

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Folheações de uma 3-variedade riemanniana por
superfícies mínimas e aplicações no espaço
hiperbólico**

Tese de Doutorado

MATHEUS PIMENTEL GOMES

Porto Alegre, 24 de Maio de 2024

Tese submetida por Matheus Pimentel Gomes* como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Professor Dr. Jaime Bruck Ripoll

Professora Coorientadora:

Professora Dra. Patrícia Kruse Klaser

Banca examinadora:

Professor Dr. Rodrigo Barbosa Soares (FURG)

Professor Dr. Jorge Lira (UFC)

Professor Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)

Professor Dr. Jaime Bruck Ripoll (UFRGS)

Professora Dra. Patrícia Kruse Klaser (UFSC)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Agradecimentos

Agradeço aos meus amigos, à minha família e à minha namorada por todo apoio e carinho ao longo do doutorado. Por diversas vezes, eles foram agentes de motivação para continuar no caminho e concluir cada etapa deste trabalho.

Agradeço à professora Patrícia, que me orientou durante toda a pós graduação e contribuiu muito com a minha formação como pesquisador. A sinergia que desenvolvemos na relação orientador/orientando fez todo o trabalho ficar mais leve.

Agradeço ao meu orientador Jaime, que me deu a oportunidade de trabalhar com ele na UFRGS. Além disso, também sou grato por todas as vezes que ele mostrou o caminho para resolver os problemas que apareceram no processo.

Agradeço ao professor Leonardo pela solução engenhosa para um dos problemas da tese. Além disso, ele sempre esteve disposto a ajudar, qualquer que fosse o problema.

Agradeço ao professor Rodrigo que me incentivou, na metade da minha graduação, que eu fosse fazer um curso de verão para seguir o caminho da pesquisa. Se não fosse este incentivo, talvez eu não tivesse cursado a pós graduação.

Finalmente, agradeço à CAPES por todo o apoio financeiro.

Resumo

Hsiang e Lawson provam nos Teoremas 1 e 2, em [7], que se G é um subgrupo compacto do grupo de isometrias de uma variedade riemanniana M , então uma subvariedade G -invariante N de M é mínima se, e somente se, N/G é mínima em M/G , considerando em M/G uma métrica apropriada.

Neste trabalho, obtemos uma extensão deste resultado para o caso em que G é um subgrupo do grupo das isometrias de M , não necessariamente compacto, agindo propriamente e livremente em M , e supondo $\dim(M) = 3$.

Aplicamos este teorema para encontrar folheações de uma variedade riemanniana por superfícies mínimas e exibimos folheações do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 invariantes por um subgrupo a um parâmetro de isometrias de \mathbb{H}^3 . Estas folheações de \mathbb{H}^3 nos permitem provar a existência de solução do problema de Plateau assintótico para certas curvas especiais do seu bordo assintótico.

Palavras-chave: Superfície mínima, folheação, espaço hiperbólico, problema assintótico de Plateau.

Abstract

Hsiang and Lawson prove, in Theorems 1 and 2 of [7], that if G is a compact subgroup of the isometry group of a Riemannian manifold M then a G -invariant submanifold N of M is minimal if, and only if, N/G is minimal in M/G , considering in M/G an appropriate metric.

In this work, we obtain an extension of this result for the case which G is a subgroup of the isometry group of M , not necessarily compact, acting properly and freely on M , and assuming $\dim(M) = 3$.

We apply this theorem to find foliations of a Riemannian manifold by minimal surfaces and we present foliations of the hyperbolic space \mathbb{H}^3 which are invariant by a one parameter subgroup of the isometry group of \mathbb{H}^3 . These foliations of \mathbb{H}^3 allow us to prove the existence of solution to the asymptotic Plateau problem for certain special curves of its asymptotic boundary.

Keywords: Minimal surface, foliation, hyperbolic space, asymptotic Plateau problem.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	6
1.1 Métricas conformes e submersões riemannianas	6
2 Teorema de Redução e Teorema de Folheação	11
2.1 O Teorema de Redução	11
2.2 O Teorema de Folheação	14
3 Folheações do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3	16
3.1 Superfícies mínimas parabólicas	17
3.1.1 Existência de folheações por superfícies mínimas parabólicas	17
3.1.2 Folheação explícita do \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas parabólicas	19
3.2 Superfícies mínimas hiperbólicas	23
3.2.1 Existência de folheações por superfícies mínimas hiperbólicas	23
3.2.2 Folheação explícita do \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas hiperbólicas	25
3.3 Superfícies mínimas helicoidais	37

4	Problema de Plateau Assintótico em \mathbb{H}^3	40
4.1	Soluções G -invariantes para o problema assintótico de Plateau . . .	40
	Referências Bibliográficas	48

Introdução

Seja M uma variedade riemanniana completa e G um subgrupo compacto do grupo de isometrias de M agindo em M . Seja $M/G := \{G(p) \mid p \in M\}$, onde $G(p)$ é a órbita determinada por p , a saber, $G(p) := \{gp \mid g \in G\}$.

Nesse caso, é possível colocar uma estrutura diferenciável em M/G , com a topologia quociente, que torna a projeção $\pi : M \rightarrow M/G, \pi(p) = G(p), p \in M$, uma submersão. Além disso, como G age por isometrias, é possível colocar uma métrica g em (M/G) que torna $\pi : M \rightarrow (M/G, g)$ uma submersão riemanniana, isto é, a aplicação π preserva o comprimento de vetores ortogonais à fibra.

Agora, suponha que G age em M com cohomogeneidade k (ou seja, a dimensão maximal das órbitas de G tem codimensão k). Tomando em M/G a métrica $g_k := V^{4/k}g$, sendo $V(p)$ o volume da órbita $G(p)$, $p \in M$, Hsiang e Lawson estabelecem através dos Teoremas 1 e 2, em [7], que uma subvariedade G -invariante Σ de M é mínima em M se, e somente se, Σ/G é mínima em $(M/G, g_k)$.

Um dos teoremas centrais da tese é baseado neste resultado de Hsiang e Lawson. Nele, provamos que é possível definir uma métrica em M/G que não depende de G ser compacto, mas que ainda assim fornece uma condição necessária e suficiente para se encontrar superfícies mínimas em M . Entretanto, o nosso teorema de redução é aplicável com a hipótese de M ter dimensão 3. Por essa razão, a relação

que obtemos é para superfícies mínimas e geodésicas. Precisamente, provamos o seguinte teorema.

Teorema 2.2(Teorema de Redução). *Sejam (M, \bar{g}) uma variedade riemanniana completa de dimensão 3 e X um campo de Killing definido em M . Seja $G \subset \text{Iso}(M)$ o subgrupo a 1-parâmetro associado a X e suponha que G age livremente e propriamente em M . Defina a função $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $v(p) = \bar{g}(X, X)(p)$. Equipe M/G com a métrica $g^* := vg$, onde g é a métrica em M/G que torna $\pi : M \rightarrow M/G$ uma submersão riemanniana.*

Seja $\Sigma \subset M$ uma superfície invariante por G e α uma parametrização da curva $\pi(\Sigma) \subset (M/G, g^)$ tal que $g^*(\alpha', \alpha') \equiv 1$. Então Σ é uma superfície mínima se, e somente se, α for uma geodésica em $(M/G, g^*)$.*

Apesar desse teorema ter sido inspirado no resultado de Hsiang e Lawson, o método que utilizamos para prová-lo é diferente. De fato, como no caso deles existe a hipótese do grupo ser compacto, é possível definir uma função que calcula o volume V das órbitas do campo. Entretanto, essa função V pode não ser bem definida caso o grupo não seja compacto. Por isso, V pode ser substituído por sua forma infinitesimal, que é a norma do campo de Killing associado ao grupo G , como veremos na prova do Teorema de Redução na Seção 2.1.

Neste trabalho, também apresentamos uma aplicação do Teorema de Redução para folhear uma variedade riemanniana por superfícies mínimas G -invariantes. Precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3(Teorema de Folheação). *Sejam (M, \bar{g}) uma variedade riemanniana, completa e orientável de dimensão 3 e X um campo de Killing definido em M . Seja $G \subset \text{Iso}(M)$ o subgrupo a 1-parâmetro associado a X e suponha que G age livremente e propriamente em M . Seja $\pi : M \rightarrow M/G$ a projeção natural e g a métrica em M/G que torna π uma submersão riemanniana. Equipe M/G com a*

métrica conforme g^* definida por $g^* := vg$, onde v é a função definida no Teorema de Redução.

Então M admite uma folheação \mathcal{F} por superfícies mínimas G -invariantes se, e somente se, existir uma curva Γ completa e mergulhada em M/G , tal que a aplicação $\exp^\perp : (T\Gamma)^\perp \rightarrow M/G$, dada por $\exp^\perp(q, v) = \exp(q, v)$, onde $q \in \Gamma$ e $v \in T_q\Gamma^\perp$, é um difeomorfismo. Além disso, $\Sigma \in \mathcal{F}$ se, e somente se, existe γ uma geodésica de $(M/G, g^*)$ ortogonal a Γ tal que $\Sigma = \pi^{-1}(\gamma)$.

Em \mathbb{R}^3 , o problema de classificar os tipos de folheações por superfícies de curvatura média constante (cmc) foi completamente resolvido por Meeks (1988) em [9]. O autor provou que qualquer folheação do \mathbb{R}^3 por superfícies cmc é uma folheação por planos paralelos. Além disso, em [11], Sampaio e Silva (2024) provaram que uma folheação do \mathbb{R}^n por superfícies cmc é, necessariamente, uma folheação por superfícies mínimas.

Nesta tese, apresentamos exemplos da aplicação do Teorema de Folheação para folhear o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . Além disso, como o grupo G do teorema está associado a um campo de Killing e os campos de Killing em \mathbb{H}^3 têm uma classificação, temos uma classificação para as folhas de cada folheação. A saber, os campos de Killing em \mathbb{H}^3 podem ser classificados, a menos de conjugação, em 4 tipos: rotacionais, parabólicos, hiperbólicos e helicoidais; uma prova dessa classificação foi feita por Fornari e Ripoll em [5], mas apresentamos a definição de cada uma delas no capítulo 3.

Vale ressaltar que, dos tipos de campos de Killing em \mathbb{H}^3 , o único cujo grupo associado não cumpre as hipóteses do Teorema de Folheação é o rotacional. Para esse caso, uma folheação é apresentada no Capítulo 4. Já para o restante, temos um teorema de folheação garantindo a existência de folheações por superfícies mínimas, invariantes, completas e propriamente mergulhadas para cada um dos outros tipos

de campos, como veremos no Capítulo 3.

As superfícies mínimas do \mathbb{H}^3 obtidas com o Teorema de Folheação já foram apresentadas na literatura. No trabalho de Carmo e Dajczer, em [4], os autores apresentam superfícies de curvatura média constante (CMC) em \mathbb{H}^3 que são invariantes por certos grupos de isometrias. Assim, as superfícies mínimas que obtemos nesse trabalho já foram estudadas, de forma mais geral, por eles. Entretanto, o assunto de folheações não foi tratado no trabalho deles.

Por fim, também estudamos o problema de Plateau assintótico no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 : dada Γ uma curva no bordo assintótico do \mathbb{H}^3 , procuramos uma superfície mínima Σ em \mathbb{H}^3 tal que o bordo assintótico de Σ seja Γ .

Uma das maneiras de abordar esse problema é usando a teoria geométrica da medida. Através dessa teoria, Anderson, em [1], provou que para cada curva fechada imersa no bordo assintótico de \mathbb{H}^3 , o problema de Plateau assintótico tem solução. Nesse caso, a solução é uma corrente, localmente integral e minimizante de área.

Uma outra maneira de abordar esse problema é através do problema de Dirichlet assintótico para gráficos de Killing. Usando técnicas de equações diferenciais parciais e o problema de Dirichlet para gráficos de Killing hiperbólicos, Guan e Spruck, em [6], apresentam em um dos seus resultados algumas configurações de curvas no bordo assintótico de \mathbb{H}^3 que podem ser minimamente preenchidas. Um resultado semelhante, mas considerando o problema para gráficos de Killing parabólicos, foi proposto por Ripoll e Telichevesky, em [10]. Em ambos os casos, a solução encontrada pelos autores é única, completa e propriamente mergulhada em \mathbb{H}^3 .

Neste trabalho, mostramos que as folheações de \mathbb{H}^3 apresentadas no Capítulo 3 podem ser estendidas para folheações do bordo assintótico de \mathbb{H}^3 , a menos de um conjunto finito de pontos. Essas folheações do bordo assintótico nos permitem

resolver o problema de Plateau assintótico em \mathbb{H}^3 para certos tipos de curvas, de acordo com o seguinte teorema.

