Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-graduação em Matemática

Soluções fracas de EDP's semi-lineares elípticas envolvendo massa de Dirac

Dissertação de Mestrado

Gustavo Copé

Porto Alegre - RS
Março de 2024

Dissertação submetida por Gustavo Copé como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:

Dr. Diego Marcon Farias

Dr. José Afonso Barrionuevo

Dra. Juliana Sartori Ziebell

Dra. Patrícia Lisandra Guidolin

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores do Instituto de Matemática e Estatística, cujos conhecimentos, simpatia e dedicação nas aulas tornaram o curso possível e memorável.

Um gigantesco agradecimento ao meu orientador, Leonardo, por tornar essa dissertação possível. Não somente ministrou disciplinas ótimas, com extrema paciência e dedicação aos detalhes, como também foi o orientador dos sonhos de qualquer mestrando, ajudando a desvendar um trabalho um tanto complexo e sempre se mantendo disponível para sanar quaisquer dúvidas. Muito obrigado mesmo professor, sempre lhe terei como exemplo de docente ideal.

Agradeço a minha mãe, Rochele, por essencialmente tudo. Você esteve presente em todos os momentos e sempre me apoiou. Tenho certeza que sem você nada teria sido possível. Passamos por momentos difíceis juntos, mas tua ajuda sempre me manteve firme nos meus objetivos, e agora mais uma fase está sendo concluída. Espero que se orgulho de mim como filho, como me orgulho de você como mãe.

Agradeço ao meu padrasto, Bira, por ter se tornado meu novo pai. Obrigado por me ensinar muitas bobagens, compartilhar um chopp e vários Jack Daniel's e pelas várias caronas para POA em domingos, e tantas outras coisas.

Agradeço ao meu melhor amigo, Matheuszinho, por sempre me fazer rir e ser companhia nos rolês mais furados possíveis, bem como nos melhores. Único arrependimento é ter me levado ao mundo do lol, mas isso até dá para relevar com aquele gank. As amizades de verdade são poucas, e tenho certeza que você é uma delas. A única coisa que eu queria saber é quantas casas do Pi já foram calculadas até hoje, mas isso a gente descobre outra hora né?

Agradeço ao meu amigo, Leonardo Souza, pelas inúmeras discussões frutíferas e infrutíferas que tivemos nesses anos. Ver teus desenhos me dá vontade de aprender a desenhar, mas assim que pego um lápis na mão desisto e deixo essa parte para você. Inclusive, já saiu o demo de Dragon's Dogma para a gente jogar a noite toda?

Agradeço ao meu amigo, Mateus, que nunca me deixa esquecer de quão besta foi a maneira que quebrei meu dedo. Tuas piadas absurdas sempre me fazem rir, e nunca vou entender tua obsessão com anões. Por falar nisso, já se deu conta que tu está com meu ”Crônicas de Gelo e Fogo”há quase 10 anos?

Agradeço a meu amigo, Josué, por todos os momentos de ”tilt”no R6 e Vava, bem como os grandes momentos de pirataria. Alguma hora eu prometo voltar para o squad.

Agradeço também a todos meus colegas de curso, pelas conversas e trocas de ideias sobre matemática, em especial para você Humberto, por todas as discussões e exercícios que resolvemos juntos.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos o problema elíptico com massa de *Dirac* estudado por [1]:

$$\begin{cases} -\Delta u = V u^p + k\delta_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

no qual, $N > 2$, $p > 0$, $k > 0$, δ_0 é a massa de *Dirac* na origem, e V é um potencial localmente *Lipschitz* contínuo em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, satisfazendo certas hipóteses. Obtém-se duas soluções do problema (0.1) ao impor-se condições adicionais nos parâmetros a_0, a_∞, p e k. A primeira solução é uma solução minimal positiva, e a segunda é obtida utilizando o Teorema do Passo da Montanha. Além de reproduzir os resultados demonstrados em [1], buscamos também expandir as demonstrações feitas no artigo, incluindo mais detalhes.

Abstract

In this master thesis, we study the elliptic problem with *Dirac* mass studied by [1] :

$$\begin{cases} -\Delta u = V u^p + k\delta_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

where $N > 2$, $p > 0$, $k > 0$, δ_0 is the *Dirac* mass in the origin and V is a locally *Lipschitz* continuos potencial in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, satisfying some hypotheses. We obtain two positive solution of (0.2) with additional conditions for the parameters a_0, a_∞, p and k. The first solution is a minimal positive solution, while the second one is constructed using the Mountain Pass Theorem. Beyond reproducing the demonstrated results of [1], we sought to expand the demonstrations done in the article, including more details to it.

Sumário

Notação

Apresentamos abaixo algumas notações usadas ao longo do trabalho.

0.1 Espaços

- $L^p(\Omega, a(x)) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} : \varphi$ é mensurável, com $\int_\Omega a(x)|\varphi(x)|^p dx < \infty\}$, para $1 \leq p < \infty$;
- $L^\infty(\Omega, a(x)) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} :\ a(x)\varphi(x)$ é limitado e mensurável$\}$;
- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano padrão;
- $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev (definido em 2.1);
- $C(\Omega)$ é o espaço das funções contínuas reais em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $C^k(\Omega)$ é o espaço das funções reais k vezes diferenciáveis em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com derivadas de ordem k contínuas;
- $C^\infty(\Omega) = \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$;
- $C_c^\infty(\Omega)$ é o espaço $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω;
- $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ é o espaço $W^{1,2}(\Omega)$ com a norma $||v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)} = (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

0.2 Outras Notações

- $C, C_1, C_2, ...$ denota constantes diferentes. Podem aparecer outras letras definidas como constantes quando necessário. Em dados momentos aplica-se uma desigualdade sem mudar a constante; faz-se isso por simplicidade, caso a constante não seja importante;
- $\mathbb{G}[f]$ denota o operador de *Green*, definido em (2.3);
- $\to$ denota convergência com a topologia da norma em espaços normados;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em espaços normados;
- $\hookrightarrow$ denota imersão contínua.

1 Introdução

O objetivo desta dissertação é expandir as provas do problema desenvolvido em [1] sobre a existência e propriedades das múltiplas soluções fracas do problema elíptico não linear com massa de *Dirac*:

$$\begin{cases} -\Delta u = Vu^p + k\delta_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0, \end{cases} \tag{P_k}$$

onde $N > 2$, $p > 0$, $k > 0$, δ_0 é a massa de *Dirac* na origem, e V é um potencial localmente *Lipchitz* contínuo em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Para o potencial V, assumimos que ele tem suporte não vazio e existem $a_0 < N$, $a_0 < a_\infty$, $\sigma_1 > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ vale:

$$0 \le V(x) \le V_0(x) := \frac{\sigma_1}{|x|^{a_0}(1 + |x|^{a_\infty - a_0})}. \tag{1.1}$$

Tal condição implica em um comportamento de limitação para V na origem, controlado por $|x|^{-a_0}$, bem como também no infinito, controlado por $|x|^{-a_\infty}$.

Com o problema (P_k) nos preocupamos com um termo fonte, diferentemente do problema de absorção:

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \nu \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde ν é uma medida de *Radon*, Ω um domínio C^2 em $\mathbb{R}^N$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é não decrescente com $g(0) \ge 0$. Esse problema de absorção tem sido extensivamente estudado, com contribuições fundamentais dadas por Brezis [2] e Benilan e Brezis [3], nos quais eles mostram a existência e unicidade da solução fraca, caso g admita uma condição subcrítica:

$$\int_1^\infty (g(s) - g(-s))s^{-1-\frac{N}{N-2}} ds < \infty. \tag{1.3}$$

O método consiste em aproximar ν por uma sequência de funções regulares, considerar as funções clássicas associadas a estas e mostrar que elas convergem a solução fraca do problema original. A unicidade é então provada pela desigualdade de *Kato*. Já no caso do Problema (P_k), as mesmas técnicas não funcionam, de modo que devemos considerar métodos diferentes.

Comecemos enunciando o resultado de existência de solução do problema (P_k), o qual inclui propriedades da solução em relação ao potencial V e a constante k:

Teorema 1.1. *Suponhamos as condições (1.1) e $p > 0$ satisfazendo:*

$$p \in \left(\frac{N - a_\infty}{N - 2}, \frac{N - a_0}{N - 2}\right). \tag{1.4}$$

Então valem:

(i) Existe $k^* = k^*(p, V) \in (0, +\infty]$ tal que para $k \in (0, k^*)$, existe uma solução minimal positiva $u_{k,V}$ do problema (P_k). Se $k > k^*$ e $p > 1$, não existe solução do problema (P_k). Além disso, $k^* < \infty$ se $p > 1$; $k^* = +\infty$ se $0 < p < 1$, ou se $p = 1$ e σ_1 for pequeno.

(ii) Para p fixo, $k^*(p,V)$ é decrescente em V e o mapa $V \mapsto u_{k,V}$ é crescente.

(iii) Se V é radialmente simétrico, a solução minimal $u_{k,V}$ também é simétrica.

Denotamos por $u_{k,V}$ a solução minimal obtida pelo Teorema 1.1 corresponde a k e V. Tal solução de (P_k) é obtida através de uma sequência de iterações de uma sequência crescente $\{v_n\}_n$ definida por:

$$v_0 = k\mathbb{G}[\delta_0], \quad v_n = \mathbb{G}[Vv_{n-1}^p] + k\mathbb{G}[\delta_0], \tag{1.5}$$

onde $\mathbb{G}[f]$ é o operador de *Green* definido por:

$$\mathbb{G}[f] = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{c_N f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy. \tag{1.6}$$

Combinando essa construção com uma função barreira escolhida adequadamente através da estimativa:

$$\mathbb{G}[V\mathbb{G}[\delta_0]] \leq \sigma_2 \mathbb{G}[\delta_0] \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \tag{1.7}$$

com $\sigma_2 > 0$, provada no Lema 3.1, conseguimos mostrar a convergência da sequência a uma função limite $u_{k,V}$. Em seguida verificamos que essa função obtida de fato é solução minimal do problema (P_k). Essa estimativa é válida para k que esteja dentro $(0, k_p)$, com k_p

$$k_p = (\sigma_2 p)^{-\frac{p}{p-1}} \left(\frac{p}{p-1} \right), \tag{1.8}$$

o que fornece os limites para a construção da função barreira. Consequentemente, $k^* \geq k_p$.

Uma vez que a solução minimal foi encontrada, estudamos suas propriedades. Mais precisamente, mostra-se que a solução é clássica, a menos da origem, e determinamos seu decaimento quando tende a origem e ao infinito. Em seguida analisamos sua estabilidade, cujos resultados possibilita encontrar a segunda solução através do Teorema do Passo da Montanha.

Tais resultados são enunciados no seguinte teorema:

Teorema 1.2. *Supõe que V satisfaz (1.1) com $a_\infty > a_0$ e $a_0 \in \mathbb{R}$ e p satisfazendo (1.4). Então:*

(i) Se $a_0 < 2$, $p < 1$ e $k \in (0, k_p)$, então $u_{k,V}$ é uma solução clássica da equação:

$$\begin{cases} -\Delta u = Vu^p \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

e satisfaz

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} u(x)|x|^{N-2} < +\infty. \tag{1.10}$$

Além disso, $u_{k,V}$ é estável, e existe $c > 0$, independente de k tal que:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi|^2 dx - p \int\limits_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V}^{p-1} \xi^2 dx \geq c\left((k^*)^{\frac{p-1}{p}} - (k)^{\frac{p-1}{p}} \right) \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi|^2 dx, \tag{1.11}$$

para todo $\xi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$.

(ii) Se

$$p \in \left(0, \frac{N}{N-2}\right) \tag{1.12}$$

e $k \in (0, k^*)$, então a solução minimal $u_{k,V}$ é estável e satisfaz (1.11). Além disso, qualquer solução fraca não negativa u de (P_k) é uma solução clássica do problema (1.9) e satisfaz (1.10).

Notemos que nos itens (i) e (ii) do Teorema (1.2) o parâmetro k é limitado por k_p e k^*, respectivamente; não sabemos se $k_p < k^*$. Inclusive, responder esse questionamento está além do escopo desse trabalho, mas se caracteriza como uma continuação lógica dele.

A segunda solução de (P_k) é construída através do Teorema Passo da Montanha. Procuramos pelos pontos críticos do funcional:

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,V}, v_+)dx, \tag{1.13}$$

em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, com $t_+ = max\{0,t\}$ e:

$$F(s,t) = \frac{1}{p+1}\left[(s+t_+)^{p+1} - s^{p+1} - (p+1)s^p t_+\right]. \tag{1.14}$$

Para garantir que o funcional E esteja bem definido, analisamos as imersões:

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, V_0 u_{k,v}^{p-1}dx), \tag{1.15}$$

e

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N, V_0 dx), \tag{1.16}$$

as quais são compactas caso

$$p+1 \in (2^*(a_\infty), 2^*(a_0) \cap [1, 2^*)), \tag{1.17}$$

sendo:

$$2^*(t) = \frac{2N-2t}{N-2}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

e $2^* = 2^*(0)$. Com essas imersões, verificamos que o funcional E satisfaz as condições de *Palais-Smale*, nos permitindo encontrar uma segunda solução combinando o Teorema do Passo da Montanha com os Teoremas demonstrados em relação ao problema (P_k).

Tendo por base o intervalo de p para a existência da solução minimal, supõe-se:

$$p \in \left(\frac{N-a_\infty}{N-2}, \frac{N-a_0}{N-2}\right) \cap (\max\{2^*(a_\infty)-1, 0\}, \min\{2^*(a_0)-1, 2^*-1\}). \tag{1.19}$$

Essa interseção é não vazia, se ainda assumirmos que

$$a_0 < 2, \quad a_\infty > \max\left\{0, 1 + \frac{a_0}{2}\right\}. \tag{1.20}$$

Tais resultados para a segunda solução são englobados no seguinte:

Teorema 1.3. *Supõe que V satisfaz (1.1) com a_0 e a_∞ dados em (1.20), $p > 1$ satisfazendo (1.19) e k_p dado por (1.8). Então, para $k \in (0, k_p)$, o problema (P_k) admite uma solução fraca $u > u_{k,V}$. Ainda, u e $u_{k,V}$ são soluções clássicas de (1.9).*

Apesar de que não se pode determinar que $k_p < k^*$, podemos mostrar que se p satisfaz (1.12), então o problema (P_k) admite solução u tal que $u > u_{k,V}$ qualquer que seja $k \in (0, k^*)$.

Se V for radialmente simétrica, o intervalo de p pode ser melhorado para:

$$p \in \left(\frac{N - a_\infty}{N-2}, \frac{N - a_0}{N-2} \right) \cap \left(\max\{2^*(a_\infty) - 1, 0\}, 2^*(a_0) - 1 \right), \tag{1.21}$$

o que está englobado no último teorema, enunciado abaixo.

Teorema 1.4. *Supõe que V seja radialmente simétrica e satisfaça (1.1) com a_0 e a_∞ dados em (1.20), $p > 1$ satisfazendo (1.19) e k_p dado em (1.8). Então, para $k \in (0, k_p)$, o problema (P_k) admite solução radialmente simétrica $u > u_{k,V}$, e ambas são soluções clássicas de (1.9).*

Organizou-se a dissertação de maneira que cada capítulo englobe uma das partes principais das provas, seguindo um estilo clássico de demonstração para equações: existência, regularidade e segunda solução. No capítulo 3 construímos a solução fraca através de uma sequência crescente limitada, e refere-se ao Teorema 1.1. Em seguida provamos as propriedades de regularidade e estabilidade do Teorema 1.2 no capítulo 4, incluindo o teor clássico da solução, bem como seu comportamento quando $|x|$ tende a zero e infinito. Por fim, encontramos a segunda solução do Teorema 1.3 utilizando o Teorema do Passo da Montanha, bem como provamos o 1.4 sobre a solução envolvendo um potencial radialmente simétrico no capítulo 5.

2 Teoria Fundamental

Neste capítulo serão apresentados alguns pré-requisitos necessários para o entendimento dos resultados do trabalho. Enuncia-se resultados clássicos de EDP's, tais quais desigualdades de *Sobolev*, compacidade de *Rellich-Kondrachov*, Teorema da Montanha, entre outros. A não ser que mencionado, os resultados foram retirados de [4].

2.1 Derivada Fraca e Espaços de Sobolev

Notação. Denote por $C_c^\infty(U)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\phi : U \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em U. Chamamos as funções ϕ em $C_c^\infty(U)$ de funções teste.

Definição. *Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, onde cada componente α_i é um inteiro não negativo é chamado de multi-índice de ordem*

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n. \tag{2.1}$$

Definição. *Dado um multi-índice α, define-se:*

$$D^\alpha u(x) \coloneqq \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{2.2}$$

Definição. *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $0 < \alpha < 1$ e $u : U \to R$ limitada e contínua. Definimos*

(i) A α-ésima seminorma de Hölder

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} \coloneqq \sup_{x,y \in U, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\},$$

(ii) e a α-ésima norma de Hölder

$$||u||_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} \coloneqq ||u||_{C(\overline{U})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})}.$$

Definição. *Seja $u, v \in L^1_{loc}(U)$, e α um multi-índice. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u, denotada por:*

$$D^\alpha u = v, \tag{2.3}$$

caso valha

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx, \tag{2.4}$$

para todas as funções teste $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Lema 2.1 (Unicidade da derivada fraca)**.** *A α-ésima derivada parcial fraca de u, se existir, é unicamente definida a menos de um conjunto de medida nula.*

Definição. *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ consiste em todas as funções localmente integráveis $u : U \to \mathbb{R}$, tal que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(U)$.*

Definição. *Se $u \in W^{k,p}(U)$, definimos a norma nesse espaço como:*

$$||u||_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum\limits_{|\alpha|\leq k} ess\ \sup_U |D^\alpha u| & (p = \infty). \end{cases} \tag{2.5}$$

Dessa maneira, para o problema (P_k) fazemos a seguinte definição:

Definição. *Dizemos que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (P_k) se $u \geq 0$, $Vu^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e*

- $\lim\limits_{R\to+\infty} ||u||_{L^\infty((\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)))} = 0;$
- $\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta\xi)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Vu^p\xi dx + k\xi(0) \quad \forall \xi \in C^{1,1}_C(\mathbb{R}^N).$

Definição. *Dizemos que uma solução do problema (P_k) é estável (respectivamente, semi-estável), caso:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx \underbrace{>}_{(\geq)} p \int\limits_{\mathbb{R}^N} Vu^{p-1}\xi^2 dx \quad \forall \xi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}. \tag{2.6}$$

2.2 Resultados Relevantes

Definição. *Se $1 \leq p < n$, definimos o conjugado de Sobolev de p por:*

$$p^* := \frac{np}{n-p}. \tag{2.7}$$

Note que:

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \Rightarrow p^* > p. \tag{2.8}$$

Teorema 2.2 (Desigualdade de Gagliardo-Nireberg-Sobolev (GNS))**.** *Assuma que $1 \leq p < n$. Então existe uma constante C, dependendo somente de p e n, tal que:*

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C||Du||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.9}$$

para toda $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$

Teorema 2.3 (Estimativa para $W^{1,p}, 1 \leq p < N$)**.** *Seja U aberto e limitado contido em $\mathbb{R}^N$, com ∂U sendo C^1. Assuma $1 \leq p < n$, e $u \in W^{1,p}(U)$. Então $u \in L^{p^*}(U)$ com a estimativa*

$$||u||_{L^{p^*}(U)} \leq C||u||_{W^{1,p}(U)},$$

com a constante dependendo somente de p, N e U.

Definição. *Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Dizemos que X está compactamente contido em Y, denotado por:*

$$X \subset\subset Y, \tag{2.10}$$

caso

(i) $||x||_Y \leq C||x||_X (x \in X)$ *para alguma constante* C*,*

(ii) cada sequência limitada em X *é pré-compacta em* Y*.*

Teorema 2.4 (Teorema da Compacidade de Rellich-Kondrachov)**.** *Assuma que* U *é um conjunto aberto limitado de* $\mathbb{R}^n$*, e* ∂U *é* C^1*. Supõe que* $1 \leq p < n$*. Então:*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U), \tag{2.11}$$

para cada $1 \leq q < p^*$*.*

Teorema 2.5 (Príncipio do Máximo Fraco para $c \geq 0$)**.** *Seja* $U \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado,* $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$*,* L *um operador linear parcial de segunda ordem e*

$$c \geq 0 \qquad U.$$

(i) Se

$$Lu \leq 0 \qquad U,$$

então

$$\max_{\overline{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+.$$

(ii) Se

$$Lu \geq 0 \qquad U,$$

então

$$\min_{\overline{U}} u \geq \min_{\partial U} u^-.$$

Definição (Condição de Palais-Smale)**.** *Seja* H *um espaço de Hilbert, um funcional* $I \in C^1(H;\mathbb{R})$ *satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale se cada sequência* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *satisfazendo:*

(i) $\{I[u_k]\}_{k=1}^{\infty}$ *é limitada;*

(ii) $I'[u_k] \to 0$ *em* H*,*

for pré-compacta em H*.*

Definição. *Denotamos por* $\mathcal{C}$ *a coleção de funcionais* $I \in C^1(H;\mathbb{R})$ *satisfazendo a condição adicional:*

- $I' : H \to H$ *é Lipschitz contínua em subespaços limitados de* H*.*

Teorema 2.6 (Teorema do Passo da Montanha (Mountain Pass))**.** *Suponha que* $I \in \mathcal{C}$ *satisfaz a condição de Palais-Smale. Assuma também que:*

(i) I[0] = 0,

(ii) existem constantes $r, a > 0$ *tais que:*

$$I[u] \geq a \quad se \quad ||u|| = r, \tag{2.12}$$

(iii) existe um elemento $v \in H$ *com*

$$||v|| > r, \quad I[v] \leq 0. \tag{2.13}$$

Defina também

$$\Gamma \coloneqq \{g \in C([0,1]; H) \quad | \quad g(0) = 0, \quad g(1) = v\}. \tag{2.14}$$

Então

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I[g(t)], \tag{2.15}$$

é um ponto crítico de I.

