Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

RELAÇÕES SOBRE ANÉIS E MÓDULOS DE N-CADEIA

Tese de Doutorado

Adriano Gomes de Santana

Porto Alegre, 28 de Fevereiro de 2024

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

RELAÇÕES SOBRE ANÉIS E MÓDULOS DE N-CADEIA

Tese de Doutorado

Adriano Gomes de Santana

Porto Alegre, 28 de Fevereiro de 2024

Tese submetida por Adriano Gomes de Santana como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana

Banca examinadora:
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (orientador)
Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares
Prof. Dr. Wagner de Oliveira Cortes
Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra
Prof. Dr. Samuel Volkweis Leite

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha irmã, Sônia Gomes de Santana Correia, pelos exemplos de vida, cuidados, paciência e pelas tardes de salgadinhos, refrigerantes e filmes.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, Pai todo poderoso e eterno, criador do céu e da terra, que preparou este caminho para mim até aqui. Que pôs na minha vida ótimas pessoas e oportunidades sem as quais nada disso poderia ser possível. Em especial, por ter me proporcionado, mesmo no período de pandemia com tantas atividades suspensas, continuar os estudos, parte a distância e parte presencial. Seu nome seja louvado.

Quero agradecer a minha esposa, Aline, pelo companheirismo durante este processo. Pelo apoio psicológico e incentivos. Pelo apoio financeiro quando foi necessário economizar um pouco aqui e ali. Por suportar a distância nos períodos de retorno às atividades presenciais. E por todas as orações e preces.

Agradeço também ao meu orientador Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana. Por confiar a proposta de estudo deste tema aqui desenvolvido. Pelas orientações, conselhos e sabedoria. Pela paciência e confiança durante este tempo de pesquisa. E pelo exemplo e inspiração como pesquisador, professor e pessoa.

Agradeço a minha família, em especial meu pai Valdemar e minha mãe Eva pelo cuidado por todos estes anos. Pela confiança depositada em mim durante toda a vida acadêmica e pela compreensão da distância durante este tempo.

Quero também agradecer aos meus colegas de trabalho, os professores de matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná do câmpus Toledo. Pelo agradável local de trabalho e pelo voto de confiança no afastamento para a capacitação. Em particular, agradeço aos professores Dr. Wilian Francisco de Araujo e Dr. Robson Willians Vinciguerra por proporcionarem um ambiente agradável de orientação e pesquisa na área de Álgebra dentro do câmpus e pela indicação para o programa de doutorado da URFGS.

Agradeço aos colegas do programa de pós-graduação em matemática da UFRGS. Pelos convívios durante as aulas presenciais e a distância. Pelos momentos de estudos e de pausas. Pelas dicas e sugestões. Pelos seminários. E pelos momentos de convívio. Em particular, agradeço ao Rafael Haag, com quem assisti da maior quantidade de aulas junto, e compartilhei frustrações e descobertas.

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná pelo programa de capacitação docente, sem o qual eu não poderia ter me dedicado integralmente às atividades de doutorado.

E por fim, agradeço à instituição da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Aos gestores, coordenadores, administradores e zeladores. Por proporcionarem um espaço hospitaleiro durante esses anos. Aos professores do programa de Pós Graduação em Matemática pelas aulas, sugestões, seminários e eventos de divulgação científica. E a todas as demais pessoas que fazem desta uma ótima universidade.

Ele fez tudo apropriado a seu tempo. Também pôs no
coração do homem o anseio pela eternidade; mesmo assim
este não consegue compreender inteiramente o que Deus fez.
Eclesiastes 3:11 - NVI

Resumo

Neste trabalho estudamos os módulos e os anéis n-cadeias a partir dos anéis seriais e dos anéis semiperfeitos e semidistributrivos. Explorando a conexão entre a n-distributividade e a n-comparabilidade respondemos, de forma afirmativa, a questão aberta apresentada em [4] a qual pergunta se o o módulo livre de rank m sobre um anel $(n+1)$-distributivo tem índice de distributividade $mn+1$ (Teorema 2.36). Mostramos também que a n-comparabilidade pode ser avaliada sobre os elementos das componentes de qualquer decomposição de Pierce de um anel (Proposição 2.27). Tal resultado teve implicações sobre o comportamento das coberturas projetivas e módulos finitamente apresentados sobre anéis semiperfeitos de n-cadeia, dentre elas, uma generalização para [18, Proposition 1.25] (Proposição 3.15), inicialmente provada para anéis seriais, mostrando após isso que os anéis semiperfeitos do tipo de representação limitara são de n-cadeia.

Palavras-chave: módulos de n-cadeia; anéis de n-cadeia; anéis semiperfeitos; decomposição de Pierce; módulos finitamente apresentados.

Abstract

In this work, we study the n-chain modules and rings arising from serial rings and semiperfect semidistributive rings. By exploring the connection between n-distributivity and n-comparability, we affirmatively answer the open question posed in [4], which inquires whether the free module of rank m over an $(n+1)$-distributive ring has a distributivity index of $mn+1$ (Theorem 2.36). We also demonstrate that n-comparability can be assessed on the elements of the components of any Pierce decomposition of a ring (Proposition 2.27). This result has implications for the behavior of projective covers of finitely presented modules over semiperfect n-chain rings, including a generalization of [18, Proposition 1.25] (Proposition 3.15), initially showed for serial rings. Subsequently, we show that semiperfect rings of bounded representation type are n-chain rings.

Keywords: n-chain modules; n-chain rings; semiperfect rings; Pierce decomposition; finitely presented modules.

Sumário

INTRODUÇÃO

Dizemos que um anel é de cadeia quando tanto o seu reticulado dos ideais à direta, como o reticulado de seus ideais à esquerda, formam uma cadeia de inclusões. Tais anéis aparecem naturalmente na geometria algébrica como os anéis locais dos pontos não singulares de uma curva afim. Estes anéis também são estudados na teoria de valorizações de corpos e anéis de divisão, na teoria dos anéis seriais e aparecem naturalmente na caracterização dos anéis hipercíclicos em [17].

A definição de anéis de n-cadeia, e alguns dos primeiros resultados sobre o assunto, aparecem em [3] como uma proposta de generalização da teoria de valorizações para os anéis artinianos semissimples. Embora a teoria dos anéis de cadeia tenha uma vasta quantidade de referências na literatura, os anéis de n-cadeia parece não despertar tanto interesse, sendo [3] e [4] alguns dos poucos trabalhos que apresentam resultados sobre tais anéis, enquanto que outras referências se restringem a apresentar pouca coisa a mais que sua definição. Por outro lado, várias outras categorias de anéis que se enquadram com anéis de n-cadeia, como as k-álgebras de dimensão finita, os anéis seriais e alguns anéis semiperfeitos, são amplamente estudados.

Neste trabalho desenvolveremos uma teoria para o estudo dos anéis e módulos de n-cadeia. Para tal, partiremos de algumas pesquisas e resultados já existentes, como por exemplo os anéis e módulos de cadeia, anéis e módulos seriais e os anéis semiperfeitos e semidistributivos.

No Capítulo 1 apresentamos os resultados básicos necessários para desenvolver esta teoria.

Iniciamos o Capítulo 2 com as definições e exemplos dos módulos e anéis de n-cadeia. Demonstrando o comportamento de tais módulos diante das operações básicas tal como a soma e o quociente de módulos. Na segunda seção apresentamos a relação entre os anéis de n-cadeia e suas componentes em uma decomposição de Pierce bilateral. Nesta seção fomos felizes em apresentar duas generalizações ao resultado [18, Proposition 1.22] pela Proposição 2.24 e pelo Teorema 2.27. Na terceira seção abordamos os anéis e módulos de n-cadeia na perspectiva do conceito de n-distributividade. Além de alguns resultados básicos apresentados nesta seção, conseguimos dar uma resposta afirmativa a questão sobre o índice de distributividade dos módulos livres apresentada em [4]. Na quarta seção, finalizamos com um estudo dos anéis semiperfeitos de n-cadeia e o conceito de quiver trabalhado em [13].

O estudo dos módulos finitamente apresentados sobre anéis semiperfeitos de n-cadeia é apresentada no Capítulo 3. Neste capítulo conseguimos obter no Corolário 3.12 uma relação entre o número de somandos da cobertura projetiva de um módulo finitamente apresentado e indecomponível com o número de somando do núcleo de tal cobertura. O corolário da Proposição 3.15 nos permite inferir que os anéis semiperfeitos do tipo de representação limita são necessariamente de n-cadeia. Os últimos tópicos estudados neste capítulo apresentam uma questão aberta que envolvem a classe dos anéis do tipo de representação limitada, os anéis semiperfeitos e semidistributivos e a relação de n-comparabilidade dos anéis de n-cadeia.

No último capítulo apresentamos alguns resultados e direções possíveis para futuras pesquisas envolvendo anéis e módulos de n-cadeia. Na Seção 4.1 abordamos a questão do comportamento dos reticulado dos anéis de n-cadeia e apresentamos dois resultados. Na Seção 4.2 abordamos o tema dos anéis de endomorfismos. Na Seção 4.3 procuramos obter resultados referentes aos homomorfismos sobre os módulos projetivos locais dos anéis semiperfeitos, mais especificamente, abordamos os homomorfismos que não são epimorfismos a partir da Proposição 4.8 e os homomorfismos que não são monomorfismos, a partir da Proposição 4.12. Na Seção 4.4 obtemos uma generalização ao resultado [4, Theorem 3.2] mediante ao acréscimo de uma hipótese adicional.

1 ANÉIS E MÓDULOS

Neste trabalho todos os anéis são considerados associativos com identidade conforme definição apresentada em [15]. Denotaremos por $\mathrm{U}(R)$ o **conjunto das unidades** de R. As definições de módulos e ideais também são as mesmas apresentadas em [15] e [16]. Porém, destacamos que a palavra **módulo** significará um **módulo à direita**, isto é, cuja ação do anel é realizada à direita do módulo. A palavra **ideal**, significará um **ideal à esquerda** e um **ideal à direita** ao mesmo tempo.

1.1 CONCEITOS BÁSICOS

Denotaremos por $\mathrm{J}(R)$ o **radical de Jacobson** do anel R, isto é, a interseção de todos os ideais à direita maximais de R. Conforme [15, Lemma 4.1], [15, Lemma 4.3] e [15, Corollary 4.2], $\mathrm{J}(R)$ também pode ser definido como a interseção de todos os ideias à esquerda, a interseção de todos os anuladores de R-módulos simples (sejam à direita ou à esquerda) ou como o conjunto dos elementos $y \in R$ tal que para todo $x, z \in R$, $1 + xyz$ é uma unidade. Destas equivalências segue que $\mathrm{J}(R)$ é um ideal de R. Dizemos que um anel R é um **anel local** se possui um único ideal à direita maximal, neste caso $\mathrm{J}(R)$ é o seu único ideal maximal.

Em um contexto mais geral, se M é um R-módulo, então $\mathrm{J}(M)$, o radical de Jacobson do módulo M, denota a interseção de todos os submódulos maximais de M. Caso M não possua submódulos maximais, então definimos $\mathrm{J}(M) = M$. Se M possui um único submódulo maximal, então dizermos que M é um **módulo local**.

Denotaremos o **radical primo** de um anel R, isto é, a interseção de todos os ideais primos de R, por $\mathrm{Pm}(R)$. Denotaremos o **nilradical** de um anel R, isto é, o conjunto dos elementos $a \in R$ tais que $RaR = \{xay \in R : x, y \in R\}$ é um nil ideal, por $\mathrm{Nil}(R)$.

Dado um submódulo N de um módulo M, dizemos que N é um **somando direto** de M se existe um outro submódulo K de M tal que $M = N \oplus K$. Os **submódulos triviais** M e 0 são sempre somandos diretos de M, independente de quem seja o módulo M. Dizemos que o módulo M é **módulo indecomponível** se não possui somandos diretos além dos submódulos triviais. Dizemos que M é um **módulo simples** se $M \neq 0$ e não possui submódulos além dos submódulos triviais. Dizemos que M é um **módulo semissimples** se todo submódulo de M é um somando direto de M. Esta condição é equivalente, segundo [15, Theorem 2.4], a dizer que M pode ser escrito como soma direta de submódulos simples.

Dado um R-módulo M e um subconjunto X de M, denotamos por XR o conjunto dos elementos da forma $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i \in M$ tais que n é um inteiro positivo e, para todo $i = 1, ..., n$, $x_i \in X$ e $a_i \in R$. Se $X = \{x\}$ é um conjunto unitário, denotamos $\{x\}R$ simplesmente por xR. O subconjunto XR de M é de fato um submódulo de M. Dizemos que X é um **conjunto de geradores** de M se $XR = M$. Se, além disso, X é um conjunto finito, então dizemos que M é um **módulo finitamente gerado**. Neste caso, denotamos por $\mathrm{gen}(M)$ o menor inteiro dentre as cardinalidades dos subconjuntos finitos X de geradores de M. Se $\mathrm{gen}(M) = 1$, dizemos que M é um **módulo cíclico**. Apresentamos abaixo um resultado que relaciona módulos finitamente gerados com o radical de Jacobson.

Proposição 1.1 (Lema de Nakayama)**.** *Seja R um anel e I um ideal à direita de R. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. $I \subseteq \mathrm{J}(R)$
2. *Para qualquer R-módulo finitamente gerado M, se $MI = M$, então $M = 0$*
3. *Para quaisquer R-módulos $N \subseteq M$, tal que M/N é finitamente gerado, se $N + MI = M$, então $N = M$.*

Demonstração. [15, Lemma 4.22]. □

Dizemos que um módulo P é um **módulo projetivo**, se dada qualquer sequência exata de módulos $M \xrightarrow{f} N \to 0$ e qualquer homomorfismo $h : P \to N$, existe um homomorfismo $g : P \to M$ tal que $h = f \circ g$. Em [16, Corollary 2.6] é mostrado que um R-módulo P é projetivo se ele é um somando direto de um R-módulo livre. Aqui, um R-módulo L é dito ser um **módulo livre** se L é isomorfo a uma soma direta de cópias do módulo regular R_R.

Seja M um módulo não nulo. Dizemos que n é a **dimensão de Goldie** de M se n é o maior número tal que existe uma soma direta $N_1 \oplus ... \oplus N_n$ de submódulos de M. Neste caso denotamos $n = \dim(M)$. Se tal n não existe, então dizemos que $\dim(M) = \infty$. No caso em que $\dim(M) = 1$, dizemos que M é um **módulo uniforme**.

Dados dois módulos M e N denotamos por $\mathrm{Hom}(M, N)$ o **grupo de homomorfismos** da forma $f : M \to N$. Se $M = N$, então denotamos $\mathrm{Hom}(M, M)$ por $\mathrm{End}(M)$, e neste caso o grupo de homomorfismo é um anel, denominado **anel de endomorfismos** de M. Se ainda $M = M_1 \oplus M_2$, então podemos decompor $\mathrm{End}(M)$ como grupo da forma

$$\mathrm{End}(M) = \mathrm{Hom}(M_1, M_1) \oplus \mathrm{Hom}(M_1, M_2) \oplus \mathrm{Hom}(M_2, M_1) \oplus \mathrm{Hom}(M_2, M_2) \qquad (1.1)$$

Agora, dados quaisquer dois elementos $x = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ e $y = (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$ de $\text{End}(M)$ representados na decomposição da Equação (1.1), temos que

$$xy = (x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21}, x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22}, x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21}, x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22}) \tag{1.2}$$

onde as multiplicações são composições de homomorfismos. A Equação (1.2) representa a multiplicação de duas matrizes, em vista disso também podemos representar o anel de endomorfismos de uma soma direta $M = M_1 \oplus M_2$ por

$$\text{End}(M) = \begin{bmatrix} \text{End}(M_1) & \text{Hom}(M_2, M_1) \\ \text{Hom}(M_1, M_2) & \text{End}(M_2) \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

e os elementos x e y da forma $x = \left[\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right]$ e $y = \left[\begin{smallmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{smallmatrix}\right]$. Em geral, se $M = M_1 \oplus ... \oplus M_r$ e $x \in \text{End}(M)$, então podemos representar $\text{End}(M) = [\text{Hom}(M_i, M_j)]_{r\times r}$ e $x = [x_{ij}]$ onde $x_{ij} \in \text{Hom}(M_i, M_j)$.

A partir da Equação (1.3) segue que M é indecomponível se, e somente se, $\text{End}(M)$ é um anel que não possui elementos $e \in \text{End}(M)$, tais que $e \neq 0, 1$ e que $e^2 = e$. Tais elementos são denominados idempotentes não triviais, os quais serão apresentados mais adiante. Se ainda $\text{End}(M)$ for um anel local, dizemos que M é um **módulo fortemente indecomponível**. Módulos fortemente indecomponíveis nos garantem uma unicidade na decomposição de módulos em somas diretas a partir do Teorema de Krull-Schmidt-Azumaya, o qual é apresentado na sequência.

Teorema 1.2 (Krull-Schmidt-Azumaya)**.** *Seja M um módulo que possui as seguintes duas decomposições como soma direta de submódulos*

$$M = M_1 \oplus ... \oplus M_r = N_1 \oplus ... \oplus N_s$$

onde cada N_i é indecomponível, e cada M_i é fortemente indecomponível. Então $r = s$ e, a menos da ordem dos índices, temos que $M_i \cong N_i$, para todo $i = 1, ..., r$.

Demonstração. [15, Theorem 19.21]. □

Uma aplicação particular do Teorema 1.2 é quando na decomposição $M = M_1 \oplus ... \oplus M_r$ cada M_i é indecomponível e ao mesmo tempo artiniano, noetheriano (fazendo de M artiniano e noetheriano), pois nesse caso cada anel $\text{End}(M_i)$ é local, como mostra [10, Proposition 10.1.5].

1.2 DECOMPOSIÇÕES DE PIERCE

Definição 1.3. *Um elemento e de um anel R é denominado um* **idempotente** *se $e^2 = e$. Dizemos ainda que e é um*

- **idempotente trivial***: se $e = 1$ ou $e = 0$;*
- **idempotente primitivo***: se eR é um R-módulo indecomponível;*
- **idempotente local***: se eR é um R-módulo local;*
- **idempotente central***: se para todo $a \in R$, $ea = ae$.*

Além disso, dizemos que dois idempotentes $e, d \in R$ são **idempotentes ortogonais** *se $de = 0$.*

Proposição 1.4. *Seja R um anel, $d, e \in R$ idempotentes e M um R-módulo. Então existe um isomorfismo de grupos $\lambda : \mathrm{Hom}_R(eR, M) \to Me$ tal que se $\lambda(f) = me$, então $f(x) = (me) \cdot x$ onde $\cdot$ é a ação de R sobre M. Em particular, $\mathrm{Hom}_R(eR, dR) \cong dRe$.*

Demonstração. [15, Proposition 21.6]. □

Considere um anel R e $\{e_1, ..., e_r\} \subseteq R$ um conjunto de idempotentes dois a dois ortogonais tais que $\sum_{i=1}^{r} e_i = 1$. Então o **módulo regular à direita** R_R pode ser decomposto como a soma direta de submódulos da forma

$$R_R = e_1R \oplus e_2R \oplus ... \oplus e_rR \tag{1.4}$$

Esta decomposição de R é denominada uma **decomposição de Pierce à direita** relativa ao conjunto de idempotentes $\{e_1, ..., e_r\}$. A **decomposição de Pierce à esquerda** é definida de modo análogo.

Pela Proposição 1.4 temos que $\mathrm{End}(R_R) = \mathrm{Hom}(1R, 1R) \cong 1R1 = R$, além disso, pela mesma proposição temos que

$$\begin{aligned} R &\cong \mathrm{End}(R_R) \\ &= \mathrm{End}(e_1R \oplus e_2R \oplus ... \oplus e_rR) \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}(e_1R, e_1R) & \mathrm{Hom}(e_1R, e_2R) & ... & \mathrm{Hom}(e_1R, e_rR) \\ \mathrm{Hom}(e_2R, e_1R) & \mathrm{Hom}(e_2R, e_2R) & ... & \mathrm{Hom}(e_2R, e_rR) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Hom}(e_rR, e_1R) & \mathrm{Hom}(e_rR, e_2R) & ... & \mathrm{Hom}(e_rR, e_rR) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\cong \begin{bmatrix} e_1Re_1 & e_1Re_2 & ... & e_1Re_r \\ e_2Re_1 & e_2Re_2 & ... & e_2Re_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_rRe_1 & e_rRe_2 & ... & e_rRe_r \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

A Equação (1.5) é denominada de **decomposição de Pierce bilateral** relacionada ao conjunto de idempotentes $\{e_1, ..., e_r\}$. Também denotaremos cada componente e_iRe_j desta decomposição simplesmente por R_{ij}, e o anel R, de forma curta, por $R = [R_{ij}]_{r\times r}$.

Se $R = \bigoplus_{i=1}^{r} e_iR$ é uma decomposição de Pierce onde cada somando e_iR é um módulo fortemente indecomponível, então pelo Teorema de Krull-Schmidt-Azumaya essa decomposição é única, a menos de isomorfismo. Nessa hipótese ainda temos.

Proposição 1.5. *Suponha que o anel R tenha duas diferentes decomposição de Pierce $R = \bigoplus_{i=1}^{r} e_iR = \bigoplus_{i=1}^{r} f_iR$ tal que $e_iR \cong f_iR$ para todo $i = 1, ..., r$. Então existe um elemento invertível $u \in R$ tal que $f_i = ue_iu^{-1}$, para todo $i = 1, ..., r$.*

Demonstração. [9, Lemma 10.3.6]. □

Os próximos resultados nos garantem uma simetria relacionada as decomposições de Pierce.

Proposição 1.6. *Seja R um anel e $e \in R$ um idempotente, então as seguinte afirmações são equivalentes:*

1. *eR é um R-módulo à direita indecomponível;*
2. *Re é um R-módulo à esquerda indecomponível;*
3. *o anel eRe não possui idempotentes além dos triviais;*
4. *e não pode ser escrito como $e_1 + e_2$ onde e_1 e e_2 são idempotentes ortogonais não nulos de R.*

Demonstração. [15, Proposition 21.8]. □

Proposição 1.7. *Para qualquer idempotente $e \in R$, as seguintes afirmações são equivalentes*

1. *eR é um R-módulo à direita fortemente indecomponível;*
2. *Re é um R-módulo à esquerda fortemente indecomponível;*
3. *eRe é um anel local.*

Demonstração. [15, Proposition 21.9]. □

Proposição 1.8. *Seja* e *um idempotente de um anel* R *e* $J = \mathrm{J}(R)$. *Então* $\mathrm{J}(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$. *Além disso,* $eRe/\mathrm{J}(eRe) \cong \overline{e}\overline{R}\overline{e}$, *onde* $\overline{e}$ *é a imagem de* e *em* $\overline{R} = R/J$.

Demonstração. [15, Proposition 21.10]. □

Definição 1.9. *Seja* R *um anel. Um* **sistema de idempotentes** *é qualquer subconjunto de idempotentes* $\{e_1, ..., e_r\} \subseteq R$, *dois a dois ortogonais, tais que* $\sum_{i=1}^{r} e_i = 1$. *Se cada idempotente* e_i *é primitivo, local ou central, então dizemos que o conjunto é um* **sistema de idempotentes primitivos**, **locais** *ou* **centrais**, *respectivamente.*

Proposição 1.10. *Sejam* R *um anel e* $e, d \in R$ *dois idempotentes. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $eR \cong dR$ *como* R*-módulos à direita;*
2. $Re \cong Rd$ *como* R*-módulos à esquerda;*
3. *existem* $a \in eRd$ *e* $b \in dRe$ *tais que* $e = ab$ *e* $d = ba$;
4. *existem* $a, b \in R$ *tais que* $e = ab$ *e* $d = ba$.

Demonstração. [15, Proposition 21.20]. □

1.3 ANÉIS SEMILOCAIS E SEMIPERFEITOS

A teoria dos anéis locais, semilocais e semiperfeitos proveem bons recursos para o estudo da teoria de anéis, módulos e álgebras. Anéis locais garantem a unicidade da decomposição no Teorema 1.2 de Krull, Schmidt e Azumaya. Anéis locais de cadeia são parte crucial da teoria de valorização de anéis de divisão, bem como anéis semilocais fazem o mesmo para valorizações de anéis artinianos semissimples como apresentado em [3]. Anéis semiperfeitos configuram uma extensão dos anéis artinianos semissimples. Anéis artinianos, $\Bbbk$-álgebras de dimensão finita e anéis seriais são exemplos de anéis semiperfeitos.

Como já mencionado, um anel R é denominado local se possui um único ideal à direita maximal. Essa simples definição possui suas equivalências.

Proposição 1.11. *Seja* R *um anel. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. R *possui um único ideal à direita maximal;*

2. *R possui um único ideal à esquerda maximal;*

3. *$R \setminus \mathrm{U}(R)$ é um ideal próprio de R;*

4. *$\mathrm{J}(R) = R \setminus \mathrm{U}(R)$;*

5. *$R/\,\mathrm{J}(R)$ é um anel de divisão;*

6. *dado $a \in R$, $a \in \mathrm{U}(R)$ ou $1 - a \in \mathrm{U}(R)$.*

Demonstração. Segue de [9, Proposition 10.1.1], [9, Corollary 10.1.2] e [9, Proposition 10.1.3]. □

Segue desta proposição que se R é um anel local, e $e = e^2 \in R$ é um idempotente, então a identidade $e(1-e) = 0$ implicará que $e = 0$ ou $e = 1$. Ou seja, anéis locais possuem apenas idempotentes triviais.

Definição 1.12. *Dizemos que um anel R é um* **anel semilocal** *se $\overline{R} = R/\,\mathrm{J}(R)$ é um anel artiniano.*

Qualquer anel artiniano é semilocal. Anéis de divisão são semilocais, disso segue também que qualquer anel local é semilocal. Se q é um número inteiro positivo qualquer, então o anel $\mathbb{Z}_{(q)} := \{m/n \in \mathbb{Q} : \mathrm{mdc}(n,q) = 1\}$ é um anel semilocal.

Se R é um anel semilocal, então, pelo Teorema de Wedderbur-Artin [15, Theorem 3.5], existem idempotentes $\overline{e_1}, ..., \overline{e_r} \in \overline{R} = R/\,\mathrm{J}(R)$ tais que $\overline{R}_{\overline{R}} = \overline{e_1}\overline{R} \oplus ... \oplus \overline{e_r}\overline{R}$ onde cada somando $\overline{e_i}\overline{R}$ é um $\overline{R}$-módulo simples. Se tal estrutura pudesse ser aproveitada pelo anel R de tal modo que fosse possível escolher os representantes das classes de equivalência dos idempotentes de forma que $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$, então tal decomposição nos dariam várias informações sobre o anel R. Entretanto, o exemplo $\mathbb{Z}_{(6)}$ nos mostra que apenas a semilocalidade não nos garante tal propriedade. As próximas definições e resultados nos mostram quais premissas adicionais são necessárias.

Definição 1.13. *Dado um anel R e um ideal I, dizemos que* **idempotentes podem ser levantados** *módulo I, se qualquer que seja o idempotente $\overline{d} \in R/I$, existe um idempotente $e \in R$ tal que $\overline{e} = \overline{d}$.*

Há várias condições que podem garantir o levantamento de idempotentes módulo um ideal I. Por exemplo, [15] mostra que se R é I-ádicamente completo então os idempotentes podem ser levantados módulo I. Como não temos a intenção de nos aprofundarmos nesse conceito, apresentaremos um exemplo de condição mais amigável aos nossos propósitos.

Proposição 1.14. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Se I é um nil ideal, então os idempotentes podem ser levantados módulo I.*

Demonstração. [9, Proposition 10.3.1]. □

A proposição a seguir garante um caso em que a estrutura de ortogonalidade de dois ou mais idempotentes levantados pode ser mantida.

Proposição 1.15. *Sejam R um anel e $I \subseteq \mathrm{J}(R)$ um ideal de R tal que os idempotentes de R/I podem ser levantados módulo I. Então para qualquer conjunto finito, ou contável, de elementos $d_1, d_2, ... \in R$ tal que $d_i d_j - \delta_{ij} d_i \in I$, existe um conjunto de idempotentes dois a dois ortogonais $e_1, e_2, ... \in R$ tal que $e_i - d_i \in I$ e $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ para todo $i, j \in \{1, 2, ...\}$.*

Demonstração. [9, Proposition 10.3.4]. □

Definição 1.16. *Seja R um anel semilocal. Dizemos que R é um* **anel semiperfeito** *se os idempotentes de $R/\mathrm{J}(R)$ podem ser levantados módulo o radical de Jacobson $\mathrm{J}(R)$.*

O primeiro exemplo de anel semiperfeito é o que se segue.

Proposição 1.17. *Se R é um anel artiniano, então R é semiperfeito.*

Demonstração. Dado que R é artiniano, então $R/\mathrm{J}(R)$ é um anel semissimples. Logo R é um anel semilocal. Dado que $\mathrm{J}(R)$ é um nil ideal ([15], Teorema 4.12), temos que idempotentes de $R/\mathrm{J}(R)$ podem ser levantados de módulo $\mathrm{J}(R)$. □

A caracterização de um anel semiperfeito pode ser feita de modo equivalente a partir de outras de suas propriedades. Uma, em particular, é a existência da cobertura projetiva de seus módulos finitamente gerados. Para apresentar o teorema de caracterização dos anéis semiperfeitos vamos ver algumas propriedades relacionadas à cobertura projetiva.

Definição 1.18. *Dizemos que um submódulo N de um módulo M é um* **submódulo pequeno**, *se qualquer equação de submódulos da forma $N + X = M$ implica que $X = M$. Dizemos que um epimorfismos de módulos $f : P \to M$ é uma* **cobertura projetiva** *de M, se P é um módulo projetivo e $\ker f$ é um submódulo pequeno de P.*

A cobertura projetiva é o conceito dual de fecho injetivo de um módulo. Enquanto a cobertura projetiva é um epimorfismo $f : P \to M$ tal que P é um módulo projetivo e $\ker f$ é um submódulo pequeno de P, o fecho injetivo é formado por um monomorfismos $g : M \to I$ onde I é um módulo injetivo e $\operatorname{im} g$ é um submódulo essencial de I. Embora o fecho injetivo de módulos sempre exista [16, Lemma 3.29], a existência de uma cobertura projetiva nem sempre é garantida. Antes de apresentar condições para a existência de uma cobertura projetiva para determinados módulos vamos apresentar alguns resultados relacionados.