Teorema 4.9. *Sejam G um subgrupo a 1-parâmetro de $\text{Iso}(\mathbb{H}^3)$ e $\Omega \subset \partial_\infty \mathbb{H}^3$ um domínio G -invariante cujo $\partial_\infty \Omega =: \Gamma$ seja conexo. Então existe Σ uma superfície mínima, G -invariante, completa, propriamente mergulhada cujo $\partial_\infty \Sigma = \Gamma$.*

Por fim, salientamos duas questões que ficam em aberto deste trabalho. A primeira é provar que o nosso teorema de redução pode ser estendido para dimensões maiores que 3 e obter uma extensão geral do resultado de Hsiang e Lawson. A segunda, é investigar o teorema de redução para superfícies de curvatura média constante, ou seja, mostrar a existência de uma tal relação e construir aplicações.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições, resultados e exemplos necessários para a compreensão do texto.

No entanto, vamos assumir que o leitor já tem alguma familiaridade com geometria riemanniana e conhece o que são variedades riemannianas, métricas, conexão de Levi-Civita e curvaturas. Todos esses conceitos podem ser encontrados no livro do Carmo [3], que será utilizado como base para este capítulo.

1.1 Métricas conformes e submersões riemannianas

Definição 1.1. Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Dizemos que $\bar{g} = \mu g$ é uma métrica conforme em M se $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e positiva. Quando existe a função μ , dizemos simplesmente que (M, g) é conforme a (M, \bar{g}) .

Exemplo 1.2. O espaço hiperbólico \mathbb{H}^n é a variedade riemanniana de dimensão n , completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional constante $K = -1$.

Vamos representar o espaço hiperbólico através do modelo do semiespaço superior:

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},$$

com a métrica em \mathbb{H}^n dada por:

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}.$$

Com isso, temos que o \mathbb{H}^n é conforme ao \mathbb{R}^n .

A seguinte proposição relaciona a conexão riemanniana entre variedades com métricas conformes.

Proposição 1.3. *Sejam (M, g) e (M, \bar{g}) duas variedades riemannianas conformes, com $\bar{g}(X, Y) = \mu g(X, Y)$. Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões riemannianas de (M, g) e (M, \bar{g}) , respectivamente. Então*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y),$$

onde $S(X, Y) = \frac{1}{2\mu} \{(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y) \text{grad } \mu\}$ e o $\text{grad } \mu$ é tomado com relação a métrica g , isto é, $X(\mu) = g(X, \text{grad } \mu)$.

Uma prova desta proposição pode ser encontrada no Capítulo 8 no livro do Carmo [3].

Definição 1.4. Dizemos que G age livremente e propriamente em M se:

1. dado $g \in G$, se $g(p) = p$, então $g = e$, onde e é o elemento neutro de G (ação livre).
2. se $K \subset M$ é compacto então $G(K) := \{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ é compacto em G (ação própria).

Exemplo 1.5. Sejam M uma variedade riemanniana e $Iso(M)$ seu grupo de isometrias. Seja $G \subset Iso(M)$ um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias, isto é, $G = \{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, onde $\phi_t : M \rightarrow M$ é uma isometria para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, suponha que as órbitas de G não se auto-intersectam e que, dado $K \subset M$ um compacto, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_t(K) \cap K = \emptyset$, para todo $t > |t_0|$. Com isso, G age livremente e propriamente em M . De fato, se $\phi_t(p) = p$ para algum t , temos que $t = 0$, pois as órbitas não se auto-intersectam. Agora, seja $K \subset M$ um compacto e t_0 tal que se $|t| > t_0$, $\phi_t(K) \cap K = \emptyset$. Assim, como $[-t_0, t_0]$ é compacto em \mathbb{R} , temos que $\phi_t(K)$, para $t \in [-t_0, t_0]$, é compacto em G .

Definição 1.6. Seja $f : \overline{M}^{n+k} \rightarrow M^n$ uma submersão, isto é, f é sobrejetiva e, para todo $\overline{p} \in \overline{M}$, $df_{\overline{p}} : T_{\overline{p}}\overline{M} \rightarrow T_pM$ tem posto n . Dizemos que f é uma submersão riemanniana se, para todo $\overline{p} \in \overline{M}$, $df_{\overline{p}} : T_{\overline{p}}\overline{M} \rightarrow T_pM$ preserva comprimento de vetores ortogonais as fibras de f .

Observação 1.7. Quando um grupo de Lie G age livremente e propriamente em uma variedade diferenciável M é possível munir o quociente M/G com uma estrutura diferenciável tal que a projeção natural $\pi : M \rightarrow M/G$ é um submersão local. Para isso, ver o Teorema 7.10 em [8]

Uma submersão riemanniana decompõe o espaço tangente em horizontal e vertical, como veremos. Seja $f : \overline{M} \rightarrow M$ uma submersão riemanniana. Um vetor $\overline{u} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ é *horizontal* se ele é ortogonal à fibra e um vetor $\overline{v} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ é *vertical* se ele é tangente a fibra. O espaço tangente $T_{\overline{p}}\overline{M}$ admite então uma decomposição $T_{\overline{p}}\overline{M} = (T_{\overline{p}}\overline{M})^h \oplus (T_{\overline{p}}\overline{M})^v$, onde $(T_{\overline{p}}\overline{M})^h$ e $(T_{\overline{p}}\overline{M})^v$ indicam os subespaços dos vetores horizontais e verticais, respectivamente. Observe que $df_{\overline{p}}|_{(T_{\overline{p}}\overline{M})^h} \rightarrow T_{f(\overline{p})}M$ é um isomorfismo. Assim, se $X \in \mathcal{X}(M)$, o *levantamento horizontal* \overline{X} de X é o campo horizontal definido por $df_{\overline{p}}(\overline{X}(\overline{p})) = X(p)$.

O principal exemplo de submersão riemanniana para este trabalho trata das

variedades quocientes, como veremos a seguir.

Exemplo 1.8. Sejam (M, \bar{g}) uma variedade riemanniana e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias nas mesmas condições do Exemplo 1.5. Com isso, pela Observação 1.7, temos que M/G é uma variedade diferenciável com $\pi : M \rightarrow M/G$ sendo uma submersão local. Para tornar π uma submersão riemanniana, defina g a métrica em M/G dada por $g(X, Y) = \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})$. Observe que g está bem definida, pois G age por isometrias. Com isso, segue da definição que π é uma submersão riemanniana.

A próxima proposição relaciona as conexões de \bar{M} e M .

Proposição 1.9. *Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões riemannianas de (M, g) e (\bar{M}, \bar{g}) respectivamente. Então*

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \overline{(\nabla_X Y)} + \frac{1}{2}[\bar{X}, \bar{Y}]^v, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Uma prova desta proposição pode ser encontrada no Capítulo 8 no livro do Carmo [3].

Vamos mostrar quando é possível escolher uma subvariedade S de M e uma métrica em S que torna M/G , com a métrica da submersão, isométrica a S .

Definição 1.10. Sejam M uma variedade riemanniana e G um grupo agindo propriamente e livremente em M . Seja S uma subvariedade de M . Dizemos que S é um slice para G se cada órbita de G intercepta S transversalmente (as órbitas de G não são tangentes a S) uma única vez.

Teorema 1.11. *Sejam M uma variedade riemanniana e G um grupo agindo propriamente e livremente em M . Seja $\pi : (\bar{M}, \bar{g}) \rightarrow (\bar{M}/G, g)$ a projeção natural, onde g é a métrica que torna π uma submersão riemanniana. Suponha que exista S um slice para G . Então existe g^* uma métrica em S tal que (S, g^*) é isométrico a $(\bar{M}/G, g)$.*

Demonstração. Dado $p \in \overline{M}$, defina $O_p : T_p \overline{M} \rightarrow T_p G(p)$ a projeção ortogonal na órbita de p . Observe que, pela decomposição do espaço tangente em horizontal e vertical, todo vetor $u \in T_p \overline{M}$ pode ser escrito como $u = \bar{u} + O_p(u)$, onde \bar{u} é o levantamento horizontal do vetor $d\pi_p(u)$ em $T_{[p]} \overline{M}/G$. Com isso, o levantamento horizontal \bar{u} de um vetor $d\pi_p(u) \in T_{[p]} \overline{M}/G$ é dado por $\bar{u} = u - O_p(u)$.

Agora, dados $p \in S$ e $u, v \in T_p S$, defina $g^*(u, v) = \bar{g}(u, v) + \bar{g}(O_p(u), O_p(v))$. Mostremos que $f : (S, g^*) \rightarrow (\overline{M}, g)$, definida por $f := \pi|_S$ é uma isometria. De fato, como S é um slice de G , temos que f é uma bijeção. Agora, dados $p \in S$ e $u, v \in T_p S$, temos:

$$\begin{aligned}
 g(df_p(u), df_p(v)) &= g(d\pi_p(u), d\pi_p(v)) \\
 &= \bar{g}(u - O_p(u), v - O_p(v)) \\
 &= \bar{g}(u, v) + \bar{g}(O_p(u), O_p(v)) \\
 &= g^*(u, v).
 \end{aligned}$$

Portanto, f é uma isometria.

□

O Teorema 1.11 é importante porque muitas vezes recorreremos ao uso de um modelo para uma variedade riemanniana para fazer cálculos. Nesse sentido, pode ser mais simples trabalhar com uma subvariedade dentro do modelo do que com a variedade quociente.

Veremos aplicações desse teorema no Capítulo 3.

Capítulo 2

Teorema de Redução e Teorema de Folheação

Este capítulo tem como objetivo apresentar a prova de dois resultados centrais para este trabalho, o Teorema de Redução e o Teorema de Folheação. Além disso, apresentamos um resultado, obtido como corolário do Teorema de Folheação, que nos dá uma condição geométrica suficiente para quando podemos folhear uma variedade.

2.1 O Teorema de Redução

Seja (M, \bar{g}) uma variedade riemanniana completa de dimensão 3 e X um campo Killing em M . Denote por G o subgrupo a 1-parâmetro de isometrias associado a X . Seja M/G a variedade quociente equipada com a métrica g que faz a projeção natural $\pi : (M, \bar{g}) \rightarrow (M/G, g)$ ser uma submersão riemanniana. Vamos denotar $\pi^{-1}(p)$ por $G(p) := \{h(p) \in M \mid h \in G\}$, ou seja, $G(p)$ é a órbita de p em M .

Seja $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $v(p) = \bar{g}(X, X)(p)$. Como X é um campo de Killing em M , v é constante em $G(p)$ para todo p em M . Por isso, podemos

definir v em M/G usando a projeção π .

Vamos denotar por $\bar{\nabla}$, ∇ e ∇^* as respectivas conexões riemannianas de (M, \bar{g}) , $(M/G, g)$ e $(M/G, g^*)$, onde g é a métrica natural que faz $\pi : M \rightarrow M/G$ ser uma submersão riemanniana e g^* é a métrica conforme dada por $g^*(X, Y)(p) = v(p)g(X, Y)(p)$, com $X, Y \in T_p(M/G)$.

Definição 2.1. Sejam Σ uma superfície em M e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo a 1-parâmetro que age propriamente e livremente em M . Dizemos que Σ é uma superfície G -invariante se $G(\Sigma) \subset \Sigma$.

Agora, provamos o Teorema de Redução.

Teorema 2.2 (Teorema de Redução). *Sejam (M, \bar{g}) uma variedade riemanniana completa de dimensão 3 e X um campo de Killing definido em M . Seja $G \subset Iso(M)$ o subgrupo a 1-parâmetro associado a X e suponha que G age livremente e propriamente em M . Defina a função $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $v(p) = \bar{g}(X, X)(p)$. Equipe M/G com a métrica $g^* := vg$, onde g é a métrica em M/G que torna $\pi : M \rightarrow M/G$ uma submersão riemanniana.*

Seja $\Sigma \subset M$ uma superfície invariante por G e α uma parametrização da curva $\pi(\Sigma) \subset (M/G, g^)$ tal que $g^*(\alpha', \alpha') \equiv 1$. Então Σ é uma superfície mínima se, e somente se, α for uma geodésica em $(M/G, g^*)$.*

Demonstração. Seja η um vetor unitário (com respeito a métrica g^*) ortogonal a α . Vamos provar a igualdade:

$$g^*(\nabla_{\alpha'}^* \alpha', \eta) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\beta'} \beta', \bar{\eta}) + \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{X}{\sqrt{v}}} \frac{X}{\sqrt{v}}, \bar{\eta}\right) = -2H\sqrt{v}, \quad (2.1)$$

onde H representa a curvatura média de Σ e β' é o campo tangente de uma curva β , tal que $|\beta'| \equiv 1$ e $(\pi \circ \beta) = \alpha$. Para fazer isso, utilizamos a Proposição 1.3 para obter:

$$g^*(\nabla_{\alpha'}^* \alpha', \eta) = g^*(\nabla_{\alpha'} \alpha', \eta) - \frac{1}{2v} \{g(\alpha', \alpha')g^*(\text{grad}_g(v), \eta)\}$$

$$\begin{aligned}
&= vg(\nabla_{\alpha'}\alpha', \eta) - \frac{1}{2v} \{g(\text{grad}_g(v), \eta)\} \\
&= v\bar{g}(\overline{\nabla_{\alpha'}\alpha'}, \bar{\eta}) - \frac{1}{2v} \{\bar{g}(\overline{\text{grad}_g(v)}, \bar{\eta})\} \\
&= v\bar{g}(\overline{\nabla_{\alpha'}\alpha'}, \bar{\eta}) - \frac{1}{v}\bar{g}(\overline{\nabla_{\bar{\eta}}X}, X). \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Como X é um campo de Killing, segue da Proposição 1.9 e da igualdade (2.2) que:

$$\begin{aligned}
g^*(\nabla_{\alpha'}^*\alpha', \eta) &= v\bar{g}(\overline{\nabla_{\alpha'}\alpha'}, \bar{\eta}) + \frac{1}{v}\bar{g}(\overline{\nabla_X X}, \bar{\eta}) \\
&= v\bar{g}(\overline{\nabla_{\alpha'}\alpha'}, \bar{\eta}) + \bar{g}\left(\overline{\nabla_{\frac{X}{\sqrt{v}}}\frac{X}{\sqrt{v}}}, \bar{\eta}\right). \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Observe que $\bar{\eta}$ é ortogonal a $\bar{\alpha}'$ e também é ortogonal a X , já que $\bar{\eta}$ é um vetor horizontal. Além disso, note que $\langle \bar{\eta}, \bar{\eta} \rangle_{\bar{g}} \equiv \frac{1}{v}$. Agora, temos que $\bar{\alpha}$ é uma curva em M tal que $(\pi \circ \bar{\alpha}) = \alpha$. Logo, podemos definir β uma reparametrização de $\bar{\alpha}$ tal que $\beta' = \sqrt{v} \bar{\alpha}'$, assim $(\pi \circ \beta) = \alpha$ e $\beta' \equiv 1$. Portanto, temos, de (2.3), que:

$$g^*(\nabla_{\alpha'}^*\alpha', \eta) = \bar{g}(\overline{\nabla_{\beta'}\beta'}, \bar{\eta}) + \bar{g}\left(\overline{\nabla_{\frac{X}{\sqrt{v}}}\frac{X}{\sqrt{v}}}, \bar{\eta}\right) = -2H\sqrt{v},$$

que é exatamente a equação (2.1).

