hipótese, o mapa inclusão $\pi_1(U_f, c(1)) \rightarrow \pi_1(U_f, c(1))$ é trivial, isso significa que o loop $(\sigma_f^1)^{-1} \odot \sigma_f^1$ é uma nulomotopia, implicando que $\sigma_f^1 \sim \sigma_f^2$. E ainda, por λ_f^i e λ_i^j , $j = 1, 2$, serem \mathcal{U} -pequenos, com \mathcal{U} definido na hipótese, estes serão todos nulomotópicos. E portanto $\alpha \sim \beta$.

Para mostrar que (3) é homeomorfismo notemos que, pelo Teorema 4.1, esta aplicação é contínua, e pelo item b) sabemos que esta é uma aplicação aberta, logo sua inversa (que existe por ser bijeção) é contínua. Portanto, temos o resultado pretendido. \square

DEFINIÇÃO 4.3. Um espaço topológico é **passível de recobrimento** se é conexo e possui uma cobertura aberta \mathcal{U} 1-conexa.

Escrevamos $\widetilde{\text{Top}}$ para denotar a subcategoria gerada por todos tais espaços topológicos.

COROLÁRIO 4.1. Se X é passível de recobrimento, então

$$(\mathbf{t}, \mathbf{s}) : \pi_1(X) \rightarrow X \times X$$

é um recobrimento para a topologia laço.

DEMONSTRAÇÃO. Seja \mathcal{U} uma cobertura 1-conexa de X , e sejam

$$x \in U_i \in \mathcal{U}, \quad y \in U_f \in \mathcal{U}.$$

Então pelo item (c) do Lema 4.2,

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}, \mathbf{s})^{-1}(U_f \times U_i) &= \coprod_{c \in \pi_1(x, X, y)} \mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) \\ &= \coprod_{\gamma_x \in \pi_1(X, x)} \mathcal{N}(c\gamma_x, \mathcal{U}, U_f, U_i) \\ &= \coprod_{\gamma_y \in \pi_1(X, y)} \mathcal{N}(\gamma_y c, \mathcal{U}, U_f, U_i), \end{aligned}$$

onde as uniões são disjuntas pois, por escolha de U_i, U_f , para todos $c, c' \in \pi_1(x, X, y)$,

$$\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) \cap \mathcal{N}(c', \mathcal{U}, U_f, U_i) \neq \emptyset \implies c = c',$$

e cada restrição

$$(\mathbf{t}, \mathbf{s}) : \mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_f, U_i) \rightarrow U_f \times U_i$$

é um homeomorfismo. □

LEMA 4.3. *Com a topologia compacto-aberto, o mapa canônico*

$$(4) \quad (\mathbf{s}, \mathbf{t}) : C(I, X) \longrightarrow X \times X$$

é um mapa quociente.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente note que, na topologia compacto-aberto, o mapa

$$C(I, X) \xrightarrow{(\mathbf{s}, \mathbf{t})} X \times X$$

é contínuo, pois

$$\mathbf{s}^{-1}(U) = \mathcal{M}(\{0\}, U), \quad \mathbf{t}^{-1}(U) = \mathcal{M}(\{1\}, U).$$

Em outra direção, suponha que $(\mathbf{s}, \mathbf{t})(c) \in A \subset X \times X$ é um subconjunto qualquer, e suponha que

$$c \in \mathcal{M} := \mathcal{M}(K_1, U_1) \cap \mathcal{M}(K_2, U_2) \cap \cdots \cap \mathcal{M}(K_r, U_r),$$

esteja contida em $(\mathbf{s}, \mathbf{t})^{-1}(A)$. Seja

$$J_i = \{j \mid 0 \in K_j\}, \quad J_f = \{j \mid 1 \in K_j\},$$

e defina

$$U_i := \bigcap_{j \in J_i} U_j, \quad U_f := \bigcap_{j \in J_f} U_j.$$

Então

$$(\mathbf{s}, \mathbf{t})(c) \in U_i \times U_j \subset (\mathbf{s}, \mathbf{t})\mathcal{M} \subset A$$

é uma vizinhança aberta de $(\mathbf{s}, \mathbf{t})(c)$ em A . Isto nos mostra que se $(\mathbf{s}, \mathbf{t})^{-1}(A)$ é aberto, então A também é. Em outras palavras: o mapa $(\mathbf{s}, \mathbf{t}) : C(I, X) \rightarrow X \times X$ é um mapa quociente. \square

LEMA 4.4. *Se um espaço X admite recobrimento universal, então*

$$q : (C(I, X), \tau_{CO}) \longrightarrow (\pi_1(X), \tau_{\text{Lasso}})$$

é um mapa quociente.

DEMONSTRAÇÃO. Temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & C(I, X) & \\ q \swarrow & & \searrow (\mathbf{s}, \mathbf{t}) \\ \pi_1(X) & \xrightarrow{(\mathbf{s}, \mathbf{t})} & X \times X \end{array}$$

onde (\mathbf{s}, \mathbf{t}) é um mapa de recobrimento pelo Corolário 4.1, e (\mathbf{s}, \mathbf{t}) é um mapa quociente pelo Lema 4.3. Então para cada $U_i, U_f \in \mathcal{U}$, a pré-imagem $(\mathbf{s}, \mathbf{t})^{-1}(U_i \times U_f)$ é uma união disjunta de abertos homeomorfos a $U_i \times U_f$.

Seja $f : \pi_1(X) \rightarrow Z$ uma função. Ela é contínua se e só se a restrição de f a cada $\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_i, U_f)$ é contínua, para cada $c \in \pi_1(X)$ e $U_i, U_f \in \mathcal{U}$ vizinhanças de $\mathbf{s}c$ e de $\mathbf{t}c$. Como

$$(\mathbf{s}, \mathbf{t}) : \mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_i, U_f) \xrightarrow{\sim} U_i \times U_f$$

é homeomorfismo, $f|_{\mathcal{N}(c, \mathcal{U}, U_i, U_f)}$ é contínua se e só se

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{t})^{-1} : U_i \times U_f \rightarrow Z$$

é contínua. Mas como (\mathbf{s}, \mathbf{t}) é mapa quociente, e portanto $(\mathbf{s}, \mathbf{t}) : (\mathbf{s}, \mathbf{t})^{-1}(U_i \times U_f) \rightarrow U_i \times U_f$ é mapa quociente, esta última função é contínua se e só se

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{t})^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) : (\mathbf{s}, \mathbf{t})^{-1}(U_i \times U_f) \rightarrow Z$$

é contínua, isto é, se e só se

$$fq : (\mathbf{s}, \mathbf{t})^{-1}(U_i \times U_f) \rightarrow Z$$

é contínua. \square

DEFINIÇÃO 4.4. *Definimos a categoria Top_* como a categoria dos espaços topológicos pontuados, ou seja, com coleção de objetos os espaços (X, x) , $x \in X$, e setas as funções contínuas $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ tais que $f(y) = x$.*

TEOREMA 4.5. *Existe um functor*

$$C : \text{Top}_* \longrightarrow \text{Top},$$

juntamente com uma transformação natural

$$p : C \rightarrow \text{id},$$

que restrita a $\widetilde{\text{Top}}$, $p_{(X, x)} : C(X, x) \rightarrow X$ é um recobrimento universal.

DEMONSTRAÇÃO. Para um espaço topológico pontuado (X, x) , defina

$$C(X, x) := \mathbf{s}^{-1}(x) \subset \pi_1(X).$$

e

$$p_X : C(X, x) \rightarrow X, \quad p_X := \mathbf{t}.$$

Se $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ é mapa contínuo de espaços pontuados, então

$$\pi_1(f)C(X, x) \subset C(Y, y)$$

implica (por π_1 ser functor) que

$$C(f) := \pi_1(f)|_{C(X, x)}$$

é também functor. Por definição de $\widetilde{\text{Top}}$, segue do Lema 4.2 que $\mathbf{t} : C(X, x) \rightarrow X$ é um recobrimento, e ele é universal porque se

$$h : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow X, \quad h|_{\mathbb{S}^1 \times 0} = x$$

representa um loop $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow C(X, x)$, então cada h_t é trivial em homotopia, e portanto existe

$$H : \mathbb{D}^2 \times I \rightarrow X, \quad H|_{\partial\mathbb{D}^2 \times I} = h, \quad H|_{\mathbb{D}^2 \times 0} = x$$

que representa nulomotopia $H : \mathbb{D}^2 \rightarrow C(X, x)$. □

Parte 2

Grupos de Lie

CAPÍTULO 5

Grupos de Lie

Grupos de Lie unem noções algébricas com noções geométricas, já que, ao mesmo tempo que um tal grupo de Lie G possui estrutura de variedade diferenciável, este também terá uma estrutura de grupo. Veremos que esta ligação com a álgebra é muito mais profunda, tanto que, a estrutura diferenciável de tal grupo induzirá o que chamamos de álgebra de Lie em T_1G .

1. Definições básicas

DEFINIÇÃO 5.1. Um **grupo de Lie** é uma variedade diferenciável G , munida de uma estrutura de grupo diferenciável, ou seja, a sua multiplicação

$$m : G \times G \longrightarrow G, \quad m(x, y) = xy,$$

e o operador inversão

$$i : G \longrightarrow G, \quad i(x) = x^{-1},$$

são diferenciáveis. Um **homomorfismo** $\Phi : G \rightarrow H$ entre grupos de Lie é um homomorfismo de grupos que é diferenciável.

2. Exemplos

EXEMPLO 5.1. Todo grupo G , munido da topologia discreta, pode ser pensado como variedade diferenciável¹, e as operações de G são automaticamente diferenciáveis.

EXEMPLO 5.2. Um espaço vetorial V é um grupo de Lie sob adição. Note que aqui este é um grupo comutativo, dito **abeliano**.

EXEMPLO 5.3. Se $\Lambda \subset V$ é um reticulado, e $V = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, então $G = V/\Lambda$ é grupo abeliano compacto. Quando $\Lambda = \mathbb{Z}$, obtemos o círculo \mathbb{S}^1 como \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

EXEMPLO 5.4. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, escrevamos

$$\text{end}(V) = \{A : V \rightarrow V \mid A \text{ é linear}\}$$

para o espaço vetorial de todos os mapas lineares de V em V . Então o grupo de isomorfismos lineares de V ,

$$(5) \quad \text{GL}(V) \subset \text{end}(V), \quad \text{GL}(V) = \{A \mid \det A \neq 0\},$$

¹A rigor, apenas se o grupo G for contável.

é um grupo de Lie. Esse é um aberto de $\text{end}(V)$, com multiplicação dada pela restrição de

$$(6) \quad \text{end}(V) \times \text{end}(V) \rightarrow \text{end}(V), \quad (A, B) \mapsto A \circ B,$$

a $\text{GL}(V)$. Tal mapa é um polinômio quadrático nas coordenadas, e portanto a multiplicação é diferenciável. Além disso, a fórmula de Cramer exibe a inversa como a restrição a $\text{GL}(V)$ de um mapa racional, que é regular precisamente em $\text{GL}(V)$, pois apenas o polinômio $A \mapsto \det A$ aparece no denominador.

EXEMPLO 5.5. Se G é um grupo de Lie, com multiplicação $m : G \times G \rightarrow G$, também seu fibrado tangente TG é um grupo de Lie, com multiplicação $m_* : TG \times TG \rightarrow TG$,

$$(v, w) \mapsto m_{*(g,h)}(v, w), \quad (v, w) \in T_g G \times T_h G.$$

DEFINIÇÃO 5.2. A coleção dos grupos de Lie juntamente com os homomorfismos de grupos de Lie formam a categoria denotada por LGrps

3. O produto pontual

Dado um grupo de Lie G , definamos $P(G)$ como o conjunto dos caminhos contínuos $g : I \rightarrow G$, os quais serão denotados por g_t , e

$$P(1, G) = \{g \in P(G) \mid g_0 = 1_G\}.$$

Para $g_t, h_t \in P(1, G)$ definimos o produto pontual $(gh)_t := g_t h_t$, que transforma este conjunto em um grupo (ver Teorema 5.1). Desta forma, existe uma identificação canônica

$$\mu : P(G) \xrightarrow{\sim} G \times P(1, G), \quad \mu(g) := (g_0, g_0^{-1}g).$$

Observe que qualquer par de caminhos contínuos $g, h \in P(G)$, onde $g_1 = h_0$, é da forma $gh = g_1 k$, onde $k = g_1^{-1}h \in P(1, G)$.

O lema a seguir relaciona o produto pontual com a multiplicação do grupóide $\pi_1(G)$, o que nos permitirá prover uma caracterização do recobrimento universal antes definido em termos do produto do nosso grupo de Lie.

LEMA 5.1. *Dado $(g, h) \in P(G) \times P(1, G)$, então existe uma homotopia entre:*

- a concatenação $g \odot g_1 h$,
- e o produto pontual gh .

consequentemente a multiplicação de $\pi_1(G)$ em $\tilde{G} = \mathbf{s}^{-1}(1_G)$ se resume a

$$[g][h] = [gh],$$

e portanto

$$\mathbf{t} : \tilde{G} \longrightarrow G$$

é um homomorfismo de grupos.

DEMONSTRAÇÃO. De fato, dados caminhos $g, h \in P(1, G)$ então existem homotopias

$$g \sim g \odot g_1, \quad h \sim 1 \odot h$$

e portanto

$$gh \sim (g \odot g_1)(1 \odot h) = g \odot g_1h$$

Portanto em $\pi_1(G)$, a multiplicação é dada por

$$[g] \odot [g_1h] = [gh].$$

Em particular, definindo $N(\mathfrak{g})$ como o subgrupo nulomotópico de $P(1, G)$, a estrutura deste último desce a $\tilde{G} := P(1, G)/N(1, G)$ e coincide com a \mathfrak{s} -fibra de $\pi_1(G)$ sobre 1, e o mapa canônico

$$p : \tilde{G} \rightarrow G, \quad p[g] = g_1$$

é um homomorfismo, que é sobrejetivo:

$$p[gh] = g_1h_1 = p[g]p[h].$$

□

4. O recobrimento universal de um grupo de Lie

Sendo uma variedade diferenciável, um grupo de Lie admite um recobrimento universal

$$p : \tilde{G} \longrightarrow G,$$

construída, como no capítulo anterior, no que segue:

- Consideramos o quociente do espaço de todos os caminhos contínuos $C^0(I, G)$ em G pela relação de equivalência homotópica com relação a extremos fixos;
- O espaço resultante $\pi_1(G) \rightrightarrows G$ é um grupóide sobre G de maneira natural;
- Equipando $\pi_1(G)$ com a topologia lasso, obtemos que

$$\mathfrak{t} : \tilde{G} := \mathfrak{s}^{-1}(1_G) \longrightarrow G$$

é o recobrimento universal de G .

OBSERVAÇÃO 5.1. *Note que, pelo fato de G ser uma variedade diferenciável, e $p : \tilde{G} \rightarrow G$ ser um homeomorfismo local, segue que \tilde{G} tem uma estrutura diferenciável única para o qual p é suave.*

TEOREMA 5.1. *Se G é um grupo de Lie.*

- (1) *O espaço de caminhos $P(1, G)$ tem estrutura induzida de grupo, com multiplicação:*

$$(gh)_t := g_th_t, \quad g, h : (I, 0) \longrightarrow (G, 1).$$

(2) O subconjunto $N(1, G)$, formado por todos os caminhos nulomotópicos $g : (I, 0) \rightarrow (G, 1)$ — isto é, aqueles em que existe extensão $\tilde{g} : I^2 \rightarrow G$ satisfazendo

$$\tilde{g}_0^e = 1, \quad \tilde{g}_1^e = 1, \quad \tilde{g}_t^0 = 1, \quad \tilde{g}_t^1 = g_t$$

é um subgrupo normal de $P(1, G)$ que é fechado.

(3) O grupo

$$\tilde{G} := P(1, G)/N(1, G)$$

é simplesmente conexo, e

$$p : \tilde{G} \longrightarrow G, \quad p([g_t]) = g_1$$

é o recobrimento universal de G , que herda estrutura de variedade diferenciável de G .

DEMONSTRAÇÃO. *Passo 1:* $P(1, G)$ é um grupo topológico.

O fato de $P(1, G)$ ser grupo com a multiplicação pontual definida por $m(g, h)_t = g_t h_t$ é óbvio. Agora, para mostrar que a multiplicação é um mapa contínuo quando tomada a topologia compacto-aberto em $P(G)$, suponha que $gh \in \mathcal{M}(K, U)$. Pelo fato de que $m : G \times G \rightarrow G$ ser contínua, existe uma vizinhança $U_g \times U_h \subset G \times G$ de (g, h) , tal que $m(U_g \times U_h) \subset U$. Então

$$m(\mathcal{M}(K, U_g) \times \mathcal{M}(K, U_h)) \subset \mathcal{M}(K, U)$$

mostra que $m : P(G) \times P(G) \rightarrow P(G)$ é contínuo.

Passo 2: O homomorfismo $P(1, G) \rightarrow G$.

Considere o mapa

$$\mathbf{t} : P(1, G) \longrightarrow G, \quad \mathbf{t}(g) := g_1,$$

que é contínuo, pois

$$\mathbf{t}^{-1}(U) = \mathcal{M}(\{1\}, U),$$

e é um homomorfismo de grupos, já que

$$(gh)_1 = \mathbf{t}(gh) = \mathbf{t}(g)\mathbf{t}(h) = g_1 h_1.$$

Portanto

$$L(1, G) \subset P(1, G), \quad L(1, G) = \mathbf{t}^{-1}(1)$$

é subgrupo fechado e normal de $P(1, G)$.

Passo 3: O subgrupo $N(1, G)$.

Denotemos por $N(1, G) \subset L(1, G)$ o conjunto de todos os loops nulomotópicos. Mostremos que $N(1, G)$ é a componente conexa por caminhos de $L(1, G)$ contendo o caminho constante.

De fato, pelo Teorema 4.3, uma curva contínua $h : I \rightarrow L(1, G)$ pode ser interpretada como uma homotopia $h : I^2 \rightarrow G$ com extremos fixos na identidade. Portanto $c \in L(1, G)$ está em $N(1, G)$ se, e só se, existe uma curva contínua $h : I \rightarrow L(1, G)$ que tem início

na curva constante e termina em c . Ou seja, $L(1, G)_1 = N(1, G)$ deve conter o caminho constante.

Isso implica que $N(1, G)$ é fechado em $L(1, G)$ e portanto em $P(1, G)$. Ainda, pelo mapa conjugação em G

$$C_g : P(1, G) \longrightarrow P(1, G), \quad C_g(h) := ghg^{-1}$$

ser um homeomorfismo que mapeia o mapa constante até ele mesmo, e conseqüentemente $C_g(N(1, G)) \subset C_g(N(1, G))$, $N(1, G)$ será também subgrupo normal. E portanto

$$\tilde{G} := P(1, G)/N(1, G) \longrightarrow G = P(1, G)/L(1, G)$$

é o recobrimento universal de G pela discussão feita na Seção 4.

□

CAPÍTULO 6

Campos vetoriais em grupos de Lie

1. Campos de vetores em um grupo de Lie

Dado um grupo de Lie G , para cada $g \in G$ escrevemos

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G & h &\mapsto gh \\ R_g : G &\rightarrow G & h &\mapsto hg, \end{aligned}$$

para os mapas de multiplicação à esquerda e à direita, respectivamente. Além disso, por G ser Lie, sua multiplicação é de classe C^∞ , e portanto tais mapas também o serão. A associatividade $(gh)w = g(hw)$ é equivalente a cada uma das igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} R_h \circ L_g &= L_g \circ R_h & g, h &\in G, \\ L_{gh} &= L_g \circ L_h & g, h &\in G, \\ R_{hw} &= R_w \circ R_h & h, w &\in G. \end{aligned}$$

Ou seja, todas as multiplicações à esquerda comutam com todas as multiplicações à direita.