O seguinte teorema é provado em [5].

Teorema 2.7 (Desigualdade de Hardy-Sobolev)**.** *Se Ω é limitado, aberto e de classe C^1, e $1 < p < \infty$, então existe uma constante $C > 0$, tal que $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\left|\left|\frac{u}{x}\right|\right|_{L^p(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)}. \tag{2.16}$$

Os dois resultados abaixo foram retirados de [6].

Lema 2.8. *Seja $B_1 = B_R(x_0)$, $B_2 = B_{2R}(x_0)$ bolas concêntricas em $\mathbb{R}^N$. Suponha $f \in C^\alpha(\overline{B_2})$, $0 < \alpha < 1$, e seja w um potencial Newtoniano de f em B_2. Então $w \in C^{2,\alpha}(\overline{B_1})$ e*

$$|D^2 w|'_{C^{0,\alpha}(B_1)} \leq C|f|'_{C^{0,\alpha}(B_2)}, \tag{2.17}$$

com C uma constante $C(N, \alpha)$.

Lema 2.9. *Seja w o potencial Newtoniano de f em $B = B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^N$ e C uma constante $C(N, \alpha)$.*

(i) Se $f \in L^\infty(B)$, então $Dw \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para cada $0 < \alpha < 1$ e

$$[Dw]_{C^{0,\alpha}(B)} \leq CR^{1-\alpha}||f||_{L^\infty(B)}. \tag{2.18}$$

(ii) Se $f \in L^p(B)$, com $p = \frac{n}{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, então $Dw \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ para cada $0 < \alpha < 1$ e

$$[Dw]_{C^{0,\alpha}(B)} \leq C||f||_{L^p(B)}. \tag{2.19}$$

2.3 Operador de Green

O operador de *Green*, $\mathbb{G}[\cdot]$, é definido por:

$$\mathbb{G}[f](x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x,y) f(y) dy, \tag{2.20}$$

onde

$$G(x,y) = \frac{c_N}{|x-y|^{N-2}}, \quad c_N = \frac{1}{N\omega_N(N-2)}, \tag{2.21}$$

que é a solução fundamental de $-\Delta$. Isto é,

$$\mathbb{G}[f](x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_N f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy, \quad \text{para} \quad x \neq 0. \tag{2.22}$$

Assim

$$u(x) = \mathbb{G}[f](x), \tag{2.23}$$

é a solução da equação de *Poisson* $-\Delta u = f$ para $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ no sentido das distribuições, ou seja,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathbb{G}(f)(-\Delta\xi)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\xi dx \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.24}$$

Também vale que $-\Delta \frac{c_N}{|x|^{N-2}} = \delta_0$ no sentido das distribuições, onde δ_0 é o Delta de *Dirac* definido por $\delta_0(\xi) = \xi(0) \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ou seja,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{c_N}{|x|^{N-2}}(-\Delta\xi)dx = \xi(0) = \delta_0(\xi) \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.25}$$

Isto motiva a definirmos $\mathbb{G}[\delta_0](x) = \frac{c_N}{|x|^{N-2}}$. Assim, $\mathbb{G}(f + k\delta_0) = \mathbb{G}(f) + k\frac{c_N}{|x|^{N-2}}$ é a solução no sentido das distribuições de

$$-\Delta\omega = f + k\delta_0, \tag{2.26}$$

isto é,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\mathbb{G}(f) + k\frac{c_N}{|x|^{N-2}}\right)(-\Delta\xi)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\xi dx + k\delta_0 \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.27}$$

Neste caso, esta igualdade vale $\forall \xi \in C_c^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Em seguida seguem dois resultados adicionais envolvendo o operador de *Green* que serão necessários, ambos provados em [1].

Proposição 2.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado e $h \in L^s(\Omega)$. Então, existe $c > 0$ tal que:*

$$||\mathbb{G}[h]||_{L^\infty(\Omega)} \leq c\,||h||_{L^s(\Omega)} \quad se \quad \frac{1}{s} < \frac{2}{N}; \tag{2.28}$$

$$||\mathbb{G}[h]||_{L^r(\Omega)} \leq c\,||h||_{L^s(\Omega)} \quad se \quad \frac{1}{s} \leq \frac{1}{r} + \frac{2}{N}, \quad s > 1; \tag{2.29}$$

$$||\mathbb{G}[h]||_{L^r(\Omega)} \leq c\,||h||_{L^1(\Omega)} \quad se \quad 1 < \frac{1}{r} + \frac{2}{N}. \tag{2.30}$$

Proposição 2.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado e $h \in L^s(\Omega)$. Então, existe $c > 0$ tal que:*

$$||\nabla\mathbb{G}[h]||_{L^\infty(\Omega)} \leq c\,||h||_{L^s(\Omega)} \quad se \quad \frac{1}{s} < \frac{2}{N}; \tag{2.31}$$

$$||\nabla\mathbb{G}[h]||_{L^r(\Omega)} \leq c\,||h||_{L^s(\Omega)} \quad se \quad \frac{1}{s} \leq \frac{1}{r} + \frac{2}{N}, \quad s > 1; \tag{2.32}$$

$$||\nabla\mathbb{G}[h]||_{L^r(\Omega)} \leq c\,||h||_{L^1(\Omega)} \quad se \quad 1 < \frac{1}{r} + \frac{2}{N}. \tag{2.33}$$

3 Existência de Solução Fraca

Nesta seção iremos demonstrar a existência de solução fraca para o problema (P_k). Começamos demonstrando o Lema 3.1, o qual será utilizado na construção de uma função barreira para a função candidata a solução. Definimos então um sequência crescente iterativamente. Combinando essa sequência com a uma função barreira adequada, verificamos que a sequência é limitada; portanto converge a alguma função $u_{k,V}$. Por fim, provamos que esta função limite é minimal e satisfaz o problema (P_k), se caracterizando como a solução fraca. Ainda, verificamos algumas propriedades dessa solução em relação ao potencial V e o termo k de (P_k).

3.1 Lema

Lema 3.1. *Assuma que V satisfaz (1.1), com $a_0 < N$, $a_\infty > 0$ e $p > 0$ satisfazendo (1.4). Então:*

$$\mathbb{G}[\,V\mathbb{G}^p[\,\delta_0]] \leq \sigma_2\,\mathbb{G}[\,\delta_0] \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \tag{3.1}$$

com σ_2 dependendo linearmente de σ_1.

Demonstração. Como $\mathbb{G}[\delta_0](x)$ é definido por

$$\mathbb{G}[\delta_0](x) = \frac{c_N}{|x|^{N-2}}, \tag{3.2}$$

e pelas hipóteses em p, temos que

$$V(x)\mathbb{G}^p[\delta_0](x) \leq \frac{c_N^p\sigma_1}{(1+|x|^{a_\infty-a_0})\,|x|^{(N-2)p+a_0}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \tag{3.3}$$

com $c_N > 0$ a constante de normalização dependente somente de N. Note que $V(x)\mathbb{G}^p[\delta_0] \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} V(x)\mathbb{G}^p[\delta_0](x)dx \leq \int\limits_{B_1(0)\setminus\{0\}} \frac{c_N^p\sigma_1}{(1+|x|^{a_\infty-a_0})\,|x|^{(N-2)p+a_0}}dx+ \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{c_N^p\sigma_1}{(1+|x|^{a_\infty-a_0})\,|x|^{(N-2)p+a_0}}dx.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Para a integral na bola $B_1(0)\setminus\{0\}$ temos

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_1(0)\setminus\{0\}} \frac{c_N^p\sigma_1}{(1+|x|^{a_\infty-a_0})\,|x|^{(N-2)p+a_0}}dx \leq \int\limits_{B_1(0)\setminus\{0\}} \frac{C}{|x|^{(N-2)p+a_0}}dx = \\ = C'\int_0^1 r^{-(N-2)p-a_0+N-1}dr.\end{aligned} \tag{3.5}$$

A integral (3.5) é finita se:

$$N-1-(N-2)p-a_0 > -1 \Leftrightarrow N > (N-2)p+a_0 \Leftrightarrow \frac{N-a_0}{N-2} > p, \tag{3.6}$$

o que é satisfeito. Para a outra integral:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{c_N^p\sigma_1}{(1+|x|^{a_\infty-a_0})\,|x|^{(N-2)p+a_0}}dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{c_N^p\sigma_1}{(|x|^{a_\infty-a_0})\,|x|^{(N-2)p+a_0}}dx \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{C}{|x|^{a_\infty+(N-2)p}}dx = C\int\limits_1^\infty r^{-a_\infty-(N-2)p+N-1}dr. \tag{3.7}$$

A qual é integrável caso

$$-a_\infty-(N-2)p+N-1<-1 \Leftrightarrow N-a_\infty<(N-2)p \Leftrightarrow \frac{N-a_\infty}{N-2}<p. \tag{3.8}$$

Que está de acordo com as condições; logo $V(x)\mathbb{G}^p[\delta_0]\in L^1(\mathbb{R}^N)$. Estimemos então $\mathbb{G}[V\mathbb{G}^p[\delta_0]]$. Por (3.3),

$$\mathbb{G}[V\mathbb{G}^p[\delta_0]](x) \le c_N^{p+1}\sigma_1\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\frac{1}{(1+|y|^{a_\infty-a_0})\,|y|^{(N-2)p+a_0}}dy. \tag{3.9}$$

Fazendo a mudança de variável $y\to y|x|$, sendo $e_x=\frac{x}{|x|}$, ficamos com

$$c_N^{p+1}\sigma_1\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|x||^{N-2}}\frac{|x|^N}{(1+(|x||y|)^{a_\infty-a_0})\,(|x||y|)^{(N-2)p+a_0}}dy=$$

$$=c_N^{p+1}\sigma_1\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|e_x-y|^{N-2}|x|^{N-2}}\frac{|x|^N}{(1+(|x||y|)^{a_\infty-a_0})\,(|y|)^{(N-2)p+a_0}(|x|)^{(N-2)p+a_0}}dy=$$

$$=c_N^{p+1}\sigma_1|x|^{2-(N-2)p-a_0}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|e_x-y|^{N-2}}\frac{1}{(1+(|x||y|)^{a_\infty-a_0})\,(|y|)^{(N-2)p+a_0}}dy=$$

$$:=c_N^{p+1}\sigma_1|x|^{2-(N-2)p-a_0}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Phi(x,y)dy. \tag{3.10}$$

Consideremos então os casos $|x|\ge 1$ e $|x|<1$.

(i) Caso $|x|\ge 1$. Lembre que por (1.4), $(N-2)p+a_0<N<(N-2)p+a_\infty$; dividimos então o domínio em 3 partes: $B_{\frac{1}{2}}(0)$, $B_{\frac{1}{2}}(e_x)$ e $\mathbb{R}^N\setminus(B_{\frac{1}{2}}(0)\cup B_{\frac{1}{2}}(e_x))$. Em $B_{\frac{1}{2}}(0)$, $|e_x-y|>c\ge\frac{1}{2}$. Logo,

$$\int\limits_{B_{\frac{1}{2}}(0)}\Phi(x,y)dy\le C\int\limits_{B_{\frac{1}{2}}(0)}\frac{1}{(1+(|x||y|)^{a_\infty-a_0})\,(|y|)^{(N-2)p+a_0}}dy. \tag{3.11}$$

Agora faz a mudança de variável $z=|x|y$, resultando em:

$$\leq C|x|^{(N-2)p+a_0-N} \int_{B_{\frac{|x|}{2}}(0)} \frac{1}{(1+|z|^{a_\infty - a_0})\,(|z|)^{(N-2)p+a_0}} dz =$$

$$= C|x|^{(N-2)p+a_0-N} \left[\int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|z|^{(N-2)p+a_0} + |z|^{(N-2)p+a_\infty}} + \right. \tag{3.12}$$

$$\left. + \int_{B_{\frac{|x|}{2}}(0)\setminus B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|z|^{(N-2)p+a_0} + |z|^{(N-2)p+a_\infty}} \right]$$

$$\leq C'|x|^{(N-2)p+a_0-N} \left[\int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|z|^{(N-2)p+a_0}} + \int_{B_{\frac{|x|}{2}}(0)\setminus B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|z|^{(N-2)p+a_\infty}} \right]. \tag{3.13}$$

Vejamos agora estimativas para as duas integrais acima:

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|z|^{(N-2)p+a_0}} = \int_{|w|=1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r^{(N-2)p+a_0}} r^{N-1} dr dw =$$

$$= n\omega_n \int_0^{\frac{1}{2}} r^{(N-1)-(N-2)p-a_0} dr. \tag{3.14}$$

Como $(N-1)-(N-2)p-a_0 > (N-1)-N = -1$, a integral fica, definindo $\gamma = (N-1)-(N-2)p-a_0+1 > 0$:

$$n\omega_n \frac{r^\gamma}{\gamma}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{n\omega_n}{\gamma 2^\gamma}. \tag{3.15}$$

Isto é, a primeira integral é limitada. Seguindo o mesmo processo, temos:

$$\int_{B_{\frac{|x|}{2}}(0)\setminus B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{dz}{|z|^{(N-2)p+a_\infty}} = n\omega_n \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{|x|}{2}} r^{(N-1)-(N-2)p+a_\infty} dr. \tag{3.16}$$

Observamos que $(N-1)-(N-2)p-a_\infty < (N-1)-N = -1$. Definindo $\gamma_\infty = (N-1)-(N-2)p-a_\infty+1 < 0$, ficamos com:

$$n\omega_n \frac{r^{\gamma_\infty}}{\gamma_\infty}\bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{|x|}{2}} = \frac{n\omega_n}{\gamma_\infty}\left[\left(\frac{|x|}{2}\right)^{\gamma_\infty} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_\infty}\right] = \frac{n\omega_n}{-\gamma_\infty}\left[\left(\frac{|1|}{2}\right)^{\gamma_\infty} - \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\gamma_\infty}\right] =$$

$$= \frac{n\omega_n}{|\gamma_\infty| 2^{\gamma_\infty}}\left[1 - |x|^{\gamma_\infty}\right] < \frac{n\omega_n}{|\gamma_\infty| 2^{\gamma_\infty}}. \tag{3.17}$$

Combinando as duas desigualdades, obtemos:

$$\int\limits_{B_{\frac{1}{2}}(0)} \Phi(x,y)dy \leq C|x|^{(N-2)p+a_0-N}\left[\frac{n\omega_n}{\gamma 2^{\gamma}}+\frac{n\omega_n}{|\gamma_\infty|2^{\gamma_\infty}}\right] \leq C'|x|^{(N-2)p+a_0-N}. \tag{3.18}$$

Agora consideramos $y \in B_{\frac{1}{2}}(e_x)$. Observa que nessa bola $\frac{1}{|y|}$ é limitado, uma vez que $|y| > \frac{1}{2}$ ($y \notin B_{\frac{1}{2}}(0)$). Assim:

$$\frac{1}{(1+(|x||y|))^{a_\infty-a_0}}\frac{1}{|y|^{(N-2)p+a_0}} \leq C\frac{1}{1+|x|^{a_\infty-a_0}} \leq C|x|^{a_0-a_\infty}, \tag{3.19}$$

donde:

$$\int\limits_{B_{\frac{1}{2}}(e_x)} \Phi(x,y)dy \leq C|x|^{a_0-a_\infty}\int\limits_{B_{\frac{1}{2}}(e_x)} \frac{dy}{|e_x-y|^{N-2}} \leq C'|x|^{a_0-a_\infty}. \tag{3.20}$$

Assim como em (3.19), também temos que $y \in \mathbb{R}^N \setminus (B_{\frac{1}{2}}(0) \cup B_{\frac{1}{2}}(e_x))$, vale

$$\frac{1}{(1+(|x||y|))^{a_\infty-a_0}}\frac{1}{|y|^{(N-2)p+a_0}} \leq C\frac{1}{1+|x|^{a_\infty-a_0}} \leq C|x|^{a_0-a_\infty}. \tag{3.21}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus(B_{\frac{1}{2}}(0)\cup B_{\frac{1}{2}}(e_x))} \Phi(x,y)dy \leq \\ \leq C|x|^{a_0-a_\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus(B_{\frac{1}{2}}(0)\cup B_{\frac{1}{2}}(e_x))} \frac{dy}{|e_x-y|^{N-2}|y|^{(N-2)p+a_\infty}}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Observa que nesse domínio vale:

$$\begin{aligned}|y| = |y+e_x-e_x| \leq |y-e_x|+|e_x| = |y-e_x|+1 = |y-e_x|+2\frac{1}{2} \leq \\ \leq |y-e_x|+2|y-e_x| = 3|y-e_x| \Rightarrow |y| \leq 3|y-e_x|.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Usando isso na integral:

$$\begin{aligned}C|x|^{a_0-a_\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus(B_{\frac{1}{2}}(0)\cup B_{\frac{1}{2}}(e_x))} \frac{dy}{|e_x-y|^{N-2}|y|^{(N-2)p+a_\infty}} \leq \\ \leq C'|x|^{a_0-a_\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus(B_{\frac{1}{2}}(0)\cup B_{\frac{1}{2}}(e_x))} \frac{dy}{|y|^{N-2}|y|^{(N-2)p+a_\infty}} \leq \\ \leq C|x|^{a_0-a_\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus(B_{\frac{1}{2}}(0))} \frac{dy}{|y|^{(N-2)(p+1)+a_\infty}}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Calculando a integral radial, vemos que a integral fora da bola é limitada, pois $(N-2)(p+1)+a_\infty - N + 1 > 1$, de maneira que:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus (B_{\frac{1}{2}}(0) \cup B_{\frac{1}{2}}(e_x))} \Phi(x,y)dy \leq C|x|^{a_0 - a_\infty}. \tag{3.25}$$

Combinando as estimativas obtidas com (3.9) e (3.10), bem como lembrando que $(N-2)p + a_\infty > N$, obtemos:

$$\mathbb{G}[\,V\mathbb{G}^p[\,\delta_0]](x) \leq C \max\{|x|^{2-N}, |x|^{2-(N-2)p-a_\infty}\} \leq C|x|^{2-N}, \text{ para } |x| \geq 1. \tag{3.26}$$

(ii) Caso $|x| \leq 1$. As estimativas anteriores das integrais continuam as mesmas, uma vez que as integrais são independentes de x (somente a segunda integral de (3.13) não existiria). Como $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, cada uma das integrais fica limitada. Logo, como $(N-2)p + a_0 < N$, e $|x| \leq 1$:

$$\mathbb{G}[\,V\mathbb{G}^p[\,\delta_0]](x) \leq C|x|^{2-(N-2)p-a_0} \leq C|x|^{2-N}. \tag{3.27}$$

Combinando as desigualdades (3.26) e (3.27), completamos a prova do Lema. □

Agora podemos demonstrar o primeiro teorema.

3.2 Demonstração do Teorema 1.1

Demonstração. (i) Considere o seguinte esquema de iteração;

$$v_0 = k\mathbb{G}[\delta_0], \quad v_n = \mathbb{G}[Vv_{n-1}^p] + k\mathbb{G}[\delta_0]. \tag{3.28}$$

Observemos que vale

$$v_1 = \mathbb{G}[Vv_0^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] > k\mathbb{G}[\delta_0] = v_0. \tag{3.29}$$

E assumindo para hipótese de indução que $v_{n-1}(x) > v_{n-2}(x)$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, temos:

$$v_n = \mathbb{G}[Vv_{n-1}^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] > \mathbb{G}[Vv_{n-2}^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] = v_{n-1}. \tag{3.30}$$

Isto é, $\{v_n\}_n$ é uma sequência crescente. Além disso, $\forall \xi \in C_c^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, vale por (2.27)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n(-\Delta\xi)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Vv_{n-1}^p \xi dx + k\xi(0). \tag{3.31}$$

Em seguida construímos um limite superior para a sequência definida. Para $t > 0$, seja

$$w_t := tk^p\mathbb{G}[V\mathbb{G}^p[\delta_0]] + k\mathbb{G}[\delta_0] \leq (\sigma_2 tk^p + k)\mathbb{G}[\delta_0], \tag{3.32}$$

com $\sigma_2 > 0$ do Lema (3.1). Assim

$$\mathbb{G}[Vw_t^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] \leq (\sigma_2 tk^p + k)^p\mathbb{G}[V\mathbb{G}^p[\delta_0]] + k\mathbb{G}[\delta_0] \leq w_t. \tag{3.33}$$

Isso é equivalente à:

$$(\sigma_2 tk^p + k)^p \mathbb{G}[V\mathbb{G}^p[\delta_0]] + k\mathbb{G}[\delta_0] \leq tk^p \mathbb{G}[V\mathbb{G}^p[\delta_0]^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sigma_2 tk^p + k)^p \leq tk^p \Leftrightarrow (\sigma_2 tk^{p-1} + 1)^p \leq t. \tag{3.34}$$

Construamos então t de forma que (3.33) seja satisfeito. Para $p > 1$, considere a função $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \left(\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} t + 1\right)^p. \tag{3.35}$$

Afirmamos que $f(t)$ intercepta $g(t) = t$ em um único ponto t_p. De fato, considerando a função $h(t) = f(t) - g(t)$, vemos que $h(0) > 0$ e $\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$, e seu único ponto de crítico é em $t_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$, no qual $h(t_p) = 0$. Isto é, f e g se interceptam no único ponto t_p. Escolhendo k e t_p tal que:

$$\sigma_2 k^{p-1} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}, \quad \text{e} \quad t_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p, \tag{3.36}$$

satisfazemos a condição (3.34). Para $p = 1$, tomamos $\sigma_2 > 0$ pequeno o suficiente para que $\sigma_2 < 1$ e:

$$t_p = \frac{1}{1-\sigma_2}. \tag{3.37}$$

Por fim, se $p < 1$, e para $t > 1$, tem-se:

$$(\sigma_2 tk^{p-1} + 1)^p \leq (\sigma_2 k^{p-1} + 1)^p t^p \leq t \Leftrightarrow (\sigma_2 k^{p-1} + 1) \leq t^{\frac{1-p}{p}}. \tag{3.38}$$

Assim, escolhendo $t_p = (\sigma_2 k^{p-1} + 1)^{\frac{p}{1-p}}$, temos a desigualdade desejada. Para w_{t_p} definido com o t_p adequado, temos que $w_{t_p} > v_0$. Logo

$$v_1 = \mathbb{G}[Vv_0^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] < \mathbb{G}[Vw_{t_p}^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] \leq w_{t_p}. \tag{3.39}$$

Supõe por indução que $v_{n-1} < w_{t_p}$; então:

$$v_n = \mathbb{G}[Vv_{n-1}^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] < \mathbb{G}[Vw_{t_p}^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] \leq w_{t_p}. \tag{3.40}$$

Logo, $v_n \leq w_{t_p} \forall n \in \mathbb{N}$.

