

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL -  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

Cássia Tatiane Rockemback de Almeida Farias

**Análise de livros didáticos focando na divisão de frações**

Porto Alegre

2024

Cássia Tatiane Rockemback de Almeida Farias

## **Análise de livros didáticos focando na divisão de frações**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para a obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática, na linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cydara Cavedon Ripoll

Porto Alegre

2024

Cássia Tatiane Rockemback de Almeida Farias

## **Análise de livros didáticos focando na divisão de frações**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para a obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática, na linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística.

Aprovada em 20 de março de 2024.

Banca Examinadora:

---

**Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Cydara Cavedon Ripoll (Orientadora)**  
(IME/PPGEMAT/UFRGS)

---

**Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Leandra Anversa Fioreze**  
(FACED/PPGEMAT/UFRGS)

---

**Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso**  
(IME/PPGEMAT/UFRGS)

---

**Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende**  
(UFF)

Dedico esta dissertação ao meu filho Gustavo e ao meu marido Daniel, por me apoiarem em todos os momentos da minha caminhada. Amo vocês.

## AGRADECIMENTOS

À professora Dra. Cydara Cavedon Ripoll, minha orientadora, por toda a paciência, dedicação e ensinamentos durante toda a minha caminhada no mestrado. Agradeço pela sua orientação e pelo seu carinho comigo e com o encaminhamento do meu trabalho. Muito obrigada, Cydara.

À professora Leandra e aos professores Marcus e Wanderley por aceitarem o convite para participar da banca deste trabalho e por contribuírem com a sua evolução.

Às professoras e professores que fazem parte do corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e que acompanharam e enriqueceram minha caminhada durante esse período. Obrigada a todas e todos.

Aos colegas de curso, em particular às colegas Eliane, Evelyn, Sabrina e Taciane, por todas as conversas e trocas de experiências ao longo desta jornada.

Ao IFRS Campus Canoas, em particular ao coordenador do PROFMAT, Nicolau Dihel, bem como a todas as alunas e alunos do PROFMAT que participaram da oficina realizada em agosto de 2023 e que muito contribuíram para a validação de parte desta pesquisa.

Às amigas Annie, Camilla, Denise, Gilmara, Karen, Lisiane, Roselaine e ao amigo Joelmir por todas as conversas e pelo apoio. Em especial, meu muito obrigada, às amigas e comadres Adriana e Roseane por me incentivarem a seguir minha vontade de ingressar no mestrado.

À minha mãe Leci e ao meu pai Paulo, pelo apoio e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações. Obrigada mãe. Obrigada pai.

Ao meu irmão Diego, por me apoiar e me incentivar em todos os momentos da minha vida. Obrigada mano.

Ao meu marido Daniel, pelo incentivo, pela cumplicidade, pelo carinho, pelo apoio e por estar ao meu lado em todos os momentos da minha vida. Obrigada meu amor.

Ao meu filho Gustavo, por ser um anjo em minha vida e, sempre com amor e paciência, entender todas as minhas ausências ao longo de todo o curso. Obrigada meu filho.

Eterno é tudo aquilo que vive uma fração de segundo, mas com tamanha intensidade que se petrifica e nenhuma força o resgata.

Carlos Drummond de Andrade

## RESUMO

A motivação para esta dissertação reside na importante tarefa desempenhada por docentes das escolas públicas de selecionarem os livros didáticos, dentre aqueles aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que serão adotados em suas escolas, por um período de quatro anos letivos, bem como no entendimento de que determinados critérios são fundamentais para que esses livros contemplem, da melhor forma possível, os objetivos necessários para o aprendizado de estudantes. Por essa razão, o objetivo deste trabalho é elencar critérios gerais para uma análise de livros didáticos de matemática focando no conteúdo e critérios específicos para o conteúdo divisão de frações no 7º ano do Ensino Fundamental. Nesta pesquisa, de cunho qualitativo, os critérios gerais elencados apoiam-se na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nos documentos oficiais referentes ao PNLD/2020 (Edital e Guia Digital) enquanto os específicos levam em consideração a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, os estudos realizados na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul), os trabalhos encontrados que se relacionam com o tema da pesquisa e a experiência docente da autora deste trabalho. Essa lista, construída ao longo da pesquisa foi, inicialmente, utilizada na análise do conteúdo divisão de frações, em dois volumes do 7º ano do Ensino Fundamental, pertencentes a duas coleções aprovadas no PNLD/2020, e dessa análise resultou um quadro que permite identificar os critérios contemplados por cada uma destas coleções. Posteriormente, foi realizada uma oficina, destinada a docentes da Educação Básica, na qual foi confirmada a relevância e potencialidade de ter-se uma lista de critérios para a escolha de livros didáticos. Assim, como produto da pesquisa, disponibilizamos a lista, validada e aprimorada, com o intuito de apoiar docentes na seleção de livros didáticos para suas escolas.

**Palavras-chave:** Critérios de Análise de Livros Didáticos de Matemática. Divisão de frações.

## **ABSTRACT**

The motivation for this dissertation lies in the important task performed by public school teachers of selecting textbooks, among those approved by the National Textbook Program (PNLD), that will be adopted in their schools for a period of four school years, as well as in the understanding that certain criteria are fundamental for these books to best meet the objectives necessary for student learning. For this reason, the objective of this work is to list general criteria for an analysis of mathematics textbooks focusing on the content and specific criteria for the content of division of fractions in the 7th grade of Elementary School. In this qualitative research, the general criteria listed are based on the National Common Curricular Base (BNCC) and on the official documents related to the PNLD/2020 (Notice and Digital Guide), while the specific criteria take into account Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers, the studies carried out in the discipline Analysis and Development of Didactic Material (of the Postgraduate Program in Mathematics Teaching at the Federal University of Rio Grande do Sul), the works found that are related to the research theme and the teaching experience of the author of this work. This list, constructed throughout the research, was initially used in the analysis of the content division of fractions, in two volumes of the 7th grade of Elementary School, belonging to two collections approved in the PNLD/2020, and this analysis resulted in a table that allows identifying the criteria contemplated by each of these collections. Subsequently, a workshop was held, aimed at Basic Education teachers, in which the relevance and potential of having a list of criteria for choosing textbooks was confirmed. Thus, as a result of the research, we provide the validated and improved list, with the aim of supporting teachers in selecting textbooks for their schools.

**Keywords:** Criteria for Analyzing Mathematics Textbooks. Division of fractions.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Imagem referente ao exemplo apresentado em 3.3.11 .....	61
Figura 2 – Sugestão de reestruturação da Figura 1 .....	63
Figura 3 – Exemplos para a divisão entre números naturais .....	75
Figura 4 – Capa do volume do 7º ano da coleção A conquista da Matemática.....	90
Figura 5 – Parte do índice do volume do 7º ano da coleção A conquista da Matemática.....	90
Figura 6 – Capa do volume do 7º ano da coleção Teláris Matemática.....	91
Figura 7 – Parte do índice do volume do 7º ano da coleção Teláris Matemática.....	91
Figura 8 – Início da Subseção Divisão com números racionais na forma de fração .....	95
Figura 9 – Primeiro exemplo de Divisão de frações .....	97
Figura 10 – Nossa sugestão de imagens para apoio ao Exemplo 1 (p.111) .....	98
Figura 11 – Resolução do Exemplo 1, sugerindo um algoritmo para a divisão .....	99
Figura 12 – Atividade complementar no Manual do Professor (p.111) .....	99
Figura 13 – Atividades no Manual do Professor objetivando explorar a relação entre a divisão de frações e a multiplicação.....	100
Figura 14 – Segundo exemplo de Divisão de Frações.....	101
Figura 15 – Terceiro exemplo de divisão de frações.....	103
Figura 16 – Sugestão de imagem para apoiar o terceiro exemplo de divisão de frações .....	103
Figura 17 – Resolução do terceiro exemplo utilizando algoritmo.....	104
Figura 18 – Observação referente ao terceiro exemplo.....	105
Figura 19 – Exemplo do Capítulo 1 da Unidade 4 .....	105
Figura 20 – Quarto exemplo de divisão de frações .....	106
Figura 21 – Quinto exemplo de divisão de frações .....	106
Figura 22 – Destaque intitulado “Nós” do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	108
Figura 23 – Atividade 4 do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	109
Figura 24 – Sugestão de imagem para a Atividade 2 .....	111

Figura 25 – Atividade 5 do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	112
Figura 26 – Atividade 6 do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	112
Figura 27 – Atividade 7 do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	112
Figura 28 – Atividade 8 do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	113
Figura 29 – Atividade 9 do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	113
Figura 30 – Atividade 13 do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	114
Figura 31 – Atividade 15 do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	114
Figura 32 – Atividade 17 do Capítulo Divisão com Números Racionais .....	114
Figura 33 – Atividade 75 envolvendo frações equivalentes.....	120
Figura 34 – Situação envolvendo subtração de frações.....	120
Figura 35 – Fluxograma apresentado na Atividade 89.....	121
Figura 36 – Exemplo de multiplicação de frações .....	122
Figura 37 – Atividade ampliando a multiplicação de frações (Manual do Professor) .....	123
Figura 38 – Propriedade das frações inversas .....	124
Figura 39 – Primeiro exemplo de Divisão de frações por número natural.....	126
Figura 40 – Segundo exemplo de Divisão de frações por número natural.....	127
Figura 41 – Sugestão de imagem para o segundo exemplo de Divisão de frações por número natural.....	127
Figura 42 – Exemplo para o caso Divisão de número natural por fração .....	129
Figura 43 – Sugestão de atividade proposta pelo Manual do Professor.....	130
Figura 44 – Associação entre a divisão e a multiplicação.....	131
Figura 45 – Bloco 1 de atividades da seção Divisão de frações.....	131
Figura 46 – Primeiro exemplo de Divisão de fração por fração.....	132
Figura 47 – Segundo exemplo para Divisão de fração por fração.....	133
Figura 48 – Bloco 2 de atividades da seção Divisão de frações.....	134
Figura 49 – Atividade 7 em “Revisando seus conhecimentos”.....	135

Figura 50 – Atividade 6 em “Testes oficiais”.....	136
Figura 51 – Atividade 1 em “Testes oficiais”.....	137
Figura 52 – Atividade 6 em “Verifique o que estudou”.....	137
Figura 53 – Observação sobre número inverso.....	138
Figura 54 – Divisão de números racionais.....	139
Figura 55 – Atividades envolvendo Divisão de números racionais.....	140
Figura 56 – Atividades 40 e 46 da seção Números racionais, grandezas e medidas.....	141
Figura 57 – Atividade 9 em “Testes oficiais”.....	141
Figura 58 – Atividade 4 em “Verifique o que estudou”.....	142
Figura 59 – Resolução da Atividade 4 no Manual do Professor.....	142
Figura 60 – Convite de participação da Oficina.....	153
Figura 61 – Momento inicial da Oficina.....	155
Figura 62 – Parte da Ata constante no Guia Digital do PNL D/2020.....	156
Figura 63 – Apresentação do Formulário 2.....	160
Figura 64 – Retomada das respostas recebidas no Formulário Inicial.....	165
Figura 65 – Situação problema envolvendo Divisão de frações.....	171

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Seleção de Critérios Eliminatórios do Edital PNLD/2020 .....	32
Quadro 2 – Lista de estudos correlatos.....	35
Quadro 3 – Critérios gerais e critérios específicos para a divisão de frações .....	68
Quadro 4 – Distribuição dos exemplos segundo os casos de divisão de frações .....	107
Quadro 5 – Distribuição das atividades segundo os casos de divisão de frações.....	110
Quadro 6 – Critérios contemplados pela coleção A Conquista da matemática.....	116
Quadro 7 – Atividades que contemplam os casos de Divisão de frações.....	143
Quadro 8 – Critérios contemplados pela coleção Teláris matemática.....	145
Quadro 9 – Critérios contemplados pelas duas coleções analisadas .....	149
Quadro 10 – Critérios gerais para a Oficina .....	157
Quadro 11 – Lista de critérios gerais após validação na Oficina .....	162
Quadro 12 – Objetos de Conhecimento e Habilidades.....	164
Quadro 13 – Respostas obtidas por meio do formulário inicial .....	165
Quadro 14 – Critérios específicos para a Oficina.....	167
Quadro 15 – Lista de critérios específicos após validação na Oficina .....	171
Quadro 16 – Lista de critérios gerais e específicos validada e aprimorada na Oficina.....	176

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
1.1 MOTIVAÇÃO PARA O TRABALHO .....	14
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO E METODOLOGIA DA PESQUISA.....	18
<b>2. A TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE RAYMOND DUVAL ..</b>	<b>22</b>
<b>3. REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>25</b>
3.1 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC).....	26
<b>3.1.1 A divisão de frações na BNCC .....</b>	<b>28</b>
3.2 O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD), O EDITAL E O GUIA DIGITAL DO PNLD/2020: .....	30
<b>3.2.1 Sobre o Edital do PNLD/2020 .....</b>	<b>31</b>
<b>3.2.2 Sobre o Guia Digital do PNLD/2020.....</b>	<b>33</b>
3.3 ESTUDOS CORRELATOS: .....	35
<b>3.3.1 O trabalho de José Carlos Gabriel Souza (2015) .....</b>	<b>37</b>
<b>3.3.2 O trabalho de Mary Rangel (2005).....</b>	<b>38</b>
<b>3.3.3 O trabalho de Raiana Lazzaretti e Carmen Vieira Mathias (2023) .....</b>	<b>40</b>
<b>3.3.4 O trabalho de Nilce Fátima Scheffer e Arthur Belford Powell (2019) .....</b>	<b>43</b>
<b>3.3.5 O trabalho de Eda Vula, Jeta Kingji–Kastrati and Fitore Podvorica (2015).....</b>	<b>47</b>
<b>3.3.6 O trabalho de Roseane Nunes Garcia de Souza (2019).....</b>	<b>49</b>
<b>3.3.7 O trabalho de Daiana dos Santos Oliveira Fischer (2020) .....</b>	<b>51</b>
<b>3.3.8 O Trabalho de Wanderley Moura Rezende (2014) .....</b>	<b>53</b>
<b>3.3.9 O trabalho de Yeping Li e Dennie Smith (2007) .....</b>	<b>55</b>
<b>3.3.10 O trabalho de Rose Elaine Carbone e Patricia T. Eaton (2011) .....</b>	<b>58</b>
<b>3.3.11 O trabalho de Jane-Jane Lo e Raven McCrory (2009).....</b>	<b>59</b>
<b>4. CRITÉRIOS SELECIONADOS PARA ANÁLISE DE LIVRO DIDÁTICO .....</b>	<b>64</b>
4.1 CRITÉRIOS ABORDADOS NA DISCIPLINA ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE MATERIAL DIDÁTICO .....	64

4.2 OS CRITÉRIOS POR NÓS SELECIONADOS .....	68
<b>5. O TEMA DIVISÃO DE FRAÇÕES EM LIVROS DIDÁTICOS .....</b>	<b>89</b>
5.1 APRESENTAÇÃO DAS DUAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS CONSIDERADAS NESTE TRABALHO .....	89
<b>5.1.1 - Coleção 1 - A conquista da matemática .....</b>	<b>89</b>
<b>5.1.2 - Coleção 2 - Teláris Matemática .....</b>	<b>90</b>
5.2 - DESCRIÇÃO COMENTADA SOBRE O TEMA DIVISÃO DE FRAÇÕES NAS COLEÇÕES SELECIONADAS .....	92
<b>5.2.1 - Coleção 1 - A conquista da matemática .....</b>	<b>92</b>
<b>5.2.2 - Coleção 2 - Teláris matemática.....</b>	<b>119</b>
<b>5.2.3 - Considerações sobre a descrição comentada das duas coleções analisadas</b>	<b>148</b>
<b>6. OFICINA MINISTRADA A DOCENTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA.....</b>	<b>153</b>
6.1 METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO DA OFICINA: .....	154
<b>6.1.1 Primeiro Dia - Documentos Oficiais e Critérios Gerais.....</b>	<b>154</b>
<b>6.1.2 Segundo Dia - Critérios Específicos para o tema Divisão de Frações .....</b>	<b>163</b>
6.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE A OFICINA IMPLEMENTADA.....	173
<b>7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>174</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>180</b>
<b>APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO .....</b>	<b>184</b>
<b>APÊNDICE B – FORMULÁRIO INICIAL .....</b>	<b>186</b>
<b>APÊNDICE C – FORMULÁRIO 2 .....</b>	<b>188</b>
<b>APÊNDICE D – SITUAÇÃO DA OFICINA .....</b>	<b>192</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>195</b>
<b>ANEXO A – LIVRO DIDÁTICO: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA .....</b>	<b>195</b>
<b>ANEXO B – LIVRO DIDÁTICO: TELÁRIS MATEMÁTICA .....</b>	<b>206</b>

## 1. INTRODUÇÃO

As considerações iniciais do presente trabalho visam destacar as motivações que impulsionaram o seu desenvolvimento, bem como apresentar a estrutura e metodologia de pesquisa.

### 1.1 MOTIVAÇÃO PARA O TRABALHO

Docentes das escolas públicas brasileiras têm uma responsabilidade muito grande ao receberem a incumbência de escolher o livro didático a ser adotado nas suas escolas por um período de quatro anos letivos (subsequentes a essa escolha), e que poderá desempenhar o papel tanto de material orientador para as suas aulas quanto de material de apoio para estudantes.

O Programa Nacional do Livro Didático – PNLD tem como um de seus princípios básicos atribuir ao professor, em sintonia com o projeto pedagógico de sua escola, a tarefa de escolher o livro que será usado por seus alunos. Este é, portanto, um trabalho dos mais significativos que periodicamente o professor é chamado a realizar. (Carvalho; Lima, 2010, p.17)

É relevante, portanto, que alguns critérios de análise sejam considerados para que esses livros contemplem, o máximo possível, os objetivos necessários para o aprendizado de estudantes. Na escola municipal em que atuo<sup>1</sup> a seleção começa quando a equipe docente recebe das editoras, diferentes coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), (ver seção 4.2.1 deste trabalho), para que, em conjunto com a equipe diretiva, seja selecionada a coleção que será utilizada naquela escola no período subsequente a essa escolha. Na equipe de docentes de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental, da qual faço parte, essa escolha é feita, muitas vezes, de forma rápida (em geral, em apenas uma reunião), sendo dada a oportunidade de um debate sobre qual será a coleção adotada pela escola. Na escolha realizada em setembro de 2019, lembro-me que, para essa análise, elegemos, para cada ano escolar, um objeto de conhecimento<sup>2</sup> que tivesse uma maior complexidade, seja no ensino ou na aprendizagem, para então compararmos as propostas dos livros didáticos disponibilizados. Cabe ressaltar que, nessa análise, não utilizamos o Guia Digital do PNLD/2020 (descrito na seção 4.2.2 deste trabalho), e foram analisados apenas os

---

<sup>1</sup> Por se tratar de uma motivação pessoal, ao longo da seção 1.2, utilizarei os verbos na primeira pessoa do singular.

<sup>2</sup> Utilizamos aqui a terminologia utilizada na Base Nacional Comum Curricular: “**objetos de conhecimento** – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos – que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas” (Brasil, 2017, p.28)

Manuais do Professor impressos.

Como o livro didático é utilizado por parte de docentes como recurso pedagógico na sala de aula, podendo também ser utilizado por estudantes como fonte de leitura, consulta e muitas vezes pesquisa, foram, na ocasião, elencados por essa equipe de docentes de matemática, dois aspectos para foco de análise, por entendermos que, naquele momento seriam aspectos que estavam relacionados com a realidade de nossos alunos, e com isso, se o livro escolhido contemplasse esses aspectos estaria contribuindo com a formação discente. O primeiro deles dizia respeito à linguagem: O tema desenvolvido nos livros apresenta uma linguagem acessível para o entendimento de estudantes? O segundo dizia respeito aos exercícios: São eles propostos por meio de situações contextualizadas? Trazem efetivamente problemas (isto é, atividades cuja resolução não é imediata, por envolverem mais de uma etapa de raciocínio)? Assim, tais critérios nos levaram, em 2019, à escolha da coleção *A conquista da matemática*, por considerarmos (a equipe de docentes de matemática da escola), naquele momento, que era a coleção que mais contemplava os aspectos selecionados para aquela análise. No entanto, nunca me senti confortável, tanto com o curto período para realizar essa análise quanto pela escassez de critérios considerados em uma tarefa tão importante.

Com base nessa experiência, surgiu a vontade de pesquisar sobre que outros critérios seriam relevantes para uma análise de livros didáticos. Sabe-se que os livros didáticos passam por um processo de seleção baseado em critérios estabelecidos nos Editais do PNLD (ver seção 4.2.1 deste trabalho). Entretanto, observamos que tais critérios nem sempre contemplam integralmente o que consideramos necessário, em termos de conteúdo, para desenvolver determinados objetos de conhecimento e atingir as habilidades recomendadas na BNCC. Por esse motivo, consideramos necessário refletir sobre critérios relacionados ao desenvolvimento do pensamento matemático de estudantes.

Durante a avaliação das coleções recebidas pela minha escola, nós, docentes, optamos por selecionar um conteúdo que apresentasse complexidade tanto no processo de ensino quanto no processo de aprendizagem. Nesse contexto, para essa pesquisa, avaliamos que o conteúdo de divisão de frações seria apropriado para tal aplicação, visto que este tema envolve dois temas considerados complexos na Educação Básica: divisão e frações. Conforme Ripoll *et al* (2015) “A divisão é, entre as operações básicas, a mais complexa e a que determina maiores desafios para o ensino e para a aprendizagem.”. E, segundo Monteiro e Pinto (2005), algumas das dificuldades que estudantes do ensino básico enfrentam no seu



percurso para compreender os números fracionários são identificadas na literatura com os diferentes significados das frações, com a concepção da unidade e com o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos. As autoras reforçam, ainda, que a aprendizagem dos aspectos formais do estudo das frações e dos chamados números decimais provêm do ensino dos algoritmos das operações e das regras, sendo, de um modo geral, dada maior ênfase nos procedimentos do que nos conceitos, raramente estabelecendo-se “pontes” entre uns e outros.

A escolha por este assunto também está relacionada à minha trajetória docente, pois em muitos momentos ouvi de alunas(os) a expressão: “frações não!” ou até mesmo “porque precisamos estudar frações?”. Apesar de utilizar, em minhas aulas, materiais concretos e situações diversificadas para contemplar este conteúdo, ainda era possível encontrar estudantes apresentando dificuldades na aprendizagem.

Além disso, como professora titular da turma na qual a proposta didática da dissertação “Abordagem de frações equivalentes: uma experiência no 6º ano do ensino fundamental”<sup>3</sup> foi implementada, pude acompanhar a proposta de Souza (2019) e sua orientadora, com relação ao processo de construção e aprofundamento do conceito de fração. Em particular, acompanhei a proposta de levar estudantes a construir o conceito de equivalência e a deduzirem um método para reconhecer a equivalência de frações a partir de suas próprias construções. Fascinou-me constatar que, com tal discussão, estudantes puderam compreender o processo envolvido naquela proposta.

Também tive a oportunidade de participar como proponente, juntamente com colegas e professoras da área de matemática, da oficina “Que parte você quer?”<sup>4</sup>, na qual pude perceber que a dificuldade com o estudo de frações se repetia com estudantes procedentes de diferentes escolas da grande Porto Alegre. Nesse encontro, conheci o trabalho de dissertação de mestrado que estava sendo desenvolvido por Fischer (2020) intitulado: “Investigando o ensino e a aprendizagem de multiplicação de frações: um estudo com alunos do 6º ano”<sup>5</sup>, trabalho este que dá continuidade ao trabalho desenvolvido por Souza (2019). Assim, a ideia de dar seguimento à pesquisa sobre frações no ensino fundamental, focando agora no tema de

---

<sup>3</sup> Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, de autoria de Roseane Nunes Garcia de Souza (ver seção 4.3).

<sup>4</sup> Oficina proposta no II Festival da Matemática, em 2019, promovido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), na qual foram propostas atividades práticas envolvendo o conteúdo de frações.

<sup>5</sup> Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, de autoria de Daiana dos Santos Oliveira Fischer (ver seção 4.3).

divisão de frações, mostrou-se pertinente e muito inspiradora para mim.

A relevância da escolha deste tópico também é apontada por Rezende, que dá seu depoimento sobre uma oficina realizada com docentes sobre divisão de frações:

[...] considerando o universo de professores participante da oficina, bastante representativo por sinal, há de se alarmar com a responsabilidade que atribuímos ao professor especialista de matemática. A construção dos números racionais é, sem dúvida, a parte mais significativa do campo “Números e Operações” da matemática escolar apontado nas orientações curriculares oficiais. Não se pode negligenciar e atribuir papel secundário a este importante tópico do ensino de matemática. Os professores precisam aprofundar e ampliar o seu conhecimento matemático a respeito do tema. (Rezende, 2014, p.68)

Desta forma, após todas as questões abordadas até o momento, surgiu a motivação para realizar um trabalho focado na divisão de frações.

Assim, buscamos responder à questão:

*Que critérios, gerais focando no conteúdo e específicos focando no conteúdo divisão de frações, são relevantes e eficazes para uma análise de livros didáticos de matemática?*

Temos então como Objetivo Geral da pesquisa:

*Elencar e validar, junto a um grupo de docentes da Educação Básica, critérios gerais para uma análise de livros didáticos de matemática focando no conteúdo e critérios específicos para o conteúdo divisão de frações no 7º ano do Ensino Fundamental.*

E como Objetivos Específicos:

- (1) Elencar critérios gerais de análise de livros didáticos de matemática focando no conteúdo;
- (2) Elencar critérios específicos focando no conteúdo divisão de frações no 7º ano do Ensino Fundamental;
- (3) Aplicar a lista de critérios, constituída nesta pesquisa, na análise do conteúdo divisão de frações em livros didáticos de 7º ano;
- (4) Validar ou aprimorar a lista de critérios junto a um grupo de docentes da Escola Básica.

Destacamos que, com o terceiro objetivo, busca-se uma primeira validação dos critérios elencados, fazendo uso de coleções de livros didáticos aprovadas no Edital do PNLD/2020. A segunda validação, esta externa, é buscada com o quarto objetivo.

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO E METODOLOGIA DA PESQUISA

Para responder à pergunta de pesquisa

*Que critérios, gerais focando no conteúdo e específicos focando no conteúdo divisão de frações, são relevantes e eficazes para uma análise de livros didáticos de matemática?*

bem como contemplar os objetivos desta dissertação, foi realizada uma pesquisa de cunho qualitativo, pois, conforme Araújo e Borba (2006), quando um professor se dispõe a realizar uma pesquisa na área de Educação Matemática é porque ele já vem observando e problematizando sua própria prática docente. E, segundo Gerhardt e Silveira (2009, p.34), em uma pesquisa qualitativa busca-se expressar “o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens”

Assim sendo, essa dissertação está estruturada em 7 capítulos. No capítulo inicial são apresentadas a introdução e a justificativa, bem como a pergunta de pesquisa e os objetivos a serem contemplados por ela, seguidos pela estrutura do trabalho e metodologia empregada na presente pesquisa. No segundo capítulo trazemos, como importante aporte teórico para o conteúdo divisão de frações, a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003, 2009, 2011, 2018), por considerarmos que representar um mesmo objeto de diferentes maneiras e saber transitar entre tais representações é imprescindível para o bom entendimento do tema.

Fan (2013, p. 633), lembra que os livros didáticos de matemática são utilizados “como materiais de apoio para o ensino e aprendizagem da matemática” e menciona um importante progresso ao longo das últimas décadas em pesquisas sobre livros didáticos. O autor propõe cinco direções necessárias para avançar a pesquisa nesse campo, sendo uma delas relativa ao conteúdo, direção escolhida para a presente pesquisa. Optamos por direcionar nossa lista de critérios para o conteúdo, partindo do entendimento de que os livros didáticos continuam a ser empregados em todas as escolas públicas (conforme descrito na introdução deste trabalho).

Para contemplar o primeiro objetivo deste trabalho (Elencar critérios gerais de análise de livros didáticos de matemática focando no conteúdo), procurou-se por uma pré-seleção de critérios nos documentos oficiais Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental – Anos Finais, por ser este um documento normativo em vigor, de referência nacional, imprescindível, portanto, para quem procura elencar critérios de análise para os livros didáticos atuais, bem como o Edital do PNLD/2020 e o Guia Digital do PNLD/2020,

tendo em vista que este último já apresenta um conjunto de princípios e critérios compatíveis com os objetivos estabelecidos no Edital e pautados pela BNCC, dos quais ressaltamos aqueles relacionados a conteúdo. Tais documentos constituem as duas primeiras seções do Capítulo 3 intitulado como Revisão de literatura. Na terceira e, última seção, deste capítulo são apresentados estudos que se relacionam com a nossa pesquisa, seja em termos de critérios de análise de livros didáticos, seja em aspectos relacionados ao conteúdo de divisão de frações, visando o segundo objetivo específico deste trabalho (Elencar critérios específicos focando no conteúdo divisão de frações no 7º ano do Ensino Fundamental).

Para conduzir essa revisão de estudos correlatos, realizamos uma pesquisa nos registros do Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, assim como no Lume Repositório Digital da UFRGS<sup>6</sup> e na Lista de Dissertações<sup>7</sup> de alunos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT utilizando como palavras-chave: critérios de análise; análise de livros didáticos; análise de livros didáticos de matemática. A partir da leitura dos títulos e resumos disponíveis *online*, identificamos estudos relacionados ao tema central do trabalho (critérios de análise de livros didáticos). Em um primeiro momento buscamos por critérios de análise de livros didáticos e, em um segundo momento, refinamos nossa busca direcionando nosso foco para critérios específicos que dizem respeito ao conteúdo de divisão de frações. É importante salientar que a seleção dos trabalhos abordados neste capítulo também leva em consideração a experiência profissional da autora e da orientadora deste trabalho. Por isso, incluímos também trabalhos encontrados em atas de congressos internacionais colecionados pela orientadora, como o *Proceedings of ICME 11*, México, 2011 (ver 3.3.10) e *Proceedings of the ICMI Study Group 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, 2009 (ver 3.3.11).

Continuando a busca por uma lista preliminar de critérios, sejam gerais, sejam específicos para o tema em foco, no Capítulo 4, são apresentados critérios abordados na disciplina intitulada “Análise e Desenvolvimento de Material Didático” da qual a autora da presente dissertação participou como aluna (conforme descrito na seção 4.1). Essa disciplina teve como propósito analisar o processo de ensino da divisão em livros didáticos ao longo da Educação Básica, sendo que um de seus focos foi as dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem desse tema, incluindo a divisão de frações. Na seção 4.2, é apresentada a lista

---

<sup>6</sup> Lume é o portal de acesso aos trabalhos digitais produzidos na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), como as teses e dissertações, assim como outros documentos acadêmicos, científicos, artísticos e administrativos.

<sup>7</sup> Disponível em <<https://profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/>>

de critérios gerais e critérios específicos para o tema divisão de frações constituída por nós (e que será considerada para o restante do trabalho). A construção da lista de critérios foi apoiada na revisão de literatura, nos estudos realizados na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático e na experiência docente da autora. Os critérios estão elaborados na forma de perguntas com respostas “sim” ou “não”, por entendermos que, desta maneira, ficam ressaltados objetivamente aspectos importantes da análise que nos propomos a realizar.

O Capítulo 5 está relacionado ao terceiro objetivo específico desta pesquisa (Aplicar a lista de critérios, constituída nesta pesquisa, na análise do conteúdo divisão de frações em livros didáticos de 7º ano). Escolhemos 2 coleções aprovadas no PNLD/2020, tendo como critério para essa seleção, a maior adesão das escolas públicas em 2019. Após um levantamento feito no site do Ministério da Educação (MEC) e do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)<sup>8</sup>, ambos órgãos responsáveis pela seleção, compra e distribuição dos livros didáticos nas escolas, constatou-se que a coleção A conquista da matemática, de José Ruy Giovanni Junior e Benedicto Castrucci (que coincide com a coleção selecionada em minha Escola em 2019) e Teláris Matemática, de Luis Roberto Dante, foram as duas coleções mais adotadas pelas escolas públicas. Por esse motivo, neste capítulo, apresentamos uma descrição comentada dos volumes do 7º ano dessas duas coleções, buscando avaliar se o conteúdo de divisão de frações atende aos critérios elencados em 4.2.

O Capítulo 6 refere-se ao quarto objetivo específico da pesquisa (Validar ou aprimorar tais critérios junto a um grupo de docentes da Escola Básica). Para essa segunda validação dos critérios, agora externa, escolhemos, assim, realizar uma oficina para uma equipe de docentes com o propósito de discutir aspectos como redação, compreensão e precisão, abrangência dos pontos relevantes considerando a complementação ou reformulação e a inclusão ou a exclusão de critérios desta lista. A Oficina foi ministrada em dois dias, com uma duração aproximada de 100 minutos em cada um desses dias. No primeiro dia, contou com a participação de 17 pessoas, enquanto no segundo dia o número de participantes foi de 16. A maioria dos participantes constituiu-se de estudantes ingressantes e concluintes do Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) - Polo IFRS Campus Canoas. Por tratar-se de uma pesquisa qualitativa, validar a lista de critérios (apresentada na seção 4.2) junto a uma equipe de docentes, atuantes na Educação Básica, revelou-se adequado e relevante, visto que, segundo

---

<sup>8</sup> Autarquia vinculada ao Ministério da Educação, que possui como objetivo a execução de políticas educacionais desse ministério.

Bogdan e Biklen (1994, p. 47-48) “Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural [...] Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto”.

O trabalho é finalizado com o Capítulo 7, no qual apresentamos nossas considerações finais, incluindo reflexões e conclusões obtidas em relação à pesquisa realizada. No Apêndice A é incluído o modelo do Termo de Assentimento, assinado pelas(os) participantes da Oficina ministrada a docentes da Educação básica. Nos Apêndices B e C encontram-se os dois formulários utilizados na Oficina (Capítulo 6). No apêndice D encontra-se uma situação problema, elaborada pela autora deste trabalho, que foi apresentada na Oficina (Capítulo 6). E, nos Anexos A e B, encontram-se os textos que foram analisados das coleções A conquista da matemática e Teláris matemática.

## 2. A TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE RAYMOND DUVAL

Raymond Duval é filósofo, psicólogo de formação e professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale em Dunquerque, França. É responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e de importantes estudos em psicologia cognitiva desenvolvidos no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Strasbourg, França entre os anos de 1970 e 1994. A Teoria de Registros de Duval tem-se mostrado importante instrumento de pesquisa no estudo da complexidade da aprendizagem de matemática.

De acordo com Duval (2003), não é possível adquirir conhecimento matemático sem recorrer a alguma forma de representação, e a compreensão não poderá ser alcançada sem a distinção entre um objeto e sua representação. O autor denomina como representação as diferentes formas de visualizar ou de representar um objeto matemático. Portanto, entende-se que são necessários diversos registros de representação de um objeto matemático para que se promova o ensino desse objeto, e conseqüentemente, o domínio destes registros, por parte de estudantes.

Já o termo Representação Semiótica é usado pelo autor para referir-se aos diferentes tipos de representação como, por exemplo, escrita natural, escrita algébrica, gráficos cartesianos e figuras. De fato, as aulas de matemática, desde os anos iniciais, estão repletas de desenhos, figuras, tabelas, gráficos e esquemas. Por conseguinte, com o auxílio de variadas representações, docentes podem abordar muitas ideias, relações, propriedades e conceitos existentes na Matemática.

Duval ressalta que o modo de acesso aos objetos matemáticos é muito diferente do acesso aos objetos de conhecimento de outras disciplinas científicas, aspecto que, para a compreensão da matemática, nos leva à necessidade de desenvolver outro tipo de funcionamento cognitivo. Diante disso, o autor afirma que é preciso ter “consciência dos processos cognitivos específicos que requer o pensamento matemático e desenvolvê-los com os alunos, mesmo que, fazendo isso, os professores tenham a impressão de não mais fazer (momentaneamente) matemática” (Duval, 2011, p. 9).

A Teoria de Raymond Duval aborda o desenvolvimento do pensamento, defendendo que, para que estudantes assimilem um conceito, é essencial que diferenciem o objeto da sua representação. É através das representações semióticas que se torna possível a realização de

funções cognitivas essenciais no pensamento humano. Na perspectiva do autor, uma análise do conhecimento matemático é, essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento, uma vez que a maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações. (Duval, 2003).

São três os elementos básicos apontados por Duval: a formação de um registro, a conversão e o tratamento. A conversão e o tratamento são dois tipos diferentes de transformação dos registros. Enquanto os tratamentos são operações internas a um mesmo tipo de registro e estão diretamente relacionadas à forma e não ao conteúdo do objeto matemático em estudo, as conversões são a passagem de um tipo de registro a outro, é a mudança de uma representação para outra, em um outro registro, porém conservando o mesmo objeto matemático. Dessa forma,

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; [...] as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica em uma equação à sua representação gráfica. Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro. [...] Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (Duval, 2003, p. 16)

Segundo Duval (2018), superar a conversão entre diferentes representações semióticas é o principal desafio para alcançar compreensão e aprendizado em matemática. De fato, para analisar as dificuldades de aprendizagem de matemática, Duval (2009) reitera ser prioritário o estudo da conversão de representações e não os tratamentos, visto que se faz necessário que estudantes saibam transitar entre os diversos tipos de registros. Segundo o autor, quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto.

Nesse contexto, entende-se que o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática está atrelado à capacidade de cada indivíduo utilizar os diversos registros de representação semiótica sobre um determinado objeto matemático, cabendo a docentes o papel de mediador. A teoria de Duval possibilita que docentes identifiquem dificuldades enfrentadas por estudantes, permitindo-lhes compreender os obstáculos provenientes dessas dificuldades.



A escolha por Duval como aporte teórico para este trabalho deve-se ao fato de também considerarmos as várias representações para frações imprescindíveis ao bom entendimento do tema por estudantes. Entendemos que estudantes que são capazes de transitar por tais representações e fazer conversões evidenciam a compreensão do tema. Além disso, vemos nosso apoio na Teoria de Duval não distante da BNCC. De fato, na Competência Geral 4 da BNCC, essa teoria é implicitamente mencionada:

Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. (Brasil, 2017, p.9)

Por fim, a Teoria de representações semióticas de Duval nos fez refletir sobre as potencialidades de cada tipo de representação de frações e sobre as possibilidades de conversões, algo que consideramos essencial para o aprendizado do conteúdo Divisão de frações. Por esse motivo, incluímos critérios específicos sobre tratamento e conversão na lista de critérios apresentados em 4.2 (ver C12, C13 e A7).

### 3. REVISÃO DE LITERATURA

Tendo como propósito contemplar o primeiro objetivo deste trabalho (Elencar critérios gerais de análise de livros didáticos de matemática focando no conteúdo), a revisão de literatura iniciou-se pela leitura da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental, documento normativo em vigor, de referência nacional, buscando por orientações gerais especificamente para a Matemática e pelos Objetos de Conhecimento e Habilidades requeridas que envolvem divisão, frações e, especialmente, divisão de frações, o que consideramos , imprescindível para quem procura elencar critérios de análise para os livros didáticos atuais (ver 3.1). Prosseguimos com a leitura dos documentos oficiais nos direcionando àqueles referentes ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD/2020), sendo eles o Edital (ver 3.2.1) e o Guia Digital (ver 3.2.2), tendo em vista que este último já apresenta um conjunto de princípios e critérios compatíveis com os objetivos estabelecidos no Edital e pautados pela BNCC, dos quais procuramos por aqueles relacionados a conteúdo.

Após a leitura destes documentos, realizamos um levantamento de trabalhos relacionados à nossa pesquisa, com o propósito de buscar semelhanças e diferenças com o trabalho em desenvolvimento, bem como buscar quesitos que contribuíssem para nossa reflexão sobre o tema de pesquisa. Para realizar esse levantamento, buscamos trabalhos registrados no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, assim como no Lume Repositório Digital da UFRGS e na Lista de Dissertações de alunos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, utilizando como palavras-chave: critérios de análise; análise de livros didáticos; análise de livros didáticos de matemática.

Em um primeiro momento, a partir da leitura dos títulos e resumos disponíveis *online*, identificamos estudos relacionados ao tema central do trabalho (critérios de análise de livros didáticos), visando ainda contemplar o primeiro objetivo da pesquisa. Em um segundo momento, buscando atingir o segundo objetivo (Elencar critérios específicos focando no conteúdo divisão de frações no 7º ano do Ensino Fundamental), focamos em trabalhos que se relacionam ao conteúdo frações e, mais especificamente, a critérios específicos relacionados à divisão de frações. Nos trabalhos selecionados, nos mesmos portais, por meio das palavras-chave: frações e divisão de frações, buscamos por aspectos que poderiam estar relacionados à nossa questão de pesquisa, incluindo o foco, os objetivos e resultados do trabalho. Além disso, verificamos se estes trabalhos incluíam critérios de análise de um livro didático. Especialmente nos trabalhos que mencionam a divisão de frações, procuramos identificar os

aspectos abordados e a relevância para nossa pesquisa.

A seleção dos trabalhos abordados na seção 3.3 também levou em consideração a experiência profissional da autora e da orientadora deste trabalho. Por isso, incluímos, também, trabalhos encontrados em atas de congressos internacionais colecionados ao longo do tempo pela orientadora. Cabe ressaltar que em Congressos Internacionais, tais como *International Conference on Mathematical Textbooks* (ICMT), o *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), *Proceedings do International Congress on Mathematics Education* (ICME 11), *Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 9) e *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* existem muitos trabalhos que envolvem comparações feitas entre livros didáticos de diferentes países, revelando-se fontes em potencial de trabalhos que envolvam critérios para análise de livros didáticos.

A seguir, passamos a detalhar o que selecionamos com relação à revisão de literatura.

### 3.1 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

No ano de 2018 foi homologada a versão final da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento normativo, de referência nacional, que diz respeito à formulação dos currículos das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (Brasil, 2018, p.7)

A BNCC estabelece que, ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas por meio de Objetos de Conhecimento<sup>9</sup> e respectivas Habilidades<sup>10</sup> distribuídas ao longo dos anos do Ensino Fundamental, e por meio de itinerários formativos ao longo do Ensino Médio, devam ocorrer de forma que assegurem aos estudantes também o

---

<sup>9</sup> Objetos de Conhecimento na BNCC são entendidos como conteúdos, conceitos e processos –, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas. (Brasil, 2018, p.28)

<sup>10</sup> As habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares. (Brasil, 2018, p.29)

desenvolvimento de dez competências gerais<sup>11</sup>. Sobre competências específicas, encontramos:

Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos –, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas. Respeitando as muitas possibilidades de organização do conhecimento escolar, as unidades temáticas definem um arranjo dos objetos de conhecimento ao longo do Ensino Fundamental adequado às especificidades dos diferentes componentes curriculares. (Brasil, 2018, p.28-29)

Logo no início dos comentários relativos à área de Matemática, o documento salienta a importância das representações, ao afirmar:

No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (Brasil, 2018, p.265)

A BNCC ressalta, e implicitamente recomenda, articulações tanto horizontais como verticais dos conteúdos, favorecendo assim, uma retomada de pré-requisitos e de conteúdos já abordados em sala de aula, antes de se inserir um novo conteúdo ou de aprofundar um conteúdo:

As competências específicas possibilitam a articulação horizontal entre as áreas, perpassando todos os componentes curriculares, e também a articulação vertical, ou seja, a progressão entre o Ensino Fundamental – Anos Iniciais e o Ensino Fundamental – Anos Finais e a continuidade das experiências dos alunos, considerando suas especificidades (Brasil, 2018, p.28)

Também a relevância da articulação vertical é explicitada neste documento, ao salientar a importância da conexão entre as habilidades e, a retomada e, ampliação das noções matemáticas, visto que aprendizagens já consolidadas servem de base para novas aprendizagens.

Em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. No entanto, é fundamental considerar que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada. A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores. (Brasil, 2018, p.276)

O documento evidencia a importância de o estudante resolver e elaborar problemas -

---

<sup>11</sup> Competência é definida, na BNCC, como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (Brasil, 2018, p.8)

como um processo de aprender uma noção em um contexto, ser capaz de abstraí-la para então aplicar em outro contexto - e essa ênfase na resolução de problemas é mencionada em mais de 40 habilidades do Ensino Fundamental:

[...] algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos. (Brasil,2018, p.277)

A Base Nacional Comum Curricular também destaca o desenvolvimento do pensamento matemático ao requerer que:

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático<sup>12</sup>, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (Brasil,2018, p.266)

Com a homologação da BNCC, os livros didáticos passaram por uma reorganização de conteúdos, na qual o conteúdo de adição e subtração de frações é desenvolvida em livros didáticos do 6º ano, enquanto a multiplicação e divisão de frações passaram a ser desenvolvidas em livros do 7º ano, conforme apresentaremos a seguir.

### 3.1.1 A divisão de frações na BNCC

A divisão dentro do contexto de frações só aparece na BNCC no 7º ano. De fato, na Unidade Temática<sup>13</sup> Números, destacamos, no 7º ano, o Objeto de Conhecimento “Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador”, associado 5 habilidades, dentre elas, especificamente mencionando a divisão, “(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” (Brasil, 2018, p.307).

Também cabe destacar o Objeto de Conhecimento “Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações”, associado à habilidade “(EF07MA11) Compreender e utilizar a

<sup>12</sup> Segundo a Matriz do Pisa 2012, o “letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.”

<sup>13</sup> Segundo a BNCC, as unidades temáticas definem um arranjo dos Objetos de Conhecimento ao longo do Ensino Fundamental adequado às especificidades dos diferentes componentes curriculares.

multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias” (Brasil, 2018, p.307), bem como à habilidade “(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais” (Brasil, 2018, p.307). Salientamos que as habilidades relacionadas à divisão de números racionais na BNCC, apontadas para o 7º ano, auxiliaram-nos na criação dos critérios elencados no Capítulo 4.

Encerramos esta seção com um comentário sobre a abordagem da divisão na BNCC, repetindo uma citação que nos parece cabível com relação à questão que gostaríamos de discutir,

[...] Respeitando as muitas possibilidades de organização do conhecimento escolar, as unidades temáticas definem um arranjo dos objetos de conhecimento ao longo do Ensino Fundamental adequado às especificidades dos diferentes componentes curriculares. (Brasil, 2018, p.28-29)

Na Unidade Temática Números, a BNCC considera os significados equipartição e medida para a divisão, sendo que, por “equipartição”, subentende-se a divisão em partes iguais e, por “medida”, quer-se saber quantas vezes o divisor cabe no dividendo. No entanto, existe um terceiro significado que não é tratado para a divisão. Passamos a explicar melhor essa constatação.

Em Ripoll *et al* (2015), é ressaltado um terceiro significado para a divisão, chamado de significado exterior. Esse nome vem do fato de tal significado relacionar grandezas de espécies diferentes, o que o distingue dos significados de equipartição e de medida:

Pode-se ainda reconhecer um terceiro significado associado à operação de divisão [...] **significado exterior**: são dadas duas **quantidades relativas a grandezas de espécies diferentes** (dividendo e divisor), e se determina uma **quantidade relativa a uma grandeza que pode não ser da mesma espécie** de uma das quantidades dadas (quociente).

Exemplo 3.27: Um muro retangular tem área medindo  $48m^2$  e base medindo  $8m$ . Quanto mede a altura do muro? [...] O significado exterior associado à divisão caracteriza-se pelo fato de que os termos da operação não são quantidades de mesma espécie. (Ripoll *et al*, 2015, p.111)

Observamos que a BNCC não destaca explicitamente este terceiro significado da divisão na Unidade Temática Números, embora ele possa ser considerado como implícito na Habilidade:

(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (Brasil, 2018, p.295)

relativa ao Objeto de Conhecimento “Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais” no 5º ano do Ensino

Fundamental. No entanto, sua utilização torna-se evidente na Unidade Temática Grandezas e Medidas, nesse mesmo ano escolar, ao ser elencada na Habilidade

(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais. (Brasil, 2018, p.297)

relativa ao Objeto de Conhecimento “Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais”, e na Habilidade:

(EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes. (Brasil, 2018, p.297)

relativa ao Objeto de Conhecimento “Áreas e perímetros de figuras poligonais: algumas relações”. De fato, toda vez que for oportunizado, por exemplo, um problema que fornece a área de um retângulo e seu comprimento e pergunta-se sobre sua largura, estudantes estarão lidando com o terceiro significado da divisão em sua resolução.

Portanto, mesmo não sendo explicitamente mencionado, entende-se que a BNCC opta por deixar para abordar o terceiro significado da divisão no momento em que trata de grandezas e medidas, o que consideramos coerente, uma vez que grandezas de espécies diferentes aparecem mais naturalmente nestes contextos. No entanto, na nossa opinião, algum comentário sobre a escolha por esta organização deveria aparecer no documento. A falta de qualquer comentário sobre esta escolha pode fazer com que Manuais do Professor também não alertem para este importante significado da divisão.

### 3.2 O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD), O EDITAL E O GUIA DIGITAL DO PNLD/2020:

O Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) é um programa do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) que é vinculado ao Ministério da Educação (MEC) e responsável por avaliar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma regular e gratuita, bem como disponibilizá-las, de forma gratuita, a todas as escolas públicas (das redes federal, estadual, municipal e do Distrito Federal) da Educação Básica.

A cada ano, o programa atende, alternadamente, a uma parte específica da Educação

Básica: Educação Infantil, Anos Iniciais do Ensino Fundamental, Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Os segmentos não atendidos naquele ano, recebem livros a título de complementação, correspondentes a novas matrículas registradas ou à reposição de livros avariados ou não devolvidos. A partir de 2019, o programa passou a adotar uma organização em ciclos de quatro anos e não mais de três anos, como era anteriormente a essa data.

Destacamos, a seguir, os critérios de análise encontrados no Edital e no Guia Digital do PNLD/2020 e que se relacionam ao foco da presente pesquisa.

### **3.2.1 Sobre o Edital do PNLD/2020**

O Edital do PNLD/2020 teve por objetivo convidar editoras a participarem do processo de submissão de obras didáticas e literárias, destinadas a estudantes e docentes dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). Buscando garantir a qualidade do material encaminhado para as escolas e incentivando a produção de materiais cada vez mais adequados às necessidades da educação pública brasileira, as obras didáticas submetidas ao PNLD/2020 devem ser então aprovadas em avaliações pedagógicas coordenadas pelo Ministério da Educação, que contou com a participação de Comissões Técnicas específicas, integradas por especialistas das diferentes áreas do conhecimento correlatos ao segmento avaliado.

Cabe ressaltar que o processo de avaliação de obras didáticas e literárias do PNLD/2020 foi o primeiro em que a análise dos livros didáticos para os Anos Finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) foi pautada pela BNCC. Com isso,

A avaliação objetiva sobretudo garantir que os materiais contribuam para o desenvolvimento das competências e habilidades envolvidas no processo de aprendizagem nos anos finais do ensino fundamental, conforme definidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). (Brasil, 2019a, p.37)

No Anexo III do Edital PNLD/2020, entre as páginas 37 e 42, é possível encontrar o conjunto de critérios eliminatórios comuns e critérios eliminatórios específicos utilizados na avaliação das obras didáticas e literárias. Cabe salientar que, relativo às obras didáticas, estão sendo avaliados, o Livro do Estudante e o Manual do Professor, descritos no glossário do documento como:

**12. Livro do Estudante:** aquele utilizado pelo aluno para acompanhar as aulas do professor; estudar; realizar as atividades na sala de aula ou em casa.

**13. Manual do Professor – Anos Finais do Ensino Fundamental:** aquele utilizado



pelo professor, em correspondência com o Livro do Estudante, para aperfeiçoar-se, expandir seus estudos, preparar os planos de aulas e de avaliação formativa e suprir as dificuldades de aprendizagem dos estudantes. (Brasil, 2019a, p.23-24)

Dessa forma, entende-se que todas as coleções aprovadas pelo PNLD/2020 atendem aos critérios descritos, em todos os seus volumes. Contudo, julgamos importante fazer uma seleção dos critérios eliminatórios presentes no Anexo III, p.37-42 do Edital PNLD/2020 (ver Quadro 1) que consideramos relevantes ao propósito desta pesquisa. Destacamos que estes critérios são referenciados adiante, especialmente na seção 4.2.

Quadro 1 – Seleção de Critérios Eliminatórios do Edital PNLD/2020

## **2. Critérios de Avaliação:**

### **2.1 CRITÉRIOS ELIMINATÓRIOS COMUNS**

Serão excluídas as obras didáticas inscritas no PNLD/2020 que não atenderem ao disposto nos seguintes critérios eliminatórios comuns:

3. Coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica
4. Correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos;
5. Adequação e pertinência das orientações prestadas ao professor;
7. Adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico;
8. Qualidade do texto e a adequação temática;

#### **2.1.3 Coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica**

Por mais diversificadas que sejam as concepções e as práticas de ensino envolvidas na educação escolar, a obra deve propiciar ao aluno uma efetiva apropriação do conhecimento. Assim, serão excluídas as obras didáticas que não atenderem aos seguintes requisitos:

**a.** Apresentar uma abordagem metodológica capaz de contribuir para o alcance dos objetos de conhecimento e respectivas habilidades dispostos na BNCC, visando o desenvolvimento integral dos estudantes;

**c.** Organizar-se de forma a garantir a progressão das aprendizagens;

#### **2.1.4 Correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos**

Respeitando tanto as conquistas científicas das áreas de conhecimento representadas nos componentes curriculares quanto os princípios de uma adequada mediação pedagógica, as obras devem:

**a.** Apresentar e utilizar em exercícios, atividades, ilustrações e imagens conceitos, informações e procedimentos corretos e atualizados.

**b.** Apresentar conceitos, informações e procedimentos com clareza e precisão. (A obra não deve induzir ao erro, apresentar contradições ou ideias equivocadas que possam gerar dificuldades na aprendizagem.)

#### **2.1.5 Adequação e a pertinência das orientações prestadas ao professor**

O manual do professor deverá:

**a.** Estimular a manifestação do conhecimento que o aluno já detém ao chegar à sala de aula e estabelecer nexos entre esse conhecimento e o conhecimento novo;

#### **2.1.7 Adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico**

A proposta didático-pedagógica de uma obra deve traduzir-se em projeto gráfico-editorial compatível com suas opções teórico-metodológicas, considerando-se, dentre outros aspectos, a faixa etária e o nível de escolaridade a que se destina. Com relação à estrutura gráfico-editorial, a obra deve:

**a.** Apresentar organização clara, coerente e funcional, do ponto de vista da proposta didático pedagógica.

**g.** Apresentar linguagem e terminologia corretas e adequadas ao estágio de desenvolvimento cognitivo dos estudantes, ao desenvolvimento do vocabulário e dos conhecimentos linguísticos.

No que diz respeito às ilustrações, elas devem:

**o.** Ser adequadas às finalidades para as quais foram elaboradas;

**p.** Ser claras e precisas;

**q.** Contribuir para a compreensão de textos e atividades e estar distribuídas equilibradamente na página;

**w.** Utilizar ilustrações que dialogam com o texto;

#### **2.1.8 Qualidade do texto e a adequação temática**

Os materiais didáticos deverão:

**a.** Contribuir para o desenvolvimento da autonomia de pensamento, do raciocínio crítico e da capacidade de argumentar do estudante;

- b. Propor situações-problema que estimulem a busca de reflexão antes de explicações teóricas;
- c. Aproximar gradativamente os principais processos, práticas e procedimentos de análise e investigação, por meio de propostas de atividades que estimulem observação, curiosidade, experimentação, interpretação, análise, discussões de resultados, criatividade, síntese, registros e comunicação;

## **2.2 CRITÉRIOS ELIMINATÓRIOS ESPECÍFICOS**

As obras didáticas para os anos finais do ensino fundamental serão de três tipos: **Disciplinares, Interdisciplinares e Projetos Integradores**. As obras didáticas serão compostas **pele livro do estudante e manual do professor, sendo este último composto por livro impresso e material digital**.

### **2.2.1. Obras Disciplinares e Obras Interdisciplinares**

As obras disciplinares e interdisciplinares devem ter como eixo central o desenvolvimento das **competências gerais**, das **competências específicas de área** e das **competências específicas do componente curricular**. Tais **competências** deverão ser desenvolvidas por meio dos **objetos de conhecimento e habilidades**, constantes na Base Nacional Comum Curricular - BNCC.

São critérios de avaliação das obras disciplinares destinadas aos anos finais do ensino fundamental:

a. Consistência e coerência entre os conteúdos e as atividades propostas e os objetos de conhecimento e habilidades constantes na BNCC;

b. Contemplação de todos os objetos de conhecimento e habilidades constantes na BNCC.

#### **2.2.1.2 Manual do Professor do Ensino Fundamental – Anos Finais**

O manual do professor, nos seus diversos componentes, deverá orientar o trabalho do professor em sala de aula, apoiando-o desde os processos de planejamento, organização e sequenciamento de conteúdos e atividades a serem realizadas até o acompanhamento e avaliação da aprendizagem dos estudantes, devendo, sobretudo, ter papel significativo na proposição de práticas inovadoras, estimulantes e eficazes ao processo de ensino-aprendizagem. O manual do professor deverá:

f. propiciar a reflexão sobre a prática docente, favorecendo sua análise por parte do professor e sua interação com os demais profissionais da escola;

g. apresentar textos de aprofundamento e propostas de atividades complementares às do livro do estudante; palavras ou termos desconhecidos.

Fonte: Brasil, 2019a, p.37-42

Encerramos esta seção trazendo uma reflexão sobre o caráter eliminatório de 2.2.1.2, principalmente no que se refere ao item f, que não especifica o termo “reflexão sobre a prática docente”. Na nossa opinião, uma reflexão sobre a prática docente engloba a justificativa ou os objetivos sobre a escolha das atividades, bem como equívocos, dificuldades e erros comuns de estudantes no processo de ensino e de aprendizagem de cada tema proposto. Portanto, para este critério ter caráter eliminatório, consideramos que a “reflexão sobre a prática docente” deveria estar detalhada neste item.

## **3.2.2 Sobre o Guia Digital do PNLD/2020**

O Guia Digital do PNLD/2020 é um documento oficial, que pretende contribuir para a escolha do livro didático pelas escolas brasileiras, tendo como objetivo subsidiar o(a) professor(a) tanto na escolha da obra quanto no posterior uso da obra escolhida em sala de aula:

[...] o Guia Digital do PNLD/2020 repete os critérios comuns e específicos do Edital PNLD/2020, e apresenta, por meio de resenhas, as obras aprovadas no PNLD/2020 –

Anos Finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). Antes de apresentar cada coleção, são retratadas algumas características gerais das obras aprovadas. (Brasil, 2019b, p.21)

Ao mencionar que o ensino de Matemática está associado ao estabelecimento de diversos tipos de articulações entre objetos de conhecimento, o documento ressalta que

[...] o livro didático deve zelar pela apresentação articulada dos objetos de conhecimento e habilidades, nos diferentes campos da Matemática, visando à garantia do desenvolvimento das competências específicas e gerais pelo(a) estudante, como previsto na BNCC. (Brasil, 2019b, p.7)

Já no momento de referir-se às características gerais, o documento alerta que “Ainda são incipientes, nas obras, tarefas de investigação e de modelagem que solicitam aos(às) estudantes a elaboração e a criação de problemas.” (Brasil, 2019b, p.22).

Como já apontado em 3.1, a elaboração e resolução de problemas é mencionada em mais de 40 habilidades da BNCC, ao longo do Ensino Fundamental, como por exemplo, a habilidade para o 3º ano:

(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais. (Brasil, 2017, p.287)

Dentre as características gerais no Guia Digital/2020, destacamos, por considerar relevante para a nossa pesquisa:

De modo geral, observa-se nas obras que os conteúdos estão articulados com os objetos de conhecimento e as unidades temáticas – números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística – presentes na BNCC, buscando-se enfatizar as habilidades específicas com as quais se relacionam. Os objetos de conhecimento e as atividades propostas estão contextualizadas, tendo em vista o interesse relativo à faixa etária de ensino. (Brasil, 2019b, p.22)

Seguem, neste mesmo documento, comentários gerais relativos a cada unidade temática, porém, pelo propósito do nosso trabalho, focamos apenas na Unidade Temática Números.

As obras buscam desenvolver o pensamento numérico, que implica na capacidade de contar, quantificar, julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. [...] Em grande parte das obras são explorados a ampliação e o aprofundamento dos campos numéricos. Uma vez que o conhecimento sobre números naturais e racionais positivos já é trabalhado nos anos iniciais, passa-se a contemplar, nos anos finais, os conhecimentos acerca dos números reais, sua leitura, escrita, comparação e ordenação, incluindo a representação numérica e a notação científica. [...] (Brasil, 2019b, p.22-23)

No Guia Digital do PNL/2020 podem ser encontradas as resenhas das obras aprovadas no PNL/2020 – Anos Finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). Estas resenhas apresentam as estruturas, conteúdos, princípios, fundamentos teóricos e propostas de atividades de cada coleção.

Cabe aqui mencionar que, devido à escassez de tempo ao analisar as coleções enviadas à escola, da autora da presente dissertação, no ano de 2019, as orientações destinadas a docentes no Guia Digital não foram consideradas. Vale destacar que este relato não é um fato isolado já que, apenas um dos 18 participantes da Oficina (relatada no Capítulo 6), acusou conhecer e utilizar o Guia Digital do PNLD em suas escolhas.

Consideramos que o Guia Digital do PNLD/2020 pouco aprofundou os comentários gerais relativos à Unidade Temática Números. Por exemplo, no que diz respeito à divisão, sentimos falta de um detalhamento maior relativo à passagem de uma divisão euclidiana no universo dos números naturais para a operação de divisão no universo dos números racionais.

### 3.3 ESTUDOS CORRELATOS:

Nesta seção, apresentamos um levantamento de trabalhos que consideramos relevantes para a nossa pesquisa. Esses estudos correlatos foram listados (na ordem em que são, posteriormente, comentados) no Quadro 2, no qual constam os autores(as); o título do trabalho; o tipo de trabalho (dissertação, tese ou artigo); o ano de produção; e a Universidade, revista ou evento em que foram apresentados. Neles procuramos identificar foco, pergunta de pesquisa, objetivos e resultados, bem como semelhanças e diferenças quando comparados à nossa pesquisa.

Destacamos que a quantidade de estudos correlatos apresentados está relacionada a dois objetivos deste trabalho, sendo o primeiro relacionado a critérios de análise de livros didáticos (3.3.1 a 3.3.3) e o segundo relacionado a critérios específicos sobre o tema divisão de frações (3.3.4 a 3.3.11).

Quadro 2 – Lista de estudos correlatos

Autor(a)	Título	Tipo/Ano	Programa/ Instituição/ Revista ou evento
1. José Carlos Gabriel de Souza	Uma proposta de análise de livro didático de Matemática para os anos iniciais	Dissertação/ 2015	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/ Universidade Estadual de Santa Cruz - Ilhéus/BA (UESC)

2. Mary Rangel	Qualidade do livro didático: dos critérios da literatura acadêmica aos do Programa Nacional do Livro Didático	Artigo/2005	Revista Linhas críticas
3. Raiana Lazzaretti e Carmen Vieira Mathias	Uma análise do conteúdo de razão e proporção em livros didáticos do Ensino Fundamental	Artigo/2023	Revista de Ensino de Ciências e Matemática
4. Nilce Fátima Scheffer e Arthur Belford Powell	Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)	Artigo/2019	Revimop - revista científica da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
5. Eda Vula, Jeta Kingji–Kastrati and Fitore Podvorica	<i>A comparative analysis of mathematics textbooks from Kosovo and Albania based on the topic of fractions</i>	Artigo/2015	<i>Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education</i>
6. Roseane Nunes Garcia de souza	Abordagem de frações equivalentes: uma experiência no 6º ano do ensino fundamental	Dissertação/2019	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática/ UFRGS
7. Daiana dos Santos Oliveira Fischer	Investigando o ensino e a aprendizagem de multiplicação de frações: um estudo com alunos do 6º ano	Dissertação/2020	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática/ UFRGS
8. Wanderley Moura Rezende	Divisão de frações: “Professor, é pra tirar o M.M.C.?”	Artigo/2014	Boletim do Labem
9. Yeping Li e Dennie Smith	<i>Prospective Middle School Teachers’ Knowledge in Mathematics and Pedagogy for Teaching - the Case of Fraction Division</i>	Artigo/2007	<i>Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education</i>
10. Rose Elaine Carbone e Patrícia T. Eaton	<i>Prospective Teachers’ Knowledge of Addition and Division of Fractions</i>	Artigo/2011	<i>Proceedings do International Congress on Mathematics Education (ICME 11)</i>
11. Jane-Jane Lo e Raven McCrory (2009)	<i>Proof and Proving in a Mathematics Course for Prospective Elementary Teachers”</i>	Artigo/2009	<i>Proceedings of the ICMI Study Group 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education</i>

Fonte: Acervo da autora

Apresentamos, a seguir, cada um dos estudos mencionados no Quadro 2, destacando semelhanças e diferenças com relação à pesquisa que realizamos, bem como as contribuições e reflexões por eles originadas.

### **3.3.1 O trabalho de José Carlos Gabriel Souza (2015)**

Na dissertação de Mestrado “Uma proposta de análise de livro didático de Matemática para os anos iniciais”, Souza corrobora a importância da escolha do livro didático ser realizada por docentes, conforme é apontada na Introdução da presente pesquisa:

[...]não basta ter o livro, é preciso que esse livro atenda às necessidades básicas de todos os sujeitos envolvidos no processo educacional, e cabe ao professor esse importante papel, pois uma escolha aleatória vai significar três anos preciosos de prejuízos, talvez insanáveis, na aprendizagem e na apropriação do conhecimento. (Souza, 2015, p.23)

O autor busca analisar como os objetos matemáticos são tratados nos livros didáticos utilizados no 5º ano do Ensino Fundamental I, tendo como objetivo geral construir uma proposta de análise de livro didático, com base nas Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de G. Vergnaud e da Teoria Antropológica do didático (TAD) de Y. Chevallard. Teve como pergunta de pesquisa: “A partir da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e da Teoria Antropológica do Didático (TAD), que proposta é possível construir para se realizar uma análise de livros didáticos de Matemática?”

Para isso, o autor propõe itens para análise de livros didáticos de matemática para os anos iniciais, focando no campo conceitual multiplicativo. A pesquisa teve como resultado cinco itens que podem ser analisados pelo professor durante a escolha do livro didático:

1. Análise da relação teoria x prática. Neste item, o autor defende a importância de relacionar teoria e prática, a fim de despertar nos alunos um possível interesse pela aprendizagem.
2. Análise das técnicas – esquemas. Aqui o autor observa como são apresentadas as técnicas – esquemas, tão necessárias para que o aprendiz se aproprie do conhecimento e crie uma relação com o objeto de ensino. Souza enfatiza a importância da utilização de diferentes caminhos para se chegar num mesmo resultado, corroborando ideias de Vergnaud.
3. Análise das relações de complexidade do conceito. Este item está relacionado com o nível de dificuldade dos problemas propostos nos livros didáticos; o autor propõe observar uma ordem lógica para aprendizagem dos conceitos, partindo geralmente de situações mais

simples até chegar às mais avançadas.

4. Análise da diversidade de situações. Levando em conta que a diversidade de situações auxilia no desenvolvimento do raciocínio, o autor defende que os problemas propostos não podem servir meramente para treino das técnicas apresentadas, eles devem se aproximar e atender ao máximo as necessidades dos estudantes.

5. Análise da adequação do livro à realidade da escola e dos alunos. Este item reforça a importância de que o professor precisa levar em consideração, durante a escolha do livro didático, a comunidade em que ela está inserida e o público a que ela atende, pois o Projeto Político Pedagógico da escola é construído e alicerçado nessa realidade.

Os itens elencados pelo autor foram utilizados na análise descritiva de um livro didático para os anos iniciais escolhido por ele, em torno do objeto matemático produto de medidas. O autor conclui que o cenário ideal para um livro didático seria iniciar a introdução de conceitos matemáticos por meio de uma situação problema (baseada na realidade) conforme ocorre no livro analisado por ele, e que uma quantidade muito reduzida de exemplos e exercícios (como no livro por ele analisado) limita a compreensão, visto que, “Para a Teoria dos Campos Conceituais, é por meio das situações–problema e suas variedades que o aluno constrói e aprende com a orientação do professor os conceitos matemáticos” (Souza, p.56).

Embora em diversos momentos o autor mencione que está sugerindo critérios para uma análise de livros didáticos, entendemos que está apenas sendo elencada uma lista de tópicos que focam neste objetivo. Ainda assim, reconhecemos que o trabalho de Souza, mesmo que voltado aos anos iniciais e apoiado em outra fundamentação teórica, auxiliou-nos, principalmente os itens 3 e 4, a pensar sobre os critérios de análise de livros didáticos com foco nos anos finais do Ensino Fundamental (ver 4.2).