É fácil ver que $L_g : G \rightarrow G$ é um difeomorfismo de Lie para cada $g \in G$, ou seja, é um isomorfismo diferenciável de G . Além disso, para cada $g \in G$ definamos

$$\begin{aligned} C_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1}, \end{aligned}$$

para a conjugação por g no grupo G . Como consequência, teremos C escrita em termos das multiplicações à direita e à esquerda:

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \text{Diff}(G) \\ g &\mapsto C_g = L_g \circ R_g^{-1}, \end{aligned}$$

que é novamente um homomorfismo de G para o grupo dos difeomorfismos de G . Agora definiremos uma classe muito importante de campos de vetores, e para tal, usaremos livremente os conceitos de fluxo associados à campos de vetores (ver [17]).

DEFINIÇÃO 6.1. *Dizemos que um campo de vetores v em um grupo de Lie G é invariante pela esquerda se*

$$v_{gh} = (L_g)_*(v_h), \quad g, h \in G,$$

e invariante pela direita se

$$v_{gh} = (R_h)_*(v_g), \quad g, h \in G.$$

Tomando $h = 1$ nas equações da Definição 6.1 acima, vemos que tais campos de vetores são determinados por seu valor em $1 \in G$. Desse modo, dado $v \in T_1G$, obtemos campos vetoriais

$$(7) \quad v_g^L := (L_g)_*v, \quad v_g^R = (R_g)_*v,$$

que são as únicas **extensões invariantes** de v . Desta forma, teremos uma bijeção entre campos de vetores invariantes pela esquerda (e direita) em G e elementos de T_1G .

2. Álgebras de Lie

DEFINIÇÃO 6.2. *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial \mathfrak{g} , munido do mapa linear*

$$(8) \quad [\cdot, \cdot] : \wedge^2 \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

que satisfaz a **identidade de Jacobi**: para cada $v \in \mathfrak{g}$, o mapa linear $\text{ad}(v) = [v, \cdot] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação:

$$(9) \quad \text{ad}(v)[w, z] = [\text{ad}(v)w, z] + [w, \text{ad}(v)z]$$

que de forma equivalente é expressa por

$$(10) \quad [v, [w, z]] = [[v, w], z] + [w, [v, z]].$$

DEFINIÇÃO 6.3. *Dadas \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie e um homomorfismo $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, dizemos que ϕ é de Lie se este preserva colchetes, ou seja,*

$$\phi[v, w] = [\phi v, \phi w],$$

válido para cada $v, w \in \mathfrak{g}$, onde o colchete a esquerda é o colchete da álgebra \mathfrak{g} , e a direita o colchete da álgebra \mathfrak{h} .

DEFINIÇÃO 6.4. *A coleção de álgebras de Lie juntamente com os homomorfismos de Lie formam a categoria denotada por LAlgs.*

EXEMPLO 6.1. Dado um espaço vetorial V , o espaço $\text{end}(V)$ de endomorfismos de V tem estrutura de álgebra de Lie sob o comutador:

$$[a, b] := ab - ba.$$

Uma **representação** de \mathfrak{g} em V é uma escolha de homomorfismo de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{end}(V).$$

EXEMPLO 6.2. Dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , então o conjunto dos automorfismos de Lie

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) := \{\phi \in \text{GL}(\mathfrak{g}) \mid \phi[\cdot, \cdot] = [\phi, \phi]\},$$

é um grupo de Lie sob a composição de mapas.

EXEMPLO 6.3. Dada álgebra de Lie \mathfrak{g} , o subespaço $\text{der}(\mathfrak{g}) \subset \text{end}(\mathfrak{g})$ das **derivações** de \mathfrak{g} — isto é, mapas lineares $a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ com

$$a[v, w] = [a(v), w] + [v, a(w)], \quad v, w \in \mathfrak{g},$$

é uma subálgebra de Lie de $\text{end}(\mathfrak{g})$.

EXEMPLO 6.4. Dada álgebra de Lie \mathfrak{g} , a identidade de Jacobi provê a representação **adjunta**:

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{der}(\mathfrak{g}), \quad \text{ad}(v)w := [v, w].$$

Seu núcleo, o **centro**

$$z(\mathfrak{g}) = \{v \mid [v, \mathfrak{g}] = 0\}$$

é um ideal abeliano de \mathfrak{g} , e sua imagem

$$\text{ad}(\mathfrak{g}) = \{[v, \cdot] \mid v \in \mathfrak{g}\}$$

é um ideal de $\text{der}(\mathfrak{g})$:

$$[a, \text{ad}(v)] = \text{ad}(av), \quad (a, v) \in \text{der}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{g}.$$

EXEMPLO 6.5. O centro de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , definido no exemplo anterior, pode ser interpretado como uma álgebra de Lie munida do colchete nulo. Além disso, por $z(\mathfrak{g})$ ser um subespaço vetorial de \mathfrak{g} , então este pode ser interpretado como um grupo de Lie sob a adição.

3. A álgebra de Lie de um grupo de Lie

Até este momento não temos uma relação clara entre grupos e álgebras de Lie, porém, como será demonstrado nesta seção, a partir de um grupo de Lie de dimensão finita é possível construir uma estrutura de álgebra de Lie no espaço tangente T_1G .

Desta forma, a partir desta seção, caso não exista menção contrária, todo grupo de Lie terá **dimensão finita**.

TEOREMA 6.1. *O espaço tangente de um grupo de Lie G na identidade, $\mathfrak{g} := T_1G$, tem uma estrutura natural de álgebra de Lie $[\cdot, \cdot]$ induzida pelas extensões invariantes, para a qual a função que associa a cada elemento de \mathfrak{g} a sua única extensão invariante à esquerda é um homomorfismo de álgebra de Lie,*

$$(11) \quad [v, w]_{\mathfrak{g}}^L = [v^L, w^L], \quad v, w \in \mathfrak{g}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Denotando o conjunto dos campos de vetores invariantes pela esquerda em G por $\mathfrak{X}(G)^L$, vemos que o mapa

$$\begin{aligned} \cdot^L : T_1G &\rightarrow \mathfrak{X}(G)^L \\ v &\mapsto v^L, \end{aligned}$$

definido por (7), é um isomorfismo. Além disso, como $L_g : G \rightarrow G$ é um difeomorfismo para cada $g \in G$, então dados $v^L, w^L \in \mathfrak{X}(G)^L$

$$(L_g)_*[v^L, w^L] = [(L_g)_*v^L, (L_g)_*w^L],$$

mas como v^L e w^L são invariantes pela esquerda

$$(L_g)_*[v^L, w^L] = [v^L, w^L],$$

ou seja, $[v^L, w^L]$ também é invariante pela esquerda.

Por estas duas observações, (11) está bem definido para cada elemento de \mathfrak{g} . Além disso, pelo comutador ser um colchete de Lie em campos vetoriais, então $[\cdot, \cdot]$ também o é em \mathfrak{g} . \square

Pelo fato de $(C_g)(1) = 1$, o mapa tangente de C_g em 1 é um mapa linear

$$\text{Ad}_g := (C_g)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$$

chamado de mapa adjunto de g , ou a conjugação infinitesimal por g em \mathfrak{g} . Além disso, como

$$C_{gh} = (C_g) \circ (C_h), \quad g, h \in G,$$

então aplicando a regra da cadeia, deduzimos que

$$\text{Ad}_{gh} = (\text{Ad}_g) \circ (\text{Ad}_h), \quad g, h \in G.$$

Ou seja, o mapa

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \text{GL}(\mathfrak{g}), \quad \text{Ad} : g \mapsto \text{Ad}_g :$$

é um homomorfismo de grupos de grupos de Lie, que é chamado de **representação adjunta** de G em \mathfrak{g} .

EXEMPLO 6.6. O mapa representação adjunta $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo de grupos de Lie, com núcleo o **centro**

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ para todo } g \in G\}.$$

OBSERVAÇÃO 6.1. A imagem de Ad não precisa, necessariamente, ser um subgrupo de Lie de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

PROPOSIÇÃO 6.1. *Seja $\Phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo entre grupos de Lie com álgebras respectivas \mathfrak{g} e \mathfrak{h} . Então a diferencial de Φ na identidade*

$$(12) \quad \phi := \Phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

é homomorfismo de álgebras de Lie, e satisfaz

$$(13) \quad \phi \circ \text{Ad}_g = \text{Ad}_{\Phi(g)} \circ \phi, \quad g \in G.$$

DEMONSTRAÇÃO. Dados $g, h \in G$, então

$$\begin{aligned} \Phi \circ L_g(h) &= \Phi(gh) \\ &= \Phi(g)\Phi(h) \\ &= L_{\Phi(g)}(\Phi(h)) \\ &= L_{\Phi(g)} \circ \Phi(h). \end{aligned}$$

Logo $\Phi \circ L_g = L_{\Phi(g)} \circ \Phi$, e portanto

$$\phi \circ (L_g)_* = (L_{\Phi(g)})_* \circ \phi.$$

Disto segue que para cada $v \in \mathfrak{g}$

$$\phi(v^L) = \phi(v)^L.$$

Logo,

$$\phi([v, w]^L) = [\phi(v), \phi(w)]^L \quad v, w \in \mathfrak{g},$$

ou seja,

$$\phi([v, w]) = [\phi(v), \phi(w)] \quad v, w \in \mathfrak{g}.$$

Para a última igualdade, notemos que

$$\Phi(C_g(h)) = \Phi(ghg^{-1}) = \Phi(g)\Phi(h)\Phi(g)^{-1} = (C_{\Phi(g)}(\Phi(h))) \quad g, h \in G,$$

ou seja,

$$\phi \circ C_g = C_{\Phi(g)} \circ \Phi$$

e assim, derivando:

$$\phi \circ \text{Ad}_g = \text{Ad}_{\Phi(g)} \circ \phi.$$

□

Por fim, registramos a functorialidade da associação de um grupo de Lie até a sua álgebra de Lie:

LEMA 6.1. *A regra que a um homomorfismo $F : G \rightarrow H$ de grupos de Lie associa $F_* : T_1G \rightarrow T_1H$ define um functor*

$$(14) \quad \text{Lie} : \text{LGrps} \longrightarrow \text{LAlgs}$$

da categoria de grupos de Lie para a categoria de álgebras de Lie.

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que a $\text{id}_G : G \rightarrow G$ corresponde id_{T_1G} , e que se

$$G \xrightarrow{F} H \xrightarrow{F'} K$$

são homomorfismos de grupos de Lie, então

$$\begin{aligned} \text{Lie}(F' \circ F) &= (F' \circ F)_*|_{T_1G} \\ &= F'_*|_{T_1H} \circ F_*|_{T_1G} \\ &= \text{Lie}(F') \circ \text{Lie}(F). \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 6.5. *Dado um grupo de Lie G tal que $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, então dizemos que G é **integrável**.*

4. O mapa exponencial

LEMA 6.2. *Seja $v \in \mathfrak{g}$, e sejam v^L, v^R suas extensões invariantes pela esquerda e pela direita. Então os seus fluxos locais satisfazem:*

$$(15) \quad \phi_t^{v^L}(g) = g\phi_t^{v^L}(1), \quad \phi_t^{v^R}(g) = \phi_t^{v^R}(1)g.$$

Consequentemente, $v^L, v^R \in \mathfrak{X}(G)$ são campos vetoriais completos.

DEMONSTRAÇÃO. Tomemos v invariante pela esquerda e $g \in G$. Escrevamos

$$g_t = R_{\phi_t^{v^L}(1)}g = g\phi_t^{v^L}(1) = L_g\phi_t^{v^L}(1),$$

desta forma, $g_0 = g$, e além disso

$$\frac{d}{dt}g_t = d\phi_t^{v^L}(1)L_gv(\phi_t^{v^L}(1)) = v(L_g\phi_t^{v^L}(1)) = v(g_t),$$

para cada t , e consequentemente, $g_t = \phi_t^{v^L}(g)$. O caso para v^R é análogo. \square

TEOREMA 6.2. *Para cada $v \in \mathfrak{g}$, existe um único homomorfismo $h = h_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ que é diferenciável em $t = 0$ e satisfaz $\frac{dh}{dt}(0) = v$. E esta solução é igual a curva solução em v^L e v^R começando pela identidade de G . Além disso, os fluxos de v^L e v^R são globalmente definidos para todo $t \in \mathbb{R}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja ϕ_t o fluxo de v^L . Teremos, além da definição,

$$\phi_{t+s} = \phi_s(\phi_t(1)) = \phi_t(1)\phi_s(1)$$

por (15). Mas isto mostra que existe $\epsilon > 0$ tal que, se $\phi_t(1)$ é definida, então $\phi_t(1)$ é definida para todo $t' \in (t - \epsilon, t + \epsilon)$. Portanto, $t \mapsto \phi_t(1)$ é definida para todo $t \in \mathbb{R}$, e teremos um homomorfismo de classe C^1 $h : \mathbb{R} \rightarrow G$, enquanto $\frac{dh}{dt}(0) = v$. Novamente aplicando (15) asseguramos a definição de $\phi_t : G \rightarrow G$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Substituindo v^L por v^R obtemos um resultado similar para o fluxo de v^R .

Agora suponha que $h : \mathbb{R} \rightarrow G$ é um homomorfismo que é diferenciável em $t = 0$ de modo que $\frac{dh}{dt}(0) = v$. Diferenciando:

$$h(t+s) = h(t)h(s) = h(s)h(t)$$

com respeito a s em $s = 0$, vemos que h é diferenciável em t e

$$\frac{dh}{dt}(t) = (L_{h(t)})_*(v) = v_{h(t)}^L$$

e

$$\frac{dh}{dt}(t) = (R_{h(t)})_*(v) = v_{h(t)}^R,$$

então $h(t)$ é uma curva solução para v^L e v^R , com $h(0) = 1 \in G$. Portanto, é determinado unicamente por $v \in \mathfrak{g}$. \square

DEFINIÇÃO 6.6. Para cada $v \in \mathfrak{g}$, o elemento $\exp v \in G$ é definido como $\phi_1^{v^L}(1) = \phi_1^{v^R}(1)$, onde $\phi_t^{v^L}$ e $\phi_t^{v^R}$ são os fluxos das extensões invariante à esquerda e à direita de v . Ou seja,

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ v &\mapsto \phi_1^{v^L}(1) = \phi_1^{v^R}(1) \end{aligned}$$

Tal mapa é chamado o **mapa exponencial** de \mathfrak{g} até G .

Por definição, para $v \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp tv|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \phi_t^{v^L}|_{t=0} \\ &= v \end{aligned}$$

e assim

$$v = (\exp)_*(v), \quad v \in \mathfrak{g},$$

ou seja, $(\exp)_*$ é igual a identidade em \mathfrak{g} . Assim, aplicando o Teorema da Função implícita, chegamos ao seguinte teorema:

TEOREMA 6.3. O mapa exponencial é um difeomorfismo entre uma vizinhança aberta de $0 \in \mathfrak{g}$ e uma vizinhança aberta de $1 \in G$.

A partir do mapa exponencial e da representação adjunta podemos dar uma caracterização a álgebra de Lie de um grupo de Lie equivalente a apresentada no Teorema 6.1:

TEOREMA 6.4. Um grupo de Lie induz uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{g} := T_1G$ dada por

$$[v, w] := \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp tv} w|_{t=0} \quad v, w \in \mathfrak{g},$$

que é equivalente a expressão dada em (11)

DEMONSTRAÇÃO. Basta calcularmos, para $v, w \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp tv} w &= \frac{d}{dt} R_{\exp tv}^* w^L \\ &= \frac{d}{dt} (\phi_t^{v^L})^* w^L \\ &= (\phi_t^{v^L})^* [v^L, w^L] \\ &= (\phi_t^{v^L})^* [v, w]^L, \end{aligned}$$

a qual usamos para deduzir que

$$\frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp tv} w|_{t=0} = [v, w].$$

□

Assim, o mapa ad definido em 6.4 pode ser escrito em termos da representação dada pelo Teorema 6.4:

DEFINIÇÃO 6.7. *Definimos o mapa $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{der}(\mathfrak{g})$ por*

$$\text{ad}(v)w = \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp tv} w \right|_{t=0} \quad v, w \in \mathfrak{g}.$$

CAPÍTULO 7

Estruturas Poisson

Este breve capítulo se dedica a introduzir o conceito de estruturas Poisson e alguns exemplos. Os resultados e definições foram trazidos e adaptados de [7] e [20], conforme as necessidades deste trabalho. No que segue, $C^\infty(M)$ é o conjunto das funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis, onde M é uma variedade diferenciável.

1. Definições básicas

DEFINIÇÃO 7.1. *Uma variedade Poisson é uma variedade M munida de um colchete de Lie*

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

que além disso satisfaz a identidade de Leibniz:

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h \quad \forall f, g, h \in C^\infty(M).$$

Um mapa suave entre variedades Poisson

$$\Phi : (M_1, \{\cdot, \cdot\}_1) \longrightarrow (M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$$

é dito **Poisson** se

$$\Phi^* : C^\infty(M_2) \longrightarrow C^\infty(M_1) \quad \Phi^*(f) := f(\Phi)$$

for um homomorfismo de álgebras de Lie:

$$\Phi^*\{f, g\}_2 = \{\Phi^*(f), \Phi^*(g)\}_1 \quad \forall f, g \in C^\infty(M_2).$$

Vemos que, pela identidade de Leibniz, fixado um mapa $h \in C^\infty(M)$ a aplicação $\{h, \cdot\} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ é uma derivação na álgebra $C^\infty(M)$. Portanto, este define um campo de vetores X_h em M que age sobre funções a partir da derivada de Lie:

$$\{h, f\} = \mathcal{L}_{X_h}f \quad \forall f \in C^\infty M.$$

OBSERVAÇÃO 7.1. *Uma boa referência para propriedades das derivadas de Lie pode ser encontrada em [31].*

Este campo de vetores é denominado **campo de vetores Hamiltoniano** de $h \in C^\infty(M)$.