Agora, como temos $g^*(\alpha', \alpha') \equiv 1$, segue $g^*(\nabla_{\alpha'}^*\alpha', \alpha') = 0$. Logo, usando a equação (2.1), temos que Σ é uma superfície mínima se, e somente se, α for uma geodésica em $(M/G, g^*)$. \square

Observamos que a cohomogeneidade do Grupo G associado ao campo de Killing no teorema acima é 2, já que as órbitas têm dimensão 1 e M tem dimensão 3. Se a cohomogeneidade do grupo é 1, teríamos órbitas de dimensão 2, isto é, as órbitas de G já são superfícies dentro de M . Logo, estudar um grupo agindo em cohomogeneidade 1, nesse caso, não traz informação adicional para entender as superfícies de M , já que as próprias órbitas são as superfícies.

2.2 O Teorema de Folheação

Nesta subseção, provamos o Teorema de Folheação. A prova deste teorema é uma aplicação do Teorema da Redução.

Teorema 2.3 (Teorema de Folheação). *Sejam (M, \bar{g}) uma variedade riemanniana, completa e orientável de dimensão 3 e X um campo de Killing definido em M . Seja $G \subset Iso(M)$ o subgrupo a 1-parâmetro associado a X e suponha que G age livremente e propriamente em M . Seja $\pi : M \rightarrow M/G$ a projeção natural e g a métrica em M/G que torna π uma submersão riemanniana. Equipe M/G com a métrica conforme g^* definida por $g^* := vg$, onde v é a função definida no Teorema de Redução.*

Então M admite uma folheação \mathcal{F} por superfícies mínimas G -invariantes se, e somente se, existir uma curva Γ completa e mergulhada em M/G , tal que a aplicação $\exp^\perp : (T\Gamma)^\perp \rightarrow M/G$, dada por $\exp^\perp(q, v) = \exp(q, v)$, onde $q \in \Gamma$ e $v \in T_q\Gamma^\perp$, é um difeomorfismo. Além disso, $\Sigma \in \mathcal{F}$ se, e somente se, existe γ uma geodésica de $(M/G, g^)$ ortogonal a Γ tal que $\Sigma = \pi^{-1}(\gamma)$.*

Demonstração. Suponha que exista Γ uma curva em M/G tal que $\exp^\perp : (T\Gamma)^\perp \rightarrow M/G$ seja um difeomorfismo. Dado $p \in \Gamma$, considere $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M/G$ a parametrização de Γ na vizinhança de p tal que $\alpha(0) = p$. Defina $F : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow M/G$ por $F(s, t) = \exp^\perp(\alpha(s), tv)$, com $|v| = 1$. Como podemos fazer este processo para cada $p \in \Gamma$, temos uma folheação \mathcal{F}^* de M/G por geodésicas ortogonais a Γ . Agora, defina o conjunto $\mathcal{F} := \{\Sigma \subset M \mid \Sigma = \pi^{-1}(\gamma), \gamma \in \mathcal{F}^*\}$. Como \mathcal{F}^* é uma folheação de M/G , \mathcal{F} é uma folheação por superfícies G -invariantes de M . Além disso, pelo Teorema da Redução, cada folha de \mathcal{F} é uma superfície mínima.

Agora, suponha que exista uma folheação \mathcal{F} de M por superfícies mínimas que são G -invariantes. Defina $\mathcal{F}^* := \{\gamma \subset M/G \mid \gamma = \pi(\Sigma), \Sigma \in \mathcal{F}\}$. Assim, \mathcal{F}^* é uma

folheação de M/G . Além disso, como cada folha de \mathcal{F} é uma superfície mínima G -invariante e pelo Teorema da Redução, cada folha de \mathcal{F}^* é uma geodésica em $(M/G, g^*)$. Defina um campo vetorial X em M/G ortonormal à geodésica γ_k da folheação \mathcal{F}^* de tal forma que a base $\{X, \gamma'_k\}$ seja positiva. Observe que X está bem definido e está definido globalmente. Escolha para a curva Γ uma curva integral do campo vetorial X . Como X é um campo vetorial unitário, a curva integral é completa. \square

O seguinte corolário nos dá uma condição geométrica suficiente para a aplicação do Teorema de Folheação.

Corolário 2.4. *Sejam M e G como no Teorema de Folheação. Se $(M/G, g^*)$ é uma variedade de Hadamard, onde g^* é definido como antes, então M admite uma folheação por superfícies mínimas G -invariantes completas e propriamente mergulhadas em M .*

Demonstração. Seja γ uma geodésica em $(M/G, g^*)$. Defina $\exp^\perp : (T\gamma)^\perp \rightarrow (M/G, g^*)$. Como $(M/G, g^*)$ é uma Variedade de Hadamard, γ é uma curva completa e mergulhada em $(M/G, g^*)$ e \exp^\perp é um difeomorfismo. Pelo Teorema de Folheação, existe uma folheação \mathcal{F} de M por superfícies mínimas G -invariantes e, por construção, são propriamente mergulhadas e completas. \square

Capítulo 3

Folheações do espaço hiperbólico

\mathbb{H}^3

Neste capítulo, aplicamos o Teorema de Folheação para exibir folheações do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . Cada uma das folheações é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro do grupo das isometrias de \mathbb{H}^3 . Como esses subgrupos estão relacionados aos campos de Killing de \mathbb{H}^3 , é conveniente apresentar a classificação desses campos, o que será feito na sequência.

O espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 é a variedade riemanniana de dimensão 3, completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional constante $K = -1$. Neste trabalho, vamos utilizar o modelo de semiespaço superior para \mathbb{H}^3 . Assim, vamos considerar $\mathbb{H}^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ com o produto interno dado por:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

Denotamos por \bar{g} a métrica associada a este produto interno.

Os campos de Killing em \mathbb{H}^3 são classificados, a menos de conjugação, em quatro tipos: rotacionais, parabólicos, hiperbólicos e helicoidais. A classificação é baseada no tipo de órbita do campo de Killing: os rotacionais têm órbitas que são círculos

geodésicos, os parabólicas têm órbitas que são horocírculos, já os hiperbólicas são caracterizados por órbitas que são hipercírculos e os helicoidais por uma espécie de hélice; todos eles serão definidos posteriormente. Note que, apesar da classificação ser intrínseca de \mathbb{H}^3 , vamos utilizar um modelo para fazer os cálculos. Uma prova desta classificação pode ser encontrada em [5] no trabalho de Fornari e Ripoll.

3.1 Superfícies mínimas parabólicas

Nesta seção, nós apresentamos uma folheação de \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas parabólicas. Ela está dividida em duas subseções: na primeira, mostraremos a folheação utilizando o Teorema 2.3; na segunda, exibimos a folheação de maneira explícita.

3.1.1 Existência de folheações por superfícies mínimas parabólicas

Nesta subseção, utilizamos o Teorema 2.3 para exibir folheações do \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas parabólicas.

Definição 3.1. Dizemos que um campo de Killing X em \mathbb{H}^3 é parabólico se as órbitas de X são horocírculos.

Dado um campo Killing parabólico X , podemos sempre escolher $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície totalmente geodésica que seja ortogonal a X . Então podemos aplicar uma isometria de \mathbb{H}^3 para considerar este \mathbb{H}^2 como o subconjunto dado por $\mathbb{H}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{H}^3 \mid y = 0\}$ e o campo de Killing parabólico X como $X(p) := a \frac{\partial}{\partial y}(p)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Portanto, usamos este modelo para calcular a métrica g^* .

Seja G o subgrupo a 1-parâmetro de $Iso(\mathbb{H}^3)$ associado a X . Observe que as

órbitas de G cumprem as condições do Exemplo 1.5. Assim, fica bem definida a variedade \mathbb{H}^3/G . Além disso, como X é ortogonal a \mathbb{H}^2 , pelo Teorema 1.11, podemos identificar \mathbb{H}^2 com \mathbb{H}^3/G . Para isso, precisamos definir a projeção:

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{H}^3 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, 0, z).\end{aligned}$$

Como X é ortogonal a \mathbb{H}^2 , vemos que a métrica g que torna π uma submersão Riemanniana é precisamente a métrica \bar{g} restrita a \mathbb{H}^2 .

Agora, vamos determinar a métrica g^* em \mathbb{H}^3/G de acordo com a hipótese do Teorema de Redução. Observe que $|X|^2 = \frac{a^2}{z^2}$. Então a métrica g^* é dada por:

$$ds^2 := \frac{a^2(dx^2 + dz^2)}{z^4}.$$

Assim, calculamos a curvatura seccional K de $(\mathbb{H}^3/G, g^*)$. Para isso, vamos utilizar o seguinte teorema que nos mostra uma maneira direta de obter a curvatura quando a variedade é de dimensão 2 e possui uma parametrização ortogonal.

Proposição 3.2. *Seja (M, g) uma variedade de dimensão 2 e $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização ortogonal de M , isto é, $g\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)(p) = 0, \forall p \in f(U)$. Então a curvatura seccional K de (M, g) é dada por:*

$$K = -\frac{1}{2\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\right|} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x_2} \right|^2 \right)}{\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial}{\partial x_2} \right|} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \right|^2 \right)}{\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial}{\partial x_2} \right|} \right) \right).$$

Uma prova desta Proposição pode ser encontrada em [2] no Capítulo 4.

Conseqüentemente, podemos usar a Proposição 3.2 para calcular a curvatura de $(M/G, g^*)$. Para isso, considere na proposição os seguintes campos coordenados:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Assim, obtemos

$$K(z) = -\frac{2}{a^2 z^2}.$$

Com isso, temos que $(M/G, g^*)$ é uma Variedade de Hadamard e obtemos o próximo teorema como aplicação do Corolário 2.4.

Teorema 3.3. *Para cada campo de Killing parabólico em \mathbb{H}^3 , existe uma folheação de \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas, parabólicas, completas e propriamente mergulhadas.*

3.1.2 Folheação explícita do \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas parabólicas

Nesta subseção, apresentamos um outro caminho para encontrar uma família de superfícies mínimas parabólicas que folheia o \mathbb{H}^3 . Para fazer isso, precisamos encontrar a curva geratriz e percorrer com o fluxo do campo cada um de seus pontos. Vejamos como construir essa família no caso parabólico.

Sejam $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ uma totalmente geodésica e X um campo de Killing ortogonal a \mathbb{H}^2 . Ainda, considere G o subgrupo a 1-parâmetro de isometrias associado a X . Dada α uma curva em \mathbb{H}^2 , com $|\alpha'| \equiv 1$, e defina $\Sigma := \{gp \in \mathbb{H}^3 \mid g \in G \text{ e } p \in \alpha\}$ a superfície gerada pelo fluxo associado a X através dos pontos de α . Assim, Σ é mínima se, e somente se, a curvatura média H for igual a 0. Logo, temos:

$$-2H = \langle \nabla_{\alpha'} \alpha', \eta \rangle + \left\langle \nabla_{\frac{X}{|X|}} \frac{X}{|X|}, \eta \right\rangle = 0, \quad (3.1)$$

onde η é ortogonal a Σ e $|\eta| \equiv 1$.