### **3.3.2 O trabalho de Mary Rangel (2005)**

O estudo feito por Rangel intitulado “Qualidade do livro didático: dos Critérios da literatura acadêmica aos do programa nacional do livro didático” tem por objetivo oferecer aos educadores uma síntese analítica de enfoques de livros didáticos de disciplinas variadas, conforme se apresentam na literatura acadêmica e nos termos de Guias do Programa Nacional

do Livro Didático – PNLD/2005, procurando, principalmente, observar parâmetros básicos e comuns a diversas áreas de conhecimento.

A autora destaca a importância de se observar a qualidade do livro didático, por se tratar de uma questão que se insere no âmbito acadêmico e de políticas públicas. Uma das questões que a autora menciona, quanto ao uso do livro didático, é que é preciso compreender que o uso do livro não é condicionante ou determinante da metodologia de ensino-aprendizagem, mas apenas um recurso ou um instrumento. Destaca também a importância da escolha dos livros por docentes, considerando sua experiência e convicções, seu contexto e circunstâncias (da escola, dos alunos).

No caso da Física e da Matemática, Rangel destaca que é preciso fazer uma análise dos exercícios propostos nos livros didáticos, destacando a importância do raciocínio crítico, vinculado à realidade e ao desenvolvimento da possibilidade de criação, para além da reprodução de ideias. A autora ainda reflete sobre a relevância da atitude e interesse investigativos, de modo que o aluno possa ultrapassar fórmulas prontas e predeterminadas, para entender o conhecimento em seus fatores e processos e suas possibilidades de encaminhar novas descobertas.

A autora ainda reforça que, no Guia de Matemática do PNLD/2005 que foca de 5ª a 8ª série, encontra-se uma ressalva, especialmente oportuna, relativa ao princípio da contextualização dos exercícios, bastante atual e recorrente na avaliação de currículos e livros didáticos. Essa ressalva refere-se à artificialidade de exercícios formulados no intuito de “forçar” a aplicação de conceitos a fatos do cotidiano, porém de maneira pouco significativa e consistente. De fato, o Guia recomenda que a contextualização dos exercícios seja feita naturalmente, no âmbito da própria Matemática, em lugar de forçá-la em outras situações criadas artificialmente.

Segundo a autora, o critério de seleção e uso de livros, para que se tornem recursos e instrumentos de reelaboração pessoal e social de conceitos, inclui, sem dúvida, a atenção a níveis de leitura e raciocínios que os transportem às situações reais do cotidiano. Nesse sentido, é importante que as leituras e exercícios propiciem níveis de informação, compreensão, aplicação, análise, através dos quais se realiza a transposição didática do conhecimento às situações “concretas e reais do cotidiano”.

Rangel finaliza seu estudo concluindo que os Guias do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD/2005) afinam-se nas perspectivas e valores que orientam os critérios de



avaliação de qualidade dos livros didáticos. E quanto aos aspectos relativos ao tratamento metodológico, destacam princípios de aplicação de conceitos a situações reais do cotidiano e das suas associações e articulações em diversos enfoques, realçando-se, também, a importância da variedade de exercícios e atividades, estimulantes do raciocínio e de níveis menos descritivos e mais elaborados do conhecimento.

O trabalho de Rangel, ainda que levando em conta livros que não são de Matemática, relaciona-se com nossa pesquisa na medida em que busca analisar os exercícios propostos nos livros didáticos, com o propósito de verificar sua forma de aplicação: se exploram o raciocínio crítico dos alunos e se existe relação entre os exercícios propostos e o cotidiano dos alunos.

### **3.3.3 O trabalho de Raiana Lazzaretti e Carmen Vieira Mathias (2023)**

O objetivo geral do trabalho intitulado “Uma análise do conteúdo de razão e proporção em livros didáticos do Ensino Fundamental” foi analisar como se desenvolve o conteúdo de razão e de proporção nos livros didáticos do Ensino Fundamental, tendo como pergunta de pesquisa: “Como os livros didáticos desenvolvem o conteúdo de razão e proporção nos livros de sétimo ano do Ensino Fundamental?”

Deste modo, os objetivos específicos elencados foram: desenvolver critérios pertinentes para analisar os livros didáticos; fazer a análise com relação ao conteúdo e às atividades propostas nos livros didáticos; comparar as edições, a fim de verificar quais mudanças ocorreram em decorrência do documento.

Para tal, as autoras analisaram e fizeram comparações qualitativas, considerando o desenvolvimento do conteúdo; a estrutura; a organização; os destaques; as sugestões para docentes; as leituras adicionais; os exercícios; enfim, tudo que compõe o capítulo de razão e proporção nos livros analisados, observando a qualidade dessas informações e não a quantidade.

As autoras escolheram as duas coleções que tiveram o maior número de exemplares adquiridos pelo MEC, em todo o Brasil no ano de 2020 (“Coleção A Conquista da Matemática” e “Coleção Teláris Matemática”) e analisaram suas edições anteriores e posteriores à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), motivadas pelo desejo de analisar como esse documento impactou o conteúdo de razão e proporção em tais obras.

Apoiando-se em Duval, as autoras defendem que, no que tange o conteúdo de razão e proporção, é fundamental que os livros didáticos apresentem diversas representações, tanto para explicar o tema como para propor atividades, que podem incentivar os estudantes às mudanças de representação ou de tratamento, por exemplo.

Tendo em vista que a BNCC propõe objetos de conhecimentos e habilidades e enfatiza a importância de retomar-se e aprofundar-se conhecimentos ao longo dos anos, as autoras analisam livros de 7º ano, preocupando-se em observar se os livros abordam grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais e se a habilidade correspondente referente a tal ano pode ser desenvolvida a partir do material presente nesses volumes.

As autoras justificam seu trabalho de análise de livros didáticos dizendo que eles são

[...] um material de grande apoio para professores utilizarem em planejamentos e em aulas. Apesar da grande variedade de referências disponíveis hoje em dia, o livro didático continua ganhando destaque por sua viabilidade e sua qualidade. Qualidade essa que é verificada e garantida pelos órgãos governamentais, porém dentre os livros aprovados nesse sistema, ainda pode-se fazer uma análise com base na formação que o professor de matemática acredita (Lazzaretti; Mathias, 2023, p.9).

Como instrumento para a realização da análise dos livros didáticos, as autoras utilizam uma lista contendo sete critérios, por elas elaborados, na forma de perguntas, a partir de uma leitura cuidadosa da BNCC, dos PCN e de autores ligados à Educação Matemática que propiciaram destacar aspectos importantes do conteúdo, tais como Duval (2012), Lins e Gimenez (2001), Ripoll, *et al* (2021):

1. Como são apresentadas as ideias fundamentais do conteúdo?
2. Qual o significado dado aos termos “razão” e “proporção”?
3. Como o livro didático integra novos conceitos?
4. Como o livro didático relaciona os diferentes tipos de representação?
5. Quais estratégias de resolução são apresentadas?
6. Como é o incentivo para a elaboração de problemas?
7. Como o conteúdo é contextualizado? (Isto é, existem curiosidades inseridas na unidade analisada que envolvem assuntos de outras disciplinas?)

Todos os critérios são acompanhados de justificativas para essas escolhas. Como muitas das justificativas dizem respeito ao tema razão e proporção, ressaltamos aqui apenas as justificativas dadas para o quarto, o quinto, o sexto e sétimo critérios.

Como justificativa para o quarto critério apresentam que:

Tanto no conteúdo como nas atividades propostas, é interessante que apareçam os diferentes tipos de representações matemáticas, pois, como Duval (2012, p. 12) menciona: “a existência de muitos registros permite a mudança de um deles e a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada”. No caso de razão e proporção, são esperados: o problema escrito em língua portuguesa; a interpretação escrita matematicamente; e a representação no plano cartesiano (Lazzaretti; Mathias, 2023, p.10).

E, relativo ao quinto critério, as autoras justificam:

Utilizar diferentes métodos para resolver um mesmo problema, mostrando quais são as vantagens em usar determinado tipo de resolução, ajuda o aluno a perceber a matemática como um conjunto, e não apenas fórmulas e conceitos desintegrados. Além disso, é importante diferenciar o conceito do procedimento. A regra de três, por exemplo, não deve ser vista como um objeto de conhecimento e sim como uma técnica de resolução. Também, é interessante investigar como são justificadas as regras utilizadas (se não demonstradas, para o aluno ter uma melhor compreensão, ou se são colocadas apenas como “receitas” a serem seguidas) (Lazzaretti; Mathias, 2023, p.10).

Para o sexto critério, as autoras ressaltam que a BNCC enfatiza a elaboração de problemas em diversas habilidades, como uma forma de aprendizagem. E, por fim, no sétimo critério as autoras justificam a importância da contextualização enfatizando que “é interessante que o conteúdo e os exercícios propostos sejam contextualizados, simulando situações reais, ou mesmo tratando de informações verídicas.”

As autoras apresentam um detalhamento de cada um dos critérios analisados e elencam os questionamentos mais relevantes que foram respondidos no momento da análise. Destacamos aqui apenas alguns questionamentos do primeiro e quarto critério por se aproximarem do nosso foco de pesquisa, tanto no quesito análise de conteúdo (primeiro critério) quanto aos tipos de representações (quarto critério):

1a. O nome da unidade transmite uma ideia fundamental?

1c. Apresenta qual é a ideia fundamental?

1d. Apresenta o significado de grandezas?

4a. São explicadas todas as formas de representar uma razão? (fração, percentual, língua materna...)

Com este estudo, as autoras concluíram que os volumes anteriores à BNCC são mais compatíveis com o que seria de se esperar para o conteúdo razão e proporção que os livros atuais contêm, o que se considera o mínimo para estarem de acordo com a habilidade destacada na BNCC. Lazaretti e Mathias destacam, como um desfecho significativo, a percepção de que os livros antigos, segundo os critérios avaliados, estavam mais próximos de atender às habilidades da BNCC do que as edições atuais. As autoras sinalizam que havia, da parte delas, a expectativa de que existiriam muitas mudanças nos livros, por conta da BNCC,

porém, notaram que foram retiradas (nas edições atuais) várias atividades, explicações e, por vezes, conteúdos de extrema importância para o entendimento de proporcionalidade.

O trabalho de Lazaretti e Mathias, ainda que voltado para o conteúdo de razão e proporção, contribuiu consideravelmente para a nossa pesquisa. Nosso trabalho assemelha-se a ele no sentido de também apoiar-se em Duval, e buscar-se elencar critérios (também redigidos na forma de perguntas) para a análise de livros didáticos aprovados no PNLD, cabendo destaque para os critérios 2, 4, 6 e 7. Também a escolha das coleções de livros didáticos a serem analisadas foi a mesma. No entanto, quanto aos critérios elencados, nosso trabalho distingue-se de Lazaretti e Mathias (2023) no sentido de elencar critérios gerais e específicos para outro tema (no caso divisão de frações) de forma a produzirem apenas respostas de dois tipos: “sim”, “não”, evitando-se perguntar “como”. Além disso, em nosso trabalho buscou-se validar tais critérios junto a um grupo de docentes da escola básica.

### **3.3.4 O trabalho de Nilce Fátima Scheffer e Arthur Belford Powell (2019)**

O artigo “Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)” investiga como a noção de fração é apresentada nos 14 livros de Matemática do 4º ano do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD/2018), e constantes do Guia Digital do PNLD/2018.

Com o objetivo de promover uma reflexão sobre a noção, a representação e interpretações do conceito de fração, o estudo procura responder a questão: “Como os livros didáticos brasileiros de Matemática introduzem a noção de fração e trabalham a sua relação com representações visuais?”

O trabalho leva em conta as orientações relativas ao estudo de frações apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

Na construção do conceito de frações, os PCN indicam dois aspectos fundamentais: as interpretações que as frações assumem em diferentes situações, baseadas na resolução de problemas, relacionando as partes do inteiro, os conjuntos discretos, ou até mesmo, a ideia de divisão e as diferentes formas para a sua representação, que podem ser por uma grandeza de natureza discreta ou contínua. Também orientam para a necessidade de serem trabalhadas três interpretações para as frações no segundo ciclo do Ensino Fundamental, isto é, parte-todo, razão e quociente, destinando a interpretação de operador para o terceiro ciclo, ou seja, do 6º e 7º anos. Os ciclos posteriores, previstos pelos PCN tratam da interpretação da fração como operador quando este desempenha papel de transformação, ou melhor, de algo que

atua sobre uma situação e a modifica, por exemplo: Que número devo multiplicar por 7 para obter 3? (Scheffer; Powell, 2019, p.482)

No que diz respeito à BNCC, os autores ressaltam que a discussão do tema frações é iniciada no 4º ano do Ensino Fundamental, com os significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte, e que, a seguir, são apresentadas as frações unitárias mais usuais ( $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$  e  $\frac{1}{100}$ ). É só no 5º ano que os números racionais com representação decimal finita são recomendados em problemas de multiplicação e de divisão por números naturais. Apontam também que a BNCC valoriza:

- a identificação e a representação de frações — menores e maiores que a unidade —, associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando também a reta numérica como recurso e a conferência de frações equivalentes;
- a comparação e ordenação de números racionais positivos nas representações fracionária e decimal;
- a elaboração e resolução de problemas.

Como aporte teórico, os autores mencionam Flores *et al* (2012) que, apoiados em Zimmermann e Cunningham (1991), definem visualização matemática como:

[...] um processo de formação de imagens — mentais, com lápis e papel ou com o auxílio de tecnologias digitais —, no qual essas imagens são usadas, de forma eficaz, para a descoberta e compreensão da Matemática. Desse modo, a visualização não é vista como um fim, mas como um meio para entendimento de conceitos matemáticos, e o programa de construção e transformação de imagens visuais e mentais passa a ser uma atividade cognitiva semiótica, processo de formação de imagens para compreender Matemática e a forma de pensamento que torna visível aquilo que se vê (Flores *et al*, 2012 apud Scheffer; Powell 2019, p.485).

Os autores também mencionam Duval (2009) reforçando que “não se pode ter compreensão em Matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (Duval, 2009), bem como a necessidade de diferenciar os objetos matemáticos de suas representações, e ressaltam ainda que diversas representações podem estar associadas a um mesmo objeto matemático.

A análise relatada no trabalho considera categorias inspiradas em Bardin (2011) cujos dados coletados são organizados na forma de quadros.

Categoria 1 - Contexto de desenvolvimento do tema, na qual examina-se, entre outros aspectos relativos à apresentação das obras, se o tema é introduzido por meio de situações concretas, se há complementação do tema com materiais manipulativos e se são apresentadas operações com frações.

Categoria 2 - Práticas sugeridas para discussão dos conceitos, na qual destaca-se o tipo de atividades e de ações sugeridas, utilização de materiais manipulativos, ilustrações e incentivo à utilização de tecnologias informáticas;

Categoria 3 - Interpretações mais evidentes, na qual procura-se destacar as coleções analisadas como um todo, tendo em vista a ideia de frações e a noção que predomina na apresentação do tema no decorrer do desenvolvimento da unidade;

Categoria 4 - Resolução de problemas, na qual apresenta-se dados relacionados aos tipos de problemas, suas aplicações e raciocínios de resolução envolvidos.

Quanto ao desenvolvimento do tema (Categoria 1), os autores afirmam que, para expressar os números que não representam o todo, mas sim parte dele, os livros didáticos analisados priorizam, de modo geral, alguns significados em detrimento de outros, sendo o significado parte-todo o predominante e que muitos deles sugerem a utilização de material concreto em paralelo para trabalhar com frações, trazendo, inclusive, em anexo, fichas de trabalho que podem ser recortadas para produção de alguns kits de materiais. Com relação à representação, os autores apontam que a nomenclatura numerador e denominador é introduzida, com estabelecimento de relações de linguagem para as partes tomadas em relação às partes do todo, e que aqui, já se apresentam situações que exigem relações e transferências entre representações. Os autores destacam ainda que, em alguns livros investigados, pode-se encontrar uma introdução às operações com frações, principalmente adição e subtração.

Com relação à Categoria 2 (Práticas sugeridas para discussão dos conceitos), os autores elencam como itens para a coleta de dados: representação figural; relação com situações reais; estabelecimento de comparações; estabelecimento de equivalência; desenvolvimento de atividades com quantidades contínuas; apresentação de frações impróprias; frações e quantidades discretas; fração e medida de comprimento; fração e medida de área; fração e reta numérica; representação de frações decimais; operações com frações. Os autores concluem que as representações figurais são inúmeras, apresentadas em 100% dos livros didáticos analisados, bem como a relação com situações reais, principalmente as que envolvem alimentos na discussão; em algumas situações, há alusão a medidas de comprimento e áreas. Do total de livros analisados, 43% estabelecem equivalência entre frações; 64% estabelecem comparações; 100% desenvolvem atividades com quantidades contínuas e discretas; apenas 7% fazem alusão às frações impróprias, enquanto 71% contemplam a representação de frações decimais e 29% se voltam às operações entre frações

no 4º ano. Consideramos tais dados importantes de serem observados, na medida que dizem respeito a todos os livros aprovados no Edital PNLD/2019.

Dentro da Categoria 3 (Interpretações mais evidentes), os autores listam os significados de relação parte-todo; relação razão (isto é, frações utilizadas para representar uma comparação entre grandezas que podem ser contínuas ou discretas); relação quociente (isto é, fração como resultado da divisão entre dois números naturais); relação reta numérica (na qual os números racionais, inclusive as frações, são interpretados como pontos sobre uma reta numérica, o que pode expressar uma medida). Concluem que parte-todo é a interpretação mais encontrada nos livros analisados, aparecendo em 100% dos livros, seguida da interpretação como quociente em 85% dos livros e das interpretações como razão e como ponto da reta numérica, ambas identificadas em 64% dos livros analisados.

Os autores alertam que a falta de discussão no livro didático de todos os significados limita a compreensão dos estudantes sobre o sistema de números racionais. Ainda, levando em conta que o livro didático é visto como principal instrumento de apoio didático ao professor (Teixeira, 2008), o fato de que nem todos os significados são explorados nos livros didáticos promove também lacunas no planejamento de docentes que utilizam o livro didático como único guia para o seu planejamento, ou que não possuem material didático que possa auxiliá-los na interpretação e representação matemática das frações.

Quanto à presença da resolução de problemas na exploração do tema frações nos livros (Categoria 4) foram encontrados problemas relacionados com situações reais (em 100% dos livros analisados), problemas relacionados a frações decimais (em 71% dos livros); problemas relacionados a quantidades discretas (em 64% dos livros), problemas relacionados à fração e medidas de comprimento (em 36% dos livros) e problemas abrangendo as operações (em 29% dos livros).

O trabalho de Scheffer e Powell (2019), ainda que focado apenas no 4º ano do Ensino Fundamental, é muito próximo de nossa pesquisa no que diz respeito ao tema (frações, ainda que concentrados apenas na introdução a frações), ao aporte teórico (Duval) e à análise de livros didáticos levando em conta documentos oficiais. Destacamos nossa concordância com a autora e o autor quando ponderam que, ao não serem explorados todos os significados de frações nos livros didáticos, podem ser formadas lacunas no planejamento de docentes que utilizam o livro didático como único guia do planejamento, ou que não possuem material didático que possa auxiliá-los na interpretação e representação matemática das frações.

Posição análoga temos em relação à abordagem dos significados da divisão de frações nos livros didáticos.

Evidenciamos que nossa pesquisa difere do trabalho Scheffer e Powell (2019) por tratar especificamente da divisão de frações (tema lá não mencionado), sendo este tema um objeto de conhecimento referente ao sétimo ano do Ensino Fundamental na BNCC; ainda, no nosso trabalho os critérios são elencados na forma de perguntas (e não de itens) e nós analisamos apenas duas coleções aprovadas no PNLD, enquanto Scheffer e Powell (2019) os autores analisaram todas aprovadas no ano de 2018.

### 3.3.5 O trabalho de Eda Vula, Jeta Kingji–Kastrati and Fitore Podvorica (2015)

O trabalho intitulado “*A comparative analysis of mathematics textbooks from Kosovo and Albania based on the topic of fractions*” (Uma análise comparativa de livros didáticos de matemática do Kosovo e da Albânia com base no tema das frações, tradução nossa) analisa e compara como o tema frações e os exercícios propostos sobre ele são apresentados em livros didáticos de 1º a 5º ano em Kosovo e na Albânia. As autoras e o autor justificam a escolha desses dois países mencionando que a maior parte da população desses países fala a mesma língua e tem a mesma cultura e tradições, e, no que diz respeito à Educação, existe um esforço conjunto em unificar o Currículo do sistema educacional que antecede o universitário. Complementam sua justificativa, mencionando dados:

- os livros didáticos são a maior fonte escrita para orientação de docentes no planejamento de suas aulas (Li, 2000; Alajmi, 2012);
- a pesquisa *Trends In International Mathematics and Science Study* (TIMSS) constatou que, em quase todos os países, docentes, em sua maioria, usam livros didáticos como a principal fonte escrita para decidir como apresentar um determinado tópico em suas salas de aula (Beaton, et al., 1996);
- os livros didáticos influenciam o que docentes ensinam, como ensinam e como avaliam a aprendizagem (Alajmi, 2012; Özer & Sezer, 2014).

E, por fim, os autores justificam sua escolha pelo tema frações mencionando que o ensino e a aprendizagem de frações tem sido tradicionalmente uma das áreas mais problemáticas e um dos mais sérios obstáculos na matemática da escola primária (Behr, *et al*, 1993; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Defendem que estudantes devem ter



oportunidades de deparar-se com frações em problemas reais e usar os diferentes significados para resolvê-los. Conectar frações à vida dos alunos, propondo problemas reais, é uma questão importante porque contribui no seu processo de aprendizagem.

Sem mencionarem Duval, mas corroborando suas ideias, os autores afirmam que o uso de múltiplas representações torna o conceito de fração mais concreto e compreensível, porém ressaltam que, mesmo nos casos em que estudantes parecem entender o significado conceitual das diferentes perspectivas das representações de frações, eles ainda lutam para conectar ideias de frações a problemas do mundo real.

Ao longo do trabalho, os autores especificam e explicam os significados que foram considerados para frações: comparação parte-todo, divisão ou quociente, razão, operador e medida, explicitando que:

- i) o construto parte-todo refere-se a quantidades contínuas ou a um conjunto discreto de objetos que é particionado em partes de igual tamanho. Esse significado enfatiza, assim, situações relacionadas à comparação de partes com o total inicial;
- ii) o construto quociente considera uma fração como resultado de uma divisão de dois números inteiros. Ele é baseado na comparação de duas quantidades (ou conjuntos) e geralmente é representado por  $a:b$  ou  $a/b$ ;
- iii) o construto operador reflete uma função que transforma segmentos de reta, figuras ou números;
- iv) o construto medida identifica frações como números ou associadas à medida atribuída a algum intervalo.

As autoras e o autor relatam que, nos livros didáticos analisados, os construtos quociente e razão foram utilizados em apenas algumas atividades. Já os problemas analisados nos livros didáticos foram classificados em três categorias:

- a) quanto à matemática envolvida: procedimento simples ou procedimento múltiplo
- b) quanto ao contexto envolvido: puramente matemático na forma numérica/em palavras ou ilustrativo/contextualizado
- c) quanto ao desempenho requerido do estudante:
  - tipo de resposta: apenas a resposta na forma de número/expressão numérica ou explicação/argumentação sobre o processo

- tipo de requisito cognitivo: entendimento do conceito; prática de procedimento; resolução de problema; requisitos especiais

Os autores deste trabalho, apoiados em Stein *et al.* (2000), Li (1990), Hiebert e Carpenter (1992), Behr *et al.* (1993), Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) e Moseley (2005), esclarecem que “requisito cognitivo” significa “o tipo e nível de pensamento exigido dos alunos para se envolver com sucesso e resolver a tarefa enquanto “requisitos especiais” refere-se aos problemas que contêm requisitos cognitivos especiais ou mistos. Por exemplo, solicitar aos alunos que escrevam um problema com base em informações fornecidas. Com relação à resolução de problemas, os autores ressaltam que é necessário ter uma compreensão conceitual, bem como as habilidades necessárias para a prática processual, a fim de ter sucesso em matemática e que focar apenas nos problemas que possuem requisitos cognitivos de baixo nível, como recordação e reprodução, não ajuda os alunos a terem bons resultados na resolução de problemas. Relatam também que os livros didáticos analisados de ambos os países usam principalmente dois construtos para apresentação de frações, a saber, parte-todo e operador e são mais focadas em regras e procedimentos, embora o uso de representações múltiplas ajude os alunos a desenvolverem um conhecimento de representações mais interconectado e viável para frações.

Os autores apontam que poucos problemas propostos nos livros de Kosovo requerem argumentação, e que a resolução de problemas é mais utilizada nos livros albaneses. Apontam também que a maioria dos problemas nos livros didáticos destes dois países são apresentados em contextos puramente matemáticos e que quase todos os problemas requerem apenas procedimentos simples. Destacam como deficiência nestes livros a falta de problemas que envolvem requisitos especiais.

Entendemos que o trabalho de Vula *et al.* (2015) é abundante em considerações e critérios para análise de livros didáticos, além de ressaltar o problema internacional sobre ensino e aprendizagem de frações, apontando, portanto, para a relevância de nossa pesquisa. Vale salientar que, enquanto eles se concentraram na análise de livros do 1º ao 5º ano, nosso estudo se diferencia ao abordar a operação de divisão de frações, que é um tema do 7º ano.

### **3.3.6 O trabalho de Roseane Nunes Garcia de Souza (2019)**

A dissertação de Souza (2019), intitulada “Abordagem de frações equivalentes: Uma experiência no 6º ano do ensino fundamental”, apresenta uma discussão sobre o ensino de frações apoiado na ideia elementar (ou seja, fundamental) na matemática de relação de equivalência.

Souza defende que o conceito de equivalência de frações deve ser construído com os estudantes de modo a promover a compreensão. A autora salienta, em seu trabalho, a dificuldade que muitos alunos têm em resolver cálculos envolvendo frações e que muitos deles, quando se deparam com exercícios envolvendo frações, simplesmente desistem de resolvê-los. Souza menciona também o quão complicado e sem sentido pode se tornar para o estudante o uso do mínimo múltiplo comum quando adotado como ingrediente da “receita” de comparar e operar com frações.

Assim, Souza reforça que, no lugar de apoiar-se em constatações feitas apenas por observações visuais (do tipo “observe e veja o que acontece”) para construir o conceito de frações equivalentes, como fazem muitos dos livros didáticos analisados por ela, deve-se incluir não apenas caracterizações parciais, tais como “multiplicando numerador e denominador de uma fração por um mesmo número natural, obtém-se uma fração equivalente à fração original”, mas sim deve-se incluir uma caracterização completa de frações equivalentes, tal como o Teorema “duas frações são equivalentes se, e só se, os produtos do numerador de uma pelo denominador da outra são iguais”, acompanhada de uma demonstração com potencial de promover a compreensão. Por isso, a autora traz como pergunta de pesquisa, o seguinte questionamento: “É possível propor a alunos de um 6º ano do Ensino Fundamental, o Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes, desde a sua motivação até a sua demonstração?”

Para responder sua pergunta de pesquisa, a autora implementou uma sequência de atividades sobre frações, em uma turma de 6º ano do ensino fundamental, que objetivava construir com os estudantes o conceito de frações equivalentes e levá-los à demonstração do Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes, contribuindo, assim, com o debate sobre a viabilidade de se incluir demonstrações e pensamento genérico na escola.

A autora apoia-se na Teoria das Representações Semióticas, de Duval, no intuito de analisar como os estudantes percebem as diferentes representações das frações em atividades nas quais são explorados tanto tratamento (representações dentro de um mesmo registro) como conversões (mudanças de registro de um determinado objeto para tratamento em outro

registro).

Souza evidencia a importância do trabalho com a equivalência de frações e defende uma menor utilização de regras para operar com frações:

[...] uma vez bem entendido este tópico pelo estudante, a comparação, assim como a adição e a subtração de frações passam a ter também mais significado para o aluno. Com isso, estaríamos tornando o ensino de frações mais interessante e menos relacionado ao uso de regras, como o uso do mínimo múltiplo comum na adição de frações. (Souza, 2019, p.182)

Entre as conclusões da autora ressaltamos: a importância da utilização de diferentes formas de representação para as frações, reiterando, assim, a ideia de Duval de que, para que um conceito abstrato seja bem compreendido, devem ser oportunizadas aos estudantes diferentes representações; durante a implementação, foi possível detectar a evolução por parte dos alunos ao trabalhar frações em modelo pictórico e em linguagem simbólica.

O trabalho de Souza relaciona-se com a nossa pesquisa no que diz respeito ao tema de frações (destacando que Souza concentrou-se na equivalência, adição e subtração de frações, enquanto nossa pesquisa concentra-se na divisão de frações), bem como à utilização do mesmo referencial teórico (Teoria das Representações Semióticas, de Duval) e à preferência por não utilizar “receitas” na resolução de problemas envolvendo frações, por considerarmos que a “mecanização” do processo não contribui para o entendimento do conteúdo por parte dos alunos.

Para a análise de livros didáticos que realizamos, consideramos relevante a inclusão de um critério que diga respeito à equivalência de frações, por concordarmos com a importância da compreensão desse conceito, já que essa relação pode ser utilizada também na divisão de frações (como fica evidente ao longo do nosso trabalho).

### **3.3.7 O trabalho de Daiana dos Santos Oliveira Fischer (2020)**

A dissertação de Fischer (2020) intitulada "Investigando o ensino e a aprendizagem da multiplicação de frações: Um estudo com alunos do 6º ano", trata da implementação de uma sequência de atividades, para uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental, que oportunizou a construção do princípio multiplicativo de frações e que envolveu diferentes recursos para estimular a investigação, a apropriação do conceito de multiplicação e, conseqüentemente, contribuir para a aprendizagem de alunos do 6º ano. Para tal, a autora traz

como problema central de seu estudo a questão: “Como uma proposta de sequência de atividades para o 6º ano do Ensino Fundamental que foca na compreensão do conceito de multiplicação de frações pode auxiliar para o aprendizado desta operação e na capacidade de aplicá-la?”

A autora defende que o ensino da multiplicação de frações não deve deter-se apenas na compreensão e aplicação do algoritmo, mas sim privilegiar a compreensão dos processos, de forma a emergir a ampliação do conceito de multiplicação para o universo das frações; além disso, evidencia a viabilidade de desenvolver a multiplicação de frações com significado (por exemplo, o que significa  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ ?). A autora propõe também uma técnica no tratamento de alguns casos de multiplicação de frações que não aparece (pelo menos da forma detalhada como ela expõe) nos livros didáticos analisados por ela em seu trabalho.

Dos resultados provenientes desta implementação, a autora fez uma análise dos esquemas de pensamento dos estudantes, à luz da Teoria dos Campos Conceituais (de Vergnaud) e da Teoria de Representação Semiótica (de Duval), buscando aprimorar o ensino de multiplicação de frações. Com isso, a autora concluiu que a articulação entre as representações (no caso pictórica, numérica e escrita), propostas por Duval, mostraram-se fundamentais no processo de amadurecimento e abstração dos conceitos trabalhados durante a sequência de atividades.

A autora relata, em seu trabalho, que os estudantes apresentaram dificuldade nas atividades de resolução de problemas, concluindo que o objetivo de que o estudante seja capaz de associar a multiplicação de frações a situações do dia a dia foi apenas parcialmente atingido.

O trabalho de Fischer (2020) está relacionado à nossa pesquisa no que diz respeito ao tema de frações, sendo importante ressaltar que a autora se concentrou na multiplicação de frações (6º ano), enquanto nosso trabalho concentra-se na divisão de frações (7º ano). Nosso trabalho diferencia-se do trabalho de Fisher (2020) também pelo fato de não fazermos uso da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

A conexão entre os trabalhos se manifesta em relação às ideias de Duval. Também concordamos com a autora que a multiplicação de frações deve ser pautada na compreensão dos processos e não apenas na aplicação do algoritmo, e reconhecemos que essa compreensão influencia a compreensão da divisão de frações, visto que a multiplicação também é usada, no algoritmo da divisão. De fato, a técnica utilizada por Fischer para a multiplicação de frações é

empregada na resolução de algumas atividades propostas no Capítulo 8 deste trabalho.

Por fim, o relato da autora sobre o objetivo de que o estudante seja capaz de associar a multiplicação de frações a situações do dia a dia ter sido apenas parcialmente atingido, alertou-nos para a criação de um critério que relacione a divisão de frações ao dia a dia.

### 3.3.8 O Trabalho de Wanderley Moura Rezende (2014)

No artigo intitulado “Divisão de frações: “Professor, é pra tirar o M.M.C.?””, o autor destaca que umas das dificuldades dos alunos do ensino médio concentra-se na realização de operações com números racionais, salientando que esta dificuldade, dentre outros fatores, está na forma como é conduzida a passagem do aprendizado com as frações para o contexto dos números racionais nos anos finais do ensino fundamental. O autor enfatiza que, muitas vezes, esta passagem é feita:

[..] de forma aligeirada e tomando por base apenas os conhecimentos anteriores (frações e números inteiros), sem que se agregue o processo fundamental: a ação de medir. [...] A ausência dessa ideia (a ação de medir) tem reflexos na sala de aula de matemática e, muitas vezes, na própria prática de ensino do professor de matemática. (Rezende, 2014, p.65)

O artigo traz uma atividade que foi proposta pelo autor em uma oficina que contou com a participação de cerca de 30 docentes de diferentes regiões do país. A atividade apresenta um diálogo fictício na forma de um quadrinho, entre um aluno e um professor, e no qual é proposta a divisão de  $\frac{2}{5}$  por  $\frac{3}{4}$ ; para resolver essa questão, o aluno, “tira o M.M.C.”

Rezende (2014) relata que quando tais professores foram questionados se o método empregado pelo aluno do quadrinho estava correto e se poderia ser aplicado sempre, mesmo que desconfiados, eles testaram alguns casos particulares e chegaram à conclusão de que o método “dá sempre certo”. No entanto, vários desses professores, mesmo concordando que o método “sempre dá certo”, afirmaram que não seria possível utilizar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre os denominadores envolvidos, pois afirmaram que este método só é utilizado na adição e subtração de números racionais. O autor destaca que nenhum dos participantes da oficina, apesar de se convencerem da validade do método, apresentou de imediato uma justificativa matemática para o procedimento utilizado pelo aluno do quadrinho.

O autor destaca que leva para a oficina o Frac-Soma 235<sup>14</sup> (material didático para o ensino de frações), defendendo que este material tem potencial para a construção das operações com os números racionais positivos. E com o auxílio deste material, apresentou a resolução da questão proposta - a divisão de  $\frac{2}{5}$  por  $\frac{3}{4}$ . Visto que esta divisão tem necessariamente o significado de medida, quer-se saber quantas vezes  $\frac{3}{4}$  cabem em  $\frac{2}{5}$ , e para tal resolução, o autor indicou que uma das formas seria “reescrever as frações indicadas, em frações equivalentes, que se utilizem de uma mesma fração unitária como subunidade” (Rezende, 2014, p.67), evitando-se, assim, o mínimo múltiplo comum.

Rezende relata ainda que “O algoritmo da divisão de frações conhecido pela transformação da divisão em um produto é, muitas vezes, o único reconhecido e ensinado pelo professor. Os resultados das experiências realizadas com as oficinas sugerem fortemente este fato.” Rezende, 2014, p.67).

E conclui que a atividade, trabalhada na oficina, trouxe reflexões significativas sobre a necessidade tais docentes aprofundarem seu conhecimento perante os números racionais, e complementa que segundo Caraça (1951) *apud* Rezende, 2014, p.69): “Resgatar a abordagem dos números racionais a partir do processo de medir é legítimo do ponto de vista histórico e epistemológico. Ainda que este campo numérico seja insuficiente para a realização de tal tarefa, é no ato de medir que se deve justificar a construção do seu significado.

O trabalho de Rezende, ainda que mencionando o ensino médio, muito se assemelha à nossa forma de pensar sobre a importância de o professor do ensino fundamental preocupar-se em não apresentar simplesmente o algoritmo pronto da divisão de frações, e, mais ainda, a importância de abordar-se a divisão com o significado de medida. E consideramos necessário que os estudantes compreendam que a divisão de frações não se concentra apenas nos casos de equipartição, mas também em casos nos quais a divisão tem o significado de medida. Além disso, o autor propõe o uso de frações equivalentes na abordagem da divisão de  $\frac{2}{5}$  por  $\frac{3}{4}$ , estratégia com a qual concordamos.

O alerta do autor sobre o fato que o algoritmo usual da divisão de frações (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso) é o único conhecido e ensinado por grande parte de

---

<sup>14</sup> O Frac-Soma, de autoria de Roberto Ribeiro Baldino, consiste em barras de mesmo tamanho, subdivididas em partes congruentes. Oportuniza trabalhar operações com frações.

docentes justifica a inclusão de um critério que diga respeito à abordagem da divisão de frações e desse algoritmo (ver seção 4.2).

### 3.3.9 O trabalho de Yeping Li e Dennie Smith (2007)

O trabalho intitulado “*Prospective Middle School Teachers’ Knowledge in Mathematics and Pedagogy for Teaching - the Case of Fraction Division*” (Conhecimento de futuros docentes do ensino médio em matemática e pedagogia para o ensino - o caso da divisão de frações, tradução nossa) relata uma pesquisa realizada com futuros docentes sobre o seu conhecimento de matemática e de pedagogia para o ensino, focando em particular no tópico divisão de frações.

Fundamentados em Ma (1999), Carpenter et al. (1988), Ball (1990), Borko et al. (1992), Contreras (1997), Simon (1993), Tirosh (2000) e Tzur & Timmerman (1997) os autores ressaltam a importância do Conhecimento de Matemática para o Ensino, mencionando que pesquisas acumuladas nas últimas décadas levaram ao entendimento de que o Conhecimento de Matemática para o Ensino é essencial a docentes para um ensino eficaz em sala de aula. E justificam sua escolha pelo tema divisão de frações por considerá-lo difícil dentro da matemática escolar, não apenas para os alunos, mas também para futuros docentes. De fato, a complexidade conceitual do tema da divisão de frações é evidenciada em vários estudos que documentaram relevantes dificuldades de docentes em formação e em exercício.

Os autores mencionam que, nos Estados Unidos, embora tanto professores como futuros professores possam efetuar uma divisão de frações, é difícil para eles explicarem conceitualmente o cálculo envolvido em uma divisão de frações por meio de representações ou conexões apropriadas com outros conhecimentos. O conhecimento dos professores sobre a divisão de frações é, muitas vezes, limitado ao procedimento de inverter e multiplicar, o que restringe sua capacidade de fornecer uma explicação conceitual do procedimento em sala de aula. Os autores apontam que o significado da divisão por si só não é fácil para professores iniciantes, o que torna a divisão de frações ainda mais difícil.

Assim, as questões de pesquisa consideradas no trabalho foram: (1) Quais são as percepções dos futuros professores sobre seus conhecimentos em matemática e pedagogia para o ensino? (2) Qual é a extensão do conhecimento em matemática e em pedagogia para o ensino dos futuros professores em relação à divisão de frações?



Baseados em pesquisas de vários autores, são apontadas no trabalho cinco tipos de dificuldades, de professores com a divisão e com a divisão de frações:

- (a) como explicar o procedimento computacional para “divisão de fração” com diferentes representações (Contreras, 1997; Ma, 1999);
- (b) como explicar por que “inverter e multiplicar” (Borko et al., 1992; Tzur & Timmerman, 1997);
- (c) relações matemáticas entre a divisão de frações e outros conhecimentos matemáticos (por exemplo, conceito de fração; adição, subtração e multiplicação de frações) (Ma, 1999; Tirosh, 2000);
- (d) equívocos relacionados (por exemplo, não pode dividir um número por outro número maior do que ele, divisão sempre gera um quociente menor do que o dividendo) (Greer, 1992);
- (e) resolver problemas envolvendo divisão de frações (Greer, 1992). apud Li e Smith, 2007, p. 186)

Os autores confirmaram que os conhecimentos em matemática e em pedagogia dos 46 participantes da pesquisa por eles realizada, em relação ao ensino da divisão de frações, são processualmente sólidos, mas conceitualmente fracos. Seguem alguns dados que consideramos relevantes para o nosso trabalho:

- 93% dos integrantes do grupo resolveram corretamente o problema “encontre o valor de  $\frac{7}{9} \div \frac{2}{3}$ ”. No entanto, ao ser ligeiramente alterado o problema, envolvendo-se um requisito conceitual (“Quantos  $\frac{1}{2}$  cabem em  $\frac{1}{3}$ ?”), o desempenho diminuiu para 52% de respostas corretas. Muitos participantes deram como resposta “nenhum” ou “0”. Os autores ressaltam que as respostas dos futuros professores revelaram um possível equívoco relacionado à divisão e uma falta de compreensão relativa à divisão de frações, quando ela está expressa em palavras.

- Apenas 39% dos participantes resolveram corretamente o problema “A pizzaria *Pizza Express* vende vários sabores de pizza. Um dia, vendeu 24 pizzas grandes sabor calabresa. O número de pizzas grandes sabor queijo vendidas naquele dia foi  $\frac{3}{4}$  do número de pizzas grandes sabor calabresa vendidas, e foi  $\frac{2}{3}$  do número de pizzas tamanho luxo vendidas. Quantas pizzas tamanho luxo a *Pizza Express* vendeu nesse dia?”

- Ao serem solicitados que explicassem determinados cálculos envolvendo a divisão de frações, tais como “Como você explicaria a seus alunos por que  $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$ ?” ou “Porque  $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$ ?”, 46% dos participantes não conseguiram fornecer uma explicação completa para ambos os cálculos. Cerca de 26% dos participantes desenharam e usaram representações

pictóricas (por exemplo, barra de fração, gráfico de pizza) para explicar o procedimento de divisão na primeira pergunta e 22% explicaram com “inverta e multiplique”.

- Ao serem desafiados com a pergunta “por que você pode transformar “dividir  $\frac{2}{3}$  por 2” em “multiplique  $\frac{2}{3}$  por  $\frac{1}{2}$ ”?, nenhum dos futuros professores conseguiu explicar.

- Os participantes pareceram ter ainda maior dificuldade quando o procedimento de cálculo para divisão de frações foi apresentado de forma diferente, como por exemplo na questão: “Você está discutindo operações com frações em sua classe. Durante esta discussão, John diz: ‘É fácil multiplicar frações, você apenas multiplica os numeradores e os denominadores. Acho que devíamos definir as outras operações com frações de maneira semelhante:

$$\text{Adição: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\text{Subtração: } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\text{Divisão: } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d},$$

Como você responderia às sugestões de John? (Lidar com cada operação separadamente.)” Cerca de 90% dos participantes indicaram que os cálculos dados para a adição e a subtração não estavam corretos. Dois dos 46 participantes afirmaram que o cálculo fornecido para a divisão de frações estava correto, enquanto a maioria dos demais afirmou que a divisão de frações deve ser realizada “invertendo e depois multiplicando”.

Os resultados sugeriram, aos autores da pesquisa, que os futuros professores tinham pouca compreensão sobre o processo da divisão de frações, especialmente quando relacionada a outros conhecimentos matemáticos. A inconsistência de padrões nas respostas apresentadas sugeriu também que eles não sabiam o que seria esperado para um ensino eficaz da divisão de frações, apesar de terem se mostrado confiantes para o ensino de cálculos de frações, incluindo a divisão. Além disso, as respostas dadas por esses futuros professores, às questões apresentadas, confirmaram os cinco tipos de dificuldades elencadas anteriormente. No entanto, pareceu que esse grupo respondeu melhor quando seus argumentos se apoiaram em alguma representação pictórica, fato que é consistente com as descobertas existentes sobre a preferência dos alunos dos EUA em usar representações visuais.

O trabalho de Li e Smith (2007) corroborou a relevância do tema por nós escolhido (divisão de frações) e forneceu exemplos de questões que constituem dificuldades para os professores. Alertou-nos, assim, tanto para os cuidados a serem tomados nos comentários às

atividades propostas no Capítulo 8, como para a inclusão de critérios referentes ao Manual do Professor.

Ainda, mesmo que não mencionado explicitamente, os autores ressaltam a relevância das representações para os alunos e também para futuros professores, corroborando assim as ideias de Duval e nossa escolha por este autor como referencial teórico.

O trabalho de Li e Smith (2007) diz respeito ao conhecimento do professor relacionado à divisão de frações. Já, no nosso trabalho, optamos por apresentar uma sequência de atividades destinadas a estudantes do Ensino Fundamental, com o objetivo de contribuir para a compreensão da divisão de frações, portanto para a aprendizagem desse tema pelos estudantes.

### **3.3.10 O trabalho de Rose Elaine Carbone e Patricia T. Eaton (2011)**

No artigo intitulado “*Prospective Teachers’ Knowledge of Addition and Division of Fractions*” (Conhecimento de futuros professores sobre adição e divisão de frações, tradução nossa), Carbone e Eaton relatam o trabalho realizado com alguns futuros professores dos Estados Unidos e da Irlanda do Norte, avaliando sua habilidade em criar problemas contextualizados, que façam uso da adição e da divisão de frações, a saber:

1. Elabore um problema contextualizado para estudantes do Ensino Fundamental cuja resolução envolva a adição  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ .
2. Elabore um problema contextualizado que apresente um significado para a divisão  $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$ .

Com essas duas situações, as autoras pretendiam analisar a profundidade do conhecimento desses licenciandos sobre números racionais, especificamente adição e divisão de frações.

As autoras relatam que, com relação ao problema da divisão, tanto os licenciandos americanos como os irlandeses elaboraram problemas envolvendo alimentos (sendo pizzas os mais populares). Um problema típico apresentado foi “Se há duas pizzas e meia e cada criança recebesse meia pizza, quantas crianças poderiam comer pizza?” (p. 43, tradução nossa) Já outro problema apresentado mostrou-se avançado no que foi solicitado: “Simon tem duas pizzas e meia. Ele quer dividi-las com amigos, pretendendo oferecer meia pizza a cada um. Com quantos amigos ele pode repartir?” (p. 43, tradução nossa), pois, de fato, a resolução

neste caso envolve a divisão, mas também a subtração de uma unidade do quociente, para excluir o próprio Simon. E um outro licenciando ressaltou a unidade na redação do problema que propôs: “Você tem 2 pizzas do mesmo tamanho e exatamente metade de uma terceira pizza do mesmo tamanho. Quantas metades você tem, ao todo?” (p. 43, tradução nossa)

Como resultado da análise dos problemas sobre a divisão de frações, as autoras afirmam que a maioria dos integrantes, de ambos os grupos, têm uma compreensão da divisão de frações. De fato, 62% dos licenciandos americanos e 83% dos irlandeses produziram um problema aceitável sobre a divisão. No entanto, alguns problemas referindo-se a medida revelaram *misconceptions* por parte dos licenciandos, por exemplo “Laura estava treinando para uma corrida que teria no sábado. Ela gostaria de ter corrido 2 milhas e meia, mas acabou correndo apenas metade disso. Quanto ela correu?” (p. 44, tradução nossa), que envolve a divisão por 2 no lugar de  $\frac{1}{2}$ . Outro exemplo: “Você está forrando arcos para um casamento. Se a quantidade de fita disponível é de 2 metros e meio, quantos arcos podem ser forrados com meio metro de fita?” (p. 44, tradução nossa). Neste último exemplo, o autor provavelmente queria perguntar quantos arcos que utilizam meio metro de fita poderiam ser forrados, porém não conseguiu articular as palavras e levar à divisão requerida.

As autoras concluem o trabalho afirmando que as semelhanças entre os mal-entendidos apresentados pelos licenciandos, de ambos os países oferecem reflexões e caminhos aos educadores para aprimorarem o ensino de adição e divisão de frações.

Para nós, a leitura do trabalho de Carbone e Eaton, ainda que não tenha contribuído diretamente para estabelecer critérios de análise de livros didáticos sobre o tema divisão de frações, proporcionou-nos uma reflexão. por exemplo, corroborou não só a relevância do tema como também reforçou a importância de revisar os significados da divisão, pois como apresentado no estudo, uma certa porcentagem de licenciandos teve dificuldade em criar problemas nos quais a divisão tem o significado de medida. Ficou também destacada para nós a importância de ser solicitado ao estudante a formulação de problemas, como enfatiza a BNCC, tendo nesta tarefa a oportunidade de professores avaliarem a compreensão (ou não) do tema pelos estudantes, como mostraram os exemplos mencionados anteriormente.

### **3.3.11 O trabalho de Jane-Jane Lo e Raven McCrory (2009)**

No artigo intitulado “*Proof and Proving in a Mathematics Course for Prospective Elementary Teachers*” (Prova e Comprovação em um Curso de Matemática para Futuros Professores do Ensino Fundamental, tradução nossa), Lo e McCrory buscaram complementar Stylianides (2007)<sup>15</sup>, classificando atividades que focam na argumentação matemática em cursos para futuros professores. Neste caso, afirmam que:

[...] um futuro professor precisa refletir sobre que conhecimentos de estudantes, de um determinado nível de ensino, poderiam ser usados em uma argumentação [matemática]; que tipo de argumentos eles próprios seriam capazes de fazer, e que tipos de representações eles poderiam utilizar. Esse conhecimento precisa ser desenvolvido de forma explícita, e perpassa quase todos os aspectos do conhecimento para o ensino. (Lo e McCrory, 2009, p.52)

As autoras definem três níveis de atividades envolvendo argumentação matemática, todos eles importantes para professores de matemática de qualquer nível de ensino: construção de uma prova, entendimento da natureza de uma prova e adaptação do conceito de prova a diferentes níveis de desenvolvimento.

Lo e McCrory ilustram esses níveis com episódios de uma sala de aula na qual há futuros professores no papel de alunos. Um dos episódios diz respeito à divisão de frações e foi ministrado por um dos professores que fazem parte do grupo de *Lesson Study*<sup>16</sup> das autoras. Apresentamos, a seguir, partes do relato desse episódio que diz respeito à nossa pesquisa.

O professor propôs aos “alunos” (futuros professores) o seguinte problema: Uma porção de *waffles* requer  $\frac{3}{4}$  de xícara de leite. Você tem dois copos de leite. Exatamente quantas porções de *waffles* você poderia fazer com essa quantidade de leite?

As autoras observaram que em uma sala de aula, onde o foco está no procedimento, a seguinte explicação seria aceita como argumentação completa por essa comunidade:

“Este é um problema de divisão. Eu divido 2 por  $\frac{3}{4}$ .

Para fazer isso, multiplico 2 por  $\frac{4}{3}$ ; 2 vezes 4 é 8;

$\frac{8}{3}$  é o mesmo que  $2\frac{2}{3}$ .

Portanto, a resposta é  $2\frac{2}{3}$  lotes.”

<sup>15</sup> Stylianides A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics, *Journal of Research in Mathematics Education*, 38, 289-321.

<sup>16</sup> O Lesson Study é um processo no qual docentes se reúnem para planejar, observar e refletir em conjunto sobre a técnica da sala de aula e os planos de aula, a fim de melhorar o desempenho dos alunos.

No entanto, o professor deu instruções explícitas aos seus “alunos”, solicitando que fizessem desenhos para modelar a resolução, para explicar cada quantidade, diagrama e passos do raciocínio empregado, além de chegar a uma sentença numérica que correspondesse ao problema dado, estimulando assim o propósito do trabalho, que é argumentação. O resultado de um esforço coletivo da turma foi:

2 xícaras de leite equivalem a  $\frac{8}{4}$  de xícara.

Dois ‘ $\frac{3}{4}$  de xícara’ correspondem a  $\frac{6}{4}$  de xícara.

$$\frac{8}{4} - \frac{6}{4} = \frac{2}{4}$$

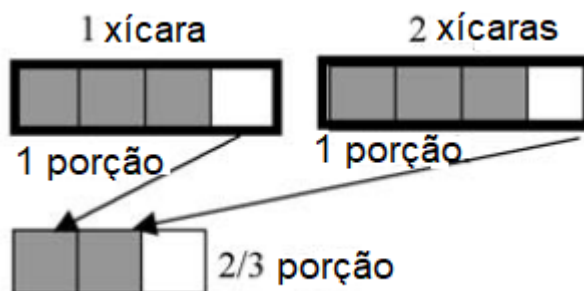
Então sabemos que é possível fazer pelo menos duas porções.

O  $\frac{1}{2}$  de xícara restante equivale a  $\frac{2}{4}$  de xícara, e com ele pode-se fazer  $\frac{2}{3}$  de uma porção.

Portanto a resposta é  $2\frac{2}{3}$  porções.” (Lo e McCrory, 2009, p.43)

As autoras mencionam que as imagens da Figura 1 foram desenhadas no quadro como apoio de tal argumentação, e que a turma concordou que ela foi uma boa ilustração para a resolução apresentada.

Figura 1– Imagem referente ao exemplo apresentado em 3.3.11



Fonte: Lo e McCrory, 2009, p.44

O professor então, desafiou estes “alunos”, perguntando por que estaria errado dar como resposta  $2\frac{1}{2}$ , resposta inicialmente dada por alguns “alunos” e que é um erro comum em problemas de divisão. As autoras ressaltam que, neste momento, mostrar que uma resposta está errada tornou-se tão importante quanto mostrar que uma resposta está correta. Um “aluno” apontou que a unidade referente a “2” é porção (de *waffles*), enquanto a unidade referente a  $\frac{1}{2}$  é xícara (de leite), portanto não poderiam ser consideradas juntas. As autoras reiteram que, de fato, em matemática, somente quantidades relativas a uma mesma unidade podem ser adicionadas ou subtraídas. E relatam que o professor chamou a atenção da turma, dizendo que os dois quadradinhos sombreados da imagem de baixo foram utilizados para

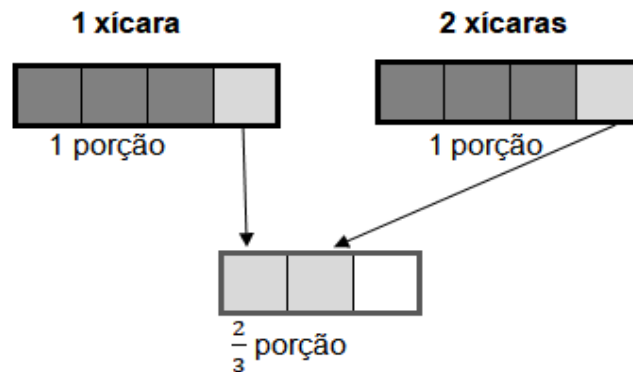
representar tanto duas vezes  $\frac{1}{4}$  de xícara como duas vezes  $\frac{1}{3}$  de porção. Em outras palavras, cada quadradinho pode representar tanto  $\frac{1}{4}$  de xícara como  $\frac{1}{3}$  de porção, dependendo do que se esteja considerando como “todo”.

Com relação à expressão numérica que ilustra o problema, as autoras ressaltam que o objetivo do professor era que os “alunos” justificassem a escolha da operação. Estes “alunos” apresentaram várias sugestões, incluindo  $2 \times \frac{4}{3}$ . O professor insistiu que fossem utilizados apenas os números dados no enunciado e que a justificativa envolvesse o contexto do problema (estes “alunos” estavam acostumados a esse tipo de desafio, que busca estimular a argumentação). Depois que a sentença  $2 \div \frac{3}{4}$  foi proposta, o professor perguntou “Por que uma divisão? O que há no enunciado que o torna um problema de divisão?” As autoras ressaltam que os passos da resolução não apontam para a questão “Por que uma divisão”. Um dos “alunos” trouxe à discussão a equação algébrica  $\frac{3}{4} \times x = 2$ , com  $x$  representando o número de porções possíveis, e que para descobrir tal valor teria que se calcular  $2 \div \frac{3}{4}$ . Embora correta e adequada para o nível dos “alunos” (futuros professores), essa resposta não foi aceita pelo professor da turma, por não ser este um argumento esperado de estudantes do Ensino Fundamental (ilustrando assim o terceiro tipo de atividade apontada no artigo). Finalmente o significado de medida foi proposto (as autoras não indicam por quem). Como fechamento dessa aula, o professor ressaltou aos “alunos” que os desafios que eles mesmos enfrentaram para modelar o *word problem* proposto por uma sentença matemática são de mesma natureza que os desafios que estudantes do Ensino Fundamental enfrentam para reconhecer uma divisão e o seu significado em uma atividade de modelagem. As autoras concluem que é necessário considerar o objetivo da atividade proposta, a fim de decidir o que será aceito como argumentação matemática válida para a comunidade da sala de aula.

Com o trabalho Lo e McCrory (2009), sentimos corroborada a relevância da escolha do tema de nossa pesquisa, na medida em que, ao discutir um dos casos mais complexos de divisão de frações, ele nos mostra como o tema também pode ser complexo para licenciandos. No entanto, destacamos que a frase “O professor chamou a atenção da turma que os dois quadradinhos sombreados da imagem de baixo foram utilizados para representar tanto duas vezes  $\frac{1}{4}$  de xícara como duas vezes  $\frac{1}{3}$  de porção (cada quadradinho pode representar tanto  $\frac{1}{4}$  de xícara como  $\frac{1}{3}$  de porção, dependendo do que se esteja considerando como “todo”) chamou

nossa atenção para o fato de que a ilustração pode dar margem à ambiguidade. Ocorreu-nos, então, que a Figura 2 poderia evitar tal ambiguidade.

Figura 2 – Sugestão de reestruturação da Figura 1



Fonte: Acervo da autora

Finalizamos este capítulo salientando que a revisão de literatura contribuiu positivamente para a nossa pesquisa, pois nos proporcionou reflexões importantes sobre o tema que nos propusemos investigar e enriqueceram a lista de critérios constituída ao longo deste trabalho. Com ela, reitera-se a originalidade deste trabalho, no que diz respeito à elaboração de critérios específicos para a divisão de frações.



## 4. CRITÉRIOS SELECIONADOS PARA ANÁLISE DE LIVRO DIDÁTICO

Este capítulo é destinado à compilação de critérios gerais e de critérios específicos focados no conteúdo. Na seção 4.1, listamos os critérios discutidos na disciplina intitulada “Análise e Produção de Material Didático”, oferecida pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E, na seção 4.2, apresentamos a seleção dos critérios elencados por nós, bem como as justificativas para cada um desses critérios, amparadas em todo o estudo apresentado até aqui e que serão aplicados nos próximos capítulos.

### 4.1 CRITÉRIOS ABORDADOS NA DISCIPLINA ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE MATERIAL DIDÁTICO

Nesta seção, são elencados os critérios que foram discutidos na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático ofertada pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) em 2021/2, ministrada pelas professoras Cydara Cavedon Ripoll e Luisa Rodríguez Doering, e da qual a autora deste trabalho participou como aluna. Essa disciplina tem como objetivo desenvolver a habilidade de analisar livros escolares destinados ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, bem como adaptar atividades e/ou textos de tais livros e criar atividades alternativas. Em 2021/2, ela teve como objetivo secundário analisar como se dá o desenvolvimento do ensino da divisão nos livros didáticos ao longo da Escola Básica. As ministrantes da disciplina justificaram a escolha do tema divisão, destacando a sua complexidade, que é crescente ao longo da Escola Básica, à medida que se vai ampliando o universo numérico.

Ao longo da disciplina foram discutidos os documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Editais do PNLD que atendiam a diferentes anos de escolaridade da Educação Básica. Foram também comentadas a dupla descontinuidade mencionada por Felix Klein (2009), o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (Shulmann, 1986), o Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball, 2008) e as ideias de Hanna (1990) e Stylianides (2008) sobre pensamento matemático e demonstrações em sala de aula. Por exemplo, segundo Mortari, (2001), a argumentação matemática desempenha um papel central no desenvolvimento do pensamento matemático, já

que envolve a capacidade de comunicar ideias, justificar afirmações e apresentar evidências de forma clara e coerente. E, Stylianides (2008) destaca a importância de envolver os alunos em todas as etapas do pensamento matemático: heurística, identificação de padrões, conjecturas, argumentação e demonstração.

Por considerarmos importante no desenvolvimento do presente trabalho, ressaltamos que o significado do termo ‘pensamento matemático’ não é unânime:

Não existe consenso sobre o que seja pensamento matemático nem sobre as habilidades ou predisposições que a fundamentam. [...] não parece ser um conceito classicamente definido com um conjunto de características definidoras que são necessárias e suficientes. (Sternberg, 1996, p.303-304)

No entanto, os documentos oficiais de orientação curricular Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN e a Base Nacional Comum Curricular - mencionam a importância da argumentação, da dedução e do desenvolvimento do pensamento matemático. De fato, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM:

A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático (Brasil, 2002 p. 69-70).

Porém, na BNCC, o significado de pensamento matemático não é esclarecido, ainda que seja mencionada a importância da argumentação, da dedução e do desenvolvimento do mesmo (Brasil, 2018, p.221,531,540,541).

Sendo assim, foi considerado, na disciplina e para o presente trabalho, que o pensamento matemático engloba variados caminhos trilhados na Matemática: conceituar, definir, testar para intuir e conjecturar, intuir, argumentar, generalizar, modelar, particularizar, demonstrar. Cabe ressaltar que, com tal entendimento, não consideramos entrar em conflito com a teoria de Duval, uma vez que esse autor afirma que é preciso ter “consciência dos processos cognitivos específicos que requer o pensamento matemático e desenvolvê-los com os alunos”

A partir de todas essas considerações, foram sendo construídos critérios de análise de livros didáticos e que são mencionados a seguir.

Dentre os critérios gerais, ressaltamos:

1. Como pré-requisito para iniciar-se a leitura e fazer uma análise crítica de um determinado conteúdo da Educação Básica presente em livros didáticos, o professor avaliador deve refletir

previamente sobre o conteúdo a ser abordado, sobre os conceitos e princípios fundamentais que lhe dizem respeito e responder:

1.a) O que é elementar<sup>17</sup> neste conteúdo?

1.b) Que pontos são delicados na abordagem e no ensino de tal conteúdo e como o conteúdo poderia ser abordado no nível do aluno?

1.c) Que atividades e exercícios poderiam ser propostos contemplando o pensamento matemático?

1.d) Que atividades e exercícios de aplicação ou relacionados com outros conteúdos de matemática poderiam ser propostos?

2. No que diz respeito ao pensamento matemático, foram elencados os seguintes critérios:

2.a) O método dedutivo está presente no livro do aluno?

2.b) O pensamento matemático está sendo apresentado de forma gradual, de modo a propiciar que o estudante acompanhe o desenvolvimento do conteúdo?

3. Quanto ao Manual do Professor, os critérios discutidos foram:

3.a) O Manual do Professor indica ao professor pontos delicados na aprendizagem do conteúdo em questão, tais como confusões frequentes, frases que devem ser evitadas pelo professor, por conta do sentido ambíguo que oportunizam ou por conta do que o aluno vai estudar futuramente?

3.b) No Manual do Professor são apresentados os objetivos das atividades propostas?

4. E, quanto às atividades propostas nos livros didáticos relativas ao conteúdo sob análise:

4.a) São privilegiados, nas atividades propostas, aspectos procedimentais em detrimento dos conceituais?

4.b) As atividades propostas sobre o conteúdo exploram o pensamento matemático?

4.c) As atividades propostas priorizam situações contextualizadas?

---

<sup>17</sup> Utilizamos aqui o termo “elementar” com o sentido de fundamental. Dessa forma, entendemos que o que é elementar em determinado conteúdo não pode faltar na sala de aula ou no livro didático, se queremos que estudantes tenham uma boa compreensão sobre esse conteúdo.

4.d) As atividades propostas são apenas do tipo “atividades de fixação” ou incluem também “atividades de aplicação” e “atividades de aprofundamento” (isto é, atividades que fazem o estudante avançar no desenvolvimento do pensamento matemático)?

4.d) As atividades propostas exploram a elaboração de problemas por parte do estudante? Por exemplo, solicitar ao estudante que elabore um problema que envolva na resolução o produto  $12 \times 24$ .)

4e) As atividades propostas exploram o que Duval chama de conversão (gráfica para a algébrica ou de em palavras para simbólica, por exemplo)?

Dentre os critérios específicos para a divisão debatidos na disciplina, ressaltamos:

4. A observância dos pré-requisitos para o conteúdo de divisão dos números racionais:

4.a) São retomados os conceitos de fração inversa e de frações equivalentes?

4.b) É retomado o algoritmo da multiplicação de números racionais na forma fracionária?

4.c) São retomados os significados (equipartição e medida) da operação de divisão?

4.d) É retomado o significado de fração como quociente (isto é: para  $a, b$  naturais e  $b \neq 0$ ,  $a:b = \frac{a}{b}$ )?

5. E, relacionados ao conteúdo de divisão de frações, destacamos:

5.a) São abordados todos os casos da divisão de frações?

5.b) Os exemplos e exercícios apresentados contemplam os dois significados (equipartição e medida) da divisão?

5.c) Como o algoritmo da divisão é apresentado? Ele é justificado ou apenas está descrito como a multiplicação pelo inverso?

5.d) São apresentadas imagens para explicar uma divisão de frações?

Muitos dos critérios apresentados nesta seção foram mantidos no restante do trabalho, como explicitado e justificado na próxima seção.

## 4.2 OS CRITÉRIOS POR NÓS SELECIONADOS

Inicialmente, cabe aqui reforçar que nossa escolha de critérios gerais e de critérios específicos para a divisão de frações tem foco no conteúdo e apoiou-se na revisão de literatura (Capítulo 4), em estudos realizados na disciplina Análise e Produção de Material Didático (Seção 4.1) e na experiência docente da autora deste trabalho. Tais critérios são apresentados no Quadro 3, sendo divididos em critérios gerais - aplicáveis a qualquer conteúdo que se deseja analisar e em critérios específicos - que neste caso é o tema divisão de frações. Os critérios são também subdivididos nas categorias Conteúdo, Linguagem, Imagens, Exemplos, Atividades e Manual do Professor. Cabe ressaltar que este quadro foi construído antes da Oficina (Capítulo 6), mas sua versão final, com as devidas considerações, está registrada ao final do Capítulo 6.

Quadro 3 – Critérios gerais e critérios específicos para a divisão de frações

<b>Critérios gerais para um conteúdo sob análise:</b>	
Conteúdo (C):	<p><b>C1)</b> Ocorre uma retomada dos conteúdos prévios necessários antes da introdução do conteúdo?</p> <p><b>C2)</b> O conteúdo está organizado com encadeamento lógico?</p> <p><b>C3)</b> O conteúdo está matematicamente correto?</p> <p><b>C4)</b> O conteúdo contempla as correspondentes habilidades da BNCC?</p>
Linguagem (L):	<b>L1)</b> O conteúdo é desenvolvido no Livro do Aluno em uma linguagem compreensível para estudantes?
Imagens (Im):	<b>Im1)</b> As imagens apresentadas estão relacionadas com o texto e auxiliam estudantes no entendimento do conteúdo?
Exemplos (E):	<p><b>E1)</b> Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados?</p> <p><b>E2)</b> Os exemplos que foram considerados contextualizados trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?</p>
Atividades (A):	<p><b>A1)</b> As atividades propostas são, em grande parte, contextualizadas?</p> <p><b>A2)</b> As atividades que foram consideradas contextualizadas trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?</p> <p><b>A3)</b> São propostas, efetivamente, situações-problema?</p> <p><b>A4)</b> As atividades propostas são apresentadas em uma ordem crescente</p>

	<p>de complexidade, ou seja, partem de atividades mais simples até as matematicamente mais complexas?</p> <p><b>A5)</b> Existem atividades que estimulam estudantes a elaborar problemas?</p> <p><b>A6)</b> Existem atividades que estimulam o desenvolvimento do pensamento matemático?</p> <p><b>A7)</b> Existem atividades que exploram a conversão de registros (Duval) em uma mesma atividade?</p>
Manual do Professor ( <b>MP</b> ):	<p><b>MP1)</b> A linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível para professores?</p> <p><b>MP2)</b> São sugeridas algumas abordagens para professores especialmente relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem desse conteúdo?</p> <p><b>MP3)</b> São explicitados os objetivos de cada atividade proposta?</p> <p><b>MP4)</b> São apresentadas alternativas de aprofundamento do conteúdo, para estudantes ou para professores, que estimulem a argumentação e a demonstração (ou, pelo menos, são apresentadas referências)?</p>
<b>Critérios específicos para a divisão de frações:</b>	
Conteúdo (C)	<p><b>C5)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma os significados de equipartição e de medida da divisão, ainda que sem mencioná-los explicitamente no Livro do Aluno?</p> <p><b>C6)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma o conceito de frações equivalentes?</p> <p><b>C7)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações faz uso de representações variadas na abordagem do tema?</p> <p><b>C8)</b> São abordados todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?</p> <p><b>C9)</b> São abordados, em cada caso de divisão de frações, os significados de equipartição e de medida, sempre que cabível?</p> <p><b>C10)</b> A abordagem do tema divisão de frações inclui o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?</p> <p><b>C11)</b> É justificado o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?</p> <p><b>C12)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações varia o tipo de registro no qual é realizado o tratamento?</p> <p><b>C13)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações explora</p>

	a conversão de registros?
Imagens ( <b>Im</b> )	<b>Im2)</b> São apresentadas imagens que ilustram uma divisão de frações? <b>Im3)</b> As eventuais imagens que ilustram divisão de frações alternam os significados de equipartição e de medida?
Atividades ( <b>A</b> ):	<b>A8)</b> As atividades contemplam todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)? <b>A9)</b> As atividades contemplam diferentes significados da divisão?