Novamente, a identidade de Leibniz nos permite definir o colchete de Poisson localmente, ou seja, restringir o colchete em abertos da variedade M . Isto é elucidado na próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 7.1. *Dada uma variedade de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$ e U aberto em tal variedade, então U possui um colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_U$ pelo qual o mapa inclusão $i : U \rightarrow M$ é um mapa de álgebras:*

$$\{f|_U, g|_U\}_U = \{f, g\}|_U$$

DEMONSTRAÇÃO. Dados $f, g \in C^\infty(U)$ e $p \in U$, tomemos $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(M)$ extensões de f e g em M , ou seja, funções tais que $\tilde{f}|_O = f$ e $\tilde{g}|_O = g$ para uma vizinhança $O \subset U$ contendo p . Daí, definamos

$$(16) \quad \{f, g\}_U(p) := \{\tilde{f}, \tilde{g}\}(p).$$

Para a boa definição devemos mostrar que para cada vizinhança O contendo p e cada $f, g \in C^\infty(M)$, $\{f, g\}|_O$ depende apenas das restrições $f|_O$ e $g|_O$. Por bilinearidade e anti-simetria, basta mostrarmos que $g|_O = 0$ implica que $\{f, g\} = 0$. Para tal, basta notar que

$$\{f, g\}|_O = \mathcal{L}_{X_f}(g)|_O = \mathcal{L}_{X_f|_U}(g|_U).$$

As propriedades de anti-simetria, bilinearidade, Jacobi e Leibniz seguem do fato de que estas são satisfeitas pelas extensões das funções em U em vizinhanças suficientemente pequenas de pontos. \square

Tomando uma carta local de algum conjunto aberto U em M com coordenadas (x_1, \dots, x_n) , então o campo de vetores hamiltoniano de uma função $f \in C^\infty(M)$ restrito a U pode ser expresso por

$$X_f = \sum_{j=1}^m X_f^j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Desta forma, aplicando a regra de Leibniz, cada elemento X_{fg}^j satisfaz

$$X_{fg}^j = f X_g^j + g X_f^j.$$

Conseqüentemente, o mapa $X^j(f) := X_f^j$ se torna uma derivação em $C^\infty(U)$. Desta forma X_f pode ser escrito da seguinte maneira

$$X_f = \sum_{i,j=1}^m \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

o que implica, em tais condições, que

$$(17) \quad \{f, g\}|_U = \sum_{i,j=1}^m \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

onde $\pi_{ij} = \{x_i, x_j\}|_U$, ou seja, cada coeficiente é o colchete de Poisson aplicado nas coordenadas locais de U . E assim, temos uma caracterização precisa do colchete restrito a um aberto U definido na Proposição 7.1.

Por $\{\cdot, \cdot\}$ ser anti-simétrico, então teremos $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$, portanto, se tomarmos a matriz $A = [\pi_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq m$, esta será uma matriz anti-simétrica com entradas em $C^\infty(U)$. Assim, a identidade de Jacobi para $\{\cdot, \cdot\}_U$ é equivalente ao sistema de equações diferenciais parciais:

$$(18) \quad \sum_{l=1}^m \left(\pi_{il} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} + \pi_{jl} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_l} + \pi_{kl} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0, \quad (1 \leq i < j < k \leq m).$$

2. Estruturas de Poisson e campos de bivectores

A relação (17) nos induz a pensar que o nosso colchete de Poisson pode ser expresso em termos de

$$\pi = \sum_{i < j} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Pelo uso do produto exterior, a anti-simetria é assegurada. Este é um exemplo do que chamamos de campo de bivectores, ou seja, uma seção de $\wedge^2 TM$. A identidade de Jacobi equivale a uma condição extra em π que é expressa em termos da equação (18).

Para iniciar tal discussão a respeito da relação entre campos de bivectores e estruturas Poisson, devemos fazer um breve estudo a respeito do cálculo de campos de multivetores. Primeiramente, dada uma **forma diferenciável** de grau k

$$\omega \in \Omega^k(M) := \Gamma \left(\wedge^k T^*M \right),$$

então esta pode ser identificada como um mapa $C^\infty(M)$ -multilinear e alternado de grau k :

$$\omega : \mathfrak{X}^1(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^1(M) \rightarrow C^\infty(M).$$

e de maneira dual, um **campo de multivetores** de grau k em M

$$v \in \mathfrak{X}^k(M) := \Gamma \left(\wedge^k TM \right),$$

pode ser interpretado como um mapa $C^\infty(M)$ -multilinear e alternado de grau k no espaço $\Omega^1(M)$ em 1-formas em M :

$$v : \Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

Através dessa identificação o produto exterior resultante

$$\cdot \wedge \cdot : \mathfrak{X}^k(M) \times \mathfrak{X}^l(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{k+l}(M),$$

pode ser escrito da forma usual

$$(v \wedge u)(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k,l}} (-1)^\sigma v(\alpha_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\sigma(k)}) u(\alpha_{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\sigma(k+l)}),$$

onde as somas são feitas sobre todos os (k, l) -shuffles, ou seja, todas permutações as σ de $\{1, 2, \dots, k + l\}$, tais que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(k) \quad \text{e} \quad \sigma(k + 1) < \dots < \sigma(k + l).$$

Para $k = 0$, teremos $\mathfrak{X}^0(M) = C^\infty(M)$ e $f \wedge v = fv$. Como para formas esta operação é comutativa e associativa no sentido graduado, conseguimos uma estrutura de álgebra comutativa graduada em

$$\mathfrak{X}^\bullet(M) = \bigoplus_{k=0}^m \mathfrak{X}^k(M).$$

Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, podemos associar uma derivação $\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ na álgebra das funções suaves em M . Podemos fazer uma associação similar de campos de multivetores $v \in \mathfrak{X}^k(m)$ através da operação

$$\mathcal{L}_v : C^\infty(M) \times \dots \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

definida por

$$\mathcal{L}_v(f_1, \dots, f_k) := v(df_1 \wedge \dots \wedge df_k),$$

que será alternada:

$$\mathcal{L}_v(f_1, \dots, f_i, f_j, \dots, f_k) = -\mathcal{L}_v(f_1, \dots, f_j, f_i, \dots, f_k),$$

e uma multiderivação, ou seja, que satisfaça a regra de Leibniz em cada fator:

$$\mathcal{L}_v(f_1, \dots, fg, \dots, f_k) = \mathcal{L}_v(f_1, \dots, f, \dots, f_k)g + f\mathcal{L}_v(f_1, \dots, g, \dots, f_k)$$

É possível mostrar que tal relação é uma bijeção entre campos de multivetores $v \in \mathfrak{X}^k(M)$ e as multiderivações alternadas $\mathcal{L} : C^\infty(M) \times \dots \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ (ver [7]). No nosso contexto, estamos interessados nos campos de bivectores $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$, já que estes estão em bijeção com derivações anti-simétricas $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, com $\{f, g\} := \pi(df \wedge dg)$, já que, caso este satisfazer Jacobi, então teremos um colchete que depende apenas do valor de funções em pontos e as suas respectivas diferenciais.

O próximo lema demonstrará a referida correspondência:

LEMA 7.1. *Existe uma correspondência bijetora entre:*

- bivetores $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$.*
- mapas bilineares anti-simétricos $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que satisfazem a regra de Leibniz.*

Explicitamente, a correspondência é dada por

$$\{f, g\} := \pi(df \wedge dg), \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Além disso, o colchete

$$[\cdot, \cdot]^\pi : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M), \quad [\xi, \eta]^\pi := \mathcal{L}_{\pi^\sharp(\xi)}\eta - \iota_{\pi^\sharp(\eta)}d\xi$$

é tal que

$$[df, dg]^\pi := d\{f, g\}.$$

onde $\pi^\sharp : T^*M \rightarrow TM$ é definido por

$$\pi^\sharp(\alpha) = \pi(\alpha, \cdot).$$

DEMONSTRAÇÃO. A fórmula no enunciado define π através de $\{\cdot, \cdot\}$ e vice-versa, e $\{\cdot, \cdot\}$ satisfaz Leibniz pois

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= \pi(df \wedge d(gh)) \\ &= \pi(df \wedge (gdh + hdg)) \\ &= g\pi(df \wedge dh) + h\pi(df \wedge dg) \\ &= g\{f, h\} + h\{f, g\}. \end{aligned}$$

Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} [df, dg]^\pi &= \mathcal{L}_{\pi^\sharp(df)}dg - \iota_{\pi^\sharp(dg)}d^2f \\ &= d\mathcal{L}_{\pi^\sharp(df)}g \\ &= d\{f, g\}. \end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 7.2. Um bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ cujo colchete determina uma estrutura de álgebra de Lie em $C^\infty(M)$ é dito uma **estrutura Poisson em M** .

Usando o Lema 7.1, podemos dar condições necessárias e suficientes para que um bivector defina um estrutura Poisson:

TEOREMA 7.1. Para um bivector $\pi \in \mathfrak{X}(M)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

i) O gráfico $\text{Gr}(\pi)$ de $\pi^\sharp : T^*M \rightarrow TM$ é involutivo sob o colchete de Dorfman

$$\|\cdot, \cdot\| : \Gamma(\mathbb{T}M) \times \Gamma(\mathbb{T}M) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{T}M)$$

em seções de $\mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$:

$$(19) \quad \|u + \xi, v + \eta\| := \mathcal{L}_u\eta - \iota_v d\xi.$$

ii) O tensor $\Upsilon \in \Gamma(\wedge^3 \text{Gr}(\pi)^*)$ dado por

$$\Upsilon(a, b, c) = \langle \|a, b\|, c \rangle, \quad a, b, c \in \text{Gr}(\pi)$$

é identicamente nulo.

iii) π é homomorfismo

$$\pi^\sharp : (\Omega^1(M), [\cdot, \cdot]^\pi) \longrightarrow (\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot]);$$

iv) $(\Omega^1(M), [\cdot, \cdot]^\pi)$ é álgebra de Lie;

v) π é Poisson.

vi) $[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}$, onde $[\cdot, \cdot]$ é o comutador de campos vetoriais.

DEMONSTRAÇÃO. Observamos que o colchete de Dorfman satisfaz

$$\begin{aligned} \|a, b\| + \|b, a\| &= d\langle a, b \rangle; \\ \|a, \|b, c\|\| &= \| \|a, b\|, c \| + \|b, \|a, c\|\| \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_a \langle b, c \rangle = \langle \|a, b\|, c \rangle + \langle b, \|a, c\| \rangle,$$

para todos $a, b, c \in \Gamma(\mathbb{T}M)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o pairing simétrico canônico:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{T}M \times \mathbb{T}M \longrightarrow \mathbb{T}M, \langle u + \xi, v + \eta \rangle := \iota_u \eta + \iota_v \xi,$$

e onde $\mathcal{L}_a := \mathcal{L}_{\text{pr}_T(a)}$.

Para um subfibrado Lagrangiano $L \subset \mathbb{T}M$, temos que a restrição

$$\|\cdot, \cdot\| : \Gamma(L) \times \Gamma(L) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{T}M)$$

é anti-simétrica. Além disso, L é involutivo,

$$\|\Gamma(L), \Gamma(L)\| \subset \Gamma(L),$$

exatamente quando essa restrição define em $\Gamma(L)$ uma estrutura de álgebra de Lie, o que ocorre exatamente quando

$$\langle \|\Gamma(L), \Gamma(L)\|, \Gamma(L) \rangle$$

é identicamente nulo.

Considere então o subfibrado Lagrangiano dado pelo gráfico L de π^\sharp . Temos então que

$$\begin{aligned} \langle \|\pi^\sharp(\xi) + \xi, \pi^\sharp(\eta) + \eta\|, \pi^\sharp(\zeta) + \zeta \rangle &= \langle [\pi^\sharp(\xi), \pi^\sharp(\eta)] + [\xi, \eta]^\pi, \pi^\sharp(\zeta) + \zeta \rangle \\ &= \langle [\pi^\sharp(\xi), \pi^\sharp(\eta)] - \pi^\sharp[\xi, \eta]^\pi, \zeta \rangle \end{aligned}$$

Isso mostra que i), ii) e iii) são equivalentes. Por outro lado,

$$\begin{aligned} d\{f, \{g, h\}\} &= [df, d\{g, h\}]^\pi \\ &= [df, [dg, dh]^\pi]^\pi \\ &= [[df, dg]^\pi, dh]^\pi + [dg, [df, dh]^\pi]^\pi \\ &= [d\{f, g\}, dh]^\pi + [dg, d\{f, h\}]^\pi \\ &= d(\{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}) \end{aligned}$$

mostra que iv) implica iii).

Para mostrar iv) \Leftrightarrow v), basta notarmos que, para cada $f, g, h \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[X_f, X_g]} h &= \mathcal{L}_{X_f} \mathcal{L}_{X_g} h - \mathcal{L}_{X_g} \mathcal{L}_{X_f} h \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} \\ &= \mathcal{L}_{X_{\{f, g\}}} h \end{aligned}$$

Por fim, mostremos que ii) implica iv). Para cada $f, g, h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
[X_f, X_g] &= [\pi^\sharp(df), \pi^\sharp(dg)] = \pi^\sharp[df, dg]^\pi \\
&= \pi^\sharp(\mathcal{L}_{\pi^\sharp(df)}dg - \iota_{\pi^\sharp(dg)}ddf) \\
&= \pi^\sharp(d(\mathcal{L}_{\pi^\sharp(df)}g)) \\
&= \pi^\sharp(d\{f, g\}) \\
&= X_{\{f, g\}},
\end{aligned}$$

ou seja, ii) \Rightarrow v), e conseqüentemente ii) \Rightarrow iv) □

DEFINIÇÃO 7.3. *Uma variedade M munida de um bivector Poisson π é chamada uma **variedade Poisson**, e será denotada por (M, π) .*

3. Exemplos

EXEMPLO 7.1. Toda variedade diferenciável M possui uma estrutura de variedade Poisson através do **colchete nulo**:

$$\{f, g\} = 0 \quad f, g \in C^\infty(M)$$

EXEMPLO 7.2. Se M tem dimensão até 1, todo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ é nulo (e portanto Poisson).

EXEMPLO 7.3. Tomando M de dimensão 2, todo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ é Poisson. De fato, pelo Teorema 7.1 sabemos que π é Poisson se e só se $\Upsilon \in \Gamma(\wedge^3 \text{Gr}(\pi)^*)$ é nulo — e isso é automático, já que $\text{Gr}(\pi)$ tem posto dois.

EXEMPLO 7.4. Se $M = \mathbb{R}^{2n}$, então a **estrutura simplética padrão**

$$\pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i},$$

define uma estrutura Poisson em M .

EXEMPLO 7.5. Se $M = \mathbb{R}^{2n}$, então o bivector

$$\pi = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i},$$

define uma estrutura Poisson em M .

EXEMPLO 7.6. Se $M = \mathbb{R}^{2n}$, então o bivector

$$\pi = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i},$$

define uma estrutura Poisson em M .

EXEMPLO 7.7. Se $M = \mathbb{R}^{2n}$, então o bivetor

$$\pi = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i},$$

define uma estrutura Poisson em M .

EXEMPLO 7.8 (Estruturas Poisson lineares). Um colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ em um espaço vetorial V que aplicado a duas funções lineares produz uma função linear é dito um **colchete de Poisson linear**.

A luz do exemplo 7.8, a próxima proposição relacionará o colchete de Lie de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} com colchetes de Poisson lineares em seu dual \mathfrak{g}^* .

PROPOSIÇÃO 7.2. *Dado um espaço vetorial \mathfrak{g} de dimensão finita n , então existe uma bijeção canônica entre estruturas de álgebra de Lie em \mathfrak{g} e estruturas Poisson lineares em \mathfrak{g}^* .*

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente, dada uma estrutura Poisson linear $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot, \cdot\})$, é possível fazer a identificação entre elementos de \mathfrak{g} e as funções lineares em \mathfrak{g}^* , $C_{lin}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, através do pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, em que

$$(20) \quad f_u(\xi) := \langle \xi, u \rangle, \quad \xi \in \mathfrak{g}^*, \quad u \in \mathfrak{g}.$$

Desta forma, dados $u, v \in \mathfrak{g}$, podemos tomar $f_u, f_v \in C_{lin}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e definir o colchete de Lie $[u, v]$ a partir da seguinte relação

$$(21) \quad \{f_u, f_v\} = f_{[u, v]}.$$

Agora, dada uma álgebra de Lie com colchete $[\cdot, \cdot]$, podemos fazer a identificação $(T_\xi \mathfrak{g}^*)^* = T_\xi^* \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ para cada $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Dados $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, podemos interpretar $d_\xi f : T_\xi \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ como elemento de \mathfrak{g} escrevendo

$$\langle \nu, d_\xi f \rangle = \left. \frac{d}{dt} f(\xi + t\nu) \right|_{t=0}, \quad \nu \in \mathfrak{g}^*,$$

e assim definir um colchete de Poisson linear em \mathfrak{g}^* por

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [d_\xi f, d_\xi g] \rangle \quad \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Para verificar a identidade de Jacobi em $\{\cdot, \cdot\}$, é suficiente checar em funções lineares, já que as diferenciais de funções lineares geram $T_\xi^* \mathfrak{g}^*$. Pela correspondência dada pelo pareamento em (20), então dadas $f, g \in C_{lin}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, teremos $f = f_u$ e $g = f_v$ para $u, v \in \mathfrak{g}$, e assim Jacobi em $\{\cdot, \cdot\}$ é herdada por $[\cdot, \cdot]$ via a relação (21).

Em termos de campos de bivetores, a estrutura Poisson em \mathfrak{g}^* é dada por

$$\pi_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2} \sum_{ijk} c_k^{ij} \mu_k \frac{\partial}{\partial \mu_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \mu_j}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n,$$

onde $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ é a base correspondente de \mathfrak{g}^* a base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathfrak{g} , e cada c_k^{ij} é definido por $[v_i, v_j] = \sum_k c_k^{ij} v_k$.

□

4. Splitting de Weinstein

Dada uma estrutura de Poisson (M, π) , na vizinhança de um dado ponto, tal estrutura pode ser descrita como o produto de uma estrutura Poisson não-degenerada e uma que se anula no ponto.

Este resultado é conhecido como o Teorema de decomposição de Weinstein, e nos permite construir uma folheação para a estrutura Poisson de tal forma que cada folha possui uma estrutura simplética induzida por π .

DEFINIÇÃO 7.4. *Dado um bivector $\pi \in \mathfrak{X}(M)$, a dimensão do mapa induzido*

$$(22) \quad \pi_x^\sharp : T_x^*M \rightarrow T_xM \quad x \in M,$$

*é chamado de **posto** de π em $x \in M$. O posto de um determinado bivector π em um ponto $x \in M$ será denotado por $\text{Rank}(\pi_x)$.*

OBSERVAÇÃO 7.1. *O posto de uma aplicação não precisa, necessariamente, coincidir em todo ponto $x \in M$. Além disso, dizemos que $\pi \in \mathfrak{X}(M)$ é não degenerado quando $\dim M = \text{Rank}(\pi_x)$ para todo $x \in M$.*

Do artigo seminal [30], extraímos uma generalização do Teorema de Darboux em Geometria Simplética:

TEOREMA 7.2 (Teorema da decomposição de Weinstein, [30]). *Seja (M, π) uma variedade Poisson, então para cada $x \in M$ existe uma vizinhança aberta $U_x \subset M$ de x e um difeomorfismo*

$$(23) \quad \varphi_x : S_x \times T_x \longrightarrow U_x$$

onde

$$S_x \times T_x \subset \pi^\sharp(T^*M) \times N_x^*M$$

*vizinhanças de 0×0 , onde N_x^*M é o fibrado conormal, de tal forma que*

$$\varphi_x : (S_x, \omega_x) \times (T_x, \pi_x) \longrightarrow (M, \pi)$$

é um difeomorfismo de Poisson, com $\varphi_x(0, 0) = x$, com $\omega_x \subset \Omega^2(S_x)$ é a estrutura simplética padrão e $\pi_x \subset \mathfrak{X}^2(M)$ é bivector Poisson tal que $\pi_x(x) = 0$.

Para demonstrarmos este importante teorema, precisaremos do fato de que se dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vetores comutam, ou seja,

$$[X, Y] = 0,$$

então $\phi_t^X = \phi_t^Y$, os fluxos de X e Y , respectivamente, com $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, juntamente com o lema a seguir, que vem diretamente do Teorema do Fluxo Tubular para $k = 1$.

