

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**Fratura na Interface de Bimateriais:
Soluções Analíticas e Numéricas**

Ricardo Bonfim Cruz

Porto Alegre

2010

RICARDO BONFIM CRUZ

**FRATURA NA INTERFACE DE BIMATERIAIS:
SOLUÇÕES ANALÍTICAS E NUMÉRICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Engenharia.

Porto Alegre
2010

C889f Cruz, Ricardo Bonfim

Fratura na interface de bimateriais: soluções analíticas e numéricas / Ricardo Bonfim Cruz. — 2010.

Dissertação(mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2010.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

1. Mecânica da fratura. 2. Estruturas (Engenharia). 3. Propagação de trincas. I. Bittencourt, Eduardo, orient. II. Título.

CDU-244.04(043)

RICARDO BONFIM CRUZ

**FRATURA NA INTERFACE DE BIMATERIAIS:
SOLUÇÕES ANALÍTICAS E NUMÉRICAS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 30 de setembro de 2010

Prof. Eduardo Bittencourt
DSc. pelo CPGEC/UFRGS
Orientador

Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Virgínia Maria Rosito d'Ávila (UFRGS)
DSc. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Samir Maghous (UFRGS)
Dr. pela Université de Marne la Vallée

Prof. José Antônio Esmério Mazzaferro (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico

Aos meus pais, Jurandir e Luzia que sempre me apoiaram durante meus estudos.

Aos meus irmãos Roberto e Julcimara.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Eduardo Bittencourt, por sua orientação durante todo o desenvolvimento da dissertação, transmissão de conhecimento, pela paciência e inteligência de conduzir-me a uma nova área de conhecimento.

Aos Professores do CEMACOM – Centro de Mecânica Aplicada e Computacional, pelas sugestões e cooperação.

Agradeço à minha namorada Michely pelo apoio, motivação, por estar sempre ao meu lado nos momentos mais difíceis durante minha vida acadêmica.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – UFRGS, Carlos, Douglas, Fernanda, Leonardo, Felipe, Alexandre e Vanessa, cuja amizade e apoio foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Agradeço aos funcionários da UFRGS, que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

RESUMO

CRUZ, R. B. Fratura na Interface de Bimateriais: Soluções Analíticas e Numéricas. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Neste trabalho, é estudada a fratura na interface de materiais dissimilares empregando duas metodologias distintas: a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e os métodos coesivos. O uso da MFLE aplicada a trinças situadas na interface de materiais dissimilares apresenta algumas dificuldades bem conhecidas que podem inviabilizar seu uso, como a presença de zonas de contato na frente da trinca que ocorrem em certas combinações de carregamento misto. Outra dificuldade é a inexistência de um modo I puro na ponta da trinca, o que dificulta estabelecer uma propriedade de fratura única para a interface que não dependa do carregamento. As metodologias coesivas não apresentam tais limitações, em princípio. Neste trabalho é feita uma comparação das previsões fornecidas pelas duas metodologias para o caso de uma trinca restrita à interface de 2 materiais distintos, considerados elástico lineares. Observa-se uma boa correspondência na previsão obtida pelas metodologias em um caso simples de carregamento em modo I. Efeitos dinâmicos também são considerados e observa-se um aumento no grau de mistura (modos I / II) com o aumento da velocidade de propagação. Finalmente, aplica-se o método coesivo ao caso de um material composto por cilindros de alumínio em uma matriz de polimetacrilato de metila. Além de ser verificada a importância da energia de fratura de interface no comportamento global da estrutura, é mostrado que os modelos coesivos capturam o efeito de escala, contrariamente à MFLE.

Palavras-chave: mecânica da fratura; interfaces; modelos coesivos.

ABSTRACT

CRUZ, R. B. Bi-material interface fracture: Analytical and Numerical Solutions. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

In this work, bi-material interface fracture is studied by two different methodologies: Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) and the cohesive methods. The application of LEFM to cracks laying at the interface of two different materials presents some well-known difficulties that can limit its use. The development of a contact zone at the crack tip, for certain combinations of loading, is one of them. Another is the fact that pure Mode I at the crack tip does not exist, which creates difficulties to define a unique interface fracture energy, independent of the loading. Cohesive methodologies do not present such limitations, in principle. In this work a comparison of the forecast obtained by the two methodologies, for a crack constrained to a bi-material interface, is considered. It can be observed a good agreement for the two methodologies, for a simple case in mode I loading. Dynamic effects are also considered and it was observed that the greater the crack propagation velocity, the greater the degree of mixture between modes I/II. Finally, the cohesive methodology is applied to a composite case, where a matrix is reinforced by a second material in the shape of cylindrical bars. Fracture energy of the interface plays a key role on the structural global behavior. Also, it is shown that cohesive models are able to capture scale effects, contrarily to LEFM.

Key-words: fracture mechanics; interfaces; cohesive models.

SUMÁRIO

RESUMO	VI
ABSTRACT	VII
LISTA DE FIGURAS	X
LISTA DE TABELAS	XII
LISTA DE SIGLAS	XIII
LISTA DE SÍMBOLOS E VARIÁVEIS	XIV
1. INTRODUÇÃO	17
1.1. OBJETIVO DA PESQUISA	17
1.2. JUSTIFICATIVA DA PESQUISA	18
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	18
2. FUNDAMENTOS DA ANÁLISE	20
2.1. MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA	20
2.1.1. Soluções analíticas do campo de tensões na ponta da trinca para materiais homogêneos.....	20
2.1.2. Soluções analíticas do campo de tensões na ponta da trinca na interface de materiais heterogêneos	24
2.1.3. Limitações da MFLE aplicada à interface de materiais heterogêneos ..	28
2.2. MODELOS COESIVOS	29
3. METODOLOGIA DE PESQUISA	32
3.1. APLICAÇÃO DOS ELEMENTOS DE INTERFACES COESIVAS	32
3.1.1. Descrição das interfaces coesivas	34
3.1.2. Propriedades das interfaces coesivas	37
4. EXEMPLOS ANALISADOS	40
4.1. SOLUÇÕES BASEADAS NA MFLE.....	40
4.1.1. Campos de tensões	40
4.1.2. Zona de contato	45
4.2. APLICAÇÕES DAS INTERFACES COESIVAS.....	49
4.2.1. Caso quase-estático	49
4.2.2. Caso dinâmico	50

4.3. EFEITO DAS PROPRIEDADES DE INTERFACE NA TENACIDADE DE UM COMPÓSITO	56
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	61
5.1. CONCLUSÕES	61
5.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63
APÊNDICE A - DEDUÇÃO MATEMÁTICA DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS DO CAMPO DE TENSÕES NA PONTA DA TRINCA PARA MATERIAIS HOMOGÊNEOS COMO UM CASO PARTICULAR DE MATERIAIS HETEROGÊNEOS.....	67
APÊNDICE B - SOLUÇÕES ANALÍTICAS DO CAMPO DE TENSÕES NA PONTA DA TRINCA PARA MATERIAIS HETEROGÊNEOS NA FORMA EXPLÍCITA	71
APÊNDICE C - SOLUÇÕES ANALÍTICAS DO DESLOCAMENTO NA FORMA EXPLÍCITA	75

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Modos básicos de deformação de uma trinca: (a) modo I; (b) modo II; (c) modo III.....	21
FIGURA 2.2 – Sistemas de coordenadas utilizadas.....	22
FIGURA 2.3 – Zona de dominância do K	23
FIGURA 2.4 – Trincas finitas em placas infinitas submetidas a tensões remotas.....	23
FIGURA 2.5 – Coordenadas da ponta da trinca.....	24
FIGURA 2.6 – Gráficos das funções angulares em função do ε	26
FIGURA 2.7 – Valores de K para uma trinca finita numa placa infinita.....	27
FIGURA 2.8 – Tensões remotas aplicadas na interface da trinca.....	29
FIGURA 2.9 - Tensões coesivas na ponta da trinca.....	30
FIGURA 2.10 - Crescimento de trinca conforme a teoria de Barenblatt.....	31
FIGURA 3.1 - Corpo em estudo.....	33
FIGURA 3.2 - Elementos de interface.....	34
FIGURA 3.3 - Tensão Normal na Interface, T_n , como uma função de Δ_n com $\Delta_t = 0$	36
FIGURA 3.4 - Tensão Tangencial na Interface, T_t , como uma função de Δ_t com $\Delta_n = 0$	37
FIGURA 4.1 – Geometria da peça analisada.....	41
FIGURA 4.2 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca para o material PMMA gerado pelo programa de elementos finitos Metafor: a) solução numérica b) solução analítica.....	44
FIGURA 4.3 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca para o PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior gerado pelo programa de elementos finitos Metafor: a) solução numérica b) solução analítica.....	44
FIGURA 4.4 – Peça submetida a diferentes condições de contorno.....	45
FIGURA 4.5 – Visualização da peça através de elementos finitos com PMMA localizado na metade superior e o alumínio localizado na metade inferior gerado pelo programa de elementos finitos Metafor.....	46

FIGURA 4.6 – Interpenetração em modo II do PMMA localizado na metade superior com o alumínio localizado na metade inferior gerado pelo programa de elementos finitos Metafor.	46
FIGURA 4.7 – Perfil de deslocamentos das faces da trinca ($\sigma_{22}^{\infty} = 0$; $\sigma_{12}^{\infty} < 0$).....	47
FIGURA 4.8 – Perfil de deslocamentos das faces da trinca ($\sigma_{22}^{\infty} > 0$; $\sigma_{12}^{\infty} = 0$).....	48
FIGURA 4.9 - Perfil de deslocamentos das faces da trinca ($\sigma_{22}^{\infty} > 0$; $\sigma_{12}^{\infty} = -2\sigma_{22}^{\infty}$).....	48
FIGURA 4.10 – Avanço da trinca em relação ao tempo.....	52
FIGURA 4.11 – Velocidade de propagação das trincas em relação ao tempo.....	53
FIGURA 4.12 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,00\mu s$ $a = 0,269mm$ a) imagem original b) imagem ampliada.....	54
FIGURA 4.13 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,20\mu s$ $a = 0,417mm$ a) imagem original b) imagem ampliada.....	54
FIGURA 4.14 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,60\mu s$ $a = 0,733mm$ a) imagem original b) imagem ampliada.....	54
FIGURA 4.15 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,00\mu s$ $a = 0,256mm$ a) imagem original b) imagem ampliada.....	55
FIGURA 4.16 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,20\mu s$ $a = 0,406mm$ a) imagem original b) imagem ampliada.....	55
FIGURA 4.17 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,60\mu s$ $a = 0,723mm$ a) imagem original b) imagem ampliada.....	56
FIGURA 4.18 - Geometria empregada	57
FIGURA 4.19 – Malha empregada.....	58
FIGURA 4.20 – Trajetória ordenada da ruptura da peça	59

LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1 – Início da ruptura na interface coesiva PMMA / Al.....	50
TABELA 4.2 - Propriedades da interface coesiva	51
TABELA 4.3 - Efeitos na tenacidade do PMMA variando as propriedades de interface PMMA / Al.....	59
TABELA 4.4 - Efeitos de escala	60

LISTA DE SIGLAS

MFLEMecânica da Fratura Linear-Elástica

PTV.....Princípio dos Trabalhos Virtuais

LISTA DE SÍMBOLOS E VARIÁVEIS

aComprimento inicial da trinca
BVetor de forças de volume
dComprimento da zona de atuação das tensões coesivas
EMódulo de elasticidade longitudinal
eBase natural
FVetor de forças aplicadas ao contorno
F_{ext}Vetor de forças externas
F_{int}Vetor de forças internas
GTaxa de alívio de energia
G_cEnergia de fratura
G_mDistribuição das tensões coesivas
I, II, IIIÍndices indicadores do modo de deformação
KFator de intensidade de tensões
K_IFator de intensidade de tensões para o Modo I de deformações
K_{II}Fator de intensidade de tensões para o Modo II de deformações
K_{III}Fator de intensidade de tensões para o Modo III de deformações
MMatriz de massa consistente
nVetor unitário que define a direção normal da interface coesiva
qVariável adimensional
RRelação entre a tensão máxima e mínima aplicada
R_KRaio da zona de dominância
rDistância radial da ponta da trinca
TVetor de tensões coesivas da interface
T_nTensão normal da interface coesiva
T_tTensão tangencial da interface coesiva
tVetor unitário que define a direção tangencial da interface coesiva
UVetor de deslocamento ao longo do corpo

\ddot{U}	Vetor de acelerações nodais
x, y	Coordenadas cartesianas
Y	Função adimensional da geometria da peça e distribuição da carga
Γ	Contorno do corpo
Γ^F	Contorno de aplicações de forças do corpo
Γ^T	Contorno da trinca
Γ^U	Contorno de aplicação de restrições e deslocamento prescrito do corpo
$\Gamma^{T,e}$	Contorno da superfície do elemento de interface
Δ	Vetor de deslocamento da interface
Δa	Incremento da trinca
Δ_n	Abertura normal da interface coesiva
Δ_t	Abertura tangencial da interface coesiva
$\Delta_{n\max}$	Abertura normal máxima da interface coesiva
δ_n	Comprimento característico normal
δ_t	Comprimento característico tangencial
θ	Ângulo
ε	Índice oscilatório
κ	Coefficiente de Poisson
κ	Estado plano de deformação
ρ	Massa específica do material
σ	Tensor de tensões de Cauchy
σ_{\max}	Máxima tensão normal da interface coesiva
σ_{ij}	Campo de tensões na ponta da trinca
σ_e	Tensão de escoamento
τ_{\max}	Máxima tensão tangencial de interface coesiva
ϕ	Potencial da interface coesiva
ϕ_n	Trabalho de separação normal da interface
ϕ_t	Trabalho de separação tangencial da interface

- Ω Domínio do corpo
- ξ Coordenada natural tangencial à interface
- F_t Força total aplicada na borda superior da peça
- L Largura da peça

1. INTRODUÇÃO

Propriedades mecânicas como a tenacidade de materiais compósitos dependem fortemente da ligação na interface dos materiais. Isto ocorre, pois em geral é nesta interface que ocorre o início da ruptura. Para que seja possível uma melhora nesta propriedade, nas últimas décadas inúmeros estudos têm sido propostos com o intuito de entender os fundamentos da fratura na interface dos materiais.

Os trabalhos pioneiros na área são devido a Williams (1959), Erdogan (1963), England (1965) entre outros. Nestes trabalhos soluções analíticas foram formuladas onde as trincas eram consideradas superfícies na interface de dois materiais nas quais não havia transmissão de esforços. Uma revisão bibliográfica sobre soluções analíticas pode ser encontrada em Rice et al. (1990), por exemplo, e baseiam-se em geral na validade da MFLE. Baseado em conclusões de Rice et al. (1990), Xu e Needleman (1995,1996) aplicaram o conceito de interfaces coesivas ao problema. Este método não apresenta as limitações que normalmente são submetidas as soluções baseadas na MFLE e hoje é um dos métodos mais empregados na solução do problema.

1.1. OBJETIVO DA PESQUISA

O principal objetivo deste trabalho é entender as particularidades da fratura entre materiais heterogêneos. Assim, inicialmente, serão investigadas as soluções analíticas para determinação do campo de tensões na ponta da trinca, a influência do fator de intensidade de tensões K_I e K_{II} , e as propriedades mecânicas dos materiais sobre a distribuição das tensões.

A verificação destes valores teóricos com os obtidos por uma solução por elementos finitos também será realizada.

A metodologia das interfaces coesivas será empregada para investigar os valores relevantes da energia de fratura da interface, comparado com dados da literatura. Todos os casos estudados neste trabalho são bi-dimensionais, sendo considerados assim unicamente os

modos I e II de ruptura. O programa de elementos finitos Metafor (Ponthot, 1995) foi empregado como base de cálculo para as soluções em elementos finitos.

1.2. JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

A investigação das soluções analíticas que permitem determinar o campo de tensões na ponta da trinca na interface de materiais heterogêneos, assunto abordado no presente trabalho, tem grande importância acadêmica e prática. Uma vez entendendo as variáveis que determinam o campo de tensões, é possível entender os fatores dominantes na fratura. As soluções analíticas, embora já existentes para algumas situações, são de difícil interpretação para aplicações tecnológicas em função de trabalhar com variáveis complexas. A complementação da pesquisa com o uso das interfaces coesivas permite quantificar energias de fratura, bem como obter aplicações práticas relevantes.

1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 5 capítulos, descritos na seqüência:

O Capítulo 1 é formado por uma introdução, objetivos da pesquisa, justificativa da pesquisa e organização do trabalho.

No Capítulo 2, uma revisão dos conceitos e teorias da MFLE é apresentada, bem como soluções analíticas para determinar o campo de tensões na ponta da trinca para materiais heterogêneos, taxa de alívio da energia na ponta da trinca, etc.

No Capítulo 3, é descrita a metodologia das interfaces coesivas empregada no presente trabalho.

No Capítulo 4, são apresentados os exemplos e os resultados.

Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões finais do trabalho.

No Apêndice A, é mostrada uma dedução matemática das soluções analíticas do campo de tensões na ponta da trinca para materiais homogêneos conforme Kanninen e Popelar

(1985), como um caso particular das soluções analíticas para o campo de tensões na ponta da trinca para materiais heterogêneos conforme Rice et al. (1990).

No Apêndice B, é mostrada explicitamente a solução analítica para o campo de tensões na ponta da trinca para materiais heterogêneos conforme Rice et al. (1990).

No Apêndice C, é mostrada explicitamente a solução analítica para o deslocamento para materiais heterogêneos conforme Ortiz e Cisilino (2006).

2.FUNDAMENTOS DA ANÁLISE

Neste capítulo serão apresentados conceitos e teorias que servirão de base para o desenvolvimento da pesquisa. Inicialmente será considerada a mecânica da fratura linear elástica (MFLE) sendo posteriormente os conceitos generalizados através do uso da metodologia das interfaces coesivas.

2.1. MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

No presente trabalho serão consideradas trincas em meios lineares elásticos em duas situações específicas:

- a) Trincas em materiais homogêneos
- b) Trincas na interface de materiais heterogêneos

A MFLE normalmente é utilizada em situações em que a fratura ocorre ainda no regime linear-elástico. A MFLE pode ser empregada com sucesso à medida que a zona plástica for pequena em relação ao tamanho da trinca, sendo inexistente ou se estendendo por regiões muito pequenas, frente à zona de dominância.

2.1.1. Soluções analíticas do campo de tensões na ponta da trinca para materiais homogêneos

O estudo da mecânica da fratura está relacionado com a identificação dos possíveis modos em que a peça pode romper. Em geral, conforme observado por Irwin (1948) podem ser identificados os modos I e II (casos planos) e modo III (caso antiplano), conforme apresentado na Fig. 2.1.

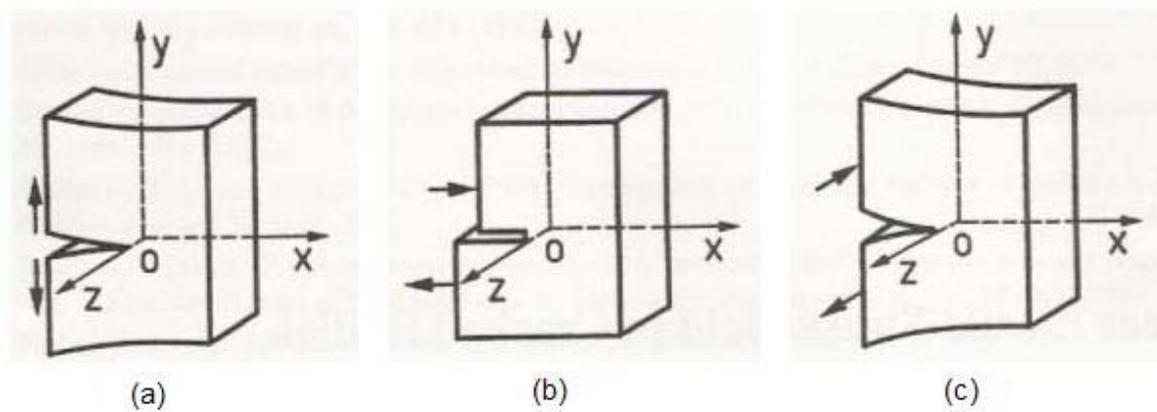


FIGURA 2.1 – Modos básicos de deformação de uma trinca: (a) modo I; (b) modo II; (c) modo III

Fonte: Gdoutos, 1993, p.16

O modo I (abertura) é caracterizado pela abertura normal das superfícies devido a um carregamento de tração. O modo II (cisalhamento) é caracterizado pelo deslizamento, ou deslocamento tangencial, entre as superfícies, e deslocamento perpendicular à frente de propagação. O modo III (rasgamento) é caracterizado pelo deslizamento, ou deslocamento tangencial, entre as superfícies, e deslocamento paralelo à frente de propagação.

A superposição destes três modos pode representar a deformação de qualquer trinca. Quando ocorre a superposição de dois, ou dos três modos de ruptura, se diz que ocorre modo misto de ruptura.

Este trabalho ficará restrito unicamente aos modos I e II e por este motivo não será mais mencionado o modo III de ruptura.