A sequência $\{v_n\}_n$ assim construída é monótona e limitada; portanto converge para uma função $u_{k,V}$. Além disso, por (3.31), $u_{k,V}$ satisfaz o problema (P_k). Afirmamos que $u_{k,V}$ é uma solução mínima de (P_k), isto é, qualquer outra solução u de (P_k) é tal que $u_{k,V} \leq u$. De fato,

$$u = \mathbb{G}[Vu^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] > v_0, \tag{3.41}$$

donde:

$$u = \mathbb{G}[Vu^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] \geq \mathbb{G}[Vv_0^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] = v_1. \tag{3.42}$$

Indutivamente (similar aos casos anteriores), vemos que $u \geq v_n \quad \forall n \in \mathbb{G}$, e como $v_n \to u_{k,V}$, segue a afirmação.

Se o problema (P_k) admite solução não negativa u para $k_1 > 0$, então (P_k) admite solução minimal $u_{k,V}$ para qualquer $k \in (0, k_1]$. De fato, basta repetir a construção indutiva (3.28) para $k < k_1$, de maneira a obter uma sequência $\{v_{k,n}\}_n$ crescente e limitada, com solução minimal $u_{k,V}$, como feito para k_1. Além disso, sabemos que $u_{k,V} \leq u_{k_1,V}$ por construção das sequências, de forma que o mapa $k \mapsto u_{k,V}$ é crescente, e podemos definir:

$$k^* = \sup\{k > 0 : (P_k) \quad \text{tem solução mínima para} \quad k\}. \tag{3.43}$$

Claramente $k^* > 0$. Observa que para $0 < p < 1$ e $p = 1$, com σ_1 pequeno, sempre é possível encontrar uma supersolução w_{t_p}. Consequentemente, existe solução mínima para qualquer $k > 0$ e $k^* = \infty$.

Provemos então que para $p > 1$, temos $k^* < \infty$. Supõe por absurdo que (P_k) admite solução minimal $u_{k,V}$ para $k > 0$ grande (qualquer). Seja um ponto $x_0 \neq 0$, com $V(x_0) > 0$ e $r > 0$ tal que:

$$V(x) \geq \frac{V(x_0)}{2}, \quad \forall x \in B_r(x_0). \tag{3.44}$$

Denote por η_0 uma função C^2 tal que $\eta_0(x) = 1$, se $x \in B_1(0)$, e $\eta_0(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_2(0)$. Define também $\eta_0^R(x) = \eta_0(\frac{x-x_0}{R})$ e :

$$\xi_R(x) = \mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}]\eta_0^R(x) \in C_c^{1,1}(\mathbb{R}^N), \tag{3.45}$$

para $R > r$ e χ_Ω a função característica de Ω. Observa que:

$$\lim_{R\to\infty} \xi_R(x) = \mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}], \tag{3.46}$$

já que $\lim\limits_{R\to\infty} \eta_0^R(x) \to \eta_0(0) = 1$. Tomamos então uma função teste ξ_R com $R > 4r$, e obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx = \overbrace{\int_{B_r(x_0)} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx}^{A} + \overbrace{\int_{B_R(x_0)\setminus B_r(x_0)} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx}^{B} +$$
$$+ \int_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx + \overbrace{\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2R}(x_0)} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx}^{C} =$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V}^p \xi_R dx + k\xi_R(0). \tag{3.47}$$

Vemos que para a integral A, $x - x_0 < r$, uma vez que $x \in B_r(x_0)$. Consequentemente, $\frac{x-x_0}{R} < \frac{r}{R} < 1$. Assim $x \in B_r(x_0) \Rightarrow \eta_0^R(x) = 1$ e $(-\Delta)\xi_R = (-\Delta)\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}] = \chi_{B_r(x_0)} = 1$, e essa integral fica simplesmente

$$\int_{B_r(x_0)} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx = \int_{B_r(x_0)} u_{k,V} dx. \tag{3.48}$$

Para a integral B, temos o mesmo $(-\Delta)\xi_R = \chi_{B_r(x_0)}$, mas o domínio de integral esta fora de $B_r(x_0)$. Consequentemente, $(-\Delta)\xi_R = 0$ e

$$\int_{B_R(x_0)\setminus B_r(x_0)} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx = 0. \tag{3.49}$$

Por fim, na integral C, $x - x_0 > 2R$, ou seja $\frac{x-x_0}{R} > \frac{2R}{R} > 2$. Isto é, $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_2(0)$ e $\eta_0^R = 0$. Assim

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(x_0)} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx = 0, \tag{3.50}$$

e a equação (3.47) se simplifica para

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx = \int\limits_{B_r(x_0)} u_{k,V} dx + \int\limits_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V}^p \xi_R dx + k\xi_R(0). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Para $x \in B_{2R}(x_0) \setminus B_R(x_0)$ temos

$$\begin{aligned} |(-\Delta)\xi_R(x)| \leq |(-\Delta)\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}]\eta_0^R(x)| + 2|\nabla\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}] \cdot \nabla\eta_0^R(x)| + \\ + |\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}](-\Delta)\eta_0^R(x)| = \\ = 2|\nabla\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}] \cdot \nabla\eta_0^R(x)| + |\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}](-\Delta)\eta_0^R(x)|, \end{aligned} \tag{3.52}$$

já que $(-\Delta)\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}] = \chi_{B_r(x_0)} = 0$ nesse domínio. Pela definição de $\eta_0^R(x)$, é simples de ver que

$$|\nabla\eta_0^R(x)| = |\nabla\eta_0(\frac{x-x_0}{R})| \leq \frac{c}{R}, \tag{3.53}$$

bem como

$$|(-\Delta)\eta_0^R(x)| \leq \frac{c}{R^2}. \tag{3.54}$$

Para $|\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}]|$, temos

$$|\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}]| = \int\limits_{B_r(x_0)} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} dy. \tag{3.55}$$

Com o $x \in B_{2R}(x_0) \setminus B_R(x_0)$, temos que $|x-y| > R - r$ para $y \in B_r(x_0)$, e R é tal que $\frac{R}{4} > r$, temos, $|y - x| > \frac{3}{4}R$. Assim

$$\int\limits_{B_r(x_0)} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} dy \leq \int\limits_{B_r(x_0)} \left(\frac{3}{4}R\right)^{2-N} dy \leq CR^{2-N}. \tag{3.56}$$

De forma similar

$$\begin{aligned} |\nabla\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}]| \leq \int\limits_{B_r(x_0)} \left|\nabla\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right| dy = \\ (N-2)\int\limits_{B_r(x_0)} |x-y|^{1-N} dy \leq CR^{1-N}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Utilizando essas estimativas na eq.(3.52), temos

$$|(-\Delta)\xi_R(x)| = c_1\frac{R^{1-N}}{R} + c_2\frac{R^{2-N}}{R^2} \leq CR^{-N}, \tag{3.58}$$

em $B_{2R}(x_0) \setminus B_R(x_0)$. Como $u_{k,V}$ é solução de (P_k), temos que

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} u_{k,V}(x) = 0, \tag{3.59}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} u_{k,V}(-\Delta)\xi_R dx \right| &\leq \int\limits_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} |u_{k,V}||(-\Delta)\xi_R| dx \leq \\
&\leq \sup_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} u_{k,V} \int\limits_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} cR^{-N} dx = \\
&= \sup_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} u_{k,V} w_N \left[\frac{2^N R^N - R^N}{R^N}\right] \leq \\
&\leq C \sup_{B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)} u_{k,V} \to 0,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

pois $u_{k,V} \to 0$ quando $R \to \infty$. Utilizando esse limite, e as equações (3.46) e (3.51), ficamos com

$$\int\limits_{B_r(x_0)} u_{k,V} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V}^p \mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}] dx + k\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}](0). \tag{3.61}$$

Lembrando que $u_{k,V} \geq k\mathbb{G}[\delta_0] = v_0$, e $u_{k,V}$ é limitada por w_{t_p} e como $V(x) \geq \frac{V(x_0)}{2}$ em $B_r(x_0)$, $\mathbb{G}[\delta_0]$ e $\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}]$ também são limitadas inferiormente por $c > 0$ em $B_r(x_0)$ pela sua definição, temos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_r(x_0)} u_{k,V} dx &\geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V} k^{p-1} \mathbb{G}^{p-1}[\delta_0] \mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}] dx + k\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}](0) \geq \\
&\geq Ck^{p-1} \int\limits_{B_r(x_0)} u_{k,V} dx + k\mathbb{G}[\chi_{B_r(x_0)}](0),
\end{aligned} \tag{3.62}$$

absurdo para k grande o suficiente, uma vez que $u_{k,V}$ seria ilimitada. Assim, deve ser $k^* < \infty$.

(ii) Sejam p e k fixos, e $V_1 \geq V_2$. Define $u_{k,V_1} = \lim_{n\to\infty} u_{k,V_1}^n$, com

$$u_{k,V_1}^1 = \mathbb{G}[V_1 u_0^p] + k[\delta_0]; \tag{3.63}$$
$$u_{k,V_1}^{n+1} = \mathbb{G}[V_1 (u_{k,V_1}^n)^p] + k[\delta_0], \tag{3.64}$$

bem como, $u_{k,V_2} = \lim_{n\to\infty} u_{k,V_2}^n$, com

$$u_{k,V_2}^1 = \mathbb{G}[V_2 u_0^p] + k[\delta_0]; \tag{3.65}$$
$$u_{k,V_2}^{n+1} = \mathbb{G}[V_2 (u_{k,V_2}^n)^p] + k[\delta_0]. \tag{3.66}$$

Assim, $V_1 \geq V_2$ implica em $\mathbb{G}[V_1 u_0^p] \geq \mathbb{G}[V_2 u_0^p] \Rightarrow u_{k,V_1}^1 \geq u_{k,V_2}^1$. Por indução

$$u^{n+1}_{k,V_1} \geq u^{n+1}_{k,V_2} \Rightarrow u_{k,V_1} \geq u_{k,V_2}. \tag{3.67}$$

Logo $V \mapsto u_{k,V}$ é crescente. Além disso, se $k < k^*(p, V_1)$, então u_{k,V_1} está bem definido e, por esta construção, u_{k,V_2} também está, já que $u_{k,V_2} \leq u_{k,V_1}$. Logo $k^*(p, V_1) \leq k^*(p, V_2)$.

(iii) Se o potencial V for radialmente simétrico, v_1 (3.29) também será, uma vez que esse é função de funções radialmente simétricas. Como a solução é obtida através do esquema de iteração (3.28), cada um de seus termos é radialmente simétrico; consequentemente, seu limite $u_{k,V}$ também será.

□

Notemos também que para $p > 1$ e $k \in (0, k_p]$, com $k_p := \frac{p-1}{p}(\sigma_2 p)^{-\frac{1}{p-1}}$, a solução mínima satisfaz

$$u_{k,V} \leq w_{t_p} \leq Ck\mathbb{G}[\delta_0] \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \tag{3.68}$$

com C dependendo somente em k_p. Assim $Vu_{k,V}$ é localmente limitada em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. De fato, pela definição de w_{t_p} (3.32), bem como as condições nesse intervalo de $p > 1$ (3.36), a afirmação segue diretamente.

4 Regularidade e Estabilidade

Nessa seção verificamos a regularidade e estimativas de decaimento para a solução fraca, bem como estabelecemos a estabilidade da solução. Comecemos pela regularidade:

4.1 Proposição 4.1 (Solução Clássica)

Proposição 4.1. *Assuma que V satisfaz (1.1) com $a_\infty > a_0$ e $a_0 \in \mathbb{R}$, e*

$$p \in \left(0\,,\, \frac{N}{N-2}\right). \tag{4.1}$$

Então, qualquer solução fraca positiva u de (P_k) é uma solução clássica de (1.9).

Demonstração. Seja u solução fraca de (P_k). Como Vu^p é $L^1(\mathbb{R}^N)$, podemos escrever u como

$$u = \mathbb{G}[Vu^p] + k\mathbb{G}[\delta_0], \tag{4.2}$$

para $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Seja $r_0 = \frac{1}{4}|x_0|$, e $B_i = B_{2^{-i}r_0}(x_0)$. Então para qualquer $i \in \mathbb{N}$, temos

$$u = \mathbb{G}[\chi_{B_{i-1}} Vu^p] + \mathbb{G}[\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_{i-1}} Vu^p] + k\mathbb{G}[\delta_0], \tag{4.3}$$

e $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ (já que é localmente Lipschitz contínuo). Para $x \in B_i$, tem-se

$$\mathbb{G}[\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_{i-1}} Vu^p] = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_{i-1}} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x-y|^{N-2}} dy, \tag{4.4}$$

e como $y \in \mathbb{R}^N \setminus B_{i-1}$, então $|x-y| \geq r_0 2^{-i}$. Utilizando essa desigualdade, e considerando o anel definido por B_i e B_{i-1}, temos que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{G}[\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_{i-1}} Vu^p]||_{L^\infty(B_i)} &= \sup_{x\in B_i} \mathbb{G}[\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_{i-1}} Vu^p] \leq \\ &\leq \left(\frac{2^i}{r_0}\right)^{N-2} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_{i-1}} c_N V(y) u^p(y) dy \leq \\ &\leq C_i \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(y) u^p(y) dy = C_i ||Vu^p||_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \\ \text{onde} \quad C_i &= \left(\frac{2^i}{r_0}\right)^{N-2} C_N = \frac{C}{|x_0|^{N-2}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Da equação (3.2), temos que

$$G[\delta_0](x) = \frac{c_n}{|x|^{N-2}}, \tag{4.6}$$

para $x \in B_i$, $|x - x_0| < 2^{-i} r_0 \leq r_0$. Consequentemente

$$|x| \geq |x_0| - |x - x_0| > 4r_0 - r_0 = 3r_0 = \frac{3}{4}|x_0|. \tag{4.7}$$

Logo, na bola B_i

$$|G[\delta_0](x)| = \frac{c_n}{|x|^{N-2}} \leq \frac{c_n}{\left(\frac{3}{4}|x_0|\right)^{N-2}} = \frac{D}{|x_0|^{N-2}}. \tag{4.8}$$

Também se tem que:

$$Vu^p \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \chi_{B_{i-1}} Vu^p \in L^1(B_i) \Rightarrow \mathbb{G}[\chi_{B_{i-1}} Vu^p] \in L^s(B_i), \tag{4.9}$$
$$\text{se} \quad s < \frac{N}{N-2},$$

pela Proposição 2.10, desigualdade (2.30). Como $\mathbb{G}[\chi_{B_{i-1}} Vu^p]$, $\mathbb{G}[k\delta_0] \in L^\infty(B_{i-1})$, então

$$\mathbb{G}[\chi_{B_{i-1}} Vu^p],\ \mathbb{G}[k\delta_0] \in L^s(B_{i-1}). \tag{4.10}$$

Logo, por (4.3), $u \in L^s(B_{i-1})$ para $1 \leq s < \frac{N}{N-2}$. Portanto, $u^p \in L^{\frac{s}{p}}(B_{i-1})$ para $p \in (0, s)$. Isto é, $u^p \in L^q(B_{i-1})$ para $1 \leq q < \frac{N}{p(N-2)}$ $\left(\frac{N}{p(N-2)} > 1 \text{ pois } p < \frac{N}{N-2}\right)$. Em particular, vale para um $q_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{p}\frac{N}{N-2}\right)$

Pela Proposição 2.10, tem-se que:

$$\mathbb{G}[\chi_{B_{2r_0}}(x_0) Vu^p] \in L^{p_1}(B_{2r_0}(x_0)), \quad \text{com} \quad p_1 = \frac{Nq_0}{N - 2q_0}. \tag{4.11}$$

A condição da proposição pode ser facilmente verificada:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{2}{N} \geq \frac{1}{q_0} \Leftrightarrow \left(\frac{Nq_0}{N-2q_0}\right)^{-1} + \frac{2}{N} = \frac{1}{q_0} - \frac{2}{N} + \frac{2}{N} = \frac{1}{q_0}. \tag{4.12}$$

Analogamente, $Vu^p \in L^{q_1}(B_{r_0}(x_0))$, com $q_1 = \frac{p_1}{p}$, visto que $q_1 \geq 1$. De fato

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q_0} < 1 = \frac{2}{N} + \frac{N-2}{N} \overbrace{\leq}^{p<\frac{N}{N-2}} \frac{1}{p} + \frac{2}{N} \Leftrightarrow \frac{1}{q_o} < \frac{1}{p} + \frac{2}{N} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{q_0} - \frac{2}{N} < \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{N-2q_0}{Nq_0} < \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{1}{p_1} < \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{p_1}{p} = q_1 > 1, \end{aligned} \tag{4.13}$$

e também novamente pela Proposição 2.10,

$$\mathbb{G}[\chi_{B_{r_0}}(x_0) Vu^p] \in L^{p_2}(B_{r_0}(x_0)), \quad \text{com} \quad p_2 = \frac{Nq_1}{N-2q_1}. \tag{4.14}$$

Seja $q_i = \frac{p_i}{p}$ e $p_{i+1} = \frac{Nq_i}{N-2q_i}$, se $N - 2q_i > 0$. Suponhamos que $N - 2q_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim obtemos indutivamente, repetindo o argumento de (4.13), que

$$Vu^p \in L^{q_i}(B_i) \quad \text{e} \quad \mathbb{G}[\chi_{B_i} Vu^p] \in L^{p_{i+1}}(B_i), \tag{4.15}$$

com cada $q_i > 1$. Verificamos também que

$$\frac{q_{i+1}}{q_i} = \frac{p_{i+1}}{pq_i} = \frac{Nq_i}{q_i p(N-2q_i)} = \frac{N}{p(N-2q_i)} \tag{4.16}$$

Como $q_i > 1$, $N - 2q_i < N - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{N-2} < \frac{1}{N-2q_i}$. Combinando com $p \in \left(0, \frac{N}{N-2}\right)$, temos

$$\frac{q_{i+1}}{q_i} = \frac{N}{p(N-2q_i)} > \frac{N}{p(N-2)} > 1, \tag{4.17}$$

isto é, $\lim_{i\to\infty} q_i = +\infty$. Porém, isso contradiz que $N - 2q_i > 0 \quad \forall i$. Logo, $\exists \quad i_0 - 1$ tal que $N - 2q_{i_0-1} > 0$, mas $N - 2q_{i_0} < 0$; tem-se então que $Vu^p \in L^{q_{i_0}}(B_{i_0})$, e $N - 2q_{i_0} < 0 \Rightarrow \frac{1}{q_{i_0}} < \frac{2}{N}$. Assim, pela proposição 2.10

$$||\mathbb{G}[\chi_{B_{i_0}} Vu^p]||_{L^\infty(B_{i_0})} \leq C||Vu^p||_{L^{q_{i_0}}(B_{i_0})} < \infty, \tag{4.18}$$

isto é

$$\mathbb{G}[\chi_{B_{i_0}} Vu^p] \in L^\infty(B_{i_0}). \tag{4.19}$$

Lembrando que $u(x_0)$ pode ser escrito como

$$u = \mathbb{G}[\chi_{B_{i_0}} Vu^p] + \mathbb{G}[\chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_{i_0}} Vu^p] + k\mathbb{G}[\delta_0], \tag{4.20}$$

por (4.1), (4.8) e (4.19) temos

$$|u(x_0)| \leq ||\mathbb{G}[\chi_{B_{i_0}} Vu^p]||_{L^\infty(B_{i_0})}(x_0) + ||\mathbb{G}[\chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_{i_0}} Vu^p]||_{L^\infty(B_{i_0})}(x_0) +$$
$$+ k||\mathbb{G}[\delta_0]||_{L^\infty(B_{i_0})}(x_0) \leq C' + C_i ||Vu^p||_{L^1(B_{2r_0}(x_0))}(x_0) + \frac{D}{|x_0|^{N-2}} < C, \tag{4.21}$$

e assim

$$Vu^p \in L^\infty(B_{i_0}). \tag{4.22}$$

Ainda, pela Proposição 2.11:

$$|\nabla \mathbb{G}[\chi_{B_{i_0}} Vu^p]| \in L^\infty(B_{i_0}). \tag{4.23}$$

Porém, é possível conseguir mais que isso; podemos mostrar que $|u(x_0)| \to 0$, quando $|x_0| \to \infty$. Para o terceiro termo de (4.21), é trivial. Para o segundo, temos que

$$C_i ||Vu^p||_{L^1(B_{2r_0}(x_0))} = \frac{c_i}{(r_0)^{N-2}} ||Vu^p||_{L^1(B_{2r_0}(x_0))} = \frac{2^{N-2} c_i}{|x_0|^{N-2}} ||Vu^p||_{L^1(B_{2r_0}(x_0))}, \tag{4.24}$$

lembrando que $Vu^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, segue o resultado desejado. Para o primeiro termo, temos que para um $x = x_0$ tem-se

$$|\mathbb{G}[\chi_{B_{i_0}} Vu^p]||_{L^\infty(B_{i_0})}(x_0)| = \int_{B_{r_{i_0}}(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0 - y|^{N-2}} dy. \tag{4.25}$$