LEMA 7.2. *Sejam X_1, \dots, X_k campos de vetores em uma vizinhança de $x \in M$ tais que*

$$[X_i, X_j] = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$$

Então existe uma carta local em torno de x (U, x_1, \dots, x_k) tal que

$$(24) \quad X_i|_U = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

DEMONSTRAÇÃO DA TEOREMA 7.2. A prova será feita por indução no posto de π_x . Se $\pi_x = 0$, não existe nada a fazer. Assuma que $\text{Rank}(\pi_x) > 0$ e que o resultado é válido para cada bivector Poisson com posto menor que $\text{Rank}(\pi_x)$. Pelo fato de $\pi_x \neq 0$, existe uma função p definida em uma vizinhança de x de modo que $p(x) = 0$ e $X_p|_x = \pi_x^\sharp(d_x p) \neq 0$. Pelo Lema 7.2, podemos encontrar uma carta coordenada $(U, x_1, x_1, \dots, x_m)$ em torno de x , para os quais

$$X_p|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Definamos $q := x_1$ e notemos que

$$X_p(p) = 0, \quad X_q(q) = 0, \quad X_p(q) = \{p, q\} = 1, \quad X_q(p) = \{q, p\} = -1,$$

implicam que X_p e X_q são linearmente independentes. Além disso, por π ser Poisson

$$[X_p, X_q] = X_{\{p, q\}} = X_1 = 0.$$

Utilizando novamente o Lema 7.2, podemos encontrar uma carta coordenada também denotada por (U, x_1, \dots, x_m) centrada em x tal que

$$(25) \quad X_q|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_p|_U = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

É possível tomar um aberto, também denotado por U , de tal forma que $(U, p, q, x_3, \dots, x_m)$ seja uma carta local centrada em x . Isto segue de

$$\begin{aligned} dq \wedge dp \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_m &= \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{\partial q}{\partial x_2} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \\ &= dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m, \end{aligned}$$

onde utilizamos, na última igualdade que

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = X_q(p) = -1, \quad \frac{\partial q}{\partial x_2} = X_p(q) = 1, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = X_p(p) = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial x_1} = X_q(q) = 0.$$

Pelas equações em (25), as nossas novas coordenadas satisfazem

$$\{p, q\} = 1, \quad \{p, x_i\} = 0, \quad \{q, x_i\} = 0,$$

para cada $i \in \{3, \dots, k\}$. Portanto, π é descrito como

$$\pi|_U = \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial q} + \sum_{3 \leq i, j \leq m} \omega^{ij}(p, q, x_3, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Consequentemente, nestas novas coordenadas, $X_p|_U = \frac{\partial}{\partial q}$ e $X_q|_U = -\frac{\partial}{\partial p}$. Por outro lado, a identidade de Jacobi nos garante que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q}(\omega^{ij}) &= X_p(\omega^{ij}) \\ &= \{p, \{x_i, x_j\}\} \\ &= \{\{p, x_i\}, x_j\} + \{x_i, \{p, x_j\}\}, \end{aligned}$$

e o mesmo para $\frac{\partial}{\partial p}(\omega^{ij})$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p}(\omega^{ij}) &= X_q(\omega^{ij}) \\ &= -\{q, \{x_i, x_j\}\} \\ &= -\{\{q, x_i\}, x_j\} - \{x_j, \{q, x_i\}\} = 0.\end{aligned}$$

Daí, novamente tomado U_x suficientemente pequeno, podemos supor ω^{ij} independentes de p e q , e assim a identidade de Jacobi para x_3, \dots, x_m mostra que

$$\omega_x = \sum_{3 \leq i, j \leq m} \omega^{ij}(x_3, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

é bivector Poisson em torno de 0. Ainda, vemos que

$$\text{Rank}(\omega_0) = \text{Rank}(\pi_x) - 2.$$

E assim, aplicando a hipótese de indução em ω_x temos o resultado desejado. \square

CAPÍTULO 8

O grupo Hamiltoniano

Neste capítulo, descrevemos uma estrutura natural de grupo no espaço de campos vetoriais não-autônomos e completos¹. O mapa de fluxo se torna um homomorfismo de grupos, e provê o contexto adequado para discutir o teorema clássico de Variação de Parâmetros, que descreve o gerador infinitesimal do fluxo de uma deformação de campos completos.

Essa discussão serve de base para descrever o grupo Hamiltoniano de uma variedade Poisson (M, π) , adaptando o caso apresentado em [13] ao contexto Poisson (como também é feito em [9]). Ele provê um contexto conveniente para a descrição global da estrutura Poisson, como uma folheação simplética (não necessariamente equidimensional).

Concluimos discutindo em detalhe a folheação simplética de estruturas Poisson lineares em espaços vetoriais.

1. Campos vetoriais completos

Seja M uma variedade diferenciável, e seja $\mathfrak{g} := \mathfrak{X}_{t,c}(M)$ o conjunto dos campos de vetores dependentes do tempo e completos em M . Se $v \in \mathfrak{g}$, denotamos por ϕ_t^v seu fluxo

$$\phi_t^v : M \times \{0\} \rightarrow M \times \{t\},$$

caracterizado por

$$\frac{d}{dt}\phi_t^v = v_t \circ \phi_t^v, \quad \phi_0 = \text{id}.$$

Se $v, w \in \mathfrak{g}$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t^v \phi_t^w(x) &= v_t \circ \phi_t^v \phi_t^w(x) + (\phi_t^v)_*(w_t \circ \phi_t^w(x)) \\ &= (v_t + (\phi_t^v)_*(w_t)) \circ \phi_t^v \phi_t^w(x) \end{aligned}$$

mostra que se definirmos

$$(v \star w)_t := v_t + (\phi_t^v)_*(w_t)$$

então nós teremos uma identidade

$$\phi_t^{v \star w} = \phi_t^v \circ \phi_t^w.$$

¹É possível dar a esse grupo uma estrutura “de Lie” modelado em espaços vetoriais topológicos convexos como em [25], mas isso foge ao escopo da dissertação, e não faremos uso de tal estrutura.

TEOREMA 8.1. *Com estas definições, $(\mathfrak{X}_{t,c}(M), \star)$ é um grupo, e*

$$\phi_t : (\mathfrak{X}_{t,c}(M), \star) \rightarrow (\text{Diff}(M), \circ)$$

é um homomorfismo de grupos.

DEMONSTRAÇÃO. O campo de vetores nulo (ou zero) 0 nos dá uma identidade:

$$0 \star v = v = v \star 0.$$

Além disso, a multiplicação é associativa:

$$\begin{aligned} v \star (w \star z) &= v + \phi_*^v(w \star z) \\ &= v + \phi_*^v(w + \phi_*^w(z)) \\ &= v + \phi_*^v(w) + \phi_*^v\phi_*^w(z) \\ &= (v \star w) + \phi_*^{v \star w}(z) \\ &= (v \star w) \star z \end{aligned}$$

□

2. Variação de parâmetros

Suponha que

$$\phi : I \times I \rightarrow \text{Diff}(M)$$

é tal que

$$\phi : I \times I \times M \rightarrow M$$

é suave, e

$$\phi_0^\epsilon = \text{id}_M.$$

defina campos de vetores $v, w \in \mathfrak{X}(M \times I \times I)$ ao colocar

$$(26) \quad \frac{d}{dt}\phi = v \circ \phi, \quad \frac{d}{d\epsilon}\phi = w \circ \phi.$$

LEMA 8.1. *Os campos de vetores acima satisfazem a equação*

$$\frac{d}{d\epsilon}v - \frac{d}{dt}w = [v, w].$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in C^\infty(M)$, por um lado teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{d}{d\epsilon}\phi^*(f) &= \frac{d}{dt}\phi^*(\mathcal{L}_w f) \\ &= \phi^*(\mathcal{L}_v \mathcal{L}_w f + \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}w} f) \end{aligned}$$

e pelo outro,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\frac{d}{dt}\phi^*(f) &= \frac{d}{d\epsilon}\phi^*(\mathcal{L}_v f) \\ &= \phi^*(\mathcal{L}_w \mathcal{L}_v f + \mathcal{L}_{\frac{d}{d\epsilon}v} f) \end{aligned}$$

para concluir que

$$\mathcal{L}_{\frac{d}{d\epsilon}v - \frac{d}{dt}w} f = [\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_w]f = \mathcal{L}_{[v,w]}f.$$

Já que isto é válido para cada f , segue que

$$\frac{d}{d\epsilon}v - \frac{d}{dt}w = [v, w].$$

□

TEOREMA 8.2 (Variação de parâmetros). *Se $\phi : I \times I \rightarrow \text{Diff}(M)$, então*

$$w_t^\epsilon = (\phi_t^\epsilon)_* \int_0^t (\phi_s^\epsilon)^* \frac{d}{d\epsilon} v_s^\epsilon ds$$

DEMONSTRAÇÃO. Essa demonstração decorre do Lema 8.1, já que para os campos de vetores definidos em (26), teremos

$$\frac{d}{d\epsilon}v = \frac{d}{dt}w + [v, w].$$

Desta forma, aplicando $(\phi_t^\epsilon)^*$ em ambos os lados, nós temos

$$(\phi_t^\epsilon)^* \frac{d}{d\epsilon}v = (\phi_t^\epsilon)^* \left(\frac{d}{dt}w + [v, w] \right) = \frac{d}{dt}(\phi_t^\epsilon)^*(w).$$

Portanto

$$(\phi_t^\epsilon)^*(w_t^\epsilon) - (\phi_0^\epsilon)^*(w_0^\epsilon) = \int_0^t (\phi_s^\epsilon)^* \frac{d}{d\epsilon} v_s^\epsilon ds$$

Pelo fato de $\phi_0 = \text{id}_M$, temos que $w_0 = 0$, e então

$$w_t^\epsilon = (\phi_t^\epsilon)_* \int_0^t (\phi_s^\epsilon)^* \frac{d}{d\epsilon} v_s^\epsilon ds = \int_0^t (\phi_{t,s}^\epsilon)^* \frac{d}{d\epsilon} v_s^\epsilon ds.$$

□

COROLÁRIO 8.1. *Uma família de caminhos*

$$\epsilon \mapsto (t \mapsto \phi_t^\epsilon(x))$$

é uma homotopia de caminhos com pontos finais fixados se, e somente se

$$\int_0^1 (\phi_t^\epsilon)^* \frac{d}{d\epsilon} v_t^\epsilon dt = 0, \quad \forall t.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo fato de $(\phi_1^\epsilon)_*$ aplicado a tal família dar origem a um campo de vetores w , a qual o seu fluxo $\phi_1^\epsilon(\phi_0^\epsilon)^{-1}(x)$. □

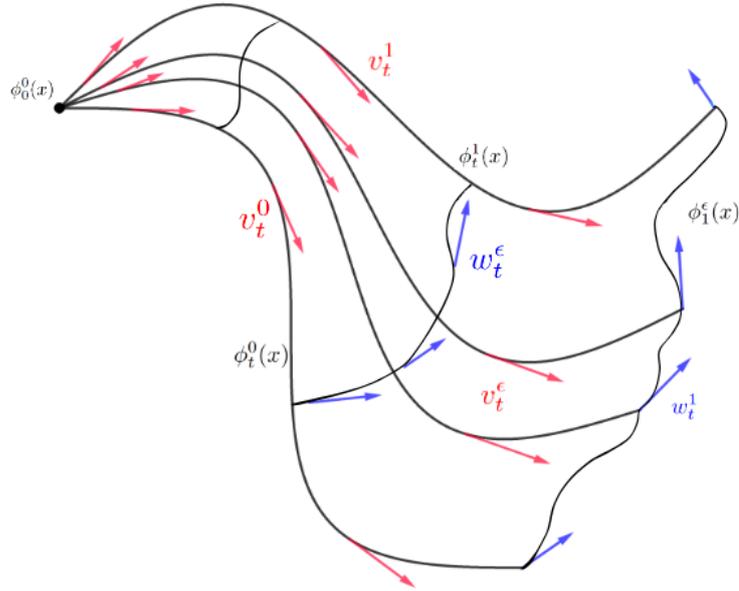


FIGURA 1. A fórmula de variação de parâmetros permite distinguir se uma determinada homotopia $\phi_t^\epsilon(x)$ tem pontos finais fixados.

3. O grupo Hamiltoniano

Seja (M, π) uma variedade Poisson. Dizemos que uma determinada função $f \in F(M) := C^\infty(M \times I)$ é **completa** se o seu campo Hamiltoniano $H_f \in \mathfrak{X}(M \times I)$ é completo. Usaremos a seguinte abreviação por simplicidade

$$\phi^{H_f} := \phi^f.$$

Denotaremos por $\text{Ham}(M, \pi) \subset C^\infty(M \times I)$ o conjunto das funções completas.

OBSERVAÇÃO 8.1. Frequentemente denotaremos por φ^f ou φ_f^H o fluxo gerado pelo campo Hamiltoniano, a escolha é feita para salientar que estamos tomando o fluxo deste campo de vetores específico.

TEOREMA 8.3. Existe um mapa bem definido

$$\star : \text{Ham}(M, \pi) \times \text{Ham}(M, \pi) \rightarrow \text{Ham}(M, \pi), \quad (f \star g)_t := f_t + (\phi_t^f)_* g_t$$

que transforma $\text{Ham}(M, \pi)$ em um grupo, que será chamado de **grupo Hamiltoniano**. Além disso, o mapa fluxo é um grupo homomorfismo do grupo Hamiltoniano até o grupo de difeomorfismos de M :

$$\phi : (\text{Ham}(M, \pi), \star) \longrightarrow (\text{Diff}(M), \circ), \quad \phi_t^{f \star g} = \phi_t^f \circ \phi_t^g.$$

DEMONSTRAÇÃO. Claramente 0 age como a identidade e

$$f^{-1} = -(\varphi^f)^* f$$

é a inversa de f :

$$\begin{aligned} f \star f^{-1} &= f + \varphi_*^f(f^{-1}) \\ &= f - \varphi_*^f((\varphi^f)^*(f)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que implica que

$$\varphi^{f^{-1}} = (\varphi^f)^{-1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} f^{-1} \star f &= f^{-1} + \varphi_*^{f^{-1}}(f) \\ &= f^{-1} + (\varphi^f)^*(f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, pelo fato de ϕ se fatorar através de

$$H : \text{Ham}(M, \pi) \longrightarrow \mathfrak{X}_{c,t}(M \times I)$$

e pelo fato de

$$H_{f \star g} = H_f + (\phi_t^f)_* H_g = H_f \star H_g,$$

podemos deduzir que

$$(27) \quad \varphi^{f \star g} = \varphi^f \circ \varphi^g.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f \star (g \star h) &= f + \varphi^f(g \star h) \\ &= f + \varphi^f(g) + \varphi^f \varphi^g(h) \\ &= f \star g + \varphi^{f \star g}(h) \\ &= (f \star g) \star h \end{aligned}$$

o que mostra que \star é associativo

□

4. Folheações simpléticas

O grupo Hamiltoniano $\text{Ham}(M, \pi)$ age sobre uma variedade Poisson (M, π) via

$$(28) \quad f \cdot x := \phi_1^f(x), \quad (f, x) \in \text{Ham}(M, \pi) \times M.$$

As órbitas

$$\mathcal{O}_x := \text{Ham}(M, \pi) \cdot x$$

particionam M .

TEOREMA 8.4. *As órbitas \mathcal{O}_x do grupo Hamiltoniano de (M, π) são inicialmente imersas em M e são as subvariedades integrais maximais da distribuição*

$$\mathcal{D} = \pi^\sharp(T^*M) \subset TM.$$

Além disso, cada folha vem munida de uma forma simplética $\omega_{\mathcal{O}_x} \in \Omega^2(\mathcal{O}_x)$, unicamente determinada pela condição

$$\omega_{\mathcal{O}_x, x}(H_f, H_g) := \{g, f\}(x),$$

e é invariante pela ação de $\text{Ham}(M, \pi)$.

Lembremos que uma imersão $i : S \rightarrow M$ é **inicial** se, para cada mapa suave $\phi : N \rightarrow M$ para o qual $\phi(N) \subset i(S)$, existe um levantamento suave $\tilde{\phi} : N \rightarrow S$:

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \tilde{\phi} \swarrow & \downarrow \phi \\ S & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

Uma imersão inicial é necessariamente injetora, e portanto o levantamento é único caso ele exista.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 8.4. *Passo 1. Splitting de Weinstein.* Para cada $y \in \mathcal{O}_x$, fixe um splitting de Weinstein

$$(29) \quad \varphi_y : (S_y, \omega_y) \times (T_y, \nu_y) \xrightarrow{\simeq} (U_y, \pi)$$

ao redor de y . Observe que

$$\varphi_y(S_y \times 0) \subset \mathcal{O}_y,$$

e portanto

$$\mathcal{O}_x = \bigcup_{y \in \mathcal{O}_x} \varphi_y(S_y \times 0).$$

Note também que cada

$$(30) \quad \varphi_y(\cdot, 0) : S_y \rightarrow U_y$$

é uma imersão inicial: pois se $\psi : N \rightarrow U_y$ é suave e $\psi(N) \subset \varphi_y(S_y \times 0)$, então

$$\tilde{\psi} : N \rightarrow S_y, \quad \tilde{\psi} := \text{pr}_1 \circ \varphi_y^{-1} \circ \psi$$

é um levantamento suave de ψ .

Passo 2. Estrutura diferencial de \mathcal{O}_x . Desta forma, temos uma estrutura diferencial em \mathcal{O}_x com cartas locais definidas por (30), e mapas de transição os difeomorfismos

$$\varphi_{y',y} : W_{y,y'} := \varphi_y^{-1}(\varphi_y S_y) \xrightarrow{\simeq} \varphi_{y'}^{-1}(\varphi_{y'} S_{y'}) =: W_{y',y}$$

unicamente definido por fazer

$$\begin{array}{ccc} & W_{y,y'} & \\ \varphi_{y,y'} \swarrow & \downarrow \varphi_y & \\ W_{y',y} & \xrightarrow{\varphi_{y'}} & M \end{array}$$

comutar (como nos garante a inicialidade das imersões envolvidas).

Passo 3. $\mathcal{O}_x \rightarrow M$ é imersão inicial. Observe que as imersões iniciais $\varphi_y(\cdot, 0)$ colam a um mapa diferenciável

$$i : \mathcal{O}_x \rightarrow M,$$

onde identificamos a órbita como o quociente de $\coprod_{y \in \mathcal{O}_x} S_y$ segundo a relação de equivalência

$$(y' \in S_y) \sim (z' \in S_z) \iff \varphi_y(y') = \varphi_z(z'),$$

e i é dado por

$$i[y] := \varphi_y(y).$$

Note que i é automaticamente uma imersão (já que o são seus modelos locais), e injetora (por construção). Que i é inicial pode ser visto do seguinte argumento: se $\psi : N \rightarrow M$ é um mapa suave, com $\psi(N) \subset i(\mathcal{O}_x)$, então para cada $y \in \mathcal{O}_x$ há mapa suave

$$\begin{array}{ccc} & V_y & \\ \tilde{\psi}_y \swarrow & \downarrow \psi & \\ S_y & \xrightarrow{\varphi_y} & U_y \end{array}$$

onde $V_y := \psi^{-1}(U_y)$, e como essa é uma cobertura aberta de N e

$$\tilde{\psi}_{y'} = \varphi_{y,y'} \circ \tilde{\psi}_y \quad y' \in V_y, y \in N,$$

temos único mapa suave induzido

$$\tilde{\psi} : N \rightarrow \mathcal{O}_x, \quad i \circ \tilde{\psi} = \psi.$$

Passo 4. *Subvariedades integrais maximais.* Recorde que, dada distribuição $\mathcal{D} \subset TM$, uma subvariedade (imersa) $S \subset M$ é dita **integral maximal** se

$$T_x S = \mathcal{D}_x, \quad x \in S.$$

Como é imediato do splitting de Weinstein que

$$T_x \mathcal{O}_x = \pi^\sharp(T_x^* M),$$

segue que cada órbita \mathcal{O}_x é subvariedade integral maximal da imagem de $\pi^\sharp : T^* M \rightarrow TM$.