Cada um destes modos de deformação apresenta um campo de tensões na ponta da trinca σ_{ij} . Estes campos, definidos pelas Eq. 2.1, 2.2 e 2.3, são funções da distância radial da ponta r , do ângulo θ conforme a Fig. 2.2 e do respectivo fator de intensidade de tensão, K_I e K_{II} . O sistema de coordenadas cartesianas é centrado na ponta da trinca.

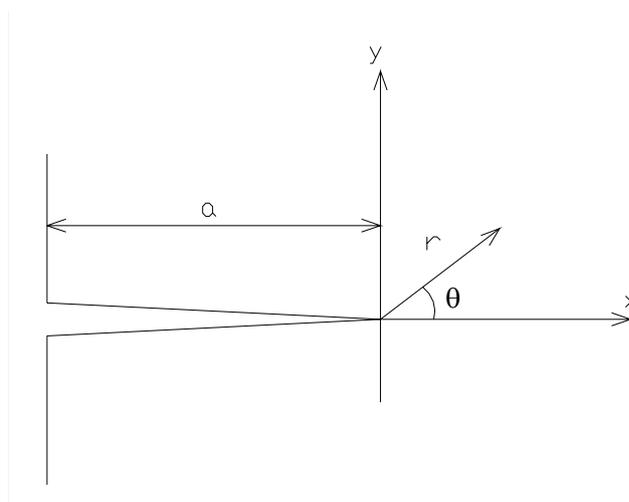


FIGURA 2.2 – Sistemas de coordenadas utilizadas

$$(\sigma_{11}) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.1)$$

$$(\sigma_{22}) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.2)$$

$$(\tau_{12}) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.3)$$

A dedução completa destas tensões nem sempre está disponível na literatura. No apêndice A é mostrado que estas tensões são um caso particular das soluções analíticas do campo de tensões na ponta da trinca para materiais heterogêneos. Nas equações acima, os índices *I* e *II* indicam o modo de deformação.

O fator de intensidade de tensões tem unidades de tensão multiplicada pela raiz de um comprimento ($\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ ou $\text{N}\cdot\text{mm}^{-3/2}$) e conterà todo o efeito das condições de contorno longe da trinca e da geometria da mesma.

Assim, pode-se concluir que o estado de tensões nas proximidades da trinca pode ser calculado, empregando as Eq. 2.1, 2.2 e 2.3, para qualquer situação (MFLE) desde que seja possível determinar ou medir os fatores de intensidade de tensão *K*. A Fig. 2.3 mostra a zona nas proximidades da trinca, delimitada pelo círculo R_K , onde o campo de tensões é dominado pela presença da trinca. Tal zona é denominada *Zona de Dominância de K*. Longe da trinca, a mesma pode ser ignorada do estudo de tensões. Dentro da zona delimitada pelo círculo R_K , as condições de contorno modificarão os valores de *K* unicamente, no entanto, a forma da distribuição das tensões permanece inalterada.

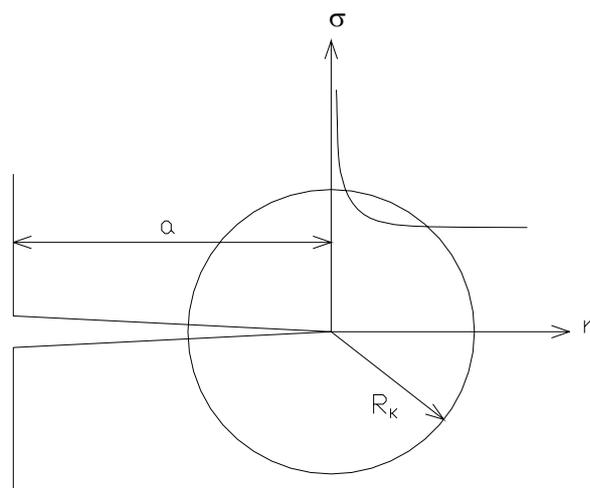


FIGURA 2.3 – Zona de dominância do K

Dentre os modos de deformação, o modo *I* é o mais importante, já que a maioria dos materiais nos quais a MFLE é válida, tende a fraturar com mais facilidade quando solicitados a esforços normais de tração do que as tensões de corte. Como exemplos de casos simples de cálculo de *K*, temos na Fig. 2.4a e 2.4b casos para uma trinca finita numa placa infinita submetida a tensões remotas σ (normal ao plano da trinca) e τ (paralela ao plano da trinca) respectivamente. Para o caso “a” o *K* é determinado por $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ e para o caso “b” o *K* é determinado por $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$.

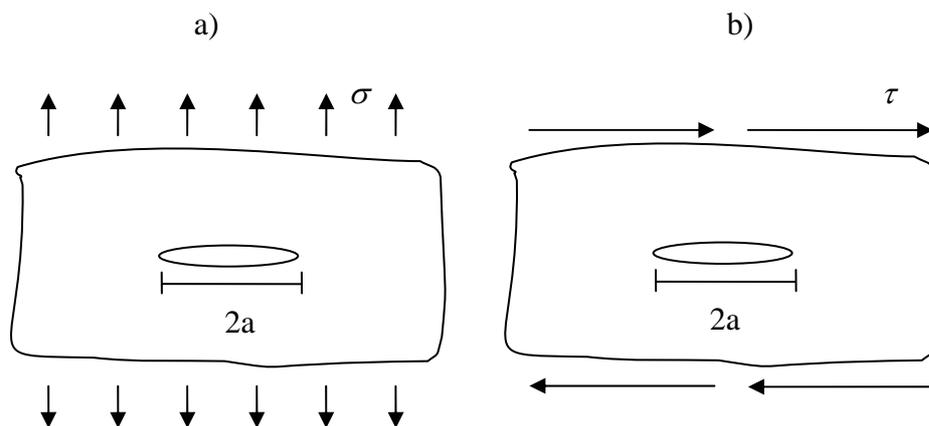


FIGURA 2.4 – Trincas finitas em placas infinitas submetidas a tensões remotas

A taxa de alívio da energia (*G*) na ponta da trinca é uma das variáveis mais básicas em mecânica da fratura, e relaciona-se com K_I e K_{II} , em estado plano de deformação, pela expressão dada pela Eq. 2.4.

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.4)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e E o módulo de elasticidade longitudinal.

A propagação da trinca ocorre quando G atinge um valor crítico G_c . Este valor é determinado normalmente em ensaios de modo I puro, pois a propagação de trincas em problemas homogêneos elásticos lineares se dá fundamentalmente em modo I.

2.1.2. Soluções analíticas do campo de tensões na ponta da trinca na interface de materiais heterogêneos

Seja o problema plano de uma trinca na interface de dois materiais isotrópicos lineares heterogêneos como mostrado na Fig. 2.5. O material ocupando a metade superior é denominado 1 e o material ocupando a metade inferior é denominado 2 onde μ_1, ν_1 e μ_2, ν_2 representam o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson dos materiais 1 e 2, respectivamente.

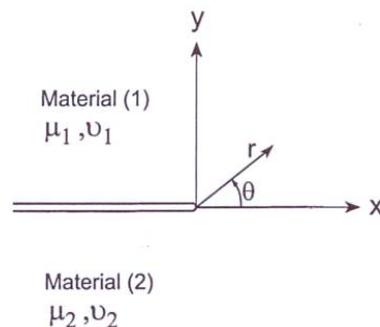


FIGURA 2.5 – Coordenadas da ponta da trinca
Fonte: Sills et al, 2000, p.712

Várias soluções analíticas para o campo de tensões próximo da trinca podem ser obtidos em Williams (1959), Erdogan (1963), Sih e Rice et al. (1990), England (1965) etc e genericamente podem ser colocados conforme a Eq. 2.5.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \text{Re} \left[\mathbf{K} r^{i\epsilon} \right] \Sigma_{ij}^I(\theta, \epsilon) + \text{Im} \left[\mathbf{K} r^{i\epsilon} \right] \Sigma_{ij}^{II}(\theta, \epsilon) \right\} \quad (2.5)$$

onde \mathbf{K} é definido como um fator de intensidade de tensões complexo. Assim, no lugar do fatores K_I e K_{II} usuais, existe um único fator complexo para os modos planos de propagação. Portanto os modos I e II estão inerentemente acoplados $\Sigma_{ij}^{I,II}$ são as variações angulares para cada modo, I e II. O índice ε é denominado índice oscilatório e é definido conforme a Eq. 2.6.

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{\kappa_1 \mu_2 + \mu_1}{\kappa_2 \mu_1 + \mu_2} \right] = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1-\beta}{1+\beta} \right] \quad (2.6)$$

onde $\kappa_\alpha = 3 - 4\nu_\alpha$ representa o estado plano de deformação e $\kappa_\alpha = \frac{(3-\nu_\alpha)}{(1+\nu_\alpha)}$ representa o estado plano de tensão, $\mu_\alpha = \frac{E_\alpha}{2(1+\nu_\alpha)}$ é o módulo de cisalhamento para $\alpha = 1, 2$, β é o parâmetro Dundurs (1969) e é definido conforme a Eq. 2.7.

$$\beta = \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)} \quad (2.7)$$

Nas Eq. 2.8 a 2.13 são definidas as variações angulares $\Sigma_{ij}^{I,II}$:

$$\Sigma_{rr}^I = -\frac{\sinh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \pi \varepsilon} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \pi \varepsilon} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin \theta \right) \quad (2.8)$$

$$\Sigma_{\theta\theta}^I = \frac{\sinh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \pi \varepsilon} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \pi \varepsilon} \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \sin \theta \right) \quad (2.9)$$

$$\Sigma_{r\theta}^I = \frac{\sinh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \pi \varepsilon} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \pi \varepsilon} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \sin \theta \right) \quad (2.10)$$

$$\Sigma_{rr}^{II} = \frac{\cosh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \pi \varepsilon} \sin \frac{3\theta}{2} - \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \pi \varepsilon} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \sin \theta \right) \quad (2.11)$$

$$\Sigma_{\theta\theta}^{II} = -\frac{\cosh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \pi \varepsilon} \sin \frac{3\theta}{2} - \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \pi \varepsilon} \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin \theta \right) \quad (2.12)$$

$$\Sigma_{r\theta}^{II} = \frac{\cosh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \pi \varepsilon} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \pi \varepsilon} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin \theta \right) \quad (2.13)$$

Nas Fig. 2.6a e 2.6b é mostrado graficamente como tais funções variam em relação a ε , respectivamente.

