

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Projeto Otimizado sob Incertezas de Sistemas de Controle de  
Vibrações para Pontes Rodoviárias Considerando a Interação  
Veículo-Estrutura-Pavimento**

**Guilherme Piva dos Santos**

Porto Alegre  
2024

GUILHERME PIVA DOS SANTOS

**PROJETO OTIMIZADO SOB INCERTEZAS DE SISTEMAS  
DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES PARA PONTES  
RODOVIÁRIAS CONSIDERANDO A INTERAÇÃO VEÍCULO-  
ESTRUTURA-PAVIMENTO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Porto Alegre  
2024

Piva dos Santos, Guilherme  
Projeto Otimizado Sob Incertezas de Sistemas de  
Controle de Vibrações para Pontes Rodoviárias  
Considerando a Interação Veículo-Estrutura-Pavimento /  
Guilherme Piva dos Santos. -- 2024.  
212 f.  
Orientadora: Letícia Fleck Fadel Miguel.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 2024.

1. Pontes Rodoviárias. 2. Tuned Mass Damper. 3.  
Otimização. 4. Simulação de Monte Carlo. 5. Valores  
Extremos. I. Fleck Fadel Miguel, Letícia, orient. II.  
Título.

**GUILHERME PIVA DOS SANTOS**

**PROJETO OTIMIZADO SOB INCERTEZAS DE SISTEMAS  
DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES PARA PONTES  
RODOVIÁRIAS CONSIDERANDO A INTERAÇÃO VEÍCULO-  
ESTRUTURA-PAVIMENTO**

Esta tese de Doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA, Área de Concentração Estruturas e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 26 de abril de 2024

Prof<sup>a</sup>. Letícia Fleck Fadel Miguel  
Dr<sup>a</sup> pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Orientadora

Prof. Dr. Nilo César Consoli  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Marcelo Maia Rocha (UFRGS)**  
Dr. techn. pela Universität Innsbruck

**Prof. Carlos Eduardo Rossigali (UFPR)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. José Guilherme Santos da Silva (UERJ)**  
Dr. pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Dedico essa tese aos meus pais, Cassio e Anilda de Fátima;  
à minha avó, Anilda Luzia e aos meus irmãos Paulo Piva e  
Isabella Cristina Piva.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora, a Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Leticia Fleck Fadel Miguel por sua dedicação, paciência, incentivo e pela confiança depositada em mim do início até a conclusão desse trabalho. Esse apoio e confiança foram fundamentais para que essa tese fosse desenvolvida.

Agradeço aos professores da banca de avaliação dessa tese, Prof. Dr. Mauro Real, Prof. Dr. Carlos Rossigali, o Prof. Dr. Marcelo Rocha e o Prof. Dr. José Guilherme pelas correções, sugestões e melhorias apontadas na qualificação e na defesa final dessa pesquisa.

Agradeço aos meus pais Cassio dos Santos e Anilda de Fátima Piva pelo incentivo, dedicação, credibilidade que em depositam em mim, pelo apoio financeiro, pois durante esses 4 anos de doutorado não fui contemplado com bolsa e por fazer com que eu nunca deixe de acreditar que a educação é capaz de mudar a vida das pessoas.

Quero deixar os meus agradecimentos a minha avó Anilda Luzia pelo carinho e incentivo durante toda a minha jornada acadêmica. Lamento que meus avôs Domingos Piva e Décio dos Santos, *in memoriam*, não estejam presentes nesse momento da minha jornada acadêmica.

Agradeço o meu amigo e mentor, Prof. Dr. Eduardo Costa Couto da UFPel por ter me incentivado a seguir na pós-graduação e por ser uma pessoa sempre disposta a ajudar.

Agradeço o Prof. Dr. Gerson Cavalheiro da UFPel por permitir que eu utilizasse os servidores do Programa de Pós-graduação em Computação da UFPel para executar o programa desenvolvido nesta tese e gerar uma parte dos resultados apresentados e ao técnico responsável pelos servidores Vilnei Neves por ser sempre solícito e me auxiliar com as dúvidas relativas ao uso do Linux.

Agradeço os professores Luiz Cláudio, Cintia Gonçalves, e Sérgio Cambraia do curso de Engenharia Eletrônica do IFSP e a técnica em Eletrônica, professora substituta e minha aluna do curso de técnico em edificações, Simone Leite pela paciência, pelo auxílio e por cederem um computador em seu grupo de pesquisa para executar e gerar os resultados dessa tese durante o período que trabalhei IFSP. A ajuda desses profissionais foi fundamental e merece o meu reconhecimento e gratidão.

Agradeço ao professor Guilherme Alencar da UnB pela sua parceria, seu interesse no trabalho que desenvolvi durante o mestrado e por estar sempre disposto a ajudar no que fosse preciso. Espero que após a conclusão dessa tese possamos retomar essa parceria.

Agradeço a Prof<sup>ª</sup> Cátia Costa e Silva e os professores substitutos, Isabela Parra e João Michelin, do IFSP pela oportunidade de termos trabalhado juntos nas disciplinas de concreto armado e estruturas metálicas 1 e 2, pela parceria e pelo conhecimento compartilhado.

Quero agradecer os demais professores do Departamento de Construção Civil do IFSP, em especial, Tatiana Simão, César Valente, Ana Carmona, Letícia Machado, Paulo Borges, Luciano Ribeiro, Palloma, Armando e Omar Ayubi, pelo acolhimento, amizade e os bons momentos durante esses 4 semestres em que fui professor substituto. Agradeço também a Coordenadora do Curso Técnico de Edificações, Lais Ywashima, por ser uma pessoa acessível, pelas orientações e conselhos que me fizeram um professor iniciante/substituto e um ser humano melhor.

Gostaria de agradecer a todos os alunos das turmas dos Cursos de Engenharia Civil e do Técnico em Edificações que tive a oportunidade de conhecer e ministrar aulas ao longo de quatro semestres. Da mesma maneira que vocês sabiam que eu estava fazendo doutorado e torciam para que tivesse sucesso na realização dessa pesquisa, eu também desejo que cada um de vocês tenha sucesso em suas vidas profissionais.

Por fim, gostaria de deixar os meus sinceros agradecimentos e gratidão a todas as pessoas que de forma direta ou indireta me auxiliaram durante esses quatro anos de pesquisa e estudo para realização do doutorado.

Muito obrigado!

O período de maior ganho em conhecimento e experiência é o período mais difícil na vida de alguém.

*Dalai Lama*

Aprendi através da experiência amarga a suprema lição: controlar minha ira e torná-la como o calor que é convertido em energia. Nossa ira controlada pode ser convertida numa força capaz de mudar o mundo.

*Mahatma Gandhi*

## RESUMO

SANTOS, G. P. **Projeto Otimizado sob Incertezas de Sistema de Controle de Vibrações para Pontes Rodoviárias Considerando a Interação Veículo-Estrutura-Pavimento.** 2024. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre.

Quando se pretende fazer a análise dinâmica de uma ponte devem ser levados em consideração vários fatores, tais como, frequência natural e vão para a estrutura, velocidade, massa e sistema de suspensão para os veículos e o perfil de irregularidade do pavimento. A interação do veículo com a ponte pode induzir vibrações na estrutura. Dependendo da amplitude dessa vibração, isso pode causar desconforto ao usuário da ponte, redução da vida útil da estrutura e levar ao seu colapso. Uma das formas de lidar com os problemas relacionados a vibrações excessivas é a instalação de *Tuned Mass Dampers* (TMD), pois esse dispositivo passivo de controle de vibrações é confiável e econômico. Assim, este trabalho tem como objetivo avaliar a resposta dinâmica de uma ponte considerando a interação veículo-estrutura-pavimento, incertezas e no caso de se observar deslocamentos elevados, realizar o projeto otimizado de um sistema passivo de controle de vibrações. Os veículos utilizados nas análises são os tipos que trafegam com mais frequência nas rodovias brasileiras, o perfil de irregularidades do pavimento foi gerado por meio da metodologia proposta pela norma ISO 8608 e os obstáculos na entrada da ponte foram gerados através do modelo proposto por Pesterev *et al.* (2004). Além disso, foram incorporadas nas análises dinâmicas, por meio de simulação de Monte Carlo, incertezas nas dimensões e propriedades do material da ponte e na velocidade e massas dos veículos. Todas as situações analisadas apresentaram respostas dinâmicas elevadas, o que indicou a necessidade do uso de dispositivos de controle de vibrações. Os parâmetros desses TMD's foram dimensionados utilizando o algoritmo HBA. Em todos os casos avaliados, verificou-se que o deslocamento máximo médio da ponte foi reduzido. Para as situações com pavimento irregular essa redução foi da ordem de 7,5% e para o pavimento que simula um obstáculo na entrada da ponte essa redução foi da ordem de 13%. Porém o valor do FAD das respostas dinâmicas permaneceu acima do coeficiente de impacto vertical recomendado pela NBR 7188:2024 para essa situação. Após dimensionar o sistema de controle de vibração para estrutura, realizou-se um estudo de valores extremos dos deslocamentos máximos da ponte com o TMD instalado a fim de verificar a confiabilidade da solução proposta. Dessa análise constatou-se que quando a ponte possui pavimento irregular a probabilidade de o deslocamento máximo admissível para estrutura ser excedido foi de 40% enquanto para o pavimento que representa um obstáculo essa probabilidade foi de 60%. Portanto, o uso de um sistema passivo de vibrações funciona de forma eficaz quando o pavimento da ponte é rugoso. Em contrapartida, para o caso em que o pavimento é um obstáculo, é interessante buscar um outro tipo de sistema de controle de vibrações na estrutura.

**Palavras-chave:** *pontes rodoviárias; tuned mass damper; otimização; simulação de Monte Carlo; valores extremos.*

## ABSTRACT

SANTOS, G. P. **Optimized Design Under Uncertainties of Vibration Control System for Highway Bridges Taking into Account the Vehicle-Bridge-Pavement Interaction.** 2024. Thesis (Doctor in Engineering) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

When the dynamic response of a bridge is performed, it should be considered several factors, such as the span and natural frequencies for the bridge, velocity, mass, and suspension system for the vehicle, and the road roughness profile. The interaction between the vehicle and the bridge may induce vibrations in the structure. Depending on the magnitude of these vibrations, they can cause discomfort to bridge users, reduce their service life, and even result in the collapse of the bridge. One way to deal with excessive vibration problems is the installation of Tuned Mass Dampers (TMDs) because this passive vibration control device is reliable and economical. Thus, this work aims to evaluate the dynamic response of the bridge considering the vehicle-structure-pavement interaction and uncertainties and, in the case where high displacements were observed, realize the optimized robust design of passive vibration control. The vehicles used in the analysis are the types that frequently travel on Brazilian highways, the pavement roughness profile was generated according to the ISO 8608 methodology, and the obstacles on the bridge entrance were generated following the Pesterev *et al.* (2004) model. In addition, uncertainties were incorporated in the dynamic analysis through Monte Carlo simulation on the bridge's dimensions and materials properties and the vehicle's velocity and masses. For all cases analyzed, it was found that the dynamic responses were high, and therefore, the use of vibration control devices was necessary. The TMD's parameters were dimensioned using the HBA algorithm. In all cases studied, the mean maximum displacement of the bridge decreased. In situations of rough pavement, this decrease was in the order of 7.5%, and for the pavement that simulated an obstacle on the bridge's entrance, this decrease was in the order of 13%. However, the dynamic response DAF remained above the recommended NBR 7186:2024 impact factor coefficient for this situation. After that, a study of extreme values of maximum displacement of the bridge with the TMD installed was carried out to verify the reliability of the proposed vibration control system. From this analysis, it was found that when a bridge has rough pavement, the probability of the maximum allowable displacement of the structure being exceeded was 40%, while for the pavement that represents an obstacle, this probability was 60%. Therefore, the use of passive vibration control works efficiently when the bridge's pavement is rough. In contrast, in the case where the pavement is an obstacle, it is interesting to seek another type of vibration control device to use in the structure.

**Keywords:** *highway bridges; tuned mass damper; optimization; Monte Carlo simulation; extreme values.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação do sistema de MAD's utilizado na ponte Rio-Niterói .....	40
Figura 2.2 – Representação de um amortecedor de massa sintonizada por batimento ...	43
Figura 3.1 – Exemplo de uma seção transversal em duplo T (a), seções transversais (a) viga longarina e (b) viga transversina .....	50
Figura 3.2 – Tipos de veículos que trafegam com maior frequência nas rodovias brasileiras .....	55
Figura 3.3 – Modelo matemático do veículo 2S3 .....	56
Figura 3.4 – Sistema multicorpo do veículo 2S3 .....	57
Figura 3.5 – Esquema de numeração das rodas do veículo 2S3 .....	63
Figura 3.6 – Diagramas de corpo livre da seção transversal do veículo 2S3 .....	63
Figura 3.7 – Diagrama de corpo livre para i-ésima roda do veículo 2S3 .....	66
Figura 3.8 – Veículo com duas rodas trafegando em uma pista com pavimento irregular .....	77
Figura 3.9 – Veículo em uma dada posição da ponte .....	79
Figura 3.10 – Situações consideradas para montagem do vetor de forças atuantes na estrutura, (a) trajeto das rodas do veículo não coincide com o eixo da ponte e (b) trajeto das rodas do veículo coincide com os elementos do modelo da ponte .....	82
Figura 3.11 – Exemplo de problema de controle de vibração .....	88
Figura 3.12 – Estrutura com dois TMD's instalados .....	90
Figura 4.1 – Dimensões das vigas longarinas e transversinas da ponte dimensões .....	100
Figura 4.2 – Dimensões de uma seção transversal em duplo T utilizada no cálculo de sua largura colaborante .....	101
Figura 4.3 – Pseudo-código para o algoritmo HBA .....	112
Figura 4.4 – Fluxograma do laço para o cálculo dos deslocamentos máximos da ponte para as diversas amostras de variáveis aleatórias .....	115
Figura 4.5 – Fluxograma apresentando a continuação do programa principal até o encerramento, destacando as considerações feitas de acordo com o tipo de análise e a sub-rotina de otimização .....	116
Figura 4.6 – Argumentos utilização da função <i>pararrayfun</i> .....	117

Figura 4.7 – Computador utilizado para executar a versão paralela do código desenvolvido nesse trabalho (destacado em vermelho) .....	118
Figura 4.8 – Fluxograma detalhando as operações executadas na sub-rotina paralelo ...	118
Figura 4.9 – Fluxograma do trecho paralelizado do código da sub-rotina de otimização onde é feito o cálculo do valor da função objetivo .....	119
Figura 5.1 – Função de densidade de probabilidade das três distribuições padrão. Gumbel ( $\xi = 0$ ), Fréchet ( $\xi = 0,4$ ) e Weibull ( $\xi = -0,4$ ). Todas as funções foram calculadas com $\mu = 12$ e $\sigma = 2$ .....	124
Figura 5.2 – Fluxograma utilizado para fazer a análise de valores extremos dos deslocamentos máximos da ponte .....	134
Figura 6.1 – Modelo do veículo 2S3 desenvolvido no Ansys .....	137
Figura 6.2 – Perfil de pavimento utilizado no problema de otimização .....	139
Figura 6.3 – Seção transversal (a) e vista longitudinal (b) da ponte utilizada no problema de otimização em 2D .....	140
Figura 6.4 – Espectro de potência para deslocamento no tempo do nó central da ponte com pavimento irregular para as análises sem a instalação do TMD feitas com os veículos 3C e 2S3 .....	142
Figura 6.5 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C .....	143
Figura 6.6 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C .....	144
Figura 6.7 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 .....	144
Figura 6.8 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 .....	145
Figura 6.9 – Curva de convergência da função objetivo para o veículo 3C .....	145
Figura 6.10 – Curva de convergência da função objetivo para o veículo 2S3 .....	146
Figura 6.11 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C considerando como pavimento uma depressão .....	150
Figura 6.12 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C considerando como pavimento uma depressão .....	151
Figura 6.13 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 considerando como pavimento uma depressão .....	151

Figura 6.14 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 considerando como pavimento uma depressão .....	152
Figura 6.15 – Espectro de potência para o deslocamento no tempo do nó central da ponte com uma depressão em sua entrada para as análises sem a instalação do TMD feitas com os veículos 3C e 2S3 .....	153
Figura 6.16 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C considerando como pavimento um ressalto .....	154
Figura 6.17 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C considerando como pavimento um ressalto .....	155
Figura 6.18 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 considerando como pavimento um ressalto .....	155
Figura 6.19 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 considerando como pavimento um ressalto .....	156
Figura 6.20 – Espectro de potência para o deslocamento no tempo do nó central da ponte com um ressalto em sua entrada para as análises sem a instalação do TMD feitas com os veículos 3C e 2S3 .....	157
Figura 6.21 – Dimensões da seção transversal da ponte (em cm): (a) seção transversal; (b) longarinas e (c) transversinas .....	158
Figura 6.22 – Modelo matemático da ponte .....	158
Figura 6.23 – Deslocamentos verticais dos nós das vigas L1 e L2 .....	160
Figura 6.24 – Dois primeiros modos de vibração da ponte, linha preta refere-se a estrutura indeformada e a linha vermelha refere-se ao formato do modo de vibração da estrutura .....	161
Figura 6.25 – Pulso <i>Tone Burst</i> aplicado no ponto central da Viga L1 .....	163
Figura 6.26 – Comparação dos resultados do deslocamento vertical do ponto central da viga L1 .....	164
Figura 6.27 – Comparação dos resultados dos deslocamentos máximos de cada nó da viga L1 .....	165
Figura 6.28 – Posição do veículo na ponte, dimensões em cm .....	169
Figura 6.29 – Curva de convergência do deslocamento máximo médio do nó central da viga L1 em função do número de amostras para as análises estáticas e dinâmicas de cada veículo .....	170
Figura 6.30 – Curva de convergência da variância do deslocamento máximo médio do nó central da viga L1 em função do número de amostras para as análises estáticas e dinâmicas de cada veículo .....	171

Figura 6.31 – Curva de convergência do deslocamento máximo médio do nó central da viga L1 em função do número de amostras para a depressão na entrada da ponte	174
Figura 6.32 – Curva de convergência da variância do deslocamento máximo médio do nó central da viga L1 em função do número de amostras para a depressão na entrada da ponte .....	174
Figura 7.1 – Espectro de potência do deslocamento no tempo do nó central da ponte, sem o uso do TMD para amostra nº 200 de cada veículo .....	178
Figura 7.2 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2C .....	179
Figura 7.3 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 3C .....	180
Figura 7.4 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2S3 .....	180
Figura 7.5 – Espectro de potência do deslocamento no tempo do nó central da ponte, sem o uso do TMD para amostra nº 250 de cada veículo .....	182
Figura 7.6 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2C .....	183
Figura 7.7 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 3C .....	183
Figura 7.8 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2S3 .....	184
Figura 7.9 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2C para as duas situações de dimensionamento dos TMD's .....	188
Figura 7.10 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 3C para as duas situações de dimensionamento dos TMD's .....	188
Figura 7.11 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2S3 para as duas situações de dimensionamento dos TMD's .....	189
Figura 7.12 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 2C referentes a análise com pavimento irregular .....	191
Figura 7.13 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 3C referentes a análise com pavimento irregular .....	192
Figura 7.14 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 2S3 referentes a análise com pavimento irregular .....	193

Figura 7.15 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 2C referente a análise com o a depressão na entrada da ponte .....	197
Figura 7.16 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 3C referente a análise com o a depressão na entrada da ponte .....	198
Figura 7.17 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 2S3 referente a análise com o a depressão na entrada da ponte .....	199

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: valor da média geométrica para a PSD de referência relativa à classe da estrada .....	74
Tabela 4.1: pesos máximos e mínimos para os veículos 2C, 3C e 2S3 .....	104
Tabela 5.1: valor das constantes $\alpha_0$ , $\alpha_1$ , $\alpha_2$ e $\alpha_3$ .....	129
Tabela 6.1: dados do veículo 2S3 .....	136
Tabela 6.2: frequências naturais do veículo 2S3 .....	137
Tabela 6.3: dados da ponte .....	139
Tabela 6.4: dados do veículo 3C .....	140
Tabela 6.5: resultados das análises estática e dinâmica considerando os veículos 3C e 2S3 .....	140
Tabela 6.6: resultados da análise dinâmica para os veículos 3C e 2S3 considerando a instalação de um TMD dimensionado pelo algoritmo HBA .....	142
Tabela 6.7: resultados da análise dinâmica para os veículos 3C e 2S3 considerando a instalação de um TMD dimensionado pelos métodos de Den Hartog (DH) e Warburton (WB) .....	143
Tabela 6.8: testes realizados com os veículos 3C e 2S3 para definição da largura do obstáculo na entrada da ponte com 2 cm de elevação que produz o maior deslocamento máximo .....	148
Tabela 6.9: testes realizados com os veículos 3C e 2S3 para definição da profundidade ou elevação do obstáculo na entrada da ponte que produz o maior deslocamento máximo .....	149
Tabela 6.10: resultados das análises estática e dinâmica considerando os veículos 3C e 2S3 para situação da depressão .....	149
Tabela 6.11: resultados da análise dinâmica com a depressão na entrada da ponte para os veículos 3C e 2S3 considerando a instalação de um TMD dimensionado pelos métodos de Den Hartog (DH) e Warburton (WB) .....	150
Tabela 6.12: resultados das análises estática e dinâmica considerando os veículos 3C e 2S3 para situação do ressalto .....	153
Tabela 6.13: resultados da análise dinâmica com o ressalto na entrada da ponte para os veículos 3C e 2S3 considerando a instalação de um TMD dimensionado pelos métodos de Den Hartog (DH) e Warburton (WB) .....	154
Tabela 6.14: propriedades mecânicas e geométricas do modelo da ponte .....	159

Tabela 6.15: comparação das frequências naturais da ponte calculados pelo <i>software</i> Ansys e o programa desenvolvido neste trabalho .....	162
Tabela 6.16: variáveis aleatórias referentes as dimensões da estrutura, valor médio e desvio padrão .....	166
Tabela 6.17: valores utilizados na geração das propriedades dos materiais da estrutura.	166
Tabela 6.18: dados dos pneus e suspensões dos veículos .....	167
Tabela 6.19: limites inferior e superior para a massa total de cada veículo e seus respectivos momentos de inércia de massa .....	168
Tabela 6.20: distância do centro massa aos eixos dos veículos 2C, 3C e 2S3 .....	168
Tabela 6.21: resultado das análises estáticas e dinâmicas dos veículos 2C, 3C e 2S3 para as 1.000 amostras de variáveis aleatórias .....	170
Tabela 6.22: resultado das análises estáticas e dinâmicas dos veículos 2C, 3C e 2S3 para as 1.000 amostras de variáveis aleatórias .....	173
Tabela 7.1: resultados da otimização robusta considerando pavimento irregular classe C .....	177
Tabela 7.2: resultados da otimização robusta considerando a existência de uma depressão na entrada da ponte .....	181
Tabela 7.3: resultados da otimização robusta dos múltiplos TMD's considerando a existência de uma depressão na entrada da ponte para situação (i) .....	185
Tabela 7.4: resultados da otimização robusta dos múltiplos TMD's considerando a existência de uma depressão na entrada da ponte para situação (ii) .....	186
Tabela 7.5: estatísticas dos resultados do deslocamento máximo do nó central da ponte para cada veículo e para situação com o pavimento irregular .....	190
Tabela 7.6: coeficientes de forma, localização e escala, tipo de distribuição e resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov para cada veículo .....	190
Tabela 7.7: deslocamentos máximos limite da ponte com o TMD instalado para cada veículo .....	195
Tabela 7.8: estatísticas dos resultados do deslocamento máximo do nó central da ponte para cada veículo e para situação com a depressão em sua entrada .....	196
Tabela 7.9: coeficientes de forma, localização e escala, tipo de distribuição e resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov para cada veículo .....	197
Tabela 7.10: deslocamentos máximos limite da ponte com o TMD instalado para cada veículo .....	200

## LISTA DE ABREVIATURAS

ADS	Atenuador Dinâmico Sincronizado
CTB	Código de Trânsito Brasileiro
DNIT	Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes
FA	<i>Firefly Algorithm</i>
FDP	Função de Densidade de Probabilidade
FRF	Função Resposta de Frequência
GA	<i>Genetic Algorithm</i>
GDL	Grau de Liberdade
GEV	<i>Generalized Extreme Value</i>
HBA	<i>Honey Badger Optimizatiom Algorithm</i>
HMD	<i>Hybrid Mass Damper</i>
ISO	<i>International Organization for Standardization</i>
MADS	Múltiplos Atenuadores de Massa Sincronizada
MIMO	<i>Multi-Input Multi-Output</i>
MTMD	Múltiplos Amortecedores de Massa Sintonizada
NBR	Norma Brasileira
PSD	<i>Power Spectral Density</i>
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
PTB	Peso Bruto Total
RTHS	Simulação Híbrida em Tempo Real
SGA	<i>Search Group Algorithm</i>
TMD	<i>Tuned Mass Damper</i>
TMFD	<i>Tuned Mass Friction Damper</i>
VAPS	<i>Variable Accelerated Pattern Search</i>
WOA	<i>Whale Optimization Algorithm</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS MAIÚSCULAS

$A$	Área da seção transversal do elemento, $m^2$
$\mathbf{A}$	Matriz de transformação de coordenadas locais para globais
$C_1, C_2, C_3$	Cosseno do ângulo de inclinação do elemento de pórtico espacial
$CV_X$	Coefficiente de variação da variável aleatória $X$
$\mathbf{C}_{TMD}$	Matriz com o valor do amortecimento dos TMD's instalados na estrutura, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{TMDe}$	Matriz de amortecimento da interação entre o TMD e a estrutura, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{VE}$	Matriz de amortecimento global do sistema veículo-estrutura, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{VET}$	Matriz de amortecimento global do sistema veículo-estrutura e TMD, $Ns/m$
$\mathbf{C}_e$	Matriz de amortecimento global da estrutura, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{eTMD}$	Matriz de amortecimento da interação entre a estrutura e o TMD, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{ev}$	Matriz de amortecimento da interação entre a estrutura e os pneus do veículo, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{pp}$	Matriz de amortecimento dos pneus do veículo, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{pv}$	Matriz de amortecimento da interação entre os pneus e a suspensão do veículo, $Ns/m$
$\mathbf{C}_v$	Matriz de amortecimento global do veículo, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{ve}$	Matriz de amortecimento da interação entre os pneus veículo e a estrutura, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{vp}$	Matriz de amortecimento da interação entre a suspensão e os pneus do veículo, $Ns/m$
$\mathbf{C}_{vv}$	Matriz de amortecimento do sistema de suspensão do veículo, $Ns/m$
$C$	Constante com valor maior que 1, utilizada no algoritmo HBA
$Civ$	Coefficiente de impacto vertical calculado com a metodologia da NBR 7188
$Cov(E, \rho)$	Coefficiente de correlação de $E$ em relação a $\rho$
$Cov(\rho, E)$	Coefficiente de correlação de $\rho$ em relação a $E$
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento do elemento de pórtico espacial, $Ns/m$
$D^+, D^-$ e $D$	Valores do teste de Kolmogorov-Smirnov para os dados amostrais
$E$	Módulo de elasticidade do material da ponte, $GPa$
$E[u_{din}]$	Média do valor do deslocamento dinâmico máximo da ponte, $mm$
$E[u_{est}]$	Média do valor do deslocamento estático máximo da ponte, $mm$

$E[u_{max}(\vec{x})]$	Média do valor do deslocamento máximo da ponte em função dos parâmetros do TMD, $mm$
$E[X]$	Valor esperado de $X$
$E[f(\vec{x})]$	Valor esperado da função objetivo
$\vec{F}_{VE}$	Vetor de forças globais atuantes no sistema veículo-estrutura, $N$
$\vec{F}_{VET}$	Vetor de forças globais atuantes no sistema veículo-estrutura e TMD, $N$
$\vec{F}_e$	Vetor de forças globais atuantes na estrutura, $N$
$\vec{F}_v$	Vetor de forças globais atuantes no veículo, $N$
$\vec{F}(t_0)$	Vetor de forças instante $t_0$ , $N$
$\vec{F}(t_{i+1})$	Vetor de forças instante $t_i + \Delta t$ , $N$
$F_i$	Forças elásticas e de amortecimento da suspensão de cada eixo do veículo
$F$	Variável que permite que os texugos mudem de posição para escapar de mínimos locais
$FAD$	Fator de amplificação dinâmica
$\hat{G}^{-1}$	Função inversa da estimativa da distribuição GEV
$\hat{G}$	Estimativa da função GEV
$\tilde{G}(x_i)$	Estimativa empírica da probabilidade do dado amostral $x_i$
$GDL_{TMD}$	Grau de liberdade onde o TMD foi instalado
$G_d(n_0)$	PSD de referência, $m^3$
$G_d(n)$	PSD de deslocamento em função da frequência espacial, $m^3$
$G_{de}(n)$	PSD cruzada, $m^3$
$G(u_{adm})$	Valor da função cumulativa de probabilidade da distribuição GEV para o deslocamento admissível
$G(x)$	Função de distribuição de valores extremos Função Cumulativa de Probabilidade dos valores extremos
$H(t - t_a)$	Função de Heaviside
$\vec{I}_i$	Intensidade com que o $i$ -ésimo texugo ou agente de busca irá se mover
$I_0$	Momento de inércia polar, $m^4$
$I_x$	Constante de torção de Saint-Venant, $m^4$
$I_{xv1}$	Momento de inércia de massa em relação ao eixo $x$ do veículo 1, $kgm^2$
$I_{xv2}$	Momento de inércia de massa em relação ao eixo $x$ do veículo 2, $kgm^2$
$I_y$	Momento de inércia em relação ao eixo $y$ , $m^4$
$I_{yv1}$	Momento de inércia de massa em relação ao eixo $y$ do veículo 1, $kgm^2$
$I_{yv2}$	Momento de inércia de massa em relação ao eixo $y$ do veículo 2, $kgm^2$

$I_z$	Momento de inércia em relação ao eixo z, $m^4$
$\mathbf{K}_{TMD}$	Matriz com o valor da rigidez dos TMD's instalados na estrutura, $N/m$
$\mathbf{K}_{TMDe}$	Matriz de rigidez da interação entre o TMD e a estrutura, $N/m$
$\mathbf{K}_{VE}$	Matriz de rigidez global do sistema veículo-estrutura, $N/m$
$\mathbf{K}_{VET}$	Matriz de rigidez global do sistema veículo-estrutura e TMD, $N/m$
$\mathbf{K}_e$	Matriz de rigidez global da estrutura, $N/m$
$\mathbf{K}_{eTMD}$	Matriz de rigidez da interação entre a estrutura e TMD, $N/m$
$\mathbf{K}_{ev}$	Matriz de rigidez da interação entre a estrutura e os pneus do veículo, $N/m$
$\mathbf{K}_{pp}$	Matriz de rigidez dos pneus do veículo, $N/m$
$\mathbf{K}_{pv}$	Matriz de rigidez da interação entre os pneus e a suspensão do veículo, $N/m$
$\mathbf{K}_v$	Matriz de rigidez global do veículo, $N/m$
$\mathbf{K}_{ve}$	Matriz de rigidez da interação entre os pneus do veículo e a estrutura, $N/m$
$\mathbf{K}_{vp}$	Matriz de rigidez da interação entre a suspensão e os pneus do veículo, $N/m$
$\mathbf{K}_{vv}$	Matriz de rigidez do sistema de suspensão do veículo, $N/m$
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial, $N/m$
$L_e$	Distância da roda dianteira até a roda traseira, $m$
$L_{xy}$	Comprimento da projeção do elemento no plano xy, $m$
$L$	Comprimento do elemento, $m$
	Vão da ponte, $m$
$L(\xi, \mu, \sigma)$	Função da verossimilhança da distribuição de valores extremos
$\mathbf{L}$	Matriz triangular inferior da fatoração de Cholesky da matriz com os coeficientes de correlação das variáveis aleatórias
$M_{st}$	Massa total da estrutura, $kg$
$\mathbf{M}_{TMD}$	Matriz com as massas dos TMD's instalados na estrutura, $kg$
$\mathbf{M}_{VE}$	Matriz de massa global do sistema veículo-estrutura, $kg$
$\mathbf{M}_{VET}$	Matriz de massa global do sistema veículo-estrutura e TMD, $kg$
$\mathbf{M}_e$	Matriz de massa global da estrutura, $kg$
$\mathbf{M}_{mst}$	Massa modal da estrutura relativa à sua primeira frequência natural, $kg$
$\mathbf{M}_{pp}$	Matriz de massa dos pneus do veículo, $kg$
$\mathbf{M}_v$	Matriz de massa global do veículo, $kg$
$\mathbf{M}_{vv}$	Matriz de massa das massas suspensas do veículo, $kg$
$\mathbf{M}$	Matriz de massa do elemento de pórtico espacial, $kg$
$NGDL_e$	Número de graus de liberdade da estrutura
$NGDL_v$	Número de graus de liberdade do veículo

$N_{TB}$	Número de ciclos do pulso <i>Tone Burst</i> , <i>ciclos</i>
$N_{TMD}$	Número de TMD's instalados na estrutura
$N_a$	Tamanho das amostras geradas para cada variável de projeto
$N_{pd}$	Número de pneus duplos
$N_{ps}$	Número de pneus simples
$N_{rodas}$	Número de rodas do veículo
$N$	Número de intervalos de bandas de frequência
	Número de agentes de busca do algoritmo HBA
$P(u \geq u_{adm})$	Probabilidade de um deslocamento máximo da ponte com o TMD instalado superar o valor admissível
$\vec{Q}_q$	Vetor de forças generalizadas
$Q_{u_{PR}}$	Forças generalizadas em relação ao deslocamento vertical da quinta roda
$Q_{u_{xv1}}$	Forças generalizadas em relação a rotação do veículo 1
$Q_{u_{xv2}}$	Forças generalizadas em relação a rotação do veículo 2
$\vec{R}_O$	Vetor com as coordenadas da quinta roda, $m$
$\dot{R}_{xvi}$	Velocidade no eixo x das massas suspensas do veículo, $m/s$
$\dot{R}_{yvi}$	Velocidade no eixo y das massas suspensas do veículo, $m/s$
$\vec{R}$	Vetor com as distâncias do centro de massa do veículo até a quinta roda, $m$
$R_{yi}$	Posição vertical de cada eixo até a quinta roda do veículo, $m$
$\mathbf{R}$	Matriz com os coeficientes de correlação das variáveis aleatórias
$\vec{S}_i$	Fator de concentração de força do i-ésimo texugo
$S_1, S_2, S_3$	Seno do ângulo de inclinação do elemento de pórtico espacial
$\mathbf{S}$	Matriz com os desvios padrão das variáveis aleatórias
$T_h$	Tempo de duração do pulso, $s$
$T$	Energia cinética
	Período de retorno, <i>anos</i>
$TB(t)$	Função que descreve o pulso <i>Tone Burst</i>
$\mathbf{T}$	Matriz de transformação para o elemento de pórtico espacial
$\vec{U}_{VE}$	Vetor global de velocidades do sistema veículo-estrutura, $m/s$
$\vec{\ddot{U}}_{VE}$	Vetor global de acelerações do sistema veículo-estrutura, $m/s^2$
$\vec{U}_{VET}$	Vetor global de velocidades do sistema veículo-estrutura e TMD, $m/s$
$\vec{\ddot{U}}_{VET}$	Vetor global de acelerações do sistema veículo-estrutura e TMD, $m/s^2$
$\vec{U}_{VE}$	Vetor global de deslocamentos do sistema veículo-estrutura, $m$

$\vec{U}_{VET}$	Vetor global de deslocamentos do sistema veículo-estrutura e TMD, $m$
$Var[X]$	Variância da função GEV
$W_e$	Trabalho virtual das forças externas atuantes no veículo
$W_k$	Porcentagem da massa suspensa do veículo que é transferida para cada roda
$X$	Variável aleatória
$\vec{Z}$	Vetor com números aleatórios gerados por meio de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1 não correlacionado

## LETRAS MINÚSCULAS

$\mathbf{0}$	Matriz nula
$a_0$	Constante relativa ao método de Newmark
$a_1$	Constante relativa ao método de Newmark
$a_2$	Constante relativa ao método de Newmark
$a_5$	Constante relativa ao método de Newmark
$a_6$	Constante relativa ao método de Newmark
$a_7$	Constante relativa ao método de Newmark
$a$	Distância do nó esquerdo do elemento até o ponto onde a força está aplicada, $m$ Distância entre os locais onde o momento fletor atuante na ponte é nulo, $m$ Profundidade da depressão ou elevação do ressalto, $m$
$b_1$	Distância transversal do centro de massa do veículo 1 até suas rodas, $m$
$b_2$	Distância transversal do centro de massa do veículo 2 até suas rodas, $m$ Distância entre as vigas longarinas da seção transversal da ponte, $m$
$b_4$	Distância entre a viga longarina e a extremidade da seção transversal da ponte, $m$
$b_f$	Largura colaborante de uma viga T, $m$
$b_n$	Valor nominal ou médio da dimensão $b$ , $m$
$b_w$	Dimensão da base da viga, $m$
$b$	Dimensão da peça considerando a variação, $m$ Comprimento da depressão ou ressalto, $m$
$c_{TMD}$	Amortecimento do TMD, $Ns/m$
$c_{TMD}^{max}$	Limite superior para o amortecimento do TMD, $N/m$
$c_{TMD}^{min}$	Limite inferior para o amortecimento do TMD, $Ns/m$
$c_e$	Amortecimento de um elemento da estrutura, $Ns/m$

$c_{pi}$	Amortecimento do i-ésimo pneu do veículo, $Ns/m$
$c_{pk}$	Amortecimento do k-ésimo pneu do veículo, $Ns/m$
$c_{si}$	Amortecimento da suspensão do veículo para a i-ésima roda, $Ns/m$
$\vec{d}_i$	Distância entre a presa e o i-ésimo texugo
$d_{11}$	Distância da quinta roda até o centro de massa do veículo 1, $m$
$d_{21}$	Distância da quinta roda até o centro de massa do veículo 2, $m$
$e$	Distância das rodas até o eixo do elemento, $m$
$\bar{f}_1$	Frequência natural média da estrutura, $Hz$
$f_{TB}$	Frequência do pulso <i>Tone Burst</i> , $Hz$
$f_X(x)$	Função densidade de probabilidade da variável aleatória $X$
$f_{ai}$	Forças de amortecimento da suspensão em para a i-ésima roda do veículo
$f_{ei}$	Forças elásticas da suspensão a i-ésima roda do veículo
$f_{eq}^g$	Vetor global de forças equivalentes, $N$
$f_{eq}^l$	Vetor local de forças equivalentes, $N$
$f_{ir}$	Força devido as irregularidades do pavimento, $N$
$f_k(\vec{x})$	Valor da função objetivo para a k-ésima amostra
$f_n$	Frequência natural da ponte, $Hz$
$f_{sint}$	Frequência de sintonização do TMD, $Hz$
$f_{tun}$	Valor ótimo da razão entre a frequência natural do TMD e a frequência natural da estrutura
$f(\vec{x})$	Função objetivo
$g$	Aceleração da gravidade, $m/s^2$
	Coefficiente de assimetria dos dados amostrais
$g(x)$	Função de Densidade de Probabilidade dos valores extremos
$g(\vec{x})$	Restrições de desigualdade
$h_a(t)$	Função que define a janela de Hanning
$h(\vec{x})$	Restrições de igualdade
$k_{TMD}$	Rigidez do TMD, $N/m$
$k_{TMD}^{max}$	Limite superior para a rigidez do TMD, $N/m$
$k_{TMD}^{min}$	Limite inferior para a rigidez do TMD, $N/m$
$k_e$	Rigidez de um elemento da estrutura, $N/m$
$k_{pi}$	Rigidez do i-ésimo pneu do veículo, $N/m$
$k_{pk}$	Rigidez do k-ésimo pneu do veículo, $N/m$
$k_{si}$	Rigidez da suspensão para a i-ésimo roda do veículo, $N/m$

$\vec{l}b_i$	Vetor com os limites inferiores das variáveis de projeto
$l(\xi, \mu, \sigma)$	Função da log-verossimilhança da distribuição de valores extremos
$m_{TMD}$	Massa do TMD, <i>kg</i>
$m_{cv}$	Massa do cavalo mecânico, <i>kg</i>
$m_e$	Massa de um elemento da estrutura, <i>kg</i>
$m_{pd}$	Massa do pneu duplo, <i>kg</i>
$m_{pi}$	Massa do i-ésimo pneu do veículo, <i>kg</i>
$m_{pk}$	Massa do k-ésimo pneu do veículo, <i>kg</i>
$m_{ps}$	Massa do pneu simples, <i>kg</i>
$m_s$	Massa suspensa do veículo, <i>kg</i>
$m_{s1}$	Massa suspensa do veículo 1 (cavalo mecânico), <i>kg</i>
$m_{s2}$	Massa suspensa do veículo 2 (reboque), <i>kg</i>
$m_{total}$	Massa total do veículo, <i>kg</i>
$m$	Número de funções de restrição de desigualdade Total de dados amostrais
$n_0$	Frequência espacial de referência, <i>ciclos/m</i>
$n$	Frequência espacial, <i>ciclos/m</i>
$p$	Constante de inércia do algoritmo PSO
$\vec{q}$	Vetor com a primeira derivada em relação ao tempo das coordenadas generalizadas
$\vec{q}$	Vetor de coordenadas generalizadas
$r_1$	Número aleatório gerado a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1
$r_2$	Número aleatório gerado a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1
$r$	Número de funções de restrição de igualdade
$s^2$	Variância dos dados amostrais
$sgn(z_3)$	Função sinal do número aleatório $z_3$
$sgn(\cdot)$	Função sinal
$t_a$	Atraso das rodas traseiras em relação as dianteiras, <i>s</i>
$t_c$	Tolerância de construção, <i>m</i>
$t_{max}$	Número de máximo de iterações
$t$	Instante de tempo, <i>s</i> Iteração atual no algoritmo HBA
$\vec{u}_e$	Vetor global de velocidades da estrutura, <i>m/s</i>

$\vec{u}_e$	Vetor global de acelerações da estrutura, $m/s^2$
$\vec{u}_v$	Vetor global de velocidades do veículo, $m/s$
$\vec{u}_v$	Vetor global de acelerações do veículo, $m/s^2$
$\vec{u}(t_0)$	Vetor de velocidades no instante de tempo $t_0$ , $m/s$
$\vec{u}(t_0)$	Vetor de acelerações no instante de tempo $t_0$ , $m/s^2$
$\vec{u}(t_i)$	Vetor de velocidades no instante de tempo $t_i$ , $m/s$
$\vec{u}(t_i)$	Vetor de acelerações no instante de tempo $t_i$ , $m/s^2$
$\vec{u}(t_i)$	Vetor de acelerações no instante de tempo $t_i + \Delta t$ , $m/s^2$
$\vec{u}(t_{i+1})$	Vetor de velocidades no instante de tempo $t_i + \Delta t$ , $m/s$
$\vec{u}_{CM}$	Vetor com as coordenadas locais do centro de massa do veículo, $m$
$\vec{u}_{CM1}$	Vetor com as coordenadas locais do centro de massa do cavalo mecânico, $m$
$\vec{u}_{CM2}$	Vetor com as coordenadas locais do centro de massa do reboque, $m$
$\dot{u}_{PR}$	Velocidade da quinta roda do veículo, $m/s$
$\ddot{u}_{PR}$	Aceleração da quinta roda do veículo, $m/s^2$
$\bar{u}_{din}$	Deslocamento máximo médio dinâmico da estrutura com ou sem TMD, $m$
$\vec{u}_e$	Vetor global de deslocamentos da estrutura, $m$
$\dot{u}_e$	Velocidade de um elemento da estrutura, $m/s$
$\ddot{u}_e$	Aceleração de um elemento da estrutura, $m/s^2$
$\bar{u}_{est}$	Deslocamento máximo médio estático da estrutura, $m$
$\dot{u}_i$	Velocidade para a i-ésima roda do veículo, $m/s$
$\ddot{u}_i$	Aceleração para a i-ésima roda do veículo, $m/s^2$
$\dot{u}_{ir}$	Derivada em relação ao tempo da elevação da irregularidade do pavimento, $m/s$
$\bar{u}_{max}$	Deslocamento máximo médio da estrutura (função objetivo do problema robusta), $m$
$\dot{u}_{pk}$	Velocidade do k-ésimo pneu do veículo, $m/s$
$\ddot{u}_{pk}$	Aceleração do k-ésimo pneu do veículo, $m/s^2$
$\vec{u}_v$	Vetor global de deslocamentos do veículo, $m$
$\vec{ub}_i$	Vetor com os limites superiores das variáveis de projeto
$\vec{u}(t_i)$	Vetor de deslocamentos no instante $t_i$ , $m$
$\vec{u}(t_{i+1})$	Vetor de deslocamentos no instante $t_i + \Delta t$ , $m$
$u_{PR}$	Deslocamento da quinta roda do veículo, $m$
$u_{TMD}$	Deslocamento dinâmico máximo da ponte com a instalação do TMD, $m$

$u_{adm}$	deslocamento admissível para que o FAD fique no limite imposto pela NBR 7188:2013
$u_{din}$	Deslocamento dinâmico máximo da ponte, $m$
$u_e$	Deslocamento de um elemento da estrutura, $m$
$u_{est}$	Deslocamento estático máximo da ponte, $m$
$u_i$	Deslocamento para a $i$ -ésima roda do veículo, $m$
$u_{ir}(x)$	Elevação da irregularidade do pavimento, $m$
$u_{ire}(x)$	Elevação da irregularidade do pavimento para o lado esquerdo do veículo, $m$
$u_{irt}(x)$	Elevação da irregularidade do pavimento para as rodas traseiras do veículo, $m$
$u_{lim}$	Deslocamento máximo ao qual a estrutura estará submetida ao longo de sua vida útil, $mm$
$u_{max}(\vec{x})$	Deslocamento máximo da ponte em função dos parâmetros do TMD, $m$
$u_{pk}$	Deslocamento e do $k$ -ésimo pneu do veículo, $m$
$u(T)$	Deslocamento máximo ao qual a ponte estará sujeita para um período de retorno específico, $mm$
$v_l$	Frequência espacial de corte obtida experimentalmente, $ciclos/m$
$v$	Velocidade do veículo, $m/s$
$w$	Expoente da PSD
$\vec{x}_i$	Vetor com as posições do $i$ -ésimo texugo ou agente de busca
$\vec{x}_{new}$	Nova posição de busca dos texugos
$\vec{x}_{prey}$	Vetor com as posições do agente de busca melhor localizado
$\bar{x}$	Média dos dados amostrais
$\vec{x}$	Vetor com as variáveis de projeto
$x_i, x_f$	Coordenada em $x$ do nó inicial e final do elemento, $m$
$x$	Posição da roda do veículo na pista, $m$
$y_i, y_f$	Coordenada em $y$ do nó inicial e final do elemento, $m$
$\vec{z}_4$	Vetor com números aleatórios gerados a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1
$\vec{z}_5$	Vetor com números aleatórios gerados a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1
$\vec{z}_6$	Vetor com números aleatórios gerados a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1
$\vec{z}_7$	Vetor com números aleatórios gerados a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1
$\vec{z}_8$	Vetor com números aleatórios gerados a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1

$\vec{z}_9$	Vetor com números aleatórios gerados a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1
$z_1$	Número aleatório gerado a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1
$z_2$	Número aleatório uniformemente distribuído entre 0 e 1
$z_3$	Número aleatório gerado a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1
$z_i, z_f$	Coordenada em z do nó inicial e final da estrutura, $m$

## LETRAS GREGAS

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ e $\alpha_3$	Constantes para estimação do valor de $\hat{\xi}$
$\alpha$	Constante de proporcionalidade do amortecimento de Rayleigh; Ângulo de orientação do elemento, $rad$ ; Constante relacionada a precisão e estabilidade do método de Newmark Fator de decaimento utilizado no algoritmo HBA
$\beta$	Constante de proporcionalidade do amortecimento de Rayleigh; Ângulo de fase aleatório e independente uniformemente distribuído no intervalo de 0 a $2\pi$ Fator que mede a habilidade de um texugo encontrar alimento, utilizado no algoritmo HBA
$\overline{\Delta b}$	Variação média do valor da dimensão ( $b$ ), $m$
$\Delta n$	Intervalo de Variação da frequência espacial, $ciclos/m$
$\delta$	Constante relacionada a precisão e estabilidade do método de Newmark
$\vec{\phi}_e(GDL_{TMD}, 1)$	Valor do primeiro modo de vibração da estrutura para a posição onde o TMD foi instalado
$\vec{\phi}_e(1)$	Vetor com o primeiro modo de vibração da estrutura
$\vec{\phi}_{norm}(1)$	Vetor com o primeiro modo de vibração da estrutura normalizado
$\phi$	Ângulo de fase aleatório independente e uniformemente distribuído no intervalo de 0 a $2\pi$
$\Gamma(t)$	Função Gama completa
$\gamma[X]$	Coefficiente de assimetria da função GEV
$\gamma(n)$	Função de coerência para duas PSD's para a frequência espacial $n$
$\eta$	Ordem dos momentos LH
$\hat{\lambda}_1^\eta, \hat{\lambda}_2^\eta, \hat{\lambda}_3^\eta$ e $\hat{\lambda}_4^\eta$	Momentos LH amostrais

$\lambda_1^\eta, \lambda_2^\eta, \lambda_3^\eta$ e $\lambda_4^\eta$	Momentos LH populacionais
$\lambda$	Matriz de transformação de um grau de liberdade do elemento de pórtico espacial
$\vec{\mu}_X$	Vetor com os valores médios das variáveis aleatórias
$\hat{\mu}$	Valor estimado do fator de localização da função de distribuição de valores extremos
$\mu_X$	Valor esperado da variável aleatória $X$
$\mu$	Razão entre a massa do TMD e a massa da estrutura
	Fator de localização da função de distribuição de valores extremos
$\omega_e$	Frequência natural da estrutura, $rad/s$
$\omega_i$	Frequência natural relativa ao modo de vibração $i$ , $rad/s$
$\omega_j$	Frequência natural relativa ao modo de vibração $j$ , $rad/s$
$\omega_v$	Frequências naturais do veículo, $rad/s$
$\rho_n$	Valor nominal da densidade do material da estrutura, $kg/m^3$
$\rho$	Densidade do material da ponte, $kg/m^3$
$\hat{\sigma}$	Valor estimado do fator de escala da função de distribuição de valores extremos
$\sigma_E$	Desvio padrão desvio padrão do módulo de elasticidade, $GPa$
$\sigma_X$	Desvio padrão da variável aleatória $X$
$\sigma_b$	Desvio padrão da dimensão ( $b$ ), $m$
$\sigma_\rho$	Desvio padrão desvio padrão da densidade, $kg/m^3$
$\sigma$	Fator de escala da função de distribuição de valores extremos
$\hat{t}_2^\eta$	Coefficiente de variação LH
$\hat{t}_3^\eta$	Coefficiente de assimetria LH
$\hat{t}_4^\eta$	Coefficiente de curtose LH
$\dot{\theta}_{xv1}$	Velocidade angular de arfagem da massa suspensa do veículo 1, $rad/s$
$\ddot{\theta}_{xv1}$	Aceleração angular de arfagem da massa suspensa do veículo 1, $rad/s^2$
$\dot{\theta}_{xv2}$	Velocidade angular de arfagem da massa suspensa do veículo 2, $rad/s$
$\ddot{\theta}_{xv2}$	Aceleração angular de arfagem da massa suspensa do veículo 2, $rad/s^2$
$\dot{\theta}_{yv1}$	Velocidade angular de rolamento da massa suspensa do veículo 1, $rad/s$
$\ddot{\theta}_{yv1}$	Aceleração angular de rolamento da massa suspensa do veículo 1, $rad/s^2$
$\dot{\theta}_{yv2}$	Velocidade angular de rolamento da massa suspensa do veículo 2, $rad/s$
$\ddot{\theta}_{yv2}$	Aceleração angular de rolamento da massa suspensa do veículo 2, $rad/s^2$
$\theta_{xv1}$	Ângulo de arfagem da massa suspensa do veículo 1, $rad$

$\theta_{xv2}$	Ângulo de arfagem da massa suspensa do veículo 2, <i>rad</i>
$\theta_{yv1}$	Ângulo de rolamento da massa suspensa do veículo 1, <i>rad</i>
$\theta_{yv2}$	Ângulo de rolamento da massa suspensa do veículo 2, <i>rad</i>
$\hat{\xi}$	Valor estimado do fator de forma da função de distribuição de valores extremos
$\xi$	Fator de forma da função de distribuição de valores extremos
$\zeta_i$	Razão de amortecimento crítico do modo de vibração i, %
$\zeta_j$	Razão do amortecimento crítico do modo de vibração j, %
$\zeta$	Razão de amortecimento crítico, %

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>34</b>
1.1 JUSTIFICATIVA .....	35
1.2 OBJETIVOS .....	36
1.3 ETAPAS DO DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA .....	36
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	37
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>39</b>
2.1 DISPOSITIVOS DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES .....	39
2.2 OTIMIZAÇÃO APLICADA AO CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE PONTES .....	43
2.3 PARÂMETROS ALEATÓRIOS RELATIVOS À ESTRUTURA E AO VEÍCULO .....	47
<b>3 METODOLOGIA .....</b>	<b>50</b>
3.1 MODELO MATEMÁTICO DA PONTE .....	50
3.1.1 Matriz de Rotação para Elementos Finitos de Pórtico Espacial .....	53
3.2 MODELOS MATEMÁTICOS DOS VEÍCULOS .....	55
3.2.1 Equação de Movimento para o Caminhão 2S3 .....	56
3.3 PERFIL DE IRREGULARIDADES DO PAVIMENTO .....	73
3.3.1 PSD's Cruzadas .....	74
3.3.2 Perfil de Irregularidades do Pavimento para as Rodas Traseiras .....	76
3.4 SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA-PAVIMENTO .....	77
3.4.1 Cálculo das Forças Devido à Irregularidade do Pavimento para o Veículo e a Estrutura .....	79
3.4.2 Cálculo do Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Estrutura .....	81
3.5 SISTEMAS DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES .....	84
3.5.1 Dimensionamento de Amortecedores de Massa Sintonizados .....	85

3.6 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO PARA O SISTEMA ACOPLADO VEÍCULO-ESTRUTURA-PAVIMENTO E TMD .....	88
3.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÕES DE MOVIMENTO ...	91
3.8 HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS .....	93
<b>4 OTIMIZAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....</b>	<b>94</b>
4.1 OTIMIZAÇÃO .....	94
4.2 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA .....	95
4.3 GERAÇÃO DE NÚMEROS ALEATÓRIOS .....	97
4.3.1 Geração das Dimensões da Estrutura .....	99
4.3.2 Geração das Propriedades Mecânicas da Estrutura .....	102
4.3.3 Geração das Massas e Velocidades dos Veículos .....	104
4.4 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO .....	105
4.5 ESCOLHA DO ALGORITMO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO .....	106
4.6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO .....	107
4.6.1 Algoritmo HBA .....	109
4.7 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROGRAMA COMPLETO .....	112
4.7.1 Sub-rotina de Paralelização .....	116
<b>5 TEORIA DOS VALORES EXTREMOS .....</b>	<b>120</b>
5.1 TEORIA DOS VALORES EXTREMOS UNIVARIADA .....	120
5.2 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS QUE DESCRIVEM A FUNÇÃO GEV .....	124
5.2.1 Estimativa pelo Método da Máxima Verossimilhança .....	124
5.2.2 Métodos dos Momentos LH .....	126
5.2.3 Método dos Momentos .....	129

5.3 TESTES REALIZADOS PARA AVALIAR SE A ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS QUE DESCREVEM A FUNÇÃO GEV SE ADEQUA AOS DADOS .....	132
5.4 FLUXOGRAMA PARA ANÁLISE DE VALORES EXTREMOS .....	134
<b>6 TESTES E VERIFICAÇÕES DOS MODELOS PROPOSTOS .....</b>	<b>135</b>
7.1 VERIFICAÇÕES COM MODELOS 2D .....	135
6.1.1 Frequências Naturais do Caminhão 2S3 .....	135
6.1.2 Teste com um Problema de Otimização do Sistema de Controle de Vibrações de uma Ponte .....	138
6.1.3 Teste com um Problema de Otimização do Sistema de Controle de Vibrações Considerando a Existência de uma Depressão ou Ressalto na Entrada da Ponte .....	147
6.1.3.1 Resultados do Teste de Otimização do Sistema de Controle de Vibrações Considerando uma Depressão na Entrada da Ponte .....	149
6.1.3.2 Resultados do Teste de Otimização do Sistema de Controle de Vibrações Considerando um Ressalto na Entrada da Ponte .....	153
6.2 VERIFICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DA PONTE .....	157
6.2.1 Análise Estática da Estrutura .....	159
6.2.2 Frequências Naturais da Estrutura .....	160
6.2.3 Análise Transiente da Estrutura .....	162
6.3 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA O SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA-PAVIMENTO .....	165
6.3.1 Resultados da Simulação de Monte Carlo para Ponte com Pavimento Irregular .....	169
6.3.2 Resultados da Simulação de Monte Carlo para Ponte com uma Depressão em sua Entrada .....	172
<b>7 RESULTADOS .....</b>	<b>176</b>
7.1 RESULTADOS DO DIMENSIONAMENTO ROBUSTO DE UM TMD PARA PONTE COM PAVIMENTO IRREGULAR .....	176
7.2 RESULTADOS DO DIMENSIONAMENTO ROBUSTO DE UM TMD PARA UMA DEPRESSÃO EXISTENTE NA ENTRADA DA PONTE .....	181

7.3 RESULTADOS DO DIMENSIONAMENTO ROBUSTO DE MÚLTIPLOS TMD'S PARA UMA DEPRESSÃO EXISTENTE NA ENTRADA DA PONTE .....	184
7.4 ANÁLISE DE VALORES EXTREMOS PARA OS RESULTADOS DA PONTE COM PAVIMENTO IRREGULAR .....	189
7.5 ANÁLISE DE VALORES EXTREMOS PARA OS RESULTADOS DA PONTE COM UMA DEPRESSÃO EM SUA ENTRADA .....	196
<b>8 CONCLUSÕES .....</b>	<b>202</b>
8.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....	204
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>206</b>

# 1 INTRODUÇÃO

As obras de arte, denominação em que na Engenharia Civil estão enquadradas pontes e viadutos, têm como aspectos fundamentais para sua concepção a segurança, funcionalidade, durabilidade, economia e estética (SCHMIDT, 2017). Além disso, pontes rodoviárias são elementos importantes de infraestrutura de um país, influenciando seu desenvolvimento socioeconômico associado ao transporte rodoviário, especialmente em países que carecem de outros tipos de modais, como por exemplo, o ferroviário (SANTOS, 2007).

De acordo com Calçada (2001), quando se trata de carregamentos atuantes nas pontes, suas origens são as mais diversas possíveis, sendo que a mais importante é muitas vezes o peso próprio da estrutura, o qual solicita a ponte de forma estática e permanente ao longo de sua vida útil. Fora isso, as pontes são igualmente solicitadas por ações causadas pelo meio ambiente, como por exemplo, ação do vento, temperatura e sismos, e pela atividade humana representada pelo tráfego, visto que para grande parte das pontes o tráfego constitui a ação variável predominante.

Pelo fato das pontes serem submetidas à passagem de veículos diariamente, a interação entre o veículo e a ponte pode induzir vibrações na estrutura e conseqüentemente causar o fenômeno da fadiga, redução de sua vida útil, danos locais e até mesmo levar ao seu colapso (XIE *et al.*, 2020).

Outro problema causado pela interação entre o veículo e a estrutura é o fenômeno da ressonância, que ocorre quando a frequência de vibrações causada pela passagem do veículo é próxima a faixa das primeiras frequências naturais da estrutura (MA *et al.*, 2019).

Por esse motivo, quando se pretende analisar o carregamento dinâmico provocado pelo tráfego, além de se levar em consideração as características dinâmicas da ponte, como por exemplo, o comprimento de seu vão e frequências naturais, deve se considerar fatores ligados aos veículos, tais como, seu sistema de suspensão, peso e velocidade e ao pavimento, a saber, o seu perfil de irregularidades (XIE *et al.*, 2020).

Uma maneira de atenuar os problemas causados pela vibração, e garantir que a estrutura continue íntegra durante sua vida útil é a utilização de sistemas de controle. Tais sistemas podem ser passivos, ativos, semi-ativos ou híbridos, sendo que o mais utilizado em estruturas

é o TMD (*Tuned Mass Damper*), pelo fato desse dispositivo ser confiável e econômico, pois, não necessita de muita manutenção e de fontes externas de energia para funcionar além de possuir diversas aplicações práticas bem sucedidas.

Em vista do que foi apresentado, destaca-se a importância do estudo e aplicação de modelos que descrevem com mais detalhes as situações de carregamento para análise dinâmica de pontes rodoviárias com a finalidade de evitar que durante sua vida útil a estrutura apresente desgaste precoce ou cause desconforto aos seus usuários devido a problemas relacionados com vibrações excessivas.

Buscando amenizar os problemas causados pelas vibrações excessiva, essa tese tem como objetivo propor uma metodologia para simulação da interação veículo-estrutura-pavimento considerando como incertezas parâmetros do veículo (massa e velocidade) e da estrutura (dimensões e propriedades dos materiais) e, em caso de respostas dinâmicas elevadas, propor como solução a utilização de um ou múltiplos TMD's, dimensionados com técnicas de otimização robusta.

Com isso, espera-se que o TMD dimensionado cumpra a função de reduzir o deslocamento máximo da estrutura e devido a consideração das incertezas em seu projeto, o dispositivo continue funcionando de modo adequado independentemente da condição da estrutura e do carregamento atuante.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

As pontes rodoviárias são importantes elementos de infraestrutura do país. Por isso é necessário que a resposta dinâmica dessas estruturas seja avaliada da maneira mais realista possível, pois além das vibrações causadas pelas irregularidades do pavimento durante a passagem de veículos, também podem influenciar na resposta dinâmica fatores como a velocidade, peso e o tipo do veículo e por parte da estrutura a falta de dados precisos referentes aos seus materiais e seção transversal.