Passo 5. *Formas simpléticas.* A 2-forma

$$\omega_{\mathcal{O}_x}(H_f, H_g) := \pi(dg \wedge df).$$

está bem-definida já que $N_x^* \mathcal{O}_x = \ker \pi_x^\sharp$. Ela é claramente não-degenerada, e é fechada porque

$$\begin{aligned} (d\omega_{\mathcal{O}_x})(H_f, H_g, H_h) &= \oint (\mathcal{L}_{H_f} \omega_{\mathcal{O}_x}(H_g, H_h) - \omega_{\mathcal{O}_x}([H_f, H_g], H_h)) \\ &= \oint (\mathcal{L}_{H_f} \{h, g\} - \{h, \{f, g\}\}) \\ &= \oint (\{f, \{h, g\}\} - \{h, \{f, g\}\}) \\ &= \oint \{\{f, h\}, g\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pela identidade de Jacobi. Por fim, como de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H_f} \omega_{\mathcal{O}_x}(H_g, H_h) &= \{f, \{h, g\}\} \\ &= \{\{f, h\}, g\} + \{h, \{f, g\}\} \\ &= \omega_{\mathcal{O}_x}(H_g, [H_f, H_h]) + \omega_{\mathcal{O}_x}([H_f, H_g], H_h) \end{aligned}$$

deduzimos que

$$\mathcal{L}_{H_f} \omega_{\mathcal{O}_x} = 0$$

e as órbitas são conexas, segue que

$$(\varphi^f)^* \omega_{\mathcal{O}_x} = \omega_{\mathcal{O}_x}, \quad (f, x) \in \text{Ham}(M, \pi) \times M.$$

Isso conclui a demonstração. \square

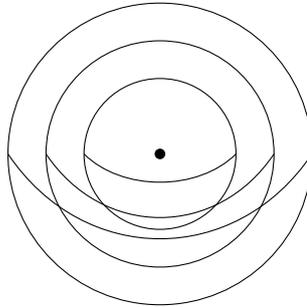
EXEMPLO 8.1. A álgebra de Lie Ortogonal Especial de dimensão 3 definida por

$$(31) \quad \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\},$$

é um subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, o espaço das matrizes 3×3 , com a sua estrutura de álgebra de Lie advinda do comutador. Tomando $\pi_{\mathfrak{g}}$, a estrutura Poisson definida em 7.2 para o dual de (31), então

$$\pi_{\mathfrak{g}} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2},$$

cuja folheação simplética para tal variedade Poisson é definida por esferas concêntricas:



5. A folheação simplética linear

Dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} com G grupo de Lie tal que $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, então a operação $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \text{GL}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ define uma ação $G \curvearrowright \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \text{Ad}_g, \end{aligned}$$

que é denominada a **ação adjunta**. De maneira análoga, podemos definir a **ação coadjunta** Ad^* através de

$$\begin{aligned} \text{Ad}^* : G &\rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{g}^*) \\ g &\mapsto \xi(\text{Ad}_{g^{-1}}v), \end{aligned}$$

onde $\xi \in \mathfrak{g}^*$ e $v \in \mathfrak{g}$. Dado $\xi \in \mathfrak{g}^*$, tomando a sua órbita pela ação coadjunta

$$\mathcal{O}_\xi = \{\xi(\text{Ad}_{g^{-1}}v) \mid g \in G \text{ e } v \in \mathfrak{g}\},$$

esta será uma subvariedade imersa em \mathfrak{g}^* . Além disso pelo fato de

$$(\text{Ad})_* = \text{ad},$$

e pela identificação canônica $T_\xi \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$ (por \mathfrak{g}^* ser espaço vetorial) é possível deduzir que

$$T_\xi \mathcal{O}_\xi = \{\text{ad}(v)^* \xi \mid v \in \mathfrak{g}\}.$$

onde

$$\text{ad}(v)^* \xi := \xi[v, \cdot] \in \mathfrak{g}^* \qquad v \in \mathfrak{g}, \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Agora, através da próxima proposição, iremos relacionar as folhas simpléticas com a órbita da ação coadjunta.

PROPOSIÇÃO 8.1. *As folhas simpléticas da variedade Poisson $(\mathfrak{g}^*, \pi_{\mathfrak{g}})$, onde \mathfrak{g} é álgebra de Lie de dimensão finita e $\pi_{\mathfrak{g}}$ é estrutura Poisson linear definida em (7.2), coincide com a órbita da ação coadjunta.*

DEMONSTRAÇÃO. Fazendo a identificação dos elementos $u, v \in \mathfrak{g}$ com elementos de $C_{lin}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ através de $f_u = \langle \cdot, u \rangle$ e $f_v = \langle \cdot, v \rangle$, então para cada $\xi \in \mathfrak{g}^*$, então

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{g}}(f_v, f_u)\xi &= \langle \xi, [v, u] \rangle \\ &= \xi([v, u]) = \text{ad}(v)^*(\xi)u, \end{aligned}$$

ou seja,

$$X_{f_v} = \text{ad}(v)^* \qquad \forall v \in \mathfrak{g}.$$

Isso implica que o espaço tangente das folhas simpléticas é o mesmo das órbitas da ação coadjunta. Segue que as órbitas da ação coadjunta são subespaços fechados e abertos das folhas simpléticas que são conexas por definição, ou seja, estas devem coincidir. \square

Parte 3

Os teoremas de Lie

CAPÍTULO 9

Os espaços de caminhos

1. Grupos de Banach-Lie

Até este momento demos ênfase a grupos de Lie com dimensão *finita*. Porém há muitos grupos que ocorrem naturalmente, cuja dimensão é infinita.

Mais ao ponto, para a demonstração dos Teoremas de Lie que damos nesta dissertação, é imprescindível recorrer a grupos de dimensão *infinita*.

Mais especificamente, vamos fazer uso de **variedades Banach**, como descritas em [15, Chapter II]): espaços topológicos Hausdorff M , localmente modelados em abertos de um (fixo) espaço vetorial Banach.

Dentre espaços vetoriais topológicos, espaços Banach são particularmente convenientes: por exemplo, neles segue valendo o Teorema da Função Implícita [17, Theorem 11.1], e a teoria de EDOs em variedades Banach é bastante análoga àquela em dimensão finita. Por exemplo: Soluções de uma EDO $\dot{c} = F(t, c)$ em que F é contínua, limitada e localmente uniformemente Lipschitz na segunda variável existem, e são unicamente determinadas por sua condição inicial. [17, Chapter 6].

DEFINIÇÃO 9.1. *Um grupo de **Banach-Lie** é uma variedade G modelada segundo um espaço vetorial modelo Banach (como em 5.1, munida de uma estrutura de grupo em que os mapas estruturais são todos suaves [11, Section I].*

Evidentemente, um grupo de Lie de dimensão finita é um também grupo de Banach-Lie. Um exemplo mais interessante:

EXEMPLO 9.1. *Para uma variedade diferenciável compacta M e grupo de Lie G , o espaço $C^k(M, G)$ de funções $f : M \rightarrow G$, com o produto pontual, tem estrutura de grupo de Banach-Lie [26].*

Assim como no caso de dimensão finita, dado um grupo de Banach-Lie G , temos uma identificação entre $\mathfrak{g} := T_1G$ e campos invariantes à esquerda em G , e isso induz uma estrutura de álgebra Lie

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

que induz uma aplicação contínua

$$(32) \quad \text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{lin}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

Abstratamente, uma **álgebra de Banach-Lie** é uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , munida de uma estrutura Banach, para a qual (32) é contínua.

Em consequência da teoria bem-comportadas para EDOs, grupos de Banach-Lie tem uma exponencial

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

bem-definida, que é um difeomorfismo de uma vizinhança da origem em \mathfrak{g} em uma vizinhança da identidade em G .

Um subgrupo H de um grupo de Banach-Lie G é um **subgrupo de Lie** se ele mesmo é um grupo de Banach-Lie, a inclusão $i : H \rightarrow G$ é um mergulho [11, Definition I.4]. Um **homomorfismo** entre grupos de Banach-Lie $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ é um homomorfismo de grupos que é contínuo (o que implica que é também suave; veja [11, Section I]).

Há muitas semelhanças entre a teoria de Lie para grupos de Lie e para grupos de Banach-Lie; por exemplo, o Teorema 5.1 segue válido no contexto de grupos de Banach-Lie. Extraímos também de [11] para referência futura:

LEMA 9.1. *Se $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ é um homomorfismo de grupos de Banach-Lie, e $H_2 \subset G_2$ é um subgrupo de Lie, então $H_1 := \Phi^{-1}(H_2)$ é um subgrupo de Lie de G_1 .*

TEOREMA 9.1. *Se H é um subgrupo de Lie normal e fechado de um grupo de Banach-Lie G , então:*

- a) G/H tem estrutura de grupo de Banach-Lie;
- b) $G \rightarrow G/H$ é um homomorfismo de grupos de Banach-Lie que é um fibrado H -principal;
- c) A álgebra de Lie de G/H é o quociente $\text{Lie}(G)/\text{Lie}(H)$.

É preciso ressaltar, porém, duas diferenças essenciais entre o caso de dimensão finita e o de dimensão infinita:

TEOREMA 9.2 (Teorema do subgrupo fechado). [16, Theorem 20.10] *Um subgrupo fechado H de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie.*

Portanto o quociente de um grupo de Lie G por um subgrupo normal e fechado $N \subset G$ sempre tem a estrutura de grupo de Lie. Porém isso deixa de ser verdade no contexto de grupos de Banach-Lie: é perfeitamente possível que o quociente de um grupo de Banach-Lie por um subgrupo normal e fechado não admita estrutura de grupo de Banach-Lie.

Um outro exemplo de diferença entre os casos de dimensão finita e infinita é consequência desta descoberta de Bott [1]:

TEOREMA 9.3. *Para todo grupo de Lie G , temos que $\pi_2(G, 1) = 0$.*

O resultado só é válido em dimensão finita. Porém, em certo sentido, o ingrediente essencial é apenas a condição de dimensão finita: um resultado de Browder diz que podemos inclusive relaxar a multiplicação a ser definida apenas a menos de homotopia, e ainda assim o resultado segue válido: todo H -espaço de dimensão finita tem segundo grupo de homotopia trivial [4].

Para efeito da discussão neste capítulo, é adequado o contexto de álgebras de Banach-Lie \mathfrak{g} e grupos de Banach-Lie G . Porém o leitor pode, e deve, numa primeira leitura deste capítulo, considerar o caso em que \mathfrak{g} e G têm dimensão finita.

2. O espaço de caminhos $P(\mathfrak{g})$ como variedade Banach

Dado um grupo de Banach-Lie G , denotaremos por

$$P(G) := C^1(I, G), \quad P(\mathfrak{g}) := C^0(I, \mathfrak{g}),$$

o conjunto das curvas continuamente diferenciáveis em G , e o conjunto das curvas contínuas em sua álgebra de Lie $\mathfrak{g} := T_1G$, respectivamente. Por $\mathfrak{X}_{t,c}(G)^R$ denotaremos o conjunto de todos os campos vetoriais em $G \times I$ que são invariantes à direita em $G \times I$, contínuos em $t \in I$, suaves em $g \in G$, e são tangentes às fibras de $G \times I \rightarrow I$.

LEMA 9.2. *Para um grupo de Banach-Lie G , os mapas*

$$\begin{array}{ccccc} & & P(1, G) & & \\ & D \swarrow & \uparrow \Phi & \searrow D & \\ P(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\rho} & \mathfrak{X}_{t,c}(G)^R & \xrightarrow{E} & P(\mathfrak{g}) \end{array}$$

onde

$$\begin{aligned} D(c) &= R_c^*(\dot{c}), & \rho(v) &:= v^R, \\ E(V) &:= V_1, & \Phi(V) &= \phi^V(1), \end{aligned}$$

são todos bijeções, com E a inversa de ρ e D a inversa de $\phi\rho$.

O mapa

$$D : P(1, G) \rightarrow P(\mathfrak{g}), \quad D(c) := R_{c(t)}^*(\dot{c}(t)),$$

é chamada de **derivada logarítmica à direita**, e chamaremos o mapa

$$\Phi : \mathfrak{X}_{t,c}(G)^R \rightarrow P(1, G), \quad \Phi(V)_t := \phi_t^V : G \xrightarrow{\simeq} G$$

como o **mapa fluxo** de G .

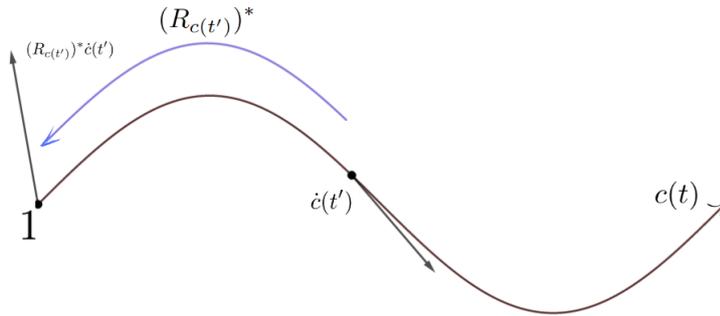


FIGURA 1. O mapa D transporta a curva $c(t) \in P(1, G)$ para $P(\mathfrak{g})$ tempo a tempo de forma contínua.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 9.2. Que ρ e E são inversas entre os mapas contínuos $V : I \rightarrow \mathfrak{X}(G)^R$ e $v = E(V) \in P(\mathfrak{g})$ é claro pela invariância à direita.

Considere para $v \in P(\mathfrak{g})$ o campo de vetores invariantes pela direita $\rho(v) = v^R$, e seja

$$g : I \rightarrow G, \quad g = \Phi(v^R) = \phi^{v^R}(1).$$

Então $g \in P(1, G)$ e

$$\frac{d}{dt}g = v_g^R = R_g v$$

e portanto

$$Dg = R_g^* \frac{d}{dt}g = R_g^* v.$$

Ou seja, $D\Phi\rho$ é a identidade. Por outro lado, se $g \in P(1, G)$ e

$$v := Dg = R_g^* \frac{d}{dt}g,$$

então

$$v_g^R = R_{g*}(v) = \frac{d}{dt}g,$$

o que significa

$$\frac{d}{dt}g = v_g^R,$$

e assim

$$g = \Phi(v^R).$$

Portanto $\Phi\rho$ é a identidade. □

Considere em \mathfrak{g} a norma $\|\cdot\|$, e defina em $P(\mathfrak{g}) := C^0(I, \mathfrak{g})$

$$\|v\|_{P(\mathfrak{g})} := \sup_{t \in I} \|v_t\|.$$

Então $(P(\mathfrak{g}), \|\cdot\|_{P(\mathfrak{g})})$ é um espaço de Banach, e vamos nos referir à topologia subjacente como a **topologia** C^0 . Analogamente, munimos $P(1, G)$ da **topologia** C^1 , a menor topologia em que

$$(33) \quad C^1(I, G) \rightarrow C^0(I, G) \times C^0(I, TG), \quad c \mapsto (c, \dot{c})$$

é contínua.

LEMA 9.3. *A derivada logarítmica define um homeomorfismo*

$$D : P(1, G) \rightarrow P(\mathfrak{g}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Como

$$G \rightarrow C^0(\mathfrak{g}, TG), \quad g \mapsto (R_g)_*|_{\mathfrak{g}}$$

é contínua, temos de (33) que $D(c) := R_c^*(\dot{c})$ é contínua. Por outro lado, o mapa que a um campo vetorial devolve seu fluxo é contínuo na topologia C^0 (veja [15] ou [17, Chapter 6]), e a equação

$$\dot{c}(t) = v_t^R(c(t))$$

implica que $v \mapsto \dot{c}$ é contínuo na topologia C^0 . Portanto segue outra vez de (33) que D^{-1} é contínua. \square

3. Os espaços de caminhos como grupos

Nesta seção, descrevemos intrinsecamente a estrutura de grupo que o espaço de caminhos $P(\mathfrak{g})$ herda tanto do produto pontual de caminhos em G quanto do produto hamiltoniano de campos vetoriais.

TEOREMA 9.4. *Os mapas*

$$\Phi : \mathfrak{X}_{t,c}(G)^R \longrightarrow P(1, G), \quad \rho D : P(1, G) \longrightarrow \mathfrak{X}_{t,c}(G)^R$$

são isomorfismos de grupos, quando $P(1, G)$ possui a multiplicação pontual, e $\mathfrak{X}_{t,c}(G)^R$ o produto Hamiltoniano. Portanto $P(\mathfrak{g})$ herda uma estrutura de grupos, onde o produto é dado através de

$$(v \otimes w)_t = v + A(v)w,$$

onde

$$A : P(\mathfrak{g}) \rightarrow P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g}))$$

é um homomorfismo de grupos, onde $A(v) : I \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ é a única solução de

$$(34) \quad \frac{d}{dt} A(v)_t = \text{ad}(v) \circ A(v)_t, \quad A(v)_0 = \text{id}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Observe que, para $v \in P(\mathfrak{g})$, nós temos que $v^R \star w^R$ é novamente invariante pela direita, pela fórmula que define \star , e pelo fato de que o fluxo de v^R ser equivariante. Para explicitamente determinar $v^R \star w^R$, observemos que, já que

$$\phi^{v^R \star w^R}(g) = \phi^{v^R \star w^R}(1)g,$$

é suficiente determinar o caminho

$$\phi^{v^R \star w^R}(1) \in P(1, G).$$

Agora, como tomar fluxo é um homomorfismo para \star , e como os fluxos de campos invariantes são equivariantes, temos que

$$\gamma := \phi^{v^R \star w^R}(1) = \phi^{v^R}(\phi^{w^R}(1)) = \phi^{v^R}(1)\phi^{w^R}(1).$$

Diferenciando,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma &= R_{\gamma^*} \left(D\phi^{v^R}(1) + \text{Ad}_{\phi^{v^R}(1)} D\phi^{w^R}(1) \right) \\ &= R_{\gamma^*} \left(v + \text{Ad}_{\phi^{v^R}(1)} w \right) \end{aligned}$$

mostra que a derivada logarítmica de γ é

$$D\gamma = v + A(v)w,$$

onde

$$A(v) := \text{Ad}_{\phi^{v^R}(1)} \in P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g})).$$

Como D e ΦR são mutuamente inversos, temos que

$$(35) \quad (v \otimes v)^R = v^R \star w^R,$$

onde \otimes denota

$$\otimes : P(\mathfrak{g}) \times P(\mathfrak{g}) \rightarrow P(\mathfrak{g}), \quad v \otimes w := v + A(v)w.$$

Por outro lado, como

$$\frac{d}{dt}A(v) = \text{ad}(v) \circ A(v), \quad A(v)_0 = \text{id},$$

podemos caracterizar $A(v) \in P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g}))$ como a única solução da equação diferencial ordinária acima.