Se $r_{i_0} > 1$, então considere

$$\int_{B_{r_{i_0}}(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0 - y|^{N-2}} dy = \int_{B_1(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0 - y|^{N-2}} dy + \int_{B_{r_{i_0}}(x_0) \setminus B_1(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0 - y|^{N-2}} dy. \tag{4.26}$$

Note que

$$\int\limits_{B_1(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0-y|^{N-2}} dy \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_{B_1(x_0)} (c_n V(y) u^p(y))^{q_{i_0}}\, dy \right]^{\frac{1}{q_{i_0}}} \left[\int\limits_{B_1(x_0)} \left(\frac{1}{|x_0-y|^{N-2}} dy \right)^{\overline{q_{i_0}}} \right]^{\frac{1}{\overline{q_{i_0}}}} =$$

$$= \tilde{c_n} ||Vu^p||_{L^{q_{i_0}}(B_1(x_0))} \int_0^1 r^{(N-1)-(N-2)\overline{q_{i_0}}} dr, \tag{4.27}$$

onde $\overline{q_{i_0}}$ é o conjugado de q_{i_0}, isto é:

$$\frac{1}{q_{i_0}} + \frac{1}{\overline{q_{i_0}}} = 1. \tag{4.28}$$

Observe que se $q_{i_0} \to \infty$, então $\overline{q_{i_0}} \to 1$; logo vale $(N-1)-(N-2)\overline{q_{i_0}} > -1$, para q_{i_0} grande, donde

$$\int_0^1 r^{(N-1)-(N-2)\overline{q_{i_0}}} dr = \frac{r^{(N-1)-(N-2)\overline{q_{i_0}}}}{C} \Bigg|_0^1 = C < \infty. \tag{4.29}$$

Portanto

$$\int\limits_{B_1(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0-y|^{N-2}} dy \leq \tilde{c_n} ||Vu^p||_{L^{q_{i_0}}(B_1(x_0))}. \tag{4.30}$$

Note agora, que

$$\int\limits_{B_{r_{i_0}}(x_0)\setminus B_1(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0-y|^{N-2}} dy \leq$$

$$\int\limits_{B_{r_{i_0}}(x_0)\setminus B_1(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{1} dy \leq ||Vu^p||_{L^1(B_{r_{i_0}}(x_0))}. \tag{4.31}$$

Logo

$$\int\limits_{B_{r_{i_0}}(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0-y|^{N-2}} dy \leq ||Vu^p||_{L^1(B_{r_{i_0}}(x_0))} + \tilde{c_n} ||Vu^p||_{L^{q_{i_0}}(B_1(x_0))}. \tag{4.32}$$

Se $r_{i_0} \leq 1$, repetimos a estimativa para a primeira parcela

$$\int\limits_{B_{r_{i_0}}(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0-y|^{N-2}} dy \leq c_n ||Vu^p||_{L^{q_{i_0}}(B_{r_{i_0}}(x_0))} \leq c_n ||Vu^p||_{L^{q_{i_0}}(B_1(x_0))}. \tag{4.33}$$

Em qualquer dos casos temos:

$$\int\limits_{B_{r_{i_0}}(x_0)} \frac{c_n V(y) u^p(y)}{|x_0-y|^{N-2}} dy \leq ||Vu^p||_{L^1(B_{r_{i_0}}(x_0))} + \tilde{c_n} ||Vu^p||_{L^{q_{i_0}}(B_1(x_0))} < C. \tag{4.34}$$

Vejamos agora que $|\mathbb{G}[\chi_{B_{i_0}}Vu^p]||_{L^\infty(B_{i_0})}(x_0)| \to 0$, a medida que $|x_0| \to \infty$. Temos que $|u(x_0)| < M$ para $|x_0| > 1$, por (4.21); combinando com a estimativa anterior

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{B_{r_{i_0}}(x_0)} \frac{c_n V(y)u^p(y)}{|x_0-y|^{N-2}}dy \leq |||Vu^p||_{L^1(B_{r_{i_0}}(x_0))} + \tilde{c_n}||Vu^p||_{L^{q_{i_0}}(B_1(x_0))} \leq \\
&\leq C \underbrace{||Vu^p||_{L^1(B_{2r_0}(x_0))}}_{\to 0 \text{ (já visto)}} + \tilde{c_n}||Vu^p||_{L^{q_{i_0}}(B_1(x_0))} \leq ||VM^p||_{L^{q_{i_0}}(B_1(x_0))} \leq \\
&\leq M^p||V||_{L^\infty(B_1(x_0))}\left(\int\limits_{B_1(x_0)} 1^{q_{i_0}}\right)^{\frac{1}{q_{i_0}}} \to 0, \text{ quando } |x_0| \to \infty.
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

Em B_{i_0}, temos que $\Delta u = Vu^p$. Como $Vu^p \in L^\infty(B_{i_0})$, então $\nabla u \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ $\forall \alpha \in (0,1)$, pelo Lema 2.9, ou, $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ no mesmo intervalo de α. Consequentemente, $u \in C^\alpha_{loc}$; sendo a solução $u > 0$, u^p também é localmente Hölder contínua. Portanto, como V é localmente Lipschitz contínua, Vu^p é localmente de *Hölder* isto é, $Vu^p \in C^\alpha_{loc}(B_{i_0})$. Pelo Lema 2.8, temos que $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(B_{i_0})$, isto é, é solução clássica de (P_k). $\square$

A proposição em seguida estuda a singularidade da solução fraca de (P_k) na origem, bem como seu decaimento no infinito. Primeiro precisamos provar alguns resultados auxiliares.

4.2 Lema 4.2

Lema 4.2. *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mensurável, tal que $0 \leq f(y) \leq |y|^{-\beta}$, para $\beta < N$ e $f \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$. Então*

$$
|\mathbb{G}[f](x)| \leq \begin{cases} C|x|^{-\beta+2} & \textit{para} \quad x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}, \quad \textit{se} \quad \beta > 2 \\ C_1 + C_2|x|^{-1} & \textit{para} \quad x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}, \quad \textit{se} \quad \beta = 2 \\ C_3 & \textit{para} \quad x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}, \quad \textit{se} \quad \beta < 2, \end{cases} \tag{4.36}
$$

onde C, C_1 e C_2 só dependem de N e C_3 só depende de N e R.

Demonstração. Note que

$$
\mathbb{G}[f](x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}}dy = \int\limits_{B_R(0)} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}}dy \leq \int\limits_{B_R(0)} \frac{|y|^{-\beta}}{|x-y|^{N-2}}dy. \tag{4.37}
$$

Seja

$$
\varphi(x) = \int\limits_{B_R(0)} \frac{1}{|y|^\beta|x-y|^{N-2}}dy = \int\limits_{B_R(0)} I(x,y)dy. \tag{4.38}
$$

Logo $|\mathbb{G}[f](x)| \leq \varphi(x)$. Afirmação:

$$|\varphi(x)| \leq \begin{cases} C|x|^{-\beta+2} & \text{para} \quad x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}, \quad \text{se} \quad \beta > 2 \\ C_1 + C_2|x|^{-1} & \text{para} \quad x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}, \quad \text{se} \quad \beta = 2 \\ C_3 & \text{para} \quad x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}, \quad \text{se} \quad \beta < 2, \end{cases} \tag{4.39}$$

Dado $x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}$, define $\delta = \frac{|x|}{3}$. Note que (definindo $A = B_R(0) \setminus (B_\delta(0) \cup B_\delta(x))$)

$$\varphi(x) = \underbrace{\int_{B_\delta(0)} I(x,y)dy}_{(i)} + \underbrace{\int_{B_\delta(x)} I(x,y)dy}_{(ii)} + \underbrace{\int_{A} I(x,y)dy}_{(iii)}. \tag{4.40}$$

Analisemos cada integral separadamente:

(i)

$$\begin{gathered} y \in B_\delta(0) \Rightarrow |y| < \delta \Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y| \geq 3\delta - \delta = 2\delta \\ \therefore |x-y| \geq 2\delta. \end{gathered} \tag{4.41}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(0)} \frac{1}{|y|^\beta |x-y|^{N-2}} dy &\leq \int_{B_\delta(0)} \frac{1}{|y|^\beta (2\delta)^{N-2}} dy = \frac{c_n}{(2\delta)^{N-2}} \int_0^\delta \frac{r^{N-1}}{r^\beta} dr = \\ &= \frac{c_n}{2^{N-2}(N-\beta)} \frac{r^{N-\beta}}{\delta^{N-2}} \Bigg|_0^\delta = C\delta^{2-\beta} = C'|x|^{2-\beta}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

(ii)

$$\begin{gathered} y \in B_\delta(x) \Rightarrow |y| = |y + x - x| \geq |x| - |x-y| \geq 3\delta - \delta = 2\delta \\ \therefore |y| \geq 2\delta, \end{gathered} \tag{4.43}$$

assim

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(x)} \frac{1}{|y|^\beta |x-y|^{N-2}} dy &\leq \int_{B_\delta(x)} \frac{1}{|2\delta|^\beta |x-y|^{N-2}} dy = \frac{c_n}{(2\delta)^\beta} \int_0^\delta \frac{r^{N-1}}{r^{N-2}} dr = \\ &\frac{c_n}{2^\beta} \frac{r^2}{2\delta^\beta} \Bigg|_0^\delta = C\delta^{2-\beta} = C'|x|^{2-\beta}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

(iii) Se $y \in A$, então

$$\begin{gathered} y \in A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \notin B_\delta(0) \Rightarrow |y| > \delta \\ y \notin B_\delta(x) \Rightarrow |y-x| > \delta \end{array} \right\} \Rightarrow |y| \leq |x| + |y-x| = 3\delta + |y-x| \\ \therefore |y| < 3\delta + |y-x| < 4|y-x| \Rightarrow \frac{1}{|y|} \geq \frac{1}{4|x-y|}. \end{gathered} \tag{4.45}$$

Logo

$$
\int_A \frac{1}{|y|^\beta |x-y|^{N-2}} dy \leq \int_A \frac{1}{|y|^\beta} \frac{4^{N-2}}{|y|^{N-2}} dy \leq \int_{B_R(0)\backslash B_\delta(0)} \frac{1}{|y|^\beta} \frac{4^{N-2}}{|y|^{N-2}} dy =
$$

$$
= 4^{N-2} c_n \int_\delta^R \underbrace{\frac{r^{N-1}}{r^{\beta+N-2}}}_{r^{1-\beta}} dr. \tag{4.46}
$$

Para essa integral temos 3 casos:

(a) 1º Caso: $1-\beta > -1$ $(\beta < 2)$

$$
C \int_\delta^R r^{1-\beta} dr = C \frac{r^{2-\beta}}{2-\beta}\Bigg|_\delta^R = \frac{C}{2-\beta}(R^{2-\beta} - \delta^{2-\beta}) \leq C' R^{2-\beta} = \tilde{C}. \tag{4.47}
$$

(b) 2º Caso: $1-\beta = -1$ $(\beta = 2)$

$$
C \int_\delta^R r^{1-\beta} dr = C\ ln(r)\Bigg|_\delta^R = C(ln(R) - ln(\delta)) = C_1 - C_2 ln(\delta) =
$$

$$
= C_1 + C_2 ln\left(\frac{1}{\delta}\right) \leq C_1. + C_2\left(\frac{1}{\delta}\right) = C_1 + C_2\delta^{-1} = C_1 + C_2'|x|^{-1}
$$

(c) 3º Caso: $1-\beta < -1$ $(\beta > 2)$
Note que $\beta > 2 \Rightarrow 2-\beta < 0$. Assim

$$
C \int_\delta^R r^{1-\beta} dr = C \frac{r^{2-\beta}}{2-\beta}\Bigg|_\delta^R = \frac{C}{\beta-2}(\delta^{2-\beta} - R^{2-\beta}) \leq C'\delta^{2-\beta} = \tilde{C}|x|^{2-\beta}. \tag{4.48}
$$

Somando as 3 parcelas, completa-se a prova da afirmação.

□

4.3 Lema 4.3

Lema 4.3. *Se* $u \in L^\gamma(B_R(0))$, *com* $R \leq 1$ *e* $\gamma \geq 1$, *então:*

(i) $\mathbb{G}[Vu^p\chi_{B_1(0)}] \in L^s(B_R(0))$, *se*

$$
\frac{1}{s} > \frac{p}{\gamma} + \frac{a_0 - 2}{N}; \tag{4.49}
$$

(ii) $\mathbb{G}[Vu^p\chi_{B_1(0)}] \in L^\infty(B_R(0))$, *se*

$$
\frac{p}{\gamma} + \frac{a_0 - 2}{N} < 0. \tag{4.50}
$$

Demonstração. (i) Supõe que $u \in L^{\gamma}(B_R(0))$. Afirmação: se

$$\frac{1}{\beta} > \frac{p}{\gamma} + \frac{a_0}{N}, \tag{4.51}$$

então $Vu^p\chi_{B_1(0)} \in L^{\beta}(B_R(0))$. Observamos que

$$\int\limits_{B_R(0)} (Vu^p\chi_{B_1(0)})^{\beta} dy \underbrace{=}_{R\leq 1} \int\limits_{B_R(0)} V^{\beta}u^{p\beta} dy, \tag{4.52}$$

e apliquemos a desigualdade de *Hölder* para o par de conjugados s e $\overline{s}$

$$\int\limits_{B_R(0)} V^{\beta}u^{p\beta} dy \leq \left(\int\limits_{B_R(0)} V^{s\beta} dy\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int\limits_{B_R(0)} u^{p\overline{s}\beta} dy\right)^{\frac{1}{\overline{s}}}. \tag{4.53}$$

O potencial $V(y)$ é limitado por

$$V(y) \leq \frac{c}{|y|^{a_0}} \Rightarrow V^{\beta s} \leq c|y|^{-a_0\beta s}. \tag{4.54}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_R(0)} V^{s\beta} dy \leq \int\limits_{B_R(0)} c|y|^{-a_0 s\beta} dy = C\int\limits_0^R \rho^{-a_0\beta s}\rho^{N-1} d\rho = \\ = C\int\limits_0^R \rho^{-a_0\beta s+N-1} d\rho,\end{aligned} \tag{4.55}$$

que é integrável se $-a_0\beta s + N - 1 > -1$, isto é

$$N > a_0\beta s \Leftrightarrow \begin{cases} s < \frac{N}{a_0\beta}, \text{se} \quad a_0 > 0 \\ s \quad \text{qualquer se} \quad a_0 \leq 0. \end{cases} \tag{4.56}$$

Assumimos então o caso $a_0 > 0$. Com tal escolha, $\overline{s}$ fica

$$\overline{s} > \frac{\frac{N}{a_0\beta}}{\frac{N}{a_0\beta} - 1} = \frac{N}{N - a_0\beta}. \tag{4.57}$$

Já para $u \in L^{\gamma}(B_R(0))$, a integral

$$\int\limits_{B_R(0)} u^{p\beta\overline{s}} dy, \tag{4.58}$$

é finita se

$$p\beta\overline{s} < \gamma. \tag{4.59}$$

Por (4.57), temos

$$p\beta\overline{s} > \frac{p\beta N}{(N - a_0\beta)}, \tag{4.60}$$

e combinando com (4.59) fica

$$\frac{p\beta N}{(N - a_0\beta)} < \gamma. \tag{4.61}$$

Rearranjando os termos, ficamos com

$$\frac{\beta N}{(N - a_0\beta)} < \frac{\gamma}{p} \Leftrightarrow \frac{p}{\gamma} < \frac{N - a_0\beta}{\beta N} \Leftrightarrow \frac{p}{\gamma} < \frac{1}{\beta} - \frac{a_0}{N} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta} > \frac{p}{\gamma} + \frac{a_0}{N}, \tag{4.62}$$

completando a afirmação. Por outro lado, $\mathbb{G}[Vu^p\chi_{B_1(0)}] \in L^s(B_R(0))$ se

$$\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{s} + \frac{2}{N}, \tag{4.63}$$

pela Proposição 2.10. Combinando (4.62) e (4.63), obtemos

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{a_0}{N} < \frac{1}{s} + \frac{2}{N} \Leftrightarrow \frac{1}{s} > \frac{p}{\gamma} + \frac{a_0 - 2}{N}, \tag{4.64}$$

isto é, $u \in L^\gamma(B_R(0)) \Rightarrow \mathbb{G}[Vu^p\chi_{B_1(0)}] \in L^s(B_R(0))$ se

$$\frac{1}{s} > \frac{p}{\gamma} + \frac{a_0 - 2}{N}. \tag{4.65}$$

(ii) Para o segundo caso, supõe

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{a_0 - 2}{N} < 0 \Leftrightarrow \frac{p}{\gamma} + \frac{a_0}{N} < \frac{2}{N}. \tag{4.66}$$

Logo, $\exists \beta_0 > 1$ tal que

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{a_0}{N} < \frac{1}{\beta_0} < \frac{2}{N}. \tag{4.67}$$

Pela prova do item *(i)*

$$u \in L^\gamma(B_R(0)) \Rightarrow Vu^p\chi_{B_1(0)} \in L^\beta(B_R(0)), \tag{4.68}$$

se $\beta \geq 1$ satisfaz $\frac{1}{\beta} > \frac{p}{\gamma} + \frac{a_0}{N}$. Em particular, β_0 satisfaz essa condição; consequentemente,

$$Vu^p\chi_{B_1(0)} \in L^{\beta_0}(B_R(0)). \tag{4.69}$$

Assim, pela Proposição 2.10, $\mathbb{G}[Vu^p\chi_{B_1(0)}] \in L^\infty(B_R(0))$, uma vez que $\frac{1}{\beta_0} < \frac{2}{N}$. completando a prova do lema.

□

4.4 Proposição 4.4 (Decaimento na Origem)

Proposição 4.4. *Supõe que V satisfaz (1.1), com a_0 e a_∞ dados em (1.20), e $p > 1$ satisfazendo (1.19) e (4.1). Seja u uma solução fraca de (P_k), então*

$$\sup_{|x|\to 0} u(x)|x|^{N-2} < +\infty. \tag{4.70}$$

Demonstração. Verificamos inicialmente o decaimento próximo a origem. Observe que u pode ser escrita como

$$u = \mathbb{G}[Vu^p\chi_{B_1(0)}] + \mathbb{G}[Vu^p\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)}] + k\mathbb{G}[\delta_0] := u_1 + v_1 + w_1. \tag{4.71}$$

Da prova da Proposição 4.1 temos que $\mathbb{G}[Vu^p\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)}] = v_1 \in L^\infty(B_{\frac{1}{2}}(0))$, e diretamente da definição $k\mathbb{G}[\delta_0](x) = w_1 = c_N k|x|^{2-N}$. Consequentemente

$$\int_{B_1(0)} (k\mathbb{G}[\delta_0])^r dx = \int_{B_1(0)} (c_N k|x|^{2-N})^r dx = C\int_0^1 \rho^{(2-N)r+N-1} d\rho, \tag{4.72}$$

é integrável se $(2-N)r + N - 1 > -1 \Leftrightarrow r < \frac{N}{N-2}$ ($k\mathbb{G}[\delta_0] \in L^r(B_1(0))$). Para a primeira parcela, temos pela definição de solução fraca que

$$Vu^p \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow Vu^p\chi_{B_1(0)} \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{4.73}$$

Pela Proposição 2.10, $u_1 \in L^r(B_1(0))$ se $1 < \frac{1}{r} + \frac{2}{N}$, isto é, $r < \frac{N}{N-2}$. Seja $\tilde{a_0} \in (a_0, 2)$ tal que

$$p < \frac{N-\tilde{a_0}}{N-2}, \tag{4.74}$$

que é possível, pois $p < \frac{N-a_0}{N-2}$ e $a_0 < \tilde{a_0}$. Seja também $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\frac{N(p-1)}{2-\tilde{a_0}} < \frac{N}{N-2} - \epsilon_0, \tag{4.75}$$

pode-se fazer isso já que:

$$\frac{N-\tilde{a_0}}{N-2} = \frac{2-\tilde{a_0}}{N-2} + 1 > p \Leftrightarrow \frac{2-\tilde{a_0}}{N-2} > p-1 \Leftrightarrow \frac{N}{N-2} > \frac{N(p-1)}{2-\tilde{a_0}}. \tag{4.76}$$

Escolhemos então $r = \gamma_0 := \frac{N}{N-2} - \epsilon_0 < \frac{N}{N-2}$. Em resumo, $u_1, v_1, w_1 \in L^{\gamma_0}(B_{\frac{1}{2}-\epsilon}(0))$. Logo, $u \in L^{\gamma_0}(B_{\frac{1}{2}-\epsilon}(0))$. Observamos então

$$\begin{gathered} u^p = (u_1+v_1+w_1)^p \le C(u_1^p + v_1^p + w_1^p) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{\mathbb{G}[Vu^p\chi_{(B_1(0))}]}_{=u_1} \le C(\underbrace{\mathbb{G}[Vu_1^p\chi_{(B_1(0))}]}_{:=u_2} + \underbrace{\mathbb{G}[Vv_1^p\chi_{(B_1(0))}]}_{:=v_2} + \underbrace{\mathbb{G}[Vw_1^p\chi_{(B_1(0))}]}_{:=w_2}) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1 < C(u_2+v_2+w_2). \end{gathered} \tag{4.77}$$

Definimos indutivamente:

$$u_{k+1} = \mathbb{G}[Vu_k^p\chi_{(B_1(0))}]; \tag{4.78}$$
$$v_{k+1} = \mathbb{G}[Vv_k^p\chi_{(B_1(0))}]; \tag{4.79}$$
$$w_{k+1} = \mathbb{G}[Vw_k^p\chi_{(B_1(0))}]. \tag{4.80}$$

e pode-se mostrar, repetindo o processo feito em (4.77), que

$$u_k \leq C^k(u_{k+1} + v_{k+1} + w_{k+1}). \tag{4.81}$$

Provemos então algumas afirmações relevantes:

1. Afirmação 1) $v_k \in L^\infty(B_{\frac{R}{2^k}}(0))\forall k \in \mathbb{N}$. Para v_1 isso já foi visto. Supõe então que vale para v_k. Consequentemente

$$v_k \in L^\infty(B_{\frac{R}{2^k}}(0)) \Rightarrow |Vv_k^p\chi_{B_1(0)}(y)| \underbrace{\leq}_{|V(y)|\leq C|y|^{-a_0}} C|y|^{-a_0}, \tag{4.82}$$

com $a_0 < 2$. Assim, pelo Lema 4.2 segue que

$$|v_{k+1}(x)| = |\mathbb{G}[Vv_k^p\chi_{B_1(0)}](x)| \leq c, \tag{4.83}$$

para $x \in B_{\frac{R}{2^{k+1}}}(0) \setminus \{0\}$. Isto é, $v_{k+1} \in L^\infty(B_{\frac{R}{2^{k+1}}}(0))$. Por indução vale a Afirmação 1.