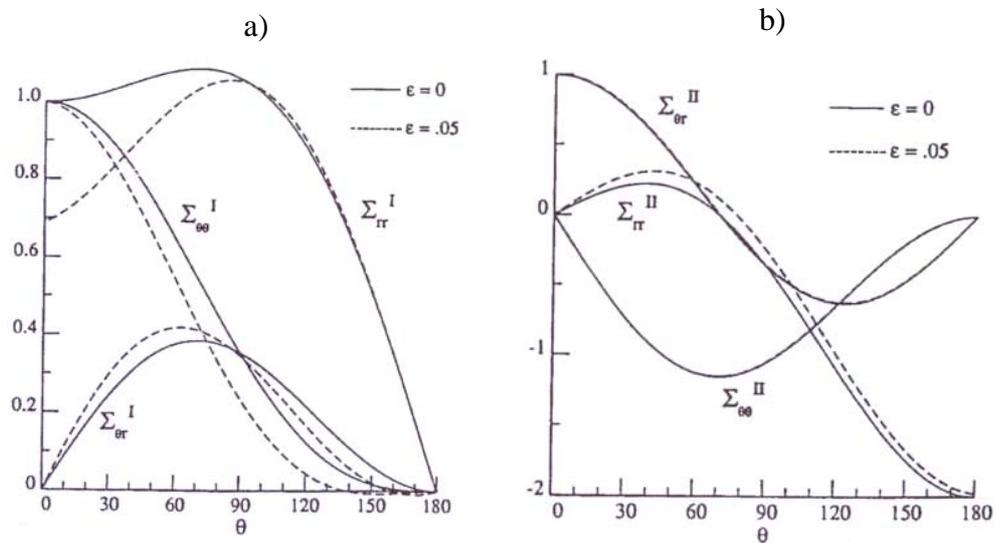


FIGURA 2.6 – Gráficos das funções angulares em função do ε
Fonte: Rice et al. 1990, p.290.

Pode-se observar que não há uma mudança substancial das variações angulares das tensões com a heterogeneidade. Os cálculos conforme Rice et al. (1990), para mais do que uma centena de pares de materiais, mostram os valores de $|\varepsilon| < 0,08$. Em geral ε aumenta com a relação $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. A máxima possibilidade de valor para ε ocorre quando $\frac{\mu_1}{\mu_2} \approx 0$ e $\nu_1 \approx 0$. Isto ocorreria por exemplo numa hipotética ligação entre cortiça (material 1) e alumina (Al_2O_3 , material 2), resultando em $\varepsilon \approx 0,175$. A seguir são mostrados alguns exemplos de combinações mais usuais: Ti/Al_2O_3 , $\varepsilon = 0,039$; Cu/Al_2O_3 , $\varepsilon = 0,028$; Nb/Al_2O_3 , $\varepsilon = 0,011$; Si/Cu , $\varepsilon = 0,015$; MgO/Ni , $\varepsilon = 0,005$; Au/MgO , $\varepsilon = 0,004$.

Da equação Eq. 2.5 pode-se dizer que K_I e K_{II} são definidos conforme a Eq. 2.14 e 2.15 respectivamente:

$$K_I = \text{Re}(\mathbf{K}r^{i\varepsilon}) \quad (2.14)$$

$$K_{II} = \text{Im}(\mathbf{K}r^{i\varepsilon}) \quad (2.15)$$

As fórmulas acima tem várias conseqüências, sendo a primeira delas, a inseparabilidade dos modos I e II (mesmo que o carregamento remoto seja em modo I puro). Outra conseqüência é a dependência do fator de intensidade de tensões da distância r , isto quer dizer que a relação K_I / K_{II} passa a ser função da distância da ponta da trinca. Para entender melhor esta afirmação, das Eq. 2.14 e 2.15 podemos escrever:

$$\mathbf{K}r^{i\varepsilon} = K_I + iK_{II} \quad (2.16)$$

ou usando as propriedades dos números complexos,

$$\mathbf{K} = (K_I + iK_{II})[\cos(\varepsilon \ln r) - i\text{sen}(\varepsilon \ln r)] \text{ então,}$$

$$\mathbf{K} = K_I \cos(\varepsilon \ln r) + K_{II} \text{sen}(\varepsilon \ln r) + i[-K_I \text{sen}(\varepsilon \ln r) + K_{II} \cos(\varepsilon \ln r)]$$

Portanto a importância ou peso do modo I e II é oscilatória para valores de $\varepsilon \neq 0$ (por este motivo às vezes ε é definido como o fator oscilatório).

Como os valores de ε são pequenos em geral, Rice et al. (1990) postula que nas Eq. 2.14 e 2.15 para valores usuais de ε , muito pequenos, r possa ser adotado uma dimensão característica do problema como o tamanho da trinca sem que isto modifique substancialmente os resultados. Nos apêndices A, B e C são apresentadas soluções analíticas do campo de tensões admitindo estas hipóteses.

Como exemplo, a Fig. 2.7 representa uma trinca finita numa placa infinita. O \mathbf{K} é representado conforme a Eq. 2.17.

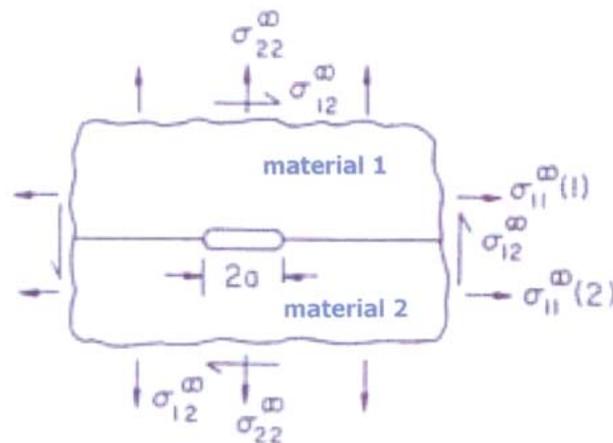


FIGURA 2.7 – Valores de \mathbf{K} para uma trinca finita numa placa infinita

$$\mathbf{K} = \left\{ (\sigma_{22}^{\infty} - 2\sigma_{12}^{\infty}\varepsilon) + i(\sigma_{12}^{\infty} + 2\varepsilon\sigma_{22}^{\infty}) \right\} \sqrt{\pi a} (2a)^{-i\varepsilon} \quad (2.17)$$

Finalmente, a taxa de alívio de energia G pode ser escrita conforme a Eq. 2.18.

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2) \left\{ \frac{1-\nu_1}{\mu_1} + \frac{1-\nu_2}{\mu_2} \right\}}{4 \cosh^2 \pi\varepsilon} \quad (2.18)$$

Observa-se que os termos complexos desaparecem. Esta expressão para $\mu_1 = \mu_2$ e $\nu_1 = \nu_2$ resulta na mesma expressão para materiais homogêneos apresentada na Eq. 2.4.

2.1.3. Limitações da MFLE aplicada à interface de materiais heterogêneos

Rice (1988) pondera que a grande dificuldade na aplicação da formulação apresentada na seção 2.1.2 é a inseparabilidade dos modos I e II na propagação, isto porque a trinca tem uma tendência a seguir a interface, mesmo quando submetida a fortes tensões de corte. Assim G_c deve ser obtido para diferentes combinações de modo I e II. Portanto uma curva G_c deve ser fornecida (por exemplo Argon et al., 1989) e não apenas um valor único como no caso de materiais homogêneos, baseado unicamente no modo I, para caracterizar a interface do material.

Um outro problema que pode invalidar as expressões da MFLE é a possibilidade das mesmas levarem a uma solução na qual há interpenetrações nas superfícies das trincas. Rice et al. (1988) estimou que o tamanho da zona de contato na ponta da trinca é definida conforme a Eq. 2.19.

$$r_c = 2a \exp \left[-\frac{\left(\psi + \frac{\pi}{2} \right)}{\varepsilon} \right] \quad (2.19)$$

onde $\varepsilon > 0$ e ψ tal que $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$ é um ângulo de fase nas tensões aplicadas remotamente ao plano da trinca conforme a Fig. 2.8.

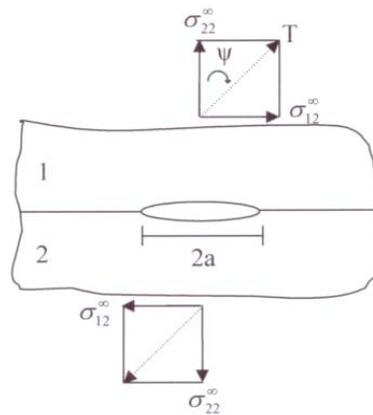


FIGURA 2.8 – Tensões remotas aplicadas na interface da trinca

Desde que ε é sempre pequeno, r_c será fundamentalmente uma função de ψ , resultando sempre em valores muito pequenos de r_c , exceto quando ψ aproxima-se de $-\pi/2$. No capítulo 4 um estudo mais detalhado deste problema será desenvolvido.

2.2. MODELOS COESIVOS

Quando o tamanho da zona onde se processa a fratura na ponta da trinca não é desprezível comparado com o tamanho da trinca, não é possível utilizar a MFLE para descrever o comportamento de um material real. Tal zona está sempre presente em materiais como os metais, devido ao escoamento. Em materiais quase-frágeis, tal zona aparece devido à formação de microfissuras. Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) desenvolveram modelos que levam em conta essa zona. Esses modelos são considerados coesivos e são dotados de forças coesivas ao longo da zona de processamento da fratura. Griffith (1921) já tinha observado que perto do final da trinca as faces ficavam bem próximas devido a atração atômica ou molecular, conforme mencionado por Liebowitz (1968).

Barenblatt, postulou a existência de tensões coesivas atuando nos extremos da trinca, em pequenas zonas de comprimento desprezível d frente ao tamanho da mesma, como indicado na Fig. 2.9.

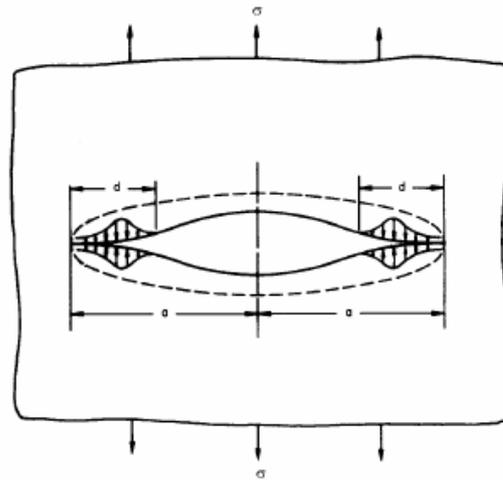


FIGURA 2.9 - Tensões coesivas na ponta da trinca

Fonte: Liebowitz, 1968, p.35

De acordo com a MFLE, uma fenda com a forma inicial de uma linha assume a forma de uma elipse esbelta com a aplicação de uma tensão normal de tração, considerando que as faces da trinca estão completamente livres de forças aplicadas, conforme pode ser observado na Fig. 2.9 pela linha tracejada.

O primeiro postuldo da teoria diz que as tensões coesivas são de caráter compressivo e tendem a unir as faces da trinca, produzindo uma singularidade em tensões de caráter compressivo, enquanto que as singularidades induzidas pela tensão externa são de caráter trativo. Surge então a possibilidade de uma cancelar a outra e o campo final de tensões se tornar não singular.