Proposição 1.19. *Se $f : P \to M$ é um cobertura projetiva de um módulo M, então* $\ker f \subseteq \mathrm{J}(P)$.

Demonstração. [9, Lemma 10.4.1]. $\square$

Proposição 1.20. *Sejam P um R-módulo projetivo finitamente gerado e $f : P \to M$ um epimorfismos com* $\ker f \subseteq \mathrm{J}(P)$. *Então P é uma cobertura projetiva de M.*

Demonstração. [9, Lemma 10.4.4]. $\square$

Lema 1.21 (Lema de Bass)**.** *Seja $f : P \to M$ um epimorfismos tal que P é um módulo projetivo e seja $g : P' \to M$ uma cobertura projetiva de M. Então, existe uma decomposição $P = P' \oplus P''$ onde $P'' \subseteq \ker f$ e $P' \cap \ker f$ é um módulo pequeno de P'.*

Demonstração. [9, Lemma 10.4.5]. $\square$

Corolário 1.22. *Sejam $f : P \to M$ e $f' : P' \to M$ duas coberturas projetivas de M. Então existe um isomorfismos $\varphi : P \to P'$ tal que $f = f' \circ \varphi$ e $f' = f \circ \varphi^{-1}$.*

Demonstração. [9, Lemma 10.4.6]. $\square$

O Corolário 1.22 nos garante, a menos de isomorfismo, a unicidade da cobertura projetiva $f : P \to M$ de um módulo M. Desta forma, podemos denotar a cobertura projetiva de M por $\mathrm{P}(M)$. Além disso, como $M \cong P/\ker f$, muitas vezes é evidente qual é o epimorfismos f e apenas basta conhecer o módulo projetivo P, quando for este o caso escrevemos simplesmente $\mathrm{P}(M) = P$.

Proposição 1.23. *Sejam M e N módulos que possuem coberturas projetivas. Então $M \oplus N$ possui uma cobertura projetiva. Além disso $P(M \oplus N) \cong P(M) \oplus P(N)$*

Demonstração. [15, Examples and Remarks 24.11 (3)]. $\square$

Proposição 1.24. *Seja M um módulo que possui uma cobertura projetiva $f : P \to M$ tal que $P = P_1 \oplus ... \oplus P_n$ é uma decomposição de P em submódulos locais. Se $M = M_1 \oplus M_2$, então M_1 e M_2 possuem cobertura projetivas. Além disso* $\mathrm{P}(M) \cong \mathrm{P}(M_1) \oplus \mathrm{P}(M_2)$

Demonstração. Seja $\pi : M \to M_1 \cong M/M_2$ a projeção canônica. Sem perda de generalidade, suponha que existe um inteiro $1 \leq t \leq n$ tal que se $i \leq t$, então $P_i \nsubseteq \ker f \circ \pi$ e se $i > t$, então $P_i \subseteq \ker f \circ \pi$. Seja $Q = P_1 \oplus ... \oplus P_t$ e $g = f \circ \pi|_Q : Q \to M_1$. Afirmamos que g é uma cobertura projetiva para M_1.

De fato, por construção, Q é um módulo projetivo e g é um epimorfismo. Além disso, como $P_i \nsubseteq \ker g$, para todo $i \leq t$, e como P_i é local, temos que

$\ker g \subseteq \mathrm{J}(P_1) \oplus ... \oplus \mathrm{J}(P_t) = \mathrm{J}(Q)$. Pela Proposição 1.20 temos que $g : Q \to M_1$ é uma cobertura projetiva para M_1.

De modo análogo, M_2 possui uma cobertura projetiva. A última afirmação do enunciado segue da Proposição 1.23. □

Apresentamos a seguir o resultado de caracterização dos anéis semiperfeitos.

Teorema 1.25. *Seja R um anel. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *R é um anel semiperfeito;*
2. *R_R pode ser escrito como soma direta finita de submódulos locais;*
3. *a identidade 1 pode ser escrita como soma finita de idempotentes locais dois a dois ortogonais;*
4. *qualquer R-módulo à direita finitamente gerado possui cobertura projetiva;*

Demonstração. A demonstração deste teorema é apresentada em [9]. A equivalência entre 1. e 2. é demonstrada no [9, Theorem 10.3.7]. A equivalência entre 1. e 3. pelo [9, Theorem 10.3.8]. Já a equivalência entre 1. e 4. é dada pelo [9, Theorem 10.4.8]. □

Além do resultado teórico, as demonstrações das equivalências contidas nas referências citadas nos fornece um método para encontrar a cobertura projetiva de um módulo finitamente gerado. Por exemplo, se M um R-módulo finitamente gerado, então $M/M\,\mathrm{J}(R)$ é um $R/\,\mathrm{J}(R)$-módulo semissimples, assim podemos escrever $M/M\,\mathrm{J}(R) = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i^{m_i}$ onde $U_1, U_2, ..., U_r$ é um conjunto completo de R-módulos simples dois a dois não isomorfos. Pela estrutura de levantamento de idempotentes de $R/\,\mathrm{J}(R)$ para R temos que para cada módulo simples U_i, existe um idempotente local e_i tal que $U_i \cong e_iR/e_i\,\mathrm{J}(R)$. O argumento do teorema mostra que $\mathrm{P}(M) = \bigoplus_{i=1}^{r} e_iR^{m_i}$.

1.4 EQUIVALÊNCIA DE MORITA

Muitas vezes uma seleção de propriedades demonstradas sobre os módulos de um anel R continuam válidas para os módulos de um outro anel S, e vice versa. Quando sabemos que isso ocorre, ter a opção de escolher trabalhar com os módulos de um ou de outro anel pode facilitar a pesquisa e até mesmo abrir portas para novos resultados. E é isso que nos é possibilitado fazer a partir da teoria de equivalências de categorias. Segundo a definição de categoria apresentada em [19], temos:

Definição 1.26. *Uma* **categoria** *é uma coleção* $\mathfrak{C}^0$ *de objetos* X, Y, Z, ... *e uma coleção* $\mathfrak{C}$ *de morfismos* f, g, h ,... *tais que*

1. *cada morfismo* f *está associado a dois objetos* X *e* Y *denominados domínio e contradomínio, respectivamente. Denotamos tal morfismo por* $f : X \to Y$*;*

2. *cada objeto* X *está associado a um morfismo* $1_X : X \to X$*, unicamente determinado, denominado morfismo identidade;*

3. *cada par de morfismos da forma* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$*, cujo contradomínio do primeiro é igual ao domínio do segundo, está associado a um único morfismo* $g \circ f : X \to Z$*, denominado composição dos morfismos* f *e* g*;*

4. *se o contradomínio de* f *é o domínio de* g*, e o contradomínio de* g *é o domínio de* h*, então* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$*;*

5. *se o contra domínio de* f *é* X*, então* $f \circ 1_X = f$*. Se o domínio de* g *é* X*, então* $1_X \circ g = g$*.*

Embora o entendimento para objetos e morfismos de categorias vá além dos conceitos de conjuntos e funções entre conjunto, neste trabalho nos restringiremos às categorias $\mathfrak{Mod}_R$ (ou ${}_R\mathfrak{Mod}$), cujos objetos são os módulos à direita (respectivamente, à esquerda) sobre um anel R e cujos morfismos são os homomorfismos de R-módulos.

Dizemos que uma propriedade é uma **propriedade categórica** se a mesma pode ser definida em termos de objetos e morfismos de sua categoria. Por exemplo, numa categoria $\mathfrak{C}$ dizemos que um objeto C é um objeto zero se dado qualquer objeto X em $\mathfrak{C}$, existem únicos morfismos $f : X \to C$ e $g : C \to X$. Note que em $\mathfrak{Mod}_R$ o objeto zero da categoria coincide com o módulo nulo, estamos dizendo com isso que ser o módulo nulo pode ser definido em termos categóricos.

Com relação a morfismos existem definições categóricas importantes para nós, as quais coincidem com as definições que já conhecemos para homomorfismos de módulos. Dizemos que um morfismo $f : X \to Y$ é um isomorfismo se, e somente se, existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$ e $f \circ g = 1_Y$. Dizemos que um morfismo f é um monomorfismo (resp. epimorfismo) se sempre que a igualdade de composições $f \circ g = f \circ h$ (resp. $g \circ f = h \circ f$) ocorre, então $g = h$. Inicialmente, notamos nessas definições que conceitos costumeiramente definidos a partir de elementos, tais como funções bijetoras, injetoras e sobrejetora, são traduzidos para a teoria categórica em termos de composição de morfismos. Outra questão de importante destaque aqui é que em $\mathfrak{Mod}_R$ sabemos que se um morfismo $f : X \to Y$ é um monomorfismo (resp. epimorfismo) nem sempre existe um outro morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$ (resp. $f \circ g = 1_Y$), porém na categoria de funções entre conjuntos essa é uma equivalência válida. Em todo caso, vale lembrar que embora usemos a teoria de categorias, estamos trabalhando com uma categoria particular.

Em [16, Section 18A] o autor nos fornece diversas propriedades de módulos que podem ser definidas categoricamente. Além dos conceitos de isomorfismo, monomorfismo e epimorfismos, também pode ser definidas as propriedades de um módulo M ser nulo, não nulo, simples, semissimples, uniforme, artiniano, noetheriano, possuir dimensão uniforme n, possuir comprimento n, ser fortemente indecomponível, ser projetivo, ser injetivo, ser um submódulo maximal, minimal, essencial, pequeno, denso ou um somando direto. Possuir uma cobertura projetiva, um fecho injetivo, ser finitamente apresentado são decorrentes das propriedades categóricas anteriores. Propriedade menos óbvia como ser finitamente gerado ou ser fiel, as quais costumamos definir a partir dos elementos dos módulos, também são apresentadas como propriedades categóricas em [16].

A fim de ressaltar que nem tudo é categórico, [16] nos mostra que propriedades tais como ser um módulo livre, ser um módulo cíclico ou ser gerado por um número mínimo de n elementos não são propriedades categóricas. Mais adiante veremos como isso ocorre. Aqui, fazer essa ressalva é importante para delimitarmos no que estamos trabalhando quando usamos a teoria de categorias.

Nosso objetivo com a teoria de categorias é estudar quando e quais propriedades sobre os módulos de um anel R podem ser estudadas sobre a categoria dos módulos de um outro anel S, e vice versa. Para tal, precisamos das definições de funtor entre categorias e de equivalência de categorias.

Definição 1.27. *Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ duas categorias. Um* **funtor** *F da categoria $\mathfrak{C}$ para a categoria $\mathfrak{D}$, denotado por $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, é uma relação que associa cada objeto X de $\mathfrak{C}$ a um objeto $F(X)$ de $\mathfrak{D}$ e cada morfismo $f : X \to Y$ de $\mathfrak{C}$ a um morfismos $F(f) : F(X) \to F(Y)$ tal que*

1. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$;
2. $F(1_X) = 1_{F(X)}$

Dizemos que um par de funtores $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ e $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ é uma **equivalência de categorias** *se para todo objeto X de $\mathfrak{C}$ existe um isomorfismo $\eta_X : X \to G(F(X))$ tal que se $f : X \to Y$ é um morfismo de $\mathfrak{C}$, então*

$$GF(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ f \tag{1.6}$$

e além disso, para cada objeto Z de $\mathfrak{D}$, existe um isomorfismo $\epsilon_Z : Z \to FG(Z)$ tal que se $g : Z \to W$ é um morfismo de $\mathfrak{D}$, então

$$FG(g) \circ \epsilon_Z = \epsilon_W \circ g \tag{1.7}$$

Se existe uma equivalência entre duas categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ dizemos que estas categorias são equivalentes, e escrevemos $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{D}$.

Dada qualquer categoria $\mathfrak{C}$, existe um funtor trivial $1_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, denominado **funtor identidade**, que associa cada objeto X a si mesmo e cada morfismo f a si mesmo. A partir do funtor identidade a Equação (1.6) pode ser reescrita como $GF(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ 1_{\mathfrak{C}}(f)$. A coleção de isomorfismos η_X satisfazendo a Equação (1.6) é denominada na teoria de categorias um **isomorfismo natural** entre os funtores GF e $1_{\mathfrak{C}}$. De igual modo, a coleção de isomorfismos ϵ_Z satisfazendo a Equação (1.7) é um isomorfismo natural entre os funtores FG e $1_{\mathfrak{D}}$.

As coleções de isomorfismos η_X e ϵ_Z satisfazendo as Equações (1.6) e (1.7) garante que as propriedades categóricas de um objeto X sejam herdadas por $F(X)$ e vice-versa. Por exemplo, suponha que $F : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_S$ e $G : \mathfrak{Mod}_S \to \mathfrak{Mod}_R$ seja uma equivalência entre as categorias de módulos sobre os anéis R e S e seja P um elemento de $\mathfrak{Mod}_R$. Suponha que $F(P)$ é um módulo projetivo e sejam $M \xrightarrow{f} N \to 0$ uma sequência exata e $g : P \to N$ um homomorfismo qualquer, então $F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \to F(0) = 0$ é uma sequência exata e $F(g) : F(P) \to F(N)$ é um homomorfismo. Como $F(P)$ é projetivo, existe um homomorfismo $h : F(P) \to F(M)$ tal que $F(f) \circ h = F(g)$. Aplicando o funtor G temos que $GF(f) \circ G(h) = GF(g)$, mas isso significa que $GF(P) \cong P$ é projetivo. Aqui estamos admitindo que $F(0) = 0$ e que $GF(0) = 0$, mas ser o módulo nulo é também uma propriedade categórica, de modo que as identidades podem ser provadas por argumentos semelhantes.

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "g"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[d] \\
 & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & F(P) \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "F(g)"] \\
F(M) \arrow[r, "F(f)"'] & F(N) \arrow[d] \\
 & F(0) = 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & GF(P) \cong P \arrow[dl, dotted, "G(h)"'] \arrow[d, "GF(g)"] \\
GF(M) \arrow[r, "GF(f)"'] & GF(N) \arrow[d] \\
 & GF(0) = 0
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.1: pré imagem de módulo projetivo por uma equivalência

Uma vez que sabemos do que uma equivalência entre categorias de módulos de dois anéis R e S é capaz, nos resta saber quando tal equivalência existe. Os trabalhos de Kiiti Morita vem nesta direção, não apenas dando a resposta de quando existem tais equivalência, mas também como o par de funtores F e G pode ser obtido.

Teorema 1.28 (Morita II). *Sejam R e S dois anéis e $F : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_S$ e $G : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_R$ uma equivalência de categorias. Então os funtores*

$- \otimes_R Q : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_S$ *e* $- \otimes_S P : \mathfrak{Mod}_S \to \mathfrak{Mod}_R$, *onde* $Q = F(R_R)$ *e* $P = G(S_S)$ *é uma equivalência de categorias.*

Demonstração. [16, Theorem 18.26]. □

É interessante fazer algumas considerações sobre o Teorema 1.28. Primeiramente, dado que $P = G(S_S)$, $\mathrm{End}(P_R) \cong \mathrm{End}(S_S) \cong S$, o que faz de P um (S, R)-bimódulo e dá sentido ao funtor $- \otimes_S P$. Além disso, como S_S é projetivo e finitamente gerado na categoria $\mathfrak{Mod}_S$, a equivalência nos dá que P é projetivo e finitamente gerado em $\mathfrak{Mod}_R$. Por último, temos que $\mathrm{Hom}_R(P, R) \cong \mathrm{Hom}_S(F(P), F(R)) \cong \mathrm{Hom}(S_S, Q_S) \cong Q$ faz de ${}_RQ$ o dual de P_R. Todas estas mesmas análises valem simetricamente para Q no lugar de P.

Dado que $Q \cong \mathrm{Hom}_R(P, R)$, para cada $q \in Q$, existe um homomorfismo $f_q : P \to R$. Além disso, se $s \in S$ e $p \in P$, temos que $f_q(sp) = f_{qs}(p)$. Isso garante a existência de um homomorfismo de (R, R)-bimódulos $\alpha : Q \otimes_S P \to R$ tal que $\alpha(q \otimes p) = f_q(p)$. A equivalência do Teorema (1.28) ainda garante que α é um isomorfismo. Pela mesma analise, existe um isomorfismo de (S, S)-bimódulos $\beta : P \otimes_R Q \to S$. A 6-upla $(R, P, Q, S, \alpha, \beta)$ é denominada um contexto de Morita. Se denotarmos $\alpha(q \otimes p) = qp$ e $\beta(p \otimes q) = pq$, então a disposição em forma de matriz $M = \begin{bmatrix} R & P \\ Q & S \end{bmatrix}$ é um anel, denominado anel de Morita associado com P_R. O próximo teorema nos mostrará como determinar se as categorias dos módulos de dois anéis R e S são equivalente a partir de módulos projetivos e finitamente gerados P e Q.

Teorema 1.29 (Morita I)**.** *Sejam R e S anéis tais que existe um R-módulo projetivo finitamente gerado P onde* $\mathrm{End}_R(P) \cong S$ *e seja* $Q = \mathrm{Hom}_R(P, R)$. *Se para todo $x \in R$, existe $p \in P$ e $q \in Q$ tais que $q(p) = x$, então*

1. $- \otimes_R Q : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_S$ *e* $- \otimes_S P : \mathfrak{Mod}_S \to \mathfrak{Mod}_R$ *é uma equivalência de categorias e*

2. $P \otimes_R - : {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_S\mathfrak{Mod}$ *e* $Q \otimes_S - : {}_S\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$ *é uma equivalência de categorias.*

Demonstração. [16, Theorem 18.24]. □

Além de garantir um par de funtores que definirá a equivalência entre as categorias de módulos, o Teorema 1.29 ainda nos mostra que essa equivalência não depende da lateralidade dos módulos sobre os anéis. Isso garante a coerência da seguinte definição

Definição 1.30. *Sejam R e S anéis. Dizemos que R e S são* **Morita equivalentes** *se as categorias de módulos à direita $\mathfrak{Mod}_R$ e $\mathfrak{Mod}_S$ são equivalentes.*

Anteriormente listamos algumas propriedades de módulos que são mantidas mediante a equivalência de categorias, se em particular olharmos para os módulos regulares R_R e S_S verificaremos que há propriedades definidas para anéis que são preservadas pela equivalência. Tais propriedades são denominadas **Morita invariantes**. Algumas propriedades Morita invariantes são o anel ser simples, semissimples, primo, semiprimo, semilocal e semiperfeito. Já propriedades como ser comutativo, local, reduzido, um domínio ou um anel de divisão não são Morita invariantes.

A equivalência de Morita possui um resultado interessante que envolve idempotentes, o qual apresentamos a seguir.

Proposição 1.31. *Sejam R um anel e $e = e^2 \in R$ um idempotente tal que $ReR = R$. Então o par de funtores $F(M_R) \to MRe$ e $G(N_S) = NeR$ é uma equivalência de categorias entre $\mathfrak{Mod}_R$ e $\mathfrak{Mod}_S$. Em particular, R é Morita equivalente ao anel $S = \mathrm{End}(eR) \cong eRe$.*

Demonstração. [16, Example 18.30]. □

A proposição anterior tem uma consequência interessante para anéis semiperfeitos. Se $R_R = P_1^{n_1} \oplus ... \oplus P_s^{n_s}$ é uma decomposição de um anel semiperfeito R em submódulos locais tais que $P_i \ncong P_j$, sempre que $i \neq j$, então cada submódulo P_i é gerado por um idempotente e_i como $P_i = e_iR$. Se $e = e_1 + ... + e_s$, então e é um idempotente tal que $ReR = R$. Neste caso, R e eRe são Morita equivalentes. Qualquer decomposição do anel $eRe = Q_1 \oplus ... \oplus Q_{s'}$ de eRe em submódulos locais é tal que $s' = s$ e $Q_i \ncong Q_j$ para todo $i \neq j$. eRe é o único anel, a menos de isomorfismo, Morita equivalente à R com essa propriedade. Tal propriedade justifica a próxima definição.

Definição 1.32. *Seja $R_R = P_1^{n_1} \oplus ... \oplus P_s^{n_s}$ uma decomposição de um anel semiperfeito R em submódulos locais tais que $P_i \ncong P_j$ sempre que $i \neq j$ e seja $e = e_1 + ... + e_r$ onde cada e_i é um idempotente tal que $P_i = e_iR$. Denominamos o anel $B \cong eRe$ de* **anel base** *de R. Dizemos ainda que um anel semiperfeito é* **básico** *se é isomorfo a seu anel base.*

A próxima proposição relaciona a decomposição de um anel semiperfeito em submódulos projetivos locais com seu radical de Jacobson.

Proposição 1.33. *Sejam R um anel semiperfeito e $R_R = P_1^{n_1} \oplus ... \oplus P_s^{n_s}$ uma decomposição de R_R em submódulos locais tais que $P_i \ncong P_j$ para todo $i \neq j$. Se $R_{ij} = \mathrm{End}(P_i^{n_i}, P_j^{n_j})$, então*

$$\mathrm{J}(R) = \begin{bmatrix} \mathrm{J}(R_{11}) & R_{12} & \cdots & R_{1s} \\ R_{21} & \mathrm{J}(R_{22}) & \cdots & R_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{s1} & R_{s2} & \cdots & \mathrm{J}(R_{ss}) \end{bmatrix}$$

Além disso $\mathrm{J}(R_{ii}) = \mathrm{J}(\mathrm{End}_R(P_i^{n_i})) \cong \mathbb{M}_{n_i}(\mathrm{J}(End_R(P_i)))$.

Demonstração. [9, Proposition 11.1.1]. □

Sejam S um anel qualquer, n um inteiro positivo e $R = \mathbb{M}_n(S)$. Seja $E_{ij} \in R$ a matriz que possui a identidade 1 de S na i-ésima linha e na j-ésima coluna, e zero nas demais posições. Então $e = E_{11}$ é um idempotente de R tal que $eRe \cong S$. Segue da Proposição 1.31 e do Teorema 1.29 que S e R são Morita equivalentes e o par de funtores $- \otimes_R Re : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_S$ e $- \otimes_S eR : \mathfrak{Mod}_S \to \mathfrak{Mod}_R$ é uma equivalência de categorias. Em particular temos que o R-módulo à direita regular R_R possui como imagem o S-módulo $R_R \otimes_R Re \cong Re \cong S_S^n$. Como a propriedade "$N$ é submódulo de M" é preservada pela equivalência de Morita temos a seguinte proposição.

Proposição 1.34. *Sejam S um anel qualquer, n um inteiro positivo e $R = \mathbb{M}_n(S)$ o anel das matrizes $n \times n$. Então o reticulado dos R-módulos à direita R_R é isomorfo ao reticulado dos S-módulos à direita S_S^n.*

1.5 QUIVERS

Definição 1.35. *Um* **quiver** *é uma quaterna $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ onde Q_0 e Q_1 são conjuntos e $s, t : Q_1 \to Q_0$ são funções. Denominamos os elementos dos conjuntos Q_0 e Q_1, respectivamente, de vértices e setas do quiver. Dada um seta $a \in Q_1$ denominamos os vértices $s(a)$ e $t(a)$, respectivamente de fonte e alvo de a. Um quiver é dito ser finito se Q_1 e Q_0 são conjuntos finitos. Se um quiver finito Q possui como vértices $1, .., s$ e t_{ij} é o número de setas do vértice i para o vértice j, então chamamos de* **matriz de adjacência** *do quiver Q a matriz $[Q] = [t_{ij}]_{s \times s}$.*

Um quiver finito pode ser representado graficamente como um conjunto de pontos distintos $i \in Q_0$ e setas $a \in Q_1$ que parte do ponto $s(a)$ e chega no ponto $t(a)$, ou seja, um quiver nada mais é do que um grafo orientado. A fonte e o alvo de uma seta $a \in Q_1$ também podem ser chamados de início e fim, respectivamente, da seta. Todos os quivers utilizados neste trabalho são quivers finitos, assim sendo, toda vez que fizermos menção a quiver, estaremos falando de um quiver finito. Quivers que podem ser representados por um mesmo grafo orientado são dito isomorfos, tal isomorfismo nos permite utilizar, sem perda para a teoria, o conjunto dos vértices Q_0 de um quiver com uma das enumerações $\{1, 2, ..., s\}$ de seus elementos, escolhida convenientemente. Por exemplo, na tabela abaixo apresentamos dois quivers isomorfos cuja única diferença entre ele são as enumerações dos vértices. Na Tabela 1.1 podemos ver como são apresentadas as suas matrizes de adjacência.

Dada uma permutação τ dos índices $\{1, ..., n\}$, denotamos por P_τ a matriz $n \times n$ obtida da matriz identidade de ordem n cuja linhas foram permutadas segundo a permutação τ.

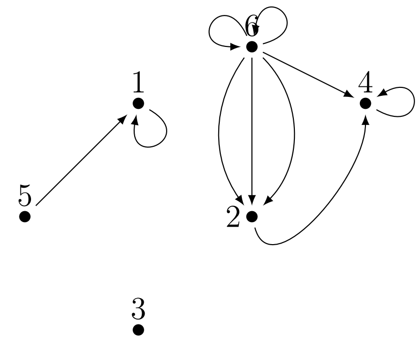
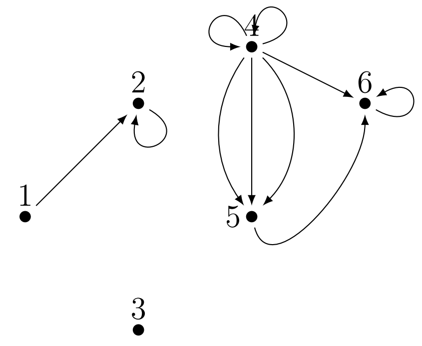
quiver 1	quiver 2
	
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 1.1: Exemplos de quiver e matrizes de adjacência

Uma matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é dita ser uma **matriz permutativamente redutível** se existe um permutação τ de $1, ..., n$ tal que $P_\tau B P_\tau^T = \begin{bmatrix} C & E \\ 0 & D \end{bmatrix}$ onde C e D são blocos matrizes quadradas de ordem menores que n. Se B não é permutativamente redutível, então B é dita ser uma **matriz permutativamente irredutível**. Aqui, o produto de matrizes $P_\tau B P_\tau^T$ permutam as linhas e as colunas da matriz B segundo a permutação τ.

A conveniência da escolha da indexação dos vértices de um quiver Q nos permite escolher uma ordem tal que sua matriz de adjacência tenha a forma:

$$[Q] = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} & ... & B_{1t} \\ 0 & B_2 & ... & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & B_t \end{bmatrix}$$

onde cada Bi é uma matriz permutativamente irredutível. A essa forma chamamos de **matriz de adjacência padrão** do quiver Q. Note que nos exemplos dos quivers apresentados pela Tabela 1.1, a permutação nos índices dos vértices do quiver 1 resulta no quiver 2, cuja matriz de adjacência é permutativamente irredutível.

Definição 1.36. *Um* **caminho** *de um quiver Q do vértice i ao vértice j é uma sequência*

$a_1...a_k$ de elementos de Q_1 tal que $t(a_l) = s(a_{l+1})$ para todo $l = 1, ..., k-1$, $s(a_1) = i$ e $t(a_k) = j$

1. *k é o* **comprimento do caminho**

2. *i início do caminho e*

3. *j o final do caminho*

Se $i = j$, $k > 0$ e $t(a_1)$,..., $t(a_k)$ são todos distintos, então o caminho é dito ser um **ciclo orientado**. *Além disso, se $k = 1$, dizemos que o caminho é um* **laço**.

Definição 1.37. *Um quiver Q é denominado* **conexo** *se para quaisquer dois vértices $i \neq j$ existe algum caminho cujo início é um desses vértices e o final o outro. Q é dito* **fortemente conexo** *se para quaisquer vértices $i \neq j$ existe dois caminhos, um de i para j e um outro de j para i.*

Definição 1.38. *Um quiver sem ciclos orientados é chamado de* **quiver acíclico**.

Dado um quiver $Q = Q(Q_0, Q_1, s, t)$ e um corpo $\Bbbk$ podemos construir a álgebra de caminhos de Q sobre $\Bbbk$, denotada por $\Bbbk Q$, formada pelo $\Bbbk$-espaço vetorial livre gerado por todos os caminhos de Q e cuja multiplicação é estendida pela distributividade pela seguinte regra: se $a_1...a_m$ e $b_1...b_n$ são dois caminhos e $x, y \in \Bbbk$, então

1. $(x \cdot a_1...a_m)(y \cdot b_1...b_n) = xy \cdot a_1...a_m b_1...b_n$ se o final do primeiro caminho é igual ao começo do segundo;

2. $(x \cdot a_1...a_m)(y \cdot b_1...b_n) = 0$ caso contrário.

A identidade da álgebra de caminhos $\Bbbk Q$ é a soma de todos os caminhos de comprimento nulo. Caso Q não possua ciclos, então $\Bbbk Q$ é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, pois estamos trabalhando com quivers finitos.

Se Q é um quiver que não possui ciclos, então pode-se verificar que a álgebra de quiver $\Bbbk Q$ é um anel semiperfeito básico cujo radical de Jacobson é gerado pelos caminhos de comprimento 1. Muitas das propriedades da $\Bbbk$-álgebra $\Bbbk Q$ podem ser obtidas do quiver Q. Por exemplo, se Q é conexo, então $\Bbbk Q$ é indecomponível. Assim como a partir do quiver Q podemos obter o anel semiperfeito $\Bbbk Q$, podemos a partir de um anel semiperfeito R, tal que $R/\operatorname{J}(R)^2$ seja artiniano à direita, obter um quiver $Q(R)$. Tal construção foi inicialmente feita para $\Bbbk$-álgebras de dimensão finita por Peter Gabriel em [5], e depois estendida para alguns anéis semiperfeitos por Vladimir V. Kirichenko em [13].