Consideremos $\mathbb{H}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{H}^3 \mid y = 0\}$ e $X(p) = \frac{\partial}{\partial y}(p)$. Queremos determinar uma curva $\alpha \subset \mathbb{H}^2$ que satisfaça a igualdade (3.1). Com isso, suponha que $\alpha(t) = (x(t), 0, z(t))$. Assim, se $|\alpha'| = 1 \forall t \in \mathbb{R}$, temos que a equação (3.1) em

coordenadas, leva ao sistema:

$$\begin{cases} (x''z' - z''x')z - 2x'z^2 = 0 \\ x'^2 + z'^2 = z^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Portanto, se tivermos funções $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfazem o sistema (3.2), então podemos construir uma superfície mínima parabólica Σ a partir de α .

Proposição 3.4. *Dada uma totalmente geodésica $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$, existe uma família a 1-parâmetro de superfícies mínimas parabólicas $\{\Sigma_k\}_{k>0}$ tal que Σ_k é ortogonal a \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Podemos assumir, sem perda de generalidade, $\mathbb{H}^2 := \mathbb{H}^3 \cap \{y = 0\}$.

Defina um aplicação u_k por:

$$u_k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3 \\ (s, t) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^t (\operatorname{sech}(2v))^{\frac{3}{2}} dv, s, \frac{1}{\sqrt{k}} (\operatorname{sech}(2t))^{\frac{1}{2}} \right).$$

Seja Σ_k a imagem de u_k . Observe que, se $s = 0$, então $t \mapsto u_k(0, t)$ é uma curva em $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ que satisfaz o sistema (3.2). Portanto, Σ_k é uma superfície mínima parabólica. \square

Observação 3.5. Na prova da Proposição 3.4 nós escolhemos a geodésica $\beta(\tau) := (0, 0, e^\tau)$ em \mathbb{H}^2 de modo que todas as curvas $t \mapsto u_k(0, t)$ interceptam ortogonalmente a curva β em $t = 0$. Tal família de curvas é simétrica com relação a essa geodésica, ver Figura 3.1.

Agora, como temos explicitamente a parametrização para Σ_k , podemos mostrar as curvas geratrizes e um esboço da superfícies Σ_k em \mathbb{H}^3 .

Figura 3.1: Curva geratriz γ - caso parabólico

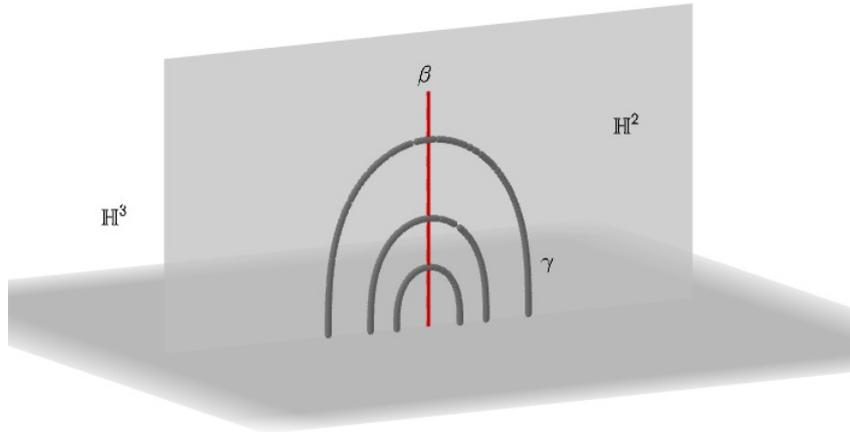
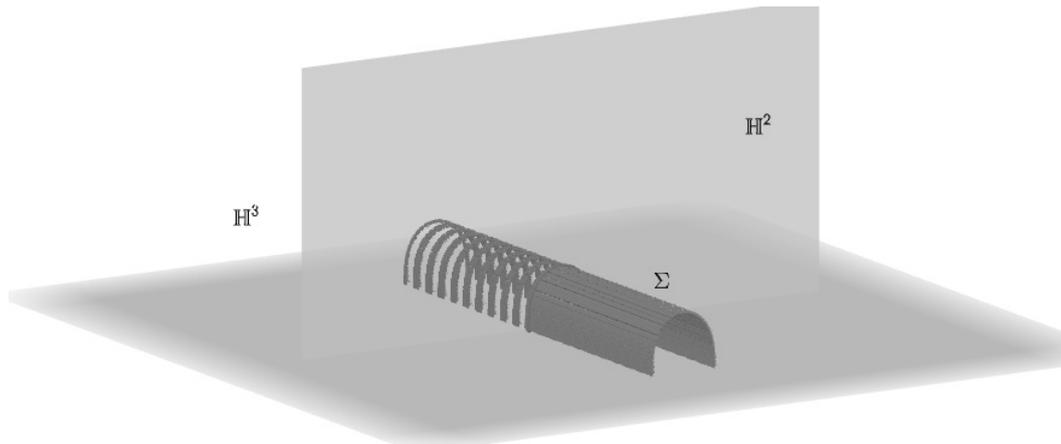


Figura 3.2: Superfície mínima parabólica Σ



Lema 3.6. *A família de curvas $\{\alpha_k\}_{k>0}$, onde $\alpha_k(t) := u_k(0, t)$ e u_k é como na Proposição 3.4, folheia \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Defina a aplicação $F : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ por:

$$F(t, k) = \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^t (\operatorname{sech}(2v))^{\frac{3}{2}} dv, \frac{1}{\sqrt{k}} (\operatorname{sech}(2t))^{\frac{1}{2}} \right).$$

Tudo o que precisamos fazer é mostrar que F é um difeomorfismo global. Fazendo isso, para cada k , $t \rightarrow F(t, k)$ é uma folha da folheação, o que significa que

F folheia \mathbb{H}^2 .

Defina a curva $F_1(t) = F(t, 1)$. Com isso, para cada $k_0 \in (0, +\infty)$, $F_{k_0}(t)$ é uma homotetia da curva $F_1(t)$. Dado $p \in \mathbb{H}^2$, considere a reta que conecta p com a origem, esta reta deve tocar a curva $F_1(t)$ em algum ponto p' . Portanto, podemos escolher a homotetia que leva p' a p . Assim, temos uma curva da família passando pelo ponto p . Portanto, F é uma aplicação sobrejetiva.

Observe que F é diferenciável. Então, para mostrar que F é um difeomorfismo global, vamos provar $\det(DF(t, k)) \neq 0$ para cada k e t no domínio. De fato, calculamos $DF(t, k)$:

$$DF(t, k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k}} (\operatorname{sech} 2t)^{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}} \int_0^t (\operatorname{sech}(2v))^{\frac{3}{2}} dv \\ -\frac{(\operatorname{sech} 2t)^{\frac{1}{2}} \tanh 2t}{\sqrt{k}} & -\frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{sech} 2t)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$\det(DF(t, k)) = -\frac{(\operatorname{sech} 2t)^{\frac{1}{2}}}{2k^2} \left(\tanh 2t \int_0^t (\operatorname{sech} 2v)^{\frac{3}{2}} dv + (\operatorname{sech} 2t)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Portanto, $\det(DF(t, k)) < 0$ para cada k e t no domínio.

□

Assim, o Lema 3.6 prova que podemos folhear o \mathbb{H}^2 . Como cada Σ_k está associado a uma única curva desta família, obtemos uma folheação do \mathbb{H}^3 .

Proposição 3.7. *A família $\{\Sigma_k\}_{k>0}$ dada na Proposição 3.4 folheia o \mathbb{H}^3 .*

Demonstração. Seja $J : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ a aplicação dada por $J(s, t, k) = (s, F(t, k))$, onde F é aquela obtida no Lema 3.6. Então J é um difeomorfismo global. Portanto, $\{\Sigma_k\}_{k>0}$ folheia \mathbb{H}^3 . □

Percebemos, através da construção explícita dessa folheação, que o desenvolvimento feito aqui tem como base a mesma argumentação do Teorema de Folheação, primeiro mostramos uma folheação por curvas, depois utilizamos esse fato para construir uma folheação por superfícies.

3.2 Superfícies mínimas hiperbólicas

Nesta seção, exibimos uma folheação do \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas hiperbólicas. Ela está dividida em duas subseções: na primeira, mostraremos a folheação utilizando o Teorema 2.3; na segunda, apresentamos a folheação de maneira explícita.

3.2.1 Existência de folheações por superfícies mínimas hiperbólicas

Nesta subseção, utilizamos o Teorema 2.3 para mostrar a existência de folheações do \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas hiperbólicas.

Definição 3.8. Dizemos que um campo de Killing X em \mathbb{H}^3 é um campo hiperbólico se as órbitas de X forem hipercírculos.

Seja $f : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma parametrização do \mathbb{H}^3 , menos um arco de círculo, dada por

$$f(\phi, s, t) = e^s(\cos \phi \tanh t, \sin \phi \tanh t, \operatorname{sech} t). \quad (3.3)$$

Para simplificar, identificaremos os pontos do \mathbb{H}^3 pelas suas coordenadas.

Com um argumento semelhante ao que foi feito no caso parabólico, dado um campo de Killing hiperbólico X , escolhemos $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície totalmente geodésica que é ortogonal a X . Com isso, podemos considerar este \mathbb{H}^2 como o

subconjunto dado por $\mathbb{H}^2 := \{(\phi, s, t) \in \mathbb{H}^3 \mid s = 0\}$ e o campo Killing hiperbólico X como $X(p) = ap$, onde $p \in \mathbb{H}^3$ e $a \neq 0$. Portanto, podemos usar este modelo para calcular a métrica g^* .

Seja G o subgrupo a 1-parâmetros de $Iso(\mathbb{H}^3)$ associado a X . Observe que as órbitas de G cumprem as condições do Exemplo 1.5. Assim, fica bem definida a variedade \mathbb{H}^3/G . Além disso, como X é ortogonal a \mathbb{H}^2 , pelo Teorema 1.11, podemos identificar \mathbb{H}^2 com \mathbb{H}^3/G . Para isso, precisamos definir a projeção:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{H}^3 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ (\phi, s, t) &\mapsto (\phi, 0, t). \end{aligned}$$

Novamente, como X é ortogonal a \mathbb{H}^2 , a métrica g que torna π uma submersão riemanniana é precisamente a métrica \bar{g} restrita a \mathbb{H}^2 .

Agora, vamos determinar a métrica g^* em \mathbb{H}^3/G de acordo com a hipótese do Teorema da Redução.

Observe que $|X|^2 = a^2 \cosh^2 t$. Então a métrica g^* é dada por:

$$ds^2 = \frac{a^2((\sinh t)^2 d\phi^2 + dt^2)}{(\operatorname{sech} t)^4}.$$

Assim, calculamos a curvatura seccional K de $(\mathbb{H}^3/G, g^*)$. Para isso, utilizamos novamente a Proposição 3.2, considerando os seguintes campos coordenados da parametrização (3.3):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial t} \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

Assim, obtemos a curvatura de $(\mathbb{H}^3/G, g^*)$:

$$K(t) = -\frac{2(\cosh t)^2 + 1}{a^2(\cosh t)^4}.$$

Portanto, $(\mathbb{H}^3/G, g^*)$ é uma Variedade de Hadamard e obtemos o seguinte teorema como aplicação do Corolário 2.4.

Teorema 3.9. *Para cada campo de Killing hiperbólico em \mathbb{H}^3 existe uma folheação por superfícies mínimas, hiperbólicas, completas e propriamente mergulhadas de \mathbb{H}^3 .*

3.2.2 Folheação explícita do \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas hiperbólicas

Nesta subseção, exibiremos uma folheação explícita do \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas hiperbólicas.

Para obter explicitamente as superfícies invariantes, usamos as coordenadas esféricas em \mathbb{H}^3 , dadas por:

$$\psi(\theta, \phi, s) = e^s(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta), \quad (3.4)$$

com $\theta \in (0, \pi/2)$, $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $s \in \mathbb{R}$. Observe que está parametrização cobre o semiespaço aonde $x > 0$, para cobrir todo \mathbb{H}^3 , basta ajustar o intervalo de definição de ϕ . Além disso, note que para cada s fixo temos a parametrização de uma totalmente geodésica $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$. Além disso, tal \mathbb{H}^2 é ortogonal ao campo de Killing hiperbólico X dado por $X(p) = p$. Então, fixamos $s = 0$.