Fonte: Acervo da autora

Optamos por elencar critérios na forma de perguntas com respostas “sim” ou “não”, pois julgamos que, assim, conseguiremos apresentar objetivamente aspectos importantes da análise que nos propomos a realizar, bem como apresentar, de forma resumida e explícita, os resultados desta análise que são apresentados no Capítulo 5. Além disso, as perguntas são elaboradas de tal forma que uma resposta “sim” ressalta, em nossa opinião, um aspecto positivo do livro didático.

A seguir, comentamos cada um dos critérios apontados no Quadro 3, com o objetivo de elucidar o que, de fato, se busca analisar com esse critério.

### **Conteúdo (C):**

Entendemos como conteúdo o conjunto de conhecimentos necessários para o desenvolvimento do tema proposto. E, conforme já apresentado em 3.1, eles aparecem na BNCC nos Objetos de Conhecimento, e são entendidos como conteúdos, conceitos e processos (Brasil, 2018, p.28).

Na categoria “Conteúdo”, estamos incluindo a forma de abordagem e estruturação do conteúdo e os exemplos utilizados, salientando que o Edital do PNL/2020 traz como um de seus critérios a coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica, conforme já apresentado em 4.2.1. Destacamos, também, que a forma de abordagem e cuidados quanto à organização do conteúdo foi um assunto recorrente na disciplina Análise e Produção de Material Didático (ver 4.1), proporcionando considerações importantes que nos auxiliaram na criação dos critérios sobre esta categoria.

Sendo assim, trazemos como critérios gerais relativos ao conteúdo:

**C1) Ocorre uma retomada dos conteúdos prévios necessários antes da introdução do conteúdo?**

A preocupação com a retomada de pré-requisitos antes da introdução de um conteúdo é ressaltada na BNCC (ver 3.1), quando o documento faz alusão à articulação vertical dos conteúdos e à conexão entre as habilidades.

A relevância dessa retomada foi também abordada na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (conforme descrito em 1a - ver 4.1) e confirma-se regularmente na experiência docente da autora do presente trabalho, que tem percebido como a retomada dos conteúdos prévios mostra-se necessária para que o estudante relembre e/ou esclareça eventuais dúvidas/dificuldades relacionadas aos pré-requisitos, antes que seja iniciado um novo conteúdo ou o aprofundamento de um conteúdo, favorecendo, assim, a nova aprendizagem.

**C2) O conteúdo está organizado com encadeamento lógico?**

A matemática é toda construída com encadeamento lógico, sendo em geral considerados, além dos pré-requisitos, inicialmente casos mais simples para depois serem abordados casos mais complexos. Por esse motivo, esse “edifício matemático” precisa estar presente também nos livros didáticos, se queremos garantir a progressão da aprendizagem em e da Matemática.

Consideramos que este encadeamento lógico está implícito na progressão vertical bem como na promoção das aprendizagens essenciais recomendadas na BNCC (ver 3.1) e no Edital do PNLD (ver critério 2.1.3 c em 4.2)

**C3) O conteúdo está matematicamente correto?**

Este é especificamente um critério eliminatório comum do Edital do PNLD/2020 (ver 4.2.1, principalmente o item 2.1.4 b).

Ainda que, a princípio, todas as coleções aprovadas neste Edital tenham cumprido este critério eliminatório em sua generalidade, ou seja, que não apresente erros na maioria dos



conteúdos analisados, é recomendável, na nossa opinião, que ele seja avaliado a cada conteúdo específico que se considere analisar.

#### **C4) O conteúdo contempla as correspondentes habilidades da BNCC?**

Ressaltamos que o Edital do PNLD/2020 menciona que é recomendável que os materiais contribuam para o desenvolvimento das competências e habilidades da BNCC (ver 4.2.1, principalmente item 2.2.1a e item 2.2.1b). Com isso, entende-se que todas as coleções aprovadas tenham contemplado tal exigência, mas como este não é um critério eliminatório deste Edital, sugere-se que ele seja mantido para cada conteúdo específico que se deseja analisar.

Nos critérios específicos de conteúdo para a divisão de frações, os critérios C5 e C6 constituem um detalhamento do critério geral C1 sobre os pré-requisitos para este tema; os demais critérios dizem respeito a itens específicos sobre representações, tratamentos e conversões.

**C5) O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma os significados de equipartição e de medida da divisão, ainda que sem mencioná-los explicitamente no Livro do Aluno?**

Neste critério, busca-se analisar se são retomados dois significados da divisão (equipartição e medida), sendo que, por “equipartição”, subentende-se a divisão em partes iguais, portanto tendo necessariamente para divisor um número natural. Por “medida”, subentende-se que o dividendo e o divisor são grandezas de mesma espécie, e quer-se saber quantas vezes o divisor cabe no dividendo; em outras palavras, toma-se o divisor como unidade e quer-se medir o dividendo com tal unidade. Na divisão com o significado de medida, o quociente é apenas um número (que expressa quantas vezes cabe a unidade no dividendo), enquanto na divisão com significado de equipartição, o quociente é uma grandeza de mesma espécie que o dividendo.

A relevância deste critério específico foi debatida na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (ver 5c da seção 4.1), visando observar se diferentes significados da divisão são oportunizados a estudantes nas situações propostas pelos livros

didáticos, sem que a classificação seja um objetivo de aprendizagem:

A formulação em termos da identificação de interpretações e de significados é um conhecimento importante para o professor, pois pode dar apoio ao planejamento da abordagem das operações elementares. Entretanto, este não deve ser um objetivo de aprendizagem para os alunos. O importante é que os estudantes sejam capazes de identificar cada operação a partir das diferentes situações associadas aos respectivos significados e interpretações, porém, não que eles classifiquem explicitamente essas situações em termos de interpretações e significados. (Ripoll *et al*, 2015, p.114)

Relembramos que existe um terceiro significado para a divisão, chamado “significado exterior” em Ripoll *et al* (2015), o qual não está explicitado na BNCC, e sim apenas implícito na Unidade Temática<sup>18</sup> Grandezas e Medidas (ver 3.1). Imaginando que os autores das coleções de livros didáticos procuraram contemplar as orientações da BNCC, e por entendermos que, ao investigar esse terceiro significado, outros conceitos estariam envolvidos (de área, por exemplo), optamos por analisar apenas se os significados de equipartição e de medida estão garantidos na abordagem da divisão nas Unidades Temáticas Números e Álgebra.

**C6)** O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma o conceito de frações equivalentes?

Atentamos para a retomada da equivalência de frações ressaltando que este tópico/conteúdo é um pré-requisito para a abordagem de um dos casos de divisão de frações, portanto também para a resolução de problemas envolvendo a divisão de frações (conforme apresentado no Capítulo 8). Cabe justificar a não menção ao mínimo múltiplo comum (mmc) como pré-requisito, porque concordamos com Souza (2019), quando a autora ressalta a não necessidade de fazer-se uso do mmc e o quão complicado e sem sentido pode se tornar para o estudante o seu uso quando adotado como ingrediente da “receita” para comparar ou operar com frações. Destacamos que este tópico foi amplamente debatido na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (conforme mencionado no critério 5a, da seção 4.1); sentimos também corroborado este critério em Scheffer e Powell (2019) e Rezende (2014).

**C7)** O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações faz uso de representações variadas na abordagem do tema?

---

<sup>18</sup> Na BNCC os Objetos de Conhecimento estão classificados por Unidades Temáticas. A divisão está essencialmente mencionada nas Unidades Temáticas Números e Álgebra.

Este critério tem como preocupação analisar se são utilizados diferentes registros na abordagem do conteúdo, ou seja, se são apresentadas no Livro do Aluno, preferivelmente nos exemplos, diferentes representações, como enfatiza a BNCC e defende Duval, podendo ser, por exemplo, escrita em palavras, escrita numérica, esquemas ou figuras.

A relevância deste aspecto pode ser constatada em Scheffer e Powell (2019), quando os autores mencionam a Teoria de Registros de Duval (2009), reforçando que “não se pode ter compreensão em Matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação”. Em Souza (2019), que ressalta (entre as suas conclusões) a importância da utilização de diferentes formas de representação para as frações, reiterando a ideia de Duval de que, para que um conceito abstrato seja bem compreendido, devem ser oportunizadas aos estudantes diferentes representações.

Mesmo sem mencionar Duval, mas corroborando suas ideias, em Vula *et al*, (2015) afirma-se que o uso de múltiplas representações torna o conceito de fração mais concreto e compreensível. Li e Smith (2007) também ressaltam a importância das representações na divisão de frações, tanto para alunos como para futuros professores.

**C8)** São abordados todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?

A relevância deste critério reside no fato de entendermos que todos os possíveis casos de divisão de frações podem e devem ser abordados nos livros didáticos de 7º ano. Ressaltamos a importância de que todos os casos sejam contemplados, preferencialmente em exemplos, isto é, antes de serem propostas as atividades, familiarizando as(os) estudantes com os diferentes argumentos que cada caso envolve, bem como com a complexidade crescente embutida nos diferentes casos. Deste modo, por meio dos exemplos, o professor tem a oportunidade de promover debates sobre a eficácia das estratégias adotadas, oportunizando, na nossa opinião, uma maior compreensão do conteúdo.

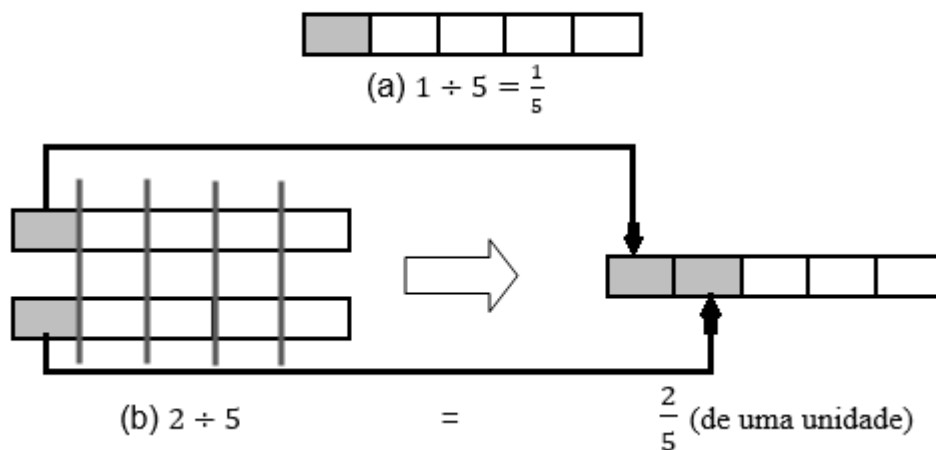
Assim, procuramos analisar se são abordados os seguintes casos:

- divisão entre números naturais com quociente natural (a título de retomada);
- divisão entre números naturais com quociente não inteiro
- divisão de uma fração por um número natural;
- divisão de um número natural por uma fração;

- divisão de fração por fração;

Ainda, cabe ressaltar que inclui-se no caso “divisão entre números naturais com quociente não inteiro” a explicitação/retomada (começando pela abordagem de frações unitárias, por exemplo) do fato de que, afinal, ao concluir-se que  $a : b = \frac{a}{b}$  (Figura 3), está-se dando ao travessão de fração o significado de divisão, contemplando assim a Habilidade (EF07MA08) “Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” relativa ao Objeto de Conhecimento “Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador“ do 7º ano e debates feitos na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (ver critério 6, seção 4.1). Assim, como exemplo para a divisão de naturais temos que (a)  $1 \div 5 = \frac{1}{5}$  e (b)  $2 \div 5 = \frac{2}{5}$ , tendo que (b) corresponde a divisão de 2 unidades em 5 partes iguais.

Figura 3 – Exemplos para a divisão entre números naturais



Fonte: Acervo da autora

**C9)** São abordados, em cada caso de divisão de frações, os significados de equipartição e de medida, sempre que cabível?

Inicialmente, ressaltamos que, diferentemente da divisão com o significado de medida, na divisão com significado de equipartição cabem apenas os casos em que o divisor é um número natural, justificando-se, assim, a expressão “sempre que cabível” neste critério.

A relevância deste critério deve-se ao fato de que é frequente a ênfase na equipartição:

A divisão é tão fortemente interpretada apenas como repartição em partes iguais, que muitas vezes essa interpretação é considerada como uma *definição para a operação*.

Difícilmente, porém, será possível interpretar  $\frac{5}{12} \div \frac{2}{3}$  simplesmente como repartição em partes iguais. Portanto, **visando à preparação para a generalização da divisão para os números racionais, é importante refletir cuidadosamente sobre os significados associados à operação.** (Ripoll *et al.*, 2015, p.107)

Também é relevante analisar a maneira como esta abordagem é feita, precisamente como são oportunizados tais significados, tendo em vista que, como ressaltam Ripoll *et al.* (2015), a identificação dessas interpretações é um objetivo para docentes – não para estudantes. Em outras palavras, não deve ser um objetivo do ensino das operações que os estudantes sejam capazes de listar, caracterizar e classificar cada uma dessas interpretações.

O aluno não deve ser cobrado pela capacidade de classificar situações envolvendo uma dada operação entre as interpretações – muito menos ser avaliado ou penalizado por isso. [...] Para que compreendam e aprendam as operações básicas, é importante e necessário que os estudantes realizem uma grande variedade de problemas, envolvendo de forma tão equânime quanto possível diferentes interpretações associadas a cada uma dessas operações. (Ripoll *et al.*, 2015, p.85-86)

Scheffer e Powell (2019), ainda que referindo-se a frações, alertam que a falta de discussão de todos os significados no livro didático limita a compreensão dos estudantes sobre o sistema de números racionais e também pode deixar lacunas nos planejamentos dos professores que utilizam essa ferramenta (o livro didático) como suporte para os seus planejamentos. Também, devidamente adequado ao tema divisão, este critério é corroborado pelo critério 2 de Lazaretti e Mathias (2023).

Segundo Rezende (2014, p.1), "A ausência dessa ideia (a ação de medir) tem reflexos na sala de aula de matemática e, muitas vezes, na própria prática de ensino do professor de matemática". Este pensamento é reforçado por Carbone e Eaton (2011), quando relatam que alguns dos licenciandos, participantes de sua pesquisa, apresentaram alguns equívocos na elaboração de problemas envolvendo a divisão com significado de medida.

E por fim, corroborando discussões realizadas na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (ver critério 6b em 4.1), cabe ressaltar que nem sempre a complexidade envolvida nos significados de equipartição e de medida é a mesma. Por exemplo, dividir  $\frac{3}{5}$  da unidade em 7 partes iguais e verificar quantas vezes 7 cabe em  $\frac{3}{5}$  requerem do estudante diferentes estruturas de pensamento.

**C10)** A abordagem do tema divisão de frações inclui o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?

**C11)** É justificado o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?

Provavelmente a resposta ao critério C10 seja afirmativa, uma vez que, em muitos casos (e quando o estudante tem bem consolidado o processo de multiplicação), a utilização do algoritmo otimiza o tempo gasto com os cálculos. No entanto, tanto Li e Smith (2007) como Rezende (2014) ressaltam que o conhecimento de docentes sobre a divisão de frações é muitas vezes limitado ao procedimento de inverter e multiplicar, o que restringe sua capacidade de fornecer uma explicação conceitual do procedimento.

Reiteramos, com C11, nossa preocupação com a devida justificativa para o algoritmo usual da divisão (demonstração), por considerarmos que não deva ser explorada com estudantes apenas uma “fórmula pronta”, sem promover a compreensão do processo que envolve esse algoritmo. Consideramos que a divisão de frações requer diferentes estratégias de abordagem para que o processo da divisão seja bem compreendido, não apenas mecanizado. Destacamos, assim, nossa concordância com Fischer (2020), quando a autora defende que o ensino de multiplicação de frações não deve deter-se apenas na compreensão e aplicação do algoritmo, mas sim, deve privilegiar a compreensão dos processos, de forma a emergir a ampliação do conceito de multiplicação (e, para nós, também do conceito de divisão) para o universo das frações.

Salientamos que a inquietação sobre a utilização do algoritmo (e sua justificativa) esteve também presente nos estudos realizados na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático. Sendo assim, os critérios C10 e C11 detalham o critério 6c, descrito na seção 4.1.

**C12)** O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações varia o tipo de registro no qual é realizado o tratamento?

A relevância deste critério está na importância dada, no presente trabalho, à Teoria de Registros de Duval (ver Capítulo 3). Concordamos com o autor quando defende que a utilização de diferentes registros de representação pode proporcionar ao estudante a possibilidade de optar pelo tipo de representação que lhe auxiliará no processo de resolução de um problema. Este pensamento é reforçado em Lazzaretti e Mathias (2023), quando as autoras afirmam que tanto no conteúdo como nas atividades propostas, é interessante que sejam explorados diferentes tipos de representações matemáticas.

**C13)** O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações explora a conversão de registros?

Destacamos que é por meio das conversões que acontece a construção do conhecimento (ver Capítulo 2 deste trabalho). De fato, para que estudantes possam optar pelo tipo de representação que lhes auxiliará no processo de resolução de um problema, como ressaltado no critério C12, é também necessário que sejam capazes de fazer conversões. Como apontam Lazzaretti e Mathias (2023), só elas permitem efetivamente a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada.

### **Linguagem (L):**

Nesta categoria, estamos nos referindo à linguagem utilizada tanto no Livro do Aluno (L1) como no Manual do Professor (MP1).

**L1)** O conteúdo é desenvolvido no Livro do Aluno em uma linguagem compreensível para estudantes?

**MP1)** A linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível para professores?

No critério L1 reiteramos o critério eliminatório comum 2.1.7 g do Edital do PNLD/2020. Apesar de tratar-se de um critério eliminatório, consideramos importante repeti-lo, com o objetivo de dar relevância à compreensão de um conteúdo específico por estudantes.

O termo “compreensível” utilizado tanto em L1 como em MP1 refere-se à redação e a explicações que sejam entendíveis (para estudantes ou para professores) e que estejam de acordo com os conteúdos trabalhados. Referindo-se a L1, reiteramos: é importante que a linguagem seja de fácil entendimento para estudantes, visto que o Livro do Aluno pode servir como suporte ou material de consulta individual. Referindo-se a MP1, consideramos importante que seja compreensível, também para professores, a linguagem utilizada nas demonstrações incluídas no Manual do Professor (ver MP4) e que sejam esclarecidos novos termos utilizados no Livro do Aluno, reiterando assim também o critério 2.2.1.2 j do Edital do PNLD (ver seção 4.2.1).

**Imagens (Im):**

Este tópico refere-se aos recursos visuais utilizados no Livro do Aluno e que podem, entre outras coisas, ajudar na visualização matemática (termo definido em Scheffer e Powell (2019)). A relevância de imagens é corroborada em Li e Smith (2007), quando os autores trazem que os futuros professores (participantes de seu trabalho) responderam melhor quando seus argumentos foram apoiados em representações pictóricas.

Relembramos que as imagens em um livro didático podem ter inúmeras funções. Neste trabalho, no entanto, focamos principalmente em critérios que se relacionam ao conteúdo. E como critério geral para imagem temos:

**Im1)** As imagens apresentadas estão relacionadas com o texto e auxiliam estudantes no entendimento do conteúdo?

Neste critério, inspirando-nos em discussões feitas na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático e no Edital do PNLD/2020 (ver 4.2.1, especificamente com os critérios eliminatórios comuns 2.1.7 q e 2.1.7 w), buscamos analisar se as imagens trazidas nos livros didáticos apoiam e auxiliam estudantes na compreensão do texto, ou seja, se a imagem apresentada “conversa” com o texto explicativo, reforçando informações que podem ter passado despercebidas por estudantes e que, no momento da sua visualização, apoiam o entendimento do texto em questão.

Quanto ao conteúdo específico de divisão de frações, apresentamos como critério relativo a imagens:

**Im2)** São apresentadas imagens que ilustram uma divisão de frações?

Repetimos aqui o critério 5.d descrito na seção 4.1. Conforme já apontado no critério Im1, entendemos que as imagens podem auxiliar o estudante na compreensão de um conteúdo específico; assim, o reiteramos, neste momento, para o caso particular de divisão de frações, pois consideramos que uma representação pictórica pode favorecer o entendimento de estudantes sobre a forma de resolução daquela divisão, o que é corroborado em Lo e McCrory (2009).



**Im3)** As eventuais imagens que ilustram divisão de frações alternam os significados de equipartição e de medida?

Este critério também está relacionado ao critério 6d mencionado em 4.1, e sua relevância reside no fato de que as representações pictóricas para equipartição e para medida são distintas, portanto, na nossa opinião, ambas deveriam ser oportunizadas aos estudantes. Reiteramos que uma representação pictórica pode, também, favorecer ou reforçar o entendimento do aluno sobre o significado atribuído àquela divisão. Destacamos que em Lo e McCrory (2009) é apresentado um bom exemplo cuja imagem contempla a ideia de medida associada a divisão de frações.

**Exemplos (E):**

Tendo em vista que muitas vezes os exemplos são responsáveis por manter a atenção de estudantes, buscamos também analisá-los, por meio dos seguintes critérios:

**E1)** Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados?

**E2)** Os exemplos que foram considerados contextualizados, trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?

O cuidado com a contextualização dos exemplos e das atividades (ver A1 e A2) em um livro didático deveria acontecer, e na direção de ser plausível para o estudante, isto é, se não for possível de ser vivenciada por ele, pelo menos de ser facilmente imaginada.

A reflexão sobre os exemplos em livros didáticos teve origem na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático. A relevância da inclusão do critério E1 é corroborada em Vula *et al* (2015), no qual é apontado que a maioria dos problemas presentes nos livros didáticos analisados em seu trabalho (e aqui consideramos incluídos também os exemplos) apresentam contextos puramente matemáticos e que quase todos esses problemas requerem apenas procedimentos simples.

Com o critério E2, explicitamos nossa preocupação com a “autenticidade” das contextualizações apresentadas nos livros didáticos. A questão relacionada a uma “contextualização forçada” foi debatida na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático e se potencializou quando a autora do presente trabalho e sua orientadora assistiram

a uma comunicação no 5º Simpósio Nacional de Formação de Professores de Matemática, ocorrido em Santa Maria/RS, em 2022. Nessa ocasião, o professor apresentador do trabalho trouxe recortes de um livro didático e narrativas de sua própria vivência que contribuíram para o entendimento, por parte dos ouvintes, da realidade vivenciada por alunos de uma escola rural. Ao final da apresentação, o professor apresentou a conclusão de que o livro didático adotado naquela escola rural não retratava as vivências dos estudantes de maneira realística, visto que as situações não se utilizam de elementos do cotidiano rural.

Também Lazaretti e Mathias (2023) mencionam a importância da contextualização do conteúdo e dos exercícios, os quais devem simular situações reais e até mesmo tratar informações verídicas, construindo também um critério para esta questão.

### **Atividades (A):**

Inicialmente esclarecemos que, neste tópico, estamos nos referindo às atividades propostas no livro didático, sejam elas: exercícios, problemas,<sup>19</sup> questões, desafios ou situações-problema. Estamos, assim, considerando “atividade” um termo com significado mais abrangente do que “exercício”, visto que, com este último termo, poderíamos estar nos limitando a apenas uma forma de “verificação” de um processo abordado antes dele. Conforme Cerqueira (2010)

uma vez que consideramos atividade como algo que ultrapassa a visão imediatista da sala de aula, refletindo-se na formação dos sujeitos, de uma forma mais ampla, [...] o exercício se limitaria a um fim mais específico em que entraria em jogo, apenas, a verificação da aprendizagem do aluno por parte do professor em relação a um tópico específico de conteúdo programático. (Cerqueira 2010, p.132)

Sendo assim, trazemos como primeiros critérios gerais para Atividades critérios análogos aos considerados para os exemplos:

**A1)** As atividades propostas são, em grande parte, contextualizadas?

**A2)** As atividades que foram consideradas contextualizadas, trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?

A importância da contextualização das atividades é enfatizada por diversos autores,

---

<sup>19</sup> Para Silveira (2001) o exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade / conhecimento matemático já conhecido pelo resolvidor, como a aplicação de um algoritmo conhecido, de uma fórmula conhecida, etc. O exercício envolve mera aplicação e o problema necessariamente envolve invenção ou/e criação significativa.

como Rangel (2005), Souza (2015), Carbone e Eaton (2011), Scheffer e Powell (2019), neste último ressaltada na categoria 1 em seu estudo. Também é enfatizada em um dos critérios elencados na disciplina de Análise e Desenvolvimento de Material Didático (ver critério 4.c da seção 4.1)

O Guia Digital do PNLD/2020 afirma que, nas coleções aprovadas, “Os objetos de conhecimento e as atividades propostas estão contextualizadas, tendo em vista o interesse relativo à faixa etária de ensino.” (Brasil 2019, p.22), considerando cumprido, portanto, o critério eliminatório 2.1.8 b do Edital PNLD/ 2020. No entanto, cabe ressaltar que reconhecemos a utilidade e a importância de se propor exercícios do tipo “de fixação” (que são apresentados nos livros didáticos), pois em alguns momentos da aprendizagem, a prontidão de cálculo é vantajosa. Por isso incluímos “em grande parte” no critério A1.

Cabe ressaltar que o critério A1 também foi inspirado na prática docente da autora do presente trabalho, visto que, mesmo sem utilizar-se dos critérios selecionados no Guia Digital do PNLD/2020 e de referências bibliográficas sobre o assunto, verificou se os exercícios apresentados nos livros didáticos analisados em sua escola em 2019, eram contextualizados (conforme descrito na introdução deste trabalho).

Com o critério A2, manifestamos preocupação análoga à considerada no critério E2, questionando se as atividades propostas no livro didático são plausíveis para estudantes.

Os critérios gerais E1 e A1 tornam-se especialmente relevantes no contexto de frações, pois, conectá-las à vida de estudantes, propondo problemas reais, é uma questão que merece destaque. Relembramos que em Vula *et al* (2015) é recomendado que os livros didáticos não devem apresentar apenas contextos de matemática pura, mas também enfatizar os problemas do mundo real que lidam com frações. E Fischer (2020) relata que o objetivo do estudante ser capaz de associar a multiplicação de frações a situações do dia a dia foi apenas parcialmente atingido pelo grupo que ela analisou em seu trabalho. Com isso, consideramos mais importante ainda analisar se os livros didáticos trazem situações do dia a dia envolvendo a divisão de frações.

Assim, consideramos também os critérios:

**A3) São propostas, efetivamente, situações-problemas?**

Inspiradas nos debates realizados na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (ver 4.1, critérios 4.a e 4.c), buscamos analisar de que forma são trazidas as atividades nos livros didáticos: são elas apresentadas em forma de “exercícios de fixação” (que priorizam procedimentos) ou são incluídas atividades que exploram os conceitos trabalhados, bem como atividades de aplicação e/ou aprofundamento do conteúdo e que estimulam o estudante a pensar matematicamente, e, ainda, se são elas apresentadas de forma contextualizada. Aqui são incluídas as situações-problema, recomendadas no Edital do PNLD/2020 (ver seção 4.2.1 critério 2.1.8b) isto é, atividades que envolvem, em um contexto, mais de uma etapa de raciocínio, não tendo, portanto, uma resolução imediata como a aplicação direta de uma fórmula.

Assim, concordamos com Souza (2015), que defende que os problemas propostos não podem servir meramente para treino dos procedimentos apresentados e que afirma que a diversidade de situações auxilia no desenvolvimento do raciocínio matemático. Concordamos também com Rangel (2005), que defende que os alunos ultrapassem fórmulas prontas, possibilitando novas descobertas, evidenciando a relevância da atitude e do interesse investigativos.

Vula *et al* (2015) criticam que os livros, analisados por eles, por apresentarem problemas que requerem apenas o desenvolvimento de procedimentos simples, ou seja, que não envolvem requisitos especiais para serem resolvidos. Concordamos com esses autores quando afirmam que focar apenas nos problemas que possuem requisitos cognitivos de baixo nível, como recordação e reprodução, não ajuda os alunos a terem bons resultados na resolução de problemas.

Ressaltamos que não esperamos que todas as atividades ou situações propostas envolvam necessariamente mais de uma etapa de raciocínio, mas defendemos que existam atividades com esse objetivo.

**A4)** As atividades propostas são apresentadas em uma ordem crescente de complexidade, ou seja, partem de atividades mais simples até as matematicamente mais complexas?

Souza (2015) propõe observar uma ordem lógica para aprendizagem dos conceitos, partindo geralmente de situações mais simples até chegar às mais avançadas. Destaca-se, assim, a importância do cuidado com este aspecto ao analisar o Livro do Aluno.

Concordamos com o autor no sentido de que é positivo partir de atividades mais

simples (que estudantes se sintam aptos a resolver), e, aos poucos, ir avançando em problemas que sejam cada vez mais complexos. Entendemos que, desta forma, alunas e alunos sentir-se-ão mais confiantes e motivados a prosseguir e resolver as atividades seguintes (mais complexas).

**A5) Existem atividades que estimulam estudantes a elaborar problemas?**

Este critério reitera uma recomendação da BNCC. De fato, no documento consta a expressão “resolver e elaborar problemas” em mais de 40 habilidades na Área do Conhecimento - Matemática.

Concordamos e defendemos que desafiar estudantes, convidando-os a criarem um problema, não apenas os faz evidenciar seu entendimento sobre o tema em questão como também oportuniza o desenvolvimento do pensamento matemático, uma vez que ele precisará considerar, na sua elaboração, quais os caminhos e as possíveis estratégias para a resolução daquele problema. Este pensamento está corroborado tanto em Lazzaretti e Mathias (2023) como em Carbone e Eaton (2011).

**A6) Existem atividades que estimulam o desenvolvimento do pensamento matemático?**

O significado de pensamento matemático (termo inserido neste critério) está mencionado e explicado na seção 4.1 deste trabalho. Salientamos que no critério A6 buscamos englobar os critérios 1c), 2a) e 2b) elencados na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (ver seção 4.1). A importância de incluir pensamento matemático nas atividades está implícita em Vula *et al* (2015) (ao ser mencionado “níveis de pensamento”) e também em Lo e McCrory (2009).

**A7) Existem atividades que exploram a conversão de registros (Duval) em uma mesma atividade?**

A relevância da conversão de registros para o aprendizado de estudantes já foi apontada em C13, e neste critério a incluímos nas atividades. Cabe ressaltar o depoimento apresentado em Fischer (2020) de que a articulação entre as representações (no caso pictórica, numérica e escrita), mostrou-se fundamental no processo de amadurecimento e abstração dos conceitos trabalhados durante a sequência de atividades propostas sobre a multiplicação de

frações.

Com relação ao tema específico divisão de frações, consideramos relevantes os seguintes critérios sobre atividades:

**A8)** As atividades contemplam todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?

Este critério é análogo ao critério C8, mas agora relativo às atividades propostas. Já mencionamos em 4.3 nossa concordância com Scheffer e Powell (2019) quando ponderam que, ao não serem explorados todos os significados de frações nos livros didáticos, podem ser formadas lacunas no planejamento de docentes que utilizam o livro didático como único guia do planejamento, ou que não possuem material didático que possa auxiliá-los na interpretação e representação matemática das frações. Entendemos que fenômeno semelhante pode ocorrer com a não abordagem de todos os casos de divisão de frações nos livros didáticos.

Reiteramos que é importante que, neste momento (atividades), todos os casos da divisão já tenham sido contemplados em exemplos; dessa forma, pressupõe-se que várias estratégias de divisão já tenham sido previamente discutidas em grupo. Muitos foram os debates sobre a importância de serem contemplados todos os casos de divisão de frações (tanto em exemplos como em atividades), na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático, devido à sua complexidade (ver critério 5.a na seção 4.1). Destacamos, também, que este aspecto é evidenciado em Lo e McCrory (2009), quando os autores ressaltam que a divisão de frações pode ser complexa, inclusive, para licenciandos.

**A9)** As atividades contemplam diferentes significados da divisão?

Este critério é análogo ao critério C9, agora relativo às atividades propostas. Destacamos que a justificativa e a relevância, lá apontadas, cabem também para as atividades propostas.

### **Manual do Professor (MP):**

Conforme consta no Edital do PNLD/2020, entende-se por Manual do Professor:

aquele utilizado pelo professor, em correspondência com o Livro do Estudante, para aperfeiçoar-se, expandir seus estudos, preparar os planos de aulas e de avaliação

formativa e suprir as dificuldades de aprendizagem dos estudantes (Brasil, 2019a, p. 24)

Dito isso, destacamos que foram muitas as considerações e aprofundamentos oportunizados na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático relativos ao Manual do Professor e, por esse motivo, se tornaram fonte de inspiração para a criação dos critérios relativos a esse material. Por exemplo, na disciplina, concordamos que o Manual do Professor deveria conter informações adicionais que auxiliem as(os) docentes no momento do seu planejamento (recomendações, dificuldades de estudantes, erros frequentes).

Sendo assim, além do critério MP1 já discutido juntamente com o L1, trazemos os seguintes critérios:

**MP2)** São sugeridas algumas abordagens para professores, especialmente relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem desse conteúdo?

Neste critério, buscamos analisar se o Manual do Professor traz subsídios que auxiliem professores quanto a dificuldades ou confusões frequentes apresentadas por estudantes no desenvolvimento do conteúdo, levando em conta e aprofundando o que diz no próprio Edital do PNLD/2020, o “Manual do Professor é utilizado, [...] para suprir as dificuldades de aprendizagem dos estudantes.”, como ressaltado anteriormente.

Busca-se analisar também se o Manual do Professor apresenta contribuições relacionadas a aspectos delicados do ensino do conteúdo, como por exemplo: frases que devem ser evitadas pelo professor, por conta do sentido ambíguo nelas embutido e/ou equívocos frequentes (que podem comprometer a compreensão do conteúdo).

Consideramos que essas sugestões e/ou alertas a professores, ao serem incluídas no Manual do Professor, podem não apenas enriquecer o seu planejamento como também, uma vez cientes delas, podem auxiliar ainda mais no processo de aprendizagem de cada estudante. Esta questão sobre inclusão de alertas ao professor foi bastante discutida na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (ver critério 3a na seção 4.1), e sua falta no Edital do PNLD/2020 já foi apontada por nós em 3.2.1. Cabe ressaltar que Li e Smith (2007) alertam para cinco tipos de dificuldades, de professores com a divisão e com a divisão de frações, de modo que seria de se esperar que também o Manual do Professor fosse esclarecedor com relação a eventuais dificuldades de professores.

**MP3)** São explicitados os objetivos de cada atividade proposta?

Este critério repete o critério 3b elencado na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático (seção 4.1). Também Lo e McCrory (2009) defendem que é necessário considerar o objetivo de cada atividade proposta. Ainda, relembramos que o Edital do PNLD/2020 considera como critério de avaliação que os livros didáticos devam apresentar “b. Contemplação de todos os objetos de conhecimento e habilidades constantes na BNCC.” (Brasil, 2019a, p.42). Assim, seria interessante que cada atividade proposta fosse acompanhada no Manual do Professor de seus objetivos, além de ser(em) indicada(s) qual(is) habilidade(s) espera-se, com ela, contemplar. Desta forma, na nossa opinião, estar-se-ia abordando com mais profundidade o critério 2.2.1.2 desse Edital (quando este requer que o Manual do Professor oriente o trabalho de professores em sala de aula) e com maior objetividade o critério 2.2 a. do mesmo Edital (Consistência e coerência entre os conteúdos e as atividades propostas e os objetos de conhecimento e habilidades constantes na BNCC).

Baseamos nossa justificativa também na experiência da autora do presente trabalho, visto que, em um primeiro momento, o professor pode ler uma determinada atividade e não compreender o seu objetivo, decidindo por excluí-la do seu planejamento por não a considerar relevante para aquele momento do estudo; no entanto pode ser que essa atividade, dentro da Coleção, seja uma etapa importante para o desenvolvimento ou aprimoramento de uma outra atividade ou conteúdo futuro.

**MP4)** São apresentadas alternativas de aprofundamento do conteúdo, para estudantes ou para professores, que estimulem a argumentação e a demonstração (ou pelo menos são apresentadas referências)?

Destacamos como fundamental que professores façam uma reflexão sobre a sua prática docente, buscando aprimorar seus conhecimentos sobre os conteúdos trabalhados bem como sua abordagem em sala de aula. Por conta disto, consideramos que o Manual do Professor deve, então, apresentar referências ou trazer sugestões que contribuam para que docentes efetivamente “expandam seus estudos”.

Defendemos, ainda, que o Manual do Professor oportunize momentos em que demonstrações não apenas sejam possíveis de serem desenvolvidas na sala de aula como também sejam promotoras de compreensão, como defende Hanna (ver seção 4.1). Desta forma, consideramos que professores podem promover discussões em pequenos grupos e,



posteriormente no grande grupo, tendo também o objetivo de que cada estudante desenvolva a habilidade de argumentar, seja matematicamente, seja em qualquer situação do dia a dia. Percebemos nossa convicção corroborada por Souza (2019), quando ela afirma e comprova a viabilidade de se incluir demonstrações na Educação Básica (no caso, em relação à caracterização de frações equivalentes) e por Lo e McCrory (2009) quando elas afirmam que um futuro professor precisa refletir sobre que conhecimentos de estudantes poderiam ser usados em uma argumentação matemática.

Cabe destacar que uma argumentação em Matemática não precisa fazer uso da simbologia matemática para ser aceita como uma demonstração; conforme ressalta D'Amore (2007), na escola, a demonstração e o simbolismo matemático não precisam estar diretamente ligados inicialmente, sendo, muitas vezes, possível de ser desenvolvida em um 7º ano.

Finalizamos este capítulo salientando que a lista de critérios apresentada no Quadro 3 e as justificativas apresentadas nesta seção foram utilizadas para a análise de dois livros didáticos (Capítulo 5) E que tal lista foi posteriormente submetida à validação por um grupo de docentes da Educação Básica. As considerações provenientes desta validação estão registradas no Capítulo 6 deste trabalho.

## **5. O TEMA DIVISÃO DE FRAÇÕES EM LIVROS DIDÁTICOS**

Neste capítulo, apresentamos uma leitura crítica sobre divisão de frações no 7º ano realizada em duas coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD/2020, baseada na lista de critérios explicitados em 4.2 (Ver Quadro 3). Buscamos, assim, contemplar o terceiro objetivo específico deste trabalho: (3) Aplicar a lista de critérios, constituída nesta pesquisa, na análise do conteúdo divisão de frações em livros didáticos de 7º ano. Relembramos que as duas coleções escolhidas, A conquista da matemática e Teláris Matemática, foram aquelas com maior distribuição na rede pública do Brasil no ano de 2020.

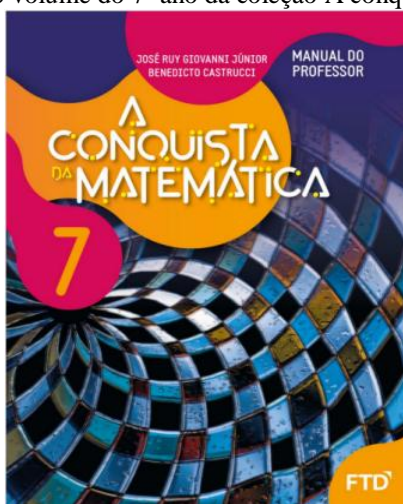
Na primeira seção do presente capítulo apresentamos as duas coleções escolhidas; na segunda seção fazemos uma descrição comentada de cada uma dessas coleções, no que diz respeito ao conteúdo divisão de frações, destacando pontos que consideramos importantes para a compreensão do conteúdo por estudantes, levando em conta os critérios elencados ao longo desta pesquisa. E, na terceira seção deste capítulo será apresentado um quadro resumo indicando quais foram os critérios que consideramos contemplados por cada uma das coleções.

### **5.1 APRESENTAÇÃO DAS DUAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS CONSIDERADAS NESTE TRABALHO**

#### **5.1.1 - Coleção 1 - A conquista da matemática**

A coleção A conquista da matemática, de autoria de José Ruy Giovanni Junior e Benedicto Castrucci, é apresentada em sua capa (Figura 1), sendo o volume do 7º ano do ensino fundamental: anos finais, (Manual do Professor), 4ª edição, editora FTD, ano 2018.

Figura 4 – Capa do volume do 7º ano da coleção A conquista da Matemática



Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018

Na coleção “A conquista da matemática” encontramos o tema divisão de frações integrando o Capítulo 4 intitulado “Divisão com Números Racionais” que, por sua vez, faz parte da Unidade 4 “O Conjunto dos Números Racionais”, conforme apresentado na figura 5.

Figura 5 – Parte do índice do volume do 7º ano da coleção A conquista da Matemática

<b>UNIDADE 4</b> <b>O CONJUNTO DOS</b> <b>NÚMEROS RACIONAIS</b> ..... <b>98</b>		
<b>1. Os números racionais</b> .....	<b>100</b>	
Módulo ou valor absoluto de um número racional.....	101	
A reta numérica .....	102	
<b>Atividades</b> .....	103	
<b>2. Adição algébrica de números racionais</b> ..	<b>104</b>	
<b>Atividades</b> .....	<b>105</b>	
<b>3. Multiplicação com números racionais</b> ...	<b>106</b>	
Multiplicação de números racionais na forma decimal.....	106	
Multiplicação de números racionais na forma de fração .....	107	
<b>Atividades</b> .....	<b>109</b>	
		<b>5. Potenciação de números racionais</b> ..... <b>116</b>
		Expoente inteiro negativo..... <b>117</b>
		<b>Atividades</b> .....
		<b>Por toda parte</b> • Esportes: o atletismo ..... <b>119</b>
		<b>6. Raiz quadrada exata de números racionais</b> .....
		<b>120</b>
		<b>Atividades</b> .....
		<b>122</b>
		<b>Educação financeira</b> •
		A ciência dos preços .....
		<b>123</b>
		<b>7. Média aritmética e média aritmética ponderada</b> .....
		<b>124</b>
		<b>Atividades</b> .....
		<b>125</b>
		<b>Tratamento da informação</b> • Análise de tabelas e gráficos com números racionais negativos .....
		<b>126</b>
		<b>Retomando o que aprendeu</b> .....
		<b>128</b>

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.9

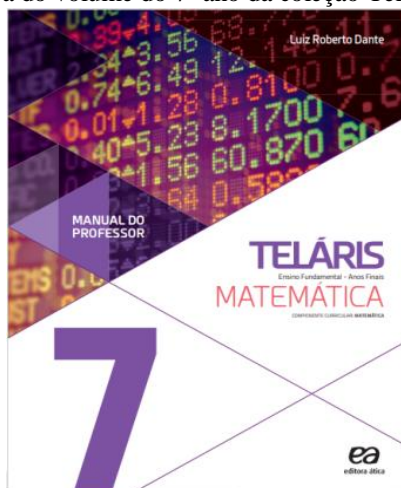
A descrição comentada que apresentamos na seção 5.2.1 refere-se ao texto que se inicia na página 110 deste volume. Cabe ressaltar que nas Unidades anteriores (Números Naturais e Operações; O Conjunto dos Números Inteiros; Transformações Geométricas e Simetria) não foram apresentados exemplo(s) ou atividade(s) envolvendo frações.

### 5.1.2 - Coleção 2 - Teláris Matemática

A coleção Teláris Matemática, de autoria de Luiz Roberto Dante, é apresentada em sua

capa (Figura 6), sendo o livro didático do 7º ano do ensino fundamental: anos finais, (Manual do Professor), 3. ed. São Paulo, editora Ática, ano 2018.

Figura 6 – Capa do volume do 7º ano da coleção Teláris Matemática



Fonte: Dante, 2018

No livro da coleção "Teláris Matemática" O tema divisão de frações integra uma seção intitulada "Frações" que, por sua vez, faz parte do Capítulo 2 "Revedo e aprofundando múltiplos, divisores e frações", conforme apresentado na figura 7.

Figura 7 – Parte do índice do volume do 7º ano da coleção Teláris Matemática

<b>Capítulo 2</b>	<b>Capítulo 3</b>
<b>Revedo e aprofundando múltiplos, divisores e frações</b> ..... 46	<b>Números racionais</b> ..... 76
<b>1º Múltiplos e divisores de números naturais</b> ..... 48	<b>1º Os números racionais</b> ..... 78
Lembrando os conceitos de número primo e de número composto ..... 51	O conjunto dos números racionais ..... 80
Decomposição de um número composto em fatores primos ..... 52	A relação entre os conjuntos N, Z e Q ..... 80
Máximo divisor comum (mdc) ..... 53	Representação dos números racionais em uma reta numerada ..... 81
Mínimo múltiplo comum (mmc) ..... 54	Módulo ou valor absoluto de um número racional ..... 82
Cálculo mental do mmc ..... 56	Oposto ou simétrico de um número racional ..... 82
<b>2º Frações</b> ..... 57	Comparação de números racionais ..... 83
Retomando as ideias de frações ..... 57	<b>2º Operações com números racionais</b> ..... 84
Frações equivalentes e simplificação de frações ..... 62	Adição e subtração de números racionais ... 84
Comparação de frações ..... 63	Multiplicação de números racionais ..... 85
Operações com frações ..... 65	Inverso de um número racional ..... 86
Multiplicação de frações ..... 67	Divisão de números racionais ..... 87
Frações inversas ..... 67	Números racionais, grandezas e medidas ... 88
Divisão de frações ..... 69	<b>Leitura</b> ..... 90
<b>Revisando seus conhecimentos</b> ..... 72	<b>Revisando seus conhecimentos</b> ..... 91
<b>Testes oficiais</b> ..... 74	<b>Testes oficiais</b> ..... 92
<b>Verifique o que estudou</b> ..... 75	<b>Verifique o que estudou</b> ..... 93

Fonte: Dante, 2018, p. 6-7

Conforme informado no índice deste volume o Capítulo 3 - Números racionais, na unidade 2 - Operações com números racionais, inicia-se na p.87, na seção intitulada “divisão de números racionais”, na qual consta a divisão de números decimais e fracionários (p.87). É importante salientar que, na introdução da seção “divisão de números racionais”, o conteúdo de frações é retomado em um capítulo anterior (Capítulo 2 intitulado “Revido e aprofundando múltiplos, divisores e frações”) no qual é abordada, na Unidade 2 - Frações, a divisão de frações. Assim, a descrição que apresentamos na seção 5.2.2 tem seu início na página 69.

## 5.2 - DESCRIÇÃO COMENTADA SOBRE O TEMA DIVISÃO DE FRAÇÕES NAS COLEÇÕES SELECIONADAS

Fazemos nesta seção uma descrição comentada das coleções no que diz respeito ao conteúdo divisão de frações, destacando pontos que consideramos importantes para a compreensão do conteúdo por estudantes. Nossa descrição traz alguns recortes (dos dois volumes selecionados), com o objetivo de ressaltar e/ou evidenciar aspectos que dizem respeito à lista de critérios elencados na seção 4.2. Destacamos que, nos anexos A e B, encontra-se o texto analisado, de cada uma das coleções, na íntegra.

### 5.2.1 - Coleção 1 - A conquista da matemática

No volume de 7º ano da coleção A conquista da matemática, os autores apresentam a Unidade 4 - O Conjunto dos Números Racionais (páginas 98 e 99). O Manual do Professor ressalta, na primeira página desta unidade, algumas Competências Gerais e Específicas mencionadas na BNCC, dentre elas “2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (p.98), frase que relacionamos ao critério A6, bem como a seguinte competência específica que relacionamos ao critério A3:

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras

linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas e dados) (Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.98)

É nesta Unidade 4 que frações são mencionadas pela primeira vez no volume do 7º ano. Apesar de ser mencionado na abertura da unidade que os números racionais incluem as frações, a imagem que acompanha a apresentação da Unidade mostra apenas números escritos na representação decimal. Ressaltamos que frações aparecem como exemplos de números racionais no Capítulo 1 - Os Números Racionais (p.100), na subseção que trata do módulo de um número racional e posicionadas na reta numérica (subseção A reta numérica).

No Capítulo 2 - Adição Algébrica de Números Racionais, as frações aparecem em dois dos quatro exemplos de adição, bem como nas atividades propostas. Cabe ressaltar que a adição de frações é retomada diretamente por meio do algoritmo que envolve o cálculo do mínimo múltiplo comum dos denominadores, aspecto que é criticado em Souza (2019) (ver seção 4.3). Salientamos também que a subtração não é mencionada explicitamente no texto, mas aparece neste capítulo nos exemplos e nas atividades.

O Capítulo 3 - Multiplicação com Números Racionais é subdividido nas seções Multiplicação de números racionais na forma decimal e Multiplicação de números racionais na forma de fração. No Manual do Professor é sugerido (p.106) que seja retomada a multiplicação de números racionais positivos na forma decimal, o que não é feito na segunda seção. Fica implícito, assim, que a multiplicação de frações está sendo tratada nesta seção pela primeira vez na coleção. E, de fato, as orientações didáticas para a segunda seção iniciam com a frase: “O objetivo desta página é propor variadas situações para que os alunos tenham contato com a multiplicação envolvendo frações” (p.107). Tal seção é iniciada com um “Pense e Responda”, para a qual é especificado o seu objetivo no Manual do Professor: “O objetivo aqui é que os alunos mobilizem e transponham os conhecimentos já construídos sobre multiplicação de números inteiros com o significado de adição de parcelas iguais” (p.107), o que remete aos critérios C1 e MP3. No entanto, com apenas mais um exemplo e sem uma organização generalizadora das ideias ali embutidas, é estabelecida a regra “Para multiplicar um número inteiro por um número racional na forma de fração, multiplicamos o número inteiro pelo numerador da fração e conservamos o denominador” (p.107), o que vai contra o desenvolvimento do pensamento matemático de estudantes (ver 4.1)

O exemplo que se segue trata de uma situação que envolve “ $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{3}$ ”, que é transformado na multiplicação  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$  sem qualquer explicação ou motivação para tal, apesar de não caber mais aqui o significado de adição de parcelas iguais. Cabe ressaltar que este aspecto

é criticado por Fischer (2020) (ver seção 4.3). Logo após esse segundo exemplo é estabelecida mais uma regra, novamente sem uma organização generalizadora das ideias ali embutidas: “Para multiplicar números racionais na forma de fração, multiplicam-se os numeradores entre si e multiplicam-se os denominadores entre si” (p.108). Em resumo, evidencia-se que o algoritmo para a multiplicação de frações não é demonstrado no Livro do Aluno, algo que, no nosso ponto de vista, não oportuniza o desenvolvimento do pensamento matemático de estudantes, ainda que os exemplos e atividades em sua maioria sejam contextualizados e amparados por imagens e que o Manual do Professor anuncie que “O objetivo desta página é proporcionar situações em que os alunos possam **compreender** a multiplicação entre duas frações” (p.108, grifo nosso) e sugira:

Ressaltar o fato de que nos casos de multiplicação de números racionais na forma de fração não existe a ideia de adição de parcelas iguais; e conduzir os alunos a perceber que, no caso de multiplicar duas frações, deve-se considerar que o que se quer saber é qual é a fração de outra fração (Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.108).

E nessas condições que é iniciado o Capítulo 4 - Divisão com números racionais, que está subdividido em duas seções, sendo a primeira intitulada “Divisão com números racionais na forma decimal” (p.110), e a segunda intitulada “Divisão com números racionais na forma de fração” (p.111)

A seção “Divisão com números racionais na forma decimal”, conforme é apresentado no Manual do Professor, tem por objetivo:

Retomar a divisão de números racionais positivos na forma decimal e verificar as possíveis dificuldades que os alunos ainda têm na realização desse cálculo. O trabalho deve seguir os mesmos passos da multiplicação, com ênfase nos processos de transformação do dividendo e do divisor. (Giovanni Junior; Castrucci, 2008, p.110).

Salientamos que essas frases nos remetem aos critérios C1 e MP2, ainda que a última frase não pareça compreensível para docentes, uma vez que o termo “transformação” não é mencionado na seção do capítulo anterior que tratou da multiplicação de números racionais na forma decimal. No Livro do Aluno, a seção Divisão com números racionais na forma decimal começa enfatizando que se está retomando e ampliando o estudo da divisão de números racionais na forma decimal, “com base no que já foi visto anteriormente” (p.110). E são apresentados dois exemplos (não contextualizados), sendo o primeiro uma divisão envolvendo dividendo inteiro negativo e divisor positivo não inteiro em representação decimal ( $-7 \div 0,14$ ), para o qual fica sugerida a ampliação para o conjunto dos números racionais da regra de sinais da divisão de números inteiros e da propriedade “multiplicando-se dividendo e divisor por um mesmo número (inteiro) não nulo não altera-se o quociente”. O

Manual do Professor sugere que sejam propostas na lousa várias divisões para que os alunos efetuem e discutam os passos desenvolvidos, com o objetivo de “Ressaltar a **justificativa** do procedimento ‘igualam-se as casas e cortam-se as vírgulas’” (p.110, grifo nosso). Chamou-nos a atenção que, com essa frase, o Manual do Professor não está explicando o que significa “discutir os passos desenvolvidos”. Por esse motivo, reforçamos o critério C11, no qual temos a preocupação com a devida justificativa para algoritmos, antes que seja mecanizado o processo por ele sugerido.

A seção “Divisão de números racionais na forma de fração” é iniciada por um “Pense e Responda” (p.111) que motiva a definição de frações inversas e, a seguir, questiona quantas vezes  $\frac{1}{2}$  litro cabe em: a) 1 litro, b)  $1\frac{1}{2}$  litro e em c) 2 litros, evocando-se, assim, a divisão com o significado de medida (Figura 8). Destacamos que, chamou nossa atenção o item b), pois nele é apresentada uma fração mista, representação que vem sendo utilizada em todo o Capítulo 4 em exemplos e atividades, o que consideramos como um ponto positivo, visto que a coleção busca retomar essa representação.

Figura 8 – Início da Subseção Divisão com números racionais na forma de fração

**PENSE E RESPONDA**
Resoluções na p. 301

Responda às questões no caderno.

**1.** Antes de efetuar as multiplicações a seguir, faça uma estimativa dos resultados.

$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1}$

$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}$

$\frac{7}{11} \cdot \frac{11}{7}$

$\frac{13}{10} \cdot \frac{10}{13}$

a) Você deve ter obtido o mesmo número como resultado das multiplicações. Que número é esse? **1**

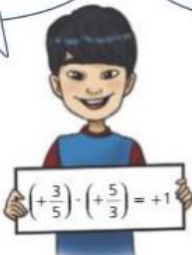
b) O que você pôde observar nas frações que aparecem como fatores em cada multiplicação?  
*Os dois fatores são frações cujo numerador de uma é igual ao denominador da outra e vice-versa.*

**2.** Quantas vezes  $\frac{1}{2}$  litro cabe em:

a) 1 litro? **2 vezes.**      b)  $1\frac{1}{2}$  litro? **3 vezes.**      c) 2 litros? **4 vezes.**


Quando a multiplicação de duas frações tem 1 como resultado, essas frações são inversas uma da outra.

$+\frac{3}{5}$  é o inverso de  $+\frac{5}{3}$  e vice-versa.



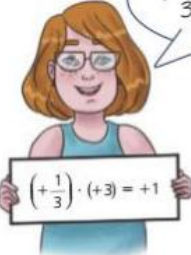
$(+\frac{3}{5}) \cdot (+\frac{5}{3}) = +1$

$-4$  é o inverso de  $-\frac{1}{4}$  e vice-versa.



$(-4) \cdot (-\frac{1}{4}) = +1$

$+\frac{1}{3}$  é o inverso de  $+3$  e vice-versa.



$(+\frac{1}{3}) \cdot (+3) = +1$

DAMI MOTA



Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.111

O Manual do Professor menciona que o objetivo das questões apresentadas no “Pense e Responda” é “Verificar como os alunos exploram essas questões e que estratégias utilizam para resolvê-las” (p.111) (critério MP3), e ainda sugere que a correção das questões seja feita: “coletivamente a fim de socializar os diferentes procedimentos utilizados” (p.111).

A seguir, em dar continuidade, no Livro do Aluno, à questão 2 do Pense e Responda, são explicitados a definição e alguns exemplos de frações inversas, utilizando as regras de sinais da multiplicação (estudadas no Capítulo 3 deste mesmo volume). Percebe-se que, até o momento, nesta seção, os autores recorrem a uma preparação antes da introdução do conteúdo a ser estudado, ponto que consideramos positivo; no entanto, não há uma retomada de conteúdos prévios, tais como o conceito de frações equivalentes (critérios C1 e C6).

Cabe, neste momento, um comentário sobre a definição “Quando a multiplicação de duas frações tem 1 como resultado, essas frações são inversas uma da outra.” (p.111), pois, levando em conta que frações são apenas representantes para os números racionais e que  $\frac{3}{5}$  multiplicada por  $\frac{10}{6}$  também é igual a 1, consideramos que seria mais adequado definir fração inversa (de uma fração que não representa o número zero) por meio da troca entre seu numerador e seu denominador, reservando a multiplicação para uma propriedade de frações inversas e para a definição do inverso de um número (critérios C3 e L1). Assim, defendemos:

Definição de fração inversa: Dados  $a, b$  inteiros não nulos, a fração inversa de  $\frac{a}{b}$  é a fração  $\frac{b}{a}$ .

Definição de inverso (multiplicativo) de um número racional: Se  $r, s$  são números (racionais) não nulos cujo produto é igual a 1, então  $r$  e  $s$  são ditos inversos um do outro.<sup>20</sup>

Destacamos que o Manual do Professor evidencia a falta de cuidado com os termos “número racional” e “representante do número racional (fração)”, ao mencionar, nas Orientações Didáticas para esta subseção “O objetivo desta página e das próximas é propor variadas situações para que os alunos tenham contato com a divisão envolvendo frações. Para isso, desenvolvemos inicialmente a noção de **número inverso**” (p.111, grifo nosso), enquanto no Livro do Aluno é apresentada a definição de **fração inversa**.

---

<sup>20</sup> Definição utilizada por Jamil Ferreira no Capítulo 4 do livro A Construção dos Números, Textos Universitários, SBM, 2010.

Em seguida, são abordados cinco exemplos envolvendo divisão de frações, os dois primeiros contextualizados (critério E1). No primeiro deles, quer-se saber qual é a metade de  $\frac{3}{5}$  de uma pizza (Figura 9).

Figura 9 – Primeiro exemplo de Divisão de frações

Considere agora as situações a seguir.

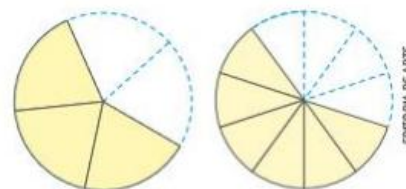
- 1 Dos  $\frac{3}{5}$  que sobraram de uma *pizza*, Joel comeu metade. Que fração da *pizza* Joel comeu?

Resolvendo a situação geometricamente, temos:

A metade dos  $\frac{3}{5}$  de *pizza* que Joel comeu corresponde à parte hachurada na figura ao lado, ou seja:

$$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$$

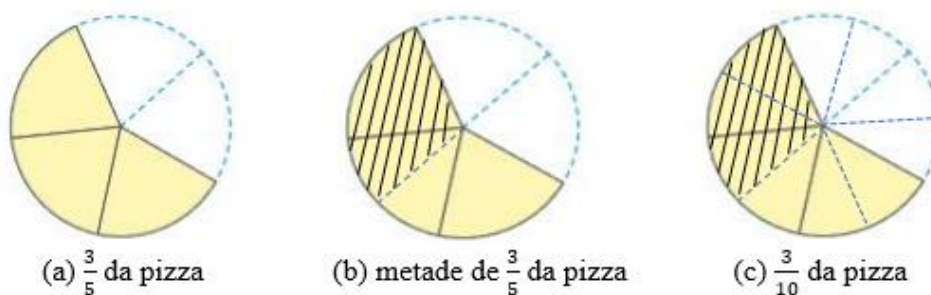
Então, Joel comeu  $\frac{3}{10}$  da *pizza*.



Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.111

Nesta situação, apesar de não ser mencionado explicitamente no Manual do Professor, está sendo contemplada a divisão de uma fração por um número natural com o significado de equipartição. O exemplo é apoiado por imagens, o que consideramos positivo, sendo inclusive coerente com a Orientação Didática do Manual do Professor “Para explorar as situações propostas envolvendo divisões, como no caso da multiplicação com frações, a representação por meio de figuras e a resolução geométrica são fundamentais para promover uma aprendizagem significativa” (p.111). Nesta frase, reconhecemos evidenciado o critério Im1. No entanto, além de o texto explicativo no Livro do Aluno não realçar a necessidade de se considerar frações equivalentes, mencionando apenas “ou seja,  $\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{10}$ ”, alertamos para um equívoco nessas imagens que enfatizam apenas a equivalência e não mostram a parte “hachurada” mencionada no texto. Entendemos que, conforme mencionado em Im1, as imagens poderiam estar auxiliando estudantes no entendimento do texto de forma mais contundente, pois, com essa condução, o texto não nos pareceu integralmente compreensível para estudantes (critério L1). Nossa sugestão está registrada na Figura 10, na qual o item (a) representa a situação inicial  $\frac{3}{5}$  de pizza, o item (b) realça a metade dos  $\frac{3}{5}$  de pizza que Joel comeu e o item – parte hachurada e (c) apela para frações equivalentes, uma vez que se quer expressar a fração de pizza que Joel comeu.

Figura 10 – Nossa sugestão de imagens para apoio ao Exemplo 1 (p.111)



Fonte: Acervo da autora

Ressaltamos que a escolha por um denominador ímpar, apesar de causar uma equipartição mais difícil de ser ilustrada ou praticada com material concreto, oportuniza a retomada de frações equivalentes, o que também evidencia a utilidade deste conceito (frações equivalentes). No entanto, o texto do Livro do Aluno não explicitou a necessidade de se considerar frações equivalentes (critério L1), aspecto também não mencionado ou ressaltado no Manual do Professor (critério MP2), visto que apenas sugere “providenciar discos de mesmo tamanho em cartolina branca para que os alunos possam manipular e experimentar concretamente a situação” (p.111). Consideramos positiva toda sugestão de abordagem que se utiliza de material manipulativo, uma vez que esse tipo de sugestão pode enriquecer o planejamento docente, principalmente quando está-se tratando de um tópico delicado (critério MP2), mas reiteramos que caberiam, neste momento, comentários referentes à retomada de frações equivalentes.

Após a resolução geométrica da Situação 1 no Livro do Aluno, é apresentado um cálculo envolvendo uma multiplicação que busca sugerir a relação entre a divisão de frações e a multiplicação (Figura 11). No entanto, esse cálculo poderia, na nossa opinião, ser motivado e não apenas ser sugerida uma coincidência (“Observe, agora, que...”). Entendemos que essa seria uma boa oportunidade de relacionar a escrita  $\frac{1}{2}$  com a palavra metade, visto que há essa menção no enunciado, por exemplo:  $\frac{3}{5} \div 2$  é o mesmo que calcular a metade de  $\frac{3}{5}$ , que, por sua vez, pode ser calculado por meio da multiplicação  $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ , e só então destacar que  $\frac{1}{2}$  é a fração inversa de 2, novamente retomando a função do denominador 1 (critério L1).

Figura 11 – Resolução do Exemplo 1, sugerindo um algoritmo para a divisão

Observe, agora, que a divisão de  $\frac{3}{5}$  por 2 tem o mesmo resultado que a multiplicação de  $\frac{3}{5}$  pelo inverso de 2, que é  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{array}{l} \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

inverso

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.112.

No Manual do Professor é sugerida uma atividade complementar a título de ampliação (Figura 12) cuja relação com a divisão de frações deveria estar, na nossa opinião, melhor explicada (critério MP4).

Figura 12 – Atividade complementar no Manual do Professor (p.111)

### AMPLIANDO

#### Atividade complementar

Certas bactérias se multiplicam tão rapidamente que seu número dobra a cada minuto. Em um tubo, elas se multiplicam de tal maneira que em 56 minutos dá para encher metade desse tubo. Em quantos minutos o tubo estaria totalmente cheio?

#### Resolução da atividade

Como a quantidade dessas bactérias dobra a cada minuto e metade do tubo já está cheia, então em 1 minuto o tubo estará totalmente cheio.

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.111

No Manual do Professor, também é sugerida uma atividade que enfatiza a relação da divisão envolvendo frações com a multiplicação (Figura 13) e que se revela mais compreensível que a explicação dada para o Exemplo 1.

Figura 13 – Atividades no Manual do Professor objetivando explorar a relação entre a divisão de frações e a multiplicação

**ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS**

Uma sugestão para dar continuidade ao conteúdo é propor algumas situações, como as descritas a seguir, para trabalhar a divisão com frações e sua relação com a multiplicação.

Utilizando folhas de jornal, recorte tiras de mesmo tamanho e obtenha:

- a metade da metade de uma tira
- a metade da quarta parte da tira
- a metade da terça parte da tira
- a metade da quinta parte da tira

$\left(\frac{1}{2} : 2, \text{ que corresponde a } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{2}, \text{ ou seja: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\right)$

$\left(\frac{1}{4} : 2, \text{ que corresponde a } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{4}, \text{ ou seja: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}\right)$

$\left(\frac{1}{3} : 2, \text{ que corresponde a } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{3}, \text{ ou seja: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\right)$

$\left(\frac{1}{5} : 2, \text{ que corresponde a } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{5}, \text{ ou seja: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}\right)$

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.112.

Consideramos que a linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível a docentes (critério MP1) e a sugestão é conveniente para dar continuidade ao conteúdo (critério MP2), sendo plausível e, na nossa opinião, recomendável de ser aplicada em sala de aula (Critérios E2 e A2), pois além de utilizar material manipulativo, faz a devida relação da multiplicação com a divisão de frações, oportunizando retomar que calcular "metade de" remete à multiplicação por  $\frac{1}{2}$ . Ponderamos que esta Orientação Didática apresentada no Manual do Professor (Figura 13) poderia ser transformada em texto no Livro do Aluno.

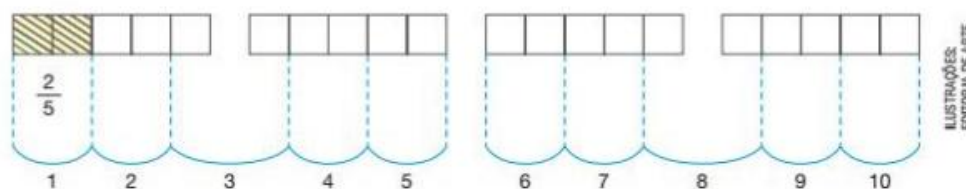
O segundo exemplo apresentado no capítulo retrata uma situação envolvendo divisão de frações (p.112): quer-se calcular, quantas porções de  $\frac{2}{5}$  de pão podem ser servidas com 4 pães (Figura 14).

Figura 14 – Segundo exemplo de Divisão de Frações

- 2 Calculando  $\frac{2}{5}$  de pão por pessoa, 4 pães servem quantas pessoas?

Primeiro vamos resolver esse problema geometricamente.

Dividimos cada uma das 4 unidades em 5 partes iguais e contamos quantos  $\frac{2}{5}$  são necessários para cobrir as 4 unidades.



$\frac{2}{5}$  cabe 10 vezes em 4, ou seja:  $4 : \frac{2}{5} = 10$ .

Os 4 pães servem 10 pessoas.