Adicionalmente a isso, sendo verificada uma resposta dinâmica muito elevada, ao invés de solucionar esse problema aumentando as dimensões da seção transversal da estrutura, projetar sistema de controle para dissipar energia e reduzir a amplitude das vibrações na ponte.

Visando redução de custos, é fundamental que este sistema de controle seja projetado de forma otimizada. A fim de deixar o projeto robusto, as incertezas presentes nos parâmetros, tanto do sistema completo, quanto da excitação devem ser levadas em consideração, assim como a interação entre a ponte os veículos e o pavimento irregular.

## 1.2 OBJETIVOS

Buscando dar continuidade e aprimorar o que foi desenvolvido em Santos (2020), onde foi realizada a análise da resposta dinâmica do sistema veículo-estrutura para casos bi e tridimensionais e os resultados foram comparados com a metodologia proposta pela norma NBR 7188 (ABNT, 2024). Neste trabalho pretende-se avaliar a resposta dinâmica de uma ponte considerando os efeitos da interação veículo-estrutura-pavimento, incertezas em parâmetros da estrutura e do veículo e o projeto otimizado de TMD's.

Como objetivos específicos da tese, pode-se destacar o seguinte:

- a) avaliar o efeito dinâmico causado pelos veículos que trafegam com maior frequência nas rodovias brasileiras em pontes, sob o efeito de incertezas tanto da estrutura quanto dos veículos;
- b) caso seja verificado que a resposta dinâmica da estrutura esteja muito elevada, dimensionar um sistema de controle de vibrações utilizando técnicas de otimização robusta;
- c) avaliar a robustez do processo de dimensionamento do TMD por meio de uma análise de valores extremos dos deslocamentos máximos da estrutura.

## 1.3 ETAPAS DO DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

A fim de cumprir os objetivos propostos acima, pretende-se:

- a) propor um modelo matemático mais refinado para estrutura, utilizando elementos finitos de pórtico espacial para discretizar melhor os elementos estruturais que compõem uma ponte (tabuleiro, vigas e transversinas);
- b) desenvolver, testar e validar a equação de movimento para o modelo tridimensional de um caminhão articulado;

- c) implementar uma ferramenta computacional de forma que seja possível fazer simulações com os tipos de veículos que são observados com maior frequência nas rodovias brasileiras e verificar seu impacto na resposta dinâmica da estrutura;
- d) simular o sistema veículo-estrutura-pavimento considerando aleatoriedades de alguns parâmetros relativos à estrutura, como por exemplo, as dimensões de sua seção transversal e propriedades mecânicas de seu material e dos veículos, tais como, sua massa total e velocidade;
- e) a partir dos casos apresentados nos tópicos (c) e (d) dessa seção, verificando existência de problemas relativos a vibrações excessivas, propor medidas para controle de vibração, como por exemplo, o uso de TMD's e utilizar algoritmos de otimização para o dimensionamento de seus parâmetros;
- f) uma vez que seja feito o dimensionamento robusto de um TMD, verificar qual o comportamento dos deslocamentos máximos da estrutura através de uma análise de valores extremos.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido em nove capítulos, organizados da seguinte forma:

O Capítulo 1 apresenta uma breve introdução sobre o tema, a justificativa, os objetivos principais e os objetivos específicos do trabalho, bem com a organização do texto.

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica com trabalhos importantes relativos ao tema dessa pesquisa e que também serão utilizados como referências no desenvolvimento dos demais capítulos dessa tese.

O Capítulo 3 apresenta toda a fundamentação teórica necessária para construção da ferramenta computacional desenvolvida nessa tese. Dentre os temas abordados estão: a montagem das equações de movimento da estrutura e do veículo, a geração do perfil de irregularidades do pavimento, o dimensionamento analítico de TMD's, a montagem das matrizes de massa, rigidez e amortecimento dos sistemas veículo-estrutura e veículo-estrutura-TMD, assim como o método utilizado para integração numérica destas equações de

movimento para obtenção da resposta dinâmica do sistema analisado e as hipóteses simplificadoras consideradas nesta tese.

Já o Capítulo 4 aborda temas relativos à geração de variáveis aleatórias para as propriedades geométricas e mecânicas da estrutura e geração de massas e velocidades para os veículos, simulação de Monte Carlo, o algoritmo de otimização utilizado no dimensionamento dos parâmetros de TMD e a implementação computacional do programa desenvolvido e utilizado na geração dos resultados da tese além de algumas considerações sobre a paralelização feita no código utilizado no processo de otimização.

O Capítulo 5 é faz uma apresentação sobre a teoria dos valores extremos e como isso se pode ser aplicado no contexto da tese. Nesse capítulo também é apresentado qual a função utilizada para descrever uma função de valores extremos generalizada, os tipos de funções mais comuns, metodologias para calcular os parâmetros de forma, escala e localização dessa função, métodos e testes para avaliar a aderência da função aos dados amostrais.

O Capítulo 6 dedica-se a validação e verificação de toda a metodologia apresentada nos Capítulos 3 e 4. São validados os novos modelos da estrutura e do veículo desenvolvido, são feitos testes de otimização do dimensionamento de um TMD para pavimentos do tipo irregular e obstáculos na entrada da ponte, além de testes para determinação do número mínimo de amostras a serem utilizados nas análises principais da tese obtido por meio de simulação de Monte Carlo.

O Capítulo 7 dedica-se à apresentação dos resultados dos problemas de otimização propostos na tese no que se refere ao dimensionamento dos parâmetros dos TMD's para cada um dos veículos considerados, assim como à abordagem de valores extremos para os deslocamentos máximos obtidos para ponte em cada situação analisada.

O Capítulo 8 apresenta as conclusões do trabalho de acordo com o que foi observado com os resultados das análises e sugestões para trabalhos futuras. Em seguida encontram-se as referências bibliográficas do trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 DISPOSITIVOS DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES

O primeiro registro que se tem do uso de sistemas de controle de vibração data do ano de 1911, quando Frahm desenvolveu e patenteou diversos tipos desses dispositivos para aplicação em equipamentos que têm sua eficiência afetada pela ação de vibrações constantes, como, por exemplo, motores, asas de avião e estruturas.

Após isso, além do uso em máquinas, os dispositivos de controle de vibração passaram a ser largamente utilizados em estruturas como medida para reduzir os efeitos causados por vibrações oriundas de sismos, vento e tráfego.

Em relação ao estudo da mitigação de vibrações em pontes submetidas ao tráfego de veículos, em 1998 Kwon *et al.* investigaram a eficiência de um sistema composto por um único TMD (*Tuned Mass Damper*) fixado em uma ponte. Para isso, uma ponte de três vãos iguais foi modelada com elementos de viga e o veículo foi idealizado como um sistema discreto formado por massas, molas e amortecedores com dois graus de liberdade. Desse estudo foi concluído que o uso de um TMD pode reduzir eficientemente a resposta dinâmica de pontes.

No Brasil, o exemplo mais clássico do uso de sistemas de controle de vibração é o da Ponte Rio-Niterói, localizada no estado do Rio de Janeiro. Esse sistema foi projetado pelo professor Ronaldo Battista e foi colocado em operação no ano de 2004. Esse projeto tinha como finalidade reduzir a amplitude de vibração do vão central da ponte causada pela ação do vento que incide na estrutura na direção oceano-continente, impedindo que as oscilações da ponte causem desconforto para quem trafega na ponte e em dias de vento muito forte interrompa o tráfego. Para isso, foi projetado um sistema de 32 ADS's (Atuadores Dinâmicos Sincronizados) sendo que, cada dispositivo é composto por um conjunto de 6 molas associadas a uma massa de 2,2 t e dois amortecedores (ver Figura 2.1). Esses dispositivos foram instalados no vão central da ponte e até os dias de hoje se mostram muito eficientes na redução da amplitude de vibração causada pelo vento (BATTISTA e PFEIL, 2005).

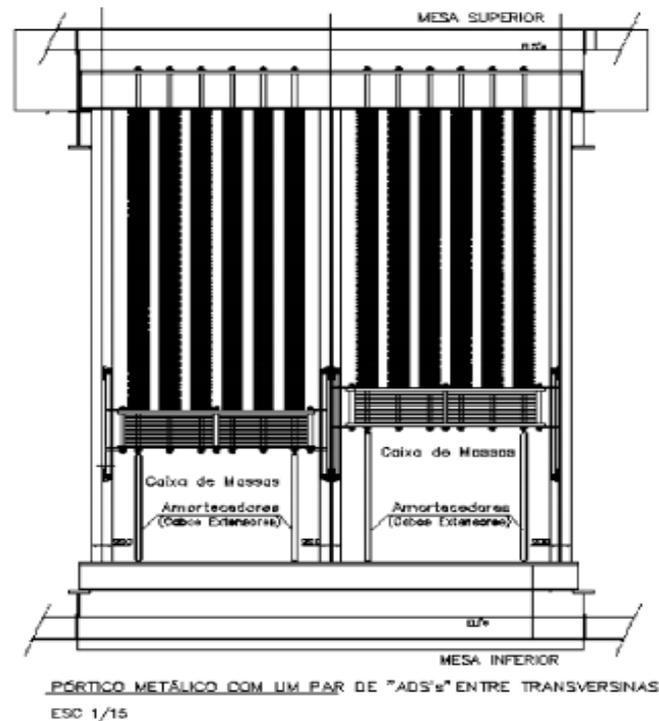


Figura 2.1 - Representação do sistema de MAD's utilizado na ponte Rio-Niterói (Battista e Pfeil, 2005).

Motivada pelo fato de que a maioria das pontes tem sua vida útil reduzida por conta do pico de tensões e fadiga induzida por cargas de tráfego, Magnuson (2010) fez um estudo da aplicação de sistemas passivos e semi-ativos de controle de vibrações em pontes. Para verificação de qual sistema de controle de vibração tem o melhor desempenho, foi desenvolvido um programa para análise da estrutura submetida a passagem de um veículo. Foi escolhida a Ponte Cromwell localizada em Connecticut, sendo que apenas um dos três vãos de 75 pés (22,86 m) foi modelado. Este vão foi considerado como uma viga biapoiada e o veículo utilizado na análise foi um caminhão de 5 eixos cujo modelo consiste em cargas que se movem pela ponte, ou seja, não houve a consideração da interação veículo-estrutura-pavimento na análise feita.

Pereira *et al.* (2014) propuseram uma metodologia de controle de vibrações ativa com a finalidade de mitigar o efeito das vibrações causadas pela caminhada humana em passarelas baseadas em um sistema de controle de vibrações por *Multi-Input Multi-Output* (MIMO). Esse sistema é composto por sensores (acelerômetros) e atuadores (elementos inerciais) que são fixados na estrutura e entram em funcionamento sempre que a estrutura começa a vibrar. Em relação à estrutura, foi utilizada a passarela do Fórum da Universidade de Exeter, que é

uma estrutura localizada no interior desse prédio e tem 15 m de comprimento e 2,7 m de largura. A estrutura foi modelada com elementos de grelha e três situações de carregamento foram analisadas, a primeira considerando uma pessoa caminhando devagar, a segunda com uma pessoa correndo e a terceira com um grupo de pessoas caminhando pela passarela. Com as situações consideradas, concluiu-se que a utilização do sistema ativo de controle de vibrações conseguiu diminuir de forma significativa a aceleração na estrutura, além da metodologia proposta ser genérica e poder ser aplicada a outros tipos de estruturas.

Christenson *et al.* (2015) avaliaram a implantação de um sistema de controle de vibrações semiativo composto por amortecedores de fluido magneto-reológico. Utilizou-se nesse estudo a ponte de Cromwell cujo modelo foi discretizado por 50.348 elementos de placa. Quanto ao veículo, foi utilizado como carga um caminhão de 5 eixos, porém não foi considerada a interação veículo-estrutura no modelo proposto. Por se tratar de um sistema de controle vibrações semi-ativo, o funcionamento dos amortecedores é feito por meio da Simulação Híbrida em Tempo Real (RTHS), ou seja, por meio de simulações numéricas realizadas à medida que o veículo se desloca pela ponte o sistema determina a força necessária deve ser aplicada nos amortecedores de modo que a amplitude de vibrações na ponte seja reduzida.

Pisal e Jangid (2016) analisaram o efeito da instalação de diversos TMFD's (*Tuned Mass Friction Damper*) em pontes ferroviárias para trens de alta velocidade. Para isso a ponte utilizada no estudo foi idealizada como uma viga biapoiada de Euler-Bernoulli e o trem foi modelado como uma série de forças localizadas nas posições dos eixos se deslocando pela ponte. Com isso os autores avaliaram qual a quantidade ideal e a melhor posição para instalar os múltiplos TMFD.

Buscando aprimorar o sistema de controle de vibrações da passarela da Faculdade de Engenharia do Porto (FEUP), Moutinho *et al.* (2018) avaliaram a possibilidade de melhorar o sistema de TMD existente, trocando o sistema antigo, passivo, por um sistema semi-ativo. A motivação para esse estudo veio do fato que o TMD existente na passarela estava sintonizado apenas com a primeira frequência natural da passarela e não estava conseguindo reduzir da forma desejada a amplitude de vibração, visto que mais de uma frequência natural da passarela situava-se na faixa de 2 a 2,5 Hz, faixa essa que coincide com a frequência da caminhada humana. O novo sistema implementado funciona baseado nas condições de conforto para os usuários da passarela, de modo que o TMD passa atuar como sistema ativo apenas quando a aceleração da estrutura atinge o limite de conforto moderado para os

pedestres, caso contrário o TMD trabalha como sistema passivo. O fato do TMD atuar de uma maneira em uma faixa de aceleração e de outra maneira em outra faixa de aceleração fez com que seu uso se tornasse mais racional, assim o equipamento demandaria pouca manutenção e seu desempenho apresentaria melhoras consideráveis em relação ao sistema antigo.

Nikkhoo *et al.* (2019) estudaram a utilização de amortecedores de tubo de aço para controle de vibração em pontes submetidas ao efeito simultâneo do movimento de massas e sismo. Os amortecedores de tubos aço são um sistema passivo de controle de vibrações que consiste em uma caixa com um conjunto de amortecedores e molas dentro que é fixada nas vigas da ponte onde a deflexão é a maior possível. Ao todo, foram utilizados sete sismos distintos combinados com a passagem de 15 massas igualmente espaçadas e que trafegavam com velocidade constante para verificar a eficiência dos amortecedores de tubo aço. Além disso, o sistema foi testado em pontes biapoiadas e com vãos contínuos, sendo que em cada caso a caixa com os amortecedores e molas foi posicionada no meio dos vãos das pontes.

Bayat *et al.* (2021) investigaram a eficiência do uso de TMD's para controle do deslocamento vertical em uma ponte real curva e de estrutura mista de aço-concreto. Para esse estudo utilizou-se a ponte Ghale Morghi, localizada em Teerã, que é uma estrutura composta por 4 longarinas metálicas de seção caixão. Os TMD's foram dimensionados utilizando as equações analíticas de Den Hartog (1956), sendo que um destes TMD foi dimensionado para sintonizar na primeira frequência natural da estrutura e os demais foram para sintonizar na segunda frequência. Além disso, esses dispositivos foram posicionados nos locais onde ocorrem os maiores deslocamentos, de acordo com o seu respectivo modo de vibração. Para verificar o desempenho dos TMD's, quatro situações de tráfego foram consideradas, todas compostas pelo mesmo tipo de veículo. Em cada situação foi proposto que os veículos poderiam ter suas velocidades e massas variando a fim de verificar como essas variáveis influenciam na redução da aceleração mensurada na estrutura. Com isso verificou-se que quando as velocidades dos veículos são elevadas (entre 120 km/h a 130 km/h) a eficiência dos TMD's na redução da aceleração da ponte é maior, devido a ocorrência de ressonância na estrutura. O mesmo não ocorre quando as massas dos veículos são mais elevadas, pois isso faz com que modos de vibração de frequências mais altas interfiram na resposta dinâmica da estrutura, reduzindo a capacidade de dissipar energia dos TMD's.

Em 2022 Yao *et al.* estudaram a possibilidade de instalar amortecedores de massa sintonizada por batimento, que são dispositivos formados por uma viga em formato de "L" com uma

massa fixada em uma das extremidades e preso a estrutura por meio de um delimitador, conforme mostra a Figura 2.2. Neste estudo, considerou-se uma ponte com três vão contínuos e seção caixão, onde foram instalados 3 amortecedores de massa sintonizada por batimento nos centros dos vão dessas vigas. Além disso, a análise levou em consideração a interação do veículo com a estrutura e os dispositivos foram dimensionados para amenizar as vibrações causadas pela passagem do veículo e a atuação de cargas geradas por sismos. Dessa análise concluiu-se que o uso deste tipo de dispositivo passivo conseguiu reduzir consideravelmente o deslocamento vertical máximo na ponte e o deslocamento horizontal máximo nos encontros das vigas com os pilares da estrutura.

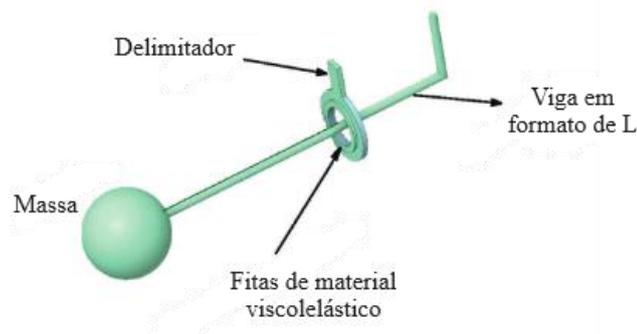


Figura 2.2 - Representação de um amortecedor de massa sintonizada por batimento (Yao *et al.*, 2022).

## 2.2 OTIMIZAÇÃO APLICADA AO CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE PONTES

Como apresentado na seção anterior, o uso de TMD's pode ser considerado uma alternativa simples e viável para controle de vibrações em pontes. Visando aumentar ao máximo a capacidade que esses dispositivos têm de reduzir a amplitude das vibrações de estruturas, muitos estudos são conduzidos no sentido de otimizar o projeto desses dispositivos. Dentre os trabalhos desenvolvidos nesta área, pode-se destacar:

Miguel *et al.* (2015) estudaram uma maneira de otimizar o cálculo da força e localização de amortecedores de fricção em passarelas com a finalidade de reduzir a aceleração causada pela ação da caminhada humana. Foram analisados dois tipos de passarelas com sistemas estruturais treliçados e quantidades distintas de amortecedores. A primeira passarela era composta por uma treliça do tipo Warren e três amortecedores foram instalados em suas barras diagonais. Quanto à segunda passarela, sua treliça era do tipo Pratt e dois

amortecedores foram instalados em suas barras diagonais. Em relação à otimização da força necessária aplicada nos amortecedores para minimização da aceleração nas passarelas, sua determinação foi feita por meio do algoritmo de otimização meta-heurístico *Firefly* que tem sua busca da resposta inspirada na atração de vaga-lumes por outros que emitem luz com maior intensidade.

Dentro da área de otimização aplicada ao controle de vibrações em pontes rodoviárias, destaca-se o trabalho de Miguel *et al.* (2016) que apresentaram uma nova metodologia robusta para otimização do dimensionamento dos componentes de múltiplos atenuadores de massa sintonizada (MTMD) para estruturas submetidas a carga dinâmica de veículos. Para determinação da resposta dinâmica do sistema veículo-estrutura, foi utilizado um modelo de veículo plano com 2 eixos e 5 graus de liberdade e uma ponte de seção transversal do tipo duplo T discretizada com elementos de viga enquanto a otimização dos componentes dos atenuadores foi calculada com auxílio do algoritmo de otimização *Firefly*.

Ainda em 2016, Debnath *et al.* estudaram uma forma de fazer o controle de vibração multimodal, ou seja, utilizando um sistema com vários MTMD localizados em posições distintas da estrutura para reduzir as vibrações causadas pelas frequências naturais de mais de um modo de vibração, pois para carregamentos como o do vento ou o de massas móveis o projeto de TMD's é feito considerando apenas um modo de vibração dominante na estrutura, que geralmente é o vertical. Para esse estudo, foi escolhida a ponte Saraighat, localizada na região nordeste da Índia, que é uma estrutura treliçada de uso rodoviário e ferroviário construída há mais de 50 anos. Além disso, a ponte é composta por dois trechos de aproximação e mais 10 vãos totalizando 1,3 km de extensão. Em relação ao carregamento ao qual essa estrutura foi submetida, utilizou-se um conjunto de forças genéricas oriundas de sinais de ruído branco com a finalidade de simular situações de carregamentos causados por veículos, forças aleatórias e excitação na base. Quanto aos modos de vibração utilizados no projeto do sistema de MTMD, foram escolhidos os dois primeiros transversais (horizontal), os dois primeiros verticais e o primeiro o modo de torção (combinação de horizontal e vertical), sendo que a determinação dos parâmetros dos dispositivos de controle de vibrações foi obtida por meio da otimização com o algoritmo de busca exaustiva e com as técnicas de análise modal e o uso da função de resposta de frequência modal (FRF).

Em 2018, Hughes *et al.* estudaram a aplicação de um sistema ativo de controle de vibração em pontes rodoviárias com a finalidade de mitigar o efeito de cargas de impacto de grande

intensidade, como por exemplo, a colisão de veículos pesados nos pilares da estrutura. A ponte e o pilar submetidos ao impacto foram modelados como um sistema discreto de 2 graus de liberdade. A carga de impacto utilizada foi um veículo de 6,6 t batendo no pilar da ponte com velocidade de 90 km/h. A otimização dos parâmetros do sistema ativo foi feita por meio do algoritmo meta-heurístico PSO (*Particle Swarm Optimization*) que é baseado em populações de indivíduos em que os candidatos a solução evoluem por meio de um modelo de adaptação social.

Visando reduzir a vibração causada pelo sistema veículo-estrutura, Liu et al. (2019) fizeram um estudo sobre a otimização de parâmetros de MTMD, tais como razões de massa, frequência e amortecimento do dispositivo. Para isso, foi utilizado um modelo tridimensional de uma ponte curva de aço com seção caixão e três vãos contínuos e um modelo completo de veículo com 2 eixos e 7 graus de liberdade. Nesse caso o algoritmo usado para otimização foi o VAPS (*Variable Accelerated Pattern Search*).

Também em 2019, Vellar *et al.* desenvolveram uma ferramenta computacional para dimensionamento robusto de MTMD utilizados em edifícios submetidos a ação de sismos. A estrutura considerada nesse trabalho foi um edifício de 10 pavimentos modelados como *Shear Building* e os TMD's foram tiveram seus parâmetros (rigidez e amortecimento) obtidos por meio do algoritmo heurístico *Search Group Algorithm* (SGA). Além disso, foram feitas simulações com os TMD's configurados de várias formas nos pavimentos, sendo que a quantidade máxima permitida desses dispositivos é 10, ou seja, cada pavimento poderia receber no máximo um TMD. Desse estudo concluiu-se que o dimensionamento robusto dos TMD's conseguiu reduzir significativamente os deslocamentos entre andares do edifício com a utilização de apenas 3 dispositivos posicionados nos pavimentos superiores da construção.

Com a finalidade de reduzir a resposta dinâmica de uma ponte submetida a passagem de um veículo que trafega sobre um pavimento irregular, Miguel e Santos, (2021) fizeram um estudo sobre o dimensionamento de um sistema de MTMD utilizando o algoritmo meta-heurístico *Whale Optimization Algorithm* (WOA). Para esses estudos foram considerados modelos matemáticos 2D tanto para ponte quanto para o veículo. A ponte escolhida possui seção transversal duplo T e foi discretizada com elementos finitos de viga, já o veículo utilizado foi um caminhão de 3 eixos modelado como um sistema discreto composto por massas, molas e amortecedores. O estudo também considerou incertezas nas propriedades da estrutura e do veículo, sendo que foram avaliados cenários nos quais 1, 2 ou 3 TMD's foram instalados nos

pontos centrais da ponte. Além disso, os resultados obtidos pelo algoritmo WOA foram comparados com os resultados por meio de algoritmo genético (GA) clássico e as equações analíticas de Den Hartog (1956) e Warburton (1982), o que comprovou que o algoritmo WOA se mostra muito eficiente para o dimensionamento dos parâmetros de MTMD e consequentemente na redução dos deslocamentos da ponte.

Tang e Zhu (2023) analisaram o efeito da implantação de múltiplos TMD's em pontes de estrutura mista aço-concreto e seção transversal tipo caixão submetidas a passagem de trens de alta velocidade. O modelo matemático da ponte foi feito com utilização de elementos de pórtico espacial adaptados para conseguir simular o efeito da distribuição não uniforme do esforço cortante e o deslizamento na interface de contato entre os dois materiais. Quanto ao veículo, foi considerado um modelo tridimensional de 27 GDL formado por corpos rígidos. Para as análises, foram testados 3 algoritmos de otimização, sendo que o escolhido para geração dos resultados foi o PSM (*Pattern Search Method*), pois seu tempo computacional para execução foi o menor. Para avaliar o processo de dimensionamento dos MTMD, considerou-se 4 cenários, com quantidades distintas de comboios cruzando a ponte, porém em todas as situações avaliadas a quantidade de TMD's consideradas foi 3. Sendo assim, constatou-se que o uso de MTMD é mais eficiente quando a quantidade de trens cruzando a ponte é maior, pois o espaçamento e a alta velocidade com a qual os trens trafegam induz a estrutura entrar em ressonância.

Zhang *et al.* (2024) propuseram uma metodologia otimizada para controle de vibrações causada pelo alto fluxo de pessoas em pavimentos de edificações utilizando múltiplos TMD's. Para realizar as análises e testar a metodologia proposta, os autores fizeram a integração entre o programa comercial SAP2000, utilizado para modelar a estrutura e a linguagem de programação MatLab, responsável por executar toda a parte numérica da metodologia. Sobre o dimensionamento dos parâmetros dos TMD's, isso foi feito com auxílio do algoritmo AFSA (*Artificial Fish Swarm Algorithm*), que se inspira na interação de cardumes de peixes para busca dos valores que minimizam a função objetivo do problema. Com isso foi verificado que a metodologia conseguiu apresentar uma redução de 65% na aceleração máxima da estrutura para os locais, principalmente nos locais onde o TMD instalado estava sob o efeito da ressonância.

## 2.3 PARÂMETROS ALEATÓRIOS RELATIVOS À ESTRUTURA E AO VEÍCULO

Wu e Law (2010) desenvolveram uma metodologia para consideração de parâmetros aleatórios em análises dinâmicas. Para verificar a metodologia proposta foi utilizada uma ponte biapoiada, modelada com elementos de viga. Incertezas foram consideradas no módulo de elasticidade e densidade do material da estrutura através da geração de valores com distribuição normal de probabilidade para essas variáveis. Quanto ao veículo, este foi representado por uma série de forças com valor variando no tempo à medida que se deslocam pela ponte.

No ano seguinte, Wu e Law (2011) fizeram algumas melhorias para a metodologia apresentada em seu trabalho anterior. Alguns aprimoramentos, tais como a mudança na forma de representar o veículo, que passou a ser modelado como um sistema discreto formado por massas molas e amortecedores, passou-se a considerar o perfil de irregularidades do pavimento e a interação veículo-estrutura-pavimento para o cálculo da força. Além disso, as variáveis aleatórias do problema passaram a ter distribuição Log-normal e a incorporação dessas variáveis aleatórias na equação de movimento da estrutura foi feita por meio do método dos elementos finitos estocásticos espectrais.

Dentre as variáveis que não podem ser negligenciadas em análises dinâmicas devido a sua grande variabilidade numérica, pode-se destacar a influência da força exercida pelo veículo, pois seu peso pode variar de acordo com a quantidade de passageiros a bordo (como o caso de um ônibus ou trem) e em relação a estrutura, os parâmetros do material que a compõe, como por exemplo, seu módulo de elasticidade ( $E$ ), razão de amortecimento ( $\zeta$ ) e densidade ( $\rho$ ) (MAO *et al.*, 2016). Por conta disso os autores mencionados fizeram uma análise dinâmica tridimensional de uma ponte ferroviária para trens de alta velocidade considerando os efeitos de variáveis aleatórias presentes no veículo, estrutura e nas forças de interação entre as rodas do trem e trilhos. Para a incorporação da aleatoriedade nas variáveis em análise foram utilizados os métodos de evolução da densidade de probabilidade e a teoria dos números.

Outra questão relativa à aleatoriedade da análise dinâmica do sistema veículo-estrutura está relacionada com o tráfego de veículos, pois o tráfego real em uma ponte consiste em diversos tipos de veículo passando pela extensão da ponte com velocidades diferentes e mudando de faixa constantemente. Li *et al.* (2018) propuseram uma metodologia para simular condições

reais de tráfego em uma ponte considerando as irregularidades do pavimento e a interação veículo-estrutura. Quanto à geração do tráfego, utilizou-se o método de simulação de Monte Carlo, baseado em parâmetros oriundos de pesquisas de campo sobre as condições do tráfego, tais como, contagem de veículos, tipos mais comuns verificados e a posição mais frequente desses veículos na ponte. A partir dessas informações se obtém a equação de movimento e o vetor de forças do sistema acoplado, sendo que tanto as matrizes que compõem a equação de movimento e o vetor de forças são atualizadas a cada passo de tempo estabelecido na análise dinâmica.

Também em 2018, Yu e Mao propuseram um modelo tridimensional para análise dinâmica de pontes ferroviárias considerando o efeito da aleatoriedade da interação das rodas do trem com o trilho, das forças transferidas para a estrutura devido a carga que cada vagão transporta, irregularidade dos trilhos e do material e seção transversal da ponte. Assumindo essas hipóteses, a aleatoriedade foi incorporada na equação de movimento do sistema acoplado por meio de funções de densidade de probabilidade para cada uma das variáveis aleatórias.

Como mencionado na seção anterior, o trabalho de Vellar *et al.* (2019) também levou em consideração na análise dinâmica do edifício submetido a ação de sismos o efeito da aleatoriedade em alguns parâmetros da estrutura, tais como, rigidez, amortecimento e módulo de elasticidade do material. A incorporação desses parâmetros na análise foi feita por meio de uma função de densidade de probabilidade com distribuição Log-normal.

Xin *et al.* (2020) propuseram um modelo para consideração de aleatoriedades na análise dinâmica da interação trem-estrutura em pontes ferroviárias. As variáveis aleatórias utilizadas foram as irregularidades dos trilhos e as propriedades dos materiais e geométricas da ponte e de seus pilares. Três casos foram analisados nesse estudo, (i) somente a irregularidade dos trilhos foi tomada como variável aleatória; (ii) somente as propriedades geométricas e do material da ponte foram considerados variáveis aleatórias e por fim (iii) uma análise dinâmica considerando tanto a irregularidade dos trilhos quanto os parâmetros da ponte como variáveis aleatórias. Em relação à ponte modelada, sua estrutura de concreto armado é composta por cinco vãos biapoiados de 32,6 m e seção transversal tipo caixão e mais seis pilares também de seção transversal caixão. O trem modelado é composto por oito vagões e move-se na ponte a uma velocidade constante de 300 km/h.

Lu *et al.* (2021) estudaram como o tráfego de veículos influencia na resposta dinâmica de pontes rodoviárias com vãos curtos e médios e compararam os resultados obtidos com as normas para dimensionamento de pontes de diversos países. Para isso, considerou-se duas pontes com vãos de 20 m e 40 m, ambas biapoiadas e um tráfego de veículos gerado por simulação de Monte Carlo para as faixas lenta e rápida obtido a partir de dados reais coletados em rodovias da China. Como resultado, obteve-se o valor do momento máximo atuante na ponte para amostras de tráfego que representam 10 anos de observação. Tais resultados serviram para base para determinação dos parâmetros de função de distribuição de valores extremos, utilizada para extrapolação do valor esforço máximo atuante na estrutura e a determinação do período de retorno do projeto das pontes construídas na China. Dessa análise verificou-se que algumas normas de projeto utilizam cargas de que levam a resultados mais conservadores, porém a carga de veículo considerada na norma chinesa não apresenta valores com tanta discrepância em relação aos obtidos no estudo.

Eberle e Oberguggenberger (2023) estudaram o efeito dinâmico de cargas oriundas de um tráfego aleatório veículos e variações nas propriedades do material de uma ponte influenciam na degradação estrutural da ponte. Para isso, considerou-se que o tráfego seria composto um comboio formado por veículos que trafegam com velocidades, massas distâncias e quantidades de eixos diferentes, modelados como cargas que se movem. Em relação a estrutura, as incertezas consideradas no material se deram por meio de campos aleatórios inseridos nos valores da rigidez a flexão e da massa por unidade de comprimento da ponte, modelada como uma viga biapoiada de Euler-Bernoulli. Para determinar a degradação estrutural foram feitas análises da frequência dominante relativa ao resultado do deslocamento no tempo no centro da ponte para as situações em que as variáveis aleatórias foram ou não consideradas, sendo que a estrutura era considerada defeituosa se sua frequência dominante apresentasse um valor abaixo de uma frequência crítica preestabelecida. Essa análise foi feita utilizando-se 400 amostras de cada variável aleatória gerada, por meio de simulação de Monte Carlo considerando. Destas análises conclui-se que em 7% das amostras a carga do tráfego associada com as irregularidades nas propriedades do material da ponte apresentaram algum grau de degradação estrutural.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 MODELO MATEMÁTICO DA PONTE

O sistema construtivo de pontes mais empregado no Brasil é em viga (EL DEBS e TAKEYA, 2007). Dentre os tipos de seções transversais utilizadas nos projetos de pontes em viga, destaca-se a seção em duplo T, conforme mostra a Figura 3.1a (BARONI, 2010). Por essas razões, a ponte que será utilizada nas análises dinâmicas do presente trabalho apresentará as características citadas acima.

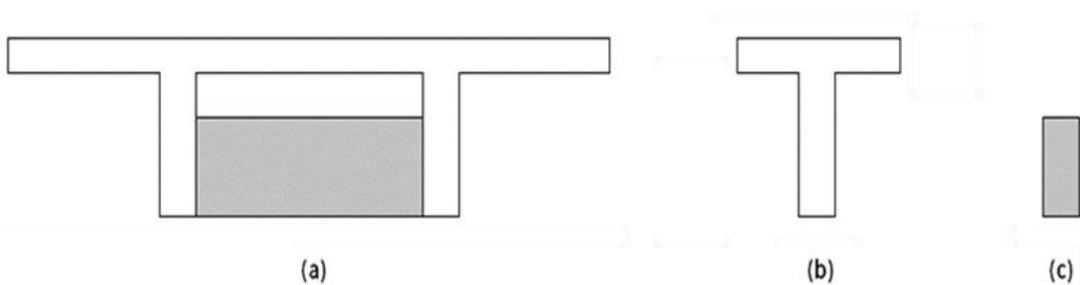


Figura 3.1 – Exemplo de uma seção transversal em duplo T (a), seções transversais (a) viga longitudinal e (b) viga transversal

Em relação ao modelo matemático da estrutura, pretende-se utilizar o modelo em grelha. Para isso, em que as vigas longarinas (Figura 3.1b) e transversinas (Figura 3.1c) da seção transversal da ponte serão discretizadas com elementos finitos de pórtico espacial.

A escolha desse modelo estrutural para ponte se deve ao fato de que na dissertação de Santos (2020) foi desenvolvido um programa na linguagem Octave que gera as matrizes de massa, rigidez e amortecimento para elementos finitos de pórtico espacial. Dessa forma, já se dispõe de uma ferramenta computacional para criação do modelo matemático da estrutura. Assim, dentro das possibilidades de discretização que o elemento de pórtico espacial permite para a geração do modelo matemático da ponte, o modelo em grelha é o que mais se adequa as características do elemento escolhido.

Sendo assim, as matrizes de massa e rigidez para o elemento finito de pórtico espacial são dadas pelas equações respectivamente (CALÇADA, 2001; LOGAN, 2015):

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{140I_0}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70I_0}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{70I_0}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140I_0}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde,

$\mathbf{M}$ : matriz de massa do elemento de pórtico espacial;

$\mathbf{K}$ : matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial;

$E$ : módulo de elasticidade do material da ponte;

$A$ : área da seção transversal do elemento;

$L$ : comprimento do elemento;

$\rho$ : densidade do material da ponte;

$I_z$ : momento de inércia em relação ao eixo z;

$I_y$ : momento de inércia em relação ao eixo y;

$I_x$ : constante de torção de Saint-Venant;

$I_0$ : momento de inércia polar.

Para o caso da matriz de amortecimento, utiliza-se o amortecimento de Rayleigh, dado por (RAO, 2011):

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.3)$$

sendo que,  $\alpha$  e  $\beta$  são obtidos por meio da equação (RAO, 2011):

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \begin{bmatrix} \omega_j & -\omega_i \\ -\frac{1}{\omega_j} & \frac{1}{\omega_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

com,

$\omega_i$ : frequência natural relativa ao modo de vibração i;

$\omega_j$ : frequência natural relativa ao modo de vibração j;

$\zeta_i$ : razão de amortecimento crítico do modo de vibração i;

$\zeta_j$ : razão de amortecimento crítico do modo de vibração j.

Observação: os índices (i) e (j) apresentados na eq. (3.4) referem-se a quaisquer dois modos de vibração da estrutura, como por exemplo, os dois primeiros ou o primeiro e o terceiro. Cabe a quem está modelando a estrutura decidir quais modos de vibração são os mais importantes para ser considerados na análise.

No caso deste trabalho, considerou-se que a matriz de amortecimento da estrutura é proporcional a sua matriz de rigidez para o primeiro modo de vibração da ponte em todas as análises realizadas. Pelo fato da ponte analisada ser de concreto armado, o valor utilizado para

a razão de amortecimento crítico do primeiro modo de vibração foi  $\zeta = 3\%$ , em conformidade com a faixa de valores comumente utilizada para esse tipo de estrutura (HESAMEDDIN *et al.*, 2015).

De posse das eqs. (3.1), (3.2) e (3.3), é possível escrever as matrizes de massa, rigidez e amortecimento globais da estrutura como sendo uma combinação de suas matrizes locais, considerando a aplicação das condições de contorno e fazendo a rotação das barras de modo que o eixo local coincida com o eixo global.

Após realizar essas operações, a equação de movimento do modelo matemático da estrutura é a seguinte:

$$\mathbf{M}_e \vec{\ddot{u}}_e + \mathbf{C}_e \vec{\dot{u}}_e + \mathbf{K}_e \vec{u}_e = \vec{F}_e \quad (3.5)$$

### 3.1.1 Matriz de Rotação para Elementos Finitos de Pórtico Espacial

A matriz rotação utilizada no programa desenvolvido nessa tese é baseada na metodologia utilizada no *software* comercial Ansys para montar a matriz de rotação do elemento BEAM4.

A escolha do elemento BEAM4 deve-se ao seu comportamento ser idêntico ao de um elemento de pórtico espacial, pois também apresenta 6 GDL, sendo 3 deslocamentos e 3 rotações e os dados de entrada para fazer uma análise com esse elemento são: módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, momentos de inércia e ângulo de orientação dos elementos.

Todo procedimento aqui apresentado baseia-se nas informações contidas no menu de ajuda *software* comercial Ansys (ANSYS, 2024). O primeiro passo para montagem da matriz de rotação do elemento finito de pórtico espacial consiste em calcular seu comprimento, conforme a equação:

$$L = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (3.6)$$

em que,

$$\begin{aligned}
dx &= x_f - x_i \\
dy &= y_f - y_i \\
dz &= z_f - z_i
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde,  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  são as coordenadas do nó inicial do elemento e  $x_f$ ,  $y_f$  e  $z_f$  são as coordenadas do nó final do elemento.

O próximo passo consiste em calcular o comprimento da projeção do elemento no plano xy. Isso é feito da seguinte maneira:

$$L_{xy} = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{3.8}$$

Por fim, os senos e cossenos dos ângulos do elemento são obtidos através das equações:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \begin{cases} \frac{dy}{L_{xy}}, & \text{se } L_{xy} > 0,0001L \\ 0, & \text{se } L_{xy} \leq 0,0001L \end{cases} & C_1 &= \begin{cases} \frac{dx}{L_{xy}}, & \text{se } L_{xy} > 0,0001L \\ 1, & \text{se } L_{xy} \leq 0,0001L \end{cases} \\
S_2 &= \frac{dz}{L} & C_2 &= \frac{L_{xy}}{L} \\
S_3 &= \text{sena} & C_3 &= \text{cosa}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

sendo que,  $\alpha$  é o ângulo de orientação dos elementos, informado ao programa.  $\alpha$  vale  $0^\circ$  se os elementos estão na posição horizontal e  $\alpha$  vale  $90^\circ$  se os elementos estão posição na vertical.

Com os resultados da eq. (3.9), a matriz de transformação para o elemento de pórtico espacial é a seguinte:

$$\lambda = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & S_1 C_2 & S_2 \\ -C_1 S_2 S_3 - S_1 C_3 & -S_1 S_2 S_3 + C_1 C_3 & S_3 C_2 \\ -C_1 S_2 C_3 - S_1 C_3 & -S_1 S_2 C_3 - C_1 C_3 & C_3 C_2 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Como as matrizes de massa e rigidez de um elemento de pórtico espacial possuem dimensão  $12 \times 12$ , a matriz de transformação desse elemento é escrita da seguinte forma:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde,  $\mathbf{0}$  são matrizes nulas com dimensão  $3 \times 3$ .

### 3.2 MODELOS MATEMÁTICOS DOS VEÍCULOS

De acordo com os estudos de contagem de tráfego em rodovias brasileiras realizados por Rossigali (2013) e Carneiro *et al.* (2020), verificou-se que os veículos de carga que alguns dos veículos de carga vistos com mais frequência nas rodovias, conforme as classificações dadas pelo DNIT são: 3C, 2C e 2S3, mostrados na Figura 3.2.

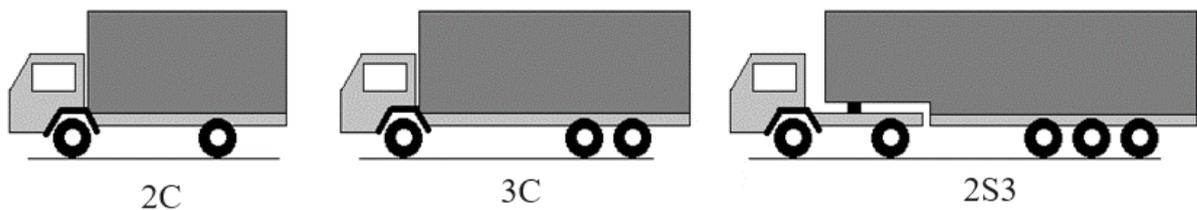


Figura 3.2 – Tipos de veículos que trafegam com maior frequência nas rodovias brasileiras (adaptado de Rossigali, 2013)

Conforme se observa na Figura 3.2, os caminhões do tipo 2C e 3C são rígidos e possuem 2 e 3 eixos, respectivamente, enquanto o caminhão 2S3 é articulado e possui 5 eixos.

Em relação à equação de movimento desses veículos, Santos (2020) deduziu a equação de movimento para o caminhão 3C; logo, a partir dessa equação é possível chegar à equação de movimento do caminhão 2C, visto que ambos apresentam a mesma tipologia. No caso do caminhão 2S3, sua equação de movimento necessita ser deduzida e esse procedimento será apresentado no item a seguir. Ressalta-se que toda dedução demonstrada a seguir foi realizada pelo autor desta tese.

### 3.2.1 Equação de Movimento para o Caminhão 2S3

Para a dedução da equação de movimento do caminhão 2S3, considerou-se que seu modelo matemático é um sistema discreto composto por um conjunto de massas, molas e amortecedores, sendo que as massas representam a carroceria, o reboque e os pneus dos veículos, as molas e amortecedores o sistema de suspensão, conforme mostra a Figura 3.3.

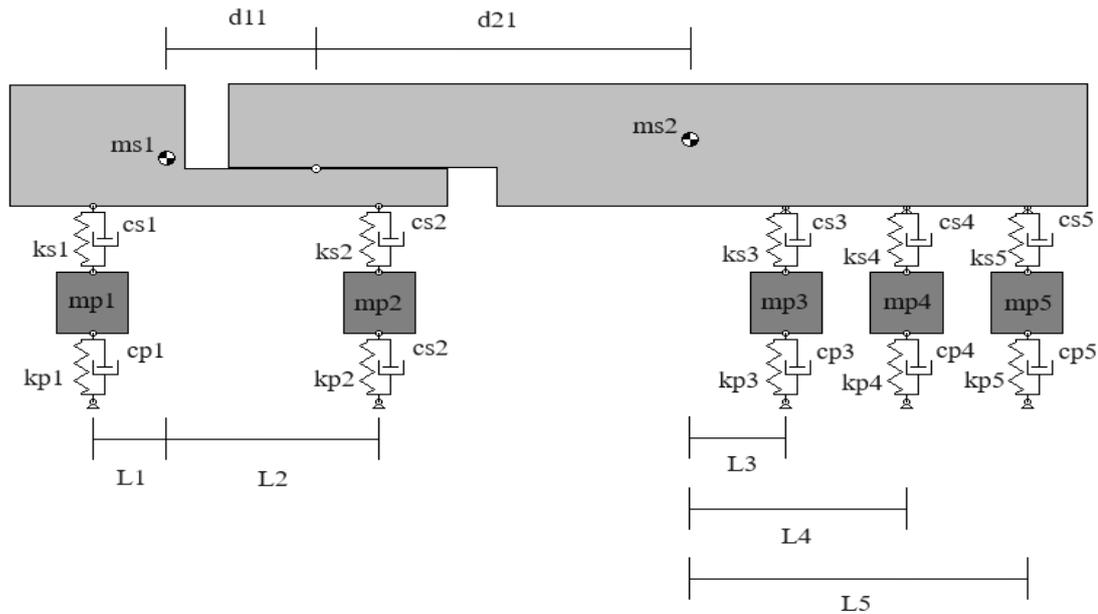


Figura 3.3 – Modelo matemático do veículo 2S3

A dedução da equação de movimento para o modelo tridimensional do veículo 2S3 será feita em duas etapas, sendo que a primeira consiste na determinação da equação de movimento das massas suspensas e a segunda parte será relativa às rodas desse veículo.

Para escrever a equação de movimento das massas suspensas utilizou-se a equação de Lagrange, representada na equação:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} = \vec{Q}_q \quad (3.12)$$

em que,

$T$ : energia cinética do sistema;

$\vec{q}$ : vetor de coordenadas generalizadas do sistema;

$\dot{\vec{q}}$ : vetor com a primeira derivada em relação ao tempo das coordenadas generalizadas do sistema;

$\vec{Q}_q$ : vetor de forças generalizadas atuantes no sistema, associadas as coordenadas  $\vec{q}$ .

O sistema analisado está representado na Figura 3.4 e as coordenadas generalizadas independentes utilizadas para descrevê-lo são:  $\vec{q} = [u_{PR} \ \theta_{xv1} \ \theta_{xv2}]^T$ , sendo que  $u_{PR}$  é o deslocamento vertical na quinta roda,  $\theta_{xv1}$  é a rotação do cavalo mecânico e  $\theta_{xv2}$  é a rotação do reboque.

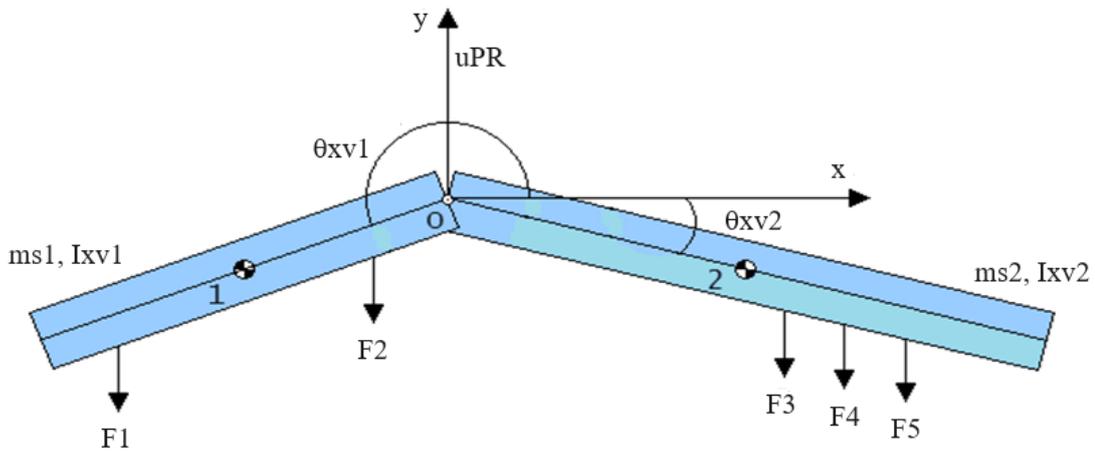


Figura 3.4 – Sistema multicorpo do veículo 2S3

De acordo com Shabana (2010), as distâncias do ponto O (quinta roda do veículo) até o centro de massa de cada veículo podem ser calculadas conforme a equação:

$$\vec{R} = \vec{R}_O + A\vec{u}_{CM} \quad (3.13)$$

onde,

$\vec{R}$ : vetor com as distâncias do centro de massa do veículo até a quinta roda;

$\vec{R}_O$ : vetor com as coordenadas da quinta roda;

$\vec{u}_{CM}$ : vetor com as coordenadas locais do centro de massa do veículo;

$A$ : matriz de transformação de coordenadas locais para globais. Essa é calculada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xvi} & -\sin\theta_{xvi} \\ \sin\theta_{vxi} & \cos\theta_{xvi} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Considerando  $\vec{R}_O = [0 \quad u_{PR}]^T$ ,  $\vec{u}_{CM1} = [d_{11} \quad 0]^T$  e  $\vec{u}_{CM2} = [d_{21} \quad 0]^T$ , e aplicando na eq. (3.13), obtém-se as seguintes posições dos centros de massa do veículo:

$$\begin{bmatrix} R_{xv1} \\ R_{yv1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}\cos\theta_{xv1} \\ u_{PR} + d_{11}\sin\theta_{vx1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} R_{xv2} \\ R_{yv2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{21}\cos\theta_{xv2} \\ u_{PR} + d_{21}\sin\theta_{vx2} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Derivando a eq. (3.15) em relação ao tempo, resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_{xv1} \\ \dot{R}_{yv1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{11}\dot{\theta}_{xv1}\sin\theta_{xv1} \\ \dot{u}_{PR} + d_{11}\dot{\theta}_{xv1}\cos\theta_{vx1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{R}_{xv2} \\ \dot{R}_{yv2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{21}\dot{\theta}_{xv2}\sin\theta_{xv2} \\ \dot{u}_{PR} + d_{21}\dot{\theta}_{xv2}\cos\theta_{vx2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A energia cinética do sistema é calculada da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2}m_{s1}(\dot{R}_{xv1}^2 + \dot{R}_{yv1}^2) + \frac{1}{2}m_{s2}(\dot{R}_{xv2}^2 + \dot{R}_{yv2}^2) + \frac{1}{2}I_{xv1}\dot{\theta}_{xv1}^2 + \frac{1}{2}I_{xv2}\dot{\theta}_{xv2}^2 \quad (3.17)$$

sendo que,

$m_{s1}$ : massa suspensa do veículo 1;

$m_{s2}$ : massa suspensa do veículo 2;

$I_{xv1}$ : momento de inércia de massa em relação ao eixo x do veículo 1;

$I_{xv2}$ : momento de inércia de massa em relação ao eixo x do veículo 2;

$\dot{R}_{xvi}$ , com  $i = 1, 2$ : é a velocidade em relação ao eixo x das massas suspensas do veículo;

$\dot{R}_{yvi}$ , com  $i = 1, 2$ : é a velocidade em relação ao eixo y das massas suspensas do veículo;

$\dot{\theta}_{xvi}$ , com  $i = 1, 2$ : é a velocidade angular em relação ao eixo x das massas suspensas do veículo;

Substituindo os resultados da eq. (3.16) na eq. (3.17) obtém-se a seguinte expressão para energia cinética do sistema:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} m_{s1} \left( [-d_{11} \dot{\theta}_{xv1} \text{sen} \theta_{xv1}]^2 + [\dot{u}_{PR} + d_{11} \dot{\theta}_{xv1} \text{cos} \theta_{vx1}]^2 \right) + \\
 & + \frac{1}{2} m_{s2} \left( [-d_{21} \dot{\theta}_{xv2} \text{sen} \theta_{xv2}]^2 + [\dot{u}_{PR} + d_{21} \dot{\theta}_{xv2} \text{cos} \theta_{vx2}]^2 \right) + \\
 & + \frac{1}{2} I_{xv1} \dot{\theta}_{xv1}^2 + \frac{1}{2} I_{xv2} \dot{\theta}_{xv2}^2
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Organizando e agrupando os termos semelhantes da eq. (3.18) tem-se que:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{m_{s1}}{2} (\dot{u}_{PR}^2 + 2d_{11} \dot{u}_{PR} \dot{\theta}_{xv1} \text{cos} \theta_{xv1} + d_{11}^2 \dot{\theta}_{xv1}^2) + \frac{1}{2} I_{xv1} \dot{\theta}_{xv1}^2 + \\
 & + \frac{m_{s2}}{2} (\dot{u}_{PR}^2 + 2d_{21} \dot{u}_{PR} \dot{\theta}_{xv2} \text{cos} \theta_{xv2} + d_{21}^2 \dot{\theta}_{xv2}^2) + \frac{1}{2} I_{xv2} \dot{\theta}_{xv2}^2
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Calculando as derivadas parciais da eq. (3.19) em relação a  $\dot{q}$  e  $q$ , isso resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_{PR}} &= m_{s1} (\dot{u}_{PR} + \dot{\theta}_{xv1} \text{cos} \theta_{xv1}) + m_{s2} (\dot{u}_{PR} + \dot{\theta}_{xv2} \text{cos} \theta_{xv2}) \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_{xv1}} &= m_{s1} (\dot{u}_{PR} d_{11} \text{cos} \theta_{xv1} + d_{11}^2 \dot{\theta}_{xv1}) + I_{xv1} \dot{\theta}_{xv1} \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_{xv2}} &= m_{s2} (\dot{u}_{PR} d_{21} \text{cos} \theta_{xv2} + d_{21}^2 \dot{\theta}_{xv2}) + I_{xv2} \dot{\theta}_{xv2}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u_{PR}} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_{xv1}} = -m_{s1} d_{11} \dot{u}_{PR} \dot{\theta}_{xv1} \text{sen} \theta_{xv1} \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_{xv2}} = -m_{s2} d_{21} \dot{u}_{PR} \dot{\theta}_{xv2} \text{sen} \theta_{xv2}$$

Derivando o conjunto de equações (3.20) em relação ao tempo, isso resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_{PR}} &= m_{s1}(\ddot{u}_{PR} + d_{11}\ddot{\theta}_{xv1}\cos\theta_{xv1} - d_{11}\dot{\theta}_{xv1}^2\text{sen}\theta_{xv1}) + \\ &\quad + m_{s2}(\ddot{u}_{PR} + d_{21}\ddot{\theta}_{xv2}\cos\theta_{xv2} - d_{21}\dot{\theta}_{xv2}^2\text{sen}\theta_{xv2}) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_{xv1}} &= m_{s1}(\ddot{u}_{PR}d_{11}\cos\theta_{xv1} - \dot{u}_{PR}d_{11}\dot{\theta}_{xv1}\text{sen}\theta_{xv1} + d_{11}^2\ddot{\theta}_{xv1}) + I_{xv1}\ddot{\theta}_{xv1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_{xv2}} &= m_{s2}(\ddot{u}_{PR}d_{21}\cos\theta_{xv2} - \dot{u}_{PR}d_{21}\dot{\theta}_{xv2}\text{sen}\theta_{xv2} + d_{21}^2\ddot{\theta}_{xv2}) + I_{xv2}\ddot{\theta}_{xv2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo os resultados das eqs. (3.21) e (3.22) na eq. (3.12), tem-se que:

$$\begin{aligned} &m_{s1}(\ddot{u}_{PR} + d_{11}\ddot{\theta}_{xv1}\cos\theta_{xv1} - d_{11}\dot{\theta}_{xv1}^2\text{sen}\theta_{xv1}) + \\ &\quad + m_{s2}(\ddot{u}_{PR} + d_{21}\ddot{\theta}_{xv2}\cos\theta_{xv2} - d_{21}\dot{\theta}_{xv2}^2\text{sen}\theta_{xv2}) = Q_{u_{PR}} \\ m_{s1}(\ddot{u}_{PR}d_{11}\cos\theta_{xv1} - \dot{u}_{PR}d_{11}\dot{\theta}_{xv1}\text{sen}\theta_{xv1} + d_{11}^2\ddot{\theta}_{xv1}) + I_{xv1}\ddot{\theta}_{xv1} - \\ &\quad - (-m_{s1}d_{11}\dot{u}_{PR}\dot{\theta}_{xv1}\text{sen}\theta_{xv1}) = Q_{\theta_{xv1}} \\ m_{s2}(\ddot{u}_{PR}d_{21}\cos\theta_{xv2} - \dot{u}_{PR}d_{21}\dot{\theta}_{xv2}\text{sen}\theta_{xv2} + d_{21}^2\ddot{\theta}_{xv2}) + I_{xv2}\ddot{\theta}_{xv2} - \\ &\quad - (-m_{s2}d_{21}\dot{u}_{PR}\dot{\theta}_{xv2}\text{sen}\theta_{xv2}) = Q_{\theta_{xv2}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde,

$\ddot{u}_{PR}$ : aceleração da quinta roda do veículo;

$\ddot{\theta}_{xvi}$ , com  $i = 1, 2$ : aceleração angular em relação ao x das massas suspensas do veículo;

$Q_{u_{PR}}$ : forças generalizadas em relação ao deslocamento vertical da quinta roda;

$Q_{\theta_{xv1}}$ : forças generalizadas em relação a rotação do veículo 1;

$Q_{\theta_{xv2}}$ : forças generalizadas em relação a rotação do veículo 2;

Organizando e agrupando os termos semelhantes para o conjunto de equações (3.23), tem-se que:

$$\begin{aligned}
(m_{s1} + m_{s2})\ddot{u}_{PR} + m_{s1}d_{11}\cos\theta_{xv1}\ddot{\theta}_{xv1} + m_{s2}d_{21}\cos\theta_{xv2}\ddot{\theta}_{xv2} - \\
-m_{s1}d_{11}\dot{\theta}_{xv1}^2\text{sen}\theta_{xv1} - m_{s2}d_{21}\dot{\theta}_{xv2}^2\text{sen}\theta_{xv2} = Q_{u_{PR}} \\
m_{s1}d_{11}\cos\theta_{xv1}\ddot{u}_{PR} + (I_{xv1} + m_{s1}d_{11}^2)\ddot{\theta}_{xv1} = Q_{\theta_{xv1}} \\
m_{s2}d_{21}\cos\theta_{xv2}\ddot{u}_{PR} + (I_{xv2} + m_{s2}d_{21}^2)\ddot{\theta}_{xv2} = Q_{\theta_{xv2}}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Para calcular as forças generalizadas  $Q_{u_{PR}}$ ,  $Q_{\theta_{xv1}}$  e  $Q_{\theta_{xv2}}$  utiliza-se o princípio dos trabalhos virtuais conforme descrito na equação:

$$W_e = (-1)(F_1R_{y1} + F_2R_{y2} + F_3R_{y3} + F_4R_{y4} + F_5R_{y5}) \tag{3.25}$$

onde,

$W_e$ : trabalho virtual das forças externas atuantes no veículo;

$F_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, 5$ : forças elásticas e de amortecimento da suspensão que atuam em cada eixo do veículo;

$R_{yi}$ , com  $i = 1, 2, \dots, 5$ : distância de cada eixo até a quinta roda. Calculado conforme a eq. (3.13) e com os resultados mostrados a seguir:

$$\begin{aligned}
R_{y1} &= u_{PR} + (L_1 + d_{11})\text{sen}\theta_{xv1} \\
R_{y2} &= u_{PR} + (d_{11} - L_2)\text{sen}\theta_{xv1} \\
R_{y3} &= u_{PR} + (L_3 + d_{21})\text{sen}\theta_{xv2} \\
R_{y4} &= u_{PR} + (L_4 + d_{21})\text{sen}\theta_{xv2} \\
R_{y5} &= u_{PR} + (L_5 + d_{21})\text{sen}\theta_{xv2}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Aplicando o operador  $\delta$  na eq. (3.25), obtém-se:

$$\delta W_e = (-1)(F_1\delta R_{y1} + F_2\delta R_{y2} + F_3\delta R_{y3} + F_4\delta R_{y4} + F_5\delta R_{y5}) \tag{3.27}$$

Aplicando o operador  $\delta$  na eq. (3.26), tem-se como resultado:

$$\begin{aligned}
\delta R_{y_1} &= \delta u_{PR} + (L_1 + d_{11})\cos\theta_{xv1}\delta\theta_{xv1} \\
\delta R_{y_2} &= \delta u_{PR} + (d_{11} - L_2)\cos\theta_{xv1}\delta\theta_{xv1} \\
\delta R_{y_3} &= \delta u_{PR} + (L_3 + d_{21})\cos\theta_{xv2}\delta\theta_{xv2} \\
\delta R_{y_4} &= \delta u_{PR} + (L_4 + d_{21})\cos\theta_{xv2}\delta\theta_{xv2} \\
\delta R_{y_5} &= \delta u_{PR} + (L_5 + d_{21})\cos\theta_{xv2}\delta\theta_{xv2}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Substituindo o resultado da eq. (3.28) na eq. (3.27) e agrupando os termos semelhantes, obtém-se:

$$\delta W_e = Q_{u_{PR}}\delta u_{PR} + Q_{\theta_{xv1}}\delta\theta_{xv1} + Q_{\theta_{xv2}}\delta\theta_{xv2} \tag{3.29}$$

em que,

$$\begin{aligned}
Q_{u_{PR}} &= (-1)(F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5) \\
Q_{\theta_{xv1}} &= (-1)[F_1(L_1 + d_{11})\cos\theta_{xv1} - F_2(L_2 - d_{11})\cos\theta_{xv1}] \\
Q_{\theta_{xv2}} &= (-1)[F_3(L_3 + d_{21})\cos\theta_{xv2} + F_4(L_4 + d_{21})\cos\theta_{xv1} + F_5(L_5 + d_{21})\cos\theta_{xv2}]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Considerando  $\theta_{xv1} = 180^\circ$ ,  $\theta_{xv2} = 0^\circ$  (posição inicial do veículo) e substituindo esses valores nas eqs. (3.24) e (3.30), chega-se ao resultado das equações de movimento das massas suspensas do veículo:

$$\begin{aligned}
(m_{s1} + m_{s2})\ddot{u}_{PR} - m_{s1}d_{11}\ddot{\theta}_{xv1} + m_{s2}d_{21}\ddot{\theta}_{xv2} &= -F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5 \\
(I_{xv1} + m_{s1}d_{11}^2)\ddot{\theta}_{xv1} - m_{s1}d_{11}\ddot{u}_{PR} &= F_1(L_1 + d_{11}) - F_2(L_2 - d_{11}) \\
(I_{xv2} + m_{s2}d_{21}^2)\ddot{\theta}_{xv2} + m_{s2}d_{21}\ddot{u}_{PR} &= -F_3(L_3 + d_{21}) - F_4(L_4 + d_{21}) - F_5(L_5 + d_{21})
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Observação: as forças ( $F_1, F_2, F_3, F_4$  e  $F_5$ ) indicadas na eq. (3.31) representam as forças elásticas ( $f_e$ ) e de amortecimento ( $f_a$ ) das suspensões do veículo. Por se tratar de um modelo tridimensional, cada uma das forças indicadas está representando o sistema de suspensão de um eixo do veículo, por esse motivo existem apenas 5 forças na eq. (3.31). Além disso, a numeração de cada roda do veículo segue o esquema mostrado na Figura 3.5.