Queremos encontrar uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$, que em coordenadas é dada por $\alpha(t) = (\cos \phi(t) \sin \theta(t), \sin \phi(t) \sin \theta(t), \cos \theta(t))$ tal que o fluxo de X através de cada um dos seus pontos gere uma superfície mínima $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$. Assim, escrevendo a equação (3.1) nessas coordenadas, obtemos o seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} (\theta'' \phi' - \phi'' \theta') \sin(\theta) - \phi' \cos(\theta)(\theta'^2 + \sin^2(\theta) + 1) = 0 \\ \theta'^2 + \phi'^2 \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta) \end{cases} \quad (3.5)$$

É conveniente apresentar uma versão mais simples do sistema (3.5). Para isso, calculamos a derivada da segunda linha em relação a t e então usamos isso na primeira linha para obter:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_k}{\partial t}(t) = k \cot^2 \theta_k(t) \cos \theta_k(t) \\ \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t) = \cos \theta_k(t) \sqrt{1 - k^2 \cot^2 \theta_k(t) \cos^2 \theta_k(t)}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Proposição 3.10. *Dada uma totalmente geodésica $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$, existe uma família a 1-parâmetro de superfícies mínimas hiperbólicas $\{\Sigma_k\}_{k>0}$ tal que Σ_k é ortogonal a \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, $\mathbb{H}^2 := \text{Im}(\psi|_{s=0})$. Defina, para cada $k > 0$, uma aplicação u_k por:

$$\begin{aligned} u_k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}^3 \\ (s, t) &\mapsto (e^s \cos \phi_k(t) \sin \theta_k(t), e^s \sin \phi_k(t) \sin \theta_k(t), e^s \cos \theta_k(t)), \end{aligned}$$

onde

$$\theta_k(t) = \arctan \left(\sqrt{\frac{z_k(t) - 1}{2}} \right)$$

e

$$\phi_k(t) = \int_0^t \frac{2k\sqrt{2}}{(z_k(s) - 1)\sqrt{z_k(s) + 1}} ds,$$

com $z_k(t) = \sqrt{4k^2 + 1} \cosh(2t)$. Seja Σ_k a imagem de u_k . Observe que, se $s = 0$, então $t \rightarrow u_k(0, t)$ é uma curva em $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ com as funções θ_k e ϕ_k satisfazendo o sistema (3.5). Portanto, Σ_k é uma superfície mínima hiperbólica. \square

Observação 3.11. Na prova da Proposição 3.10 nós escolhemos a geodésica $\gamma(\theta) := \psi(\theta, 0, 0)$ em \mathbb{H}^2 de modo que todas as curvas $t \mapsto u_k(0, t)$ interceptam ortogonalmente γ em $t = 0$. Tal família de curvas é simétrica com relação a essa geodésica.

Agora, como temos a parametrização da curva e da superfície, utilizamos o software GeoGebra para esboçá-la.

Figura 3.3: Curva geratriz $u_k(t)$ - caso hiperbólico

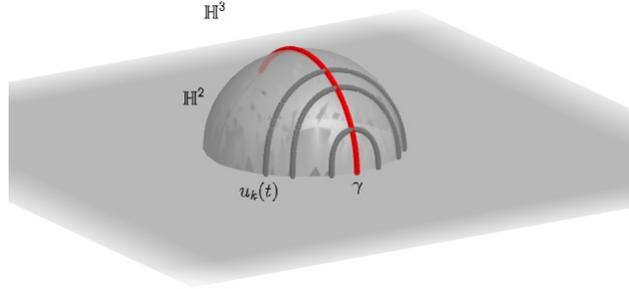
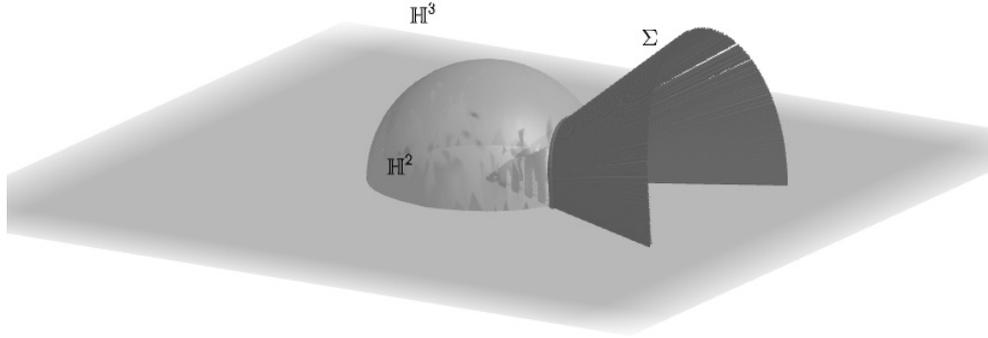


Figura 3.4: Superfície mínima hiperbólica Σ



Lema 3.12. *A família de curvas $\{\alpha_k\}_{k>0}$, onde α_k é definida pelas curvas $t \mapsto u_k(0, t)$ (como na Proposição 3.10), folheia o $\mathbb{H}^2 \cap \{x > 0\}$.*

Demonstração. Defina uma aplicação H por:

$$H : (0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow (0, \pi/2) \times [0, \pi/2)$$

$$(k, t) \mapsto (\theta_k(t), \phi_k(t)),$$

onde $\theta_k(t)$ e $\phi_k(t)$ são aquelas da Proposição 3.10. Pela observação 3.11, podemos olhar somente pro caso $t \geq 0$ pois a curva α_k , para todo k , é simétrica em relação a geodésica que corta cada α_k em $t = 0$. Além disso, se H for um difeomorfismo global, podemos compor H com a parametrização $\psi|_{s=0}$ para obter uma nova parametrização de $\mathbb{H}^2 \cap \{x > 0\}$. Assim, a parametrização $(\psi|_{s=0} \circ H)$ mapeia, para

cada k , uma curva (ou folha) da folheação. Portanto, para provar esse Lema, só precisamos mostrar que H é um difeomorfismo global.

Observe que se fixarmos k_0 , $t \mapsto \theta_{k_0}(t)$ é uma função crescente. Da mesma forma, se fixarmos t_0 , $k \mapsto \theta_k(t_0)$ também é uma função crescente. Além disso, $t \mapsto \phi_{k_0}(t)$ também é crescente. Portanto, se provarmos que $k \mapsto \phi_k(t_0)$ é uma função decrescente, então H é injetiva por monotocidade. Antes de fazermos isso, observe $\lim_{(k,t) \rightarrow (0,0)} \theta_k(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_k(t) = \frac{\pi}{2}$. Portanto, se provarmos $\lim_{k \rightarrow 0} \phi_k(t_0) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(t_0) = 0$ também provamos que H é sobrejetiva. O que passamos a fazer a partir de agora.

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_k}{\partial k}(t) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{2k\sqrt{2}}{(z_k(s) - 1)\sqrt{z_k(s) + 1}} \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{\cosh^2 2s - 1 - 2k^2 \cosh^2 2s - \frac{2k^2}{\sqrt{4k^2 + 1}} \cosh 2s}{(\sqrt{4k^2 + 1} \cosh 2s - 1)^2 (\sqrt{4k^2 + 1} \cosh 2s + 1)^{\frac{3}{2}}} ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, vemos que se $k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, o numerador em (3.7) é negativo. Logo, $\frac{\partial \phi_k}{\partial k}(t) < 0$ para $k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $t \geq 0$. Conseqüentemente, ϕ_k é uma função decrescente para $k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. A partir de agora, vamos estudar com cuidado a função ϕ_k para concluir que ϕ_k também é decrescente para $k < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Primeiro, observe que obtemos, para cada $\theta \in (0, \pi/2)$ fixo, uma função $t(\theta)$. Para isso, basta isolar t na função $\theta_k(t)$. Ainda, defina $\phi_k(t) = \bar{\phi}_k(\theta)$, onde $\bar{\phi}(\theta) := \phi_k(t(\theta))$. Com isso, afirmamos que vale a seguinte definição:

$$\bar{\phi}_k(\theta) = \int_{\theta_k(0)}^{\theta} \frac{k \cot^2 s}{\sqrt{1 - k^2 \cot^2 s \cos^2 s}} ds.$$

De fato, note que:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \frac{d\bar{\phi}_k}{d\theta_k} \frac{d\theta_k}{dt}. \quad (3.8)$$

Agora, do sistema (3.6) temos:

$$\frac{d\theta_k}{dt}(t) = \cos \theta_k(t) \sqrt{1 - k^2 \cot^2 \theta_k(t) \cos^2 \theta_k(t)},$$

o que é sempre positivo. Então,

$$\frac{d\theta_k^{-1}}{dt}(t) = \frac{1}{\frac{d\theta_k}{dt}(t)}.$$

Logo, usamos isso em (3.8) para obter:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\phi}_k}{d\theta_k}(\theta_k) &= \frac{k \cot^2 \theta_k}{\sqrt{1 - k^2 \cot^2 \theta_k \cos^2 \theta_k}} \\ \bar{\phi}_k(\theta) &= \int_{\theta_k(0)}^{\theta} \frac{k \cot^2 s}{\sqrt{1 - k^2 \cot^2 s \cos^2 s}} ds, \end{aligned} \quad (3.9)$$

já que $\bar{\phi}_k(\theta_k(0)) = 0$. De agora em diante, denotaremos $\phi_k(\theta) := \bar{\phi}_k(\theta)$. Observe que, quando $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, temos que $t(\theta) \rightarrow \infty$. Para simplificar a notação, vamos usar $\frac{\pi}{2}$ ao invés de $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} t(\theta)$.

Note que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever:

$$\phi_k(\theta) = \phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cot^2 s}{\sqrt{1 - k^2 \cot^2 s \cos^2 s}} ds. \quad (3.10)$$

Observe que, para $\theta \in \left(\theta_k(0), \frac{\pi}{2}\right)$, temos

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{k \cot^2 s}{\sqrt{1 - k^2 \cot^2 s \cos^2 s}} \right) = \frac{\cot^2 s (\sqrt{1 - k^2 \cot^2 s \cos^2 s}) + 2k^2 \cot^2 s}{(1 - k^2 \cot^2 s \cos^2 s)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Assim, a segunda parcela de (3.10) é decrescente em k para todo $k > 0$. Logo, se mostrarmos que $\phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ é decrescente em k para $k < \frac{\sqrt{2}}{2}$, teremos por (3.7) e (3.10), que ϕ_k é decrescente em k para todo $k \in (0, +\infty)$.

Primeiro, observe que $\phi_k(\theta) = 0$ quando $t = 0$. Assim, reescrevemos (3.10) como

$$\phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\theta_k(0)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cot^2 s}{\sqrt{1 - k^2 \cot^2 s \cos^2 s}} ds.$$

Vamos analisar $\phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Defina $\beta = \sqrt{4k^2 + 1}$. Assim, $\theta_k(0) = \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta - 1}{2}}\right)$.

Agora, vamos fazer a mudança de variáveis $v = \sqrt{\frac{\beta + 1}{2}} \cos s$. Assim, quando $s = \pi/2$, $v = 0$; quando $s = \theta_k(0)$, $v = 1$. Temos:

$$\begin{aligned}\phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cot^2 s}{\sqrt{1 - k^2 \cot^2 s \cos^2 s}} ds \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{\beta^2 - 1}}{2} \int_0^1 \frac{v^2}{\left(\frac{\beta+1}{2} - v^2\right)\sqrt{\beta + 1 - 2v^2 - (\beta - 1)v^4}} dv. \quad (3.11)\end{aligned}$$

Vamos usar o Teorema dos Resíduos para resolver a integral (3.11). Defina $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $G : \mathbb{C} \setminus \{v_0, -v_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$F(v) = \sqrt{\beta + 1 - 2v^2 - (\beta - 1)v^4}$$

e

$$G(v) = \frac{v^2}{\left(\frac{\beta+1}{2} - v^2\right)F(v)},$$

onde $v_0 = \sqrt{\frac{\beta + 1}{2}}$. Como a função $\frac{1}{\sqrt{z}}$, $z \in \mathbb{C}$, é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, temos que G será holomorfa desde que $F(v) \notin \mathbb{R}^+$. Assim, vamos encontrar um domínio tal que $F(v) \notin \mathbb{R}^+$. Primeiro, vamos determinar quando $F(v) \in \mathbb{R}^+$. Seja $v = a + bi$, segue que:

$$\begin{aligned}F(v) &= (\beta + 1) - 2(a^2 - b^2) - (\beta - 1)((a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2) + \\ &\quad - (4ab + (\beta - 1)4ab(a^2 - b^2))i.\end{aligned}$$

Assim, $F(v)$ é um número real puro quando $a = 0, b = 0$ ou $1 + (\beta - 1)(a^2 - b^2) = 0$.

Vamos analisar cada caso para saber quando ele é um real puro e positivo.

1. Caso $a = 0$: se $a = 0$, então

$$\operatorname{Re}(F(v)) = \beta + 1 + 2b^2 - (\beta - 1)b^4.$$

Assim, $Re(F(v)) \geq 0$ quando $-\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}} \leq b \leq \sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}$.

2. Caso $b = 0$: se $b = 0$, então

$$Re(F(v)) = \beta + 1 - 2a^2 - (\beta - 1)a^4.$$

Assim, $Re(F(v)) \geq 0$ quando $-1 \leq a \leq 1$.