Para entendermos como obter o quiver de um anel semiperfeito R, tal que $R/\operatorname{J}(R)^2$ é artiniano à direita, segundo [13], considere $R_R = P_1^{n_1} \oplus ... \oplus P_s^{n_s}$ a decomposição do módulo regular R_R em submódulos projetivo locais tais que $P_i \not\cong P_j$ sempre que $i \neq j$. Seja $J = \mathrm{J}(R)$ e $P(P_iJ) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}$ a cobertura projetiva de P_iJ. Então definimos o **quiver** de R como o quiver $Q(R)$ que possui $[t_{ij}]_{s\times s}$ como matriz de adjacência.

Dada a lateralidade dos conceitos envolvidos, o quiver $Q(R)$ pode ser também denominado de **quiver à direita** de R. O **quiver à esquerda** é definido de forma análoga, e denotado por $Q'(R)$.

Dado que R é um anel semilocal, o módulo P_iJ/P_iJ^2 é semissimples. Sua decomposição em submódulo simples pode ser facilmente obtida a partir da cobertura projetiva de P_iJ, pois se $P(P_iJ) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}$, então $P_iJ \cong \bigoplus_{j=1}^{s}(P_j^{t_{ij}}/N_{ij})$ onde $N_{ij} \subseteq \mathrm{J}(P_j^{t_{ij}}) = (P_jJ)^{t_{ij}}$. Assim temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{P_iJ}{P_iJ^2} &\cong \frac{\bigoplus_{j=1}^{s}(P_j^{t_{ij}}/N_{ij})}{\bigoplus_{j=1}^{s}(P_j^{t_{ij}}/N_{ij})J} \\
&\cong \bigoplus_{j=1}^{s} \frac{P_j^{t_{ij}}/N_{ij}}{((P_jJ)^{t_{ij}}/N_{ij})} \\
&\cong \bigoplus_{j=1}^{s} \frac{P_j^{t_{ij}}}{((P_jJ)^{t_{ij}} + N_{ij})} \\
&\cong \bigoplus_{j=1}^{s} \left(\frac{P_j}{P_jJ}\right)^{t_{ij}} \\
&\cong \bigoplus_{j=1}^{s} U_j^{t_{ij}} \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

no qual $U_j = P_j/P_jJ$, para $j = 1, ..., s$ é um conjunto completo de R-módulos simples dois a dois não isomorfos.

A Equação (1.8) ainda mostra que os inteiros t_{ij} também representam quantas vezes o módulos simples U_j aparece como um somando de P_iJ/P_iJ^2. Outra implicação direta da Equação (1.8) é que $Q(R) = Q(R/J^2)$.

Pela Definição 1.32 conseguimos ver que o quiver $Q(R)$ de um anel semiperfeito e o quiver $Q(B)$ de seu anel básico possuem o mesmo número de vértices. Mais do que isso, como a equivalência de Morita preserva a cobertura projetiva podemos ver pelos funtores expressos na 1.31 que as setas destes quivers estão em relação biunívoca , isto é $Q(R) = Q(B)$. Em suma, temos que o quiver de uma anel semiperfeito é preservado pela equivalência de Morita.

Para ver como propriedades importantes podem ser obtidas de anéis semiperfeitos utilizando quivers apresentamos dois resultados que estão relacionados aos nossos objetos de estudos.

Proposição 1.39. *Seja R um anel semiperfeito e noetheriano. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *R é indecomponível;*

2. *$R/J(R)$ é indecomponível;*

3. *O quiver de R é conexo.*

Demonstração. [9, Theorem 11.1.9]. □

Proposição 1.40. *Os módulos regulares R_R e $_RR$ de um anel semiperfeito e noetheriano R se decompõem como somas diretas de submódulos de cadeia, se, e somente se os quivers $Q(R)$ e $Q'(R)$ são uniões desconexas de cadeias e ciclos.*

Demonstração. [9, Theorem 12.3.11]. □

2 ANÉIS DE N-CADEIA SEMIPERFEITOS

Neste capítulo, e a partir de então, todos os resultados apresentados foram obtidos pelos autores deste trabalho, salvo quando fizermos menção do contrário, ou o resultado tiver uma referência explicita de sua demonstração na literatura.

2.1 ANÉIS E MÓDULOS DE N-CADEIA

Em todas as referências utilizadas neste trabalho que tratam dos conceitos de módulos e anéis de n-cadeia, apresentando as definições de anel de n-cadeia e módulo de n-cadeia usam diretamente estas estruturas de forma análoga as Definições 2.4 e 2.13. Neste trabalho, escolhemos apresentar tais conceitos a partir da Definição 2.1, onde construímos as definições de n-comparabilidade, n-incomparabilidade, e também adicionamos o conceito de n-cadeia estrito para módulos e anéis.

Definição 2.1. *Seja R um anel e M um R-módulo. Dizemos que um subconjunto $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq M$, com $n+1$ elementos, é* **n-comparável** *se existe um índice i tal que $x_i \in \sum_{j \neq i} x_j R$. Um subconjunto de M com $n+1$ elementos que não é n-comparável é dito ser* **n-incomparável**.

Na Definição 2.1 poderíamos escrever, de modo equivalente, que um subconjunto $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq M$ é n-comparável se existe um índice i tal que $x_0, ..., x_n \in \sum_{j \neq i} x_j R$, ou ainda que existe uma permutação σ dos índices $0, ..., n$ tal que $x_{\sigma(0)} \in \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} R$. Afim de nos garantir a liberdade de utilizar um ou outro forma de representar o somatório, mostraremos estas equivalências em um lema.

Lema 2.2. *Seja M um módulo e $X = \{x_0, ..., x_n\}$ um subconjunto de M com $n+1$ elementos. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. *X é n-comparável;*
2. *existe um índice i tal que $x_0, ..., x_n \in \sum_{j \neq i} x_j R$;*
3. *existe uma permutação σ dos índices $0, ..., n$ tal que $x_{\sigma(0)} \in \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} R$.*

Demonstração. Se X é n-comparável, então existem um índice i tal que $x_i \in \sum_{j \neq i} x_j R$. Como $x_j \in x_j R$, então temos que $x_0, ..., x_n \in \sum_{j \neq i} x_j R$.

Suponha que existe um índice i tal que $x_0, ..., x_n \in \sum_{j \neq i} x_j R$. Então $x_i \in \sum_{j \neq i} x_j R$. Defina a permutação σ do conjunto de índices tal que $\sigma(i) = 0$ e $\sigma(0) = i$ e $\sigma(j) = j$ para todo $j \neq i, 0$. Então temos que $x_{\sigma(0)} \in \sum_{j \neq \sigma(0)} x_j R = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} R$.

Por fim, se existe uma permutação σ dos índices $0, ..., n$ tal que $x_{\sigma(0)} \in \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} R$, então tome $j = \sigma(0)$, então temos que $x_j \in \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} R = \sum_{i \neq j} x_i R$. Tocando os índices i e j, temos o resultado desejado. $\square$

As definições de n-comparabilidade e n-incomparabilidade podem parecerem similares aos conceitos de dependência e independência linear para elementos de espaços vetoriais. De fato, estes conceitos coincidem quando tratamos de espaços vetoriais, conforme poderemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 2.3. *Seja D um anel de divisão e V um espaço vetorial à direita sobre D de dimensão n. Então, qualquer conjunto $X = \{x_0, ..., x_n\} \subseteq V$, com $n+1$ elementos, é n-comparável. Além disso, existe um conjunto $Y = \{y_0, ..., y_{n-1}\} \subseteq V$ $(n-1)$-incomparável.*

Claramente, o que estamos falando acima é que o conjunto X é linearmente dependente. Logo um de seus elementos é combinação linear dos demais, e que Y é um conjunto minimal de geradores de V.

Definição 2.4. *Dizemos que um módulo M é* **de n-cadeia** *se todo subconjunto de M com $n+1$ elementos é n-comparável. Um módulo de n-cadeia é* **de n-cadeia estrito** *se não é de $(n-1)$-cadeia, neste caso dizemos que n é o* **índice de cadeia** *de M.*

Segundo a próxima proposição, podemos verificar se um módulo é de n-cadeia a partir de seus submódulos, em lugar de olhar para seus elementos.

Proposição 2.5. *Um módulo M é de n-cadeia se, e somente se, qualquer que seja a família se submódulos $N_0, ..., N_n \subseteq M$, existe um índice i tal que $N_i \subseteq \sum_{j \neq i} N_j$.*

Demonstração. Suponha que M seja de n-cadeia e suponha por absurdo que existe uma família de submódulos $N_0, ..., N_n \subseteq M$ tal que para todo índice i, $N_i \nsubseteq \sum_{j \neq i} N_j$. Assim, para cada $i = 0, ..., n$ escolha um elemento $x_i \in N_i \setminus \sum_{j \neq i} N_j$. Com isso temos que, para todo $i = 0, ..., n$, vale $x_i \notin \sum_{i \neq j} x_j R$, ou seja $\{x_0, ..., x_n\}$ é um conjunto n-incomparável, contradizendo a hipótese de que M é de n-cadeia.

Por outro lado, se para qualquer que seja a família se submódulos $N_0, ..., N_n \subseteq M$, existe um índice i tal que $N_i \subseteq \sum_{j \neq i} N_j$, então tal hipótese vale para $N_0 = x_0 R$, ..., $N_n = x_n R$, qualquer que seja o subconjunto $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq M$. Mas isso significa que tal subconjunto é n-comparável. $\square$

A partir da Proposição 2.5, quaisquer que seja os submódulos $N, N' \subseteq M$ de um módulo M de 1-cadeia tem-se que $N \subseteq N'$ ou $N' \subseteq N$. Isto significa que o reticulado dos submódulos de M estão em uma cadeia de inclusões, o que dá origem ao termo "cadeia" da definição. Em particular os módulos de 1-cadeia são denominados na literatura de módulos de cadeia.

A próxima proposição estende a ideia da definição de n-cadeia com alguns implicações úteis.

Proposição 2.6. *Sejam M um R-módulo de n-cadeia e uma família de submódulos $N_0, \cdots, N_m \subseteq M$, com $m \geq n$. Então existe uma permutação σ dos índices $\{0, ..., m\}$ tal que*

$$N_0, ..., N_m \subseteq N_{\sigma(0)} + ... + N_{\sigma(n-1)}$$

Demonstração. Para $m = n$ o resultado segue da Proposição 2.5.

Suponha que para algum $m > n$ fixo o resultado seja válido para $m - 1$. Assim, existe uma permutação σ' dos índices $\{0, ..., m\}$, com $\sigma'(m) = m$, tal que $N_0, ..., N_{m-1} \subseteq N_{\sigma'(0)} + ... + N_{\sigma'(n-1)}$.

Seja $L_j = N_{\sigma'(j)}$ para cada $j = 0, ..., n-1$ e $L_n = N_m$. Dado que M é um R-módulo de n-cadeia, existe uma permutação σ'' dos índices $\{0, ..., n, ..., m\}$, com $\sigma''(j) = j$, para todo $j > n$, tal que

$$L_{\sigma''(n)} \subseteq L_{\sigma''(0)} + ... + L_{\sigma''(n-1)}$$

Fazendo σ''' a permutação de $\{0, ..., m\}$ que apenas troca m e n de posições temos que, para cada $j = 0, ..., n$, $L_j = N_{\sigma'\sigma'''(j)}$

Tome $\sigma = \sigma'' \circ \sigma' \circ \sigma'''$, então para cada $j \in \{0, ..., m\}$ então

$$\begin{aligned} N_{\sigma(j)} &= N_{\sigma''\sigma'(j)} \\ &\subseteq L_{\sigma''(0)} + ... + L_{\sigma''(n-1)} \\ &= N_{\sigma''\sigma'\sigma'''(0)} + ... + N_{\sigma''\sigma'\sigma'''(n-1)} \\ &= N_{\sigma(0)} + ... + N_{\sigma(n-1)} \end{aligned}$$

isto é

$$N_0, ..., N_m \subseteq N_{\sigma(0)} + ... + N_{\sigma(n-1)}$$

como desejado. □

Corolário 2.7. *Seja M um módulo de n-cadeia e N um submódulo finitamente gerado de M. Então N possui um conjunto de geradores com no máximo n elementos, ou seja*

$\text{gen}(N) \leq n$.

Demonstração. Sejam $\{x_0, ..., x_m\}$ um conjunto de geradores de N. Se $m \leq n-1$, então o resultado é dado. Caso $m \geq n$ defina $N_i = x_iR$ para $i = 0, ..., m$, pela Proposição 2.6 existe uma permutação σ dos índices tal que $x_0R, ..., x_mR \subseteq \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}R$ de modo que N é gerado por $x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n-1)}$. □

Diretamente da própria Definição 2.4 é possível observar que todo módulo de n-cadeia é também de m-cadeia para qualquer $m \geq n$. Além disso, submódulos de módulos de n-cadeia são também de n-cadeia, não necessariamente com o mesmo índice. A seguir exploramos outras operações de módulos envolvendo a definição de n-cadeia.

Proposição 2.8. *Sejam M e N R-módulos. Se M é de m-cadeia (estrito) e N é de n-cadeia (estrito), então $M \oplus N$ é de $(m+n)$-cadeia (estrito).*

Demonstração. Seja $z_0, ..., z_{m+n} \in M \oplus N$ elementos quaisquer. Escreva $z_i = x_i + y_i$ para cada $i = 0, ..., m+n$ onde $x_i \in M$ e $y_i \in N$. Dado que M é de m-cadeia segue, da Proposição 2.6, que existe uma permutação σ dos índices tal que, para todo $i = 0, ..., m+n$, $x_i \in \sum_{j=1+n}^{m+n} x_{\sigma(j)}R$. Note que a ordem dos índices de como tomamos os elementos $z_0, ..., z_{m+n}$ não é crucial para os argumentos da demonstração até este ponto, assim sendo, podemos supor que tomamos a permutação σ igual a identidade. Para cada $i = 0, ..., n$, escreva $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{j+n}a_{i,j+n}$ onde $a_{i,j} \in R$ e sejam, para cada $i = 0, ..., n$, $y'_i = z_i - \sum_{j=1}^{m} z_{n+j}a_{i,n+j}$. Note que $y'_i \in N$. Dado que N é de n-cadeia, existe uma permutação τ dos índices tal que $y'_{\tau(0)} \in \sum_{j=1}^{n} y_{\tau(j)}R$. Podemos supor novamente, sem perda de generalidade, que τ é a identidade. Escreva $y'_0 = y'_1b_1 + ... + y'_nb_n$ com $b_i \in R$. Desta última identidade temos que

$$z_0 = \sum_{j=1}^{m} z_{j+n}a_{0,j+n} + \sum_{i=1}^{n} \left(z_i - \sum_{j=1}^{m} z_{j+n}a_{i,j+n} \right) b_i \in \sum_{i=1}^{m+n} z_iR \tag{2.1}$$

o que mostra que $M \oplus N$ é de $(m+n)$-cadeia.

Para a segunda afirmação, suponha que M é de m-cadeia estrito e N é de n-cadeia estrito, então existem conjuntos $\{x_1, ..., x_m\} \subseteq M$ $(m-1)$-incomparável e $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq N$ $(n-1)$-incomparável. Sejam $z_i = x_i + 0$ para $i = 1, ..., m$ e $z_{m+i} = 0 + y_i$ para $i = 1, ..., n$. Afirmamos que $\{z_1, ..., z_{m+n}\} \subseteq M \oplus N$ é $(m+n-1)$-incomparável. De fato, se $z_{\sigma(1)} \in \sum_{i=2}^{m+n} z_{\sigma(i)}R$ para alguma permutação σ dos índices, como ou $z_{\sigma(1)} = x_i$ para algum i ou $z_{\sigma(1)} = y_i$ para algum i, temos que ou $\{x_1, ..., x_m\}$ é $(m-1)$-comparável ou $\{y_1, ..., y_n\}$ é $(n-1)$-comparável, o que é uma contradição. □

A segunda afirmação da Proposição 2.8 nos fornecem os seguintes corolários imediatos.

Corolário 2.9. *Sejam R um anel e $M_1, ..., M_m$ R-módulos. Então $M = \bigoplus M_i$ é de n-cadeia, se e somente se, cada M_i é de n_i-cadeia, com $\sum n_i = n$.*

Corolário 2.10. *Sejam R um anel e $M_1, ..., M_m$ R-módulos tais que $M_i \cong M_j$, para todo i e j. Então $M = \bigoplus M_i$ é de n-cadeia, se e somente se, cada M_i é de n_0-cadeia com $mn_0 = n$.*

Proposição 2.11. *Sejam $N \subseteq M$ R-módulos tais que M/N é de m-cadeia e N é de n-cadeia. Então M é de $(m+n)$-cadeia.*

Demonstração. Sejam $x_0, ..., x_{m+n} \in M$ e sejam $\overline{x_0}, ..., \overline{x_{m+n}}$ suas imagens em M/N. Dado que M/N é de m-cadeia, existe uma permutação dos índices σ tal que, para todo $i = 0, ..., m+n$, $\overline{x_i} \in \sum_{j=1+n}^{m+n} \overline{x_{\sigma(j)}}R$. Sem perda de generalidade, suponha que σ é a identidade e sejam, para cada $i = 0, ..., n$, $a_{i,1+n}, ..., a_{i,m+n} \in R$ tais que $\overline{x_i} = \sum_{j=1+n}^{m+n} \overline{x_j} a_{ij}$. Seja, para cada $i = 0, ..., n$, $y_i = x_i - \sum_{j=1+n}^{m+n} x_j a_{ij}$, então $y_0, ..., y_n \in N$. Como N é de n-cadeia, existe uma permutação dos índices τ tal que $y_{\tau(0)} \in \sum_{i=1}^{n} y_{\tau(i)}R$. Novamente, podemos supor que τ é a identidade. Assim, sejam $b_1, ..., b_n \in R$ tais que $y_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} y_0 &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \sum_{j=1+n}^{m+n} x_j a_{ij} \right) b_i \\ x_0 - \sum_{j=1+n}^{m+n} x_j a_{0j} &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \sum_{j=1+n}^{m+n} x_j a_{ij} \right) b_i \\ x_0 &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \sum_{j=1+n}^{m+n} x_j a_{ij} \right) b_i + \sum_{j=1+n}^{m+n} x_j a_{0j} \end{aligned}$$

de modo que $x_0 \in \sum_{i=1}^{m+n} x_i R$. □

Corolário 2.12. *Se $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_n = M$ é uma série de composição de um R-módulo M. Então M é de n-cadeia.*

Demonstração. A prova segue por indução em n. Para $n = 1$ temos que M_1 é simples, portanto de cadeia. Suponha que o resultado é válido para decomposições de comprimento $n-1$, então o módulo M_{n-1} é de $(n-1)$-cadeia. Como M_n/M_{n-1} é um módulo simples, e portanto de cadeia, segue da proposição anterior que $M = M_n$ é de n-cadeia. □

Diferente da soma direta, o módulo M não será necessariamente de $(m+n)$-cadeia estrito quando N e M/N forem de n-cadeia e m-cadeia estritos respectivamente. Por exemplo, o $\mathbb{Z}$-módulo $M := \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^n$, onde p é um número primo e n um inteiro positivo qualquer, é um módulo de cadeia. Todo os seus submódulos aparecem na seguinte série de composição

$$0 \subseteq Mp^{n-1} \subseteq ... \subseteq Mp \subseteq M$$

Para os quocientes desses submódulos valem $Mp^k/Mp^l \cong Mp^{l-k} \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{l-k}$, os quais são módulos de cadeia.

O exemplo de módulo de cadeia acima é um caso particular de **módulo uniserial**. A saber, dizemos que um módulo M é uniserial se possui uma única série de composição. Por série de decomposição entendemos uma cadeia de inclusões

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq ... \subsetneq M_n = M$$

onde cada quociente M_i/M_{i-1} é um módulo simples. Ocorre que todo módulo uniserial é de cadeia, porém a recíproca não é verdadeira, pois um módulo de cadeia pode não possuir uma série de composição.

A definição de n-cadeia sobre anéis pode ser enunciada da seguinte forma.

Definição 2.13. *Dizemos que um anel R é* **de n-cadeia à direita** *se o módulo regular a direita R_R é de n-cadeia. Dizemos que R é* **de n-cadeia à esquerda** *se o módulo regular à esquerda ${}_RR$ é de n-cadeia. Se R é um anel de n-cadeia à direita e à esquerda, então dizemos que R é um anel* **de n-cadeia**.

Assim como para módulos, o termo de 1-cadeia para anéis é simplesmente **de cadeia**. Esta definição é encontrada em [3] no contexto de uma generalização de valorizações. Ainda neste artigo é provado que.

Proposição 2.14. *Todo anel de n-cadeia à direita é semilocal.*

Demonstração. [3, página 2] □

A Proposição 2.8 junto com seus corolários nos permitem comparar o índices de cadeia de produtos direto de anéis e de anéis de matrizes como segue.

Proposição 2.15. *Se R e S são anéis de m-cadeia e n-cadeias à direita (estritos) respectivamente, então $R \times S$ é um anel de $m + n$ cadeia (estrito).*

Demonstração. Segue da Proposição 2.8. □

Proposição 2.16. *Sejam R um anel e $\mathbb{M}_m(R)$ o anel de matrizes $m \times m$ sobre R. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathbb{M}_m(R)$ é um anel de mn-cadeia à direita;*
2. *R^m é um R-módulo de mn-cadeia;*
3. *R é um anel de n-cadeia à direita.*

Demonstração. A equivalência entre os itens 1. e 2. segue da Proposição 1.34. Já a equivalência entre 2. e 3. segue do Corolário 2.10. □

A Proposição 2.16 junto com o Corolário 2.15 nos dão o seguinte resultado.

Corolário 2.17. *Seja $R = \mathbb{M}_{n_1}(R_1) \times ... \times \mathbb{M}_{n_r}(R_r)$ um anel que se escreve como o produto direto de anéis de matrizes. Então R é de n-cadeia à direita (estrito) para algum n se, e somente se, cada anel R_i é de m_i-cadeia à direita (estrito) com $n_1 m_1 + ... + n_r m_r = n$.*

A partir desses primeiros resultados podemos observar alguns exemplos relevantes de anéis e módulos de n-cadeia. Inicialmente, todo anel de cadeia (à direita) é um anel de n-cadeia (à direita), neste caso para $n = 1$. Nestes exemplos se enquadram qualquer corpo e qualquer anel de divisão. Pelo Corolário 2.17 e o Teorema Wedderburn-Artin, [15, Theorem 3.5], temos que todo anel artiniano e semissimples é de n-cadeia para algum n.

Dizemos que um subanel $R \subseteq D$, onde D é um anel de divisão, é um **anel de valorização** de D se para todo $x \in D$, ou $x \in R$ ou $x^{-1} \in R$. Um caso particular deste exemplo é a localização $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}$ do anel dos números inteiros pelo ideal primo $P = p\mathbb{Z}$, onde p é um inteiro positivo primo. Se a e b são elementos não nulos de um anel de valorização $R \subseteq D$, então ou $a/b \in R$ ou $b/a \in R$, o que implica que ou $a = a/b \cdot b \in Rb$ ou $b = b/a \cdot a \in aR$, de modo que os anéis de valorizações são anéis de cadeia, e portanto de n-cadeia.

Pela Proposição 2.8, temos que um anel R cujo módulo regular à direita se decompõe em uma soma de submódulos de cadeia da forma $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ é de n-cadeia. Um anel com essa característica é denominado na literatura por **anel serial**. Veremos mais adiante que algumas generalizações do anéis seriais também são de n-cadeia. Por enquanto vamos ampliar nosso rol de exemplos com os seguintes resultados.

Proposição 2.18. *Todo anel artiniano à direita é de n-cadeia à direita para algum n*

Demonstração. Seja R um anel artiniano à direita. Por [15, Proposição 4.15] R_R possui uma série de composição. Pelo Corolário 2.12 R_R é de n-cadeia para algum n. □

Exemplo 2.19. *Seja $\Bbbk$ um corpo e $R = \Bbbk[x, y]_{\langle x,y\rangle}/\langle xy\rangle$, a localização do anel de polinômios $\Bbbk[x, y]$ pelo ideal primo $\langle x, y\rangle$, quocientado pelo ideal $\langle xy\rangle$. Nesta construção R é um anel comutativo. Afirmamos que R é um anel de 2-cadeia estrito e local.*

Demonstração. Uma vez que $\langle x, y\rangle$ é um ideal primo de $\Bbbk[x, y]$, a localização $S := \Bbbk[x, y]_{\langle x,y\rangle}$ é um anel local cujo ideal (à direita) maximal é $M = xS + yS$. Por consequência, o quociente $R = S/\langle xy\rangle$ é também local e $M = xR + yR$ é seu ideal (à direita) maximal.

Sem perda de generalidade, vamos denotar por x e y as imagens de tais monômios no quociente $R = \Bbbk[x,y]_{\langle x,y\rangle}/\langle xy\rangle$, isto é, estamos adotando a relação $xy = 0$.

Uma vez que quaisquer monômios com graus positivos em x e em y é nulo em R, qualquer elemento $f \in R$ pode ser escrito da forma $f = x^m u + y^n v$ onde m e n são inteiros não negativos e $u, v \in \mathrm{U}(R) \cup (0)$. Além disso, esta representação é única a menos dos casos onde $u = 0$ ou $v = 0$.

Afirmação: Analisando caso a caso, podemos mostrar que dados $f, g \in R$, com $f = x^{m_1}u_1 + y^{n_1}v_1$, $g = x^{m_2}u_2 + y^{n_2}v_2$ onde $u_1, u_2, v_1, v_2 \in U(R) \cup \{0\}$, então $fR \subseteq gR$, ou $gR \subseteq fR$ ou

$$fR + gR = x^m R + y^n R$$

no qual $m = \min\{m_1, m_2\}$ e $n = \min\{n_1, n_2\}$. Na definição do mínimo entre m_1 e m_2 estamos considerando o caso em que u_1 e u_2 são não nulos. Se $u_i = 0$, para algum $i \in \{1, 2\}$, então tomamos $m = m_{3-i}$. O mesmo definimos para n_i.

Agora, para mostrar que R é um anel de 2-cadeia, sejam $f, g, h \in R$ e escreva $f = x^{m_1}u_1 + y^{n_1}v_1$, $g = x^{m_2}u_2 + y^{n_2}v_2$ e $h = x^{m_3}u_3 + y^{n_3}v_3$ tais que $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ são elementos de $U(R) \cup \{0\}$. Sem perda de generalidade, suponha que $m_1 \leq m_3$ e $n_2 \leq n_3$. Pela afirmação anterior, ou fR e gR são comparáveis ou $fR + gR = x^m R + y^n R$ onde $m = \min\{m_1, m_2\}$ e $n = \min\{n_1, n_2\}$. Nos dois primeiros casos temos que ou $gR \subseteq fR \subseteq fR + hR$ ou $fR \subseteq gR \subseteq gR + hR$. Já no segundo caso temos que $h = x^m x^{m_3 - m} u_3 + y^n y^{n_3 - n} v_3 \in fR + gR$. $\square$

Exemplo 2.20. *Inspirado no exemplo anterior, seja $\Bbbk$ um corpo e $\mathbb{K} = \Bbbk(t_1, t_2, ...)$ o corpo de funções racionais sobre $\Bbbk$ em um número infinito e enumerável de indeterminadas. Sejam $S = \mathbb{K}[x,y]_{\langle x,y\rangle}/\langle xy\rangle$ e $\sigma : S \to S$ o monomorfismos sobre S definido pelas seguintes relações:*

$$\begin{cases} \sigma(x) &= y \\ \sigma(y) &= t_i \\ \sigma(t_i) &= t_{i+1} \text{ para todo } i = 1, 2, ... \end{cases}$$

Defina $R = S[[z;\sigma]]$ o skew anel de endomorfismos das séries de Laurent na indeterminada z à direita sobre S. Afirmamos que R é um anel não comutativo, local e de 2-cadeia estrito.

Demonstração. Primeiramente observe que

$$z^2 = z^2 t_1 t_2 (t_1 t_2)^{-1} = xyz^2 (t_1 t_2)^{-1} = 0$$

de modo que os elementos de R podem ser escritos como $a_0 + z a_1$ com $a_0, a_1 \in S$. Note ainda que $xz = xzt_1 t_1^{-1} = xyzt_1^{-1} = 0$ e $zy = xz = 0$, assim dada a representação dos elementos de S no Exemplo 2.19, um elemento $r \in R$ genérico pode ser escrito da forma

$$r = x^m a + y^n b + zx^p c$$

onde $a, b, c \in U(S) \cup \{0\}$ e m, n e p são inteiros não negativos.

Note que se $b \neq 0$ e $n = 0$, r é invertível e $rR = R$. Caso $b \neq 0$ e $n = 1$, então para todo $b' \in S$, existe um $a' \in S$ tal que $ra' = zb'$, pois nesse caso $rz = z(t_1^n b)$ e a expressão entre parenteses é invertível em S.