Agora, observe que a divisão de 4 por  $\frac{2}{5}$  tem o mesmo resultado que a multiplicação de 4 pelo inverso de  $\frac{2}{5}$ , que é  $\frac{5}{2}$ :

$$\begin{array}{l} 4 : \frac{2}{5} = 10 \\ 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{2} = 10 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4 : \frac{2}{5} = 10 \\ 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{2} = 10 \end{array}} \right\} \rightarrow 4 : \frac{2}{5} = 4 \cdot \frac{5}{2}$$

inverso

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2008, p.112

Nessa situação, apesar de não ter sido ressaltado no Manual do Professor, está sendo contemplada a divisão de um número natural por uma fração ( $4 \div \frac{2}{5}$ ) com o significado de medida. Salientamos que, como parte da resposta, seria importante destacar que  $\frac{2}{5}$  cabe **exatamente** 10 vezes em 4. Cabe ressaltar que nas Orientações Didáticas no Manual do Professor, é sugerido “propor modificações nas condições do problema” (p.112), no entanto todas as modificações sugeridas contemplam apenas quociente inteiro (critério C8), o que não contribui para a discussão com docentes sobre o caso de uma situação em que sobre algum pedacinho, ou seja, tendo como resposta um quociente não inteiro (critérios MP2 e C8). Consideramos positivo (critério MP4) que a primeira modificação proposta comenta que a substituição da fração  $\frac{2}{5}$  pela fração  $\frac{4}{5}$  oportuniza um raciocínio de proporcionalidade inversa: “Verifique se eles percebem que o fato de  $\frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{2}{5}$  ser o dobro do que se calculava antes, reduz a quantidade de pessoas servidas pela metade (mantendo-se os 4 pães)” (p.112). Ainda, dentre as modificações propostas sugere-se que os 4 pães sejam substituídos por 6 pães, e neste momento a Orientação Didática faz uso da representação decimal no lugar de manter-se

a representação fracionária, o: “Incentive-os a perceber que  $6 = 1,5 \cdot 4$ , ou seja, que se a quantidade de pães é uma vez e meia a de antes, mantendo-se a estimativa de pães por pessoa, a quantidade de pessoas servidas também será uma vez e meia a quantidade anterior ( $1,5 \cdot 10 = 15$ )” (p.112). Consideramos a mudança de representação inadequada (critério MP4), visto que é possível, e produtivo, trabalhar a questão utilizando exclusivamente a forma fracionária.

A resolução geométrica da Situação 2, utiliza uma representação pictórica adequada e compreensível para estudantes (Critérios Im1 e Im2). Já a relação entre a divisão e a multiplicação merece a mesma crítica da situação 1, a saber, faltam a motivação e o raciocínio generalizador, podendo o texto sugerir ao leitor tratar-se de mera coincidência (referimo-nos aqui à expressão “Observe, agora, que...” na Situação 1, comparável à expressão “Agora, observe que...” utilizada na Situação 2 (critério L1).

Dos 5 exemplos apresentados no Capítulo 4 - Divisão com números racionais, apenas os exemplos 1 e 2 são contextualizados (critério E1). Consideramos que os Exemplos 1 e 2 retomam os significados de equipartição e de medida da divisão (critério C5).

Destacamos que apenas os exemplos 1, 2 e 3 são apoiados em imagens (critérios Im1, Im2 e Im3). E chamou-nos a atenção que, para os exemplos 3, 4 e 5, não são apresentadas Orientações Didáticas no Manual do Professor, por esse motivo, não ficam evidentes quais seriam os objetivos de aprendizagem que se pretende alcançar com tais exemplos. (critério MP3).

O terceiro exemplo apresenta um caso de divisão que envolve dividendo e divisor fracionários que não representam um número inteiro e resultando em quociente inteiro, a saber,  $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$  (Figura 15).

Figura 15 – Terceiro exemplo de divisão de frações

3 A figura seguinte indica a divisão  $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ .



Analisando a figura,  $\frac{1}{6}$  cabe 4 vezes em  $\frac{2}{3}$ , ou seja:  $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$ .

Nesse caso, vemos que o quociente (4) é maior que o dividendo  $\left(\frac{2}{3}\right)$ .

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2008, p.112

A resolução geométrica apresentada apoia-se excessivamente, no nosso ponto de vista, na imagem de duas unidades, uma registrando a quantidade  $\frac{2}{3}$  e a outra registrando a quantidade  $\frac{1}{6}$ . Dizemos ‘excessivamente’ porque a conclusão  $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$  é baseada apenas em uma comparação de imagens (confirmada pela frase “Analisando a figura” (p.112)) e não em um raciocínio lógico (ver seção 4.1) em linguagem compreensível para estudantes do 7º ano (critério L1) que faça, por exemplo, uso de frações equivalentes e do conceito de fração não unitária, como a proposta de texto e imagem a seguir, que, entendemos, oportuniza maior interação entre imagem e texto (critério Im1).

Subdividindo cada terço ao meio (Figura 16), percebe-se que  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$  ou seja, que as frações  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{4}{6}$  são equivalentes; pela definição de fração não unitária, cabem 4 vezes  $\frac{1}{6}$  em  $\frac{4}{6}$ . Assim,  $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$ .

Figura 16 – Sugestão de imagem para apoiar o terceiro exemplo de divisão de frações



Fonte: Acervo da autora

Ponderamos que, no exemplo 3, o divisor ser uma fração unitária com denominador múltiplo do denominador do dividendo foi uma escolha adequada para um primeiro exemplo em que ocorre a divisão de fração por fração, pois a visualização do raciocínio utilizado ficaria mais evidente. Salientamos ainda que seria conveniente que os autores destacassem que  $\frac{1}{6}$  cabe **exatamente** 4 vezes em  $\frac{2}{3}$ , pois poderia aparecer, em uma situação análoga, um quociente não inteiro.



Em seguida, os autores destacam que: “Nesse caso, vemos que o quociente (4) é maior que o dividendo ( $\frac{2}{3}$ )”. Atentamos que essa afirmação aparece no Livro do Aluno sem complementações que auxiliem o entendimento por parte de estudantes (critério L1), mas entendemos que seria um momento adequado para os autores complementarem que agora, com números racionais, não vale sempre a propriedade estabelecida para números naturais: se o divisor é diferente de 1, então o quociente, sempre é menor do que o dividendo.

Segue-se, como nos exemplos anteriores, a tentativa de ir-se legitimando o algoritmo “dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso” baseado apenas em “**note** que a divisão tem o mesmo resultado que...” (p.113, grifo nosso) (Figura 17), apontando ao estudante que as divisões em questão coincidem com a multiplicação do dividendo pela fração inversa do divisor. No Livro do Aluno e no Manual do Professor não encontramos a explicação do porquê dessa “regra”, estabelecida, apenas em exemplos. Cabe ressaltar que em Matemática, toda regra só é legitimada se testada em **todos** os exemplos e em todos os casos (demonstrada, enfim), daí a importância e necessidade de raciocínios generalizadores (critério MP4).

Figura 17 – Resolução do terceiro exemplo utilizando algoritmo

Note que a divisão de  $\frac{2}{3}$  por  $\frac{1}{6}$  tem o mesmo resultado que a multiplicação de  $\frac{2}{3}$  pelo inverso de  $\frac{1}{6}$ , que é  $\frac{6}{1}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4 \\ \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}}{1} = \frac{4}{1} = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1}$$

inverso

Para dividir uma fração por outra fração, diferente de zero, multiplicamos a primeira pelo inverso da segunda.

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.113

Em seguida, neste volume, é apresentada uma observação (Figura 18) referente à divisão de frações:

Figura 18 – Observação referente ao terceiro exemplo

**Observação:**

A divisão entre frações é sempre possível, desde que o divisor seja diferente de zero. Podemos dizer que toda fração representa um quociente do numerador pelo denominador:

$$\bullet \frac{2}{5} = 2 : 5 \text{ ou } 2 : 5 = \frac{2}{5} \qquad \bullet \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{5} \text{ ou } \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{3}{5}}$$

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.113

Consideramos que a frase “Podemos dizer que toda fração representa um quociente do numerador pelo denominador” é insuficiente para esclarecer ao estudante que  $2:5 = \frac{2}{5}$ . Este fato foi lembrado, sem maiores esclarecimentos, em uma situação apresentada no Capítulo 1 da Unidade 4 (Figura 19), mas apenas com frações unitárias. Ora, se pensarmos na definição de fração unitária, não é difícil convencer-se que  $1:5 = \frac{1}{5}$ ; no entanto, a definição de fração não unitária não remete à divisão e sim à adição (juntar) de  $\frac{1}{5}$  com  $\frac{1}{5}$ , por isso, no nosso ponto de vista, a igualdade  $2:5 = \frac{2}{5}$  (Figura 18 - remeter à imagem do C8) merece uma explicação maior.

Figura 19 – Exemplo do Capítulo 1 da Unidade 4

Os números  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{5}$  são exemplos de **números racionais positivos** escritos na forma de fração. Convém lembrar:

$$\bullet \frac{1}{2} = 1 : 2 \qquad \bullet \frac{1}{5} = 1 : 5$$

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.100

Destacamos também nesta observação que, no segundo tópico, fica subentendido que a divisão corresponde ao segundo traço de fração (e não ao primeiro ou ao terceiro). Nota-se que o traço entre as duas frações é sutilmente maior que os outros dois, mas não há qualquer menção a isso, nem no Livro do Aluno e nem no Manual do Professor, por esse motivo, entendemos que os autores perdem a oportunidade de explanar sobre essa notação, principalmente porque ela será trabalhada mais adiante na coleção (Atividade 7).

O quarto exemplo envolvendo divisão de frações aborda as divisões  $(-\frac{2}{5}) \div (+\frac{2}{5})$  e  $(+\frac{10}{9}) \div (-\frac{5}{3})$  (Figura 20), para as quais já é ressaltado “essas divisões podem ser representadas pela multiplicação do primeiro número pelo inverso do segundo” (p.113), deixando implícita a legitimação do algoritmo em um caso ainda não abordado (divisão de fração por fração com quociente não inteiro). Ou seja, aplica-se uma regra que está sendo

simplesmente “herdada” dos casos tratados nos exemplos anteriores, sem qualquer alerta a estudantes e a docentes, o que vai contra o pensamento matemático (ver seção 4.1 deste trabalho).

Figura 20 – Quarto exemplo de divisão de frações

4 Obter o resultado das divisões:

$$\text{a) } -\frac{2}{5} : \left(+\frac{2}{5}\right) \qquad \text{b) } \left(+\frac{10}{9}\right) : \left(-\frac{5}{3}\right)$$

Como os números racionais estão na forma de fração, essas divisões podem ser representadas pela multiplicação do primeiro número pelo inverso do segundo.

$$\text{a) } -\frac{2}{5} : \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5} \cdot \left(+\frac{5}{2}\right) = -1$$

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é negativo.

$$\text{b) } \left(+\frac{10}{9}\right) : \left(-\frac{5}{3}\right) = \left(+\frac{10}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \left(+\frac{\cancel{10}}{\cancel{9}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\right) = -\frac{2}{3}$$

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é negativo.

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.113

Como não são apresentados objetivos para esse exemplo (critério MP3), supomos que o item a) busca retomar a multiplicação de frações inversas apresentada no Pense e Responda do início do capítulo (Figura 8).

Finalizando os exemplos de divisão de frações apresentados nesta seção, o quinto exemplo aborda uma expressão aritmética envolvendo sinais, representação decimal e representação fracionária (Figura 21).

Figura 21 – Quinto exemplo de divisão de frações

5 Determine o valor da expressão:  $(-6) \cdot (+0,375) - \left(+\frac{8}{7}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right)$ .

$$(-6) \cdot (+0,375) - \left(+\frac{8}{7}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right) = (-6) \cdot (+0,375) - \left(+\frac{\cancel{8}}{\cancel{7}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{7}}{\cancel{2}}\right) =$$

$$= (-2,25) - (-4) = -2,25 + 4 = +1,75$$

O valor da expressão é +1,75.

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.113

No Manual do Professor não é apresentado o objetivo deste exemplo (critério MP3); percebe-se que está sendo proposta uma expressão que contempla conteúdos trabalhados anteriormente neste volume da coleção, e sua resolução é feita de forma mecanizada. No

entanto, chama-nos a atenção de que a divisão de frações envolvida  $(+\frac{8}{7}) \div (-\frac{2}{7})$  tem como resposta um número inteiro, sendo assim evitada a problemática de afinal ter-se que realizar uma operação entre um número em representação decimal e outro em representação fracionária. Perde-se aí uma oportunidade de discutir de retomar a transformação de uma representação em outra (decimal para fracionária ou fracionária para decimal), tema abordado na seção “A reta numérica” do Capítulo 1 (102-103).

O Quadro 4 explicita os casos de divisão de frações explorados na Seção 2 do Capítulo 4 que são contemplados nos exemplos.

Quadro 4 – Distribuição dos exemplos segundo os casos de divisão de frações

Caso de Divisão de frações	Exemplo que contemplou cada caso
divisão entre números naturais com quociente natural (retomada)	
divisão entre números naturais com quociente não inteiro	
divisão de uma fração por um número natural	Exemplo 1 $(\frac{3}{5} \div 2)$ , com o significado de equipartição)
divisão de um número natural por uma fração	Exemplo 2 $(4 \div \frac{2}{5})$
divisão de fração por fração com quociente inteiro	Exemplo 3 $(\frac{2}{3} \div \frac{1}{6})$ Exemplo 4a $((-\frac{2}{5}) \div (+\frac{2}{5}))$ , cálculo com frações iguais Exemplo 5 (cálculo de uma expressão aritmética)
divisão de fração por fração com quociente não inteiro	Exemplo 4b (cálculo) $(+\frac{10}{9}) \div (-\frac{5}{3})$

Fonte: Acervo da autora

O Quadro 4 evidencia que:

- i) os três primeiros casos, únicos casos para os quais é possível contemplar ambos os significados equipartição e medida, ou não foram abordados nos exemplos mencionados no Capítulo 4 no Livro do Aluno (primeira e segunda linha) ou não contemplaram medida (terceira linha) (critério C9);
- ii) não houve preocupação, por parte dos autores, em abordar todos os casos da divisão de frações (critério C8) na seção “Divisão com números racionais na forma de fração”.

Ressaltamos que não foi retomado o caso de divisão entre números naturais com quociente inteiro, o que consideraríamos adequado para oportunizar os significados de equipartição e de medida (critério C5), ainda que o consideremos contemplado com os Exemplos 1 e 2, como já comentado anteriormente).

Assim, consideramos não abordados os seguintes casos: divisão entre números naturais com quociente natural (a título de retomada) e divisão de fração por número natural com o significado de medida. E não foram contextualizados os casos divisão de fração por fração com quociente inteiro e divisão de fração por fração com quociente não inteiro, que são, no nosso ponto de vista, os mais complexos (critério C8). Defendemos que estes casos deveriam estar contidos nos exemplos de forma contextualizada (critério E1), e destacamos que, no Capítulo 6 deste trabalho, retomamos este ponto, mencionando uma situação elaborada pela autora deste trabalho e que foi apresentada na Oficina destinada a docentes da Educação Básica.

Neste momento faremos uma breve ressalva sobre o destaque intitulado “nós” (figura 22), que é apresentado na sequência do Capítulo 4 - “Divisão com Números Racionais”, por considerarmos que nesta seção (conforme foi inserida), pode estar ocorrendo uma falta de conexão entre o texto e a divisão de números racionais.

Figura 22 – Destaque intitulado “Nós” do Capítulo Divisão com Números Racionais

**NÓS**

**Carona**

Poluição e trânsito são dois problemas sérios encontrados nas grandes metrópoles. Além dos danos provocados à natureza, os carros causam estresse à população devido a alguns fatores, como o trânsito, gastos com combustível e manutenção do veículo.

É preciso encontrar maneiras de economizar e minimizar o estresse e os prejuízos ambientais. Por exemplo, pode-se usar o sistema de carona entre vizinhos que possuem filhos na mesma escola fazendo revezamento para que cada responsável leve as crianças em um dia da semana diferente.

Hoje em dia há diversas iniciativas, como é o caso de alguns aplicativos gratuitos, que visam divulgar a **carona solidária**, que tem o objetivo de promover a interação social, a inovação tecnológica e a sustentabilidade. O sistema desses aplicativos funciona por geolocalização e permite a conexão entre quem quer pegar e quem está ofertando a carona.

Informações obtidas em: <<https://www12.senado.leg.br/institucional/programas/senado-verde/eixos-tematicos/qualidade-de-vida/mobilidade-urbana-1/carona-solidaria>>. Acesso em: 10 out. 2018.

- Na sua opinião, quais são as vantagens do sistema de carona para ir à escola? Você conhece alguém que oferece carona? **Respostas pessoais.**

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.114

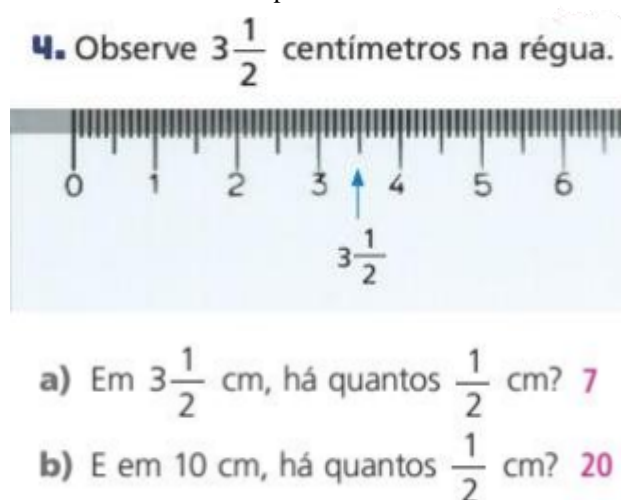
Salientamos que as Orientações Didáticas apresentadas no Manual do Professor, sugerem uma apresentação desse texto de forma a promover um debate sobre o uso de

caronas, mas não apresenta seu objetivo e tampouco a relação entre o destaque e o conteúdo do qual trata o capítulo. Sendo assim, consideramos tal destaque está desviando a atenção (de estudantes e de docentes) em um momento tão delicado da aprendizagem como é a divisão de frações.

O Capítulo 4 é finalizado com a seção “Atividades”, na qual são propostas 16 atividades e dois desafios, todos contemplando o conteúdo de Divisão com números racionais (na forma decimal ou na forma fracionária) e cujo objetivo, explicitado no Manual do Professor, é “exercitar os cálculos de divisão em situações variadas e aplicar esses conhecimentos na resolução de problemas e de expressões numéricas.” (p.114). Destas 16 atividades, 10 contemplam a divisão de frações (Atividades 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8a, 8d, 9, 13b, 15a e 15c) e, dos dois desafios, apenas o primeiro deles (atividade 17) envolve divisão de frações.

Destacamos que das 10 atividades que envolvem divisão de frações e o desafio, apenas as Atividades 2 e 4 estão apoiadas em imagens, uma associada a equipartição e a outra associada a medida (critérios Im2 e Im3), sendo a reta numérica a imagem utilizada na Atividade 4 (Figura 23), o que consideramos adequado para o desenvolvimento da questão. No Manual do Professor é sugerido “Incentivar os alunos a fazer representações geométricas de frações para resolver os problemas ou para verificar a correção do resultado obtido.” (p.114) (critérios MP2 e A7).

Figura 23 – Atividade 4 do Capítulo Divisão com Números Racionais



Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.114

Chamou nossa atenção, que nesta atividade, o item a) pode ser resolvido exclusivamente amparado na imagem, porém o item b) não. Apesar de não ser apresentada essa sugestão no Manual do Professor, entendemos que, com o item b), está-se estimulando a

resolução por meio de cálculos, ainda que sejam viáveis outras estratégias, como, por exemplo, imaginar a continuidade da régua.

Das 10 atividades que envolvem divisão de frações e o desafio, apenas quatro (Atividades 4b, 5, 9, 17) são contextualizadas (critérios A1, A2 e A3), sendo, na grande maioria, plausíveis para estudantes (ver comentário à Atividade 9), mas avaliamos que a porcentagem de atividades contextualizadas poderia ser maior (Critério A1 e A2).

As atividades 3, 6, 7, 8a, 13b, 15a e 15c são do tipo exercícios de fixação (critério A1), por envolverem apenas cálculos. No entanto consideramos enriquecedor para o aprendizado o uso de imagens, sempre que viável, para confirmar o resultado obtido pela aplicação do algoritmo “dividir é multiplicar pelo inverso”, sugestão não apresentada no Manual do Professor.

O Quadro 5 explicita os casos de divisão de frações contemplados nas atividades propostas ao final do Capítulo 4 desta coleção.

Quadro 5 – Distribuição das atividades segundo os casos de divisão de frações

Casos de Divisão de frações	Atividade que contemplou cada caso
divisão entre números naturais com quociente natural (retomada)	
divisão entre números naturais com quociente não inteiro	
divisão de uma fração por um número natural	Atividade 2 (apoiada em imagem, com o significado de equipartição); Atividade 3b (cálculo); Atividade 15c (cálculo); Desafio, com o significado de equipartição.
divisão de um número natural por uma fração	Atividade 3a (cálculo); Atividade 3c (cálculo);
divisão de fração por fração com quociente inteiro	Atividade 4a; Atividade 4b; Atividade 5; Atividade 9.
divisão de fração por fração com quociente não inteiro	Atividade 6a (cálculo); Atividade 6b (cálculo); Atividade 7 (cálculo praticando a observação - figura 18); Atividade 8a (cálculo); Atividade 13b (cálculo); Atividade 15a (cálculo).

Fonte: Acervo da autora

O Quadro 5 evidencia que:

- i) Não foi contemplado o caso de divisão entre números naturais com quociente não inteiro - o que também aconteceu nos exemplos apresentados neste capítulo (critérios C8 e A8).
- ii) Destacamos também que o caso de divisão de fração por fração com quociente não inteiro não foi abordado de forma contextualizada entre os exemplos; o mesmo aconteceu com as Atividades.
- iii) Divisão de uma fração por um número natural é o único caso de divisão envolvendo frações que pode contemplar tanto o significado de equipartição como o significado de medida. No entanto, nenhuma atividade contemplando medida, neste caso, foi proposta (critério A9). O mesmo aconteceu com os exemplos.

Fazemos, a seguir, alguns comentários pontuais relativos a atividades específicas:

A Atividade 2 envolve a representação pictórica de uma equipartição de uma fração, o que consideramos um ponto positivo, pois ajuda estudantes na visualização e compreensão de uma divisão envolvendo frações. No entanto, avaliamos que, da forma como foi apresentada a imagem, pouco raciocínio sobrou para ser protagonizado pela(o) aluna(o), já que a imagem praticamente resolve a divisão. Nossa sugestão seria limitar a imagem exclusivamente ao que é dito no enunciado (Figura 24).

Figura 24 – Sugestão de imagem para a Atividade 2



Fonte: Acervo da autora

A Atividade 5 (Figura 25) oportuniza a equivalência e a definição de fração não unitária. Portanto, seria propício que no Manual do Professor essa resolução alternativa fosse sugerida, além da resolução por meio do algoritmo. Além disso, perde-se aqui a oportunidade de aproveitar o contexto e incluir-se um item que oportunize uma resposta não inteira, contemplando assim o caso divisão de fração por fração com quociente não inteiro em uma situação contextualizada.



Figura 25 – Atividade 5 do Capítulo Divisão com Números Racionais

**5.** Em um copo cabe  $\frac{1}{6}$  de litro de água.  
 Quantos desses copos são necessários  
 para encher uma jarra com capacidade  
 para  $\frac{2}{3}$  de litro? **4 copos.**

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.114

A Atividade 6, envolve, em ambos os itens, o caso de divisão de fração por fração com quociente não inteiro (Figura 26), sendo nela solicitado apenas o cálculo, mesmo quando a utilização do algoritmo não tenha sido abordada no Livro do Aluno. Reforçamos que trata-se aqui de um dos casos mais complexos de divisão de frações. Mesmo comentário cabe para as Atividades 7, 8 e 15a.

Figura 26 – Atividade 6 do Capítulo Divisão com Números Racionais

**6.** Determine o valor de cada expressão numérica.

a)  $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} + \frac{1}{2}$   **$\frac{4}{3}$**       b)  $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} : \frac{5}{4}$   
**Zero.**

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.114

Consideramos que a Atividade 7 (Figura 27) enfatiza em excesso a Observação apresentada na Figura 18, tendo em vista, como já apontado, que tal observação não foi suficientemente esclarecida.

Figura 27 – Atividade 7 do Capítulo Divisão com Números Racionais

**7.** Calcule:

a)  $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}}$   **$\frac{7}{6}$**       b)  $\frac{\frac{4}{1}}{\frac{5}{1}}$   **$\frac{4}{5}$**       c)  $\frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{9}}$   **$\frac{15}{4}$**       d)  $\frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{3}}$   **$\frac{21}{8}$**

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.114

A Atividade 8 (Figura 28) tem como enunciado: “Descubra o erro em alguns resultados e corrija-os”. Entendemos que a questão poderia ser melhor conduzida se fosse apresentada a resolução de cada item. De fato, apenas foi apresentada, para cada item, uma resposta errada e não o seu desenvolvimento. Cabe ressaltar que não é possível estabelecer qual o raciocínio empregado na resolução de uma questão quando só sua resposta é apresentada. Salientamos que, se tivesse sido apresentado o desenvolvimento, cada estudante

poderia avaliar qual o erro cometido e assim decidir qual seria a melhor estratégia para corrigir a questão. Resta-lhes, da forma que está proposta a atividade, apenas realizar o cálculo e descobrir que a resposta está errada, fazendo com que o enunciado perca a sua potência, ainda que as divisões tenham sido bem escolhidas: no item a) dividendo e divisor remetem a frações inversas (em valor absoluto) e o item d) envolve termos em representações diferentes (decimal e fracionária).

Figura 28 – Atividade 8 do Capítulo Divisão com Números Racionais

**8. Descubra o erro em alguns resultados e corrija-os.**

a)  $\left(-\frac{4}{6}\right) : \left(-\frac{6}{4}\right) = 1 \frac{4}{9}$

b)  $(+0,12) + (-0,08) - (-0,7) = 0,8$  **0,74**

c)  $(-1,4) \cdot (+0,2) = 0,28$  **-0,28**

d)  $\left(+\frac{8}{4}\right) : (0,5) = \frac{8}{2,4}$  **4**

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.114-115

A Atividade 9 (Figura 29) apresenta uma situação envolvendo uma fração mista (escrita recorrente nesta Unidade). No entanto, ela aparece em uma contextualização forçada, pois não é comum representar-se comprimento na forma fracionária (critério A2). Consideramos que seria mais produtivo escrever em palavras “5 metros e meio”, deixando a estudantes a decisão sobre a representação a ser utilizada.

Figura 29 – Atividade 9 do Capítulo Divisão com Números Racionais

**9. Dona Bete tem  $5\frac{1}{2}$  metros de tecido para fazer aventais. Ela gasta  $\frac{1}{2}$  metro de tecido em cada avental. Quantos aventais conseguirá fazer com a quantidade de tecido que possui? **11 aventais.****

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.115

A Atividade 13b (Figura 30) requer a retomada da transformação da representação decimal para a representação fracionária, o que consideramos positivo.

Figura 30 – Atividade 13 do Capítulo Divisão com Números Racionais

**13. Calcule o valor da expressão**  
 $2 - (+0,8) : (+0,5)$ , na forma:  
 a) decimal; **+0,4**      b) fracionária.  **$+\frac{2}{5}$**

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.115

A Atividade 15 (Figura 31) envolve apenas expressões aritméticas. No Manual do Professor é sugerido “Retomar a ordem que as operações são resolvidas em uma expressão numérica, caso julgar necessário.” (p.114) (critério MP2).

Figura 31 – Atividade 15 do Capítulo Divisão com Números Racionais

**15. Determine o valor das expressões numéricas:**

a)  $\left(-\frac{4}{5}\right) : \left(+\frac{8}{5}\right) - (+2) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$  **+2**

b)  $(-1,44) : (-2,4) + (+0,18) : (-1,2)$  **+0,45**

c)  $\left(+\frac{8}{5}\right) : (-4) - 6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$   **$+\frac{11}{10}$**

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.115

Por fim, comentamos a atividade 17, (Figura 32), que é um dos desafios propostos no Livro do Aluno, em que trata de uma situação contextualizada envolvendo as representações fracionária e decimal, bem como faz uso da língua materna para referir-se à metade (critério A7). Consideramos que o desafio apresenta uma abordagem que pode desenvolver o pensamento matemático de estudantes e, por envolver as operações de divisão, subtração e multiplicação de frações em uma mesma situação-problema (critério A3), pode ser considerada matematicamente complexa.

Figura 32 – Atividade 17 do Capítulo Divisão com Números Racionais

**17. Marcos gasta  $\frac{3}{7}$  do salário para pagar a prestação da casa. Com a metade do que sobra ele paga a prestação do carro e ainda fica com R\$ 376,00. Qual o salário de Marcos? **R\$ 1 316,00****

Fonte: Giovanni Junior; Castrucci, 2018, p.115

Após a apresentação das Atividades relacionadas a divisão de racionais na forma fracionária, consideramos que:

i) não é possível afirmar que as atividades propostas são apresentadas em uma ordem

crescente de complexidade, uma vez que elas intercalam o caso divisão de fração por fração com quociente não inteiro (critério A4);

ii) as Atividades 2, 4, 5, 7, 8d, 9 e 13b exigem a troca de representação decimal para a fracionária, portanto requerem a conversão de registros (critério A7);

iii) as Atividades 2 e 4b e o Desafio (atividade 17) estimulam o desenvolvimento do pensamento matemático de estudantes (critério A6);

iv) não foram propostas atividades que estimulam a elaboração de problemas como recomenda reiteradamente a BNCC (Critério A5) e que ajudam estudantes a desenvolver seu raciocínio lógico e a criatividade. De fato, se estudantes questionassem quantas vezes  $\frac{1}{5}$  cabe em  $\frac{3}{4}$ , perceberiam que os exemplos mencionados não trazem ideias suficientes para resolver esta questão. Por isso, consideramos ter sido atendida apenas parcialmente a habilidade EF07MA12 (Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais) da BNCC (Ver 3.1.1 e critério C4).

v) também foi apenas parcialmente atendida a Habilidade EF07MA11 (Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias) porque as propriedades operatórias (o algoritmo, por exemplo) não são apresentadas no Livro do Aluno de forma a realmente promover a compreensão por estudantes. (critério C4)

Ao observarmos os Capítulos 1 a 3 da unidade 4 já foi possível constatar a falta de ênfase no desenvolvimento do pensamento matemático de estudantes, o que se repetiu no Capítulo 4 - Divisão com Números Racionais, quando se evidenciou que o algoritmo “dividir é o mesmo que multiplicar pela fração inversa” para a divisão de frações não é demonstrado no Livro do Aluno (nem no Manual do Professor).

O texto apresentado no Capítulo 4 tem encadeamento lógico (critério C2); ao longo desse capítulo, não foi encontrada nenhuma incorreção matemática (critério C3), com exceção de um certo equívoco em relação à definição de fração inversa: apesar de considerarmos positivo que ocorreu uma preparação para a divisão de frações, com uma atividade que envolve frações inversas (ver Figura 8), enfatizamos que no Manual do Professor é evidenciado uma falta de cuidado com os termos “número racional” e “representante do número racional (fração)”, ao mencionar que está sendo desenvolvida a noção de número inverso, enquanto no Livro do Aluno é apresentada uma definição de fração inversa na nossa

opinião equivocada.

As eventuais imagens que ilustram divisão de frações no capítulo alternam os significados de equipartição e de medida: exemplo 1 e Atividade 2 para equipartição e exemplos 2 e 3 e Atividade 4 para medida (critério Im3). São utilizadas ao longo do capítulo representações variadas (critério C7). O tratamento utilizado nos exemplos varia (em palavras, por imagem autoexplicativa, linguagem simbólica (critério C12), e os três primeiros exemplos e as Atividades 2 e 4 exploram a conversão de registros (critério C13).

No que diz respeito ao Manual do Professor, ainda que a linguagem esteja compreensível para professores (critério MP1), consideramos insuficiente o número de abordagens sugeridas relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem sobre divisão (critério MP2). Os objetivos das atividades não estão presentes no Manual do Professor (critério MP3). São apresentadas algumas propostas alternativas de atividades (a mais significativa, em termos de conteúdo, é a que complementa o exemplo 1 (Figura 13), porém nenhuma sugestão ou esclarecimento a docentes sobre argumentação ou demonstração é apresentada (critério MP4).

Encerramos este capítulo com o Quadro 6, considerado por nós como um quadro resumo relativo aos critérios do Quadro 3 (ver 4.2) aplicados à Unidade 4 do livro do 7º ano da Coleção A conquista da Matemática. Relembramos que os critérios estão subdivididos nas categorias Conteúdo (C), Linguagem (L), Imagens (Im), Exemplos (E), Atividades (A) e Manual do Professor (MP). Optamos por atribuir com “sim” exclusivamente os critérios que avaliamos como totalmente atingidos. Desta forma, os critérios não atingidos ou aqueles considerados parcialmente atingidos (por entendemos que não foram suficientemente abordados) receberam “não” como resposta.

Quadro 6 – Critérios contemplados pela coleção A Conquista da matemática

<b>Critérios gerais para um conteúdo sob análise</b>	<b>O critério foi contemplado?</b>
<b>C1)</b> Ocorre uma retomada dos conteúdos prévios necessários antes da introdução do conteúdo?	<b>não</b>
<b>C2)</b> O conteúdo está organizado com encadeamento lógico?	<b>sim</b>
<b>C3)</b> O conteúdo está matematicamente correto?	<b>sim</b>
<b>C4)</b> O conteúdo contempla as correspondentes habilidades da BNCC?	<b>não</b>

<b>L1)</b> O conteúdo é desenvolvido no Livro do Aluno em uma linguagem compreensível para estudantes?	<b>não</b>
<b>Im1)</b> As imagens apresentadas estão relacionadas com o texto e auxiliam estudantes no entendimento do conteúdo?	<b>sim</b>
<b>E1)</b> Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados?	<b>não</b>
<b>E2)</b> Os exemplos que foram considerados contextualizados trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?	<b>sim</b>
<b>A1)</b> As atividades propostas são, em grande parte, contextualizadas?	<b>não</b>
<b>A2)</b> As atividades que foram consideradas contextualizadas trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?	<b>sim</b>
<b>A3)</b> São propostas, efetivamente, situações-problema?	<b>sim</b>
<b>A4)</b> As atividades propostas são apresentadas em uma ordem crescente de complexidade, ou seja, partem de atividades mais simples até as matematicamente mais complexas?	<b>não</b>
<b>A5)</b> Existem atividades que estimulam estudantes a elaborar problemas?	<b>não</b>
<b>A6)</b> Existem atividades que estimulam o desenvolvimento do pensamento matemático?	<b>sim</b>
<b>A7)</b> Existem atividades que exploram a conversão de registros (Duval) em uma mesma atividade?	<b>sim</b>
<b>MP1)</b> A linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível para professores?	<b>sim</b>
<b>MP2)</b> São sugeridas regularmente abordagens para professores especialmente relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem desse conteúdo?	<b>não</b>
<b>MP3)</b> São explicitados os objetivos de cada atividade proposta?	<b>não</b>
<b>MP4)</b> São apresentadas alternativas de aprofundamento do conteúdo, para estudantes ou para professores, que estimulem a argumentação e a demonstração (ou, pelo menos, são apresentadas referências)?	<b>não</b>

<b>Critérios específicos para a divisão de frações</b>	<b>O critério foi contemplado?</b>
<b>C5)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma os significados de equipartição e de medida da divisão, ainda que sem mencioná-los explicitamente no Livro do Aluno?	<b>sim</b>
<b>C6)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma o conceito de frações equivalentes?	<b>não</b>
<b>C7)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações faz uso de representações variadas na abordagem do tema?	<b>sim</b>
<b>C8)</b> São abordados todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?	<b>não</b>
<b>C9)</b> São abordados, em cada caso de divisão de frações, os significados de equipartição e de medida, sempre que cabível?	<b>não</b>
<b>C10)</b> A abordagem do tema divisão de frações inclui o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?	<b>sim</b>
<b>C11)</b> É justificado o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?	<b>não</b>
<b>C12)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações varia o tipo de registro no qual é realizado o tratamento?	<b>sim</b>
<b>C13)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações explora a conversão de registros?	<b>sim</b>
<b>Im2)</b> São apresentadas imagens que ilustram uma divisão de frações?	<b>sim</b>
<b>Im3)</b> As eventuais imagens que ilustram divisão de frações alternam os significados de equipartição e de medida?	<b>sim</b>
<b>A8)</b> As atividades contemplam todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?	<b>não</b>
<b>A9)</b> As atividades contemplam diferentes significados da divisão?	<b>sim</b>

Fonte: Acervo da autora

No Guia Digital do PNLD/2020, são incluídas resenhas com informações sobre cada uma das coleções aprovadas no Edital do PNLD/2020. Sendo assim, finalizamos a descrição comentada da Unidade 4 - O Conjunto dos Números Racionais, do volume do 7º ano da

coleção A conquista da matemática destacando que concordamos com grande parte do texto apresentado na resenha<sup>21</sup> dessa coleção. Mas, com relação ao conteúdo específico divisão de frações, não concordamos com a frase “traz orientações específicas em cada página para auxiliar no processo de ensino”, apresentada na resenha e que se refere às orientações didáticas contidas no Manual do Professor. De fato, como descrito anteriormente nesta seção, avaliamos como em número insuficiente as informações que auxiliam docentes, principalmente sobre as sugestões de abordagem relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem do conteúdo (critério MP2).

Retomamos o comentário sobre o Guia Digital do PNLD/2020 que fizemos ao final da seção 3.2.2 sobre sentirmos falta de um detalhamento maior relativo à passagem de uma divisão euclidiana no universo dos números naturais para a operação de divisão no universo dos números racionais, ressaltando, que de fato, na coleção analisada, esta questão não é comentada no Livro do Aluno nem no Manual do Professor.

### **5.2.2 - Coleção 2 - Teláris matemática**

No volume de 7º ano da coleção Teláris matemática, no Capítulo 2 intitulado “Revido e aprofundando múltiplos, divisores e frações”, o autor apresenta a Unidade 2 - Frações (p.57), reproduzida na íntegra no Anexo B deste trabalho. O Manual do Professor ressalta, na primeira página desta unidade, as principais habilidades da BNCC que contemplam tal conteúdo, bem como menciona que “Neste momento, retomaremos conceitos de frações já trabalhados no 6º ano” (p.57) e, no Livro do Aluno, é ressaltado que “No próximo capítulo vamos estudar os números positivos e negativos que podem ser escritos na forma de fração, chamados números racionais. Assim, vamos recordar agora algumas ideias associadas às frações” (p.57) sendo apresentadas subseções que remetem ao tópico mencionado. A primeira seção é “Retomando as ideias de frações”: Fração como parte/todo; Fração como quociente; Fração como operador (ou fração de uma quantidade); Fração como razão ou comparação de grandezas. A segunda seção: “Frações equivalentes e simplificação de frações” retoma o conceito de frações equivalentes, com boa orientação para docentes e imagens adequadas como apoio ao texto (critério C6), e retoma a simplificação de frações. Na terceira seção “Comparação de frações” são apresentadas situações de comparação de frações

---

<sup>21</sup> A resenha completa da coleção A conquista da matemática está disponível em: [https://pnld.nees.ufal.br/pnld\\_2020/componente-curricular/pnld2020-matematica](https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2020/componente-curricular/pnld2020-matematica)



com denominadores iguais e com denominadores diferentes. Todas as seções são finalizadas com blocos de atividades, inclusive envolvendo equivalência. Chamamos a atenção para a Atividade 75, que prepara para um dos casos de divisão de frações (Figura 33).

Figura 33 – Atividade 75 envolvendo frações equivalentes

**75 ▶** No caderno, descubra 2 frações de mesmo denominador, sendo a primeira equivalente a  $\frac{5}{6}$  e a segunda equivalente a  $\frac{2}{9}$ .

**75.** Exemplos de resposta:  $\frac{15}{18}$  e  $\frac{4}{18}$ ;  $\frac{30}{36}$  e  $\frac{8}{36}$ .  $\left(\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \dots; \frac{2}{9} = \frac{4}{18} = \frac{6}{27} = \dots\right)$

Fonte: Dante, 2018, p.62

E, então, é iniciada, no Livro do Aluno, a quarta seção “Operações com frações” com a frase “No volume anterior, você já estudou algumas operações com frações. Vamos agora retomar e aprofundar esse estudo.” (p.65) e essa menção é confirmada no Manual do Professor “Neste momento, retomaremos as explorações sobre as operações com frações vistas no 6º ano e ampliaremos o assunto até multiplicação e divisão de frações” (p.65). Essa retomada se inicia com situações envolvendo adição e subtração de frações, inicialmente de mesmo denominador e posteriormente de denominadores diferentes, ora contextualizadas, ora apoiadas em imagens. Chamou positivamente nossa atenção, neste momento, a ênfase dada a frações equivalentes, tanto no Manual do Professor com a frase “Como os denominadores são diferentes, precisamos determinar frações equivalentes a essas, que tenham denominadores iguais, para prosseguir com a subtração.”(p.65) como no Livro do Aluno (Figura 34).

Figura 34 – Situação envolvendo subtração de frações

### Com denominadores diferentes

A mãe de Maria tinha aproximadamente  $\frac{7}{8}$  de um queijo e usou aproximadamente  $\frac{1}{6}$  do queijo para fazer uma torta. Qual fração do queijo restou?

Para encontrar a resposta para esse problema, precisamos subtrair a quantidade de queijo usada da quantidade que a mãe de Maria tinha.

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{6}$$

Como os denominadores são diferentes, precisamos determinar frações equivalentes a essas, que tenham denominadores iguais, para prosseguir com a subtração. Veja 2 maneiras diferentes de fazer isso.

Fonte: Dante, 2018, p.65

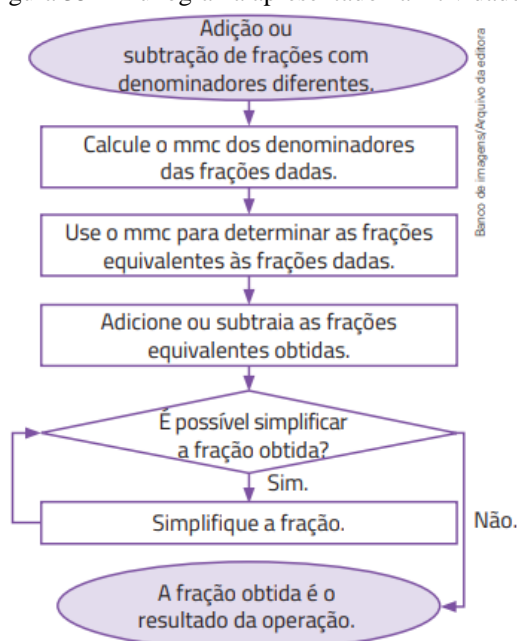


Queijo.

Para a atividade mencionada na Figura 34, são apresentadas duas maneiras de resolução, ambas fazendo uso de frações equivalentes; a primeira utilizando-se como

denominador comum o produto dos denominadores das frações envolvidas e a segunda maneira utilizando-se o mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores, abordando de forma adequada a questão do mmc apontada por Souza (2019); no entanto, no bloco de atividades ao final da Adição e subtração de frações, é oferecido a estudantes, na atividade 89, p.66, um esquema que sugere como único caminho para que a atividade seja resolvida, o uso do mmc (Figura 35).

Figura 35 – Fluxograma apresentado na Atividade 89



Use esse fluxograma para efetuar as operações dadas e registre o resultado no caderno.

a)  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$       b)  $\frac{15}{12} - \frac{1}{4}$       c)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

Fonte: Dante, 2018, p.66

O próximo tópico da seção “Operações com frações” introduz a multiplicação, sendo apresentada uma situação contextualizada querendo-se calcular  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$  de um terreno (Figura 36).

Figura 36 – Exemplo de multiplicação de frações

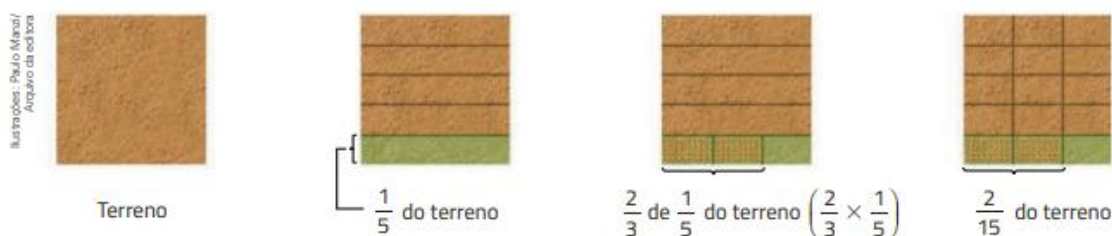
## Multiplicação de frações

Anastácio tem um terreno. Ele quer usar  $\frac{1}{5}$  desse terreno para plantar flores e quer que  $\frac{2}{3}$  da parte com flores tenham rosas. Qual parte do terreno deverá ser plantada com rosas?

Podemos dizer que o dobro de 5 é o mesmo que  $2 \times 5$ . Analogamente,  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$  é o mesmo que  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$



Devemos calcular  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$  do terreno, ou seja,  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ .



As figuras mostram que  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$ , ou seja,  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ , é o mesmo que  $\frac{2}{15}$ .

Logo,  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$  e Anastácio deve plantar rosas em  $\frac{2}{15}$  do terreno.

Também podemos escrever:  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2 \times 1}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$ .

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Fonte: Dante, 2018, p.67

A resolução é apoiada em imagens, e a introdução da operação de multiplicação é sugerida por um balão de fala: “Podemos dizer que o dobro de 5 é o mesmo que  $2 \times 5$ . Analogamente,  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$  é o mesmo que  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ .” Consideramos que as imagens apresentadas na resolução auxiliam o entendimento do texto, e ainda, são apresentadas de forma a auxiliar na compreensão da multiplicação de frações (conforme defendido por Fischer 2020). No entanto, a utilização de uma fração unitária, como um dos fatores, pode não deixar evidente o produto entre os numeradores (“Também podemos escrever  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2 \times 1}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$ ” p.67), dificultando assim a apresentação do algoritmo.

O Manual do Professor traz a consideração de que” Como provavelmente é a primeira vez que os alunos veem multiplicações de frações, seria interessante propor a eles algumas explorações que permitam reflexões sobre essa operação com frações” (p.67), o que consideramos positivo, e sugere que docentes proponham uma atividade utilizando folha de papel a fim de que estudantes, por meio de dobraduras, criem hipóteses de como proceder para multiplicar frações (Figura 37). No entanto, consideramos inadequada a pergunta “qual operação estamos efetuando?”, por considerarmos que não é a partir do cálculo de  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{4}$  que estudantes irão desconfiar que estão ampliando a multiplicação de naturais para as frações.

Figura 37 – Atividade ampliando a multiplicação de frações (Manual do Professor)

**2 Frações**  
**Multiplicação de frações**

Como provavelmente é a primeira vez que os alunos veem multiplicações de frações, seria interessante propor a eles algumas explorações que permitam reflexões sobre essa operação com frações.

Inicialmente, entregue-lhes uma folha de papel e peça que dobrem a folha ao meio e, em seguida, que dobrem-na ao meio novamente, dividindo a folha em 4 partes iguais. Peça que riscuem as marcações da folha, utilizando lápis e régua, e pergunte a eles quanto cada parte

representa em relação ao todo da folha. Espera-se que respondam que cada parte representa  $\frac{1}{4}$  da folha. Agora, questione: “E se quiséssemos a metade de  $\frac{1}{4}$  da folha?”; “Quanto seria isso?”. Espera-se que eles respondam que seria  $\frac{1}{8}$ . Então, junto com os alunos, escreva essa situação na lousa usando frações ( $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ) e pergunte qual operação estamos efetuando. Se necessário, peça para efetuarem o dobro de 4, escrevendo essa operação na lousa e destacando a preposição **de**. Destaque que usamos a mesma palavra nos

2 casos, ou seja, efetuamos a mesma operação, a multiplicação. Sugira aos alunos que criem hipóteses de como proceder para multiplicar frações e anote-as na lousa. Avise que, após resolvermos a situação dada no livro, verificaremos essas hipóteses.


Fonte: Dante, 2018, p.67

Em seguida, são apresentadas duas observações que trazem regras não exploradas, e sim apenas informadas, no Livro do Aluno, a primeira sobre multiplicação tendo um fator número natural e a segunda sobre simplificação. A seguir é apresentado o tópico intitulado “Frações inversas” iniciado pelo destaque com a definição de fração inversa: “A **inversa de uma fração** diferente de zero é a fração que se obtém invertendo o numerador com o denominador da fração dada” (p.67), seguido de um exemplo, que diz: “a inversa de  $\frac{3}{4}$  é  $\frac{4}{3}$  e a inversa de  $\frac{2}{5}$  é  $\frac{5}{2}$ ” (p.67). Ressaltamos que seria plausível incluir um exemplo que apresentasse um número natural (como por exemplo, a fração inversa de 2 é  $\frac{1}{2}$ ), ainda que número natural tenha sido transformado em fração na primeira observação.

O Manual do Professor traz, como orientações didáticas relativas a esse conteúdo, um questionamento: “Pergunte aos alunos se sabem o que é a inversa de uma fração, destacando que a inversa não é o mesmo que a oposta.” (p.66). Consideramos positiva esta orientação, visto que, no primeiro momento, estudantes podem se confundir com as nomenclaturas apresentadas, e as(os) docentes terão a oportunidade de esclarecer as dúvidas que podem surgir.

Na sequência, é apresentada uma atividade intitulada “Explorar e descobrir” (p.68) na qual solicita-se que estudantes determinem o produto de algumas frações pela sua fração inversa, buscando, com essa atividade, que concluam que o produto de uma fração pela fração inversa dela é sempre igual a 1, afirmação colocada em destaque a seguir (Figura 38).

Figura 38 – Propriedade das frações inversas

Explorar e descobrir  Não escreva no livro!

1▶ Determine no caderno o produto de cada fração pela fração inversa dela.

a)  $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = \frac{14}{14} = 1$       b)  $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$       c)  $\frac{6}{7} \times \frac{7}{6} = \frac{42}{42} = 1$       d)  $2\frac{1}{3}$

2▶ Responda no caderno: O que ocorreu com os resultados? Todos são iguais a 1.

$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}; \frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{21}{21} = 1$

Os matemáticos já provaram que isso que você descobriu vale sempre.

O produto de uma fração pela fração inversa dela é sempre igual a 1.

Fonte: Dante, 2018, p. 68.

No entanto, consideramos inadequada a frase “Os matemáticos já provaram que isso que você descobriu vale sempre”. De fato, o autor perde, neste momento, a oportunidade de trazer uma demonstração que fundamente esse exemplo e faça uso do pensamento generalizador. Ponderamos que, se docentes solicitarem que estudantes argumentem sobre tal descoberta, provavelmente a demonstração seria construída corretamente: seja qual for a fração não nula considerada, o produto entre essa fração e a sua inversa será uma fração com numerador e denominador iguais ao produto do numerador de um dos fatores pelo denominador do outro fator, de modo que será uma fração equivalente ao número natural 1 (critério L1).

Chamou-nos a atenção que, pela primeira vez nesta Unidade, utiliza-se uma fração mista (item d), no entanto, no Manual do Professor não há menção a esse fato. Destacamos, ainda, que o Manual do Professor sugere “Peça aos alunos que efetuem a multiplicação de cada fração indicada pela própria inversa e que então verifiquem o que acontece” e complementa sugerindo que “Ao final, pergunte aos alunos: ‘Qual é a relação existente entre uma fração e a inversa dela?’. Verifique se são capazes de concluir que o resultado da multiplicação entre elas será sempre igual a 1.” (p.68). Salientamos que essas orientações didáticas nos remetem aos critérios MP2 e MP4. A seguir, são propostas atividades que “trabalham multiplicação de frações” (p.68), conforme descrito no Manual do Professor, sendo apresentadas sugestões para condução de algumas dessas atividades, em uma linguagem acessível para docentes, o que nos remete ao critério MP1, mas não são explicitados os objetivos de tais atividades (critério MP3).

Dando continuidade às operações com frações, é apresentado o tópico “Divisão de frações”, sendo ele subdividido em seções que tratam diferentes casos de divisão: Divisão de fração por número natural; Divisão de número natural por fração; Divisão de fração por

fração.

No Manual do Professor, como orientação didática para o tópico “Divisão de frações”, é sugerido iniciar-se por: “pergunte aos alunos se, a partir das descobertas relacionadas à multiplicação de frações, seriam capazes de resolver uma divisão de frações.” (p.69), e sugere uma abordagem para docentes (critério MP2), evidenciando que estudantes possam fazer uma relação com a multiplicação de frações:

[...] É esperado que algum aluno diga que, analogamente à multiplicação de frações, bastaria dividir o numerador de uma fração pelo numerador da outra e dividir o denominador de uma fração pelo denominador da outra. Sem dizer se as respostas estão corretas ou incorretas, peça que verifiquem essas hipóteses durante as explorações que faremos sobre divisão de frações. (Dante, 2018, p.69)

Assim, é apontada uma provável associação equivocada para a divisão por parte dos estudantes; no entanto nada é mencionado sobre alguma resposta remeter ao processo inverso da multiplicação, o que também seria viável de aparecer (critério MP2), levando em conta que é explorado o fato da divisão ser o processo inverso da multiplicação desde o universo dos números naturais. A seguir, é sugerido no Manual do Professor que seja retomada a atividade de ampliação da Multiplicação para o universo das frações apresentada na p.67 (figura 37) para relacionar com a divisão de fração por um número natural e complementa:

Pergunte: “Quando tínhamos o papel dobrado em 4 partes, se pedíssemos que o dividissem em 2, em quantas partes estaria dividido?”; “Que fração representa isso?”; “Seria diferente da metade do papel dobrado em 4 partes?”. Se necessário, leve os alunos a concluir que pedir a metade do papel é equivalente a pedir que o dividam em 2. Então, escreva na lousa:  $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  e pergunte qual é a relação que há entre 2 e  $\frac{1}{2}$ . Espera-se que respondam que um é o inverso do outro e percebam que, na divisão de uma fração por um número natural, multiplicamos a fração pelo inverso do número. (Dante, 2018, p.69)

No nosso ponto de vista, a primeira igualdade ( $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ ) poderia ser melhor explicada: dividir por 2 é o mesmo que calcular a metade, assim  $\frac{1}{4} \div 2 = \text{metade de } \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ . Em seguida, o Manual do professor orienta: “faça com os alunos os exemplos do livro, principalmente o exemplo da pizza, para que possam associar a divisão de frações com uma atividade do cotidiano” (p.69).

No Livro do Aluno, aborda-se o caso da Divisão de fração por um número natural, com dois exemplos, o primeiro deles contextualizado (critério E1 e E2) e com significado de equipartição (Figura 39). A resolução desse primeiro exemplo é representada pictoricamente seguindo os passos detalhadamente, até chegar-se à fração  $\frac{1}{8}$  da pizza como representação da resposta (Critérios Im1 e Im2).

Figura 39 – Primeiro exemplo de Divisão de frações por número natural

## Divisão de fração por número natural

Ângela separou metade de uma *pizza* e repartiu-a em pedaços aproximadamente iguais entre os 3 sobrinhos. Qual fração da *pizza* inteira cada um ganhou?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão  $\frac{1}{2} \div 3$ .



Pizza inteira.



Metade da *pizza*:  $\frac{1}{2}$ .



Metade da *pizza* repartida em 3 partes iguais. Cada parte corresponde a  $\frac{1}{2} \div 3$ .



$\frac{1}{2} \div 3$  é o mesmo que  $\frac{1}{6}$  da *pizza* inteira.

Ilustrações: Paulo Manoel  
Arquivo da editora

Assim,  $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$ .

Observe que a divisão  $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$  tem o mesmo resultado que a multiplicação  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  (lembre-se de que  $\frac{1}{3}$  é o inverso de 3). Assim, temos:

$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Fonte: Dante, 2018, p. 69.

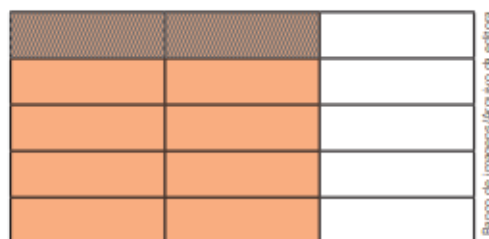
Esta situação chamou-nos a atenção positivamente, visto que, em todas as explicações apresentadas, a unidade de medida aparece de forma explícita “metade da **pizza**”, “ $\frac{1}{6}$  de **pizza**” (grifo nosso) (Critério L1). No entanto, a preparação para o algoritmo que remete à multiplicação não foi tão detalhada, quanto poderia: no lugar de um simples “observe que” poderia-se escrever  $\frac{1}{2} \div 3 =$  terça parte de  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ . Consideramos positiva a retomada do conceito de fração inversa, ainda que tenha sido utilizado o termo “número inverso”, expressão não explicada no Livro do Aluno: “(lembre-se de que  $\frac{1}{3}$  é o inverso de 3). Assim, temos:  $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ” p.69 (Critérios C10 e C11).

Como segundo exemplo abordando o caso da Divisão de fração por um número natural (Figura 40), quer-se saber o resultado de  $\frac{2}{3} \div 5$ , e com a resolução apresentada, observa-se que neste exemplo também é utilizado o significado de equipartição.

Figura 40 – Segundo exemplo de Divisão de frações por número natural

Vamos dividir  $\frac{2}{3}$  de uma unidade por 5.

Pintamos  $\frac{2}{3}$  da figura. Dividimos essa parte pintada em 5 partes iguais e hachuramos 1 delas.



A parte hachurada corresponde a  $\frac{2}{15}$  da figura inicial, ou seja,  $\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{15}$ .

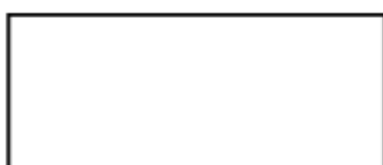
Observe que  $\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ .

Para dividir uma fração por um número natural diferente de zero, multiplicamos a fração pelo inverso do número natural.

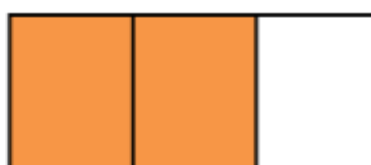
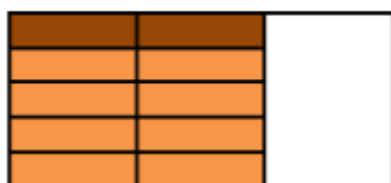
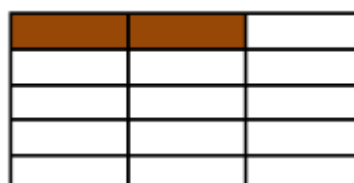
Fonte: Dante, 2018, p. 69.

Este exemplo, apoiado em imagem (Critérios Im1 e Im2), utiliza-se barras para representar essa divisão, no entanto não se teve para essa imagem o mesmo cuidado adotado para o primeiro exemplo, sendo utilizada uma imagem que remete diretamente à resposta (Critério L1). Nossa sugestão de imagens amparando a resolução está registrada na figura 41.

Figura 41 – Sugestão de imagem para o segundo exemplo de Divisão de frações por número natural



(a) barra inteira

(b)  $\frac{2}{3}$  de barra(c) quinta parte de  $\frac{2}{3}$  da barra(d) quinta parte de  $\frac{2}{3}$  da barra é o mesmo que  $\frac{2}{15}$  da barra

Fonte: Acervo da autora

Para este exemplo, no Manual do Professor, não são apresentadas orientações didáticas. O algoritmo usual da divisão (Critério C10) é novamente apoiado em um simples



“Observe que” podendo o texto sugerir ao leitor tratar-se de mera coincidência (critério L1). Reiteramos que a preparação para o algoritmo que remete à multiplicação não foi tão detalhada quanto poderia: no lugar de um simples “observe que” poderia-se remeter à figura 41. Assim, consideramos precoce a frase em destaque: “Para dividir uma fração por um número natural diferente de zero, multiplicamos a fração pelo inverso do número natural” (p.69) (critério L1), posição reforçada ainda pelo fato de não ter sido abordado nenhum exemplo com o significado de medida para o caso de divisão de fração por número natural. Em outras palavras, está sendo sugerida uma mecanização do processo sem terem sido abordados todos os significados da divisão (critérios C8 e C9).

Como continuidade do tópico “Divisão de frações”, é apresentado o caso de “Divisão de número natural por fração”, tendo inicialmente uma retomada do significado de medida no universo dos números naturais (quer-se dividir 12 laranjas em grupos com 3 laranjas cada e quer-se, portanto, saber quantas vezes 3 cabe em 12) (critério C5). A seguir é informado no Livro do Aluno: “Essa ideia da divisão será usada na divisão de número natural por fração” (p.70), sendo que esta revisão já poderia ter ocorrido, porque também no caso de divisão de fração por número natural caberia o significado de medida (não abordado neste livro) (critério C9). Já no Manual do Professor é sugerido, em linguagem compreensível para docentes (critério MP1): “[..] peça aos alunos que realizem a divisão por meio de desenhos, ou seja, agrupando as laranjas, evitando pensar no método prático por enquanto. Explique aos alunos que usaremos, para a divisão com as frações, essa ideia de medida, de quantas vezes cabe” (p.70). Em seguida, é apresentada uma situação em que se quer saber quantas metades de biscoito cabem em 1 biscoito (Figura 42).

Figura 42 – Exemplo para o caso Divisão de número natural por fração

## Divisão de número natural por fração

Bianca tem uma caixa em que cabem 12 laranjas. Quantos grupos de 3 laranjas cabem nessa caixa?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão  $12 \div 3$ . Nesse caso, podemos pensar: quantas vezes o 3 cabe em 12?

Nessa pergunta, usamos a ideia de **medida** associada à divisão.



Cabem 4 grupos. Logo,  $12 \div 3 = 4$ .

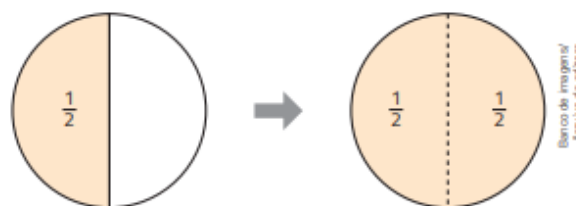
Essa ideia da divisão será usada na divisão de número natural por fração. Veja o exemplo.

Pedro está fazendo biscoitos e se perguntou: Quantas metades  $\left(\frac{1}{2}\right)$  de um biscoito cabem em 1 biscoito?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão  $1 \div \frac{1}{2}$ .

Como podemos ver, cabem 2 metades na figura.

Assim,  $1 \div \frac{1}{2} = 2$ .



Observe que a divisão  $1 \div \frac{1}{2} = 2$  tem o mesmo resultado que a multiplicação  $1 \times \frac{2}{1} = 2$  ( $\frac{2}{1}$  é o inverso de  $\frac{1}{2}$ ).

Assim, temos:

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Fonte: Dante, 2018, p. 70.

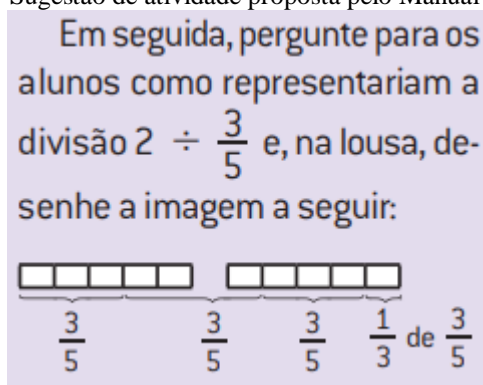
Utilizando a mesma ideia de medida associada à divisão apresentada na situação das laranjas, é feita a divisão de 1 inteiro em 2 metades ( $1 \div \frac{1}{2}$ ), apoiada em imagens para representar essas metades (critérios Im1 e Im2) e reforçada pela frase: “Como podemos ver, cabem 2 metades na figura. Assim,  $1 \div \frac{1}{2} = 2$ ” (p.70). Em seguida procura-se sugerir, novamente, a associação da divisão com a multiplicação simplesmente com a frase: “Observe que a divisão  $1 \div \frac{1}{2} = 2$  tem o mesmo resultado que a multiplicação  $1 \times \frac{2}{1} = 2$ ”, no lugar de estimular-se a argumentação por meio de propriedade de frações unitárias (qualquer que seja o número natural não nulo  $n$ , recupera-se a unidade ao juntar-se  $n$  cópias da fração  $\frac{1}{n}$ ).

Salientamos que, para um primeiro, e único, exemplo envolvendo a divisão de um número natural por uma fração, a situação está compreensível, mas entendemos que não seria necessário recorrer à imagem (como é sugerido na expressão: “Como podemos ver”), para efetuar essa divisão, e sim apenas recorrer à definição de metade e à propriedade das frações unitárias. Assim, avaliamos que seria mais adequado apresentar mais um exemplo em que fosse necessária a utilização do cálculo, como, por exemplo, dividir mais unidades de biscoito

por terços ou por quintos, para que estudantes desenvolvessem o pensamento matemático (ver seção 4.1) ao efetuarem essa divisão. Neste caso, o apoio de uma imagem auxiliaria no entendimento da situação.

E, é só no Manual do Professor que é sugerido um outro exemplo, não contextualizado, (critério MP2) de divisão de um número natural por uma fração e que contempla quociente não inteiro, a saber,  $2 \div \frac{3}{5}$  (Figura 43). Sua resolução é amparada exclusivamente em uma imagem, mas avaliamos que deveria existir um texto explicativo para tal imagem (critério MP1): por que, precisamente, o último pedacinho é  $\frac{1}{3}$  de  $\frac{3}{5}$ ? Salientamos que, neste momento, poderia ter ocorrido a retomada do conceito de fração não unitária, pois, como  $\frac{3}{5}$  é a junção de três quantidades iguais a  $\frac{1}{5}$ , então  $\frac{1}{5}$  é a terça parte de  $\frac{3}{5}$  que é no caso o divisor, portanto a unidade de medida em questão. Por isso  $\frac{3}{5}$  cabem 3 vezes e mais uma terça parte (de  $\frac{3}{5}$ ) em 2 unidades.

Figura 43 – Sugestão de atividade proposta pelo Manual do Professor



Fonte: Dante, 2018, p.70

Questionamo-nos por que tal exemplo aparece apenas no Manual do Professor. O agravante de ser evitado um exemplo mais complexo no Livro do Aluno, com argumentação a nível de estudantes de 7º ano, é a frase que segue esse único exemplo de divisão de número natural por fração: “O que ocorreu neste exemplo, os matemáticos já provaram que ocorre sempre” (Figura 44). Finalizando, se levarmos em conta exclusivamente o texto do Livro do Aluno, avaliamos que a frase em destaque (Figura 44) é precocemente estabelecida, uma vez que não foram abordados todos os resultados possíveis (quociente inteiro e quociente não inteiro) Em outras palavras, novamente está sendo sugerida uma mecanização do processo sem terem sido abordados todos os significados da divisão (critério C8).

Figura 44 – Associação entre a divisão e a multiplicação

O que ocorreu nesse exemplo, os matemáticos já provaram que ocorre sempre. Então, podemos escrever:

Para dividir um número natural por uma fração, multiplicamos o número natural pela inversa da fração.

Fonte: Dante, 2018, p. 70

Como continuidade desta seção são apresentadas 5 atividades (figura 45), sendo que a primeira delas (Atividade 99) não é contextualizada e envolve os dois casos até agora abordados (divisão de fração por número natural e divisão de número natural por fração), sendo incluídos, inclusive, frações mistas, o que consideramos positivo. Das 4 atividades restantes, duas tratam de divisão e envolvem situações contextualizadas (critérios A1 e A2); uma delas envolve divisão de fração por número natural com o significado de equipartição (Atividade 100) e a outra envolve divisão de número natural por fração (Atividade 101), ambas com quociente inteiro. A atividade 101 traz uma situação plausível de ser vivenciada por estudantes, o que pode facilitar o seu entendimento. Destacamos que nenhuma das atividades de divisão propostas neste bloco de atividades estimula estudantes a elaborar problemas (critério A5) e não são explicitados, no Manual do Professor, os objetivos de tais atividades (critério MP2)

Figura 45 – Bloco 1 de atividades da seção Divisão de frações

**Atividades**

Não escreva no livro!

**99. c)**  $2 \div \frac{7}{4} = 2 \times \frac{4}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$

**99. ▶** Efetue as divisões no caderno.

a)  $4 : \frac{3}{5} = 4 \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$     c)  $2 : 1\frac{3}{4}$

b)  $1\frac{2}{3} : 5 = \frac{5}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$     d)  $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

**100. ▶** Mara separou  $\frac{3}{4}$  de uma quantia e comprou 2 cadernos iguais. O preço de cada caderno corresponde a qual fração da quantia total?

**101. ▶** Quantas vezes  $\frac{1}{4}$  de hora cabe em 2 horas?

**102. ▶** Cláudio recebeu um salário de R\$ 2400,00. Ele gastou  $\frac{1}{3}$  desse dinheiro com moradia e  $\frac{1}{4}$  com

**101. 8 vezes.**  $\left(2 \div \frac{1}{4} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{1} = 8\right)$

alimentação. Com  $\frac{1}{5}$  do que sobrou, ele comprou roupas e, com o restante, pagou outras despesas.

a) Quanto Cláudio gastou com moradia? **R\$ 800,00**

b) Quanto ele gastou com alimentação? **R\$ 600,00**

c) Quanto ele gastou com roupas? **R\$ 200,00**

d) Quanto ele gastou em outras despesas? **R\$ 800,00**

e) Qual fração do salário representa o gasto de Cláudio com roupas?  $\frac{1}{12}$

**103. ▶** O número 4 é 16 vezes maior do que o inverso dele. Se um número é 9 vezes maior do que o próprio inverso, qual é esse número?