3. Caso $1 + (\beta - 1)(a^2 - b^2) = 0$: nesse caso, podemos reescrevê-lo como

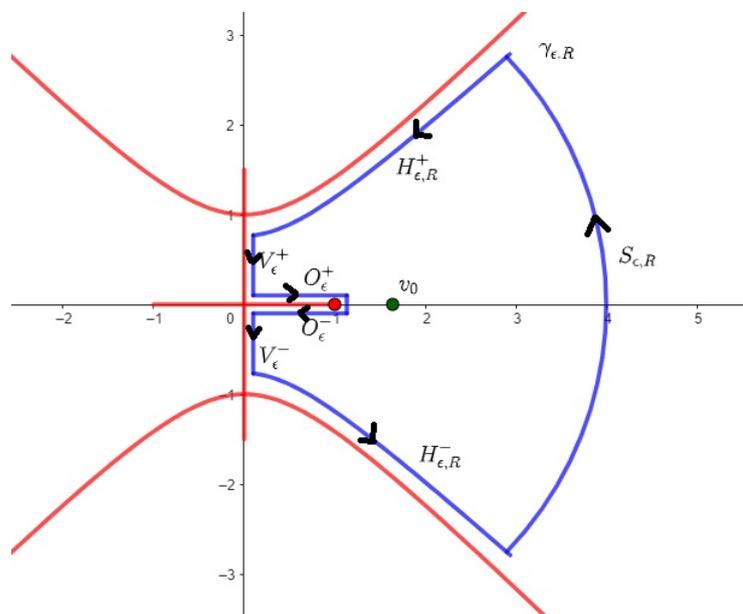
$$b^2 - a^2 = \frac{1}{\beta - 1}. \quad (3.12)$$

Assim, $Re(F(v)) \geq 0$ na região limitada pelos ramos da hipérbole descrita pela equação (3.12).

Dados $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $R > 0$ suficientemente grande, vamos definir por $\gamma_{\epsilon,R}$ o bordo do domínio que contém o polo v_0 , onde $\gamma_{\epsilon,R} := S_{\epsilon,R} \cup H_{\epsilon,R}^+ \cup H_{\epsilon,R}^- \cup V_{\epsilon}^+ \cup V_{\epsilon}^- \cup O_{\epsilon}^+ \cup O_{\epsilon}^-$, com

- $S_{\epsilon,R}$ é um arco de circunferência centrado na origem;
- $H_{\epsilon,R}^{\pm}$ são ramos de uma hipérbole cujo ponto de intersecção com o eixo imaginário dista ϵ da intesercção da hipérbole $b^2 - a^2 = \frac{1}{\beta - 1}$ com o mesmo eixo;
- V_{ϵ}^{\pm} são segmentos verticais que distam ϵ do eixo imaginário;
- O_{ϵ}^{\pm} são segmentos horizontais que distam ϵ do eixo real.

Figura 3.5: Curva $\gamma_{\epsilon,R}$



Pelo Teorema dos Resíduos, temos:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_{\epsilon,R}} G(v)dv &= Res(G, v_0) \\
 &= 2\pi i \lim_{v \rightarrow v_0} (v - v_0)G(v) \\
 &= 2\pi i \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{v^2}{(v + v_0)\sqrt{F(v)}} \\
 &= \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\gamma_{\epsilon,R}} G(v)dv &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{O_{\epsilon}^+} G(v)dv + \int_{O_{\epsilon}^-} G(v)dv + \int_{V_{\epsilon}^+} G(v)dv + \int_{V_{\epsilon}^-} G(v)dv \\
 &+ \int_{H_{\epsilon,R}^+} G(v)dv + \int_{H_{\epsilon,R}^-} G(v)dv + \int_{S_{\epsilon,R}} G(v)dv.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Vamos analisar cada uma das integrais da equação (3.14). Note que

$$\int_{V_{\epsilon}^-} G(v)dv = \int_{V_{\epsilon}^+} G(\bar{v})d\bar{v},$$

onde $v = a + bi$ e $\bar{v} = a - bi$. Mas quando $\epsilon \rightarrow 0$, $Re(v) \rightarrow 0$. Conseqüentemente, $d\bar{v} = -dv$ e $G(v) = G(\bar{v})$, já que as potências de v são de expoentes pares. Logo,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{V_\epsilon^-} G(v)dv + \int_{V_\epsilon^+} G(v)dv \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{V_\epsilon^+} G(v)dv + \int_{V_\epsilon^+} G(v)dv \right) = 0 \quad (3.15)$$

Agora, observe que quando $\epsilon \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{H_{\epsilon,R}^-} G(v)dv + \int_{H_{\epsilon,R}^+} G(v)dv \right) = \int_{H_R^+ \cup H_R^-} G(v)dv \quad (3.16)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{O_\epsilon^-} G(v)dv + \int_{O_\epsilon^+} G(v)dv \right) = 2 \int_0^1 G(v)dv, \quad (3.17)$$

já que $\int_{O_\epsilon^-} G(v)dv = - \int_{O_\epsilon^+} G(\bar{v})d\bar{v}$. Agora, vamos mostrar que $\int_{S_{\epsilon,R}} G(v)dv \rightarrow 0$, quando $R \rightarrow \infty$. De fato, seja $v = Re^{i\theta}$ em $S_{\epsilon,R}$, onde $-\theta_{\epsilon,R} \leq \theta \leq \theta_{\epsilon,R}$. Assim, $dv = Rie^{i\theta}$. Ainda, como o denominador de $G(v)$ é da ordem 4 e o numerador é da ordem 2, temos que

$$|G(Re^{i\theta})| \leq \frac{C}{R^2},$$

onde C é uma constante. Finalmente,

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_{\epsilon,R}} G(v)dv \right| &\leq \int_{-\theta_{\epsilon,R}}^{\theta_{\epsilon,R}} |G(Re^{i\theta})| |Rie^{i\theta}| d\theta \\ &\leq \frac{C}{R} \int_{-\theta_{\epsilon,R}}^{\theta_{\epsilon,R}} d\theta \leq \frac{2\pi C}{R}. \end{aligned}$$

Logo, quando $R \rightarrow \infty$, temos que $\int_{S_{\epsilon,R}} G(v)dv \rightarrow 0$. Agora, substituimos (3.15), (3.16) e (3.17) em (3.14) para obter:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\gamma_{\epsilon,R}} G(v)dv = 2 \int_0^1 G(v)dv + \int_{H_\infty^+ \cup H_\infty^-} G(v)dv.$$

Ainda, usando (3.11) e (3.13), temos:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\gamma_{\epsilon,R}} G(v)dv = 2 \int_0^1 G(v)dv + \int_{H_\infty^+ \cup H_\infty^-} G(v)dv.$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\beta^2-1}} &= \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{\beta^2-1}}\phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_{H_\infty^+ \cup H_\infty^-} G(v)dv \\ \frac{\pi}{2} &= \phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\beta^2-1}}{4} \int_{H_\infty^+ \cup H_\infty^-} G(v)dv.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Agora, lembramos que $\beta = \sqrt{4k^2 + 1}$. Logo, da igualdade (3.18), temos que se

$$\beta \mapsto \frac{\sqrt{2}\sqrt{\beta^2-1}}{4} \int_{H_\infty^+ \cup H_\infty^-} G(v)dv$$

for uma função crescente para $\beta \in (1, \sqrt{3})$, temos que $\phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ é decrescente para $k \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Como, da equação (3.7), ϕ_k é decrescente para $k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ e para $t \geq 0$, teremos que ϕ_k é decrescente em k para $k > 0$. Vamos analisar o crescimento da função $\frac{\sqrt{2}\sqrt{\beta^2-1}}{4} \int_{H_\infty^+ \cup H_\infty^-} G(v)dv$ para $\beta \in (1, \sqrt{3})$. Para isso, vamos fazer uma mudança de variáveis. Observe que H_∞^+ é o ramo da hipérbole $a^2 - b^2 = \frac{1}{\beta - 1}$, onde $a > 0$ e $b > 0$; H_∞^- é o ramo da hipérbole $a^2 - b^2 = -\frac{1}{\beta - 1}$, onde $a > 0$ e $b < 0$. Assim, temos que $b = \sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}}$ para a curva H_∞^+ e $b = -\sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}}$ para a curva H_∞^- . Como $v = a + bi$, temos que

$$v = a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}} \text{ e } dv = \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}}}i\right) da,$$

em H_∞^+ e

$$v = a - \sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}} \text{ e } dv = \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}}}i\right) da,$$

em H_∞^- . Disso, segue que

$$\begin{aligned}Im\left(\int_{H_\infty^+} G\left(a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}}\right)\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}}}i\right) da\right) + \\ + Im\left(\int_{H_\infty^-} G\left(a - \sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}}\right)\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{\beta - 1}}}i\right) da\right) = 0.\end{aligned}$$

Assim, obtemos que:

$$2Re\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\beta^2-1}}{4} \int_{H_\infty^+ \cup H_\infty^-} G(v)dv\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{\beta-1}(\beta-1) \int_0^\infty \frac{A}{BC} da, \quad (3.19)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \beta^2 + 1 + 8a^4(\beta - 1)^2 + 2a^2(\beta^2 + 3)(\beta - 1); \\ B &= (\beta^2 + 1)^2 + 16a^2(\beta - 1)^2 + 16a^2(\beta - 1); \\ C &= \sqrt{\beta^2 + 4a^4(\beta - 1)^2 + 4a^2(\beta - 1)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{BC} \right) > 0$ para $\beta \in (1, \sqrt{3})$, temos, por (3.19), que

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\beta^2 - 1}}{4} \int_{H_{\infty}^+ \cup H_{\infty}^-} G(v) dv$$

é crescente para $\beta \in (1, \sqrt{3})$. Observe que, como existe $t = 0$ tal que $\phi_k(0) = 0$ e $\phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ é decrescente em k , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (3.20)$$

Finalmente, quando $\beta \rightarrow 1$, temos que $k \rightarrow 0$. Assim, tomando o limite $\beta \rightarrow 1$ na equação (3.18), temos que $\phi_k\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Isso conclui que H é uma bijeção. Para mostrar que H é um difeomorfismo, vamos analisar a sua diferencial, o que passamos a fazer.

Podemos obter, derivando as funções $\theta_k(t)$ e $\phi_k(t)$ em relação a t e k , as seguintes expressões:

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial k}(k, t) = \frac{4k \cosh 2t}{(z_k(t) + 1)\sqrt{4k^2 + 1}}$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial t}(k, t) = \frac{2\sqrt{4k^2 + 1} \sinh 2t}{z_k(t) + 1}$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial k}(k, t) = \frac{\partial}{\partial k} \left(\int_0^t \frac{2k\sqrt{2}}{(z_k(s) - 1)\sqrt{z_k(s) + 1}} ds \right) := f(k, t)$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t}(k, t) = \frac{2k\sqrt{2}}{(z_k(t) - 1)\sqrt{z_k(t) + 1}}$$

Assim, calculamos o determinante da diferencial de H . Observe que:

$$DH(k, t) = \begin{pmatrix} \frac{4k \cosh 2t}{(z_k(t)+1)\sqrt{4k^2+1}} & \frac{2\sqrt{4k^2+1} \sinh 2t}{z_k(t)+1} \\ f(k, t) & \frac{2k\sqrt{2}}{(z_k(t)-1)\sqrt{z_k(t)+1}} \end{pmatrix}.$$

Temos que:

$$\det(DH(k, t)) = \frac{8k^2\sqrt{2} \cosh 2t\sqrt{z_k+1} - 2(4k^2+1) \sinh 2t(z_k^2-1)f(k, t)}{(z_k^2-1)\sqrt{4k^2+1}(z_k+1)}.$$

Observe que

$$8k^2\sqrt{2} \cosh 2t\sqrt{z_k+1} > 0$$

e

$$2(4k^2+1) \sinh 2t(z_k^2-1) \geq 0$$

para todo k e t no domínio. Logo, se $f(k, t) < 0$, temos que $\det(DH(k, t)) > 0$ para todo (k, t) no domínio. Note que, para que f seja negativa, é suficiente que ϕ_k seja decrescente em k . Mas, para mostrar que H é bijeção, mostramos que ϕ_k é decrescente em k . Logo, H é um difeomorfismo. □

Note que o Lema 3.12 garante a folheação de $\mathbb{H}^2 \cap \{x > 0\}$. Mas, por simetria do \mathbb{H}^2 , podemos associar cada curva α_k a uma curva α_{-k} , onde esta é a curva simétrica com relação ao plano $\{x = 0\}$. Além disso, considere para $k = 0$ a curva α_0 como sendo a geodésica no plano $\{x = 0\}$. Assim, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.13. *A família $\{\Sigma_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ dada na Proposição 3.10 folheia o \mathbb{H}^3 .*

Demonstração. Seja $J : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ a aplicação dada por $J(s, k, t) = (s, H(k, t))$, onde H é aquela obtida no Lema 3.12. Então J é um difeomorfismo global. Portanto, $\{\Sigma_k\}_k$ folheia \mathbb{H}^3 . □

3.3 Superfícies mínimas helicoidais

Nesta seção, vamos apresentar uma folheação do \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas helicoidais. Primeiro, vamos definir um campo de Killing rotacional.

Definição 3.14. Dizemos que um campo de Killing Z em \mathbb{H}^3 é rotacional se as órbitas de Z são círculos geodésicos ou pontos.

É possível mostrar que os centros das órbitas estão alinhados em uma geodésica, que é o conjunto de pontos fixos de Z . Agora, definimos um campo de Killing helicoidal.