Agora sejam $r_i = x^{m_i} a_i + y^{n_i} b_i + zx^{p_i} c_i$, com $i = 0, 1, 2$, elementos de R. Veremos que estes elementos são 2-comparáveis separando em dois casos

Caso 1: Suponha inicialmente que $b_0 = b_1 = b_2 = 0$. Suponha ainda, sem perda de generalidade, que $m_0 \leq m_1 \leq m_2$. Então, para cada $i = 1, 2$ podemos escrever

$$r_i' := r_i - r_0 x^{m_i - m_0} a_i a_0^{-1} = zx^{p_i'} c_i' \tag{2.2}$$

com $p_i' \in \mathbb{N}$ e $c_i' \in S$. Novamente, sem perda de generalidade, suponha que $p_1' \leq p_2'$, então podemos escrever

$$r_2' = r_1'' x^{p_3' - p_1'} c_i' (c_1')^{-1} \tag{2.3}$$

Por fim, a partir das Equações (2.2) e (2.3) temos que $r_2 \in r_0 R + r_1 R$

Caso 2: Suponha que, para algum $j \in \{0, 1, 2\}$, $b_j \neq 0$. Escreva $s_i = x^{m_1} a_i + y^{n_i} b_i$ para $i = 0, 1, 2$. Dado que $s_i \in S$, pelo Exemplo 2.19 obtemos que $\{s_0, s_1, s_2\}$ é um conjunto 2-comparável, então, sem perda de generalidade, existem $f, g \in S$ tais que $s_2 = s_0 f + s_1 g$. Seja $r_2' = r_2 - r_0 f - r_1 g$. Então $r_2' = zx^{p_2'} c_2'$ para algum $p_2' \in \mathbb{N}$ e $c_2' \in U(S)$. Note que devemos ter $b_0 \neq 0$ ou $b_1 \neq 0$. Novamente, sem perda de generalidade, podemos supor que $b_0 \neq 0$. Assim existe $a' \in S$ tal que $r_0 a' = zx^{p_2'} c_2'$, logo

$$\begin{aligned} r_2 &= r_2' + r_0 f - r_1 g \\ &= r_0 a' + r_0 f - r_1 g \\ &\in r_0 R + r_1 R \end{aligned}$$

Isso demonstra que R é um anel de 2-cadeia à direita. Vamos mostrar que R é de 2-cadeia à direita estrito. Para isso mostraremos que $\{x, y\}$ é um conjunto incomparável de R_R. De fato, se pudéssemos escrever $x = yr$ para algum $r \in R$, digamos $r = x^m a + y^n b + zx^p c$, então teríamos $x = y^{n+1} b + zx^p ct_1$ o que implicaria em $x = 0$. por outro lado, se $y = xr$ com $r \in R$, digamos novamente que $r = x^m a + y^n b + zx^p c$, então $y = x^{m+1} a$ em S, um absurdo.

Para ver que R é local, vamos mostrar que $xR + yR$ é seu único ideal maximal à direita. De fato, como visto anteriormente yR contém todos os elementos das formas $y^n b$ e za com

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $a \in S$, já xR contém todos os elementos da forma $x^n a$ com $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $a \in S$. Então $1 \notin xR + yR$ de modo que $xR + yR$ é um ideal à direita próprio de R. Se $r \in R \setminus xR + yR$, temos $r = x^m a + y^n b + zx^p c$ e, então $a \neq 0$ e $m = 0$, ou $b \neq 0$ e $n = 0$, o que faz de r ser invertível. Dado que $U(R) = R \setminus xR + yR$, temos que R é local. $\square$

2.2 DECOMPOSIÇÃO DE PIERCE

O Corolário 2.9 implica que $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ é uma decomposição de Pierce de um anel de n-cadeia à direita se, e somente se, cada somando e_iR é um módulo de n_i-cadeia com $\sum_i n_i = n$. Veremos nesta seção que a relação de n-cadeia pode ser trabalhada com um pouco mais de detalhes sobre as componentes R_{ij} de uma decomposição de Pierce de um anel R. Tal estudo abrirá caminho para entendermos os anéis de n-cadeia semiperfeitos mais adiante.

A seguir apresentamos alguns resultados concernentes aos anéis de n-cadeia com decomposições de Pierce.

Proposição 2.21. *Seja $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ uma decomposição de Pierce de um anel R onde $R_{ij} = e_iRe_j$. Se cada componente R_{ij} é um R_j-módulo de n_{ij}-cadeia, para algum inteiro positivo n_{ij}, então R é de n-cadeia à direita, onde $n = \sum_{i,j} n_{ij}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que R é de n-cadeia à direita para $n = \sum_{i,j} n_{ij}$. Assim sendo, sejam $x_0, ..., x_n \in R$.

Seja $l = r(i-1) + (j-1)$, $M_l = R_{ij}$ e $n_l = n_{ij}$. Note que $i-1$ e $j-1$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de l por r. Como $i, j \leq r$, l é único para cada par de índices (i, j). Note que $M_0, M_1, ..., M_{r^2-1}$ define uma ordem para as componentes R_{ij} da decomposição de Pierce de R.

Defina $s_t = n_0 + ... + n_t$. Vamos provar, por indução sobre $l = r(i-1) + (j-1)$, que existe uma reorganização dos índices $k = 0, ..., n$ tal que para todo $k = 0, s_{l-1}, ..., n$, $x_{ikj} \in \sum_{s=s_{l-1}}^{s_l} x_{isj}R_j$. Para $l = 0$, como M_0 é de n_0-cadeia como R_1-módulo, então, a partir de uma reorganização dos índices $k = 0, 1, ..., n$, podemos supor que $x_{1k1} \in \sum_{s=1}^{n_0} x_{1s1}R_1$.

Suponha que nossa hipótese seja válida para todo índice menor que $l = r(i-1)+(j-1)$ fixo. Dado que M_l é um R_j-módulo de n_l-cadeia, existe uma reorganização dos índices $k = 0, s_{l-1}, ..., n$ tal que $x_{ikj} \in \sum_{s=s_{l-1}}^{s_l} x_{isj}Rj$. Note que esta reorganização dos índices não altera a hipótese para diferentes $l' < l$, pois não precisamos modificar a ordem dos índices $k = 1, ..., s_{l-1} - 1$.

Assim provamos que, para todo $l = 0, ..., r^2 - 1$, $l = r(i-1) + (j-1)$,

$$x_{i0j} \in \sum_{s=s_{l-1}}^{s_l} x_{isj} Rj \subseteq \sum_{s=1}^{n} x_{isj} Rj$$

Sejam $a_{ikj} \in R_j$ tais que $x_{i0j} = \sum_{s=1}^{n} x_{isj} a_{ikj}$. Então temos que

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{ij} x_{i0j} \\ &= \sum_{ij} \sum_{s=1}^{n} x_{isj} a_{ikj} \\ &\in \sum_{ij} \sum_{s=1}^{n} x_{isj} R \\ &= \sum_{s=1}^{n} x_s R \end{aligned}$$

o que mostra que R é de n-cadeia à direita. □

Proposição 2.22. *Seja $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ uma decomposição de Pierce de um anel R. Se em cada linha i existe uma componente R_{ij_i} que como $R_{j_i j_i}$-módulo possui um conjunto $\{r_{i1}, ..., r_{in_i}\}$ $(n_i - 1)$-incomparável, então o conjunto $\{r_{ij} : i = 1, ..., r, j = 1, ..., n_i\}$ é um conjunto $(\sum_i n_i - 1)$-incomparável de R_R.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $\{r_{ij}\}$ não é $(\sum_i n_i - 1)$-incomparável em R. Então existe permutações σ e ρ dos índices tais que

$$r_{\sigma(1)\rho(1)} \in \sum_{i=2}^{r} \sum_{j=2}^{n_i} r_{\sigma(i)\rho(j)} R \tag{2.4}$$

mas então isso significa que

$$\begin{aligned} r_{\sigma(1)\rho(1)} &= e_{\sigma(1)} r_{\sigma(1)\rho(1)} e_{\sigma(1)} \\ &\in e_{\sigma(1)} \left(\sum_{i=2}^{r} \sum_{j=2}^{n_i} r_{\sigma(i)\rho(j)} R \right) e_{\sigma(1)} \\ &= \sum_{j=2}^{n_{\sigma(1)}} r_{\sigma(1)\rho(j)} R_{\sigma(1)} \end{aligned}$$

uma contradição. □

Corolário 2.23. *Seja $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ uma decomposição de Pierce de um anel R. Se R é um anel de n-cadeia à direita, então cada anel da diagonal R_i é de n_i-cadeia à direita onde $n_1 + ... + n_r \leq n$.*

Demonstração. Basta observar que cada R_i é um módulo sobre si mesmo. □

A desigualdade do Corolário 2.23 não é uma igualdade no caso geral. Por exemplo, seja $\Bbbk$ um corpo e R a $\Bbbk$-álgebra definida da seguinte forma

$$R = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} : a, b, c, d, e \in \Bbbk \right\}$$

então cada anel da diagonal de R é da forma $R_{ii} \cong \Bbbk$, para $i = 1, 2, 3$, e portanto são de cadeia. Porém, R não é 3-cadeia uma vez que $e_1 R$, a primeira linha da decomposição de Pierce de R, é um R-módulo de 2-cadeia.

Os próximos resultados tem [18, Proposition 1.22] como base de inspiração. Nesse resultado o autor mostra que um somando $e_i R$ da decomposição de Pierce $[R_{ij}]_{r\times r}$ de um anel R é de cadeia, se qualquer conjunto $\{x_0, x_1\} \subseteq R_{ij} \cup R_{ik}$ é sempre comparável, quaisquer que sejam os índices j e k. A Proposição 2.24 e o Teorema 2.27 apresentam duas diferentes generalizações para esse resultado.

Proposição 2.24. *Seja $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ uma decomposição de Pierce de um anel R. Então R é de n-cadeia à direita para algum n se, e somente se, existe um inteiro m tal que para qualquer subconjunto $\{x_0, ..., x_m\} \subset R_{ij} \cup R_{ik}$, existe uma permutação σ dos índices onde*

$$x_{\sigma(0)} \in \sum_{i=1}^{m} x_{\sigma(i)}(e_j + e_k)Re_l$$

onde l é tal que $x_{\sigma(0)} \in e_i Re_l$.

Demonstração. Primeiramente, suponha que R é de n-cadeia à direita para algum n. Tome $m = n$. Sem perda de generalidade, suponha que $x_0 \in \sum_{i=1}^{n} x_i R$. Digamos que $x_0 \in e_i Re_j$, então

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & x_0 e_j \\ & \in & (\sum_{i=1}^{n} x_i R)e_j \\ & \subseteq & (\sum_{i=1}^{n} x_i(e_j + e_k)R)e_j \\ & = & (\sum_{i=1}^{n} x_i(e_j + e_k)R)e_l \end{array}$$

Reciprocamente, suponha que existe um inteiro m tal que para qualquer subconjunto $\{x_0, ..., x_n\} \subset R_{ij} \cup R_{ik}$, existe uma permutação σ dos índices onde $x_{\sigma(0)} \in \sum_{i=1}^{m} x_{\sigma(i)}(e_j + e_k)Re_l$ onde l é tal que $x_{\sigma(0)} \in e_i Re_l$. Vamos mostrar que cada $e_i R$ é um R-módulo de mr-cadeia. Sejam $x_0, ..., x_{mr} \in e_i R$ e escreva $x_i = \sum_j x_{ij}$ onde $x_{ij} = x_i e_j$.

Para cada $l = 1, ..., r$ tome $k = j = l$ na hipótese, então existe uma permutação σ de $\{0, ..., mr\}$ tal que $x_{sl} \in \sum_{i=m+l-1}^{lm} x_{\sigma(i)l} R$ para todo $s = 0, ..., m(r - l)$.

Note que podemos tomar a mesma permutação σ para todo índice l, em particular note que para todo l

$$x_{\sigma(0)l} \in \sum_{i=1}^{rm} x_{\sigma(i)l}R$$

o que implica que $x_{\sigma(0)} \in \sum_{i=1}^{rm} x_iR$. $\square$

Corolário 2.25. *Seja $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ uma decomposição de Pierce de um anel R. Então R é de n-cadeia à direita para algum n se, e somente se, eRe é de n_e-cadeia à direita para algum n_e, onde $e = e_i+e_j+e_k$ é soma de quaisquer de três idempotentes da decomposição.*

Para demonstrar o próximo resultado utilizaremos o lema técnico a seguir.

Lema 2.26. *Seja $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ um anel com uma decomposição de Pierce, $m \in \{1, ..., r\}$, $M \subseteq e_mR$ um submódulo, $x_0, ..., x_n \in (e_mR)/M$ e, para cada $i = 0, ..., n$, $x_i = \sum_{j=1}^{r} x_{ij}$ tal que $x_{ij} = x_ie_j$. Se para qualquer arranjo com repetições $(j_0, ..., j_n)$ dos índices $\{1, ..., r\}$ o conjunto $\{x_{0j_0}, ..., x_{nj_n}\}$ é n-comparável, então $\{x_0, ..., x_n\}$ é n-comparável.*

Demonstração. Procedemos a demonstração por indução sobre n. Tome $n = 1$. Suponha que $x_1 \notin x_0R$. Afirmamos que existe um índice $j \in \{1, ..., r\}$ tal que para todo $k = 1, ..., r$, $x_{1j} \notin x_{0k}R$. Para verificar a afirmação, suponha que a mesma não ocorre. Assim para cada $j = 1, ..., r$, existe $k_j \in \{1, ..., r\}$ tal que $x_{1j} \in x_{0k_j}R$. Escreva $x_{1j} = x_{0k_j}a_j$ com $a_j \in R$. Note que $x_{0k_j}a_j = x_0e_{k_j}a_j$. Logo temos que

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sum_{j=1}^{r} x_{1j} \\
&= \sum_{j=1}^{r} x_0e_{k_j}a_j \\
&= x_0\sum_{j=1}^{r} e_{k_j}a_j \in x_0R
\end{aligned}$$

contradizendo a suposição inicial.

Voltando a nossa afirmação, como $x_{1j} \notin x_{0k}R$ e, pela hipótese do enunciado, $\{x_{1j}, x_{0k}\}$ é um conjunto comparável, temos que $x_{0k} \in x_{1j}R$. Assim existe, para cada $k = 1, ..., r$, $a_k \in R$ tal que $x_{0k} = x_{1j}a_k$. Dado que $x_{1j} = x_1e_j$ temos que

$$\begin{aligned}
x_0 &= \sum_{k=1}^{r} x_{0k} \\
&= \sum_{k=1}^{r} x_1e_ja_k
\end{aligned}$$

$$= x_1 \sum_{k=1}^{r} e_j a_k \in x_1 R$$

Vamos construir uma base de indução. Seja n um inteiro positivo fixo. Sejam $M \subseteq e_m R$ um submódulo e $x_0, ..., x_n \in e_m R/M$. Escreva, para cada $i = 0, ..., n$, $x_i = \sum_{j=1}^{r} x_{ij}$ onde $x_{ij} = x_i e_j$. Suponha que, se para qualquer arranjo com repetições $(j_0, ..., j_n)$ dos índices $\{1, ..., r\}$, o conjunto $\{x_{0j_0}, ..., x_{nj_n}\}$ é n-comparável, então o conjunto $\{x_0, ..., x_n\}$ é n-comparável.

Agora, sejam $M \subseteq e_m R$ um submódulo e $x_0, ...x_{n+1} \in e_m R/M$ com, para cada $i = 0, ..., n+1$, $x_i = \sum_{j=1}^{r} x_{ij}$ onde $x_{ij} = x_i e_j$. Suponha ainda que, para qualquer arranjo com repetições $(j_0, ..., j_{n+1})$, o conjunto $\{x_{0j_0}, ..., x_{n+1,j_{n+1}}\}$ é $(n+1)$-comparável. Vamos provar que $\{x_0, ..., x_{n+1}\}$ é $(n+1)$-comparável.

Se $x_{n+1} \in \sum_{i=0}^{n} x_i R$, então nada precisa ser demonstrado. Assim, podemos supor que $x_{n+1} \notin \sum_{i=0}^{n} x_i R$. A partir disso provaremos a seguinte afirmação:

> ***Afirmação:*** *existe $j \in \{1, ..., r\}$ tal que qualquer que seja o arranjo com repetições $(j_0, ..., j_{n+1})$ dos índices $\{1, ..., r\}$ no qual $j_{n+1} = j$, temos que $x_{n+1,j} \notin \sum_{k=0}^{n} x_{kj_k} R$.*

Se nossa afirmação não for verdadeira, então podemos escolher, para cada $j = 1, ..., r$, um arranjo com repetições $(l_{j0}, ..., l_{j,n+1})$ dos índices $\{1, ..., r\}$, no qual $l_{j,n+1} = j$ tal que $x_{n+1,j} \in \sum_{k=0}^{n} x_{k,l_{j,k}} R$. Neste caso temos que $x_{n+1,j} = \sum_{k=0}^{n} x_{k,l_{j,k}} a_k$ onde $a_k \in R$. Dado que $x_{k,l_{j,k}} = x_k e_{l_{j,k}}$ obteremos

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \sum_{j=1}^{r} x_{n+1,j} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{n} x_{k,l_{j,k}} a_k \\
&= \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{n} x_k e_{l_{j,k}} a_k \in \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{r} e_{l_{j,k}} a_k \right) \in \sum_{k=0}^{n} x_k R
\end{aligned}$$

contradizendo nossa suposição de que $x_{n+1} \notin \sum_{i=0}^{n} x_i R$.

Dada a afirmação, seja $N = x_{n+1,j} R \subseteq e_m R/M$ e denote por $\overline{x}$ a imagem do elemento $x \in e_m R/M$ em $(e_m R/M)/N$. Pela hipótese do enunciado temos que para cada arranjo com repetições $(j_0, ..., j_{n+1})$ dos índices $\{1, ..., r\}$, com $j_{n+1} = j$ (j obtido na afirmação), existe um índice $l \neq n+1$ tal que

$$x_{l,j_l} \in \sum_{k \neq l}^{n} x_{k,j_k} R + x_{n+1,j} R \tag{2.5}$$

Desta pertinência, temos que

$$\overline{x_{l,j_l}} \in \sum_{k \neq l, n+1}^{n} \overline{x_{k,j_k}} R \tag{2.6}$$

Note que $\overline{x_0}, ..., \overline{x_n} \in (e_m R/M)/N \cong e_m R/(M+N)$ são as imagens dos elementos $x_0, ..., x_n$. Além disso, para cada $i = 1, ..., n$ temos que $\overline{x_i} = \sum_{k=1}^{r} \overline{x_{ik}}$ e $\overline{x_{ik}} = \overline{x_i} e_k$. Assim, pela Equação (2.6), a hipótese de indução se aplica ao conjunto $\{\overline{x_0}, ..., \overline{x_n}\}$. Isto é, $\{\overline{x_0}, ..., \overline{x_n}\}$ é n-comparável, logo existe $i \in \{0, ..., n\}$ tal que $\overline{x_i} \in \sum_{k=0, k \neq i}^{n} \overline{x_k} R$. Assim temos que

$$x_i + x_{n+1,j} R \subseteq \sum_{k=0, k \neq i}^{n} x_k R + x_{n+1,j} R$$

ou ainda

$$\begin{aligned} x_i &\in \sum_{k=0, k \neq i}^{n} x_k R + x_{n+1,j} R \\ &\subseteq \sum_{k=0, k \neq i}^{n} x_k R + x_{n+1} R \\ &= \sum_{k=0, k \neq i}^{n+1} x_k R \end{aligned}$$

□

Teorema 2.27. *Seja $R = [R_{ij}]_{r \times r}$ uma decomposição de Pierce do anel R, $p \in \{1, ..., r\}$ e n um inteiro positivo. Então o R-módulo $e_p R$ é de n-cadeia se, e somente se, para todo subconjunto $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} R_{pj}$, existe um índice $i \in \{0, ..., n\}$ tal que $x_i \in \sum_{j \neq i}^{n} x_j R$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $e_p R$ é de n-cadeia. Como $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq e_p R$ temos que $\{x_0, ..., x_n\}$ é um conjunto n-comparável e portanto existe um índice $i \in \{0, ..., n\}$ tal que $x_i \in \sum_{j \neq i}^{n} x_j R$.

($\Leftarrow$) Segue do Lema 2.26, tomando o submódulo $M = 0$. □

Tal como o resultado [18, Proposition 1.22] serve de base para [18, Proposition 1.25] na teoria dos módulos finitamente apresentados para anéis seriais, o Teorema 2.27 serve de base mais adiante para provarmos o Teorema 3.15, que por sua vez nos mostra que os anéis semiperfeito do tipo de representação limitada à direita devem ser de n-cadeia à esquerda.

Além desta série de resultados mencionados, o Teorema 2.27 ainda nos permite aplicar o conceito de comparabilidade de forma mais objetiva à uma decomposição bilateral de Pierce. Se, pela definição, tomar um conjunto n-comparável ou n-incomparável genericamente de um anel R com uma decomposição de Pierce $[R_{ij}]_{r\times r}$ exigia que cada elemento do conjunto fosse uma matriz $x = [x_{ij}]$, agora podemos tomar tais elementos distribuídos entre as componente R_{ij} do anel R.

2.3 DECOMPOSIÇÃO DE PIERCE E DISTRIBUTIVIDADE

A distributividade é um conceito muitas vezes relacionado aos anéis de cadeia. Por exemplo, [2, Theorem 1] mostra que um domínio R é distributivo se, e somente se, qualquer localização de R sobre um ideal primo P é um anel de cadeia. Em [4, Proposition 2.23] é mostrada uma associação que relaciona a n-distributividade com anéis e módulos de n-cadeia, por exemplo, tal resultado implica que os módulos n-distributivos sobre anéis locais são precisamente os módulo de n-cadeia. Em [12] temos um aprofundamento do tema ao relacionar anéis semiperfeitos com o conceito de distributividade e semidristributividade.

Nesta seção buscaremos explorar a relação entre os conceitos de n-distributividade e n-cadeia para os anéis semiperfeitos.

Definição 2.28. *Seja $\omega \geq 2$ um cardinal e M um módulo. Dizemos que M é* ω**-distributivo** *se para qualquer família de submódulos $\{N_i : 1 \leq i \leq \omega\} \cup \{N\}$ de M,*

$$N + \bigcap_{1\leq i\leq\omega} N_i = \bigcap_{1\leq i\leq\omega} (N + \bigcap_{j\neq i} N_j) \tag{2.7}$$

Se $\omega = 2$, então dizemos que um módulo 2-distributivo é simplesmente **distributivo**. *O menor cardinal ω para o qual o módulo M é ω-distributivo é denominado seu* **índice de distributividade**.

Uma anel R é ω**-distributivo à direita** *se R_R é um R-módulo à direita ω-distributivo. A definição de anel* ω**-distributivo à esquerda** *é definido de forma análoga. Dizemos que o anel R é* ω**-distributivo** *se o é à direita e à esquerda.*

A seguir apresentaremos o primeiro resultado sobre a ω-distributividade que utilizaremos posteriormente.

Proposição 2.29. *Sejam M um R-módulo e ω um cardinal arbitrários. Então, as se-*

guintes afirmações são equivalentes:

1. *M é ω-distributivo;*
2. *não existe um submódulo $L \subseteq M$ e uma família de submódulos $\{N_i : 1 \leq i \leq \omega\}$ do quociente M/L tal que $\bigoplus_{1 \leq i \leq \omega} N_i \subseteq M/L$;*
3. *para qualquer subconjunto $\{x_i : 1 \leq i \leq \omega\} \subseteq M$ tem-se que*

$$\sum_{1 \leq i \leq \omega} (X_i : x_i) = R$$

onde $X_i := \sum_{j \neq i} x_j R$ e $(X_i : x_i) = \{a \in R : x_i a \in X_i\}$.

Demonstração. [4, Theorem 1.1]. □

O termo distributivo utilizado para $\omega = 2$, segue da Equação (2.7) que se torna $N + N_1 \cap N_2 = (N + N_1) \cap (N + N_2)$, ou seja, a soma de módulos é distributiva sobre a interseção. Além disso, se $\omega = n$ é um cardinal finito, então também vale a distributividade da interseção com relação a soma, como apresentado a seguir.

Proposição 2.30. *Seja R um anel, M um R-módulo e $\omega = n < \infty$ um cardinal finito. Então, M é n-distributivo se, e somente se, para qualquer família de submódulos $\{N_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{N\}$ de M*

$$N \cap \sum_{i=1}^{n} N_i = \sum_{i=1}^{n} \left(N \cap \sum_{j \neq i} N_j \right) \tag{2.8}$$

Demonstração. [4, Proposition 2.2] □

O próximo resultado nos mostra a relação entre os módulos de n-cadeia e a n-distributividade.

Proposição 2.31. *Se M é um R-módulo de n-cadeia, então M é $(n+1)$-distributivo. Em particular, todo anel de n-cadeia à direita é $(n+1)$-distributivo à direita.*

Demonstração. Sejam $x_0, ..., x_n \in M$, então existe i tal que $x_i \in X_i$, onde X_i é o submódulo gerado pelos demais x_j, $j \neq i$, mas isso significa que $(X_i, : x_i) = R$ de modo que M é $(n+1)$-distributivo. □

A recíproca da Proposição 2.31 é verdadeira se o anel R é local, conforme o próximo resultado.

Proposição 2.32. *Se R é um anel local, então um R-módulo M é $(n+1)$-distributivo se, e somente se, M é de n-cadeia. Em particular, os anéis locais $(n+1)$-distributivos à direita são exatamente os anéis locais de n-cadeia à direita.*

Demonstração. O resultado segue da Proposição 2.31 juntamente com [4, Proposition 2.3]. □

Para o caso complementar, isto é para módulos sobre anéis não locais, a recíproca da Proposição 2.31 em geral não ocorre. Para ver isso, considere o resultado [20, Proposition 1.2] no qual se mostra que a soma direta de dois módulos distributivos M_1 e M_2 é distributivo se, e somente se, sempre que submódulos $P \subseteq P' \subseteq M_1$ e $Q \subseteq Q' \subseteq M_2$ são tais que $P'/P \cong Q'/Q$, então $P'/P = 0$ (isto é, $P = P'$ e $Q = Q'$). À luz desse resultado consideramos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.33. *Sejam p_1 e p_2 números primos distintos, n_1 e n_2 inteiros positivos e considerem os $\mathbb{Z}$-módulos $M_i = \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$, para $i = 1, 2$. Então M_i's são de cadeia e os submódulos de M_i são da forma*

$$p_i^j M_i \cong \mathbb{Z}/(p_i^{n_i-j})\mathbb{Z}$$

com $j = 0, ..., n_i$. Em especial, os quocientes P'/P de submódulos $P \subseteq P' \subseteq M_i$ são da forma

$$\frac{P'}{P} = \frac{\mathbb{Z}/(p_i^{n_i-j})\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}/(p_i^{n_i-k})\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/(p_i^{j-k})\mathbb{Z}$$

Os quais contém p^{j-k} elementos. Assim, se $P \subseteq P' \subseteq M_1$ e $Q \subseteq Q' \subseteq M_2$ são tais que $P'/P \cong Q'/Q$ então devemos ter que $P'/P = 0$, dada a contagem de seus elementos. Em particular $M_1 \oplus M_2$ é distributivo, porém de 2-cadeia estrito, segundo a Proposição 2.8.

Embora a distributividade e a relação de cadeia sobre anéis não locais não tenham uma relação tão clara quanto sobre anéis locais, podemos obter alguns resultados envolvendo os anéis semiperfeitos.

Proposição 2.34. *Seja R um anel semiperfeito. Se R é $(n+1)$-distributivo à direita para algum inteiro positivo n, então R é de m-cadeia à direita para algum inteiro positivo m.*

Demonstração. Seja $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce de R em submódulos locais. Sejam $x_0, ..., x_n \in R_{ji} = e_jRe_i \subseteq e_jR$. Dado que R_R é $n+1$-distributivo e e_jR é um submódulo de R_R, temos da Proposição 2.29 que existe $a'_0, ..., a'_n \in R$ tais que $\sum_l a'_l = 1$ e, para todo $l = 0, .., n$, $x_l a'_l \in \sum_{k \neq l} x_k R$. Sejam $a_l = e_i a'_l e_i$, então $\sum_l a_l = e_i$ e $x_l a_l \in \sum_{k \neq l} x_k R_i$, como a soma dos a_l's é a identidade de R_i, pelo menos algum $a_l \notin J(R_i)$, mas R_i é um anel local, de modo que a_k é invertível em R_i para algum $k \in \{0, ..., n\}$, Consequentemente para tal k, $x_k \in \sum_{l \neq k} x_l R_i$. Isso nos diz que R_{ji} é um R_i-módulo de n-cadeia. Assim, segue da Proposição 2.21 que R é um anel de m-cadeia à direita, para algum inteiro positivo m. $\square$

Em [4] é apresentada a seguinte questão: "Se um anel R tem índice de distributividade (à direita) igual a m, então o módulo livre de rank n $L \cong R^n$ tem grau de distributividade $mn + 1$?". A inspiração para tal conjectura pode ser visto no caso em que R é um anel de cadeia, pois, uma vez que tais anéis são locais, as Proposições 2.8 e 2.32 garante a veracidade da conjectura neste caso. Além deste exemplo, [4] também demonstra que a conjectura é válida no caso em que R é um anel semissimples. A partir da proposição a seguir seremos capazes de apresentar uma resposta afirmativa para esta questão, no caso geral, onde R é um anel qualquer.

Proposição 2.35. *Se M e N são módulos $(m+1)$-distributivo e $(n+1)$ distributivo respectivamente, então $M + N$ é $(m+n+1)$-distributivo.*

Demonstração. A demonstração será feita por absurdo. Inicialmente supomos que $M+N$ não seja $(m+n+1)$-distributivo, então $M + N$ não satisfaz a condição 2 da Proposição 2.29. Mostraremos que nesta hipótese M ou N também não satisfaz tal hipótese. Para isso, faremos várias construções de homomorfismos e isomorfismos que poderão ser acompanhadas pelo diagrama da Figura 2.1 abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
x_0R \arrow[r, "\varphi_{10}"] \arrow[dr, "\varphi'_{10}"] \arrow[ddr, "\varphi*_{10}"] & x_1R \arrow[r, "\varphi_{21}"] \arrow[d, dotted] & x_2R \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & x_mR \\
\overline{x_0}R \arrow[dr, "\varphi''_{10}"] & \overline{x_1}R \arrow[r, "\varphi'_{21}"] \arrow[d, dotted] & \overline{x_2}R \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \overline{x_m}R \\
\overline{\overline{\overline{x_0}}}R \arrow[r, "\overline{\varphi''_{10}}"'] & \overline{\overline{\overline{x_1}}}R \arrow[r, "\overline{\varphi'_{21}}"] & \overline{\overline{\overline{x_2}}}R \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \overline{\overline{\overline{x_m}}}R
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.1: Prova da Proposição 2.35

Se $M + N$ não é $(m+n+1)$-distributivo, então pela Proposição 2.29, existem submódulos $L \subseteq M + N$ e $K_0 \oplus ... \oplus K_{m+n} \subseteq (M+N)/L$ tais que todos os módulos K_i são não nulos e $K_i \cong K_j$ para todo i e j. Denote por $\varphi_{ji} : K_i \to K_j$ tais isomorfismos entre os submódulos K_i e K_j de tal modo que, sem perda de generalidade, $\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$ e $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ para quaisquer índices i, j e k.