O segundo postuldo faz referência à região de atuação das tensões coesivas, indicando que a distribuição de forças coesivas $G_m(\xi)$ é limitada a uma zona pequena dentro de uma distância d , distância esta que se estende da extremidade da trinca em $x=a$ como indicado na Fig. 2.10. Assim, $G_m(\xi)$ é significante na zona coesiva $a-d < x < a$, mas desaparece para $0 < x < a-d$, sendo que d/a é pequeno, comparado com a unidade.

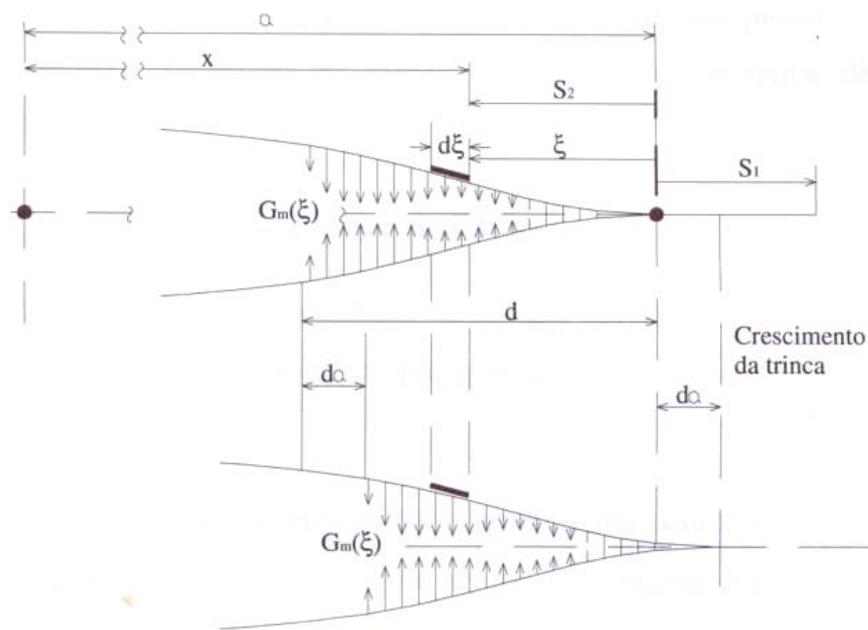


FIGURA 2.10 - Crescimento de trinca conforme a teoria de Barenblatt

Fonte: Liebowitz, 1968, p.35

O terceiro postulado diz: “A forma da seção normal da superfície da trinca na região de seus extremos – e conseqüentemente, a distribuição local das forças de coesão sobre a superfície trincada – não depende das cargas aplicadas e é sempre a mesma para um dado material sob as mesmas condições (temperatura, composição e pressão ambiente)”.

Conforme o terceiro postulado, Barenblatt constata que a forma e a distribuição das tensões coesivas $G_m(\xi)$ permanece a mesma, porém translada junto com a ponta da trinca, sendo portanto uma propriedade do material.

Estes modelos coesivos, que em geral não sofrem das restrições características da MFLE, é a fundamentação da metodologia denominada “interfaces coesivas”, que será descrita no capítulo 3.

3. METODOLOGIA DE PESQUISA

Na pesquisa é empregado um modelo de fratura discreta baseada no método das interfaces coesivas. Nesse capítulo o método é descrito, apresentadas as variáveis cinemáticas e as leis constitutivas para o modo I, modo II e modo misto (modo I e II).

3.1. APLICAÇÃO DOS ELEMENTOS DE INTERFACES COESIVAS

Os princípios da metodologia estão baseados nos trabalhos de Dugdale de 1960 e Barenblatt de 1962, que consideravam a existência de forças coesivas nos extremos das trincas, restringindo sua propagação, conforme descrito no item 2.2.

A implementação computacional das interfaces coesivas para resolução de problemas via método dos elementos finitos consiste apenas na adição de um termo de trabalho interno da interface no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), como mostra a Eq. 3.1. Desta forma, o PTV é dada por:

$$\int_{\Omega} \sigma : \left(\frac{\partial \delta U}{\partial x} \right) dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{U} \cdot \delta U dV + \int_{\Gamma^T} T \cdot \delta \Delta dS = \int_{\Omega} B \cdot \delta U dV + \int_{\Gamma^F} F \cdot \delta U dS \quad (3.1)$$

onde:

U : deslocamentos ao longo do corpo (Ω)

F : vetor de forças aplicadas no contorno Γ^F

B : forças de volume

σ : tensões de Cauchy

ρ : massa específica do material

T : vetor de tensões coesivas nas interfaces da trinca

Γ^T : superfícies da trinca

Δ : abertura da trinca

δ : variação arbitrária, virtual e compatível

Na Fig. 3.1 é mostrado um modelo de um corpo com uma trinca pré-existente.

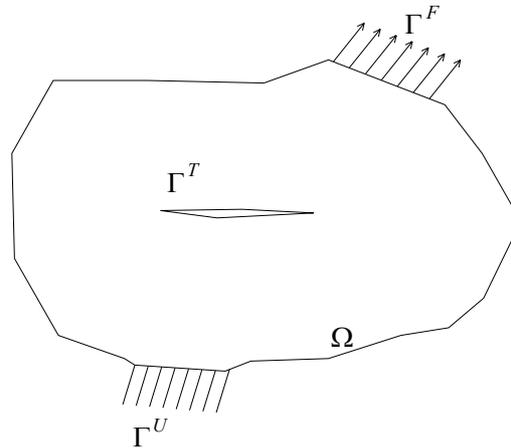


FIGURA 3.1 - Corpo em estudo

O contorno do corpo é formado por $\Gamma = \Gamma^U + \Gamma^F + \Gamma^T$, onde Γ^U é o contorno sob o qual são aplicados às restrições e deslocamentos prescritos.

Após a discretização por elementos finitos a eliminação dos deslocamentos nodais virtuais, o PTV se transforma em uma equação diferencial ordinária e não-linear conforme a Eq. 3.2, na forma:

$$M\ddot{U} + F_{\text{int}} - F_{\text{ext}} = 0 \quad (3.2)$$

onde: M : matriz de massa consistente

\ddot{U} : acelerações nodais

F_{int} : forças internas atuando nos nós dos elementos

F_{ext} : forças externas atuando nos nós dos elementos.

O vetor de forças internas terá contribuição de uma parcela de forças correspondentes às forças coesivas.

Para a solução do sistema apresentado na Eq. 3.2, o Método Explícito das Diferenças Centrais é utilizado quando efeitos inerciais são importantes, caso contrário (termo $M\ddot{U} \equiv 0$), é empregado o Método Implícito de Newton-Rapson.

3.1.1. Descrição das interfaces coesivas

As interfaces coesivas podem ser consideradas elementos virtuais, que tem sua abertura controlada por uma relação constitutiva, simulando as tensões coesivas na ponta da trinca. O elemento de interface coesiva é formado por quatro nós, presentes em duas faces de elementos finitos adjacentes, conforme apresentado na Fig. 3.2., na qual n e t representam as direções normal e tangencial, respectivamente, à interface coesiva. Na configuração de referência os nós 1 e 4 apresentam as mesmas coordenadas, do mesmo modo que os nós 2 e 3.

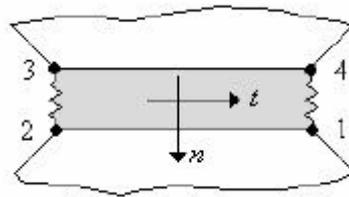


FIGURA 3.2 – Elementos de Interface

O trabalho de abertura de um elemento de interface é dado pela Eq. 3.3 (superíndice e indica o elemento de interface).

$$W^e = \int_{\Gamma^{T,e}} T^e \cdot \Delta^e \cdot dS \quad (3.3)$$

onde:

$T^e = \{T_n T_t\}^e$ é o vetor de tensões com as componentes normal e tangencial;

$\Delta^e = \left\{ \begin{matrix} \Delta_n \\ \Delta_t \end{matrix} \right\}$ é o vetor de deslocamentos normal e tangencial da interface.

Com isso, surgem nas interfaces forças de coesão que buscam unir os elementos, quando estes tendem a se afastar, e forças de repulsão, quando tendem a interpenetrar-se.

Neste modelo o processo é considerado adiabático.

As tensões em uma interface devido aos deslocamentos relativos entre os elementos que a compartilham são dadas pela Eq. 3.4.

$$T = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta} \quad (3.4)$$

em que ϕ é o potencial da interface, definido por Xu e Needleman (1994), baseados em Rose, Ferrante e Smith (1981), conforme a Eq. 3.5.

$$\phi(\Delta) = \phi_n + \phi_t \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \left[1 - r + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \frac{1-q}{r-1} - \left[q + \left(\frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \right\} \quad (3.5)$$

onde, $q = \phi_t / \phi_n$ (ϕ_n e ϕ_t são os trabalhos de separação normal e tangencial respectivamente), $\Delta_n = n \cdot \Delta$ é a abertura na direção normal, $\Delta_t = t \cdot \Delta$ é a abertura na direção tangencial, $r = \Delta_n^* / \delta_n$, sendo Δ_n^* o valor de Δ_n após a separação completa por cisalhamento com tensão normal nula ($T_n = 0$). Os sub-índices n e t definem as direções normal e tangencial, respectivamente.

Conforme Xu e Needleman (1994), a resistência ao crescimento da trinca pode ser representada pelos trabalhos ϕ_n e ϕ_t , descritos pelas Eq. 3.6 e 3.7.

$$\phi_n = e \sigma_{\max} \delta_n \quad (3.6)$$

$$\phi_t = \sqrt{\frac{e}{2}} \tau_{\max} \delta_t \quad (3.7)$$

em que, $e \cong 2.9182$, σ_{\max} e τ_{\max} são as resistências normal e tangencial máximas que a interface coesiva suporta e os valores δ_n e δ_t são os comprimentos característicos normal e tangencial, respectivamente. A soma de ϕ_n e ϕ_t corresponde a energia de fratura G_C .

Partindo das Eq. 3.4 e 3.5, as tensões na interface podem ser escritas como:

$$T_n = -\frac{\phi_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \frac{\Delta_n}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) + \frac{1-q}{r-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \right] \left[r - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \right\} \quad (3.8)$$

$$T_t = -\frac{\phi_n}{\delta_n} \left(2 \frac{\delta_n}{\delta_t} \right) \frac{\Delta_t}{\delta_t} \left[q + \left(\frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \quad (3.9)$$

A Fig. 3.3 mostra as tensões normais com $\Delta_t = 0$ e a Fig. 3.4 mostra as tensões tangenciais com $\Delta_n = 0$. As áreas cobertas pelas curvas T_n e T_t correspondem às energias de separação (ϕ_n e ϕ_t) que precisam ser liberadas para que se dê início ao processo de crescimento da trinca ou que precisam ser consumidas para romper as interfaces, nos casos de modo I e modo II puros.