Definição 3.15. Dizemos que um campo Killing X em \mathbb{H}^3 é helicoidal se $X = Y + Z$, onde Y é hiperbólico, Z é rotacional e $[Y, Z] = 0$.

A condição dos colchetes de Lie ser nulo é o que garante que a rotação seja em torno de uma geodésica fixa. Portanto, as órbitas de um campo de Killing helicoidal são uma espécie de hélice, como conhecemos do \mathbb{R}^3 , cujo eixo é a geodésica fixa pela rotação.

Vamos utilizar a parametrização f de \mathbb{H}^3 , onde f é o mesma do caso hiperbólico dada pela igualdade (3.3). Então, dado um campo de Killing helicoidal X em \mathbb{H}^3 , escolhemos $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície totalmente geodésica que é ortogonal à geodésica invariante por X . Assim, \mathbb{H}^2 é o subconjunto dado por $\mathbb{H}^2 := \{(\phi, s, t) \in \mathbb{H}^3 \mid s = 0\}$ e o campo de Killing helicoidal X é dado por $X = a \frac{\partial f}{\partial s} + b \frac{\partial f}{\partial \phi}$, onde a e b são parâmetros reais que representam o passo da hélice determinado pelas órbitas de X , com $a \neq 0$. Usamos este modelo para calcular a métrica g^* .

Novamente, seja $G \subset Iso(\mathbb{H}^3)$ o subgrupo a 1-parâmetro associado a X . Observe que as órbitas de G cumprem as condições do Exemplo 1.5. Assim, fica bem definida a variedade \mathbb{H}^3/G . Entretanto, este caso é um pouco diferente dos outros. Aqui, o

campo de Killing X não é ortogonal a \mathbb{H}^2 . Portanto, primeiro precisamos calcular a métrica g onde $\pi : \mathbb{H}^3 \rightarrow (\mathbb{H}^3/G, g)$ é uma submersão riemanniana. Como o campo vetorial X não é tangente a \mathbb{H}^2 , pelo Teorema 1.11, podemos equipar \mathbb{H}^2 com uma métrica \hat{g} tal que (\mathbb{H}^2, \hat{g}) é isométrico a $(\mathbb{H}^3/G, g)$. Assim, a métrica \hat{g} pode ser obtida por:

$$\hat{g}(Y, Z)(p) = \bar{g}(Y, Z)(p) + \bar{g}(O_p(Y), O_p(Z)),$$

onde $Y, Z \in T_p\mathbb{H}^2$ e \bar{g} denota a métrica canônica em \mathbb{H}^3 . Agora, se colocarmos a equação (3.3) no modelo de \mathbb{H}^3 que discutimos anteriormente, temos que a métrica \hat{g} que é dada por:

$$ds^2 = \left(\frac{|X|^2 + b^2(\sinh t)^2}{|X|^2} \right) (\sinh t)^2 d\phi^2 + dt^2,$$

onde $|X|^2 = a^2(\cosh t)^2 + b^2(\sinh t)^2$. Portanto, a métrica g^* é dada por:

$$ds^2 = (|X|^2 + b^2(\sinh t)^2) (\sinh t)^2 d\phi^2 + |X|^2 dt^2.$$

Mais uma vez, utilizamos a Proposição 3.2, considerando os seguintes campos coordenados da parametrização (3.3):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial t} \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

Assim, obtemos a curvatura seccional de $(M/G, g^*)$:

$$\begin{aligned} K(t) = & -\frac{1}{|X|^4(|X|^2 + b^2(\sinh t)^2)^2} \left((\cosh t)^6 (2a^6 + 10a^4b^2 + 16a^2b^4 + 8b^6) + \right. \\ & + (\cosh t)^4 (-5a^4b^2 - 26a^2b^4 + a^6 - 24b^6) + (\cosh t)^2 (12a^2b^4 + 24b^6) + \\ & \left. + (-2a^2b^4 - 8b^6) \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Precisamos verificar que a expressão (3.21) é negativa. O que passamos a fazer.

Seja $g_{ab} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida pelo que está dentro do parêntese grande em (3.21). Se g for positivo, então K será negativo. Observe que

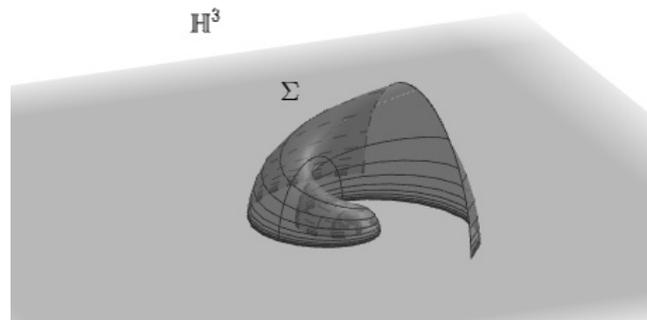
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g_{ab}(t) = 3a^6 + 5a^4b^2 + 12a^2b^4,$$

que é positivo. Ainda, é possível provar que $g'_{ab}(t) > 0, \forall t > 0$. Então g_{ab} é positivo. Portanto, $(\mathbb{H}^3/G, g^*)$ é uma variedade de Hadamard e temos este próximo resultado como uma aplicação do Corolário 2.4.

Teorema 3.16. *Para cada campo de Killing helicoidal em \mathbb{H}^3 existe uma folheação por superfícies mínimas, helicoidais, completas e propriamente mergulhadas de \mathbb{H}^3 .*

Podemos utilizar o GeoGebra para esboçar uma superfície mínima helicoidal.

Figura 3.6: Superfície mínima helicoidal Σ



Capítulo 4

Problema de Plateau Assintótico

em \mathbb{H}^3

Neste capítulo, vamos mostrar que as folheações por superfícies mínimas do capítulo anterior se estendem ao fecho geométrico de $\overline{\mathbb{H}^3} := \mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$. Com isso, é provada a existência de solução para o problema de Plateau assintótico para certas curvas especiais no bordo assintótico de \mathbb{H}^3 .

4.1 Soluções G -invariantes para o problema assintótico de Plateau

Nesta seção, vamos usar as folheações obtidas no Capítulo 3 para exibir soluções para o problema assintótico de Plateau.

Definição 4.1. Seja M uma variedade de Hadamard. Defina raio geodésico como sendo a geodésica $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$, com $|\gamma'| \equiv 1$. O conjunto dos raios geodésicos será denotado por \mathcal{R} .

Definição 4.2. Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{R}$. Dizemos que γ_1 e γ_2 são assintóticos ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) se existe $C > 0$ tal que $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C$, para todo $t \geq 0$.

Com isso, decorre da desigualdade triangular que (\sim) define uma relação de equivalência em \mathcal{R} .

Definição 4.3. Seja M uma variedade de Hadamard. Definimos o bordo assintótico de M ($\partial_\infty M$) como o conjunto $\partial_\infty M := \mathcal{R} / \sim$.

Dizemos que $\overline{M} = M \cup \partial_\infty M$ é a compactificação geodésica de M . É possível mostrar que existe uma topologia em \overline{M} , que estende a topologia de M , de modo que \overline{M} é compacto. Ainda, \overline{M} é o fecho de M . Isso é importante, pois em muitas situações utilizamos sequências em M para trabalhar com pontos em $\partial_\infty M$.

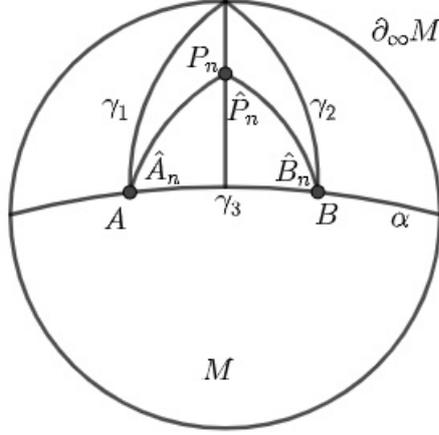
Agora, apresentamos alguns resultados e definições que nos permitem caracterizar o bordo assintótico das superfícies encontradas no Capítulo 3.

Lema 4.4. *Seja M uma variedade de Hadamard de dimensão 2 com curvatura seccional negativa K . Dada α uma geodésica em M , sejam γ_1 e γ_2 raios geodésicos ortogonais a α contidos na mesma componente conexa de $M \setminus \alpha$. Então γ_1 e γ_2 determinam pontos diferentes em $\partial_\infty M$.*

Demonstração. Primeiro, note que γ_1 e γ_2 não se intersectam em M , pois M é uma variedade de Hadamard com $K < 0$.

Agora suponha que γ_1 e γ_2 determinem o mesmo ponto em $\partial_\infty M$. Sejam A e B os pontos em α onde começam os raios geodésicos γ_1 e γ_2 , respectivamente. Considere γ_3 um raio geodésico na mesma componente conexa de γ_1 e γ_2 tal que $\gamma_3(0)$ é o ponto médio em α entre A e B . Defina o triângulo geodésico T_n pelos pontos A, B e $P_n := \gamma_3(n), n > 0$. Veja figura 4.1.

Figura 4.1: Triângulo geodésico



Observe que T_n está contido em T_{n+1} e a curvatura seccional de T_n é estritamente negativa, para todo n . Como γ_1 e γ_2 determinam o mesmo ponto em $\partial_\infty M$, segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{A}_n + \hat{B}_n = \pi, \quad (4.1)$$

onde \hat{A}_n e \hat{B}_n denotam o ângulo em A e B do triângulo T_n , respectivamente. Agora, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, temos:

$$\begin{aligned} \hat{A}_n + \hat{B}_n + \hat{P}_n &= \pi + \int_{T_n} K dA \\ \hat{A}_n + \hat{B}_n &\leq \pi + \int_{T_1} K dA = C, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $C < \pi$. Então, de (4.1) e (4.2), segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{A}_n + \hat{B}_n = \pi \leq C < \pi,$$

o que é uma contradição. Portanto, γ_1 e γ_2 determinam pontos diferentes em $\partial_\infty M$. \square

Definição 4.5. Seja M uma variedade riemanniana de dimensão 3 e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo agindo propriamente e livremente em M . Então, dado um ponto

p em $\partial_\infty M$ e γ um raio geodésico com limite em p , a órbita de p é o conjunto $G(p) := \{q \in \partial_\infty M \mid q \text{ é o ponto limite de } g(\gamma), g \in G\}$.

Definição 4.6. Sejam M uma variedade de Hadamard e Σ uma superfície em M . Definimos o conjunto $\partial_\infty \Sigma := \{p \in \partial_\infty M \mid \exists (p_n) \subset \Sigma \text{ uma sequência de pontos tal que } p_n \rightarrow p\}$.

Lema 4.7. Sejam (M, \bar{g}) uma variedade Hadamard de dimensão 3, $G \subset Iso(M)$ um subgrupo agindo propriamente e livremente em M e (S, g^*) um slice para G , onde g^* é a métrica em S que faz (S, g^*) isométrico a $(M/G, g)$, com g a métrica que faz $\pi : M \rightarrow M/G$ uma submersão riemanniana. Sejam γ um raio geodésico em (S, g^*) e $\Sigma = \pi^{-1}(\gamma)$ a superfície mínima em M gerada por γ . Suponha que $p \in \partial_\infty M$ é o ponto determinado por γ . Então $\partial_\infty \Sigma = G(p)$.

Demonstração. Dado $q \in G(p)$, seja α_q o raio geodésico com limite em q . Como $q \in G(p)$, existem $g \in G$ e α_p um raio geodésico com limite em p tal que $g\alpha_p = \alpha_q$. Seja $\alpha_q(n) \subset \alpha_q$ uma sequência. Assim, $\lim \alpha_q(n) = q$. Com isso, $g^{-1}(\alpha_q(n))$ é uma sequência tal que $\lim g^{-1}(\alpha_q(n)) = p$. Defina $(p_n) \subset \gamma$ como a sequência dada pelo ponto p_n obtido ao se calcular $d(g^{-1}(\alpha_q(n)), \gamma)$, onde d é a função distância. Como $\lim g^{-1}(\alpha_q(n)) = p$ e γ tem limite em p , temos que $\lim p_n = p$. Agora, como $g \in G$ e $(p_n) \subset \gamma$, a sequência gp_n é uma sequência em Σ tal que $\lim gp_n = g(p) = q$. Portanto, $q \in \partial_\infty \Sigma$. Com uma construção semelhante, mostra-se que $\partial_\infty \Sigma \subset G(p)$.

□

Agora, voltemos ao espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , que é uma variedade de Hadamard. Além disso, $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ é, no modelo do semiespaço superior, $\{z = 0\} \cup \{\infty\}$.