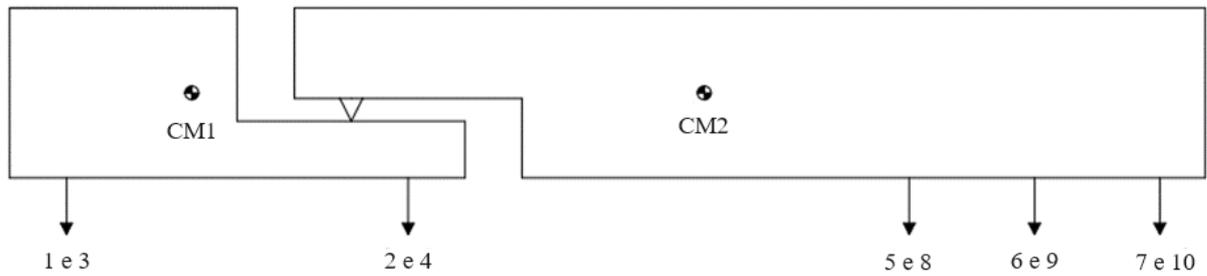


Figura 3.5 – Esquema de numeração das rodas do veículo 2S3

Após determinar o conjunto de equações de movimento da direção longitudinal do veículo, a seguir será apresentado o procedimento para determinar as equações de movimento da direção transversal do veículo.

Para a direção transversal, considerou-se que a quinta roda e o centro de massa de cada veículo estão alinhados, de acordo com o diagrama de corpo livre da Figura 3.6.

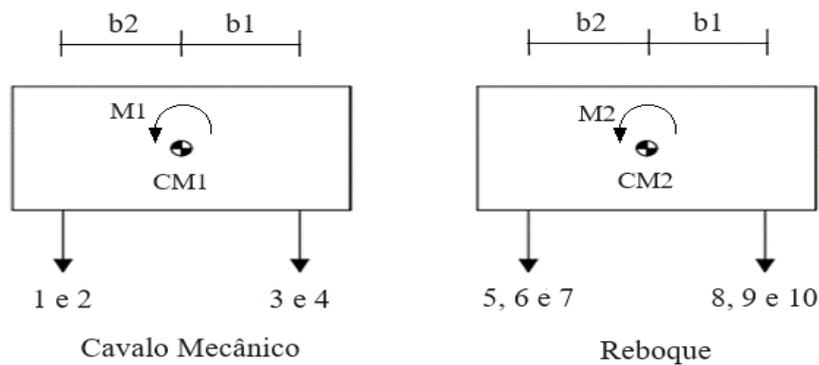


Figura 3.6 – Diagramas de corpo de livre da seção transversal do veículo 2S3

Calculando o momento que as forças elásticas e de amortecimento off causam em relação ao centro de massa de cada veículo, conforme a eq. (3.32), isso resulta:

$$\sum \vec{M}_{yvj} = I_{yvj} \ddot{\theta}_{yvj}, j = 1, 2 \quad (3.32)$$

Massa suspensa 1 (cavalo mecânico):

$$I_{yv1} \ddot{\theta}_{yv1} = (f_{e1} + f_{a1})b_2 + (f_{e2} + f_{a2})b_2 - (f_{e3} + f_{a3})b_1 - (f_{e4} + f_{a4})b_1 \quad (3.33)$$

Massa suspensa 2 (reboque):

$$I_{yv2}\ddot{\theta}_{yv2} = (f_{e5} + f_{a5})b_2 + (f_{e6} + f_{a6})b_2 + (f_{e7} + f_{a7})b_2 - (f_{e8} + f_{a8})b_1 - (f_{e9} + f_{a9})b_1 - (f_{e10} + f_{a10})b_1 \quad (3.34)$$

onde,

$f_{ei}$ , com  $i = 1, 2, \dots, 10$ : são as forças elásticas da suspensão em cada roda do veículo;

$f_{ai}$ , com  $i = 1, 2, \dots, 10$ : são as forças de amortecimento da suspensão em cada roda do veículo;

$I_{yv1}$ : momento de inércia de massa em relação ao eixo  $y$  da massa suspensa do veículo 1;

$I_{yv2}$ : momento de inércia de massa em relação ao eixo  $y$  da massa suspensa do veículo 2;

$b_i$ , com  $i = 1, 2$ : distância transversal do centro de massa de cada veículo para suas respectivas rodas.

Em relação às forças elásticas da suspensão, seu valor é dado por:

$$\begin{aligned} f_{e1} &= k_{s1}[u_{PR} - u_1 - \theta_{xv1}(L_1 + d_{11}) - \theta_{yv1}b_2] \\ f_{e2} &= k_{s2}[u_{PR} - u_2 + \theta_{xv1}(L_2 - d_{11}) - \theta_{yv1}b_2] \\ f_{e3} &= k_{s3}[u_{PR} - u_3 - \theta_{xv1}(L_1 + d_{11}) + \theta_{yv1}b_1] \\ f_{e4} &= k_{s4}[u_{PR} - u_4 + \theta_{xv1}(L_2 + d_{11}) + \theta_{yv1}b_1] \\ f_{e5} &= k_{s5}[u_{PR} - u_5 + \theta_{xv2}(L_3 + d_{21}) - \theta_{yv2}b_2] \\ f_{e6} &= k_{s6}[u_{PR} - u_6 + \theta_{xv2}(L_4 + d_{21}) - \theta_{yv2}b_2] \\ f_{e7} &= k_{s7}[u_{PR} - u_7 + \theta_{xv2}(L_5 + d_{21}) - \theta_{yv2}b_2] \\ f_{e8} &= k_{s8}[u_{PR} - u_8 + \theta_{xv2}(L_3 + d_{21}) + \theta_{yv2}b_1] \\ f_{e9} &= k_{s9}[u_{PR} - u_9 + \theta_{xv2}(L_4 + d_{21}) + \theta_{yv2}b_1] \\ f_{e10} &= k_{s10}[u_{PR} - u_{10} + \theta_{xv2}(L_5 + d_{21}) + \theta_{yv2}b_1] \end{aligned} \quad (3.35)$$

No caso das forças de amortecimento da suspensão, suas equações são as seguintes:

$$\begin{aligned}
f_{a1} &= c_{s1}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_1 - \dot{\theta}_{xv1}(L_1 + d_{11}) - \dot{\theta}_{yv1}b_2] \\
f_{a2} &= c_{s2}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_2 + \dot{\theta}_{xv1}(L_2 - d_{11}) - \dot{\theta}_{yv1}b_2] \\
f_{a3} &= c_{s3}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_3 - \dot{\theta}_{xv1}(L_1 + d_{11}) + \dot{\theta}_{yv1}b_1] \\
f_{a4} &= c_{s4}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_4 + \dot{\theta}_{xv1}(L_2 - d_{11}) + \dot{\theta}_{yv1}b_1] \\
f_{a5} &= c_{s5}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_5 + \dot{\theta}_{xv2}(L_3 + d_{21}) - \dot{\theta}_{yv2}b_2] \\
f_{a6} &= c_{s6}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_6 + \dot{\theta}_{xv2}(L_4 + d_{21}) - \dot{\theta}_{yv2}b_2] \\
f_{a7} &= c_{s7}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_7 + \dot{\theta}_{xv2}(L_5 + d_{21}) - \dot{\theta}_{yv2}b_2] \\
f_{a8} &= c_{s8}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_8 + \dot{\theta}_{xv2}(L_3 + d_{21}) + \dot{\theta}_{yv2}b_1] \\
f_{a9} &= c_{s9}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_9 + \dot{\theta}_{xv2}(L_4 + d_{21}) + \dot{\theta}_{yv2}b_1] \\
f_{a10} &= c_{s10}[\dot{u}_{PR} - \dot{u}_{10} + \dot{\theta}_{xv2}(L_5 + d_{21}) + \dot{\theta}_{yv2}b_1]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

sendo que,

$\dot{u}_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, 10$ : velocidade de cada roda do veículo;

$\dot{u}_{PR}$ : velocidade vertical da quinta roda do veículo;

$\dot{\theta}_{xv1}$ : velocidade angular de arfagem do veículo 1;

$\dot{\theta}_{xv2}$ : velocidade angular de arfagem do veículo 2;

$\dot{\theta}_{yv1}$ : velocidade angular de rolamento do veículo 1;

$\dot{\theta}_{yv2}$ : velocidade angular de rolamento do veículo 2;

$u_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, 10$ : deslocamento de cada roda do veículo;

$\theta_{xv1}$ : ângulo de arfagem do veículo 1;

$\theta_{xv2}$ : ângulo de arfagem do veículo 2;

$\theta_{yv1}$ : ângulo de rolamento do veículo 1;

$\theta_{yv2}$ : ângulo de rolamento do veículo 2;

$k_{si}$ , com  $i = 1, 2, \dots, 10$ : rigidez da suspensão de cada eixo do veículo;

$c_{si}$ , com  $i = 1, 2, \dots, 10$ : amortecimento da suspensão de cada eixo do veículo.

Para concluir a dedução da equação de movimento de veículo 2S3, resta escrever as equações diferenciais de cada roda, o que seria a segunda etapa desse processo. De modo similar ao que foi feito para as massas suspensas, a equação de cada roda é escrita com base no diagrama de corpo livre da Figura 3.7. A equação de cada roda é apresentada a seguir:

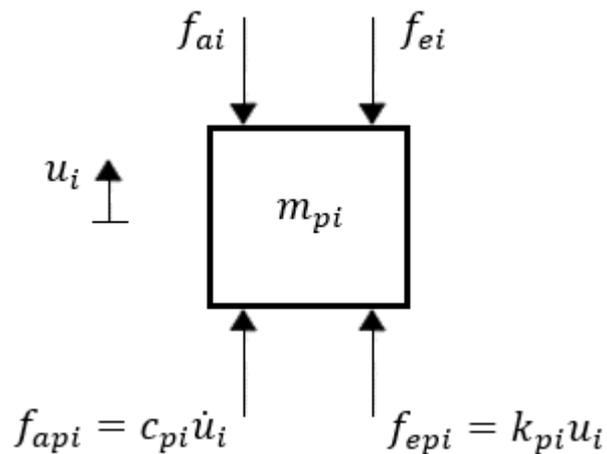


Figura 3.7 – Diagrama de corpo livre para a  $i$ -ésima roda do veículo 2S3

Roda 1:

$$m_{p1}\ddot{u}_1 + c_{p1}\dot{u}_1 + k_{p1}u_1 - f_{e1} - f_{a1} = 0 \quad (3.37)$$

Roda 2:

$$m_{p2}\ddot{u}_2 + c_{p2}\dot{u}_2 + k_{p2}u_2 - f_{e2} - f_{a2} = 0 \quad (3.38)$$

Roda 3:

$$m_{p3}\ddot{u}_3 + c_{p3}\dot{u}_3 + k_{p3}u_3 - f_{e3} - f_{a3} = 0 \quad (3.39)$$

Roda 4:

$$m_{p4}\ddot{u}_4 + c_{p4}\dot{u}_4 + k_{p4}u_4 - f_{e4} - f_{a4} = 0 \quad (3.40)$$

Roda 5:

$$m_{p5}\ddot{u}_5 + c_{p5}\dot{u}_5 + k_{p5}u_5 - f_{e5} - f_{a5} = 0 \quad (3.41)$$

Roda 6:

$$m_{p6}\ddot{u}_6 + c_{p6}\dot{u}_6 + k_{p6}u_6 - f_{e6} - f_{a6} = 0 \quad (3.42)$$

Roda 7:

$$m_{p7}\ddot{u}_7 + c_{p7}\dot{u}_7 + k_{p7}u_7 - f_{e7} - f_{a7} = 0 \quad (3.43)$$

Roda 8:

$$m_{p8}\ddot{u}_8 + c_{p8}\dot{u}_8 + k_{p8}u_8 - f_{e8} - f_{a8} = 0 \quad (3.44)$$

Roda 9:

$$m_{p9}\ddot{u}_9 + c_{p9}\dot{u}_9 + k_{p9}u_9 - f_{e9} - f_{a9} = 0 \quad (3.45)$$

Roda 10:

$$m_{p10}\ddot{u}_{10} + c_{p10}\dot{u}_{10} + k_{p10}u_{10} - f_{e10} - f_{a10} = 0 \quad (3.46)$$

em que,

$\ddot{u}_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, 10$ : aceleração dos pneus do veículo;

$k_{pi}$ , com  $i = 1, 2, \dots, 10$ : rigidez dos pneus do veículo;

$c_{pi}$ , com  $i = 1, 2, \dots, 10$ : amortecimento dos pneus do veículo.

Com as equações diferenciais das massas suspensas e rodas do caminhão 2S3, pode-se escrever sua equação de movimento da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_v \vec{\ddot{u}}_v + \mathbf{C}_v \vec{\dot{u}}_v + \mathbf{K}_v \vec{u}_v = \vec{F}_v \quad (3.47)$$

onde,

$\mathbf{M}_v$ : matriz de massa global do veículo;

$\mathbf{C}_v$ : matriz de amortecimento global do veículo;

$\mathbf{K}_v$ : matriz de rigidez global do veículo;

$\vec{F}_v$ : vetor global de forças atuantes no veículo;

$\vec{\ddot{u}}_v$ : vetor global de acelerações do veículo;

$\vec{\dot{u}}_v$ : vetor global de velocidades do veículo;

$\vec{u}_v$ : vetor global de deslocamentos do veículo.

As matrizes  $\mathbf{M}_v$ ,  $\mathbf{C}_v$  e  $\mathbf{K}_v$  da eq. (3.47) podem ser particionadas em parcelas referentes às rodas e às massas suspensas. Sendo assim, essas matrizes podem ser escritas da conforme o conjunto de equações:

$$\mathbf{M}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{vv} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{C}_{pv} \\ \mathbf{C}_{vp} & \mathbf{C}_{vv} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pv} \\ \mathbf{K}_{vp} & \mathbf{K}_{vv} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

tal que, os subíndices  $pp$ ,  $vv$ ,  $pv$  e  $vp$  referem-se aos pneus, massas suspensas, relação pneu-massa suspensa e relação massa suspensa-pneu, respectivamente.

Dessa forma, cada partição das matrizes  $\mathbf{M}_v$ ,  $\mathbf{C}_v$  e  $\mathbf{K}_v$  tem as seguintes expressões:

$$\mathbf{M}_{pp} = \begin{bmatrix} m_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{p4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p10} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{M}_{vv} = \begin{bmatrix} m_{v1} + m_{v2} & -m_{v1}d_{11} & m_{v2}d_{21} & 0 & 0 \\ -m_{v1}d_{11} & I_{xv1} + m_{s1}d_{11}^2 & 0 & 0 & 0 \\ m_{v2}d_{21} & 0 & I_{xv2} + m_{v2}d_{21}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yv1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yv2} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{C}_{pv} = \begin{bmatrix} -c_{s1} & c_{s1}(L_1 + d_{11}) & 0 & c_{s1}b_2 & 0 \\ -c_{s2} & -c_{s2}(L_2 - d_{11}) & 0 & c_{s2}b_2 & 0 \\ -c_{s3} & c_{s3}(L_1 + d_{11}) & 0 & -c_{s3}b_1 & 0 \\ -c_{s4} & -c_{s4}(L_2 - d_{11}) & 0 & -c_{s4}b_1 & 0 \\ -c_{s5} & 0 & -c_{s5}(L_3 + d_{21}) & 0 & c_{s5}b_2 \\ -c_{s6} & 0 & -c_{s6}(L_4 + d_{21}) & 0 & c_{s6}b_2 \\ -c_{s7} & 0 & -c_{s7}(L_5 + d_{21}) & 0 & c_{s7}b_2 \\ -c_{s8} & 0 & -c_{s8}(L_3 + d_{21}) & 0 & -c_{s8}b_1 \\ -c_{s9} & 0 & -c_{s9}(L_4 + d_{21}) & 0 & -c_{s9}b_1 \\ -c_{s10} & 0 & -c_{s10}(L_5 + d_{21}) & 0 & -c_{s10}b_1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{K}_{pv} = \begin{bmatrix} -k_{s1} & k_{s1}(L_1 + d_{11}) & 0 & k_{s1}b_2 & 0 \\ -k_{s2} & -k_{s2}(L_2 - d_{11}) & 0 & k_{s2}b_2 & 0 \\ -k_{s3} & k_{s3}(L_1 + d_{11}) & 0 & -k_{s3}b_1 & 0 \\ -k_{s4} & -k_{s4}(L_2 - d_{11}) & 0 & -k_{s4}b_1 & 0 \\ -k_{s5} & 0 & -k_{s5}(L_3 + d_{21}) & 0 & k_{s5}b_2 \\ -k_{s6} & 0 & -k_{s6}(L_4 + d_{21}) & 0 & k_{s6}b_2 \\ -k_{s7} & 0 & -k_{s7}(L_5 + d_{21}) & 0 & k_{s7}b_2 \\ -k_{s8} & 0 & -k_{s8}(L_3 + d_{21}) & 0 & -k_{s8}b_1 \\ -k_{s9} & 0 & -k_{s9}(L_4 + d_{21}) & 0 & -k_{s9}b_1 \\ -k_{s10} & 0 & -k_{s10}(L_5 + d_{21}) & 0 & -k_{s10}b_1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{C}_{pp} = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{s2} + c_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{s3} + c_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{s4} + c_{p4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s5} + c_{p5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s6} + c_{p6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s7} + c_{p7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s8} + c_{p8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s9} + c_{p9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s10} + c_{p10} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{C}_{vv} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{10} c_{si} & \sum_{i=1}^2 (-1)^i (c_{si} + c_{si+2}) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}] & \sum_{i=3}^5 (c_{si+2} + c_{si+5}) (L_i + d_{21}) & \sum_{i=1}^2 c_{si+2} b_1 - c_{si} b_2 & \sum_{i=3}^5 c_{si+5} b_1 - c_{si+2} b_2 \\ \sum_{i=1}^2 (-1)^i (c_{si} + c_{si+2}) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}] & \sum_{i=1}^2 (c_{si} + c_{s+2}) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}]^2 & 0 & \sum_{i=1}^2 (-1)^i (c_{si+2} b_1 - c_{si} b_2) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}] & 0 \\ \sum_{i=3}^5 (c_{si+2} + c_{si+5}) (L_i + d_{21}) & 0 & \sum_{i=3}^5 (c_{si+2} + c_{si+5}) (L_i + d_{21})^2 & 0 & \sum_{i=3}^5 (c_{si+5} b_1 - c_{si+2} b_2) (L_i + d_{21}) \\ \sum_{i=1}^2 c_{si+2} b_1 - c_{si} b_2 & \sum_{i=1}^2 (-1)^i (c_{si+2} b_1 - c_{si} b_2) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}] & 0 & \sum_{i=1}^2 c_{si+2} b_1^2 + c_{si} b_2^2 & 0 \\ \sum_{i=3}^5 c_{si+5} b_1 - c_{si+2} b_2 & 0 & \sum_{i=3}^5 (c_{si+5} b_1 - c_{si+2} b_2) (L_i + d_{21}) & 0 & \sum_{i=3}^5 c_{si+5} b_1^2 + c_{si+2} b_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{C}_{vp} = \begin{bmatrix} -c_{s1} & -c_{s2} & -c_{s3} & -c_{s4} & -c_{s5} & -c_{s6} & -c_{s7} & -c_{s8} & -c_{s9} & -c_{s10} \\ c_{s1}(L_1 + d_{11}) & -c_{s2}(L_2 - d_{11}) & c_{s3}(L_1 + d_{11}) & -c_{s4}(L_2 - d_{11}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s5}(L_3 + d_{21}) & -c_{s6}(L_4 + d_{21}) & -c_{s7}(L_5 + d_{21}) & -c_{s8}(L_3 + d_{21}) & -c_{s9}(L_4 + d_{21}) & -c_{s10}(L_5 + d_{21}) \\ c_{s1}b_2 & c_{s2}b_2 & -c_{s3}b_1 & -c_{s4}b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s5}b_2 & c_{s6}b_2 & c_{s7}b_2 & -c_{s8}b_1 & -c_{s9}b_1 & -c_{s10}b_1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{s2} + k_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{s3} + k_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{s4} + k_{p4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s5} + k_{p5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s6} + k_{p6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s7} + k_{p7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s8} + k_{p8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s9} + k_{p9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s10} + k_{p10} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{K}_{vv} = \begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{10} k_{si} & \sum_{i=1}^2 (-1)^i (k_{si} + k_{si+2}) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}] & \sum_{i=3}^5 (k_{si+2} + k_{si+5}) (L_i + d_{21}) & \sum_{i=1}^2 k_{si+2} b_1 - k_{si} b_2 & \sum_{i=3}^5 k_{si+5} b_1 - k_{si+2} b_2 \\
\sum_{i=1}^2 (-1)^i (k_{si} + k_{si+2}) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}] & \sum_{i=1}^2 (k_{si} + k_{s+2}) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}]^2 & 0 & \sum_{i=1}^2 (-1)^i (k_{si+2} b_1 - k_{si} b_2) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}] & 0 \\
\sum_{i=3}^5 (k_{si+2} + k_{si+5}) (L_i + d_{21}) & 0 & \sum_{i=3}^5 (k_{si+2} + k_{si+5}) (L_i + d_{21})^2 & 0 & \sum_{i=3}^5 (k_{si+5} b_1 - k_{si+2} b_2) (L_i + d_{21}) \\
\sum_{i=1}^2 k_{si+2} b_1 - k_{si} b_2 & \sum_{i=1}^2 (-1)^i (k_{si+2} b_1 - k_{si} b_2) [L_i + (-1)^{i+1} d_{11}] & 0 & \sum_{i=1}^2 k_{si+2} b_1^2 + k_{si} b_2^2 & 0 \\
\sum_{i=3}^5 k_{si+5} b_1 - k_{si+2} b_2 & 0 & \sum_{i=3}^5 (k_{si+5} b_1 - k_{si+2} b_2) (L_i + d_{21}) & 0 & \sum_{i=3}^5 k_{si+5} b_1^2 + k_{si+2} b_2^2
\end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{K}_{vp} = \begin{bmatrix}
-k_{s1} & -k_{s2} & -k_{s3} & -k_{s4} & -k_{s5} & -k_{s6} & -k_{s7} & -k_{s8} & -k_{s9} & -k_{s10} \\
k_{s1}(L_1 + d_{11}) & -k_{s2}(L_2 - d_{11}) & k_{s3}(L_1 + d_{11}) & -k_{s4}(L_2 - d_{11}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s5}(L_3 + d_{21}) & -k_{s6}(L_4 + d_{21}) & -k_{s7}(L_5 + d_{21}) & -k_{s8}(L_3 + d_{21}) & -k_{s9}(L_4 + d_{21}) & -k_{s10}(L_5 + d_{21}) \\
k_{s1}b_2 & k_{s2}b_2 & -k_{s3}b_1 & -k_{s4}b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & k_{s5}b_2 & k_{s6}b_2 & k_{s7}b_2 & -k_{s8}b_1 & -k_{s9}b_1 & -k_{s10}b_1
\end{bmatrix} \quad (3.58)$$

### 3.3 PERFIL DE IRREGULARIDADES DO PAVIMENTO

Para modelar o perfil de irregularidades estocástico do pavimento, empregou-se a metodologia da norma ISO 8608 (1995), a qual propõe uma metodologia para a geração do perfil de irregularidades do pavimento fazendo o uso de funções de densidade espectral (PSD – *Power Spectral Density*).

De acordo com a norma ISO 8608 (1995), a equação da PSD de elevação da irregularidade do pavimento é a seguinte:

$$G_d(n) = G_d(n_0) \left( \frac{n}{n_0} \right)^{-w} \quad (3.59)$$

sendo que,

$G_d(n)$ : PSD de deslocamento em função da frequência espacial, em  $m^3$ ;

$G_d(n_0)$ : PSD de referência, em  $m^3$ ;

$n$ : frequência espacial. De acordo com a norma ISO 8608 (1995), seu valor varia no intervalo de 0,011 a 2,83 ciclos/m;

$n_0$ : frequência espacial de referência, definida como sendo igual a 0,1 ciclos/m;

$w$ : expoente da PSD. De acordo com a norma ISO 8608 (1995), esse valor pode ser considerado 2 quando o veículo trafega com velocidade constante.

Em relação ao valor da PSD de referência, a norma ISO 8608 (1995) classifica as estradas em oito categorias diferentes de acordo com o nível de rugosidade, sendo que a classe A representa uma estrada com pavimento novo, quase plano, e a classe H representa uma estrada com pavimento em péssimo estado de conservação, isto é, alta amplitude de rugosidade. Para cada classe, o valor para a média geométrica de  $G_d(n_0)$  pode ser consultado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Valor da média geométrica para a PSD de referência relativa à classe da estrada

Classe da Estrada	$G_d(n_0)[10^{-6}m^3]$
A	16
B	64
C	256
D	1.024
E	4.096
F	16.384
G	65.536
H	262.144

Fonte: ISO 8608 (1995)

Após a obtenção de  $G_d(n)$ , o sinal do deslocamento vertical do pavimento pode ser gerado pelo método da superposição de ondas harmônicas, proposto por Shinozuka e Jan (1972) e dado pela expressão:

$$u_{ir}(x) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2G_d(n_k)\Delta n} \cos(2\pi n_k x + \phi_k) \quad (3.60)$$

em que,

$u_{ir}(x)$ : elevação da irregularidade do pavimento, em m;

$N$ : número de intervalos de bandas de frequência;

$\Delta n$ : intervalo de variação da frequência espacial, em ciclos/m;

$x$ : posição da roda do veículo na pista, em m;

$\phi$ : ângulo de fase aleatório, independente e uniformemente distribuído no intervalo de 0 a  $2\pi$ .

### 3.3.1 PSD's Cruzadas

Quando se pretende fazer uma análise numérica com modelos de veículos tridimensionais trafegando em pistas com pavimento irregular, é necessário fazer a geração de perfis de irregularidades para ambos os lados desse veículo. De acordo com a norma ISO 8608 (1995),

pode-se considerar que a superfície da pista possui a propriedade da isotropia, ou seja, perfis de irregularidades que forem gerados a partir de um perfil de um determinado trecho da pista apresentam as mesmas propriedades que o perfil original, independentemente de sua orientação ou localização dentro da pista.

Partindo do princípio de que o perfil de irregularidades do pavimento do lado direito do veículo pode ser gerado por meio da eq. (3.59) e assumindo que a hipótese da isotropia seja válida, existe uma correlação entre os perfis de irregularidade do pavimento dos lados esquerdo e direito do veículo.

No caso do lado esquerdo do veículo, a função PSD que descreve o perfil de irregularidades do pavimento para esse lado é a seguinte (SEKULIC *et al.*, 2013):

$$u_{ire}(x) = \sum_{k=1}^N \left[ \sqrt{2G_{de}(n_k)} \Delta n \cos(2\pi n_k x + \phi_k) + \sqrt{2[G_d(n_k) - G_{de}(n_k)]} \Delta n \cos(2\pi n_k x + \beta_k) \right] \quad (3.61)$$

onde,

$u_{ire}(x)$ : elevação da irregularidade do pavimento para o lado esquerdo do veículo, em m;

$\beta$ : ângulo de fase aleatório, independente e uniformemente distribuído no intervalo  $[0, 2\pi]$ ;

$G_{de}(n)$ : PSD cruzada, em  $m^3$ . Essa variável é calculada de acordo com a equação:

$$G_{de}(n) = \gamma(n)G_d(n) \quad (3.62)$$

de modo que  $\gamma(n)$  representa uma função de coerência para duas PSD's para a frequência espacial  $n$ .

De acordo com Sekulic *et al.* (2013), a função  $\gamma(n)$  corresponde ao quadrado do módulo da função de transferência de um filtro para frequências de excitação discretas. Essa variável é definida pela equação:

$$\gamma(n) = \frac{v_t^2}{v_t^2 + n^2} \quad (3.63)$$

onde,

$v_l$ : frequência de corte cujo valor foi encontrado experimentalmente pelos autores e vale 0,2 ciclos/m.

### 3.3.2 Perfil de Irregularidades do Pavimento Para as Rodas Traseiras

A norma ISO 8608 (1995) prevê que as rodas traseiras do veículo estejam alinhadas com suas correspondentes rodas dianteiras. Sendo assim, considera-se que os pneus das rodas traseiras estão submetidos à mesma excitação imposta a suas rodas dianteiras correspondentes, porém com um certo atraso.

Tal atraso é colocado no sinal com a utilização da função de Heaviside, conforme a equação:

$$u_{irt}(x) = H(t - t_a)u_{ir}(x) \quad (3.64)$$

onde,

$u_{irt}$ : elevação da irregularidade do pavimento para as rodas traseiras do veículo;

$t$ : instante de tempo;

$t_a$ : atraso das rodas traseiras em relação as dianteiras;

$H(t - t_a)$ : função de Heaviside. Sendo que o valor dessa função é nulo quando  $t < t_a$  e unitário quando  $t \geq t_a$ .

O atraso das rodas traseiras em relação às dianteiras é calculado com base nas informações da Figura 3.8 e da equação (3.65):

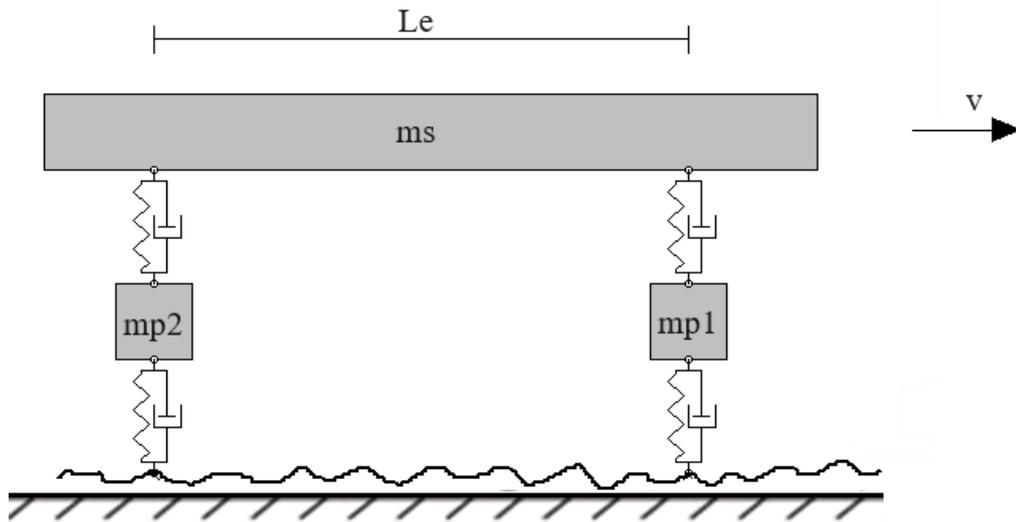


Figura 3.8 – Veículo com duas rodas trafegando em uma pista com pavimento irregular

$$t_a = \frac{L_e}{v} \quad (3.65)$$

em que,

$L_e$ : distância da roda dianteira até a roda traseira do veículo;

$v$ : velocidade do veículo.

### 3.4 SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA-PAVIMENTO

Após a montagem das equações de movimento da estrutura e do veículo e da geração do perfil de irregularidades estocástico do pavimento, o próximo passo para realização da análise dinâmica é a montagem da equação de movimento do sistema acoplado veículo-estrutura-pavimento.

De forma semelhante às equações de movimento da estrutura e do veículo, a equação de movimento do sistema veículo-estrutura é dada pela expressão:

$$\mathbf{M}_{VE} \ddot{\vec{U}}_{VE} + \mathbf{C}_{VE} \dot{\vec{U}}_{VE} + \mathbf{K}_{VE} \vec{U}_{VE} = \vec{F}_{VE} \quad (3.66)$$

onde,

$\mathbf{M}_{VE}$ : matriz de massa global do sistema veículo-estrutura;

$\mathbf{C}_{VE}$ : matriz de amortecimento global do sistema veículo-estrutura;

$\mathbf{K}_{VE}$ : matriz de rigidez global do sistema veículo-estrutura;

$\vec{F}_{VE}$ : vetor global de forças relativas à irregularidade do pavimento atuantes no veículo e na estrutura;

$\vec{U}_{VE}$ : vetor global de acelerações do sistema veículo-estrutura;

$\vec{V}_{VE}$ : vetor global de velocidades do sistema veículo-estrutura;

$\vec{U}_{VE}$ : vetor global de deslocamentos do sistema veículo-estrutura.

Assim como foi feito com as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do caminhão 2S3, na seção 3.2.1, as matrizes  $\mathbf{M}_{VE}$ ,  $\mathbf{C}_{VE}$  e  $\mathbf{K}_{VE}$  da eq. (3.66) também podem ser particionadas em parcelas referentes à estrutura e ao veículo. Sendo assim, essas matrizes podem ser escritas conforme se apresenta a seguir:

$$\mathbf{M}_{VE} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{VE} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e & \mathbf{C}_{ev} \\ \mathbf{C}_{ve} & \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{VE} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{K}_{ev} \\ \mathbf{K}_{ve} & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \quad \vec{F}_{VE} = \begin{bmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{F}_v \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

de tal forma que, os subíndices “e”, “v”, “ev” e “ve” referem-se a estrutura, veículo, relação estrutura-veículo e relação veículo-estrutura, respectivamente.

Em relação ao conjunto de matrizes apresentado na eq. (3.67), deve se tomar um cuidado especial com as matrizes que apresentam os subíndices “ev” e “ve”, pois são essas matrizes que garantem o acoplamento entre a estrutura e o veículo e são constantemente atualizadas à medida que o veículo se desloca pela estrutura.

Quanto à atualização das matrizes mencionadas, isso só acontecerá quando a roda do veículo tocar em um determinado nó da estrutura. Nesse caso, será somado na posição relativa ao grau de liberdade de deslocamento vertical do nó da estrutura o valor da rigidez e do amortecimento do pneu do veículo. Nas matrizes com subíndices “ev” e “ve” esses valores

serão armazenados com sinal trocado. Mais detalhes sobre o procedimento de atualização das matrizes do sistema veículo-estrutura podem ser encontrados em Santos (2020).

Ainda na eq. (3.67), também deve-se ter atenção com o vetor de forças, pois os valores armazenados variam de acordo com a posição das rodas do veículo na ponte e a elevação do pavimento, tendo que ser atualizados a cada passo de tempo. A seguir é explicado como se monta e calcula a parcela de força que é transferida para o veículo e para estrutura.

### 3.4.1 Cálculo das Forças Devido à Irregularidade do Pavimento para o Veículo e para Estrutura

O vetor de forças de interação do sistema veículo-estrutura varia com o tempo e com a posição onde a roda do veículo se encontra na estrutura. Tomando como exemplo uma roda de um modelo de veículo qualquer, tem-se a situação representada na Figura 3.9.

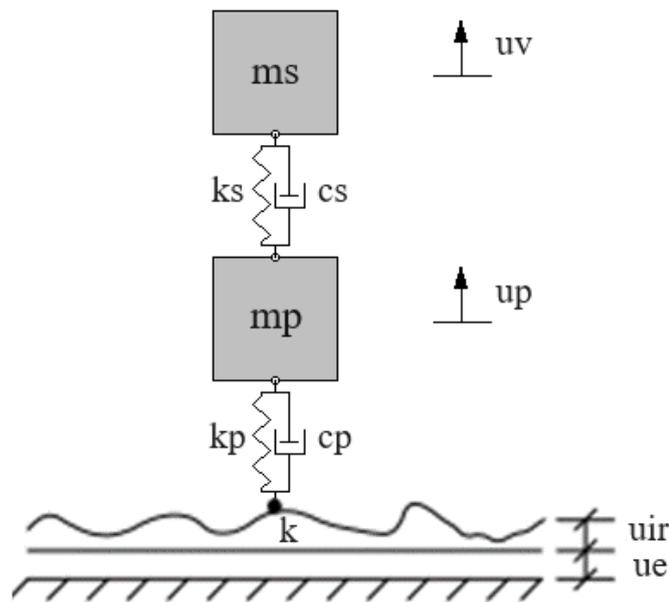


Figura 3.9 – Veículo em uma determinada posição da ponte

Observando a Figura 3.9, chega-se à conclusão de que as equações de movimento da roda e da estrutura são:

roda:

$$m_{pk}\ddot{u}_k + c_{pk}[\dot{u}_k - (\dot{u}_{ir} + \dot{u}_e)] + k_{pk}[u_k - (u_{ir} + u_e)] = 0 \quad (3.68)$$

estrutura:

$$m_e \ddot{u}_e + c_e \dot{u}_e + k_e u_e - c_{pk} [\dot{u}_k - (\dot{u}_{ir} + \dot{u}_e)] - k_{pk} [u_k - (u_{ir} + u_e)] = -(m_{pk} + W_k m_s) g \quad (3.69)$$

onde,

$m_e$ ,  $c_e$  e  $k_e$ : são a massa, o amortecimento e a rigidez de um elemento da estrutura;

$m_{pk}$ ,  $c_{pk}$  e  $k_{pk}$ , com  $k = 1, 2, \dots, N_{rodas}$ : são a massa, o amortecimento e a rigidez de um dado pneu do veículo;

$\ddot{u}_e$ ,  $\dot{u}_e$  e  $u_e$ : aceleração, velocidade e deslocamento do elemento da estrutura;

$\ddot{u}_{pk}$ ,  $\dot{u}_{pk}$  e  $u_{pk}$ : aceleração, velocidade e deslocamento do k-ésimo pneu do veículo;

$u_{ir}$ : elevação da irregularidade do pavimento;

$\dot{u}_{ir}$ : derivada em relação ao tempo da elevação da irregularidade do pavimento;

$m_s$ : massa suspensa do veículo;

$m_{pk}$ : massa do k-ésimo pneu do veículo;

$W_k$ : porcentagem da massa suspensa do veículo que é transferida para cada roda;

$g$ : aceleração da gravidade.

Organizando as eqs. (3.68) e (3.69) obtém-se:

$$m_{pk} \ddot{u}_{pk} + c_{pk} \dot{u}_{pk} + k_{pk} u_{pk} - c_{pk} \dot{u}_e - k_{pk} u_e = c_{pk} \dot{u}_{ir} + k_{pk} u_{ir} \quad (3.70)$$

$$m_e \ddot{u}_e + (c_e + c_{pk}) \dot{u}_e + (k_e + k_{pk}) u_e - c_{pk} \dot{u}_k - k_{pk} u_k = -[c_{pk} \dot{u}_{ir} + k_{pk} u_{ir} + (m_{pk} + W_k m_s) g] \quad (3.71)$$

Pode-se notar que o lado direito da igualdade das eqs. (3.70) e (3.71) representam o valor da força que o pavimento irregular causa no veículo e o valor da força que o pavimento e o

veículo causam na estrutura, respectivamente. Sendo assim, essas forças podem ser calculadas de acordo com as equações:

$$\vec{F}_v = f_{ir}, \text{ para } k = 1, 2, \dots, N_{rodas} \quad (3.72)$$

$$\vec{F}_e = -[f_{ir} + (m_{pk} + W_k m_s)g], \text{ para } k = 1, 2, \dots, N_{rodas} \quad (3.73)$$

em que,  $f_{ir}$  é a força devida as irregularidades do pavimento, calculada pela equação:

$$f_{ir} = c_{pk}\dot{u}_{ir} + k_{pk}u_{ir} \quad (3.74)$$

### 3.4.2 Cálculo do Vetor de Forças Nodais Equivalentes para Estrutura

Dependendo da velocidade com que o veículo trafega na ponte, do passo de tempo utilizado no método de integração da equação de movimento do sistema veículo-estrutura e do tamanho dos elementos finitos que discretizam a estrutura, pode acontecer que em determinado instante de tempo a posição das rodas do veículo não coincida com os nós do modelo da estrutura (CALÇADA, 2001).

Quando isso acontece, as forças originárias das irregularidades do pavimento e do peso do veículo não podem ser aplicadas diretamente no vetor de forças da estrutura. Para isso é necessário obter um vetor de forças nodais equivalentes.

Como no presente trabalho a estrutura será discretizada com elementos finitos de pórtico espacial e seu modelo matemático será o de grelha, podem surgir duas situações: (i) o eixo da via pode não coincidir com o eixo dos elementos de pórtico espacial e (ii) o eixo da via pode coincidir com o eixo do elemento de pórtico espacial, conforme é apresentado na Figura 3.10 (CALÇADA, 2001).

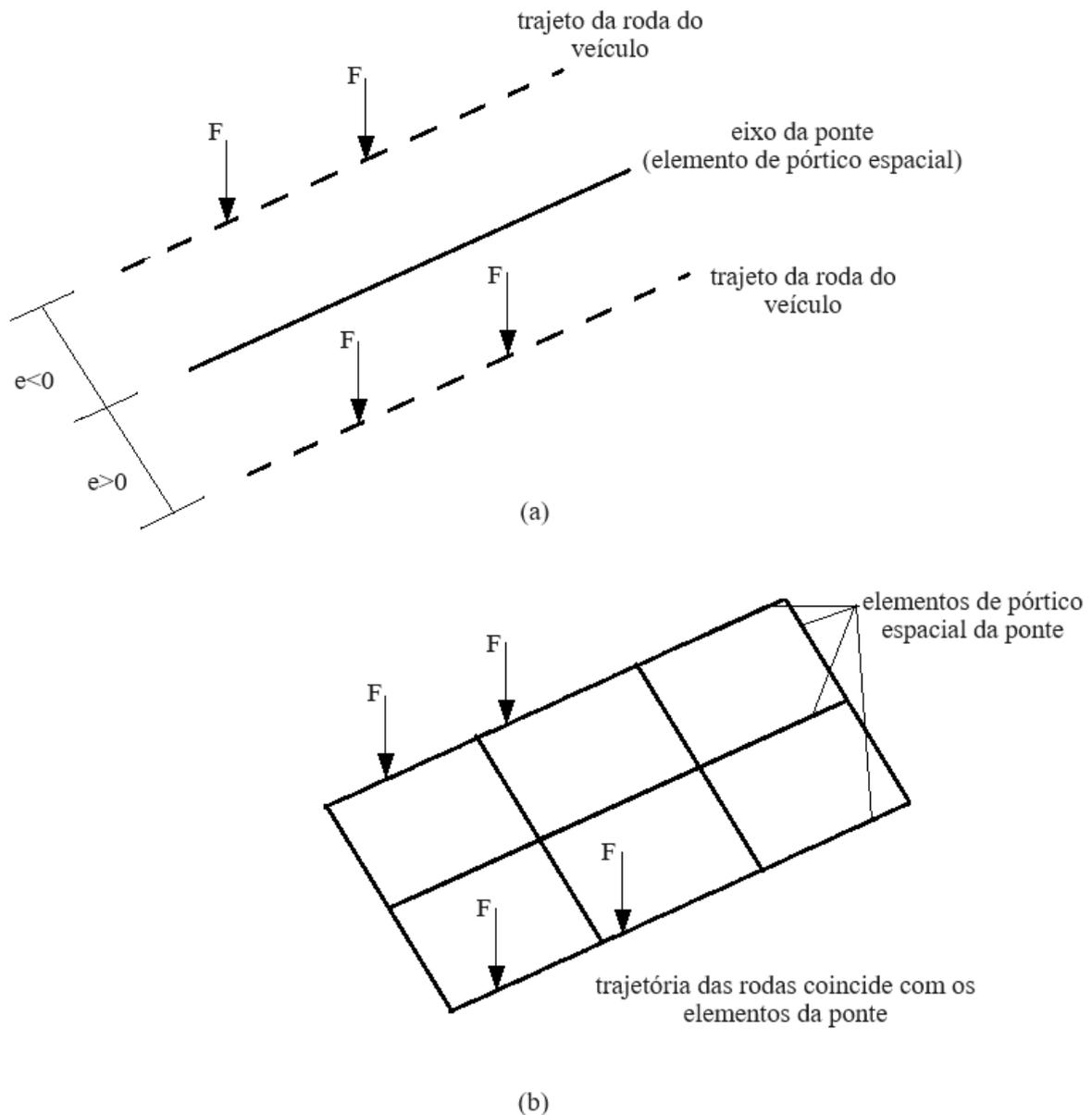


Figura 3.10 – Situações consideradas para a montagem do vetor de forças atuantes na estrutura, (a) trajeto das rodas do veículo não coincide com o eixo da ponte e (b) trajeto das rodas do veículo coincide com os elementos do modelo da ponte. (Adaptado de Calçada, 2001)

Quando ocorre a situação (i) deve-se considerar no vetor de forças equivalentes a excentricidade existente entre o eixo da via e o eixo do elemento, caso contrário a força pode ser aplicada diretamente nos elementos.

Após definir a localização da via, o vetor de cargas nodais equivalentes para situação em que o eixo da via não coincide com o eixo dos elementos da ponte é dado pela equação (CALÇADA, 2001):

$$f_{eq}^l = \begin{bmatrix} 0 \\ F_e \\ 0 \\ F_e e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Passando o vetor  $f_{eq}^l$  de local para global, o vetor de forças equivalentes da estrutura fica (CALÇADA, 2001):

$$f_{eq}^g = \frac{F_e}{L^3} \begin{bmatrix} 0 \\ (L-a)^2(L+2a) \\ 0 \\ eL^2(L-a) \\ 0 \\ La(L-a)^2 \\ 0 \\ a^2(3L-2a) \\ 0 \\ eL^2a \\ 0 \\ La^2(a-L) \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$f_{eq}^l$ : vetor local de forças equivalentes;

$f_{eq}^g$ : vetor global de forças equivalentes;

$F_e$ : forças que o pavimento irregular e o veículo causam na estrutura, calculado com auxílio da eq. (3.73);

$L$ : comprimento do elemento;

$a$ : distância do nó esquerdo do elemento até o ponto onde a força está aplicada;

$e$ : distância das rodas do veículo até o eixo do elemento.

### 3.5 SISTEMAS DE CONTROLE DE VIBRAÇÃO

Sistemas de controle de vibrações são dispositivos externos instalados na estrutura cuja função é reduzir a amplitude de vibração. De acordo com Ospina (2008), os sistemas de controle de vibrações são classificados em passivos, ativos, semi-ativos e híbridos.

Os sistemas passivos são dispositivos compostos por uma massa ligada à estrutura por meio de molas e amortecedores de modo que parte da energia fornecida pela estrutura seja absorvida e dissipada pelo dispositivo sem a necessidade do uso de controladores (ROSSATO, 2017). Alguns exemplos de sistemas passivos são os amortecedores de massa sintonizadas (TMD – sigla em inglês), amortecedores por atrito, metálicos, viscosos e visco-elásticos.

Já os sistemas ativos são dispositivos que necessitam de energia e controladores para funcionar. Essa energia e controle externo são obtidos por meio de algoritmos, que são alimentados por sensores instalados na estrutura. Esses algoritmos calculam e aplicam a força necessária para controlar ou anular a força causada pela excitação. Tais forças são aplicadas na estrutura por meio de motores elétricos, macacos hidráulicos ou outros dispositivos. Exemplos de sistemas ativos de controle de vibrações são amortecedores de massa ativos, geradores de pulso, apêndices aerodinâmicos e cabos tensionados (ROSSATO, 2017).

Os sistemas semi-ativos são dispositivos intermediários entre os sistemas passivo e ativo, ou seja, dissipam energia conforme o sistema passivo e têm suas propriedades ajustadas em tempo real sem a que energia seja injetada no sistema controlado (CHAVES, 2010). Exemplos de sistemas semi-ativos são dispositivos de rigidez variável, amortecedores de atrito variável, amortecedores viscosos de orifício variável e amortecedores de viscosidade.

Segundo Yang (2001), sistemas híbridos são dispositivos de controle de vibração que possuem características dos sistemas ativo e passivo, sendo compostos tanto por atuadores quanto por dissipadores. O sistema ativo só entra em operação quando a resposta da estrutura supera a capacidade de dissipação de energia do sistema passivo, sendo essa uma vantagem para o uso desse sistema, pois, o sistema ativo demanda menos energia e a faixa de frequências que o dispositivo abrange é bem maior do que a de um sistema puramente passivo (ROSSATO, 2017). Os dispositivos mais conhecidos dessa categoria são os amortecedores de massa híbrida (HMD – sigla em inglês), que fazem a combinação de TMD's com sistema ativo, o que aumenta o desempenho do sistema e o movimento da massa passiva garantindo mais robustez ao sistema em relação a problemas de sintonização (CHAVES, 2010).

Dentre os tipos de sistemas de controle de vibrações e dispositivos mencionados, será utilizado como objeto de estudo dessa tese o TMD que é um dispositivo passivo.

### 3.5.1 Dimensionamento de Amortecedores de Massa Sintonizados

As variáveis de projeto para o dimensionamento de um TMD são a sua massa, rigidez e amortecimento. De modo geral, a massa do TMD é considerada como sendo uma fração da massa total da estrutura, conforme mostra a equação:

$$m_{TMD} = \mu M_{st} \quad (3.77)$$

em que,

$m_{TMD}$ : massa do TMD;

$M_{st}$ : massa total da estrutura;

$\mu$ : razão entre massa do TMD e a massa da estrutura. Seu valor varia de 1% a 5%.

Existem duas formas de calcular as outras duas variáveis de projeto de um TMD, (i) utilizando equações analíticas propostas por Den Hartog (1956) e Warburton (1982) ou (ii) a utilizando algoritmos de otimização meta-heurísticos.

Salienta-se que a opção (ii) será a metodologia utilizada para dimensionar os TMD's que serão instalados na ponte analisada. O processo de dimensionamento de por meio de algoritmos meta-heurísticos será discutido com mais detalhes no próximo capítulo da tese.

Já a metodologia da opção (i) será utilizada como comparação dos resultados obtidos pela metodologia da opção (ii). Sendo assim, nessa seção são apresentadas as equações analíticas de Den Hartog (1956) e Warburton (1982) para dimensionamento da constante de rigidez e do amortecimento do TMD.

Para o modelo Den Hartog (1956), as equações utilizadas para dimensionar os parâmetros de um TMD e minimizar a resposta transiente de um sistema não amortecido submetido a uma excitação harmônica são:

$$\begin{aligned}
 f_{tun} &= \frac{1}{1 + \mu} \\
 \zeta_{tun} &= \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}}
 \end{aligned}
 \tag{3.78}$$

onde,

$f_{tun}$ : valor ótimo da razão entre a frequência natural do TMD e a frequência natural da estrutura;

$\zeta_{tun}$ : valor ótimo da razão de amortecimento do TMD.

De maneira similar, Warburton (1982) desenvolveu equações para calcular dimensionar os parâmetros de um TMD para sistemas submetidos a excitação harmônica e ruído branco. Tais equações estão listadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 f_{tun} &= \frac{1}{1 + \mu} \sqrt{1 - \frac{\mu}{2}} \\
 \zeta_{tun} &= \sqrt{\frac{\mu(1 - 0,25\mu)}{4(1 + \mu)(1 - 0,5\mu)}}
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

Com os resultados as eqs. (3.78) e (3.79) pode-se determinar os parâmetros do TMD por meio das equações:

$$\begin{aligned}
 k_{TMD} &= m_{TMD} \omega_e^2 f_{tun}^2 \\
 c_{TMD} &= 2\zeta_{tun} m_{TMD} f_{tun} \omega_e
 \end{aligned}
 \tag{3.80}$$

sendo que,

$k_{TMD}$ : rigidez do TMD;

$c_{TMD}$ : amortecimento do TMD;

$\omega_e$ : frequência natural da estrutura, em  $rad/s$ .

Deve-se ressaltar que as eqs. (3.78) e (3.79) foram desenvolvidas para sistemas com 1 GDL. Como pretende-se utilizar essas equações para um sistema com vários graus de liberdade, a metodologia proposta por Rana e Soong (1998) deve ser empregada.

Essa metodologia consiste em normalizar o primeiro modo de vibração da estrutura pelo grau de liberdade onde o TMD será instalado. Tal procedimento é feito conforme a equação:

$$\vec{\phi}_{norm}(1) = \vec{\phi}_e(1) \frac{1}{\phi_e(GDL_{TMD}, 1)} \quad (3.81)$$

em que,

$\vec{\phi}_{norm}(1)$ : vetor com o primeiro modo de vibração da estrutura normalizado;

$\vec{\phi}_e(1)$ : vetor com o primeiro modo de vibração da estrutura;

$\phi_e(GDL_{TMD}, 1)$ : valor do primeiro modo de vibração da estrutura para a posição onde o TMD foi instalado;

$GDL_{TMD}$ : grau de liberdade onde o TMD foi instalado.

Por fim, nos cálculos dos parâmetros do TMD, utiliza-se a massa modal relativa à primeira frequência natural da estrutura, conforme mostra a equação:

$$M_{mst} = \phi_{norm}(1)^T \mathbf{M}_e \phi_{norm}(1) \quad (3.82)$$

onde,

$M_{mst}$ : massa modal da estrutura relativa à sua primeira frequência natural;

$\mathbf{M}_e$ : matriz de massa da estrutura.

### 3.6 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO PARA O SISTEMA ACOPLADO VEÍCULO-ESTRUTURA-PAVIMENTO E TMD

Conforme apresentado da Seção 3.4, a equação de movimento do sistema veículo-estrutura é governada pela eq. (3.66) e a forma das matrizes de massa, amortecimento e rigidez dessa equação é mostrada na eq. (3.67). Além disso, essas matrizes são combinações das matrizes da estrutura e do veículo e todas possuem tamanho  $NGDL_e + NGDL_v \times NGDL_e + NGDL_v$ , sendo que  $NGDL_e$  é o número de graus de liberdade da estrutura e  $NGDL_v$  é o número de graus de liberdade do modelo de veículo.

Como pretende-se fazer a análise dinâmica de uma situação como a descrita na Figura 3.11, a equação de movimento do problema deve levar em consideração os TMD's instalados na estrutura. Sempre que um TMD for instalado na estrutura, o sistema analisado possuirá 1 GDL de deslocamento vertical a mais.

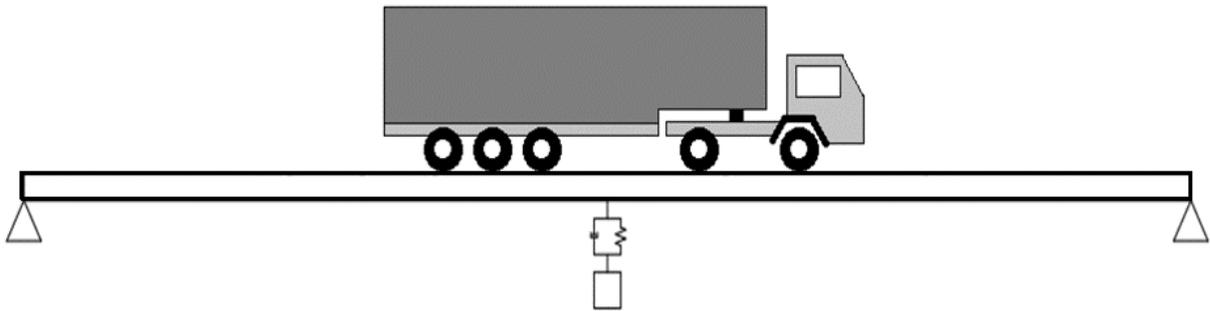


Figura 3.11 – Exemplo de problema de controle de vibrações

Sendo assim, a equação de movimento do sistema acoplado veículo-estrutura-pavimento e TMD é expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_{VET} \ddot{\vec{U}}_{VET} + \mathbf{C}_{VET} \dot{\vec{U}}_{VET} + \mathbf{K}_{VET} \vec{U}_{VET} = \vec{F}_{VET} \quad (3.83)$$

onde,

$\mathbf{M}_{VET}$ : matriz de massa global do sistema veículo-estrutura e TMD's;

$\mathbf{C}_{VET}$ : matriz de amortecimento global do sistema veículo-estrutura e TMD's;

$\mathbf{K}_{VET}$ : matriz de rigidez global do sistema veículo-estrutura e TMD's;

$\vec{F}_{VET}$ : vetor global de forças relativas as irregularidades do pavimento atuantes no veículo e na estrutura e forças atuantes no TMD;

$\vec{U}_{VET}$ : vetor global de acelerações do sistema veículo-estrutura e TMD's;

$\vec{V}_{VET}$ : vetor global de velocidades do sistema veículo-estrutura e TMD's;

$\vec{W}_{VET}$ : vetor global de deslocamentos do sistema veículo-estrutura e TMD's.

De maneira similar ao que foi feito na eq. (3.65), as matrizes  $\mathbf{M}_{VET}$ ,  $\mathbf{C}_{VET}$  e  $\mathbf{K}_{VET}$  da eq. (3.83) também podem ser particionadas em termos da estrutura, veículo e TMD's, conforme mostrado na equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{VET} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{TMD} \end{bmatrix} & \mathbf{C}_{VET} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e + \mathbf{C}_{TMD} & \mathbf{C}_{ev} & \mathbf{C}_{eTMD} \\ \mathbf{C}_{ve} & \mathbf{C}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{TMDe} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{TMD} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{VET} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{TMD} & \mathbf{K}_{ev} & \mathbf{K}_{eTMD} \\ \mathbf{K}_{ve} & \mathbf{K}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{TMDe} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{TMD} \end{bmatrix} & \vec{F}_{VET} &= \begin{bmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{F}_v \\ \vec{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.84)$$

em que,

$\mathbf{M}_{TMD}$ : matriz com as massas dos TMD's instalados na estrutura;

$\mathbf{C}_{TMD}$ : matriz com o valor do amortecimento dos TMD's instalados na estrutura;

$\mathbf{K}_{TMD}$ : matriz com o valor da rigidez dos TMD's instalados na estrutura;

$\mathbf{C}_{TMDe}$ ,  $\mathbf{C}_{eTMD}$ ,  $\mathbf{K}_{TMDe}$  e  $\mathbf{K}_{eTMD}$ : são as matrizes com o valor do amortecimento e rigidez dos TMD's que estão interagindo com os GDL de deslocamento vertical da estrutura.

Na eq. (3.84), tem-se que as matrizes de amortecimento e rigidez da estrutura estão somadas com as matrizes de amortecimento e rigidez dos TMD's. A fim de evitar confusão com notações, deve-se ressaltar que essa soma acontece com os termos da diagonal principal das matrizes da estrutura apenas para os GDL onde os TMD's foram instalados.

Sendo assim, as matrizes relativas aos TMD's que aparecem na eq. (3.84) são quadradas e tem o seguinte formato:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{TMD} &= \begin{bmatrix} m_{TMD1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{TMD2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{TMDn} \end{bmatrix} & \mathbf{C}_{TMD} &= \begin{bmatrix} c_{TMD1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{TMD2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{TMDn} \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{TMD} &= \begin{bmatrix} k_{TMD1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{TMD2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{TMDn} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Já as matrizes  $\mathbf{C}_{TMDe}$  e  $\mathbf{K}_{TMDe}$  não são quadradas e têm dimensões  $NGDL_e \times N_{TMD}$ . Seus formatos estão representados na equação:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{TMDe} &= \begin{bmatrix} -c_{TMD1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_{TMD2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c_{TMDn} \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{TMDe} &= \begin{bmatrix} -k_{TMD1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_{TMD2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k_{TMDn} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

É importante notar que a matriz  $\mathbf{C}_{eTMD}$  é igual a  $\mathbf{C}_{TMDe}^T$  e a matriz  $\mathbf{K}_{eTMD}$  é igual a  $\mathbf{K}_{TMDe}^T$ .

Para explicar o processo de montagem da matriz amortecimento da eq. (3.84), considera-se uma ponte com dois TMD's instalados em seus GDL "m" e "n" e sem que o veículo inicie seu movimento, conforme descrito na Figura 3.12.



Figura 3.12 – Estrutura com dois TMD's instalados

Nesse caso, a matriz de amortecimento do sistema veículo-estrutura e TMD é escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{C}_{VET} = \begin{bmatrix} c_{e11} & \cdots & c_{e1m} & \cdots & c_{e1n} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{em1} & \cdots & c_{emm} + c_{TMD1} & \cdots & c_{emn} & \mathbf{0} & -c_{TMD1} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{en1} & \cdots & c_{enm} & \cdots & c_{enn} + c_{TMD2} & 0 & 0 & -c_{TMD2} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_v & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & -c_{TMD1} & \cdots & 0 & 0 & c_{TMD1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -c_{TMD2} & 0 & 0 & c_{TMD2} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

O mesmo procedimento é válido para montagem da matriz de rigidez do sistema veículo-estrutura-TMD.