2. Afirmação 2) Com $\gamma_0 = \frac{N}{N-2} - \epsilon_0$ (definido anteriormente), existe $k_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que para γ_{k+1} definido por

$$\frac{1}{\gamma_{k+1}} = \frac{p}{\gamma_k} + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N}, \tag{4.84}$$

para $k \leq k_0$, ou γ_k satisfaz

$$0 < \gamma_0 < \gamma_1 < ... < \gamma_{k_0} \quad \text{e} \quad \gamma_{k_0+1} < 0, \text{ou}, \tag{4.85}$$

$\frac{p}{\gamma_{k_0}} + \frac{\tilde{a}_0-2}{N} = 0$, ou γ_{k_0+1} não está definido.

Suponhamos que γ_{k+1} definido pelas relações anteriores seja positivo para todo $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$; logo, $\gamma_{k+1} > \gamma_k$:

- $\gamma_1 > \gamma_0$:

$$\gamma_1 > \gamma_0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\gamma_0,\gamma_1>0} \frac{1}{\gamma_1} < \frac{1}{\gamma_0} \Leftrightarrow \frac{p}{\gamma_0} + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N} < \frac{1}{\gamma_0} \Leftrightarrow \frac{p-1}{\gamma_0} < \frac{2-\tilde{a}_0}{N} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \gamma_0 > \frac{N(p-1)}{2-\tilde{a}_0} \Leftrightarrow \frac{N}{N-2} - \delta_0 > \frac{N(p-1)}{2-\tilde{a}_0}, \tag{4.86}$$

que vale por (4.75). Logo, $\gamma_1 > \gamma_0$. Supõe agora que $\gamma_j > \gamma_{j-1}$ para $j = 1, 2, ..., k$ (isto é $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < ... < \gamma_k$).

- $\gamma_{k+1} > \gamma_k$:

$$\gamma_{k+1} > \gamma_k \underbrace{\Leftrightarrow}_{\gamma_{k+1},\gamma_k>0} \frac{1}{\gamma_{k+1}} < \frac{1}{\gamma_k} \Leftrightarrow \frac{p}{\gamma_k} + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N} < \frac{1}{\gamma_k} \Leftrightarrow \frac{p-1}{\gamma_k} < \frac{2-\tilde{a}_0}{N} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \gamma_k > \frac{N(p-1)}{2-\tilde{a}_0}. \tag{4.87}$$

Que vale, uma vez que pela hipótese de indução $\gamma_k > ... > \gamma_0 > \frac{N(p-1)}{2-\tilde{a}_0}$. Assim γ_k é uma sequência crescente supondo $\gamma_k > 0 \quad \forall k$.

Consequentemente, ou $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = +\infty$, ou γ_k converge a algum limite L. Supõe que vale a primeira opção, isto é, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = +\infty$. Então

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{\gamma_k}}_{\to 0} &= \underbrace{\frac{p}{\gamma_k}}_{\to 0} + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N} \\ \therefore \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N} &= 0 \\ \therefore \tilde{a}_0 = 2 &\quad \text{(Absurdo).} \end{aligned} \tag{4.88}$$

Supondo γ_k convergente, com $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = L$, fica

$$\underbrace{\frac{1}{\gamma_k}}_{\to L} = \underbrace{\frac{p}{\gamma_k}}_{\to L} + + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N}$$
$$\therefore \frac{1}{L} = \frac{p}{L} + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N} \Leftrightarrow \frac{2-\tilde{a}_0}{N} = \frac{p-1}{L} \Leftrightarrow L = \frac{N(p-1)}{2-\tilde{a}_0} < \gamma_0. \tag{4.89}$$

Absurdo, pois $L = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k > \gamma_0$. Logo, absurdo em ambos os casos. Conclui-se que o absurdo ocorre ao supor que $\gamma_k > 0 \quad \forall k$. Consequentemente, $\exists k_0$ tal que

$$\gamma_0, \gamma_1, ...\gamma_{k_0} > 0, \quad \text{e} \quad \gamma_{k_0+1} \leq 0 \quad \text{(ou não está definido).} \tag{4.90}$$

Como $\gamma_0, \gamma_1, ...\gamma_{k_0} > 0$, ainda vale a indução anterior, e temos $\gamma_0 < \gamma_1 < ... < \gamma_{k_0}$, concluindo a afirmação 2.

3. Afirmação 3) $u_{k+1} \in L^{\gamma_k}(B_R(0))$ para $k \in \{0, 1, ..., k_0\}$.

   - $u_1 \in L^{\gamma_0}(B_R(0))$ (já visto)
   - Supõe que $u_k \in L^{\gamma_{k-1}}(B_R(0))$, com $k \in \{0, 1, ..., k_0 - 1\}$. Assim

$$u_k \in L^{\gamma_{k-1}}(B_R(0)) \Rightarrow \mathbb{G}[V u_k^p \chi_{B_1(0)}] \in L^{\gamma_k}(B_R(0)), \tag{4.91}$$

   pelo Lema 4.3, pois γ_{k-1} e γ_k são positivos, e satisfazem

$$\frac{1}{\gamma_k} = \frac{p}{\gamma_{k-1}} + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N} > \frac{p}{\gamma_{k-1}} + \frac{a_0 - 2}{N}. \tag{4.92}$$

4. Afirmação 4) $u_{k_0+2} \in L^\infty(B_R(0))$.

$$\gamma_{k_0+1} < 0 \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{\gamma_{k_0+1}} = \frac{p}{\gamma_{k_0}} + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N}. \tag{4.93}$$

Ou, caso γ_{k_0+1} não esteja definido ($\frac{1}{\gamma_{k_0+1}} = 0$), tem-se

$$0 = \frac{1}{\gamma_{k_0+1}} = \frac{p}{\gamma_{k_0}} + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N}. \tag{4.94}$$

Logo $\frac{p}{\gamma_{k_0}} + \frac{\tilde{a}_0-2}{N} \leq 0$. Portanto

$$\frac{p}{\gamma_{k_0}} + \frac{a_0 - 2}{N} < \frac{p}{\gamma_{k_0}} + \frac{\tilde{a}_0 - 2}{N} \leq 0. \tag{4.95}$$

Valendo isso, $u_{k_0+1} \in L^{\gamma_{k_0}}(B_R(0))$, com $\frac{p}{\gamma_{k_0}} + \frac{a_0-2}{N} < 0$. Pelo Lema 4.3

$$u_{k_0+2} = \mathbb{G}[V u_{k_0+1}^p \chi_{B_1(0)}] \in L^\infty(B_R(0)), \tag{4.96}$$

provando a Afirmação 4.

5. Afirmação 5) $|w_k| \leq C|y|^{2-N}$ em $B_{\frac{R}{2^k}(0)} \forall k \in \mathbb{N}$.

   - $w_1 = c_n|y|^{2-N}$
   - Supõe que $|w_k| \leq c|y|^{2-N}$ em $B_{\frac{R}{2^k}(0)}$. Define $\beta = N-2$ e considere $h = w_k$. Daí,

$$|h| \leq c|y|^{-\beta} \Rightarrow |h|^p \leq c|y|^{-p\beta} \Rightarrow |Vh^p\chi_{B_1(0)}| \leq c|y|^{-a_0-p\beta}. \tag{4.97}$$

Pelo Lema 4.2, caso $a_0 + p\beta > 2$, então vale

$$|\mathbb{G}[Vh^p\chi_{B_1(0)}]| \leq c|y|^{-a_0-p\beta+2}. \tag{4.98}$$

Vejamos que vale $-a_0 - p\beta + 2 > -\beta$. De fato,

$$\begin{aligned} 2 - a_0 > \beta(p-1) \Leftrightarrow \beta < \frac{2-a_0}{p-1} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\beta=N-2} N-2 < \frac{2-a_0}{p-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p - 1 < \frac{2-a_0}{N-2} \Leftrightarrow p < \frac{2-a_0}{N-2} + 1 = \frac{N-a_0}{N-2}, \end{aligned} \tag{4.99}$$

que de fato se verifica. Logo, vale $-a_0 - p\beta + 2 > -\beta$. Assim

$$|w_{k+1}| = |\mathbb{G}[Vw_k^p\chi_{B_1(0)}]| \leq c|y|^{-a_0-p\beta+2} \leq c|y|^{-\beta} \quad \text{em} \quad B_{\frac{R}{2^{k+1}}(0)}. \tag{4.100}$$

Caso $a_0 + p\beta \leq 2$, então o Lema 4.2 estabelece que

$$\mathbb{G}[Vh^p\chi_{B_1(0)}] \leq C_3 \text{ ou } C_1 + C_2|y|^{-1}, \tag{4.101}$$

que em ambos os casos são menores ou iguais a

$$C|y|^{-\beta} \quad \text{em} \quad B_{\frac{r}{2^{k+1}}}(0). \tag{4.102}$$

Pelas Afirmações 1 e 4, u_{k_0+2} e $v_{k_0+2} \in L^\infty(B_R(0))$, e pela Afirmação 5, $w_{k_0+2} \leq c_0|x|^{2-N}$ em $B_{\frac{R}{2^{k_0+1}}}(0)$. Consequentemente

$$u_{k_0+1} \leq C(\overbrace{u_{k_0+2} + v_{k_0+2}}^{:=g_{k_0+2}} + w_{k_0+2}) \leq C(g_{k_0+2} + c_0|x|^{2-N}) \quad \text{em} \quad B_{\frac{R}{2^{k_0+2}}}(0), \tag{4.103}$$

com $g_{k_0+2} \in L^\infty(B_R(0))$. Portanto

$$\begin{aligned} u_{k_0} \leq C(u_{k_0+1} + v_{k_0+1} + w_{k_0+1}) &\leq C(\overbrace{Cg_{k_0+2} + v_{k_0+1}}^{:=g_{k_0+1}} + CC_0|x|^{2-N} + C_0|x|^{2-N}) \leq \\ &\leq C(g_{k_0+1} + \overbrace{(CC_0 + C_0)}^{:=C_1}|x|^{2-N}), \end{aligned} \tag{4.104}$$

onde $g_{k_0+1} = g_{k_0+2} + v_{k_0+1} \in L^\infty(B_R(0))$. Assim

$$u_{k_0} \leq g_{k_0+1} + C_1|x|^{2-N}. \tag{4.105}$$

Por indução

$$u_k \leq Cg_{k+1} + C_{k_0-(k+1)}|x|^{2-N}, \tag{4.106}$$

com $g_k \in L^\infty(B_R(0))$ e $C_{k_0-(k+1)} > 0$ é uma constante. Em particular, para $k = 0$, temos

$$u = u_0 \leq Cg_1 + C_{k_0+1}|x|^{2-N} \quad \text{em} \quad B_{\frac{R}{2^{k_0+2}}}(0), \tag{4.107}$$

com $g_1 \in L^\infty(B_R(0))$ e $C_{k_0+1} > 0$. Isso termina a primeira parte da prova da Proposição 4.4, isto é

$$\lim_{|x|\to 0^+} u(x)|x|^{N-2} < \infty. \tag{4.108}$$

4.5 Proposição 4.4 (Decaimento no Infinito)

Agora verificamos o decaimento no infinito, isto é

$$\limsup_{|x|\to\infty} u(x)|x|^{N-2} < \infty. \tag{4.109}$$

Sabemos da Proposição 4.1 que $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ e

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \tag{4.110}$$

Dividimos a prova em 3 partes: (a) $a_\infty > N$; (b) $a_\infty \in (2, N]$; (c) $a_\infty \in (0, 2]$.

(a) Caso $a_\infty > N$. Seja $\psi_0(x) = |x|^{2-N} - |x|^{2-a_\infty}$ para $|x| \geq 2$. Observe que

$$\Delta(|x|^\alpha) = \alpha(\alpha + N - 2)|x|^{\alpha-2}. \tag{4.111}$$

Usando isso para $\alpha = 2 - N$ e $\alpha = 2 - a_\infty$, segue que

$$\Delta\psi_0(x) = \Delta(|x|^{2-N}) - \Delta(|x|^{2-a_\infty}) = 0 - A|x|^{-a_\infty}, \tag{4.112}$$

donde existe $B > 0$ tal que

$$- \Delta\psi_0(x) \geq B|x|^{-a_\infty}. \tag{4.113}$$

Observe que como $\lim\limits_{|x|\to\infty} \psi_0(x) = 0$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, dado $C > 0$ existe $R_n > 0$, e $\epsilon_n \to 0$ com $n \to \infty$ tal que

$$C\psi_0(x) > u(x) - \epsilon_n \ \forall x \in S_{R_n}(0), \tag{4.114}$$

onde S_{R_n} indicada a esfera de raio R_n. Sendo $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, e considerando o comportamento de V longe da origem (isto é, limitada por $D|x|^{-a_\infty}$), existem $\alpha, \beta \geq 1$, tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u = V(x)u^p(x) \leq \alpha|x|^{-a_\infty}, &\text{ se } |x| \geq 2 \quad \text{e} \\ u(x) \leq \beta(2^{2-N} - 2^{2-a_\infty}), &\text{ se } |x| = 2. \end{aligned} \tag{4.115}$$

Isto é (representando $B_{R_n}(0) \setminus B_2(0)$ por A_{2,R_n})

$$\begin{cases} -\Delta(C\psi_0) \geq -\Delta u & \text{em } A_{2,R_n}; \\ C\psi_0 \geq u > u - \epsilon_n & \text{em } S_2(0); \\ C\psi_0 \geq u - \epsilon_n & \text{em } S_{R_n}(0), \end{cases} \tag{4.116}$$

para C suficientemente grande. Pelo Princípio da Comparação, temos que

$$C\psi_0 > u - \epsilon_n \text{ em } A_{2,R_n}, \tag{4.117}$$

para $|x| > 2$; Como $x \in B_{R_n}(0)$ para n grande o suficiente, vale

$$C\psi_0(x) > u(x) - \underbrace{\epsilon_n}_{\to 0}. \tag{4.118}$$

Logo

$$u(x_1) \leq C\psi_0(x_1) \leq C|x|^{2-N}. \tag{4.119}$$

(b) Caso $a_\infty \in (2, N]$. Seja

$$\tau_1 = \begin{cases} 2 - a_\infty & \text{se } a_\infty \in (2, N) \\ \frac{1}{p}(2 - N) & \text{se } a_\infty = N, \end{cases} \tag{4.120}$$

e define $\psi_1(x) = |x|^{\tau_1}$. Vejamos que existe $C > 0$, tal que

$$- \Delta\psi_1(x) = c|x|^{\tau_1 - 2} \geq C|x|^{-a_\infty}, \text{ para } |x| \geq 1. \tag{4.121}$$

No caso $a_\infty \in (2, N)$, temos por (4.111) que

$$\Delta\psi_1(x) = \Delta(|x|^{\tau_1}) = (2 - a_\infty)(N - a_\infty)|x|^{\tau_1 - 2}, \tag{4.122}$$

de maneira que vale (4.121). Para o caso $a_\infty = N$, basta que $\tau_1 - 2 > -a_\infty$, e então vale para $|x| \geq 1$ (já que $|x|^{\tau_1-2} \geq |x|^{-a_\infty}$). De fato, como $p > 1$, temos

$$\begin{aligned} & p > 1 \Rightarrow (N-2)p > N-2 \Rightarrow 2-N-2p > -Np \\ & \Rightarrow \frac{1}{p}(2-N) - 2 > -N = -a_\infty \Rightarrow \tau_1 - 2 > -a_\infty. \end{aligned} \tag{4.123}$$

Logo vale (4.121). Pelas mesmas justificativas do caso anterior existem $\alpha, \beta \geq 1$, tais que

$$-\Delta u = V(x)u^p(x) \leq \alpha |x|^{\tau_1-2}, \text{ se } |x| \geq 1 \quad \text{e} \quad u(x) \leq \beta, \text{ se } |x| \geq 1, \tag{4.124}$$

e usando o Princípio da Comparação, como no caso (a), temos

$$u(x) \leq \alpha\beta\psi_1(x) \leq C'|x|^{\tau_1} \text{ para } |x| \geq 1. \tag{4.125}$$

Assim,

$$Vu^p(x) \leq C|x|^{-a_\infty} c(|x|^{\tau_1})^p = C|x|^{-a_\infty + p\tau_1} \quad \text{para} \quad |x| \geq 1. \tag{4.126}$$

Defina $\tau_2 = 2 - a_\infty + p\tau_1$. (Note que $\tau_2 < \tau_1 < 0$.) Logo

$$-\Delta u(x) = Vu^p(x) \leq C|x|^{\tau_2 - 2} \quad \text{para} \quad |x| \geq 1. \tag{4.127}$$

Se $\tau_2 < -(N-2)$, defina

$$\psi_2(x) = |x|^{2-N} - |x|^{\tau_2} \quad \text{para} \quad |x| \geq 1. \tag{4.128}$$

Logo, por (4.111), $-\Delta\psi_2 = A|x|^{\tau_2-2}$ com $A > 0$, e, pelo mesmo argumento de comparação usado previamente, existe $C > 0$ tal que

$$u(x) \leq C\psi_2(x) \leq C|x|^{2-N} \quad \text{para} \quad |x| \geq 1, \tag{4.129}$$

provando o resultado. Caso $\tau_2 \geq -(N-2)$, seja

$$\tau_3 = \begin{cases} 2 - a_\infty + p\tau_2 & \text{se } \tau_2 > -(N-2) \\ 2 - a_\infty + p(\tau_2 - \sigma) & \text{se } \tau_2 = -(N-2), \end{cases} \tag{4.130}$$

onde σ é pequeno tal que $p(\tau_2 - \sigma) < -(N-2)$. Seja

$$\psi_2(x) = \begin{cases} |x|^{\tau_2} & \text{se } \tau_2 > -(N-2) \\ |x|^{\tau_2 - \sigma} & \text{se } \tau_2 = -(N-2). \end{cases} \tag{4.131}$$

Por (4.111), $\Delta\psi_2(x) = C|x|^{\tau_2-2}$ se $\tau_2 > -(N-2)$ e $\Delta\psi_2(x) = C|x|^{\tau_2-\sigma-2} \leq c|x|^{\tau-2}$ para $|x| > 1$ se $\tau_2 = -(N-2)$. Pelo mesmo argumento de comparação

$$u \leq C\psi_2(x) \leq \tilde{c}|x|^{\tau_2} \quad \text{para} \quad |x| > 1. \tag{4.132}$$

Repetindo esse argumento de forma indutiva, temos que $u(x) \leq c\psi_j(x) \leq \tilde{c}|x|^{\tau_j}$ para $|x| > 1$, onde $\tau_j = 2 - a_\infty + p\tau_{j-1}$, se $\tau_{j-1} > -(N-2)$, ou, $\tau_j = 2 - a_\infty + p(\tau_{j-1} - \sigma)$, se $\tau_{j-1} = -(N-2)$, com $p(\tau_{j-1} - \sigma) < -(N-2)$.

Note que $\tau_j \to -\infty$. Logo, existe j_0 tal que $\tau_{j_0-1} \geq -(N-2)$ e $\tau_{j_0} < -(N-2)$. Definindo $\psi_{j_0}(x) = |x|^{2n} - |x|^{\tau_{j_0}}$, assim como antes, concluímos que

$$u(x) \leq C\psi_{j_0}(x) \leq C(|x|^{2-N} - |x|^{\tau_{j_0}}) \leq C|x|^{2-N}, \tag{4.133}$$

provando o resultado para o caso (b).