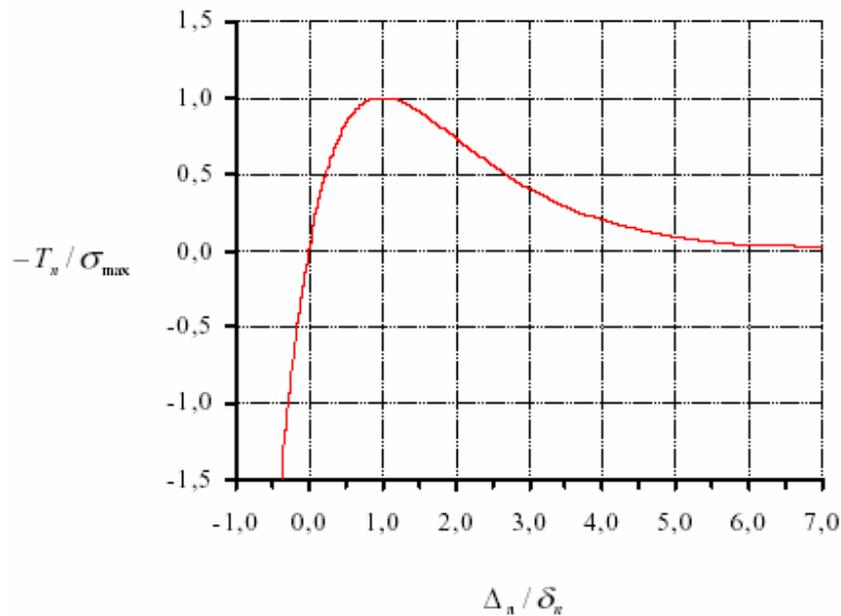


FIGURA 3.3 - Tensão Normal na Interface, T_n , como uma função de Δ_n com $\Delta_t = 0$

Fonte: Fedrigo, 2001

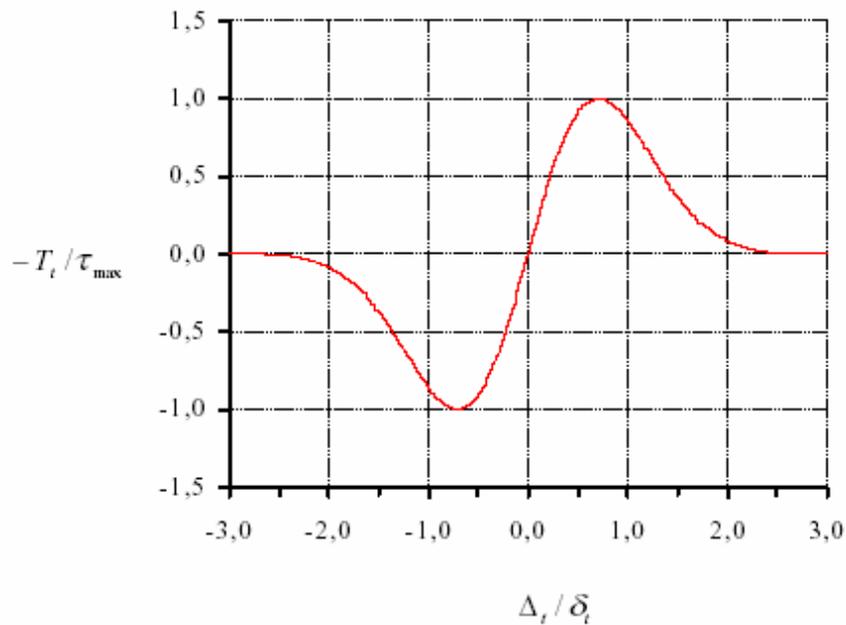


FIGURA 3.4 - Tensão Tangencial na Interface, T_t , como uma função de Δ_t com $\Delta_n = 0$
 Fonte: Fedrigo, 2001

3.1.2. Propriedades das interfaces coesivas

São necessárias as definições de algumas propriedades do material para implementação de interfaces coesivas, conforme visto anteriormente.

O trabalho de separação normal da interface ϕ_n , segundo a metodologia de Xu e Needleman (1994), representa a resistência do material ao crescimento da trinca no modo I , e é indicado pela Eq. 3.6.

Para definir o comportamento das interfaces coesivas de um dado material é necessário apenas o conhecimento de dois parâmetros do material, uma vez que a terceira variável pode ser obtida pela Eq. 3.6, reescrita conforme a Eq. 3.10.

$$\delta_n = \frac{\phi_n}{e\sigma_{\max}} \quad (3.10)$$

em que:

δ_n : comprimento característico do material. Não tem interpretação física;

ϕ_n : trabalho de abertura da interface. Correspondente à energia de fratura do material G_C , quando apenas o Modo I de ruptura é operativo;

σ_{\max} : máxima tensão normal resistente, cuja abertura normal Δ_n corresponde ao comprimento característico δ_n .

O valor de σ_{\max} é função do comportamento do material, dúctil ou frágil.

Para materiais dúcteis, conforme encontrado na literatura, essa tensão é função da tensão de escoamento (σ_e), e assume o valor de:

$$\sigma_{\max} \cong (3 \text{ a } 3,5)\sigma_e \quad (3.11)$$

Needleman (1987, 1990a,b) sugere $\sigma_{\max} \cong 3\sigma_e$, Tvegaard e Hutchinson (1992), $\sigma_{\max} \cong 3,5\sigma_e$, e Siegmund e Needleman (1997), $\sigma_{\max} \cong 3,5\sigma_e$. Para materiais frágeis, os valores de σ_{\max} adotados variam no seguinte intervalo:

$$\sigma_{\max} \cong \left(\frac{E}{100} \text{ a } \frac{E}{10} \right) \quad (3.12)$$

em que:

E : módulo de elasticidade longitudinal do material.

Xu e Needleman (1994) sugerem $\sigma_{\max} \cong E/10$, para Needleman e Rosakis (1999), $\sigma_{\max} \cong E/10$, e Ferney et al. (1999), $\sigma_{\max} \cong E/100$ e $E/30$.

O trabalho de separação tangencial da interface ϕ_t , representa a resistência do material ao crescimento de trincas no modo II de fratura e é indicado pela Eq. 3.7. De maneira análoga, este trabalho é definido pela máxima tensão de corte τ_{\max} e pelo comprimento característico δ_t .

Igualando-se os trabalhos de separação normal e tangencial e os comprimentos característicos, δ_n e δ_t , como fizeram Xu e Needleman (1994), obtém-se:

$$\tau_{\max} = \sqrt{2e} \sigma_{\max} \frac{\delta_n}{\delta_t} \Rightarrow \tau_{\max} \cong 2,33 \sigma_{\max} \quad (3.13)$$

Para definição das propriedades no caso de interface restrita à dois materiais diferentes, Xu e Needleman (1995) sugerem que se adote σ_{\max} como sendo uma fração do σ_{\max} do material de menor resistência. A justificativa baseia-se na tendência da interface ser um lugar sujeito à maior quantidade de defeitos a nível microscópico, tornando essa região menos tenaz do que o material homogêneo.

4. EXEMPLOS ANALISADOS

Como aplicações, três diferentes análises foram realizadas. Inicialmente, no item 4.1, as soluções analíticas da MFLE referentes ao campo de tensões e deslocamento foram verificadas e comparadas com as soluções obtidas através do método dos elementos finitos. Algumas das limitações da MFLE ficam evidentes nestes casos. Posteriormente, no item 4.2, são explorados as potencialidades do método das interfaces coesivas na previsão da propagação de uma trinca, tanto num caso quase-estático como dinâmico. Nestes dois casos, uma placa de grandes dimensões com uma trinca central foi analisada. Finalmente, no item 4.3 a influência das propriedades da interface na tenacidade de um material compósito é estudada, empregando o método das interfaces coesivas.

4.1. SOLUÇÕES BASEADAS NA MFLE

4.1.1. Campos de tensões

Para uma investigação das soluções da MFLE, uma peça com as dimensões descritas abaixo está representada na Fig. 4.1. Devido à simetria, apenas a metade da peça foi considerada.

Comprimento:	6,10 mm
Largura:	5,6 mm
Comprimento da trinca: (2a)	0,50 mm
Espessura:	1,00 mm

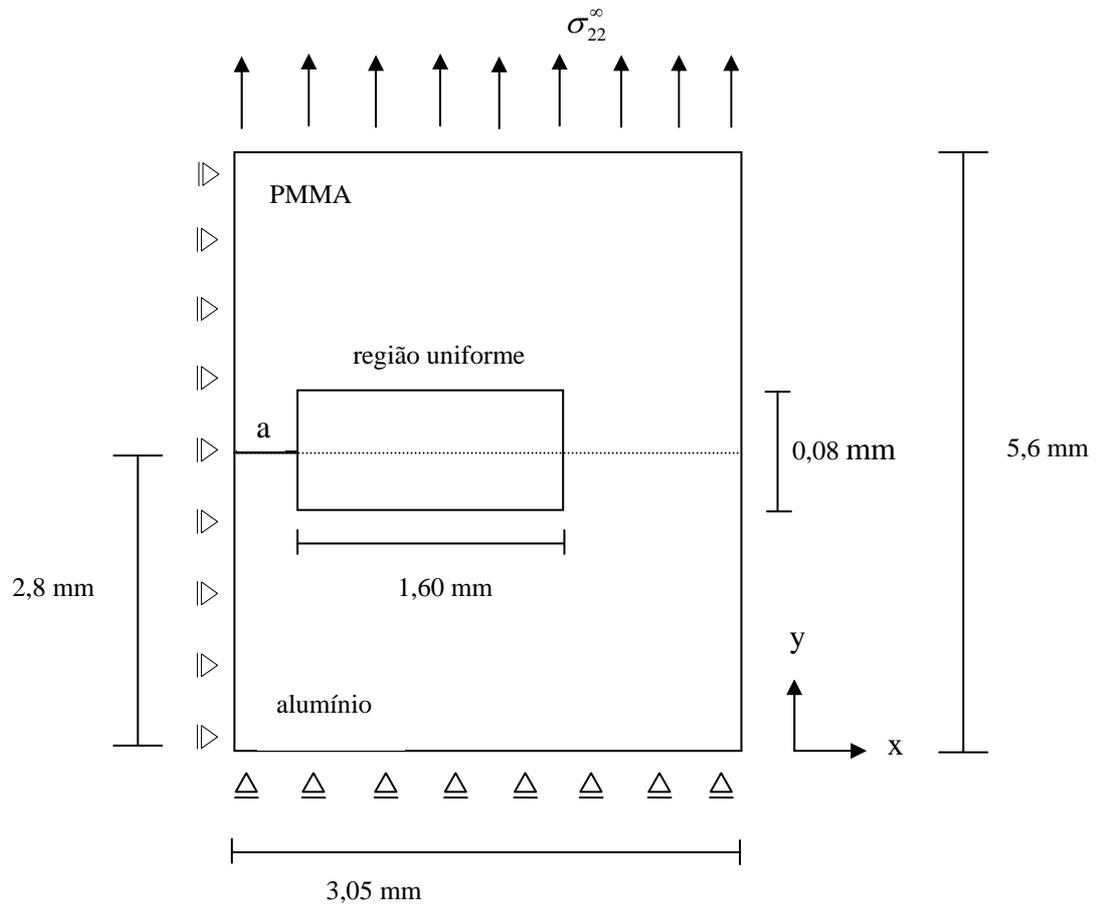


FIGURA 4.1 – Geometria da peça analisada

A trinca está localizada no centro da peça, sobre a interface, conforme visto na Fig. 4.1. A peça está dividida em dois materiais, PMMA (Polimetacrilato de Metila-Acrílico) na metade superior e o alumínio na metade inferior. A borda inferior da peça está fixa em y e x livre. Devido a simetria a borda esquerda está fixa em x e livre em y . Na borda superior são aplicadas forças prescritas que levam a um estado uniforme de tensões, σ_{22}^{∞} , longe da trinca.