Afirmamos que, a menos da ordem dos índices, para cada $i = 0, ..., m$, existe $x_i \in K_i$, tal que $x_j = \varphi_{ji}(x_i)$ e $\overline{x_i} \in \overline{K_i} \setminus \{0\}$ no quociente $\dfrac{M+N}{L} / \dfrac{N+L}{L} \cong \dfrac{M}{M \cap (N+L)}$. Se isso não ocorre, então, a menos da ordem dos índices, podemos dizer, que para $i = 0, ..., n$, $\overline{x_i} = 0$ em

$$\overline{K_i} := \left(K_i + \frac{N+L}{L}\right) / \left(\frac{N+L}{L}\right).$$

O que implica que $x_0, ..., x_n \in \dfrac{N+L}{L}$. Dadas as origens dos x_i's temos que $x_0R \oplus ... \oplus x_nR \subseteq \dfrac{N+L}{L} \cong \dfrac{N}{N \cap L}$ com $x_iR \neq 0$ e $x_iR \cong x_jR$ para todo $i, j \in \{0, ..., n\}$, uma contradição com a hipótese de que N é $n+1$-distributivo.

Defina $M' := \dfrac{M+N}{L} / \dfrac{N+L}{L}$. Dado que $\overline{x_0}R \oplus ... \oplus \overline{x_m}R \subseteq M'$ é uma soma de módulos não nulos, queremos encontrar submódulos $L' \subseteq M$ e $K'_0 \oplus ... \oplus K'_m \subseteq M'/L'$ tais que $K'_i \cong K'_j$ para todo $i, j \in \{0, ..., m\}$. A prova será feita por indução em m. A prova da base de indução, isto é, para $m = 1$, segue o mesmo argumento do passo de indução. Assim, suponha que exista um submódulo $L'' \subseteq M$, que se decompõe da forma $L'' = (L'' \cap \overline{x_1}R) \oplus ... \oplus (L'' \cap \overline{x_m}R)$ tal que $\overline{\overline{x_1}}R \oplus ... \oplus \overline{\overline{x_m}}R$ é uma soma direta de módulos não nulos em M'/L'' tais que $\overline{\overline{x_i}}R \cong \overline{\overline{x_j}}R$ para todo $i, j \in \{1, ..., m\}$. Sejam $\varphi'_{ji} : \overline{\overline{x_i}}R \to \overline{\overline{x_j}}R$ tais isomorfismos e, sem perda de generalidade, suponha que $\varphi'_{ki} = \varphi'_{kj} \circ \varphi'_{ji}$ e $\varphi'_{ij} = \varphi'^{-1}_{ji}$.

Seja $\varphi'_{10} : x_0R \to \overline{\overline{x_1}}R$ o homomorfismo obtido pela composição do isomorfismo φ_{10} com a projeção canônica de x_1R em $\overline{\overline{x_1}}R$, consequentemente φ'_{10} é um epimorfismo. Dado que $\overline{x_0}$ é não nulo em M'/L'', temos que

$$\overline{\overline{\overline{x_1}}}R := \frac{\overline{\overline{x_1}}R + \varphi'_{10}\left(x_0R \cap \dfrac{N+L}{L}\right)}{\varphi'_{10}\left(x_0R \cap \dfrac{N+L}{L}\right)} \tag{2.9}$$

é não nulo. Seja $\varphi^*_{10} : x_0R \to \overline{\overline{\overline{x_1}}}R$ a composta de φ'_{10} com a projeção canônica de $\overline{\overline{x_1}}R$ em $\overline{\overline{\overline{x_1}}}R$.

Note que φ^*_{10} é um epimorfismo. Disso temos que o isomorfismos induzido $\overline{\varphi'_{10}} : \overline{\overline{\overline{x_0}}}R \to \overline{\overline{\overline{x_1}}}R$ onde $\overline{\overline{\overline{x_0}}}R := x_0R / \ker \varphi^*_{10}$ é bem definido. Além disso, como $x_0R \cap \dfrac{N+L}{L} \subseteq \ker \varphi^*_{10}$ podemos escrever $\overline{\overline{\overline{x_0}}}R \cong \overline{x_1}R/L_0$ onde L_0 é isomorfo a um submódulo de

$$\overline{x_0}R := \left(x_0R + \frac{N+L}{L}\right) / \left(\frac{N+L}{L}\right). \tag{2.10}$$

Reescreva $\overline{\overline{\overline{x_1}}}R = \overline{\overline{x_1}}R/L_1$ onde L_1 é um submódulo de $\overline{\overline{x_1}}R$. Para cada $i = 2, ..., m$ seja $\overline{\overline{\overline{x_i}}}R = \overline{\overline{x_i}}R/\varphi'_{i1}(L_1)$ e sejam $\overline{\varphi'_{i1}}$ as compostas dos homomorfismos φ'_{i1} com as projeções canônicas de $\overline{\overline{x_i}}R$ em $\overline{\overline{\overline{x_i}}}R$. Por construção, cada $\overline{\varphi'_{i1}}$ é um isomorfismo.

Defina $L' = L_0 \oplus ... \oplus L_m$, onde, a partir de $i = 2, ..., m$, $L_i = \varphi'_{i1}(L_1)$. Para cada $i = 0, ..., m$, defina $K'_i = \overline{\overline{\overline{x_i}}}R$ um submódulo de M'/L'. Então, por toda construção que temos realizado, cada K'_i é não nulo, $K'_i \cong K'_j$ para todo $i, j \in \{0, ..., m\}$ e $K'_0 \oplus ... \oplus K'_j$ é um submódulo de M'/L'. Mas, como $M' = \dfrac{M+N}{L} / \dfrac{N+L}{L} \cong \dfrac{M}{M \cap (N+L)}$, temos que $M'/L' \cong M/\widetilde{L}$ para algum submódulo $\widetilde{L} \subseteq M$. Isso mostra, a partir a Proposição 2.29 que M não é $(m+1)$-distributivo. Uma contradição.

Consequentemente, concluímos que $M+N$ é $(m+n+1)$-distributivo. $\square$

Teorema 2.36. *Seja R um anel com índice de distributividade à direita igual a $m+1$. Se $L \cong R_R^n$ é um R-módulo livre de rank n, então L tem índice de distributividade $mn+1$.*

Demonstração. Se R tem índice de distributividade à direita $m+1$, então R_R é $(m+1)$-distributivo. Pela Proposição 2.35, L é $(mn+1)$-distributivo, assim o grau de distributividade de L deve ser menor ou igual a $mn+1$.

Agora, dado que o índice de distributividade de R_R é $m+1$, R_R não é m-distributivo, assim, pela Proposição 2.29 existe um submódulo N de R_R e um submódulo $K_1 \oplus ... \oplus K_m \subseteq R_R/N$ tais que, para todo $i, j \in \{1, ..., m\}$, $K_i \neq 0$ e $K_i \cong K_j$. Se $L = R_R^n$, então L possui um submódulo M isomorfo a N^n, assim

$$\frac{L}{M} \cong \frac{R_R^n}{N^n} \tag{2.11}$$

contém um submódulo isomorfo a $(K_1^m)^n$. Novamente pela Proposição 2.29, temos que L não é mn-distributivo, de modo que $mn+1$ é de fato o índice de distributividade de L. $\square$

Corolário 2.37. *Se R possui grau de distributividade $m+1$, então o anel de matrizes $\mathbb{M}_n(R)$ tem grau de distributividade $mn+1$*

Demonstração. Segue das Proposições 1.34 e 2.36. $\square$

Definição 2.38. *Dizemos que um módulo M é* **semidistributivo** *se M se decompõe como soma direta de submódulos distributivos. Um anel R é dito ser* **semidistributivo à direita** *se o módulo regular à direita R_R é semidistributivo. A definição de anel* **semidistributivo à esquerda** *é análoga. O anel R é dito ser* **semidistributivo** *se o é à direita e à esquerda.*

Nos dois próximos resultados exploramos a situação onde o módulo regular R_R de um anel semiperfeito R não apenas se decompões como a soma de submódulos distributivos, mas como a soma de submódulos $(n+1)$-distributivos. Para tal relembraremos uma definição da literatura.

Definição 2.39. *O* **socle** *de um módulo M, denotado por $\operatorname{soc}(M)$, é a soma de todos os submódulos simples de M.*

Segue da literatura, mais especificamente de [15, Theorem 2.4], que $\mathrm{soc}(M)$ é um submódulo semissimples de M. Em especial, qualquer submódulo de $\mathrm{soc}(M)$ é um somando direto seu, o qual sempre pode ser decomposto como soma direta, não necessariamente finita, de submódulos simples.

Lema 2.40. *Um R-módulo M é $(n+1)$-distributivo se, e somente se, para qualquer submódulo N, o $\mathrm{soc}(M/N)$ não contém um submódulo não nulo isomorfo a U^{n+1}.*

Demonstração. Inicialmente, suponha por absurdo que $\mathrm{soc}(M/N)$ contém um submódulo U' isomorfo a uma soma direta não nula U^{n+1}. Denote $U' = \bigoplus_{i=0}^{n} U_i$ onde cada $U_i \cong U$. Sejam $\varphi_{ij} : U_i \to U_j$ isomorfismos e, sem perda de generalidade, suponha que $\varphi_{ik} \circ \varphi_{kj} = \varphi_{ij}$ e $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$. Seja $D = \{u_1 + ... + u_{n+1} \subseteq U : \forall i, j \in \{1, ..., n+1\}, \varphi_{ij}(u_i) = u_j\}$.

Note que $D \cap U = D$, e $D \cap \bigoplus_{j \neq i} U_j = 0$ de modo que

$$D \cap \sum_{i=0}^{n} U_i = D \neq 0 = \sum_{i=0}^{n} (D(U) \cap \bigoplus_{j \neq i} U_j) \tag{2.12}$$

consequentemente o módulo M/N não é $(n+1)$-distributivo. Um absurdo, pois dado que M é $(n+1)$-distributivo temos que M/N também o é.

Por outro lado, sejam $x_0, ..., x_n \in M$ e defina $X_i = \sum_{j \neq i} x_j R$ e $M' = \sum_{i=0}^{n} x_i R$. Dado que $\mathrm{soc}(M/N)$ não contém um submódulo isomorfo a U^{n+1}, qualquer que seja o submódulo $N \subseteq M$, o mesmo vale para $\mathrm{soc}(M'/N)$ escolhendo $N \subseteq M'$.

Da Definição 2.39, podemos supor que U é um módulo simples. Assim, existe um submódulo maximal I de R_R tal que $U \cong R/I$. Seja $N = \sum_{i=0}^{n} x_i I$. Como U^{n+1} não é isomorfo a nenhum submódulo de $\mathrm{soc}(M'/N)$, então a condição

$$x_i \in X_i + \sum_{j=0}^{n} x_j I = X_i + x_i I \tag{2.13}$$

deve ser satisfeita para algum i. Neste caso, existem $a_j \in R$, $j \neq i$ e $a \in I$ tais que $x_i = \sum_{j \neq i} x_j a_j + x_i a$, ou seja $x_i(1-a) \in X_i$, ou ainda, $(1-a) \in (X_i : x_i)$. Dado que $1 - a \notin I$, $(X_i : x_i) \nsubseteq I$. Pela arbitrariedade de I temos que $\sum_{i=0}^{n} (X_i : x_i) = R$, o que mostra que M é $(n+1)$-distributivo. □

O próximo resultado usará o seguinte lema.

Lema 2.41 (Lema do Anulador). *Seja $R_R = e_1 R \oplus ... \oplus e_r R$ uma decomposição de Pierce em submódulos locais de um anel semiperfeito R. Então, o R-módulo simples $U_i \cong e_i R / e_i \, \mathrm{J}(R)$ satisfaz $U_i e_j = \delta_{ij} U_i$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. De igual modo, o R-módulo à esquerda simples $V_i \cong Re_i / \, \mathrm{J}(R) e_i$ satisfaz $f_j V_i = \delta_{ij} V_i$.*

Demonstração. [9, Lemma 11.1.2] □

Teorema 2.42. *Sejam R um anel semiperfeito e $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce de R_R em submódulos locais. Então o módulo projetivo indecomponível e_iR é $(n+1)$-distributivo, se, e somente se, cada componente e_iRe_j é um R_j-módulo de n-cadeia.*

Demonstração. Dado que R é semiperfeito e $1 = e_1 + ... + e_r$ é a decomposição da identidade em idempotentes locais, temos que cada anel $R_j = e_jRe_j$ é local. Sendo e_iR um R-módulo $(n+1)$-distributivo, temos que $R_{ij} := e_iRe_j$ é um R_j-módulo $(n+1)$-distributivo. Pela Proposição 2.32 temos que R_{ij} é de n-cadeia.

Por outro lado, sejam $N \subseteq e_iR$ um submódulo e $Y_0, ..., Y_n \subseteq e_iR/N$ submódulos tais que $Y_j/N \cong U_k$ onde $U_k = e_kR/e_kJ(R)$ é um submódulo simples de R. Pelo Lema 2.41 temos que $Y_je_k/Ne_k \cong (Y_j/N)e_k \cong U_k$. Note que $Y_0e_k, ..., Y_ne_k \subseteq R_{ik}$ como R_k-submódulos. Dado que R_{ik} é de n-cadeia temos que, a menos da ordem dos índices, que $Y_0e_k \subseteq \sum_{j=1}^{n} Y_je_k$.

Por outro lado, para qualquer l tal que $e_lR \ncong e_kR$ temos, pelo Lema 2.41 novamente, para todo $j = 0, ..., n$, que $Y_je_l/Ne_l = (Y_j/N)e_l = U_ke_l = 0$, de modo que $Y_je_l = Ne_l$. Segue disso que $Y_0/N \subseteq \sum_{j=1}^{n} Y_j/N$. Isso nos dá que $soc(e_iR/N)$ não pode conter um submódulo isomorfo a U^{n+1} onde U é um R-módulo simples. Assim, segue do Lema 2.40 que e_iR é $(n+1)$-distributivo. □

O Teorema 2.42 é uma generalização de [13, Theorem 14.2.1] que caracteriza os anéis semiperfeitos e semidistributivos a partir de suas componentes, segundo uma decomposição de Pierce em submódulos locais. Nessa referência o teorema é provado para o caso em que $n = 1$. Apresentamos a seguir um exemplo de como podemos usar o Teorema 2.42 para avaliar a distributividade das componentes na decomposição de Pierce de uma álgebra de quivers.

Exemplo 2.43. *Seja $\Bbbk$ um corpo, Q o quiver da Figura 2.2 e $R = \Bbbk Q$ a $\Bbbk$-álgebra de quiver sobre Q. Afirmamos que e_2R é 3-distributivo, e não é distributivo.*

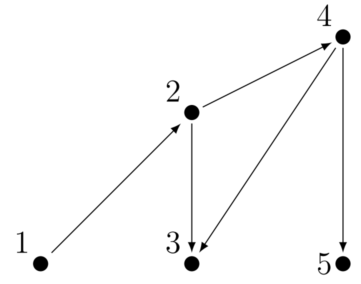


Figura 2.2: quiver com dois caminhos entre os vértices 2 e 3

Demonstração. Primeiramente, vamos nos lembrar que a decomposição de Pierce de R pode ser tomada com $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_5R$ onde e_i representa o caminho de comprimento nulo com fonte e alvo no vértice i. A componente e_iRe_j representar o $\Bbbk$-espaço vetorial gerado por todos os caminhos com fonte i e alvo no vértice j. Agora considere a decomposição, como soma direta de grupos,

$$e_2R = e_2Re_1 \oplus ... \oplus e_2Re_5$$

Podemos observar que cada componente e_2Re_j, para $j = 1, 2, 4, 5$, é um R_j-módulo de cadeia. A exceção e_2Re_3 desta lista ocorre pois há dois caminhos que saem do vértice 2 e chegam no vértice 3, um diretamente de comprimento 1 e outro passando pelo vértice 4, de comprimento 2. Como não há mais caminhos independentes, isso significa que e_2Re_3 é um R_3-módulo de 2-cadeia estrito.

Como qualquer módulo de 1-cadeia é também um módulo de 2-cadeia, segue que todos os R_j-módulos e_2Re_j, para $j = 1, 2, 3, 4, 5$, são de 2-cadeia, de modo que, pelo Teorema 2.42, e_2R é $(2 + 1)$-distributivo.

Sendo e_2Re_3 um R_3-módulo de 2-cadeia estrito, então nem todo R_j-módulos e_2Re_j, para $j = 1, 2, 3, 4, 5$, é de 1-cadeia, de modo que pelo mesmo teorema e_2R não é $(1 + 1)$-distributivo. $\square$

Por fim apresentamos mais alguns resultados referentes a distributividade e n-distributividade de anéis semiperfeitos.

Proposição 2.44. *Seja R um anel semiperfeito e n um inteiro positivo. Então R_R se decompõem como soma direta de R-módulo locais $(n + 1)$-distributivos se, e somente se, o anel eRe também o faz, qualquer que seja o idempotente $e \in R$.*

Demonstração. Seja $e = e_1 + ... + e_s$ a decomposição de e numa soma de idempotentes primitivos, dois a dois ortogonais. Dado que R é semiperfeito, cada e_i, para $i = 1, .., s$, é um idempotente local. Podemos completar o conjunto $\{e_1, ..., e_s\}$ com um conjunto de idempotentes locais $\{e_{s+1}, ..., e_r\}$ tal que $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ seja uma decomposição de Pierce de R_R em submódulos locais. Dada a unicidade da Proposição 1.5 para a decomposição de Pierce em submódulos locais, e da hipótese de que R se decompõe em submódulos $(n + 1)$-distributivos, temos que cada submódulo e_iR, para $i = 1, ..., r$, é $(n + 1)$-distributivo. Assim $eRe = e_1Re \oplus ... \oplus e_sRe$.

Para ver que cada e_iRe é $(n + 1)$-distributivo, para $i = 1, ..., s$, sejam $N, N_j \subseteq e_iRe$, com $j = 1, ..., n$ submódulos. Então $N = N'e$ e $N_j = N'_je$ ondem N', N'_j são submódulos de e_iR. Como e_iR é $(n+1)$-distributivo temos que

$$\begin{array}{rcl} N + \bigcap_{j=1}^{n} N_j & = & N'e + \bigcap_{j=1}^{n} N'_j e \\ & = & (N' + \bigcap_{j=1}^{n} N'_j)e \\ & = & \bigcap_{j=1}^{n}(N' + \bigcap_{k\neq j} N'_j)e \\ & = & \bigcap_{j=1}^{n}(N'e + \bigcap_{k\neq j} N'_j e) \\ & = & \bigcap_{j=1}^{n}(N + \bigcap_{k\neq j} N_j) \end{array}$$

o que mostra que e_iRe é $(n+1)$-distributivo. □

Por fim, apresentamos uma implicação do Teorema 2.42 sobre o nilradical e o radical primo de um anel semiperfeito e semidistributivo.

Proposição 2.45. *Sejam R um anel semiperfeito e semidistributivo à direita Então* $\mathrm{Nil}(R) = \mathrm{Pr}(R)$

Demonstração. Pelo Teorema 2.42, cada anel da diagonal R_i é de cadeia à direita. Por [18, Proposition 1.28], temos que $\mathrm{Nil}(R_i) = \mathrm{Pr}(R_i)$. Já os argumentos da prova de [18, Proposition 1.29] mostram que $\mathrm{Nil}(R_i) = \mathrm{Pr}(R_i)$ para todo i, implicam que $\mathrm{Nil}(R) = \mathrm{Pr}(R)$ para qualquer anel semiperfeito. □

2.4 ANÉIS DE N-CADEIA SEMIPERFEITOS E QUIVERS

Vimos na Seção 1.5 que, se o quociente $R/\mathrm{J}(R)^2$ é artiniano onde R é um anel semiperfeito, então R possui um quiver finito. Veremos nos próximos parágrafos que se R é um anel de n-cadeia semiperfeito, então essa condição é satisfeita. Além disso, os demais resultados obtidos nesta seção nos mostrarão como podemos usar as relações de comparabilidade e de incomparabilidade da Definição 2.1 para obtermos propriedades sobre os quivers de anéis semiperfeitos.

Proposição 2.46. *Seja R uma anel de n-cadeia à direita semiperfeito. Se $J = \mathrm{J}(R)$ é nilpotente, então R é artiniano à direita.*

Demonstração. Seja I um ideal à direita qualquer de R. Seja m tal que $J^m = 0$. Então

$$I \supseteq IJ \supseteq ... \supseteq 0 \qquad (2.14)$$

é uma cadeia de submódulos de I. Dado que I e um R-módulo de n-cadeia cada quociente $I_i = IJ^i/IJ^{i+1}$ é de n-cadeia. Mas I_i é um módulo sobre o anel semissimples R/J de modo que cada I_i é a soma direta de no máximo n módulos simples, isso junto com a Equação (2.14) nos mostra que I possui uma série de composição, o que implica que I é artiniano. Em particular R_R é artiniano. □

Corolário 2.47. *Se R é um anel semiperfeito de n-cadeia à direita, então R/J^2, onde $J = \mathrm{J}(R)$, é um anel artiniano. Em particular R possui um quiver finito.*

Demonstração. Note que $\mathrm{J}(R/J^2) = \mathrm{J}(R)/J^2 = J/J^2$ de modo que J é nilpotente. Assim, segue da Proposição 2.46 que R/J^2 é artiniano.

A última afirmação, de que R possui um quiver finito, segue da definição de quiver de um anel semiperfeito da Seção 1.5. □

Seja $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ uma decomposição de Pierce de um anel semiperfeito básico R que possui um quiver finito $Q(R)$, e seja $J = \mathrm{J}(R)$ e seu radical de Jacobson. Podemos ver pela Equação 1.8 que a quantidade de setas de $Q(R)$ que partem do vértice i chegando no vértice j é a quantidade de vezes que o R-módulo simples $U_j = e_jR/e_jJ$ aparece como um somando de e_iJ/e_iJ^2. Podemos ir além dessa análise e desenvolver um método de como obter tal número de setas a partir das componentes da decomposição de Pierce $R = [R_{ij}]_{r\times r}$.

Lema 2.48. *Sejam R um anel semiperfeito básico e $R_R = e_1R + ... + e_rR$ uma decomposição de Pierce de R_R em submódulos locais. Sejam $J = \mathrm{J}(R)$ e, para cada $i = 1, ..., r$, $U_i \cong e_iR/e_iJ$. Então e_iJ/e_iJ^2 contém um submódulo isomorfo a U_j^n se, e somente se, o R_j-módulo à esquerda $e_iJe_j/e_iJ^2e_j$ possui um conjunto n-incomparável.*

Demonstração. Seja $W = e_iJ/e_iJ^2$. Suponha que W possui um submódulo U isomorfo a U_j^n. Como W é semissimples, U é um somando direto de W. Segue do Lema 2.41 (Lema do Anulador), que $U \subseteq We_j$. Mas como R_j-módulo temos que $We_j \cong e_iJe_j/e_iJ^2e_j$, o que mostra que $e_iJe_j/e_iJ^2e_j$ possui um conjunto n-incomparável.

Por outro lado, suponha que $e_iJe_j/e_iJ^2e_j$ possui um conjunto n-incomparável, e seja

$$X = e_iJ^2e_j \oplus \bigoplus_{k\neq j} e_iJe_k \tag{2.15}$$

onde a soma direta denota a soma direta de grupos abelianos. Note que X é um submódulo de e_iJ. Dado que $e_iJ^2 \subseteq X \subsetneq e_iJ$, e_iJ/X é semissimples. Além disso, $e_iJ/X = e_iJe_j/e_iJ^2e_j = (e_iJ/X)e_j$. Assim, pelo Lema 2.41 (Lema do Anulador), temos que e_iJ/X possui um submódulo isomorfo a U_j^n. Mas e_iJ/X é um submódulo de $W = e_iJ/e_iJ^2$, de modo que e_iJ/e_iJ^2 possui um submódulo isomorfo a U_j^n. □

Este mesmo lema é demonstrado para o caso $n = 1$ em [9, Lemma 11.1.3] e denominado de Q-Lema. O Q-lema tem como aplicação avaliar se existe ou não uma seta partindo de

i para j a partir da decomposição de Pierce do anel semiperfeito. Aqui, podemos usar esta generalização para obter a quantidade total de setas que saem de i e chegam em j. Mostraremos isso com um exemplo.

Exemplo 2.49. *Afirmamos que os quivers à direita e à esquerda de* $R = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$ *são os apresentados na Tabela 2.1.*

$Q'(R)$	$Q(R)$
$\bullet \longleftarrow \bullet$	$\bullet \rightrightarrows \bullet$

Tabela 2.1: Quivers do anel R do Exemplo 2.49

Para ver isso note que R_R possui a seguinte decomposição de Pierce em submódulos locais

$$R_R = e_1R \oplus e_2R = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Pela Proposição 1.33, $J = \mathrm{J}(R) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e portanto $J^2 = \mathrm{J}(R)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, temos que

$$\frac{e_1Je_1}{e_1J^2e_1} = \frac{e_2Je_1}{e_2J^2e_1} = \frac{e_2Je_2}{e_2J^2e_2} = 0, \quad \frac{e_1Je_2}{e_1J^2e_2} = \mathbb{C}_{R_2} = 1\mathbb{R}_{R_2} \oplus i\mathbb{R}_{R_2}$$

onde $R_2 = e_2Re_2 \cong \mathbb{R}$ é o segundo anel da diagonal de R. Isso mostra que o quiver de $Q(R)$ de R possui apenas duas setas, ambas partindo do vértice 1 chegando ao vértice 2.

Por outro lado, olhando para $e_1Je_2/e_1J^2e_2$ como um R_1-módulo à esquerda, temos que $e_1Je_2/e_1J^2e_2 \cong \mathbb{C}_{R_1}$ e $R_1 \cong \mathbb{C}$. Isso implica que o quiver à esquerda $Q'(R)$ possui uma única seta partindo do vértice 2 para o vértice 1.

O próximo resultado relaciona a generalização do Q-Lema, dado pelo Lema 2.48, com as relações de n-comparabilidade de módulos de n-cadeia.

Proposição 2.50. *Sejam* $R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ *um anel semiperfeito tal que* R/J^2 *é artiniano e* i *e* j *dois vértices de* $Q(R)$*. Se* e_iJ/e_iJ^2 *é um* R*-módulo à direita de* n*-cadeia, então* i *é fonte de no máximo* n *setas. Se* Je_j/J^2e_j *é um* R*-módulo à esquerda de* m*-cadeia então* j *é alvo de no máximo* m *setas em* $Q(R)$*.*

Demonstração. Como o quiver de um anel semiperfeito e de seu anel base é o mesmo, podemos assumir que R é um anel básico. Se e_iR é de n-cadeia, então e_iJ/e_iJ^2 é também de n-cadeia. Dado que e_iJ/e_iJ^2 é semissimples, tal módulo é uma soma direta de no máximo n R-módulos simples, disso segue que i é fonte de no máximo n setas.

Seja m_i o número de setas de i para j. Então pelo Lema 2.48, e_iJe_j possui um conjunto m_i-incomparável módulo $e_iJ^2e_j$ como R_{jj}-módulo à direita. Pelo Lema 2.48 o R-módulo à esquerda Je_j/J^2e_j possui como submódulo a soma direta

$$U_1^{m_1} \oplus ... \oplus U_r^{m_r}$$

Mas dado que Re_j é de m-cadeia e $Je_j \subseteq Re_j$, temos que Je_j/J^2e_j é de m-cadeia. Logo $\sum m_i \leq m$. □

Corolário 2.51. *Seja R um anel de semiperfeito tal que $\overline{R} = R/\operatorname{J}(R)^2$ é um anel de n-cadeia à direita e m-cadeia à esquerda. Então o quiver $Q(R)$ de R tem no máximo* $\min\{m, n\}$ *setas.*

Demonstração. Seja $R = e_1R\oplus ...\oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce de R_R em submódulos locais. Uma vez que $\overline{R}_{\overline{R}}$ é de n-cadeia à direita, cada submódulo local $e_i\overline{R}$ de n_i-cadeia com $\sum n_i \leq n$. Disso temos que cada $\overline{R}$-módulo e_iJ/e_iJ^2 é também de n_i-cadeia, logo pela proposição anterior existe no máximo n fontes em $Q(R)$, contadas as multiplicidades. Analogamente pela proposição anterior existe no máximo m alvos em $Q(R)$. Dado que, contadas as multiplicidades, o número de fontes deve ser igual ao número de alvos, número tal que é igual ao número de setas, existe no máximo $\min\{m, n\}$ sentas em $Q(R)$. □

Esse resultado não é exclusivo dos anéis de n-cadeia semiperfeitos. Por exemplo, o anel local (portanto semiperfeito) $R = k[x, y]_{\langle x,y\rangle}$, não é de n-cadeia nem a direita nem à esquerda, porém R/J^2 é de 2-cadeia, tanto à direita como à esquerda, e $Q(R) = Q(R/J^2)$.

A Proposição 2.50 generaliza [9, Theorem 12.1.2], o qual apresentamos como um corolário a seguir.

Corolário 2.52. *O quiver de um anel serial R é uma união disjunta de cadeia e ciclos.*

Demonstração. Dado que os R-módulos e_iJ/e_iJ^2 e Je_j/J^2e_j são todos de cadeia, cada vértice de $Q(R)$ é no máximo uma fonte e um alvo de setas, estas regras nos dão que as únicas configurações possíveis para $Q(R)$ são as uniões disjuntas de cadeias e ciclos. □

3 MÓDULOS FINITAMENTE APRESENTADOS

Neta seção exploraremos alguns resultados a respeito dos módulos finitamente apresentados sobre anéis semiperfeitos na perspectiva dos conceitos de n-comparabilidade e n-cadeia.

3.1 MÓDULOS FINITAMENTE APRESENTADOS

Os resultados apresentados nesta seção se encontram na literatura. Suas referências serão apontadas ao final dos seus enunciados, exceto quando a demonstração for necessária para o que segue.