(c) Caso $a_\infty \in (0,2]$. Para $|x|>2$ fixo, seja $r_0=\frac{1}{2}|x|^{\frac{a_\infty}{N}}$; observe que $\frac{a_\infty}{N}\in(0,1)$. Temos que

$$\mathbb{G}[Vu^p](x)=\int\limits_{B_{r_0}(x)}\frac{c_N}{|x-y|^{N-2}}V(y)u^p(y)dy+\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}(x)}\frac{c_N}{|x-y|^{N-2}}V(y)u^p(y)dy. \tag{4.134}$$

Dentro da bola $B_{r_0}(x)$, $|x|-|y|\le|x-y|\le r_0$, donde $|x|-r_0\le|y|$. Consequentemente

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_{r_0}(x)}\frac{c_N}{|x-y|^{N-2}}V(y)u^p(y)dy &\le \int\limits_{B_{r_0}(x)}\frac{c_N}{|x-y|^{N-2}}\frac{c}{|y|^{a_\infty}}u^p(y)dy\le\\ &\le \int\limits_{B_{r_0}(x)}\frac{c_N}{|x-y|^{N-2}}\frac{c}{(|x|-r_0)^{a_\infty}}u^p(y)dy\\ &\le \frac{C}{(|x|-r_0)^{a_\infty}}||u||^p_{L^\infty(B_r(x))}\int\limits_{B_{r_0}(x)}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}dy=\\ &= C(|x|-r_0)^{-a_\infty}||u||^p_{L^\infty(B_r(x))}\int\limits_0^{r_0}rdr=C'(|x|-r_0)^{-a_\infty}||u||^p_{L^\infty(B_r(x))}r_0^2.\end{aligned} \tag{4.135}$$

Fora da bola, $|x-y|\ge r_0$, de maneira que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}(x)}\frac{c_N}{|x-y|^{N-2}}V(y)u^p(y)dy &\le c\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}(x)}\frac{c_N}{r_0^{N-2}}V(y)u^p(y)dy=\\ &= r_0^{2-N}||Vu^p||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned} \tag{4.136}$$

Como $u\in L^\infty(B_r(x))$ e $Vu^p\in L^1(\mathbb{R}^N)$, combinando as desigualdades obtidas, ficamos com

$$\mathbb{G}[Vu^p](x)\le C\left[(|x|-r_0)^{-a_\infty}r_0^2+r_0^{2-N}\right]\le C'(|x|-r_0)^{-a_\infty}r_0^2, \tag{4.137}$$

já que $|x|>2$. Por sua vez

$$|x|-\frac{1}{2}|x|^{\frac{a_\infty}{N}}\ge\frac{1}{2}|x|\Rightarrow 4|x|^{-a_\infty}\ge(|x|-r_0)^{-a_\infty}, \tag{4.138}$$

de maneira que

$$\mathbb{G}[Vu^p](x)\le C'(|x|-r_0)^{-a_\infty}r_0^2\le c|x|^{-a_\infty}|x|^{\frac{2a_\infty}{N}}=c|x|^{-(1-\frac{2}{N})a_\infty}. \tag{4.139}$$

Lembrando que

$$u=\mathbb{G}[Vu^p]+k\mathbb{G}[\delta_0],\quad \text{e}\quad \mathbb{G}[\delta_0](x)=c_N|x|^{2-N}. \tag{4.140}$$

Assim, de (4.139),

$$u(x) \leq C|x|^{-\gamma_0}, \quad \text{já que} \quad \gamma_0 := \left(1 - \frac{2}{N}\right) a_\infty < N - 2. \tag{4.141}$$

Se $a_\infty + p\gamma_0 < N$, define $r_1 = \frac{1}{2}|x|^{\frac{a_\infty + p\gamma_0}{N}}$; observa que $\frac{a_\infty + p\gamma_0}{N} \in (0,1)$. Novamente temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[Vu^p](x) &= \int\limits_{B_{r_1}(x)} \frac{c_N}{|x-y|^{N-2}} V(y) u^p(y) dy + \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r_1}(x)} \frac{c_N}{|x-y|^{N-2}} V(y) u^p(y) dy \leq \\
&\leq c_1(|x| - r_1)^{-a_\infty - p\gamma_0} r_1^2 + c_2 r_1^{2-N} ||Vu^p||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \\
&C|x|^{-\left(1-\frac{2}{N}\right)(a_\infty + p\gamma_0)}.
\end{aligned} \tag{4.142}$$

Implicando em

$$u(x) \leq C|x|^{-\gamma_1}, \quad \text{com} \quad \gamma_1 = \left(1 - \frac{2}{N}\right)(a_\infty + p\gamma_0) < N - 2. \tag{4.143}$$

Indutivamente, definimos r_j's como $r_j = \frac{1}{2}|x|^{\gamma_j}$, com $\gamma_j = \left(1 - \frac{2}{N}\right)(a_\infty + p\gamma_{j-1})$. Existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que $a_\infty + p\gamma_{j_0 - 1} \leq N - 2$ e $a_\infty + p\gamma_{j_0} > N - 2$, visto que $p > \frac{N - a_\infty}{N-2}$. Para $\gamma_1, ..., \gamma_{j_0 - 1}$, repetindo o argumento anterior, concluímos que:

$$u(x) \leq C|x|^{-\gamma_{j_0 - 1}}. \tag{4.144}$$

Portanto, assim como em (4.142)

$$\mathbb{G}[Vu^p] \leq C|x|^{-\gamma_{j_0}} \leq C|x|^{-(N-2)}. \tag{4.145}$$

Logo, $u(x) = \mathbb{G}[Vu^p] + k\mathbb{G}[\delta_0] \leq C|x|^{-(N-2)}$, provando o teorema.

□

4.6 Proposição 4.5 (Estabilidade da Solução)

Proposição 4.5. *Assume que V satisfaz (1.1) com $a_0 < min\{2, a_\infty\}$, $p > 1$ satisfazendo (1.19) e $k \in (0, k^*)$. Então, qualquer solução minimal positiva $u_{k,V}$ de (P_k) é estável. Ainda, $u_{k,V}$ satisfaz (1.11).*

Demonstração. Comecemos provando a estabilidade da solução para $k > 0$ pequeno; em seguida provamos para todo $k < k^*$. Por (3.68), e k pequeno, vale

$$u_{k,V}(x) \leq Ck|x|^{2-N} \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \tag{4.146}$$

com $C > 0$ e independente de k. Portanto

$$V(x) u_{k,V}^{p-1}(x) \leq C^{p-1} \sigma_1 k^{p-1} \frac{|x|^{(2-N)(p-1) - a_0}}{1 + |x|^{a_\infty - a_0}}. \tag{4.147}$$

Pelas condições de p

$$p < \frac{N-a_0}{N-2} \Rightarrow p(2-N)+(N-2) > a_0 - N + (N-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (p-1)(2-N) - a_0 > -2, \tag{4.148}$$

bem como:

$$p > \frac{N-a_\infty}{N-2} \Rightarrow p(2-N)+(N-2) < a_\infty - N + (N-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (p-1)(2-N) - a_\infty < -2. \tag{4.149}$$

Assim, para $|x| < 1$, vale

$$V(x)u_{k,V}^{p-1}(x) \leq C^{p-1}\sigma_1 k^{p-1}\frac{|x|^{(2-N)(p-1)-a_0}}{1+|x|^{a_\infty - a_0}} < C^{p-1}\sigma_1 k^{p-1}|x|^{(2-N)(p-1)-a_0} <$$
$$< C^{p-1}\sigma_1\frac{k^{p-1}}{|x|^2}, \tag{4.150}$$

e para $|x| > 1$:

$$V(x)u_{k,V}^{p-1}(x) \leq C^{p-1}\sigma_1 k^{p-1}\frac{|x|^{(2-N)(p-1)-a_0}}{1+|x|^{a_\infty - a_0}} < C^{p-1}\sigma_1 k^{p-1}|x|^{(2-N)(p-1)-a_\infty} <$$
$$< C^{p-1}\sigma_1\frac{k^{p-1}}{|x|^2}. \tag{4.151}$$

Para $|x| = 1$ é trivial. Em qualquer caso temos

$$V(x)u_{k,V}^{p-1}(x) \leq C^{p-1}\sigma_1\frac{k^{p-1}}{|x|^2}. \tag{4.152}$$

Assim, para qualquer $\xi \in C_C^{1,1}((R)^N)$, utilizando a desigualdade acima, bem como a de Hardy-Sobolev, obtemos que para k pequeno vale

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V}^{p-1}\xi^2 dx \leq C^{p-1}\sigma_1 k^{p-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\xi^2}{|x|^2}dx \leq \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\xi|^2 dx. \tag{4.153}$$

Por densidade, (4.153) também vale para $\xi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, de modo que $u_{k,V}$ é uma solução semi-estável de (P_k) para $k > 0$ pequeno.

Vejamos agora a estabilidade da solução mínima para todo $k \in (0, k^*)$. Supõe que $u_{k,V}$ não é estável. Então vale

$$\lambda_1 := \inf_{\xi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\xi|^2 dx}{p\int\limits_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V}^{p-1}\xi^2 dx} \leq 1. \tag{4.154}$$

Por inclusão compacta (5.1), λ_1 é atingido por uma função não negativa ξ_1 satisfazendo

$$-\Delta\xi_1 = \lambda_1 p V u_{k,V}^{p-1}\xi_1. \tag{4.155}$$

Escolhendo $\hat{k} \in (k, k^*)$ e definindo $\omega = u_{\hat{k},V} - u_{k,V} > 0$ (por (1.1)), temos que

$$w = \mathbb{G}[Vu^p_{\hat{k},V} - Vu^p_{k,V}] + (\hat{k} - k)\mathbb{G}[\delta_0]. \tag{4.156}$$

Utilizando a desigualdade elementar $(a+b)^p \geq a^p + pa^{p-1}b$ para $a, b \geq 0$, temos que

$$u^p_{\hat{k},V} = (\omega + u_{k,V})^p \geq u^p_{k,V} + pu^{p-1}_{k,V}\omega. \tag{4.157}$$

Utilizando essa desigualdade em (4.156), ficamos com

$$\omega \geq \mathbb{G}[V(u^p_{k,v} + pu^{p-1}_{k,V}\omega) - Vu^p_{k,V}] + (\hat{k} - k)\mathbb{G}[\delta_0] = \mathbb{G}[Vpu^{p-1}_{k,V}\omega] + (\hat{k} - k)\mathbb{G}[\delta_0]. \tag{4.158}$$

Multiplicando essa desigualdade por $-\Delta\xi_1$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} pVu^{p-1}_{k,V}\xi_1\omega dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta\xi_1)\omega dx \geq \\ \geq \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta\xi_1)\mathbb{G}[Vpu^{p-1}_{k,V}\omega]dx + \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta\xi_1)(\hat{k} - k)\mathbb{G}[\delta_0]dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^N} Vpu^{p-1}_{k,V}\omega\xi_1 dx + (\hat{k} - k)\xi_1(0) > \int_{\mathbb{R}^N} Vpu^{p-1}_{k,V}\omega\xi_1 dx, \end{aligned} \tag{4.159}$$

absurdo, pois $\lambda_1 \leq 1$. Consequentemente

$$p \int_{\mathbb{R}^N} Vu^{p-1}_{k,V}\xi^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx, \ \forall \xi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \tag{4.160}$$

provando a estabilidade de $u_{k,V}$. Provemos agora (1.11). Para qualquer $k \in (0, k^*)$, seja $k' = \frac{k+k^*}{2} > k$, e $l_0 = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{1}{p}} < 1$. Existe uma solução mínima $u_{k',V}$ de (P_k) (pois esta existe $\forall k < k^*$), a qual é estável. Como $k - k'l_0^p = 0$, vemos que

$$\begin{aligned} l_0 u_{k',V} \geq l_0^p u_{k',V} = l_0^p \left(\mathbb{G}[Vu^p_{k',V}] + k'\mathbb{G}[\delta_0]\right) + (k - k'l_0^p)\mathbb{G}[\delta_0] = \\ = \mathbb{G}[V(l_0 u_{k',V})^p] + k\mathbb{G}[\delta_0], \end{aligned} \tag{4.161}$$

isto é, $l_0 u_{k',V}$ é uma supersolução de (P_k). Portanto

$$l_0 u_{k',V} \geq u_{k,V}, \tag{4.162}$$

assim, para $\xi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} 0 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx - p\int_{\mathbb{R}^N} Vu^{p-1}_{k',V}\xi^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx - pl_0^{1-p}\int_{\mathbb{R}^N} Vu^{p-1}_{k,V}\xi^2 dx = \\ = l_0^{1-p}\left[l_0^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx - p\int_{\mathbb{R}^N} Vu^{p-1}_{k,V}\xi^2 dx\right]. \end{aligned} \tag{4.163}$$

Isso implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx - p\int_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V}^{p-1}\xi^2 dx \ =$$

$$= (1-l_0^{p-1})\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx + \underbrace{\left[l_0^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx - p\int_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V}^{p-1}\xi^2 dx\right]}_{>0} \geq$$

$$\geq (1-l_0^{p-1})\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx. \tag{4.164}$$

Observamos que existe $c>0$, tal que

$$1-l_0^{p-1} \geq c\left[(k^*)^{\frac{p-1}{p}} - (k)^{\frac{p-1}{p}}\right]. \tag{4.165}$$

Para verificar a desigualdade, considera a função $g(k),\ k\in(0,k^*)$ definida por

$$g(k) = \frac{(k+k^*)^\alpha - (2k)^\alpha}{(k^*)^\alpha - (k)^\alpha}, \tag{4.166}$$

com $\alpha = \frac{p-1}{p} \in (0,1)$. Observa que $g(k)>0$ qualquer que seja k no intervalo considerado, bem como $\lim\limits_{k\to 0} g(k) = 1$ e

$$\lim_{k\to k^*} g(k) \overbrace{=}^{\text{L'Hôpital}} \lim_{k\to k^*} \frac{\alpha(k+k^*)^{\alpha-1} - 2\alpha(2k)^{\alpha-1}}{0-\alpha(k)^{\alpha-1}} = \frac{\alpha(2k^*)^{\alpha-1} - 2\alpha(2k^*)^{\alpha-1}}{-\alpha(k^*)^{\alpha-1}} =$$

$$= \frac{-\alpha(2k^*)^{\alpha-1}}{-\alpha(2k^*)^{\alpha-1}} = 2^{\alpha-1}, \tag{4.167}$$

isto é, $g(k)$ é limitada inferiormente por um positivo no compacto $[0,k^*]$. Consequentemente conseguimos c tal que

$$\frac{(k+k^*)^\alpha - (2k)^\alpha}{(k^*)^\alpha - (k)^\alpha} \geq c(2k^*)^\alpha. \tag{4.168}$$

Reorganizando os termos

$$c\left[(k^*)^{\frac{p-1}{p}} - (k)^{\frac{p-1}{p}}\right] \leq \frac{(k+k^*)^\alpha - (2k)^\alpha}{(2k^*)^\alpha} \leq \frac{(k+k^*)^\alpha - (2k)^\alpha}{(k^*+k)^\alpha} = 1 - \left(\frac{k}{\frac{k+k^*}{2}}\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$= 1 - \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{p-1}{p}} = 1 - l_0^{p-1}, \tag{4.169}$$

e combinando as desigualdades (4.164) e (4.165), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx - p\int_{\mathbb{R}^N} V u_{k,V}^{p-1}\xi^2 dx \ \geq c\left[(k^*)^{\frac{p-1}{p}} - (k)^{\frac{p-1}{p}}\right]\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\xi|^2 dx, \tag{4.170}$$

completando a prova.

□

Corolário 4.5.1. *Assuma $p > 1$, V satisfazendo (1.1) com $a_0 < min\{2, a_\infty\}$. Então, se $k \in (0, k_p)$, a solução minimal $u_{k,V}$ de (P_k) é clássica, estável e satisfaz (1.9) e (1.11).*

Demonstração. Como $k \le k_p$, conforme (3.68) a solução minimal $u_{k,V}$ de (P_k) é controlada por ω_{t_p}, o que implica que $Vu^p_{k,V} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Segue das Proposições (2.10) e (2.11) que $u_{k,V}$ é uma solução clássica de (1.9). A prova é completada pela prova da Proposição (4.5) e por (3.68).

□

Demonstração Teorema 1.2. O Teorema segue das Proposições 4.1 e 4.5 e do Corolário 4.5.1. □

5 Solução por Passo da Montanha

Desejamos encontrar uma segunda solução do problema (P_k). Para tal, procuramos por uma função não trivial u, diferente da solução minimal $u_{k,V}$, tal que $u_{k,V}+u$ seja solução de (P_k). Isso nos leva a considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = V(u_{k,V}+u_+)^p - V(u_{k,V})^p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Justificativa. Note que $u_+ \geq 0$; consequentemente, $u_{k,V}+u_+ \geq u_{k,V} \geq 0$, e vale

$$V(u_{k,V}+u_+)^p - V(u_{k,V})^p \geq 0. \tag{5.2}$$

Portanto,

$$-\Delta u = V(u_{k,V}+u_+)^p - V(u_{k,V})^p \geq 0. \tag{5.3}$$

Agora, considerando o limite (5.1), tem-se

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{dado } \epsilon > 0,\ \exists\, R > 0 \quad \text{tq.} \tag{5.4}$$
$$u(x) \geq -\epsilon, \text{ se } |x| = R.$$

Pelo Princípio do Máximo (Teorema 2.5), como $-\Delta u \geq 0$, segue que $u(x) \geq -\epsilon$ em $B_R(0)$. Toma uma sequência de raios, com $R_k \to \infty$, tal que $u(x) \geq -\frac{1}{k}$, se $|x| = R_k$, conclui-se que $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Isto é, $u = u_+$. Logo, u satisfaz

$$-\Delta u = V(u_{k,V}+u)^p - V(u_{k,V})^p, \tag{5.5}$$

assim, somando os problemas (P_k) e (5.1)

$$\begin{aligned} -\Delta u - \Delta u_{k,V} &= V(u+u_{k,V})^p - V(u_{k,V})^p + V(u_{k,V})^p + k\delta_0 \\ \therefore -\Delta(u+u_{k,V}) &= V(u+u_{k,V})^p + k\delta_0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

isto é, $u+u_{k,V}$ é solução de (P_k).

□

Intuitivamente, o cancelamento da singularidade em $u_{k,V}$ no termo não linear de (5.1) nos permite achar uma solução como ponto crítico de um funcional. Tomemos como candidato o funcional E, definido em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ por

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,V}, v_+)dx, \tag{5.7}$$

com F dada por

$$F(s,t) = \frac{1}{p+1}\left[(s+t_+)^{p+1} - s^{p+1} - (p+1)s^p t_+\right]. \tag{5.8}$$

Assim, calculando a derivada parcial relevante, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{p+1}&\left[(p+1)(s+t_+)^p(t_+)' - 0 - (p+1)s^p(t_+)'\right] = \\ &= \left[(s+t_+)^p - s^p\right](t_+)'. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Sabemos que

$$(t_+)' = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0, \end{cases} \tag{5.10}$$

assim, podemos escrever, sem prejuízo, que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(s,t) = (s+t_+)^p - s^p, \tag{5.11}$$

uma vez que se $t < 0$, ainda vale $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Portanto, (5.7) de fato é um funcional que satisfaz as condições desejadas.