### 3.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Tanto a equação de movimento do sistema veículo-estrutura (eq. (3.66)), quanto a equação de movimento do sistema veículo-estrutura-TMD (eq. (3.83)) podem ser integradas no tempo com a finalidade de se obter os deslocamentos, velocidades e acelerações de cada uma das partes envolvidas na análise dinâmica.

Em relação à integração numérica das equações de movimento, optou-se por utilizar o Método de Newmark, que é um método de integração implícito, baseado na hipótese de que a aceleração varia linearmente entre dois instantes de tempo (RAO, 2011).

As expressões utilizadas para calcular os deslocamentos, velocidades e acelerações de um sistema com múltiplos GDL são:

$$\vec{u}(t_{i+1}) = a_0[\vec{u}(t_{i+1}) - \vec{u}(t_i)] - a_1\vec{u}(t_i) - a_2\ddot{u}(t_i) \quad (3.88)$$

$$\vec{u}(t_{i+1}) = a_5[\vec{u}(t_{i+1}) - \vec{u}(t_i)] - a_6\vec{u}(t_i) - a_7\ddot{u}(t_i) \quad (3.89)$$

$$\vec{u}(t_{i+1}) = (a_0\mathbf{M} + a_5\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}\{\vec{F}(t_{i+1}) - \mathbf{M}[a_0\vec{u}(t_i) - a_1\vec{u}(t_i) - a_2\ddot{u}(t_i)] + \mathbf{C}[a_5\vec{u}(t_i) - a_6\vec{u}(t_i) - a_7\ddot{u}(t_i)]\} \quad (3.90)$$

com,

$\vec{u}(t_i)$ ,  $\vec{\dot{u}}(t_i)$  e  $\vec{\ddot{u}}(t_i)$ : vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações no instante de tempo  $t_i$ , respectivamente;

$\vec{u}(t_{i+1})$ ,  $\vec{\dot{u}}(t_{i+1})$  e  $\vec{\ddot{u}}(t_{i+1})$ : vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações no instante de tempo  $t_i + \Delta t$ , respectivamente;

$\vec{F}(t_{i+1})$ : vetor de forças no instante de tempo  $t_i + \Delta t$ .

As constantes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_5$ ,  $a_6$  e  $a_7$  são parâmetros relativos ao método de Newmark e são calculadas conforme as equações:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} & a_1 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 \\ a_5 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} & a_6 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 & a_7 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Em que,  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros relacionados à precisão e estabilidade do método de Newmark. De acordo com Bathe (2014), para  $\alpha = 0,25$  e  $\delta = 0,5$  o método de Newmark se torna incondicionalmente estável, ou seja, o passo de tempo utilizado na integração da equação de movimento do sistema analisado não precisa ser muito pequeno para que os resultados sejam coerentes. Por esse motivo o método de Newmark foi escolhido para obtenção da resposta dinâmica das análises realizadas no presente trabalho.

Para inicializar o método de Newmark, é necessário conhecer o valor da aceleração no instante de tempo  $t_0$ . Isso pode ser feito de acordo com a equação:

$$\vec{\ddot{u}}(t_0) = \mathbf{M}^{-1} [\vec{F}(t_0) - \mathbf{C}\vec{\dot{u}}(t_0) - \mathbf{K}\vec{u}(t_0)] \quad (3.92)$$

sendo que,

$\vec{u}(t_0)$ ,  $\vec{\dot{u}}(t_0)$  e  $\vec{\ddot{u}}(t_0)$ : vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações no instante de tempo  $t_0$ , respectivamente;

$\vec{F}(t_0)$ : vetor de forças no instante de tempo  $t_0$ .

### 3.8 HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Para possibilitar que as análises propostas neste trabalho pudessem ser realizadas, algumas simplificações foram consideradas:

- O modelo matemático da estrutura é em grelha (planar) e foi discretizado com elementos finitos pórtico espacial a fim de não necessitar de uma malha muito refinada para as executar as análises;
- A ponte utilizada nas análises não é uma estrutura real. As características consideradas no modelo (seção transversal e propriedades dos materiais) referem-se a dados gerais das pontes construídas no Brasil;
- As análises feitas são lineares e elásticas;
- Apenas um veículo e em um único sentido trafega pela ponte;
- Foi considerado que as rodas dos veículos se mantem em contato com o pavimento durante toda a extensão da ponte;
- Para cada análise realizada não foi considerado que o comprimento do veículo e a posição de seu centro de massa podem variar.

## 4 OTIMIZAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Conforme foi discutido no Capítulo 3, existem duas maneiras de fazer o dimensionamento de amortecedores de massa sintonizados, a saber, por meio de equações analíticas, como mostrado no item 3.6.1 e utilizando otimização, através de algoritmos genéticos ou meta-heurísticos.

Como a primeira abordagem do dimensionamento de TMD's já foi apresentada, o Capítulo 4 dedica-se à aplicação da otimização para determinar os parâmetros ótimos de um TMD de modo que o deslocamento da estrutura seja o menor possível. Além disso, será mostrada a formulação do problema de otimização, formas para se obter a solução ótima e a implementação computacional da análise dinâmica do sistema acoplado veículo-estrutura-pavimento e TMD.

### 4.1 OTIMIZAÇÃO

De acordo com Haftka e Gürdal (1992), a otimização é utilizada instintivamente por seres humanos desde os primórdios de sua existência, sempre com a finalidade de simplificar suas vidas seja gastando menos energia para realizar suas atividades, seja aproveitando ao máximo os recursos disponíveis do ambiente. Dessa forma, os autores definem otimização como a obtenção do melhor resultado de uma operação desde que certas restrições sejam satisfeitas.

Um problema de otimização é composto por três partes principais (YVARI, 2017):

**Variáveis de projeto:** são os parâmetros desconhecidos do problema de otimização que o processo de otimização busca encontrar de modo que a melhor solução seja obtida.

**Restrições:** valores admitidos para as variáveis e relações entre elas, tais como limites de tensão ou deslocamento especificado pelas normas técnicas, disponibilidade de recursos e valores estipulados pelo usuário. As restrições geralmente são divididas em duas categorias de funções, restrições de igualdade e restrições de desigualdade.

**Função objetivo:** função que depende das variáveis de projeto, restrições e outras constantes e tem a finalidade representar o valor quantitativo que o processo de otimização busca maximizar ou minimizar.

Logo, um problema de otimização pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Encontrar} & \vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\
 \text{Minimize} & f(\vec{x}) \\
 \text{Sujeito a} & g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & h_j(\vec{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, r
 \end{array} \quad (4.1)$$

onde,

$\vec{x}$ : vetor com as variáveis de projeto;

$f(\vec{x})$ : função objetivo;

$g_i(\vec{x})$ : restrições de desigualdade;

$h_j(\vec{x})$ : restrições de igualdade;

$n$ : número de variáveis de projeto;

$m$ : número de funções de restrição de desigualdade;

$r$ : número de funções de restrição de igualdade.

Para um problema de otimização estrutural, as variáveis de projeto podem ser as dimensões de uma seção transversal, sua geometria e momentos de inércia, as restrições podem ser as tensões admissíveis do material e deslocamentos máximos recomendados por normas técnicas e a função objetivo pode ser o peso da estrutura, o custo, deslocamento máximo, frequências naturais.

## 4.2 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

A forma padrão de um problema de otimização é a apresentada na eq. (4.1). Porém, dependendo do problema que está sendo analisado, algumas variáveis de projeto podem apresentar parâmetros aleatórios, o que implica que a resposta da estrutura também se torna aleatória, fazendo com que o uso da otimização em sua forma padrão não seja o mais adequado para tal situação (ONTIVERO-PÉREZ, 2018).

Nesse caso diz-se que quando existe uma variável de projeto aleatória no processo de otimização, o resultado da otimização também se torna aleatório. Uma forma de tratar esse problema é a utilização da otimização robusta.

A otimização robusta consiste em minimizar ou maximizar a média ou o desvio padrão dos resultados obtidos para a função objetivo, garantindo assim que o resultado obtido seja pouco sensível às incertezas dos parâmetros e proporcione um desempenho satisfatório para o sistema analisado.

De modo geral, um problema de otimização robusta pode ser expresso pela equação:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Encontrar} & \vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\
 \text{Minimize} & E[f(\vec{x})] \\
 \text{Sujeito a} & g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & h_j(\vec{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, r
 \end{array} \quad (4.2)$$

onde,

$E[f(\vec{x})]$ : valor esperado da função objetivo.

A partir do que é observado na eq. (4.2) percebe-se que o problema de otimização visa maximizar ou minimizar o valor esperado na função objetivo. Para fazer o cálculo do valor esperado é necessário gerar uma certa quantidade de amostras para as variáveis do problema de otimização que foram consideradas aleatórias e avaliar o valor da função objetivo para cada uma das amostras.

O procedimento de se gerar amostras e obter resultados para simulação de cada uma dessas amostras denomina-se Simulação de Monte Carlo e sua definição será feita adiante.

Dispondo do resultado de cada amostra, o valor esperado da função objetivo do problema pode ser estimado conforme a equação descrita a seguir.

$$E[f(\vec{x})] = \frac{1}{N_a} \sum_{k=1}^{N_a} f_k(\vec{x}) = \frac{f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + \dots + f_k(\vec{x})}{N_a} \quad (4.3)$$

sendo que,

$N_a$ : tamanho das amostras geradas para cada variável de projeto;

$f_k(\vec{x})$ : valor da função objetivo para a k-ésima amostra.

### 4.3 GERAÇÃO DE NÚMEROS ALEATÓRIOS

Ao fazer a análise de uma estrutura normalmente levam-se em consideração valores determinísticos para suas propriedades geométricas, propriedades mecânicas dos materiais e carregamentos aplicados. Porém, sabe-se que na realidade sempre existem incertezas quanto à carga aplicada na estrutura, às propriedades mecânicas dos materiais e a erros de construção que levam a variações nas dimensões da estrutura (REAL, 2000).

Logo, tanto a resposta estática quanto a resposta dinâmica de uma estrutura são funções de variáveis aleatórias, como por exemplo, carregamento, propriedades dos materiais e geometria, cuja distribuição de probabilidades é conhecida ou pode ser estimada (REAL, 2000).

No que diz respeito à geração de valores aleatórios, é necessário descrever a variável aleatória em questão por meio de uma função de densidade de probabilidade (FDP), sendo que podem ser utilizadas diversas funções, como por exemplo, a distribuição normal ou gaussiana (eq. 4.4a), a distribuição uniforme (eq. 4.4b), distribuição Log-normal, distribuição Beta e distribuições de valores extremos generalizada.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2} \quad (4.4a)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases} \quad (4.4b)$$

em que,

$f_X(x)$ : função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $X$ ;

$\mu_X$ : valor esperado da variável aleatória  $X$ ;

$\sigma_X$ : desvio padrão da variável aleatória  $X$ .

Linguagens de programação como o MatLab, Octave e Python possuem funções intrínsecas que geram números aleatórios de acordo com a função densidade de probabilidade atribuída para a variável aleatória.

No caso do Octave (linguagem de programação escolhida nesse trabalho) para gerar um número aleatório com distribuição normal utiliza-se a função *randn*. Essa função gera números aleatórios com distribuição normal de média zero e desvio padrão 1. Quando se pretende gerar um número aleatório com média  $\mu_x$  e desvio padrão  $\sigma_x$  pode-se recorrer à seguinte expressão:

$$x = \mu_x + \sigma_x z_1 \quad (4.5)$$

onde,

$z_1$ : número aleatório gerado a partir de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1.

A mesma ideia é válida para geração de um número aleatório com distribuição uniforme dentro de um intervalo  $[a, b]$ . Nesse caso a função utilizada é a *rand*. Essa função gera números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1. Para o caso de um número aleatório dentro de um intervalo, isso pode ser feito da seguinte maneira:

$$x = a + (b - a)z_2 \quad (4.6)$$

onde,

$z_2$ : número aleatório uniformemente distribuído no intervalo de 0 a 1.

No presente trabalho pretende-se considerar como variáveis aleatórias as informações relativas à estrutura e ao veículo listadas a seguir:

Estrutura: dimensões da seção transversal (geometria), módulo de elasticidade e densidade do material (propriedades mecânicas). Tais variáveis serão geradas com a eq. (4.5).

Veículo: massa total e velocidade, gerados com auxílio da eq. (4.6) para valores, obtidos através de estudos experimentais de contagem e pesagem de veículos, no caso de sua massa total e para velocidade serão utilizados os limites permitidos nas rodovias brasileiras.

#### 4.3.1 Geração das Dimensões da Estrutura

Variações nas estruturas ocorrem quando existe uma diferença no valor especificado em projeto (valor nominal) e o valor realmente medido na estrutura pronta. No caso de estruturas de concreto armado, fatores como o tamanho e a qualidade das formas utilizadas para moldar a peça, lançamento e vibração do concreto nessas formas influenciam nas dimensões da seção transversal da peça (REAL, 2000).

As características geométricas mais importantes de estruturas de concreto armado são: a base ( $b$ ), a altura da peça ( $h$ ) e o vão ( $L$ ). Dessa forma, a inserção da variabilidade em uma das dimensões da seção transversal da estrutura pode ser feita considerando que tal variável possua um valor nominal ou de projeto, uma variação média desse valor nominal e um desvio padrão dessa variação (REAL, 2000).

Tomando como exemplo a base da viga da ponte, a inserção da variabilidade nessa dimensão é feita por meio da equação:

$$b = b_n + \overline{\Delta b} + z_3 \sigma_b \quad (4.7)$$

sendo,

$b$ : dimensão da peça considerando a variação;

$b_n$ : valor nominal ou valor médio da dimensão  $b$ ;

$\overline{\Delta b}$ : variação média do valor da dimensão  $b$ ;

$\sigma_b$ : desvio padrão da dimensão  $b$ ;

$z_3$ : número aleatório gerado por meio de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1.

Como no Brasil não existem muitos estudos a respeito da variabilidade das dimensões de estruturas de concreto armado, Real (2000) sugere que o valor nominal de uma determinada dimensão de uma estrutura de concreto armado seja seu valor nominal acrescido de uma tolerância de construção ( $t_c$ ). Assim, a dimensão nominal peça é:  $X_n \pm t_c$ . Além disso, admite-se que o desvio padrão da dimensão  $X$  é da ordem de  $t_c/2$ .

Conforme essas informações, nesse trabalho a geração das dimensões da seção transversal da viga serão feitas de acordo com eq. (4.8):

$$b = b_n + \text{sgn}(z_3)t_c + z_3 \frac{t_c}{2} \quad (4.8)$$

sendo que  $\text{sgn}(z_3)$  é a função sinal do número aleatório  $z_3$ .

Em relação à tolerância de construção ( $t_c$ ), considera-se o valor de 1 cm para peças de concreto construídas em locais com bom controle de qualidade, como por exemplo, peças pré-moldadas e o valor 2 cm para peças construídas em locais com um controle de qualidade ruim (REAL, 2000).

O mesmo procedimento que foi aplicado na base da estrutura pode ser utilizado nas demais dimensões da peça. Na Figura 4.1 são mostradas as seções transversais e as dimensões das vigas longarinas e transversina da ponte considerada neste trabalho.

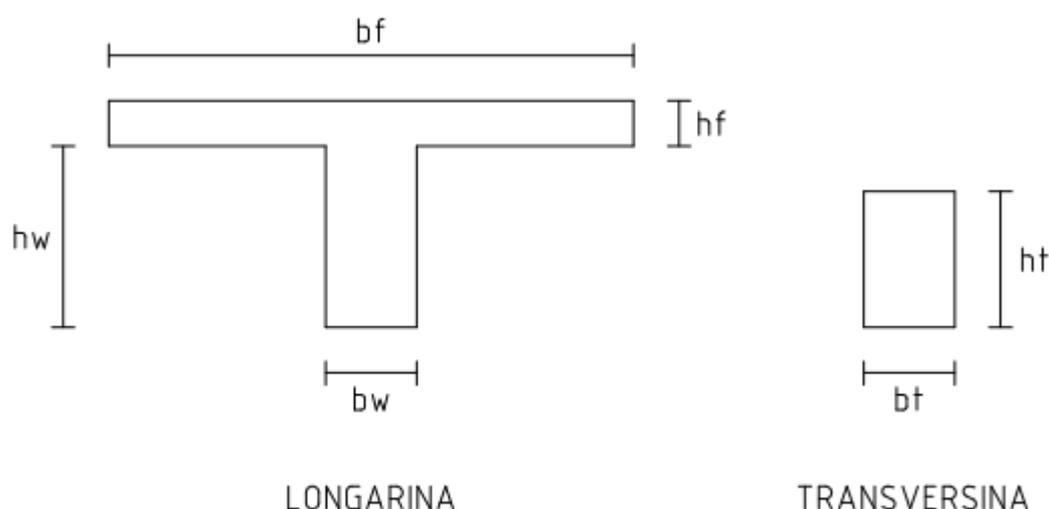


Figura 4.1 – Dimensões das vigas longarinas e transversina da ponte

Nesse caso, as dimensões da seção transversal que possuirão variabilidade são: base da viga ( $b_w$ ), altura da alma ( $h_w$ ) e altura da mesa ( $h_f$ ). As vigas transversinas do modelo da ponte também possuirão variabilidade em suas dimensões da seção transversal, que nesse caso são sua base ( $b_t$ ) e altura ( $h_t$ ), pois as transversinas possuem seção retangular.

Em relação à largura colaborante da mesa ( $b_f$ ), segundo a NBR 6118 (ABNT, 2023) essa variável refere-se a uma largura da laje de concreto onde supõe-se que a distribuição das tensões de compressão é constante, seu cálculo é feito em função das características geométricas da seção transversal da ponte, conforme a equação:

$$b_f = b_w + b_1 + b_3 \quad (4.9)$$

Sendo que as variáveis  $b_1$  e  $b_3$  são calculadas de acordo com a eq. (4.10) e as dimensões de uma seção transversal em duplo T utilizada para o cálculo destas variáveis estão representadas na Figura 4.2:

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,5b_2 \\ 0,1a \end{cases} \quad b_3 \leq \begin{cases} b_4 \\ 0,1a \end{cases} \quad (4.10)$$

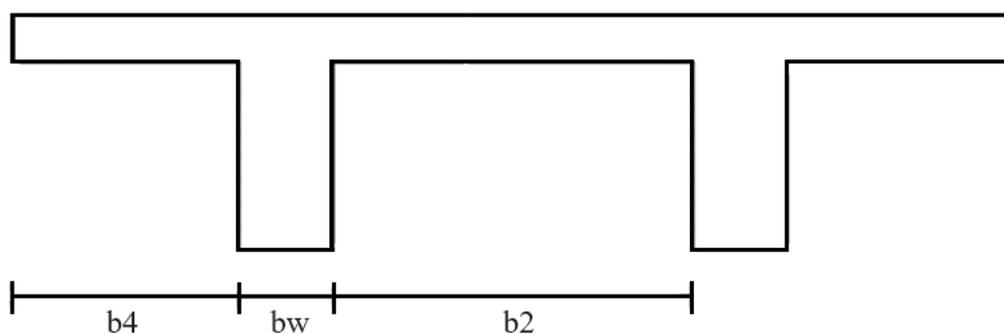


Figura 4.2 – Dimensões de uma seção transversal em duplo T utilizada no cálculo de sua largura colaborante

onde,

$b_2$ : é a distância entre as vigas longarinas da seção transversal da ponte;

$b_4$ : é a distância entre a viga longarina e a extremidade da seção transversal da ponte;

$a$ : distância entre os locais onde o valor do momento fletor atuante na ponte é nulo.

Com base nas dimensões consideradas para ponte utilizada neste trabalho, o valor da largura colaborante da viga longarina é calculado em função do valor de sua base e do vão da ponte, conforme equação:

$$b_f = b_w + \frac{L}{5} \quad (4.11)$$

Em que,  $L$  representa o vão da ponte, pois a estrutura é biapoiada. Cabe ressaltar que  $L$  será considerado como uma variável determinística, pois com isso evita-se que a cada geração de um novo valor para o vão seja necessário fazer uma nova discretização do modelo da ponte.

Além disso, a área e os momentos de inércia utilizados na montagem da matriz de rigidez da ponte (eq. (3.1)) serão calculados conforme os valores gerados para as dimensões da seção transversal apresentada na Figura 4.1.

#### 4.3.2 Geração das Propriedades Mecânicas da Estrutura

A inserção de aleatoriedades nas propriedades mecânicas da estrutura pode ser feita de modo similar ao que foi feito com as dimensões da estrutura, porém quando se trata de estruturas de concreto armado, muitas vezes essas propriedades mecânicas apresentam algum grau de correlação entre si.

Em relação às propriedades mecânicas da ponte utilizada nas análises dinâmicas do presente trabalho, pretende-se considerar incertezas no módulo de elasticidade ( $E$ ) e na densidade ( $\rho$ ) do material da ponte. Admitindo que existe correlação entre essas variáveis, a geração dos valores será feita conforme a equação (YANG *et al.*, 2022):

$$\begin{bmatrix} E \\ \rho \end{bmatrix} = (\mathbf{LS})\vec{Z} + \vec{\mu}_x \quad (4.12)$$

onde,

$L$ : matriz triangular inferior da fatoração de Cholesky da matriz com os coeficientes de correlação das variáveis aleatórias;

$\mathbf{S}$ : matriz com os desvios padrão das variáveis aleatórias;

$\vec{Z}$ : vetor com números aleatórios gerados por meio de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1 não correlacionado;

$\vec{\mu}_X$ : vetor com os valores médios das variáveis aleatórias.

As matrizes, de correlação ( $\mathbf{R}$ ) e com os desvios padrão ( $\mathbf{S}$ ) das variáveis aleatórias são definidas segundo as equações:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & Cor(E, \rho) \\ Cor(\rho, E) & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_E & 0 \\ 0 & \sigma_\rho \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

em que,

$Cor(E, \rho)$  e  $Cor(\rho, E)$ : são os valores dos coeficientes de correlação de  $E$  em relação a  $\rho$  e de  $\rho$  em relação a  $E$ , respectivamente;

$\sigma_E$ : desvio padrão do módulo de elasticidade;

$\sigma_\rho$ : desvio padrão da densidade.

Frequentemente, para geração de valores para as propriedades mecânicas dos materiais de estruturas, define-se um valor médio para uma determinada propriedade do material com base em valores encontrados na literatura e um coeficiente de variação para essa propriedade (VELLAR, 2019). Isso possibilita que o desvio padrão da variável aleatória seja calculado da seguinte forma:

$$\sigma_X = CV_X \mu_x \quad (4.15)$$

sendo  $CV_X$ , o coeficiente de variação da variável aleatória  $X$ .

Valores usuais para o coeficiente de variação do módulo de elasticidade de estruturas de concreto armado variam de 0,1 a 0,2, conforme o controle de qualidade empregado na produção do concreto (REAL, 2000). Já para a densidade o valor mais usual para o coeficiente de variação é 0,1 (VELLAR *et al.*, 2019).

#### 4.3.3 Geração das Massas e Velocidades dos Veículos

De acordo com o artigo 61 do Código de Trânsito Brasileiro CTB (2021), as velocidades máximas permitidas para veículos de carga variam entre 60 km/h e 90 km/h. Para simular uma situação real de trânsito em que veículos trafegam com velocidades diferentes, será considerado nas análises que os veículos que trafegam sobre a ponte terão suas velocidades definidas uniformemente no intervalo definido pelo CTB.

Em relação a massa total desses veículos, Carneiro *et al.* (2021) realizaram um estudo onde foram levantados dados sobre a massa dos veículos que trafegam com maior frequência nas rodovias brasileiras. Na Tabela 4.1 encontram-se as informações com os valores máximos e mínimos das massas observadas para os veículos 2C, 3C e 2S3 assim como o PTB (Peso Bruto Total).

Tabela 4.1 – Pesos máximos e mínimos para os veículos 2C, 3C e 2S3

Veículo	Mínimo (kg)	Máximo (kg)	PBT (kg)
2C	6.200	27.250	16.800
3C	6.670	41.710	24.200
2S3	12.420	70.450	43.600

Fonte: adaptado de Carneiro *et al.* (2021).

Com base nos dados da Tabela 4.1, verifica-se que na situação mais crítica a massa total do veículo 3C supera em 72% seu valor para o PBT. Logo, para considerar o efeito do sobrepeso nas análises, as massas dos veículos apresentarão uma distribuição uniforme de valores dentro dos limites estabelecidos na Tabela 4.1.

Tanto para a velocidade quanto para a massa total, as incertezas são inseridas fazendo a aplicação direta da eq. (4.4) e respeitando os limites que foram estabelecidos para essas variáveis.

#### 4.4 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

O método de Simulação de Monte Carlo foi idealizado pelo matemático Stanislaw Ulam por volta de 1946. No mesmo período, o primeiro computador eletrônico, ENIAC, havia sido construído. Sua versatilidade e rapidez para época impressionaram Ulam, que em parceria com Von Neumann passou a aplicar o método de simulação de Monte Carlo em problemas de difusão de nêutrons, o que popularizou o uso e aplicação deste método (ECKHARDT, 1987).

O princípio do método de Simulação de Monte Carlo é desenvolver um modelo analítico, baseado em um programa de computador, capaz de reproduzir o comportamento de um sistema. Sendo um ou mais parâmetros do sistema variáveis aleatórias, são realizadas várias análises e para cada análise é obtida a resposta do sistema. A partir disso, são obtidas diversas previsões para o comportamento do sistema, que por meio de uma análise estatística desses resultados pode-se calcular sua média, desvio padrão ou mesmo definir uma função de densidade de probabilidade das variáveis da resposta que representam o comportamento do sistema (REAL, 2000).

As etapas que fazem parte da simulação de Monte Carlo são:

- 1 – Definição do sistema;
- 2 – Geração das variáveis aleatórias do sistema;
- 3 – Realização da análise do sistema através do modelo matemático elaborado;
- 4 – Análise estatística da resposta;
- 5 – Estudo da eficiência da convergência do método.

No caso dessa tese, o sistema que vai ser analisado é o dimensionamento de um TMD por meio de otimização de modo que a resposta dinâmica da passagem de um veículo sobre a ponte seja a menor possível.

O modelo utilizado para representação da ponte consiste na aplicação do método dos elementos finitos e o modelo do veículo e TMD em sistemas discretos do tipo massa, mola e amortecedor.

Como resposta para o sistema vai ser obtido o deslocamento máximo que o conjunto de parâmetros do TMD (massa, rigidez e amortecimento) e a passagem de veículos causa na estrutura.

Após a realização de várias simulações para o sistema analisado, pode-se armazenar o resultado escolhido, que no caso é o deslocamento máximo da ponte, de cada simulação e a partir disso pode se fazer um tratamento estatístico desses resultados calculando-se o valor esperado (média), o desvio padrão, o coeficiente de variação e a convergência do valor esperado (REAL, 2000).

#### 4.5 ESCOLHA DO ALGORITMO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

De acordo com Penadés-Plà *et al.* (2019), existem duas classes de algoritmos utilizados para a solução de problemas de otimização:

- 1 – Algoritmos exatos;
- 2 – Algoritmos meta-heurísticos ou estocásticos.

Os algoritmos exatos são os métodos tradicionais que se baseiam no cálculo do gradiente da função objetivo para busca de seu valor mínimo. Apresentam baixo custo computacional, porém os resultados facilmente ficam presos em mínimos locais. Alguns exemplos de algoritmos exatos são: Método de Newton, Método dos Gradientes Descendentes, Método dos Gradientes Conjugados e o Método Simplex (YVARI, 2017).

Já os algoritmos meta-heurísticos são métodos aproximados que não dependem do cálculo do gradiente da função objetivo e se baseiam em cálculos probabilísticos. Apresentam custo computacional mais elevado que os algoritmos exatos, mas conseguem chegar a resultados mais próximos do mínimo global da função objetivo. Os algoritmos meta-heurísticos geralmente se inspiram em eventos que ocorrem na natureza, tais como o *Firefly Algorithm* (FA), que se baseia atração dos vagalumes por outros que emitam luz com maior intensidade; *Particle Swarm Optimization* (PSO) que tem seu funcionamento inspirado no comportamento e na interação de bandos de pássaros durante a busca por alimento; e o *Whale Optimization Algorithm* (WOA) que é inspirado no processo que as baleias jubarte utilizam para buscar alimento (YVARI, 2017).

Para decidir qual dos tipos de algoritmo melhor se encaixa na solução de um problema de otimização, deve-se levar conta em os seguintes aspectos: (i) definir a função objetivo do problema, as restrições e as variáveis de projeto e (ii) identificar a categoria de otimização do problema. Com isso em mente, a escolha do tipo de algoritmo fica mais simples, pois, se o problema apresenta uma função objetivo que possibilita o cálculo do gradiente em relação às variáveis de projeto, o uso de métodos exatos é a melhor opção, no caso contrário a melhor opção é o uso de um algoritmo meta-heurístico. Dependendo do tipo de restrição do problema, existem algoritmos que conseguem tratar problemas irrestritos ou com restrições lineares. Outros algoritmos possibilitam a paralelização, fato que tira proveito das máquinas com vários processadores e reduzem o tempo de execução da busca do valor mínimo da função (YVARI, 2017).

Aplicando esses conceitos ao problema de otimização desse trabalho, a função objetivo do problema é o deslocamento máximo da estrutura e as variáveis de projeto são os parâmetros do TMD (massa, amortecimento e rigidez) e as restrições são os limites superiores e inferiores que os parâmetros do TMD deverão respeitar de modo que sua implementação seja viável.

Um dos pontos mais importantes na solução desse problema de otimização consiste justamente no cálculo do deslocamento máximo da ponte, pois além de ser função dos parâmetros do TMD, o deslocamento máximo da ponte também é uma função da geometria, das propriedades mecânicas dos materiais da ponte e da excitação que o veículo e as irregularidades do pavimento provocam na estrutura. Sendo assim, não existe uma forma explícita para escrever a função objetivo do problema e conseqüentemente não existe uma maneira de calcular o gradiente da função objetivo, logo a melhor opção para solução desse problema de otimização é o emprego de um algoritmo meta-heurístico.

#### 4.6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

De forma geral, o problema de otimização que se pretende resolver consiste em determinar os parâmetros do TMD (rigidez e amortecimento) tal que o deslocamento máximo da ponte seja o menor possível, conforme é representado na equação:

$$\begin{array}{ll}
\text{Encontrar} & \vec{x} = [k_{TMD}, c_{TMD}] \\
\text{Minimize} & u_{max}(\vec{x}) \\
\text{Sujeito a} & k_{TMD}^{min} \leq k_{TMD} \leq k_{TMD}^{max} \\
& \begin{array}{l} \square \\ \square \end{array} c_{TMD}^{min} \leq c_{TMD} \leq c_{TMD}^{max} \\
& \begin{array}{l} \square \\ \square \end{array} m_{TMD} = \mu M_{st}
\end{array} \tag{4.16}$$

sendo que,

$k_{TMD}^{min}$  e  $k_{TMD}^{max}$ : limites inferior e superior para a rigidez do TMD;

$c_{TMD}^{min}$  e  $c_{TMD}^{max}$ : limites inferior e superior para o amortecimento do TMD;

$u_{max}(\vec{x})$ : deslocamento máximo da ponte em função dos parâmetros do TMD;

$\mu$ : porcentagem da massa total da estrutura.

Na situação onde será aplicada a otimização robusta, o problema é escrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
\text{Encontrar} & \vec{x} = [k_{TMD}, c_{TMD}] \\
\text{Minimize} & \bar{u}_{max} = E[u_{max}(\vec{x})] \\
\text{Sujeito a} & k_{TMD}^{min} \leq k_{TMD} \leq k_{TMD}^{max} \\
& \begin{array}{l} \square \\ \square \end{array} c_{TMD}^{min} \leq c_{TMD} \leq c_{TMD}^{max} \\
& \begin{array}{l} \square \\ \square \end{array} m_{TMD} = \mu M_{st}
\end{array} \tag{4.17}$$

onde,

$E[u_{max}(\vec{x})]$ : média do valor do deslocamento máximo da estrutura para o número de amostras considerados em função dos parâmetros do TMD;

$\bar{u}_{max}$ : deslocamento máximo médio da estrutura (função objetivo do problema de otimização robusta).

Devido à complexidade do problema, será utilizado um algoritmo meta-heurístico. Dentre as várias opções disponíveis de algoritmos de otimização, escolheu-se *Honey Badger Algorithm* (HBA), desenvolvido por Hashim *et al.* (2022).

O que motivou a escolha desse algoritmo se deve ao fato de seu código ser enxuto, ou seja, com poucos parâmetros de entrada e etapas bem definidas para busca do mínimo global da

função objetivo, a convergência da resposta acontecer de forma rápida e sem a necessidade de utilizar muitos agentes de busca. Além disso, o HBA possui estratégias para evitar que a busca do valor mínimo da função objetivo fique presa a um valor ótimo local.

#### 4.6.1 Algoritmo HBA

O algoritmo meta-heurístico HBA inspira-se no comportamento de texugos durante o processo de busca por alimento. Em ambiente natural, tais comportamentos envolvem escavação (busca de alimento no solo) ou seguir pássaros-do-mel em busca de colmeias de abelhas (HASHIM *et al.*, 2022).

De acordo com Hashim *et al.* (2022), a implementação computacional do algoritmo HBA é simples de fazer e, baseado no princípio de funcionamento do método, são necessárias algumas operações para se chegar no valor mínimo da função objetivo.

O primeiro passo para implementação computacional do algoritmo HBA consiste na inicialização das posições de cada texugo. Isso é feito conforme a expressão:

$$\vec{x}_i = \vec{lb}_i + \vec{z}_4(\vec{ub}_i - \vec{lb}_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (4.18)$$

onde,

$\vec{x}_i$ : vetor com a posição do  $i$ -ésimo texugo ou agente de busca;

$\vec{lb}_i$ : vetor com os limites inferiores das variáveis de projeto;

$\vec{ub}_i$ : vetor com os limites superiores das variáveis de projeto;

$\vec{z}_4$ : vetor com número aleatório gerado por meio de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1 para cada variável de projeto;

$N$ : número de texugos ou agentes de busca.

Após a definição das posições de cada agente de busca, a próxima etapa consiste em avaliar o valor da função objetivo para cada agente de busca e dessa avaliação selecionar aquele com a melhor posição ( $\vec{x}_{prey}$ ).

Com isso, pode-se então definir o valor da intensidade, que serve para medir o quão perto da posição de referência os agentes de busca estão e direcionar o seu movimento. Isso é feito conforme as equações (HASHIM *et al.*, 2022):

$$\vec{l}_i = \vec{z}_5 \frac{\vec{S}}{4\pi\vec{d}_i^2} \quad (4.19)$$

$$\vec{S}_i = (\vec{x}_i - \vec{x}_{i+1})^2 \quad (4.20)$$

$$\vec{d}_i = \vec{x}_{prey} - \vec{x}_i \quad (4.21)$$

sendo que,

$\vec{l}_i$ : intensidade com que o *i*-ésimo texugo irá se mover;

$\vec{S}_i$ : fator de concentração de força do *i*-ésimo texugo;

$\vec{d}_i$ : distância entre a presa e o *i*-ésimo texugo;

$\vec{z}_5$ : vetor com número aleatório gerado por meio de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1.

Além disso, o algoritmo HBA utiliza um fator de decrescimento para suavizar a transição entre as fases de exploração e busca da resposta que minimiza a função objetivo:

$$\alpha = C \left[ \exp\left(\frac{-t}{t_{max}}\right) \right] \quad (4.22)$$

onde,

$\alpha$ : fator de decaimento;

$t$ : iteração atual;

$t_{max}$ : número máximo de iterações;

$C$ : constante com valor maior que 1.

O valor padrão da constante  $C$  é 2, pois segundo a análise de sensibilidade do algoritmo feita por Hashim *et al.* (2022), foi para esse valor que o algoritmo apresentou o melhor desempenho na busca do mínimo das funções objetivo. Sendo assim, para a solução dos problemas de otimização que serão analisados neste trabalho, o valor da constante  $C$  utilizado, foi o padrão.

Por fim, a atualização das posições dos agentes de busca pode ser feita de acordo com uma das equações:

$$\vec{x}_{new} = \vec{x}_{prey} + F\beta\vec{l}_i\vec{x}_{prey} + F\vec{z}_6\alpha\vec{d}_i|\cos(2\pi\vec{z}_7)[1 - \cos(2\pi\vec{z}_8)]|, \text{ para } r_1 < 0,5 \quad (4.23)$$

$$\vec{x}_{new} = \vec{x}_{prey} + F\vec{z}_9\alpha\vec{d}_i, \text{ para } r_1 > 0,5 \quad (4.24)$$

$$F = \begin{cases} 1, & \text{se } r_2 \leq 0,5 \\ -1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.25)$$

sendo,

$\vec{x}_{new}$ : nova posição de busca dos texugos;

$F$ : variável que permite que os texugos mudem de direção para escapar de mínimos locais;

$\vec{z}_6, \vec{z}_7, \vec{z}_8$  e  $\vec{z}_9$ : vetores com números aleatórios gerados por meio de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1;

$r_1$  e  $r_2$ : variáveis escalares que representam números aleatórios gerados por meio de uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão 1;

$\beta$ : fator que mede a habilidade de um texugo encontrar alimento.

A variável  $\beta$  também passou pela análise de sensibilidade do desempenho do algoritmo, de modo que foi concluído que o valor que produz o melhor resultado na busca de um mínimo

global foi  $\beta = 6$  (HASHIM *et al.*, 2022). Por esse motivo a variável  $\beta$  também foi mantida como o padrão do HBA na resolução do problema de otimização da tese.

Depois de atualizar as posições dos agentes de busca, se faz uma verificação para saber se as novas posições estão dentro dos limites superiores e inferiores estabelecidos para as variáveis de projeto e então, armazena-se a posição que gerou o menor valor para função objetivo e todo o processo é repetido até que sejam executadas todas as iterações. Na Figura 4.3 encontra-se o pseudo-código do algoritmo HBA.

```

Definir as variáveis  $t_{max}$ ,  $N$ ,  $\beta$  e  $C$ 
Inicializar a população com posições aleatórias
Calcular o valor da função objetivo para cada posição
Guardar a melhor posição,  $x_{prey}$  e o seu valor,  $f_{prey}$ 
Para  $j = 1$  até  $t_{max}$ 
  Calcular o fator  $\alpha$ 
  Para  $i = 1$  até  $N$ 
    Calcular a intensidade  $\vec{I}_i$ 
    Se  $r_1 < 0,5$  então
      Atualizar a posição  $\vec{x}_{new}$  com a eq. (4.17)
    Caso contrário
      Atualizar a posição  $\vec{x}_{new}$  com a eq. (4.18)
    Fim
    Calcular novo valor da função objetivo  $f_{new}$ 
    Se  $f_{new} \leq f_i$  então
       $\vec{x}_i = \vec{x}_{new}$  e  $f_i = f_{new}$ 
    Fim
    Se  $f_{new} \leq f_{prey}$  então
       $\vec{x}_{prey} = \vec{x}_{new}$  e  $f_{prey} = f_{new}$ 
    Fim
  Fim
Fim
Mostrar resultados

```

Figura 4.3- Pseudo-código para o algoritmo HBA (adaptado de Hashim *et al.* (2022))

## 4.7 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROGRAMA COMPLETO

A implementação computacional de toda a metodologia apresentada nos Capítulos 3 e 4 da presente tese foi feita na linguagem de programação Octave. O que motivou a sua escolha foi o fato que essa linguagem é de código aberto, ou seja, não requer uma licença para ser utilizada. Sua sintaxe é semelhante à da linguagem de programação MatLab além de possuir

diversas funções intrínsecas que auxiliam na geração de números aleatórios, cálculo de autovalores e autovetores, manipulação de matrizes, geração de gráficos para visualização dos resultados das análises e possibilitar a paralelização do código. Com todos os recursos que o Octave disponibiliza, é possível implementar tudo que o programa deve executar por meio de *scripts*, o que torna o processo de desenvolvimento da parte numérica mais produtivo.

Sendo assim, o programa implementado está dividido em um programa principal e em sub-rotinas auxiliares. De modo geral, programa principal tem a função de fazer a leitura dos dados de entrada do modelo da estrutura, utilizar as sub-rotinas quando necessário e gerar os gráficos com os resultados das simulações.

De maneira específica, o programa principal permite que sejam executadas análises estáticas (sem a consideração da elevação do pavimento), dinâmicas (considerando a elevação do pavimento) e de valores extremos (cálculo dos deslocamentos máximos da ponte para uma quantidade de amostras que são utilizadas para gerar uma função distribuição de probabilidades).

É possível realizar as análises mencionadas assumindo que o dispositivo de controle de vibrações foi ou não dimensionado. Para determinar os parâmetros do TMD pela primeira vez, o programa deve estar configurado para realizar a análise “dinâmica”, pois é preciso avaliar se FAD (fator de amplificação dinâmica) da resposta da estrutura está acima de um limite para justificar a necessidade do uso de um dispositivo de controle de vibrações. Nos demais casos (“estática” e “valores extremos”) o programa guarda os resultados obtidos em arquivos e encerra sua execução alguns passos antes, pois entende-se que essas análises possuem finalidades auxiliares ao dimensionamento do TMD.

Para executar os cálculos necessários para geração dos resultados, utiliza-se sub-rotinas que desempenham funções diversas, todas relacionadas as metodologias apresentadas nos Capítulos 3 e 4. Ao todo, foram desenvolvidas nove sub-rotinas, a saber: veículo, estrutura, psd, propriedades, força, newmark, hba, montagem e paralelo. A função de cada uma dessas sub-rotinas está listada a seguir:

**Sub-rotina veículo:** responsável por determinar a massa total, a massa suspensa e montar as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo de veículo escolhido.

**Sub-rotina propriedades:** sua função é gerar as dimensões e as propriedades mecânicas das vigas do modelo da estrutura e devolver como resultados sua área, momentos de inércia, módulo de elasticidade e densidade do material.

**Sub-rotina estrutura:** a partir dos dados de entrada e dos resultados da sub-rotina propriedades, seu objetivo é montar as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do modelo da ponte.

**Sub-rotina psd:** faz a geração do perfil de irregularidades do pavimento para os lados direito e esquerdo do veículo, assim como define um vetor com a posição das rodas durante o seu deslocamento pela estrutura.

**Sub-rotina força:** monta o vetor com as forças que são aplicadas na estrutura e no veículo devido à influência do tipo do pavimento escolhido.

**Sub-rotina newmark:** sua função é utilizar o método de Newmark para integrar a equação de movimento do sistema veículo-estrutura-pavimento no domínio do tempo. É dentro dessa sub-rotina que acontece a atualização das matrizes de amortecimento e rigidez da estrutura à medida que a roda do veículo avança seu deslocamento. Além disso, a sub-rotina newmark também é utilizada para integrar a equação de movimento do sistema veículo-estrutura-TMD.

**Sub-rotina hba:** responsável pelo dimensionamento dos parâmetros do TMD a partir do uso do algoritmo otimização HBA.

**Sub-rotina montagem:** responsável por montar e atualizar as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema veículo-estrutura-pavimento-TMD sempre que ocorre mudança nos valores dessas variáveis durante o processo de otimização.

**Sub-rotina paralelo:** sua função é paralelizar o cálculo da função objetivo durante o processo de otimização, aproveitando os processadores disponíveis no computador, a fim de tornar o esse processo mais rápido. Essa sub-rotina é executada dentro da sub-rotina hba.

Quanto aos arquivos de dados utilizados no programa principal, estes trazem informações relativas à estrutura, como por exemplo, as coordenadas de seus nós, conectividades de seus elementos, condições de contorno e informações para a alocação de memória das matrizes e vetores utilizados nos cálculos.

A Figura 4.4 apresenta um fluxograma detalhando o funcionamento do programa principal durante o laço que calcula os deslocamentos máximos da estrutura devido a passagem dos veículos para as diversas amostras das variáveis aleatórias. Na Figura 4.5 é apresentada a continuação deste programa até a etapa de dimensionamento dos parâmetros do TMD.

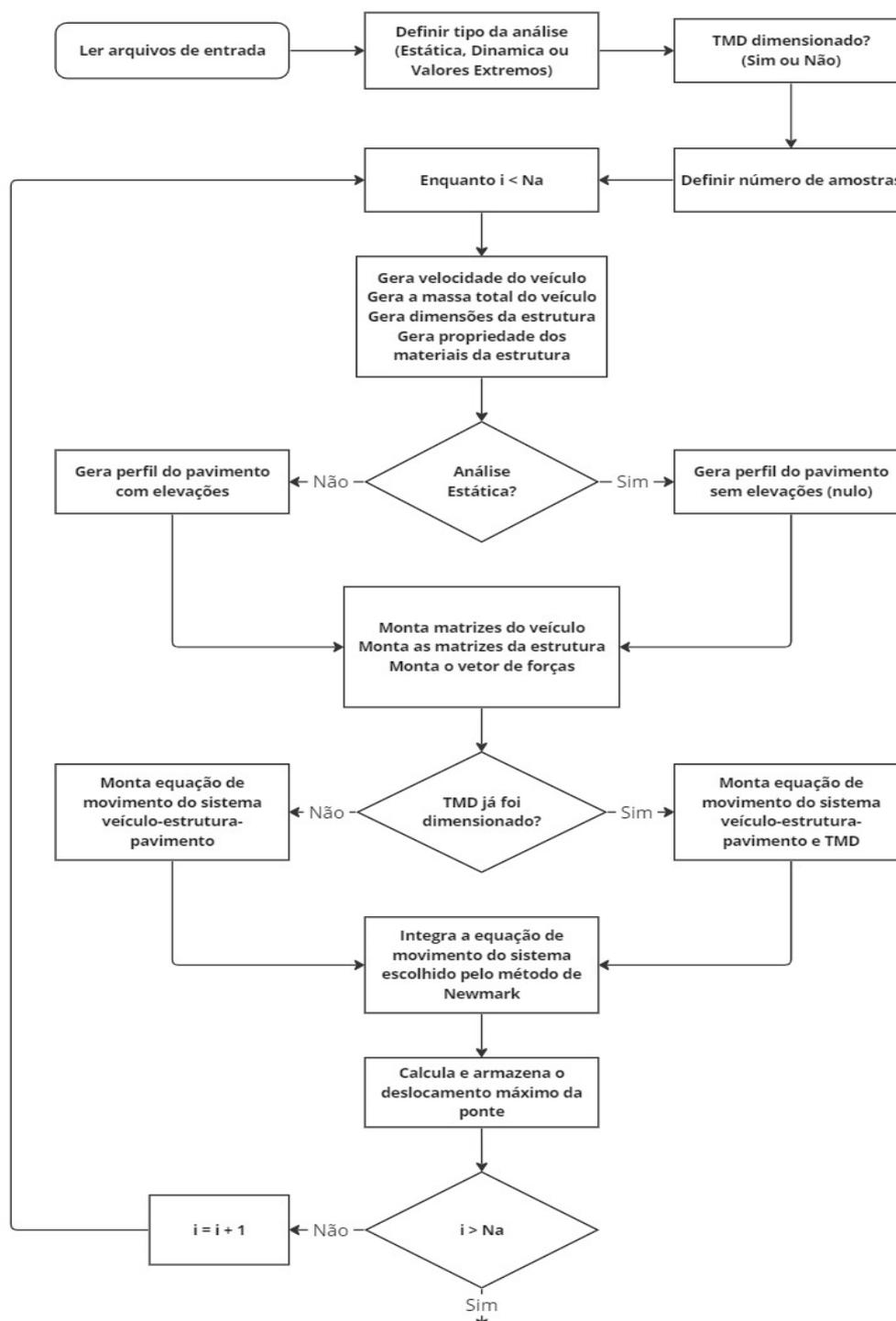


Figura 4.4 – Fluxograma do laço para o cálculo dos deslocamentos máximos da ponte para as diversas amostras de variáveis aleatórias

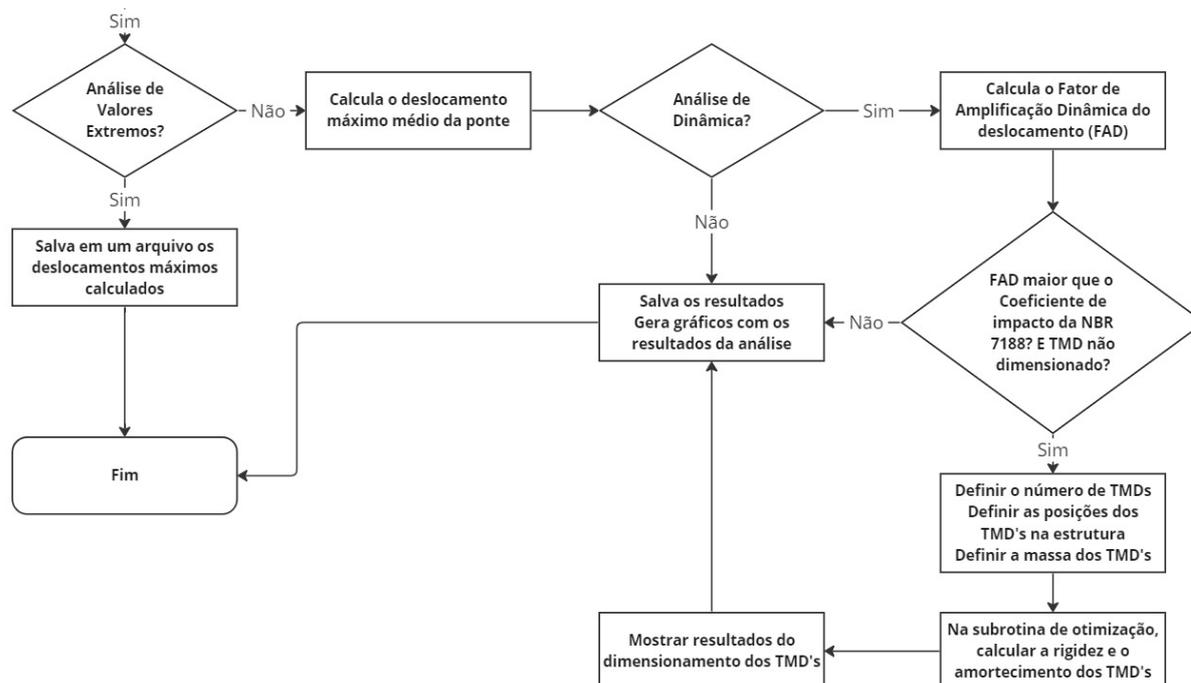


Figura 4.5 – Fluxograma apresentando a continuação do programa principal até o encerramento, destacando as considerações feitas de acordo com o tipo de análise e a sub-rotina de otimização

#### 4.7.1 Sub-rotina de Paralelização

Diferentemente de como ocorre em linguagem como C++ e Fortran, cuja paralelização de trechos do código pode ser feita utilizando a interface *OpenMP* (*Open Multi-Processor*), em Octave a paralelização é feita por meio de pacotes de funções para essa finalidade, tais como, *parallel*, *MPI* ou *dragonfly* (FREITAS, 2023).

Neste trabalho optou-se por utilizar o pacote de paralelização denominado *parallel*, que foi desenvolvido por H. Fujiwara, J. Hajek e O. Till. Esse pacote possui uma série de funções que podem ser utilizadas nos *scripts*. Além disso, essas funções podem ser executadas em máquinas locais com memória compartilhada e clusters com memória distribuída (FREITAS, 2023).

Dentre as funções disponíveis no pacote *parallel* do Octave, optou-se por utilizar a função *pararrayfun* para executar um trecho do código em paralelo em uma máquina local com multiprocessadores e memória compartilhada. Para utilização dessa função são necessários três argumentos: (i) número de processadores disponíveis na máquina, (ii) o nome da função escrita em Octave e (iii) um vetor com os argumentos dessa função, conforme ilustrado na

Figura 4.6. Exemplos de como usar a função *pararrayfun* podem ser encontrados em Octave (2021).

**[o1, o2, ...] = pararrayfun (Nproc, fun, a1, a2, ...)**

**o1, o2:** resultados da função

**Nproc:** número de processadores disponíveis

**fun:** função escrita em Octave (arquivo .m)

**a1, a2:** argumentos da função

Figura 4.6- Argumentos utilização da função *pararrayfun* (adaptado de Freitas, 2023)

A paralelização feita neste trabalho foi aplicada na etapa de cálculo do valor da função objetivo dentro do processo de otimização robusta. A escolha dessa parte específica do código deve-se ao fato de que cada agente de busca opera individualmente sobre o número de amostras de variáveis aleatórias consideradas no problema e produz como resultado um valor para o deslocamento máximo da ponte ( $u_{max}(\vec{x}_i, j)$ ), sendo que  $\vec{x}_i$  o valor da variável de projeto para o  $i$ -ésimo agente de busca e  $j = 1, 2, \dots, N_a$  é a  $j$ -ésima amostra das variáveis aleatórias.

Portanto, identificou-se que essa operação poderia ser dividida entre os processadores disponíveis no computador e executada simultaneamente a fim de produzir os resultados necessários para calcular o valor da função objetivo, reduzindo assim o tempo computacional do gasto na execução processo de otimização.

Ressalta-se que todo o programa implementado para gerar os resultados deste trabalho foram executados em algumas análises de forma sequencial (utilizando apenas um processador) e de forma paralela. As análises realizadas de forma sequencial foram executadas em uma máquina com processador Intel i7, 8-Core com 3,30 GHz, 8 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 10. Já a versão paralela do programa foi executada em uma máquina com 8 processadores Intel Xeon E5-4658, 12-Core com 2.70 GHz, 488 GB de memória RAM e sistema operacional Debian Linux 10, conforme ilustrado na Figura 4.7.



Figura 4.7 – Computador utilizado para executar a versão paralela do código desenvolvido nesse trabalho (destacado em vermelho)

O fluxograma da Figura 4.8 detalha as operações realizadas dentro da sub-rotina paralelo e executadas pelos diversos processadores da máquina e a Figura 4.9 apresenta um fluxograma onde é explicado o funciona a paralelização do cálculo da função objetivo.

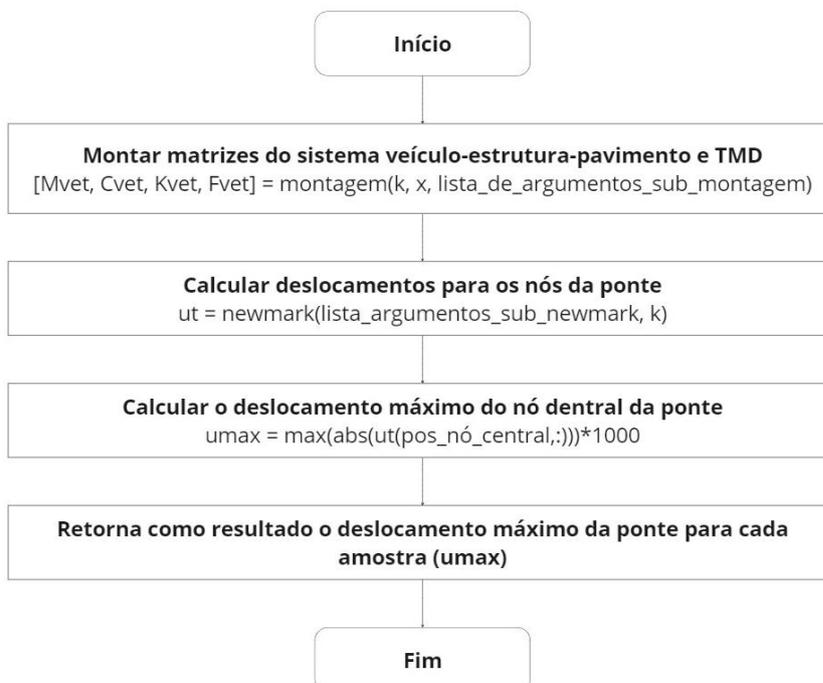


Figura 4.8 – Fluxograma detalhando as operações executadas na sub-rotina paralelo

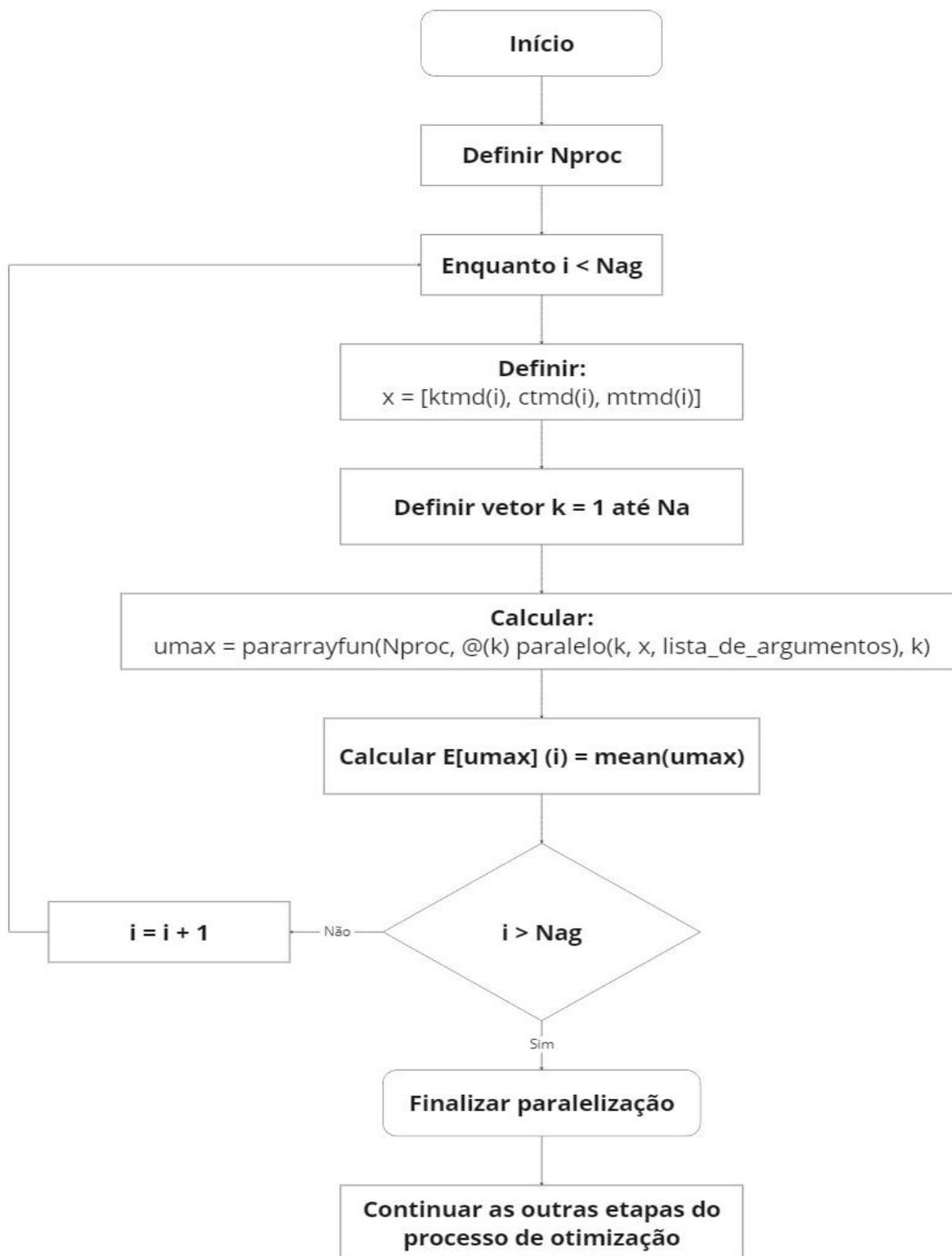


Figura 4.9 – Fluxograma do trecho paralelizado do código da sub-rotina de otimização onde é feito o cálculo do valor da função objetivo

## 5 TEORIA DOS VALORES EXTREMOS

A Teoria dos Valores Extremos (EVT – sigla em inglês) lida principalmente com dados relacionados a eventos raros, originários de grandes mudanças, como por exemplo, terremotos, eventos climáticos e variações no preço de ativos financeiro (AHMED, 2020).

Vários campos de estudos possuem aplicações que utilizam a teoria dos valores extremos, tais como, área da saúde (Einmahl *et al.*, 2019), engenharia (Auerbach e Wan, 2020), hidrologia (De Paola *et al.*, 2018), entre muitas outras áreas de aplicação.

Haja vista que a EVT possui diversos campos de aplicação, no contexto desta tese, sua utilização será na análise dos deslocamentos máximos da ponte submetida a passagem dos veículos após o dimensionamento e instalação do sistema de controle de vibrações.

Em outras palavras, o uso da otimização apresentado no Capítulo 4 serve para dimensionar o sistema de controle de vibrações que será utilizado e após isso, a estrutura será analisada simulando uma condição de tráfego, ou seja, veículos com velocidades e massas diferentes trafegando pela ponte. Como consequência, esses veículos causarão deslocamentos na estrutura que serão atenuados pelo TMD instalado. Com essas informações serão feitas as análises estatísticas dos deslocamentos obtidos a fim de verificar a robustez do TMD dimensionado e, se possível, determinar qual o maior deslocamento máximo a estrutura poderá ser submetida ao longo de sua via útil.

Portanto, o Capítulo 5 fará uma breve apresentação da teoria dos valores extremos, dos métodos utilizados para estimar os parâmetros desse tipo de função e dos testes estatísticos para verificar a qualidade do ajuste da curva estimada aos dados, além de mostrar toda formulação necessária para as análises propostas na tese.

### 5.1 TEORIA DOS VALORES EXTREMOS UNIVARIADA

A Teoria do Valor Extremo é desenvolvida em paralelo com a Teoria do Limite Central, de modo que seus princípios estão baseados no comportamento limite do valor máximo (ou mínimo) da amostra em vez do comportamento limite das somas parciais (AHMED, 2022).

No contexto histórico, a Teoria do Valor Extremo foi iniciada no século 20, quando Fisher e Tippett (1928) começaram a formulação da teoria pela distribuição limite máximo ou mínimo de amostras.