Dados $v, w \in P(\mathfrak{g})$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A(v) \circ A(w)) &= A(v) \circ \text{ad}(w) \circ A(w) + \text{ad}(v) \circ A(v) \circ A(w) \\ &= \text{ad}(v) \circ A(v) \circ A(w) + \text{ad}(A(v)w) \circ A(v) \circ A(w) \\ &= \text{ad}(v \otimes w) \circ A(v) \circ A(w) \end{aligned}$$

e assim, concluímos que

$$(36) \quad A(v \otimes w) = A(v) \circ A(w),$$

onde usamos o fato de

$$A(v) \circ \text{ad}(w) = \text{ad}(A(v)w) \circ A(v),$$

e que $A(v) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$. Assim, podemos concluir que $P(\mathfrak{g})$ é grupo sob o produto \otimes . O elemento neutro será o caminho nulo:

$$0 \otimes v = 0 + A(0)v = v = v + A(v)0 = v \otimes 0.$$

Além disso, a associatividade vale, pois dados $v, w, z \in P(\mathfrak{g})$, teremos

$$\begin{aligned} (v \otimes w) \otimes z &= (v \otimes w) + A(v \otimes w)z \\ &= v + A(v)w + A(v) \circ A(w)z \\ &= v + A(v)(w \otimes z) \\ &= v \otimes (w \otimes z). \end{aligned}$$

Por fim, a inversão é definida por

$$v^{-1} := -A(v)^{-1}v,$$

já que

$$v \otimes v^{-1} := v + A(v)v^{-1} = v - A(v)A(v)^{-1}v = v - v = 0.$$

Portanto, a expressão (36) nos diz que

$$A : (P(\mathfrak{g}), \otimes) \longrightarrow (P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g})), \circ)$$

é um homomorfismo de grupos. □

COROLÁRIO 9.1. *O mapa $A(v)$ pode ser simultaneamente descrito como*

$$A(v) = \text{Ad}_{\phi^{v^R}(1)} = R_{\phi^{v^R}(1)}^* \circ \phi_*^{v^R}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Na demonstração do Teorema 9.4, vimos que $A(v)$, a única solução da EDO

$$\frac{d}{dt}A(v) = \text{ad}(v) \circ A(v), \quad A(v)_0 = \text{id},$$

pode ser descrita em termos da trajetória $\phi^{v^R}(1)$ do campo invariante à direita que corresponde a v , como $A(v) = \text{Ad}_{\phi^{v^R}(1)}$. Por outro lado, como $(v \otimes w)^R = v^R \star w^R$, temos que

$$\begin{aligned} v \otimes w &= (v^R \star w^R)_1 \\ &= (v^R + \phi_*^{v^R}(w^R))_1 \\ &= v + \phi_*^{v^R}(w_{(\phi^{v^R})^{-1}(1)}^R) \\ &= v + \phi_*^{v^R}(R_{(\phi^{v^R})^{-1}(1)*} w) \\ &= v + (R_{\phi^{v^R}(1)})^* \phi_*^{v^R}(w) \end{aligned}$$

Portanto

$$A(v) = R_{\phi^{v^R}(1)}^* \phi_*^{v^R}$$

□

4. Os espaços de caminhos como grupos de Banach-Lie

Definimos em $P(1, G)$ e $\mathfrak{X}_{t,c}(G)^R$ uma estrutura de variedades Banach para os quais

$$\mathfrak{X}_{t,c}(G)^R \xrightarrow{\Phi} P(1, G) \xrightarrow{D} P(\mathfrak{g})$$

são difeomorfismos. Segue então, pela Proposição 9.1 que estes mapas são, além disso, homomorfismos de grupos.

PROPOSIÇÃO 9.1. *$P(\mathfrak{g})$, $P(1, G)$ e $\mathfrak{X}_{t,c}(G)^R$ são todos grupos de Banach-Lie, e os mapas Φ e D acima são isomorfismos de grupos de Banach-Lie.*

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente argumentar que $P(\mathfrak{g})$ é um grupo de Banach, e para tal, mostrar que \otimes é suave. Agora, pelo fato de

$$(v \otimes w)_t = v + A(v)w$$

e pelo fato da soma ser suave, devemos mostrar que $(v, w) \mapsto A(v)w$ é suave. Além disso, pelo fato no mapa evaluation

$$P(1, \text{GL}(\mathfrak{g})) \times P(\mathfrak{g}) \longrightarrow P(\mathfrak{g}), \quad (B, w) \mapsto Bw$$

ser suave, é suficiente argumentar que

$$A : P(\mathfrak{g}) \longrightarrow P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g})) \subset P(1, \text{GL}(\mathfrak{g})) \subset C^1(I, \text{end}(\mathfrak{g}))$$

é suave. Mas pelas definições impostas, a estrutura de variedade Banach de $P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g}))$ é tal que

$$D : P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g})) \longrightarrow P(\text{der}(\mathfrak{g}))$$

é um difeomorfismo. Agora, calculando

$$(37) \quad DA : P(\mathfrak{g}) \longrightarrow P(\text{der}(\mathfrak{g})), \quad DA(v) = \text{ad}(v)$$

concluimos que A é suave. Consequentemente \otimes é suave, e consequentemente o produto Hamiltoniano em campos de vetores dependentes do tempo e invariantes pela direita e o produto pontual de caminhos em G também o são. \square

5. A álgebra de Lie do espaço de caminhos

LEMA 9.4. *A diferencial de A é dada por:*

$$(38) \quad A_* : P(\mathfrak{g}) \longrightarrow P(\text{der}(\mathfrak{g})), \quad A_*(v) = \text{ad}(I(v)),$$

onde

$$I(v) := \int_0^t v_s ds.$$

Em particular, A_* se fatora através da inclusão

$$P(\text{ad}(\mathfrak{g})) \longrightarrow P(\text{der}(\mathfrak{g}))$$

DEMONSTRAÇÃO. Dado um $v \in P(\mathfrak{g})$, o caminho $A(\epsilon v)$ é determinado por

$$\frac{d}{dt} A(\epsilon v) = A(\epsilon v) \circ \text{ad}(\epsilon v) = \epsilon A(\epsilon v) \circ \text{ad}(v), \quad A(v)_0 = \text{id}.$$

Diferenciando em relação a ϵ , chegamos que

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{d\epsilon} A(\epsilon v) = \frac{d}{d\epsilon} \frac{d}{dt} A(\epsilon v) = A(\epsilon v) \circ \text{ad}(v) + \epsilon \frac{d}{d\epsilon} A(\epsilon v) \circ \text{ad}(v).$$

em $\epsilon = 0$, teremos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\epsilon} A(\epsilon v) \Big|_{\epsilon=0} \right) = \text{ad}(v).$$

Desta forma

$$\frac{d}{dt} A_*(v) = \text{ad}(v),$$

e através do Teorema Fundamental do Cálculo, nos garante que

$$A_*(v) = A_*(v)_0 + \int_0^t \text{ad}(v).$$

Mas pelo fato de $A(v)_0 = \text{id}$ para todo v , vemos que

$$A_*(v)_0 = \frac{d}{d\epsilon} \text{Ad}(\phi_0^{\epsilon v R}(1)) \Big|_{\epsilon=0} = 0,$$

e portanto

$$A_*(v) = \int_0^t \text{ad}(v) = \text{ad} \left(\int_0^t v_s ds \right) = \text{ad}(I(v)).$$

\square

PROPOSIÇÃO 9.2. $\text{Lie}(P(\mathfrak{g})) = (P(\mathfrak{g}), [\cdot, \cdot]_{P(\mathfrak{g})})$, onde

$$[\cdot, \cdot]_{P(\mathfrak{g})} : P(\mathfrak{g}) \times P(\mathfrak{g}) \longrightarrow P(\mathfrak{g}), \quad [v, w]_{P(\mathfrak{g})} := \frac{d}{dt}[I(v), I(w)]_{\mathfrak{g}}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Denote o mapa conjugação de $P(\mathfrak{g})$ por

$$\mathbb{C} : P(\mathfrak{g}) \times P(\mathfrak{g}) \longrightarrow P(\mathfrak{g}), \quad \mathbb{C}(v, w) := \mathbb{C}_v(w) := v \otimes w \otimes v^{-1}.$$

De maneira explícita

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_v(w) &= v \otimes w \otimes v^{-1} \\ &= v + A(v)(w \otimes v^{-1}) \\ &= v + A(v)(w + A(w)v^{-1}) \\ &= v + A(v)(w - A(w)A(v)^{-1}v) \\ &= (\text{id} - A(v)A(w)A(v)^{-1})v + A(v)w \\ &= (\text{id} - \mathbb{C}_{A(v)}(A(w)))v + A(v)w, \end{aligned}$$

onde, por abuso de notação, C denota o mapa de conjugação pontual de $P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g}))$. Então

$$\begin{aligned} \text{Ad}_v(w) &= \frac{d}{d\epsilon} \mathbb{C}_v(\epsilon w)|_{\epsilon=0} \\ &= -C_{A(v)}(A_*(w))v + A(v)w. \end{aligned}$$

Considere

$$\text{Ad}_{\epsilon v}(w) = -\epsilon C_{A(\epsilon v)}(A_*(w))v + A(\epsilon v)w$$

e diferenciando

$$\frac{d}{d\epsilon} \text{Ad}_{\epsilon v}(w) = -\epsilon \text{Ad}_{\frac{d}{d\epsilon} A(\epsilon v)}(A_*(w))v - C_{A(\epsilon v)}(A_*(w))v + \frac{d}{d\epsilon} A(\epsilon v)w$$

Deduzimos que

$$\begin{aligned} [v, w]_{P(\mathfrak{g})} &:= \frac{d}{d\epsilon} \text{Ad}_{\epsilon v}(w)|_{\epsilon=0} \\ &= A_*(v)w - A_*(w)v, \end{aligned}$$

e portanto

$$(39) \quad [v, w]_{P(\mathfrak{g})} = \frac{d}{dt}[I(v), I(w)]_{\mathfrak{g}},$$

já que pelo Lema 9.4

$$\begin{aligned} [v, w]_{P(\mathfrak{g})} &= A_*(v)w - A_*(w)v \\ &= [I(v), w]_{\mathfrak{g}} - [I(w), v]_{\mathfrak{g}} \\ &= [I(v), w]_{\mathfrak{g}} + [v, I(w)]_{\mathfrak{g}} \\ &= \frac{d}{dt}[I(v), I(w)]_{\mathfrak{g}}. \end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 10

Os teoremas de Lie

A um grupo de Banach-Lie corresponde, de maneira functorial, uma álgebra de Banach-Lie:

$$G \mapsto \text{Lie}(G).$$

Os teoremas de Lie nos garantem uma construção, também functorial, na direção oposta: ela associa a uma álgebra de Lie (de dimensão finita) um grupo de Lie simplesmente conexo que a integra:

$$\mathfrak{g} \mapsto \text{Int}(\mathfrak{g}),$$

de tal maneira que Lie e Int, embora não sejam construções mutuamente inversas, o são no nível de morfismos — isto é, definem funtores adjuntos.

A construção functorial que apresentamos foi descoberta em [8], e incorporamos nela melhorias propostas em [22], sob um ponto de vista Hamiltoniano — que, argumentamos aqui, é natural adotar.

A questão da integração de uma álgebra de Lie tem várias sutilezas, e convém delinear o argumento a seguir:

- Quando supomos a existência de um grupo de Banach-Lie G com álgebra \mathfrak{g} , podemos usar a receita para recobrimentos universais de grupos de Lie para identificar o recobrimento universal \tilde{G} de um grupo de Banach-Lie como o quociente $\text{Int}(\mathfrak{g})$ de $P(\mathfrak{g})$ por um certo subgrupo de Lie normal e fechado $N(\mathfrak{g})$ de “elementos nulomotópicos”;
- Desse ponto de vista, um homomorfismo de álgebras de Banach-Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ dá origem a um evidente homomorfismo entre grupos de Banach-Lie $\text{Int}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{h})$;
- Quando não tomamos por garantida a existência de um tal grupo G , podemos ainda falar no grupo normal de “elementos nulomotópicos” $N(\mathfrak{g})$, que surge como a folha da folheação invariante associada ao homomorfismo de média av : $P(\mathfrak{g})^{\text{alg}} \rightarrow \mathfrak{g}$;
- Resulta que a álgebra de Banach-Lie $\text{ad}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ sempre pode ser integrada, mas \mathfrak{g} ela mesma só pode ser a álgebra de um grupo de Banach-Lie quando uma certa condição de discretude — que é automática no caso de dimensão finita — é satisfeita.

1. O subgrupo nulomotópico

Nosso objetivo nesta seção é introduzir um subgrupo normal $N(\mathfrak{g})$ de $P(\mathfrak{g})$ que corresponde ao subgrupo $N(1, G)$ de $P(1, G)$ segundo a correspondência $P(\mathfrak{g}) \simeq P(1, G)$. É importante ressaltar que a definição de $N(\mathfrak{g})$ só depende da álgebra de Lie \mathfrak{g} de G — ou seja, não pressupõe a existência de um grupo de Lie com álgebra \mathfrak{g} .

DEFINIÇÃO 10.1. Uma **nulomotopia** em $P(\mathfrak{g})$ é um mapa continuamente diferenciável

$$V : (I(\epsilon), 0, 1) \longrightarrow (P(\mathfrak{g}), 0, v), \quad (t, \epsilon) \mapsto V_t^\epsilon,$$

que satisfaz

$$(40) \quad \int_0^1 A(V)^{-1} \frac{d}{d\epsilon} V dt = 0.$$

Um elemento $v \in P(\mathfrak{g})$ é **nulomotópico** se $v = V^1$ para uma nulomotopia V , e denotamos por

$$N(\mathfrak{g}) := \{v \in P(\mathfrak{g}) \mid v \text{ é nulomotópico}\}$$

o subconjunto de todos os elementos nulomotópicos em $P(\mathfrak{g})$.

Para mostrar que $N(\mathfrak{g})$ é um subgrupo normal, faremos uso do seguinte Lema de [24]:

LEMA 10.1. Seja G um grupo de Lie conexo, com álgebra \mathfrak{g} , e $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ um ideal.

a) As extensões invariantes à esquerda e à direita,

$$E^L := (L_g)_*(\mathfrak{k}) \subset TG, \quad E^R := (R_g)_*(\mathfrak{k}) \subset TG$$

coincidem: $E = E^L = E^R$.

b) E é uma folheação: $E = T\mathcal{F}$.

c) A folha K de \mathcal{F} que passa por $1 \in G$ é um subgrupo normal de G .

d) A folheação \mathcal{F} de G é por cosets de K .

DEMONSTRAÇÃO. Observe que $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ ser um ideal significa que $\text{ad}(\mathfrak{g})\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$, e como G é conexo, isso é equivalente a

$$(41) \quad \text{Ad}_g \mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}, \quad g \in G.$$

Portanto

$$E_g := (L_g)_*(\mathfrak{k}) = \text{Ad}_g(R_g)_*(\mathfrak{k}) = (R_g)_*\text{Ad}_g(\mathfrak{k}) = (R_g)_*(\mathfrak{k})$$

define um subfibrado invariante de $E \subset TG$. Observe que temos mapa linear bem-definido

$$\mathfrak{k} \rightarrow \Gamma(E), \quad v \mapsto v^L$$

cuja imagem gera $\Gamma(E)$ sobre $C^\infty(G)$. Como \mathfrak{k} é subálgebra de Lie, e por definição do parêntese de Lie

$$[v^L, w^L] = [v, w]^L, \quad v, w \in \mathfrak{k}$$

mostra que $\Gamma(E)$ é involutivo. Tome agora a folha K que passa por 1. Dados caminhos $g, h : I \rightarrow G$ com $\dot{g}, \dot{h} \in E$, temos que

$$v := Dg \in P(\mathfrak{k}), \quad w := Dh \in P(\mathfrak{k}),$$

e portanto, pelo Corolário 9.1,

$$\begin{aligned} v \circledast w &= v + A(v)(w) \\ &= v + \text{Ad}_{\phi^{vR}(1)}(w) \end{aligned}$$

está em $P(\mathfrak{k})$ por (41), e

$$\begin{aligned} \phi_t^{(v \circledast w)^R}(1) &= \phi_t^{v^R \star w^R}(1) \\ &= \phi^{v^R}(\phi_t^{w^R}(1)) \\ &= \phi^{v^R}(1)\phi_t^{w^R}(1) \\ &= g(t)h(t), \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos (35), enquanto a segunda decorre do Teorema 9.4 e a terceira do Lema 6.2. Portanto K é subgrupo, e é normal porque

$$\text{Ad}_g E \subset E, \quad g \in G.$$

e portanto, como G é conexo,

$$c_g(K) \subset K, \quad g \in G,$$

isto é: K é normal. □

LEMA 10.2. *O mapa de média*

$$\text{av} : (P(\mathfrak{g}), [\cdot, \cdot]_{P(\mathfrak{g})}) \longrightarrow (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}), \quad \text{av}(v) := \int_0^1 v_t dt$$

é um homomorfismo suave e sobrejetivo de álgebras de Lie.

DEMONSTRAÇÃO. O mapa de média é linear e portanto suave, e é sobrejetivo porque a média do caminho constante em $v \in \mathfrak{g}$ é v .

Para vermos que av preserva colchetes, basta notar que, dados $v, w \in P(\mathfrak{g})$, a partir de (39),

$$\begin{aligned} \text{av}([v, w]_{P(\mathfrak{g})}) &= \int_0^1 [v, w]_{P(\mathfrak{g})} dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\int_0^t v ds, \int_0^t w ds \right]_{\mathfrak{g}} ds \\ &= \left[\int_0^t v ds, \int_0^t w ds \right]_{\mathfrak{g}} \Big|_0^1 \\ &= \left[\int_0^1 v ds, \int_0^1 w dt \right]_{\mathfrak{g}} = [\text{av}(v), \text{av}(w)]_{\mathfrak{g}}. \end{aligned}$$

□

LEMA 10.3. Denote por $\mathcal{N} \subset TP(\mathfrak{g})$ a folheação invariante induzida pelo ideal

$$\ker(\text{av}) \subset P(\mathfrak{g})^{\text{alg}}.$$

Então o subgrupo de nulomotopias $N(\mathfrak{g})$ é a folha de \mathcal{N} que passa pela identidade, e é portanto um subgrupo normal e conexo de $P(\mathfrak{g})$, com álgebra de Lie

$$(42) \quad \text{Lie}(N(\mathfrak{g})) = \ker(\text{av}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Denote por \mathbb{L} a translação à esquerda $\mathbb{L}_v = v \otimes \cdot$ em $P(\mathfrak{g})$, e por $\mathbb{R}_v = \cdot \otimes v$ a translação à direita. O núcleo do mapa $\text{av} : P(\mathfrak{g})^{\text{alg}} \rightarrow \mathfrak{g}$ é um ideal de $P(\mathfrak{g})^{\text{alg}}$, e portanto, pelo Lema 10.1,

$$\mathcal{N}_v := (\mathbb{L}_v)_*(\ker \text{av}) = (\mathbb{R}_v)_*(\ker \text{av})$$

é uma folheação do grupo de Banach-Lie $P(\mathfrak{g})$, e observamos que

$$\mathbb{L}_V(w) = (V \otimes w)_t = v_t + A(v)w_t,$$

mostra que

$$(43) \quad (\mathbb{L}_v)_* = A(v)$$

Então uma curva continuamente diferenciável

$$V : (I(\epsilon), 0) \longrightarrow (P(\mathfrak{g}), 0), \quad (t, \epsilon) \mapsto V_t^\epsilon,$$

é tangente a \mathcal{N} se e só se

$$D^{\mathbb{L}}V = \mathbb{L}_V^* \frac{d}{d\epsilon} V = A(V)^{-1} \frac{d}{d\epsilon} V$$

é elemento de $P(\ker \text{av})$. Portanto um elemento $v \in P(\mathfrak{g})$ está na folha de \mathcal{N} que passa pela identidade se e só se é ponto final de uma curva continuamente diferenciável V que satisfaz (40) — ou seja, se e só se é nulomotópica. □

2. O grupo Hamiltoniano de uma álgebra de Lie

Nesta seção, oferecemos uma interpretação Hamiltoniana ao esquema de integração de álgebras de Lie quando a dimensão é finita.