**100.**  $\frac{3}{8} \left( \frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \right)$

**103.**  $3 \left( \frac{3}{1} \div 9 = \frac{3}{1} \times \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ ou } 3 \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3 \right)$

Fonte: Dante, 2018, p.70

Na sequência trata-se o caso de “Divisão de fração por fração”, tendo como primeiro exemplo (Figura pp), a pergunta “Qual o resultado da divisão  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ ?” (p.71). Como forma de resolução, é sugerida uma contextualização envolvendo pizza na qual quer-se saber quantas

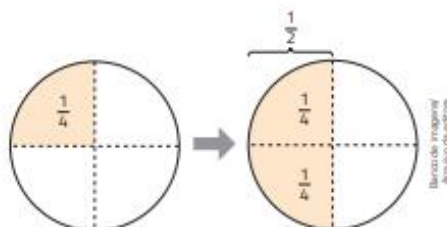
vezes  $\frac{1}{4}$  de pizza cabe em  $\frac{1}{2}$  desta mesma pizza. Consideramos positiva a busca por essa contextualização (critério E2), visto que torna a situação mais plausível de ser imaginada.

Figura 46 – Primeiro exemplo de Divisão de fração por fração

### Divisão de fração por fração

Qual é o resultado da divisão  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ ?

Usando a ideia de **medida** da divisão, podemos perguntar: Quantas vezes  $\frac{1}{4}$  de uma pizza cabe em  $\frac{1}{2}$  dessa pizza?



Temos que  $\frac{1}{4}$  de pizza cabe 2 vezes em  $\frac{1}{2}$  da mesma pizza. Então, podemos escrever  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$ .

Observe que a divisão  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$  tem o mesmo resultado da multiplicação  $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$  ( $\frac{4}{1}$  é o inverso de  $\frac{1}{4}$ ).

Assim, temos:  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$ .

Fonte: Dante, 2018, p. 71.

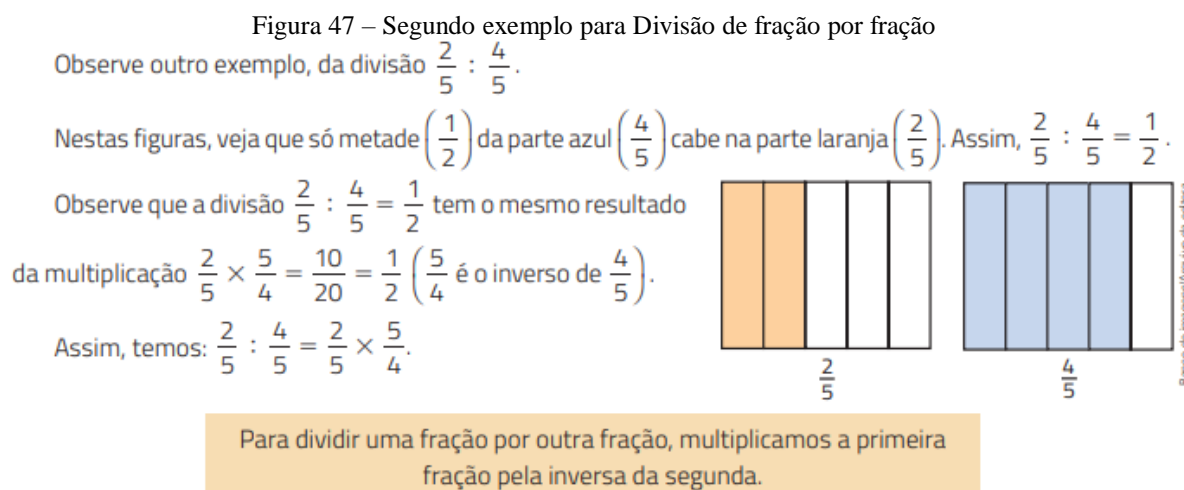
A resolução do exemplo está apoiada em imagem (critérios Im1 e Im2). Em seguida, é feita a relação da divisão ( $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$ ) com o resultado da multiplicação ( $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$ ), retomando o conceito de inverso como justificativa para a resolução do algoritmo (critério C10). Novamente aqui não há argumentação para justificar tal relação, e sim apenas um apelo a uma observação que sugere coincidência. E, mais uma vez, ressaltamos a viabilidade de um argumento ao nível de estudantes de 7º ano, recorrendo a frações equivalentes e à definição de fração não unitária:  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \div \frac{1}{4}$ . Pela definição de fração não unitária:  $\frac{2}{4}$  é obtido juntando-se duas cópias de  $\frac{1}{4}$ , logo cabem em  $\frac{2}{4}$  duas vezes  $\frac{1}{4}$ . Assim,  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \div \frac{1}{4} = 2$  (critério C11).

Ressaltamos que o fato de o divisor ser uma fração unitária e o quociente ser inteiro foi uma escolha adequada para um primeiro exemplo de divisão de fração por fração, pois a visualização do raciocínio utilizado pode auxiliar estudantes no entendimento da situação.

No Manual do Professor é sugerida a representação da situação utilizando discos de frações ou desenhos na lousa, bem como é sugerida uma forma de abordagem, o que consideramos positivo (critério MP2), ainda que, na nossa opinião, não seja muito claro o que está implícito no termo “método” (critério MP1): “Pergunte se, nesse caso, podemos usar o mesmo método que usamos anteriormente e, após as respostas, escreva  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} =$

2” (p.71). Ressaltamos que neste exemplo poderia ter sido retomado o conceito de frações equivalentes (critério C6):  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \div \frac{1}{4} = 2$ , por definição de fração não unitária.

O segundo exemplo (figura 47) para o caso da divisão de fração por fração não é contextualizado e envolve uma divisão de frações de mesmo denominador resultando em um quociente não inteiro ( $\frac{2}{5} \div \frac{4}{5}$ ).



Fonte: Dante, 2018, p. 71.

A resolução deste exemplo também está apoiada em imagens (critérios Im1 e Im2): duas barras apresentadas lado a lado, e o texto de apoio enfatiza: “observe que só metade da parte azul cabe na parte laranja” (p.71), concluindo assim que  $\frac{2}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$ . Na nossa opinião, uma barra embaixo da outra facilitaria para estudantes tal visualização. Também neste momento, no texto de apoio, o autor perdeu a oportunidade de argumentar além da visualização: 2 é a metade de 4, então  $\frac{2}{5}$  é a metade de  $\frac{4}{5}$ .

O exemplo inclui a preparação para o algoritmo, novamente exclusivamente por uma frase do tipo “Observe que” sugerindo apenas uma coincidência, seguida da frase em destaque: “Para dividir uma fração por outra fração, multiplicamos a primeira fração pela inversa da segunda” (p.71), sem um raciocínio generalizador que a justifique.

Salientamos que sentimos falta de um exemplo em que as frações envolvidas na divisão apresentam denominadores diferentes e gerando quociente não inteiro, situação da divisão de fração por fração que julgamos o mais complexo de ser desenvolvido (critério C8). Assim, não é de se esperar que estudantes consigam resolver sozinhos divisões deste tipo, como a proposta na Atividade 104, item a)  $\frac{3}{8} \div \frac{2}{5}$  (p.71).

Como orientação didática para o exemplo  $\frac{2}{5} \div \frac{4}{5}$ , é sugerida no Manual do professor a leitura da situação e a verificação de possíveis dúvidas, assim como uma reavaliação das hipóteses construídas até o momento, orientando: “Se necessário, faça intervenções para levá-los a concluir que, na divisão de frações, multiplicamos o primeiro termo pelo inverso do segundo, mesmo que algum deles seja um número natural.” (p.71). Consideramos positiva a orientação, visto que, desta forma, os estudantes poderão confirmar ou reconstruir suas hipóteses sobre o conteúdo. No entanto, não está sendo oferecida a docentes sugestão de como encaminhá-las no caso de estudantes não conseguirem chegar a tais conclusões (critério MP2).

Após os dois exemplos para o caso da divisão de fração por fração é apresentado um novo bloco com 4 atividades que contemplam esse caso (Figura 48), sendo apenas uma delas contextualizada e contemplando quociente inteiro. Neste caso, avaliamos que este bloco não contempla o critério A1, mas contempla o critério A2. Como já ressaltado anteriormente, não foi desenvolvida, no Livro do Aluno, uma resolução para a primeira divisão proposta, (Atividade 104, item a) nem para a maioria das divisões propostas neste bloco, restando a estudantes apenas aplicar a “receita” destacada na figura 47, sem serem estimulados a desenvolver o pensamento matemático (critério A6).

Figura 48 – Bloco 2 de atividades da seção Divisão de frações

Não escreva no livro!

Atividades

c)  $\frac{3}{8} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$     d)  $\frac{5}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

**104** ▶ Efetue as divisões no caderno.

a)  $\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{16}$     c)  $\frac{3}{8} : \frac{9}{2}$

b)  $\frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$     d)  $\frac{5}{6} : \frac{1}{2}$

**105** ▶ Lembrando que o traço de fração significa uma divisão, calcule no caderno.

a)  $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$  ou  $1\frac{1}{4}$ .    b)  $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{1}{5} \div \frac{9}{5}$  ou  $1\frac{4}{5}$ .    c)  $\frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{2}} = 6$

**106** ▶ Calcule no caderno o valor das expressões numéricas.

a)  $\frac{4}{5}$     b)  $\frac{5}{18}$     c)  $\frac{10}{77}$     d)  $\frac{3}{2}$

a)  $(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}) : (\frac{1}{4} + \frac{2}{4})$     c)  $(\frac{2}{7} \times \frac{1}{4}) : (\frac{3}{4} - \frac{1}{5})$

b)  $(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) : (\frac{2}{5} - \frac{1}{10})$     d)  $(2 - \frac{1}{3}) \times (\frac{3}{4} : \frac{5}{6})$

**107** ▶ Em uma garrafa de água cabem  $\frac{3}{4}$  de 1 litro. Quantos copos de  $\frac{1}{4}$  de litro cabem nessa garrafa?  
3 copos.  $(\frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{1} = 3)$

Fonte: Dante, 2018, p.71

A atividade 105 se utiliza de uma escrita que não foi abordada em nenhum dos casos apresentados no capítulo, mas o foi em capítulos anteriores; chamou nossa atenção o item c), pois a sutil diferença de tamanho dos traços de fração podem levar estudantes a dois resultados diferentes. Esta sutil diferença não é ressaltada no Livro do Aluno nem no Manual do Professor (critérios L1 e MP2).

Como finalização do capítulo são apresentados três conjuntos de atividades, intitulados: “Revisando seus conhecimentos” (p.72-73); “Testes oficiais” (p.74) e “Verifique o que estudou” (p.75). No Manual do Professor são apresentadas as principais habilidades da BNCC contempladas em cada um desses conjuntos, algumas sugestões de abordagem e a resolução de algumas das atividades.

O primeiro conjunto de atividades “Revisando seus conhecimentos” (p.72-73) é composto por 14 atividades, sendo que nenhuma delas envolve a divisão de frações (enunciado e/ou resolução). Apesar de não envolver divisão de frações, chamou nossa atenção a Atividade 7 (Figura 49), que solicita que estudantes decidam se várias afirmações são verdadeiras ou falsas, mas que, para as verdadeiras, sejam apenas dados 3 exemplos que as confirmam, no lugar de solicitar a argumentação sobre sua veracidade. Cabe ressaltar que estudantes só poderão decidir que uma afirmação é verdadeira se tiverem efetivamente construído uma demonstração para ela, portanto deveriam ser incentivados a expor tal argumentação, e não simplesmente dar 3 exemplos que confirmem a frase, estimulando-se, assim, o desenvolvimento de seu pensamento matemático. A relevância de nosso comentário a esta atividade diz respeito a uma postura que vai contra o pensamento matemático, com expressões do tipo “Observe que”, ou na frase “Os matemáticos já provaram que isso que você descobriu vale sempre” (p.68). Assim, avaliamos que neste tipo de atividade não está sendo privilegiado o desenvolvimento do pensamento matemático de estudantes e ressaltamos que, na nossa opinião, todas as afirmações verdadeiras da atividade são demonstráveis por estudantes de 7º ano.

Figura 49 – Atividade 7 em “Revisando seus conhecimentos”

- 7 ▶ Copie as afirmações abaixo no caderno e indique se cada uma delas é verdadeira (V) ou falsa (F). No caso de ser verdadeira, dê 3 exemplos que confirmem a afirmação feita. No caso de ser falsa, dê 1 contraexemplo, ou seja, um exemplo que contesta a afirmação feita. (MP)
- a) Todo número natural diferente de zero tem mais de 2 divisores.
  - b) Todo número natural diferente de zero tem infinitos múltiplos.
  - c) Se um número natural é par, então o quadrado dele é sempre um múltiplo de 4.
  - d) Se um número natural é ímpar, então o quadrado dele é sempre um múltiplo de 3.
  - e) O mmc de 2 números naturais diferentes de zero é maior ou igual a cada um desses números.
  - f) O mdc de 2 números naturais diferentes de zero é menor ou igual a cada um desses números.
  - g) Todo divisor de 20 é divisor de 10.
  - h) Todo múltiplo de 20 é múltiplo de 10.
  - i) Os múltiplos de um número par são todos pares.
  - j) Os múltiplos de um número ímpar são todos ímpares.
  - k) A adição de 2 frações menores do que 1 dá um número maior ou igual a 1.
  - l) Simplificar uma fração é reduzir o valor dela.
  - m) Se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então a fração  $\frac{a}{b}$  é irredutível.
  - n) Nenhum número primo é par.



O segundo conjunto de atividades “Testes oficiais” é composto por 8 atividades, sendo que apenas 1 delas (Figura 50) envolve um dos casos da divisão de frações (divisão de fração por fração com quociente não inteiro). Cabe ressaltar que este caso só foi diretamente contemplado na “receita” enquadrada na Figura 47, portanto vem de uma prática apenas mecanizada e não desenvolvida no Livro do Aluno.

Figura 50 – Atividade 6 em “Testes oficiais”

**6\*** (Obmep) Qual o sinal que Clotilde deve colocar no lugar de “?” para que a igualdade fique correta?



x a) ÷  
b) ×

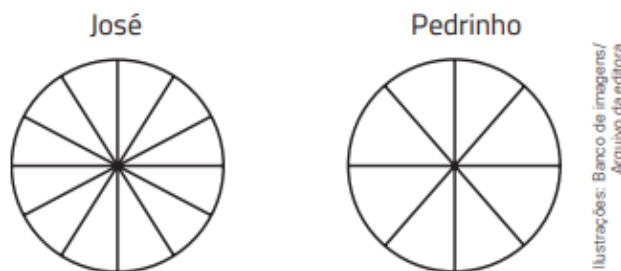
c) +  
d) =  $\left(\frac{3}{7} \div \frac{6}{5} = \frac{3^1}{7} \times \frac{5}{6^2} = \frac{5}{14}\right)$   
e) –

Fonte: Dante, 2018, p.74

Destacamos que, a primeira atividade em “Testes oficiais” diz respeito a frações e foi proposta, segundo a coleção, em um Saeb (Figura 51). Ainda que não envolvendo a divisão, chamou nossa atenção pelo enunciado equivocados: pelo enunciado, quer-se saber quem comeu mais pedaços de pizza; assim, trata-se de um problema de contagem, e não de frações. Percebe-se o equívoco nas alternativas oferecidas (coerentes com o capítulo em questão), quando quer-se saber quem comeu a maior “quantidade de pizza”

Figura 51 – Atividade 1 em “Testes oficiais”

1 ▶ (Saeb) Observe as figuras.



Pedrinho e José fizeram uma aposta para ver quem comia mais pedaços de *pizza*. Pediram duas *pizzas* de igual tamanho. Pedrinho dividiu a sua em oito pedaços iguais e comeu seis; José dividiu a sua em doze pedaços iguais e comeu nove. Então:  $\left(\frac{6}{8} = \frac{18}{24}; \frac{9}{12} = \frac{18}{24}\right)$

- x a) Pedrinho e José comeram a mesma quantidade de *pizza*.  
 b) José comeu o dobro do que Pedrinho comeu.  
 c) Pedrinho comeu o triplo do que José comeu.  
 d) José comeu a metade do que Pedrinho comeu.

Fonte: Dante, 2018, p.74

No último conjunto de atividades “Verifique o que estudou”, são propostas 14 atividades e, novamente, nenhuma delas envolve casos de divisão de frações. E, ao final deste conjunto de atividades, no Livro do Aluno, é inserido um bilhete, em destaque: “Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado” (p.75). Tal destaque chamou nossa atenção, visto que neste conjunto de atividades, nenhuma delas trata da divisão de frações, assunto que deveria requerer a mesma atenção que os demais conteúdos (critério A8).

Figura 52 – Atividade 6 em “Verifique o que estudou”

- 6 ▶ Faça no caderno o que se pede.
- Escreva uma fração em que o numerador seja o antecessor do denominador.
  - Somando 1 ao numerador e 1 ao denominador, o valor da fração aumenta, fica igual ou diminui em relação à fração inicial? **Aumenta.**
  - Escolha outras frações e descubra se o mesmo fato acontece sempre. **Sim.**

Fonte: Dante, 2018, p.75

Ressaltamos que, nesta atividade, ao solicitar que estudantes escolham outras frações e descubram se o mesmo fato acontece **sempre** (grifo nosso), testando se somando 1 ao

numerador e ao denominador de uma fração que tem para numerador o antecessor do denominador obtém-se sempre uma fração maior, não se está privilegiando o desenvolvimento do pensamento matemático. E, de fato, como resposta a este item no Manual do Professor, está mencionado apenas um exemplo.

Dando continuidade ao volume do 7º ano da Coleção Teláris Matemática, é apresentado o Capítulo 3 intitulado “Números racionais” que é composto por 2 unidades: Unidade 1 - Os números racionais e Unidade 2 - Operações com números racionais. Na Unidade 1, é explicitado que números racionais “são números que podem ser escritos na forma fracionária” (p.77). Assim, o autor é coerente ao relembrar, na introdução da Unidade 2 deste mesmo capítulo: “no Capítulo 2, você estudou as frações positivas e viu que, se uma fração é diferente de zero, obtemos a inversa dessa fração invertendo o numerador e o denominador dela. Também podemos determinar o inverso de números racionais [...]” (p.86), mas ressaltamos que a observação (Figura 53) de que zero não tem inverso porque não existe a divisão por zero, não seria suficientemente compreensível para estudantes que acabaram de relembrar a definição de fração inversa e uma propriedade envolvendo multiplicação (e não divisão) (critério L1).

Figura 53 – Observação sobre número inverso

O produto de um número racional e o inverso dele é sempre igual a + 1.

Contudo, é preciso observar que:

De todos os números racionais, o único que não tem inverso é o zero, pois não existe divisão por zero.

Fonte: Dante, 2018, p.86

Apresentamos, a seguir, a descrição comentada da seção que se refere, especificamente, à divisão de números racionais (parte integrante da Unidade 2- Capítulo 3). A seção inicia com a apresentação de exemplos envolvendo números racionais positivos e negativos, ao mesmo tempo em que é explorado que o produto de um número racional não nulo pelo seu inverso é sempre igual a 1 (Figura 54).

Figura 54 – Divisão de números racionais

## Divisão de números racionais

Você já aprendeu no capítulo 2 que, para dividir uma fração por outra, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda fração. Veja um exemplo.

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$$

$$\bullet \left(-\frac{1}{3}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{3}{2}\right) = \frac{(-1) \cdot (+3)}{3 \cdot 2} = \frac{-3}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \left(-\frac{2}{5}\right) : (+0,5) = \left(-\frac{2}{5}\right) : \left(+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(+\frac{2}{1}\right) = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\bullet 5,4 \div (-0,12) = \frac{54}{10} \div \left(-\frac{12}{100}\right) = \frac{54}{10} \times \left(-\frac{100}{12}\right) = -\frac{90}{2} = -45$$

Para dividir um número racional por outro, também multiplicamos o primeiro pelo inverso do segundo. Veja os exemplos.



Também podemos usar os decimais para efetuar a divisão  $5,4 \div (-0,12)$  com o algoritmo usual.

$$\begin{array}{r|l} 5,40 & 0,12 \\ -48 & 45 \\ \hline 060 & \\ -60 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

$5,4 \div (-0,12) = -45$

Fonte: Dante, 2018, p. 87

Consideramos que o conteúdo de divisão dos números racionais é apresentado resumidamente, pois ao conteúdo estudado no Capítulo 2 são apenas acrescentados sinais positivos e negativos. Além disso, são apresentados exemplos de divisão dos números racionais na forma decimal e na forma fracionária (não vemos como ponto negativo essa relação entre os conteúdos, apenas destacamos que essa retomada se torna sucinta). No Manual do Professor, é recomendado “Primeiro, chame a atenção para o fato de que já efetuaram divisões de frações e divisões de decimais, mas que, para os números racionais, devem estar atentos também para os sinais que acompanham esses números” (p.86) (critério MP2).

Em seguida, no Livro do Aluno, é apresentada a seção “Explorar e descobrir” que traz um convite para estudantes refletirem sobre o algoritmo da divisão de números racionais em representação decimal. Após esta seção, é proposto um bloco de atividades que contemplam divisões de números racionais (Figura 55), todas elas não contextualizadas (critério A1).

Figura 55 – Atividades envolvendo Divisão de números racionais

**Atividades**

Não escreva no livro!

**32 ▶** Efetue as divisões no caderno.

a)  $\left(+\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$

c)  $\left(-\frac{3}{25}\right) : \left(-\frac{9}{10}\right) + \frac{2}{15}$

e)  $(-2,5) : \left(+\frac{2}{100}\right) - 125$

b)  $\left(-\frac{2}{5}\right) : (+3) - \frac{2}{15}$

d)  $(-5) : (-10) + \frac{1}{2}$

f)  $5 : \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{20}{3}$  ou  $-6\frac{2}{3}$

**33 ▶** Calcule no caderno o valor de cada expressão.

As expressões numéricas envolvendo números racionais são resolvidas da mesma maneira que as expressões numéricas envolvendo números inteiros e frações e decimais positivos.

a)  $(+2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{4}$   
 b)  $\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{4} + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{31}{60}$

1. 
$$\begin{array}{r} 3 \ 3 \ 0 \ 0 \\ - \ 2 \ 6 \ 4 \\ \hline 0 \ 6 \ 6 \ 0 \\ - \ 6 \ 6 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

c)  $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(+\frac{1}{4}\right) - 2\frac{3}{4}$   
 d)  $(-3) \cdot (+1,25) - (+1,2) : (-0,6) - 1,75$

Fonte: Dante, 2018, p.87

A atividade 32 baseia-se em cálculos e regras de sinais. Avaliamos essa atividade como um exercício de fixação em que se faz uso da mecanização do processo - “regra pronta” para efetuar as divisões (por envolverem também o caso de divisão de frações com quociente não inteiro não justificado no capítulo anterior), e das regras de sinais utilizadas/estudadas no Capítulo 1- Unidade 4 “Operações com números inteiros” e que foram retomadas no início da Unidade 2 - “Operações com números racionais” (p.84), conforme indica a frase: “Você já efetuou adições, subtrações, multiplicações e divisões com números inteiros e com decimais e frações positivas. Agora vamos retomar as estratégias e usá-las nas operações com números racionais” (p.84). No Manual do Professor são apresentadas as resoluções para essa atividade utilizando o mesmo procedimento mecanizado do Capítulo 2.

A próxima seção é intitulada “Números racionais, grandezas e medidas”, e é composta exclusivamente por atividades e situações-problema que envolvem números racionais e transformações de unidades de medida bem como de representação fracionária para decimais e vice-versa. Das 13 atividades propostas 2 envolvem divisão, ambas contextualizadas: a primeira entre números naturais com quociente também natural (Atividade 40, p.88) e a segunda divisão de frações com quociente inteiro (Atividade 46, p.89). No manual do professor, não há comentários para essas atividades. O que nos chamou a atenção foi o fato de que, tanto no Capítulo 2 como no Capítulo 3, quando o caso de divisão de frações é contemplado de forma contextualizada e o quociente é inteiro, o divisor sempre é a fração  $\frac{1}{2}$ , o que faz com que a Atividade 46 seja praticamente um exercício de fixação e não um novo desafio para estudantes.



Figura 58 – Atividade 4 em “Verifique o que estudou”

- 4 ▶ Copie as afirmações abaixo no caderno e indique se cada uma delas é verdadeira (V) ou falsa (F). No caso de ser verdadeira, dê 3 exemplos que confirmem a afirmação feita. No caso de ser falsa, dê 1 contraexemplo. (MP)
- Todo número inteiro é racional.
  - Todo número racional é inteiro.
  - O quociente de 2 números inteiros, com o segundo diferente de zero (0), é sempre um número inteiro.
  - O quociente de 2 números inteiros, com o segundo diferente de zero (0), é sempre um número racional.
  - Entre 2 números racionais sempre existe um número racional.
  - O dobro de um número racional é igual ao quadrado desse número.

Fonte: Dante, 2018, p.93

O item d, por exemplo, pode envolver a divisão de fração por número natural em sua demonstração. Reiteramos que, para decidir sobre a veracidade de uma afirmação que engloba infinitos exemplos, estudantes precisam construir algum argumento, e o autor está perdendo a oportunidade de estimular o desenvolvimento do pensamento generalizador e da argumentação. No Manual do Professor, não há qualquer orientação deste tipo (Figura 59):

Figura 59 – Resolução da Atividade 4 no Manual do Professor

<p><b>Atividade 4</b></p> <p>Nesta atividade, os alunos devem julgar a veracidade das afirmações sobre relações entre números inteiros e números racionais e sobre a ordem de efetuação das operações em uma expressão.</p> <p>Veja as respostas dos itens desta atividade.</p>	
<p><b>a)</b> Verdadeira; exemplos: 5 é inteiro e é racional <math>\left(\frac{5}{1}\right)</math>; -2 é inteiro e é racional <math>\left(-\frac{2}{1}\right)</math>; 0 é inteiro e é racional <math>\left(\frac{0}{1}\right)</math>.</p>	<p><b>d)</b> Verdadeira; exemplos:</p> <p><math>3 \div 4 = \frac{3}{4}</math>, que é racional; <math>(-12) \div (-2) = +6</math>, que é racional; <math>9 \div 2 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}</math>, que é racional.</p>

Fonte: Dante, 2018, p.93

Após todas as considerações relativas ao Capítulo 2 e ao Capítulo 3 do volume do 7º ano da coleção Teláris Matemática, consideramos que, referindo-se ao conteúdo (incluindo os exemplos), houve uma retomada de conteúdos prévios (frações equivalentes no Capítulo 2, p.62, e os significados de equipartição e de medida nos primeiros exemplos de divisão de frações (p.69 e p.70), critérios C1, C5 e C6.

Consideramos que os exemplos de divisão de frações do Capítulo 2 não abordaram os casos de: divisão entre números naturais com quociente não inteiro; divisão de fração por número natural com o significado de medida e divisão de fração por fração com quociente não inteiro (critério C8). Já os exemplos do Capítulo 3 (mesmo sendo apresentados apenas cálculos mecanizados), contemplam os casos da divisão, com exceção do caso de divisão de fração por fração com quociente inteiro.

Destacamos que nesta coleção as atividades são propostas, em blocos, ao final de cada tópico abordado e não só apenas ao final do capítulo. Vemos essa forma de distribuição como positiva, pois leva estudantes a focarem na discussão em curso, no entanto alguns casos de divisão não foram abordados na lista de atividades ao final do capítulo.

O Quadro 7 explicita os casos de divisão de frações contemplados nas atividades propostas nos Capítulos 2 e 3 deste volume.

Quadro 7 – Atividades que contemplam os casos de Divisão de frações

Casos de Divisão de frações	Atividade que contemplou cada caso
divisão entre números naturais com quociente natural (retomada)	nenhuma atividade encontrada
divisão entre números naturais com quociente não inteiro	Atividade 32d - Capítulo 3 (cálculo)
divisão de uma fração por um número natural	Atividade 99d - Capítulo 2 (cálculo); Atividade 100 - Capítulo 2; Atividade 103 - Capítulo 2; Atividade 32b - Capítulo 3 (cálculo).
divisão de um número natural por uma fração	Atividade 101 - Capítulo 2; Atividade 102 - Capítulo 2; Atividade 105c - Capítulo 2 (cálculo) Atividade 32f - Capítulo 3 (cálculo).
divisão de fração por fração com quociente inteiro	Atividade 107 - Capítulo 2; Atividade 6 - Capítulo 2 testes oficiais (cálculo); Atividade 46 - Capítulo 3.
divisão de fração por fração com	Atividade 104 - Capítulo 2 (cálculo);



quociente não inteiro	Atividade 105a e 105b - Capítulo 2 (cálculo); Atividade 106 - Capítulo 2; Atividade 32a e 32c - Capítulo 3 (cálculo).
-----------------------	---

Fonte: Acervo da autora

O Quadro 7 evidencia que, com relação às atividades propostas:

- i) Nos Capítulos 2 e 3 não foi contemplado o caso de divisão entre números naturais com quociente natural (retomada), mesmo que, no Capítulo 2, tenha ocorrido essa retomada nos exemplos (critério A8).
- ii) No Capítulo 2 não foi contemplado o caso de divisão entre números naturais com quociente não inteiro - o que também não ocorreu nos exemplos apresentados neste capítulo (critérios C8 e A8). No Capítulo 3, apenas um dos itens da atividade 32 contemplou esse caso.
- iii) Divisão de uma fração por um número natural é o único caso de divisão envolvendo frações que pode contemplar tanto o significado de equipartição como o significado de medida. No entanto, nenhuma atividade contemplando este caso com o significado de medida foi proposta nos Capítulos 2 e 3, o que também não ocorreu nos exemplos (critérios C9 e A9).
- iv) No Capítulo 3 não foram apresentadas atividades contextualizadas para nenhum dos casos de divisão, apenas cálculos com aplicação direta de fórmula.

Após a apresentação das Atividades relacionadas a divisão de frações, consideramos que:

- i) as atividades propostas no Capítulo 2, não são, em sua maioria, contextualizadas (apenas 3 de 8 atividades propostas), mas as atividades consideradas contextualizadas são plausíveis para estudantes (critérios A1 e A2);
- ii) as atividades propostas apresentam, em sua maioria, uma ordem crescente de complexidade, já que estão propostas em blocos ao final de cada caso (critério A4);
- iii) não foram propostas atividades que estimulam a elaboração de problemas como recomenda reiteradamente a BNCC (Critério A5) e que ajudam estudantes a desenvolver seu raciocínio lógico e a criatividade. Por isso, consideramos ter sido atendida apenas parcialmente a habilidade EF07MA12 (Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais) da BNCC (Ver 3.1.1 e critério C4).

Convém apontar que o autor, em diversos momentos, perde a oportunidade de estimular o desenvolvimento do pensamento matemático (ver 4.1) como ocorre nas Atividades 7 (Figura 49); na Atividade 6 item c) (Figura 52) e na Atividade 4 (Figura 58), sendo que esta última pode envolver em sua argumentação o foco deste trabalho (divisão de frações); no enunciado dessa atividade pede-se apenas 3 exemplos que confirmem a afirmativa dada e não a demonstração que a confirme. Na nossa opinião, no Manual do Professor deveria ser sugerido começar por exemplos e depois desenvolver com os estudantes um argumento generalizador (demonstração).

No que se refere ao Manual do Professor, mesmo que a linguagem esteja, em geral, compreensível para professores (critério MP1), consideramos insuficiente o número de abordagens sugeridas relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem sobre divisão (critério MP2). De fato, é comum, neste capítulo, aparecerem como orientação frases do tipo “Verifique se são capazes de concluir que...” (como na p. 68), mas nenhuma orientação é dada a docentes no caso de estudantes não chegarem a essa conclusão esperada. Os objetivos das atividades não estão presentes no Manual do Professor (critério MP3). E não há sugestões ou esclarecimentos a docentes relativas a argumentações ou a demonstrações (critério MP4).

Encerramos este capítulo com um quadro resumo relativo aos critérios do Quadro 3 (ver 4.2) aplicados ao Capítulo 2 e Capítulo 3 (seção Divisão de números racionais) do volume do 7º ano da Coleção Teláris Matemática. Optamos por atribuir com “sim” exclusivamente os critérios que avaliamos como totalmente atingidos. Desta forma, os critérios não atingidos ou aqueles considerados parcialmente atingidos (por entendemos que não foram suficientemente abordados) receberam “não” como resposta.

Quadro 8 – Critérios contemplados pela coleção Teláris matemática

<b>Critérios gerais para um conteúdo sob análise</b>	<b>O critério foi contemplado?</b>
<b>C1)</b> Ocorre uma retomada dos conteúdos prévios necessários antes da introdução do conteúdo?	<b>sim</b>
<b>C2)</b> O conteúdo está organizado com encadeamento lógico?	<b>sim</b>
<b>C3)</b> O conteúdo está matematicamente correto?	<b>sim</b>
<b>C4)</b> O conteúdo contempla as correspondentes habilidades da BNCC?	<b>não</b>

<b>L1)</b> O conteúdo é desenvolvido no Livro do Aluno em uma linguagem compreensível para estudantes?	<b>sim</b>
<b>Im1)</b> As imagens apresentadas estão relacionadas com o texto e auxiliam estudantes no entendimento do conteúdo?	<b>sim</b>
<b>E1)</b> Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados?	<b>sim</b>
<b>E2)</b> Os exemplos que foram considerados contextualizados trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?	<b>sim</b>
<b>A1)</b> As atividades propostas são, em grande parte, contextualizadas?	<b>não</b>
<b>A2)</b> As atividades que foram consideradas contextualizadas trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?	<b>sim</b>
<b>A3)</b> São propostas, efetivamente, situações-problema?	<b>sim</b>
<b>A4)</b> As atividades propostas são apresentadas em uma ordem crescente de complexidade, ou seja, partem de atividades mais simples até as matematicamente mais complexas?	<b>sim</b>
<b>A5)</b> Existem atividades que estimulam estudantes a elaborar problemas?	<b>não</b>
<b>A6)</b> Existem atividades que estimulam o desenvolvimento do pensamento matemático?	<b>não</b>
<b>A7)</b> Existem atividades que exploram a conversão de registros (Duval) em uma mesma atividade?	<b>sim</b>
<b>MP1)</b> A linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível para professores?	<b>sim</b>
<b>MP2)</b> São sugeridas algumas abordagens para professores especialmente relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem desse conteúdo?	<b>não</b>
<b>MP3)</b> São explicitados os objetivos de cada atividade proposta?	<b>não</b>
<b>MP4)</b> São apresentadas alternativas de aprofundamento do conteúdo, para estudantes ou para professores, que estimulem a argumentação e a demonstração (ou, pelo menos, são apresentadas referências)?	<b>não</b>

<b>Critérios específicos para a divisão de frações</b>	<b>O critério foi contemplado?</b>
<b>C5)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma os significados de equipartição e de medida da divisão, ainda que sem mencioná-los explicitamente no Livro do Aluno?	<b>sim</b>
<b>C6)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma o conceito de frações equivalentes?	<b>sim</b>
<b>C7)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações faz uso de representações variadas na abordagem do tema?	<b>sim</b>
<b>C8)</b> São abordados todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?	<b>não</b>
<b>C9)</b> São abordados, em cada caso de divisão de frações, os significados de equipartição e de medida, sempre que cabível?	<b>não</b>
<b>C10)</b> A abordagem do tema divisão de frações inclui o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?	<b>sim</b>
<b>C11)</b> É justificado o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?	<b>não</b>
<b>C12)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações varia o tipo de registro no qual é realizado o tratamento?	<b>sim</b>
<b>C13)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações explora a conversão de registros?	<b>sim</b>
<b>Im2)</b> São apresentadas imagens que ilustram uma divisão de frações?	<b>sim</b>
<b>Im3)</b> As eventuais imagens que ilustram divisão de frações alternam os significados de equipartição e de medida?	<b>sim</b>
<b>A8)</b> As atividades contemplam todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?	<b>não</b>
<b>A9)</b> As atividades contemplam diferentes significados da divisão?	<b>sim</b>

Fonte: Acervo da autora

Conforme já mencionado neste trabalho, no Guia Digital do PNLD/2020, são incluídas resenhas com informações sobre cada uma das coleções aprovadas no Edital do PNLD/2020.

Sendo assim, finalizamos a descrição comentada dos Capítulos 2 (unidade 2 - Frações) e 3 (unidade 2 - Operações com frações, seção divisão de números racionais), do volume do 7º ano da coleção Teláris matemática, ressaltando que, restringindo-nos exclusivamente ao conteúdo aí abordado, concordamos com a resenha quando aponta que poucas atividades exigem elaborar problemas, visto que, nos dois capítulos analisados, não foi encontrada nenhuma atividade deste tipo. Esta constatação é reforçada na resenha com a frase "Recomenda-se que o professor esteja atento ao excesso de atividades que tratam da ação de resolver e poucos que exigem a ação de elaborar."

E não concordamos com a frase, relativa ao Manual do Professor: "oferece sugestões e esclarecimentos detalhados sobre os objetivos e desenvolvimento das atividades propostas no livro do aluno", pois, conforme já apontado anteriormente, avaliamos que não foram explicitados os objetivos das atividades propostas (critério MP3) e foram insuficientes as informações que auxiliam docentes, principalmente sobre as sugestões de abordagem relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem do conteúdo (critério MP2).

Finalizamos, destacando que nos chamou atenção a frase: "Nas atividades assinaladas com ícones indicando a resolução oral ou discussões em grupo, o aluno pode demonstrar suas impressões ou suas ideias e, da mesma forma, ouvir as impressões dos colegas, dessa forma estimula-se a autonomia de pensamento, raciocínio crítico, capacidade de argumentação", da qual discordamos, já que, em muitos momentos relacionados ao conteúdo divisão de frações, apontamos que perdeu-se a oportunidade de serem incluídas demonstrações que auxiliem estudantes no entendimento do conteúdo. Além disso, as resoluções apresentadas no Livro do Aluno acabam baseando-se apenas em procedimentos prontos e em frases do tipo: "observe que". Sendo assim, nos momentos de discussão, no grande grupo, esses estudantes podem não ter adquirido "bagagem" suficiente para sustentar suas argumentações e desenvolver o pensamento matemático (critério A6).

Retomamos o comentário sobre o Guia Digital do PNLD/2020 que fizemos ao final da seção 3.2.2 sobre sentirmos falta de um detalhamento maior relativo à passagem de uma divisão euclidiana no universo dos números naturais para a operação de divisão no universo dos números racionais, ressaltando, que de fato, na coleção analisada, esta questão não é comentada no Livro do Aluno nem no Manual do Professor.

### **5.2.3 - Considerações sobre a descrição comentada das duas coleções analisadas**

O Quadro 9 resalta (com "X") os critérios que consideramos contemplados por cada

uma das coleções analisadas (ver 5.2.1 e 5.2.2). Salientamos que cada critério contemplado representa, na nossa opinião, um ponto positivo para a coleção em questão.

Quadro 9 – Critérios contemplados pelas duas coleções analisadas

<b>Critérios gerais para um conteúdo sob análise</b>	<b>A conquista da matemática</b>	<b>Teláris matemática</b>
<b>C1)</b> Ocorre uma retomada dos conteúdos prévios necessários antes da introdução do conteúdo?		<b>X</b>
<b>C2)</b> O conteúdo está organizado com encadeamento lógico?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>C3)</b> O conteúdo está matematicamente correto?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>C4)</b> O conteúdo contempla as correspondentes habilidades da BNCC?		
<b>L1)</b> O conteúdo é desenvolvido no Livro do Aluno em uma linguagem compreensível para estudantes?		<b>X</b>
<b>Im1)</b> As imagens apresentadas estão relacionadas com o texto e auxiliam estudantes no entendimento do conteúdo?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>E1)</b> Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados?		<b>X</b>
<b>E2)</b> Os exemplos que foram considerados contextualizados trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>A1)</b> As atividades propostas são, em grande parte, contextualizadas?		
<b>A2)</b> As atividades que foram consideradas contextualizadas trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>A3)</b> São propostas, efetivamente, situações-problema?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>A4)</b> As atividades propostas são apresentadas em uma ordem crescente de complexidade, ou seja, partem de atividades mais simples até as matematicamente mais complexas?		<b>X</b>

<b>A5)</b> Existem atividades que estimulam estudantes a elaborar problemas?		
<b>A6)</b> Existem atividades que estimulam o desenvolvimento do pensamento matemático?	<b>X</b>	
<b>A7)</b> Existem atividades que exploram a conversão de registros (Duval) em uma mesma atividade?	<b>X</b>	
<b>MP1)</b> A linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível para professores?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>MP2)</b> São sugeridas regularmente abordagens ao professor especialmente relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem desse conteúdo?		
<b>MP3)</b> São explicitados os objetivos de cada atividade proposta?		
<b>MP4)</b> São apresentadas alternativas de aprofundamento do conteúdo, para estudantes ou para professores, que estimulem a argumentação e a demonstração (ou, pelo menos, são apresentadas referências)?		
<b>CrITÉrios específicos para a divisão de fraes</b>	A conquista da matemática	Teláris matemática
<b>C5)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de fraes retoma os significados de equiparto e de medida da divisão, ainda que sem mencioná-los explicitamente no Livro do Aluno?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>C6)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de fraes retoma o conceito de fraes equivalentes?		<b>X</b>
<b>C7)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de fraes faz uso de representaes variadas na abordagem do tema?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>C8)</b> São abordados todos os casos de divisão de fraes (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?		
<b>C9)</b> São abordados, em cada caso de divisão de fraes, os significados de equiparto e de medida, sempre que cabível?		
<b>C10)</b> A abordagem do tema divisão de fraes inclui o	<b>X</b>	<b>X</b>

algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?		
<b>C11)</b> É justificado o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?		
<b>C12)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações varia o tipo de registro no qual é realizado o tratamento?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>C13)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações explora a conversão de registros?	<b>X</b>	
<b>Im2)</b> São apresentadas imagens que ilustram uma divisão de frações?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>Im3)</b> As eventuais imagens que ilustram divisão de frações alternam os significados de equipartição e de medida?	<b>X</b>	<b>X</b>
<b>A8)</b> As atividades contemplam todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?		
<b>A9)</b> As atividades contemplam diferentes significados da divisão?	<b>X</b>	<b>X</b>

Fonte: Acervo da autora

Com o trabalho realizado com as duas coleções de livros didáticos, consideramos respondida a questão de pesquisa no que diz respeito à eficácia dos critérios (Que critérios, gerais focando no conteúdo e específicos focando no conteúdo divisão de frações, são relevantes e eficazes para uma análise de livros didáticos de matemática?)

. De fato, durante a análise descritiva, foi possível encaixar cada comentário que nos ocorreu em algum dos critérios considerados.

Relativo ao Objeto de Conhecimento Divisão de Frações, avaliamos que as duas coleções analisadas o desenvolvem de modo geral. No entanto, no que diz respeito ao significado de medida, ressaltamos que os exemplos, ou não o contemplam ou apenas apresentam situações nas quais a fração cabe exatamente um número inteiro de vezes no divisor, produzindo então, como resposta, um quociente inteiro.

Destacamos também que, nas duas coleções, para cada exercício é apresentada uma única forma de resolução. Ou seja, no Manual do Professor não foram encontradas sugestões



que orientam docentes a incentivar outras formas de raciocínio, como, por exemplo, por meio de representações pictóricas.

Nas duas coleções analisadas não foram encontradas atividades que estimulem estudantes a elaborar problemas (critério A5), conforme já destacado no Guia Digital do PNLD/2020 (ver seção 4.2.2): “Ainda são incipientes, nas obras, tarefas de investigação e de modelagem que solicitam aos(às) estudantes a elaboração e a criação de problemas.” (Brasil, 2019b, p.22). Cabe ressaltar que a elaboração e resolução de problemas é reiteradamente recomendada entre as habilidades da BNCC ao longo dos anos escolares.

Por fim, observamos que as duas coleções ainda trazem muitos procedimentos desacompanhados de justificativas e perdem a oportunidade de desenvolver o pensamento matemático de estudantes, principalmente quando não apresentam ou não sugerem demonstrações pertinentes ao conteúdo trabalhado. Reiteramos que, sob nossa perspectiva, é possível que demonstrações sejam desenvolvidas no nível de escolaridade selecionado nesta pesquisa. No que diz respeito ao conteúdo divisão de frações, o Guia Digital do PNLD/2020 menciona: “As obras buscam desenvolver o pensamento numérico, que implica na capacidade de contar, quantificar, julgar e **interpretar argumentos** baseados em quantidades.” (Brasil, 2019b, p.22-23, grifo nosso), No entanto, nas coleções analisadas, não foram encontradas explicações para as afirmações que remetem ao algoritmo usual da divisão de frações (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso).

## 6. OFICINA MINISTRADA A DOCENTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA

A Oficina intitulada “Critérios de Análise de Livros Didáticos focando no Conteúdo” foi ministrada pela autora deste trabalho e por sua orientadora, e teve por objetivo validar e aprimorar a lista de critérios apresentada em 4.2 seja com relação à redação, compreensão e precisão, ou com relação à inclusão ou exclusão de algum critério (geral ou específico). Procurou-se ter como público-alvo docentes da Educação Básica e, assim, também contribuir para a formação continuada dessa equipe de profissionais. A oficina foi oferecida no Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS) - Campus Canoas, na cidade de Canoas (RS), às turmas de alunas e alunos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Cada participante recebeu previamente, do coordenador do PROFMAT - Polo IFRS Campus Canoas, o convite para a Aula Inaugural do segundo semestre de 2023, informando alguns detalhes sobre a Oficina (Figura 60).

Figura 60 – Convite de participação da Oficina

Prezados(as),

Nos dias 2 e 4 de agosto de 2023, nos dois primeiros períodos (das 19h às 20h40), teremos a aula inaugural do segundo semestre de 2023. A atividade ocorrerá no LEMA (Sala B02).

A aula ocorrerá no formato de uma oficina ministrada pelas professoras **Cassia Tatiane Rockemback de Almeida Farias** e **Cydara Cavedon Ripoll**.

Abaixo mais informações sobre a oficina.

Atte.

Nicolau Diehl.

Título: CRITÉRIOS DE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS FOCANDO NO CONTEÚDO

INTRODUÇÃO (Motivação e Objetivos)

“O Programa Nacional do Livro Didático – PNLD tem como um de seus princípios básicos atribuir ao professor, em sintonia com o projeto pedagógico de sua escola, a tarefa de escolher o livro que será usado por seus alunos. Este é, portanto, um trabalho dos mais significativos que periodicamente o professor é chamado a realizar” (Carvalho e Lima, 2010, p.17). Essa importante tarefa evidencia a relevância de estabelecer-se critérios de análise que garantam que os livros didáticos contemplem, ao máximo possível, os objetivos necessários para o aprendizado dos estudantes e que os Manuais do Professor que os acompanham ofereçam relevantes orientações aos professores.

Tem-se aí a motivação para a presente oficina. Ela tem, como primeiro objetivo, contribuir para a formação continuada, discutindo com os professores participantes critérios de análise de livros didáticos especificamente direcionados ao conteúdo. Essa discussão será dividida em dois momentos: o primeiro (dia 2 de agosto de 2023) será concentrado em documentos oficiais de orientação curricular (Edital e Guia do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD/2020 e Base Nacional Comum Curricular - BNCC); o segundo momento (dia 4 de agosto de 2023) envolverá uma eventual complementação provocada pela escolha de um tópico específico como foco de análise, no caso a divisão de frações no 7º ano. Assim, como segundo objetivo da oficina, a partir da análise de algumas coleções aprovadas no PNLD/2020, pretende-se colocar os critérios selecionados à prova, por meio das seguintes questões:

- 1) No caso específico da divisão de frações, ficam validados ou não, pelos participantes, os critérios elencados no primeiro encontro?
- 2) São esses critérios suficientes para efetivamente avaliar o tema divisão de frações no 7º ano, no que diz respeito ao conteúdo?

A partir da posição dos participantes com relação à segunda questão, poderão ser eventualmente apresentadas algumas atividades elaboradas pelas ministrantes com o objetivo de complementar o conteúdo a nível de 7º ano. Se esse for o caso, acontecerá, neste mesmo dia, um terceiro momento que vai incluir também a validação, pelos participantes, dessas novas atividades propostas.

Fonte: Acervo da autora

A Oficina foi ministrada em dois dias (2 e 4 de agosto de 2023), tendo a duração de aproximadamente 100 minutos em cada um dos dias. Como planejamento para o primeiro dia (2 de agosto de 2023), buscou-se focar em documentos oficiais de orientação curricular como a BNCC e documentos normativos como o Edital e o Guia Digital do PNLD/2020) e na lista de critérios gerais (ver 4.2); já para o segundo dia (4 de agosto de 2023), pretendeu-se focar apenas na lista de critérios específicos para o tema divisão de frações (ver 4.2).

## 6.1 METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO DA OFICINA:

### 6.1.1 Primeiro Dia - Documentos Oficiais e Critérios Gerais

Com o objetivo de melhor conhecer as(os) participantes, principalmente quanto à sua experiência com o ensino de divisão de frações no Ensino Fundamental II, foi-lhes solicitado, à medida que iam chegando na sala destinada à realização da oficina, o preenchimento da ficha de identificação disponibilizada por meio de um QRcode que estava projetado na sala (Figura 61), o qual direcionava as(os) participantes para o Formulário Inicial (GoogleForms <https://forms.gle/TsBjd6BGXX36pv7Y6>), bem como a solicitação do preenchimento individual do Termo de Consentimento (entregue de forma impressa) para cada participante (Apêndice B.).

Figura 61 – Momento inicial da Oficina



Fonte: Acervo da autora

Estiveram presentes, no primeiro dia da oficina, 15 estudantes do PROFMAT e 2 professoras do IFRS que ministram disciplinas no PROFMAT e que se interessaram em participar da Oficina. Destes, 16 preencheram o Formulário Inicial e 17 assinaram o Termo de Consentimento.

A Oficina teve seu início com a apresentação das ministrantes e a informação de que a Oficina faz parte da dissertação de Mestrado de uma delas sob a orientação da outra, e que tem o propósito de validar e aprimorar a lista de critérios selecionada pelas ministrantes, seja com relação à redação, compreensão e precisão, seja com relação à inclusão ou exclusão de algum critério, e que seria bem-vindo, portanto, qualquer comentário sobre o assunto discutido no momento da Oficina.

Após serem informados sobre o tema e o foco do trabalho, foi perguntado aos participantes quais deles já ministraram aulas sobre o conteúdo de divisão de frações no Ensino Fundamental II. Dos 16 participantes presentes naquele momento (2 chegaram atrasados), 10 se acusaram. Posteriormente, no Formulário Inicial, foram computados 11 docentes que confirmaram que já haviam ministrado aulas sobre divisão de frações no Ensino Fundamental II, número que consideramos relevantes para nossa pesquisa, especificamente com relação ao objetivo 4 (Validar ou aprimorar a lista de critérios junto a um grupo de docentes da Escola Básica). Cabe ressaltar que, por questões de tempo, optou-se por deixar para o segundo dia da Oficina a informação relativa à complementação dessa pergunta e constante no Convite da Figura 60 (Que dificuldades você apontaria no ensino e/ou na aprendizagem desse conteúdo?)

Em seguida, foi explicado as(os) participantes como chegamos à formulação de uma lista de critérios gerais, mencionando-se os documentos BNCC, Edital do PNLD/2020 e Guia do PNLD/2020, bem como a experiência da autora da dissertação com a escolha de livros didáticos e as reflexões e contribuições decorrentes da disciplina de Análise e Desenvolvimento de Material oferecido pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Dando prosseguimento à Oficina, foi projetada parte da Ata constante no Guia Digital do PNLD/2020, destinada ao preenchimento (seja pela equipe docente, seja pela equipe de supervisão da escola), após a escolha das coleções disponibilizadas e aprovadas pelo PNLD/2020 (Figura 62). Neste momento da Oficina, foi questionado as(os) participantes se consideravam os itens constantes na Ata suficientes para a escolha de uma coleção de livros didáticos de Matemática.

Figura 62 – Parte da Ata constante no Guia Digital do PNLD/2020  
Que características das obras influenciaram na escolha das coleções/obras?

CARACTERÍSTICA	NÃO FOI CONSIDERADO	NÃO INFLUENCIOU	INFLUENCIOU POUCO	INFLUENCIOU MODERADAMENTE	INFLUENCIOU BASTANTE
Qualidade Gráfica	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Quantidade de Exercícios	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Qualidade dos Exercícios	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Qualidade do Conteúdo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Autores	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Conteúdo Atual	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Conteúdo Contextualizado (regional)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Capa	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Metodologia	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Fonte: Brasil, 2019b, aba Ata de escolha

As(os) participantes foram unânimes em dizer que esses itens não são suficientes para a escolha de uma coleção de livros didáticos de Matemática. Nesse momento, alguns participantes, que atuam na rede municipal de ensino, relataram que não tiveram a oportunidade de escolher os livros didáticos que seriam utilizados em suas escolas, porque a escolha havia sido feita (por imposição) pela Secretaria de Educação do Município. Outros mencionaram conhecer colegas que fizeram sua escolha considerando apenas o autor da coleção. E uma das participantes relatou que foi a responsável, em sua escola, pelo

preenchimento desta Ata e pela escolha da coleção de livros didáticos de matemática para os anos iniciais e que, para esta última tarefa, levou em conta a faixa etária dos alunos aos quais a coleção destinava-se, tendo o item “capa” lhe servido como critério de desempate para essa escolha, pois, em relação aos outros critérios constantes na Ata, as coleções estavam empatadas.

Como continuação da Oficina, foi informado aos participantes que as ministrantes concordam que os itens constantes na Ata não são suficientes para a escolha de uma coleção de livros didáticos de Matemática. Assim, foram então apresentados os critérios gerais elencados pelas ministrantes, sendo informado que essa lista de critérios foi construída com base nos documentos oficiais mencionados, nos estudos realizados na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático e em trabalhos relacionados à análise de material didático e à divisão de frações. A lista de critérios gerais (Quadro 10) foi então projetada e também distribuída em uma folha impressa aos participantes, para que pudessem acompanhar a leitura dos critérios e fazer anotações que julgassem necessárias. À medida que cada critério era lido em voz alta, perguntava-se aos participantes se o critério apresenta redação compreensível ou se requer uma nova redação e, caso a resposta fosse afirmativa, qual seria a sugestão para o novo enunciado. Eventualmente as ministrantes reforçavam a existência de tal critério fazendo uso das justificativas elencadas em 4.2.

Cabe aqui ressaltar que, por questões de tempo de Oficina, (já durante nosso planejamento) foi retirado da lista o critério geral “**A7)** Existem atividades que exploram diferentes registros de representação (conversão para Duval) na mesma atividade”, tendo em vista que, para tal critério ser devidamente analisado, seria necessário fazer-se uma explanação sobre a Teoria de Representações Semióticas de Duval. Assim, o Quadro 3 (parte relativa aos critérios gerais) e o Quadro 10 diferem apenas pela existência, ou não, do critério A7).

Quadro 10 – Critérios gerais para a Oficina

<b>Critérios Gerais para um conteúdo sob análise:</b>	
Conteúdo (C):	<p><b>C1)</b> Ocorre uma retomada dos conteúdos prévios necessários antes da introdução do conteúdo?</p> <p><b>C2)</b> O conteúdo está organizado com encadeamento lógico?</p> <p><b>C3)</b> O conteúdo está matematicamente correto?</p> <p><b>C4)</b> O conteúdo contempla as correspondentes habilidades da BNCC?</p>

Linguagem ( <b>L</b> ):	<b>L1)</b> O conteúdo é desenvolvido no Livro do Aluno em uma linguagem compreensível para estudantes?
Imagens ( <b>Im</b> ):	<b>Im1)</b> As imagens apresentadas estão relacionadas com o texto e auxiliam estudantes no entendimento do conteúdo?
Exemplos ( <b>E</b> ):	<p><b>E1)</b> Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados?</p> <p><b>E2)</b> Os exemplos que foram considerados contextualizados trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?</p>
Atividades ( <b>A</b> ):	<p><b>A1)</b> As atividades propostas são, em grande parte, contextualizadas?</p> <p><b>A2)</b> As atividades que foram consideradas contextualizadas trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?</p> <p><b>A3)</b> São propostas, efetivamente, situações-problema?</p> <p><b>A4)</b> As atividades propostas são apresentadas em uma ordem crescente de complexidade, ou seja, partem de atividades mais simples até as matematicamente mais complexas?</p> <p><b>A5)</b> Existem atividades que estimulam estudantes a elaborar problemas? Concordo!</p> <p><b>A6)</b> Existem atividades que estimulam o desenvolvimento do pensamento matemático?</p>
Manual do Professor ( <b>MP</b> ):	<p><b>MP1)</b> A linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível para professores?</p> <p><b>MP2)</b> São sugeridas regularmente abordagens para professores especialmente relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem desse conteúdo?</p> <p><b>MP3)</b> São explicitados os objetivos de cada atividade proposta?</p> <p><b>MP4)</b> São apresentadas alternativas de aprofundamento do conteúdo, para estudantes ou para professores, que estimulem a argumentação e a demonstração (ou, pelo menos, são apresentadas referências)?</p>

Fonte: Acervo da autora

O primeiro critério que recebeu um comentário foi L1, quando um dos participantes ressaltou a necessidade de prestar atenção neste critério, pois este participante identificou que

livros que fazem uso de muita simbologia matemática (tratando da resolução de uma equação polinomial do segundo grau, por exemplo) tornam-se incompreensíveis para os seus alunos.

Por ocasião da leitura do critério Im1, uma das ministrantes questionou as(os) participantes o que entendiam pelo termo “imagens”. Foram mencionados tabelas, quadros, gráficos e ilustração de um procedimento. As ministrantes então reiteraram: “recursos visuais utilizados, podendo ter funções diversas”. As(os) participantes concordaram com tal descrição.

Sobre o critério A3, foi sugerido por uma participante que seja incluído, no enunciado, o significado de situação-problema; todos concordaram com a sugestão trazida pelas ministrantes: “atividade contextualizada cuja resolução exige uma estratégia de ação por parte do estudante.

Sobre o critério A4, foi sugerido por um dos participantes que seria importante especificar a qual lista de atividades o critério se refere, visto que, em muitos livros didáticos, são inseridas, no final de cada capítulo, listas mais amplas de atividades que contemplam todos os conteúdos trabalhados ao longo deste capítulo. Os participantes relacionaram esta situação a uma avaliação aplicada aos estudantes, em que não é esperado que as questões contidas nesta avaliação obedeçam a uma ordem crescente de complexidade.

O critério MP2 gerou um debate no grande grupo, por conta do significado atribuído ao termo “delicados”. Um dos participantes comentou que não compreendeu o que significava o termo “delicado” mencionado neste critério; outros participantes associaram o termo a “existência de outra forma de resolução”; outro participante associou o termo a “dificuldades de aprendizagem” ainda que sugerindo apenas aprendizagem, sem contemplar o “ensino” que é citado no enunciado. Outro participante então explicitou: “quando se fala em uma flor ser delicada, subentende-se que ela requer algum cuidado especial, por exemplo, em seu cultivo, em seu manuseio”, sendo assim, todos os presentes concordaram que “cuidados especiais” seria uma boa expressão para substituir o termo “delicados” na adequação do enunciado. O critério teve então seu enunciado alterado por nós substituindo a expressão “aspectos delicados” por “atenção especiais”.

Após completada a leitura de todos os critérios gerais, perguntou-se aos participantes:

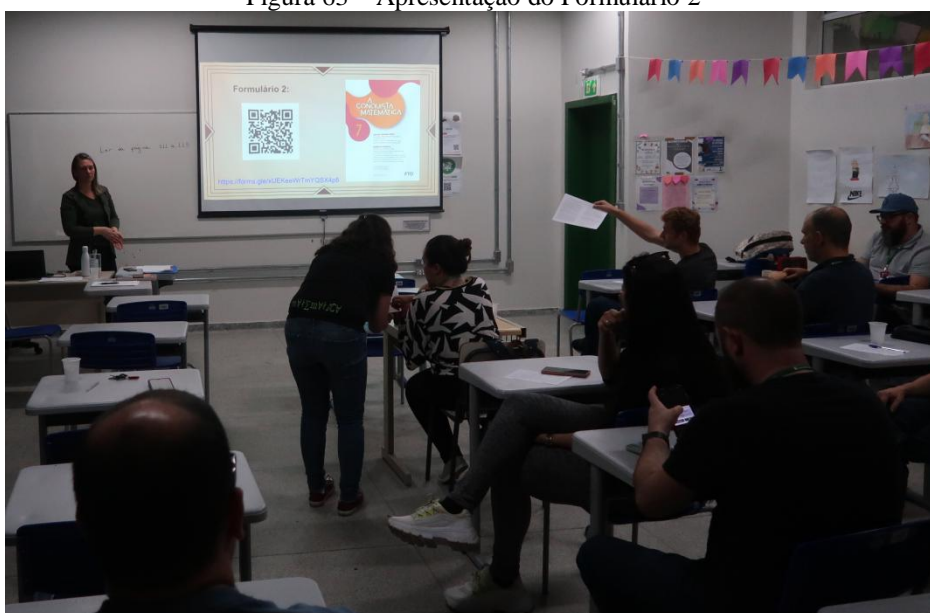
Vocês consideram que esses critérios são suficientes para a escolha de uma coleção de livros didáticos de matemática?

Vocês acrescentariam algum critério geral a esta lista?



sendo-lhes informado que eventuais acréscimos que pudessem ocorrer a eles poderiam ser incluídos no Formulário 2, disponível em <https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeHye8zTrMI2DAvAWxRDuEyhODwSF9idl0siUFtuzEjcYp4RQ/viewform> (também disponibilizado por meio de um QRcode – Figura 63), no qual responderiam às perguntas “Após a apresentação da Lista de Critérios Gerais, vocês classificariam o enunciado de todos os critérios como compreensível?” e “Vocês acrescentariam, retirariam ou reformulariam algum critério desta lista? Se a resposta for afirmativa, qual(ais) seria(m)? Neste caso, qual seria a sugestão de redação?” (Apêndice C)

Figura 63 – Apresentação do Formulário 2



Fonte: Acervo da autora

A discussão dos critérios gerais nesse primeiro dia da Oficina tomou mais tempo do que o previsto, porém, devido aos importantes aspectos trazidos pelas(os) participantes que, em momento algum foram impedidos de se expressar, as ministrantes optaram por deixar que os debates, com relação aos critérios, prosseguissem. Com isso, restou um tempo reduzido para os momentos seguintes que haviam sido planejados para este dia, fato que requereu das ministrantes um improviso. De fato, havia sido planejado, ainda para o primeiro dia da Oficina, um momento “mão na massa”, no qual as(os) participantes seriam convidados a pôr em prática os critérios gerais discutidos: a turma seria dividida em 6 grupos e lhes seria solicitado analisar, durante 30 minutos, um recorte de 5 páginas que trata da divisão de frações. O recorte seria do volume do 7º ano da Coleção “A Conquista da Matemática”

(PNLD/2020)<sup>22</sup> (ver Anexo B, da p. 110 à p. 115), e os resultados dessa análise deveriam ser registrados no Formulário 2 (já citado). Neste formulário, ao final de cada Bloco de perguntas, havia espaço para que cada participante registrasse comentários relacionados à análise realizada a partir dos critérios do Bloco pelo qual ficaram responsáveis, justificando o seu preenchimento. O fechamento da discussão sobre critérios gerais seria feito a partir da apresentação dos pequenos grupos e do preenchimento pelo grande grupo de uma tabela de consenso com a avaliação do recorte a partir dos critérios gerais.

No entanto, o tempo restante (que foi de apenas 10 minutos) impossibilitou que o momento “mão na massa” se realizasse, bem como todo o restante do planejamento para o primeiro dia. Assim, nestes minutos foi solicitado aos participantes que, para o próximo encontro, refletissem sobre a seguinte questão:

São esses critérios suficientes para efetivamente avaliar o tema divisão de frações no 7º ano no que diz respeito ao conteúdo?

Ou você acrescentaria algum critério? Em caso afirmativo, qual(is)?

No momento final da Oficina, um dos participantes perguntou se os critérios que constam na Ata do Guia Digital do PNLD/2020 deveriam ser considerados na análise ou apenas substituídos pela nossa lista de critérios gerais. Este mesmo participante sugeriu que os critérios desta Ata fossem levados em conta, pois ele considera muitos deles importantes (e exemplificou mencionado que para ele a capa é um critério que deve ser considerado). Concordamos com a sugestão dada pelo participante e faríamos discussões a respeito destes critérios no segundo dia da oficina, momento que a turma iria explanar sobre suas conclusões sobre as questões propostas. Mas cabe ressaltar que a capa de um livro didático não diz respeito ao conteúdo, portanto consideramos que este não deveria ser um critério a ser inserido em nossa lista de critérios.

Consideramos que a discussão sobre a validação dos critérios gerais teve êxito, porque as(os) participantes mostraram-se muito engajadas(os) na discussão e à vontade para fazerem seus comentários. Por exemplo, uma participante fez anotações e esperou que todos os critérios fossem comentados para constatar que o que lhe havia ocorrido (a saber, sobre argumentação construtiva/momento de exploração) não havia sido mencionado. Além disso,

---

<sup>22</sup>Escolheu-se esta coleção por ter sido a mais requisitada pelas escolas públicas no PNLD/2020, e sendo ela uma das coleções constantes na dissertação.

as contribuições das(os) participantes foram valiosas e geraram, de fato, alterações e inclusões na lista de critérios.

Destacamos que apenas um dos participantes da Oficina preencheu o Formulário 2. Entendemos que este pequeno número deveu-se à falta de tempo disponível das(os) participantes para analisarem o recorte do livro no intervalo de dois dias (úteis) entre o primeiro e o segundo encontros. Em particular, uma sugestão de enunciado para o critério relacionado a “argumentação construtiva/momento de experimentação” sugerido oralmente por uma das participantes não apareceu registrado no formulário. Sendo assim, a lista de critérios gerais permaneceu a mesma, havendo apenas alterações referentes à redação de alguns critérios, provenientes das discussões durante o primeiro encontro. Essas alterações estão destacadas em negrito no Quadro 11, por exemplo, a palavra “efetivamente” (critério A3) foi substituída por uma breve explicação sobre a que se refere o termo “situação problema”.

Quadro 11 – Lista de critérios gerais após validação na Oficina

<b>Critérios Gerais para um conteúdo sob análise:</b>	
<b>Conteúdo (C):</b>	<p><b>C1)</b> Ocorre uma retomada dos conteúdos prévios necessários antes da introdução do conteúdo?</p> <p><b>C2)</b> O conteúdo está organizado com encadeamento lógico?</p> <p><b>C3)</b> O conteúdo está matematicamente correto?</p> <p><b>C4)</b> O conteúdo contempla as correspondentes habilidades da BNCC?</p>
<b>Linguagem (L):</b>	<p><b>L1)</b> O conteúdo é desenvolvido no Livro do Aluno em uma linguagem compreensível para estudantes?</p>
<b>Imagens (Im):</b>	<p><b>Im1)</b> As imagens apresentadas estão relacionadas com o texto e auxiliam estudantes no entendimento do conteúdo?</p>
<b>Exemplos (E):</b>	<p><b>E1)</b> Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados?</p> <p><b>E2)</b> Os exemplos que foram considerados contextualizados trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?</p>

Atividades (A):	<p><b>A1)</b> As atividades propostas são, em grande parte, contextualizadas?</p> <p><b>A2)</b> As atividades que foram consideradas contextualizadas trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?</p> <p><b>A3)</b> São propostas, <del>efetivamente,</del> situações-problema, <b>isto é, atividades contextualizadas cujas resoluções exigem uma estratégia de ação por parte do estudante?</b></p> <p><b>A4)</b> As <b>primeiras</b> atividades propostas <b>no capítulo que trata do conteúdo sob análise</b> são apresentadas em uma ordem crescente de complexidade, ou seja, partem das atividades mais simples até as matematicamente mais complexas?</p> <p><b>A5)</b> Existem atividades que estimulam estudantes a elaborar problemas?</p> <p><b>A6)</b> Existem atividades que estimulam o desenvolvimento do pensamento matemático?</p> <p><b>A7)</b> Existem atividades que exploram diferentes registros de representação (conversão para Duval) na mesma atividade?</p>
Manual do Professor (MP):	<p><b>MP1)</b> A linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível para professores?</p> <p><b>MP2)</b> São sugeridas regularmente abordagens a professores que apontam para <del>alguma aspectos—delicados</del> <b>atenção especial</b> relacionada ao ensino e a aprendizagem desse conteúdo?</p> <p><b>MP3)</b> São explicitados os objetivos de cada atividade proposta?</p> <p><b>MP4)</b> São apresentadas alternativas de aprofundamento do conteúdo, para estudantes ou para professores, que estimulem a argumentação e a demonstração (ou, pelo menos, são apresentadas referências)?</p>

Fonte: Acervo da autora

### 6.1.2 Segundo Dia - Critérios Específicos para o tema Divisão de Frações

Estiveram presentes no segundo dia da Oficina 16 participantes, sendo que 2 deles não estiveram presentes no primeiro dia. Então, levando em conta principalmente esses participantes, o encontro foi iniciado com um breve relato sobre o que ocorreu no primeiro encontro (buscando contextualizá-los com relação ao propósito da oficina), sendo-lhes entregue uma cópia dos critérios gerais distribuídos no primeiro encontro. Posteriormente, foi

solicitado que estes participantes preenchessem o Formulário Inicial e assinassem o Termo de Consentimento.