Sejam  $(X_1, \dots, X_n)$ , amostras aleatórias com função de distribuição de probabilidade  $F$ . A Teoria dos Valores Extremos Univariada encontra o caso em que existe uma sequência positiva de números  $(a_n > 0)$  e uma sequência de números reais  $(b_n > 0)$ , que estabiliza a função de distribuição de probabilidade e quando  $n \rightarrow \infty$ , a distribuição dos máximos converge para uma função  $G$ , que representa uma distribuição de probabilidade não degenerativa, conforme a expressão (AHMED, 2022; ABDULALI *et al.*, 2022):

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq n} X_i - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} G \quad (5.1)$$

onde  $\xrightarrow{d}$  representa convergência em distribuição.

Em outras palavras, isso considera que  $F$  pertence ao domínio máximo de atração de uma distribuição de valores extremos se  $n \rightarrow \infty$ , então, para todo ponto de continuidade  $x$  da função  $G(x)$  tem-se que:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} X_i - b_n}{a_n} \leq x\right) = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x) \quad (5.2)$$

onde  $G(x)$  é uma distribuição não degenerada, denominada como Função de Distribuição de Valores Extremos.

Sendo assim, a função  $G(x)$  pode assumir a forma de uma das três funções de distribuição (CERESER, 2008):

(i) Tipo I de Gumbel:

$$G(x) = \exp\left[-\exp\left(\frac{-(x-b)}{a}\right)\right], \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

(ii) Tipo II de Fréchet:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ \exp\left\{-\left[\frac{x-b}{a}\right]^{-\gamma}\right\}, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

(iii) Tipo III de Weibull:

$$G(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[\frac{-(x-b)}{a}\right]^\gamma\right\}, & \text{se } x \leq 0 \\ 0, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

para  $a > 0$ ,  $\gamma > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

De acordo com Abdulali *et al.* (2022), essas três classificações podem ser vistas como uma única família de distribuições: a distribuição de valores extremos generalizados padrão (GEV – sigla em inglês), conforme a equação a seguir:

$$G(x) = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\} \quad (5.6)$$

em que,

$\xi$ : é o fator de forma da função, que tem como função descrever o “peso” da cauda da distribuição;

$\mu$ : é o fator de localização;

$\sigma$ : é fator de escala.

Em relação ao fator de forma de distribuição GEV, podem ocorrer três situações (CERESER, 2008):

- $\xi > 0$ : a função  $G(x)$  possui “cauda pesada”, em uma linguagem mais informal e um ponto de mínimo. Além disso, a distribuição possui um valor máximo infinito, assemelhando-se a uma distribuição do tipo Fréchet.

- $\xi < 0$ : a função  $G(x)$  possui “cauda leve” sem a existência de um ponto de mínimo. Por outro lado, a distribuição possui um valor máximo (o menor valor de  $x$  tal que  $G(x) = 1$ ) em  $x = \mu - \frac{\sigma}{\xi}$ . Tal distribuição assemelha-se a uma distribuição do tipo Weibull.
- $\xi = 0$ : a função  $G(x)$  não possui ponto de máximo ou mínimo definidos, sendo que as caudas estão entre “leves” e “pesadas” assemelhando-se a uma distribuição do tipo Gumbel. Especificamente para essa situação, em que  $\xi \rightarrow 0$ , a equação que descreve a função GEV é a seguinte:

$$G(x) = \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \quad (5.7)$$

Com essa generalização, não é necessário definir o tipo de distribuição utilizado a princípio para depois calcular os demais parâmetros da GEV, a decisão sobre o tipo utilizado recai diretamente sobre o parâmetro de forma ( $\xi$ ).

Derivando a eq. (5.6) em relação a  $x$ , obtém-se a função de densidade de probabilidade  $g(x)$  da distribuição de valores extremos generalizados:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (5.8)$$

Definida em  $-\infty < x < \mu - \frac{\sigma}{\xi}$ , para  $\xi < 0$ ;  $\mu - \frac{\sigma}{\xi} < x < +\infty$ , para  $\xi > 0$ .

Para  $\xi \rightarrow 0$ , o limite da função  $g(x)$  mostrada na eq. (5.8) vale:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \left\{ \exp \left( -\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, x \in \mathbb{R} \quad (5.9)$$

A Figura 5.1 apresenta o formato das três distribuições utilizadas para descrever valores extremos:

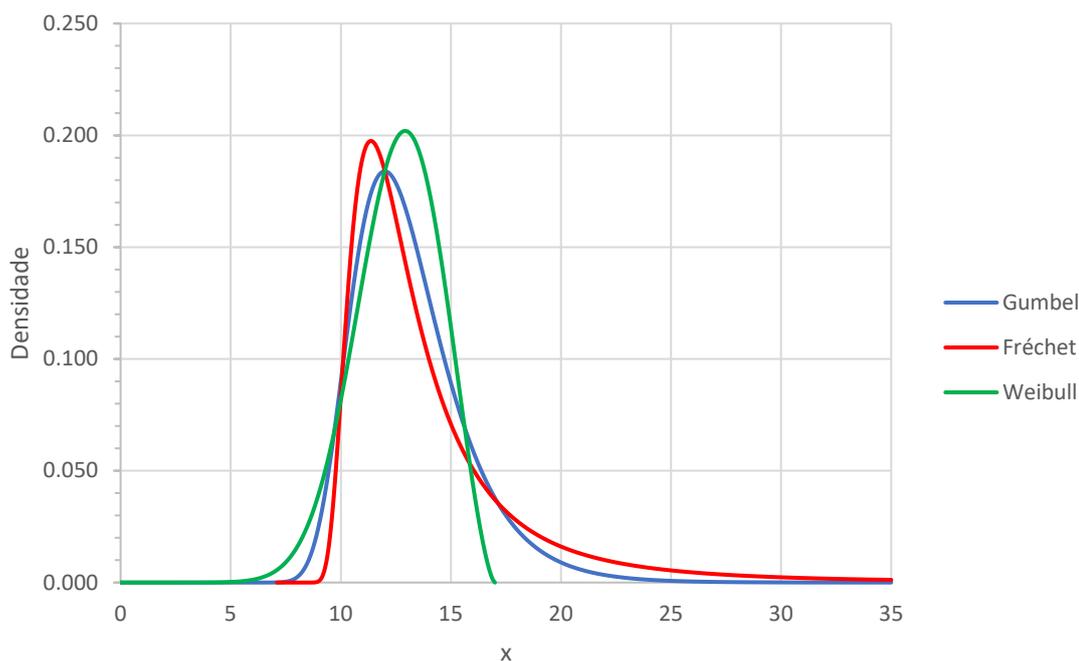


Figura 5.1 – Função de densidade de probabilidade das três distribuições padrão. Gumbel ( $\xi = 0$ ), Fréchet ( $\xi = 0,4$ ) e Weibull ( $\xi = -0,4$ ). Todas as funções foram calculadas com  $\mu = 12$  e  $\sigma = 2$  (adaptado de Cereser (2009))

## 5.2 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS QUE DESCREVEM A FUNÇÃO GEV

Conforme mencionado no item 5.1 desse capítulo, a escolha do tipo de distribuição está atrelada ao fator de forma ( $\xi$ ). Para garantir um bom ajuste da distribuição aos valores obtidos de forma experimental, também é importante determinar de forma adequada os parâmetros de localização ( $\mu$ ) e escala ( $\sigma$ ) da distribuição.

Dentre os métodos disponíveis para determinação dos parâmetros de forma, localização e escala de uma distribuição GEV, destacam-se o Método da Máxima Verossimilhança, o Métodos dos Momentos LH e o Método dos Momentos.

### 5.2.1 Estimativa pelo Método da Máxima Verossimilhança

Sejam  $M_1, M_2, \dots, M_n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas representando os máximos de blocos de tamanho  $n$ , com distribuição GEV e uma amostra  $m$

de máximos  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . A função de verossimilhança, nesse caso, é dada por (CERESER, 2008):

$$L(\xi, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^m g(m_i) \quad (5.10)$$

$$L(\xi, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^m} \prod_{i=1}^m \left\{ \left[ 1 + \xi \left( \frac{m_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{m_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \right\} \quad (5.11)$$

Aplicando logaritmo na função da verossimilhança da eq. (5.11), tem-se que:

$$l(\xi, \mu, \sigma) = \sum_{i=1}^m \left\{ -m \ln \sigma - \left( \frac{1+\xi}{\xi} \right) \ln \left[ 1 + \xi \left( \frac{m_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \left[ 1 + \xi \left( \frac{m_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (5.12)$$

Para o caso em que  $\xi = 0$ , o valor do logaritmo da função da verossimilhança é:

$$l(\mu, \sigma) = -m \ln \sigma - \sum_{i=1}^m \left( \frac{m_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^m \exp \left\{ - \left( \frac{m_i - \mu}{\sigma} \right) \right\} \quad (5.13)$$

Os estimadores dos parâmetros  $\xi$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  da distribuição de valores extremos são determinados através da solução do sistema de equações não lineares formados pelas derivadas de primeira ordem de cada parâmetro da função do logaritmo da verossimilhança igualadas a zero, conforme mostra a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\hat{\xi}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})}{\partial \hat{\xi}} &= 0 \\ \frac{\partial l(\hat{\xi}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})}{\partial \hat{\mu}} &= 0 \\ \frac{\partial l(\hat{\xi}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Onde,  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\mu}$ , e  $\hat{\sigma}$ , são os estimadores dos parâmetros de forma, localização e escala da distribuição GEV, respectivamente.

Calculando as derivadas de primeira ordem da eq. (5.12), isso resulta em:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left\{ \left( 1 - \omega_i^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \right) \left[ \frac{1}{\hat{\xi}^2} \ln \omega_i - \frac{m_i - \hat{\mu}}{\hat{\xi} \hat{\sigma} \omega_i} \right] - \frac{m_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma} \omega_i} \right\} &= 0 \\ \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^m \left( \frac{1 + \hat{\xi} - \omega_i^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}}{\hat{\sigma}} \right) &= 0 \\ -\frac{m}{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{(m_i - \hat{\mu}) \left[ 1 + \hat{\xi} - \omega_i^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \right]}{\omega_i} \right\} &= 0 \\ \omega_i &= 1 + \hat{\xi} \frac{(m_i - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}} \end{aligned} \tag{5.15}$$

O sistema de equações da eq. (5.15) não possui solução analítica, sendo que para o cálculo dos parâmetros  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\mu}$ , e  $\hat{\sigma}$ , é necessário o emprego de um método numérico.

Cabe ressaltar que como o Método da Máxima Verossimilhança é um método clássico para estimativa dos parâmetros de uma distribuição GEV, muitas linguagens de programação, como Octave, Python, MatLab, R e Julia, possuem em seus pacotes estatísticos algoritmos baseados no Método da Verossimilhança para estimar os parâmetros que melhor ajustam os dados experimentais a uma determinada distribuição de probabilidade.

Por esse motivo, a estimação dos parâmetros da função GEV para os dados dos deslocamentos máximos da ponte serão estimados utilizando o Método da Máxima Verossimilhança.

### 5.2.2 Método dos Momentos LH

Para situações, como por exemplo, de possuir amostras de dados pequenas, o Método da Máxima Verossimilhança apresenta instabilidades na estimação dos parâmetros que descrevem uma função GEV (PANSERA e GOMES, 2021). Como forma de resolver esse problema, Wang (1997) propôs o Método dos Momentos LH.

O método consiste em uma generalização do Método dos Momentos L proposto por Hosking (1990), porém com a utilização de estatísticas de alta ordem para estimar os parâmetros da função GEV de modo que a cauda da distribuição possa ser determinada de maneira mais precisa.

Para utilização do Método dos Momentos LH, considera-se uma amostra ordenada tal que  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . As estimativas dos momentos LH amostrais são apresentadas nas equações a seguir:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1^\eta &= \frac{1}{C_{\eta+1}^n} \sum_{i=1}^n C_\eta^{i-1} x_i \\ \hat{\lambda}_2^\eta &= \frac{1}{2} \frac{1}{C_{\eta+2}^n} \sum_{i=1}^n (C_{\eta+1}^{i-1} - C_\eta^{i-1} C_1^{n-1}) x_i \\ \hat{\lambda}_3^\eta &= \frac{1}{3} \frac{1}{C_{\eta+3}^n} \sum_{i=1}^n (C_{\eta+2}^{i-1} - 2C_{\eta+1}^{i-1} C_1^{n-1} + C_\eta^{i-1} C_2^{n-i}) x_i \\ \hat{\lambda}_4^\eta &= \frac{1}{4} \frac{1}{C_{\eta+4}^n} \sum_{i=1}^n (C_{\eta+3}^{i-1} - 3C_{\eta+2}^{i-1} C_1^{n-i} + 3C_{\eta+1}^{i-1} C_2^{n-i} - C_\eta^{i-1} C_3^{n-i}) x_i\end{aligned}\tag{5.16}$$

$$C_k^m = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

Sendo que,

$\hat{\lambda}_1^\eta, \hat{\lambda}_2^\eta, \hat{\lambda}_3^\eta$  e  $\hat{\lambda}_4^\eta$ : são os momentos LH amostrais;

$\eta$ : ordem dos momentos LH.

Segundo Wang (1997), recomenda-se utilizar o valor de  $\eta$  dentro do intervalo  $[0, 4]$ . Para  $\eta = 0$  os momentos LH são iguais aos momentos L de Hosking (1990). A utilização de  $\eta > 0$  faz com que os momentos representem melhor os dados amostrais possibilitando um melhor ajuste da cauda superior da função GEV.

Quando se normalizam os momentos LH amostrais, obtêm-se o coeficiente de variação, a assimetria e a curtose da amostra, conforme as equações:

$$\begin{aligned}
\hat{t}_2^\eta &= \frac{\hat{\lambda}_2^\eta}{\hat{\lambda}_1^\eta} \\
\hat{t}_3^\eta &= \frac{\hat{\lambda}_3^\eta}{\hat{\lambda}_2^\eta} \\
\hat{t}_4^\eta &= \frac{\hat{\lambda}_4^\eta}{\hat{\lambda}_2^\eta}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$\hat{t}_2^\eta$ : coeficiente de variação LH;

$\hat{t}_3^\eta$ : coeficiente de assimetria LH;

$\hat{t}_4^\eta$ : coeficiente de curtose LH.

Ainda de acordo com Wang (1997), os momentos populacionais da função GEV podem ser obtidos por meio da sequência de equações:

$$\lambda_1^\eta = \mu + \frac{\sigma}{\xi} [1 - \Gamma(1 + \xi)(\eta + 1)^{-\xi}] \tag{5.18}$$

$$\lambda_2^\eta = \frac{(\eta + 2)\sigma\Gamma(1 + \xi)}{2!\xi} [(\eta + 1)^{-\xi} - (\eta + 2)^{-\xi}] \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3^\eta &= \frac{(\eta + 3)\sigma\Gamma(1 + \xi)}{3!\xi} [2(\eta + 3)(\eta + 2)^{-\xi} - (\eta + 4)(\eta + 3)^{-\xi} \\
&\quad - (\eta + 2)(\eta + 1)^{-\xi}]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4^\eta &= \frac{(\eta + 4)\sigma\Gamma(1 + \xi)}{4!\xi} [3(\eta + 5)(\eta + 4)(\eta + 3)^{-\xi} - (\eta + 6)(\eta + 5)(\eta + 4)^{-\xi} \\
&\quad - 3(\eta + 4)(\eta + 3)(\eta + 2)^{-\xi} + (\eta + 3)(\eta + 2)(\eta + 1)^{-\xi}]
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$\lambda_1^\eta, \lambda_2^\eta, \lambda_3^\eta$  e  $\lambda_4^\eta$ : são os momentos LH populacionais;

$\Gamma(t)$ : função Gama completa, definida como:  $\int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ ;

$\xi$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ : coeficientes de forma, localização e escala da função GEV.

Igualando-se os três primeiros momentos LH amostrais, calculados no conjunto de equações (5.16) nas eqs. (5.18), (5.19) e (5.20) respectivamente, é possível obter um sistema de equações não lineares que, para a estimação dos parâmetros  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\mu}$ , e  $\hat{\sigma}$  da função GEV.

Com o intuito de reduzir o custo computacional para estimação de tais parâmetros, Wang (1997) propôs uma aproximação para cálculo do fator de forma da função GEV. Essa aproximação pode ser vista na equação a seguir:

$$\hat{\xi} = \alpha_0 + \alpha_1[\tau_3^\eta] + \alpha_2[\tau_3^\eta]^2 + \alpha_3[\tau_3^\eta]^3 \quad (5.22)$$

Sendo  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , constantes para estimativa do valor de  $\hat{\xi}$ . Os valores dessas constantes estão listados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – valor das constantes  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  para o Método dos Momentos LH.

$\eta$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
0	0,2849	-1,8213	0,8140	-0,2835
1	0,4823	-2,1494	0,7269	-0,2103
2	0,5914	-2,3351	0,6442	-0,1616
3	0,6618	-2,4548	0,5733	-0,1273
4	0,7113	-2,5383	0,5142	-0,1027

Fonte: Wang (1997)

Após o cálculo de  $\hat{\xi}$  com a eq. (5.22), os valores de  $\hat{\sigma}$  e  $\hat{\mu}$  são obtidos substituindo esse resultado na eq. (5.19) e na eq. (5.18), respectivamente.

Observação: a função GEV utilizada por Wang (1997) para deduzir todas as equações apresentadas no Método dos Momentos LH difere um pouco da função apresentada na eq. (5.5). Logo para evitar problemas relativos a não aderência da função GEV a série de dados utilizada na estimação dos parâmetros  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\mu}$ , e  $\hat{\sigma}$ , após o cálculo dos três parâmetros, o valor de  $\hat{\xi}$  deve ser multiplicado por  $(-1)$ .

### 5.2.3 Método dos Momentos

O Método dos Momentos é a uma maneira convencional e simples de estimar os parâmetros de função de distribuição de probabilidade, de modo que essa função consiga aderir aos dados

da amostra. Quase sempre o método consegue gerar estimadores, porém na maioria das vezes esses os mesmos ainda podem ser melhorados para uma melhor aderência dos dados (ABDULALI *et al.*, 2022).

O funcionamento do Método dos Momentos se baseia na presunção de que os momentos amostrais podem gerar uma boa correspondência com seus momentos populacionais, logo para estimar os parâmetros de uma função de distribuição probabilidade, basta igualar os momentos populacionais da distribuição probabilidade aos momentos amostrais.

De acordo com Abdulali, *et al.* (2022), para a função GEV da eq. (5.6), tem-se que alguns momentos populacionais podem ser calculados com as equações:

$$E[X] = \mu + \frac{\sigma}{\xi} [\Gamma(1 - \xi) - 1] \quad (5.22)$$

$$Var[X] = \frac{\sigma^2}{\xi^2} \{ \Gamma(1 - 2\xi) - [\Gamma(1 - \xi)]^2 \} \quad (5.23)$$

$$\gamma[X] = \text{sgn}(\xi) \frac{\Gamma(1 - 3\xi) - 3\Gamma(1 - 2\xi)\Gamma(1 - \xi) + 2[\Gamma(1 - \xi)]^3}{\sqrt[3]{\{\Gamma(1 - 2\xi) - [\Gamma(1 - \xi)]^2\}^2}} \quad (5.24)$$

em que,

$E[X]$ : valor esperado da função GEV;

$Var[X]$ : variância da função GEV;

$\gamma[X]$ : coeficiente de assimetria da função GEV;

$\Gamma(\cdot)$ : função Gama completa;

$\text{sgn}(\cdot)$ : função sinal.

Por outro lado, os momentos amostrais da distribuição de dados são calculados conforme as equações (NAGHETTINI e PINTO, 2007):

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \quad (5.25)$$

$$s^2 = \frac{1}{(m-1)} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \quad (5.26)$$

$$g = \frac{m}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{s^3} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^3 \quad (5.27)$$

com,

$\bar{x}$ : média dos dados amostrais;

$s^2$ : variância dos dados amostrais;

$g$ : coeficiente de assimetria dos dados amostrais;

$m$ : total de dados amostrais.

Para calcular os valores de  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\mu}$ , e  $\hat{\sigma}$ , deve-se seguir os passos abaixo:

- (i) Igualar a eq. (5.27) com a eq. (5.24), aplicando algum método numérico, pois a equação resultante não possui solução explícita e determinar o valor de  $\hat{\xi}$ ;
- (ii) Igualar a eq. (5.26) com a eq. (5.23), substituir o valor calculado de  $\hat{\xi}$  e obter o valor de  $\hat{\sigma}$ ;
- (iii) Igualar a eq. (5.25) com a eq. (5.22), substituir os valores calculados previamente de  $\hat{\xi}$  e  $\hat{\sigma}$ , para calcular o valor de  $\hat{\mu}$ .

### 5.3 TESTES REALIZADOS PARA AVALIAR SE A ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS QUE DESCREVEM A FUNÇÃO GEV SE ADEQUA AOS DADOS

Para avaliar se os parâmetros que descrevem uma função GEV são adequados à série de dados utilizados em sua estimação, pode-se empregar métodos gráficos, ou seja, comparar o gráfico da função cumulativa de probabilidade da função GEV com sua distribuição empírica (PP-Plot, em inglês) ou ainda o comparar os dados amostrais com gráfico Quantil-Quantil da distribuição (QQ-Plot, em inglês) (CERESER, 2008).

Segundo Cereser (2008), para utilização dos métodos gráficos, considera-se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sejam realizações independentes de uma função de distribuição desconhecida  $G$ . Uma estimativa de  $G$ , que aqui será chamada de  $\hat{G}$ , pode ser obtida por algum método de estimação e deseja-se avaliar se os  $x_i$  são uma amostra aleatória de  $\hat{G}$ . Primeiro uma estimativa de um modelo arbitrário de  $G$  pode ser obtida empiricamente dos dados. Considera-se a série de dados observados ordenados, ou seja,  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Para qualquer  $x_i$ , a estimativa empírica da probabilidade de uma observação ser menor ou igual a  $x_i$  é  $\tilde{G}(x_i) = \frac{i}{n}$ . Para se ter  $\tilde{G}(x_n) = 1$ , se faz um pequeno ajuste em  $\tilde{G}(x_i)$ , escrevendo-a como:

$$\tilde{G}(x_i) = \frac{i}{n+1}, \text{ para } x_i \leq x < x_{i+1} \quad (5.28)$$

A função apresentada na eq. (5.28) pode ser utilizada para gerar o gráfico PP-Plot, com os pontos representados pelas coordenadas:

$$\left\{ \left( \hat{G}(x_i); \frac{i}{n+1} \right) : i = 1, \dots, n \right\} \quad (5.29)$$

Se a função GEV é um modelo razoável para distribuição dos dados, os pontos estarão alinhados a reta que passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ . Dessa forma, uma maneira de interpretar o gráfico é avaliar o quão distantes os pontos estão da reta. Quanto mais distante, menos adequada é a distribuição.

Outra maneira de avaliar graficamente o ajuste da função GEV aos dados é a construção do gráfico QQ-Plot, formado pelos pontos:

$$\left\{ \left( \hat{G}^{-1} \left( \frac{i}{n+1} \right); x_i \right) : i = 1, \dots, n \right\} \quad (5.30)$$

O nome do gráfico quantil-quantil deriva do fato que cada uma das quantidades  $x_i$  e  $\hat{G}^{-1} \left( \frac{i}{n+1} \right)$  representam o  $\left( \frac{i}{n+1} \right)$ -quantil da distribuição  $G$ .

Para esse caso, se a distribuição GEV for uma estimativa razoável de  $G$ , os pontos do gráfico quantil-quantil estarão sobre uma linha reta.

Além dos métodos gráficos, pode-se ainda verificar o ajuste da função GEV por meio de um teste estatístico, como por exemplo, o Teste de Kolmogorov-Smirnov, definido como:

$$D^+ = \max_i \left\{ \frac{i}{m} - G(m_i) \right\} \quad (5.31)$$

$$D^- = \max_i \left\{ G(m_i) - \frac{i-1}{m} \right\} \quad (5.32)$$

$$D = \max\{D^+, D^-\} \quad (5.33)$$

onde,

$m_i$ : são os máximos ordenados;

$G$ : função de distribuição GEV com os parâmetros de forma, localização e escala estimados.

Alguns valores para as estatísticas críticas dos testes  $D^+$ ,  $D^-$  e  $D$  para níveis de significância de 1% a 10% e para amostras de tamanho  $m = 40$  e  $m = \infty$  podem ser encontradas em Naghettini e Pinto (2007).

## 5.4 FLUXOGRAMA PARA ANÁLISE DE VALORES EXTREMOS

Como explicado no início deste capítulo, a análise de valores extremos realizada neste trabalho será feita com os resultados obtidos para deslocamento máximo da ponte após o dimensionamento do TMD.

Inicialmente, deve se gerar os dados com os deslocamentos máximos para cada veículo. Isso é feito no programa principal. Neste caso a modalidade de análise escolhida é “valores extremos” e como resultado será apresentado o arquivo com os dados dos deslocamentos máximos da ponte.

Tal arquivo de dados é utilizado em um outro *script* com um código desenvolvido em Octave seguindo toda a metodologia apresentada neste capítulo da tese. Os passos realizados pelo *script* responsável por desempenhar a função de fazer a análise de valores extremos dos deslocamentos máximos da ponte é apresentado na Figura 5.2.

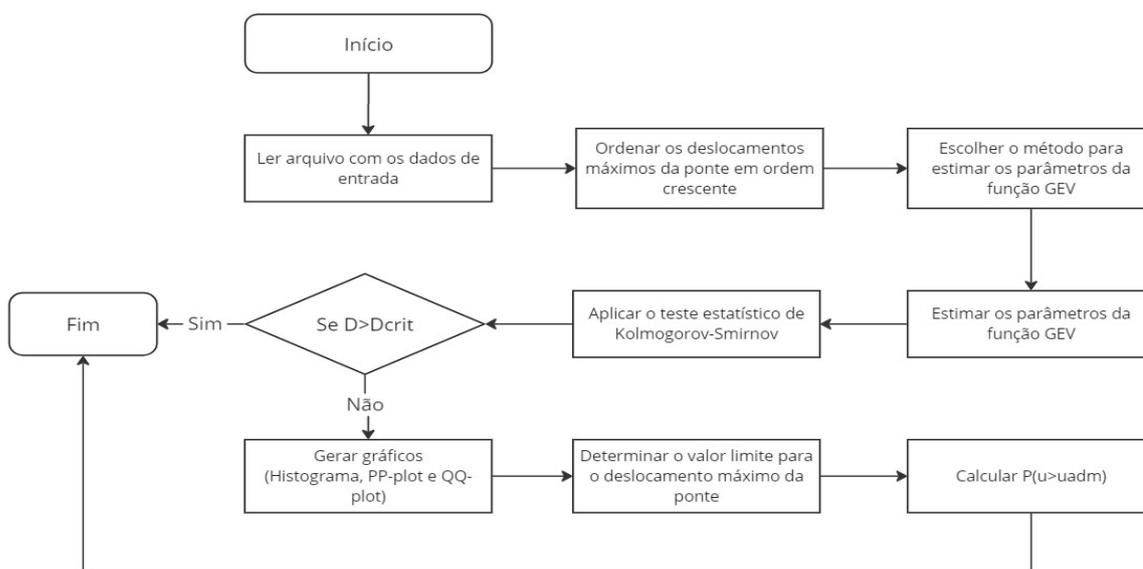


Figura 5.2 – Fluxograma utilizado para fazer a análise de valores extremos dos deslocamentos máximos da ponte

Observação: caso os dados utilizados para estimar os parâmetros da função GEV não passam no teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov ( $D > D_{crit}$ ), o programa se encerra, pois quando isso ocorre, significa estes dados não podem ser utilizados para representar uma função de distribuição de valores extremos. O *script* desenvolvido não contempla outros tipos de função de distribuição de probabilidade para fazer o ajuste dos dados caso isso ocorra.

## 6 TESTES E VERIFICAÇÕES DOS MODELOS PROPOSTOS

O Capítulo 6 deste trabalho dedica-se a apresentação de testes e verificações de toda a metodologia apresentada nos Capítulos 3 e 4.

As análises e resultados apresentados neste Capítulo estão divididas em três partes: a primeira parte consiste na realização de testes das matrizes deduzidas para o veículo 2S3 e testes com a resolução do problema de otimização, ambas utilizando a versão 2D do programa desenvolvido por Santos (2020). A segunda parte consiste em verificar e testar o modelo da ponte que será utilizado para a geração dos resultados deste trabalho por meio de uma análise estática, uma análise de frequências naturais e uma análise transiente, sendo que os resultados de cada análise foram comparados com os resultados obtidos pelo *software* comercial Ansys. Por fim, a terceira parte dedica-se à realização de uma análise dinâmica considerando a simulação de Monte Carlo da interação veículo-estrutura-pavimento para os modelos 3D desenvolvidos nessa tese.

### 6.1 VERIFICAÇÕES COM MODELOS 2D

#### 6.1.1 Frequências Naturais do Caminhão 2S3

A verificação das matrizes de massa e rigidez do veículo 2S3, deduzidas no item 3.2 do Capítulo 3, será feita por meio comparação dos resultados obtidos para frequências naturais do veículo na sub-rotina veículo do programa desenvolvido na linguagem Octave com o resultado da análise modal feita *software* Ansys.

O problema de autovalores e autovetores que deve ser resolvido com a finalidade de obter as frequências naturais do veículo é expresso pela equação:

$$|\mathbf{K}_v - \omega_v^2 \mathbf{M}_v| = 0 \quad (6.1)$$

onde,

$\mathbf{M}_v$  e  $\mathbf{K}_v$ : são as matrizes de massa e rigidez do veículo, respectivamente;

$\omega_v$ : frequências naturais do veículo, em rad/s.

No programa em Octave utilizado com a finalidade de resolver o problema apresentado na eq. (6.1) utilizou-se a função “*eig*”, que calcula os autovalores e autovetores generalizados de uma matriz simétrica e positiva definida utilizando a fatoração de Cholesky da matriz de massa  $k$ . Para o modelo desenvolvido no *software* Ansys, o cálculo dos autovalores e autovetores foi feito utilizando o método de Block Lanczos de sua seção de análise modal.

Em relação aos dados do veículo, seus valores foram adaptados de Rossigali (2013) e Metz (2019) e estão listados na Tabela 6.1. Esses dados se referem ao modelo 2D do veículo 2S3, mas também podem ser utilizados para definir as propriedades do modelo 3D desse veículo.

Tabela 6.1 – Dados do veículo 2S3

$m_{s1}$ (kg)	9.000
$m_{s2}$ (kg)	19.120
$I_{xv1}$ (kgm <sup>2</sup> )	15.937,50
$I_{xv2}$ (kgm <sup>2</sup> )	94.208,064
$m_{p1}$ (kg)	640
$m_{p2} = m_{p3} = m_{p4} = m_{p5}$ (kg)	1.060
$k_{s1}$ (kN/m)	580
$k_{s2} = k_{s3} = k_{s4} = k_{s5}$ (kN/m)	1.180
$k_{p1}$ (kN/m)	1.680
$k_{p2} = k_{p3} = k_{p4} = k_{p5}$ (kN/m)	3.360
$c_{s1}$ (kNs/m)	6
$c_{s2} = c_{s3} = c_{s4} = c_{s5}$ (kNs/m)	12
$c_{p1}$ (kNs/m)	2
$c_{p2} = c_{p3} = c_{p4} = c_{p5}$ (kNs/kg)	4
$L_1$ (m)	1,83
$L_2$ (m)	2,37
$L_3$ (m)	1,13
$L_4$ (m)	2,37
$L_5$ (m)	3,62
$d_{11}$ (m)	2,05
$d_{21}$ (m)	5,27

Fonte: adaptado de Metz (2019)



### 6.1.2 Teste com um Problema de Otimização do Sistema de Controle de Vibrações de uma Ponte

Após a validação das matrizes que compõe a equação de movimento do modelo matemático do caminhão 2S3, realizou-se um teste da resolução de um problema de otimização do sistema de controle de vibração de uma ponte. Os veículos considerados nessa análise foram o 3C e o 2S3. O que motivou a escolha de veículos com tipologias diferentes deve-se a avaliação da resposta dinâmica da estrutura quando esta é submetida a passagem de um veículo rígido ou articulado e a influência disso na performance da solução do problema de otimização.

Embora não seja feita nenhuma menção a equação de movimento do veículo 3C neste Capítulo, sua dedução e o formato de suas matrizes de massa, amortecimento e rigidez podem ser encontrados em Santos (2020).

Quanto à estrutura, seus dados, como sua geometria e propriedades de seus materiais foram adaptados de Miguel *et al.* (2016) para que a frequência natural da estrutura apresentasse valor próximo a 10,4 Hz, que é a frequência natural dos pneus do veículo.

Sendo assim, a ponte do problema foi modelada com elementos finitos de viga de 0,5 m de comprimento e o programa utilizado nas simulações foi desenvolvido e previamente testado e validado por Santos (2020). Por esse motivo optou-se por fazer uma análise dinâmica 2D do sistema veículo-estrutura-pavimento-TMD.

Nessa análise foi considerado apenas um perfil de pavimento de classe C, conforme mostra a Figura 6.2. A velocidade dos veículos foi considerada constante, com valor de 90 km/h, a integração da equação de movimento foi feita com o emprego do Método de Newmark, o passo de tempo utilizado na integração foi de 0,002 s e o algoritmo de otimização utilizado foi o HBA.

Para cada veículo foram feitas uma análise estática (sem a consideração das forças que o perfil de irregularidades do pavimento causa na ponte e no veículo) e quatro análises dinâmicas, uma sem o TMD e as outras três considerando a instalação do TMD com seus parâmetros calculados por meio do algoritmo HBA e das equações analíticas de Den Hartog (1956) e Warburton (1982), apresentadas no item 3.5.1.

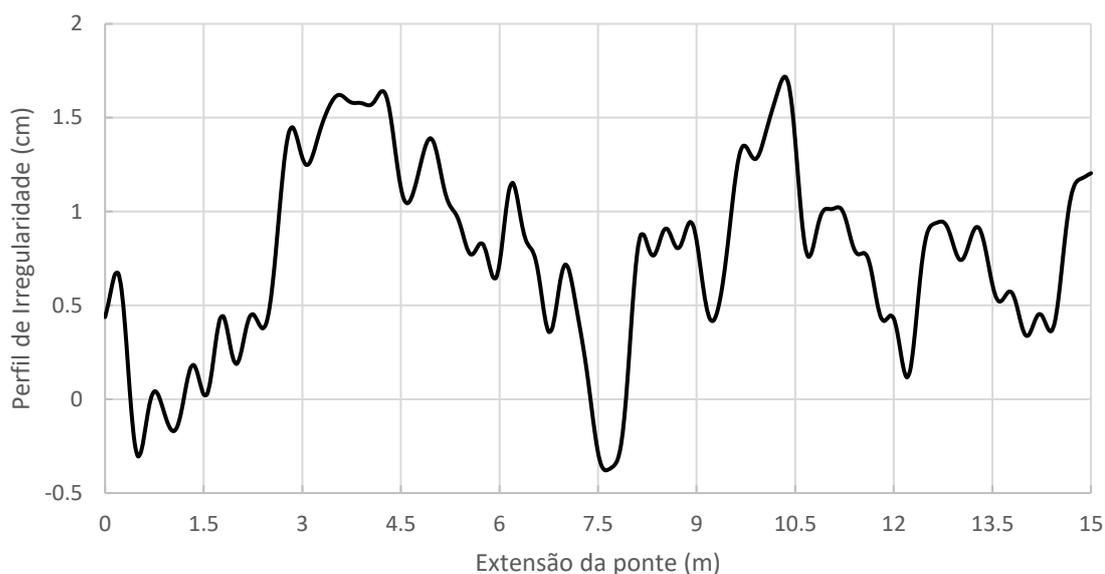


Figura 6.2 – Perfil de pavimento utilizado no problema de otimização

Dessa maneira, o problema de otimização que foi resolvido com o algoritmo HBA é descrito pela equação:

$$\begin{aligned}
 & \text{Encontrar} && \vec{x} = [k_{TMD}, c_{TMD}] \\
 & \text{Minimize} && u_{max}(\vec{x}) \\
 & \text{Sujeito a} && 0 \leq k_{TMD} \leq 3.10^8 \text{ N/m} \\
 & && 0 \leq c_{TMD} \leq 3.10^5 \text{ Ns/m} \\
 & && m_{TMD} = 0,03M_e \text{ kg}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ressalta-se que para a busca da solução ótima no algoritmo HBA foram utilizados 15 agentes de busca (“texugos”) e foram executadas 100 iterações, o que totaliza 1.500 operações.

Em relação a ponte sua seção transversal é apresentada na Figura 6.3 e seus dados referentes a geometria e materiais estão listados na Tabela 6.3. Os dados do veículo 3C, esses estão listados na Tabela 6.4 e os dados do veículo 2S3 são os mesmos utilizados na Tabela 6.1.

Tabela 6.3 – Dados da ponte

$E$ (GPa)	$A$ (m <sup>2</sup> )	$I$ (m <sup>4</sup> )	$L$ (m)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$f_n$ (Hz)	$\zeta$ (%)
26	2,24	0,48	15	2.500	10,422	3

Fonte: adaptado de Miguel *et al.* (2016)



Figura 6.3 – Seção transversal (a) e vista longitudinal (b) da ponte utilizada no problema de otimização em 2D

Tabela 6.4 – Dados do veículo 3C

$m_{s1}$ (kg)	10.000
$I_{xv1}$ (kgm <sup>2</sup> )	35.000
$m_{p1}$ (kg)	320
$m_{p2} = m_{p3}$ (kg)	530
$k_{s1}$ (kN/m)	432
$k_{s2} = k_{s3}$ (kN/m)	585
$k_{p1}$ (kN/m)	840
$k_{p2} = k_{p3}$ (kN/m)	1.680
$c_{s1}$ (kNs/m)	3
$c_{s2} = c_{s3}$ (kNs/m)	6
$c_{p1} = c_{p2} = c_{p3}$ (Ns/kg)	1
$L_1$ (m)	4
$L_2$ (m)	1
$L_3$ (m)	2,5
$f_n$ (Hz)	1,671; 2,354; 10,138; 10,409; 10,482

Fonte: Miguel e Santos (2021)

Fazendo a análise para os casos estático e dinâmico de ambos os veículos, os resultados obtidos estão listados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Resultados das análises estáticas e dinâmicas considerando os veículos 3C e 2S3

Veículo	$u_{est}$ (mm)	$u_{din}$ (mm)	FAD	Civ
3C	0,5423	0,7451	1,37	1,33
2S3	1,0837	1,5152	1,40	

Observação: o fator de amplificação dinâmica (FAD) é calculado pela razão entre o deslocamento dinâmico máximo ( $u_{din}$ ) e o deslocamento estático máximo ( $u_{est}$ ) da estrutura conforme a equação:

$$FAD = \frac{u_{din}}{u_{est}} \quad (6.3)$$

A norma NBR 7188 (ABNT, 2024) possui uma expressão para calcular um coeficiente de impacto que serve para majorar o efeito da carga dos veículos. Tal coeficiente é calculado como o produto de um coeficiente de impacto vertical, um coeficiente relativo ao número de faixas de rolamento existentes na ponte e um coeficiente de impacto adicional.

Dos três coeficientes citados, o que possui um significado físico que mais se aproxima do FAD calculado pela eq. (6.3) é o coeficiente de impacto vertical ( $Civ$ ), logo as comparações entre os resultados das análises dinâmicas com a NBR 7188 (ABNT, 2024) serão feitas em relação a esse coeficiente. Além disso, o  $Civ$  é obtido por meio da expressão:

$$Civ = 1 + 1,06 \left( \frac{20}{L + 50} \right) \quad (6.4)$$

Sendo,  $L$  o vão da ponte, em metros.

Analisando os resultados da Tabela 6.5 verifica-se que em ambas as situações consideradas, o FAD foi superior ao valor recomendado pela norma NBR 7188 (ABNT, 2024), pois as frequências naturais desses veículos possuem valores próximos à frequência natural da ponte, o que caracteriza uma situação de ressonância da resposta, sendo que o veículo 2S3 apresentou FAD ligeiramente superior ao obtido pelo veículo 3C. Na Figura 6.4 apresenta-se o espectro de potência do deslocamento no tempo do nó central da ponte para cada um dos veículos considerados.

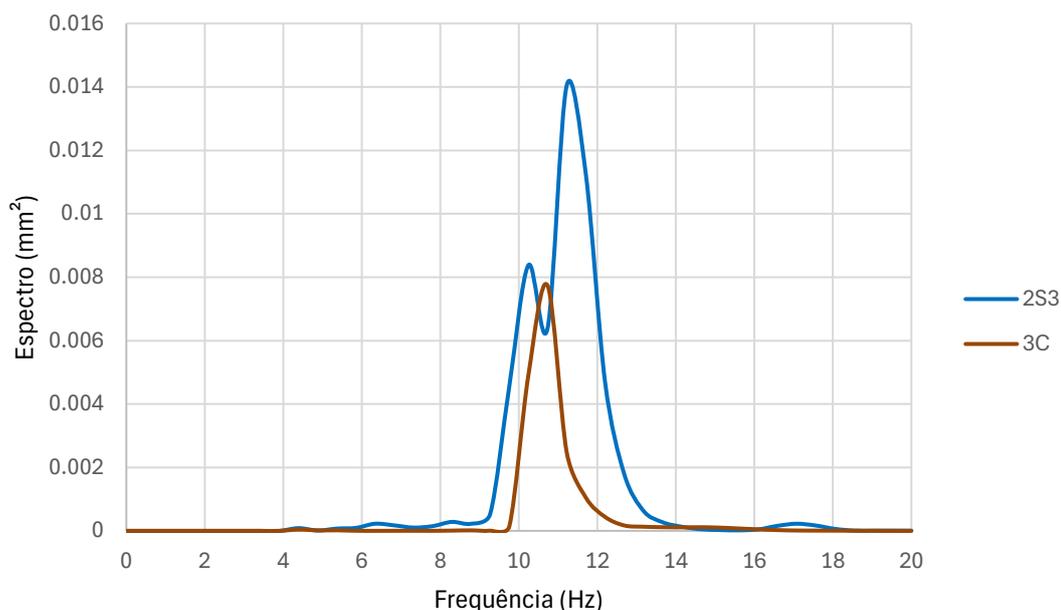


Figura 6.4 – Espectro de potência para deslocamento no tempo do nó central da ponte com pavimento irregular para as análises sem a instalação do TMD feitas com os veículos 3C e 2S3

Buscando mitigar o efeito da ressonância no deslocamento máximo da ponte, foi feita uma análise para dimensionar os parâmetros de um TMD instalado no centro do vão da ponte. Para isso foi utilizado o algoritmo de otimização HBA e as equações de Den Hartog (1956) e Warburton (1982). Os resultados dessas análises estão apresentados nas Tabelas 6.6 e 6.7, respectivamente. As curvas com os deslocamentos máximos e deslocamento no tempo da estrutura para cada veículo estão nas Figuras 6.5 a 6.8 para as análises estática (curvas amarelas), dinâmica sem TMD (curvas azuis), dinâmica com TMD dimensionado pelo método HBA (curvas laranjas), dinâmica com TMD dimensionado pelo método DH (curvas verdes) e dinâmica com TMD dimensionado pelo método WB (curvas bordô). As curvas de convergência da função objetivo de ambos os veículos estão nas Figuras 6.9 e 6.10, respectivamente.

Tabela 6.6 – Resultados da análise dinâmica para os veículos 3C e 2S3 considerando a instalação de um TMD dimensionado pelo algoritmo HBA

Veículo	$u_{TMD}(mm)$	$FAD$	$m_{TMD}(kg)$	$c_{TMD}(Ns/m)$	$k_{TMD}(kN/m)$	$f_{sint}(Hz)$
3C	0,5858	1,08	2.520	0,00	12.917,14	11,39
2S3	1,2154	1,12	2.520	0,00	15.018,35	12,29

Tabela 6.7 – Resultados da análise dinâmica para os veículos 3C e 2S3 considerando a instalação de um TMD dimensionado pelos métodos de Den Hartog (DH) e Warburton (WB)

Método	$m_{TMD}$ (kg)	$c_{TMD}$ (kNs/m)	$k_{TMD}$ (kN/m)	$f_{sint}$ (Hz)	Veículo	$u_{TMD}$ (mm)	$FAD_{TMD}$
DH	2.520	45,36	9.617,22	9,83	3C	0,6553	1,21
					2S3	1,4216	1,31
WB	2.520	36,76	9.328,71	9,68	3C	0,6574	1,21
					2S3	1,4416	1,33

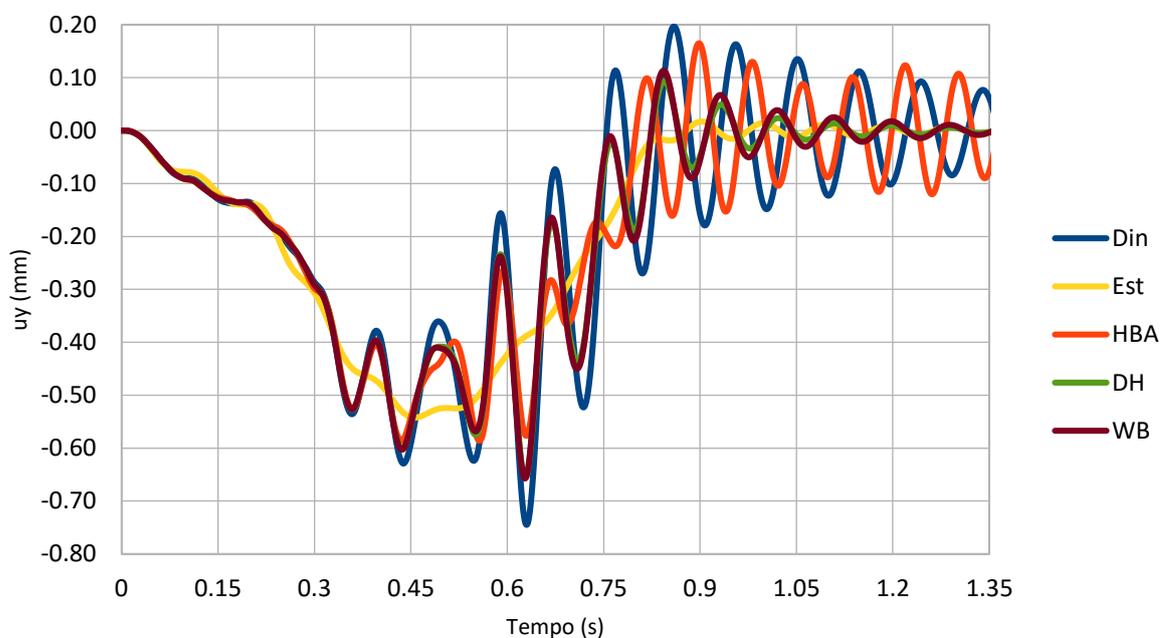


Figura 6.5 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C

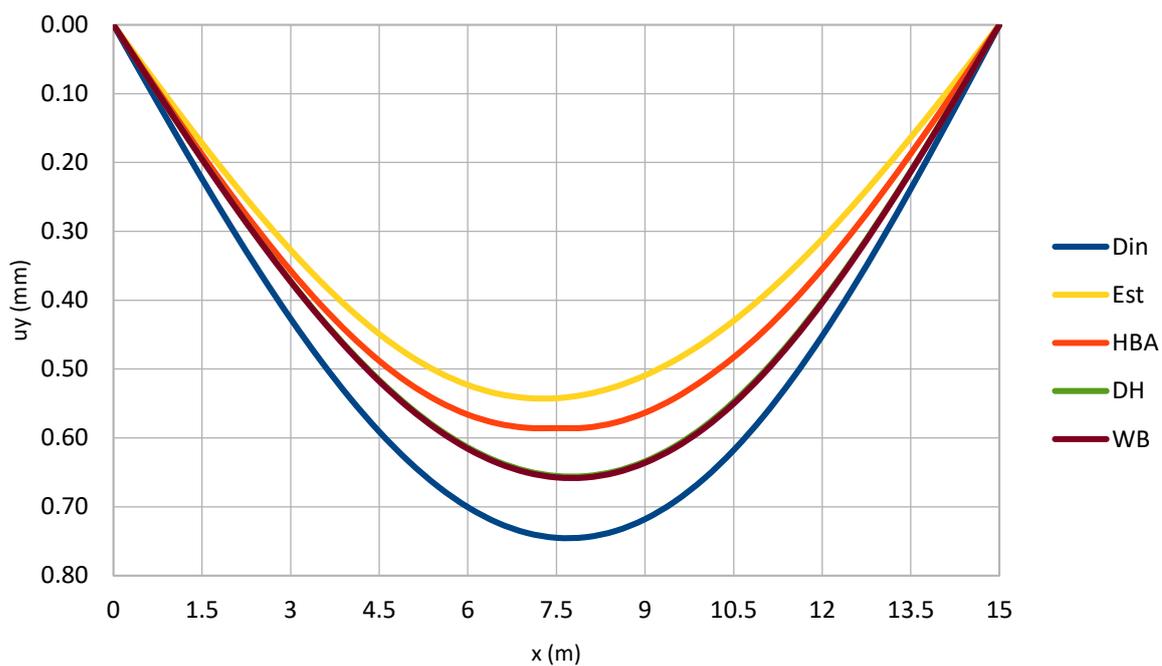


Figura 6.6 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C

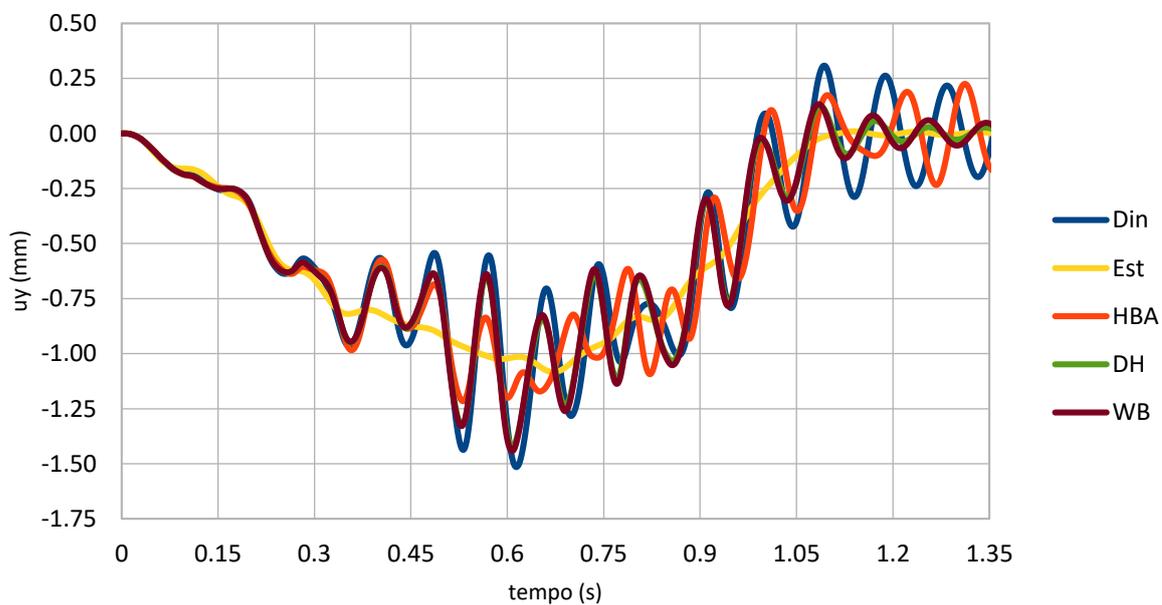


Figura 6.7 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3

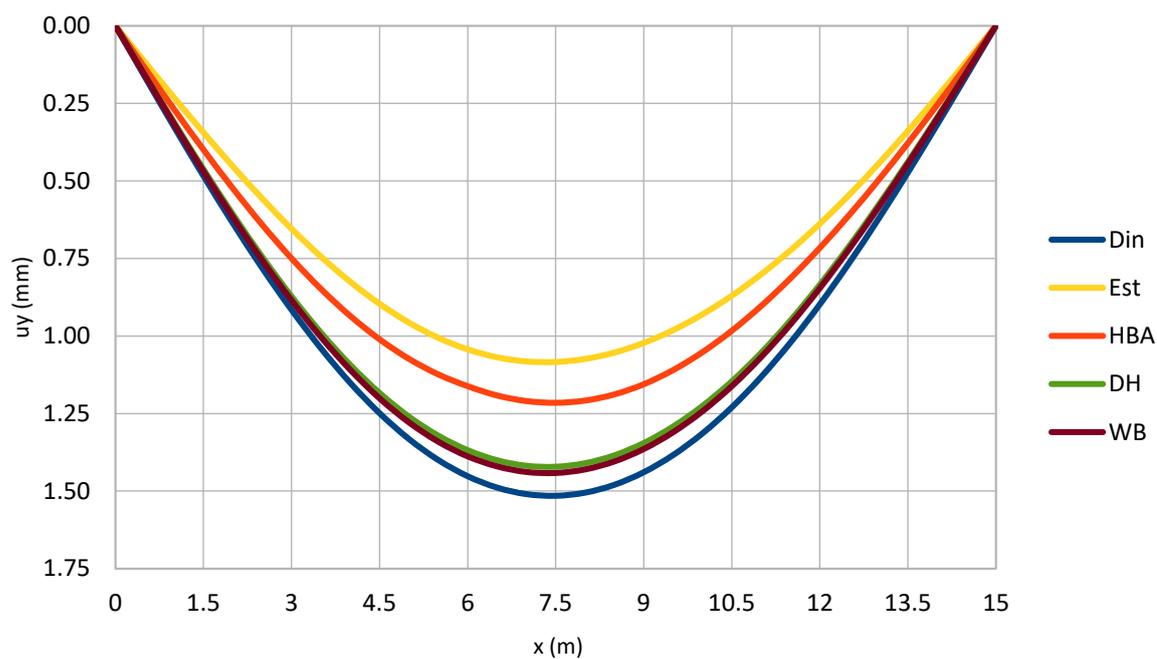


Figura 6.8 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3

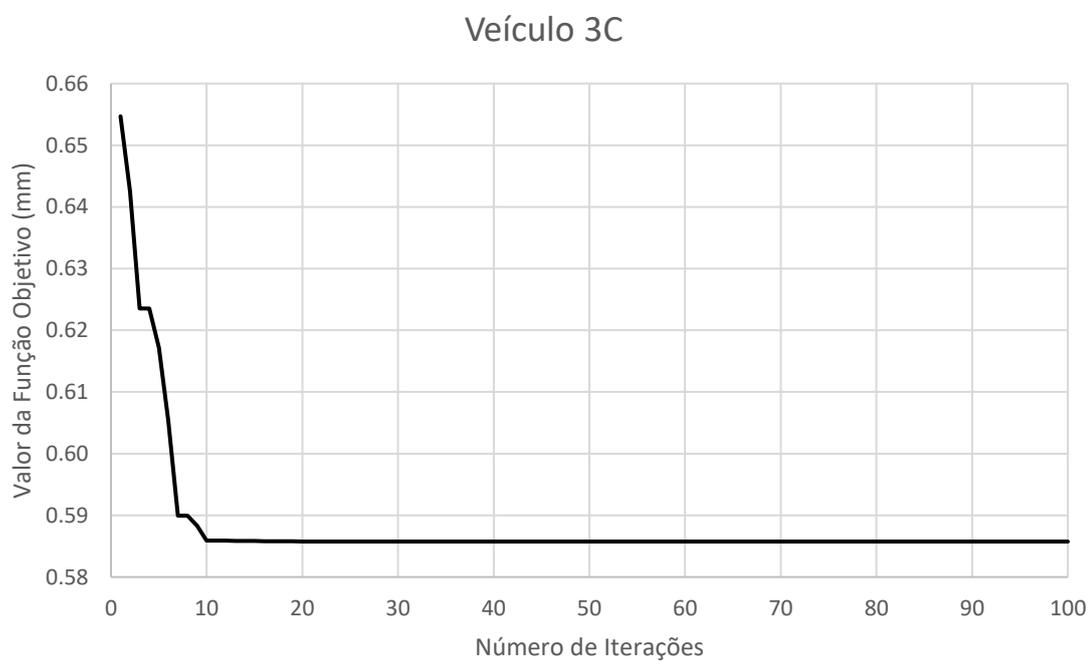


Figura 6.9 – Curva de convergência da função objetivo para o veículo 3C

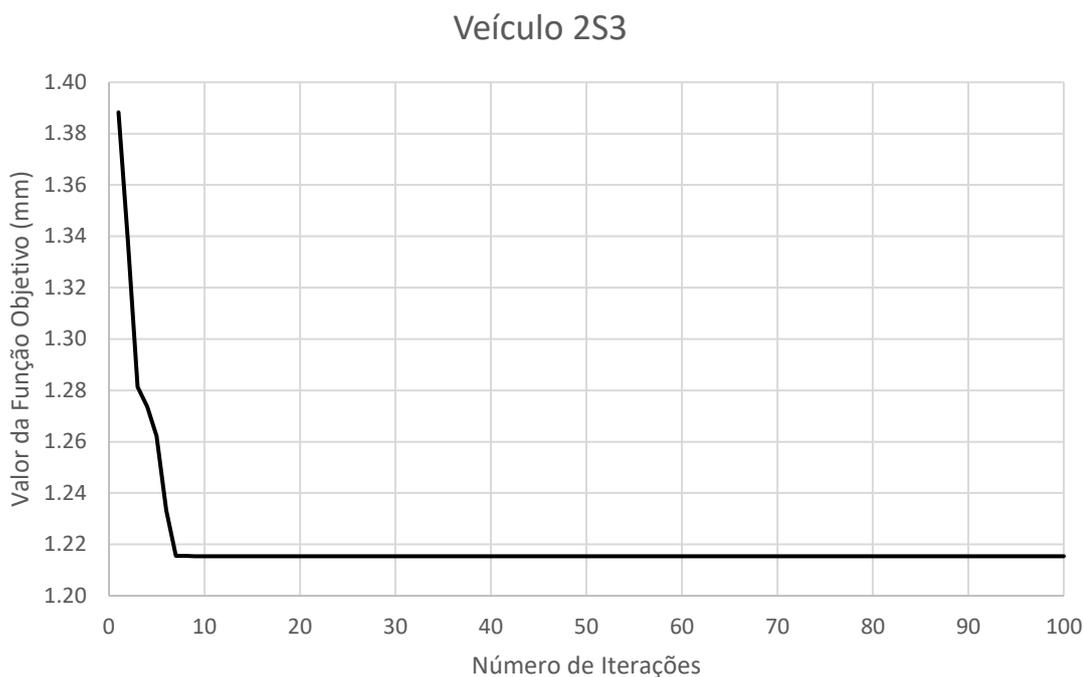


Figura 6.10 – Curva de convergência da função objetivo para o veículo 2S3

Como pode ser verificado nas Tabelas 6.6 e 6.7, a instalação de um TMD, independentemente do método utilizado para dimensionar seus parâmetros, fez com que o deslocamento máximo no centro da ponte apresentasse redução. Como era esperado, a redução foi mais significativa quando os parâmetros do TMD foram dimensionados com auxílio do algoritmo HBA, sendo que a redução obtida no deslocamento máximo da ponte para os veículos 3C e 2S3 foram de 21,38% e 19,79%, respectivamente. Tal fato comprova a eficiência desse tipo de dispositivo no controle de vibrações, ainda mais quando o seu dimensionamento é feito por meio de um processo de otimização.

Além disso, as metodologias propostas por Den Hartog (1956) e Warburton (1982) levam em conta apenas dados relativos à estrutura (massa e frequência natural) para dimensionar os parâmetros do TMD e a solução obtida serve para todos os tipos de veículo que trafegam na ponte, enquanto o dimensionamento utilizando otimização também leva em consideração o tipo do veículo que trafega pela ponte, o que torna possível obter uma solução personalizada para cada veículo e conseqüentemente uma redução mais significativa para o deslocamento máximo da estrutura.

Portanto, com os resultados apresentados, a utilização do algoritmo HBA cumpriu sua função no dimensionamento dos parâmetros de um TMD, garantindo que o deslocamento máximo causado pela passagem de veículos na ponte fosse reduzido. Sendo assim, esse algoritmo será utilizado nas próximas validações e nas análises principais da tese.

### 6.1.3 Teste com um Problema de Otimização do Sistema de Controle de Vibrações Considerando a Existência de uma Depressão ou Ressalto na Entrada da Ponte

Conforme se verificou nos testes realizados do item 6.1.2, o uso de um TMD para atenuar as vibrações pela passagem dos veículos em um perfil de pavimento irregular se mostrou muito satisfatório.

Visando mostrar a eficiência do uso desses dispositivos para situações como por exemplo, a existência de um ressalto ou de uma depressão, que geralmente são observados nos locais como a entrada ou a saída da ponte e onde existe uma junta de dilatação, o teste de otimização proposto nessa etapa consiste em dimensionar um TMD de forma que o deslocamento máximo no centro da ponte seja o menor possível (ver equação 6.2).

A fim de realizar as análises dinâmicas propostas, tanto a ponte quanto os veículos serão os mesmos utilizados no item 6.1.2. A diferença entre a análise aqui apresentada e o item anterior é justamente o perfil de pavimento utilizado. Tanto uma depressão quanto um ressalto podem ser modeladas de acordo com a expressão proposta por Pesterev *et al.* (2004). O que difere um do outro na eq. (6.5) é a utilização de um sinal negativo, ou seja, a depressão recebe o sinal negativo enquanto o ressalto não possui esse sinal em sua equação.

$$v_b(x) = \begin{cases} -\frac{a}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{b}\right) \right], & 0 \leq x \leq b \\ 0, & x < 0 \text{ ou } x > b \end{cases} \quad (6.5)$$

sendo que,

$a$ : profundidade da depressão ou altura do ressalto;

$x$ : posição da roda do veículo;

$b$ : comprimento da depressão ou do ressalto.

Em relação ao comprimento da depressão ou do ressalto, seu valor pode ser estimado conforme a expressão:

$$b = \frac{v}{f_n} \quad (6.6)$$

onde,

$v$ : velocidade com que o veículo trafega na ponte;

$f_n$ : frequência natural da ponte.