Seja V_0 dado em (1.1), e denote por $L^q(\mathbb{R}^N, V_0 dx)$ o espaço L^q com peso, definido por

$$L^q(\mathbb{R}^N, V_0 dx) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int\limits_{\mathbb{R}^N} V_0 |u|^q dx < +\infty \right\}. \tag{5.12}$$

Provemos o seguinte lema, o qual implica que E está bem definido em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

5.1 Lema 5.1

Lema 5.1. *Seja $a_0 < 2$, $a_\infty > max\{a_0, 0\}$ e $p > 1$, satisfazendo (1.19). Então a inclusão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N, V_0 dx)$ é contínua e compacta.*

Demonstração. Primeiro, queremos demonstrar que para $\beta \in (0,2)$, vale a seguinte desigualdade

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\xi^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} dx \leq C \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi|^2 dx \right)^{\frac{2^*(\beta)}{2}}, \tag{5.13}$$

onde $2^*(\beta)$ é dado por (1.18). Para isso, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a + b = 2^*(\beta)$ e utilizemos a Desigualdade de *Hölder* ([4]) para $p = \frac{2}{\beta}$ e $q = \frac{2}{2-\beta}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\xi^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\xi^{a+b}}{|x|^\beta} dx \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{(\xi^a)^{\frac{2}{\beta}}}{(|x|^\beta)^{\frac{2}{\beta}}} dx \right)^{\frac{\beta}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\xi^b\right)^{\frac{2}{2-\beta}} dx \right)^{\frac{2-\beta}{2}}. \tag{5.14}$$

Tomando $a = \beta$, então

$$b = 2^*(\beta) - a = 2^*(\beta) - \beta = \frac{2N - 2\beta}{N-2} - \beta = \frac{N(2-\beta)}{N-2},$$

consequentemente, $a \cdot \frac{2}{\beta} = 2$ e $b \cdot \frac{2}{2-\beta} = 2^*$. Assim, (5.14) fica

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\xi^{2^*(\beta)}}{|x|^\beta} dx \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\xi^2}{|x|^2} dx \right)^{\frac{\beta}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi^{2^*} dx \right)^{\frac{2-\beta}{2}}. \tag{5.15}$$

Pelas desigualdades de *Hardy-Sobolev* (Teorema 2.7) e a desigualdade GNS (Teorema 2.2) temos, respectivamente

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\xi^2}{|x|^2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi|^2 dx, \tag{5.16}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi^{2^*} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}}, \tag{5.17}$$

de modo que se obtém

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\xi^2}{|x|^2} dx \right)^{\frac{\beta}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \xi^{2^*} dx \right)^{\frac{2-\beta}{2}} \leq \left(C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi|^2 dx \right)^{\frac{\beta}{2} + \frac{2^*(2-\beta)}{4}}. \tag{5.18}$$

Simplificando o expoente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} + \frac{2^*(2-\beta)}{4} = \frac{\beta}{2} + \frac{2N}{N-2} \frac{(2-\beta)}{4} = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta N - 2\beta + 2N - N\beta}{N-2} \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{2N - 2\beta}{N-2} \right] = \frac{2^*(\beta)}{2}, \end{aligned}$$

de modo que obtemos a desigualdade (5.13), que é equivalente a

$$||\xi||_{L^{2^*(\beta)}(\mathbb{R}^N, |x|^{-\beta} dx)} \leq C ||\xi||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}. \tag{5.19}$$

Afirmamos que a inclusão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N, V_0 dx)$ é contínua, se

$$\max\{2^*(a_\infty), 1\} < q < \min\{2^*(a_0), 2^*\}, \tag{5.20}$$

onde $q = p + 1$. Observa que

$$\begin{aligned} \text{Se } a_0 \in [0, 2),\ 2^*(a_0) = \frac{2N - 2a_0}{N-2} < \frac{2N}{N-2} = 2^* \Rightarrow \min\{2^*(a_0), 2^*\} = 2^*(a_0) < 2^* \\ \text{Se } a_0 < 0,\ 2^*(a_0) = \frac{2N - 2a_0}{N-2} > \frac{2N}{N-2} = 2^* \Rightarrow \min\{2^*(a_0), 2^*\} = 2^*. \end{aligned}$$

assim, $q \leq 2^*$ independente de a_0. Também

$$\begin{aligned} ||\xi||^{2^*(a_0)}_{L^{2^*(a_0)}(B_1(0), V_0 dx)} = \int_{B_1(0)} \frac{\xi^{2^*(a_0)} \sigma_1}{|x|^{a_0}(1 + |x|^{a_\infty - a_0})} dx \leq C \int_{B_1(0)} \frac{\xi^{2^*(a_0)}}{|x|^{a_0}} dx = \\ = C ||\xi||^{2^*(a_0)}_{L^{2^*(a_0)}(B_1(0), |x|^{-a_0} dx)}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Para $\xi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, se $0 \leq a_0 < 2$, por (5.13) temos

$$||\xi||_{L^{2^*(a_0)}(B_1(0), |x|^{-a_0} dx)} \leq C ||\xi||_{L^{2^*(a_0)}(\mathbb{R}^N, |x|^{-a_0} dx)} \leq C' ||\xi||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}. \tag{5.22}$$

Se $a_0 < 0$, pela desigualdade de *Sobolev* (Teorema 2.3)

$$||\xi||_{L^{2^*(a_0)}(B_1(0), |x|^{-a_0} dx)} \leq ||\xi||_{L^{2^*(a_0)}(B_1(0))} \leq C ||\xi||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}. \tag{5.23}$$

Utilizando novamente a Desigualdade de *Hölder*, com conjugados $p_1 = \frac{2^*}{q}$ e $p_2 = \frac{2^*}{2^*-q}$ $(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
||\xi||^q_{L^q(B_1(0),|x|^{-a_0}dx)} &= \int\limits_{B_1(0)} \frac{|\xi|^q}{|x|^{a_0}} dx = \int\limits_{B_1(0)} \frac{|\xi|^q}{|x|^{a_0 + \frac{a_0 q}{2^*} - \frac{a_0 q}{2^*}}} dx = \\
&= \int\limits_{B_1(0)} \left(\frac{|\xi|^q}{|x|^{\frac{a_0 q}{2^*}}} \right) \left(\frac{1}{|x|^{a_0 - \frac{a_0 q}{2^*}}} \right) dx \leq \\
&\leq \left(\int\limits_{B_1(0)} \left(\frac{|\xi|^q}{|x|^{a_0 \frac{q}{2^*}}} \right)^{\frac{2^*}{q}} dx \right)^{\frac{q}{2^*}} \left(\int\limits_{B_1(0)} \left(\frac{1}{|x|^{a_0 - \frac{a_0 q}{2^*}}} \right)^{\frac{2^*}{2^*-q}} dx \right)^{\frac{2^*-q}{2^*}} = \\
&= \left(\int\limits_{B_1(0)} \frac{\xi^{2^*}}{|x|^{a_0}} dx \right)^{\frac{q}{2^*}} \left(\underbrace{\int\limits_{B_1(0)} \frac{1}{|x|^{a_0}} dx}_{=C<\infty} \right)^{\frac{2^*-q}{2^*}} \leq C \left(\int\limits_{B_1(0)} \frac{\xi^{2^*}}{|x|^{a_0}} dx \right)^{\frac{q}{2^*}} = \\
&= C ||\xi||^q_{L^{2^*}(B_1(0),|x|^{-a_o}dx)},
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

assim:

$$
||\xi||_{L^q(B_1(0),|x|^{-a_0}dx)} \leq C||\xi||_{L^{2^*}(B_1(0),|x|^{-a_o}dx)} \leq C'||\xi||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}. \tag{5.25}
$$

Queremos ver que vale também:

$$
||\xi||_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)),|x|^{-a_\infty}dx)} \leq C||\xi||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}, \tag{5.26}
$$

se $a_\infty \in (0, 2]$, então $2^*(a_\infty) < q < 2^*$. De fato

$$
2^*(a_\infty) = \frac{2N - 2a_\infty}{N-2} < \frac{2N}{N-2} = 2^*(0) \tag{5.27}
$$

$$
2^*(2) = \frac{2N-4}{N-2} = 2 > 1. \tag{5.28}
$$

Daí $2^*(a_\infty) \geq 2^*(2) > 1$. Então $\max\{2^*(a_\infty), 1\} = 2^*(a_\infty)$, e $q < 2^*$, como visto anteriormente, de modo que q está no intervalo indicado. De forma similar a (5.21), temos

$$
\begin{aligned}
&||\xi||^{2^*(a_\infty)}_{L^{2^*(a_\infty)}(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0), V_0 dx)} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} \frac{\xi^{2^*(a_\infty)} \sigma_1}{|x|^{a_0}(1 + |x|^{a_\infty - a_0})} dx \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} \frac{\xi^{2^*(a_\infty)}}{(|x|^{a_0} + |x|^{a_\infty})} dx \leq \\
&\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} \frac{\xi^{2^*(a_\infty)}}{|x|^{a_\infty}} dx = C||\xi||^{2^*(a_\infty)}_{L^{2^*(a_\infty)}(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0),|x|^{-a_\infty}dx)}.
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

Considera $\tau = N - \frac{q(N-2)}{2} < a_\infty$ $(q = 2^*(\tau))$. Se $|x| > 1$, então $\frac{1}{|x|^{a_\infty}} < \frac{1}{|x|^\tau}$, de modo que

$$||\xi||^q_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)),|x|^{-a_\infty}dx)} = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{|\xi|^q}{|x|^{a_\infty}}dx < \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{|\xi|^{2^*(\tau)}}{|x|^\tau}dx. \tag{5.30}$$

Sendo $\tau < a_\infty \leq 2$, segue de (5.13)

$$||\xi||_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)),|x|^{-a_\infty}dx)} \leq C||\xi||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}. \tag{5.31}$$

Para $a_\infty > 2$, divide-se em 2 casos

(i) Caso $q < 2$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{|\xi|^q}{|x|^{a_\infty}}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{|\xi|^q}{|x|^{a_\infty(1+\frac{q}{a_\infty}-\frac{q}{a_\infty})}}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \left(\frac{|\xi|^q}{|x|^q}\right)\left(\frac{1}{|x|^{a_\infty-q}}\right)dx. \tag{5.32}$$

Aplicando *Hölder* para $p_1 = \frac{2}{q}$, $p_2 = \frac{2}{2-q}$, ficamos com

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{|\xi|^q}{|x|^{a_\infty}}dx \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{|\xi|^2}{|x|^2}dx\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{1}{|x|^{(a_\infty-q)\frac{2}{2-q}}}dx\right)^{\frac{2-q}{2}}. \tag{5.33}$$

Para que a última integral convirja, precisamos que $\frac{-2}{2-q}(a_\infty - q) + n < 0$, que reescrevendo é equivalente a $2^*(a_\infty) < q$, que é satisfeito. Aplicando *Hardy-Sobolev* em (5.33), segue o resultado desejado.

(ii) Caso $q \geq 2$: Se $q \geq 2$, então $\tau(q) = N - \frac{q(N-2)}{2} \leq N - \frac{2(N-2)}{2} \leq 2 < a_\infty$. Assim

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{|\xi|^q}{|x|^{a_\infty}}dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{|\xi|^q}{|x|^{\tau(q)}}dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} \frac{|\xi|^{2^*(\tau)}}{|x|^\tau}dx, \tag{5.34}$$

e novamente, pela desigualdade (5.13), vale o resultado desejado.

Combinando (5.21),(5.25), (5.26) e (5.29), temos:

$$||\xi||_{L^q(\mathbb{R}^N,V_0dx)} \leq C_1||\xi||_{L^q(B_1(0),|x|^{-a_0}dx)} + C_2||\xi||_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)),|x|^{-a_\infty}dx)} \leq C||\xi||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}. \tag{5.35}$$

isto é, a imersão é contínua. Falta verificar que é compacta. Para isso, seja $\{\xi_n\}$ uma sequência limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Sendo limitada, $\exists M > 0$ tal que

$$||\xi_n||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \leq M. \tag{5.36}$$

Comecemos observando que (ξ_n) limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ implica $(\xi_n) \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e é limitada nesse espaço: se $v \in C^\infty_C(\mathbb{R}^N) \Rightarrow ||v||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C||\nabla v||_{L^2(\mathbb{R}^N)} = ||v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$, pela desigualdade GNS (Teorema 2.2) e

$$\begin{aligned} &v_n \in C^\infty_C(\mathbb{R}^N) \quad \text{tal que} \quad v_n \to v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \\ &\Rightarrow ||v_n - v_m||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C||\nabla v_n - \nabla v_m||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0, \end{aligned} \tag{5.37}$$

isto é, (v_n) é de *Cauchy* em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, completando a afirmação. Para $R>0$, sendo (ξ_n) limitada em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, também o é em $L^{2^*}(B_R(0))$; pela desigualdade de *Hölder*, (ξ_n) é limitada em $L^2(B_R(0))$. Assim, vale que

$$||\xi_l||_{L^{2^*}(B_R(0))} + ||\nabla\xi_n||_{L^{2^*}(B_R(0))} = ||\xi_n||_{H^1(B_R(0))} \leq C. \tag{5.38}$$

ou seja, (ξ_n) é limitada em $H^1(B_R(0))$. Por *Rellich-Kondrachov* ([4]) existe uma subsequência $(\xi_n)_l$ de (ξ_n) tal que, $(\xi_n)_l \to v_R$ em $L^q(B_R(0))$ para $1 \leq q \leq 2^*$ $(v_R \in L^q(B_R(0)))$. Verifiquemos que o mesmo vale com a métrica $V_0 dx$

$$\xi_{n_l} \to v_R \quad \text{em} \quad L^q(B_R(0), V_0 dx). \tag{5.39}$$

Vamos dividir em 2 casos, $a_0 \in [0,2)$ e $a_0 < 0$.

(i) Caso 1 ($a_0 \in [0,2)$). Para $a>1$, por *Hölder*

$$\int\limits_{B_R(0)} |\xi_{n_l} - v_R|^q V_0 dx \leq \left(\int\limits_{B_R(0)} |\xi_{n_l} - v_R|^{qa} \right)^{\frac{1}{a}} \left(\int\limits_{B_R(0)} V_0^{\frac{a}{a-1}} dx \right)^{\frac{a-1}{a}}. \tag{5.40}$$

Logo, basta que exista a, tal que $qa < 2^*$ e a segunda integral fique limitada para provar o que se deseja. Para a segunda integral,

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_R(0)} V_0^{\frac{a}{a-1}} dx \leq C \int\limits_{B_R(0)} (|x|^{-a_0})^{\frac{a}{a-1}} dx = C \int\limits_0^R r^{\frac{-a_0 a}{a-1}} (\omega_n) r^{n-1} dr \leq \\ \leq C' \int\limits_0^R r^{n-1-\frac{a_0 a}{a-1}} dr.\end{aligned} \tag{5.41}$$

Para a integral ficar limitada, precisamos que $n-1-\frac{a_0 a}{a-1} > -1$, isto é

$$a > \frac{n}{n-a_0}, \quad \text{e o conjugado de } a \text{ é} \quad \frac{a}{a-1} < \frac{n}{a_0}. \tag{5.42}$$

Precisamos que exista $a < \frac{2^*}{q}$, o que é possível se

$$\frac{2^*}{q} > \frac{n}{n-a_0} \Rightarrow q < \frac{2(n-a_0)}{n-2} = 2^*(a_0). \tag{5.43}$$

Logo, conseguimos tal a. Seja $\tilde{q} = qa < 2^*$, e $\frac{n}{n-a_0} < a < \frac{2^*}{q}$. Assim

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_R(0)} |\xi_{n_l} - v_R|^q V_0 dx \leq \left(\int\limits_{B_R(0)} |\xi_{n_l} - v_R|^{\tilde{q}} \right)^{\frac{1}{a}} \left(\int\limits_{B_R(0)} V_0^{\frac{a}{a-1}} dx \right)^{\frac{a-1}{a}} \leq \\ \leq C \left(\int\limits_{B_R(0)} |\xi_{n_l} - v_R|^{\tilde{q}} \right)^{\frac{1}{a}} \leq C' ||\xi_{n_l} - v_R||^{\frac{q}{\tilde{q}}}_{L^{\tilde{q}}(B_R(0))} \to 0 \quad \text{pois} \quad \tilde{q} < 2^*.\end{aligned} \tag{5.44}$$

Isto é

$$||\xi_{n_l} - v_R||_{L^q(B_R(0), V_0 dx)} \to 0 \quad \text{para} \quad q < \tilde{q} < 2^*. \tag{5.45}$$

(ii) Caso 2 ($a_0 < 0$):

$$\int\limits_{B_R(0)} |\xi_{n_l} - v_R|^q V_0 dx \leq \int\limits_{B_R(0)} |\xi_{n_l} - v_R|^q C |\underbrace{x}_{<R}|^{\overbrace{-a_0}^{>0}} dx \leq$$
$$\leq CR^{-a_0} \int\limits_{B_R(0)} |\xi_{n_l} - v_R|^q dx \to 0, \quad \text{pois} \quad \xi_{n_l} \to v_R \quad \text{em} \quad L^q(B_R(0)). \tag{5.46}$$

Obtemos assim a compacidade em uma bola $B_R(0)$. Falta estender para o espaço todo. Para isso, considere uma sequência (R_n) crescente, tal que $R_n \to \infty$, definida da seguinte forma:

(i) Para R_1, $\exists$ uma subsequência (ξ_n^1), com $\xi_n^1 \to v_1$ em $L^q(B_{R_1}(0), V_0 dx)$, que existe como visto acima.

(ii) Para R_2, $\exists$ subsequência (ξ_n^2) de (ξ_n^1), tal que $\xi_n^2 \to v_2$ em $L^q(B_{R_2}(0), V_0 dx)$.

$$\vdots$$

(iii) Para R_k, $\exists$ subsequência (ξ_n^k) de (ξ_n^{k-1}), tal que $\xi_n^k \to v_k$ em $L^q(B_{R_k}(0), V_0 dx)$.

Seja $\omega_n = \xi_n^n$ uma sequência extraída por argumento de *Cantor*; consequentemente, ω_n é subsequência de (ξ_n^k) para $n \geq k$. Logo, $\omega_n \to v_k$ em $L^q(B_{R_k}(0), V_0 dx)$. Por construção, $v_{k+1} = v_k$ em $B_{R_k}(0)$. Seja

$$v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad v = v_k \quad \text{em} \quad B_{R_k}(0). \tag{5.47}$$

Assim $\omega_n \to v$ em $L^q(B_{R_k}(0), V_0 dx)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, (ω_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$; como esse espaço é de *Hilbert*, $\exists (\omega_{n_l})$ subsequência que converge fracamente a algum ω em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Em resumo

$$\begin{aligned} \omega_{n_l} \rightharpoonup \omega \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^q(\mathbb{R}^N, V_0 dx) \subseteq L^q(B_{R_k}(0), V_0 dx) \\ \omega_{n_l} \to v \quad \text{em} \quad L^q(B_{R_k}(0), V_0 dx) \Rightarrow \omega_{n_l} \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^q(B_{R_k}(0), V_0 dx). \end{aligned} \tag{5.48}$$

Assim, $\omega = v$ q.t.p. Daí, $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^q(\mathbb{R}^N, V_0 dx)$. Temos convergência forte de v no interior da bola $B_{R_k}(0)$, e fraca em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Observa que fora de uma bola $B_R(0)$, para algum R suficientemente grande, e $\tau = \tau(q) = N - \frac{q(N-2)}{2}$, temos

$$||\omega_n||^q_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)), |x|^{-a_\infty} dx)} = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\omega_n|^q |x|^{-a_\infty + \tau - \tau} dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\omega_n|^q \underbrace{|x|}_{>R}{}^{\overbrace{\tau - a_\infty}^{<0}} |x|^{-\tau} dx \leq$$
$$\leq R^{\tau - a_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\omega_n|^q |x|^{-\tau} dx \leq R^{\tau - a_\infty} ||\omega_n||^q_{\mathcal{D}^{1,2}} \leq R^{\tau - a_\infty} M^{\frac{q}{2}} < \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.49}$$

A desigualdade $\tau(q)-a_\infty < 0$ equivale à $q > 2^*(a_\infty)$, que vale por (5.20). Da mesma maneira, como $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, o mesmo resultado segue para v. Seja R_0 tal que vale $R_0^{\tau-a_\infty} M^{\frac{q}{2}} < \frac{\epsilon}{3}$. Logo

$$||\omega_n||^q_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_{R_0}(0)),V_0dx)} < \frac{\epsilon}{3},$$
$$||v||^q_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_{R_0}(0)),V_0dx)} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por outro lado, $\omega_n \to v$ em $L^q(B_{R_k}(0), V_0dx)$ $\forall k$. Portanto, $\exists n_0$ tal que, $\forall n > n_0$

$$||\omega_n - v||^q_{L^q(B_{R_0}(0),V_0dx)} < \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.50}$$

Consequentemente, para $n > n_0$

$$\begin{aligned}||\omega_n - v||^q_{L^q(\mathbb{R}^N,V_0dx)} &\leq ||\omega_n - v||^q_{L^q(B_{R_0}(0),V_0dx)} + ||\omega_n - v||^q_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_{R_0}(0)),V_0dx)} < \\ &\frac{\epsilon}{3} + ||\omega_n||^q_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_{R_0}(0)),V_0dx)} + ||v||^q_{L^q(\mathbb{R}^N\setminus B_{R_0}(0)),V_0dx)} < \epsilon,\end{aligned} \tag{5.51}$$

isto é, $\omega_n \to v$ em $L^q(\mathbb{R}^N, V_0dx)$, completando a prova. □

Corolário 5.1.1. *A inclusão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, V_0u_{k,V}^{p-1}dx)$ é contínua e compacta, se $k \leq k_p$, onde a_0, a_∞ e p satisfazem as hipóteses do Lema 5.1*

Demonstração. Pelo Corolário 4.5.1, para $k \leq k_p$, $u_{k,p}$ é uma solução clássica limitada por w_{t_p}. Além disso, por (3.68),

$$u_{k,V} \leq C|x|^{2-N} \quad \text{para algum} \quad C > 0. \tag{5.52}$$

Logo, existem C_1, C_2 positivos tais que

$$V_0u_{k,V}^{p-1} \leq C_1|x|^{-a_0+(p-1)(2-N)} \quad \text{para} \quad 0 < |x| \leq 1, \tag{5.53}$$

e

$$V_0u_{k,V}^{p-1} \leq C_2|x|^{-a_0+(p-1)(2-N)} \quad \text{para} \quad |x| > 1. \tag{5.54}$$

Portanto, assim como (5.20), e seguindo os mesmos argumentos do Lema 5.1, vemos que a inclusão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^2(\mathbb{R}^N, V_0u_{k,V}^{p-1}dx)$ é contínua e compacta se

$$max\{2^*(a_\infty + (p-1)(N-2)), 1\} < q < min\{2^*(a_0 + (p-1)(N-2)), 2^*\}. \tag{5.55}$$

Como $q = 2$ satisfaz esta condição, já que $\frac{N-a_\infty}{N-2} < p < \frac{N-a_0}{N-2}$, segue o corolário. □

5.2 Teorema 1.3

Demonstração Teorema 1.3. A ideia é utilizar o Teorema do Passo da Montanha (Teorema 2.6) para obter a segunda solução. Considere a seguinte desigualdade (provado em [7]):

$$0 \leq F(s,t) \leq (p+\epsilon)s^{p-1}t^2 + C_\epsilon t^{p+1}, \quad s,t \geq 0, \tag{5.56}$$

e $C_\epsilon > 0$. Por essa desigualdade, e o Lema 5.1 e Corolário 5.1.1, para qualquer $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,v}, v+)dx \leq (p+\epsilon)\int_{\mathbb{R}^N} Vu_{k,V}^{p-1}v_+^2 dx + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} Vv_+^{p+1}dx \leq$$
$$\leq c_\epsilon \left(||v||^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + ||v||^{p+1}_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\right), \quad c_\epsilon > 0. \tag{5.57}$$

Assim $E(v)$ (5.7) está bem definido. Também pode ser verificado que E é C^1 em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ (ver Proposição 7.1 no Apêndice). Basta, portanto, mostrar que E satisfaz as condições do Teorema Passo da Montanha:

(i) E(0) = 0 é simples:

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla 0|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,V}, 0)dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} V\frac{1}{p+1}\left[(u_{k,V}+0)^{p+1} - (u_{k,V})^{p+1} - (p+1)(u_{k,V})^p 0_+\right]dx = 0. \tag{5.58}$$

(ii) Existem r e a positivos, tal que $E(v) \geq a$ se $||v|| = r$:
Seja $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $||v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = 1$, $k \in (0, k_p)$ e $\epsilon > 0$ pequeno. Então, pelo Corolário 4.5.1 e (5.56)

$$E(tv) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla tv|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,V}, tv_+)dx \geq$$
$$\geq \frac{t^2}{2}||v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} - t^2(p+\epsilon)\int_{\mathbb{R}^N} V_0 u_{k,V}^{p-1}v^2 dx - C_\epsilon t^{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} V_0|v|^{p+1} \geq$$
$$\geq Ct^2||v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} - C't^{p+1}||v||^{p+1}_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = Ct^2 - C't^{p+1}, \tag{5.59}$$

com $C, C' > 0$. Assim, para t_0 pequeno:

$$E(t_0 v) \geq \frac{C}{4}t_0^2 =: \beta > 0, \tag{5.60}$$

completando a segunda condição.