Os dois materiais foram aqui considerados elásticos lineares:

- Propriedades do PMMA (material 1)

Coefficiente de Poisson	$\nu_1 = 0,35$
Módulo de elasticidade longitudinal	$E_1 = 3240 \text{ MPa}$
Densidade do material	$\rho_1 = 0,119\text{E-}08 \text{ Kg} / \text{mm}^3$
Módulo de elasticidade transversal	$\mu_1 = 1200 \text{ MPa}$
Estado plano de deformação	$\kappa_1 = 1,6$

- Propriedades do alumínio (material 2)

Coefficiente de Poisson	$\nu_2 = 0,30$
-------------------------	----------------

Módulo de elasticidade longitudinal	$E_2 = 80000 \text{ MPa}$
Densidade do material	$\rho_2 = 0,27\text{E-}08 \text{ Kg} / \text{mm}^3$
Módulo de elasticidade transversal	$\mu_2 = 30769,23 \text{ MPa}$
Estado plano de deformação	$\kappa_2 = 1,8$

Desta combinação resulta um $\varepsilon = 6,78\text{E-}02$, índice oscilatório, conforme visto na Eq. 2.6.

Os fatores de intensidade de tensões, K_I e K_{II} representadas pelas Eq. 4.1 e 4.2 respectivamente, podem ser aproximadamente calculados admitindo que a peça é infinita frente ao tamanho da trinca. Neste caso, temos que:

$$K_I = \sigma_{22}^{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (4.1)$$

$$K_{II} = 2\varepsilon \sigma_{22}^{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (4.2)$$

Se for admitido que a peça é finita, como de fato é, uma correção aproximada devido ao tamanho consiste em multiplicar as fórmulas acima por 1,122 (Anderson, 2005).

Nas fórmulas aqui empregadas r^{ie} , visto na Eq. 2.16 da seção 2.1.2, foi considerado igual a $2a^{ie}$, onde a é a metade do comprimento da trinca. Observa-se que, mesmo o carregamento sendo em modo I puro, aparece na ponta da trinca o modo II.

A análise deste problema será feita de duas formas distintas. Primeiro será empregado um programa de elementos finitos para obter-se o campo de tensões. Posteriormente, com a mesma discretização usada nos elementos finitos, será colocada a solução analítica apresentada no item 2.1.2. A discretização é definida com uma região uniforme, próxima à ponta da trinca visto na Fig. 4.1.

- Região uniforme:

Comprimento:	1,60 mm
Largura:	0,08 mm
Espessura:	1,00 mm

- Discretização da região uniforme:

Número de nós:	8822
----------------	------

Tipo de elementos finito:	quadriláteros de 4 nós
Número de elementos finitos:	8000
Número de elementos de interface:	400 quadriláteros de 4 nós

Os elementos finitos com dimensões 0,004 mm estão localizados na região uniforme, os demais elementos finitos que não pertencem à região uniforme vão se tornando maiores à medida que se distanciam da malha uniforme apresentando dimensões máximas de 0,26 mm.

Para uma tensão remota $\sigma_{22}^{\infty} = 10$ MPa, nas Fig. 4.2 e 4.3 são fornecidas as soluções para os dois métodos considerados, um material homogêneo (PMMA) e o caso heterogêneo, respectivamente. Em cada caso, foi considerada uma solução pelo método dos elementos finitos e uma solução analítica. Nas soluções analíticas é utilizada a Eq. 2.5, visto no item 2.1.2. Construiu-se um algoritmo utilizando a Eq. 2.5, na linguagem de programação Fortran, para gerar o campo de tensões em uma nuvem de pontos na ponta da trinca. Nestas soluções as propriedades dos materiais são as mesmas do método dos elementos finitos. Nas soluções por elementos finitos, na borda superior é aplicada uma força distribuída trativa de $5,34E-02$ na direção y. A solução homogênea foi colocada apenas como uma referência. As tensões σ_{22} são indicadas.

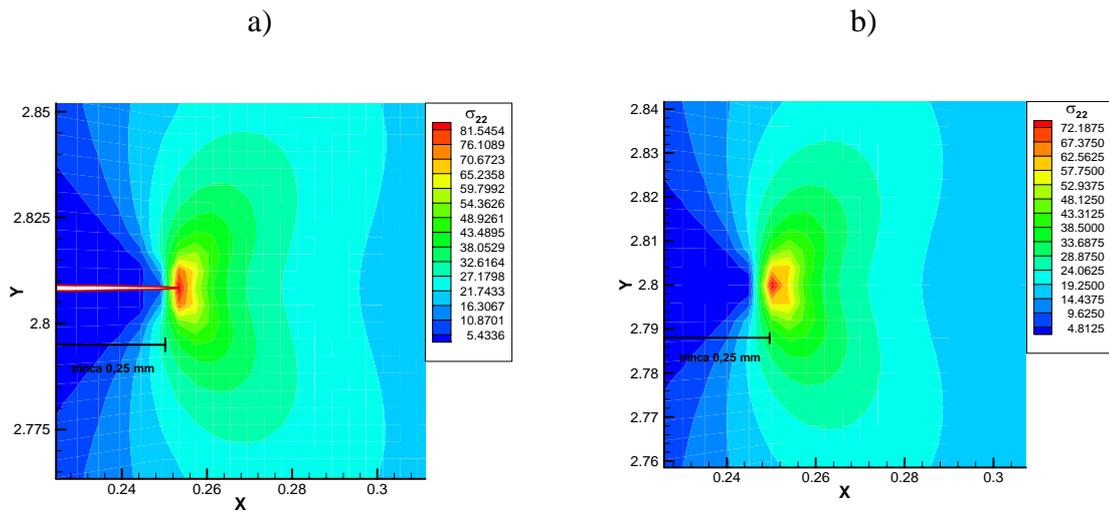


FIGURA 4.2 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca para o material PMMA gerado pelo programa de elementos finitos Metafor: a) solução numérica b) solução analítica

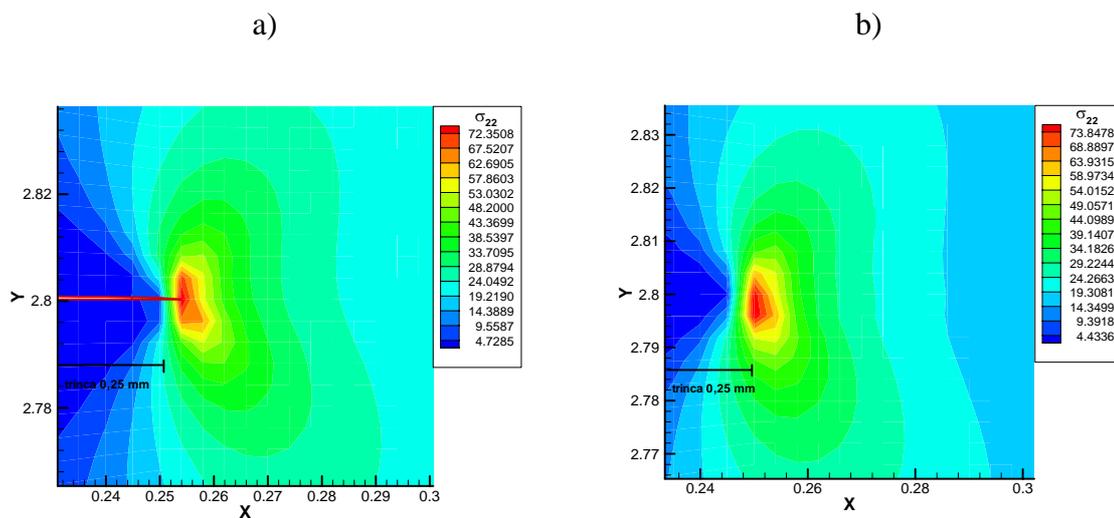


FIGURA 4.3 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca para o PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior gerado pelo programa de elementos finitos Metafor: a) solução numérica b) solução analítica

Pode-se observar uma boa concordância nas soluções numéricas e analíticas. A boa correlação no caso heterogêneo indica também que o cálculo do fator de intensidade de tensões visto nas Eq. 4.1 e 4.2 é coerente.

4.1.2. Zona de contato

Conforme comentado no item 2.1.3, a interpenetração que ocorre na ponta da trinca pode inviabilizar o uso da MFLE, caso esta interpenetração seja significativa frente às dimensões características do corpo em estudo. Fundamentalmente a interpenetração depende do ângulo ψ visto na Eq. 2.19. Para demonstrar este efeito, seja o caso abaixo, representado na Fig. 4.4.