Definição 3.1. *Dizemos que um R-módulo M é um* **módulo finitamente apresentado** *se existe uma sequência exata $0 \to K \to F \to M \to 0$ onde F é um módulo livre finitamente gerado e K é um módulo finitamente gerado.*

Uma forma equivalente de dizer que M é finitamente apresentado é dizer que existem inteiros não negativos m e n e uma sequência exata $R^n \to R^m \to M \to 0$.

Também é equivalente dizer que M é finitamente apresentado se existem módulos projetivos finitamente gerados P e Q e uma sequência exata $Q \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \to 0$. Em particular, qualquer homomorfismo $f : Q \to P$ de módulos projetivos finitamente gerados determina o módulo finitamente apresentado $M \cong P/\operatorname{im} f$. Embora M seja unicamente determinado pelo homomorfismo f, podem existir outros homomorfismos distintos $f' : Q' \to P'$ tais que $P'/\operatorname{im} f' \cong P/\operatorname{im} f$.

Suponhamos que R é um anel semiperfeito, $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de R_R em submódulos locais e $P = c_1R \oplus ... \oplus c_mR$ e $Q = d_1R \oplus ... \oplus d_nR$ são módulos projetivos finitamente gerados tais que $c_j, d_j \in \{e_1, ..., e_r\}$. Então pela Proposição 1.4 temos $\operatorname{Hom}(Q, P) = \bigoplus_{i,j} \operatorname{Hom}(d_jR, c_iR) \cong \bigoplus_{i,j} c_iRd_j$, como isomorfismos de grupos. Isso significa que cada homomorfismos $f : Q \to P$ pode ser representado por uma matriz de elementos $[f] = [f_{ij}]$ onde $f_{ij} \in c_iRd_j$. Além disso, se representarmos os elementos $x \in P$ como uma matriz coluna $[x] = [x_1, ..., x_m]^T$ onde $x_i \in c_iR$, e cada elemento $y \in Q$ como $[y] = [y_1, ..., y_n]^T$ com $y_j \in d_jR$, então valerá a relação $[f(x)] = [f_{ij}][x]$, onde esta multiplicação de matrizes é definida a partir da multiplicação do anel R.

Se R é um anel semiperfeito e M um R-módulo finitamente apresentado, então existe uma forma natural, e única a menos de isomorfismos, de obter os homomorfismos f, g. As duas próximas proposições abaixo, apresentadas em [9], nos garantirão as propriedades de tal unicidade que estamos comentando. Aqui, a menos de isomorfismo, o Lema 1.21 (Lema de Bass) nos permite denotar o epimorfismos f por $(g, 0) : P \oplus P' \to M$.

Proposição 3.2. *Sejam R um anel semiperfeito, M um R-módulo finitamente apresentado, $g : P \to M$ a cobertura projetiva de M e $f : Q \to \ker g \subseteq P$ a cobertura projetiva de $\ker g$. Então dada uma sequência exata $Q' \xrightarrow{f'} P' \xrightarrow{g'} M \to 0$ onde Q' e P' são módulos projetivos finitamente gerados, existem módulos projetivos finitamente gerados Q'' e P'' e isomorfismos $\varphi : Q \oplus P'' \oplus Q'' \to Q'$ e $\psi : P \oplus P'' \to P'$ tais que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
Q \oplus P'' \oplus Q'' & \xrightarrow{(f,1,0)} & P \oplus P'' & \xrightarrow{(g,0)} & M & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \| & & \\
Q' & \xrightarrow{f'} & P' & \xrightarrow{g'} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

é comutativo.

Demonstração. Uma vez que M é finitamente apresentado e P é finitamente gerado, temos que $\ker g$ é um R-módulo finitamente gerado. Sento R semiperfeito, temos que a cobertura projetiva $f : Q \to \ker g$ existe.

Dado que $g : P \to M$ é a cobertura projetiva de M é $g' : P' \to M$ é um epimorfismo, temos pelo Lema 1.21 que existe um módulo projetivo finitamente gerado P'' e um isomorfismos $\psi : P \oplus P'' \to P'$ tal que $(g, 0) = g' \circ \psi$. Em particular, o quadrado direito do diagrama no enunciado é comutativo.

Note ainda que $\psi(P'') \subseteq \ker g'$ e $\psi(P) \cap \ker g'$ é um submódulo pequeno de $\psi(P)$. Dado que $\psi(P'')$ é subconjunto de $\ker g'$, podemos escrever $\ker g' = \psi(\ker g) \oplus \psi(P'')$. Como ψ é um isomorfismos e $f : Q \to \ker g$ é a cobertura projetiva de $\ker g$, temos que $\psi \circ (f, 1) : Q \oplus P'' \to \ker g'$ é uma cobertura projetiva de $\ker g'$.

Como $f' : Q' \to \ker g'$ é um epimorfismos, temos novamente pelo Lema 1.21 que existe um módulo projetivo finitamente gerado Q'' e um isomorfismo $\varphi : Q \oplus P'' \oplus Q'' \to Q'$ tal que $\psi \circ ((f, 1), 0) = f' \circ \varphi$. Em particular, o quadrado esquerdo do diagrama no enunciado é comutativo. Consequentemente o diagrama é comutativo. $\square$

Essa proposição nos dá uma ideia de minimalidade para as sequências exatas que definem os módulos finitamente apresentados. A próxima proposição, também provada em [11, Lemma 13.1.1], nos dá uma ideia de unicidade.

Proposição 3.3. *Sejam M um módulo finitamente apresentado e $Q \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \to 0$ uma sequência exata tal que $g : P \to M$ é uma cobertura projetiva de M e $f : Q \to \ker g$ é uma* *cobertura projetiva de* $\ker g$. *Se* $Q' \xrightarrow{f'} P' \xrightarrow{g'} M \to 0$ *é uma outra sequência exata tal que* $g' : P' \to M$ *é uma cobertura projetiva de* M *e* $f' : Q \to \ker g'$ *é uma cobertura projetiva de* $\ker g'$, *então existe isomorfismos* $\psi : P \to P'$ *e* $\varphi : Q \to Q'$ *tais que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ Q' \arrow[r, "f'"] & P' \arrow[r, "g'"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração. Dado que $g : P \to M$ e $g' : P' \to M$ são ambas coberturas projetivas de M, segue do Corolário 1.22 que existe um isomorfismos $\psi : P \to P'$ tal que $g = g' \circ \psi$ e $g' = g \circ \psi^{-1}$.

O isomorfismo ψ implica ainda que $\psi(\ker g) = \ker g'$. Como $f : Q \to \ker g$ é uma cobertura projetiva, $\psi \circ f : Q \to \ker g'$ também é uma cobertura projetiva. Novamente pelo Corolário 1.22 existe um isomorfismos $\varphi : Q \to Q'$ tal que $\psi \circ f = f' \circ \varphi$.

Por fim, as relações $g = g' \circ \psi$ e $\psi \circ f = f' \circ \varphi$ mostram que o diagrama é comutativo. $\square$

Dada a importância da proposição acima definiremos o termo a seguir

Definição 3.4. *Sejam* R *um anel semiperfeito e* M *um* R*-módulo finitamente apresentado. Dizemos que uma sequência exata* $Q \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \to 0$ *é uma* **apresentação minimal** *para* M *se* $g : P \to M$ *é uma cobertura projetiva de* M *e* $f : Q \to \ker g$ *é uma cobertura projetiva de* $\ker g$.

A apresentação minimal de um módulo finitamente apresentado e decomponível $M = M_1 \oplus M_2$ ainda possui uma decomposição análoga ao da cobertura projetiva apresentada na Proposição 1.24. Segue seu enunciado.

Proposição 3.5. *Sejam* R *um anel semiperfeito e* M *um* R*-módulo finitamente apresentado. Se* $M = M_1 \oplus M_2$ *é uma decomposição de* M, *então existem apresentações minimais* $Q_1 \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{g_1} M_1 \to 0$ *e* $Q_2 \xrightarrow{f_2} P_2 \xrightarrow{g_2} M_2 \to 0$ *tais que* $Q_1 \oplus Q_2 \xrightarrow{(f_1,f_2)} P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{(g_1,g_2)} M \to 0$ *é uma apresentação minimal para* M.

Demonstração. [9, Lemma 13.1.2]. $\square$

Relembremos que se R é um anel semiperfeito e M um R-módulo, então $M/M\,\mathrm{J}(R)$ é um módulo semissimples. Se ainda M é finitamente gerado, a quantidade de somandos simples de $M/M\,\mathrm{J}(R)$ é finita. A partir disso definimos.

Definição 3.6. *Sejam R um anel semiperfeito, M um R-módulo finitamente gerado e S um R-módulo simples. Definimos* $\operatorname{Gen}(M)$ *como o número de somandos simples de* $M/M\operatorname{J}(R)$. *Definimos* $\operatorname{Gen}(M;S)$ *como o número de somandos simples de* $M/M\operatorname{J}(R)$ *isomorfos à S.*

Se M é finitamente apresentado, e $g : P \to M$ é uma cobertura projetiva de M, definimos também $\operatorname{Rel}(M) := \operatorname{Gen}(\ker g)$ *e* $\operatorname{Rel}(M;S) = \operatorname{Gen}(\ker g;S)$

Dada a unicidade da decomposição de $M/M\operatorname{J}(R)$, $\operatorname{Gen}(M)$ e $\operatorname{Gen}(M;S)$ estão bem definidas. Podemos dar ainda uma outra interpretação para $\operatorname{Gen}(M)$. Sejam $g : P \to M$ uma cobertura projetiva de M e $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de R_R em submódulos locais. Sem perda de generalidade, suponha que R é um anel básico. Então os submódulos simples de R são isomorfos à $S_i = e_iR/e_i\operatorname{J}(R)$. Se $M/M\operatorname{J}(R) = \oplus_{i=1}^r S_i^{n_i}$, então $P = \oplus_{i=1}^r (e_iR)^{n_i}$. Isto é, $\operatorname{Gen}(M)$ é o número de somandos de P como decomposição de submódulos locais. Por sua vez, $\operatorname{Gen}(M;S)$ é o número desses somandos P_i's tais que $S \cong P_i/P_i\operatorname{J}(R)$.

O parágrafo anterior também justifica a boa definição de $\operatorname{Rel}(M)$. Se M é finitamente apresentado e $Q \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \to 0$ é uma apresentação minimal de M, então $\operatorname{Rel}(M)$ é o número de somandos de Q como decomposição de submódulos locais. Por sua vez, $\operatorname{Rel}(M;S)$ é o número desses somandos Q_i's tais que $S \cong Q_i/Q_i\operatorname{J}(R)$. Pela unicidade da apresentação minimal, $\operatorname{Rel}(M)$ está bem definida.

A notação aqui adotada de $\operatorname{Gen}(M)$ podem erroneamente nos levar a pensar que este é o número minimal de geradores de M. Para este outro valor já adotamos a notação $\operatorname{gen}(M)$ na Seção 1.1. Porém, sobre um anel semiperfeito, os valores referentes a $\operatorname{Gen}(M)$ e $\operatorname{gen}(M)$ estão intimamente relacionados segundo a próxima proposição.

Proposição 3.7. *Sejam R um anel semiperfeito e $R_R = P_1^{n_1} \oplus ... \oplus P_r^{n_r}$ uma decomposição de R_R em submódulos locais e seja M um R-módulo finitamente gerado. Sejam* $\operatorname{P}(M) = P_1^{m_1} \oplus ... \oplus P_r^{m_r}$ *a cobertura projetiva de M e $m = \max \dfrac{m_i}{n_i}$. Então* $\operatorname{gen}(M)$ *é o menor inteiro maior ou igual a m. Além disso, se M é finitamente apresentado, então*

$$\operatorname{Gen}(M) \geq \operatorname{gen}(m) \quad e \quad \operatorname{gen}(M) \geq \frac{\operatorname{Gen}(M)}{r \cdot \max n_i} \tag{3.1}$$

Demonstração. A primeira afirmação da proposição é provada em [11, Lemma 11.1.8].

Para a segunda afirmação, note que $\operatorname{Gen}(M) = m_1 + ... + m_r \geq \operatorname{gen}(M)$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{gen}(M) &\geq \max \frac{m_i}{n_i} \\ &\geq \frac{\max m_i}{\max n_i} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{m_1 + ... + m_r}{r \cdot \max n_i}$$
$$= \frac{\mathrm{Gen}(M)}{r \cdot \max n_i}$$

□

Dado um anel qualquer R e um R-módulo à direita M, o grupo $M^* := \mathrm{Hom}(M, R)$ possui uma estrutura natural de R-módulo à esquerda tal que, dado $f \in M^*$ e $a \in R$, $af : M \to R$ é definido pela relação $(af)(x) = af(x)$. O Módulo M^* é denominado o **módulo dual** de M. Se ainda $f : M \to N$ é um homomorfismos de R-módulos à direita, então é bem definido o homomorfismo de R-módulos à esquerda $f^* : N^* \to M^*$ tal que para todo $x \in M$ e $g \in N^*$, $f^*(g)(x) = g(f(x))$.

Seja R um anel semiperfeito. Note que se $M = eR$ para algum idempotente $e \in R$, então $(eR)^* := \mathrm{Hom}(eR, R)$ e por sua vez $\mathrm{Hom}(eR, R) \cong Re$. Se ainda $f : eR \to dR$ é um homomorfismos de R-módulos à direita, onde $e, d \in R$ são idempotentes, então $f \in \mathrm{Hom}(eR, dR) \cong dRe$. Tome f como um elemento de dRe e $f(x)$ como a multiplicação fx em R. Se $g \in (dR)^* \cong Rd$ é dado pela multiplicação gx para $x \in dR$, então $f^*(g)(x) = g(f(x)) = gfx$. Para este exemplo, olhando para matrizes de f e f^*, que possui ordem 1×1, temos que $[f] = [f^*]$. Em geral, se $f : Q \to P$ é um homomorfismo de R-módulos à direita, projetivos e finitamente gerado, então a matriz do homomorfismo dual $f^* : P^* \to Q^*$ é a transposta da matriz de f. A partir dessas observações definimos.

Definição 3.8. *Sejam R um anel semiperfeito, M um R-módulo à direita finitamente apresentado que não possui somandos projetivos e $Q \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \to 0$ uma apresentação minimal de M. Definimos o* **dual de Auslander-Bridger** *de M como o R-módulo à esquerda* $\mathrm{D}(M) := Q^*/\operatorname{im}(f^*)$

Na literatura o dual de Auslander-Bridger é definido de forma mais geral para qualquer módulo finitamente apresentado sobre qualquer anel. Porém, para anéis semiperfeitos obtemos uma unicidade ao optarmos pela apresentação minimal. Além disso, exigir que M não possua somandos projetivo garante que a dualização seja uma relação biunívoca. Sobre a dualização de Auslander-Briger temos:

Proposição 3.9. *Sejam R um anel semiperfeito, M um R-módulo à direita finitamente apresentado que não possui somandos projetivos e $Q \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \to 0$ uma apresentação minimal de M. Então $P^* \xrightarrow{f^*} Q^* \xrightarrow{\pi} \mathrm{D}(M) \to 0$ é uma apresentação minimal de $\mathrm{D}(M)$. Além disso, $\mathrm{D}(M)$ não possui somandos projetivos.*

Demonstração. [21, Lema 2.3]. □

Teorema 3.10. *Sejam R um anel semiperfeito, $\mathfrak{X}$ a categoria dos R-módulos à direita finitamente apresentados sem somandos projetivos e $\mathfrak{Y}$ a categoria dos R-módulos à esquerda finitamente apresentados sem somandos projetivos. Seja ainda $S = eR/e\,\mathrm{J}(R)$ um R-módulo simples à direita e $S' = Re/\,\mathrm{J}(R)e$ um R-módulo simples à esquerda correspondente com o mesmo idempotente e. Então, para cada $M \in \mathfrak{X}$ existe um único, a menos de isomorfismo, $\mathrm{D}(M) \in \mathfrak{Y}$ tal que*

1. *se $M \cong N$ em $\mathfrak{X}$, então $\mathrm{D}(M) \cong \mathrm{D}(N)$ em $\mathfrak{Y}$;*

2. *$\mathrm{D}(M \oplus N) \cong \mathrm{D}(M) \oplus \mathrm{D}(N)$;*

3. *$\mathrm{Gen}(M; S) = \mathrm{Rel}(\mathrm{D}(M); S')$ e $\mathrm{Rel}(M; S) = \mathrm{Gen}(\mathrm{D}(M); S')$.*

Demonstração. [21, Theorem 2.4]. □

3.2 GERADORES E RELAÇÕES

O primeiro resultado que apresentamos aqui relaciona os inteiros positivos $\mathrm{Gen}(M)$ e $\mathrm{Rel}(M)$ relativos a Definição 3.6 com a relação de n-comparabilidade.

Proposição 3.11. *Seja R um anel semiperfeito tal que para todo idempotente local e, Re é de m-cadeia. Se M é um R-módulo finitamente apresentado indecomponível com uma sequência exata minimal*

$$\bigoplus_{j=1}^{l} d_j R \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{s} c_i R \to M \to 0$$

onde c_i's e ,d_j's são idempotente locais. Então M é projetivo (e neste caso $l = 0$) ou $s \leq lm$.

Demonstração. Seja $R_R = Re_1 \oplus ... \oplus Re_r$ uma decomposição de Pierce de R em submódulos locais. Defina $P = \bigoplus_{i=1}^{s} c_i R$ e $Q = \bigoplus_{j=1}^{l} d_j R$. Suponha por absurdo que $s > lm$. Vamos mostrar, por indução em l, que existe um isomorfismo $\beta : P \to P$ tal que, a menos da ordem dos índices, a matriz $[f'_{ij}]$ da composição βf satisfaz $f'_{ij} = 0$, para todo $i > mj$. Note que se $l = 0$, então M é projetivo. Assim vale o primeiro caso da proposição e $s = 1$.

Suponha que $l = 1$, então a matriz $[f_{ij}]$ de f é uma matriz que possui uma coluna e s linhas. Dado que $f_{i1} \in e_i R e_1 \subseteq Re_1$ e Re_1 é de m-cadeia temos, a menos da ordem dos índices, que $f_{i1} \in \sum_{j=1}^{m} Rf_{j1}$. Escreva, para cada $i \geq m + 1$, $f_{i1} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_{j1}$, onde cada

$a_{ij} \in R_{ij}$. Essa identidade pode ser traduzida na seguinte multiplicação de matrizes.

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{m1} \\ f_{m+1,1} \\ \vdots \\ f_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & a_{m+1,3} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{s,1} & a_{s,2} & a_{s,3} & \dots & c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{m1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Note que a matriz quadrada da Equação (3.2) define um automorfismo sobre P. Seja β inverso desse automorfismo e A sua matriz. Então a matriz $[f'_{ij}] = A[f_{ij}]$ é tal que $f'_{ij} = 0$, para todo $i > mj$. Mas $A[f_{ij}]$ é a matriz do homomorfismo βf, como desejado.

Suponha agora que nossa hipótese vale para $l-1$. Como no caso da base de indução, existe uma matriz invertível A, de ordem $s \times s$, tal que a primeira coluna da matriz $[f'_{ij}] = A[f_{ij}]$, satisfaz $f'_{i1} = 0$ para todo $i > m$. Disso segue que a matriz de $[f'_{ij}]$ pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} F & F' \\ 0 & F'' \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

onde F é a matriz $m \times 1$ formada pelos elementos f_{11}, f_{21}, ..., f_{m1} e F' e F'' são matrizes de ordens adequadas. Em particular, a matriz F'' de ordem $(s-m) \times (l-1)$, define um homomorfismo $h : \bigoplus_{j=2}^{l} d_j R \to \bigoplus_{i=m+1}^{s} c_i R$. Dado que $s > lm$, $s - m > (l-1)m$. Segue pela hipótese de indução que existe um isomorfismo $\beta' : \bigoplus_{i=m+1}^{s} c_i R \to \bigoplus_{i=m+1}^{s} c_i R$ tal que a matriz $[h'_{ij}]$ da composição βh tem a propriedade de que $h'_{ij} = 0$ para todo $i > jm$. Seja $[b_{ij}]$ a matriz de β e defina as matrizes

$$B = \begin{bmatrix} Id_m & 0 \\ 0 & [b_{ij}] \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} F & F' \\ 0 & [h_{ij}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & F' \\ 0 & F'' \end{bmatrix}$$

Então

$$[f'_{ij}] := BA[f_{ij}] = \begin{bmatrix} Id_m & 0 \\ 0 & [b_{ij}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & F' \\ 0 & [h_{ij}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_m F & Id_m F' \\ 0 & [b_{ij}]F'' \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Note que a matriz BA define um isomorfismo $\beta : P \to P$. Além disso, $f'_{i1} = 0$ sempre que $i > m = 1m$. Agora, se $j \geq 2$ e $i > m$, então $i - m > (j-1)m$ (ou equivalentemente, $i > jm$) e, isto implica que $f'_{ij} = h_{i-m,j-1} = 0$.

Seja $Q' \xrightarrow{\beta f} P' \xrightarrow{g'} M \to 0$ a sequência exata minimal de M resultante da composição βf. Dado que $s > lm$ e que a matriz $[f'_{ij}]$ de βf é tal que $f'_{ij} = 0$ para todo $i > jm$, temos que a última linha de $[f'_{ij}]$ é nula. Isso significa que $\mathrm{im}(\beta f)$ está complemente contida nas primeiras lm componentes de $P' = \bigoplus_{i=1}^{s} c'_i R$. Segue disso que

$$\begin{aligned} M &\cong \frac{P}{\mathrm{im}(f)} \\ &\cong \frac{P'}{\mathrm{im}(\beta f)} \\ &= \frac{\bigoplus_{i=1}^{s} c'_i R}{\mathrm{im}(\beta f)} \\ &\cong \frac{\bigoplus_{i=1}^{s-1} c'_i R}{\mathrm{im}(\beta f)} \oplus c'_s R \end{aligned}$$

O que mostra que M é decomponível, uma contradição. □

Corolário 3.12. *Seja R uma anel semiperfeito tal que, qualquer que seja o idempotente local e, eR é de n-cadeia e Re é de m-cadeia. Então, qualquer R-módulo à direita finitamente apresentado, não projetivo e indecomponível M satisfaz*

$$\mathrm{Gen}(M) \leq m \cdot \mathrm{Rel}(M) \tag{3.5}$$

e

$$\mathrm{Rel}(M) \leq n \cdot \mathrm{Gen}(M) \tag{3.6}$$

Demonstração. Sejam $l = \mathrm{Rel}(M)$ e $s = \mathrm{Gen}(M)$. Sejam também $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce de R_R em submódulos locais. Seja

$$\bigoplus_{j=1}^{l} d_jR \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{s} c_iR \to M \to 0$$

onde $c_i, d_j \in \{e_1, ..., e_r\}$, uma apresentação minimal para M. Dado que M não é projetivo temos que $l \neq 0$. Pela Proposição 3.11 temos que $s \leq ml$, ou seja $\mathrm{Gen}(M) \leq m\,\mathrm{Rel}(M)$.

Como M é indecomponível e não projetivo, M não possui somandos projetivos. Disso segue que $D := \mathrm{D}(M)$, o dual de Auslander-Bridger de M, está bem definido. Assim, pelo Teorema 3.10, temos que $\mathrm{Gen}(D) = \mathrm{Rel}(M)$ e $\mathrm{Rel}(D) = \mathrm{Gen}(M)$. Sendo M indecomponível, pelo mesmo teorema, D é indecomponível. Pela primeira parte desse corolário e olhando para os R-módulos à esquerda, temos que $\mathrm{Gen}(D) \leq n\,\mathrm{Rel}(D)$, ou seja $\mathrm{Rel}(M) \leq n\,\mathrm{Gen}(M)$. □

3.3 TIPO DE REPRESENTAÇÃO LIMITADA

Definição 3.13. *Dizemos que um anel R é* **do tipo de representação limitada à direita** *se existe um inteiro positivo c tal que qualquer R-módulo à direita finitamente apresentado e indecomponível M pode ser gerado por um conjunto com não mais que c elementos, isto é,* $\mathrm{gen}(M) \leq c$. *A definição de anel do* **do tipo de representação limitada à esquerda** *se faz de forma análoga. O anel R é dito ser* **do tipo de representação limitada** *se o é à direita e à esquerda.*

O interesse com respeito aos anéis do tipo de representação limitada é sugerido em [21] para a caracterização dos anéis semiperfeitos cujos módulos finitamente apresentados e indecomponíveis são cíclicos. Em tal trabalho é provado que um anel R é serial se, e somente se, seus módulos finitamente apresentados e indecomponíveis são de cadeia. Assim sendo, os anéis seriais são anéis semiperfeitos cujos módulos finitamente apresentados e indecomponíveis são cíclicos. Porém, os anéis seriais não são os únicos com essa característica, conforme veremos mais adiante. A seguir apresentamos a relação entre os anéis semiperfeitos do tipo de representação limitada e os anéis semiperfeitos cujos módulos finitamente apresentados e indecomponíveis são cíclicos comentada em [21] na forma de proposição.

Proposição 3.14. *Seja R um anel semiperfeito. Se R é um anel do tipo de representação limitada à direita, então existe um inteiro n tal que os módulos finitamente apresentados e indecomponíveis sobre $\mathbb{M}_n(R)$ possuem coberturas projetivas cíclicas. Em particular, os módulos finitamente apresentados e indecomponíveis sobre $\mathbb{M}_n(R)$ são cíclicos.*

Demonstração. Suponha que para todo R-módulo finitamente apresentado M, $\mathrm{gen}(M) \leq n$. Defina $S := \mathbb{M}_n(R)$. Vamos mostrar que todo S-módulo finitamente apresentado e indecomponível possui cobertura projetiva cíclica.

Seja N um S-módulo finitamente apresentado e indecomponível. Seja o par de funtores $F : \mathfrak{Mod}_S \to \mathfrak{Mod}_R$ e $G : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_S$ uma equivalência de Morita entre as categorias dos módulos à direita dos anéis R e S. Dado que equivalências de Morita preservam módulos indecomponíveis e sequências exatas, temos que $F(N)$ é um R-módulo finitamente apresentado e indecomponível. Da hipótese sobre R temos que $\mathrm{gen}(F(N)) \leq n$, assim existe uma sequência exata $R^n_R \to F(N) \to 0$.

Novamente, pelas propriedades preservadas por equivalências de Morita, temos que $G(R^n_R) \to G(F(N)) \to 0$ é uma sequência exata de S-módulos. Pela Proposição 1.34, $G(R^n_R)_S \cong S_S$ e pela definição de equivalência de categorias $G(F(N))_S \cong N_S$. Assim existe uma sequência exata $S_S \xrightarrow{g} N \to 0$.

Uma vez que S_S é semiperfeito, seja $S_S = P_1 \oplus ... \oplus P_s$ uma decomposição de S_S em submódulo locais, e seja $P = \bigoplus_{g(P_i)\neq 0} P_i$. Então, pela Proposição 1.20, $g|_P : P \to N$ é uma cobertura projetiva de N. Como P é um somando de S_S, P é cíclico.

Note que a sequência exata $S_S \xrightarrow{g} N \to 0$ mostra que N é cíclico. □

Em [18, Proposition 1.25] é provado que, dado um anel semiperfeito R, se R não é serial à esquerda, então R possui um módulo à direita finitamente apresentado e indecomponível cuja cobertura projetiva é a soma de pelo menos dois submódulos não nulos. Na próxima proposição apresentamos uma generalização para este resultado, o qual tem uma implicação direta sobre o tema dos anéis semiperfeitos do tipo de representação limitada.

Teorema 3.15. *Sejam R um anel semiperfeito e n um inteiro positivo. Se R possui um idempotente local e tal que Re não é um R-módulo à esquerda de n-cadeia, então R possui um módulo à direita finitamente apresentado e indecomponível cuja cobertura projetiva se decompõe na soma direta de $n+1$ submódulos projetivos não nulos.*

Demonstração. Seja $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce de R_R em submódulos locais tal que $e \in \{e_1, ..., e_r\}$, digamos que $e = e_m$ para algum $m \leq r$. Dado que Re_m não é de n-cadeia, então, pela Proposição 2.27, existe um subconjunto n-incomparável $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} R_{jm}$. Sejam, para $i = 0, ..., n$, j_i o índice tal que $x_i \in R_{j_i m}$. Defina $Q = e_mR$ e $P = e_{j_0}R \oplus ... \oplus e_{j_n}R$. Defina o homomorfismos $f : Q \to P$ por $f(y) = (x_0y, ..., x_ny)$.

Dado que Re_m é um módulo local, temos que $x_0, ..., x_n \in \mathrm{J}(Re_m) \subseteq \mathrm{J}(R)$, o que implica que $f(Re_m) \subseteq x_0R \oplus ... \oplus x_nR \subseteq \mathrm{J}(P)$. Assim, pela Proposição 1.20, a cobertura projetiva de $M = P/\operatorname{im} f$ é P. Dado que $x_0, ..., x_n$ são todos não nulos, $f(y) \neq 0$ para todo $y \in Q \setminus \mathrm{J}(Q)$. Assim temos que $\ker(f) \subseteq \mathrm{J}(Q)$. Novamente, pela Proposição 1.20, temos que Q é a cobertura projetiva de $\operatorname{im} f \cong Q/\ker f$. Disso temos que M é finitamente apresentado e $Q \xrightarrow{f} P \to M \to 0$ é uma apresentação minimal de M.

Vamos mostrar que M é indecomponível. Suponha que não, então $M = M_1 \oplus M_2$ com M_1 e M_2 não nulos. Disso temos que $P = \mathrm{P}(M) = \mathrm{P}(M_1) \oplus \mathrm{P}(M_2)$. Pelo Teorema 1.2 (Teorema de Krull-Schmidt-Azumaya) temos que, a menos da ordem dos índices, existe $0 \leq k < n$ tal que $\mathrm{P}(M_1) = e_{j_0}R \oplus ... \oplus e_{j_k}R$ e $\mathrm{P}(M_2) = e_{j_{k+1}}R \oplus ... \oplus e_{j_n}R$. Assim temos um isomorfismo

$$M \cong \frac{e_{j_0}R \oplus ... \oplus e_{j_k}R}{A} \oplus \frac{e_{j_{k+1}}R \oplus ... \oplus e_{j_n}R}{B}$$

onde $A \subseteq e_{j_0}R \oplus ... \oplus e_{j_k}R$ e $B \subseteq e_{j_{k+1}}R \oplus ... \oplus e_{j_n}R$ são submódulos.