A velocidade dos veículos foi mantida em 90 km/h e a frequência natural da ponte vale 10,42 Hz. Com essas informações conclui-se que a largura da depressão na entrada deve medir aproximadamente 2,4 m. Entretanto, foram feitas algumas análises com os veículos 3C e 2S3 onde variou-se a largura do obstáculo entre 2m e 2,4 m a fim de verificar qual o valor que produz os maiores deslocamento no centro da ponte. Os resultados dessas análises estão apresentados na Tabela 6.8 Para os ambos os veículos.

Tabela 6.8 – Testes realizados com os veículos 3C e 2S3 para definição da largura do obstáculo na entrada da ponte com 2 cm de elevação que produz o maior deslocamento máximo

$L(m)$		2	2,1	2,2	2,3	2,4
$u_{din}(mm)$	3C	0,9083	0,9099	0,9093	0,9067	0,9020
	2S3	1,2603	1,2570	1,2523	1,2461	1,2385

Observando os resultados da Tabela 6.8 é possível perceber que à medida que a largura do obstáculo aumenta, o deslocamento máximo da ponte diminui. O valor máximo para esse deslocamento acontece quando a largura do obstáculo é 2,1 m para o veículo 3C e 2 m para o veículo 2S3. Como a diferença nos resultados obtidos para a largura de 2 m e 2,1 m foi mínima para ambos os veículos, definiu-se que tanto para a depressão quanto para o ressalto, o valor considerado para largura será 2,1 m.

Após definir a largura da depressão, foram realizados mais alguns testes para determinar em qual profundidade ou elevação o obstáculo na entrada da ponte produz deslocamentos no

centro da ponte que superem o valor do coeficiente de impacto vertical calculado com a eq. (6.4). Os resultados desses testes encontram-se na Tabela 6.9.

Tabela 6.9 – Testes realizados com os veículos 3C e 2S3 para definição da profundidade ou a elevação do obstáculo na entrada da ponte que produz o maior deslocamento máximo

Veículo	$a(cm)$	1	2	3	4	5
3C	$u_{din}(mm)$	0,7232	0,9099	1,0966	1,2832	1,4699
	$FAD$	1,33	1,68	2,02	2,37	2,71
2S3	$u_{din}(mm)$	1,1515	1,2570	1,3648	1,5007	1,6569
	$FAD$	1,06	1,16	1,26	1,38	1,53

Conforme pode-se observar na Tabela 6.9, uma elevação de 2 cm faz com que o deslocamento máximo na ponte para passagem do veículo 3C seja 68% maior que seu deslocamento estático. Por outro lado, a elevação que faz com que o FAD do veículo 2S3 supere o  $Civ$  da norma é 4 cm.

Dessa forma, nas análises realizadas com o veículo 3C será considerado que o obstáculo na entrada da ponte possui uma elevação ou profundidade de 2 cm e para o veículo 2S3 essa elevação ou profundidade será de 5 cm, sendo que para todas as situações analisadas, a largura do obstáculo será de 2,1 m.

### 6.1.3.1 Resultados do Teste de Otimização do Sistema de Controle de Vibrações Considerando uma Depressão na Entrada da Ponte

Depois de realizar as análises com e sem o uso de um TMD para uma depressão existente na entrada da ponte, são apresentados nas Tabelas 6.10 e 6.11 os resultados obtidos para cada veículo considerado.

Tabela 6.10 – Resultados das análises estáticas e dinâmicas dos veículos 3C e 2S3 para a situação da depressão

Veículo	$u_{est}(mm)$	$u_{din}(mm)$	$FAD$	$Civ$
3C	0,5423	0,9099	1,68	1,33
2S3	1,0837	1,6569	1,53	

Tabela 6.11 – Resultados da análise dinâmica com a depressão na entrada da ponte para os veículos 3C e 2S3 considerando a instalação de um TMD dimensionado pelos métodos HBA, de Den Hartog (DH) e Warburton (WB)

Veículo	3C			2S3		
	HBA	DH	WB	HBA	DH	WB
$u_{max}(mm)$	0,6256	0,7328	0,7378	1,3506	1,7290	1,7708
$FAD$	1,15	1,35	1,36	1,25	1,60	1,63
$m_{TMD}(kg)$	2.520	2.520	2.520	2.520	2.520	2.520
$c_{TMD}(kNs/m)$	0,00	45,36	36,76	7,5141	45,36	36,76
$k_{TMD}(kN/m)$	11.157,04	9.617,22	9.328,71	14.196,32	9.617,22	9.328,71
$f_{sint}(Hz)$	10,59	9,83	9,68	11,95	9,82	9,68

As curvas com o deslocamento no tempo para o nó central e os deslocamentos máximos nos nós da ponte para cada veículo considerado são apresentadas da Figura 6.11 até a Figura 6.14, para as análises estática (curvas amarelas), dinâmica sem TMD (curvas azuis), dinâmica com TMD dimensionado pelo método HBA (curvas laranjas), dinâmica com TMD dimensionado pelo método DH (curvas verdes) e dinâmica com TMD dimensionado pelo método WB (curvas bordô).

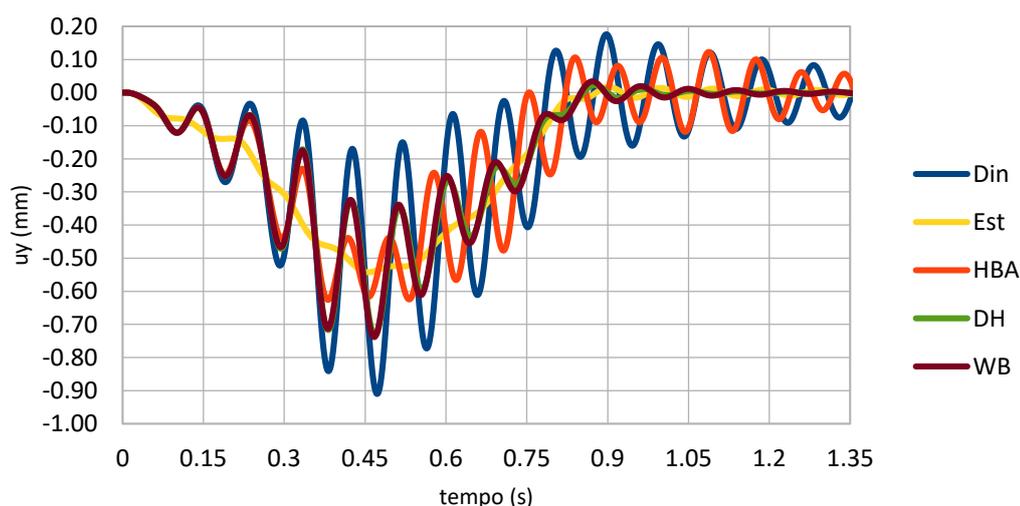


Figura 6.11 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C considerando como pavimento uma depressão

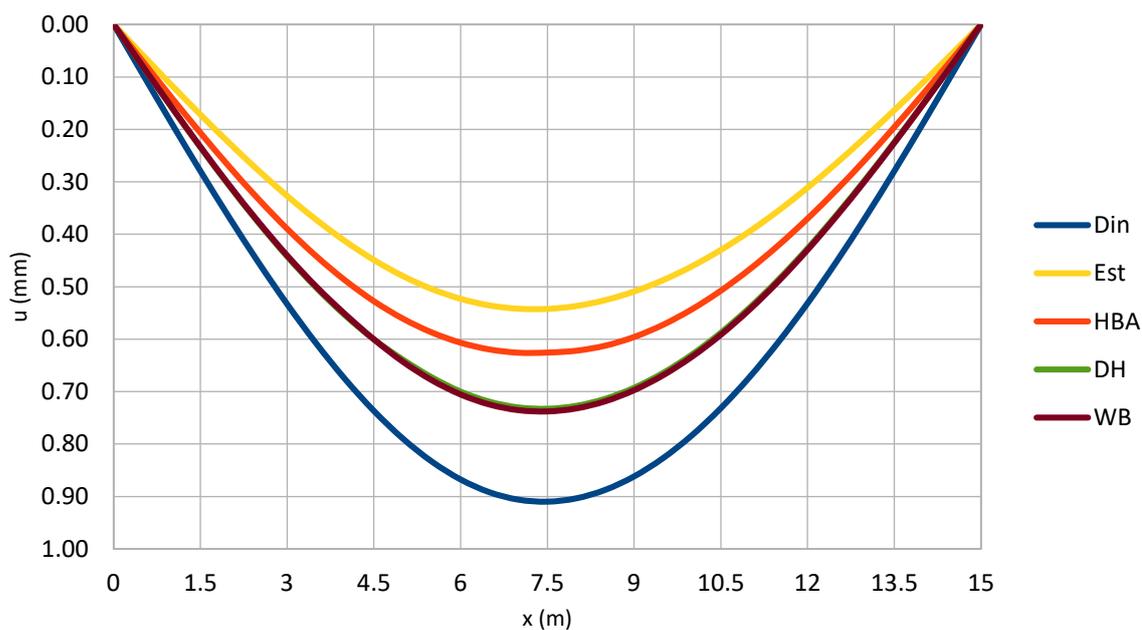


Figura 6.12 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C considerando como pavimento uma depressão

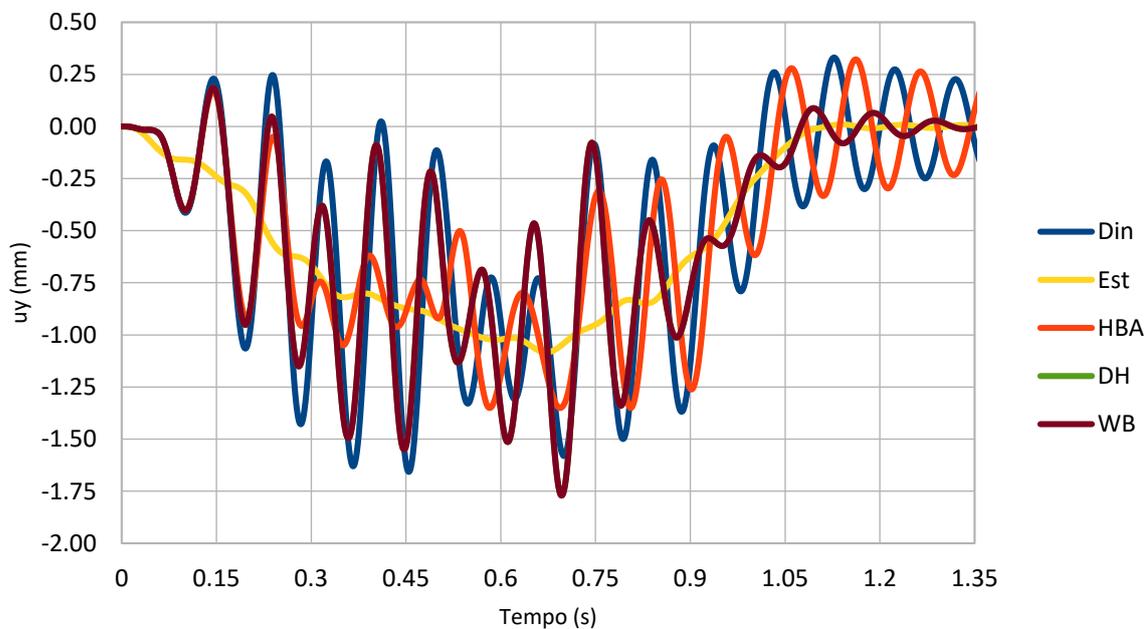


Figura 6.13 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 considerando como pavimento uma depressão

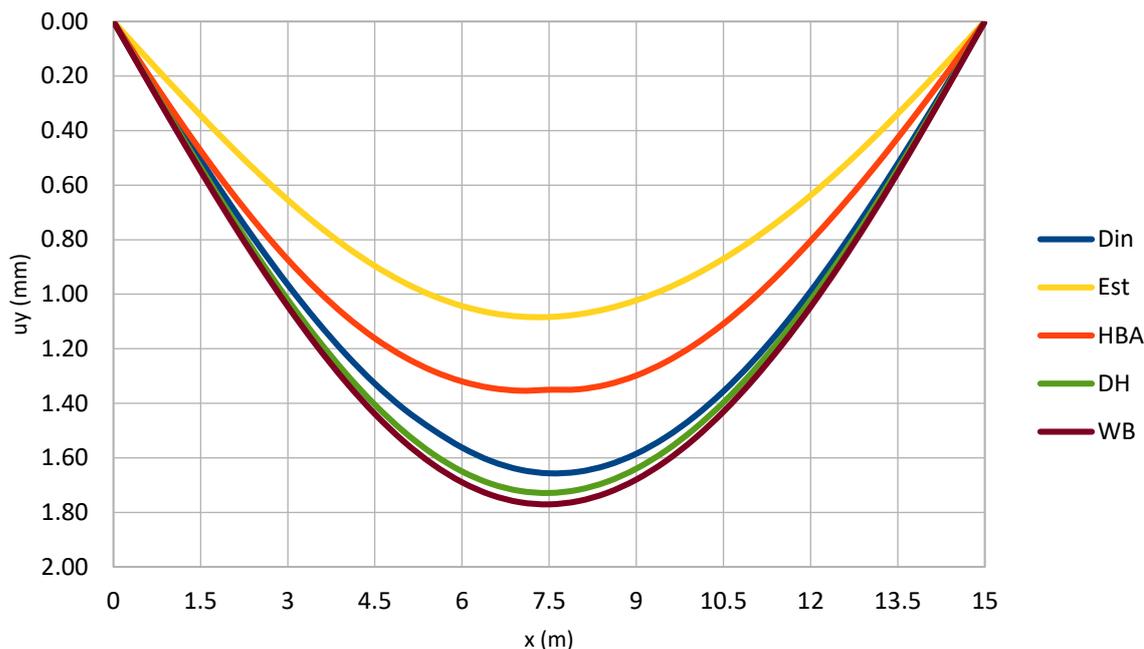


Figura 6.14 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 considerando como pavimento uma depressão

Conforme pode-se notar com os resultados apresentados, as equações analíticas de Den Hartog e Warburton apresentaram redução no deslocamento máximo da ponte para a situação em que o veículo 3C foi analisado. Isso ocorreu porque as frequências naturais desse veículo possuem valores mais próximos à frequência natural da ponte, logo, a resposta dinâmica foi influenciada pela ressonância, pois conforme mostra o espectro de potência da Figura 6.15, a frequência que mais contribui na resposta dinâmica está próxima a frequência natural da estrutura (10,42 Hz), logo o TMD instalado ficou sintonizado a essa frequência, reduzindo consideravelmente o deslocamento máximo da estrutura para esse veículo.

Já a otimização dos parâmetros do TMD feitas com o algoritmo HBA funcionou para os dois veículos analisados, sendo que, novamente a otimização foi o destaque na redução do deslocamento máximo da ponte. Para as simulações com os veículos 3C e 2S3, essa redução foi de 31,25% e 18,49%, respectivamente.

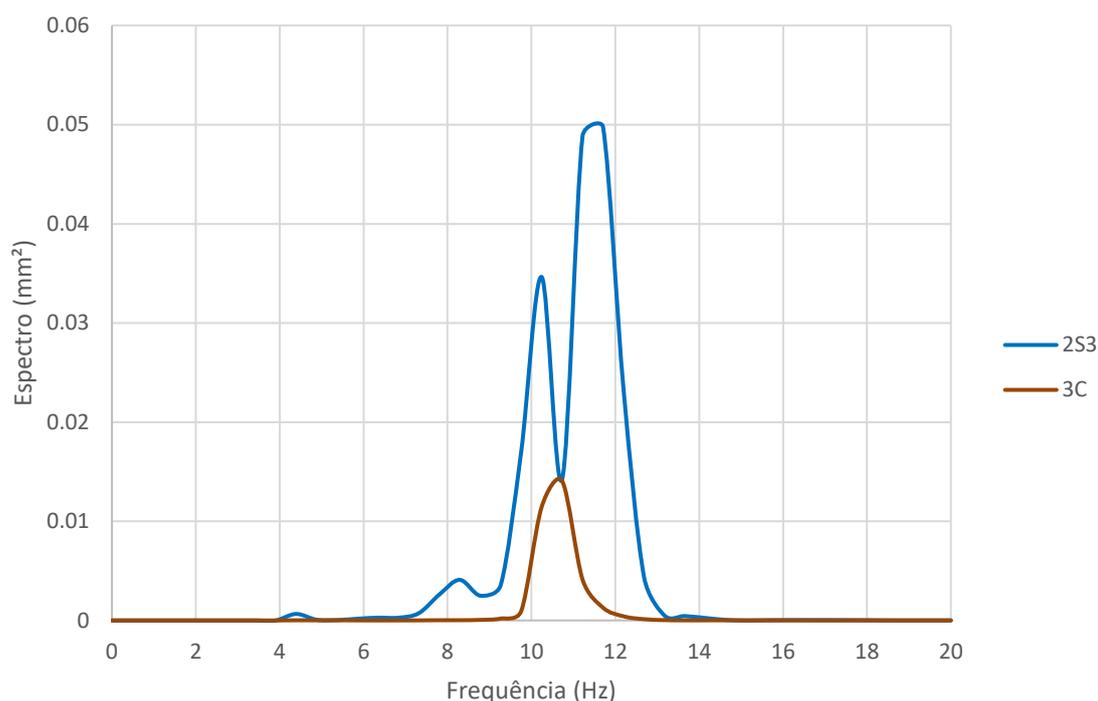


Figura 6.15 – Espectro de potência para o deslocamento no tempo do nó central da ponte com uma depressão em sua entrada para as análises sem a instalação do TMD feitas com os veículos 3C e 2S3

### 6.1.3.2 Resultados do Teste de Otimização do Sistema de Controle de Vibrações Considerando um Ressalto na Entrada da Ponte

Após a realização das análises com e sem a instalação de um TMD para um ressalto existente na entrada da ponte, são apresentados nas Tabelas 6.12 e 6.13 os resultados obtidos para os veículos considerados.

Tabela 6.12 – Resultados das análises estáticas e dinâmicas dos veículos 3C e 2S3 para a situação do ressalto

<i>Veículo</i>	$u_{est}(mm)$	$u_{din}(mm)$	<i>FAD</i>	<i>Civ</i>
3C	0,5423	0,8995	1,66	1,33
2S3	1,0837	1,8252	1,68	

Tabela 6.13 – Resultados da análise dinâmica com o ressalto na entrada da ponte para os veículos 3C e 2S3 considerando a instalação de um TMD dimensionado pelos métodos HBA, de Den Hartog (DH) e Warburton (WB)

Veículo	3C			2S3		
	HBA	DH	WB	HBA	DH	WB
$u_{max}(mm)$	0,5989	0,7130	0,7248	1,4134	1,8070	1,8416
$FAD$	1,10	1,31	1,34	1,30	1,67	1,70
$m_{TMD}(kg)$	2.520	2.520	2.520	2.520	2.520	2.520
$c_{TMD}(kNs/m)$	9,0581	45,36	36,76	11,3533	45,36	36,76
$k_{TMD}(kN/m)$	12.192,41	9.617,22	9.328,71	13.335,25	9.617,22	9.328,71
$f_{sint}(Hz)$	11,07	9,83	9,68	11,58	9,82	9,68

A partir das Figuras 6.16 até 6.19, são apresentadas as curvas com os deslocamentos máximos nos nós da ponte e o deslocamento no tempo para o nó central da ponte para cada veículo considerado nas análises estática (curvas amarelas), dinâmica sem TMD (curvas azuis), dinâmica com TMD dimensionado pelo método HBA (curvas laranjas), dinâmica com TMD dimensionado pelo método DH (curvas verdes) e dinâmica com TMD dimensionado pelo método WB (curvas bordô).

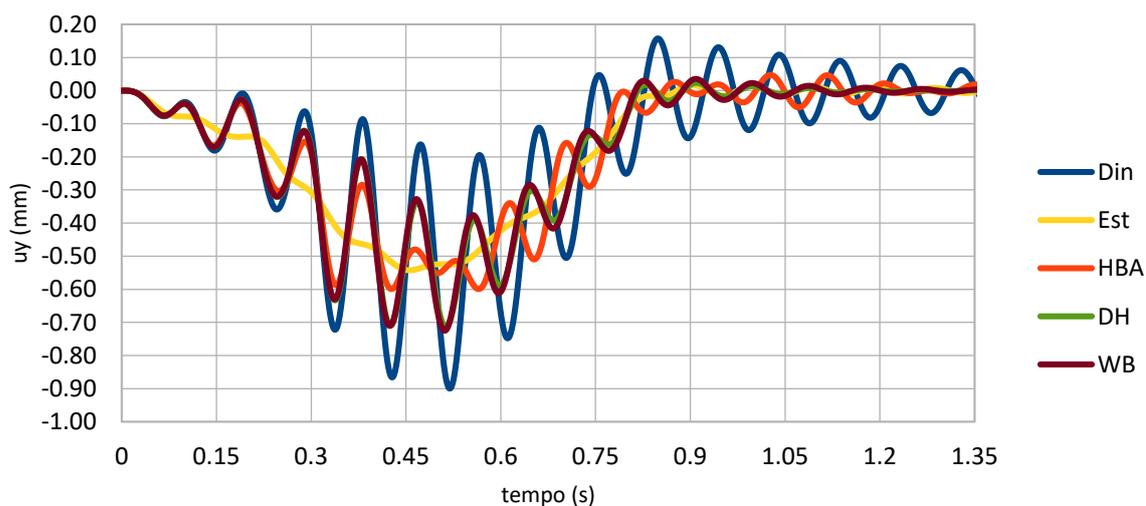


Figura 6.16 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 3C considerando como pavimento um ressalto

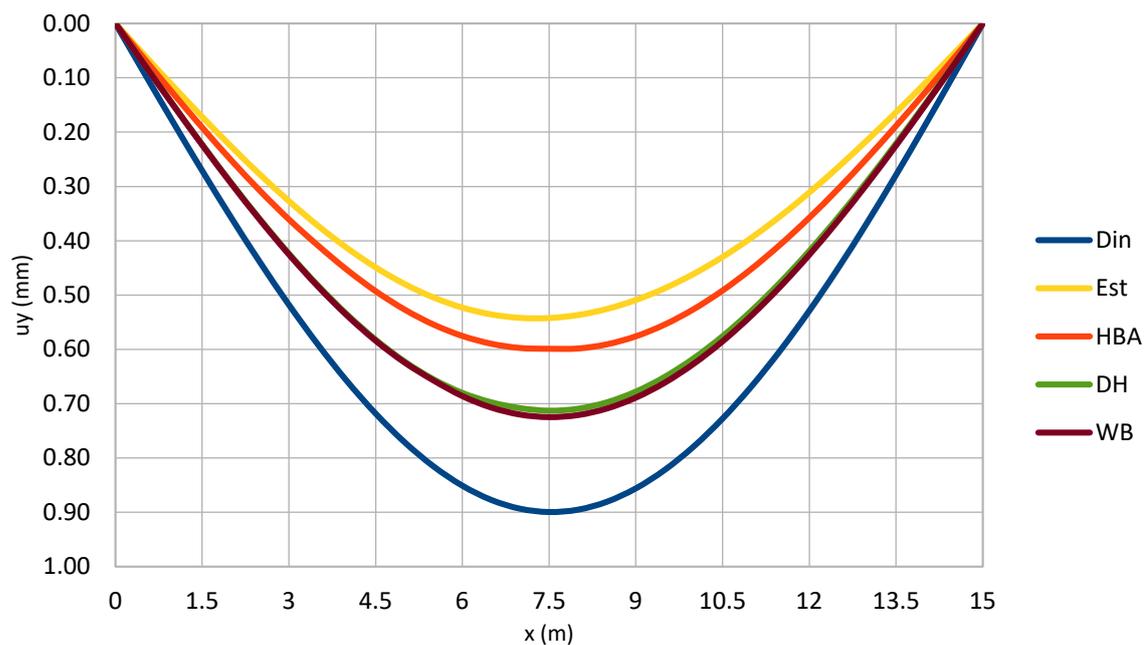


Figura 6.17 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizada com o veículo 3C considerando como pavimento um ressalto

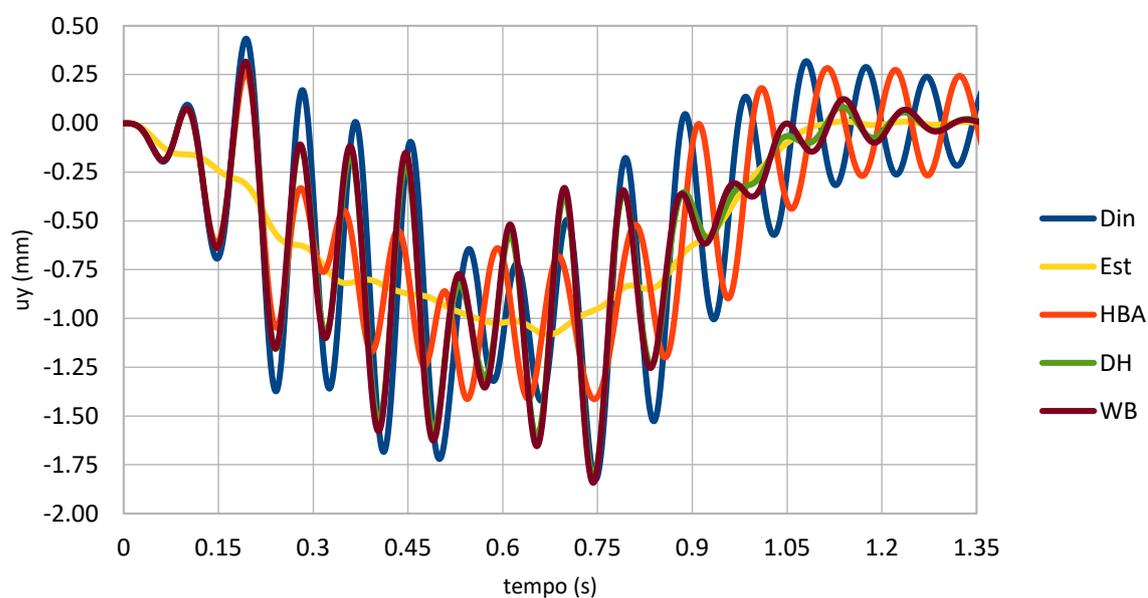


Figura 6.18 – Deslocamento no tempo do nó central da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 considerando como pavimento um ressalto

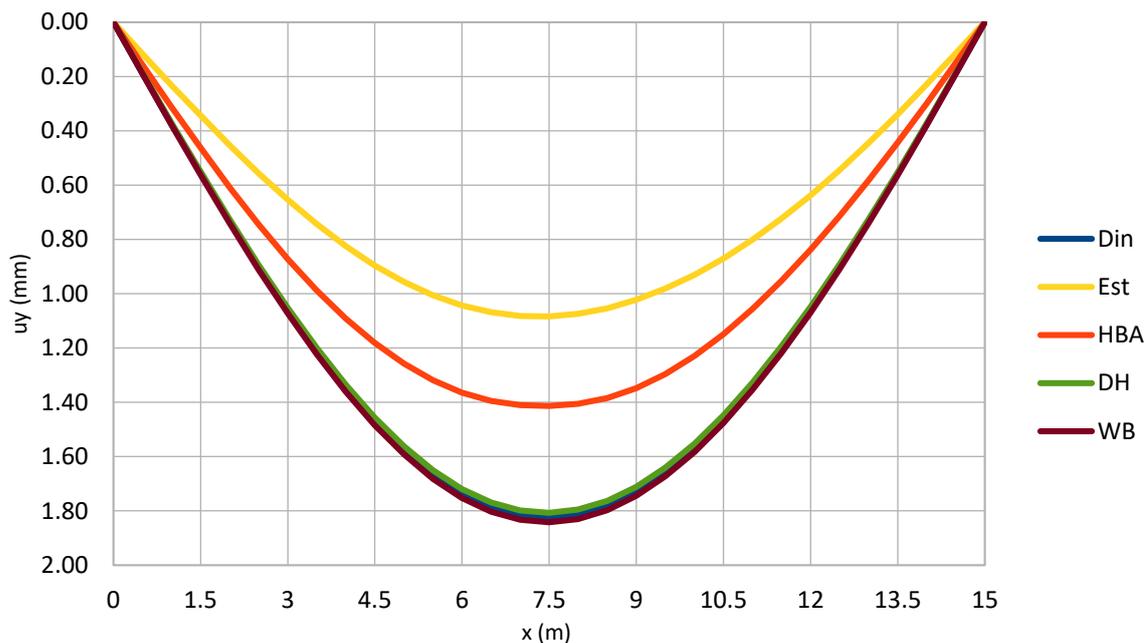


Figura 6.19 – Deslocamento máximo dos nós da ponte para as análises realizadas com o veículo 2S3 considerando como pavimento um ressalto

Analisando os resultados apresentados, fica evidente que para o veículo 2S3 o uso de um TMD dimensionado por meio das equações analíticas de Den Hartog e Warburton não é a forma mais eficiente de minimizar o deslocamento máximo no centro da ponte. Essas equações analíticas apresentaram um desempenho melhor na redução do deslocamento máximo da ponte para a passagem do veículo 3C, porém o FAD obtido com o TMD dimensionado por essas equações apresentou valores próximos ao  $C_{iv}$  da norma NBR 7188 (ABNT, 2024).

No caso dos resultados obtidos pelo algoritmo de otimização, a redução no deslocamento máximo da ponte para as simulações com os veículos 3C e 2S3 foi de 33,42% e 22,56%, respectivamente, sendo que novamente a instalação do TMD foi mais eficiente para a simulação feita com o veículo 3C.

Cabe destacar que o ressalto na entrada da ponte produziu um deslocamento máximo na ponte mais elevado para passagem do veículo 2S3 em relação ao deslocamento causado pela depressão, conseqüentemente, isso fez com a resposta dinâmica do veículo 2S3 fosse amplificada pela ressonância causada por essa irregularidade, conforme mostra o espectro de

potência da Figura 6.20. Após a instalação do TMD, o FAD apresentou um valor ligeiramente inferior ao  $Civ$  da norma NBR 7188 (ABNT, 2024).

Para o caso do veículo 2S3 seria interessante fazer uma análise considerando a instalação de múltiplos TMD's com uma massa total equivalente à massa considerada nessa análise a fim de verificar se é possível reduzir um pouco mais o valor do FAD da resposta dinâmica da ponte.

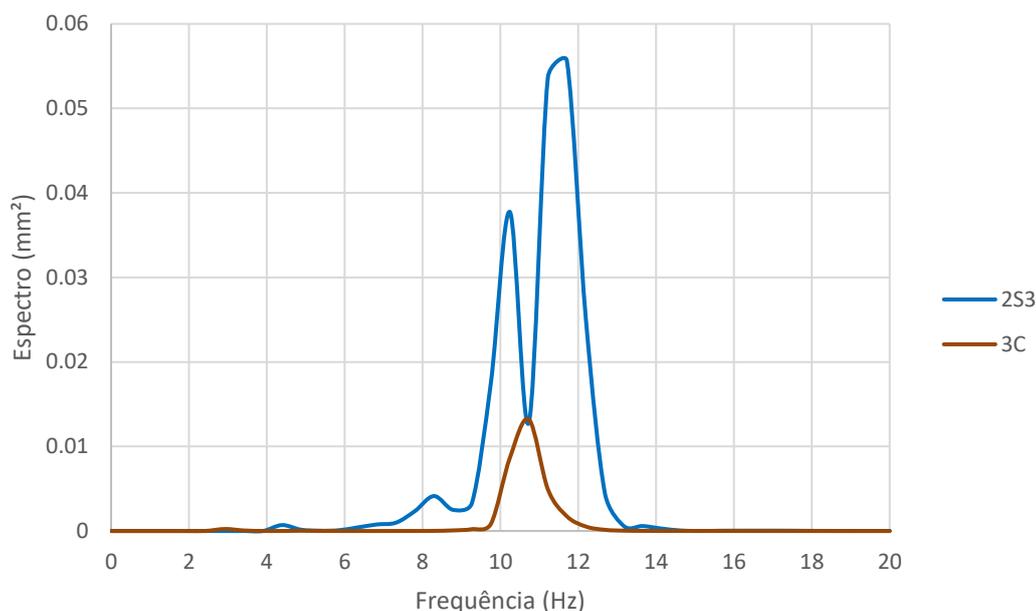


Figura 6.20 – Espectro de potência para o deslocamento no tempo do nó central da ponte com um ressalto em sua entrada para as análises sem a instalação do TMD feitas com os veículos 3C e 2S3

## 6.2 VERIFICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DA PONTE

Para verificar o modelo da ponte utilizado neste trabalho serão feitos três testes: uma análise estática da estrutura, a análise de suas frequências naturais e uma análise transiente. Todos os resultados serão comparados com aqueles obtidos por meio do *software* comercial Ansys.

Os dados da ponte foram retirados de Baroni (2010). A estrutura consiste em uma ponte de concreto armado, biapoiada com 10 m de vão e seção transversal do tipo duplo T, como mostra a Figura 6.21.

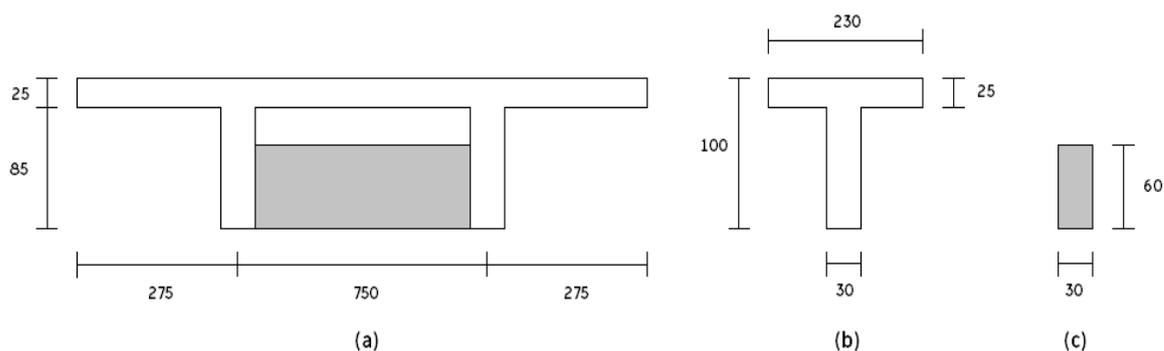


Figura 6.21 – Dimensões da ponte (em cm): (a) seção transversal; (b) longarinas e (c) transversinas

O modelo da ponte é composto por duas longarinas L1 e L2, modeladas com vigas biapoiadas de seção transversal do tipo T e dimensões mostradas na Figura 6.21 e uma transversina, T1 de seção transversal retangular com dimensões 30 cm x 60 cm. A Figura 6.22 mostra o modelo da ponte utilizado nas análises.

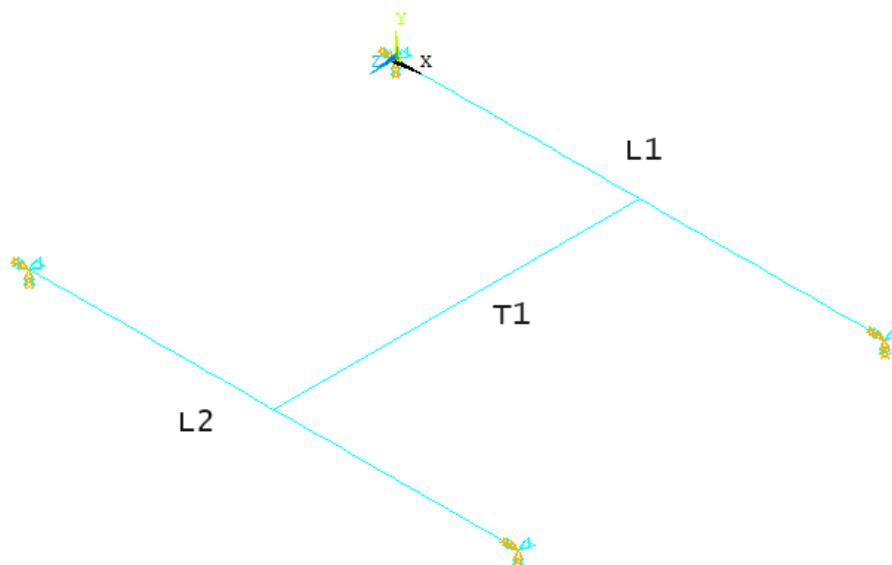


Figura 6.22 – Modelo matemático da ponte

Para elaboração do modelo da ponte, as vigas L1 e L2 foram discretizadas com 50 elementos finitos de pórtico espacial com tamanho de 20 cm cada um e as transversinas foram discretizadas com 1 elemento de pórtico espacial com tamanho de 7,5 m. Ao todo o modelo da ponte possui 101 elementos e 102 nós. A Tabela 6.14 traz um resumo com as propriedades mecânicas e geométricas do modelo da ponte.

Tabela 6.14 – Propriedades mecânicas e geométricas do modelo da ponte

Vigas	$A (m^2)$	$I_z (m^4)$	$I_y (m^4)$	$I_x (m^4)$	$E (GPa)$	$\rho (kg/m^3)$
L1 e L2	0,8	0,05397	0,2552	0,01621	30	2.500
T1	0,18	0,0054	0,00135	0,003708	30	2.500

Nos testes realizados a seguir foram utilizados os dados da Tabela 6.12 considerou-se restrições nos GDL  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  dos nós que estão localizados nas extremidades das vigas L1 e L2.

### 6.2.1 Análise Estática da Estrutura

A análise estática realizada consiste na aplicação de uma carga concentrada de 45 kN na direção y do ponto central da viga L1 e a resolução do sistema de equações descrito a seguir:

$$\mathbf{K}_e \vec{u}_e = \vec{F}_e \quad (6.7)$$

onde,

$\mathbf{K}_e$ : matriz de rigidez da estrutura;

$\vec{F}_e$ : vetor de forças atuantes na estrutura;

$\vec{u}_e$ : vetor com os deslocamentos de cada GDL da estrutura.

Como resultado da solução do sistema de equações da eq. (6.7), foram obtidos os deslocamentos verticais que essa carga provoca nas vigas L1 e L2. Na Figura 6.23 apresenta-se o gráfico com a comparação dos resultados obtidos pelo *software* Ansys e o programa em Octave desenvolvido nessa tese.

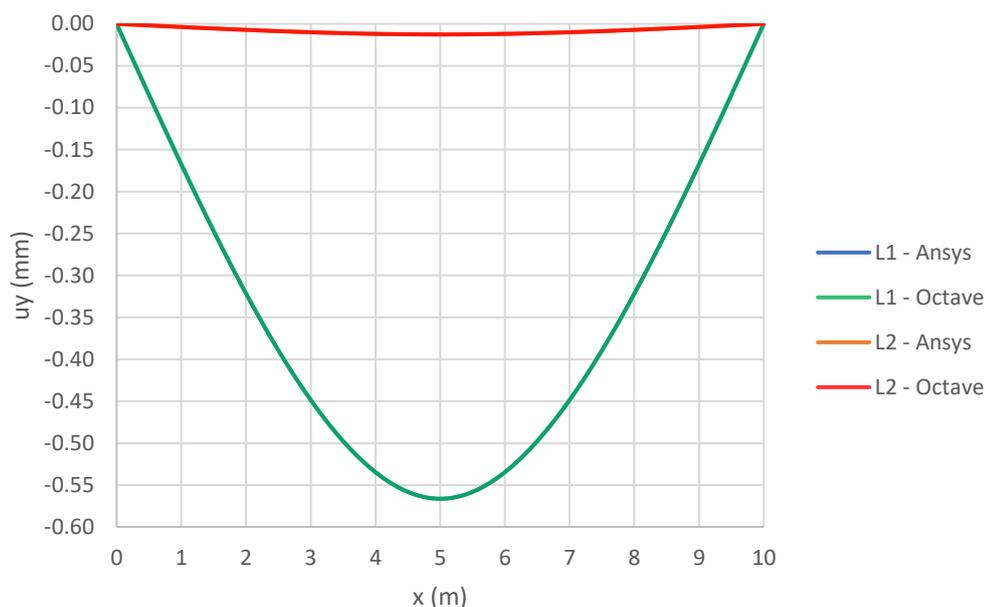


Figura 6.23 – Deslocamentos verticais dos nós das vigas L1 e L2

Observando a Figura 6.23, fica claro que tanto os resultados obtidos pelo programa desenvolvido nessa tese quanto os resultados obtidos pelo Ansys são iguais. Com isso fica comprovado que a matriz de rigidez do modelo da ponte, bem como a matriz de rotação e a aplicação das condições de contorno do problema estão sendo feitos de maneira correta.

### 6.2.2 Frequências Naturais da Estrutura

A próxima validação realizada foi a análise das frequências naturais da estrutura por meio da resolução do problema de autovalores e autovetores mostrado na equação:

$$|\mathbf{K}_e - \omega_e \mathbf{M}_e| = 0 \quad (6.8)$$

sendo,

$\mathbf{M}_e$ : matriz de massa da estrutura;

$\omega_e$ : frequências naturais da estrutura, em rad/s.

Novamente, o problema de autovalores e autovetores da eq. (6.8) foi solucionado utilizando a função “*eig*” da linguagem de programação Octave e o método de Block Lanczos da análise modal do *software* Ansys. Após solucionar deste problema, os resultados encontrados para as

10 primeiras frequências naturais da estrutura estão listados na Tabela 6.15, assim como a representação dos 2 primeiros modos de vibração estão representados na Figura 6.24.

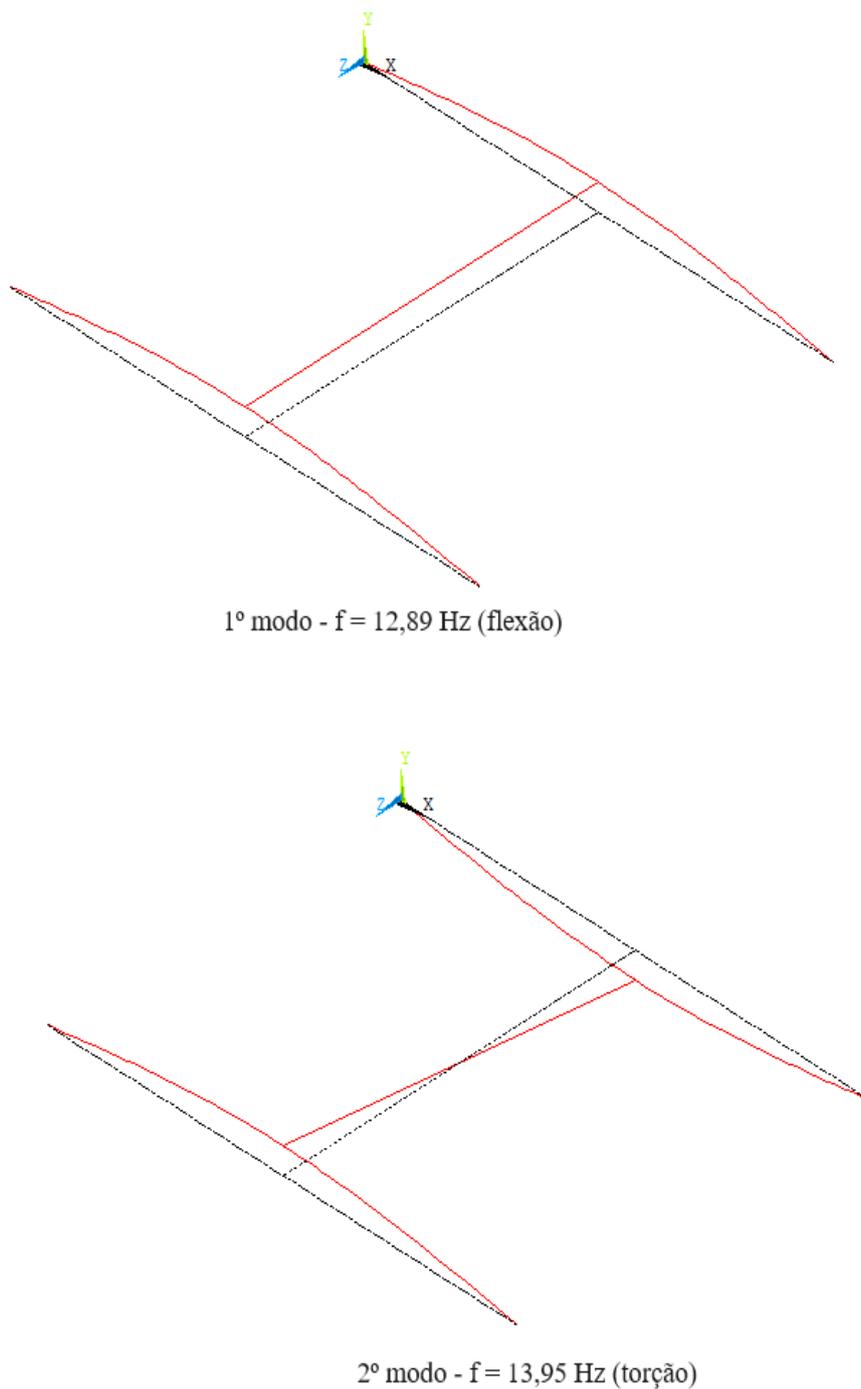


Figura 6.24 – Dois primeiros modos de vibração da ponte, linha preta refere-se a estrutura indeformada e a linha vermelha refere-se ao formato do modo de vibração da estrutura

Tabela 6.15 - Comparação das frequências naturais da ponte calculadas pelo *software* Ansys e o programa desenvolvido neste trabalho

Modo	$f_{Ansys}(Hz)$	$f_{octave}(Hz)$	Diferença(%)
1	12,850	12,885	-0,267
2	13,904	13,949	-0,327
3	23,557	23,596	-0,165
4	34,712	34,737	-0,073
5	51,237	51,237	0,000
6	51,237	51,237	0,000
7	55,727	56,462	-1,320
8	55,880	56,618	-1,322
9	61,996	62,052	-0,090
10	62,219	63,224	-1,615

Verificando os resultados apresentados na Tabela 6.15 nota-se que a maior diferença entre os programas foi de 1,62%. Baseado nesses resultados pode-se considerar que o modelo numérico da ponte é adequado e pode ser utilizado em análises dinâmicas mais complexas.

### 6.2.3 Análise Transiente da Estrutura

A última verificação do modelo da ponte consistiu em uma análise transiente da estrutura submetida a um pulso do tipo *Tone Burst*. O motivo da escolha deste tipo de carregamento deve-se ao a realização de um teste do programa desenvolvido para uma situação que envolve a análise dinâmica da estrutura.

Para isso, o pulso foi aplicado no ponto central da viga L1 e as respostas obtidas dessa análise foram o deslocamento vertical do ponto onde o pulso foi aplicado e o deslocamento vertical máximo de cada nó da viga L1.

De acordo com Lucena (2015), um pulso *Tone Burst* é uma função senoidal de frequência definida e modulada por uma janela. Para a análise transiente realizada nessa seção, optou-se por utilizar a janela de Hanning, descrita pela função:

$$h_a(t) = 0,5 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi t}{T_h} \right) \right], 0 \leq t \leq T_h \quad (6.9)$$

em que,

$h_a(t)$ : função que define a janela de Hanning;

$t$ : tempo de duração do sinal;

$T_h$ : tempo de duração do pulso.

Em relação a variável  $T_h$ , seu valor é obtido por meio da expressão:

$$T_h = \frac{N_{TB}}{f_{TB}} \quad (6.10)$$

onde,

$N_{TB}$ : número de ciclos do pulso *Tone Burst*;

$f_{TB}$ : frequência do pulso *Tone Burst*;

Por último, a função que descreve o pulso *Tone Burst* é expressa da seguinte forma:

$$TB(t) = 10.000h_a(t)\text{sen}(2\pi f_{TB}t), 0 \leq t \leq T_h \quad (6.11)$$

Considerando  $f_{TB} = 12 \text{ Hz}$  (frequência próxima à frequência fundamental da estrutura) e  $N_{TB} = 5 \text{ ciclos}$ , na Figura 6.25 apresenta o carregamento aplicado no ponto central da viga L1.

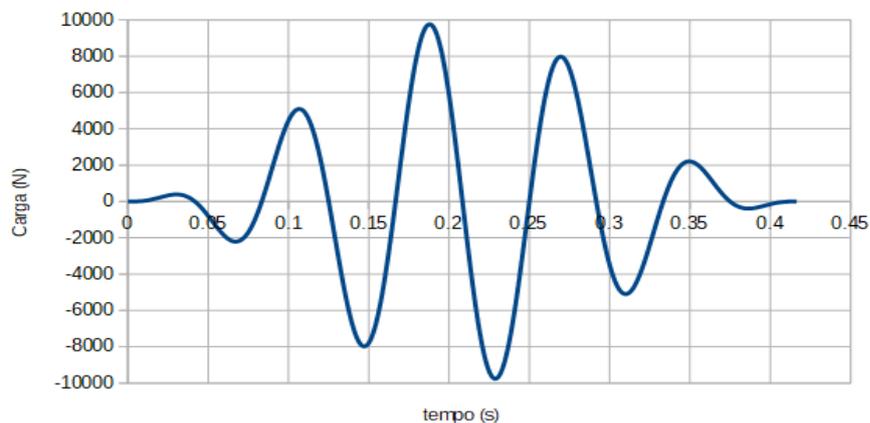


Figura 6.25 – Pulso *Tone Burst* aplicado no ponto central da viga L1

A duração da análise transiente é de 1 s, sendo que 0,4167 s é a duração do pulso e o restante do tempo, a carga aplicada no ponto central da viga L1 é nula. A integração da equação de movimento da ponte foi feita pelo método de Newmark, tanto no programa desenvolvido quanto no Ansys e o valor do passo de tempo utilizado na integração foi de  $10^{-4}$  s.

Além disso, considerou-se que a matriz de amortecimento da estrutura é proporcional a sua matriz de rigidez para a primeira frequência natural e a razão de amortecimento crítico ( $\zeta$ ) utilizada foi de 3%. Dessa forma, na Figura 6.26 apresenta-se a comparação dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido nessa tese e o Ansys para o deslocamento no tempo do nó central da viga L1.

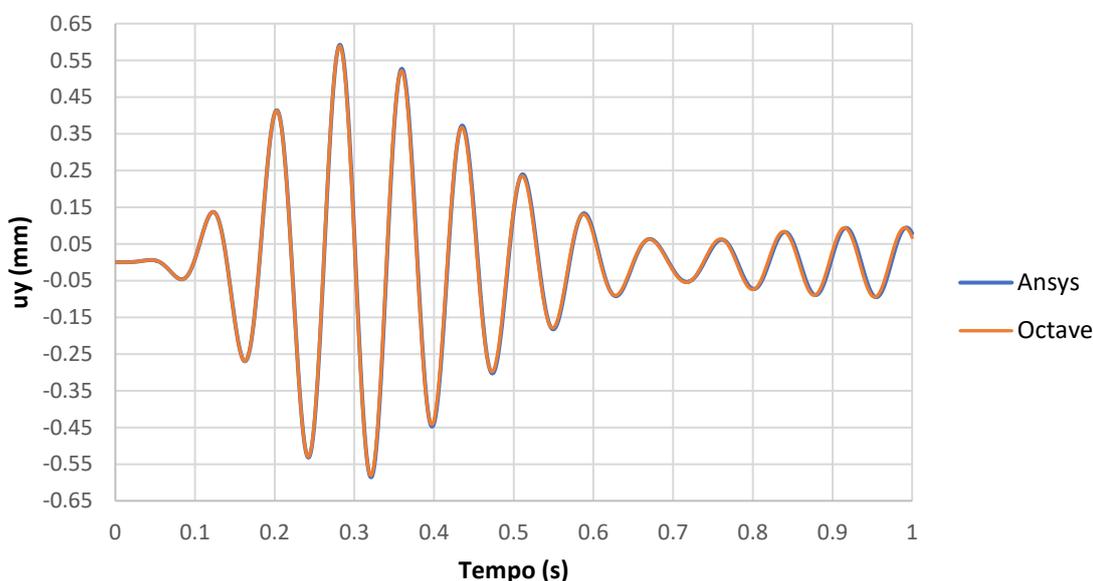


Figura 6.26 – Comparação dos resultados do deslocamento vertical do ponto central da viga L1

Observando a Figura 6.26, nota-se que os resultados do programa desenvolvido nessa tese e o resultado do *software* Ansys apresentam uma boa concordância, pois ambas as curvas ficaram sobrepostas, porém com pequenas variações nos valores calculados.

Em relação aos deslocamentos máximos dos nós da viga L1, verifica-se que existe uma pequena diferença nos valores foi de 0,62%. Conforme pode-se ver na Figura 6.27, os resultados do Ansys foram ligeiramente superiores aos do Octave.

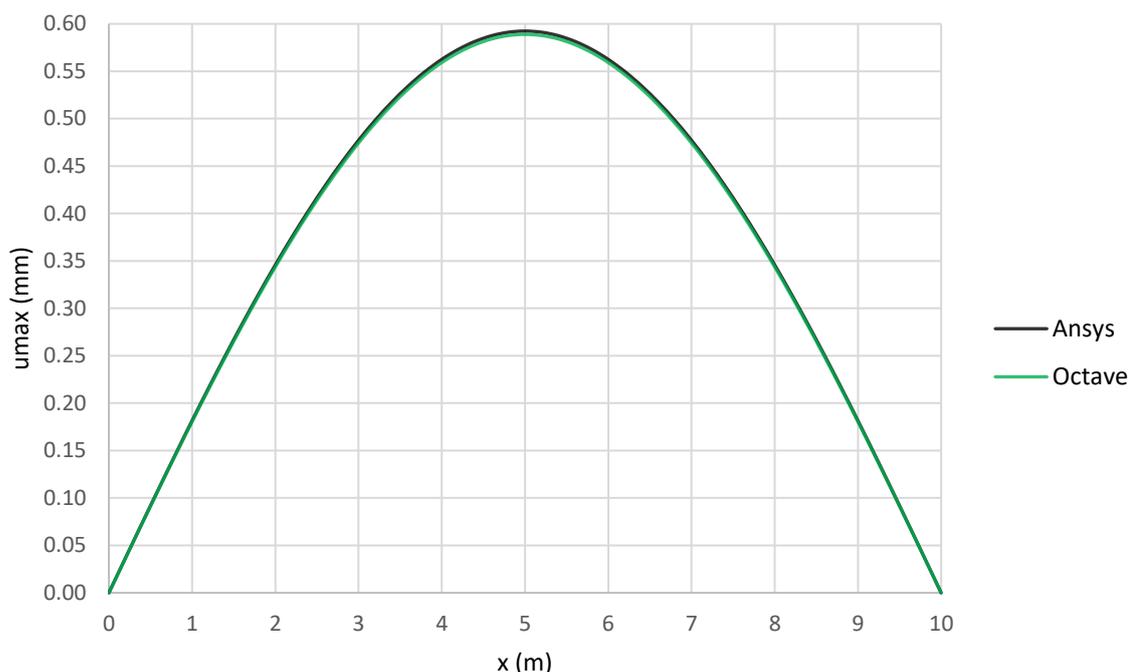


Figura 6.27 – Comparação dos resultados dos deslocamentos verticais máximos de cada nó da viga L1

Portanto, com essa série de verificações feitas, pode-se concluir que toda a metodologia aplicada para desenvolvimento do modelo matemático da ponte está correta e pode ser usado no propósito dessa tese que é o projeto otimizado de sistemas de controle de vibrações em pontes submetidas a passagem de veículos.

### 6.3 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA O SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA-PAVIMENTO

Após verificar o modelo matemático da ponte e do veículo 2S3, foi realizada uma análise para testar a metodologia empregada no Capítulo 4 para geração de amostras de propriedades geométricas e mecânicas da estrutura, assim como a simulação de Monte Carlo.

O modelo da ponte utilizado é o mesmo que foi apresentado na Figura 6.22, porém suas propriedades foram consideradas como variáveis aleatórias. Os valores médios, desvios padrão e tipo de distribuição estão listados na Tabela 6.16.

Tabela 6.16 – Variáveis aleatórias referentes as dimensões da estrutura, valor médio e desvio padrão

Variável	Média	Desvio Padrão	CV (%)	Unidade	Distribuição
$b_w$	30	1	3,33	cm	Normal
$h_w$	75	1	1,33	cm	Normal
$h_f$	25	1	4	cm	Normal
$b_t$	30	1	3,33	cm	Normal
$h_t$	60	1	1,67	cm	Normal

Observação: conforme explicado item 4.3.1 e apresentado na eq. (4.8), para a consideração das incertezas nas dimensões das vigas da ponte utiliza-se um valor médio e uma tolerância de construção para peça ( $t_c$ ). De acordo com Real (2000) essa tolerância de construção varia entre 1 cm (local com controle qualidade adequado) e 2 cm (local sem controle qualidade adequado). Como a estrutura analisada é de grande porte, é importante que sua execução seja feita em um local com nível elevado de controle de qualidade a fim de evitar que as peças produzidas não apresentem grandes distorções em nas dimensões. Portanto para todas as variáveis apresentadas na Tabela 6.16 admitiu-se um desvio padrão (ou tolerância de construção) de 1 cm.

De acordo com o item 4.3.2 do Capítulo 4 da presente tese, as propriedades dos materiais da estrutura ( $E$ ,  $\rho$ ) são tratadas como variáveis aleatórias correlacionadas, ou seja, seus valores aumentam ou diminuem dependendo do grau influência que uma variável possui sobre a outra. Os valores utilizados na geração dos valores utilizados nos cálculos estão apresentados na Tabela 6.17.

Tabela 6.17 – Valores utilizados na geração das propriedades dos materiais da estrutura

Variável	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Correlação	Unidade	Distribuição
$E$	30	3	0,8	GPa	Normal
$\rho$	2.500	250	0,8	kg/m <sup>3</sup>	Normal

Em relação aos veículos, foram utilizados os modelos tridimensionais dos caminhões 2C, 3C e 2S3, pois estes são alguns dos veículos que são vistos com mais frequência trafegando nas rodovias brasileiras (ROSSIGALI, 2013; CARNEIRO *et al.*, 2020). Os parâmetros de suas

suspensões e pneus não foram considerados variáveis aleatórias e os valores utilizados nas análises estão organizados na Tabela 6.18.

Tabela 6.18 – Dados dos pneus e suspensões dos veículos

<b>Tipo</b>	<b>Simple</b>	<b>Duplo</b>
Massa Pneu (kg)	320	530
Rigidez Pneu (kN/m)	840	1.680
Amortecimento Pneu (kNs/m)	1	2
Rigidez Suspensão (kN/m)	290	590
Amortecimento Suspensão (kNs/m)	3	6

Fonte: adaptado de Rossigali (2013)

Conforme apresentado no item 4.3.3 do Capítulo 4, a massa total dos veículos também é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre um limite inferior e um limite superior. Para montar a matriz de massa do modelo do veículo, utiliza-se o valor da massa dos pneus e o valor da massa suspensa. Nesse caso, a massa total do veículo serve para se fazer uma estimativa de sua massa suspensa, conforme a equação:

$$m_s = m_{total} - (N_{ps}m_{ps} + N_{pd}m_{pd} + m_{cv}) \quad (6.12)$$

onde,

$m_s$ : massa suspensa do veículo;

$m_{total}$ : massa total do veículo;

$N_{ps}$  e  $N_{pd}$ : número de pneus simples e duplos, respectivamente;

$m_{ps}$  e  $m_{pd}$ : massa dos pneus simples e duplos, respectivamente;

$m_{cv}$ : massa do cavalo mecânico. Variável exclusiva do veículo 2S3.

Como consequência de a massa suspensa do veículo ser uma variável aleatória, os momentos de inércia de massa também se tornam variáveis aleatórias, pois seu cálculo depende do valor gerado para massa suspensa. Na Tabela 6.19 estão listados os limites superiores e inferiores considerados na determinação da massa total dos veículos.

Tabela 6.19 – Limites inferior e superior para a massa total de cada veículo e seus respectivos momentos de inércia de massa

Veículo	2C	3C	2S3	
			Cavalo Mecânico	Reboque
Limite Inferior (kg)	6.200	6.670	-	13.890
Limite Superior (kg)	27.250	41.710	9.000	70.450
$I_{xv}$ (kgm <sup>2</sup> )	2,083m <sub>s</sub>	3,75m <sub>s</sub>	15.937,50	4,866m <sub>s</sub>
$I_{yv}$ (kgm <sup>2</sup> )	1,153m <sub>s</sub>	1,153m <sub>s</sub>	10.380	1,153m <sub>s</sub>

Fonte: adaptado de Carneiro *et al.* (2021)

No caso das distâncias do centro de massa até seus eixos, seus valores são apresentados na Tabela 6.20.

Tabela 6.20 – Distância do centro de massa aos eixos dos veículos 2C, 3C e 2S3

Veículo	$L_1(m)$	$L_2(m)$	$L_3(m)$	$L_4(m)$	$L_5(m)$	$d_{11}(m)$	$d_{21}(m)$
2C	2,14	1,86	-	-	-	-	-
3C	4	0,8	2	-	-	-	-
2S3	1,83	2,37	1,13	2,37	3,62	2,05	5,27

Fonte: adaptados de Metz (2019); Santos (2020)

As distâncias apresentadas na Tabela 6.20 não são uniformes, o que implica que a massa suspensa do veículo não se distribui de maneira igualitária entre os seus eixos. Essa distribuição é feita da seguinte forma: veículo 2C, 46,6% eixo frontal e 53,4% eixo traseiro; veículo 3C, 27% eixo frontal e 73% eixo traseiro e veículo 2S3, 19% eixo frontal, 34% eixo intermediário e 47% eixos traseiros (reboque), de acordo com dados adaptados de Rossigali (2013). Para distribuir a massa suspensa do veículo do eixo para suas rodas, basta dividir os valores citados por 2.

Além disso, as velocidades com que os veículos trafegavam pela ponte também são variáveis aleatórias, distribuídas uniformemente no intervalo de 60 km/h a 90 km/h. A posição dos veículos na ponte está ilustrada na Figura 6.28. O passo de tempo utilizado na integração da equação de movimento do sistema veículo-estrutura-pavimento foi de 0,001 s, sendo que a

duração total considerada para as análises foi de 1,45 s, com a finalidade de evitar problemas no armazenamento dos vetores de força e resultados das simulações.