(iii) Existe um elemento $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $||v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} > r$ e $E(v) \leq 0$.
Fixa $v_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, com $||v_0||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = 1$ e $v_0 \geq 0$, cujo suporte é um subconjunto do suporte de V. Vale a desigualdade $(a+b)^p > a^p + b^p$ para $a, b > 0$ e $p > 1$; aplicando ela para $F(s,t)$ (5.8), temos para $t > 0$,

$$F(u_{k,V}, tv_0) \geq \frac{1}{p+1}\left(t^{p+1}v_0^{p+1} - (p+1)u_{k,V}^p tv_0\right). \tag{5.61}$$

Assim, pelo Lema 5.1,

$$E(tv_0) = \frac{t^2}{2}||v_0||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,V}, tv_0)dx \leq$$
$$\leq \frac{t^2}{2}||v_0||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} - \frac{t^{p+1}}{p+1}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} Vv_0^{p+1}}_{C_1>0} + t\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} Vu_{k,V}^p v_0 dx}_{<C_2} \leq$$
$$\leq \frac{t^2}{2}||v_0||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} - \frac{t^{p+1}}{p+1}C_1 + C_2 t \leq$$
$$\leq \frac{t^2}{2} - \frac{C_1 t^{p+1}}{p+1} + C_2 t \leq 0. \tag{5.62}$$

Para $t \geq T > 0$, com T suficientemente grande, o funcional fica negativo. Tomando $e = Tv_0$, $E(e) \leq 0$ e a condição é cumprida.

(iv) E satisfaz a condição de *Palais-Smale* no nível c. Seja $(v_n) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $E(v_n) \to c$ e $E'(v_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, com c o nível do caminho

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} E(\gamma(s)), \tag{5.63}$$

e $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ e $c \geq \beta$. Considere a desigualdade

$$f(s,t)t - (2 + c_p)F(s,t) \geq -\frac{c_p p}{2} s^{p-1} t^2, \quad s,t \geq 0, \tag{5.64}$$

provada em [7], com $f(s,t)$ (5.11) e $c_p = min\{1, p-1\}$. $E(v_n)$ convergir a algum c implica que $E(v_n)$ é limitada, donde $\exists M_1 > 0$ tal que

$$M_1 > |E(v_n)| \geq E(v_n) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,V}, v_+) dx. \tag{5.65}$$

Da mesma maneira, $E'(v_n) \to 0 \Rightarrow \exists M_2 > 0$ tal que $M_2 > |E'(v_n)|$. Assim

$$|E'(v_n) \cdot v_n| \leq |E'(v_n)| ||v_n||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \leq M_2 ||v_n||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}. \tag{5.66}$$

Do Apêndice 7.1, temos que

$$E'(v_n) \cdot h = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla v_n, \nabla h \rangle dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\left[V(u_{k,V} + (v_n)_+)^p h - u_{k,V}^p h \right]}_{= Vf(u_{k,V}, (v_n)_+)} dx. \tag{5.67}$$

Valendo a desigualdade (5.66) em módulo, ficamos com

$$M_2 ||v_n||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \geq -\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} Vf(u_{k,V}, v_+) v_n dx, \tag{5.68}$$

e multiplicando a desigualdade (5.65) por $(c_p + 2)$ e somando a (5.68), resulta em

$$\begin{aligned} (c_p + 2)M_1 + M_2 ||v_n||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} &\geq \frac{c_p}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^N} (c_p + 2) VF(u_{k,V}, v_+) dx &+ Vf(u_{k,V}, v_+) v_n. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Utilizando as desigualdades (5.64) e (1.11)

$$\frac{c_p}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} (c_p+2)VF(u_{k,V}, v_+)dx + Vf(u_{k,V}, v_+)v_n \overbrace{\geq}^{5.64}$$

$$\geq \frac{c_p}{2}\left[||v_n||^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} - p\int\limits_{\mathbb{R}^N} Vu_{k,V}^{p-1}v_n^2 dx\right] \geq C\frac{c_p}{2}||v_n||^2_{\mathcal{D}^{1,2}}. \tag{5.70}$$

Usando isto e (5.69), conclui-se que v_n é uniformemente limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para $k \in (0, k^*)$. Podemos assumir que existe $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad v_n \to v \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{5.71}$$

já que v_n é limitada em um espaço de *Hilbert*. Pelo Lema 5.1, bem como o Corolário 5.1.1

$$v_n \to v \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\mathbb{R}^N, V_0 dx) \quad \text{e} \quad v_n \to v \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N, V_0 u_{k,V}^{p-1} dx). \tag{5.72}$$

Vejamos agora que $F(u_{k,V}, v_n) \to F(u_{k,V}, v)$. Seja $\varphi(z) = (s+z)^{p+1} - (p+1)s^p z$ e $z_1 = (t_1)_+$, $z_2 = (t_2)_+$. Dessa maneira

$$\varphi(z_2) - \varphi(z_1) = (s+z_2)^{p+1} - (s+z_1)^{p+1} - (p+1)s^p(z_2 - z_1), \tag{5.73}$$

e

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| = |F(s,(t_2)_+) - F(s,(t_1)_+)|. \tag{5.74}$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio (TVM)

$$\begin{aligned}|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \overbrace{=}^{TVM} |\varphi'(\overbrace{z_1 + \xi(z_2 - z_1)}^{c^*})(z_2 - z_1)| = \\ = |(p+1)(s+c^*)^p - (p+1)s^p||z_2 - z_1| = (p+1)|z_2 - z_1|[(s+c^*)^p - s^p].\end{aligned} \tag{5.75}$$

Aplicando novamente o TVM para $f(t) = t^p$, temos

$$\begin{aligned}(s+c^*)^p - s^p \overbrace{=}^{TVM} p(s+\alpha c^*)^{p-1}c^* \leq p2^{p-2}(s^{p-1} + (c^*)^{p-1})c^* \leq \\ \leq A(s^{p-1} + (c^*)^{p-1})c^*,\end{aligned} \tag{5.76}$$

com $0 < \alpha < 1$. Observa que $c^* = z_1 + \xi(z_2 - z_1) \leq z_1 + |z_2 - z_1|$, donde obtemos

$$\begin{aligned}(s+c^*)^p - s^p \leq A\left(z_1 s^{p-1} + |z_2 - z_1|s^{p-1} + 2^{p-1}z_1^p + 2^{p-1}|z_2 - z_1|^p\right) \leq \\ \leq \tilde{A}\left[z_1 s^{p-1} + |z_2 - z_1|s^{p-1} + z_1^p + |z_2 - z_1|^p\right].\end{aligned} \tag{5.77}$$

Combinando (5.75) e (5.77), bem como substituindo $z_1 = v_+$, $z_2 = (v_n)_+$ e $s = u_{k,V}$, de modo que resulta em

$$|F(u_{k,V}, v_n) - F(u_{k,V}, v)| \leq (p+1)\tilde{A}|(v_n)_+ - v_+|[v_+ u_{k,V}^{p-1} + |(v_n)_+ - v_+|u_{k,V}^{p-1} + \\ + v_+^p + |(v_n)_+ - v_+|^p]. \tag{5.78}$$

Como $v_n \to v$ em $\mathbb{R}^N$, pela desigualdade acima, vale $F(u_{k,V}, v) \to F(u_{k,V}, v_n)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Vejamos que também vale em $L^1(\mathbb{R}^N, V_0 dx)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |F(u_{k,V}, v_n) - F(u_{k,V}, v)|V_0 dx \leq A(p+1)\Bigg[\int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|v_+ u_{k,V}^{p-1} V_0 dx + \\
\overbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|^2 u_{k,V}^{p-1} V_0 dx}^{\to 0 \quad \text{por} \quad 5.72} + \int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|v_+^p V_0 dx + \\
\overbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|^{p+1} V_0 dx}^{\to 0 \quad \text{por} \quad 5.72}\Bigg] = \\
= A(p+1)\Bigg[\int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|v_+ u_{k,V}^{p-1} V_0 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|v_+^p V_0 dx\Bigg] + T_n,
\end{aligned} \tag{5.79}$$

onde T_n é a soma das 2 integrais que vão para zero. Por sua vez, aplicando a desigualdade de *Hölder* com $q = \frac{p+1}{p}$, $\tilde{q} = p+1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|v_+^p V_0 dx \leq \\
\leq \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|^{p+1} V_0 dx}_{\to 0 \quad \text{por} \quad 5.72}\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} v_+^{p+1} V_0 dx}_{<\infty \quad \text{pelo Lema } 5.1}\right)^{\frac{p}{p+1}} \to 0,
\end{aligned} \tag{5.80}$$

e de maneira similar, com a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|v_+ u_{k,V}^{p-1} V_0 dx \leq \\
\leq \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |(v_n)_+ - v_+|^2 u_{k,V}^{p-1} V_0 dx}_{\to 0 \quad \text{por} \quad 5.72}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} v_+^2 u_{k,V}^{p-1} V_0 dx}_{<\infty \quad \text{pelo Corolário } 5.1.1}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,
\end{aligned} \tag{5.81}$$

obtendo a convergência de F em $L^1(\mathbb{R}^N, V_0 dx)$. De $v_n \rightharpoonup v$, tem-se

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx, \tag{5.82}$$

e combinando com a convergência de F, segue que

$$\begin{aligned} c = \lim_{n\to\infty} E(v_n) = \liminf_{n\to\infty} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,V}, (v_n)_+) dx \right] \geq \\ \geq \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,V}, v_+) dx \right] = E(v). \end{aligned} \tag{5.83}$$

Isto é, $E(v) \leq c$. Gostaríamos de verificar que $E(v) \geq c$, de maneira que $E(v) = c = \lim\limits_{n\to\infty} E(v_n)$. Para isso, considere $E(v) - E(v_n) - E'(v_n)(v - v_n) = R(v - v_n)$. Logo,

$$\begin{aligned} E(v) - E(v_n) - E'(v_n)(v - v_n) \overbrace{=}^{\text{Ver apêndice}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \frac{1}{2}|\nabla v_n|^2 - \\ - \underbrace{\langle \nabla v_n, \nabla(v - v_n) \rangle}_{|\nabla v_n|^2 - \langle \nabla v_n, \nabla v \rangle >} - VF(u_{k,V}, (v_+)) + \\ + VF(u_{k,V}, (v_n)_+) - Vf(u_{k,V}, v_n)(v - v_n) dx \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_n|^2 - \underbrace{\langle \nabla v_n, \nabla v \rangle}_{\to |\nabla v|^2} + ... + dx = R(v - v_n) \\ \liminf_{n\to\infty} R(v - v_n) \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - |\nabla v|^2 dx + 0 = 0. \end{aligned} \tag{5.84}$$

Ou seja, $\liminf\limits_{n\to\infty} R(v - v_n) \geq 0$. Observe que $E'(v_n)(v - v_n) \to 0$:

$$\begin{aligned} |E'(v_n)(v - v_n)| \leq ||E'(v_n)|| ||v_n - v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \leq \\ \leq \underbrace{||E'(v_n)||}_{\to 0} \left(\overbrace{||v||}^{<\infty}_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + \overbrace{||v_n||}^{<M}_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \right) \to 0. \end{aligned} \tag{5.85}$$

Assim

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} [E(v) - E(v_n) - E'(v_n)(v - v_n)] \geq 0 \\ \therefore E(v) - \underbrace{\lim_{n\to\infty} E(v_n)}_{c} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} E'(v_n)(v - v_n)}_{0} \geq 0 \\ \therefore E(v) - c \geq 0 \\ \therefore E(v) \geq c. \end{aligned} \tag{5.86}$$

Logo, temos $E(v) = c$. Consequentemente, $\lim_{n\to\infty} ||v_n||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = ||v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$, já que $\lim_{n\to\infty} E(v_n) = E(v)$. Combinando a convergência da norma $||v_n||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \to ||v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$, com a convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, temos que $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Com todas as condições verificadas, aplica-se o Teorema *Mountain Pass* para encontrar um ponto crítico não negativo e não trivial $v_k \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ de E, que é solução fraca do problema (5.1), isto é

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_{k,V} + v_k) \cdot \nabla\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(u_{k,V} + v_k)^p \varphi dx, \tag{5.87}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $0 \notin supp\,\varphi$. Sendo solução fraca de (5.1), pelas observações feitas no início dessa seção, temos que $u_{k,V} + v_k$ é solução fraca do problema (P_k). Ainda é possível demonstrar que essa segunda solução é solução clássica utilizando iterações de *Moser-Nash* [8]; porém, isso já está além do escopo desse trabalho.

□

Supõe agora um potencial V radialmente simétrico, e consideremos $\mathcal{D}_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, o fecho de todas as funções radialmente simétricas em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a norma:

$$||v||_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.88}$$

Supondo $a_0 < 2$, $a_\infty > max\{a_0, 0\}$, e p satisfazendo (1.19), vale o resultado do Lema 5.1, mas agora com a inclusão $\mathcal{D}_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N, V_0 dx)$ sendo contínua e compacta.

5.3 Teorema 1.4

Demonstração Teorema 1.4. Sendo V simétrico, a solução minimal $u_{k,V}$ de (P_k) também o é, pelo Teorema 1.1, além de também ser estável para $k \in (0, k_p]$, pelo Teorema 1.2. A fim de utilizar o Teorema *Mountain-Pass*, procuramos o ponto crítico do funcional

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} VF(u_{k,V}, v_+)dx, \tag{5.89}$$

em $\mathcal{D}_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Seguindo os passos da prova do Teorema 1.3, segue o resultado.

□

6 Conclusão e Perspectivas

Ao final do trabalho, conseguimos reproduzir todos os resultados desejados enunciados. Considerando isso, surgem algumas possíveis áreas de continuação naturais, tais quais analisar e estabelecer um melhor valor de k_p para a existência das soluções fracas, definir a existência de outras soluções e determinar algum sistema cujo comportamento se assemelhe com o problema estudado.

7 Apêndice

Proposição 7.1. *E definido em (5.7) é C^1 .*

Demonstração. Queremos mostrar que

$$E(v+h) - E(v) - T_v(h) = r(h), \quad com \quad \lim_{||h|| \to 0} r(h) = 0, \tag{7.1}$$

e $T = f$, definido em (5.11). Denotemos $u_{k,V} = w$ por simplicidade. Temos

$$E(v+h) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (v+h)|^2 dx -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^N} V \frac{1}{p+1} \left[(w + (v+h)_+)^{p+1} - w^{p+1} - (p+1) w^p (v+h)_+ \right] dx$$

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (v)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} V \frac{1}{p+1} \left[(w + v_+)^{p+1} - w^{p+1} - (p+1) w^p v_+ \right] dx$$

$$T_v(h) = \int_{\mathbb{R}^N} < \nabla v, \nabla h > dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left[V (w + v_+)^p h - w^p h \right] dx.$$

Combinando as três equações acima, tem-se

$$E(v+h) - E(v) - T_v(h) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (h)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} V \frac{1}{p+1} A(v,h) dx, \quad com \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} A(v,h) = &- \left[(w + (v+h)_+)^{p+1} - (p+1) w^p (v+h)_+ \right] + \\ &+ \left[(w + v_+)^{p+1} - (p+1) w^p v_+ \right] + (p+1) \left[(w + v_+)^p h - w^p h \right]. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Vamos dividir em quatro casos

(i) $(v+h) \geq 0, \quad v \geq 0$:

$$\begin{aligned} A(v,h) = &- \left[(w + (v+h))^{p+1} - (p+1) w^p (v+h) \right] + \\ &+ \left[(w+v)^{p+1} - (p+1) w^p v \right] + (p+1) \left[(w+v)^p h - w^p h \right]. \end{aligned}$$

Definindo

$$\psi(z) = (w+z)^{p+1} - (p+1) w^p z;$$
$$\psi'(z) = (p+1)(w+z)^{p+1} - (p+1) w^p.$$

A pode ser reescrita como

$$A(v,h) = - \left[\psi(v+h) - \psi(v) - \psi'(v) h \right] = -O(h).$$

(ii) $(v+h) \leq 0, \quad v \leq 0$: Trivialmente, A se simplifica para

$$A(v,h) = -w^{p+1} + w^{p+1} + w^p h - w^p h = 0. \tag{7.4}$$

(iii) $(v+h)>0, \quad v<0 \ (|h|>|v|)$

$$\begin{aligned}A(v,h) = &-\left[(w+(v+h))^{p+1}-(p+1)w^p(v+h)\right]+\\&+w^{p+1}+(p+1)\left[(w)^p h - w^p h\right]=\\=&-\left[(w+(v+h))^{p+1}-w^{p+1}-(p+1)w^p(v+h)\right].\end{aligned}$$

Definindo

$$\psi(z)=(w+z)^{p+1};$$
$$\psi'(z)=(p+1)(w+z)^p,$$

tem-se

$$\begin{aligned}A(v,h)=-\left[\psi(v+h)-\psi(0)-\psi'(0)(v+h)\right]\leq\\ \leq |v+h|\rho(|v+h|)\leq 2|h|\rho(2|h|), \quad \text{com} \quad \rho(|v+h|)\to 0.\end{aligned}$$

(iv) $(v+h)<0, \quad v>0 \ (|h|>v>0)$

$$A(v,h)=-w^{p+1}+(w+v)^{p+1}-(p+1)w^p v+(p+1)\left[(w+v)^p h - w^p h\right].$$

Como $v+h<0$ e $|h|>v$, temos que $h<0$, com $-h>v$. Por isso, defina $v=-sh$, com $s\in[0,1]$. Definindo ainda

$$\psi(z)=(w+z)^{p+1}-(p+1)w^p z;$$
$$\psi'(z)=\left[(p+1)(w+z)^p-(p+1)w^p\right],$$

$A(v,h)$ fica

$$\begin{aligned}A=&-\left[w^{p+1}-(w-sh)^{p+1}+(p+1)w^p(-sh)-(p+1)\left[(w-sh)^p h + w^p h\right]\right]=\\&=\psi(-sh)-\psi(0)-\psi'(-sh)h=\left[\psi(-sh)-\psi(0)-\psi'(-sh)(-sh)\right]+\\&+\psi'(-sh)sh-\psi'(-sh)h=|-sh|\rho(|-sh|)-\psi'(-sh)h(1-s)\leq\\&\leq h\rho(|-sh|)+\psi'(-sh)h^2, \quad \text{com} \quad \lim_{|sh|\to 0}\rho(|sh|)\to 0.\end{aligned}$$

Assim, de fato vemos que E é C^1.

$\square$

Referências

[1] Chen, H., Felmer, P. e Yang, J. "Weak solutions of semilinear elliptic equation involving Dirac mass". Em: *Poincaré Anal. Non Linéaire* 35.3 (jun. de 2018), pp. 729–750. DOI: 10.1016/j.anihpc.2017.08.001.

[2] Brezis, H. *Some variational problems of the Thomas-Fermi type, in "Variational Inequalities", RW Cottle, F. Giannessi and J.-L. Lions.* 1980.

[3] Bénilan, P. e Brézis, H. "Nonlinear Problems Related to the Thomas-Fermi equation". Em: *Journal of Evolution Equations* (2004).

[4] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, V. 19 GSM/19. American Mathematical Society, 1998.

[5] Kavian, O. "Inégalité de Hardy-Sobolev et application". Tese de dout. Université de Paris VI, 1978.

[6] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. 2nd ed., rev. 3rd printing. Classics in mathematics. Springer, 2001. ISBN: 9783540411604; 3540411607.

[7] Naito, Y. "Non-uniqueness of solutions to the Cauchy problem for semilinear heat equations with singular initial data". Em: *Mathematische Annalen* 329.1 (mai. de 2004), pp. 161–196. ISSN: 1432-1807. DOI: 10.1007/s00208-004-0515-4.

[8] Moser, J. "On Harnack's theorem for elliptic differential equations". Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 14.3 (1961), pp. 577–591. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160140329.