Em seguida, reiteramos aos participantes que daríamos continuidade ao assunto do primeiro encontro, quando debatemos critérios gerais de análise de livro didático relativos a conteúdo, e que, neste segundo encontro, focaríamos especificamente no tema divisão de frações. Aproveitou-se o momento para questionar quantos dos presentes haviam analisado o recorte do livro didático que lhes havia sido encaminhado. Quatro participantes afirmaram ter lido o material, o que foi bastante útil porque, ao longo das discussões desse dia, em alguns momentos o recorte foi mencionado ou utilizado como exemplo. Foi possível perceber que os participantes que não haviam feito uma leitura prévia do recorte passaram a consultá-lo, naquele momento, confirmando nossa impressão de que não houve falta de interesse por parte dos participantes, mas sim falta de tempo para analisar o material em um intervalo curto de tempo (de quarta-feira para sexta-feira).

Foi então projetado um slide com os Objetos de Conhecimento e Habilidades da BNCC (com palavras destacadas por nós) que dizem respeito à divisão de frações, sendo informado que eles estão descritos no 7º ano, na Unidade Temática Números (Brasil, 2018, p.307) e o Quadro 12 foi projetado para que as(os) participantes pudessem acompanhá-la. Destacamos que algumas palavras foram grifadas pelas ministrantes da oficina.

Quadro 12 – Objetos de Conhecimento e Habilidades

<b>Objeto de Conhecimento</b>	<b>Habilidade</b>
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da <b>divisão</b> , razão e operador.
Linguagem algébrica: variável e incógnita.	(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a <b>divisão</b> de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias,
Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as <b>operações com números racionais</b> .

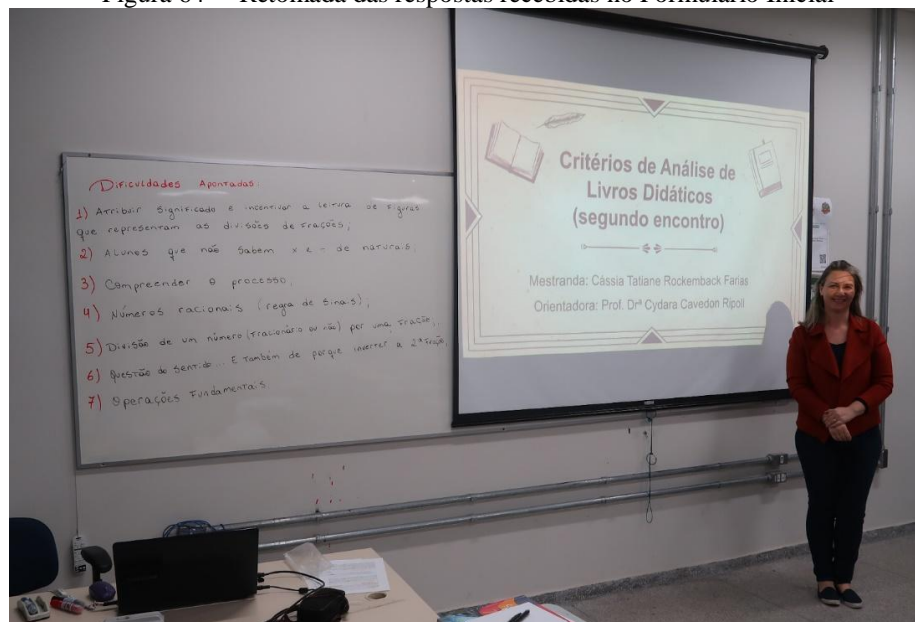
Fonte: Acervo da autora

As ministrantes retomaram então a questão colocada no Formulário Inicial (preenchido individualmente) que diz respeito à experiência profissional das(os) participantes com relação ao ensino da divisão de frações:

Você já ensinou Divisão de Frações no Ensino Fundamental II?

Em caso afirmativo, que dificuldades você apontaria no ensino e/ou na aprendizagem desse tema?

Figura 64 – Retomada das respostas recebidas no Formulário Inicial



Fonte: Acervo da autora

As respostas recebidas no Formulário Inicial foram anotadas no quadro da sala utilizada para a realização da oficina, conforme Quadro 13.

Quadro 13 – Respostas obtidas por meio do formulário inicial

(1)	atribuir significado e incentivar a leitura de figuras que representam as divisões de frações.
(2)	alunos que não sabem multiplicar nem mesmo dividir números naturais.
(3)	compreender o processo.
(4)	No contexto de números racionais (que é o contexto em que leciono este conteúdo), a dificuldade de aprendizagem está mais focada na regra de sinais e na multiplicação de números naturais (numerador e denominador).
(5)	Não tive turma na qual apresentei a divisão de frações, mas vejo muita dificuldade na divisão de um número (fracionário ou não) por uma fração.
(6)	(...) Faz tempo que trabalhei, mas lembro que tinha a questão de sentido, qual o sentido? E também do porquê inverter a 2ª fração.
(7)	As operações fundamentais.

Fonte: Acervo da autora

Durante a leitura das respostas recebidas no formulário 2 (Apêndice C) para o grande grupo, aproveitou-se para solicitar aos participantes que escreveram (3) e (6) que explicitassem a qual “processo” refere-se (3) e a que “sentido” se refere (6). O autor de (3) não estava presente, então o grupo interpretou “processo” como “o processo empregado na resolução de uma divisão de frações”. Já a autora de (6) estava presente e esclareceu que “sentido” se referia à falta de situações nas quais faça efetivamente sentido uma divisão de frações. Destacamos que, após a leitura das dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem de divisão de frações apontadas pelas(os) participantes no momento do preenchimento deste formulário, o grupo presente concordou que todas essas dificuldades já apareceram em suas práticas docentes.

Em seguida, foi lembrado que, no primeiro encontro, haviam sido discutidos critérios gerais relativos ao conteúdo de um livro didático de matemática. Então os participantes foram questionados:

Os critérios gerais elencados no primeiro encontro são suficientes para, efetivamente, avaliar o tema divisão de frações, no que diz respeito ao conteúdo?

Ou você acrescentaria algum critério? Em caso afirmativo, qual(is)?

Um participante respondeu que sim, pois considerava que, depois das discussões do primeiro encontro, a lista de critérios gerais estava bem completa e ampla. No entanto, a maioria das(os) participantes discordou do colega, inclusive, um dos participantes que havia lido o recorte do livro didático (a eles encaminhado) argumentou que, mesmo com a inclusão e sugestões de complementação de redação dos critérios da lista debatida no primeiro encontro, apenas esses critérios gerais não iriam “conseguir abraçar tudo” (expressão utilizada pelo participante), e exemplificou com o recorte disponibilizado, relatando que, em alguns momentos, não se percebe que os autores desta coleção estejam abordando a divisão de frações, complementando que estaria: “faltando algum critério relativo a este fato” (palavras do participante).

A seguir, as ministrantes anunciaram que, na sua opinião, os critérios gerais não são suficientes para analisar um tema específico, levando-se em conta as especificidades que cada tema carrega, então cabem mais critérios de análise. Por exemplo, na divisão de frações lida-se com dois temas considerados complexos (seja para o ensino como para a aprendizagem), a saber, frações e divisão, portanto requerem atenção especial. Todas(os) as(os) participantes concordaram com essa colocação.

Com o objetivo de tornar alguns critérios compreensíveis aos participantes, antes de ser apresentada a lista dos critérios específicos selecionados pelas ministrantes, foi lembrado aos participantes que divisão tem, pelo menos, dois significados, o de equipartição e o de medida, e que ambos deveriam ser contemplados, sempre que possível, em qualquer abordagem de divisão. As ministrantes mencionaram, rapidamente, o terceiro significado da divisão, pois nesta lista de critérios não há um critério relativo a ele (ver justificativa ao critério C5 em 4.2). Alguns participantes demonstraram surpresa, mencionando que nunca haviam percebido os significados associados a divisão.

Dando continuidade a Oficina, foram apresentados às(aos) participantes os critérios específicos construídos pelas ministrantes (Quadro 14), ressaltando-se que estes critérios foram baseados nos documentos mencionados, em estudos realizados ao longo da disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático ministrada em 2021/2 e em trabalhos relacionados ao tema de divisão de frações. É importante salientar que, por questões de tempo de Oficina, foram retirados da lista os critérios C12 e C13 (apresentados em 4.2), tendo em vista que, para tais critérios serem devidamente analisados, seria necessário fazer-se uma explanação sobre a Teoria de Representações Semióticas de Duval.

Quadro 14 – Critérios específicos para a Oficina

<b>Critérios Específicos para a Divisão de Frações:</b>
---



<p>Conteúdo (C) (Incluindo exemplos):</p>	<p>os</p> <p><b>C5)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma os significados de equipartição e de medida da divisão, ainda que sem mencioná-los explicitamente no Livro do Aluno?</p> <p><b>C6)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma o conceito de frações equivalentes?</p> <p><b>C7)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações faz uso de representações variadas na abordagem do tema?</p> <p><b>C8)</b> São abordados todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?</p> <p><b>C9)</b> São abordados, em cada caso de divisão de frações, os significados de equipartição e de medida, sempre que cabível?</p> <p><b>C10)</b> A abordagem do tema divisão de frações inclui o algoritmo usual da divisão de frações (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?</p> <p><b>C11)</b> É justificado o algoritmo usual da divisão de frações (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?</p>
<p>Imagens (Im):</p>	<p><b>Im2)</b> São apresentadas imagens que ilustram uma divisão de frações?</p> <p><b>Im3)</b> As eventuais imagens que ilustram divisão de frações alternam os significados de equipartição e de medida?</p>
<p>Atividades (A):</p>	<p><b>A8)</b> As atividades contemplam todos os casos de divisão de frações (dividendo e divisor inteiro e não inteiro)?</p> <p><b>A9)</b> As atividades contemplam diferentes significados da divisão?</p>

Fonte: Acervo da autora

Como foi feito no primeiro encontro, à medida que cada critério era lido em voz alta, perguntava-se aos participantes se o critério tem redação compreensível ou se requer uma nova redação e, se este fosse o caso, qual seria a sugestão para o novo enunciado. Além disso, neste momento, foi-se prestando atenção às dificuldades registradas no quadro (ver Quadro 13) e discutindo se elas estavam sendo contempladas nos critérios e em quais critérios precisamente.

Inicialmente, foi sugerido, por um dos participantes, que fossem explicitados no critério C5 o significado dos termos “equipartição” e “medida”. A seguir, foi ressaltado, pelas ministrantes, que os critérios C5 e C6 são um detalhamento do critério C1 (para o tema específico divisão de frações), e esclareceu-se aos participantes que o critério C6 foi incluído

porque na abordagem de um determinado caso de divisão de frações a revisão do conteúdo de equivalência se torna relevante. Um dos participantes ressaltou o mal encaminhamento dado a um dos exemplos mencionados no recorte do livro didático que estava sendo analisado (a saber: Exemplo 1 da p.111 – Anexo A), pois a imagem apresentada na resolução faz uso de frações equivalentes, enquanto o cálculo não utiliza esse recurso. Destacamos que este fato já havia sido observado no momento da análise deste volume (conforme descrito em 5.2.1).

Após as(os) participantes declararem que o critério C7 está com redação compreensível, as ministrantes ressaltaram que este critério reitera uma recomendação da BNCC:

No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. (Brasil, 2018, p.265)

Prosseguindo com a leitura dos critérios, um participante perguntou o que seria entendido por “abordados”, termo utilizado no critério C8. As ministrantes esclareceram que o critério C8 foi incluído por conta dos diferentes níveis de complexidade envolvidos nos casos da divisão, e que consideravam que todos os casos da divisão de frações deveriam ser abordados em exemplos no Livro do Aluno, fato com o qual as(os) participantes concordaram.

Ao ser comentado que o nível de complexidade entre os casos “dividendo e divisor não inteiros e quociente inteiro” e “dividendo, divisor e quociente não inteiros” é diferente, uma participante sugeriu alterar-se o enunciado de C8 para “dividendo, divisor e **quociente** inteiro e não inteiro)” (grifo nosso). Nesse momento observou-se também que as dificuldades (3) e (5), apresentadas no Quadro 13, estariam contempladas em C8. Quanto ao critério A8, foi sugerida, como em C7, a inclusão da palavra “quociente” em “(dividendo e divisor inteiro e não inteiro)”. E, quanto a A9, foi sugerida a inclusão de “contextualizadas” em “As atividades contemplam”. Destacamos que apesar de, em nossa descrição (ver Capítulo 5), já estarmos analisando se todos os casos da divisão de frações estavam contemplados, inclusive os casos em que tem-se quociente inteiro e não inteiro, o termo ‘quociente’ não estava presente no enunciado do critério. Sendo assim, consideramos a sugestão da participante muito importante para a precisão dos critérios C8 e A8.

O critério C9 foi considerado compreensível pelos participantes; um dos participantes, até explicou o que entendia por “sempre que cabível”, dizendo ser impossível atribuir a uma divisão com divisor igual a  $\frac{2}{3}$ , por exemplo, o significado de equipartição.

Quando o critério C10, que estava projetado no quadro, foi lido em voz alta, um participante declarou que tinha uma dúvida, e perguntou: “A frase: ‘dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso’ não seria uma definição?” As ministrantes chamaram atenção para o fato de que, desde os anos iniciais, estudantes já vêm fazendo uso da divisão, com os significados de medida e de equipartição; então é esperado que, no 7º ano, continuem a dividir fazendo uso dessas ideias, inclusive entendendo o processo a partir delas, como, no exemplo apresentado no recorte do livro analisado (dividir  $\frac{3}{5}$  de pizza em duas partes iguais). Como consequência, na Escola, a frase “dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso” tem que ser um fato a ser deduzido, por isso o critério C11 está presente nesta lista de critérios. Os critérios C10 e C11 foram considerados compreensíveis. Foi consenso entre os presentes na oficina que no Critério 11 estão contempladas as dificuldades (3) e (6) do Quadro 13 e que em Im2 a dificuldade (1) foi contemplada.

Com a leitura de todos os critérios específicos finalizada, passou-se ao fechamento da Oficina, perguntando-se aos participantes:

Vocês consideram relevante o acréscimo dos Critérios Específicos aos Critérios Gerais em um momento de análise do tema divisão de frações?

Todas(os) as(os) participantes da oficina responderam que sim, porque os critérios específicos fizeram com que refletissem mais sobre o tema divisão de frações. Inclusive uma participante disse nunca ter “se dado conta” dos diferentes significados que uma divisão pode ter.

Como encerramento da oficina, foi apresentada aos participantes uma situação problema (Figura 64) envolvendo divisão de frações que foi elaborada, pela autora da dissertação enquanto aluna da disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático. Este problema consiste em uma situação que, além de plausível para estudantes, contempla diferentes casos de divisão de frações, incluindo aquele que é considerado o mais complexo, e contempla a dificuldade (5) do Quadro 13. Destacamos que a situação completa, bem como sua resolução, encontra-se no Apêndice D deste trabalho.

Figura 65 – Situação problema envolvendo Divisão de frações

**Considerando a situação a seguir:**

Em um estabelecimento de venda de produtos naturais, são oferecidos sucos de diferentes sabores, em 3 tamanhos de copos: Pequeno, Médio e Grande. Sabendo que o copo Pequeno corresponde a  $\frac{1}{4}$  de litro, o copo Médio a  $\frac{1}{2}$  de litro e o copo Grande a  $\frac{3}{4}$  de litro, responda, supondo que o estabelecimento já tenha preparado 2 litros de suco de laranja:

- Quantos copos Médios de suco de laranja poderão ser servidos?
- Quantos copos Pequenos de suco de laranja poderão ser servidos?
- Quantos copos Grandes de suco de laranja poderão ser servidos?

Fonte: Acervo da autora

Cabe ressaltar que esta situação problema foi apresentada, pela autora deste trabalho, no IV Simpósio Nacional de Formação de Professores que ocorreu na cidade de Santa Maria/RS, em novembro de 2022, em uma comunicação do Grupo de Discussão 02 - Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental intitulada Proposta didática para divisão de frações. Nessa ocasião, uma professora presente comentou que achava a contextualização bem adequada a estudantes de 7º ano enquanto outra professora comentou sobre a importância das imagens no entendimento da resolução da questão.

Consideramos que a discussão sobre a validação dos critérios específicos no segundo encontro também teve êxito, porque as(os) participantes continuaram se mostrando engajadas(os) na discussão e à vontade para fazerem seus comentários durante a oficina.

As contribuições das(os) participantes foram valiosas e geraram, de fato, alterações e inclusões na lista de critérios específicos. A partir dos comentários aqui relatados, as ministrantes construíram uma nova lista de critérios específicos (Quadro 15) na qual foram destacados em negrito as alterações com relação ao Quadro 14 Destacando que os critérios C12 e C13 não foram utilizados na oficina por requererem um tempo maior para explicações dos conceitos, mas encontram-se nesta lista de critérios.

Quadro 15 – Lista de critérios específicos após validação na Oficina

**Critérios Específicos para a Divisão de Frações:**

<p>Conteúdo (C) (Incluindo os exemplos):</p>	<p><b>C5)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma os significados de equipartição<sup>23</sup> e de medida<sup>24</sup> da divisão, ainda que sem mencioná-los explicitamente no Livro do Aluno?</p> <p><b>C6)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma o conceito de frações equivalentes?</p> <p><b>C7)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações faz uso de representações variadas na abordagem do tema?</p> <p><b>C8)</b> São abordados <b>nos exemplos</b> todos os casos de divisão de frações (dividendo, divisor e <b>quociente</b> inteiro e não inteiro)?</p> <p><b>C9)</b> São abordados, em cada caso de divisão de frações, os significados de equipartição e de medida, sempre que cabível?</p> <p><b>C10)</b> A abordagem do tema divisão de frações inclui o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?</p> <p><b>C11)</b> É justificado o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?</p> <p><b>C12)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações varia o tipo de registro no qual é realizado o tratamento?</p> <p><b>C13)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações explora a conversão de registros?</p>
<p>Imagens (Im):</p>	<p><b>Im2)</b> São apresentadas imagens que ilustram uma divisão de frações?</p> <p><b>Im3)</b> As eventuais imagens que ilustram divisão de frações alternam os significados de equipartição e de medida?</p>
<p>Atividades (A):</p>	<p><b>A8)</b> As atividades contemplam todos os casos de divisão de frações (dividendo, divisor e <b>quociente</b> inteiro e não inteiro)?</p> <p><b>A9)</b> As atividades <b>contextualizadas</b> contemplam diferentes significados da divisão?</p>

Fonte: Acervo da autora

<sup>23</sup> Subentende-se a divisão em partes iguais, portanto tendo como divisor um número natural. Na divisão com o significado de equipartição, o quociente é uma grandeza de mesma espécie que o dividendo.

<sup>24</sup> Subentende-se que o dividendo e o divisor são grandezas de mesma espécie, e quer-se saber quantas vezes o divisor cabe no dividendo; em outras palavras, toma-se o divisor como unidade e quer-se medir o dividendo com tal unidade. Na divisão com o significado de medida, o quociente é apenas um número (que expressa quantas vezes cabe a unidade no dividendo).

## 6.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE A OFICINA IMPLEMENTADA

A Oficina teve por objetivo validar e aprimorar a lista de critérios apresentada em 4.2, seja com relação à redação, compreensão e precisão, seja com relação à inclusão ou exclusão de algum critério (geral ou específico). Esse objetivo remete ao quarto objetivo desta pesquisa (Validar ou aprimorar a lista de critérios junto a um grupo de docentes da Escola Básica).

Ressaltamos que o grupo mostrou-se participativo e interessado no assunto da Oficina, proporcionando contribuições importantes para esta dissertação, pois privilegiou a análise e o aprimoramento da lista de critérios formulada em 4.2. Além disso, considerando que 11 participantes já haviam abordado o tópico de divisão de frações de frações em suas aulas, concluímos que tanto o propósito da Oficina quanto o quarto objetivo desta pesquisa foram alcançados. Dito isso, destacamos ainda que ficamos entusiasmadas ao observar que nenhum dos critérios estabelecidos em nossa lista foi refutado pelos participantes.

A Oficina também contribuiu para a formação continuada das(dos) participantes. De fato, as(os) presentes mencionaram que o tema do trabalho é atual e de grande relevância, complementando que a existência de uma lista de critérios iria lhes auxiliar (e poderá auxiliar demais professores) na escolha de livros didáticos de suas escolas. E mais ainda, três destes participantes da oficina, comentaram sobre a coincidência de terem uma formação (um dia após o primeiro encontro da Oficina), na qual receberam esclarecimentos para a escolha dos livros didáticos no município em que atuam, sendo essa escolha destinada ao Ensino Fundamental II para o período 2024-2028. Um dos participantes mencionou que inclusive utilizou, em suas manifestações e argumentações, frases que foram mencionadas pelas ministrantes no primeiro encontro da Oficina. Sendo assim, consideramos que a Oficina contribuiu para assegurar a relevância e a aplicabilidade da lista de critérios construída neste trabalho.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Docentes de escolas públicas brasileiras desempenham uma tarefa muito importante ao assumirem a responsabilidade de selecionar os livros didáticos que serão utilizados em suas escolas por 4 anos. Essa responsabilidade torna-se ainda maior diante do curto espaço de tempo para realizar esta tarefa e da ampla quantidade de conteúdos a serem analisados, especialmente considerando que alguns deles podem apresentar desafios tanto no ensino como na aprendizagem. Por esse motivo, neste trabalho pretendeu-se constituir uma lista de critérios gerais para uma análise de livros didáticos de matemática focando no conteúdo e critérios específicos para o conteúdo divisão de frações no 7º ano do Ensino Fundamental, para responder a seguinte pergunta de pesquisa:

*Que critérios, gerais focando no conteúdo e específicos focando no conteúdo divisão de frações, são relevantes e eficazes para uma análise de livros didáticos de matemática?*

Para alcançar os objetivos desta pesquisa, foi elaborada uma lista de critérios gerais e específicos destinada à análise de coleções didáticas e que foi apoiada na revisão de literatura, em estudos realizados ao longo da disciplina intitulada Análise e Desenvolvimento de Material Didático, oferecida pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e na experiência docente da autora deste trabalho. Os documentos oficiais (BNCC, Edital do PNLD/2020 e Guia digital do PNLD/2020) desempenharam um papel fundamental na criação de muitos critérios presentes nesta lista, visto que estes documentos já trazem alguns critérios, bem como habilidades (no caso da BNCC) que devem ser contemplados nos livros didáticos. Os estudos citados neste trabalho também contribuíram na formulação de alguns critérios, visto que apontaram para diferentes aspectos que precisam ser analisados no momento da escolha dos livros didáticos, bem como para as dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem do conteúdo de frações. Consideramos que os debates realizados na disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático foram fundamentais na reflexão sobre a importância da criação de uma lista de critérios de análise de livros didáticos.

A lista de critérios, constituída ao longo desta pesquisa, foi subdividida em categorias, sendo elas: Conteúdo, Linguagem, Imagens, Exemplos, Atividades e Manual do Professor (ver Quadro 3); optamos por enunciar os critérios na forma de perguntas com resposta “sim” ou “não”, por entendermos que, assim, conseguimos destacar mais objetivamente aspectos que

julgamos importante analisar. Esta forma de organização (resposta sim ou não) nos auxiliou na criação de um quadro resumo contendo os critérios que consideramos contemplados em cada uma das coleções analisadas (ver Quadro 9).

A análise por nós realizada de duas coleções de livros didáticos, com base nessa lista de critérios, ocorreu antes da validação externa dos critérios (Oficina - Capítulo 6) pois, assim, foi possível fazermos uma avaliação prévia da lista de critérios constituída para o trabalho, observando, inclusive, se os critérios estariam coerentes com o conteúdo trazido nos livros didáticos do 7º ano. Destacamos que nesta avaliação prévia dos critérios (Capítulo 5) já foi possível responder, na nossa opinião, sobre o termo “eficácia” que está contido na pergunta de pesquisa deste trabalho, visto que os aspectos que julgamos essenciais para o desenvolvimento de divisão de frações (no que diz respeito a conteúdo) foram detectáveis por esta lista.

As duas coleções de livros didáticos escolhidas foram as de maior distribuição na rede pública brasileira no ano de 2020. A análise possibilitou-nos observar algumas “perdas de oportunidade” por parte dos autores com relação ao desenvolvimento do pensamento matemático, por exemplo na abordagem do algoritmo usual sobre divisão de frações (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso). Percebeu-se também que os livros didáticos escolhidos abordam a divisão de frações de forma incompleta, principalmente quando a divisão produz um quociente não inteiro. Salientamos, ainda, que tínhamos a expectativa de pelo menos os critérios reiterados do Edital do PNLD/2020 fossem contemplados nos livros didáticos analisados, pois, segundo nossa interpretação do Edital, entende-se que todas as coleções aprovadas pelo PNLD/2020 atendem aos critérios descritos, em todos os seus volumes (ver seção 3.2.1). No entanto pode-se constatar que, no que diz respeito ao conteúdo específico divisão de frações, alguns desses critérios já constantes no Edital do PNLD/2020 não são completamente atendidos, como por exemplo, o critério L1 de nossa lista (que foi baseado no critério 2.1.4 b. (Apresentar conceitos, informações e procedimentos com clareza e precisão).

Comparada ao Guia Digital, a análise do tema divisão de frações por nós realizada confirmou, nas duas coleções, que “ainda são incipientes, nas obras, tarefas de investigação e de modelagem que solicitam aos(as) estudantes a elaboração e a criação de problemas.” (Brasil, 2019b, p.22).” Porém apesar de o Guia afirmar que “As obras buscam desenvolver o pensamento numérico, que implica na capacidade de contar, quantificar, julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades.” (Brasil, 2019b, p.22-23), em ambas as coleções analisadas, não foram encontradas explicações para as afirmações que remetem ao algoritmo usual da divisão de frações (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso).



A oferta de uma Oficina (descrita no Capítulo 6) para docentes da Educação Básica trouxe contribuições importantes para nossa pesquisa, pois as(os) participantes mostraram-se engajadas(os) e dispostas(os) em fazer contribuições sobre a lista de critérios que estavam analisando. Cabe ressaltar que 11 participantes já haviam abordado o tópico de divisão de frações em suas aulas, o que contribuiu para considerarmos alcançado o quarto objetivo desta pesquisa (Validar ou aprimorar a lista de critérios junto a um grupo de docentes da Educação Básica). Observamos que, em uma análise de livros didáticos, ao serem considerados apenas critérios gerais, podem estar sendo desprezados detalhes importantes em conteúdos específicos como a divisão de frações, tornando-se necessário propor critérios específicos para o conteúdo sob análise, aspecto com o qual os participantes da Oficina concordaram.

A Oficina também contribuiu para a formação continuada das(dos) participantes, visto que, as(os) presentes consideraram que o tema do trabalho é atual e de grande relevância, ao declararem que a existência de uma lista de critérios iria lhes auxiliar (e poderá auxiliar demais professores) na escolha de livros didáticos em suas escolas. Nessa direção (formação continuada), a Oficina teve já seus efeitos positivos: no segundo encontro, um dos participantes mencionou que inclusive utilizou, em suas manifestações e argumentações em um curso que tratava da importância da escolha de um livro didático e do qual participou como convidado, frases que foram mencionadas pelas ministrantes no primeiro encontro da Oficina. Sendo assim, entendemos que a pergunta de pesquisa deste trabalho foi completamente respondida.

Como produto final desta dissertação apresentamos a lista dos critérios, aprimorados na Oficina, que busca auxiliar professores no momento da seleção dos livros didáticos de suas escolas, visto que, como apresentado na introdução deste trabalho (e confirmado na Oficina - ver Cap.6), ainda existem questionamentos, entre alguns grupos docentes, sobre qual seria a forma mais adequada de realizar essa seleção. No Quadro 16 encontra-se a lista completa de critérios gerais e específicos, já sendo incluídas as alterações nos critérios provenientes da Oficina (critérios A3, MP2, C5, C7 e C8). Reiteramos que as perguntas foram elaboradas de tal forma que uma resposta “sim” ressalta, na nossa opinião, um aspecto positivo do livro didático analisado.

Quadro 16 – Lista de critérios gerais e específicos validada e aprimorada na Oficina

<b>Critérios Gerais para um conteúdo sob análise:</b>
---

Conteúdo (C):	<p><b>C1)</b> Ocorre uma retomada dos conteúdos prévios necessários antes da introdução do conteúdo?</p> <p><b>C2)</b> O conteúdo está organizado com encadeamento lógico?</p> <p><b>C3)</b> O conteúdo está matematicamente correto?</p> <p><b>C4)</b> O conteúdo contempla as correspondentes habilidades da BNCC?</p>
Linguagem (L):	<p><b>L1)</b> O conteúdo é desenvolvido no Livro do Aluno em uma linguagem compreensível para estudantes?</p>
Imagens (Im):	<p><b>Im1)</b> As imagens apresentadas estão relacionadas com o texto e auxiliam estudantes no entendimento do conteúdo?</p>
Exemplos (E):	<p><b>E1)</b> Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados?</p> <p><b>E2)</b> Os exemplos que foram considerados contextualizados trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?</p>
Atividades (A):	<p><b>A1)</b> As atividades propostas são, em grande parte, contextualizadas?</p> <p><b>A2)</b> As atividades que foram consideradas contextualizadas trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?</p> <p><b>A3)</b> São propostas situações-problema, isto é, atividades contextualizadas cujas resoluções exigem uma estratégia de ação por parte de estudantes?</p> <p><b>A4)</b> As primeiras atividades propostas no capítulo que trata do conteúdo sob análise são apresentadas em uma ordem crescente de complexidade, ou seja, partem das atividades mais simples até as matematicamente mais complexas?</p> <p><b>A5)</b> Existem atividades que estimulam estudantes a elaborar problemas?</p> <p><b>A6)</b> Existem atividades que estimulam o desenvolvimento do pensamento matemático?</p> <p><b>A7)</b> Existem atividades que exploram mais de um tipo de representação?</p>

Manual do Professor (MP):	<p><b>MP1)</b> A linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível para professores?</p> <p><b>MP2)</b> São sugeridas regularmente abordagens a professores que apontam para alguma atenção especial relacionada ao ensino e a aprendizagem desse conteúdo?</p> <p><b>MP3)</b> São explicitados os objetivos de cada atividade proposta?</p> <p><b>MP4)</b> São apresentadas alternativas de aprofundamento do conteúdo, para estudantes ou para professores, que estimulem a argumentação e a demonstração (ou, pelo menos, são apresentadas referências)?</p>
---------------------------	--

### Critérios Específicos para a Divisão de Frações:

Conteúdo (C) (Incluindo os exemplos):	<p><b>C5)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma os significados de equipartição<sup>25</sup> e de medida<sup>26</sup> da divisão, ainda que sem mencioná-los explicitamente no Livro do Aluno?</p> <p><b>C6)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações retoma o conceito de frações equivalentes?</p> <p><b>C7)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações faz uso de representações variadas na abordagem do tema?</p> <p><b>C8)</b> São abordados nos exemplos todos os casos de divisão de frações (dividendo, divisor e quociente inteiro e não inteiro)?</p> <p><b>C9)</b> São abordados, em cada caso de divisão de frações, os significados de equipartição e de medida, sempre que cabível?</p> <p><b>C10)</b> A abordagem do tema divisão de frações inclui o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?</p> <p><b>C11)</b> É justificado o algoritmo usual da divisão (dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso)?</p> <p><b>C12)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações varia o tipo de abordagem utilizado (em palavras, por imagem explicativa, em linguagem simbólica)?</p> <p><b>C13)</b> O capítulo (ou seção) que apresenta a divisão de frações explora diferentes tipos de representações (por exemplo, escrita, pictórica)?</p>
--	---

<sup>25</sup> Subentende-se a divisão em partes iguais, portanto tendo como divisor um número natural. Na divisão com o significado de equipartição, o quociente é uma grandeza de mesma espécie que o dividendo.

<sup>26</sup> Subentende-se que o dividendo e o divisor são grandezas de mesma espécie, e quer-se saber quantas vezes o divisor cabe no dividendo; em outras palavras, toma-se o divisor como unidade e quer-se medir o dividendo com tal unidade. Na divisão com o significado de medida, o quociente é apenas um número (que expressa quantas vezes cabe a unidade no dividendo).

Imagens ( <b>Im</b> ):	<p><b>Im2)</b> São apresentadas imagens que ilustram uma divisão de frações?</p> <p><b>Im3)</b> As eventuais imagens que ilustram divisão de frações alternam os significados de equipartição e de medida?</p>
Atividades ( <b>A</b> ):	<p><b>A8)</b> As atividades contemplam todos os casos de divisão de frações (dividendo, divisor e quociente inteiro e não inteiro)?</p> <p><b>A9)</b> As atividades contextualizadas contemplam diferentes significados da divisão?</p>

Fonte: Acervo da autora

Destacamos que, alertadas pelos membros da Banca Avaliadora deste trabalho, reformulamos os critérios A7, C12 e C13 para o enunciado que está redigido no Quadro 16, com o objetivo de abranger o maior número de docentes possível, sem fazer uso de termos específicos da teoria de Duval. Com isso, percebemos que se esses critérios, da forma como estão redigidos no Quadro 16, dispensando qualquer alusão à teoria de Duval, poderiam ter feito parte da oficina (Cap. 6).

Encerramos esse trabalho salientando que, com as devidas adaptações, consideramos essa lista de critérios (inclusive os específicos) pode ser utilizada na análise de outros conteúdos presentes nos livros didáticos.

Como perspectiva de continuidade deste trabalho, planeja-se desenvolver uma sequência de atividades que abordem todos os casos da divisão de frações e que contemplem a nossa lista de critérios. Consideramos como um dos pontos fundamentais que esta sequência de atividades seja apoiada na Teoria das Representações Semióticas de Duval, uma vez que essa teoria nos fez refletir sobre as potencialidades de cada tipo de representação de frações, algo que consideramos essencial para o aprendizado do conteúdo Divisão de frações. Sendo assim, reconhecemos que, embora a Teoria de Duval esteja implicitamente presente em três de nossos critérios específicos (ver C12, C13 e A7 em 4.2), ainda se faz necessário um aprofundamento desta Teoria, visto que foi pouco explorada, especialmente na nossa análise dos livros didáticos. Posteriormente, pretende-se aplicar essa sequência de atividades em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, a fim de produzir dados para uma análise empírica. Assim, espera-se avaliar qualitativamente aprendizagens proporcionadas por essas atividades a partir de dados como registros e discussões entre estudantes.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araújo, J. L.; Borba, M. C. **Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática**. In: BORBA, M. de C. Pesquisa qualitativa em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Content knowledge for teaching: What makes it special?** *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p.389-407, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em 29 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, 2017. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em 04 dez. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Secretaria de Educação Básica. Ensino Fundamental: Anos Finais. 2019a  
Disponível em: <https://www.gov.br/fnde/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/consultas-editais/editais/edital-pnld-2020-1> Acesso em 04 dez. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. PNLD 2020: matemática – guia de livros didáticos/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2019b. Disponível em: [https://pnld.nees.ufal.br/pnld\\_2020/inicio](https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2020/inicio). Acesso em: 05 dez. 2023.

CARBONE, R.E.; EATON, P.T. **Prospective Teachers' Knowledge of Addition and Division of Fractions** In: Proceedings of ICME 11, Mexico, 2011, p.39-45.

CERQUEIRA, M.S. **Atividade versus exercício: concepções teóricas e a prática da produção textual no ensino de língua portuguesa**. *Trab. Ling. Aplic.*, Campinas, 49(1):129-143, jan./jun. 2010 Disponível em: <https://www.scielo.br/j/tla/a/WPS57kJcvZZDcYgqPjLwHJx/?lang=pt#> . Acesso em: 02. mar.2024

D'AMORE, B. **Intuição e demonstração**. In: *Elementos de didática da matemática*. 1ª Ed. [tradução Maria Cristina Bonomi] São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. p. 329-364.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática**, 7º ano; ensino fundamental: anos finais/ Luiz Roberto. Dante. - 3. ed. - São Paulo: Ática, 2018. (versão impressa).

DOERING, L. R. e RIPOLL, C. C. I COLÓQUIO DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA, 2022, Rio Claro – SP. **Análise e desenvolvimento de material didático escolar 2021/2: Um relato.** 17p. (versão impressa).

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática.** Em S. D. Machado, *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.* (pp. 11-33). Campinas: Papyrus, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais.** Tradução de Lênio Fernandes Levy, Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma - entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.** Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011, 160p.

DUVAL, R. **Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática?** Tradução de Mércles Thadeu Moretti. In REVEMAT, v.13, n.2. Florianópolis, 2018. p.1-27.

FARIAS, C. T. R. A.; SOUZA, J. T. O. S. Uma proposta didática para divisão de frações. **Anais do 5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática**, [S. l.], p. 90-97, nov. 2022. Disponível em: <https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2023/04/anais-5o-simposio-nacional.pdf>. Acesso em: 02. Mar.2024.

FISCHER, D. S. O. **Investigando o ensino e a aprendizagem de multiplicação de frações: um estudo com alunos do 6º ano.** Orientadora: Profa. Dra. Cydara Cavedon Ripoll. 2020. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática e Estatística. Programa de Pós-Graduação em ensino de matemática. Porto Alegre, RS, 2020. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/220068> . Acesso em: 07 dez. 2023.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (orgs). **Métodos de pesquisa.** Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad004.pdf>. Acesso em: 8 dez. 2023.

GIOVANNI JUNIOR, J. R.; **A conquista da matemática: 7º ano; ensino fundamental: anos finais/** José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci - 4a edição - São Paulo: FTD, 2018.

HANNA, G. **Some pedagogical aspects of proof.** Interchange, 01, fev. 1990. 6-13, Springer. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/226635673\\_Some\\_pedagogical\\_aspects\\_of\\_proof](https://www.researchgate.net/publication/226635673_Some_pedagogical_aspects_of_proof)>. Acesso em: 14.abr.2023

KLEIN, F. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior.** Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

LAZZARETTI, R.; MATHIAS, C. V. **Uma análise do conteúdo de razão e proporção em livros didáticos do Ensino Fundamental.** Revista de Ensino de Ciências e Matemática, [S. l.], v. 14, n. 1, p. 1–21, 2023. DOI: 10.26843/rencima.v14n1a18. Disponível em:

<https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/4059>. Acesso em: 28 fev. 2024.

LI, Y.; SMITH, D. **Prospective Middle School Teachers' Knowledge in Mathematics and Pedagogy for Teaching - the Case of Fraction Division**. In: Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 3, , p.185-192, Seoul, Korea, 2007.

LO, J.J., McCRORY, R. **Proof and Proving in a Mathematics Course for Prospective Elementary Teachers**. Proceedings of the ICMI Study Group 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, vol.2, p 41-46, 2009.

MEINERZ, F. M., DOERING, L. R., RIPOLL, C. C.; **Ábaco virtual e ábaco físico dos números inteiros: proposta para a sala de aula**. 5º Simpósio Nacional da formação do professor de matemática. 2022.

MONTEIRO, C., e PINTO, H. **A Aprendizagem dos números racionais**. Quadrante, 14(1), p. 89–107, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.48489/quadrante.22785>. Acesso em: 07 abr.2023.

MORTARI, C. A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 393 p.,2001. Disponível em:<https://moodlep.uem.br/pluginfile.php/172149/course/overviewfiles/MORTARI%2C%20C.%20A.%20Introdu%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20L%C3%B3gica.pdf?forcedownload=1> . Acesso em: 04 jun. 2023.

PANTOJA, L. F. L.; CAMPOS, N. F. S. C.; SALCEDOS, R. R. C. **A Teoria dos Registros das Representações Semióticas e o Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares**. Comunicação Científica. IV Congresso Internacional de Ensino de Matemática. 2013.

RANGEL, M. **Qualidade do livro didático: dos Critérios da literatura acadêmica aos do programa nacional do livro didático. Linhas críticas**, Brasília, v. 11, nº 21, p. 187-200, jul/dez 2004. Disponível em: < <https://doi.org/10.26512/lc.v11i21.3236>>. Acesso em: 10.abr.2021.

REZENDE, W.M. Divisão de frações: “Professor, é pra tirar o M.M.C.?”). Boletim do LABEM. v. 5, n. 9, p.65-69, 2014.

RIPOLL, C.; GIRALDO, V.; RANGEL, L. **Livro do Professor de Matemática na Educação Básica**, Vol. 1: Números Naturais. Coleção matemática para o Ensino, SBM, 2015.

SCHEFFER, N.F.; POWELL, A.B. **Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)**. *Revemop*, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 476-503, set./dez. 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/1977>. Acesso em: 29 fev.2024.

SHULMAN, L. S. **Those who understand: Knowledge growth in teaching**. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SOUZA, J. C. G. **Uma proposta de análise de livro didático de Matemática para os anos iniciais**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Universidade Estadual de Santa Cruz - Ilhéus/BA. Programa de pós-graduação PROFMAT 2014. Disponível em:

[https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=1924&id2=82306](https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1924&id2=82306). Acesso em 01.dez.2023.

SOUZA, R. N. G. **Abordagem de frações equivalentes: uma experiência no 6º ano do ensino fundamental**. Orientadora: Profa. Dra. Cydara Cavedon Ripoll. 2019. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2019. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/212591>. Acesso em 03 dez.2023.

STERNBERG, R. J. **What Is Mathematical Thinking?**, in *The Nature of Mathematical Thinking*, Lawrence Erlbaum Ass. Pub., Mahwah, NJ, p.303-318, 1996.

STYLIANIDES, G. J. **An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving**. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16, 2008. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/4024859> Acesso em: 28 fev.2024.

VULA, E.; KINGJI-KASTRATI, J.; PODVORICA, F. **A comparative analysis of mathematics textbooks from Kosovo and Albania based on the topic of fractions**. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.1759-176. Disponível em <https://hal.science/hal-01288036/>. Acesso em 01 mar.2024.



## APÊNDICES

### APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

#### Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) colega, você está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa intitulada “Análise de Livros Didáticos focando na Divisão de Frações”.

A pesquisa está sendo desenvolvida pela pesquisadora Cássia Tatiane Rockemback de Almeida Farias, estudante do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Profa. Dra. Cydara Cavedon Ripoll, a quem você poderá contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do e-mail [cydara@mat.ufrgs.br](mailto:cydara@mat.ufrgs.br).

O objetivo desta pesquisa é refletir sobre uma lista de critérios gerais para uma análise de livros didáticos de matemática focando no conteúdo e critérios específicos para o conteúdo divisão de frações no 7º ano do Ensino Fundamental.

Solicitamos sua colaboração nessa pesquisa por meio de participação em uma oficina presencial, que ocorrerá nos dias 02 e 04 de agosto de 2023, das 19h às 20h40, no Campus IFRS - Campus Canoas, situado na Rua Dra. Maria Zélia Carneiro de Figueiredo, 870 - Igara, Canoas – RS.

O uso das informações decorridas da sua participação (transcrição de relatos e preenchimento de formulários) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas por um código alfanumérico. Todas as informações fornecidas por você serão armazenadas sob responsabilidade da pesquisadora principal por pelo menos cinco (5) anos após o término da investigação.

Cabe esclarecer que são mínimos os riscos decorrentes da participação na pesquisa, no que diz respeito a eventual constrangimento em responder e/ou compartilhar alguma questão ou experiências de vida no decorrer do projeto de extensão, ou difusão da privacidade e à confidencialidade de suas informações. De fato, cada participante da pesquisa será convidado a participar de conversas que envolvem questões acadêmicas, didáticas e pedagógicas, ou a compartilhar experiências apenas se sentir-se confortável, e na divulgação dos resultados serão descartadas todas as informações que possam levar à identificação do participante.

Já com relação aos benefícios, você terá a oportunidade de contribuir para os resultados desta pesquisa, bem como favorecer a realização de futuras investigações sobre o tema, e possivelmente, a partir de suas falas, fazer os responsáveis por esta pesquisa refletir e gerar conteúdos para análise.

A sua participação não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Sua participação é muito importante e é voluntária. Você poderá recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma para você se essa for sua decisão

A assinatura do termo não exclui a possibilidade de o(a) participante buscar indenização diante de eventuais danos decorrentes de sua participação na pesquisa, como preconiza a

Resolução 466/12, item IV. A sua colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por você assinado.

Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, a qualquer momento, pelo telefone (51) 99284-9866 ou pelo e-mail [cassiatrafarias@gmail.com](mailto:cassiatrafarias@gmail.com), terei o prazer em prestar informações adicionais. Caso tenha dúvidas acerca de procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como telefone (51) 3308-3787 e e-mail [etica@propesq.ufrgs.br](mailto:etica@propesq.ufrgs.br).

Obrigada pela sua colaboração.

Eu, \_\_\_\_\_, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada “Análise de Livros Didáticos focando na Divisão de Frações”, desenvolvida pela pesquisadora Cássia Tatiane Rockemback de Almeida Farias.



Porto Alegre, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura do(a) Participante: \_\_\_\_\_

Assinatura da Pesquisadora: \_\_\_\_\_

Assinatura da Orientadora: \_\_\_\_\_

**APÊNDICE B – FORMULÁRIO INICIAL**




**OFICINA: Critérios de Análise de Livros Didáticos**

Mestranda: Cássia Tatiane Rockemback Farias  
Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cydara Cavendon Ripoll

## Formulário Inicial

Você está preenchendo o Formulário 1 da Oficina intitulada "Critérios de Análise de Livros Didáticos". Seu preenchimento é destinado a identificação dos participantes.

 Não compartilhado

Nome:

Sua resposta

Escola em que atua:

Sua resposta

Nível de atuação:

- Ensino Fundamental I
- Ensino Fundamental II
- Ensino Médio
- Outros

Na escola (e no nível) em que atua, é utilizada alguma coleção de livros didáticos?  
Qual?

Sua resposta

---

Você já ensinou Divisão de Frações no Ensino Fundamental II?

- Sim, já ensinei.
- Não, ainda não ensinei.

Em caso afirmativo, para a pergunta acima, que dificuldades você apontaria no ensino e/ou na aprendizagem desse tema?

Sua resposta

---

**Enviar**



Limpar formulário

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google. [Denunciar abuso](#) - [Termos de Serviço](#) - [Política de Privacidade](#)

**Google** Formulários

## APÊNDICE C – FORMULÁRIO 2





**Programa de Pós-Graduação**  
**IME-UFRRS**

**OFICINA: Critérios de Análise de Livros Didáticos**

Mestranda: Cássia Tatiane Rockemback Farias  
Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cydara Cavedon Ripoll

## Formulário 2 - Critérios para análise de um livro didático.

A seguir, serão apresentados os critérios gerais de análise de Livros Didáticos. Registre as considerações referentes ao conjunto de critérios do seu grupo.

 Não compartilhado 

\* Indica uma pergunta obrigatória

Nome dos integrantes do grupo:

Sua resposta

Após a apresentação da lista de Critérios Gerais, vocês classificariam o enunciado de todos critérios como compreensível? \*

Sim

Não

Em parte

Vocês acrescentariam, retirariam ou reformulariam algum critério desta lista? Se a resposta for afirmativa, qual(ais) seria(m)? Neste caso, qual seria a sugestão de redação?

Sua resposta

Para acessar o recorte do Livro "A conquista da Matemática", clique no link abaixo:  
[https://drive.google.com/drive/folders/1\\_I EZyj\\_UolGrLS4PM77Ahfu0V8mSi\\_UL?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/1_I EZyj_UolGrLS4PM77Ahfu0V8mSi_UL?usp=sharing)

Bloco 1 - Dos critérios relacionados ao Conteúdo, Linguagem, Imagens e Exemplos, marque a alternativa que mais se aplica:

	Sim	Não	Em parte
C1) Ocorre uma retomada dos conteúdos prévios necessários antes da introdução do conteúdo sob análise?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
L1) O conteúdo é desenvolvido em uma linguagem compreensível para estudantes?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Im1) As imagens apresentadas estão relacionadas com o texto e auxiliam estudantes no entendimento do conteúdo?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E1) Os exemplos apresentados são, em sua maioria, contextualizados?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E2) Os exemplos que foram considerados contextualizados trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Comentários relacionados à análise realizada sobre o Conteúdo, Linguagem, Imagens e Exemplos, a partir dos critérios do Bloco 1, justificando o seu preenchimento.

Sua resposta

---

Bloco 2 - Dos critérios relacionados as Atividades, marque a alternativa que mais se aplica:

	Sim	Não	Em parte
A1) As atividades propostas são, em grande parte, contextualizadas?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
A2) As atividades que foram consideradas contextualizadas trazem situações condizentes com a vivência de estudantes ou, pelo menos, são plausíveis para estudantes?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
A3) São propostas, efetivamente, situações-problema?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
A4) As atividades propostas são apresentadas em uma ordem crescente de complexidade, ou seja, partem de atividades mais simples até as matematicamente mais complexas?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
A5) Existem atividades que estimulam estudantes a elaborar problemas?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Comentários relacionados à análise realizada sobre as Atividades, a partir dos critérios do Bloco 2, justificando o seu preenchimento.

Sua resposta

---

Bloco 3 - Dos critérios relacionados ao Manual do Professor, marque a alternativa que mais se aplica:

	Sim	Não	Em parte
MP1) A linguagem utilizada no Manual do Professor é compreensível para professores?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
MP2) São sugeridas regularmente abordagens para professor especialmente relacionadas a aspectos delicados do ensino e da aprendizagem do conteúdo desse conteúdo?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
MP3) São explicitados os objetivos de cada atividade proposta?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
MP4) São apresentadas alternativas de aprofundamento do conteúdo, para estudantes ou para professores, que estimulem a argumentação e a demonstração (ou, pelo menos, são apresentadas referências)?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Comentários relacionados à análise realizada sobre o Manual do Professor, a partir dos critérios do Bloco 3, justificando o seu preenchimento.

Sua resposta

---

Enviar

Limpar formulário

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google. [Denunciar abusos](#) - [Termos de Serviço](#) - [Política de Privacidade](#)

Google Formulários



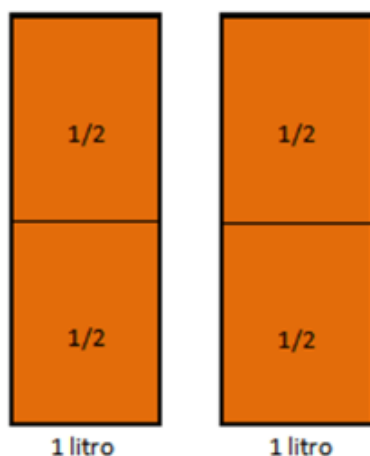
## APÊNDICE D – SITUAÇÃO DA OFICINA

### Considerando a situação a seguir:

Em um estabelecimento de venda de produtos naturais, são oferecidos sucos de diferentes sabores, em 3 tamanhos de copos: Pequeno, Médio e Grande. Sabendo que o copo Pequeno corresponde a  $\frac{1}{4}$  de litro, o copo Médio a  $\frac{1}{2}$  de litro e o copo Grande a  $\frac{3}{4}$  de litro, responda, supondo que o estabelecimento já tenha preparado 2 litros de suco de laranja:

- Quantos copos Médios de suco de laranja poderão ser servidos?
- Quantos copos Pequenos de suco de laranja poderão ser servidos?
- Quantos copos Grandes de suco de laranja poderão ser servidos?

- Quantos copos Médios de suco de laranja poderão ser servidos?



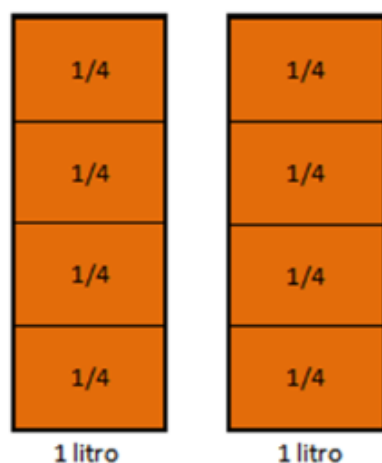
De fato, cada copo médio tem capacidade para metade do litro, então, 2 litros de suco servirão  $2 \times 2$  copos médios = 4 copos médios.

Então, concluímos que

$$2 \div \frac{1}{2} = 4$$

Representação pictórica que ampara a resolução do item (a).

b) Quantos copos Pequenos de suco de laranja poderão ser servidos?



De fato, cada copo pequeno tem capacidade para  $\frac{1}{4}$  do litro, então, 2 litros de suco servirão  $2 \times 4$  copos médios = 8 copos pequenos.

Então, concluímos que

$$2 \div \frac{1}{4} = 8$$

Representação pictórica que ampara a resolução do item (b).

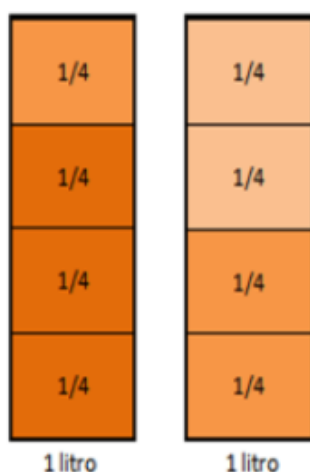
c) Quantos copos Grandes de suco de laranja poderão ser servidos?



Na situação do item (c) temos, no primeiro momento, a divisão de 1 litro em 4 partes iguais e tomamos 3 delas, representando assim os  $\frac{3}{4}$  de litro que é a capacidade de um copo Grande.

Representação pictórica da divisão do litro em quartos de litro.

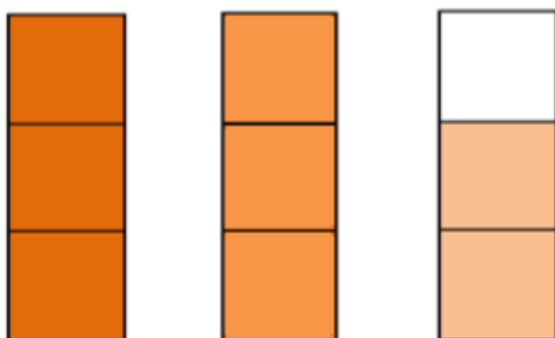
c) Quantos copos Grandes de suco de laranja poderão ser servidos?



Em seguida temos a divisão dos 2 litros (cada um deles em 4 partes iguais) e tomamos 3 delas, representando assim os  $\frac{3}{4}$  de litro que é a capacidade de um copo Grande.

Representação pictórica que ampara a resolução do item (c).

c) Quantos copos grandes de suco de laranja poderão ser servidos?



Copo grande  $\frac{3}{4}$  de litro Copo grande  $\frac{3}{4}$  de litro Copo grande  $\frac{3}{4}$  de litro

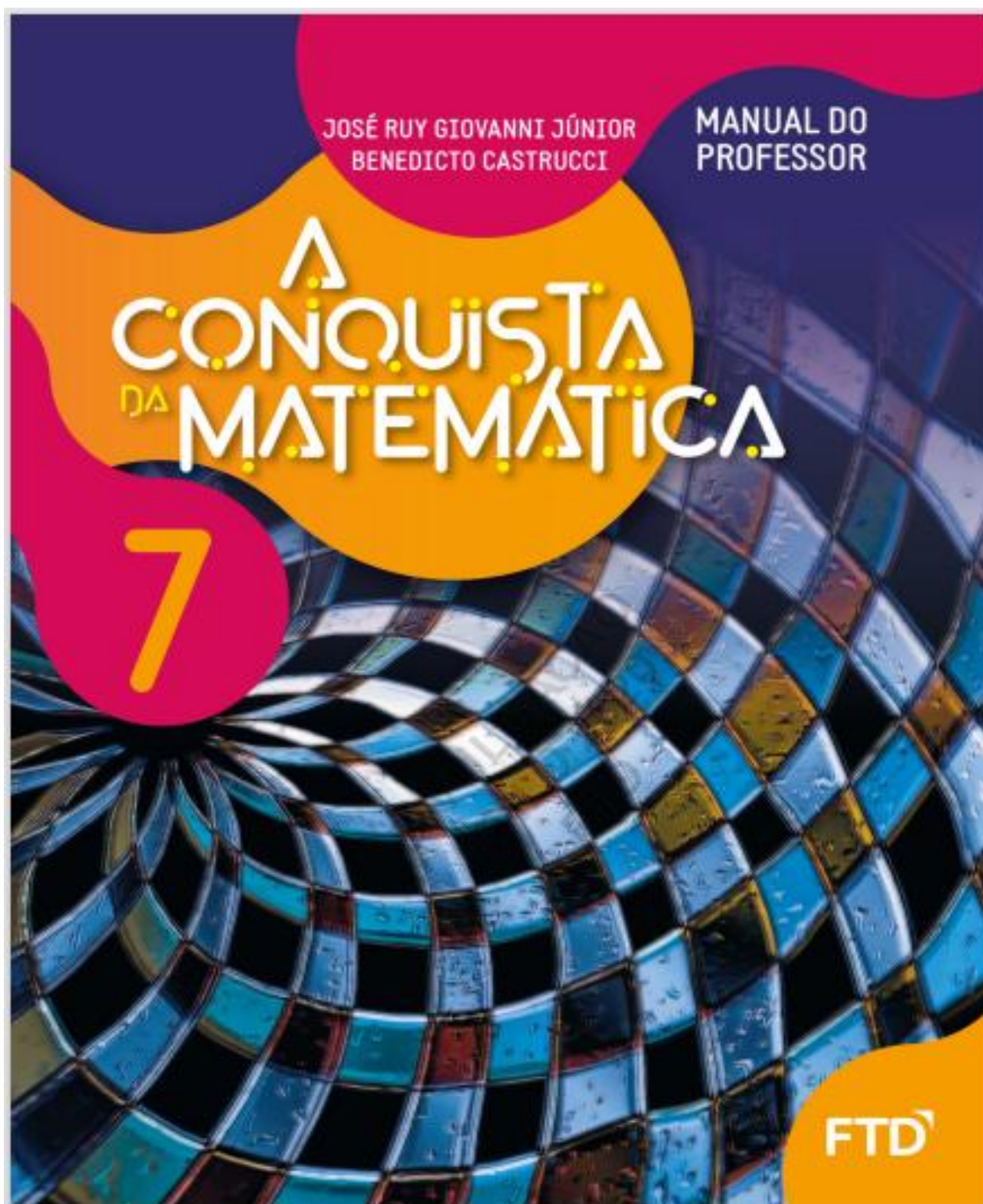
Representação pictórica para a distribuição em copos.

Assim, temos que 2 litros de suco servirão 2 copos Grandes inteiros e o restante ( $\frac{2}{4}$  de litro) preencherá apenas dois dos três quartos que é a capacidade do copo Grande.

Nessa situação temos que  
 $2 \div \frac{3}{4} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

## ANEXOS

## ANEXO A – LIVRO DIDÁTICO: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA



# A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

# 7

MANUAL DO  
PROFESSOR

## **JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR**

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Professor e assessor de Matemática em escolas de Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

## **BENEDICTO CASTRUCCI**

(Falecido em 2 de janeiro de 1995)

Bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP).

Foi professor de Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) e da Universidade de São Paulo (USP).

Foi professor de Matemática em escolas públicas e particulares de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Ensino Fundamental – Anos Finais

Componente curricular: Matemática

4ª edição – São Paulo – 2018

**FTD**

# SUMÁRIO

## UNIDADE 1

### NÚMEROS NATURAIS E OPERAÇÕES ..... 12

1. Os números naturais ..... 14	14
Sequência numérica ..... 14	14
Atividades ..... 15	15
2. Operações com números naturais ..... 16	16
Adição e subtração ..... 16	16
Multiplicação e divisão ..... 17	17
Atividades ..... 18	18
Por toda parte • Conheça Palmas ..... 19	19
3. Divisores e múltiplos de um número natural ..... 20	20
Divisores ..... 20	20
Múltiplos ..... 20	20
Números primos ..... 21	21
Decomposição em fatores primos ..... 21	21
Máximo divisor comum (m.d.c.) ..... 22	22
Mínimo múltiplo comum (m.m.c.) ..... 23	23
Atividades ..... 24	24
Tratamento da informação • Gráficos de colunas triplas e de barras triplas ..... 26	26
Retomando o que aprendeu ..... 28	28

## UNIDADE 2

### O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS ..... 30

1. A ideia de números inteiros ..... 32	32
Entendendo os números negativos ..... 33	33
Atividades ..... 35	35
2. O conjunto dos números inteiros ..... 36	36
A reta numérica ..... 36	36
Atividades ..... 38	38
3. Módulo de um número inteiro ..... 39	39
Números inteiros opostos ou simétricos ..... 40	40
Atividades ..... 40	40
4. Comparação de números inteiros ..... 41	41
Atividades ..... 43	43
Por toda parte • Temperaturas pelo Brasil ..... 44	44
5. Adição de números inteiros ..... 45	45
Atividades ..... 50	50

6. Subtração de números inteiros ..... 52	52
Atividades ..... 54	54
7. Adição algébrica ..... 55	55
Atividades ..... 57	57
8. Multiplicação de números inteiros ..... 59	59
Propriedades da multiplicação ..... 61	61
Atividades ..... 63	63
9. Divisão exata de números inteiros ..... 64	64
Atividades ..... 65	65
10. Potenciação de números inteiros ..... 66	66
Propriedades da potenciação em $\mathbb{Z}$ ..... 67	67
Atividades ..... 68	68
11. Raiz quadrada exata de números inteiros ..... 69	69
Atividades ..... 69	69
12. Expressões numéricas ..... 70	70
Atividades ..... 71	71
Tratamento da informação • Análise de gráficos com números negativos ..... 72	72
Retomando o que aprendeu ..... 74	74

## UNIDADE 3

### TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA ..... 76

1. Transformações no plano ..... 78	78
Polígonos e sistema de coordenadas ..... 78	78
Ampliação e redução ..... 78	78
Reflexão ..... 79	79
Ampliação e redução com o uso da malha quadriculada ..... 80	80
Atividades ..... 82	82
Por toda parte • Maquetes e miniaturas ..... 83	83
Tratamento da informação • Gráfico de setores ..... 84	84
2. Simetria ..... 86	86
A ideia de simetria ..... 86	86
Tipos de simetria ..... 87	87
Atividades ..... 90	90
Tecnologias • Simetrias com GeoGebra ..... 92	92
Retomando o que aprendeu ..... 94	94
Atualidades em foco • Educação ambiental – arte e lixo ..... 96	96

## UNIDADE 4 O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS ..... 98

<b>1. Os números racionais</b> ..... 100	
Módulo ou valor absoluto de um número racional ..... 101	
A reta numérica ..... 102	
<b>Atividades</b> ..... 103	
<b>2. Adição algébrica de números racionais</b> .. 104	
<b>Atividades</b> ..... 105	
<b>3. Multiplicação com números racionais</b> .... 106	
Multiplicação de números racionais na forma decimal ..... 106	
Multiplicação de números racionais na forma de fração ..... 107	
<b>Atividades</b> ..... 109	
<b>4. Divisão com números racionais</b> ..... 110	
Divisão com números racionais na forma decimal ..... 110	
Divisão com números racionais na forma de fração ..... 111	
<b>Atividades</b> ..... 114	
<b>5. Potenciação de números racionais</b> ..... 116	
Expoente inteiro negativo ..... 117	
<b>Atividades</b> ..... 118	
<b>Por toda parte</b> • Esportes: o atletismo ..... 119	
<b>6. Raiz quadrada exata de números racionais</b> ..... 120	
<b>Atividades</b> ..... 122	
<b>Educação financeira</b> •	
A ciência dos preços ..... 123	
<b>7. Média aritmética e média aritmética ponderada</b> ..... 124	
<b>Atividades</b> ..... 125	
<b>Tratamento da informação</b> • Análise de tabelas e gráficos com números racionais negativos ..... 126	
<b>Retomando o que aprendeu</b> ..... 128	

## UNIDADE 5 LINGUAGEM ALGÉBRICA E EQUAÇÕES ..... 130

<b>1. Sequências</b> ..... 132	
Termo geral de uma sequência recursiva .... 133	
<b>Atividades</b> ..... 134	
<b>2. Expressões algébricas</b> ..... 135	
A ideia de variável ..... 135	
<b>3. Igualdade</b> ..... 136	
Propriedades de uma igualdade ..... 137	
Princípios de equivalência ..... 137	
<b>Atividades</b> ..... 138	
<b>4. Equações</b> ..... 139	
Conhecendo as equações ..... 139	
<b>Atividades</b> ..... 141	
<b>5. Conjunto universo e solução de uma equação</b> ..... 142	
Como verificar se um número dado é raiz de uma equação ..... 144	
<b>Atividades</b> ..... 144	
<b>Por toda parte</b> • Crescimento populacional ..... 145	
<b>6. Equações equivalentes</b> ..... 146	
Como reconhecer equações equivalentes .... 146	
Escrever uma equação equivalente a uma equação dada ..... 147	
<b>Atividades</b> ..... 149	
<b>7. Equações do 1º grau com uma incógnita</b> ..... 150	
Resolvendo equações do 1º grau com uma incógnita ..... 150	
<b>Atividades</b> ..... 153	
<b>8. Equações na resolução de problemas</b> ... 156	
<b>Atividades</b> ..... 159	
<b>Tratamento da informação</b> •	
Gráficos de linhas (ou de segmentos) ..... 160	
<b>Retomando o que aprendeu</b> ..... 162	



AGUSTINA CAMILLON/Shutterstock.com

**UNIDADE 6**  
**FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS** ..... 164

<b>1. Ângulos</b> .....	<b>166</b>
Definição e medida de um ângulo .....	166
Classificação de ângulos .....	167
Ângulos congruentes .....	168
Ângulos consecutivos e	
ângulos adjacentes .....	168
<b>Atividades</b> .....	<b>170</b>
Ângulos complementares .....	171
Ângulos suplementares .....	171
<b>Atividades</b> .....	<b>172</b>
<b>2. Retas</b> .....	<b>173</b>
Retas paralelas e retas concorrentes .....	173
Ângulos opostos pelo vértice .....	174
<b>Atividades</b> .....	<b>175</b>
Retas paralelas cortadas por	
uma transversal .....	176
<b>Atividades</b> .....	<b>180</b>
<b>3. Triângulos</b> .....	<b>182</b>
Condição de existência de um triângulo ...	182
Soma das medidas dos ângulos internos	
de um triângulo .....	183
<b>Atividades</b> .....	<b>185</b>
<b>4. Polígonos regulares</b> .....	<b>186</b>
Medidas dos ângulos internos de	
um polígono regular .....	186
Ângulos externos .....	187
<b>Atividades</b> .....	<b>187</b>
<b>5. Circunferência</b> .....	<b>188</b>
O número $\pi$ .....	189
<b>Atividades</b> .....	<b>190</b>
<b>6. Construções geométricas</b> .....	<b>191</b>
Construção de uma circunferência .....	191
Construção de um triângulo .....	191
Construção de um polígono regular .....	192
<b>Tratamento da informação</b> • Prática	
de atividade física .....	194
<b>Retomando o que aprendeu</b> .....	<b>196</b>
<b>Atualidades em foco</b> • Direitos dos idosos ...	<b>198</b>

**UNIDADE 7**  
**GRANDEZAS PROPORCIONAIS** ..... 200

<b>1. Razão</b> .....	<b>202</b>
<b>Atividades</b> .....	<b>205</b>
Razões escritas na forma decimal .....	207
Razões escritas na forma percentual .....	207
<b>Atividades</b> .....	<b>209</b>
<b>2. Proporção</b> .....	<b>210</b>
Propriedade fundamental das proporções ...	212
<b>Atividades</b> .....	<b>214</b>
Números diretamente proporcionais .....	216
Números inversamente proporcionais .....	218
<b>Atividades</b> .....	<b>219</b>
Grandezas diretamente proporcionais .....	220
Grandezas inversamente proporcionais .....	221
<b>Atividades</b> .....	<b>222</b>
<b>3. Regra de três</b> .....	<b>224</b>
Regra de três simples .....	224
<b>Atividades</b> .....	<b>226</b>
<b>Por toda parte</b> • Valor nutricional	
das frutas .....	227
Regra de três composta .....	228
<b>Atividades</b> .....	<b>230</b>
<b>Educação financeira</b> • Mesada .....	<b>231</b>
<b>Tratamento da informação</b> • Construindo	
um gráfico de setores .....	232
<b>Retomando o que aprendeu</b> .....	<b>234</b>



INES SACRAMENTO/SHUTTERSTOCK.COM



**UNIDADE 8**  
**PORCENTAGEM, PROBABILIDADE E**  
**ESTATÍSTICA** ..... **236**

**1. Porcentagem** ..... **238**  
 Resolvendo problemas com porcentagem ... **238**  
**Atividades** ..... **240**  
**Educação financeira** • Educação financeira para crianças influencia famílias e professores ..... **241**

**2. Probabilidade** ..... **242**  
**Atividades** ..... **243**  
**Tratamento da informação** • Experimento aleatório ..... **244**

**3. Medidas em estatística** ..... **246**  
**Atividades** ..... **248**  
**Por toda parte** • Os aparelhos domésticos e o consumo de energia ..... **249**

**4. Pesquisa estatística** ..... **250**  
 População e amostra ..... **250**  
 Pesquisa censitária e amostral ..... **251**  
**Atividades** ..... **253**  
**Tecnologias** • Construindo gráficos no computador ..... **254**  
**Retomando o que aprendeu** ..... **256**

**UNIDADE 9**  
**ÁREA E VOLUME** ..... **258**

**1. Área de figuras geométricas planas** ... **260**  
 Área de um retângulo ..... **260**  
 Área de um quadrado ..... **260**  
 Equivalência entre áreas ..... **261**  
 Área do paralelogramo ..... **261**  
 Área do triângulo ..... **262**  
 Área do trapézio ..... **263**  
**Atividades** ..... **264**  
**Por toda parte** • Densidade demográfica ... **266**

**2. Volume** ..... **267**  
 Volume do paralelepípedo ..... **267**  
 Volume do cubo ..... **268**  
 Unidades de medida de volume ..... **269**  
**Atividades** ..... **270**  
**Tratamento da informação** • Pesquisa por amostragem na coleta de dados do Censo Demográfico ..... **272**  
**Retomando o que aprendeu** ..... **274**  
**Atualidades em foco** • Família e vida social ..... **276**

**Respostas** ..... **278**  
**Referências bibliográficas** ..... **287**



STEPHEN POND/GETTY IMAGES

**Divisão com números racionais na forma decimal**

Retomar a divisão de números racionais positivos na forma decimal e verificar as possíveis dificuldades que os alunos ainda têm na realização desse cálculo. O trabalho deve seguir os mesmos passos da multiplicação, com ênfase nos processos de transformação do dividendo e do divisor.