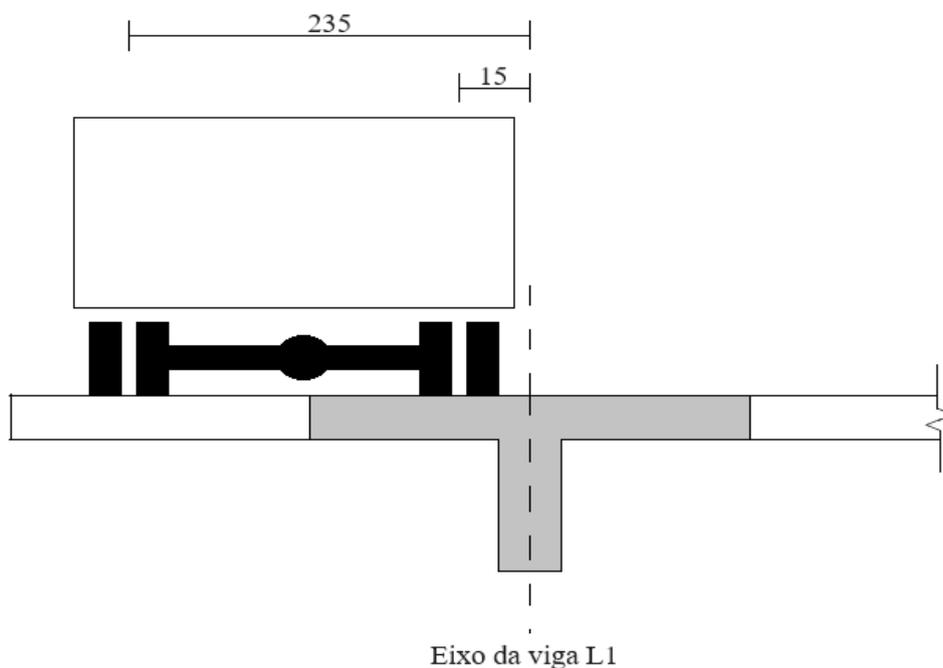


Figura 6.28 – Posição do veículo na ponte, dimensões em cm

### 6.3.1 Resultados da Simulação de Monte Carlo para Ponte com Pavimento Irregular

No caso das simulações, foram geradas 1.000 amostras para as variáveis aleatórias das Tabelas 6.16, 6.17 e 6.19 além de 1.000 perfis de irregularidades do pavimento para a classe C. Os três veículos utilizados trafegaram pela estrutura com as mesmas propriedades geométricas e mecânicas e mesmos perfis de pavimento, pois a semente utilizada para a geração das amostras foi a mesma para cada caso.

Para cada simulação, foi feita uma análise estática, em que a única força aplicada na estrutura é o peso do veículo e uma análise dinâmica, em que se considera tanto o peso do veículo quanto a força causada pelo perfil de irregularidade do pavimento. Como resultado, obteve-se o deslocamento máximo médio para o nó central da viga L1.

Além disso, com as 1.000 amostras também se verificou as curvas de convergências da média e da variância do deslocamento máximo da viga L1 a fim de determinar o número mínimo necessário de amostras que devem ser utilizados nos resultados principais da tese. Portanto, a

escolha dessa inicial de quantidade de amostras refere-se a um valor onde será possível observar que valores para média e para variância do deslocamento máximo do nó central da viga L1 já se encontram estabilizados.

Na Tabela 6.21 estão resumidos os resultados da simulação de Monte Carlo para os veículos trafegando na ponte com pavimento irregular e nas Figuras 6.29 e 6.30 são apresentadas as curvas de convergência da média e da variância dos deslocamentos máximos da viga L1, respectivamente para as análises estáticas (curvas verde, bordô e azul clara) e dinâmicas (curvas azul escuro, laranja e amarela) feitas considerando a passagem dos veículos 2C, 3C e 2S3.

Tabela 6.21 – Resultados das análises estáticas e dinâmicas dos veículos 2C, 3C e 2S3 para as 1.000 amostras das variáveis aleatórias

<i>Veículo</i>	$E[u_{est}](mm)$	$E[u_{din}](mm)$	<i>FAD</i>	<i>Civ</i>
2C	1,5747	2,2075	1,40	1,35
3C	2,0664	2,8429	1,38	
2S3	2,3134	3,1361	1,36	

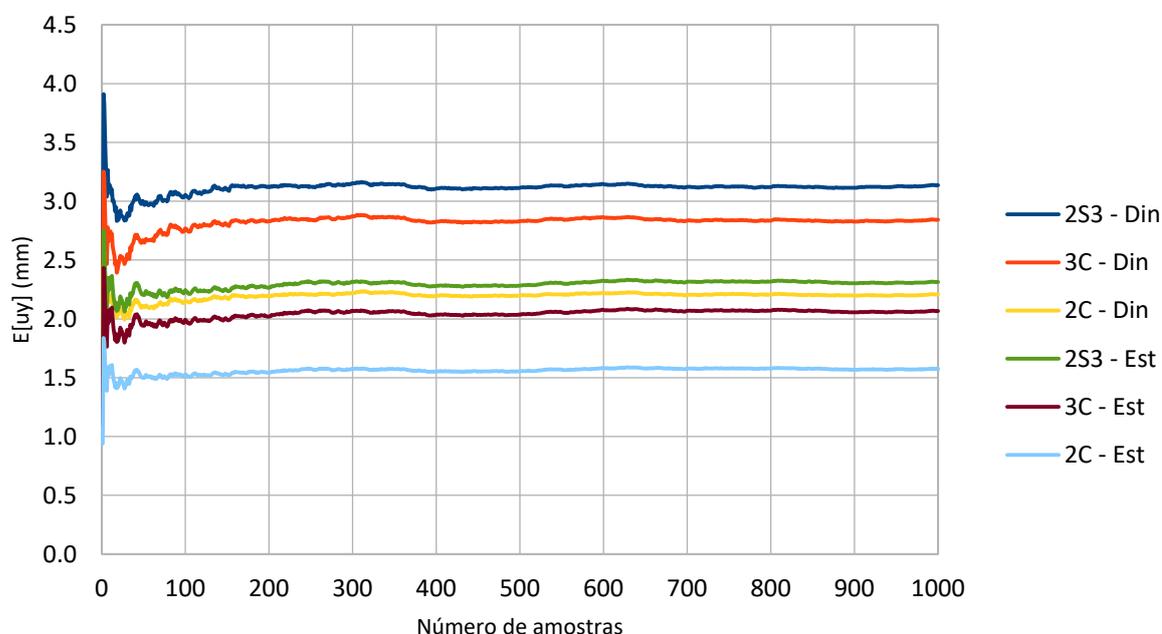


Figura 6.29 – Curva de convergência do deslocamento máximo médio do nó central da viga L1 em função do número de amostras para as análises estáticas e dinâmicas de cada veículo

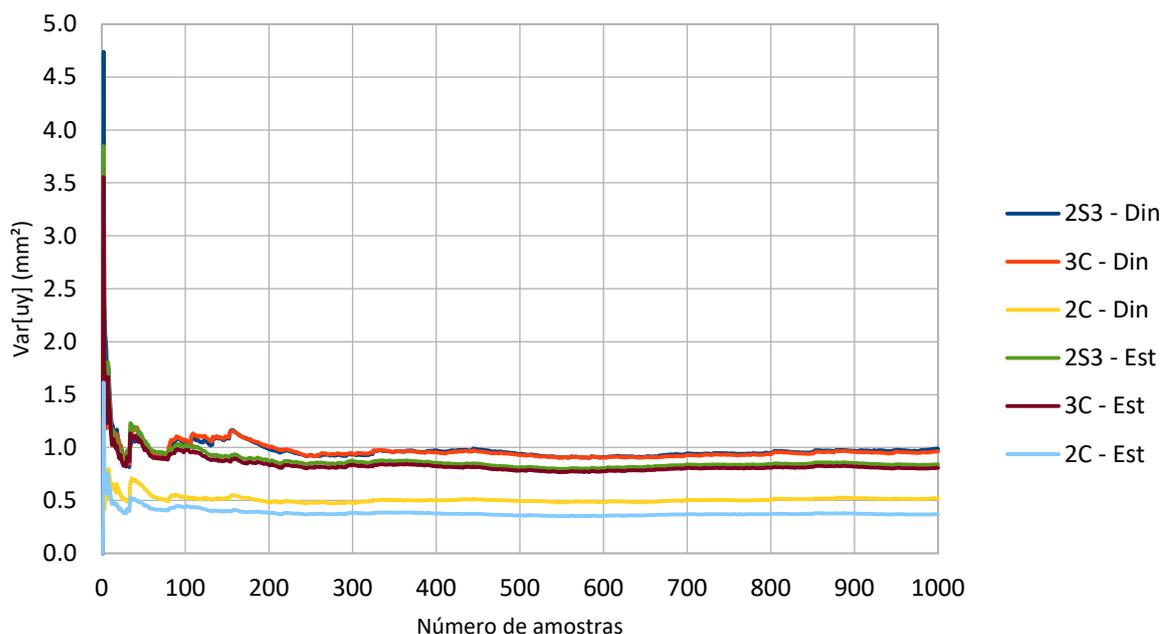


Figura 6.30 – Curva de convergência da variância do deslocamento máximo médio do nó central da viga L1 em função do número de amostras para as análises estáticas e dinâmicas de cada veículo

Conforme observa-se nos resultados da Tabela 6.21, o FAD da resposta dinâmica de cada um dos veículos ficou levemente acima do valor  $C_{iv}$ , sendo que o veículo 2C apresentou o maior FAD e o veículo 2S3, o menor.

Embora o veículo 2S3 seja o que pode transportar a maior carga, o fato do valor obtido para o FAD ser o menor para esse veículo pode estar relacionado com a força que é transmitida para estrutura, pois o vão da ponte é de 10 m e a distância entre a primeira e a última roda do veículo 2S3 é 12,77 m, portanto, o veículo 2S3 não cabe na ponte, sendo que as rodas do reboque entram na ponte apenas quando as rodas frontais desse caminhão já estão fora da estrutura.

Além disso, outro motivo relacionado com as respostas dinâmicas baixas é a massa considerada no reboque, conforme mostrado na seção 6.3, o valor utilizado nos cálculos é a massa suspensa. Descontando a massa dos pneus e do cavalo mecânico do limite inferior, verifica-se que a massa suspensa mínima no reboque pode ser de 10 kg, então, em algumas das amostras utilizadas, a resposta dinâmica da ponte foi influenciada apenas pelo cavalo mecânico já que o reboque estava praticamente vazio, resultado em deslocamentos baixos para estrutura.

Em relação às curvas de convergência da média e da variância do deslocamento máximo do nó central da viga L1, percebe-se que a partir de 200 amostras das variáveis aleatórias do problema, tanto a média quanto a variância apresentam uma estabilidade no valor calculado, logo, para as análises envolvendo o dimensionamento do sistema de controle de vibrações que será implantado na ponte, esse será o número de amostras utilizado.

### 6.3.2 Resultados da Simulação de Monte Carlo para Ponte com uma Depressão em sua Entrada

Os resultados apresentados aqui referem-se às simulações feitas com a estrutura com uma depressão como pavimento. Novamente, foram geradas outras 1.000 amostras para as variáveis aleatórias das Tabelas 6.16, 6.17 e 6.19 além de 1.000 perfis para depressão. A mesma consideração feita sobre os veículos trafegarem sobre as mesmas estruturas e pavimentos e velocidades também foram utilizadas aqui.

Diferentemente do que ocorre com o pavimento irregular, que possui aleatoriedades inerentes de sua própria metodologia de geração, os perfis de depressão não possuem essa característica de forma explícita (ver eq. 6.5).

Dentre as variáveis utilizadas na eq. (6.5) que podem ser utilizadas para tornar a geração dos perfis de depressão um processo estocástico, destaca-se a profundidade ( $a$ ) e a largura ( $b$ ) da depressão.

Conforme mostrado na eq. (6.6), o cálculo da largura da depressão depende da frequência natural da estrutura e da velocidade do veículo, ambas variáveis aleatórias. Sendo assim, a geração das amostras com as larguras da depressão foi feita da seguinte forma:

$$b = \frac{v}{f_1} \quad (6.13)$$

onde,

$b$ : largura da depressão;

$v$ : velocidade do veículo. Variável aleatória uniformemente distribuída entre 60 km/h e 90 km/h;

$\bar{f}_1$ : frequência natural média da estrutura. De acordo com os resultados para geração das 250 primeiras amostras, o valor médio é 12,95 Hz.

Por fim, o resultado da Tabela 6.9 do item 6.1.3 mostra uma análise simples de como a profundidade da depressão influencia a resposta dinâmica de cada veículo, sendo que, para valores baixos os veículos rígidos apresentam respostas dinâmicas elevadas enquanto os veículos articulados necessitam de profundidades maiores para ter respostas dinâmicas elevadas. Dessa forma, ficou convencionado que a profundidade da depressão terá distribuição uniforme valores entre 1 cm e 5 cm.

Novamente, para cada simulação, foi feita uma análise estática (sem a consideração do pavimento) e uma análise dinâmica. Como resultado, obteve-se o deslocamento máximo médio para o nó central da viga L1. Além disso, com as 1.000 amostras geradas também se verificaram as curvas de convergência da média e da variância do deslocamento máximo da viga L1 a fim de determinar o número mínimo necessário de amostras que devem ser utilizados nos resultados principais envolvendo as análises com a depressão na entrada da ponte.

Na Tabela 6.22 estão resumidos os resultados da simulação de Monte Carlo para os veículos trafegando na ponte com a depressão como pavimento e nas Figuras 6.31 e 6.32 são apresentadas as curvas de convergência da média e da variância dos deslocamentos máximos da viga L1, respectivamente para as análises estáticas (curvas verde, bordô e azul clara) e dinâmicas (curvas azul escuro, laranja e amarela) feitas considerando a passagem dos veículos 2C, 3C e 2S3.

Tabela 6.22 – Resultados das análises estáticas e dinâmicas dos veículos 2C, 3C e 2S3 para as 1.000 amostras das variáveis aleatórias

<i>Veículo</i>	$E[u_{est}](mm)$	$E[u_{din}](mm)$	<i>FAD</i>	<i>Civ</i>
2C	1,5724	3,3246	2,11	1,35
3C	2,0635	3,6755	1,78	
2S3	2,3091	3,9186	1,70	

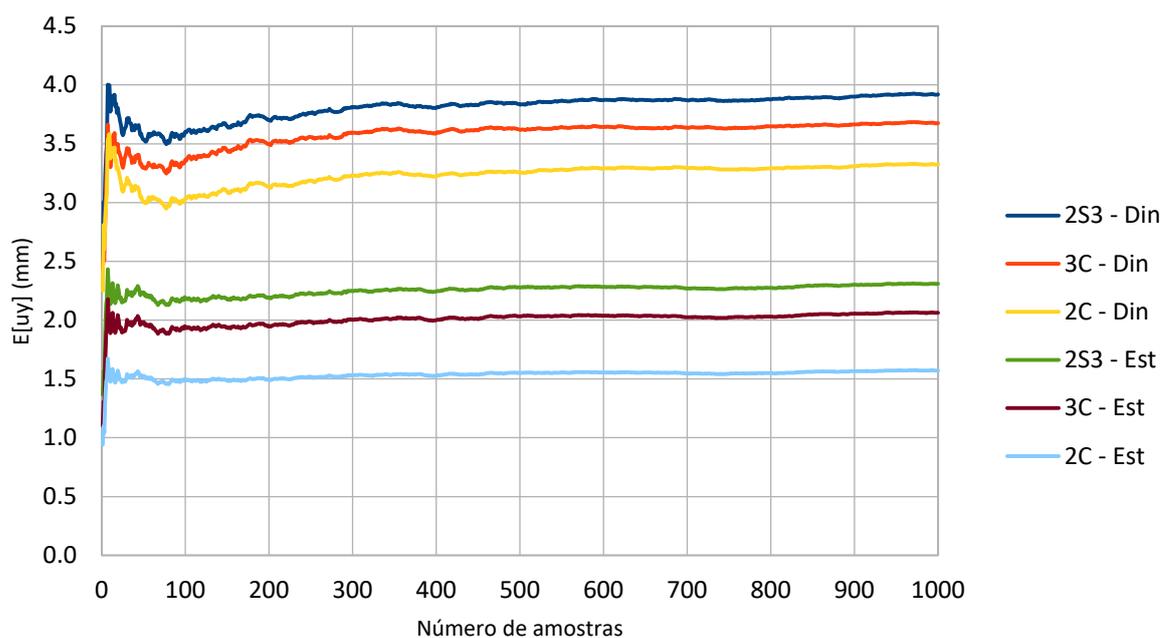


Figura 6.31 – Curva de convergência do deslocamento máximo médio do nó central da viga L1 em função do número de amostras para a depressão na entrada da ponte

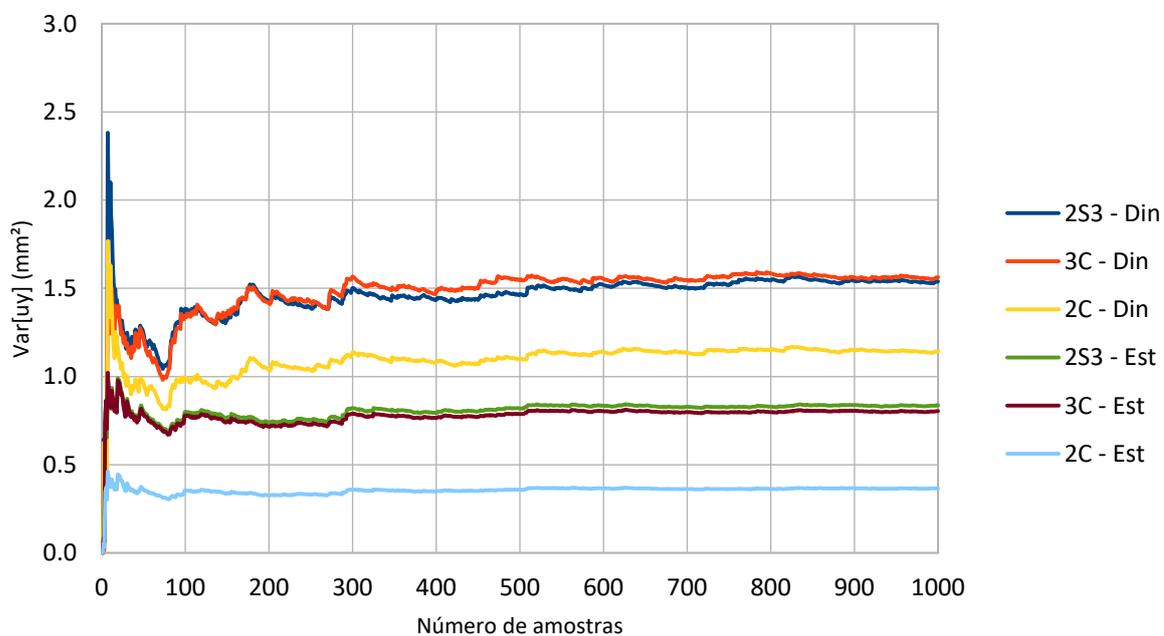


Figura 6.32 – Curva de convergência da variância do deslocamento máximo médio do nó central da viga L1 em função do número de amostras para a depressão na entrada da ponte

Em corroboração ao que as análises com os modelos 2D da ponte e dos veículos realizadas no item 6.1.3 mostraram, os resultados apresentados na Tabela 6.22 seguem essa tendência ao comprovar que os veículos rígidos (2C e 3C) geram respostas dinâmicas mais elevadas quando o pavimento considerado é uma depressão na entrada da ponte.

Para todos os casos o FAD ficou bastante elevado, dando um indicativo de esse tipo de pavimento induz a ressonância com mais facilidade na resposta dinâmica de cada veículo, o que pode tornar a utilização de sistemas de controle de vibrações um pouco mais difícil de ser dimensionada a ponto de reduzir de forma satisfatória o deslocamento máximo da estrutura.

Sobre o que mostram as curvas de convergência da média e da variância do deslocamento máximo do nó central da viga L1, percebe-se que a partir de 250 amostras das variáveis aleatórias do problema, a média apresenta estabilidade nos valores, porém isso ocorre com a variância a partir de 300 amostras. Devido ao alto custo computacional para realizar as análises envolvendo o dimensionamento do sistema de controle de vibrações que será implantado na ponte, o número de amostras utilizado para essas simulações será 250.

## 7 RESULTADOS

Esse capítulo dedica-se à apresentação dos resultados das análises que envolvem o dimensionamento do sistema de controle de vibrações para cada veículo, assim como a análise de valores extremos para os deslocamentos máximos da ponte.

De acordo com o que foi desenvolvido e proposto, serão apresentados os resultados da otimização robusta do sistema passivo de controle de vibrações (TMD) para situações em que o pavimento da ponte é irregular ou um obstáculo, que neste caso será uma depressão em sua entrada.

Com os resultados obtidos para as análises considerando os dois tipos de pavimento, será verificado o comportamento do deslocamento máximo da ponte submetida à passagem dos veículos com o sistema passivo de controle de vibrações instalado por meio da aplicação dos conceitos da teoria de valores extremos.

### 7.1 RESULTADOS DO DIMENSIONAMENTO ROBUSTO DE UM TMD PARA PONTE COM PAVIMENTO IRREGULAR

Os resultados apresentados aqui, consistem na solução do problema de otimização:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Encontrar} & \vec{x} = [k_{TMD}, c_{TMD}] \\
 \text{Minimize} & \bar{u}_{max} = E[u_{max}(\vec{x})] \\
 \text{Sujeito a} & 0 \leq k_{TMD} \leq 3.10^8 \text{ N/m} \\
 & \begin{array}{l} \square \\ \square \end{array} & 0 \leq c_{TMD} \leq 3.10^5 \text{ Ns/m} \\
 & \square & m_{TMD} = 0,03M_e \text{ kg}
 \end{array} \tag{7.1}$$

O problema apresentado na eq. (7.1) foi solucionado de forma individual para cada um dos 3 veículos considerados. Por se tratar de um problema de otimização robusta, foram utilizadas 200 amostras para cada variável considerada aleatória na modelagem do problema, ou seja, pavimento irregular classe C, dimensões e propriedades dos materiais da ponte, massas e velocidades dos veículos. Todas as informações a respeito dessas variáveis encontram-se disponíveis nas Tabelas 6.16, 17 e 18 do item 6.3.

Em relação à parte de otimização propriamente dita, conforme já mencionado, o algoritmo utilizado na solução da eq. (7.1) foi o HBA. As análises feitas para cada veículo utilizaram 10

agentes de busca e 25 iterações, além das 200 amostras das variáveis consideradas aleatórias no problema. Todas essas considerações resultaram em 50.000 operações realizadas na sub-rotina de otimização, para cada veículo.

Sendo assim, a Tabela 7.1 resume os principais resultados obtidos para cada veículo.

Tabela 7.1 – Resultados da otimização robusta considerando pavimento irregular classe C

Veículo		2C	3C	2S3
$\bar{u}_{est}$ (mm)		1,5243	2,0211	2,2675
Sem TMD	$\bar{u}_{din}$ (mm)	2,1736	2,8336	3,1244
	FAD	1,43	1,40	1,38
Com TMD	$\bar{u}_{din}$ (mm)	2,0068	2,6077	2,8772
	FAD	1,32	1,29	1,27
Redução (%)		7,67	7,97	7,91
$k_{TMD}$ (kN/m)		5.704,46	8.175,83	8.866,23
$c_{TMD}$ (kNs/m)		8,0879	27,2705	31,5664
$m_{TMD}$ (kg)		1.301,25	1.301,25	1.301,25
$f_{sint}$ (Hz)		10,54	12,62	13,14
Tempo execução (dias)		5,89	9,82	5,46

Em relação aos resultados da Tabela 7.1, cabe ressaltar que o coeficiente de impacto vertical para uma ponte de 10 m vale 1,35 e a frequência natural média da estrutura para as 200 amostras foi de 12,95 Hz.

Dessa maneira, pode-se concluir que os resultados obtidos para otimização robusta de um TMD capaz de reduzir o deslocamento máximo da ponte submetida a passagem de cada um dos veículos analisados foi atendido.

Sem o sistema de controle de vibrações, o FAD da resposta de cada um dos veículos encontrava-se acima de 1,35. Após o dimensionamento e instalação do TMD, o FAD foi reduzido, ficando abaixo do limite imposto pela NBR 7188 (ABNT, 2024), comprovando que, para pavimentos irregulares, a utilização de sistemas passivos de controle de vibrações associadas com algoritmos de otimização para o dimensionamento de seus componentes são uma solução viável de ser implementada.

Outro ponto que chama a atenção nos resultados apresentados na Tabela 7.1 é redução do deslocamento máximo da ponte. Conforme foi apresentado, o algoritmo de otimização

conseguiu encontrar uma solução capaz de reduzir o deslocamento máximo da ponte o suficiente para que esse resultado ficasse abaixo do *Civ*.

Nas simulações realizadas no item 6.1.2 do Capítulo 6, as reduções no deslocamento máximo da ponte obtidas para análise 2D dos veículos 3C e 2S3 sem a consideração de variáveis aleatórias, foram maiores. Isso indica que quanto mais informações forem utilizadas para modelar o problema do dimensionamento de TMD's, mais difícil se torna a sua solução, podendo chegar a ponto em que não será possível encontrar um sistema passivo que consiga atenuar o deslocamento máximo da estrutura de forma satisfatória.

Além disso, como se observa no gráfico da Figura 7.1 com o espectro de potência para o deslocamento no tempo do nó central da ponte, calculado utilizando a Transformada Rápida de Fourier (FFT – sigla em inglês), existem duas faixas principais de frequência que contribuem para resposta dinâmica da ponte, uma entre 0 e 2,5 Hz e outra entre 9,5 e 15 Hz, sendo que a primeira faixa possui a maior contribuição.

Como a frequência natural da estrutura encontra-se na segunda faixa, a excitação causada pelo pavimento irregular não induz ressonância na resposta dinâmica da ponte, logo o deslocamento máximo não é demasiadamente elevado, possibilitando que o algoritmo de otimização encontrasse uma solução capaz de reduzir esse deslocamento o suficiente para ficar dentro do limite estabelecido.

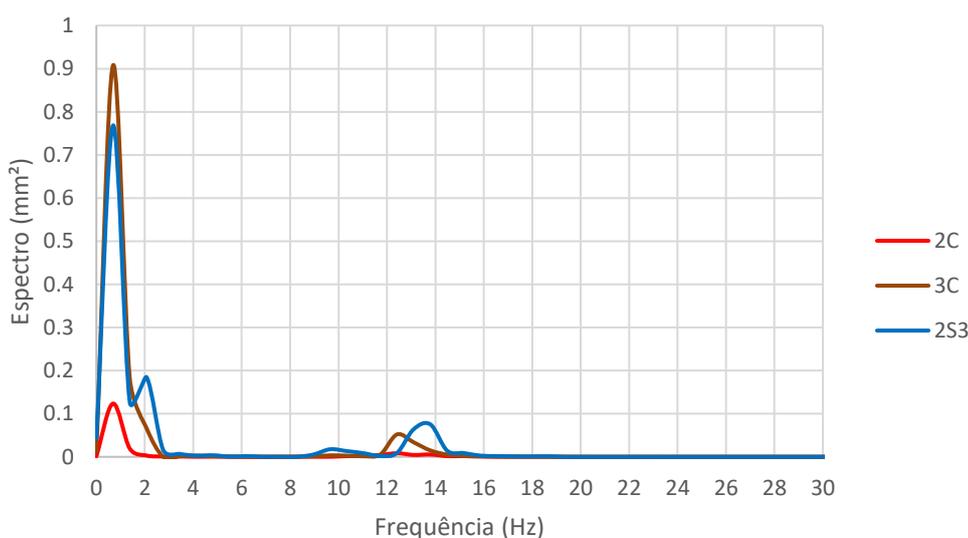


Figura 7.1 – Espectro de potência do deslocamento no tempo do nó central da ponte, sem o uso do TMD para amostra nº 200 de cada veículo

Em relação aos tempos computacionais apresentados na Tabela 7.1, destaca-se que todas as análises foram executadas de forma sequencial, porém a versão do programa utilizada para gerar os resultados dos veículos 2C e 3C era antiga. Por esse motivo o tempo computacional gasto para execução das análises destes veículos foram superiores ao tempo gasto para executar a análise feita para o veículo 2S3, que contava com uma versão atualizada do código onde foi solucionado o problema de uso da memória RAM para armazenamento de variáveis e resultados.

São apresentados nas Figuras 7.2 a 7.4 os gráficos com os deslocamentos máximos médios nos nós da ponte para análise estática (curva cinza), análise dinâmica sem TMD (curva azul), análise dinâmica com TMD (curva laranja) relativos as passagens dos veículos 2C, 3C e 2S3.

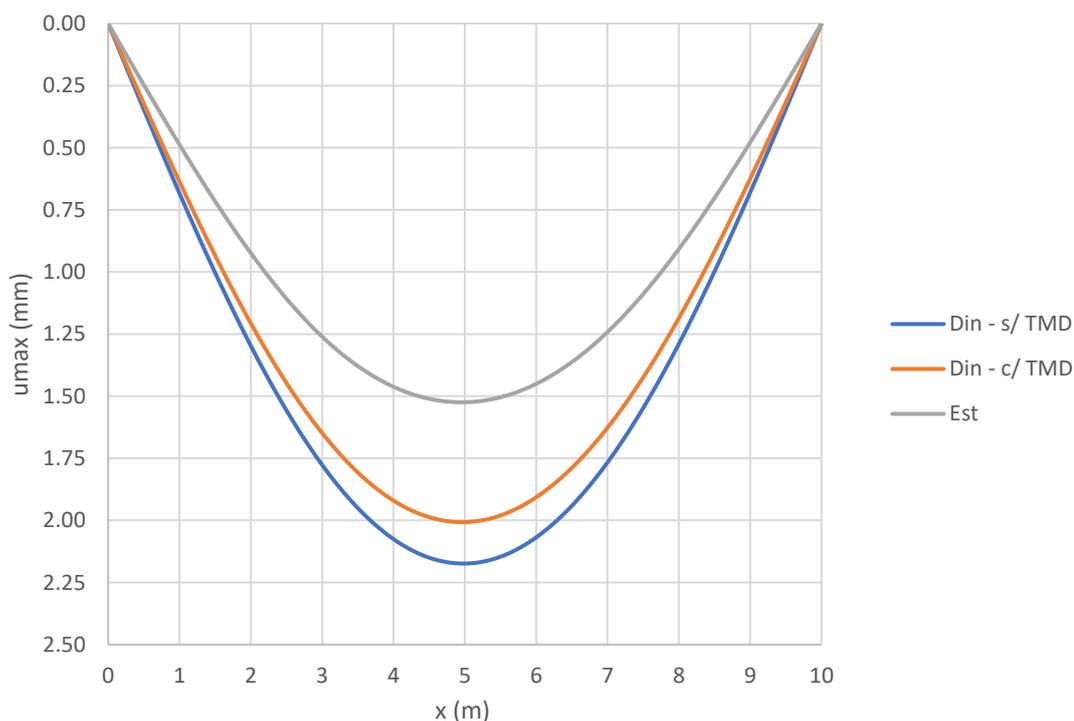


Figura 7.2 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2C

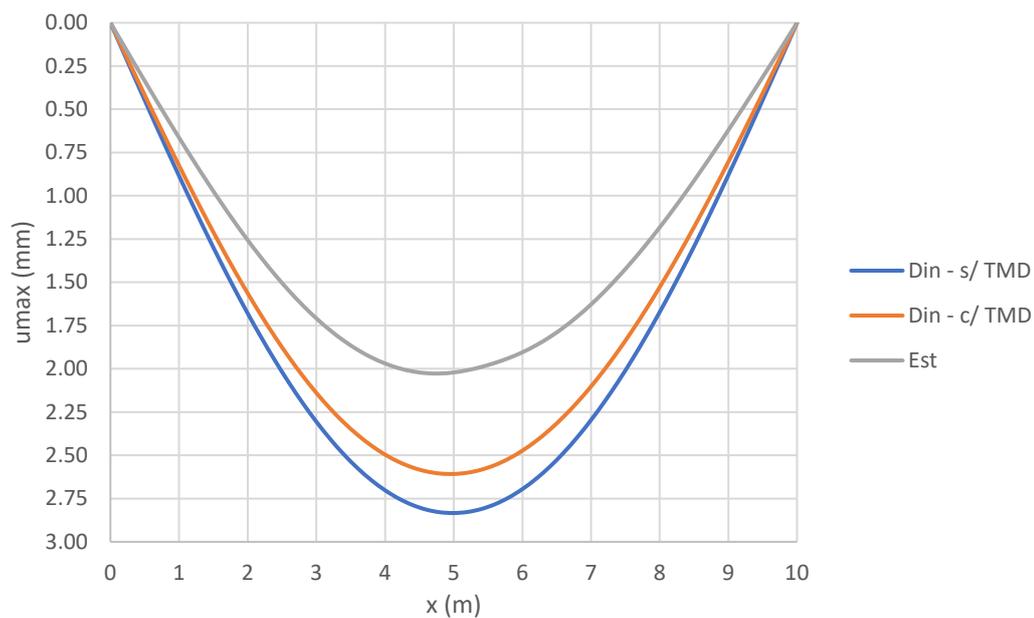


Figura 7.3 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 3C

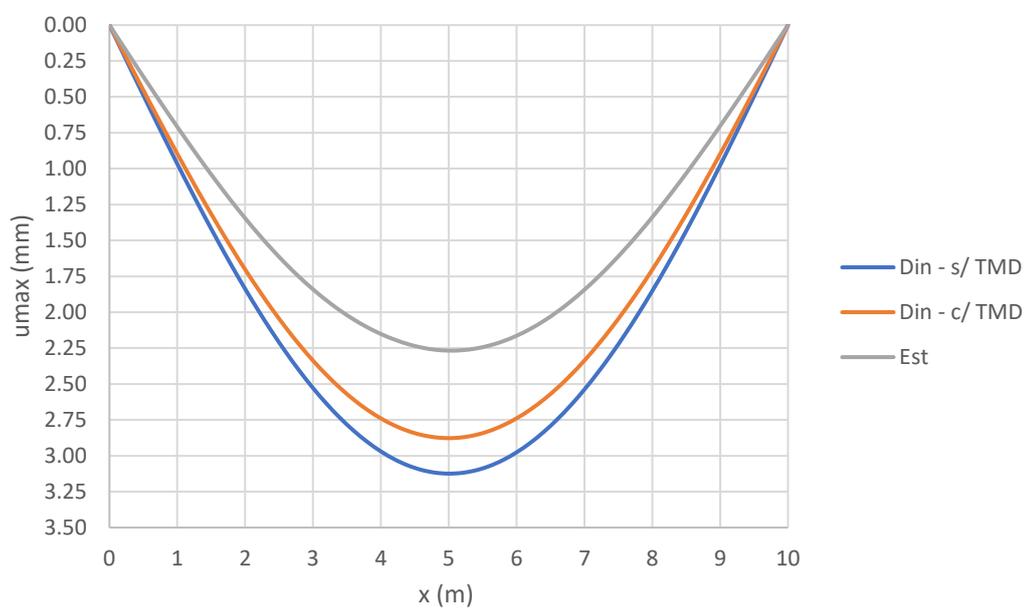


Figura 7.4 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2S3

## 7.2 RESULTADOS DO DIMENSIONAMENTO ROBUSTO DE UM TMD PARA UMA DEPRESSÃO EXISTENTE NA ENTRADA DA PONTE

De acordo com as curvas de convergência do deslocamento máximo da ponte e suas respectivas variâncias, para a situação em que o pavimento da ponte é uma depressão em sua entrada, ficou definido que para se obter uma resposta estável seria necessário utilizar 250 amostras para cada uma das variáveis consideradas aleatórias na modelagem do problema.

Com isso, na sub-rotina de otimização foram mantidos os mesmos 10 agentes de busca e as 25 iterações para cada um dos veículos analisados, o que resultou em 62.500 operações para que o processo de otimização fosse concluído.

O problema de otimização solucionado nessa análise foi o mesmo apresentado na eq. (7.1), sendo que os principais resultados obtidos estão apresentados na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Resultados da otimização robusta considerando a existência de uma depressão na entrada da ponte

Veículo		2C	3C	2S3
$\bar{u}_{est}$ (mm)		1,5167	1,9837	2,2268
Sem TMD	$\bar{u}_{din}$ (mm)	3,1883	3,5565	3,7641
	FAD	2,10	1,79	1,69
Com TMD	$\bar{u}_{din}$ (mm)	2,5838	3,0474	3,2521
	FAD	1,70	1,54	1,46
Redução (%)		18,96	14,32	13,60
$k_{TMD}$ (kN/m)		6.066,69	8.098,68	6.208,30
$c_{TMD}$ (kNs/m)		0,00	16,2733	18,1507
$m_{TMD}$ (kg)		1.301,25	1.301,25	1.301,25
$f_{sint}$ (Hz)		10,87	12,56	10,99
Tempo execução (dias)		5,33	3,13*	8,58

\*A simulação realizada com o veículo 3C levou 3 dias para ser concluída pois foi feita com a versão paralelizada do código desenvolvido na tese. Até então, todas as outras simulações foram executadas de forma sequencial.

Diferentemente do que ocorreu no dimensionamento do TMD para passagem dos veículos sobre pavimento irregular, os resultados das análises aqui apresentadas mostraram que o algoritmo de otimização conseguiu cumprir sua função em minimizar o deslocamento máximo da ponte, porém o FAD ficou acima do  $Civ$  em todos os casos analisados.

O motivo para isso ter ocorrido está relacionado com a ressonância, como pode ser observado no espectro de potência mostrado na Figura 7.5. Seu cálculo foi feito por meio da Transformada Rápida de Fourier (FFT – sigla em inglês) para o deslocamento no tempo do nó central da ponte referente as análises feitas para cada veículo.

Desta maneira, é possível notar que a faixa de frequência com maior intensidade ocorre entre 10 Hz e 15 Hz e abrange a frequência natural da estrutura, que é 12,95 Hz. Tal fato também corrobora com o que foi observado nas análises realizadas no item 6.1.3 do Capítulo 6, irregularidades como ressalto e depressão amplificam bastante a magnitude do deslocamento da ponte.

Em adição a isso, tem-se o fato de que a largura e a profundidade da depressão também são variáveis aleatórias e influenciam de forma significativa a resposta dinâmica da estrutura (ver Tabela 6.12). Conforme apresentado na seção anterior, um problema de otimização com muitas variáveis aleatórias interfere na maneira de como o processo de otimização faz a busca da melhor resposta.

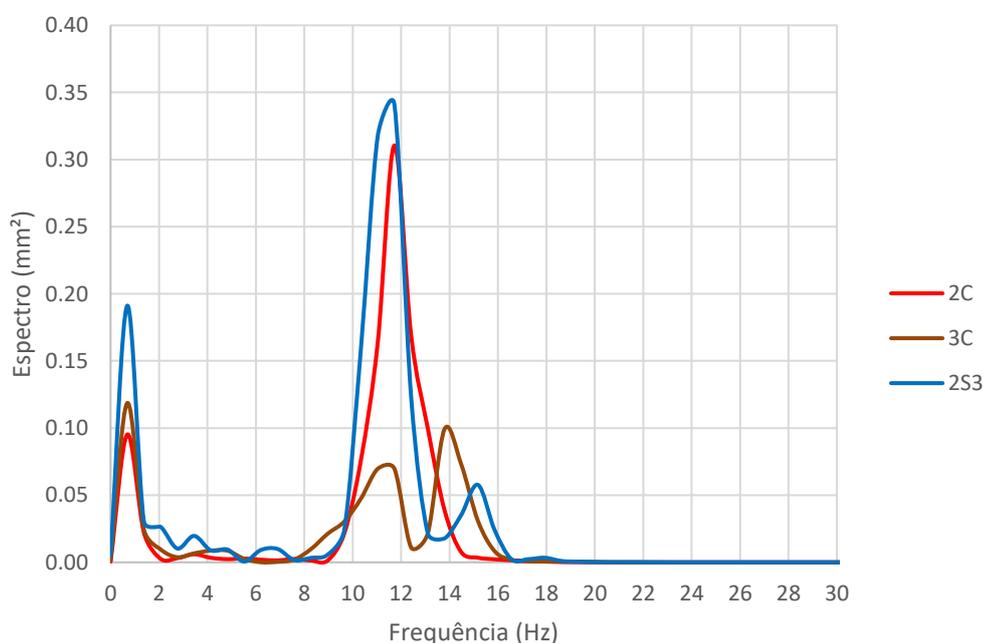


Figura 7.5 – Espectro de potência do deslocamento no tempo do nó central da ponte, sem o uso do TMD para amostra nº 250 de cada veículo

Nas Figuras 7.6 a 7.8 são apresentados os gráficos com os deslocamentos máximos médios nos nós da ponte para análise estática (curva cinza), análise dinâmica sem TMD (curva azul), análise dinâmica com TMD (curva laranja) relativos às passagens dos veículos 2C, 3C e 2S3.

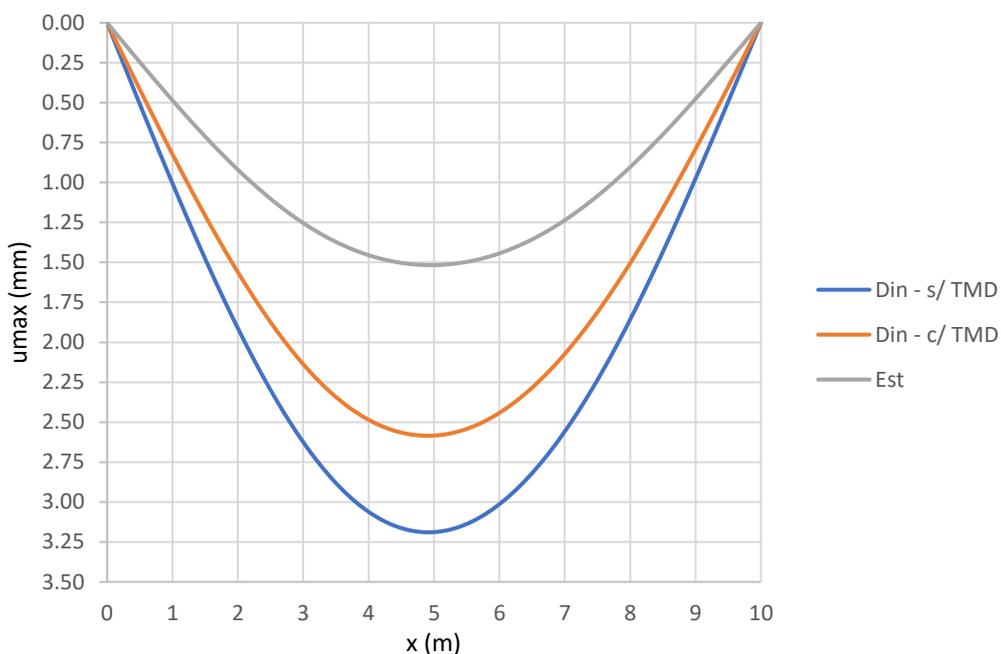


Figura 7.6 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2C

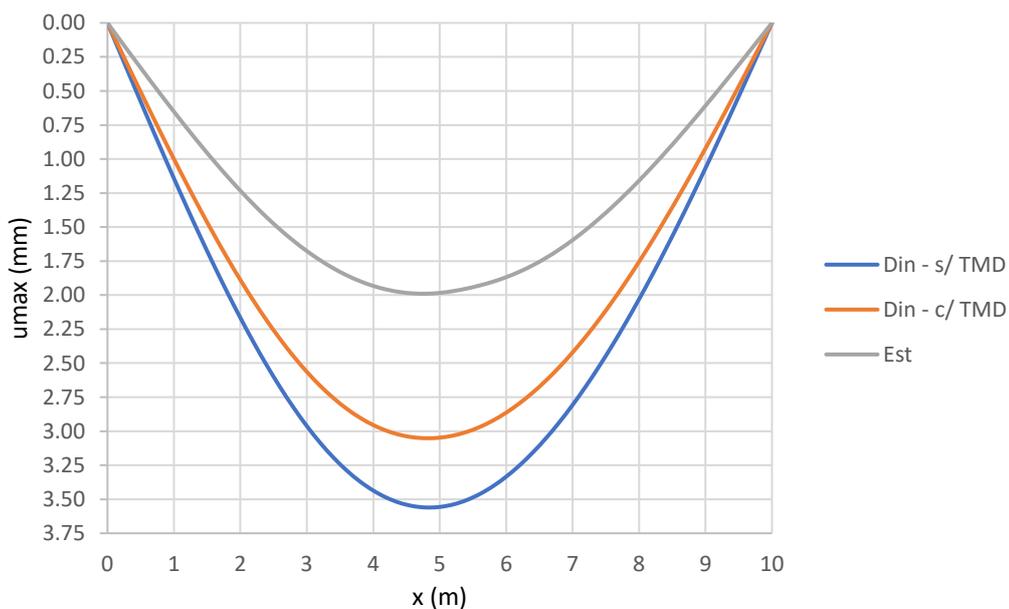


Figura 7.7 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 3C

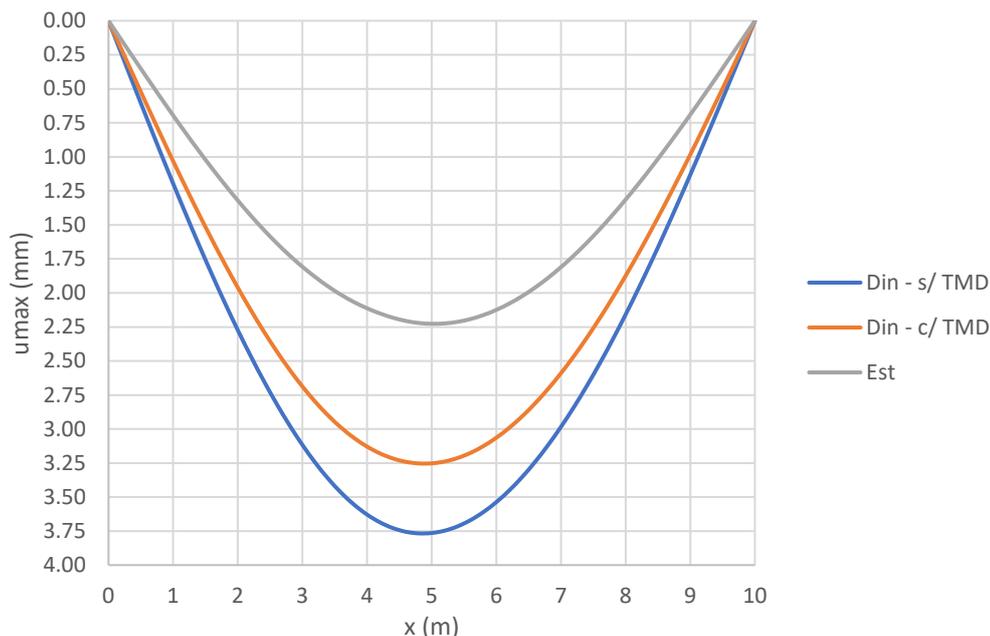


Figura 7.8 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2S3

### 7.3 RESULTADOS DO DIMENSIONAMENTO ROBUSTO DE MÚLTIPLOS TMD'S PARA UMA DEPRESSÃO EXISTENTE NA ENTRADA DA PONTE

A partir do que foi observado nos resultados dos itens 7.1 e 7.2 do Capítulo 7, as simulações feitas com a depressão na entrada da ponte não apresentaram resultados satisfatórios, no sentido de reduzir o FAD pelo menos até o valor do *Civ*.

Buscando atingir este valor com a utilização de sistemas passivos de controle de vibrações, as análises realizadas nessa seção consistem em dimensionar e instalar na estrutura 3 TMD's a fim de verificar se nessa nova configuração é possível melhorar ainda mais a resposta dinâmica da ponte.

Sendo assim, serão consideradas duas situações de otimização, a saber: (i) dimensionar 3 TMD's com propriedades iguais e sintonizados na mesma frequência e (ii) dimensionar 3 TMD's com propriedades que podem ser diferentes e sintonizado em frequências que também podem ser diferentes. Quanto à localização, esses TMD's serão instalados nos nós da ponte localizados em 4,8 m, 5 m e 5,2 m.

Para situação (i) o problema de otimização a ser resolvido é o seguinte:

$$\begin{aligned}
& \text{Encontrar} && \vec{x} = [k_{TMD}, c_{TMD}] \\
& \text{Minimize} && \bar{u}_{max} = E[u_{max}(\vec{x})] \\
& \text{Sujeito a} && 0 \leq k_{TMD} \leq 1.10^8 \text{ N/m} \\
& \quad \square && 0 \leq c_{TMD} \leq 1.10^5 \text{ Ns/m} \\
& \quad \square && m_{TMD} = 0,01M_e \text{ kg}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

No caso da situação (ii), o problema a ser resolvido está representado na equação a seguir:

$$\begin{aligned}
& \text{Encontrar} && \vec{x} = [k_{TMD}^i \quad c_{TMD}^i \quad m_{TMD}^i], \quad i = 1, 2, 3 \\
& \text{Minimize} && \bar{u}_{max} = E[u_{max}(\vec{x})] \\
& \text{Sujeito a} && 0 \leq k_{TMD}^i \leq 1.10^8 \text{ N/m}, \quad i = 1, 2, 3 \\
& \quad \square && 0 \leq c_{TMD}^i \leq 1.10^5 \text{ Ns/m}, \quad i = 1, 2, 3 \\
& \quad \square && m_{TMD}^i = 0,01M_e \text{ kg}, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Os parâmetros utilizados no algoritmo de otimização para busca da resposta são os mesmos utilizados nas análises feitas na seção anterior da tese.

Os resultados principais da análise da situação (i) estão resumidos na Tabela 7.3.

Tabela 7.3 – Resultados da otimização robusta dos múltiplos TMD's considerando a existência de uma depressão na entrada da ponte para situação (i)

Veículo		2C	3C	2S3
$\bar{u}_{est} \text{ (mm)}$		1,5167	1,9837	2,2268
<b>Sem TMD</b>	$\bar{u}_{din} \text{ (mm)}$	3,1883	3,5565	3,7641
	FAD	2,10	1,79	1,69
<b>Com TMD</b>	$\bar{u}_{din} \text{ (mm)}$	2,5849	3,0482	3,2529
	FAD	1,70	1,54	1,46
Redução (%)		18,93	14,29	13,58
$k_{TMD} \text{ (kN/m)}$		2.023,35	2.701,19	2.067,59
$c_{TMD} \text{ (kNs/m)}$		0	5,3948	6,0336
$m_{TMD} \text{ (kg)}$		433,75	433,75	433,75
$f_{sint} \text{ (Hz)}$		10,87	12,56	10,99
Tempo execução (dias)		2,83	3,70	5,14

Nota-se que os resultados apresentados na Tabela 7.3 para solução do problema de otimização da eq. (7.2) não apresentou um resultado muito diferente dos obtidos na Tabela 7.2, o que significa que a utilização de múltiplos TMD's na estrutura não é a solução ideal para aumentar

a redução no deslocamento máximo da ponte, mas por outro lado essa pode ser uma solução viável do ponto de vista construtivo.

Fazendo o mesmo para a situação (ii), após a resolução do problema de otimização proposto na eq. (7.3), tem-se como resultados os valores mostrados na Tabela 7.4.

Tabela 7.4 – Resultados da otimização robusta dos múltiplos TMD's considerando a existência de uma depressão na entrada da ponte para situação (ii)

Veículo		2C	3C	2S3
$\bar{u}_{est}$ (mm)		1,5167	1,9837	2,2268
Sem TMD	$\bar{u}_{din}$ (mm)	3,1883	3,5565	3,7641
	FAD	2,10	1,79	1,69
Com TMD	$\bar{u}_{din}$ (mm)	2,7003	3,0692	3,4221
	FAD	1,78	1,55	1,54
Redução (%)		15,31	13,70	9,09
Posição $x = 4,8$ m	$k_{TMD}^1$ (kN/m)	959,6863	2.188,46	3.337,24
	$c_{TMD}^1$ (kNs/m)	17,1283	0,1807	3,5950
	$m_{TMD}^1$ (kg)	433,75	433,75	433,75
	$f_{sint}^1$ (Hz)	7,49	11,30	14,04
Posição $x = 5$ m	$k_{TMD}^2$ (kN/m)	2.053,87	3.501,17	1.999,27
	$c_{TMD}^2$ (kNs/m)	0,00	0,4716	0
	$m_{TMD}^2$ (kg)	433,75	433,75	433,75
	$f_{sint}^2$ (Hz)	10,95	14,30	10,81
Posição $x = 5,2$ m	$k_{TMD}^3$ (kN/m)	2.501,73	1.927,14	54.957,14
	$c_{TMD}^3$ (kNs/m)	0,5944	68,9813	0,7476
	$m_{TMD}^3$ (kg)	433,75	433,75	433,75
	$f_{sint}^3$ (Hz)	12,09	10,81	56,65
Tempo execução (dias)		2,59	3,61	5,14

Em relação aos resultados apresentados na Tabela 7.4, verifica-se que os valores obtidos pelo processo de otimização também não melhoraram o deslocamento máximo no centro da ponte, sendo que os deslocamentos aqui apresentados foram superiores aos obtidos na situação (i).

Dentre os veículos considerados, apenas à simulação com o veículo 3C os resultados gerados pelo processo de otimização apresentaram valores consistentes para os 3 TMD's dimensionados, ou seja, sintonizados dentro da faixa de frequência que mais excita a estrutura (intervalo de 10 Hz a 15 Hz, conforme mostra a Figura 7.4) e com deslocamento máximo próximo ao obtido com o uso de 1 TMD. Para os demais veículos, 2C e 2S3 o dimensionamento dos TMD's foi consistente em pelo duas das posições, sendo que na posição onde o resultado não foi consistente, o TMD dimensionado contribui apenas com aumento da

massa na estrutura, pois sua frequência de sintonização está fora da faixa de frequências de excitação da estrutura.

Com base nos resultados obtidos, tentar reduzir o deslocamento da ponte com um pavimento que representa uma depressão utilizando apenas TMD's não é solução ideal para que esse deslocamento máximo apresente um valor que pelo menos iguale o valor do FAD com o *Civ*. Para que isso ocorra, deve ser estudado a utilização de um outro tipo de sistema passivo e se mesmo assim não for obtida uma melhora nos resultados, investigar a possibilidade de se utilizar um sistema puramente ativo ou um sistema híbrido aproveitando o sistema passivo já dimensionado.

Sobre o tempo computacional, ressalta-se que todas as análises realizadas nessa seção foram executadas com a versão paralelizada do código, fato que pode ser comprovado com a observação do tempo de execução mostrado nas Tabelas 7.3 e 7.4. Ao comparar os tempos de execução das versões paralela e sequencial (resultados mostrados na Tabela 7.2) para veículos 2C e 2S3 conclui-se que a paralelização do cálculo da função objetivo fez o tempo execução do programa ser reduzido, em média, 49,16 % para o veículo 2C e 40,09% para o veículo 2S3, mostrando que a paralelização pode ser uma alternativa viável para aplicação da metodologia proposta neste trabalho em problemas de otimização robusta maiores.

Ao utilizar o recurso da paralelização, isso fez com que a execução do código passasse a utilizar de maneira mais eficiente os processadores disponíveis no computador, fato que foi responsável pela redução no tempo de execução do processo de otimização. A utilização deste recurso torna viável a aplicação da metodologia apresentada nesta tese para o dimensionamento de TMD's em estruturas maiores ou discretizadas com outros tipos de elementos finitos que necessitem de malhas mais refinadas.

Da Figura 7.9 a 7.11 são apresentados os deslocamentos máximos médios dos nós da ponte para cada veículo, para análise estática (curva cinza), análise dinâmica sem TMD (curva azul), análise dinâmica para situação (i) (curva laranja) e análise dinâmica para situação (ii) (curva verde).

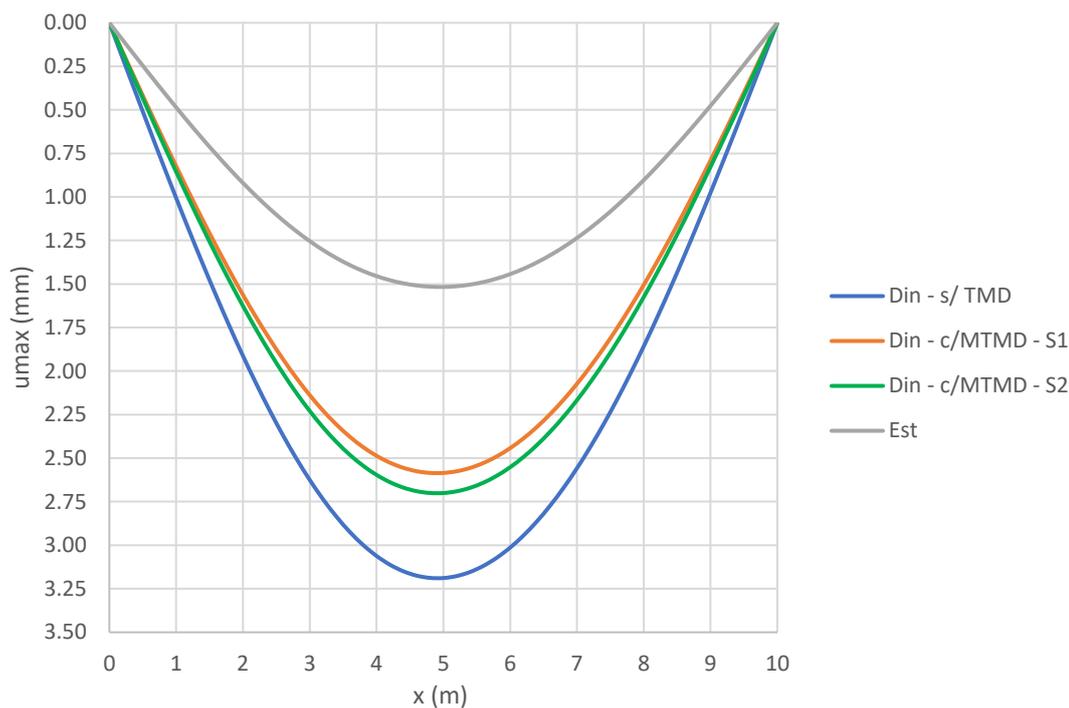


Figura 7.9 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2C para as duas situações de dimensionamento dos TMD's

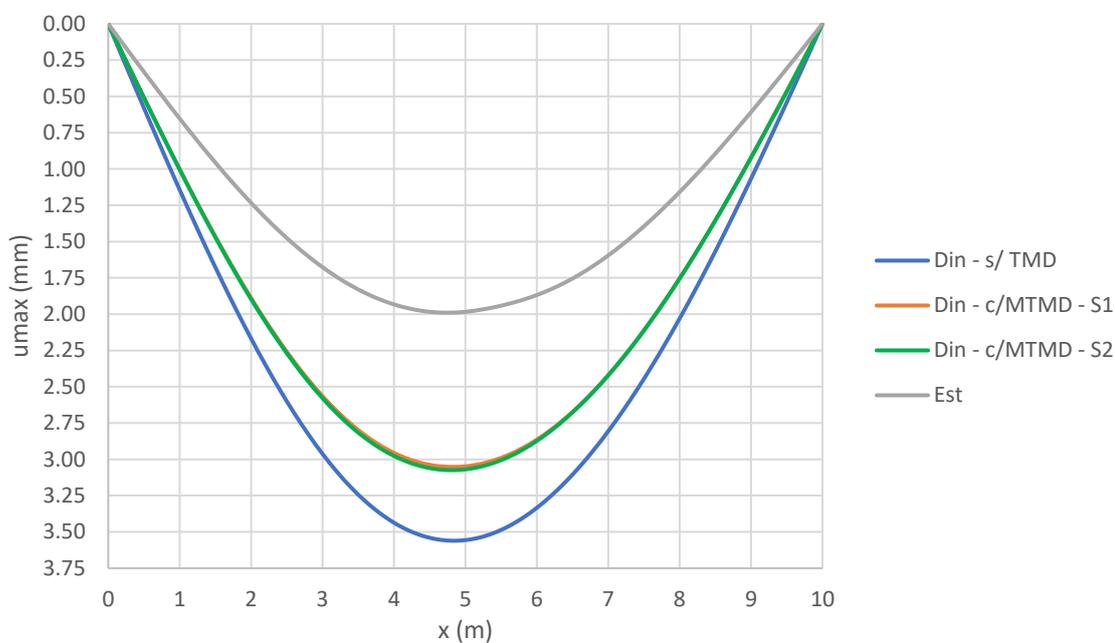


Figura 7.10 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 3C para as duas situações de dimensionamento dos TMD's

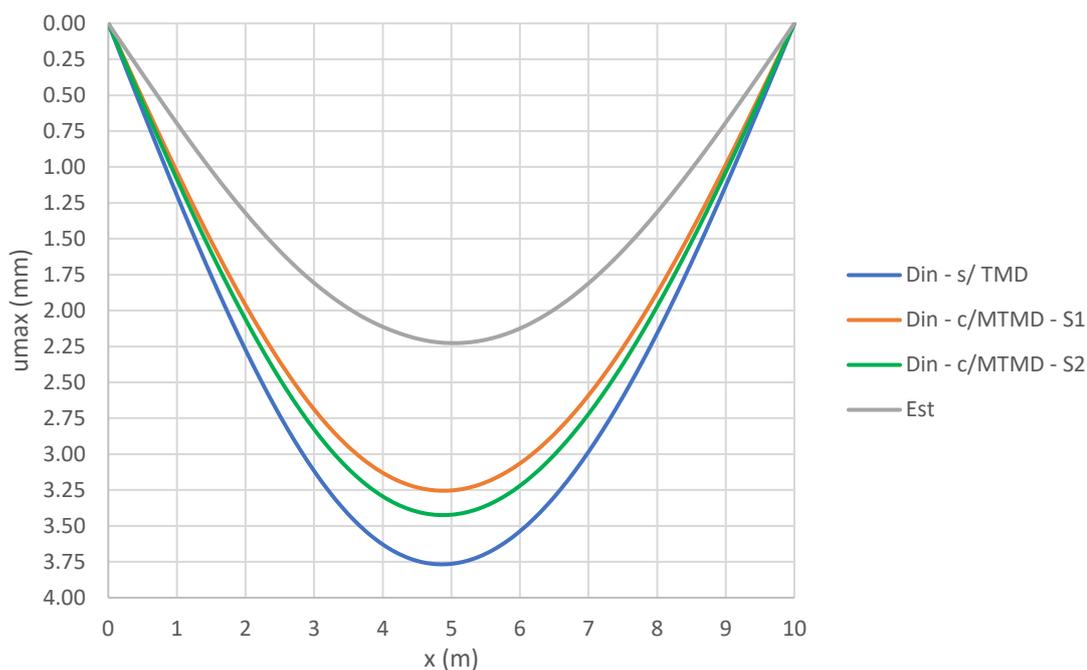


Figura 7.11 – Deslocamentos máximos médios nos nós da ponte relativos à passagem do veículo 2S3 para as duas situações de dimensionamento dos TMD's

#### 7.4 ANÁLISE DE VALORES EXTREMOS PARA OS RESULTADOS DA PONTE COM O PAVIMENTO IRREGULAR

Depois de realizar alguns cenários possíveis de dimensionamento do sistema passivo de controle de vibrações utilizado na ponte, nesta seção estudam-se os valores extremos do deslocamento máximo da ponte e com base nos valores estimados para os parâmetros da função GEV, calculam-se o valor limite para o deslocamento máximo da ponte e a probabilidade de um determinado valor de deslocamento ser excedido.