Pela Proposição 1.24 temos que $Q = \mathrm{P}(A) \oplus \mathrm{P}(B)$. Dado que Q é indecomponível, temos que $A = 0$ ou $B = 0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $B = 0$. Até este ponto, podemos concluir que existem isomorfismos $\alpha : Q \to Q$ e $\beta : P \to P$ tais que $\beta f \alpha(Q) \subseteq e_{j_0}R \oplus ... \oplus e_{j_k}R$.

Denote o isomorfismo β por uma matriz $[\beta_{ij}]$ de ordem $(n+1) \times (n+1)$, onde β_{ij} é um homomorfismo de $e_{j_i}R$ para $e_{j_j}R$ (por conveniência estamos indexando os termos β_{ij} com $i, j \in \{0, ..., n\}$). Dado que $\mathrm{Hom}(e_{j_i}R, e_{j_j}R) \cong e_{j_j}Re_{j_i}$, cada β_{ij} pode ser visto como um elemento de $e_{j_j}Re_{j_i}$ agindo à esquerda sobre $e_{j_i}R$ pela multiplicação de R.

Dado que α é um isomorfismo, existe $x \in Q$ tal que $e_m = \alpha(x)$. Assim $f(\alpha(x)) = (x_0, ..., x_n)$. Pela notação matricial de β temos que

$$\begin{aligned}\beta(f(\alpha(x))) &= [\beta_{ij}][x_0, ..., x_n]^T \\ &= [\beta_{00}x_0 + ... + \beta_{0n}x_n, ..., \beta_{n0}x_0 + ... + \beta_{nn}x_n]^T\end{aligned}$$

Dado que $\beta f\alpha(Q) \subseteq Re_{j_0} \oplus ... \oplus Re_{j_k}$ devemos ter que $\beta_{n0}x_0 + ... + \beta_{nn}x_n = 0$.

Dado que β é um isomorfismo, temos que $e_{j_n} \in \beta_{n0}e_{j_0}R + ... + \beta_{nn}e_{j_n}R$. Disso temos que existe $l \in \{0, ..., n\}$ tal que $\beta_{nl} \notin J(R)$. Logo, existe $u \in R_{j_l j_n}$ tal que $u\beta_{nl} = e_{j_l}$. Essa identidade junto com $\beta_{n0}x_0 + ... + \beta_{nn}x_n = 0$ nos dá que

$$x_l = -\sum_{i \neq l} u\beta_{ni}x_i$$

Assim, conseguimos ver que o conjunto $\{x_0, ..., x_n\}$ é um conjunto n-comparável em ${}_RRe_m$, uma contradição. Concluímos que M é um módulo finitamente apresentado indecomponível e que $\mathrm{P}(M) = P$ é uma soma direta de $n+1$ submódulos não nulos. □

A seguir apresentamos a implicação da proposição anterior com relação aos anéis semiperfeitos do tipo de representação limitada.

Corolário 3.16. *Seja R um anel semiperfeito. Se R é do tipo de representação limitada à direita, então R é de n-cadeia à esquerda para algum n.*

Demonstração. Suponha que R não é de n-cadeia, qualquer que seja o inteiro positivo n, então, para qualquer decomposição de Pierce em submódulos locais $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$, existe um idempotente $e \in \{e_1, ..., e_r\}$ tal que Re não é um R-módulo de n-cadeia, qualquer que seja n. Logo, para qualquer inteiro positivo s, existe um conjunto s-incomparável $x_1, ..., x_s \in Re$. Pelo Teorema 3.15, R possui um módulo finitamente apresentado e indecomponível M tal que $\mathrm{P}(M)$ se decompõe em s submódulos. Pela definição de Gen temos que $\mathrm{Gen}(M) \geq s$, e pela Proposição 3.7 temos que $\mathrm{gen}(M) \geq s.c$ para alguma constante c. Como s é arbitrário, temos que R não é do tipo de representação limitada. □

3.4 UMA QUESTÃO ABERTA

Embora o Corolário 3.16 nos mostre que os anéis semiperfeitos do tipo de representação limita à direita são de n-cadeia à esquerda para algum n, é possível que estes anéis pertençam a uma classe menor de anéis semiperfeitos. Da literatura temos que o Teorema de Gabriel, [1, Theorem 5.10], classifica as $\Bbbk$-álgebras de quiver $\Bbbk Q$, onde Q é um quiver sem ciclos, como do tipo de representação finita se, e somente se, o grafo de Q, sem a orientação das setas, é uma união disjunta de diagramas de Dynkin da Figura 3.1. Vale observar que ser o tipo de representação finita e ser o tipo de representação limitada são propriedades equivalentes no contexto dos anéis artinianos. Esta afirmação é feita em [6] a qual apresentamos uma demonstração na Proposição 3.17 a seguir.

Proposição 3.17. *Seja R um anel artiniano à direita. Então, R é do tipo de representação limitada à direita se, e somente se, R é do tipo de representação finita à direita.*

Demonstração. Suponha que R é um anel do tipo de representação limitada e seja $\{M_i : i \in I\}$ uma família completa de R-módulos finitamente apresentados e indecomponíveis dois a dois não isomorfos. Para cada i, seja $Q_i \to P_i \to M_i \to 0$ uma apresentação minimal de M_i. Dado que R é do tipo de representação limitada, temos que existe um número inteiro positivo s tal que para todo i, $\mathrm{Gen}(M_i) \leq s$. Em particular $\mathrm{Gen}(P_i) \leq s$.

Como R é um anel semiperfeito, existe uma decomposição de Pierce $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$, onde cada e_iR é um submódulo local. Segue que para cada i, $P_i \cong c_{ij}R \oplus ... \oplus c_{is_i}R$ onde $c_{ij} \in \{e_1, ..., e_r\}$. Dado que $Gen(P_i) \leq s$, temos que $s_i \leq s$. Assim, observando as decomposições de cada P_i em submódulos projetivos locais, temos que existe um módulo projetivo finitamente gerado P tal que $P_i \subseteq P$. Em particular, para cara i, existe um submódulo $K_i \subseteq P$ tal que $M_i \cong P/K_i$.

Dado que R é artiniano à direita, também o é noetheriano à direita, isso implica que qualquer R-módulo à direita projetivo e finitamente gerado é artiniano e noetheriano, e portanto possui uma série de composição. Seja l o comprimento de uma série de composição de P. Temos que cada módulo $M_i \cong P/K_i$ possui uma série de composição cujo comprimento é menor ou igual a l.

Seja

$$0 = M_{i0} \subsetneq M_{i1} \subsetneq ... \subsetneq M_{il_i} = M_i \tag{3.7}$$

uma série de composição de M_i. Então os quocientes M_{ij}/M_{ij-1} são R-módulos simples. Dado que R possui um número finito de R-módulos simples e $l_i \leq l$, existe um número finito de série de composições da forma (3.7), o que implica que a família $\{M_i : i \in I\}$ é finita. Sendo $\{M_i : i \in I\}$ uma família finita, temos que R é do tipo de representação finita.

Por outro lado, se R é do tipo de representação finita, então qualquer família de R-módulo finitamente apresentados e indecomponível $\{M_i : i \in I\}$ é finita. Deste modo, é bem definido $c = \max_{i\in I} \operatorname{gen}(M_i)$, o que implica que R é do tipo de representação limitada. $\square$

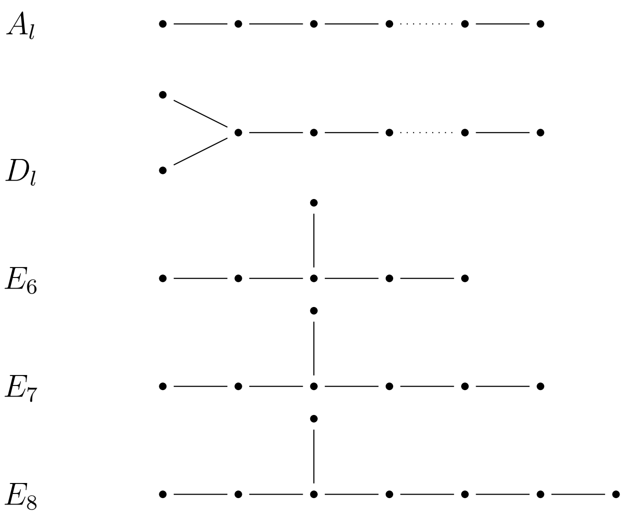


Figura 3.1: Diagramas de Dynkin

As $\Bbbk$-álgebras de quivers categorizadas pelo Teorema de Gabriel, analisadas a luz do Teorema 2.42 e do Lema 2.48, se monstram serem semidistributivas. Outro contexto onde a semidistributividade aparece neste tema é em [7] e [8] onde a autora caracteriza os anéis semiperfeitos, semidistributivos e hereditários à direita que são do tipo de representação limitada. Diante destas referências podemos levantar a seguinte questão: *seriam todos os anéis semiperfeitos do tipo de representação limitada, semidistributivos?* Ou, numa reformulação da questão: dado um anel semiperfeito R, R não ser semidistributivo implica não ser do tipo de representação limita?

Novamente o Teorema 2.42 nos serve aqui. Seja $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ uma decomposição de Pierce de um anel semiperfeito R. Se R não é semidistributivo à direita, então existe uma componente R_{lk} que não é de cadeia como R_l-módulo à esquerda. Ou ainda, existe um conjunto incomparável $\{a, b\} \in {}_{R_l}R_{lk}$. Uma possível abordagem na tentativa de mostrar que R não é do tipo de representação limitada é construir um módulo finitamente apresentado M com $\operatorname{Gen}(M)$ arbitrariamente grande. Olhando para a demonstração do Teorema 3.15, e para o conjunto $\{a, b\} \in {}_{R_l}R_{lk}$, uma ideia é construir, para cada inteiro s, um módulo $M_s = e_l R^s / \operatorname{im} f_s$ onde f_s é o homomorfismo dado pela regra

$$\begin{array}{rlcl} f_s : & e_k R^{s-1} & \to & e_l R^s \\ & (x_1, x_2, ..., x_{s-1}) & \mapsto & (ax_1, bx_1 + ax_2, ..., bx_{s-1}) \end{array} \tag{3.8}$$

Conhecemos alguns casos em que o módulo M_s será indecomponível, por exemplo, se

$s = 2$, então a indecomponibilidade de M_s é um corolário da prova do Teorema 3.15. Apresentaremos a seguir dois exemplos quando $s = 3$, para o caso em que M_s é indecomponível e para o caso em que M_s é decomponível.

Exemplo 3.18. *Seja* $R = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_4 \\ 0 & \mathbb{F}_2 \end{bmatrix}$ *onde* $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ *é o corpo de característica 2 com dois elementos e* $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, u, u+1\}$ *é uma extensão de grau 2 de* $\mathbb{F}_2$*. Note que* $\{1, u\}$ *é um subconjunto incomparável de* R_{12} *com* R_1*-módulo, assim, defina* $a = 1$ *e* $b = u$*. Então o módulo* $M_3 = e_l R^s / \operatorname{im} f_3$*, no qual* f_3 *é o homomorfismo da Equação 3.8, é indecomponível.*

Demonstração. Note que, se $M_3 = N \oplus N'$ com N e N' não nulos, então, sem perda de generalidade, existem geradores $x_1, x_2, x_3 \in e_1R^3$ tais que $\overline{x_1}R + \overline{x_2}R = N$ e $\overline{x_3}R = N'$. Como $N \cap N' = 0$, então para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ tais que $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \in \operatorname{im} f_3$, temos que $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \in \operatorname{im} f_3$ e $x_3\alpha_3 \in \operatorname{im} f_3$. Vamos mostrar que para qualquer conjunto de geradores $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\}$ conseguimos obter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ tais que $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \in \operatorname{im} f_3$, $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \notin \operatorname{im} f_3$ ou $x_3\alpha_3 \notin \operatorname{im} f_3$.

Como e_1R representa a primeira linha da decomposição de Pierce de R, podemos representar cada elemento $x_p \in e_1R^3$ como uma matriz $[x_{ij}^{(p)}]_{3\times 2}$ onde $x_{i1}^{(p)} \in R_1 = \mathbb{F}_2$ e $x_{i2} \in R_1 = \mathbb{F}_4$. Se $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\}$ é um conjunto de geradores de M_3 com $x_1, x_2, x_3 \in e_1R^3$, então, para cada índice p, pelo menos um dos elementos $x_{i1}^{(p)}$ é igual a 1. Existe 7 possibilidades para algum x_p conforme apresentamos abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\ \begin{bmatrix} 1 & y_{12}^{(1)} \\ 0 & y_{32}^{(1)} \\ 0 & y_{32}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & y_{12}^{(1)} \\ 1 & y_{32}^{(1)} \\ 0 & y_{32}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & y_{12}^{(1)} \\ 0 & y_{32}^{(1)} \\ 1 & y_{32}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & y_{12}^{(1)} \\ 1 & y_{32}^{(1)} \\ 0 & y_{32}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & y_{12}^{(1)} \\ 0 & y_{32}^{(1)} \\ 1 & y_{32}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & y_{12}^{(1)} \\ 1 & y_{32}^{(1)} \\ 1 & y_{32}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & y_{12}^{(1)} \\ 1 & y_{32}^{(1)} \\ 1 & y_{32}^{(1)} \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.9}$$

onde $y_{ij}^{(p)} \in R_{12} = \mathbb{F}_4$. Dado um elemento $\alpha_p \in R$, podemos representá-lo como uma matriz $\alpha_p = [\alpha_{ij}^{(p)}]_{2\times 2}$ onde $\alpha_{ij}^{(p)} \in R_{ij}$. Note que se $\alpha_{ij}^{(p)} = 0$ para todo $(i, j) \neq (1, 2)$, então o produto $y_p\alpha_p$ independe de quem são os elementos da forma $y_{i2}^{(p)}$ dos elementos em (3.9).

Dado que $\operatorname{im} f_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & u+1 \\ 0 & u \end{bmatrix} \right\}$, podemos verificar que não existe $\alpha_p \in R$ não nulo, com $\alpha_{ij}^{(p)} = 0$ para todo $(i, j) \neq (1, 2)$, tal que $y_p\alpha_p \in \operatorname{im} f$ para qualquer $p = 1, ..., 7$. Se mostrarmos que, para qualquer terna (p_1, p_2, p_3), $p_1, p_2, p_3 \in \{1, .., 7\}$ com $p_1 < p_2 < p_3$ tais que $\{y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_3}\}$ gera e_iR^3, existem elementos não mulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ com $\alpha_{ij}^{(p)} = 0$ para todo $(i, j) \neq (1, 2)$ onde $y_{p_1}\alpha_1 + y_{p_2}\alpha_2 + y_{p_3}\alpha_3 \in \operatorname{im} f$, então isso implicará que M_3 é indecomponível. Podemos ver que estas soluções existem pela Tabela 3.1.

$(y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_3})$	$(\alpha_{12}^{(1)}, \alpha_{12}^{(2)}, \alpha_{12}^{(3)})$	$(y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_3})$	$(\alpha_{12}^{(1)}, \alpha_{12}^{(2)}, \alpha_{12}^{(3)})$
(y_1, y_2, y_3)	$(1, u+1, u)$	(y_1, y_2, y_5)	$(u+1, u+1, u)$
(y_1, y_2, y_6)	$(1, 1, u)$	(y_1, y_2, y_7)	$(u+1, 1, u)$
(y_1, y_3, y_4)	$(u, u+1, u)$	(y_1, y_3, y_6)	$(1, 1, u+1)$
(y_1, y_3, y_7)	$(u, 1, u+1)$	(y_1, y_4, y_5)	$(u+1, u+1, u)$
(y_1, y_4, y_6)	$(u+1, u+1, u)$	(y_1, y_4, y_7)	$(u, 1, u)$
(y_1, y_5, y_6)	$(1, u+1, 1)$	(y_1, y_5, y_7)	$(u, u+1, 1)$
(y_2, y_3, y_4)	$(u, u, 1)$	(y_2, y_3, y_5)	$(u+1, u+1, 1)$
(y_2, y_3, y_7)	$(u, u+1, 1)$	(y_2, y_4, y_5)	$(1, u, u)$
(y_2, y_4, y_6)	NULL	(y_2, y_4, y_7)	$(u, u+1, u)$
(y_2, y_5, y_6)	$(u, 1, 1)$	(y_2, y_6, y_7)	$(1, u+1, 1)$
(y_3, y_4, y_5)	$(u+1, u, u+1)$	(y_3, y_4, y_6)	$(u+1, 1, u+1)$
(y_3, y_5, y_6)	$(u+1, 1, u)$	(y_3, y_5, y_7)	$(u+1, u, u+1)$
(y_3, y_6, y_7)	$(1, u, 1)$	(y_4, y_5, y_6)	NULL
(y_4, y_5, y_7)	$(u, u+1, 1)$	(y_4, y_6, y_7)	$(u, u+1, u+1)$
(y_5, y_6, y_7)	$(u+1, u, u+1)$		

Tabela 3.1: Soluções para $y_{p_1}\alpha_1 + y_{p_2}\alpha_2 + y_{p_3}\alpha_3 \in \operatorname{im} f$

Note que na Tabela 3.1 não aparecem as ternas (y_1, y_2, y_4), (y_1, y_3, y_5), (y_1, y_6, y_7), (y_2, y_3, y_6), (y_2, y_5, y_7) e (y_3, y_4, y_7), pois os conjuntos formados pelos elementos de cada uma delas não geram e_1R^3.

Além disso, para as ternas (y_2, y_4, y_6) e (y_4, y_5, y_6) não existe α_1, α_2 e α_3 nas condições desejadas e todos não nulos tais que $y_{p_1}\alpha_1 + y_{p_2}\alpha_2 + y_{p_3}\alpha_3 \in \operatorname{im} f$, porém há uma peculiaridade para estas ternas. No caso de (y_2, y_4, y_6) temos $y_2R_{lk} \cap y_4R_{lk} \neq 0$ e $y_4R_{lk} \cap y_6R_{lk} \neq 0$

$$y_2 \begin{bmatrix} 0 & u+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{im} f_3 \quad \text{e} \quad y_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y_6 \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{im} f_3 \tag{3.10}$$

de modo que $\{\overline{y_2}, \overline{y_4}, \overline{y_6}\}$ não representa um conjunto de geradores para uma decomposição de M_3. O mesmo ocorre para a terna (y_4, y_5, y_6), pois nesse caso temos

$$y_4 \begin{bmatrix} 0 & u+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y_5 \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{im} f_3 \quad \text{e} \quad y_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y_6 \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{im} f_3 \tag{3.11}$$

Com tudo isso, temos que o módulo M_3 é indecomponível. $\square$

Exemplo 3.19. *Seja* $R = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_4 \\ 0 & \mathbb{F}_4 \end{bmatrix}$, *onde* $\mathbb{F}_2$ *e* $\mathbb{F}_4$ *são os corpos de característica 2 do exemplo anterior e sejam* $a = 1$ *e* $b = u$ *em* $R_{12} = \mathbb{F}_4$ *o mesmo conjunto incomparável. Então* $M_3 = e_lR^s/\operatorname{im} f_3$, *no qual* f_3 *é o homomorfismo da Equação 3.8, é decomponível.*

Demonstração. Vamos usar a mesma notação adotada no exemplo anterior. Nossa exceção será apenas de que $R_{22} = \mathbb{F}_4$ ao invés de $\mathbb{F}_2$. O submódulo de e_1R^3 gerado pelo elemento $x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é formado por todos os elementos da forma $y = \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \\ c & d \end{bmatrix}$ onde $c \in \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ e $d \in \mathbb{F}_4 = \{0, 1, u, u+1\}$. É fácil verificar que, sempre que $c = 0$, então $y \in \operatorname{im} f$, isso implica que o submódulo $\overline{x_1}R$ de M possui apenas os elementos $\overline{x_1}$ e $\overline{0}$.

Por sua vez, os elementos $x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ são tais que x_1, x_2 e x_3 geram e_1R^3 e $\overline{x_1}R \cap (\overline{x_2}R + \overline{x_3}R) = 0$, de modo que os submódulos $N = \overline{x_1}R$ e $N' = \overline{x_2}R + \overline{x_3}R$ nos dão uma decomposição $M = N \oplus N'$ em submódulos N e N' não nulos. □

Embora o Exemplo 3.19 mostre que nem sempre o módulo M_s será indecomponível, isso não responde a questão sobre se há algum anel semiperfeito do tipo de representação limitada que não seja semidistributivo. Porém, esta questão ainda continua aberta.

Na busca de tentar responder a questão aberta desta seção, conseguimos obter alguns outros resultados os quais apresentamos a seguir.

Proposição 3.20. *Sejam R um anel semiperfeito, e um idempotente local, s um inteiro positivo e $M, N \subseteq J(eR^s)$ submódulos tais que $eR^s/M \cong eR^s/N$. Então $M \cong N$.*

Demonstração. Seja $f : eR^s/M \to eR^s/N$ um isomorfismo. Dado que $M \subseteq J(eR^s)$, temos que a projeção canônica $\pi : eR^s \to eR^s/M$ é uma cobertura projetiva de eR^s/M. De igual modo, a projeção canônica $\pi : eR^s \to eR^s/N$ é uma cobertura projetiva de eR^s/N. Como $f : eR^s/M \to eR^s/N$ é um isomorfismo, temos, pela unicidade da cobertura projetiva, que existe um isomorfismo $\widetilde{f} : eR^s \to eR^s$ tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} eR^s & \xrightarrow{\widetilde{f}} & eR^s \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ eR^s/M & \xrightarrow{f} & eR^s/N \end{array}$$

Assim, temos que $\pi' \circ \widetilde{f}(M) = f \circ \pi(M) = f(0) = 0$, de modo que $\widetilde{f}(M) \subseteq \ker \pi' = N$. De forma análoga, temos que $\widetilde{f}^{-1}(N) \subseteq M$. Assim, a restrição $\widetilde{f}|_M : M \to N$ é um isomorfismo de R-módulos. □

Proposição 3.21. *Sejam R um anel semiperfeito e noetheriano, M um R-módulo à direita noetheriano e $J = J(R)$ o radical de Jacobson de R. Se M não é de cadeia, então existe um ordinal α e elementos $a, b \in M$ tais que $aR \nsubseteq bR$, $bR \nsubseteq aR$ e $a, b \in MJ^\alpha \setminus MJ^{\alpha+1}$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que M não é de cadeia, mas que para qualquer ordinal α, todo subconjunto $\{a,b\} \subseteq MJ^\alpha \setminus MJ^{\alpha+1}$ é comparável.

Fixe um ordinal β. Como M é noetheriano, MJ^β é finitamente gerado. Dado que R é semiperfeito, existe uma cobertura projetiva $f : P \to MJ^\beta$. Seja $P = \bigoplus_{i=1}^s c_iR$ a decomposição de P em submódulos locais, isto é, onde cada c_i é um elemento de um sistema completo de idempotentes locais de R.

Afirmamos que $s = 1$. De fato, suponha que $s \geq 2$, então dado que $\ker f \in J(P) = \bigoplus_{i=1}^s c_iJ$, temos que $f(c_1, c_2x, 0, 0, ...) \neq 0$ e $f(c_1x, c_2, 0, 0, ...) \neq 0$ para todo $x \in R$, fazendo $a = f(c_1, 0, 0...)$ e $b = f(0, c_2, 0, ...)$, estas duas inequações nos diz que $a \notin bR$ e $b \notin aR$. Mas como $(c_1, 0, 0...), (0, c_2, 0, ...) \in P \setminus J(P) = PJ$, temos que $a, b \in MJ^\beta \setminus MJ^{\beta+1}$, o que contradiz as hipóteses sobre M.

Como $s = 1$, temos que $P = c_1R$ é um módulo local, assim não existe submódulo N tal que $P \supsetneq N \supsetneq PJ$, consequentemente, não existe submódulo N' tal que $MJ^\beta = f(P) \supsetneq N' \supsetneq f(P)J = MJ^{\beta+1}$. Como β é um ordinal arbitrário, segue que a cadeia

$$M \supsetneq MJ^1 \supsetneq MJ^2 \supsetneq ... \supsetneq 0$$

contempla todos os submódulos de M e, portanto, M é de cadeia. $\square$

Em muitos dos exemplos por nós trabalhados com relação à Proposição 3.21 não foi preciso ir tão longe no cardinal α para obter o conjunto incomparável $a, b \in MJ^\alpha \setminus MJ^{\alpha+1}$. Por exemplo, se $M = M_1 \oplus M_2$, onde M_1 e M_2 são módulos não nulos e finitamente gerados, temos que $M_1 \setminus M_1J \neq 0$ e $M_2 \setminus M_2J \neq 0$, assim basta tomar $a \in M_1 \setminus M_1J \subseteq M \setminus MJ$ e $b \in M_2 \setminus M_2J \subseteq M \setminus MJ$. Neste caso temos $\alpha = 0$.

Para um exemplo um pouco mais elaborado, considere o anel R do Exemplo 2.19, ou do Exemplo 2.20. Seja $M = R_R$. Neste caso, M é um módulo local, e portanto gerado por qualquer elementos de $M \setminus MJ$. Por outro lado $x, y \in MJ \setminus MJ^2$ é um conjunto incomparável.

Proposição 3.22. *Seja $R = (R_{ij})_{r\times r}$ m anel semiperfeito, e um idempotente local, α um ordinal, $N \subseteq eR$ um (eRe, R)-submódulo, $M = eR/N$ e $a \in MJ^\alpha \setminus MJ^{\alpha+1}$. Seja $\lambda \in eRe$. Então*

1. *se $\lambda \in U(eRe)$, então $\lambda a \in MJ^\alpha \setminus MJ^{\alpha+1}$;*

2. *se $\lambda \in J(eRe)$, então $\lambda a \in MJ^{\alpha+1}$.*

Demonstração. Inicialmente, suponha que $\lambda \in U(eRe)$, então existe $\lambda' \in eRe$ tal que $\lambda\lambda' = \lambda'\lambda = e$, assim $\lambda'\lambda a = a$.

Dado que MJ^α é finitamente gerado, temos, pelo lema de Nakayama, que $MJ^{\alpha+1} \subsetneq MJ^\alpha$. Como $MJ^{\alpha+1}$ é também um (eRe, R)-bimódulo, temos que, se $\lambda a \in MJ^{\alpha+1}$, então $a \in MJ^{\alpha+1}$, uma contradição. Consequentemente temos que $\lambda a \in MJ^\alpha \setminus MJ^{\alpha+1}$.

Agora, suponha que $\lambda \in J(eRe)$. Faremos a demonstração de que $\lambda a \in MJ^{\alpha+1}$ por indução transfinita em α. Além disso, sem perda de generalidade, vamos supor que $N = 0$, isto é, que $M = eR$.

Denote $J_e = J(eRe)$. Vamos mostrar que $J_e eR \subseteq eRJ$. Dado que J é um ideal bilateral de R, temos que $JR = J = RJ$. Para a (i, j)-ésima componente da decomposição de Pierce desta identidade, temos que $\sum_{k=1}^{r} J_{ik}R_{kj} = \sum_{k=1}^{r} R_{ik}J_{kj}$, mas então temos que $J_{ii}R_{ij} \subseteq \sum_{k=1}^{r} R_{ik}J_{kj}$. Dado que i e j são arbitrários, podemos tomar $e_i = e$ e somar esta última inclusão em j, e assim temos

$$J_e eR = \sum_{j=1}^{r} J_e eRe_j \subseteq \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} eRe_k J_{kj} \subseteq eRJ$$

ou seja, $J_e eR \subseteq eRJ$. Isso implica que, se $\lambda \in J_e$, então $\lambda a \in eRJ$.

Suponha que, para algum ordinal β, tenhamos que $J_e^\beta eR \subseteq eRJ^\beta$, então $J_e^{\beta+1}eR = J_e J_e^\beta eR \subseteq J_e eRJ^\beta \subseteq eRJ^{\beta+1}$.

Seja β um ordinal limite e suponha que para todo ordinal $\alpha < \beta$, tenhamos que $J_e\alpha \subseteq eRJ^\alpha$, então

$$\begin{aligned}
J_e^\beta eR &= (\bigcap_{\alpha<\beta} J_e^\alpha)eR \\
&= \bigcap_{\alpha<\beta}(J_e^\alpha eR) \\
&\subseteq \bigcap_{\alpha<\beta}(eRJ^\alpha) \\
&= eR(\bigcap_{\alpha<\beta} J^\alpha) \\
&= eRJ^\beta
\end{aligned}$$

□

4 OUTROS RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados e conceitos referentes a outros possíveis temas que podem ser abordados em conjunto com a relação de n-comparabilidade e n-cadeia. Vários destes resultados possuem paralelos como o que a literatura tem obtido em relação a anéis similares, tais como os anéis de cadeia, seriais e semiperfeitos e semidistributivos. Assim sendo, este capítulo tem por objetivo propor e também apresentar outras perspectivas de pesquisa sobre os módulos e anéis de n-cadeia, além de expor algumas questões que ficaram sem soluções durante o desenvolvimento deste trabalho.

4.1 RETICULADOS DOS IDEIAS

A partir da Proposição 1.34 conseguimos observar que se S é um anel de cadeia à direita, então o anel de matrizes $R = \mathbb{M}_r(S)$ é uma anel serial à direita. Além disso o reticulado dos ideias de R é uma cadeia. O ponto interessante que provaremos a seguir é que se R é um anel serial à direita cujo reticulado dos ideais é uma cadeia, então $R \cong \mathbb{M}_r(S)$ para algum inteiro positivo r e algum anel de cadeia à direita S.