Propor na lousa várias divisões e pedir a alguns alunos que as efetuem, discutindo com a turma os passos desenvolvidos. Ressaltar a justificativa do procedimento "igualam-se as casas e cortam-se as vírgulas". Com as explorações, os alunos poderão retomar e mobilizar os conhecimentos que já construíram acerca dessas divisões.



# DIVISÃO COM NÚMEROS RACIONAIS

## Divisão com números racionais na forma decimal

Vamos retomar e ampliar o estudo da divisão com números racionais na forma decimal, com base no que já foi visto anteriormente.

Considere as situações a seguir.

- 1** Qual é o resultado da divisão  $-7 : 0,14$ ?

**1º modo**

Vamos verificar quantas vezes 0,14 cabe em 7, ou seja, que número multiplicado por 0,14 dá 7?

$$10 \cdot 0,14 = 1,4; \quad 20 \cdot 0,14 = 2,8; \quad 40 \cdot 0,14 = 5,6; \quad 50 \cdot 0,14 = 7$$

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é um número negativo.

$$\text{Assim: } -7 : 0,14 = -50$$

**2º modo**

$$7 : 0,14 = 700 : 14$$

(Diagram showing multiplication by 100 on both sides of the equation)

C	D	U	
7	0	0	14
	0	0	50
	0	0	D U

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é um número positivo. O resultado da divisão  $-7 : 0,14$  é  $-50$ .

- 2** Qual é o resultado da divisão  $-9,25 : (-3,7)$ ?

$$(-9,25) : (-3,7) = (-92,5) : (-37) = +2,5$$

(Diagram showing multiplication by 10 on both sides of the equation)

D	U	d	
9	2	,5	37
1	8	5	25
	0	0	U d

Como os números têm mesmo sinal, o quociente é um número positivo. O resultado da divisão  $-9,25 : (-3,7)$  é  $+2,5$ .

**Divisão com números racionais na forma de fração**

O objetivo desta página e das próximas é propor variadas situações para que os alunos tenham contato com a divisão envolvendo frações. Para isso, desenvolvemos inicialmente a noção de número inverso.

Para explorar as situações propostas envolvendo divisões, como no caso da multiplicação com frações, a representação por meio de figuras e a resolução geométrica são fundamentais para promover uma aprendizagem significativa.

**Pense e responda**

As questões aqui apresentadas trazem as ideias de multiplicação entre números inversos e da divisão entre frações. Verificar como os alunos exploram essas questões e que estratégias utilizam para resolvê-las. Depois, corrigir coletivamente no quadro de giz e socializar os diferentes procedimentos que possam ter aparecido.

Para explorar a situação 1, providenciar também discos de mesmo tamanho em cartolina branca para que os alunos possam manipular e experimentar concretamente a situação.

**AMPLIANDO**

**Atividade complementar**

Certas bactérias se multiplicam tão rapidamente que seu número dobra a cada minuto. Em um tubo, elas se multiplicam de tal maneira que em 56 minutos dá para encher metade desse tubo. Em quantos minutos o tubo estaria totalmente cheio?

**Resolução da atividade**

Como a quantidade dessas bactérias dobra a cada minuto e metade do tubo já está cheia, então em 1 minuto o tubo estará totalmente cheio.

**Divisão com números racionais na forma de fração**

**PENSE E RESPONDA**

Resoluções na p. 301

Responda às questões no caderno.

1. Antes de efetuar as multiplicações a seguir, faça uma estimativa dos resultados.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\frac{7}{11} \cdot \frac{11}{7}$$

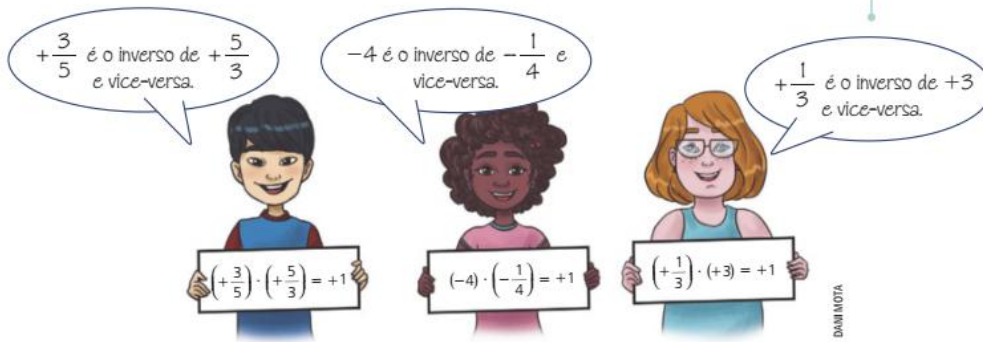
$$\frac{13}{10} \cdot \frac{10}{13}$$

- a) Você deve ter obtido o mesmo número como resultado das multiplicações. Que número é esse? **1**
- b) O que você pôde observar nas frações que aparecem como fatores em cada multiplicação?  
Os dois fatores são frações cujo numerador de uma é igual ao denominador da outra e vice-versa.

2. Quantas vezes  $\frac{1}{2}$  litro cabe em:

- a) 1 litro? **2 vezes.**
- b)  $1\frac{1}{2}$  litro? **3 vezes.**
- c) 2 litros? **4 vezes.**

Quando a multiplicação de duas frações tem 1 como resultado, essas frações são inversas uma da outra.



Considere agora as situações a seguir.

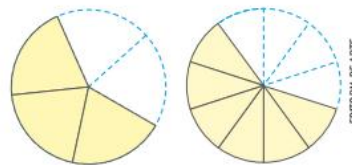
1. Dos  $\frac{3}{5}$  que sobraram de uma pizza, Joel comeu metade. Que fração da pizza Joel comeu?

Resolvendo a situação geometricamente, temos:

A metade dos  $\frac{3}{5}$  de pizza que Joel comeu corresponde à parte hachurada na figura ao lado, ou seja:

$$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$$

Então, Joel comeu  $\frac{3}{10}$  da pizza.



## ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Uma sugestão para dar continuidade ao conteúdo é propor algumas situações, como as descritas a seguir, para trabalhar a divisão com frações e sua relação com a multiplicação.

Utilizando folhas de jornal, recorte tiras de mesmo tamanho e obtenha:

- a metade da metade de uma tira

$\left(\frac{1}{2} : 2, \text{ que corresponde a } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{2}, \text{ ou seja: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\right)$

- a metade da quarta parte da tira

$\left(\frac{1}{4} : 2, \text{ que corresponde a } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{4}, \text{ ou seja: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}\right)$

- a metade da terça parte da tira

$\left(\frac{1}{3} : 2, \text{ que corresponde a } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{3}, \text{ ou seja: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\right)$

- a metade da quinta parte da tira

$\left(\frac{1}{5} : 2, \text{ que corresponde a } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{5}, \text{ ou seja: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}\right)$

Para ampliar a **situação 2**, propor modificações nas condições do problema:

- O que ocorreria se a estimativa fosse  $\frac{4}{5}$  de pão por pessoa, mantendo-se 4 pães?
- E se fossem 6 pães com a mesma estimativa de  $\frac{2}{5}$  de pão por pessoa?

Pedir aos alunos que resolvam geometricamente e, depois, considerem a divisão envolvida.

No primeiro caso,  $\frac{4}{5}$  de pão por pessoa, espera-se que os alunos concluam que com essa estimativa 4 pães servem 5 pessoas. Verifique se eles percebem que o fato de  $\frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{2}{5}$  ser o dobro do que se

calculava antes, reduz a quantidade de pessoas servidas pela metade (mantendo-se os 4 pães).

No segundo caso, com 6 pães, espera-se que os alunos percebam que são servidas 15 pessoas. Incentive-os a perceber que  $6 = 1,5 \cdot 4$ , ou

seja, que se a quantidade de pães é uma vez e meia a de antes, mantendo-se a estimativa de pães por pessoa, a quantidade de pessoas servidas também será uma vez e meia a quantidade anterior ( $1,5 \cdot 10 = 15$ ).

Observe, agora, que a divisão de  $\frac{3}{5}$  por 2 tem o mesmo resultado que a multiplicação de  $\frac{3}{5}$  pelo inverso de 2, que é  $\frac{1}{2}$ .

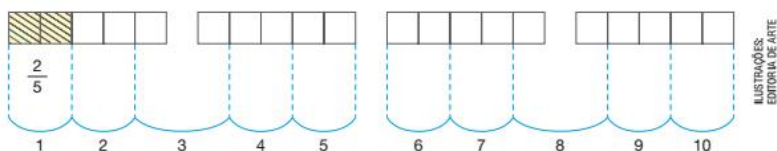
$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

inverso

- 2** Calculando  $\frac{2}{5}$  de pão por pessoa, 4 pães servem quantas pessoas?

Primeiro vamos resolver esse problema geometricamente.

Dividimos cada uma das 4 unidades em 5 partes iguais e contamos quantos  $\frac{2}{5}$  são necessários para cobrir as 4 unidades.



$\frac{2}{5}$  cabe 10 vezes em 4, ou seja:  $4 : \frac{2}{5} = 10$ .

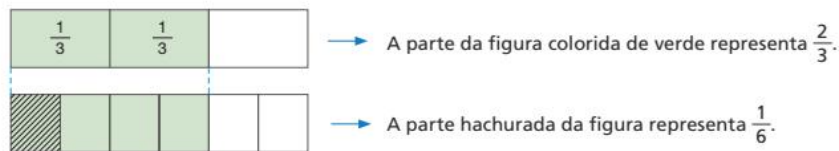
Os 4 pães servem 10 pessoas.

Agora, observe que a divisão de 4 por  $\frac{2}{5}$  tem o mesmo resultado que a multiplicação de 4 pelo inverso de  $\frac{2}{5}$ , que é  $\frac{5}{2}$ :

$$\left. \begin{array}{l} 4 : \frac{2}{5} = 10 \\ 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{2} = 10 \end{array} \right\} \rightarrow 4 : \frac{2}{5} = 4 \cdot \frac{5}{2}$$

inverso

- 3** A figura seguinte indica a divisão  $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ .



Analisando a figura,  $\frac{1}{6}$  cabe 4 vezes em  $\frac{2}{3}$ , ou seja:  $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$ .

Nesse caso, vemos que o quociente (4) é maior que o dividendo  $\left(\frac{2}{3}\right)$ .

Note que a divisão de  $\frac{2}{3}$  por  $\frac{1}{6}$  tem o mesmo resultado que a multiplicação de  $\frac{2}{3}$  pelo inverso de  $\frac{1}{6}$ , que é  $\frac{6}{1}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4 \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{4}{1} = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1}$$

inverso

Para dividir uma fração por outra fração, diferente de zero, multiplicamos a primeira pelo inverso da segunda.

**Observação:**

A divisão entre frações é sempre possível, desde que o divisor seja diferente de zero. Podemos dizer que toda fração representa um quociente do numerador pelo denominador:

$$\bullet \frac{2}{5} = 2 : 5 \text{ ou } 2 : 5 = \frac{2}{5} \qquad \bullet \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{5} \text{ ou } \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{3}{5}}$$

4 Obter o resultado das divisões:

a)  $-\frac{2}{5} : \left(+\frac{2}{5}\right)$       b)  $\left(+\frac{10}{9}\right) : \left(-\frac{5}{3}\right)$

Como os números racionais estão na forma de fração, essas divisões podem ser representadas pela multiplicação do primeiro número pelo inverso do segundo.

a)  $-\frac{2}{5} : \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5} \cdot \left(+\frac{5}{2}\right) = -1$

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é negativo.

b)  $\left(+\frac{10}{9}\right) : \left(-\frac{5}{3}\right) = \left(+\frac{10}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \left(+\frac{10}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{3}$

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é negativo.

5 Determine o valor da expressão:  $(-6) \cdot (+0,375) - \left(+\frac{8}{7}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right)$ .

$$(-6) \cdot (+0,375) - \left(+\frac{8}{7}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right) = (-6) \cdot (+0,375) - \left(+\frac{8}{7}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) =$$

$$= (-2,25) - (-4) = -2,25 + 4 = +1,75$$

O valor da expressão é +1,75.

**Nós**

Propor aos alunos que discutam as questões em grupo para favorecer a troca de informações e ideias.

Estimular os alunos a perceber que existem muitas vantagens no uso de carona para ir à escola. E, caso julgar oportuno, pedir que façam uma lista dessas vantagens. As possíveis respostas dadas pelos alunos podem contemplar três aspectos: econômico, social e ecológico.

Aproveitar esse momento e perguntar aos alunos se esse sistema de carona pode ser ampliado para outras situações. É provável que eles pensem na carona para ir ao trabalho, por exemplo.

**Atividades**

O objetivo das atividades propostas é exercitar os cálculos de divisão em situações variadas e aplicar esses conhecimentos na resolução de problemas e de expressões numéricas. Retomar a ordem que as operações são resolvidas em uma expressão numérica, caso julgar necessário.

Incentivar os alunos a fazer representações geométricas de frações para resolver os problemas ou para verificar a correção do resultado obtido.

**NÓS**

**Carona**

Poluição e trânsito são dois problemas sérios encontrados nas grandes metrópoles. Além dos danos provocados à natureza, os carros causam estresse à população devido a alguns fatores, como o trânsito, gastos com combustível e manutenção do veículo.

É preciso encontrar maneiras de economizar e minimizar o estresse e os prejuízos ambientais. Por exemplo, pode-se usar o sistema de carona entre vizinhos que possuem filhos na mesma escola fazendo revezamento para que cada responsável leve as crianças em um dia da semana diferente.

Hoje em dia há diversas iniciativas, como é o caso de alguns aplicativos gratuitos, que visam divulgar a **carona solidária**, que tem o objetivo de promover a interação social, a inovação tecnológica e a sustentabilidade. O sistema desses aplicativos funciona por geolocalização e permite a conexão entre quem quer pegar e quem está ofertando a carona.

Informações obtidas em: <<https://www12.senado.leg.br/institucional/programas/senado-verde/eixos-tematicos/qualidade-de-vida/mobilidade-urbana-1/carona-solidaria>>. Acesso em: 10 out. 2018.

- Na sua opinião, quais são as vantagens do sistema de carona para ir à escola? Você conhece alguém que oferece carona? **Respostas pessoais.**

**ATIVIDADES**

Resoluções na p. 302

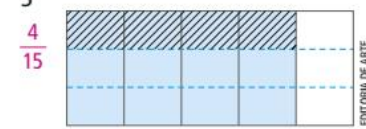
Responda às questões no caderno.

**1. Quanto é:**

- a) o triplo de  $-0,96$ ?  **$-2,88$**
- b) a metade de  $+0,065$ ?  **$+0,0325$**
- c) a quinta parte de  $-1,8$ ?  **$-0,36$**

**2. A figura seguinte sugere a operação**

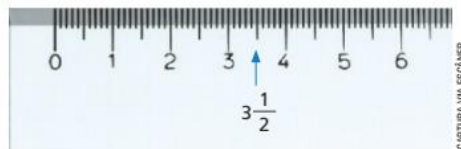
$\frac{4}{5} : 3$ . Qual é o resultado dessa divisão?



**3. Calcule:**

- a)  $5 : \frac{1}{4}$   **$20$**
- b)  $\frac{5}{8} : 2$   **$\frac{5}{16}$**
- c)  $1 : \frac{4}{11}$   **$\frac{11}{4}$**
- d)  $0 : \frac{5}{9}$  **Zero.**

**4. Observe  $3\frac{1}{2}$  centímetros na régua.**



a) Em  $3\frac{1}{2}$  cm, há quantos  $\frac{1}{2}$  cm? **7**

b) E em 10 cm, há quantos  $\frac{1}{2}$  cm? **20**

**5. Em um copo cabe  $\frac{1}{6}$  de litro de água. Quantos desses copos são necessários para encher uma jarra com capacidade para  $\frac{2}{3}$  de litro? **4 copos.****

**6. Determine o valor de cada expressão numérica.**

a)  $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$     b)  $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} : \frac{5}{4}$  **Zero.**

**7. Calcule:**

a)  $\frac{1}{6} \cdot \frac{7}{6}$     b)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}$     c)  $\frac{10}{3} \cdot \frac{15}{4}$     d)  $\frac{7}{4} \cdot \frac{21}{8}$

**8. Descubra o erro em alguns resultados e corrija-os.**

a)  $\left(-\frac{4}{6}\right) : \left(-\frac{6}{4}\right) = 1 \frac{4}{9}$

b)  $(+0,12) + (-0,08) - (-0,7) = 0,8$  **0,74**

c)  $(-1,4) \cdot (+0,2) = 0,28$  **-0,28**

d)  $(+\frac{8}{4}) : (0,5) = \frac{8}{2,4}$  **4**

9. Dona Bete tem  $5\frac{1}{2}$  metros de tecido para fazer aventais. Ela gasta  $\frac{1}{2}$  metro

de tecido em cada avental. Quantos aventais conseguirá fazer com a quantidade de tecido que possui? **11 aventais.**

10. Calcule os resultados destas divisões exatas:

- a)  $(-4) : (-0,5)$  **+8** e)  $(-0,66) : (+1,1)$  **-0,6**  
 b)  $(+2,1) : (-2,8)$  **-0,75** f)  $(-60,8) : (-4)$  **+15,2**  
 c)  $(-7,31) : (-1,7)$  **+4,3** g)  $(+2,88) : (-0,48)$  **-6**  
 d)  $(-0,54) : (-0,36)$  **+1,5** h)  $(+9) : (+2,5)$  **+3,6**

11. Quando dividimos o número (+15) pelo número (-12,5), obtemos o número x. Calcule:

- a) o triplo de x. **-3,6** b) a metade de x. **-0,6**

12. Em setembro de 2018, a produção industrial de uma região teve uma queda de -2,7% em relação ao mês de agosto. A queda no mês de outubro em relação a setembro foi exatamente a metade desse número. Qual foi, em %, essa queda? **1,35%**

13. Calcule o valor da expressão  $2 - (+0,8) : (+0,5)$ , na forma:

- a) decimal; **+0,4** b) fracionária.  **$+\frac{2}{5}$**

14. Calcule o valor do número A.

$A = (+0,4) : (-0,02) - 9 \cdot (-1,8)$  **-3,8**

15. Determine o valor das expressões numéricas:

- a)  $(-\frac{4}{5}) : (+\frac{8}{5}) - (+2) \cdot (-\frac{5}{4})$  **+2**  
 b)  $(-1,44) : (-2,4) + (+0,18) : (-1,2)$  **+0,45**  
 c)  $(+\frac{8}{5}) : (-4) - 6 \cdot (-\frac{1}{4})$   **$+\frac{11}{10}$**

16. Bernadete está fazendo sua compra semanal. Entre os diversos itens de compra há um iogurte de frutas que ela toma diariamente. Observando os preços, as embalagens e datas de validade, ela encontrou as seguintes opções:

Embalagem	Preço da embalagem	Validade
A (6 unidades)	R\$ 5,94	13/fev.
B (8 unidades)	R\$ 8,80	15/fev.
C (10 unidades)	R\$ 10,50	16/fev.

Supondo que Bernadete esteja comprando no dia 3 de fevereiro e que já tenha tomado seu iogurte nesse dia, escolha a melhor opção de embalagem. Para isso, considere que ela precisará de 7 iogurtes até a próxima compra e que os alimentos devem ser consumidos dentro do prazo de validade. **A melhor opção é a embalagem C.**

**DESAFIO**

17. Marcos gasta  $\frac{3}{7}$  do salário para pagar a prestação da casa. Com a metade do que sobra ele paga a prestação do carro e ainda fica com R\$ 376,00. Qual o salário de Marcos? **R\$ 1 316,00**

18. (Saresp-SP) Veja os preços das fotocópias em uma papelaria. Eu tinha R\$ 10,00 e pedi duas cópias coloridas de uma foto. Com o dinheiro restante, quantas cópias simples poderei pagar?  
 a) 1,8 b) 6 c) 8 d) 18  
**Alternativa d.**



**Desafio**

Resolução do desafio da atividade 17:

- prestação da casa:  $\frac{3}{7}$  do salário (sobram  $\frac{4}{7}$  do salário);
- prestação do carro:  $\frac{1}{2}$  do que sobra do salário ( $\frac{1}{2}$  de  $\frac{4}{7}$  do salário, ou seja,  $\frac{2}{7}$  do salário);
- fração de todos os gastos:  $\frac{5}{7}$  do salário ( $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$ ).

Ainda sobram  $\frac{2}{7}$  do salário, que correspondem a R\$ 376,00.

$\frac{1}{7}$  do salário é dado por:  
 $376 : 2 = 188.$

Assim,  $\frac{7}{7}$  do salário é igual a  $7 \cdot 188 = 1316.$

Portanto, o salário de Marcos é R\$ 1 316,00.

Resolução do desafio da atividade 18:

$10 - 2 \cdot 3,60 = 10 - 7,2 = 2,8$   
 $2,8 : 0,15 = 18,6666...$

Logo, é possível pagar 18 cópias simples.

**ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS**

Os alunos podem realizar a atividade 16 em duplas para discutir a situação.

- Embalagens **A**: R\$ 0,99 por unidade; **B**: R\$ 1,10 por unidade e **C**: R\$ 1,05 por unidade.
- Se Bernadete comprar a embalagem **C** (10 un.), con-

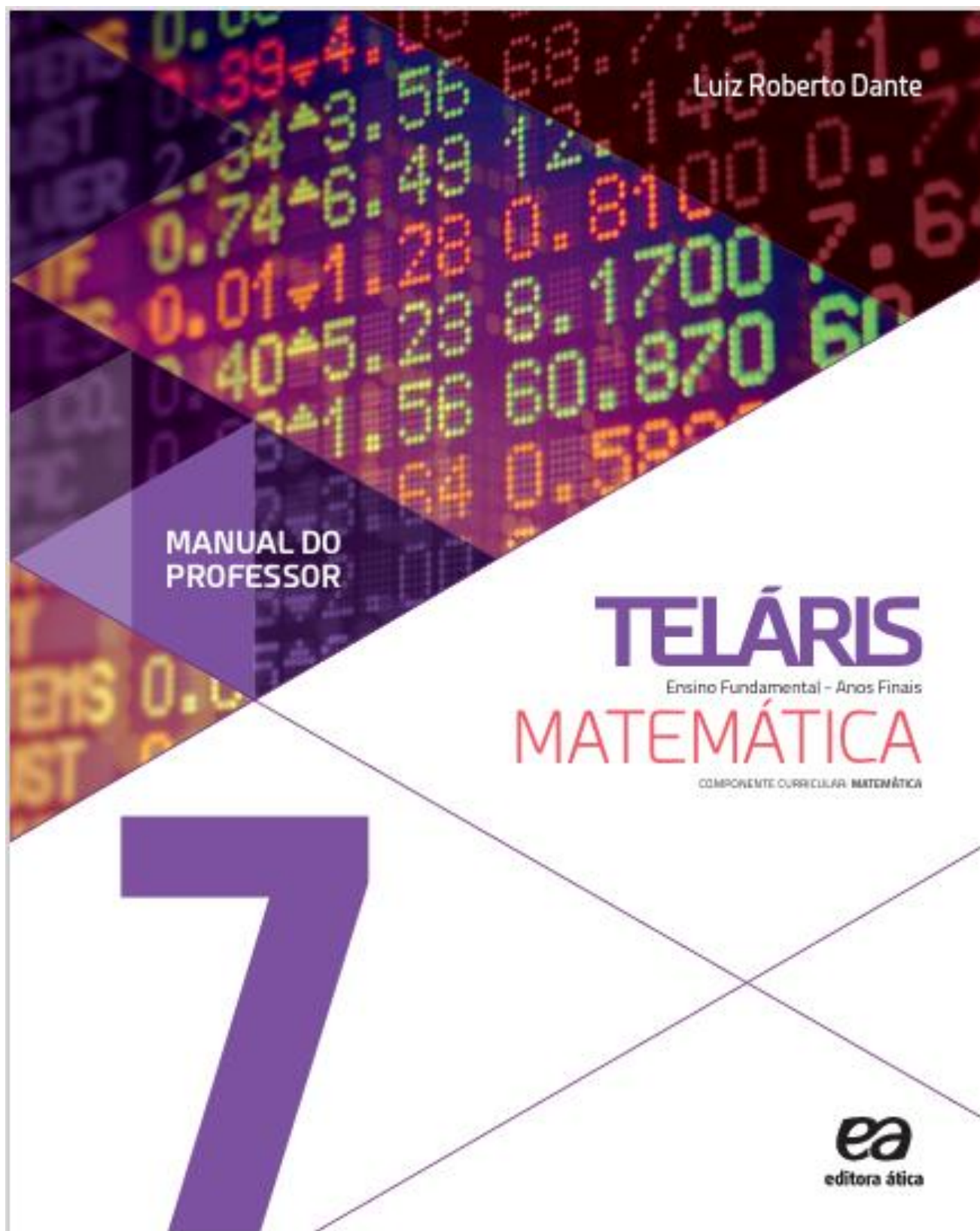
sumirá tudo até a validade e pagará o preço unitário de R\$ 1,05.

- Se comprar a embalagem **B** (8 un.), ela pagará mais barato pela embalagem, o preço por iogurte será de R\$ 1,10 e todos estarão dentro da validade.
- Para comprar a embalagem **A** (6 un.), embora o preço uni-

tário seja menor, ela precisaria comprar duas, e a data de validade permite que ela consuma apenas 10 unidades, desperdiçando 2 unidades. Assim, ela teria:  $(2 \cdot 5,94) : 10 = 1,18$ , que seria o preço mais caro por unidade realmente consumida.

Portanto, a melhor opção é a embalagem **C** com 10 unidades.

## ANEXO B – LIVRO DIDÁTICO: TELÁRIS MATEMÁTICA





3ª EDIÇÃO  
SÃO PAULO, 2018

**Luiz Roberto Dante**

Livre-docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista  
"Júlio de Mesquita Filho" (Unesp-SP), *campus* de Rio Claro

Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática pela Pontifícia Universidade  
Católica de São Paulo (PUC-SP)

Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Licenciado em Matemática pela Unesp-SP, Rio Claro

Pesquisador em Ensino e Aprendizagem da Matemática pela Unesp-SP, Rio Claro

Ex-professor do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na rede pública de ensino

Autor de várias obras de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio

**MANUAL DO  
PROFESSOR**

# TELÁRIS

Ensino Fundamental - Anos Finais

# MATEMÁTICA

COMPONENTE CURRICULAR: MATEMÁTICA

# 7

**ea**

editora ática

# SUMÁRIO

## Capítulo 1

### Números inteiros e seqüências

1	Explorando a ideia de número positivo e de número negativo	10
	Temperatura	12
	Altitude	14
	Fuso horário civil	14
	Valor monetário	15
2	O conjunto dos números inteiros	17
	Representação na reta numerada	17
	Módulo ou valor absoluto de um número inteiro	19
	Números opostos ou simétricos	20
3	Comparação de números inteiros	21
4	Operações com números inteiros	23
	Adição de números inteiros	23
	Subtração de números inteiros	26
Leitura		29
	Multiplicação de números inteiros	30
	Divisão de números inteiros	32
	Potenciação: número inteiro na base e número natural no expoente	33
Leitura		35
5	Expressões numéricas com números inteiros	36
6	Representação de pares ordenados de números inteiros no plano cartesiano (coordenadas cartesianas)	37
7	Seqüências	39
	Identificação dos termos da seqüência	40
	Seqüência recursiva	41

Revisando seus conhecimentos	42
Testes oficiais	44
Verifique o que estudou	45

## Capítulo 2

### Revedo e aprofundando múltiplos, divisores e frações

1	Múltiplos e divisores de números naturais	48
	Lembrando os conceitos de número primo e de número composto	51
	Decomposição de um número composto em fatores primos	52
	Máximo divisor comum (mdc)	53
	Mínimo múltiplo comum (mmc)	54
	Cálculo mental do mmc	56
2	Frações	57
	Retomando as ideias de frações	57
	Frações equivalentes e simplificação de frações	62
	Comparação de frações	63
	Operações com frações	65
	Multiplicação de frações	67
	Frações inversas	67
	Divisão de frações	69
Revisando seus conhecimentos		72
Testes oficiais		74
Verifique o que estudou		75

## Capítulo 3

### Números racionais

1	Os números racionais	78
	O conjunto dos números racionais	80
	A relação entre os conjuntos $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$	80
	Representação dos números racionais em uma reta numerada	81

Módulo ou valor absoluto de um número racional .....	82
Oposto ou simétrico de um número racional .....	82
Comparação de números racionais .....	83
<b>2&gt; Operações com números racionais .....</b>	<b>84</b>
Adição e subtração de números racionais ...	84
Multiplicação de números racionais .....	85
Inverso de um número racional .....	86
Divisão de números racionais .....	87
Números racionais, grandezas e medidas ...	88
<b>Leitura .....</b>	<b>90</b>
<b>Revisando seus conhecimentos .....</b>	<b>91</b>
<b>Testes oficiais .....</b>	<b>92</b>
<b>Verifique o que estudou .....</b>	<b>93</b>

## Capítulo 4

<b>Expressões algébricas e equações do 1º grau .....</b>	<b>94</b>
<b>1&gt; Expressões algébricas .....</b>	<b>96</b>
Máquinas programadas para gerar operações .....	98
Expressões algébricas equivalentes .....	99
Valor numérico de uma expressão algébrica .....	100
Restrições para o denominador .....	101
Sequências e expressões algébricas .....	103
<b>Leitura .....</b>	<b>106</b>
<b>Jogos .....</b>	<b>108</b>
<b>2&gt; Equações .....</b>	<b>109</b>
Incógnita de uma equação .....	110
Solução ou raiz de uma equação .....	110
Conjunto universo e conjunto solução de uma equação .....	110
Equações equivalentes .....	111
<b>Jogos .....</b>	<b>112</b>

<b>3&gt; Equações do 1º grau com 1 incógnita .....</b>	<b>113</b>
Propriedades fundamentais da igualdade .....	113
Resolução de equações do 1º grau com 1 incógnita .....	113
Explorando a ideia de equilíbrio .....	116
Outras situações-problema que envolvem a resolução de equações do 1º grau com 1 incógnita .....	121
<b>Leitura .....</b>	<b>126</b>
<b>Revisando seus conhecimentos .....</b>	<b>128</b>
<b>Testes oficiais .....</b>	<b>130</b>
<b>Verifique o que estudou .....</b>	<b>131</b>

## Capítulo 5

<b>Geometria: circunferência, ângulo e polígono .....</b>	<b>132</b>
<b>1&gt; Circunferência e círculo .....</b>	<b>134</b>
Construção de circunferências .....	135
<b>Leitura .....</b>	<b>137</b>
<b>2&gt; Ângulo .....</b>	<b>138</b>
A ideia de ângulo .....	138
Tipos de ângulo .....	138
Medida de abertura de ângulo .....	139
Construções geométricas de segmentos de reta e de ângulo .....	141
Ângulos congruentes .....	143
Ângulos adjacentes .....	144
Ângulos complementares e ângulos suplementares .....	144
Ângulos adjacentes e suplementares .....	144
Ângulos opostos pelo vértice .....	146
Ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal .....	148
<b>Matemática e tecnologia .....</b>	<b>149</b>
<b>3&gt; Polígono .....</b>	<b>151</b>





Polígono convexo e polígono não convexo .....	151
Ângulos internos e ângulos externos dos polígonos .....	154
Triângulo .....	155
Construção de quadrados .....	163
<b>4</b> Soma das medidas de abertura dos ângulos de um polígono .....	164
Soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo .....	164
Relação que envolve as medidas de abertura dos ângulos internos e dos ângulos externos de um triângulo .....	167
<b>Jogos</b> .....	168
Soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo .....	169
Soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um polígono convexo .....	170
Soma das medidas de abertura dos ângulos externos de um polígono convexo .....	171
<b>Jogos</b> .....	174
<b>Revisando seus conhecimentos</b> .....	175
<b>Testes oficiais</b> .....	178
<b>Verifique o que estudou</b> .....	179

## Capítulo 6

<b>Simetria</b> .....	180
<b>1</b> Tipos de simetria .....	182
Simetria axial ou simetria de reflexão .....	183
Simétrico de uma figura plana em relação a um eixo .....	187
Composição de simetrias axiais .....	189
<b>Jogos</b> .....	190
Simetria de rotação .....	191
Simetria de translação .....	194

## Capítulo 7

<b>Proporcionalidade</b> .....	204
<b>1</b> As ideias de proporcionalidade e de razão .....	206
Porcentagem como razão .....	209
<b>2</b> Proporções .....	210
A ideia de proporção .....	210
Propriedade fundamental das proporções .....	210
Proporcionalidade entre grandezas .....	212
Coeficiente de proporcionalidade .....	215
<b>Leitura</b> .....	216
<b>3</b> Regra de 3 simples .....	217
<b>4</b> Outras atividades e problemas que envolvem proporcionalidade .....	220
<b>Jogos</b> .....	222
<b>Revisando seus conhecimentos</b> .....	223
<b>Testes oficiais</b> .....	224
<b>Verifique o que estudou</b> .....	225

## Capítulo 8

<b>Matemática financeira: regra de sociedade, acréscimos e decréscimos</b> .....	226
<b>1</b> Números proporcionais .....	228
Números diretamente proporcionais .....	228
Números inversamente proporcionais .....	229
Divisão de um número em partes proporcionais a números dados .....	230

<b>2</b> Regra de sociedade .....	232
Porcentagem .....	234
<b>Revisando seus conhecimentos</b> .....	239
<b>Testes oficiais</b> .....	240
<b>Verifique o que estudou</b> .....	241

## Capítulo 9

### Noções de estatística e probabilidade .....

<b>1</b> Pesquisa estatística e termos relacionados .....	242
População e amostra .....	244
Indivíduo ou objeto da pesquisa .....	245
Variável e valor da variável .....	245
Tipos de variável .....	245
Frequência absoluta e frequência relativa de uma variável .....	247
<b>Leitura</b> .....	249
<b>2</b> Média aritmética .....	251
Interpretação da média aritmética .....	252
Média aritmética ponderada .....	253
<b>3</b> Gráfico de setores .....	254
Construção de um gráfico de setores .....	254
Gráfico de setores e porcentagem .....	256
<b>Matemática e tecnologia</b> .....	260
<b>Leitura</b> .....	262
<b>4</b> Probabilidade .....	263
Experimentos aleatórios .....	263
Espaço amostral e eventos .....	263
Evento certo e evento impossível .....	264
Cálculo de probabilidades .....	265
<b>Leitura</b> .....	269
Obtendo a probabilidade experimentalmente .....	270

Outras atividades que envolvem estatística e probabilidade .....	272
<b>Revisando seus conhecimentos</b> .....	275
<b>Testes oficiais</b> .....	276
<b>Verifique o que estudou</b> .....	277

## Capítulo 10

### Perímetro, área e volume .....

<b>1</b> Perímetro .....	280
Medida de perímetro de polígonos .....	280
Equivalência de perímetros .....	281
Medida do comprimento da circunferência e o número $\pi$ .....	282
<b>Leitura</b> .....	284
<b>2</b> Área .....	285
Medida aproximada de área .....	285
Área e perímetro .....	285
Equivalência de áreas .....	286
Medida de área de regiões planas .....	288
Medida de área de regiões planas que podem ser decompostas em outras mais simples .....	289
<b>Leitura</b> .....	292
<b>3</b> Volume .....	293
Equivalência de volumes .....	293
Medida de volume de um paralelepípedo ou bloco retangular .....	294
<b>Revisando seus conhecimentos</b> .....	297
<b>Testes oficiais</b> .....	300
<b>Verifique o que estudou</b> .....	301
<b>Respostas</b> .....	302
<b>Lista de siglas</b> .....	311
<b>Sugestões de leitura</b> .....	311
<b>Sugestões de sites</b> .....	311
<b>Bibliografia</b> .....	312

## Operações com frações

No volume anterior, você já estudou algumas operações com frações. Vamos agora retomar e aprofundar esse estudo.

### Adição e subtração de frações

#### Com denominadores iguais

Pela manhã, Paulo tomou a água correspondente a  $\frac{1}{5}$  da medida de capacidade de uma jarra. No período da tarde, tomou o correspondente a  $\frac{2}{5}$  dessa medida de capacidade. Qual fração da medida de capacidade da jarra ele tomou ao todo?

Para determinar essa fração, precisamos adicionar o  $\frac{1}{5}$  da medida de capacidade de que foi tomado de manhã com os  $\frac{2}{5}$  da medida de capacidade consumidos no período da tarde.

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

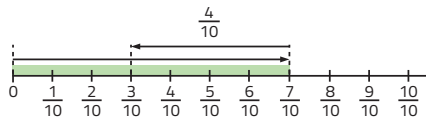
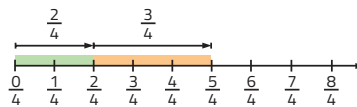
Logo, Paulo bebeu  $\frac{3}{5}$  da medida de capacidade da jarra.

Para adicionar ou subtrair frações com denominadores iguais, adicionamos ou subtraímos os numeradores e conservamos o denominador.

Veja outros exemplos.

$$\bullet \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$$

$$\bullet \frac{7}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$$



Ilustrações: Banco de Imagens/Arquivo da editora



Jarra.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.



Queijo.

Paulo Mianzi/Arquivo da editora

#### Com denominadores diferentes

A mãe de Maria tinha aproximadamente  $\frac{7}{8}$  de um queijo e usou aproximadamente  $\frac{1}{6}$  do queijo para fazer uma torta. Qual fração do queijo restou?

Para encontrar a resposta para esse problema, precisamos subtrair a quantidade de queijo usada da quantidade que a mãe de Maria tinha.

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{6}$$

Como os denominadores são diferentes, precisamos determinar frações equivalentes a essas, que tenham denominadores iguais, para prosseguir com a subtração. Veja 2 maneiras diferentes de fazer isso.

## 2 Frações

Neste momento, retomaremos as explorações sobre as operações com frações vistas no 6º ano e ampliaremos o assunto até multiplicação e divisão de frações. Se necessário, permita que os alunos usem materiais manipuláveis para facilitar a compreensão das ações e dos procedimentos realizados.

#### Com denominadores iguais

No caso da adição e subtração de frações com denominadores iguais, utilizando a situação apresentada no texto, desenhe a jarra na lousa e pergunte aos alunos: “Em quantas partes iguais a jarra deve ser dividida?”; “Quantas partes Paulo tomou pela manhã?”; “Quantas partes ele tomou à tarde?”; “Quantas partes ele tomou no total?”. Após as respostas, a partir das indicações dos alunos, represente matematicamente essa situação na lousa.

Em seguida, aproveite para perguntar: “Caso inicialmente a jarra estivesse com a medida de capacidade máxima de água, quantas partes dessa medida Paulo não tomou?”. Se necessário, mostre a representação dessa situação e efetue a subtração  $\frac{5}{5} - \frac{3}{5}$ .

Efetue na lousa os outros exemplos de adição e subtração de frações com mesmo denominador apresentados no livro, verificando se os alunos necessitam ou não da representação na reta numerada.

#### Com denominadores diferentes

Explique que retomaremos, agora, adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Leia a situação apresentada no livro e pergunte: “Vocês conseguem resolvê-la?”. Destaque que, a partir das frações dadas, sabemos encontrar frações equivalentes cujo denominador seja o mesmo e sabemos somar frações com denominadores iguais, ou seja, conseguimos resolver o problema apresentado.

## 2 Frações

Peça aos alunos que leiam as 2 maneiras apresentadas para resolução do problema da página anterior, verificando as dúvidas que surgirem.

Comente com os alunos que o mmc, obtido no segundo método, é igual ao denominador que obtivemos no primeiro método, porque os números dos denominadores são primos entre si. Se eles fossem múltiplos, o mmc seria diferente.

Antes da resolução das atividades, peça aos alunos para registrar o que acharem necessário sobre adição e subtração de frações no painel de descobertas. Destaque também que podem anotar informações sobre comparação de frações.

### Atividades 86 a 88

Estas atividades apresentam situações-problema encontradas no cotidiano, que devem ser resolvidas efetuando-se operações de adição e subtração de frações.

Se julgar conveniente, após a resolução da atividade 88, convide os alunos a registrar algumas ações praticadas por eles em um dia e a mensurar a quantidade de tempo utilizada em cada uma delas. Em seguida, oriente-os a escrever a fração do dia correspondente a cada ação, assim como apresentado na atividade.

89. a)  $\frac{22}{15} \left( \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15} \right)$     b)  $1 \left( \frac{15}{12} - \frac{3}{12} = \frac{12}{12} = 1 \right)$     c)  $\frac{3}{10} \left( \frac{10}{30} - \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} \right)$

**1ª maneira:** Usando um denominador comum que seja múltiplo dos 2 denominadores.

Por exemplo, podemos usar o denominador 48, obtido multiplicando os denominadores das frações ( $8 \times 6 = 48$ ).

$$\frac{7 \times 6}{8 \times 6} = \frac{42}{48} \quad \text{e} \quad \frac{1 \times 8}{6 \times 8} = \frac{8}{48}$$

Depois, subtraímos as frações equivalentes obtidas e simplificamos a fração resultante.

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{6} = \frac{42}{48} - \frac{8}{48} = \frac{34}{48} = \frac{17}{24}$$

Poderíamos ter escolhido outro denominador, como 120, que também é múltiplo de 8 e de 6.

$$\frac{7 \times 15}{8 \times 15} = \frac{105}{120} \quad \text{e} \quad \frac{1 \times 20}{6 \times 20} = \frac{20}{120} \quad \frac{7}{8} - \frac{1}{6} = \frac{105}{120} - \frac{20}{120} = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}$$

**2ª maneira:** Usando o mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores.

$m(6)$ : 0, 6, 12, 24, 36, 48, ...     $m(8)$ : 0, 8, 16, 24, 32, 40, ...     $\text{mmc}(6, 8) = 24$


Usamos o mmc nos denominadores para determinar as frações equivalentes e subtraímos as frações equivalentes obtidas.

$$\frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{21}{24} \quad \text{e} \quad \frac{1 \times 4}{6 \times 4} = \frac{4}{24} \quad \frac{7}{8} - \frac{1}{6} = \frac{21}{24} - \frac{4}{24} = \frac{17}{24}$$

Logo, restou aproximadamente  $\frac{17}{24}$  do queijo.

Observe que nesse caso não foi necessário simplificar a fração resultante.

### Atividades

87. Poderia dizer que o raciocínio não estava correto, pois para adicionar frações com denominadores diferentes não podemos adicionar os numeradores e adicionar os denominadores; precisamos determinar frações equivalentes com o mesmo denominador e, então, adicionar os numeradores e manter o denominador comum.  Não escreva no livro!

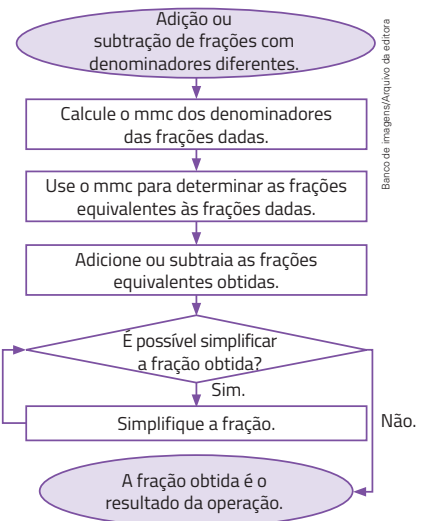
86 ▶ Para uma viagem, Roberto encheu o tanque de gasolina do carro. No primeiro trecho da viagem, foi consumido  $\frac{1}{4}$  da gasolina do tanque e, no segundo trecho, foram consumidos  $\frac{2}{3}$  da gasolina. Qual fração do tanque ainda restou com gasolina após esses 2 trechos?

$$\frac{1}{12} \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}; \frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} \right)$$

87 ▶ Bruna está no 7º ano e a irmã dela, Gisele, está no 4º ano. Gisele registrou a seguinte operação:  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$ . O que Bruna poderia dizer a ela?

88 ▶ Caio gasta  $\frac{1}{6}$  das horas de um dia na escola,  $\frac{1}{3}$  dormindo e  $\frac{1}{12}$  brincando. Qual fração das horas do dia ele dedica a outras coisas?

89 ▶ Reveja os passos apresentados acima, na 2ª maneira de efetuar uma adição ou subtração de frações com denominadores diferentes, e compare-os com o fluxograma a seguir.



Use esse fluxograma para efetuar as operações dadas e registre o resultado no caderno.

a)  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$     b)  $\frac{15}{12} - \frac{1}{4}$     c)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

88.  $\frac{5}{12} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}; \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \right)$

## Multiplicação de frações

Anastácio tem um terreno. Ele quer usar  $\frac{1}{5}$  desse terreno para plantar flores e quer que  $\frac{2}{3}$  da parte com flores tenham rosas. Qual parte do terreno deverá ser plantada com rosas?

Devemos calcular  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$  do terreno, ou seja,  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ .

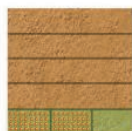
Ilustrações: Paulo Marzly/  
Arquivo da editora



Terreno



$\frac{1}{5}$  do terreno



$\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$  do terreno  $(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5})$



$\frac{2}{15}$  do terreno

As figuras mostram que  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$ , ou seja,  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ , é o mesmo que  $\frac{2}{15}$ .

Logo,  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$  e Anastácio deve plantar rosas em  $\frac{2}{15}$  do terreno.

Também podemos escrever:  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2 \times 1}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$ .

Para multiplicar uma fração por outra, multiplicamos o numerador de uma fração pelo numerador da outra, e o denominador de uma fração pelo denominador da outra.

### Observações

- A conclusão acima pode, também, ser aplicada quando um dos fatores é um número natural.

$$2 \times \frac{3}{7} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{7} \qquad \frac{1}{7} \times 5 = \frac{1}{7} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{7}$$

- Na multiplicação de frações, podemos fazer a simplificação antes ou depois de efetuar a operação.

$$\frac{\cancel{3}^1}{4^1} \times \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{15}^5} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \qquad \left| \qquad \frac{4}{\cancel{25}^5} \times \frac{\cancel{5}^1}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15} \right| \qquad \cancel{4}^2 \times \frac{1}{\cancel{6}^3} = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

ou

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{24^{\div 6}}{60^{\div 6}} = \frac{4^{\div 2}}{10^{\div 2}} = \frac{2}{5} \qquad \left| \qquad \frac{4}{25} \times \frac{5}{3} = \frac{20^{\div 5}}{75^{\div 5}} = \frac{4}{15} \right| \qquad 4 \times \frac{1}{6} = \frac{4^{\div 2}}{6^{\div 2}} = \frac{2}{3}$$

## Frações inversas

A **inversa de uma fração** diferente de zero é a fração que se obtém invertendo o numerador com o denominador da fração dada.

Por exemplo, a inversa de  $\frac{3}{4}$  é  $\frac{4}{3}$  e a inversa de  $\frac{2}{5}$  é  $\frac{5}{2}$ .

Revisando e aprofundando múltiplos, divisores e frações • CAPÍTULO 2 < 67

### 2 Frações

#### Multiplicação de frações

Como provavelmente é a primeira vez que os alunos veem multiplicações de frações, seria interessante propor a eles algumas explorações que permitam reflexões sobre essa operação com frações.

Inicialmente, entregue-lhes uma folha de papel e peça que dobrem a folha ao meio e, em seguida, que dobrem-na ao meio novamente, dividindo a folha em 4 partes iguais. Peça que riscuem as marcações da folha, utilizando lápis e régua, e pergunte a eles quanto cada parte

representa em relação ao todo da folha. Espera-se que respondam que cada parte representa  $\frac{1}{4}$  da folha. Agora, questione: "E se quiséssemos a metade de  $\frac{1}{4}$  da folha?"; "Quanto seria isso?". Espera-se que eles respondam que seria  $\frac{1}{8}$ . Então, junto com os alunos, escreva essa situação na lousa usando frações ( $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ) e pergunte qual operação estamos efetuando. Se necessário, peça para efetuarmos o dobro de 4, escrevendo essa operação na lousa e destacando a preposição **de**. Destaque que usamos a mesma palavra nos

2 casos, ou seja, efetuamos a mesma operação, a multiplicação. Sugira aos alunos que criem hipóteses de como proceder para multiplicar frações e anote-as na lousa. Avise que, após resolvermos a situação dada no livro, verificaremos essas hipóteses.

Em seguida, leia o enunciado do problema junto com os alunos e represente-o graficamente na lousa, como mostrado no livro. Na terceira representação, evidencie que não sabemos quanto representa  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$  em relação ao todo, por isso, dividimos os outros quintos em 3 partes (quarta representação) e podemos determinar esse valor ( $\frac{2}{15}$ ). Represente na lousa a operação efetuada ( $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ ) e questione:

"O que fazemos com os numeradores para chegar a 2?"; "E com os denominadores para obter 15?". Espera-se que respondam que multiplicamos numerador por numerador e denominador por denominador. Então, peça que comparem essa conclusão com as hipóteses levantadas anteriormente.

Resolva na lousa o outro exemplo apresentado no livro e peça que leiam as observações, verificando se algum aluno ficou com dúvidas. Sugira que anatem no painel de descobertas o que acharem necessário.

#### Frações inversas

Pergunte aos alunos se sabem o que é a inversa de uma fração, destacando que a inversa não é o mesmo que a oposta. Após as respostas, coloque algumas frações na lousa e mostre as respectivas inversas.

Espera-se que os alunos entendam o que é a inversa de uma fração, mas, se necessário, explique que, para encontrar a inversa de uma fração, basta colocar o numerador no lugar do denominador e o denominador no lugar do numerador, ou seja, basta inverter as posições do numerador e do denominador.



## 2 Frações

### Explorar e descobrir

Peça aos alunos que efetuem a multiplicação de cada fração indicada pela própria inversa e que então verifiquem o que acontece. Em seguida, peça a eles que realizem as explorações desta seção.

Ao final, pergunte aos alunos: "Qual é a relação existente entre uma fração e a inversa dela?". Verifique se são capazes de concluir que o resultado da multiplicação entre elas será sempre igual a 1 e peça para anotarem essa relação no painel de descobertas.

### Atividades 90 a 95

Estas atividades trabalham multiplicação de frações.

Se necessário, chame a atenção dos alunos para os itens **b** e **d** da atividade 90, pois apresentaram multiplicações de números mistos.

Relembre os conceitos de porcentagem relacionados a frações (vistos no 6º ano), mostrando aos alunos que toda porcentagem pode ser representada por uma fração cujo denominador é 100.

Veja a resolução da atividade 91.

$$\text{a) } \frac{3}{2} \times 18 = \frac{3 \times 18}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

$$\text{b) } \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2 \times 1}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$$

$$\text{c) } \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\text{d) } \frac{20}{100} \times \frac{2}{3} = \frac{20 \times 2}{100 \times 3} = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}$$

Veja a resolução da atividade 92.

$$\text{a) } \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{30 \times 60}{100 \times 100} = \frac{1800}{10000} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$$

$$\text{b) } \frac{1}{5} \times \frac{40}{100} = \frac{1 \times 40}{5 \times 100} = \frac{40}{500} = \frac{2}{25}$$

$$\text{c) } \frac{1}{3} \times \frac{9}{7} = \frac{1 \times 9}{3 \times 7} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$\text{d) } \frac{20}{100} \times \frac{5}{10} = \frac{20 \times 5}{100 \times 10} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$

A atividade 95 apresenta uma situação-problema envolvendo a divisão de uma herança. Verifique se os alunos compreendem esse termo e quando é utilizado. Se necessário, destaque que o valor que procuramos é  $\frac{3}{5}$  da metade da herança.

### Atividade 96

Esta atividade apresenta expressões numéricas com frações. Relembre os alunos sobre a ordem em que devem ser efetuadas as

### Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

- 1► Determine no caderno o produto de cada fração pela fração inversa dela.

$$\text{a) } \frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = \frac{14}{14} = 1$$

$$\text{b) } \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$$

$$\text{c) } \frac{6}{7} \times \frac{7}{6} = \frac{42}{42} = 1$$

$$\text{d) } 2 \frac{1}{3}$$

- 2► Responda no caderno: O que ocorreu com os resultados? Todos são iguais a 1.

$$2 \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{21}{21} = 1$$

Os matemáticos já provaram que isso que você descobriu vale sempre.

O produto de uma fração pela fração inversa dela é sempre igual a 1.

### Atividades

$$95. \frac{3}{10}; 30\%. \left( \frac{3}{5} \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}; \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\% \right)$$

Não escreva no livro!

- 90► Efetue as multiplicações no caderno. Nos itens **e** e **f**, resolva de 2 maneiras, simplificando antes e depois.

$$\text{a) } 5 \times \frac{3}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 1 \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} = 4 \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } 6 \times \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\text{d) } 1 \frac{1}{5} \times 2 \frac{3}{4} = \frac{6}{5} \times \frac{11}{4} = \frac{66}{20} = \frac{33}{10} = 3 \frac{3}{10}$$

$$\text{e) } \frac{6}{35} \times \frac{7}{30} = \frac{42}{1050} = \frac{1}{25} \text{ ou } \frac{6^1}{35^1} \times \frac{7^1}{30^1} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

$$\text{f) } \frac{4}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{6} = \frac{12}{14} \times \frac{7}{6} = \frac{84}{84} = 1 \text{ ou } \frac{4^1}{7^1} \times \frac{3^1}{2^1} \times \frac{7^1}{6^1} = 1$$

- 91► Calcule no caderno.

$$\text{a) } \frac{3}{2} \text{ de } 18. 27$$

$$\text{c) } \frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{2}. 1$$

$$\text{b) } \frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{5}. \frac{2}{15}$$

$$\text{d) } 20\% \text{ de } \frac{2}{3}. \frac{2}{15}$$

- 92► Calcule o que se pede e, no caderno, coloque a resposta na forma fracionária.

$$\text{a) } 30\% \text{ de } 60\%. \frac{9}{50}$$

$$\text{b) } \frac{1}{5} \text{ de } 40\%. \frac{2}{25}$$

$$\text{c) } \text{Terça parte de } \frac{9}{7}. \frac{3}{7}$$

$$\text{d) } 20\% \text{ de } 0,5. \frac{1}{10}$$

- 93► Em uma cidade,  $\frac{3}{4}$  dos habitantes têm entre 15 e 30 anos de idade e  $\frac{1}{5}$  dessas pessoas declaram ser fluentes em espanhol. As pessoas com idade entre 15 e 30 anos que falam espanhol representam qual fração do total de habitantes da cidade?

- 94► Pedro tinha R\$ 60,00. Ele separou  $\frac{4}{5}$  dessa quantia e gastou  $\frac{2}{3}$  do que havia separado. Qual fração do que tinha ele gastou?  $\frac{8}{15} \left( \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \right)$



Reprodução/Casa de Moedas do Brasil/Ministério da Fazenda

- 95► A metade da herança de Nicanor ficou para o filho mais velho dele, o Luís. Do restante,  $\frac{3}{5}$  couberam ao caçula, o Heitor. Qual fração da herança de Nicanor coube ao Heitor? Ela corresponde a qual porcentagem da herança?

- 96► Calcule no caderno o valor de cada expressão numérica.

$$\text{b) } \left( \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$$

$$\text{a) } \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \quad \text{b) } \left( \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \right) \times \frac{2}{3}$$

- 97► Responda no caderno.

$$\text{c) } \frac{7}{3} \left( \frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{21}{21} = 1 \right)$$

$$\text{a) Qual é o inverso de } \frac{3}{4} ? \frac{4}{3}$$

$$\text{b) Qual é o inverso de } 3 ? \text{ Justifique. } \frac{1}{3} \text{, pois } 3 = \frac{3}{1}.$$

$$\text{c) Qual é o número que multiplicado por } \frac{3}{7} \text{ dá } 1 ?$$

- 98► Como é o inverso de  $\frac{9}{25}$  escrito na forma mista?

$$98. 2 \frac{7}{9} \left( \frac{25}{9} = 2 \frac{7}{9} \right)$$

### 68 > CAPÍTULO 2 • Revendo e aprofundando múltiplos, divisores e frações

operações e explique que nas frações deve-se proceder de maneira análoga ao conjunto dos números naturais.

### Atividades 97 e 98

Estas atividades desenvolvem os conceitos de fração inversa apresentados na página anterior.

## Divisão de frações

### Divisão de fração por número natural

Ângela separou metade de uma *pizza* e repartiu-a em pedaços aproximadamente iguais entre os 3 sobrinhos. Qual fração da *pizza* inteira cada um ganhou?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão  $\frac{1}{2} \div 3$ .



Pizza inteira.



Metade da *pizza*:  $\frac{1}{2}$ .



Metade da *pizza* repartida em 3 partes iguais. Cada parte corresponde a  $\frac{1}{2} \div 3$ .



$\frac{1}{2} \div 3$  é o mesmo que  $\frac{1}{6}$  da *pizza* inteira.

Ilustrações: Paulo Manz/Arquivo da editora

Assim,  $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$ .

Observe que a divisão  $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$  tem o mesmo resultado que a multiplicação  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  (lembre-se de que  $\frac{1}{3}$  é o inverso de 3). Assim, temos:

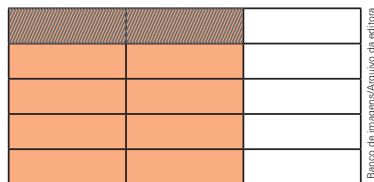
$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Veja mais um exemplo de divisão de fração por número natural.

$$\frac{2}{3} \div 5$$

Vamos dividir  $\frac{2}{3}$  de uma unidade por 5.

Pintamos  $\frac{2}{3}$  da figura. Dividimos essa parte pintada em 5 partes iguais e hachuramos 1 delas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A parte hachurada corresponde a  $\frac{2}{15}$  da figura inicial, ou seja,  $\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{15}$ .

Observe que  $\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ .

Para dividir uma fração por um número natural diferente de zero, multiplicamos a fração pelo inverso do número natural.

## 2 Frações

Inicialmente, pergunte aos alunos se, a partir das descobertas relacionadas à multiplicação de frações, seriam capazes de resolver uma divisão de frações. Verifique as hipóteses da turma e anote-as na lousa. É esperado que algum aluno diga que, analogamente à multiplicação de frações, bastaria dividir o numerador de uma fração pelo numerador da outra e dividir o denominador de uma fração pelo denominador da outra. Sem dizer se as respostas estão corretas ou incorretas, peça que verifiquem essas hipóteses durante as explorações que faremos sobre divisão de frações.

Nesta página, veremos a divisão de uma fração por um número natural. Para isso, retomemos a exploração da página 67, em que trabalhamos com o papel dobrado em 4 partes e a metade disso. Pergunte: "Quando tínhamos o papel dobrado em 4 partes, se pedíssemos que o dividíssemos em 2, em quantas partes estaria dividido?"; "Que fração representa isso?"; "Seria diferente da metade do papel dobrado em 4 partes?". Se necessário, leve os alunos a concluir que pedir a metade do papel é equivalente a pedir que o dividam em 2. Então, escreva na lousa:  $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  e pergunte qual é a relação que há entre 2 e  $\frac{1}{2}$ . Espera-se que respondam que um é o inverso do outro e percebam que, na divisão de uma fração por um número natural, multiplicamos a fração pelo inverso do número.

Em seguida, faça com os alunos os exemplos do livro, principalmente o exemplo da *pizza*, para que possam associar a divisão de frações com uma atividade do cotidiano.

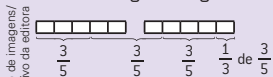
Para finalizar, peça que comparem as hipóteses atuais sobre divisão de frações com as iniciais e deixem anotado na lousa as conclusões a que chegaram até o momento.

## 2 Frações

Inicialmente, leia a situação-problema apresentada no livro e peça aos alunos que realizem a divisão por meio de desenhos, ou seja, agrupando as laranjas, evitando pensar no método prático por enquanto. Explique aos alunos que usaremos, para a divisão com as frações, essa ideia de medida, de quantas vezes cabe.

Resolva a situação do biscoito junto com os alunos na lousa, representando-a por desenhos como no livro, ou usando discos de frações. Chame a atenção dos alunos para o fato de que  $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 2$  e pergunte se a divisão de um número natural por uma fração pode ser efetuada do mesmo modo que a divisão de uma fração por um número natural.

Em seguida, pergunte para os alunos como representariam a divisão  $2 \div \frac{3}{5}$  e, na lousa, desenhe a imagem a seguir:



Então, peça aos alunos para verificarem se a resposta será a mesma usando o método prático utilizado no exemplo anterior e para atualizarem as hipóteses que estão na lousa.

### Atividade 99

Se necessário, chame a atenção dos alunos para os itens **b** e **c**, pois apresentam divisões com números mistos.

### Atividade 102

Esta atividade apresenta uma situação contextualizada resolvida usando multiplicações com frações. Retome as explorações anteriores sobre os gastos mensais de uma família. Aproveite a oportunidade para ampliar o diálogo sobre consumo consciente, desejo e necessidade, poupar e investir, etc.

Veja as resoluções dos itens desta atividade.

a)  $\frac{1}{3} \times 2400 = \frac{2400}{3} = 800$

b)  $\frac{1}{4} \times 2400 = \frac{2400}{4} = 600$

c)  $2400 - 800 - 600 = 1000$   
 $\frac{1}{5} \times 1000 = \frac{1000}{5} = 200$

d)  $2400 - 800 - 600 - 200 = 800$

e)  $\frac{200}{2400} = \frac{1}{12}$

## Divisão de número natural por fração

Bianca tem uma caixa em que cabem 12 laranjas. Quantos grupos de 3 laranjas cabem nessa caixa?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão  $12 \div 3$ . Nesse caso, podemos pensar: quantas vezes o 3 cabe em 12?

Nessa pergunta, usamos a ideia de **medida** associada à divisão.



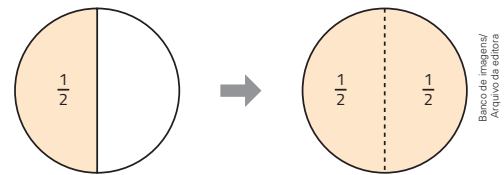
Banco de imagens/  
Arquivo da editora

Cabem 4 grupos. Logo,  $12 \div 3 = 4$ .

Essa ideia da divisão será usada na divisão de número natural por fração. Veja o exemplo.

Pedro está fazendo biscoitos e se perguntou: Quantas metades  $\left(\frac{1}{2}\right)$  de um biscoito cabem em 1 biscoito?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão  $1 \div \frac{1}{2}$ .



Banco de imagens/  
Arquivo da editora

Como podemos ver, cabem 2 metades na figura.

Assim,  $1 \div \frac{1}{2} = 2$ .

Observe que a divisão  $1 \div \frac{1}{2} = 2$  tem o mesmo resultado que a multiplicação  $1 \times \frac{2}{1} = 2$  ( $\frac{2}{1}$  é o inverso de  $\frac{1}{2}$ ).

Assim, temos:

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

O que ocorreu nesse exemplo, os matemáticos já provaram que ocorre sempre. Então, podemos escrever:

Para dividir um número natural por uma fração, multiplicamos o número natural pela inversa da fração.

### Atividades

⚠ Não escreva no livro!

99. c)  $2 \div \frac{7}{4} = 2 \times \frac{4}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$

99 ▶ Efetue as divisões no caderno.

a)  $4 : \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$  c)  $2 : 1\frac{3}{4}$

b)  $1\frac{2}{3} : 5\frac{5}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$  d)  $\frac{3}{4} : 3\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

100 ▶ Mara separou  $\frac{3}{4}$  de uma quantia e comprou 2 cadernos iguais. O preço de cada caderno corresponde a qual fração da quantia total?

101 ▶ Quantas vezes  $\frac{1}{4}$  de hora cabe em 2 horas?

102 ▶ Cláudio recebeu um salário de R\$ 2400,00. Ele gastou  $\frac{1}{3}$  desse dinheiro com moradia e  $\frac{1}{4}$  com

101. 8 vezes.  $\left(2 \div \frac{1}{4} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{1} = 8\right)$

alimentação. Com  $\frac{1}{5}$  do que sobrou, ele comprou roupas e, com o restante, pagou outras despesas.

a) Quanto Cláudio gastou com moradia? **R\$ 800,00**

b) Quanto ele gastou com alimentação? **R\$ 600,00**

c) Quanto ele gastou com roupas? **R\$ 200,00**

d) Quanto ele gastou em outras despesas? **R\$ 800,00**

e) Qual fração do salário representa o gasto de Cláudio com roupas?  $\frac{1}{12}$

103 ▶ O número 4 é 16 vezes maior do que o inverso dele. Se um número é 9 vezes maior do que o próprio inverso, qual é esse número?

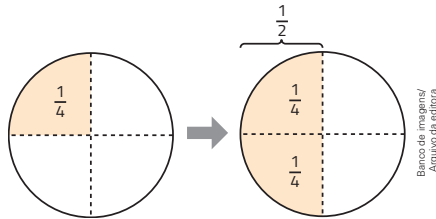
100.  $\frac{3}{8} \left(\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\right)$   
 70 > CAPÍTULO 2 • Revendo e aprofundando múltiplos, divisores e frações

103.  $3 \left(\frac{3}{1} \div 9 = \frac{3}{1} \times \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ ou } 3 \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3\right)$

## Divisão de fração por fração

Qual é o resultado da divisão  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ ?

Usando a ideia de **medida** da divisão, podemos perguntar: Quantas vezes  $\frac{1}{4}$  de uma pizza cabe em  $\frac{1}{2}$  dessa pizza?



Temos que  $\frac{1}{4}$  de pizza cabe 2 vezes em  $\frac{1}{2}$  da mesma pizza. Então, podemos escrever  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$ .

Observe que a divisão  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$  tem o mesmo resultado da multiplicação  $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$  ( $\frac{4}{1}$  é o inverso de  $\frac{1}{4}$ ).

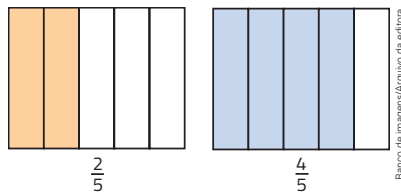
Assim, temos:  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$ .

Observe outro exemplo, da divisão  $\frac{2}{5} : \frac{4}{5}$ .

Nestas figuras, veja que só metade ( $\frac{1}{2}$ ) da parte azul ( $\frac{4}{5}$ ) cabe na parte laranja ( $\frac{2}{5}$ ). Assim,  $\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$ .

Observe que a divisão  $\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$  tem o mesmo resultado da multiplicação  $\frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$  ( $\frac{5}{4}$  é o inverso de  $\frac{4}{5}$ ).