Recorde que a estrutura Poisson $\pi_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{X}^2(\mathfrak{g}^*)$ associada a uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dada por

$$\pi_{\mathfrak{g}, \xi}(v, w) = \langle \xi, [v, w] \rangle, \quad (v, w, \xi) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*,$$

onde vemos $v, w \in \mathfrak{g}$ como covetores em $T_{\xi}^* \mathfrak{g}^*$. Portanto, se identificamos $P(\mathfrak{g})$ com funções

$$v : \mathfrak{g}^* \times I \rightarrow \mathfrak{g}, \quad v(\xi, t) := \langle v_t, \xi \rangle,$$

então seu campo Hamiltoniano é dado por

$$H_{v, \xi} := \text{ad}(v)^* \xi, \quad \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

e portanto

$$\mathcal{L}_{H_v} w = [v, w], \quad v, w \in \mathfrak{g},$$

e o fluxo $\varphi_t^{\mathbf{H}_v}$ de \mathbf{H}_v ,

$$\varphi_t^{\mathbf{H}_v} : \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*,$$

é por mapas lineares, e portanto

$$(\varphi^{\mathbf{H}_v})_* := ((\varphi^{\mathbf{H}_v})^{-1})^* \in P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g})).$$

A álgebra oposta a \mathfrak{g} , \mathfrak{g}^{op} , que tem o colchete $[v, w]^{\text{op}} := [w, v]$, tem evidentemente Hamiltonianos opostos.

LEMA 10.4. *O grupo $P(\mathfrak{g})$ se identifica com o grupo Hamiltoniano de \mathfrak{g}^{op} .*

DEMONSTRAÇÃO. Desejamos mostrar que, se $v, w \in P(\mathfrak{g})$, então

$$v + (\varphi^{\mathbf{H}_v})_*(w) = v + A(v)w.$$

Equivalentemente, devemos mostrar que $(\varphi^{\mathbf{H}_v})_*(w) = A(v)w$, para $v \in P(\mathfrak{g})$ e $w \in \mathfrak{g}$. Para isso calculamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi^{\mathbf{H}_v})^*(A(v)w) &= (\varphi^{\mathbf{H}_v})^*(\mathcal{L}_{\mathbf{H}_v}A(v)w + \frac{d}{dt}A(v)w) \\ &= (\varphi^{\mathbf{H}_v})^*(-[v, A(v)w] + [v, A(v)w]) = 0, \end{aligned}$$

para concluir que $(\varphi^{\mathbf{H}_v})^*(A(v)w)$ independe de t . □

A descrição grupo de Banach-Lie $P(\mathfrak{g})$ se dá exclusivamente em termos da estrutura Poisson em \mathfrak{g}^* , sem fazer referência a um grupo de Lie que integre \mathfrak{g} .

Como veremos a seguir, o subgrupo $K(\mathfrak{g}) := \ker(A_1)$, onde

$$A_1 : P(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}), \quad A_1(v) := A(v)_1,$$

terá grande importância na integração de uma álgebra de Lie. Temos nessa linguagem uma descrição geométrica clara do subgrupo $K(\mathfrak{g})$: $P(\mathfrak{g})$ age em \mathfrak{g}^* ,

$$P(\mathfrak{g}) \curvearrowright \mathfrak{g}^*, \quad v \cdot \xi := \varphi_1^{\mathbf{H}_v}(\xi),$$

cujas órbitas são as folhas simpléticas da álgebra. $K(\mathfrak{g})$ é então o subgrupo inefetivo dessa ação. Assim, $v \in K(\mathfrak{g})$ é tal que

$$\varphi^{\mathbf{H}_v}(\xi) : (I, 0) \rightarrow (\mathfrak{g}^*, \xi), \quad t \mapsto \varphi_t^{\mathbf{H}_v}(\xi)$$

é um loop para cada $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

$K(\mathfrak{g})$ pode ser detectado folha-a-folha: $v \in P(\mathfrak{g})$ está em $K(\mathfrak{g})$ se, em cada folha simplética de \mathfrak{g}^* , o fluxo de v tem período 1.

Em consequência, a variação de parâmetros usual para campos vetoriais descreve a variação do campo Hamiltoniano \mathbf{H}_v como o único campo \mathbf{H}_v^\vee para o qual $(\mathbf{H}_v^\vee)_0 = 0$ e

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathbf{H}_v - \frac{d}{dt} \mathbf{H}_v^\vee = [\mathbf{H}_v, \mathbf{H}_v^\vee],$$

e, neste contexto,

$$K(\mathfrak{g}) = \{v : (I, 0) \rightarrow (P(\mathfrak{g}), 0) \mid (H_v^\vee)_1 = 0\}.$$

Note que qualquer $v \in P(\mathfrak{z})$ dá origem ao fluxo trivial em cada folha. Isso é evidência de que

$N(\mathfrak{g})$ não pode ser detectado folha-a-folha.

No entanto, a variação de H_v resulta ser ela mesma Hamiltoniana:

$$H_v^\vee = H_{v^\vee},$$

onde $v^\vee \in C^1(I, P(\mathfrak{g}))$ denota o único caminho [2] para o qual $v_0^\vee = 0$ e

$$\frac{d}{d\epsilon}v - \frac{d}{dt}v^\vee = [v, v^\vee],$$

a saber,

$$v^\vee = \varphi_* \mathbf{I} \left(\varphi^* \frac{d}{d\epsilon}v \right),$$

o que implica imediatamente a fórmula correspondente para campos Hamiltonianos.

Esse refinamento torna esperada ser a variação central para caminhos em $K(\mathfrak{g})$:

$$K(\mathfrak{g}) = \{v : (I, 0) \rightarrow (P(\mathfrak{g}), 0) \mid v_1^\vee = P(\mathfrak{z})\},$$

e determina a noção última de nulomotopia:

$$N(\mathfrak{g}) = \{v : (I, 0) \rightarrow (P(\mathfrak{g}), 0) \mid v_1^\vee = 0\}.$$

Portanto:

$N(\mathfrak{g})$ tem uma descrição natural em termos do refinamento da variação de parâmetros usual que provê a estrutura do grupo Hamiltoniano.

3. O Primeiro Teorema de Lie

Na primeira parte da dissertação, demos uma receita para construir, a partir de um espaço topológico conexo por caminhos suficientemente bem-comportado um recobrimento universal, a saber:

$$\pi_1(X) \supset \tilde{X} = \mathbf{s}^{-1}(x_0) \xrightarrow{\mathbf{t}} X.$$

No caso de um grupo de Banach-Lie¹ G , podemos descrever o recobrimento universal como um quociente

$$\tilde{G} = P(1, G)/N(1, G)$$

do grupo de Banach-Lie de caminhos em G que partem da identidade por caminhos nulomotópicos. Nossa versão do Primeiro Teorema de Lie descreve esse recobrimento puramente em termos da álgebra de G :

¹O teorema em questão é enunciado para grupos de Lie, mas como notamos anteriormente, ele segue válido no contexto Banach.

TEOREMA 10.1 (Primeiro Teorema de Lie). *Seja G um grupo de Banach-Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$. Então*

$$\tilde{G} = P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g})$$

é um grupo de Banach-Lie simplesmente conexo com álgebra \mathfrak{g} , e

$$p : \tilde{G} \rightarrow G, \quad p(vN(\mathfrak{g})) = \varphi_1^{vR}(1)$$

é o recobrimento universal de G .

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema 5.1, o recobrimento universal $p : \tilde{G} \rightarrow G$ de G é dado por

$$\tilde{G} = P(1, G)/N(1, G), \quad p(gN(1, G)) = g_1.$$

Por outro lado, temos pelo Lema 9.2 uma identificação

$$P(1, G) \simeq P(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto D(g),$$

e afirmamos que, sob essa identificação, $N(1, G)$ corresponde a $N(\mathfrak{g})$. De fato, se $c \in C^1(I^2, G)$ é uma nulomotopia,

$$c^0 = 1, \quad c_0 = 1,$$

então

$$V_t^\epsilon := R_c^*\left(\frac{d}{dt}c\right) \in C^1(I, P(\mathfrak{g}))$$

tem extensão invariante à direita cujo fluxo satisfaz $\phi_t^\epsilon(1) = c(t, \epsilon)$, cuja variação $\frac{d}{d\epsilon}\phi = W \circ \phi$ é pelo Teorema 8.2

$$(\phi_t^\epsilon)^*W_t^\epsilon = \int_0^t (\phi_s^\epsilon)^* \frac{d}{d\epsilon} V^R ds,$$

e portanto se anula em $t = 1$ se e só se

$$\int_0^1 A(v)^{-1} \frac{d}{d\epsilon} V dt = 0.$$

Portanto

$$DN(1, G) = N(\mathfrak{g}),$$

e então

$$\tilde{G} = P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g}).$$

Logo podemos identificar

$$\begin{aligned} P(1, G)/N(1, G) &\simeq P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g}), & gN(1, G) &\mapsto D(g)N(\mathfrak{g}), \\ p : \tilde{G} = P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g}) &\rightarrow G, & p(vN(\mathfrak{g})) &= \varphi_1^{vR}(1). \end{aligned}$$

e isso conclui a demonstração. \square

4. O Segundo Teorema de Lie

A receita para a construção de um recobrimento universal \tilde{G} faz corresponder, de maneira essencialmente tautológica, a um morfismo entre as álgebras de grupos de Banach-Lie um morfismo entre os recobrimentos universais de dos grupos. Isso nos leva ao:

TEOREMA 10.2 (Segundo Teorema de Lie). *Sejam G um grupo de Banach-Lie simplesmente conexo e H um grupo Banach-Lie conexo, com álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} respectivamente. Então cada homomorfismo de álgebras de Banach-Lie*

$$f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

induz um único homomorfismo de grupos de Banach-Lie

$$(44) \quad F : G \rightarrow H,$$

com a propriedade de que

$$\text{Lie}(F) = f.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como f é homomorfismo de álgebras de Banach-Lie, temos que

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}}(f(v)) \circ f = f \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(v).$$

O homomorfismo $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ induz, por pós-composição, um mapa suave

$$\tilde{F} : P(\mathfrak{g}) \rightarrow P(\mathfrak{h}), \quad \tilde{F}(v)_t := f(v_t),$$

para todo $v \in P(\mathfrak{g})$, e

$$(\tilde{F}[v, w]_{\mathfrak{g}})_t = [\tilde{F}(v)_t, \tilde{F}(w)_t]_{\mathfrak{h}}$$

para todos $v, w \in P(\mathfrak{g})$ e $t \in \mathbb{R}$. Ou seja,

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{F}(v)) \circ \tilde{F} = \tilde{F} \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(v)$$

Passo 1. $A(\tilde{F}(v)) \circ \tilde{F} = \tilde{F} \circ A(v)$ Afirmamos que os seguintes caminhos de endomorfismos de \mathfrak{g} ,

$$A(\tilde{F}(v)) \circ \tilde{F}, \quad \tilde{F} \circ A(v),$$

coincidem. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(\tilde{F}(v)) \circ \tilde{F} &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(f(v)) \circ A(\tilde{F}(v)) \circ \tilde{F} \\ &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{F}(v)) \circ A(\tilde{F}(v)) \circ \tilde{F}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{F} \circ A(v) &= \tilde{F} \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(v) \circ A(v) \\ &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{F}(v)) \circ \tilde{F} \circ A(v) \end{aligned}$$

mostram que ambos os caminhos são soluções da EDO $\dot{\zeta} = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{F}(v))\zeta$, e como têm a mesma condição inicial

$$A(\tilde{F}(v))_0 \circ \tilde{F} = f = \tilde{F} \circ A(v)_0,$$

segue que $A(\tilde{F}(v)) \circ \tilde{F} = \tilde{F} \circ A(v)$.

Passo 2. \tilde{F} é homomorfismo de grupos. Sejam agora $v, w \in P(\mathfrak{g})$ dois elementos quaisquer. Então, por definição de \tilde{F} e de \otimes , temos que

$$\begin{aligned}\tilde{F}(v \otimes w) &= \tilde{F}(v + A(v)w) \\ &= \tilde{F}(v) + \tilde{F}(A(v)w).\end{aligned}$$

Pelo Passo 1, o último termos pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\tilde{F}(v \otimes w) &= \tilde{F}(v) + A(\tilde{F}(v))\tilde{F}(w) \\ &= \tilde{F}(v) \otimes \tilde{F}(w).\end{aligned}$$

Portanto \tilde{F} define um homomorfismo de grupos

$$\tilde{F} : P(\mathfrak{g}) \rightarrow P(\mathfrak{h}).$$

Passo 3. \tilde{F} preserva nulomotopias. Suponha que $v \in C^1(I(\epsilon), P(\mathfrak{g}))$ seja uma nulomotopia — ou seja, que sua variação

$$v^\vee \in C^1(I(t), P(\mathfrak{g})), \quad \frac{d}{d\epsilon}v - \frac{d}{dt}v^\vee = [v, v^\vee]_{\mathfrak{g}}, \quad v_0^\vee = 0$$

satisfaça $v_1^\vee = 0$. Como

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}\tilde{F}(v) - \frac{d}{dt}\tilde{F}(v^\vee) &= \tilde{F}\left(\frac{d}{d\epsilon}v - \frac{d}{dt}v^\vee\right) \\ &= \tilde{F}[v, v^\vee]_{\mathfrak{g}} \\ &= [\tilde{F}(v), \tilde{F}(v^\vee)]_{\mathfrak{g}},\end{aligned}$$

e $\tilde{F}(v^\vee)_0 = 0$, deduzimos que a variação de $\tilde{F}(v)$ é $\tilde{F}(v)^\vee$:

$$\tilde{F}(v)^\vee = \tilde{F}(v^\vee).$$

Portanto

$$\tilde{F}(v)_1^\vee = \tilde{F}(v_1^\vee) = 0$$

implica que

$$\tilde{F}N(\mathfrak{g}) \subset N(\mathfrak{h}).$$

O homomorfismo \tilde{F} induz portanto um homomorfismo

$$(45) \quad \bar{F} : P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g}) \rightarrow P(\mathfrak{h})/N(\mathfrak{h})$$

Passo 4. *Exponencial de $P(\mathfrak{g})$.* Usando (43), calculamos a extensão invariante à esquerda $w^L \in \mathfrak{X}(P(\mathfrak{g}))$ de $w \in P(\mathfrak{g})^{\text{alg}}$:

$$w_v^L := (\mathbb{L}_v)_* = A(v)w, \quad v \in P(\mathfrak{g}).$$

Então como \tilde{F} é linear,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_*(w_v^L) &= \tilde{F}(A(v)w) \\
&= A(\tilde{F}v)\tilde{F}(w) \\
&= \tilde{F}(w)_{\tilde{F}v}^L
\end{aligned}$$

Portanto

$$\tilde{F}_*(w^L) = \tilde{F}(w)^L;$$

logo \tilde{F} relaciona os fluxos

$$\tilde{F} \circ \phi_t^{w^L} = \phi_t^{\tilde{F}(w)^L} \circ \tilde{F}.$$

e portanto

$$(46) \quad \tilde{F} \circ \phi_t^{w^L}(1_{P(\mathfrak{g})}) = \phi_t^{\tilde{F}(w)^L} \circ \tilde{F}(1_{P(\mathfrak{g})}) = \phi_t^{\tilde{F}(w)^L}(1_{P(\mathfrak{h})}).$$

Passo 5. homomorfismo entre recobrimentos universais. Temos identificações inversas

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} P(\mathfrak{g})^{\text{alg}}/n(\mathfrak{g}), \quad v \mapsto v + n(\mathfrak{g}), \quad P(\mathfrak{g})^{\text{alg}}/n(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}, \quad v + n(\mathfrak{g}) \mapsto \text{av}(v)$$

e portanto identificamos com $\text{Lie}(\overline{F}) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ a diferencial na identidade de (45). Observe que de (46) segue que, para todo $w \in \mathfrak{g}$,

$$\tilde{F}_*(w) = f(w),$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\overline{F}_*(w + n(\mathfrak{g})) &= \tilde{F}_*(w) + n(\mathfrak{h}) \\
&= f(w) + n(\mathfrak{h}).
\end{aligned}$$

Isso mostra que \overline{F}_* coincide com f .

Passo 6. Recobrimento $P(\mathfrak{h})/N(\mathfrak{h}) \rightarrow H$. Por fim, observe que, como G é simplesmente conexo, temos uma identificação

$$G = P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g})$$

já que pelo Primeiro Teorema de Lie, $P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g})$ é o grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra \mathfrak{g} . Uma tal identificação não é necessariamente válida para H ; em geral, temos um recobrimento $p : P(\mathfrak{h})/N(\mathfrak{h}) \rightarrow H$. Denote por

$$F := p\overline{F} : G \rightarrow H.$$

Então F é homomorfismo de grupos de Lie, e como $\text{Lie}(p) = \text{id}$,

$$\text{Lie}(F) = f$$

pelo Passo 5.

Passo 7. Unicidade. Segue de (46) que

$$F(\exp(v)) = \exp(f(v)), \quad v \in \mathfrak{g}.$$

Como $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ é um difeomorfismo de uma vizinhança de zero a uma vizinhança de 1, F está completamente determinado numa vizinhança de 1. Como G é conexo, deduzimos que F está unicamente definido por f . \square

5. O Terceiro Teorema de Lie

O Primeiro Teorema de Lie nos diz como de um grupo de Banach-Lie construir um grupo de Banach-Lie *simplesmente conexo* com a mesma álgebra.

O Segundo Teorema de Lie nos diz que existe uma correspondência bijetora entre homomorfismos entre grupos de Banach-Lie simplesmente conexo e homomorfismos entre suas álgebras.

Portanto, para estudar os grupos de Banach-Lie simplesmente conexos, é suficiente estudar suas álgebras: toda a informação geométrica e algébrica é inteiramente determinada por sua versão infinitesimal.

É natural, então, perguntar se cada álgebra de Banach-Lie é a álgebra de um grupo de Banach-Lie. A resposta, neste contexto, é *negativa*, mas resulta que no caso de dimensão finita ela é positiva. Nesta seção explicamos como funciona o caso de dimensão finita, e na última seção comentaremos a falha do Terceiro Teorema de Lie no caso geral.

TEOREMA 10.3 (Terceiro Teorema de Lie). *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita, e $P(\mathfrak{g})$ seu grupo Hamiltoniano. Então o núcleo da sobrejeção*

$$\text{av} : P(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}$$

é a álgebra de Lie do subgrupo normal e fechado $N(\mathfrak{g}) \subset P(\mathfrak{g})$ de caminhos nulomotópicos da Definição 10.1, e o quociente

$$\text{Int}(\mathfrak{g}) := P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g})$$

é um grupo de Lie simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é \mathfrak{g} .

DEMONSTRAÇÃO. Como \mathfrak{g} tem dimensão finita, o grupo $\text{GL}(\mathfrak{g})$ de mapas lineares invertíveis de \mathfrak{g} é um grupo de Lie, e como

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \text{GL}(\mathfrak{g}), \quad \text{Aut}(\mathfrak{g}) = \{\phi \in \text{GL}(\mathfrak{g}) \mid \phi[x, y] = [\phi(x), \phi(y)], x, y \in \mathfrak{g}\}$$

é um subgrupo fechado, temos que $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo de Lie.