Proposição 4.1. *Seja R um anel serial à direita. Então R é isomorfo a um anel de matrizes sobre um anel de cadeia à direita se, e somente se, o reticulado de seus ideais estão em cadeia.*

Demonstração. Suponha que $R \cong \mathbb{M}_r(S)$ onde S é um anel de cadeia à direita. Note que pela Proposição 1.34 isso não contradiz em nada com a hipótese de que R é um anel serial à direita. Por [15, Theorem 3.1] temos que todo ideal de R é da forma $\mathbb{M}_r(I)$ onde I é um ideal de S, de modo que o reticulado dos ideais de R é uma cadeia.

Agora, suponha por absurdo que R não é isomorfo a um anel de matrizes sobre um anel de cadeia a direita. Seja $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce de R_R em submódulos locais. Se $e_iR \cong e_jR$ para todo $i, j \in \{1, ..., r\}$, então, pela Equação (1.5), teríamos que $R \cong \mathbb{M}_r(e_1Re_1)$, e e_1Re_1 é um anel de cadeia, uma contradição com nossa hipótese. Assim, existem idempotentes locais e ortogonais $e_i, e_j \in \{e_1, ..., e_r\}$ tais que $e_iR \ncong e_jR$. Dado que $\mathrm{Hom}(e_jR, e_iR) \cong R_{ij}$ e $\mathrm{Hom}(e_jR, e_iR) \cong R_{ji}$, temos que $e_i \notin R_{ij}R_{ji}$, e isso implica que

$$R_{ij}R_{ji} \subsetneq R_{ii} = R_{ii}R_{ii} \tag{4.1}$$

Observe que o ideal gerado pelos idempotentes e_i é $Re_iR = [R_{ki}R_{il}]_{r\times r}$. Assim, para $k = l = i$, a Equação (4.1) nos dá que $Re_jR \nsubseteq Re_iR$. De forma análoga temos que $Re_iR \nsubseteq Re_jR$. Estas duas inclusões provam que os ideais de R não estão em cadeia. $\square$

Ambos os anéis dos Exemplos 2.19 e 2.20, os quais são locais e de 2-cadeia estritos, possuem seus radicais de Jacobson da forma $\mathrm{J}(R) = xR \oplus yR$ onde xR e yR são submódulos de cadeia de R_R. Esta característica apresenta uma similaridade com os módulos e álgebras bisseriais (ou também denominadas de disseriais) apresentados em [14]. Na tentativa de explorar mais a fundo esta questão provaremos o seguinte resultado.

Proposição 4.2. *Seja R um anel local de 2-cadeia à direita estrito e noetheriano. Então existe um conjunto incomparável $\{x, y\} \in J(R)$ tal que $J(R) = xR + yR$. Além disso, $J(R)/xR$ e $J(R)/yR$ são de cadeia.*

Demonstração. Uma vez que R é local, R é semiperfeito e básico. Dado que R não é de cadeia, R não é serial à direita. Por [10, Lemma 12.4.1], temos que $\mathrm{J}(R)$ não é um ideal à direta cíclico. Como R é de 2-cadeia á direita e noetheriano, $\mathrm{J}(R)$ é gerado por no máximo 2 elementos. Assim, existem elementos $x, y \in R$ tais que $xR \nsubseteq yR$, $yR \nsubseteq xR$ e $\mathrm{J}(R) = xR + yR$.

Para ver que $J(R)/xR$ é de cadeia, sejam $\overline{x_0}, \overline{x_1} \in J(R)/xR$ com $x_0, x_1 \in J(R)$. Observe que podemos escolher representantes $x_0, x_1 \in yR$. Suponha por absurdo que $\{x_0, x_1\}$ é um conjunto incomparável. Dado que R é de 2-cadeia, temos que $\{x_0, x_1, x\}$ é um conjunto 2-comparável. Note que $x \notin x_0R + x_1R$, do contrário teríamos $x \in yR$. Assim, a menos dos índices, podemos supor que $x_0 \in x_1R + xR$, mas isso significa que $\overline{x_0} \in \overline{x_1}R$ em $J(R)/xR$. Um argumento similar prova que $J(R)/yR$ é de cadeia. $\square$

4.2 HOMOMORFISMOS E ANÉIS SEMIPERFEITOS

Dado um anel R e M um (R, R)-bimódulo, queremos saber em que condições $S := End_R(M)$ é um anel de cadeia à direita. Apresentamos aqui alguns resultados a partir de algumas hipótese adicionais sobre M. Antes disso, definimos $M^l = \{r \in R : rM = 0\}$, isto é M^l é o anulador à esquerda de M. Note que M^l é um ideal de R. O seguinte resultado é conhecido na literatura.

Proposição 4.3. *Sejam R um anel e M um (R, R)-bimódulo. Então R/M^l é isomorfo a um subanel de $S := End_R(M)$.*

Observamos que, mesmo que $S := End_R(M)$ seja um anel de cadeia à direita, não podemos dizer que R/M^l também seja de cadeia à direita. Por exemplo, se S é de cadeia à direita, então dados $s, r \in R/M^l$, existe $h \in S$ tal que $s = rh$ ou $r = sh$. Porém não temos a garantia de que $h \in R/M^l$. Agora, caso $s = rh$ é tal que r é invertível, então $r^{-1}s = h$, isso levanta a questão: "Se $S := End_R(M)$ é de cadeia à direita, então R/M^l pode ser localizado em um anel de cadeia à direita?"

Passamos a substituir o (R, R)-bimódulo M por um ideal à direita. Ocorre que se M é apenas um ideal à direita, não podemos garantir a inclusão $R/M^l \hookrightarrow End_R(M)$ um vez que podemos ter $RM \nsubseteq M$. Por isso, adaptamos a proposição anterior com a seguinte proposição.

Proposição 4.4. *Dado M um ideal à direita de um anel R, seja $R' = \{r \in R : rM \subseteq M\}$. Então*

1. *R' é um subanel de R;*
2. *M^l é um ideal de R'.*

Demonstração. Claramente que $1 \in R'$ e dados $r, s \in R$, $rs, r + s \in R'$, o que nos mostra que R' é um subanel de R. É claro também que $M^l \subseteq R'$.

Dados $r \in R$ e $s \in M^l$, temos que, para qualquer $m \in M$, $(rs)m = r(sm) = r0 = 0$ e $(sr)m = s(rm) = 0$, o que implica que $rs, sr \in M^l$, isto é, M^l é um ideal de R'. □

Proposição 4.5. *Sejam M um ideal à direita de um anel R e $R' = \{r \in R : rM \subseteq M\}$. Então R'/M^l é isomorfo a um subanel de $End_R(M_R)$.*

Demonstração. Note que o anulador à esquerda de M em R' é o mesmo que seu anulador à esquerda de M em R. A relação $r \mapsto f_r(m) = rm$ define um homomorfismo de anéis $\varphi : R' \to End_R(M)$. Assim como no argumento da Proposição 4.3, temos que $\ker \varphi \cong M^l$, o que implica o resultado desejado. □

Proposição 4.6. *Sejam R um anel e M um ideal à direita tal que*

1. *M é injetivo ou*
2. *M é um somando direto de R_R.*

Se $R' = \{r \in R : rM \subseteq M\}$, então $S := End_R(M) \cong R'/M^l$.

Demonstração. Primeiramente suponha que M é injetivo e seja $f \in S$. Então f possui uma extensão $\widetilde{f} : R \to M$. Sejam $r \in R$ tal que $\widetilde{f}(1) = r$, então para todo $m \in M$, $rm = f(1)m = f(m) \subseteq M$, ou seja $r \in R'$ e $f = \varphi(r)$, onde $\varphi : R' \to S$ é o homomorfismo que associa cada $x \in R'$ ao endomorfismos $m \mapsto xm$ em S. Isto é, o subanel de S isomorfo à R'/M^l da Proposição 4.5 é o próprio S.

Suponha então que M é um somando direto de R_R e escreva $R_R = M \oplus K$, assim temos que

$$\begin{aligned} R &\cong End_R(R_R) \\ &= End_R(M \oplus K) \\ &= \begin{bmatrix} Hom_R(M,M) & Hom_R(K,M) \\ Hom_R(M,K) & Hom_R(K,K) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja, cada elemento de R pode ser representado por uma matriz 2×2 agindo sobre os vetores coluna $[m,k]^T$ de $M \oplus K$.

Dado $f \in S = End_R(M)$, defina $r := \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, então para todo $m \in M$,

$$f(m) = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = rm = f_r(m)$$

Dado que $f(m) \in M$, a igualdade acima nos dá que $r \in R'$. Ou seja, novamente temos que R'/M^l isomorfo ao anel S. $\square$

Corolário 4.7. *Sejam R um anel, M um ideal à direita e $R' = \{r \in R : rM \subseteq M\}$ tal que*

1. *M é injetivo ou*

2. *M é um somando direto de R_R.*

Então, $End_R(M)$ é de cadeia à direita se, e somente se, R'/M^l é de cadeia à direita.

Como um exemplo dos resultados acima, seja S um anel qualquer e $R = \mathbb{M}_3(S)$, então $R_R = e_1R \oplus e_2R \oplus e_3R$ onde e_iR é a i-ésima linha de $\mathbb{M}_3(S)$. Seja $M = e_2R$, vamos determinas R' e M^l. Note que

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bx & by & bz \\ ex & ey & ez \\ hx & hy & hz \end{bmatrix}$$

Por essa equação, temos que

$$R' = \begin{bmatrix} S & 0 & S \\ S & S & S \\ S & 0 & S \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^l = \begin{bmatrix} S & 0 & S \\ S & 0 & S \\ S & 0 & S \end{bmatrix}$$

Isso nos dá que $R'/M^l \cong S$.

4.3 HOMOMORFISMOS EM ANÉIS SERIAIS

Já vimos que a componente R_{ij} de uma decomposição de Pierce de um anel $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ pode ser vista como o grupo dos homomorfismos dos R-módulos e_jR para e_iR. Nesta seção buscamos explorar alguns resultados dos subconjuntos e dos subgrupos de R_{ij} quando R é um anel serial.

Proposição 4.8. *Seja $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ um anel serial à direita. Então o conjunto $M = \{f \in R_{ji} : fe_iR \subsetneq e_jR\}$ é um R_i-submódulo de R_{ji}.*

Demonstração. Se $f \in R_{ji}$ e $r \in R_i$, então $fre_iR \subseteq fe_iR \subsetneq e_jR$ de modo que $fr \in M$.

Sejam $f, g \in M$ e $r \in R_i$. Uma vez que R_{ji} é um R_i-modulo de cadeia, temos que $f \in gR_i$ ou $g \in fR_i$. Sem perda de generalidade, suponha que $f = gs \in gR_i$, então $(f + g)e_iR = g(s + 1)e_iR \subseteq ge_iR \subsetneq e_iR$, isto é $f + g \in M$. Isso mostra que M é um submódulo de $(R_{ji})_{R_i}$. □

Dizemos que um ideal à direita I de um anel R é **completamente primo** se para todo par $a, b \in R$ tal que $aI \subseteq I$ e $ab \in I$, tem-se que $a \in I$ ou $b \in I$. A mesma definição se aplica se I é um ideal bilateral, considerando que $aI \subseteq I$ já é automaticamente satisfeito. É provado em [18, Poposition 2.6] que se M é um módulo de cadeia e $S = \mathrm{End}(M)$, então $\mathrm{J}(S)$ é a interseção de dois ideais completamente primos I e K, onde I é formado pelos homomorfismos que não são epimorfismos, e K pelos homomorfismos que não são monomorfismos. A relevância desse resultado é que M será completamente indecomponível se, e somente se, se $I \subseteq K$ ou $K \subseteq I$. Inspirado neste resultado, as próximas proposições tentam buscar relações entre os conjuntos do homomorfismos que não são epimorfismos de grupos $\mathrm{Hom}(e_iR, e_jR)$ no qual $R_R = e_1 \oplus ... \oplus e_rR$ é uma decomposição de Pierce em submódulos locais de uma anel serial à direita.

Proposição 4.9. *Sejam $R_R = e_1R\oplus...\oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce em submódulos locais de um anel serial à direita e $M \subseteq R_{ji}$. Então $Me_iR \subsetneq e_jR$ se, e somente se, para todo $f \in M$, $fe_iR \subsetneq e_jR$.*

Demonstração. Se $Me_iR \subsetneq e_jR$, então, para todo $f \in M$, $fe_iR \subseteq Me_iR \subsetneq e_jR$.

Suponha agora que para todo $f \in M$, $fe_iR \subsetneq e_jR$. Suponha por absurdo que $Me_iR = e_jR$, então existem $f_1, ..., f_n \in M$ e $r_1, ..., r_n \in e_jR$ tais que $\sum f_kr_k = e_j$. Como R_{ji} é um R_i-módulo de cadeia, existe $l \in \{1, ..., n\}$ tal que para todo k existe $s_k \in R_i$ e $f_k = f_ls_k$. Assim $e_j = \sum f_kr_k = \sum f_ls_kr_k = f_l(\sum s_kr_k)$, de modo que $f_le_iR = e_jR$, o que é uma contradição. □

Corolário 4.10. *Seja $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce em submódulos locais de um anel serial à direita. Então $R_{ji}e_iR \subsetneq e_jR$ se, e somente se, para todo $f \in R_{ji}$, $fe_iR \subsetneq e_jR$.*

Proposição 4.11. *Seja $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce em submódulos locais de um anel serial à direita. Se $R_{ji} \neq 0$ e $R_{ji}e_iR \subsetneq e_jR$, então $R_{ji}R_{ij}$ é um ideal à direita completamente primo de R_j.*

Demonstração. Note que $R_{ji}R_{ij}$ é um subconjunto de R_j tal que $R_{ji}R_{ij}R_j \subseteq R_{ji}R_{ij}$. Agora, sejam $a, b \in R_{ji}R_{ij}$, como $R_{ji}R_{ij}$ está contido no anel de cadeia à direita R_j, então $a \in bR_j$ ou $b \in aR_j$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a \in bR_j$, então existe $x \in R_j$ tal que $a = xb$. Assim, temos que $a+b = bx+b = b(e_j+x) \in (R_{ji}R_{ij})R_j \subseteq R_{ji}R_{ij}$. Assim, provamos que $R_{ji}R_{ij}$ é um ideal à direita.

Seja $I = \{r \in R_j : rR_{ji} \subsetneq R_{ji}\}$. Vamos mostrar que $R_{ji}R_{ij} = I$. Note que dado $r \in I$, existe $s \in R_{ji} \setminus rR_{ji}$, mas como $s, r \in e_jR$ e $s \notin rR$, devemos ter que $r \in sR$. Dado que $r = re_j$ e $s = e_jse_i$, devemos ter que $r \in R_{ji}R_{ij}$. Isso nos mostra que $I \subseteq R_{ji}R_{ij}$.

Dado que $R_{ji} \neq 0$ e $0 = 0R_{ji} \subsetneq R_{ji}$, temos que $0 \in I$. Seja $r = su \in R_{ji}R_{ij} \setminus \{0\}$ onde $s \in R_{ji}$ e $u \in R_{ij}$. Afirmamos que $s \notin rR_{ji}$. De fato, se não fosse o caso teríamos $r = su \in sR_{ij}$ e $s = rv \in rR_{ji}$, e, portanto, $r = rvu$ com $vu \in R_{ji}R_{ij} \subseteq R_j$. Caso $vu \in \mathrm{J}(R_j)$, então $e_j - vu \in \mathrm{U}(R_j)$, de modo que $r(e_j - vu) = 0$ implicaria que $r = 0$, contradizendo a escolha de r. Caso $vu \notin \mathrm{J}(R_j)$, então $vu \in \mathrm{U}(R_j)$, pois R_j é local. Mas neste caso $v \in R_{ji}$ é um isomorfismo de e_iR em e_jR, uma contradição com $R_{ji}e_iR \subsetneq e_jR$. Isso mostra que $s \notin rR_{ji}$, ou seja, $rR_{ji} \subsetneq R_{ji}$, provando que $r \in I$.

Por fim, sejam $r, s \in R_j$ tais que $r, s \notin R_{ji}R_{ij}$, então $rR_{ji} = R_{ji}$ e $sR_{ji} = R_{ji}$, o que implica que $rs(R_{ji}) = R_{ji}$, isto é $rs \notin R_{ji}$, o que prova que $R_{ji}R_{ij}$ é completamente primo. □

Da proposição 1.10 temos que $e_iR \cong e_jR$ se, e somente se $e_j \in R_{ji}R_{ij}$, o que ocorre também se, e somente se, $R_{ji}R_{ij} = R_j$. Neste caso a condição $R_{ji}e_iR \subsetneq e_jR$ pode ser substituída simplesmente por $e_iR \ncong e_jR$.

Note que o conjunto $M \subseteq R_{ij}$ da Proposição 4.9, tal que para todo $f \in M$, $fe_iR \subsetneq e_jR$, pode ser visto como um conjunto de homomorfismos de e_iR em e_jR que não são epimorfismos. Podemos dualizar tal proposição para os homomorfismos que não são monomorfismos da seguinte forma:

Proposição 4.12. *Seja $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce em submódulos locais de um anel serial à direita. Então $N = \{g \in R_{ji} : (\exists x \in Re_j \setminus \{0\})(gx = 0)\}$ é um R_i-submódulo de R_{ji}.*

Demonstração. Sejam $g \in N$ e $r \in R_i$. Dado $s \in Re_j \setminus \{0\}$ tal que $sg = 0$, temos que $sgr = 0$, de modo que $gr \in N$.

Sejam $f, g \in N \subseteq R_{ji}$. Como R_{ji} é um R_i módulo de cadeia, temos que $f \in gR_i$ ou $g \in fR_i$. Digamos que $f = gr \in gR_i$. Então dado $s \in Re_j \setminus \{0\}$ tal que $sg = 0$, temos que $s(f + g) = sg(r + 1) = 0$, de modo que $f + g \in N$. □

Proposição 4.13. *Sejam $R_R = e_1R \oplus ... \oplus e_rR$ uma decomposição de Pierce em submódulos locais de um anel serial à direita e noetheriano à esquerda e $N \subseteq R_{ji}$. Então existe $x \in Re_j \setminus \{0\}$ tal que $xN = 0$ se, e somente se, para todo $g \in N$, exite $x_g \in Re_j \setminus \{0\}$ tal que $x_g g = 0$.*

Demonstração. Se existe $x \in Re_j \setminus \{0\}$ tal que $xN = 0$, então, para todo $g \in N$ defina $x_g = x$, e assim $x_g g = 0$.

Suponha que, dado $x \in Re_j$, se $xN = 0$, então $x = 0$. Para cada $g \in N$ defina $A_g = \{x \in Re_j : xg = 0\}$. Dado que R_{ji} é um R_i módulo de cadeia, então temos que quaisquer que seja $f, g \in N \subseteq R_{ji}$ $f \in gR_i$ ou $g \in fR_i$. Se é o primeiro caso que ocorre, então $xg = 0$ implica que $xf = 0$ e, portanto, $A_g \subseteq A_f$. Analogamente, no segundo caso, temos que $A_f \subseteq A_g$. Em especial, a família $\{A_g : g \in N\}$ é uma cadeia de subconjuntos de Re_j. Dado que R é noetheriano à esquerda, a cadeia $\{A_g : g \in N\}$ possui um elemento maximal $A_{g'}$ para algum $g' \in N$. Assim, se $x \in Re_j$ é tal que $xg' = 0$, então $xg = 0$ para todo $g \in N$, o que implica que $xN = 0$. Mas, pela nossa hipótese, temos que $x = 0$. □

Note que a notherianidade à esquerda é essencial para o resultado. Essa proposição ainda implica em um corolário.

Corolário 4.14. *Sejam $R = [R_{ij}]_{r\times r}$ um anel serial à direita noetheriano à esquerda. Então $\{x \in Re_j : xR_{ji} = 0\} \neq 0$ se, e somente se, existe $g \in R_{ji}$ tal que $\{x \in Re_j : xg = 0\} \neq 0$.*

4.4 LOCALIZAÇÃO E SATURAMENTO

Um subconjunto S de um anel R é denominado um **conjunto de Ore à direita**, se $1 \in S$, $0 \notin S$, S é fechado para a multiplicação e se para todo par $x \in R$ e $y \in S$, $xS \cap yR \neq \emptyset$. Dado um anel R, um conjunto de Ore à direita S, um R-módulo M e um submódulo N de M, definimos o **S-saturamento** de N como o submódulo $NS^{-1} = \{x \in M : (\exists s \in S)(xs \in N)\}$. Dizemos que o submódulo N é **S-saturado** se $NS^{-1} = N$.

A proposição a seguir é provada em [4, Theorem 3.2] para $n = 1$, mas sem a condição do fecho aditivo para os submódulos saturados.

Proposição 4.15. *Seja R um anel tal que para todo ideal maximal P, $S_P = R \setminus P$ é um conjunto de Ore e seja M um R-módulo tal que para todo ideal maximal P de R o reticulado dos submódulos de M S_P-saturados é fechado para a adição. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *M é $(n+1)$-distributivo;*

2. *Para todo ideal maximal P, os submódulos S_P-saturados estão em n-cadeia.*

Antes da prova de tal proposição vamos apresentar dois lemas necessários.

Lema 4.16. *Seja R um anel tal que para todo ideal maximal P, $S_P = R \backslash P$ é um conjunto de Ore. Seja M um R-módulo. Então M é $(n+1)$-distributivo se, e somente se, para todo $x_0, ..., x_n \in M$ e P ideal maximal de R existe $s \in S_P$ tal que, a menos da ordem dos índices, $x_0 s \in \sum_{i=1}^{n} x_i R$.*

Demonstração. [4, Corollary 1.2]. □

Lema 4.17. *Seja R um anel tal que para todo ideal maximal P, $S_P = R \backslash P$ é um conjunto de Ore. Se $N \subseteq M$ são R-módulos, então $N = \bigcup_{P \in \mathcal{M}} N S_P^{-1}$, onde $\mathcal{M}$ é a família dos ideais maximais de P.*

Demonstração. [4, Lemma 3.3]. □

Agora apresentamos a prova da Proposição 4.15.

Demonstração. Suponha que M seja $(n+1)$-distributivo. Sejam $N_0, ..., N_n \subseteq M$ submódulos S_P-saturados. Suponha que para $i = 1., ..., n$ tenhamos $N_i \nsubseteq \sum_{j \neq i} N_j$ e sejam $x_i \in N_i \setminus \sum_{j \neq i} N_j$. Seja $x_0 \in N_0$ um elemento qualquer desse submódulo. Pelo Lema 4.16 existe $s \in S_P$ tal que $x_0 s \in \sum_{i=1}^{n} x_i R \subseteq \sum_{i=1}^{n} N_i$. Dada que esta última soma é S_P-saturada, temos que $x_0 \in \sum_{i=1}^{n} N_i$. Pela arbitrariedade de x_0 temos que $N \subseteq \sum_{i=1}^{n} N_i$.

Suponha que, para todo ideal maximal P de R o reticulado dos submódulos S_P-saturados de M estejam em n-cadeia. Dado que o reticulado dos submódulos de M S_P-saturados é fechado para a adição, temos que $(K+N)S_P^{-1} = KS_P^{-1} + NS_P^{-1}$ para todo par de submódulos de K e N de M. Uma vez que a relação $(K \cap N)S_P^{-1} = KS_P^{-1} \cap NS_P^{-1}$ só depende de que S_P seja um conjunto de Ore, temos que o reticulado dos submódulos S_P-saturados é fechado também para a interseção. Como este reticulado é de n-cadeia, o mesmo é $(n+1)$-distributivo.

Sejam $N, N_0, ..., N_n \subseteq M$ submódulos quaisquer de M. Então

$$\begin{aligned}
[N \cap (\textstyle\sum_{i=0}^{n} N_i)]S_P^{-1} &= NS_P^{-1} \cap (\textstyle\sum_{i=0}^{n} N_i S_P^{-1}) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{n} (NS_P^{-1} \cap (\sum_{j \neq i} N_i S_P^{-1})) \\
&= [\textstyle\sum_{i=0}^{n} (N \cap (\sum_{j \neq i} N_i))]S_P^{-1}
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.17, temos que $N \cap (\sum_{i=0}^{n} N_i) = \sum_{i=0}^{n}(N \cap (\sum_{j \neq i} N_i))$, o que prova que M é $(n+1)$-distributivo. $\square$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora a literatura tenha poucas pesquisas sobre o tema dos módulos e anéis de n-cadeia e os termos envolvidos, tal como a n-comparabilidade, este tópico toca em vários assuntos de outras pesquisas e apresenta uma nova perspectiva para alguns resultados já obtidos. Como visto neste trabalho, vários anéis, como os seriais e os semidistributivos e semiperfeitos, pertencem a mesma classe dos anéis de n-cadeia. Além disso, técnicas de outras teorias, com a análise de quivers de álgebras de dimensão finita, podem ser adaptadas para os anéis de n-cadeia semiperfeitos.

Embora o tema proposto neste trabalho não encontre muitas referências na literatura, sua semelhança com diversos temas existentes possibilitaram vários resultados aqui apresentados. Os trabalhos envolvendo anéis e módulos seriais nos proporcionaram um bom panorama da perspectiva de como deveríamos abordar os anéis de n-cadeia. A teoria de quivers apresentada por [13] nos proporcionou resultados adicionais e um link com os anéis semiperfeitos e semidistributivos.

Se por um lado a semelhança dos anéis e módulos de n-cadeia com os anéis seriais e com os anéis semiperfeitos e semidistributivos proporcionaram uma direção de trabalho, por outro colocou alguns obstáculos no caminho, que por vez não foram transpostos. Por exemplo, resultados como o índice de n-cadeia das soma e quocientes de módulos tiveram a necessidade de ser desenvolvidos. A Proposição 2.25 parece ser crucial para se trabalhar com os anéis de n-cadeia semiperfeitos. Muitos dos resultados para anéis seriais e para anéis semiperfeitos e semidistributivos, que pareciam ter uma generalização para os anéis de n-cadeia, ou se mostraram muito específicos em suas teorias, ou permanecem desconhecidos para o caso mais geral. Além do mais, alguns resultados que pareciam promissores para os anéis de n-cadeia já haviam sido provados em outros contextos e com outros enunciados.

Por fim, a gama de possibilidades de pesquisa que se abriu para nós referente aos anéis de n-cadeia nos obrigou a especificar o tema tratado, e assim deixar vários temas e questões em aberto para futuras pesquisas. Dentre estes temas não aprofundados neste trabalho, se destacam um estudo mais sistemático dos anéis de n-cadeia que não sejam semiperfeitos; as teorias de ideais, ideais primos e reticulados de ideais sobre estes anéis, a generalização dos outros quivers, como o quiver de Pierce, o quiver primo, o quiver associado a um ideal apresentados em [13]; e um aprofundamento para a completa caracterização dos anéis semiperfeitos do tipo de representação limitada.

REFERÊNCIAS

[1] Assem, I., Simson, D., and Skowronski, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras.* Cambridge University Press, 2006.

[2] Brungs, H. Rings with a distributive lattice of right ideals. *Journal of Algebra 40*, 2 (June 1976), 392–400.

[3] Dubrovin, N. I. Noncommutative valuation rings. *Transactions of the Moscow Mathematical Society 45*, 1 (1982), 265–280.

[4] Ferrero, M., and Sant'Ana, A. On distributive modules and rings. *Results in Mathematics 44*, 1 (Apr. 2003), 74–85.

[5] Gabriel, P. Unzerlegbare darstellungen I. *manuscripta mathematica 6*, 1 (Mar. 1972), 71–103.

[6] Gubareni, N. Finitely presented modules over right hereditary SPSD-rings. *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science 9* (2010), 49–57.

[7] Gubareni, N. On right hereditary SPSD-rings of bounded representation type I. *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science 11*, 3 (2012), 57–70.

[8] Gubareni, N. On right hereditary SPSD-rings of bounded representation type II. *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science 11*, 4 (2012), 53–63.

[9] Hazewinkel, M., Gubareni, N., and Kirichenko, V. V. Quivers of rings. In *Algebras, Rings and Modules: Volume 1*, M. Hazewinkel, N. Gubareni, and V. V. Kirichenko, Eds. Springer Netherlands, Dordrecht, 2004, pp. 262–299.

[10] Hazewinkel, M., Gubareni, N., and Kirichenko, V. V. Serial rings and modules. In *Algebras, Rings and Modules: Volume 1*, M. Hazewinkel, N. Gubareni, and V. V. Kirichenko, Eds. Springer Netherlands, Dordrecht, 2004, pp. 300–318.

[11] Hazewinkel, M., Gubareni, N., and Kirichenko, V. V. Right serial rings. In *Algebras, Rings and Modules: Volume 2*, M. Hazewinkel, N. Gubareni, and V. Kirichenko, Eds. Springer Netherlands, Dordrecht, 2007, pp. 219–253.

[12] Kirichenko, V. V. Semi-perfect semi-distributive rings. *Algebras and Representation Theory 3*, 1 (2000), 81–98.

[13] Kirichenko, V. V. Quivers of associative rings. *Journal of Mathematical Sciences 131*, 6 (Dec. 2005), 6032–6051.

[14] Kirichenko, V. V., and Kostyukevich, P. P. Diserial rings. *Ukrainian Mathematical Journal 38*, 6 (1986), 603–607.

[15] Lam, T.-Y. *A first course in noncommutative rings.* Springer eBook Collection. Springer US, New York, NY, 1991.

[16] Lam, T.-Y. *Lectures on modules and rings*, vol. 189. Springer Science & Business Media, 2012.

[17] osofsky, b. Noncommutative rings whose cyclic modules have cyclic injective hulls. *Pacific Journal of Mathematics 25*, 2 (1968), 331–340. Publisher: Mathematical Sciences Publishers.

[18] Puninski, G. *Serial rings.* Springer Science & Business Media, 2001.

[19] Riehl, E. *Category theory in context.* Courier Dover Publications, 2017.

[20] Stephenson, W. Modules whose lattice of submodules is distributive. *Proceedings of the London Mathematical Society s3-28*, 2 (Mar. 1974), 291–310.

[21] Warfield, Jr., R. B. Serial rings and finitely presented modules. *Journal of Algebra 37*, 2 (Nov. 1975), 187–222.

ÍNDICE REMISSIVO