Assim, temos:  $\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4}$ .



Para dividir uma fração por outra fração, multiplicamos a primeira fração pela inversa da segunda.

### Atividades

104 ▶ Efetue as divisões no caderno.

a)  $\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{16}$       c)  $\frac{3}{8} : \frac{9}{2}$   
 b)  $\frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$       d)  $\frac{5}{6} : \frac{1}{2}$

105 ▶ Lembrando que o traço de fração significa uma divisão, calcule no caderno.

a)  $\frac{5}{\frac{6}{2}} = \frac{5}{3}$  ou  $1\frac{1}{3}$       b)  $\frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}$  ou  $1\frac{4}{5}$       c)  $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

c)  $\frac{3}{8} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$       d)  $\frac{5}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

106 ▶ Calcule no caderno o valor das expressões numéricas.

a)  $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$       b)  $\frac{5}{18} - \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$       c)  $\frac{10}{77} \times \frac{7}{10} = \frac{70}{770} = \frac{1}{11}$       d)  $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$   
 a)  $(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}) : (\frac{1}{4} + \frac{2}{4}) = \frac{3}{5} : \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$       c)  $(\frac{2}{7} \times \frac{1}{4}) : (\frac{3}{4} - \frac{1}{5}) = \frac{2}{28} : (\frac{15}{20} - \frac{4}{20}) = \frac{1}{14} : \frac{11}{20} = \frac{1}{14} \times \frac{20}{11} = \frac{5}{77}$   
 b)  $(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) : (\frac{2}{5} - \frac{1}{10}) = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} : (\frac{4}{10} - \frac{1}{10}) = \frac{1}{12} : \frac{3}{10} = \frac{1}{12} \times \frac{10}{3} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$       d)  $(2 - \frac{1}{3}) \times (\frac{3}{4} : \frac{5}{6}) = \frac{5}{3} \times (\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}) = \frac{5}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$

107 ▶ Em uma garrafa de água cabem  $\frac{3}{4}$  de 1 litro. Quantos copos de  $\frac{1}{4}$  de litro cabem nessa garrafa?  
 3 copos.  $(\frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{1} = 3)$

⚠ Não escreva no livro!

Revendendo e aprofundando múltiplos, divisores e frações • CAPÍTULO 2 < 71

## 2 Frações

Acompanhe os alunos na leitura da primeira situação apresentada no livro e represente-a usando discos de fração ou com desenhos na lousa. Pergunte se, nesse caso, podemos usar o mesmo método que usamos anteriormente e, após as respostas, escreva  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$ .

Sugira a leitura da segunda situação do livro, verificando se surgem dúvidas. Em seguida, peça que reavaliem as hipóteses da lousa e que anotem as conclusões no painel de descobertas. Se necessário, faça intervenções para levá-los a concluir que, na divisão de frações, multiplicamos o primeiro termo pelo inverso do segundo, mesmo que algum deles seja um número natural.

### Atividade 105

Veja a resolução dos itens desta atividade.

a)  $\frac{5}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$   
 b)  $\frac{1}{5} \div \frac{1}{9} = \frac{1}{5} \times \frac{9}{1} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$   
 c)  $3 \div \frac{1}{2} = 3 \times \frac{2}{1} = 6$

### Atividade 106

Nesta atividade, os alunos devem calcular o valor de expressões numéricas envolvendo frações e as 4 operações. Se necessário, relembre a ordem em que devem ser efetuadas as operações, destacando a prioridade do que está dentro dos parênteses em relação ao que está fora.

Veja a resolução dos itens desta atividade.

a)  $\frac{3}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$   
 b)  $\frac{1}{12} \div \frac{3}{10} = \frac{1}{12} \times \frac{10}{3} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$   
 c)  $\frac{2}{28} \div \frac{11}{20} = \frac{2}{28} \times \frac{20}{11} = \frac{40}{308} = \frac{10}{77}$   
 d)  $(\frac{6}{3} - \frac{1}{3}) \times (\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}) = \frac{5}{3} \times \frac{18}{20} = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}$

## Revisando seus conhecimentos

### Principais habilidades da BNCC

EF07MA01	EF07MA12
EF07MA03	EF07MA15
EF07MA04	EF07MA22
EF07MA10	EF07MA27
EF07MA11	EF07MA34

Inicialmente, convide os alunos a compartilhar as experimentações e descobertas realizadas ao longo do capítulo. Pergunte à turma, por exemplo: "Qual conceito foi compreendido com maior facilidade?"; "Qual conceito, para cada um de vocês, foi o mais complexo?".

Enumere com a turma as habilidades e os conceitos explorados no capítulo e verifique quais foram as principais dificuldades encontradas. Aproveite a oportunidade para verificar se ainda há alguma dificuldade e para retomar as explorações que possam favorecer a superação de possíveis desafios.

#### Atividade 1

Esta atividade retoma os conceitos de quociente e mmc. Se necessário, explique aos alunos que devem calcular o mmc e, em seguida, efetuar a divisão por 4.

#### Atividade 2

Nesta atividade, os alunos devem efetuar os cálculos para que possam completar o quadro. Observe se algum aluno ainda encontra dificuldade na interpretação das quantidades que se encontram escritas por extenso e faça as intervenções que julgar pertinentes.

#### Atividade 3

Esta atividade apresenta uma situação muito comum no cotidiano dos alunos: o uso de moedas. Se necessário, retome as explorações envolvendo o sistema monetário brasileiro.

#### Atividade 4

Esta atividade retoma conceitos de seqüências e operações com frações (adição e subtração).

#### Atividades 5 e 6

Estas atividades são sobre comparação entre números, envolvendo decimais, números inteiros na reta numerada e ordenação de números inteiros.

Na atividade 5, comente com a turma que, neste caso, o enunciado pede a localização da alternativa incorreta. Ao final, peça que a tornem verdadeira modificando o sinal.

## Revisando seus conhecimentos

Não escreva no livro!

- Qual é o quociente entre o mmc(8, 10) e 4? ( $40 \div 4 = 10$ )
  - 20
  - 5
  - 8
  - 10
- Copie este quadro em um papel quadriculado e complete-o (um algarismo em cada quadrinho com  $\square$ ).

A	1		B	9	C	3		D	1		E	2
		6								4		
	8		F	8		0		6		6		8
	3					0		G	3	H	2	
I	9	J	9	K	9			L	4			
									0		2	
		M	5					N	2		0	5
									0		2	
P	9									Q	9	
		8		4				0				0
	4			R	1	S	8			T	5	
							0					0
U	2							V	6			
		7							0	6	0	0

Horizontal	Vertical
A. $347 + 962 + 384$	A. $6766 - 4927$
D. 14 dezenas + 2	B. $16 + 26 + 37 + 19$
F. $11538 - 3472$	C. 3 centenas.
G. $23 + 126 + 84 + 94$	D. $163 \cdot 100$
I. $4256 - 3257$	E. 2 centenas + 8 dezenas + 7
L. $89 + 230 + 36 + 47$	H. $10214 - 7985$
M. $632 - 582$	J. $122 + 836$
N. $2 \cdot 1000 + 2 \cdot 10 + 5$	K. $9000 + 40 + 1$
P. $1057 - 73$	L. $32000 + 10000$
Q. $1006 - 916$	O. 50 centenas.
R. Mil oitocentos e cinco.	P. 94 dezenas + 2
U. $3000 - 2973$	S. $13 + 9 + 14 + 26 + 24$
V. 606 centenas.	T. $34562 - 34506$

- Usando moedas de R\$ 0,50, R\$ 0,25 e R\$ 0,10, de quantas maneiras diferentes podemos fazer um pagamento de R\$ 1,00?
  - 6
  - 4
  - 3
  - 5
- Frações e seqüências.
  - Descubra uma regularidade, copie a seqüência no caderno e complete-a.
 
$$\left( \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 1\frac{2}{5}, 2, 2\frac{3}{5}, \square, \square, \square, \square \right)$$
  - Forme uma seqüência de 7 termos, em que o 1º termo é  $\frac{2}{3}$ , o 2º termo é  $1\frac{1}{3}$ , e cada termo, a partir do 3º termo, é a soma dos 2 termos anteriores.

72 > 4. a) Exemplo de resposta:  $3\frac{1}{5}, 3\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5}, 5$ . b)  $(\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, 2, 3\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3}, 8\frac{2}{3}, 14)$

CAPÍTULO 2 · Revendo e aprofundando múltiplos, divisores e frações

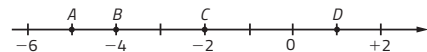
#### Atividade 7

Nesta atividade, são revistos diversos conceitos: múltiplo e divisor de números naturais, inclusive mdc, mmc e números primos, e frações.

Veja exemplos de resposta para os itens desta atividade.

- Falsa; contraexemplo: 7 só tem 2 divisores: 1 e 7.
- Verdadeira; exemplos:  $m(5): 0, 5, 10, 15, \dots$ ;  $m(12): 0, 12, 24, 36, \dots$ ;  $m(8): 0, 8, 16, 24, \dots$
- Verdadeira; exemplos: 6 é par e  $6^2 = 36$ , que é múltiplo de 4;

- Qual destas comparações não está correta?
  - $1,23 < 12,3$
  - $2,4 > 2,269$
  - $0,302 = 0,320$
  - $0,976 < 1$
- Observe esta reta numerada e, considerando os números correspondentes às letras, escreva no caderno se cada item é verdadeiro (V) ou falso (F).



- $D > C$
- $A > B$
- $C < B$
- $C > A$
- $D < A$
- $B > D$

- Copie as afirmações abaixo no caderno e indique se cada uma delas é verdadeira (V) ou falsa (F). No caso de ser verdadeira, dê 3 exemplos que confirmem a afirmação feita. No caso de ser falsa, dê 1 contraexemplo, ou seja, um exemplo que contesta a afirmação feita. **(MP)**

- Todo número natural diferente de zero tem mais de 2 divisores.
- Todo número natural diferente de zero tem infinitos múltiplos.
- Se um número natural é par, então o quadrado dele é sempre um múltiplo de 4.
- Se um número natural é ímpar, então o quadrado dele é sempre um múltiplo de 3.
- O mmc de 2 números naturais diferentes de zero é maior ou igual a cada um desses números.
- O mdc de 2 números naturais diferentes de zero é menor ou igual a cada um desses números.
- Todo divisor de 20 é divisor de 10.
- Todo múltiplo de 20 é múltiplo de 10.
- Os múltiplos de um número par são todos pares.
- Os múltiplos de um número ímpar são todos ímpares.
- A adição de 2 frações menores do que 1 dá um número maior ou igual a 1.
- Simplificar uma fração é reduzir o valor dela.
- Se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então a fração  $\frac{a}{b}$  é irredutível.
- Nenhum número primo é par.

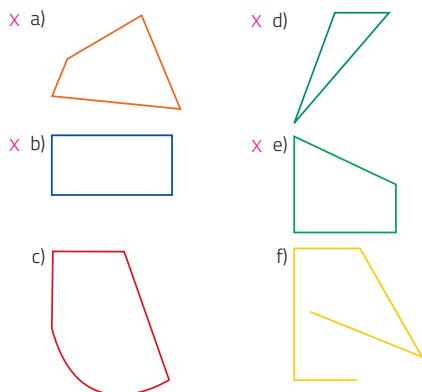
10 é par e  $10^2 = 100$ , que é múltiplo de 4; 8 é par e  $8^2 = 64$ , que é múltiplo de 4.

- Falsa; contraexemplo: 5 é ímpar e  $5^2 = 25$ , que não é múltiplo de 3.
- Verdadeira; exemplos:  $\text{mmc}(4, 6) = 12$ ;  $\text{mmc}(10, 5) = 10$ ;  $\text{mmc}(9, 12) = 36$ .
- Verdadeira; exemplos:  $\text{mdc}(4, 6) = 2$ ;  $\text{mdc}(10, 5) = 5$ ;  $\text{mdc}(9, 12) = 3$ .
- Falsa; contraexemplo: 4 é divisor de 20 e não é divisor de 10.

12.  $\frac{2}{3}$  (As possibilidades são: 35 ( $10 + 25 = 35$ ), 60 ( $10 + 50 = 60$ ) e 75 ( $25 + 50 = 75$ ); 2 possibilidades resultam em valores maiores do que 40.)

- 8▶ No caderno, compare os números inteiros de cada item usando o sinal <.
- a)  $-3, +4, +1, +7, -12$ .  $-12 < -3 < -1 < +4 < +7$   
 b)  $+8, -6, -9, -5, +10, +15$ .  
 $-9 < -6 < -5 < +8 < +10 < +15$

9▶ Quais destas figuras são polígonos?



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- 10▶ De acordo com o Censo do IBGE, no ano de 2010 a população de Minas Gerais correspondia a, aproximadamente,  $\frac{1}{10}$  da população do Brasil. Por sua vez, a população da capital Belo Horizonte correspondia a cerca de  $\frac{1}{12}$  da população de Minas Gerais.

### Minas Gerais



Fonte de consulta: IBGE. Atlas geográfico escolar. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016.

Considerando essas informações, calcule e responda no caderno: A população de Belo Horizonte correspondia, em 2010, a qual fração da população do Brasil?  $\frac{1}{120}$  ( $\frac{1}{12} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{120}$ )

- 11▶ Cássio tem barbantes com medidas de comprimento de  $3\frac{5}{6}$  m,  $1\frac{1}{4}$  m e  $1\frac{1}{8}$  m. Ele afirmou que, no total, tem aproximadamente 5 m de barbante. A estimativa dele foi razoável? Explique. Não. ( $4 + 1 + 1 = 6$ )

- 12▶ Em uma caixa há 1 moeda de 10 centavos, 1 moeda de 25 centavos e 1 moeda de 50 centavos. Retirando 2 moedas sem olhar, qual é a probabilidade de se obter mais do que 40 centavos?

- 13▶ No caderno, copie e complete o quadrado mágico que tem a adição dos números das linhas, colunas e diagonais igual a  $3\frac{15}{16}$ .

$1\frac{8}{16}$ ou $1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{16}$	$1\frac{4}{16}$ ou $1\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{16}$	$1\frac{5}{16}$	$1\frac{9}{16}$
$1\frac{6}{16}$ ou $1\frac{3}{8}$	$1\frac{7}{16}$	$1\frac{1}{8}$



### Um pouco de História

Há mais de 1000 anos, os chineses usavam um método prático e diferente para somar frações. Esse método não exigia que os denominadores das parcelas fossem iguais. Ele aparece em um dos primeiros livros chineses de Matemática, chamado *Nove capítulos*. Veja um exemplo de como eles faziam.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = ?$$

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 5 = 10 \\ 3 \cdot 4 = 12 \end{array} \right\} \rightarrow 10 + 12 = 22$$

(este será o numerador da soma)

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

(este será o denominador da soma)

$$\text{Assim, } \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$$

- 14▶ A resposta da soma de frações do *Um pouco de História* está correta? Verifique no caderno.

Sim, pois  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$ .

Revendendo e aprofundando múltiplos, divisores e frações • CAPÍTULO 2 < 73

- ▶ h) Verdadeira; exemplos: 0, 40 e 100 são múltiplos de 20 e também de 10.  
 i) Verdadeira; exemplos:  $m(6)$ : 0, 6, 12, ...;  $m(10)$ : 0, 10, 20, 30, ...;  $m(8)$ : 0, 8, 16, 24, ...  
 j) Falsa; contraexemplo: 20 é múltiplo de 5 e é par.  
 k) Falsa; contraexemplo:  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$  e  $\frac{3}{5}$  é menor do que 1.  
 l) Falsa; contraexemplo: simplificando  $\frac{10}{15}$ , obtemos  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ .

- m) Verdadeira; exemplos:  $\text{mdc}(3, 4) = 1$  e  $\frac{3}{4}$  é irredutível;

$$\text{mdc}(4, 9) = 1 \text{ e } \frac{4}{9} \text{ é irredutível; } \text{mdc}(25, 33) = 1 \text{ e } \frac{25}{33} \text{ é irredutível.}$$

- n) Falsa; contraexemplo: 2 é par e é primo.

### Revisando seus conhecimentos

#### Atividade 10

Nesta atividade, se possível, peça que pesquisem a população do estado onde moram e, a partir desse dado, criem comparações com a população de outros estados. Incentive-os a utilizar frações e porcentagens durante as comparações.

#### Atividade 11

Nesta atividade, permita que os alunos façam uma estimativa e peça que, em seguida, calculem o valor exato.

#### Atividade 13

Esta atividade trabalha um quadrado mágico com frações. Se achar conveniente, sugira que os alunos criem um quadrado cujo resultado seja uma fração diferente da apresentada e que desafiem um colega a solucioná-lo. Permita que os alunos forneçam o valor de outras casas do quadrado mágico, diferentes das casas da atividade, desde que verifiquem se, a partir delas, é possível completar a figura.

#### Um pouco de História

Este boxe apresenta a maneira utilizada pelos chineses há mais de 1000 anos para efetuar adições de frações. Nesse método, a fração resultante é composta da soma dos produtos entre os numeradores e denominadores opostos em relação ao sinal de mais (+) no numerador, e é composta do produto entre os denominadores no denominador.

Mostre aos alunos que essa maneira de adicionar frações é equivalente a encontrar o mmc entre as 2 frações, determinar as frações equivalentes e efetuar a adição dessas frações.

Comente que, nesse método chinês, caso desejem adicionar mais do que 2 frações, devem repetir o processo com 2 a 2 frações. Incentive-os a efetuar algumas adições utilizando-o para que possam verificar as compreensões e possíveis dúvidas.

Se quiser ampliar as explorações, peça aos alunos que pesquisem informações sobre as principais contribuições orientais para a Matemática.

## Testes oficiais

### Principais habilidades da BNCC

EF07MA01 EF07MA09  
EF07MA06 EF07MA10  
EF07MA08 EF07MA12

Explique aos alunos que as atividades desta página foram extraídas de provas e testes oficiais e, normalmente, possuem enunciados elaborados.

### Atividades 1, 2 e 4

Estas atividades trabalham conceitos de frações, como frações equivalentes e operações com frações, para resolução das situações.

Se necessário, oriente os alunos a utilizar frações para resolver a atividade 4.

### Atividade 3

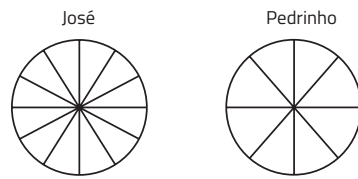
Para resolver esta atividade, os alunos devem usar o conceito de múltiplo de um número natural. Como é esperado que alguns alunos iniciem a atividade procurando todos os múltiplos, oriente-os que temos 1 múltiplo de 3 a cada 3 números consecutivos e peça que usem essa informação na resolução.

2.  $\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{12}{12} - \frac{2}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}\right)$  8.  $(20 \times 5 = 100; 100 \div 12 = 8 \text{ e resto } 4; \text{ total de } 9 \text{ pizzas, sendo } 1 \text{ grátis; } 8 \times 30 = 240.)$

## Testes oficiais

Não escreva no livro!

- 1 ▶ (Saeb) Observe as figuras.



Ilustrações: Banco de Imagens/ Arquivo da editora

- Pedrinho e José fizeram uma aposta para ver quem comia mais pedaços de pizza. Pediram duas pizzas de igual tamanho. Pedrinho dividiu a sua em oito pedaços iguais e comeu seis; José dividiu a sua em doze pedaços iguais e comeu nove. Então:  $\left(\frac{6}{8} = \frac{18}{24}; \frac{9}{12} = \frac{18}{24}\right)$
- x a) Pedrinho e José comeram a mesma quantidade de pizza.  
b) José comeu o dobro do que Pedrinho comeu.  
c) Pedrinho comeu o triplo do que José comeu.  
d) José comeu a metade do que Pedrinho comeu.

- 2 ▶ (Saeb) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado  $\frac{1}{6}$  da estrada e na segunda etapa  $\frac{1}{4}$  da estrada. Uma fração correspondente à terceira etapa é:

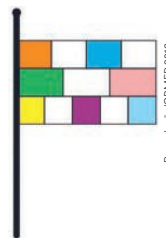
- a)  $\frac{1}{5}$ . x c)  $\frac{7}{12}$ .  
b)  $\frac{5}{12}$ . d)  $\frac{12}{7}$ .

- 3 ▶ (Obmep) Quantos números inteiros, múltiplos de 3, existem entre 1 e 2 005?

- a) 664 c) 667 e) 669  
b) 665 x d) 668 (A cada 3 números naturais temos 1 múltiplo de 3;  $2005 \div 3 = 668 \text{ e resto } 1$ .)

- 4 ▶ (Obmep) As três faixas horizontais da bandeira abaixo têm o mesmo comprimento, mesma altura e cada faixa é dividida em partes iguais. A medida da área total da bandeira é  $900 \text{ cm}^2$ .

As imagens desta página não estão representadas em proporção.



Reprodução/OBMep, 2016.

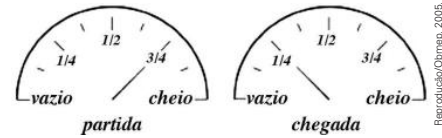
Qual é a soma das medidas das áreas dos retângulos brancos?

- a)  $300 \text{ cm}^2$  c)  $375 \text{ cm}^2$  e)  $600 \text{ cm}^2$   
x b)  $370 \text{ cm}^2$  d)  $450 \text{ cm}^2$

4.  $\left(\frac{1}{3} \times 900 = 300; \frac{1}{4} \times 300 = 75; \frac{1}{3} \times 300 = 100; \frac{1}{5} \times 300 = 60; 75 + 75 + 100 + 60 + 60 = 370\right)$

74 > CAPÍTULO 2 • Revendo e aprofundando múltiplos, divisores e frações

- 5 ▶ (Obmep) A capacidade do tanque de gasolina do carro de João é de 50 litros. As figuras mostram o medidor de gasolina do carro no momento de partida e no momento de chegada de uma viagem feita por João.



Reprodução/Obmep, 2005.

Quantos litros de gasolina João gastou nesta viagem?

- a) 10 c) 18 e) 30  
b) 15 x d) 25  $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \times 50 = 25\right)$

- 6 ▶ (Obmep) Qual o sinal que Clotilde deve colocar no lugar de "?" para que a igualdade fique correta?



Reprodução/Obmep, 2006.

- x a) ÷ c) + e) -  
b) × d) =  $\left(\frac{3}{7} \div \frac{6}{5} = \frac{15}{14}; \frac{15}{14} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{14}\right)$

- 7 ▶ (Obmep) Qual dos seguintes números está mais próximo de 1?

- $\left(\frac{1}{10} < \frac{1}{8} < \frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}\right)$   
a)  $1 + \frac{1}{2}$  c)  $1 + \frac{1}{5}$  x e)  $1 + \frac{1}{10}$   
b)  $1 - \frac{1}{8}$  d)  $1 + \frac{1}{3}$

- 8 ▶ (Obmep) Um grupo de 20 amigos reuniu-se em uma pizzaria que oferece a promoção descrita na figura.



Reprodução/Obmep, 2015.

Cada pizza grande foi cortada em 12 fatias e cada um dos amigos comeu 5 fatias de pizza. Quantos reais, no mínimo, o grupo pagou pelas pizzas?

- a) R\$ 180,00 x c) R\$ 240,00 e) R\$ 300,00  
b) R\$ 210,00 d) R\$ 270,00

## VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

6. a) Exemplos de resposta:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{4}$ .

- Descubra e registre os números no caderno.
  - Múltiplos de 4 entre 30 e 40. **32 e 36.**
  - Divisores pares de 30. **2, 6, 10 e 30.**
  - Múltiplos comuns de 6 e 8, com 2 algarismos. **24, 48, 72 e 96.**
  - Divisores comuns de 40 e 18. **1 e 2.**
  - mmc(20, 30) e mdc(20, 32). **60 e 4.**
  - Números primos entre 20 e 30. **23 e 29.**
- Em uma rodovia existe uma barraca de frutas a cada 6 km e uma lanchonete a cada 16 km. No marco zero há uma barraca de frutas e uma lanchonete. De quantos em quantos quilômetros encontraremos uma lanchonete e uma barraca de frutas juntas? **De 48 em 48 quilômetros. (mmc(6, 16) = 48)**
- Uma região quadrada com lados de medidas de comprimento de 2 cm representa qual fração de uma região retangular com lados de medidas de comprimento de 3 cm e de 4 cm?  **$\frac{4}{12}$  ou  $\frac{1}{3}$ .  $\frac{3}{4}$  de litro.**
- Repartindo igualmente 3 litros de suco entre 4 pessoas, qual fração do litro cada uma deve receber?  **$\frac{3}{4}$**
- Em um saquinho há 6 fichas verdes e 9 amarelas. Indique as razões no caderno, com frações irredutíveis.
  - Entre o número de fichas verdes e o total de fichas.  **$\frac{2}{5}$**
  - Entre o número de fichas verdes e o de amarelas.  **$\frac{2}{3}$**
- Faça no caderno o que se pede.
  - Escreva uma fração em que o numerador seja o antecessor do denominador.
  - Somando 1 ao numerador e 1 ao denominador, o valor da fração aumenta, fica igual ou diminui em relação à fração inicial? **Aumenta.**
  - Escolha outras frações e descubra se o mesmo fato acontece sempre. **Sim.**
- Uma companhia aérea faz 1 200 voos em cada mês. No último mês, 800 deles partiram no horário previsto. Qual é a probabilidade de escolher um voo que, nesse mês, saiu no horário previsto?  **$\frac{2}{3}$**
- No caderno, escreva as frações  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{9}{8}$  e  $\frac{5}{4}$  em ordem crescente.  **$\frac{3}{8}$ ,  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{9}{8}$ .**

12. b) Ele errou ao escrever a igualdade falsa  $18 \div 3 = 6 \times 2$ ; o correto seria, por exemplo,  $\frac{2}{3} \times 18 = 12$ , pois  $18 \div 3 = 6$  e  $6 \times 2 = 12$ .

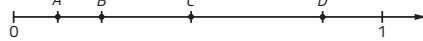
### Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. **Respostas pessoais.**

- Há respeito no meu relacionamento com os colegas, professores e demais funcionários da escola?
- Dos assuntos revistos dos anos anteriores, consegui recordar da maioria?
- Costumo retomar em casa os assuntos em que tive mais dificuldade na sala de aula?

Não escreva no livro!

- Guilherme, Didi, Eliane e Dunga participaram de uma gincana cultural. Do total de perguntas propostas, Guilherme acertou  $\frac{3}{6}$ , Didi acertou  $\frac{5}{8}$ , Eliane acertou  $\frac{4}{8}$  e Dunga acertou  $\frac{4}{6}$ . Houve um empate entre 2 deles. Quais participantes acertaram o mesmo número de perguntas? **Eliane e Guilherme. ( $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ )**
- Observe a reta numerada e responda no caderno. **A ( $B \times C$  deve ser menor do que  $B$  e menor do que  $C$ .)**



Se  $B$  e  $C$  são números entre 0 e 1, então  $B \times C$  corresponde a qual ponto:  $A$  ou  $D$ ?

- André comeu  $\frac{1}{4}$  de uma pizza e quer dar  $\frac{1}{2}$  do que sobrou para a irmã dele, Paula. Qual fração da pizza Paula vai receber?  **$\frac{3}{8}$  ( $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ;  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ )**
- Veja os registros que Caio fez.
 
$$\frac{2}{3} \times 18 = 18 \div 3 = 6 \times 2 = 12$$
  - O resultado  $\frac{2}{3} \times 18 = 12$  está correto? **Sim.**
  - Os registros dos cálculos que Caio escreveu estão todos corretos? Se ele errou, identifique o erro, argumente porque ele errou e, no caderno, faça o registro correto de todo o cálculo.
- Carlos mora a  $1\frac{3}{4}$  km da escola e Joel mora a  $1\frac{2}{3}$  km da escola na mesma direção. Quem mora mais longe da escola? Quanto a mais? **Carlos;  $\frac{1}{12}$  km a mais.**
- Em uma pesquisa sobre a preferência de cores,  $\frac{3}{5}$  dos entrevistados preferem azul,  $\frac{1}{15}$  prefere amarelo e  $\frac{1}{3}$  prefere vermelho. A fração que representa a quantidade de entrevistados que preferem azul é maior, menor ou igual à fração que representa os entrevistados que preferem amarelo e vermelho juntos? Justifique. **Maior.**

### Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

- 4 em 12 =  $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$   
Veja a resolução da atividade 4.  
 $3 \div 4 = \frac{3}{4}$   
Veja a resolução da atividade 5.

- 6 em 15 =  $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$
- 6 em 9 =  $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

### Atividade 6

Veja a resolução de alguns itens desta atividade.

- Exemplo de resposta:

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{4}; \frac{8}{12} < \frac{9}{12}$$

- Exemplo de resposta:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{2}{3} < \frac{3}{4}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

### Atividade 7

Esta atividade trabalha o conceito de frações como probabilidade.

Veja a resolução.

$$800 \text{ em } 1\,200 = \frac{800}{1\,200} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

### Atividade 13

Veja a resolução desta atividade.

$$1\frac{3}{4} - 1\frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

### Atividade 14

Veja a resolução desta atividade.

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{3} = \frac{1+5}{15} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$$

$$\frac{9}{15} > \frac{6}{15}$$

### Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que cada aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que eles possam perceber e mensurar o quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância de respeitar os colegas da turma. Enfatize que a Matemática deve ser construída de acordo com o que já sabemos.

Revisando e aprofundando múltiplos, divisores e frações • CAPÍTULO 2 < 75

## Verifique o que estudou

### Principais habilidades da BNCC

EF07MA01

EF07MA09

EF07MA11

EF07MA08

EF07MA10

EF07MA12

### Atividade 1

Nesta atividade, são revistos alguns conceitos de múltiplo e divisor de números naturais, como mdc, mmc e números primos.

### Atividades 2 a 5

Estas atividades trabalham os conceitos de frações como parte do todo, quociente, operador e razão.

Na atividade 3, se necessário, retome os cálculos das medidas de área de regiões quadradas e retangulares. Permita que os alunos apresentem também a resposta como um número na forma decimal.

Veja a resolução da atividade 3.

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 4 = 12$$



## 2 Operações com números racionais

### Principais habilidades da BNCC

EF07MA10 EF07MA12  
EF07MA11 EF07MA29

Inicie o estudo das operações com números racionais utilizando situações encontradas no cotidiano, como as apresentadas no livro. Efetue todas as operações passo a passo, pois inicialmente os alunos podem não se recordar de algum processo suprimido. Relembre também o uso dos algoritmos da adição e da subtração.

#### Atividade 23

Esta atividade apresenta adições e subtrações com números racionais. No item **f**, os alunos devem efetuar operações entre frações e decimais, ou seja, inicialmente, devem transformar as frações em decimais ou os decimais em frações. Verifique se é necessário relembrá-los como fazer isso.

#### Atividades 24 a 26

Nestas atividades, trabalhamos problemas cotidianos que envolvem adições e subtrações com números racionais.

#### Atividade 27

Nessa atividade, os alunos devem criar uma situação e trocá-la com um colega para que um resolva o problema do outro. Se achar conveniente, peça que a operação, que resolve a atividade, seja entre frações e decimais.

#### Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 3** do 1º bimestre.

## 2 Operações com números racionais

Você já efetuou adições, subtrações, multiplicações e divisões com números inteiros e com decimais e frações positivas. Agora vamos retomar as estratégias e usá-las nas operações com números racionais.

Observe a situação a seguir, que envolve adição com números racionais.

Considere a medida de temperatura de 2 graus Celsius e meio abaixo de zero  $\left(-2\frac{1}{2}^{\circ}\text{C}$  ou  $-2,5^{\circ}\text{C}$ ) no início do dia, no centro de uma cidade. Até o meio-dia, a medida de temperatura havia subido 4 graus Celsius  $(+4^{\circ}\text{C})$ . Qual era a medida de temperatura ao meio-dia?

Para determinar a resposta, precisamos adicionar a medida de temperatura que aumentou à medida de temperatura inicial.

Com frações:  $\left(-2\frac{1}{2}\right) + (+4) = \left(\frac{-5}{2}\right) + \left(\frac{+8}{2}\right) = \frac{+3}{2} = +1\frac{1}{2}$  ou  $-2\frac{1}{2} + 4 = \frac{-5}{2} + \frac{8}{2} = \frac{+3}{2} = +1\frac{1}{2}$

Com decimais:  $(-2,5) + (+4) = +1,5$  ou  $-2,5 + 4 = +1,5$

Logo, a medida de temperatura ao meio-dia era de  $+1,5^{\circ}\text{C}$ .

## Adição e subtração de números racionais

A adição e a subtração de números racionais são baseadas nos conhecimentos anteriores: adição e subtração de números inteiros e de frações e decimais positivos. Observe os exemplos.

$$\bullet \left(+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(+\frac{4}{12}\right) + \left(-\frac{3}{12}\right) = \frac{(+4) + (-3)}{12} = +\frac{1}{12}$$

$$\bullet (-2,3) + (-4,5) = -2,3 - 4,5 = -6,8$$

$$\bullet \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right) = \frac{(-10) + (+9)}{15} = \frac{-10 + 9}{15} = -\frac{1}{15}$$

$$\bullet (+3,4) - (+1,8) = 3,4 - 1,8 = 1,6$$

$$\bullet \begin{array}{r} \text{D} \quad \text{U} \quad \text{d} \quad \text{c} \\ 6 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \\ + 1 \quad 2 \quad 5 \quad 5 \\ \hline 7 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \end{array}$$



Thiago Neumann/Arquivo da editora

#### Bate-papo

Converse com os colegas: Qual é o valor da soma de 2 números racionais simétricos? Zero.

**Não escreva no livro!**

### Atividades

**23** ▶ Efetue as adições e as subtrações no caderno.

a)  $\left(+\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{15}$       d)  $\left(+\frac{2}{5}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{20}$

b)  $(-0,4) + (-2,8) = -3,2$       e)  $(-0,54) - (-0,6) = 0,06$

c)  $\left(-\frac{5}{8}\right) - \left(+\frac{3}{8}\right) = -1$       f)  $\left(-\frac{1}{4}\right) - (+3,8) = -4,05$

**24** ▶ O saldo da conta bancária de André era de R\$ 950,00. Ele emitiu 3 cheques que já foram descontados: o primeiro de R\$ 256,40, o segundo de R\$ 123,60 e o terceiro de R\$ 523,30. Qual é o saldo atual de André?  
R\$ 46,70  $(950 - 256,40 - 123,60 - 523,30 = 46,70)$

**25** ▶ Responda: Quando a medida de temperatura passa de  $-1,3^{\circ}\text{C}$  para  $-4,1^{\circ}\text{C}$ , qual é a variação?  
Baixou  $2,8^{\circ}\text{C}$ .  $((-4,1) - (-1,3)) = -4,1 + 1,3 = -2,8$

**26** ▶ Um mergulhador atingiu a medida de profundidade de 18,3 m  $(-18,3 \text{ m})$ . Em seguida, subiu 3,4 m e desceu 5,7 m. Qual é a medida de profundidade máxima que ele atingiu nesse mergulho?  
 $-20,6 \text{ m}$   $(-18,3 + 3,4 - 5,7 = -20,6)$

**27** ▶ Escreva no caderno um problema envolvendo adição e subtração de números racionais. Depois, troque com um colega; ele resolve o seu e você resolve o dele. **Resposta pessoal.**

# Multiplicação de números racionais

## Explorar e descobrir

⚠ Não escreva no livro!

Você já tentou descobrir por que o algoritmo da multiplicação funciona com decimais? Vamos pensar sobre isso fazendo algumas atividades.

- 1• Utilize o algoritmo da multiplicação para efetuar no caderno  $10,81 \cdot 1,3$ .
- 2• Agora você vai efetuar a mesma multiplicação, mas usando outro método.
  - a) Multiplique cada fator da multiplicação ( $10,81$  e  $1,3$ ) por uma potência de  $10$ , de modo que os fatores passem a ser números inteiros.  $100 \times 10,81 = 1081$  e  $10 \times 1,3 = 13$ .
  - b) Efetue a multiplicação utilizando os fatores inteiros obtidos no item **a**.  $1081 \times 13 = 14053$
  - c) Multiplique as 2 potências de  $10$  que você usou no item **a** para transformar os fatores da multiplicação em números inteiros.  $10 \times 100 = 1000$
  - d) Divida o resultado da multiplicação obtida no item **b** pelo resultado obtido no item **c**.  $14053 \div 1000 = 14,053$
- 3• Compare o resultado obtido na atividade 1 e no item **d** da atividade 2. O que você pode concluir? Converse com os colegas e escreva uma conclusão no caderno.

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 10,81 \\
 \times \quad 1,3 \\
 \hline
 3243 \\
 + 1081 \\
 \hline
 14,053
 \end{array}$$

Exemplos de resposta:

Exemplo de resposta: Os métodos são equivalentes e, na realidade, o algoritmo da multiplicação é uma simplificação do método desenvolvido.

A multiplicação de números racionais também é baseada nos conhecimentos anteriores sobre multiplicação de números inteiros e de frações e decimais positivos. Acompanhe os exemplos e observe os sinais dos fatores e o sinal do resultado.



Thiago Neumann/Arquivo da editora

- $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right) = \frac{(-2) \cdot (+1)}{3 \cdot 5} = \frac{-2}{15} = -\frac{2}{15}$
- $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-1) \cdot (-3)}{7 \cdot 5} = \frac{+3}{35} = \frac{3}{35}$
- $(-0,1) \cdot (+1,2) = \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(+\frac{12}{10}\right) = \frac{(-1) \cdot (+12)}{10 \cdot 10} = \frac{-12}{100} = -\frac{12}{100} = -0,12$
- $(-0,5) \cdot (-2,4) = +1,2$
- $20\% \text{ de } -500 = \frac{20}{100} \cdot (-500) = 0,20 \cdot (-500) = -100$

$$\begin{array}{r}
 2,4 \\
 \times 0,5 \\
 \hline
 12,0
 \end{array}$$

## Atividades

28• Efetue as multiplicações no caderno:

a)  $(+0,5) \cdot (-0,4) = -0,2$       d)  $(-0,5) \cdot (-2,0) = 1$

b)  $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{14}$       e)  $15\% \text{ de } -300 = -45$

c)  $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(+\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{2}$       f)  $35\% \text{ de } +900 = +315$

29• **Desafio.** Lembre-se do cálculo do valor de potências no conjunto dos números naturais (base e expoente naturais) e calcule no caderno o valor de cada potência dada, com número racional na base e número natural no expoente.

a)  $(-1,1)^2 = +1,21$       c)  $(+0,3)^2 = +0,09$       e)  $(-0,\bar{7})^0 = +1$

b)  $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$       d)  $\left(+\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$       f)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

29. b)  $-\frac{27}{8}$  ou  $-3\frac{3}{8}$ .

## 2 Operações com números racionais

Explique que a multiplicação dos números racionais pode ser realizada de maneira análoga à multiplicação entre frações ou decimais, estudados anteriormente. Na lousa, efetue exemplos de multiplicações, como os apresentados no livro, seguindo as indicações dos alunos.

Destaque que a novidade agora é que as frações ou os decimais podem ser negativos, ou seja, além de efetuarem a multiplicação, devem estar atentos aos sinais.

### Explorar e descobrir

O livro apresenta outro método para efetuar a multiplicação de decimais. Ao seguir as indicações desta seção, os alunos devem descobrir o motivo da validade da regra das vírgulas no algoritmo da multiplicação, a partir da percepção de que o método apresentado é equivalente ao algoritmo.

### Atividades 28 e 29

Estas atividades apresentam multiplicações envolvendo números racionais.

Veja a resolução dos itens da atividade 29.

a)  $(-1,1) \times (-1,1) = +1,21$

b)  $-1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

c)  $(+0,3) \times (+0,3) = +0,09$

d)  $\left(+\frac{1}{10}\right) \times \left(+\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{100}$

e)  $(-0,\bar{7})^0 = +1$

f)  $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

## 2 Operações com números racionais

Inicie as explorações retomando com a turma as propriedades da inversa de uma fração, estendendo essas propriedades para todos os números racionais. Destaque o motivo de o zero ser o único número racional sem inverso: não existe divisão por zero.

Na lousa, mostre os exemplos do livro e explique o procedimento para inverter os números racionais, chamando a atenção dos alunos para o fato de que um número e o inverso dele possuem sinais iguais.

### Bate-papo

Peça que multipliquem os números racionais dos exemplos pelos respectivos inversos e verifiquem que o resultado é sempre 1, ou seja, mantém-se válida a relação que vimos anteriormente para frações.

### Atividade 30

Nesta atividade, os alunos devem determinar o inverso dos números racionais dados. Verifique se os alunos lembram que o zero não possui inverso (item c), que devem determinar a fração imprópria referente ao número misto antes de invertê-la (item d), que devem descobrir a fração referente ao decimal para invertê-la (item e) e que devem transformar a dízima periódica em fração geratriz antes de invertê-la (item f).

## Inverso de um número racional



No capítulo 2 você estudou as frações positivas ou nulas e viu que, se uma fração é diferente de zero, obtemos a **inversa** dessa fração invertendo o numerador com o denominador dela. Também podemos determinar o **inverso de números racionais**. Observe os exemplos.

- O inverso de  $\frac{3}{4}$  é  $\frac{4}{3}$ .
- Como  $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ , então o inverso de  $3\frac{1}{4}$  é  $\frac{4}{13}$ .
- $0,7 = \frac{7}{10}$ ; logo, o inverso de  $0,7$  é  $\frac{10}{7}$  ou  $1\frac{3}{7}$ .
- O inverso de  $\frac{1}{8}$  é  $\frac{8}{1}$  ou 8.
- Aplicando o mesmo raciocínio, o inverso do número racional  $-\frac{2}{3}$  é  $-\frac{3}{2}$ . Observe que  $(-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{3}{2}) = +1$ .
- O inverso de  $+3$  é  $+\frac{1}{3}$ . Note que  $(+3) \cdot (+\frac{1}{3}) = +\frac{3}{3} = +1$ .

O produto de um número racional e o inverso dele é sempre igual a  $+1$ .

Contudo, é preciso observar que:

De todos os números racionais, o único que não tem inverso é o zero, pois não existe divisão por zero.

### Bate-papo

Experimente multiplicar outros números racionais pelos respectivos inversos e veja o que ocorre. Converse com um colega sobre isso.

Resposta pessoal.

### Atividades

Não escreva no livro!

30 ▶ Determine no caderno o inverso de cada número racional.

a)  $-\frac{7}{3} - \frac{3}{7}$

d)  $2\frac{3}{4} \frac{4}{11}$

b)  $12 \frac{1}{12}$

e)  $-1,1 - \frac{10}{11} (-1,1 = -1\frac{1}{10} = -\frac{11}{10})$

c) 0 Não existe.

f)  $0,222\dots$  (sabendo que  $2 \div 9 = 0,222\dots$ ).  $\frac{9}{2}$  ou  $4\frac{1}{2}$

31 ▶ Produto de inversos. Faça os cálculos no caderno.

a) Calcule o produto dos números racionais  $a = -\frac{3}{4}$  e  $b = -\frac{5}{11}$ .  $\frac{15}{44} \left( (-\frac{3}{4}) \times (-\frac{5}{11}) = \frac{15}{44} \right)$

b) Escreva o inverso de cada um dos números dados no item a.  $-\frac{4}{3}$  e  $-\frac{11}{5}$ .

c) Calcule o produto desses inversos.  $\frac{44}{15} \left( (-\frac{4}{3}) \times (-\frac{11}{5}) = \frac{44}{15} \right)$

d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c.

O produto dos inversos dos 2 números racionais dados é igual ao inverso do produto deles.

## 2 Operações com números racionais

Primeiro, chame a atenção dos alunos para o fato de que já efetuaram divisões de frações e divisões de decimais, mas que, para os números racionais, devem estar atentos também aos sinais que acompanham esses números.

Em seguida, efetue, na lousa com a turma, exemplos de divisões, como os dados no livro, seguindo as indicações dos alunos.

Neste momento, sugira a eles que completem os assuntos registrados anteriormente no painel de descobertas e que foram trabalha-

dos com números racionais neste capítulo, como módulo, as 4 operações, etc.

### Explorar e descobrir

Realize com os alunos estas atividades e faça-os descobrir o motivo de a regra do algoritmo da divisão para os decimais funcionar. Mostre que a mesma percepção é possível por meio de frações

equivalentes:  $\frac{33}{1,32} = \frac{33 \times 100}{1,32 \times 100} = \frac{3300}{132} = 25$ .

Na atividade 3, também é possível obter a mesma conclusão, ▶

## Divisão de números racionais

Você já aprendeu no capítulo 2 que, para dividir uma fração por outra, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda fração. Veja um exemplo.

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$$

- $\left(-\frac{1}{3}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{3}{2}\right) = \frac{(-1) \cdot (+3)}{3 \cdot 2} = \frac{-3}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\left(-\frac{2}{5}\right) : (+0,5) = \left(-\frac{2}{5}\right) : \left(+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(+\frac{2}{1}\right) = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$
- $5,4 \div (-0,12) = \frac{54}{10} \div \left(-\frac{12}{100}\right) = \frac{54^9}{10_1} \times \left(-\frac{100^{10}}{12_2}\right) = -\frac{90}{2} = -45$

Para dividir um número racional por outro, também multiplicamos o primeiro pelo inverso do segundo. Veja os exemplos.



Thiago Neumann/Arquivo da editora

Também podemos usar os decimais para efetuar a divisão  $5,4 \div (-0,12)$  com o algoritmo usual.

$$\begin{array}{r|l} 5,4 & 0,12 \\ -48 & 45 \\ \hline 060 & \\ -60 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

$5,4 \div (-0,12) = -45$

### Explorar e descobrir

ⓘ Não escreva no livro!

Você já tentou descobrir por que o algoritmo da divisão funciona com decimais? Vamos pensar sobre isso fazendo algumas atividades.

- 1▶ Utilize o algoritmo da divisão para efetuar no caderno  $33 \div 1,32$ .
- 2▶ Agora você vai efetuar a mesma divisão, mas usando outro método. **Exemplos de resposta:**
  - a) Multiplique o dividendo e o divisor por uma mesma potência de 10 de modo que ambos passem a ser números inteiros.  $100 \times 33 = 3300$  e  $100 \times 1,32 = 132$ .
  - b) Efetue a divisão utilizando o dividendo e o divisor inteiros obtidos no item a.  $3300 \div 132 = 25$
- 3▶ Compare o resultado obtido na atividade 1 e no item b da atividade 2. O que você pode concluir? Converse com os colegas e escreva uma conclusão no caderno. **Exemplos de resposta:** Os métodos são equivalentes e, na realidade, o algoritmo da divisão é uma simplificação do método desenvolvido.

### Atividades

ⓘ Não escreva no livro!

32▶ Efetue as divisões no caderno.

a)  $\left(+\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$       c)  $\left(-\frac{3}{25}\right) : \left(-\frac{9}{10}\right) = +\frac{2}{15}$       e)  $(-2,5) : \left(+\frac{2}{100}\right) = -125$

b)  $\left(-\frac{2}{5}\right) : (+3) = -\frac{2}{15}$       d)  $(-5) : (-10) = +\frac{1}{2}$       f)  $5 : \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{20}{3}$  ou  $-6\frac{2}{3}$

33▶ Calcule no caderno o valor de cada expressão.

As expressões numéricas envolvendo números racionais são resolvidas da mesma maneira que as expressões numéricas envolvendo números inteiros e frações e decimais positivos.

a)  $(+2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{4}$       1.  $\begin{array}{r} 3300 \\ -264 \\ \hline 0660 \\ -660 \\ \hline 000 \end{array}$       c)  $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(+\frac{1}{4}\right) = -2\frac{3}{4}$

b)  $\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{4} + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{31}{60}$       d)  $(-3) \cdot (+1,25) - (+1,2) : (-0,6) = -1,75$

▶ transformando os decimais em frações e utilizando frações equivalentes.

#### Atividade 32

Esta atividade trabalha a divisão de números racionais. Veja exemplos de resolução.

a)  $\left(+\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(+\frac{1}{4}\right) \times (-2) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

b)  $\left(-\frac{2}{5}\right) : (+3) = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(+\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{15}$

c)  $\left(-\frac{3}{25}\right) : \left(-\frac{9}{10}\right) = \left(-\frac{3}{25}\right) \times \left(-\frac{10}{9}\right) = +\frac{2}{15}$

d)  $(-5) \div (-10) = (-5^1) \times \left(-\frac{1}{10^2}\right) = +\frac{1}{2}$

e)  $(-2,5) : \left(+\frac{2}{100}\right) = (-2,5) \times \left(+\frac{100}{2}\right) = -125$

f)  $5 : \left(-\frac{3}{4}\right) = 5 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}$

#### Atividade 33

Nesta atividade, os alunos devem calcular o valor de expressões numéricas envolvendo adições, subtrações, multiplicações e divisões de números racionais. Em todas as expressões numéricas, pelo menos uma das operações é uma multiplicação ou uma divisão.

Veja exemplos de resolução.

a)  $(+2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{1}{6}\right) =$   
 $= \left(-\frac{6}{4}\right) \cdot \left(+\frac{1}{6}\right) =$   
 $= \left(-\frac{6^{+6}}{24^{+6}}\right) = -\frac{1}{4}$

ou

$(+2^1) \cdot \left(-\frac{3}{4^2}\right) \cdot \left(+\frac{1}{6}\right) =$   
 $= \left(-\frac{2^1}{6^2}\right) \cdot \left(+\frac{1}{6^2}\right) =$   
 $= -\frac{1}{4}$

b)  $\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{4} + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$   
 $= \left(-\frac{4}{20} + \frac{15}{20} + \frac{20}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$   
 $= \left(+\frac{31}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{31}{60}$

c)  $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(+\frac{1}{4}\right) =$   
 $= \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(+\frac{4^2}{1}\right) =$   
 $= \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{1}\right) =$   
 $= \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{8}{4}\right) =$   
 $= -\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4}$

d)  $(-3) \times (+1,25) -$   
 $- (+1,2) \div (-0,6) =$   
 $= (-3,75) - (-2) =$   
 $= -3,75 + 2 = -1,75$

1. R\$ 34,50 ( $36,3 \div 12,1 = 3$ ;  $198 \div 16,5 = 12$ ;  
 $3 + 12 = 15$ ;  $15 \times 2,30 = 34,5$ )

## Revisando seus conhecimentos

12.

Não escreva no livro!

- 1▶ Considere as informações sobre o consumo de combustível do carro do Antônio.

- Consumo médio urbano: 12,1 km/L.
- Consumo médio na estrada: 16,5 km/L.

No caderno, calcule e responda: Em uma viagem, esse carro percorreu 36,3 km na cidade e 198 km na estrada. Qual foi a despesa com combustível se o preço de cada litro foi de R\$ 2,30?

- 2▶ Pedro foi ao banco pagar algumas contas: a de energia elétrica (R\$ 193,47), a de água (R\$ 48,57) e a de gás (R\$ 34,89). Sabendo que Pedro levou ao banco a quantia de R\$ 300,00, quanto ele recebeu de troco após pagar as 3 contas?

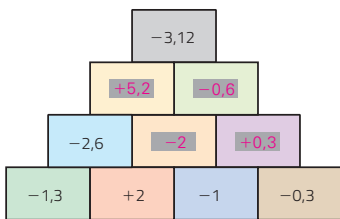
R\$ 23,07 ( $300 - 193,47 - 48,57 - 34,89 = 23,07$ )

- 3▶ Qual destas expressões tem valor maior?

X a)  $\frac{-(0,8)^2 - (-1,6)}{-4 + 2}$  (-0,48)

b)  $\left(-1\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + (-2) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$  (-1,2)

- 4▶ No caderno, copie e complete a "pirâmide" de números racionais efetuando multiplicações.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

- 5▶ **Porcentagem.** a) 40% de 300 = 120; 50% de 300 = 150.

- a) Descubra a regularidade, copie a sequência no caderno e complete-a.

10% de 300 = 30	20% de 300 = 60
30% de 300 = 90	<input type="text"/>

- b) No caderno forme uma sequência de 5 termos, na qual o 1º termo é 20 000, e cada termo, a partir do 2º, é 20% do termo anterior.

(20 000, 4 000, 800, 160, 32)

- 6▶ Calcule no caderno o valor da expressão  $17,28 \cdot \frac{1}{10^4} \cdot 0,001728$

- 7▶ A dízima periódica 0,5333... corresponde a qual das frações abaixo?

a)  $\frac{3}{5}$  (0,60)                      c)  $\frac{53}{100}$  (0,53)

b)  $\frac{11}{15}$  (0,7333...)                  X d)  $\frac{8}{15}$  (0,5333...)

8. 16 pontos. ( $13 \times (+1,5) + 7 \times (-0,5) = +19,5 - 3,5 = +16$ )

- 8▶ Uma avaliação consta de 20 questões. Cada questão respondida certa vale +1,5 ponto e cada questão respondida errada vale -0,5 ponto. Se Paulo acertou 13 questões e errou 7, então quantos pontos ele fez?

- 9▶ Descreva como localizar em uma reta numerada os pontos correspondentes aos números racionais dados.

a) 17,25                      b)  $-\frac{17}{5}$                       c)  $20\frac{1}{2}$  (MP)

- 10▶ Copie e calcule no caderno.

a)  $\left|-\frac{2}{3}\right| \cdot \frac{2}{3}$                       c)  $\left|\frac{3}{5}\right| \cdot \frac{3}{5}$

b)  $|-0,25| \cdot 0,25$                       d)  $|6,4| \cdot 6,4$

- 11▶ Você se lembra de que, na calculadora, o ponto é usado para indicar a vírgula de decimal? Assim, teclando   , aparece no visor , que corresponde a 2,5.

Algumas calculadoras têm uma tecla que muda o sinal do número digitado antes dela: . Ou seja, ela fornece o oposto desse número.

Algumas calculadoras também têm a tecla  ou , que fornece o inverso do número digitado antes dela.

Escreva no caderno o que você acha que aparecerá no visor da calculadora ao teclar cada sequência indicada. Depois, confira com uma calculadora.

a)     -7,3

b)   0,5

c)      1,333...

d)        -9

e)      169

f)         4

- 12▶ Escreva no caderno a sequência de teclas da calculadora que devemos apertar para obter o resultado de  $(+2,5) - (-1,4)$ , que é 3,9. Depois, confira com uma calculadora.

- 13▶ Copie cada afirmação no caderno e complete-a com **existe apenas um**, **não existe** ou **existe mais de um**.

No caso de existir só um, indique qual é; no caso de existir mais de um, cite pelo menos 2 exemplos.

- a)  número primo cujo algarismo das unidades é 6. **Não existe.**  
 b)  número primo entre 30 e 40. **Existe mais de um; 31 e 37.**  
 c)  número primo par. **Existe apenas um; 2.**  
 d)  número primo entre 24 e 30. **Existe apenas um; 29.**  
 e)  número primo cujo algarismo das unidades é 3. **Existe mais de um; exemplos: 13, 23 e 43.**

Números racionais • CAPÍTULO 3 < 91

## Revisando seus conhecimentos

### Principais habilidades da BNCC

EF07MA10 EF07MA12  
 EF07MA11 EF07MA29

As atividades apresentadas nesta página trabalham diferentes conceitos de números racionais.

#### Atividades 1 e 2

Estas atividades são contextualizações de operações com números racionais.

Na atividade 1, se necessário, explique que precisam efetuar os cálculos separadamente, pois o rendimento do combustível é diferente para cada local do percurso.

#### Atividades 3, 4 e 6

Estas atividades apresentam expressões numéricas com números racionais.

Veja a resolução da atividade de 3.

a)  $\frac{-(0,8)^2 - (-1,6)}{-4 + 2} = \frac{-0,64 + 1,6}{-2} = \frac{0,96}{-2} = -0,48$

b)  $\left(-1\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + (-2) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{7}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(+\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{8}{4}\right) + \left(+\frac{4}{5}\right) = -2 + \frac{4}{5} = -\frac{10}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{6}{5} = -1,2$

#### Atividade 9

Esta atividade trabalha os números racionais na reta numerada. Oriente os alunos a descrever de que modo poderiam proceder para identificar a localização dos números racionais na reta.

#### Atividade 10

Esta atividade trabalha os conceitos de módulo ou valor absoluto.

#### Atividade 11

Esta atividade trabalha os conceitos de oposto e inverso de números racionais com o uso da calculadora.

Destaque aos alunos que a calculadora deve ser usada apenas para conferir as respostas obtidas nestas situações.

#### Atividade 12

Esta atividade trabalha o conceito de sequências com números racionais.

## Testes oficiais

### Principais habilidades da BNCC

EF07MA10 EF07MA12  
EF07MA11 EF07MA29

As atividades desta página trabalham conceitos de números inteiros.

### Atividades 1, 2, 6 e 7

Estas atividades desenvolvem a localização dos números racionais na reta numerada.

### Atividades 3 a 5

Estas atividades apresentam situações cotidianas resolvidas a partir de operações com números racionais.

$$8. \left( \frac{42000^2}{397} \times \left( -\frac{71}{21000} \right) \cdot \frac{397}{7} = 2 \times (-71) \times \frac{1}{7} \right) \left( \frac{19}{6} - \frac{7}{6} = \frac{12}{6} = 2; 2 \div 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \frac{7}{6} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \right)$$

## Testes oficiais

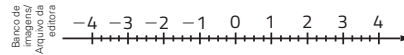
Não escreva no livro!

- 1 ▶ (Prova Brasil) Observe os números que aparecem na reta abaixo.



O número indicado pela seta é:

- a) 0,9.  b) 0,54. c) 0,8. d) 0,55.  
2 ▶ (Prova Brasil) Em uma aula de Matemática, o professor apresentou aos alunos uma reta numérica como a da figura a seguir:



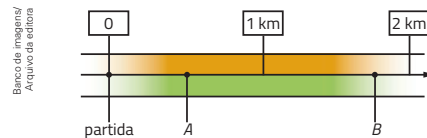
O professor marcou o número  $-\frac{11}{4}$  nessa reta. Esse número foi marcado entre quais pontos da reta numérica?

- a) -4 e -3. c) 2 e 3.  
 b) -3 e -2.  $\left( -\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4} \right)$  d) 3 e 4.

- 3 ▶ (Prova Brasil) Uma casa mede 3,88 metros na altura. Um engenheiro foi contratado para projetar um segundo andar e foi informado que a prefeitura só permite construir casa de dois andares com altura medindo 7,80 metros. Qual deve ser a medida da altura, em metros do segundo andar?  $(7,8 - 3,88 = 3,92)$   
 a) 3,92 b) 4,00 c) 4,92 d) 11,68

- 4 ▶ (Obmep) Alvimar pagou uma compra de R\$ 3,50 com uma nota de R\$ 5,00 e recebeu o troco em moedas de R\$ 0,25. Quantas moedas ele recebeu?  
a) 4 b) 5  c) 6 d) 7 e) 8  
 $(5,00 - 3,50 = 1,50; 1,50 \div 0,25 = 6)$

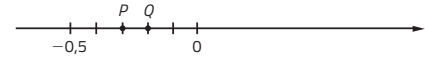
- 5 ▶ (Saresp) Joana e seu irmão estão representando uma corrida em uma estrada assinalada em quilômetros, como na figura abaixo:



Joana marcou as posições de 2 corredores com os pontos A e B. Esses pontos A e B representam que os corredores já percorreram, respectivamente, em km:

- a) 0,5 e  $\frac{3}{4}$ . c)  $\frac{1}{4}$  e 2,75.  
b) 0,25 e  $\frac{10}{4}$ . d)  $\frac{1}{2}$  e 2,38.

- 6 ▶ (Saeb) A figura abaixo mostra os pontos P e Q que correspondem a números racionais e foram posicionados na reta numerada do conjunto dos racionais.

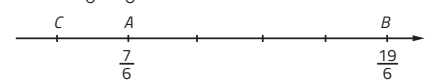


Os valores atribuídos a P e Q, conforme suas posições na reta numérica abaixo são:

- a)  $P = -0,2$  e  $Q = -0,3$ .  
 b)  $P = -0,3$  e  $Q = -0,2$ .  
c)  $P = -0,6$  e  $Q = -0,7$ .  
d)  $P = -0,7$  e  $Q = -0,6$ .

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

- 7 ▶ (Obmep) A figura mostra uma reta numerada na qual estão marcados pontos igualmente espaçados. Os pontos A e B correspondem, respectivamente, aos números  $\frac{7}{6}$  e  $\frac{19}{6}$ .



Qual é o número que corresponde ao ponto C?

- a)  $\frac{1}{6}$   d)  $\frac{2}{3}$   
b)  $\frac{1}{3}$  e) 1  
c)  $\frac{1}{2}$

- 8 ▶ (Saresp) Simplificando a expressão

$\frac{42000}{397} \cdot \left( -\frac{71}{21000} \right) \cdot \frac{397}{7}$ , chega-se a uma das expressões abaixo. Qual delas?

- a)  $2 \cdot (-71) \cdot \frac{1}{7}$   
b)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{71} \cdot 7$   
c)  $\frac{397}{42} \cdot \frac{-21}{71} \cdot \frac{7}{397}$   
d)  $\left( \frac{-71}{2} \right) \cdot \frac{1}{7}$

- 9 ▶ (Obmep) Qual é o valor de  $1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}$ ?

- a)  $\frac{1}{3}$  d) 2  
b)  $\frac{3}{2}$   e) 4  
c)  $\frac{4}{3}$

## Verifique o que estudou

### Principais habilidades da BNCC

EF07MA10 EF07MA11 EF07MA12

Nesta página, as atividades trabalham os conceitos estudados neste capítulo sobre números racionais.

## VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

1. d) Exemplo de resposta:  $-2$ . g) Exemplo de resposta:  $\frac{9}{40}$ .  
 f) Exemplos de resposta:  $-2\frac{1}{2}$ ,  $-2,4$ .

1 ▶ Copie as frases no caderno, descubra e complete com os números corretos.

- a)  $1\frac{2}{7}$  na forma de fração irredutível é  $\frac{9}{7}$ .  
 b)  $0,17$  na forma de fração irredutível é  $\frac{17}{100}$ .  
 c)  $\frac{4}{30}$  na forma de fração irredutível é  $\frac{2}{15}$ .  
 d)  $\blacksquare$  é um número inteiro mas não é um número natural.  
 e)  $\blacksquare$  é um número racional mas não é um número inteiro. Exemplo de resposta:  $-\frac{1}{4}$ .  
 f)  $\blacksquare$  é um número racional entre  $-3$  e  $-2$ .  
 g)  $\blacksquare$  é um número racional entre  $+\frac{1}{5}$  e  $+\frac{1}{4}$ .  
 h)  $\blacksquare$  é um número racional entre  $+1,4$  e  $+1,5$ .  
 Exemplo de resposta:  $+1,43$ .

2 ▶ No caderno, dê exemplos de usos dos números racionais no dia a dia. Resposta pessoal.

3 ▶ Determine os possíveis valores racionais de  $x$  em cada item.

- a)  $|-12| = x \quad x = 12$       d)  $|x| = 0 \quad x = 0$   
 b)  $|x| = 9 \quad x = 9$  ou  $x = -9$ .      e)  $|3,75| = x \quad x = 3,75$   
 c)  $|x| = -7$  Não existe valor racional para  $x$ .      f)  $|x| = +\frac{1}{2} \quad x = +\frac{1}{2}$  ou  $x = -\frac{1}{2}$ .

4 ▶ Copie as afirmações abaixo no caderno e indique se cada uma delas é verdadeira (V) ou falsa (F). No caso de ser verdadeira, dê 3 exemplos que confirmem a afirmação feita. No caso de ser falsa, dê 1 contraexemplo. (MP)

- a) Todo número inteiro é racional.  
 b) Todo número racional é inteiro.  
 c) O quociente de 2 números inteiros, com o segundo diferente de zero (0), é sempre um número inteiro.  
 d) O quociente de 2 números inteiros, com o segundo diferente de zero (0), é sempre um número racional.  
 e) Entre 2 números racionais sempre existe um número racional.

10. Qualquer número racional somado ao oposto dele é igual a 0; por exemplo:  $-1$  e  $+1$ ;  $-0,5$  e  $+0,5$ ;  $-\frac{3}{4}$  e  $+\frac{3}{4}$ .

### Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. Respostas pessoais.

- Prestei atenção às explicações do professor durante as aulas?
- Realizei as tarefas de casa?
- Empenhei-me em ler e compreender os textos do livro, bem como em resolver as atividades propostas?

11. O resultado é sempre 1; exemplos de resposta:  $2 \times \frac{1}{2} = 1$ ;  $\frac{5}{7} \times \frac{7}{5} = 1$ .

Números racionais • CAPÍTULO 3 < 93

5. 3 unidades.  $(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{6}{2} = 3)$  Não escreva no livro!

- f) O dobro de um número racional é igual ao quadrado desse número.
- 5 ▶ Desenhe no caderno uma reta numerada e marque nela o ponto  $A$ , que representa o número racional  $1\frac{1}{2}$ . Depois, marque o ponto  $B$ , que representa o oposto ou simétrico do número representado por  $A$ . Qual é a medida de distância entre os pontos  $A$  e  $B$ ?
- 6 ▶ Escreva no caderno alguns números racionais e passe para um colega representá-los em uma reta numerada. Você confere o que ele fez. Depois, represente os números que o colega escreveu e passe para que ele os confira. Resposta pessoal.
- 7 ▶ Determine no caderno:
- a) o dobro de  $(-\frac{1}{3})$ ;  $-\frac{2}{3}$   
 b) o triplo da soma  $(+\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{2})$ ;  $-\frac{1}{2}$   
 c) o valor da expressão  $(+0,1) - (-1,1) \cdot (-0,4)$ .  $-0,34$
- 8 ▶ A conta bancária de Pamela estava com saldo negativo de R\$ 125,50. Qual será o saldo bancário em cada situação?
- a) Se ela depositar R\$ 260,00.  
 R\$ 134,50  $(-125,50 + 260,00 = 134,50)$   
 b) Se for descontado um cheque de R\$ 130,00.  
 -R\$ 255,00  $(-125,50 - 130,00 = -255,50)$
- 9 ▶ Escreva no caderno uma sequência de 6 termos, sabendo que o primeiro termo é  $-3,5$ , e, a partir do 2º, cada termo é igual ao anterior somado com 1,5.  
 $(-3,5; -2; -0,5; +1; +2,5; +4)$
- 10 ▶ A soma de 2 números racionais opostos é zero. Quais são esses números?
- 11 ▶ O que ocorre quando multiplicamos um número pelo inverso dele? Dê exemplos no caderno.

### Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

- b) Falsa; contraexemplo:  $\frac{1}{2}$  é racional, mas não é inteiro.  
 c) Falsa; contraexemplo:  $3 \div 4 = \frac{3}{4}$ .  
 d) Verdadeira; exemplos:  $3 \div 4 = \frac{3}{4}$ , que é racional;  $(-12) \div (-2) = +6$ , que é racional;  $9 \div 2 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ , que é racional.  
 e) Verdadeira; exemplos: 2,5 fica entre 2 e 3;  $\frac{1}{2}$  fica entre  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{3}{5}$ ; 0,75 fica entre 0,7 e 0,8.  
 f) Falsa; contraexemplo: o dobro de 5 é 10 e o quadrado de 5 é 25.  
 Falsa; contraexemplo:  $80 \div 4 \times 5 = 80 \div 20 = 4$  (incorreta) e  $80 \div 4 \times 5 = 20 \times 5 = 100$  (correta).  
 No item f, comente com os alunos que devemos sempre efetuar a multiplicação e a divisão na ordem em que aparecem.

### Atividades 5 e 6

Estas atividades trabalham a representação de números racionais na reta numerada.

### Atividade 11

Nesta atividade, os alunos devem concluir o que ocorre quando adicionamos um número ao oposto dele e quando multiplicamos um número pelo inverso dele.

### Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que cada aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que eles possam perceber e mensurar o quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância de realizar as tarefas de casa. Enfatize que essas atividades são uma oportunidade de perceber dúvidas que ainda existem.

### Avaliação

Para mais informações, veja a avaliação do 1º bimestre.

### Atividade 1

Esta atividade relaciona os elementos de conjuntos numéricos, além de representar alguns números como frações e identificar números racionais entre 2 números racionais.

### Atividade 2

Esta atividade pode ser resolvida em conjunto com a turma. Para isso, enumere na lousa os exemplos que os alunos citarem, complementando-os se necessário. Em seguida, peça que anotem esses exemplos no caderno.

### Atividade 4

Nesta atividade, os alunos devem julgar a veracidade das afirmações sobre relações entre números inteiros e números racionais e sobre a ordem de efetuação das operações em uma expressão.

Veja as respostas dos itens desta atividade.

- a) Verdadeira; exemplos: 5 é inteiro e é racional  $(\frac{5}{1})$ ;  $-2$  é inteiro e é racional  $(-\frac{2}{1})$ ; 0 é inteiro e é racional  $(\frac{0}{1})$ .