Passo 1. O subgrupo de loops. Considere o homomorfismo de grupos do Teorema 9.4:

$$A : P(\mathfrak{g}) \rightarrow P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g})).$$

Compondo com o mapa de avaliação em $t = 1$,

$$P(1, \text{Aut}(\mathfrak{g})) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto g_1,$$

obtemos um homomorfismo de grupos de Banach-Lie:

$$A_1 : P(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}).$$

O subgrupo fechado e normal que é seu núcleo

$$K(\mathfrak{g}) := \ker(A_1).$$

é um subgrupo de Lie de $P(\mathfrak{g})$ pelo Lema 9.1.

Passo 2. A álgebra do subgrupo de loops. Observe que pelo Lema 9.4, temos um diagrama comutativo

$$(47) \quad \begin{array}{ccc} P(\mathfrak{g})^{\text{alg}} & \xrightarrow{\text{av}} & \mathfrak{g} \\ & \searrow (A_1)_* & \downarrow \text{ad} \\ & & \text{ad}(\mathfrak{g}), \end{array}$$

onde $\text{ad}(\mathfrak{g})$ denota a álgebra adjunta de \mathfrak{g} , que pertence à sequência exata curta de álgebras de Lie

$$0 \rightarrow \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad}} \text{ad}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0$$

Passo 3. O grupo adjunto. Defina o grupo $\text{Ad}(\mathfrak{g})$ como o quociente de $P(\mathfrak{g})$ por seu subgrupo normal $K(\mathfrak{g})$:

$$\text{Ad}(\mathfrak{g}) := P(\mathfrak{g})/K(\mathfrak{g}).$$

Como $K(\mathfrak{g})$ é um subgrupo de Lie normal e fechado, sabemos pelo Teorema 9.1 que

$$(48) \quad K(\mathfrak{g}) \curvearrowright P(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Ad}(\mathfrak{g})$$

é um fibrado $K(\mathfrak{g})$ -principal, que $\text{Ad}(\mathfrak{g})$ tem estrutura de grupo de Banach-Lie, e que

$$\text{Lie}(\text{Ad}(\mathfrak{g})) = \text{ad}(\mathfrak{g}).$$

Em particular, $\text{Ad}(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie.

Passo 4. O subgrupo de loops é simplesmente conexo. Porque $P(\mathfrak{g})$ é um espaço vetorial, e portanto contrátil, sabemos que seus grupos de homotopia são triviais:

$$\pi_i(P(\mathfrak{g})) = \{1\}, \quad i \geq 0.$$

Do fibrado (48) deduzimos pela sequência exata longa em homotopia [12, Theorem 4.41]

$$\cdots \rightarrow \pi_2(P(\mathfrak{g})) \rightarrow \pi_2(\text{Ad}(\mathfrak{g})) \rightarrow \pi_1(K(\mathfrak{g})) \rightarrow \pi_1(P(\mathfrak{g})) \rightarrow \pi_1(\text{Ad}(\mathfrak{g})) \rightarrow \pi_0(K(\mathfrak{g})) \rightarrow \cdots$$

que

$$\pi_1(K(\mathfrak{g})) = \pi_2(\text{Ad}(\mathfrak{g})).$$

Como grupos de Lie de dimensão finita têm segundo grupo de homotopia trivial, deduzimos que $K(\mathfrak{g})$ é simplesmente conexo.

Passo 5. Lie II para o mapa de média. Do diagrama (47) temos que

$$K(\mathfrak{g})^{\text{alg}} = \text{av}^{-1}(\mathfrak{z});$$

ou seja, a restrição de av a $K(\mathfrak{g})$ dá um homomorfismo de grupos de Banach-Lie

$$(49) \quad \text{av} : K(\mathfrak{g})^{\text{alg}} \rightarrow \mathfrak{z}$$

que é claramente sobrejetivo. Como $Z := \mathfrak{z}$, munido de adição, é grupo de Lie com álgebra \mathfrak{z} , aplicando o Teorema 10.2 a (49), obtemos um homomorfismo de grupos de Banach-Lie

$$(50) \quad \text{Av} : K(\mathfrak{g}) \rightarrow Z.$$

Pelo Lema 10.3, temos que

$$N(\mathfrak{g}) = \ker(\text{Av}),$$

que é portanto um subgrupo de Lie normal e fechado de $K(\mathfrak{g})$. Como $K(\mathfrak{g})$ é um subgrupo de Lie normal e fechado de $P(\mathfrak{g})$, concluímos que $N(\mathfrak{g})$ é um subgrupo de Lie normal e fechado de $P(\mathfrak{g})$, e portanto, que

$$\text{Int}(\mathfrak{g}) := P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g})$$

é um grupo de Banach-Lie, com álgebra

$$\text{LieInt}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$$

já que, novamente pelo Lema 10.3,

$$0 \rightarrow N(\mathfrak{g})^{\text{alg}} \longrightarrow P(\mathfrak{g})^{\text{alg}} \xrightarrow{\text{av}} \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

é sequência exata de álgebras de Lie.

Passo 6. $\text{Int}(\mathfrak{g})$ é simplesmente conexo. Porque $\text{Int}(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie com álgebra \mathfrak{g} , temos pela proposição 9.1 uma identificação de grupos de Banach-Lie:

$$P(\mathfrak{g}) \simeq P(1, \text{Int}(\mathfrak{g}))$$

que induz uma identificação

$$N(\mathfrak{g}) \simeq N(1, \text{Int}(\mathfrak{g}))$$

Portanto, pelo Teorema 10.1, temos que

$$\begin{aligned} \text{Int}(\mathfrak{g}) &:= P(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g}) \\ &\simeq P(1, \text{Int}(\mathfrak{g}))/N(1, \text{Int}(\mathfrak{g})) \\ &= \widetilde{\text{Int}(\mathfrak{g})}, \end{aligned}$$

o que mostra que $\text{Int}(\mathfrak{g})$ é simplesmente conexo. □

6. Os Teoremas de Lie como um functor adjunto

Dadas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} , dizemos que um functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é **adjunto à esquerda** a um functor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, se existe isomorfismo natural

$$(51) \quad \mathcal{C}(c, G(d)) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{D}(F(c), d).$$

Equivalentemente, dizemos que G é **adjunto à direita** a F .

Usando o Segundo e o Terceiro Teorema de Lie, podemos construir um functor que associa a cada álgebra de Lie \mathfrak{g} o grupo de Lie simplesmente conexo G que a integra e a cada homomorfismo de álgebras $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ o único morfismo definido em (44).

Observemos inicialmente que a regra Lie definida por:

- Dado um grupo de Lie G , associar sua álgebra de Lie $\text{Lie}(G)$, e
- à um homomorfismo de grupos de Lie $F : G \rightarrow H$ associar o homomorfismo induzido de álgebras de Lie

$$\text{Lie}(F) : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H), \quad \text{Lie}(F) := F_*|_{\mathfrak{g}}$$

define um functor

$$(52) \quad \text{Lie} : \text{LGrps} \longrightarrow \text{LAlgs}$$

da categoria de grupos de Lie para a categoria de álgebras de Lie de dimensão finita, pois

$$\begin{aligned} \text{Lie}(F_2 \circ F_1) &= F_{2*} \circ F_{1*} \\ &= \text{Lie}(F_2) \circ \text{Lie}(F_1) \end{aligned}$$

De modo análogo:

LEMA 10.5. *A regra Int, que:*

- a uma álgebra de Lie \mathfrak{g} associa o grupo de Lie $\text{Int}(\mathfrak{g})$ garantido pelo Teorema 10.3, e
- a um homomorfismo de álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ associa o único homomorfismo $\text{Int}(f) : \text{Int}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{h})$ garantido pelo Teorema 10.2

define functor

$$\text{Int} : \text{LAlgs} \longrightarrow \text{LGrps}$$

da categoria de álgebras de Lie para a categoria de grupos de Lie.

DEMONSTRAÇÃO. Dados homomorfismos de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g}_1 \xrightarrow{f_1} \mathfrak{g}_2 \xrightarrow{f_2} \mathfrak{g}_3$$

construímos

$$\text{Int}(\mathfrak{g}_1) \xrightarrow{\text{Int}(f_1)} \text{Int}(\mathfrak{g}_2) \xrightarrow{\text{Int}(f_2)} \text{Int}(\mathfrak{g}_3).$$

Então

$$\text{Lie}(\text{Int}(f_2) \circ \text{Int}(f_1)) = \text{Lie}(\text{Int}(f_2)) \circ \text{Lie}(\text{Int}(f_1)) = f_2 \circ f_1$$

implica outra vez pelo Teorema 10.2 que

$$\text{Int}(f_2 \circ f_1) = \text{Int}(f_2) \circ \text{Int}(f_1),$$

e portanto Int é functor. \square

Assim, com as considerações feitas até agora, podemos facilmente constatar que os funtores Lie e Int são adjuntos a esquerda:

TEOREMA 10.4. *O functor de integração*

$$\text{Int} : \text{LAlgs} \longrightarrow \text{LGrps}$$

é adjunto à esquerda [14] do functor

$$\text{Lie} : \text{LGrps} \longrightarrow \text{LAlgs},$$

ou seja, temos identificação natural

$$(53) \quad \text{LGrps}(\text{Int}(\mathfrak{g}), H) = \text{LAlgs}(\mathfrak{g}, \text{Lie}(H))$$

para toda álgebra de Lie \mathfrak{g} e grupo de Lie H .

DEMONSTRAÇÃO. De fato, temos pelo Teorema 10.2 que, pelo fato de $\text{Int}(\mathfrak{g})$ ser simplesmente conexo,

$$(54) \quad \text{Lie} : \text{LGrps}(\text{Int}(\mathfrak{g}), H) \rightarrow \text{LAlgs}(\mathfrak{g}, \text{Lie}(H))$$

é bijeção.

Com efeito, qualquer homomorfismo de grupos de Lie $F : \text{Int}(\mathfrak{g}) \rightarrow H$ tem um levantamento canônico

$$\begin{array}{ccc} & & \text{IntLie}(H) \\ & \nearrow^{\text{Int}(\text{Lie}(F))} & \downarrow \\ \text{Int}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{F} & H \end{array}$$

e a inversa de (54) associa a um homomorfismo de álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Lie}(H)$ a composição

$$\begin{array}{ccc} & & \text{IntLie}(H) \\ & \nearrow^{\text{Int}(f)} & \downarrow \\ \text{Int}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & H \end{array}$$

\square

OBSERVAÇÃO 10.1. *Observe que a construção do Primeiro Teorema de Lie se resume à aplicação do functor*

$$\text{Int} \circ \text{Lie} : \text{LGrps} \longrightarrow \text{LGrps},$$

que realiza o functor de recobrimento universal.

7. A falha do Terceiro Teorema de Lie

Concluimos a discussão explicando a falha do Terceiro Teorema de Lie no caso Banach-Lie. Começamos por um resultado positivo:

TEOREMA 10.5. *Para uma álgebra de Banach-Lie, existe grupo de Banach-Lie $\text{Ad}(\mathfrak{g})$ simplesmente conexo, com álgebra $\text{ad}(\mathfrak{g})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pois os passos 1-3 da demonstração do Teorema 10.3 continuam válidos no caso Banach-Lie, e mostram que $\text{Ad}(\mathfrak{g}) = P(\mathfrak{g})/K(\mathfrak{g})$ é um grupo de Banach-Lie, com álgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{z} = \text{ad}(\mathfrak{g})$. Aplique agora o Teorema 10.1 para concluir. \square

Observe que, à diferença do caso de dimensão finita, não temos a nossa disposição o Teorema 9.3 para argumentar que $\pi_2(\text{Ad}(\mathfrak{g})) = 0$ — ou, dito de outra forma, que $K(\mathfrak{g})$ pode não ser simplesmente conexo. Da perspectiva da folheação do Lema 10.3, o espaço de folhas não necessariamente tem uma estrutura de variedade diferenciável.

A demonstração específica que discutimos do Terceiro Teorema de Lie, portanto, falha. Mas isso se dá por uma razão bastante séria: existem álgebras de Banach-Lie que não são a álgebra induzida por nenhum grupo de Banach-Lie. Dito de outra maneira, o Terceiro Teorema de Lie falha na categoria Banach-Lie. Uma caracterização Exemplos concretos foram descobertos em [29] (veja também [28]).

EXEMPLO 10.1. Seja \mathfrak{su}_2 a álgebra de Lie do grupo especial unitário SU_2 . Considere

$$\mathfrak{h} = \ker(\text{av} : P(\mathfrak{su}_2) \rightarrow \mathfrak{su}_2).$$

Então \mathfrak{h} é uma álgebra de Banach-Lie sob o parêntese:

$$([c_1, c_2]_{\mathfrak{h}})_t := [c_1(t), c_2(t)].$$

$$\omega : \wedge^2 \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega(c_1, c_2) := \int_0^1 \text{tr} \left(\left(\int_0^t c_1(s) ds \right) \circ c_2(t) \right) dt.$$

Então

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \times \mathbb{R},$$

munido de

$$\left[\begin{pmatrix} c_1 \\ r_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \right]_{\mathfrak{g}} := \begin{pmatrix} [c_1, c_2]_{\mathfrak{h}} \\ \omega(c_1, c_2) \end{pmatrix}$$

define uma álgebra de Banach-Lie. Porém não existe grupo de Banach-Lie que integre \mathfrak{g} .

Existe na verdade uma caracterização das álgebras de Banach-Lie \mathfrak{g} que são álgebra de um grupo de Banach-Lie G [11, Theorem III.7], em termos de um certo homomorfismo de **períodos**

$$\text{per} : \pi_2(\text{Ad}(\mathfrak{g})) \rightarrow \mathfrak{z},$$

em termos do qual podemos enunciar:

TEOREMA 10.6. *Existe um grupo de Banach-Lie cuja álgebras é \mathfrak{g} exatamente quando a imagem de per é um subgrupo discreto.*

Bibliografia

- [1] R. Bott, *An application of Morse theory to the topology of Lie groups*, Bull. Soc. Math., France, 84 (1956), 251–281.
[doi:10.24033/bsmf.1472](https://doi.org/10.24033/bsmf.1472)
- [2] O. Brahic, *Extensions of Lie brackets*, Journal of Geometry and Physics Volume 60, Issue 2, February 2010, Pages 352–374
[doi:10.1016/j.geomphys.2009.10.006](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2009.10.006)
- [3] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate texts in mathematics 139, Springer Science, Business Media New York (1993)
[doi:10.1007/978-1-4757-6848-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6848-0)
- [4] W. Browder, *Torsion in H-Spaces*, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 74, No. 1 (Jul., 1961), pp. 24-51
[doi:10.2307/1970305](https://doi.org/10.2307/1970305)
- [5] R. Brown, G. Danesh-Naruie, *The fundamental groupoid as a topological groupoid*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 19(3), 237-244 (1975)
[doi:10.1017/S0013091500015509](https://doi.org/10.1017/S0013091500015509)
- [6] R. Brown, *Topology and Groupoids*, Createspace, (2006)
ISBN: 1-4196-2722-8
- [7] M. Crainic, R. L. Fernandes, I. Marcuț, *Lectures on Poisson Geometry*, Graduate Studies in Mathematics 217, American Mathematical Society (2021)
[doi:10.1090/gsm/217](https://doi.org/10.1090/gsm/217)
- [8] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Lie Groups*, Universitext, Springer Berlin, Heidelberg (2000)
[doi:10.1007/978-3-642-56936-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4)
- [9] P. Frejlich, I. Marcuț, *The bundle picture of Poisson transversals*, em preparação
- [10] H. Glöckner, *Lie group structures on quotient groups and universal complexifications for infinite-dimensional lie groups*, Journal of Functional Analysis, 194(2) (2002), pp. 347–409
[10.1006/jfan.2002.3942](https://doi.org/10.1006/jfan.2002.3942)
- [11] H. Glöckner, K.-H. Neeb, *Banach-Lie quotients, enlargability, and universal complexifications*, Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik (Crelles Journal) 560 (2003), 1 – 28
[doi:10.1515/crll.2003.056](https://doi.org/10.1515/crll.2003.056)
- [12] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)
ISBN 0-521-79540-0
- [13] H. Hofer, E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Springer Basel AG (1994)
[doi:10.1007/978-3-0348-8540-9](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8540-9)
- [14] D. Kan *Adjoint Functors*, Transactions of the American Mathematical Society. 87 (2): 294–329 (1958)
[doi:10.2307/1993102](https://doi.org/10.2307/1993102)
- [15] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 191, Springer New York (1999)
[doi:10.1007/978-1-4612-0541-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0541-8)

- [16] J. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer Graduate Texts in Mathematics, vol. 218 (2003)
[doi:10.1007/978-1-4419-9982-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5)
- [17] L. Loomis, S. Sternberg, *Advanced Calculus, Revised Edition*, World Scientific Publishing (2014)
[doi:10.1142/9095](https://doi.org/10.1142/9095)
- [18] J. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics
[doi:10.1016/s0898-1221\(99\)91199-9](https://doi.org/10.1016/s0898-1221(99)91199-9)
- [19] E. Meinrenken, *Group actions on manifolds*, lecture notes
<https://www.math.toronto.edu/mein/teaching/LectureNotes/action.pdf>
- [20] E. Meinrenken, *Poisson geometry from a Dirac perspective*, Lett Math Phys 108, 447–498 (2018).
[doi:10.1007/s11005-017-0977-4](https://doi.org/10.1007/s11005-017-0977-4)
- [21] I. Moerdijk, J. Mrcun, *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*, Cambridge University Press (2010)
[doi:10.1017/CB09780511615450](https://doi.org/10.1017/CB09780511615450)
- [22] M. R. Moreira, *On Lie's Third Theorem*
https://people.math.ethz.ch/~mimoreira/lie_3rd_thm.pdf
- [23] J. Mrcun, *Stability and invariants of Hilsum-Skandalis maps*, Ph.D. thesis, Utrecht University, 1996
[arXiv:math/0506484](https://arxiv.org/abs/math/0506484)
- [24] C. Ortiz, *Multiplicative Dirac structures on Lie groups*, Comptes Rendus. Mathématique, Volume 346 (2008) p. 1279–1282
[doi:10.1016/j.crma.2008.10.003](https://doi.org/10.1016/j.crma.2008.10.003)
- [25] A. Posilicano, *A lie group structure on the space of time-dependent vector fields*, Monatshefte für Mathematik 105, 287–293 (1988).
[doi:10.1007/BF01318805](https://doi.org/10.1007/BF01318805)
- [26] A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press (1988)
[doi:10.1007/BFb0084589](https://doi.org/10.1007/BFb0084589)
- [27] F. Shahini, A. Pakdaman, *The fundamental groupoid as a topological groupoid: Lasso topology*, Topology and its Applications Volume 302, 1 October 2021, 397–408
[doi:10.1016/j.topol.2021.107838](https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107838)
- [28] S. Świerczkowski, *The path-functor on banach lie algebras*, Indagationes Mathematicae Volume 74 (1971), pp. 235–239
[doi:10.1016/S1385-7258\(71\)80031-8](https://doi.org/10.1016/S1385-7258(71)80031-8)
- [29] W. T. Van Est, T. Korthagen, *Non-enlargible Lie algebras*, Indagationes Mathematicæ. 26, 15-31 (1964)
[doi:10.1016/S1385-7258\(64\)50003-7](https://doi.org/10.1016/S1385-7258(64)50003-7)
- [30] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, Journal of Differential Geometry 18 (1983) 523–557
[doi:10.4310/jdg/1214437787](https://doi.org/10.4310/jdg/1214437787)
- [31] G. Gross, E. Meinrenken, *Manifolds, Vector Fields and, Differential Forms*, Springer (2023)