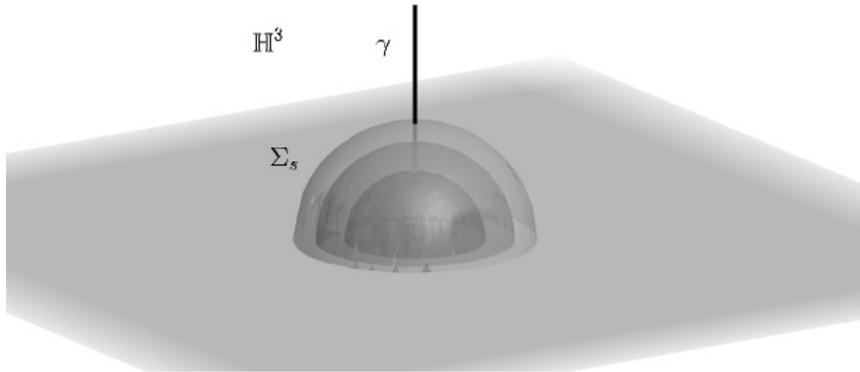
O Lema 4.4 nos garante que as superfícies descritas nas folheações do Capítulo 3 possuem bordos assintóticos distintos. De fato, isso decorre da maneira pela qual elas foram construídas, geodésicas partindo ortogonais a uma outra geodésica base.

O Lema 4.7 caracteriza o bordo assintótico das superfícies descritas no Capítulo 3. Para isso, basta saber qual é a órbita dos pontos determinados por sua curva geratriz.

Agora, usando as superfícies do Capítulo 3, exibimos soluções para o problema assintótico de Plateau, baseado no tipo de curva que cada superfície descreve no bordo assintótico de \mathbb{H}^3 .

Antes de apresentarmos o próximo teorema, observe que é possível construir uma folheação de \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas G -invariantes quando X é um campo de Killing rotacional. Neste caso, é sabido que a família $\{\Sigma_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ de planos hiperbólicos em \mathbb{H}^3 ortogonais a γ , a geodésica fixa pela rotação, folheia \mathbb{H}^3 , onde Σ_s é uma superfície mínima, completa e propriamente mergulhada em \mathbb{H}^3 , ver Figura 4.2. Esta folheação de \mathbb{H}^3 é quase trivial, mas vamos utilizá-la apenas para enunciar o próximo teorema de maneira completa, isto é, para qualquer subgrupo a 1-parâmetro de $Iso(\mathbb{H}^3)$.

Figura 4.2: Família de planos hiperbólicos em \mathbb{H}^3



Teorema 4.8. *Seja G um subgrupo a 1-parâmetro das isometrias de \mathbb{H}^3 . Então existem subconjuntos abertos e conexos G -invariantes $\{\Omega_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ de $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ satisfazendo:*

(i) $\Omega_s \subset \Omega_t$, se $s \leq t$, e $\partial_\infty \mathbb{H}^3 = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \overline{\Omega}_s$;

(ii) para cada $s \in \mathbb{R}$ existe uma superfície Σ_s , onde Σ_s é mínima, completa, propriamente mergulhada e G -invariante tal que $\partial_\infty \Sigma_s = \partial \Omega_s$, com $\{\Sigma_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ folheando \mathbb{H}^3 ;

(iii) Se G é rotacional, então $\{\overline{\Sigma}_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ folheia $\overline{\mathbb{H}^3} \setminus \{p, q\}$, onde p e q são os pontos G -invariantes em $\partial_\infty \mathbb{H}^3$. Caso contrário, $\{\overline{\Sigma}_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ folheia $\overline{\mathbb{H}^3} \setminus C$, onde C é uma curva G -invariante em $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.

Demonstração. Como G é um subgrupo a 1-parâmetro de $Iso(\mathbb{H}^3)$, G está associado a uma das quatro possibilidades de campos Killing em \mathbb{H}^3 . Provamos (i) e (ii) usando a folheação que discutimos antes e aquelas que provamos no Capítulo 3. Suponha que $\{\Sigma_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ seja a folheação de \mathbb{H}^3 por superfícies mínimas, completas, propriamente mergulhadas e G -invariantes. Como $\{\Sigma_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ é uma folheação de \mathbb{H}^3 por superfícies completas e propriamente mergulhadas, cada folha Σ_s divide $\mathbb{H}^3 \setminus \Sigma_s$ em dois subconjuntos conexos: $\tilde{A}_s \subset (\mathbb{H}^3 \setminus \Sigma_s)$ e $(\mathbb{H}^3 \setminus \tilde{A}_s) \subset (\mathbb{H}^3 \setminus \Sigma_s)$, onde $\tilde{A}_s = \bigcup_{t < s} A_t$ e $A_t \subset (\mathbb{H}^3 \setminus \Sigma_s)$ é um conjunto conexo. Defina $\Omega_s := \partial_\infty \tilde{A}_s$. Observe que $\partial \tilde{A}_s = \Sigma_s$ e $\partial_\infty \Sigma_s = \partial \Omega_s$. Pelo Lema 4.4, $\partial_\infty \Sigma_s$ é diferente para cada s . Como $\{\Sigma_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ é uma folheação, $\Sigma_s \cap \Sigma_t = \{\emptyset\}$, se $s \neq t$. Portanto, os subconjuntos \tilde{A}_s são uma sequência crescente (ou decrescente, mas se forem decrescentes, escolhamos a família $\{\tilde{\Sigma}_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ para folhear \mathbb{H}^3 , onde $\tilde{\Sigma}_s = \Sigma_{-s}$). Então Ω_s também é uma sequência crescente em $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ e Ω_s é G -invariante. Portanto, os itens (i) e (ii) são satisfeitos.

Agora, para o item (iii), suponha que G seja rotacional e γ seja a geodésica G -invariante. Seja $\{\Sigma_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ uma família de planos hiperbólicos em \mathbb{H}^3 ortogonais a γ . Então $\{\Sigma_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ folheia \mathbb{H}^3 e $\{\overline{\Sigma}_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ folheia $\overline{\mathbb{H}^3} \setminus \{p, q\}$, onde p e q são os pontos determinados por γ em $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.

Suponha que G não seja rotacional. Note que no Corolário 2.4, que é o corolário que usamos para provar as folheações no Capítulo 3, existe uma geodésica que é usada como base para a folheação. Sejam γ esta geodésica e $\pi : \mathbb{H}^3 \rightarrow (\mathbb{H}^3/G, g^*)$ a projeção natural. Como γ é uma geodésica ortogonal às folhas da folheação $\{\pi(\Sigma_s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ em $(\mathbb{H}^3/G, g^*)$, $\pi^{-1}(\gamma)$ é uma superfície mínima G -invariante em \mathbb{H}^3 que é ortogonal a $\{\Sigma_s\}_{s \in \mathbb{R}}$. Portanto, $\{\bar{\Sigma}_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ é uma folheação de $\mathbb{H}^3 \setminus C$, onde $C = \partial_\infty(\pi^{-1}(\gamma))$ é uma curva G -invariante em $\partial_\infty \mathbb{H}^3$. \square

Como aplicação do Teorema 4.8, temos o seguinte resultado que classifica algumas curvas no bordo assintótico de \mathbb{H}^3 que podem ser minimamente preenchidas, isto é, para aquelas que é possível resolver o problema assintótico de Plateau.

Teorema 4.9. *Sejam G um subgrupo a 1-parâmetro de $\text{Iso}(\mathbb{H}^3)$ e $\Omega \subset \partial_\infty \mathbb{H}^3$ um domínio G -invariante cujo $\partial_\infty \Omega =: \Gamma$ seja conexo. Então existe Σ uma superfície mínima, G -invariante, completa, propriamente mergulhada cujo $\partial_\infty \Sigma = \Gamma$.*

Observe que o \mathbb{H}^3 também pode ser representado no modelo da bola de raio 1 contida em \mathbb{R}^3 , assim o $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ pode ser representado como o bordo dessa bola, ou seja, $\partial_\infty \mathbb{H}^3 = \mathbb{S}^2$. Agora, utilizando o modelo do semiespaço superior e o modelo da bola, apresentamos alguns exemplos de curvas Γ que podem ser minimamente preenchidas conforme o Teorema 4.9.

Figura 4.3: Ω quando X é rotacional

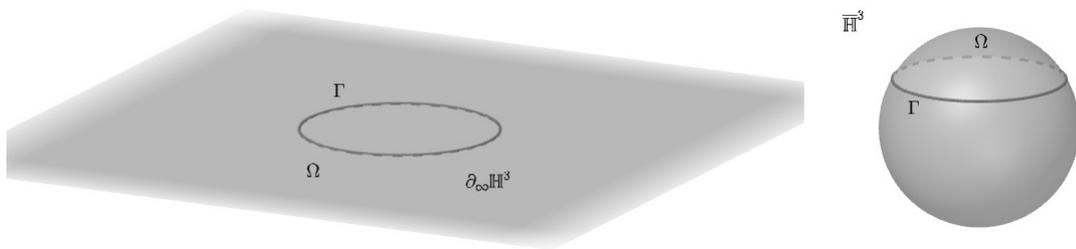


Figura 4.4: Ω quando X é parabólico

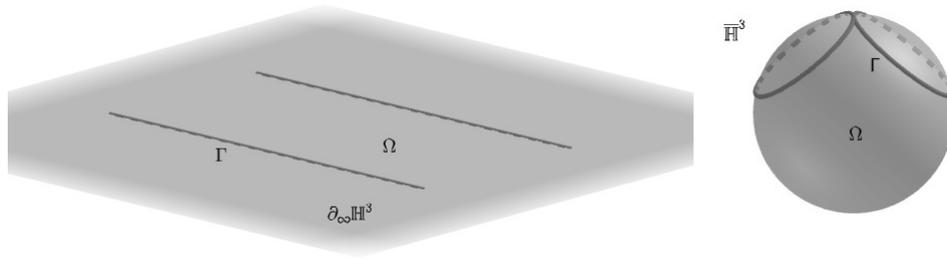


Figura 4.5: Ω quando X é hiperbólico

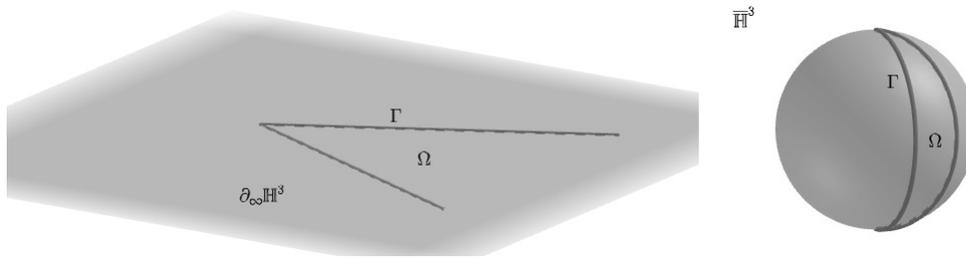
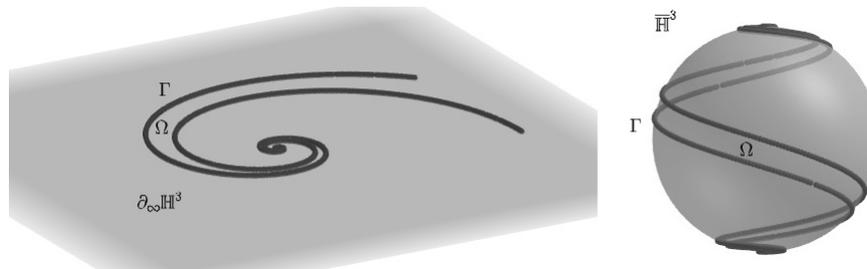


Figura 4.6: Ω quando X é helicoidal



Observação 4.10. O bordo de um domínio Ω , quando X é um campo de Killing helicoidal, descreve a união de duas curvas loxodrômicas no $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ no modelo da bola. Isso, pois, o ângulo entre o $\partial\Omega$ e os meridianos da \mathbb{S}^2 é constante.

Bibliografia

- [1] M. T. Anderson. Complete minimal varieties in hyperbolic space. *Inventiones Mathematicae*, 69:477–494, 1982.
- [2] P. V. Araújo. *Geometria Diferencial*. IMPA, Rio de Janeiro, 3 edition, 2016.
- [3] M. P. d. Carmo. *Geometria riemanniana*. IMPA, 5 edition, 2015.
- [4] M. P. d. Carmo and M. Dajczer. Rotations of hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Transactions American Mathematical Society*, 277(2):685–709, 1983.
- [5] S. Fornari and J. B. Ripoll. Killing fields, mean curvature, translation maps. *Illinois Journal of Mathematics*, 48(4):1385–1403, 2004.
- [6] B. Guan and J. Spruck. Hypersurfaces of constant mean curvature in hyperbolic space with prescribed asymptotic boundary at infinity. *American Journal of Mathematics*, 122:1039–1060, 2000.
- [7] W. Hsiang and H. B. J. Lawson. Minimal submanifolds of low cohomogeneity. *Journal of Differential Geometry*, 3:1–38, 1971.
- [8] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, NY, 2 edition, 2000.
- [9] W. H. Meeks. The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature. *Journal Differential Geometry*, 27:539–552, 1988.

- [10] J. B. Ripoll and M. Telichevesky. On the asymptotic plateau problem for cmc hypersurfaces in hyperbolic space. *Bulletin Brazilian Mathematical Society (online)*, pages 1–11, 2018.
- [11] J. E. Sampaio and E. C. d. Silva. Cmc foliations on euclidean spaces are minimal foliations. <https://arxiv.org/archive/math>, pages 1–22, 2024.