Sendo assim, foram utilizadas 500 amostras de todas as variáveis aleatórias consideradas na modelagem do problema. Esse número de amostras representa tem a finalidade de representar um veículo de um dos tipos considerados na análise cruzando a ponte por dia. A geração destas amostras foi feita com uma semente diferente da utilizada na resolução dos problemas de otimização das eqs. (7.1), (7.2) e (7.3).

Para obtenção dos deslocamentos máximos da ponte com o TMD instalado, resolveu-se a equação de movimento do sistema veículo-estrutura-pavimento-TMD (ver equação 3.67) pelo

método de Newmark e para cada uma das amostras guardou-se o deslocamento máximo obtido para o nó central da ponte.

A Tabela 7.5 apresenta as principais estatísticas dos valores obtidos para as 500 amostras.

Tabela 7.5 – Estatísticas dos resultados do deslocamento máximo do nó central da ponte para cada veículo e para situação com pavimento irregular

Veículo	2C	3C	2S3
Média (mm)	2,0083	2,6083	2,8828
Desvio Padrão (mm)	0,6553	0,9591	0,9610
Coefficiente de Variação	0,3263	0,3677	0,3333
Assimetria	0,3095	0,4074	0,4788
Curtose	2,7040	2,7477	2,9380
Máximo (mm)	4,0656	5,7277	6,0254
Mínimo (mm)	0,6987	0,7508	1,0558

Utilizando a função “*gevfit*” do pacote estatístico da linguagem de programação Octave, que utiliza o método da Máxima Verossimilhança para estimar os valores dos coeficientes de forma ( $\xi$ ), localização ( $\hat{\mu}$ ) e escala ( $\hat{\sigma}$ ), foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 7.6 – Coeficientes de forma, localização e escala, tipo de distribuição e resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov para cada veículo

Veículo	$\xi$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	Tipo	KS Teste	Valor Crítico
2C	-0,1790	1,7475	0,6087	Weibull	0,0325	0,0608
3C	-0,1415	2,2121	0,8635	Weibull	0,0366	
2S3	-0,1243	2,4801	0,8538	Weibull	0,0278	

Para um total de 500 amostras e nível de confiança de 5%, o valor da estatística crítica do teste de Kolmogorov-Smirnov é:  $1,36/\sqrt{500} = 0,0608$  (NAGHETTINI; PINTO, 2007).

Nota-se que para os coeficientes estimados para distribuição de valores de cada veículo, o valor encontrado no teste de Kolmogorov-Smirnov ficou abaixo do valor crítico. Isso significa que os valores obtidos para os coeficientes da distribuição GEV estão adequados aos dados utilizados no cálculo. Tal fato é comprovado graficamente por meio do histograma, gráficos PP-plot e QQ-plot, conforme mostram as Figuras 7.12, 7.13 e 7.14.

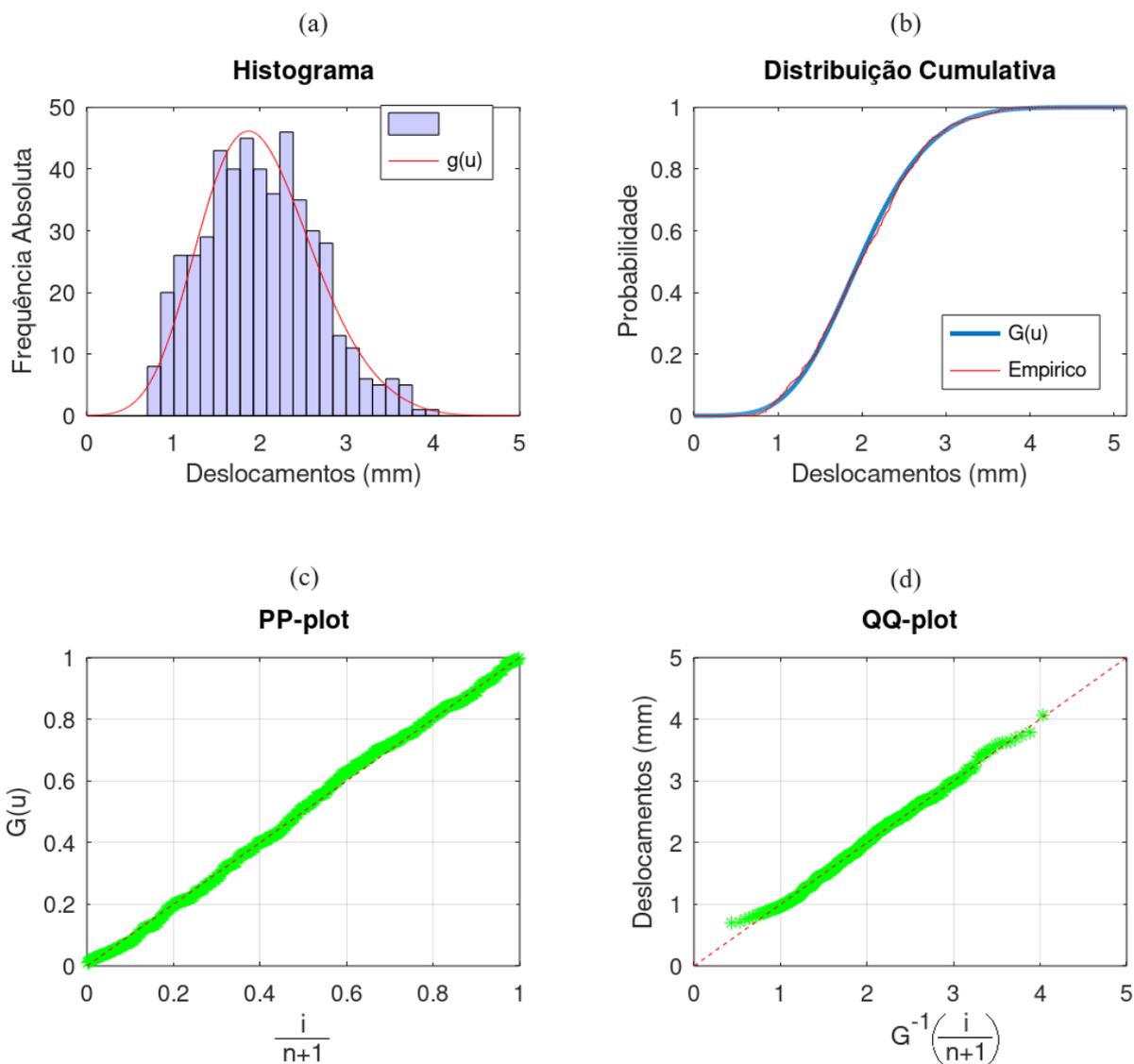


Figura 7.12 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 2C referentes a análise com pavimento irregular

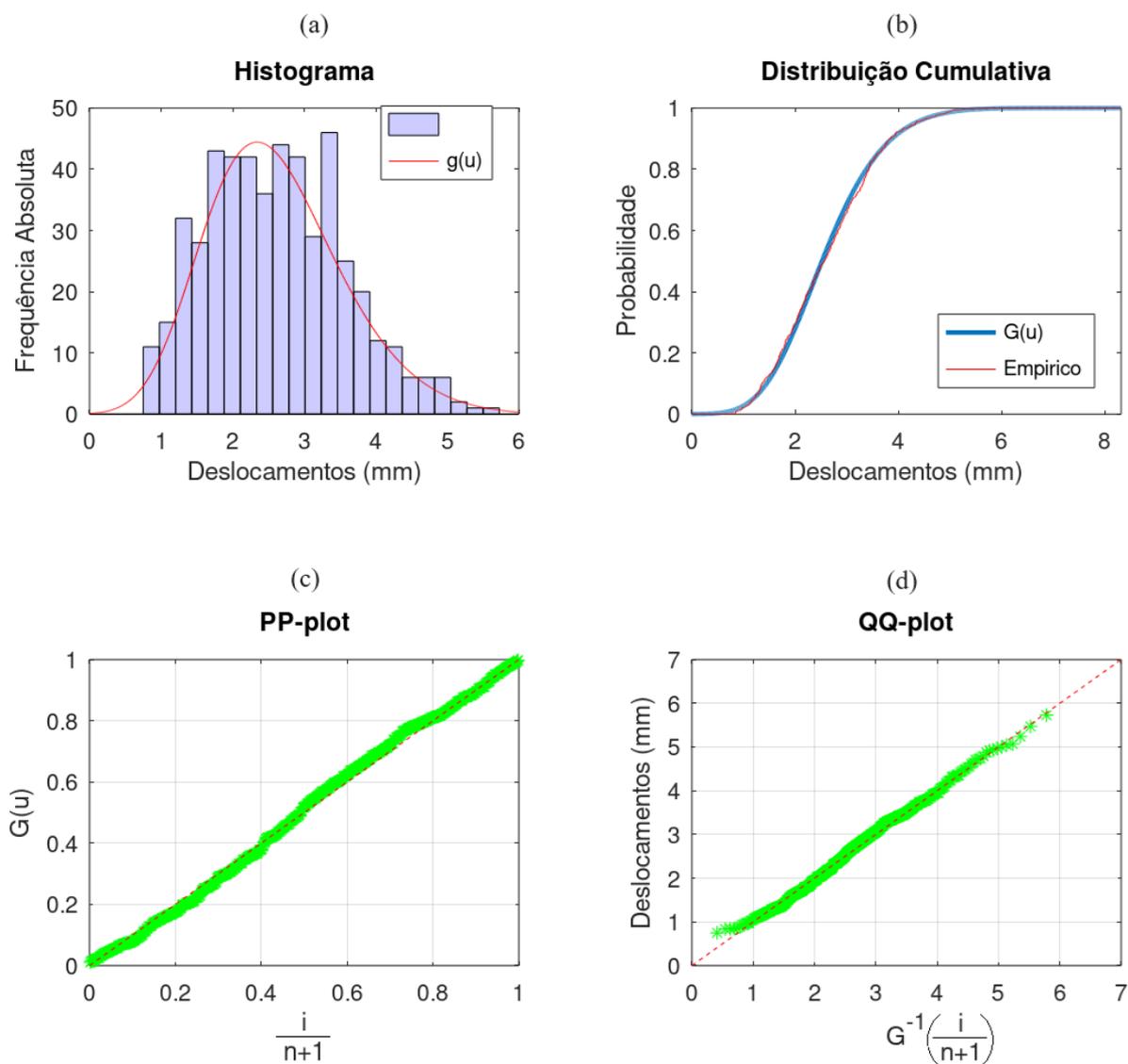


Figura 7.13 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 3C referentes a análise com pavimento irregular

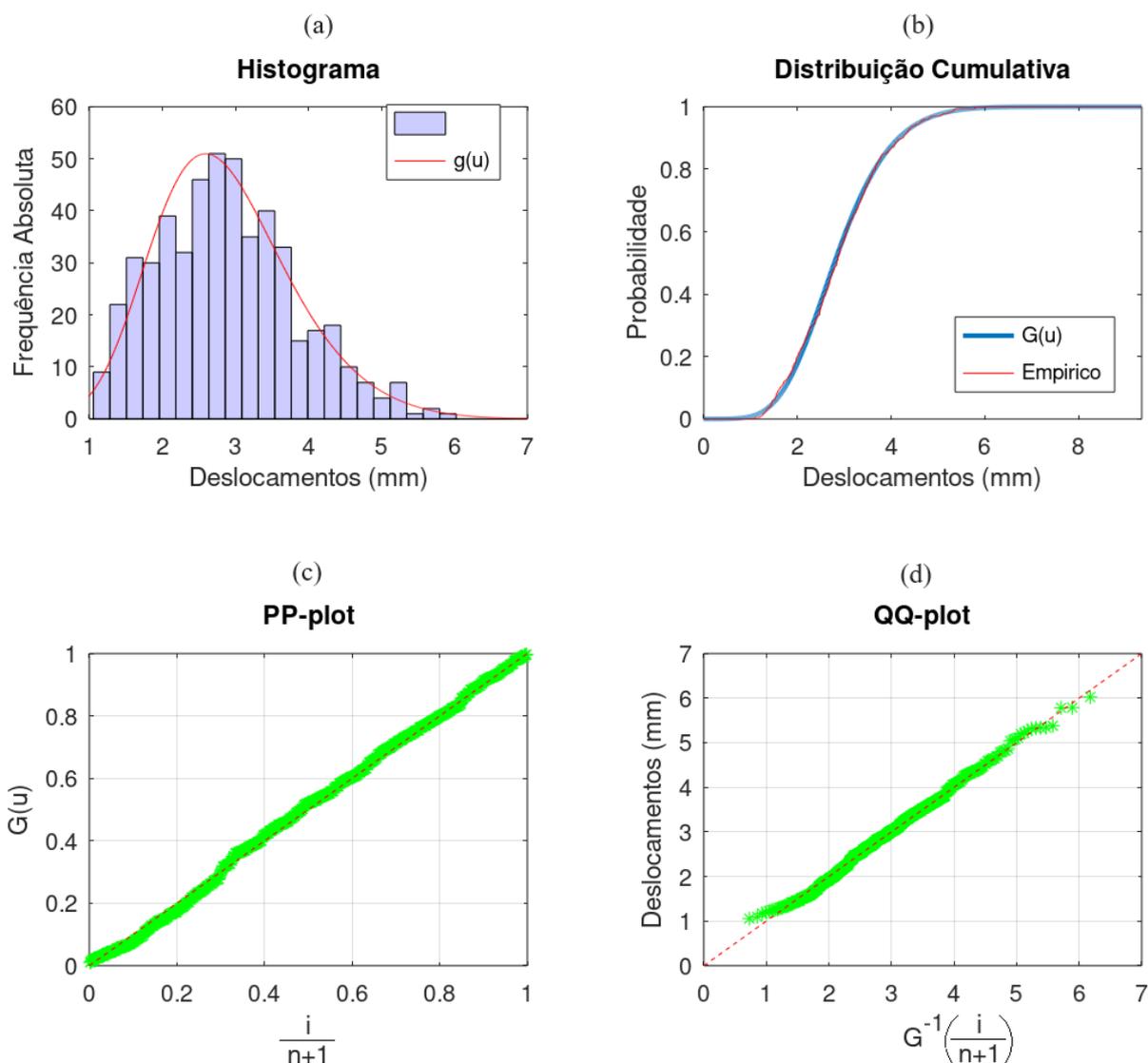


Figura 7.14 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 2S3 referentes a análise com pavimento irregular

Ainda sobre as informações apresentadas na Tabela 7.6, como o valor de  $\hat{\xi}$  para todos os veículos resultou em valores negativos, a distribuição GEV que se encaixa nos dados relativos ao deslocamento máximo da ponte da ponte é a Weibull, o que significa que a distribuição possui um limite superior, ou seja, ao longo de sua vida útil, a ponte poderá ser submetida a passagem de um veículo que causará o máximo deslocamento possível com o TMD instalado.

O motivo que fez com que o valor de  $\hat{\xi}$  resultasse em um número negativo está relacionado com as variáveis aleatórias que possuem distribuições limitadas em intervalos de valores mínimos e máximos, como é o caso da velocidade e massa dos veículos e irregularidades do pavimento. O comportamento das distribuições utilizadas para gerar os valores destas

variáveis influenciou na maneira como os deslocamentos máximos da ponte se distribuem de modo que a função de valores de valores extremos que melhor representa esses dados deve ser a de Weibull.

Para calcular o valor limite da, deve-se inverter a distribuição cumulativa de probabilidade da função GEV, apresentada na equação:

$$G(x) = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, \xi \neq 0 \quad (7.4)$$

Invertendo a função da eq. (7.4), tem-se que:

$$G^{-1}(x) = \mu - \frac{\sigma}{\xi}\{1 - [-\ln(x)]^{-\xi}\}, \quad \xi \neq 0 \quad (7.5)$$

onde,

$G^{-1}(x)$ : função inversa da distribuição cumulativa de valores extremos;

$x$ : valor da probabilidade de ocorrência de algum evento.

Para obter o valor limite da distribuição GEV, tem-se que  $\ln(x) \rightarrow 0$ . Isso só ocorre quando o valor da probabilidade de algum evento ocorrer for exatamente  $x = 1$ .

Fazendo essas considerações e retornando ao objetivo da análise de valores extremos proposta neste trabalho, o valor do deslocamento limite ( $u_{lim}$ ), passa a ser calculado como:

$$u_{lim} = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \quad (7.6)$$

Substituindo os valores estimados para os parâmetros da função GEV obtidos para cada veículo, obtém-se os valores mostrados na Tabela 7.7 para os deslocamentos máximos limite da ponte

Tabela 7.7 – Deslocamentos máximos limite da ponte com o TMD instalado para cada veículo

Veículo	2C	3C	2S3
$u_{lim} (mm)$	5,1492	8,3143	9,3467

Para cada veículo, o deslocamento dinâmico máximo ao qual a ponte deverá ser submetida para que o FAD não seja excedido (aqui chamado de deslocamento admissível) vale: 2,101 mm, 2,754 mm e 3,087 mm, para os veículos 2C, 3C e 2S3, respectivamente.

Com base nos parâmetros calculados para a função GEV, é possível quantificar a probabilidade de o deslocamento admissível da ponte ser superado. Isso é feito da seguinte maneira:

$$P(u \geq u_{adm}) = [1 - G(u_{adm})]. 100\% \quad (7.7)$$

onde,

$u_{adm}$ : deslocamento admissível para que o FAD fique no limite imposto pela NBR 7188 (ABNT, 2024). Essa variável é calculada fazendo o produto entre  $Civ$  e o deslocamento estático máximo da estrutura.

$P(u \geq u_{adm})$ : probabilidade de um deslocamento máximo da ponte com o TMD instalado superar o valor admissível;

$G(u_{adm})$ : valor da função cumulativa de probabilidade da distribuição GEV para o deslocamento admissível.

Assim, utilizando a eq. (7.7) e a eq. (7.4) verifica-se que a probabilidade de um dado deslocamento máximo da ponte com o TMD instalado e submetida a passagem de cada um dos veículos considerados valem 41,8%, 40,5% e 37,8%, respectivamente.

Os resultados dessa análise indicam que a probabilidade do deslocamento máximo exceder o valor admissível é de 40%, o que em média, significa dizer que o sistema passivo de controle de vibrações proposto para solucionar os problemas referentes aos deslocamentos causados pelas passagens dos veículos na ponte possui desempenho satisfatório.

## 7.5 ANÁLISE DE VALORES EXTREMOS PARA OS RESULTADOS DA PONTE COM UMA DEPRESSÃO EM SUA ENTRADA

Essa seção dedica-se a apresentação da análise dos valores extremos do deslocamento máximo no centro da ponte para situação em que apenas um TMD foi instalado na estrutura a fim de atenuar as vibrações causadas pela existência de uma depressão em sua entrada. As análises feitas com múltiplos TMD's não serão contempladas nesse estudo pois, os resultados não foram muito diferentes dos resultados obtidos com apenas um TMD instalado na ponte.

Novamente foram utilizadas 500 amostras de todas as variáveis aleatórias consideradas na modelagem do problema, porém essas amostras também foram geradas com uma semente diferente, para simular a ponte em situação de serviço.

Ademais, toda parte matemática envolvida na geração dos resultados dessa seção da tese foi desenvolvida de modo similar ao que foi feito na seção anterior para a ponte com pavimento irregular.

Com isso, a Tabela 7.8 apresenta as principais estatísticas dos valores obtidos para as 500 amostras.

Tabela 7.8 – Estatísticas dos resultados do deslocamento máximo do nó central da ponte para cada veículo para situação com a depressão em sua entrada

Veículo	2C	3C	2S3
Média (mm)	2,6845	3,1889	3,4052
Desvio Padrão (mm)	0,8351	1,0036	1,0697
Coefficiente de Variação	0,3111	0,3147	0,3141
Assimetria	0,4393	0,2642	0,2556
Curtose	3,9936	2,9097	3,0230
Máximo (mm)	7,0699	6,7853	7,8164
Mínimo (mm)	0,8509	1,0031	1,0366

Utilizando a função “*gevfit*” do pacote estatístico da linguagem de programação Octave, que utiliza o método da Máxima Verossimilhança para estimar os valores dos coeficientes de forma ( $\xi$ ), localização ( $\mu$ ) e escala ( $\hat{\sigma}$ ), foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 7.9 – Coeficientes de forma, localização e escala, tipo de distribuição e resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov para cada veículo

Veículo	$\xi$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	Tipo	KS Teste	Valor Crítico
2C	-0,1268	2,3330	0,7718	Weibull	0,0349	0,0608
3C	-0,1844	2,7908	0,9468	Weibull	0,0353	
2S3	-0,1706	2,9729	1,0083	Weibull	0,0298	

Conforme se percebe nos resultados do Teste de Kolmogorov-Smirnov da Tabela 7.9 todos os valores ficaram abaixo do valor crítico. Isso significa que os valores obtidos para os coeficientes da distribuição GEV estão adequados aos dados utilizados no cálculo e isso é comprovado graficamente por meio do histograma, gráficos PP-plot e QQ-plot, conforme mostram as Figuras 7.15, 7.16 e 7.17.

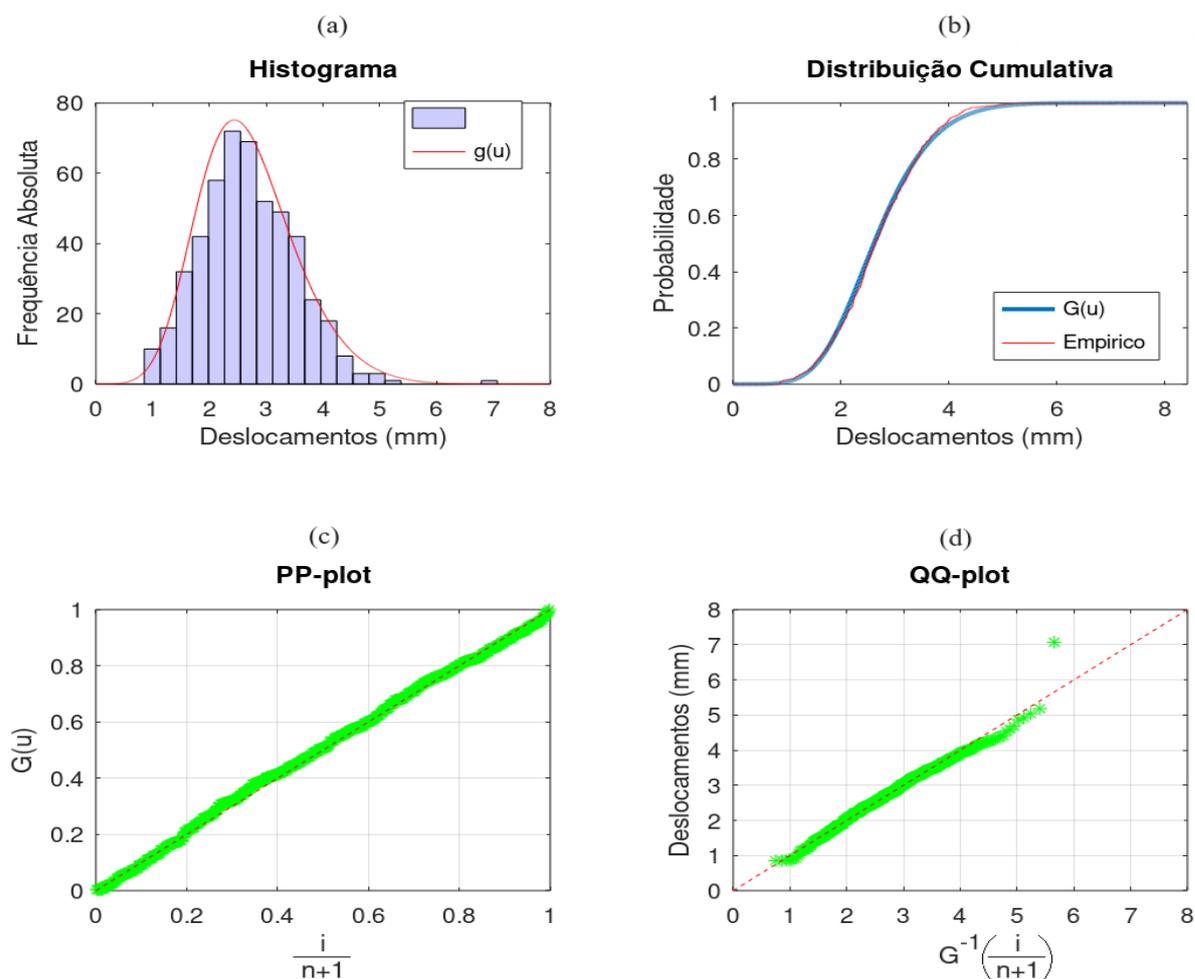


Figura 7.15 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 2C referente a análise com o a depressão na entrada da ponte

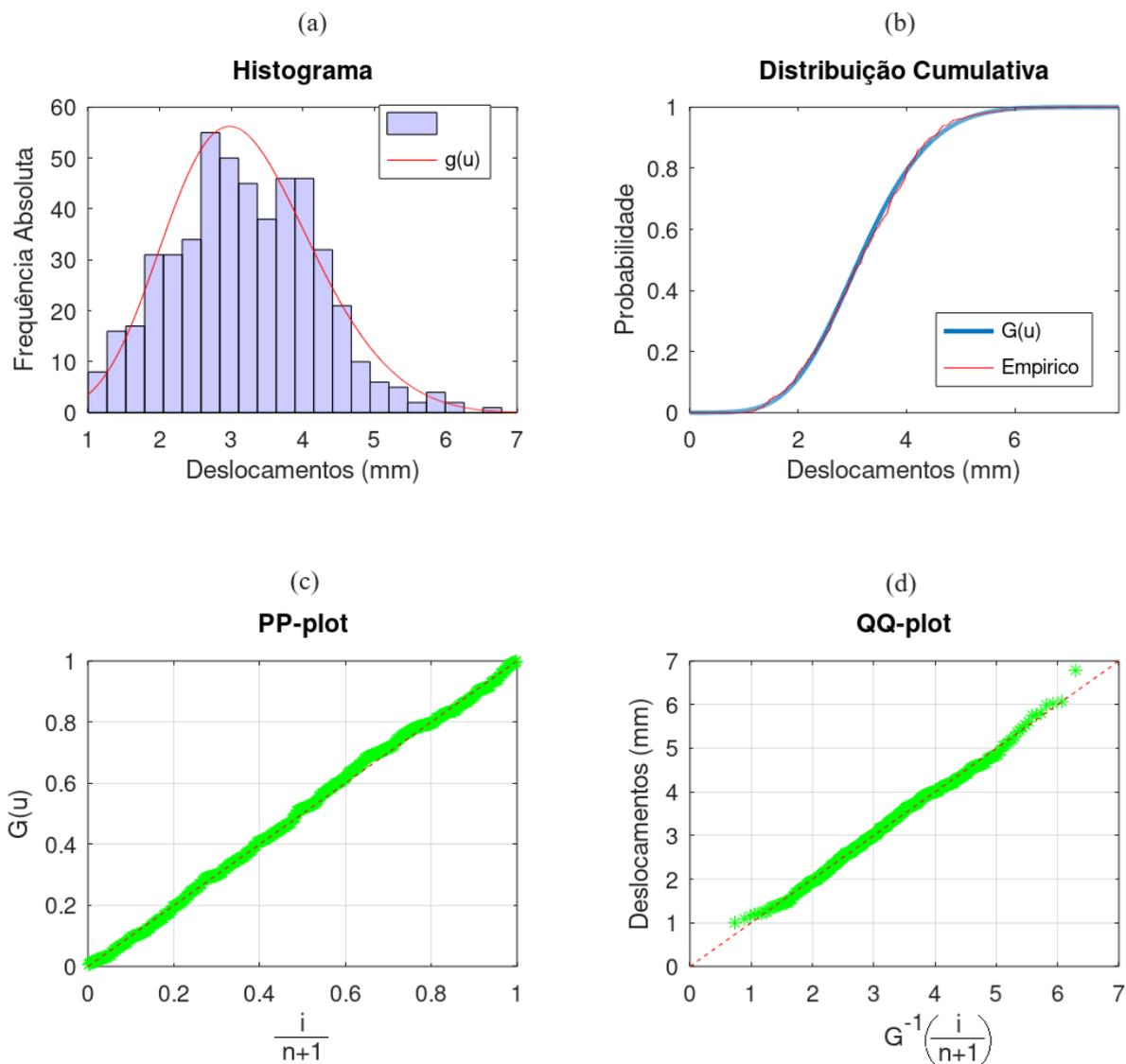


Figura 7.16 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 3C referente a análise com o a depressão na entrada da ponte

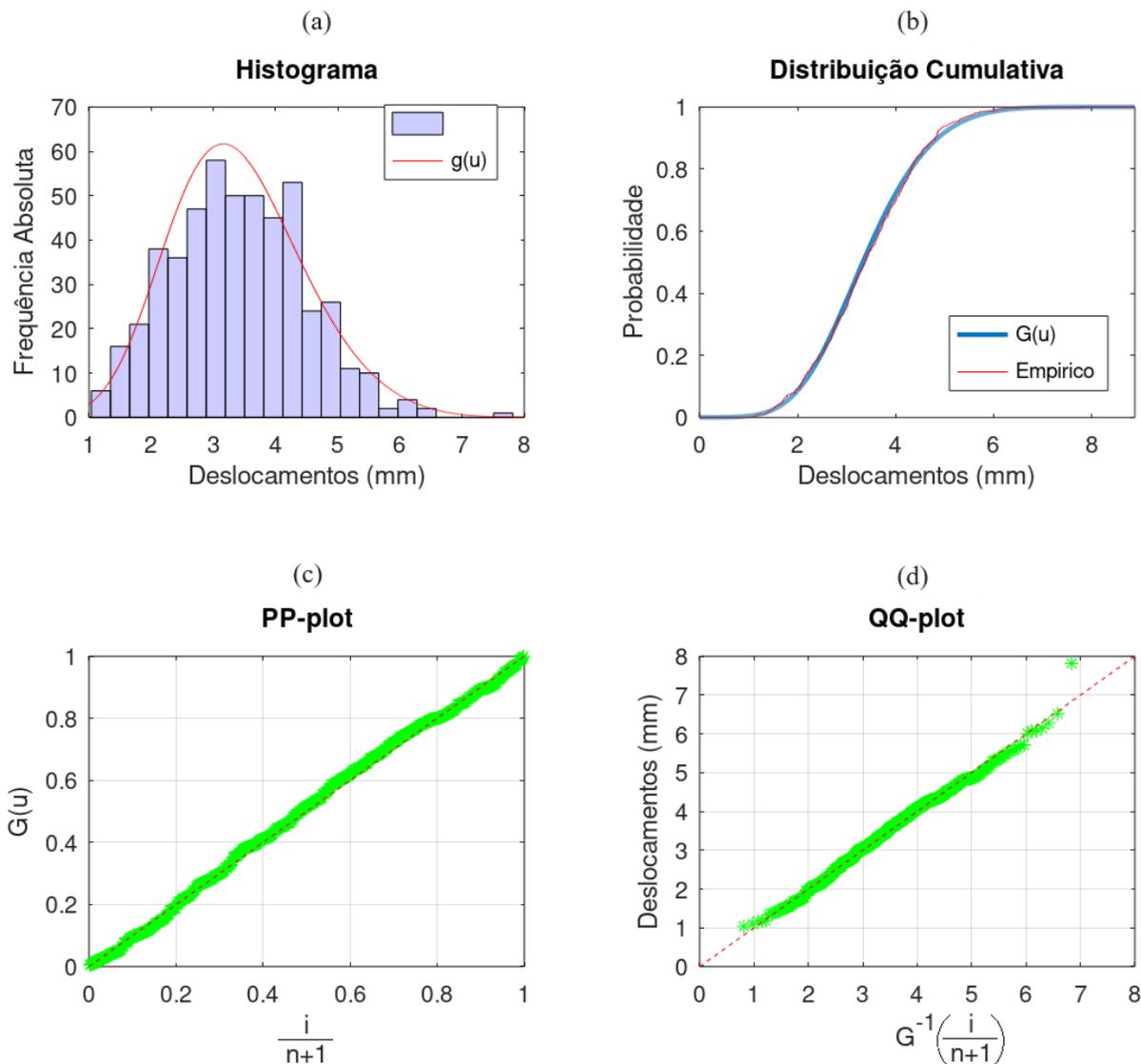


Figura 7.17 – Histograma (a), gráfico da função cumulativa de probabilidade (b), gráfico PP-plot (c) e gráfico QQ-plot (d) para os dados do veículo 2S3 referente a análise com o a depressão na entrada da ponte

Em relação ao fator de forma estimado ( $\hat{\xi}$ ) da função GEV, apresentado na Tabela 7.9, verifica-se que para todos os veículos,  $\hat{\xi}$  resultou em valores abaixo de zero, indicando que a distribuição que mais se adequa aos resultados é a de Weibull. Portanto, para situação em que o pavimento da ponte é uma depressão em sua entrada, o deslocamento máximo que a estrutura com o TMD instalado pode ser submetida possui um limite. Esse limite também pode ser calculado com auxílio da eq. (7.6).

Outro ponto interessante apresentado nas Figuras 7.15 a 7.17 é que o gráfico QQ-plot de todos os veículos não apresentam uma boa principalmente para os valores finais, com pontos

ficando muito distante da reta de referência. O fato de existirem valores longe dessa reta, indica que no momento que foram gerados os resultados das 500 amostras, alguns resultados representam a ocorrência de valores extremos.

Ao analisar os valores máximos indicados na Tabela 7.8 para cada veículo, é possível notar que a diferença entre o valor de deslocamento limite (ver Tabela 7.10) é pequena, comprovando que já durante a geração dos dados utilizados para calcular os coeficientes da distribuição GEV, ocorreram valores extremos.

Calculando, com auxílio da eq. (7.6) o deslocamento limite da ponte para a passagem de cada veículo, tem-se os resultados apresentado na Tabela 7.10.

Tabela 7.10 – Deslocamentos máximos limite da ponte com o TMD instalado para cada veículo

Veículo	2C	3C	2S3
$u_{lim} (mm)$	8,4213	7,9244	8,8824

Em relação a probabilidade de o valor admissível ser excedido, tem-se como resultado os seguintes valores para os veículos 2C, 3C e 2S3, respectivamente: 72,3%, 62,5% e 57%. Sendo que para realizar esse cálculo, os valores de  $u_{adm}$  para os veículos 2C, 3C e 2S3 são, 2,136 mm, 2,809 mm e 3,141 mm, respectivamente.

Percebe-se que para todos os veículos essa probabilidade ficou acima de 50%, sendo a situação mais crítica foi a do veículo 2C. Esse cálculo da probabilidade de os deslocamentos máximos da ponte superarem o valor admissível vem corroborar com os resultados apresentados na seção 7.2 do presente capítulo, porque mesmo com a otimização dos parâmetros do TMD dimensionado para cada veículo, a redução no deslocamento máximo obtida não foi suficiente a ponto de limitar esse deslocamento ao valor admissível.

Pode-se dizer que a utilização de TMD's para amenizar o efeito das vibrações causadas por uma depressão ou um ressalto na entrada da ponte não é a melhor solução para essa finalidade. Para amenizar o deslocamento máximo da ponte com esse tipo de irregularidade considerado como pavimento, talvez seja necessário mudar o tipo de sistema passivo de controle de vibração para amortecedores viscosos ou por fricção, por exemplo.

Se mesmo com a mudança do tipo de dispositivo, o deslocamento máximo da estrutura permanecer elevado, deve-se considerar a possibilidade de utilizar um sistema ativo de

controle de vibrações ou um sistema de controle híbrido que consiga aproveitar os TMD's dimensionados previamente.

## 8 CONCLUSÕES

Nesta tese foi apresentada uma metodologia para dimensionamento robusto de TMD's considerando interação veículo-estrutura-pavimento e incertezas quanto aos parâmetros da estrutura, veículo e pavimento a fim de deixar o projeto do sistema de controle de vibrações com pouca influência das incertezas consideradas e torná-lo aplicável a uma gama maior de situações. A partir do que foi observado com os resultados obtidos no Capítulo 7, pode-se concluir que:

- a) o objetivo desta tese, que era fazer a análise dinâmica de uma ponte considerando o efeito da interação veículo-estrutura-pavimento e incertezas foi alcançado, pois do final do Capítulo 6 ao Capítulo 7 várias simulações com o programa desenvolvido foram realizadas e apresentaram resultados coerentes;
- b) de modo geral, os resultados da otimização robusta dos parâmetros do TMD para redução do deslocamento máximo no centro da ponte feito com o algoritmo HBA também foram bem-sucedidos, pois em todos os casos analisados o dimensionamento via otimização conseguiu produzir resultados que de fato reduziram a amplitude do deslocamento máximo da estrutura;
- c) analisando com mais detalhe os resultados da otimização, constatou-se que o processo de otimização dos parâmetros do TMD atingiu o objetivo de reduzir o FAD a um valor menor que o  $C_{iv}$  apenas quando o pavimento considerado na ponte era rugoso. Por se tratar de um problema de otimização complexo e pelo fato do FAD das respostas dinâmicas dos veículos 2C, 3C e 2S3 não serem muito elevados, o algoritmo HBA conseguiu lidar melhor com essa situação e encontrou uma resposta capaz de reduzir o deslocamento máximo da ponte o suficiente para estar dentro do limite estabelecido;
- d) embora a redução do deslocamento máximo da estrutura tenha ocorrido quando o pavimento da ponte era uma depressão em sua entrada, a otimização dos parâmetros do TMD não conseguiu fazer com que o FAD da resposta dinâmica da estrutura ficasse abaixo do  $C_{iv}$ . De acordo com que foi observado nos testes realizados no Capítulo 6, a resposta dinâmica da ponte é muito influenciada pela profundidade do obstáculo, logo, o processo de otimização não conseguiu encontrar uma solução que de fato seja o mínimo global da função objetivo,

mas sim, uma solução que, dentro do foi proposto, conseguiu amenizar os efeitos das incertezas consideradas nessas análises;

- e) mesmo com os testes realizados com múltiplos TMD's para situação em que o pavimento da ponte era uma depressão em sua entrada, os resultados obtidos para cada um dos veículos não foram muito diferentes dos resultados apresentados com a utilização de apenas 1 TMD. Do ponto de vista construtivo, a solução de utilizar múltiplos TMD's pode ser interessante, porém, para reduzir o deslocamento máximo da ponte para esse tipo de pavimento, o uso de TMD's não é o mais eficiente;
- f) em relação à análise de valores extremos, para todas as situações consideradas a função GEV teve seu parâmetro de forma com valor negativo, indicando que a função que melhor descreve os resultados de deslocamento máximo da estrutura com um TMD instalado é a de Weibull. Isso ocorreu porque algumas das variáveis aleatórias que mais tinham influência no resultado do deslocamento máximo da ponte possuíam distribuição uniforme de valores limitadas a valores mínimos e máximos, logo essa é a condição necessária para a distribuição de valores extremos também tenha um valor máximo finito;
- g) a distribuição de Weibull possui como característica a existência de um valor máximo limite para sua função de densidade de probabilidade. Pelo fato de todos os resultados da análise de valores extremos indicarem que essa era a distribuição que melhor descreve dados referentes aos deslocamentos máximos de uma ponte, foi possível determinar esse valor máximo e constatar que valores próximos a esse limite ocorreram nas análises onde o pavimento da ponte era a depressão em sua entrada. Isso mostra que essa condição de pavimento é a mais crítica para pontes e merece mais atenção;
- h) em relação ao tempo computacional, destaca-se que as simulações que foram executadas de forma sequencial levaram em média uma semana para finalizar o processo de otimização e entregar os resultados do dimensionamento dos TMD's. Para executar as análises propostas foi necessário muito recurso computacional, o que em termos práticos, pode fazer com que o dimensionamento robusto seja inviável de ser realizado;

- i) por outro lado, ao tirar proveito da paralelização do trecho do código da otimização responsável por calcular o valor da função objetivo, o tempo de execução do processo otimização passou a ser em média 3,33 dias, sendo que para a simulação feita com o veículo 2S3 (a mais demorada) esse tempo de execução foi de 5,10 dias. Mesmo com a paralelização do código, ainda é necessário muito recurso computacional, neste caso não apenas de capacidade de processamento, mas de memória também, para execução o dimensionamento dos TMD's. Ao paralelizar o código do processo de otimização, isso permitiu que o processo de otimização robusta se tornasse viável de ser executado, possibilitando que a metodologia proposta nesta tese seja aplicada a situações mais complexas.

## 8.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros nessa área de análise dinâmica de pontes, otimização e dimensionamento de sistemas de controle de vibrações, pode-se destacar:

- a) estudar o comportamento da resposta dinâmica de uma ponte considerando a interação-veículo-estrutura-pavimento e incertezas para outros tipos de modelos estruturais, como por exemplo, pontes biapoadas com balanços na extremidade e pontes contínuas;
- b) realizar estudos mudando a maneira que as massas e velocidades consideradas para os veículos são geradas, por exemplo, utilizando uma distribuição normal para geração dos valores aleatórios e considerar incertezas no posicionamento do centro de gravidade, distâncias entre eixos e na porcentagem das massas que são transferidas para as rodas do veículo;
- b) analisar a resposta dinâmica de uma ponte considerando que veículos estejam trafegando em série ou em posições distintas na estrutura;
- c) estudar de forma mais detalhada os efeitos dinâmicos que irregularidades no pavimento, tais como, uma depressão ou um ressalto causam em pontes submetidas a passagem de veículos;
- d) implementar e avaliar se outro tipo de sistema passivo ou se um sistema de controle de vibrações híbrido ou ativo pode ser utilizado como solução para

reduzir os deslocamentos causados por veículos em uma ponte que tem como pavimento uma depressão ou ressalto;

- e) estudar se de fato a uma função de distribuição de valores extremos do tipo Weibull é a mais adequada para descrever dados como o deslocamento máximo de uma ponte submetida à passagem de veículo ou se uma distribuição de valores extremos do tipo Gumbel pode ser uma alternativa;
- f) aproveitando a metodologia proposta nesta tese, propor a utilização da paralelização em outros pontos do programa a fim de reduzir ainda mais o tempo de exceção gasto nas análises;
- g) partindo do princípio de que a linguagem de programação Octave possibilita a execução de *scripts* desenvolvida em C++, propor o desenvolvimento de um programa que possibilite que a paralelização do trecho do código responsável pelo cálculo dos valores da função objetivo seja executada pela GPU (placa de vídeo) do computador.

## REFERÊNCIAS

- ABDULALI, B. A. A.; BAKAR, M. A. A.; IBRAHIM, K.; ARIFF, N. M. Extreme Value Distributions: an Overview of Estimation and Simulation. Hindawi, **Journal of Probability and Statistical**, v. 2022, 17 p., 2022.
- AHMED, H. **Extreme Value Statistics Using Related Variables**. 2022. 42 p. Doctoral Thesis – CentER, Center for Economic Research, Tilburg University, Netherlands.
- ANSYS. **Mechanical APDL Structural Analysis Guide**. Canonsburg, 2024.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimentos. Rio de Janeiro, 2023.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7188**: carga móvel e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2024.
- AURENBACH, J.; WAN, P. Forecasting the Urban Skyline with Extreme Value Theory. Elsevier, **International Journal of Forecast**, v. 36, n. 3, p. 814-828, 2020.
- BARONI, Henriette Justina Manfredini. **Simulação da Vida Útil de Fadiga do Concreto em Vigas de Tabuleiro de Pontes em Função do Fluxo de Veículos Pesados**. 2010. 284 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- BATHE, K-J. **Finite Element Procedures**. 2. ed. USA: Prentice-Hall, 2014.
- BATTISTA, R. C.; PFEIL, M. S. Múltiplos Atenuadores Dinâmicos Sincronizados para Controle das Oscilações Induzidas pelo Vento na Ponte Rio-Niterói. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, v. 2, n. 1, p. 73-95, 2005.
- BAYAT, E.; BAYAT, M.; HAFEZZADEH, R. Numerical Performance Assessment of Tuned Mass Dampers to Mitigate Traffic-Induced Vibrations of a Steel Box-Girder Bridge. Techno-Press, **Structural Engineering and Mechanics**, v. 78, n. 2, p. 125-134, 2021.
- CALÇADA, Rui Artur Bártolo. **Avaliação Experimental e Numérica de Efeitos Dinâmicos de Cargas de Tráfego em Pontes Rodoviárias**. 2001. 460 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto.
- CARNEIRO, A. L.; PORTELA, E. L.; BITTENCOURT, T. N. Development of Brazilian Highway Live Load Model for Unlimited Fatigue Life. **Revista IBRACON Estruturas e Materiais**, v. 13, n. 4, 2020.

CARNEIRO, A. L.; PORTELA, E. L.; BITTENCOURT, T. N.; BECK, A. T. Fatigue Safety Level Provided by Brazilian Design Standards for a Prestressed Girder Highway Bridge. **Revista IBRACON Estruturas e Materiais**, v. 14, n. 4, 2021.

CERESER, Simone Maffini. **Uso da Teoria de Valores Extremos para Estimar Valores de Pressões Hidrodinâmicas em um Ressalto Hidráulico Formado a Jusante de um Vertedouro: o Caso UHE Porto Colômbia**. 2008. 190 f. Tese (Doutorado em Engenharia Ambiental) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

CHAVES, S. N. P. H. **Atenuação da Resposta Sísmica de Estruturas de Edifícios Utilizando Amortecedores Viscosos**. 2010. 101 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto.

CHRISTENSON, R. E.; JIANG, Z.; KIM, S. J.; PLUDE, S. Experimental Testing of Controllable Damping Devices Toward Extending the Life Span of Existing Highway Bridges. Connecticut: **JHR**, 2015. Disponível em: < <https://portal.ct.gov/-/media/dot/documents/dresearch/cctrpreportjhr15326projectnojh0806pdf.pdf>>. Acesso em: 27 de mar. 2020.

CÓDIGO DE TRÂNSITO BRASILEIRO. **CTB**: normas gerais de circulação e conduta. 2021. Disponível em: <<https://www.ctbdigital.com.br/artigo/art61>>. Acesso em: 11 dez. 2021.

DE PAOLA, F.; GIUGNI, M.; PUGLIESE, F.; ANNIS, A.; NARDI, F. GEV Parameter Estimation and Stationary vs. Non-Stationary Analysis of Extreme Rainfall in African Test Cities. MDPI, **Hydrology**, v. 5, n. 28, p. 22, 2018.

DEBNATH, N.; DEB, SK.; DUTTA, A. Multi-Modal Vibration Control of Truss Bridges with Tuned Mass Dampers Under General Loading. Sage, **Journal of Vibration and Control**, v. 22, p. 4121-4140, 2016.

DEN HARTOG, J. P. **Mechanical Vibration**. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 1956.

EBERLE, R.; OBERGUGGENBERGER, M. Vibrations of a Bridge with Random Structural Irregularities Under Random Traffic Load and Probabilistic Structural Degradation Assessment Approach. Springer, **Journal of Vibration Engineering & Technologies**, v. 11, p. 1851-1865, 2023.

ECKHARDT, R. Stan Ulam, John Von Neumann, and the Monte Carlo Method. **Los Alamos Science**, Special Issue, p. 131-141, 1987.

EINMAHL, J. J.; EINMAHL, J. H. J.; DE HAAN, L. Limits of Human Life Span Through Extreme Value Theory. Taylor & Francis, **Journal of the American Statistical Association**, v. 114, n. 527, p. 1075-1080, 2019.

EL DEBS, Mounir Khalil; TAKEYA, Toshiaki. **Introdução às Pontes de Concreto**. 2007. Notas de Aula – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 24, p. 180-190, 1928.

FRAHM, Hermann. **Device for Damping Vibrations of Bodies**. US Patent No 989958, 1911.

FREITAS, Duarte Filipe de. **Suporte de Computações Octave Independentes em Multiprocessadores de Memória Partilhada**. 2023. 48 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Informática) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, Lisboa.

FUJIWARA, H.; HAJEK, J; TILL, O. Octave Parallel Package Documentation. **Octave Packages**. Disponível em: <<https://gnu-octave.github.io/packages/parallel/>>. Acesso em: 15 de mai. 2024.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. 3. ed. Springer Science, 1992.

HASHIM, F. A.; HOUSSEIN, E. H.; MABROUK, M. S.; AL-ATABANY, W. Honey Badger Algorithm: New Metaheuristic Algorithm for Solving Optimization Problems. Elsevier, **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 192, p. 84-110, 2022.

HESAMEDDIN, K.; IRFANOGLU, A; HACKER, T. J. Effective Viscous Damping Ratio in Seismic Response of Reinforced Concrete Structures. *In: 6<sup>th</sup> International Conference on Advances in Experimental Structural Engineering*. 2015. p. 1-8.

HOSKING, J. R. M. L-Moments Analysis and Estimation of Distributions Using Linear Combination of Order Statistics. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 52, n. 1, p. 105-124, 1990.

HUGHES, J. E.; KIM, Y.; CHONG, J. W.; KIM, C. Particle Swarm Optimization for Active Structural Control of Highway Bridges Subjected to Impact Loading. Hindawi, **Shock and Vibration**, 2018.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 8608**: mechanical vibration – road surface profiles – reporting of measured data. 1995.

KWON, H. C.; KIM, M. C.; LEE, I. W. Vibration Control of Bridges Under Moving Loads. Elsevier, **Journal of Computers and Structures**, v. 66, p. 473-480, 1998.

LI, Y.; MA, X.; ZHANG, W.; WU, Z. Updating Time-Variant Dimension for Complex Traffic Flows in Analysis of Vehicle-Bridge Dynamic Interaction. Elsevier, **Journal of Aerospace Engineering**, v. 31, n. 4, 2018.

LIN, Weiwei; YODA, Teruhiko. **Bridge Engineering: Classifications, Design Loading, and Analysis Methods**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2017.

LIU, J.; LI, D.; YU, P. Study on Optimization Algorithm of Tuned Mass Damper Parameters to Reduce Vehicle-Bridge Coupled Vibration. **PLoS ONE**, v. 14, 2019.

LOGAN, Daryl L. **A First Course in the Finite Elements Method**. 6. ed. Boston: Cengage Learning, 2015.

LU, N.; WANG, H.; WANG, K.; LIU, Y. Maximum Probabilistic and Dynamic Traffic Load Effects on Short-to-Medium Span Bridges. Tech Science Press, **Computers Modeling in Engineering & Science**, v. 127, n. 1, p. 345-360, 2021.

LUCENA, Raimundo Liberato. **Detecção de Danos em Barras Usando Propagação de Ondas e Tempo Reverso**. 2015. 60 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica. Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MA, L.; ZHANG, W.; HAN, W. S.; LIU, J. X. Determining the Dynamic Amplification Factor of Multi-Span Concrete Girder Bridges in Highway Using Vehicle-Bridge Interaction Analysis. Elsevier, **Journal of Engineering Structures**, v. 181, p. 47-59, 2019.

MAGNUSON, Amy R. **Mitigation of Traffic-Induced Vibration Through Passive and Semi-Active Control Devices**. 2010. 56 p. Dissertation (Master in Civil Engineering and Environmental Engineering) – Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.

MAO, J.; YU, Z.; XIAO, Y.; JIN, C.; BAY, Y. Random Dynamic Analysis of a Train-Bridge Coupled System Involving Random Parameters Based on Probability Density Evolution Method. Elsevier, **Journal of Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 46, p. 48-61, 2016.

METZ, Diego Gabriel. **Análise Dinâmica Linear de Pontes Sujeitas a Passagem de Diferentes Composições de Veículos sob Efeitos de Irregularidades Randômicas**. 2019. 155 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

MIGUEL, L. F. F.; FADEL MIGUEL, L. F.; LOPEZ, R. H. A Firefly Algorithm for the Design of Force and Placement of Friction Dampers for Control of Main-Induced Vibrations in Footbridges. Springer, **Optim Eng**, v. 16, p. 633-661, 2015.

MIGUEL, L. F. F.; LOPEZ, R. W.; TORII, A. J.; MIGUEL, L. F. F.; BECK, A. T. Robust Design Optimization of TMD in Vehicle-Bridge Coupled Vibration Problems. Elsevier, **Engineering Structures**, v. 126, p. 703-711, 2016.

MIGUEL, L. F. F.; SANTOS, G. P. Optimization of Multiple Tuned Mass Damper for Road Bridges Taking into Account Bridge-Vehicle Interaction, Random Pavement Roughness, and Uncertainties. Hindawi, **Shock and Vibration**, 2021.

MOUTINHO, C.; CUNHA, Á.; CAETANO, E.; DE CARVALHO, J. M. Vibration Control of a Slender Footbridge Using Passive and Semiactive Tuned Mass Dampers. Willey and Sons, **Journal of Structure Control Health Monitoring**, v. 25, 2018.

NAGHETTINI, M; PINTO, E. J. A. **Hidrologia Estatística**. Belo Horizonte: CPRM. 2007. 552 p.

NIKKHOO, A.; ESKANDARI, A. B.; FARAZANDEH, A.; HAJIRASOULIHA, I. Vibration Control of Bridges Under Simultaneous Effects of Earthquake and Moving Loads Using Steel Pipe Dampers. Sage, **Journal of Vibration and Control**, v. 25, p. 2580-2594, 2019.

OCTAVE. Examples of How to Use *pararrayfun* of Parallel Package. **GNU Octave Wiki**. 2021. Disponível em: <[https://wiki.octave.org/wiki/images/e/e9/Examples\\_of\\_how\\_to\\_use\\_parrarrayfun.pdf](https://wiki.octave.org/wiki/images/e/e9/Examples_of_how_to_use_parrarrayfun.pdf)>. Acesso em: 15 de mai. 2024.

ONTIVERO-PÉREZ, Sergio Pastor. **Projeto Ótimo Sob Incertezas de Amortecedores por Atrito para Controle de Vibrações em Edifícios Submetidos à Excitação Sísmica**. 2018. 124 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

OSPINA, Carolina Sánchez. **Otimização de Amortecedores de Massa Sintonizados, Múltiplos e Interligados, para Controle de Vibrações em Edifícios Altos**. 2008. 81 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília.

PANSERA, W. A.; GOMES, B. M. Modelagem Estocástica Usando a Distribuição Generalizada de Valores Extremos e Momentos LH: uma Abordagem via Software Livre R. REMAT, **Revista Eletrônica da Matemática**, v. 7, n.2, p. e3003, 2021.

PENADÉS-PLÀ, V.; GARCÍA-SEGURA, T.; YEPES, V. Accelerated Optimization Method for Low-Embodied Energy Concrete Box-Girder Bridge Design. Elsevier, **Engineering Structures**, v. 179, p. 556-565, 2019.

PEREIRA, E.; DÍAZ, I. M.; HUDSON, E. J.; REYNOLDS, P. Optimal Control-Based Methodology for Active Vibration Control of Pedestrian Structures. **Engineering Structures**, v. 80, p. 153-162, 2014.

PESTEREV, A. V.; BERGMAN, L. A.; TAN, C. A. A Novel Approach to the Calculation of Pothole-Induced Contact Forces in MDOF Vehicle Models. Elsevier, **Journal of Sound and Vibration**, v. 257, p. 127-149, 2004.

PISAL, A. Y.; JANGID, R. S. Vibration Control of Bridge Subjected to Multi-Axle Vehicle Using Multiple Tuned Mass Friction Dampers. Springer, **Int. J. Adv. Struct. Eng.**, v. 8, p. 213-227, 2016.

RANA, R.; SOONG, T. T. Parametric Study and Simplified Design of Tuned Mass Dampers. **Engineering Structures**, v. 20, n. 3, p. 193-204, 1998.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 5. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2011.

REAL, Mauro de Vasconcelos. **Análise Probabilística de Estruturas de Concreto Armado, Sob Estado Plano de Tensão, Através do Método dos Elementos Finitos**. 2000. 249 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

ROSSATO, Luciana Vellar. **Otimização de Amortecedores de Massa Sintonizados em Estruturas Submetidas a um Processo Estacionário**. 2017. 118 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

ROSSIGALI, Carlos Eduardo. **Atualização dos Modelos de Cargas Móveis para Pontes Rodoviárias de Pequenos Vãos no Brasil**. 2013. 289 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SANTOS, Emerson Figueiredo dos. **Análise e Redução de Vibrações em Pontes Rodoviárias**. 2007. 178 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SANTOS, Guilherme Piva dos. **Simulação da Interação Veículo-Estrutura-Pavimento em Pontes Rodoviárias**. 2020. 127 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SCHMIDT, Erika Pina. **Metodologia para Análise Dinâmica de Pontes Curvas Sob o Efeito de Tráfego Pesado**. 2017. 166 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SEKULIC, D.; DEDOVIC, V.; RUSSOV, S.; SALINIC, S.; OBRADOVIC, A. Digital Analysis of Vibration Effects on the Comfort of Intercity Bus Users by Oscillatory Model with Ten Degrees of Freedom. **Applied Mathematical Modeling**, v. 37, p. 8629-8644, 2013.

SHABANA, Ahmed A. **Computational Dynamics**. 3. ed. Wiley and Sons Ltd, 2010.

SHINOZUKA, M.; JAN, C. M. Digital Simulation of Random Process and its Applications. **Journal of Sound and Vibration**, v. 25, n. 1, p. 111-128, 1972.

TANG, Q-C.; ZHU, L. Vibration Control of the Steel-Concrete Composite Box Girder Bridge with Slip and Shear-Lag Effects by MTMD under the Train-Bridge Interaction. Hindawi, **Structural Control and Health Monitoring**, v. 2023, 26 p., 2023.

VELLAR, Luciana Silva; ONTIVEROS-PÉREZ, Sergio Pastor; MIGUEL, Letícia Fleck Fadel; FADEL MIGUEL, Leandro Fleck. Robust Optimum Design of Multiple Tuned Mass Dampers for Vibration Control in Buildings Subjected to Seismic Excitation. Hindawi, **Shock and Vibration**, 2019.

WANG, Q. J. LH Moments for Statistical Analysis of Extreme Events. Willey, **Water Resources Research**, v. 33, n. 12, p. 2841-2848, 1997.

WARBURTON, G. B. Fatigue Optimum Absorber Parameters for Various Combinations of Response and Excitation Parameters. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 10, n. 3, p. 381-401, 1982.

WU, S. Q.; LAW, S. S. Dynamic Analysis of Bridge-Vehicle System with Uncertainties Based on the Finite Element Model. Elsevier, **Journal of Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 25, p. 281-293, 2010.

WU, S. Q.; LAW, S. S. Dynamic Analysis of Bridge with non-Gaussian Uncertainties Under a Moving Vehicle. Elsevier, **Journal of Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 26, p. 281-293, 2011.

XIE, Q.; HAN, W.; YUAN, Y. Refined Vehicle-Bridge Interaction Analysis Using Incompatible Solid Finite Element for Evaluating Stresses and Impact Factors. Hindawi, **Advances in Civil Engineering**, 2020.

XIN, L.; LI, X.; ZHU, Y.; LIU, M. Uncertainty and Sensitivity Analysis for Train-Ballasted Track-Bridge System. Taylor & Francis, **Journal of Vehicle Mechanics and Mobility**, v. 58, n.3, p. 453-471, 2020.

YANG, G. **Large-Scale Magnetorheological Fluid Damper for Vibration Mitigation: modeling, testing and control**. 2001. PhD Thesis, University of Notre Dame, Indiana.

YANG, Y.; WANG, P.; BRANDENBERG, S. J. An Algorithm for Generating Spatially Correlated Random Fields Using Cholesky Decomposition and Ordinary Kriging. Elsevier, **Computers and Geotechnics**, v. 147, 2022.

YAO, J.; ZHOU, H.; ZHU, J.; HUANG, L.; XU, J.; LI, W. Reduction of Vibration in Long-Span Continuous Girder Bridges with Pounding Tuned Mass Damper. Hindawi, **Advances in Civil Engineering**, v. 2022, 18 p., 2022.

YU, Z.; MAO, J. A Stochastic Dynamic Model of Train-Track-Bridge Coupled System Based on Probability Density Evolution Method. Elsevier, **Journal of Applied Mathematical Modeling**, v. 59, p. 205-232, 2018.

YVARI, Majid Solat. **Slab Frame Bridges Structural Optimization Considering Investment Cost and Environmental Impacts**. 2017. 42 p. Licenciature Thesis – School of Architectural and the Build Engineering, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm.

ZHANG, Q.; SHI, W.; WANG, Y. Human-Induced Vibration Control of Floor Structures Using MTMD System Optimized by MATLAB-SAP2000 Interface. MDPI, **Buildings**, v. 308, n. 14, 22 p., 2024.