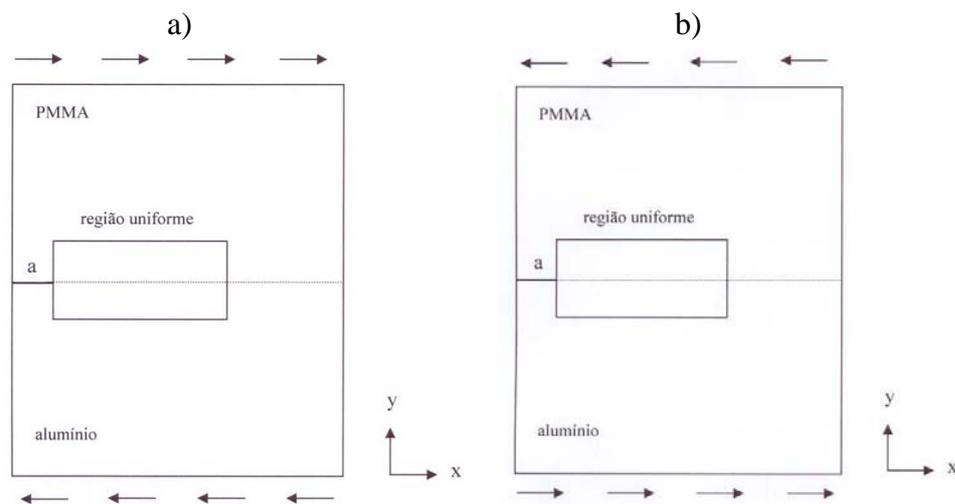


FIGURA 4.4 – Peça submetida a diferentes condições de contorno

Este caso apresenta as mesmas dimensões e mesma discretização em elementos finitos apresentados na Fig. 4.1, porém com condições de contorno diversas. Nas bordas inferior e superior os deslocamentos em y são bloqueados. Duas situações foram analisadas:

- 1) Deslocamento Δx ($0,15E-02$ mm) na borda superior para a direita e deslocamento Δx ($-0,15E-02$ mm) na borda inferior para a esquerda conforme a Fig. 4.4a.
- 2) Deslocamento Δx ($-0,15E-02$ mm) na borda superior para a esquerda e deslocamento Δx ($0,15E-02$ mm) na borda inferior para a direita conforme a Fig. 4.4b.

No caso 1 temos, pela Eq. 2.19, um ângulo $\psi \simeq \frac{\pi}{2}$ visto na Fig. 4.4a e no caso 2 um ângulo $\psi \simeq -\frac{\pi}{2}$ visto Fig. 4.4b . Na Fig. 4.5a os resultados obtidos para o caso 1. A Fig.4.5b representa a imagem ampliada no interior do quadrado da Fig. 4.5a, observe que não há interpenetração visível, embora deva ocorrer muito próximo à ponta da trinca.

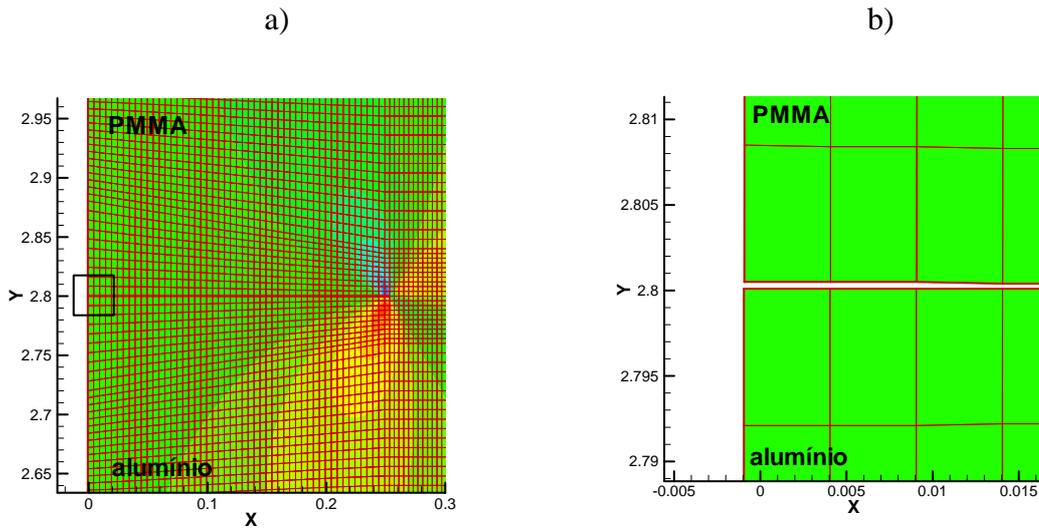


FIGURA 4.5 – Visualização da peça através de elementos finitos com PMMA localizado na metade superior e o alumínio localizado na metade inferior gerado pelo programa de elementos finitos Metafor

Na Fig. 4.6a temos a solução para o caso 2 onde fica visível a interpenetração. No interior do quadrado é possível ter uma imagem ampliada da interpenetração dos materiais que está representada na Fig. 4.6b.

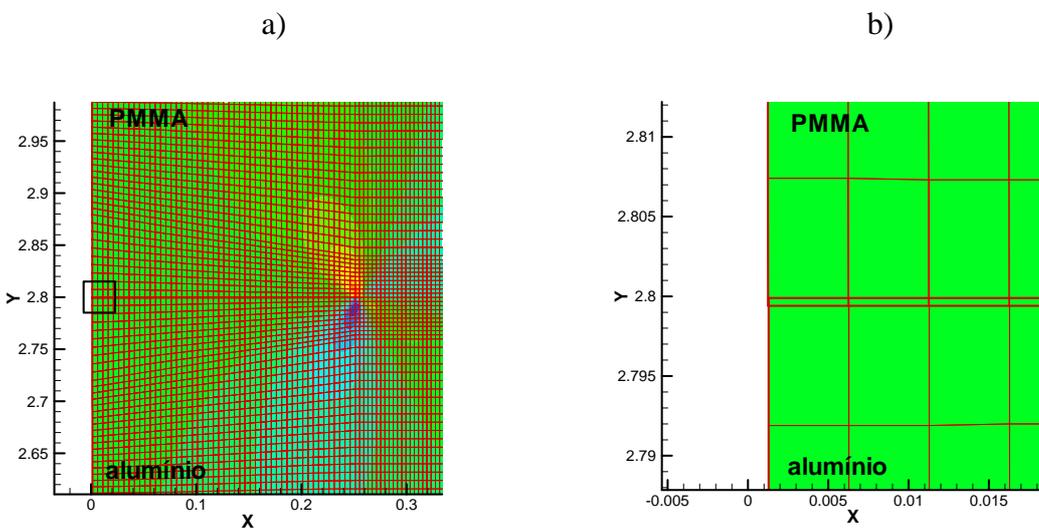


FIGURA 4.6 – Interpenetração em modo II do PMMA localizado na metade superior com o alumínio localizado na metade inferior gerado pelo programa de elementos finitos Metafor.

Conforme visto na Fig. 4.6b, fica claro que a zona de contato (ou interpenetração) neste caso abrange toda a extensão da trinca, o que evidentemente inviabiliza a análise pela MFLE.

A interpenetração ao longo de toda trinca também é prevista pela Eq. 2.19 visto no item 2.1.3, já que, para $\psi \approx -\frac{\pi}{2}$, temos uma zona de contato na ponta da trinca $r_c = 2a$. Também é

importante ressaltar que, esta mesma situação num caso homogêneo, não apresenta interpenetração, independente do sinal e valor de ψ .

Considerando agora o caso teórico de uma trinca $2a$ na interface de uma placa infinita submetida à carregamentos remotos σ_{22}^{∞} e σ_{12}^{∞} , onde $2a = 0,5$ mm, considerando na parte inferior da interface, novamente, alumínio e na parte superior PMMA, três casos foram analisados:

a) $\sigma_{22}^{\infty} = 0; \sigma_{12}^{\infty} < 0$. Na Fig. 4.7 são representados os deslocamentos normais à trinca $(u_2(+\pi, r))$. Neste caso ocorre a interpenetração ao longo de todo o comprimento da trinca, conforme já observado na solução por elementos finitos visto na Fig. 4.6.

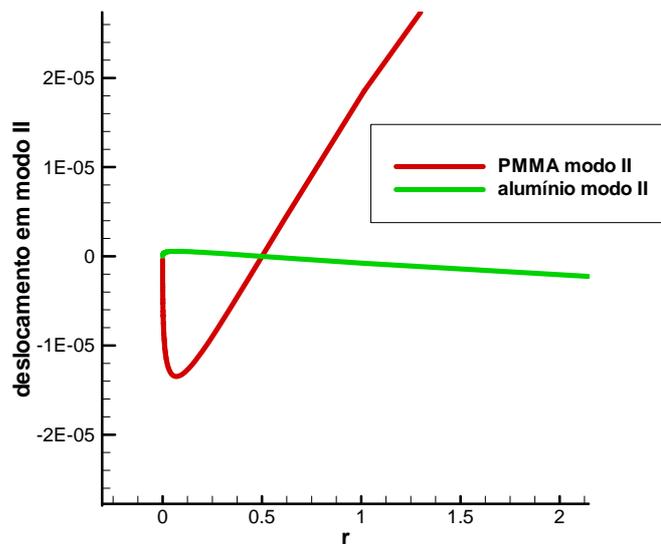


FIGURA 4.7 – Perfil de deslocamentos das faces da trinca ($\sigma_{22}^{\infty} = 0; \sigma_{12}^{\infty} < 0$)

b) $\sigma_{22}^{\infty} > 0; \sigma_{12}^{\infty} = 0$. Na Fig. 4.8 são representados os deslocamentos normais à trinca $(u_2(+\pi, r))$. Neste caso ocorre uma interpenetração muito pequena na ordem de $0,4E-11$ mm que não cria nenhum problema, seria o equivalente, na solução homogênea, da presença de uma zona de plastificação muito pequena na ponta da trinca.

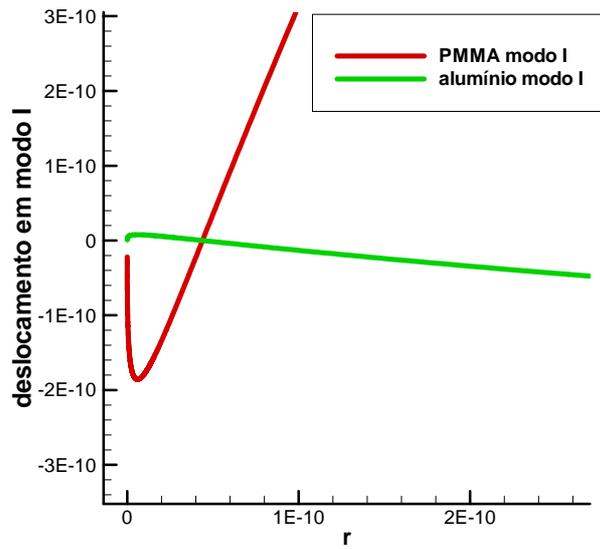


FIGURA 4.8 – Perfil de deslocamentos das faces da trinca ($\sigma_{22}^{\infty} > 0$; $\sigma_{12}^{\infty} = 0$)

c) $\sigma_{22}^{\infty} > 0$; $\sigma_{12}^{\infty} = -2\sigma_{22}^{\infty}$. Na Fig. 4.9 são representados os deslocamentos normais à trinca ($u_2(+\pi, r)$). Neste caso a interpenetração é da ordem de $5,0E-04$ mm, para uma trinca de 0,5 mm, embora mensurável, tal interpenetração não invalida a MFLE.

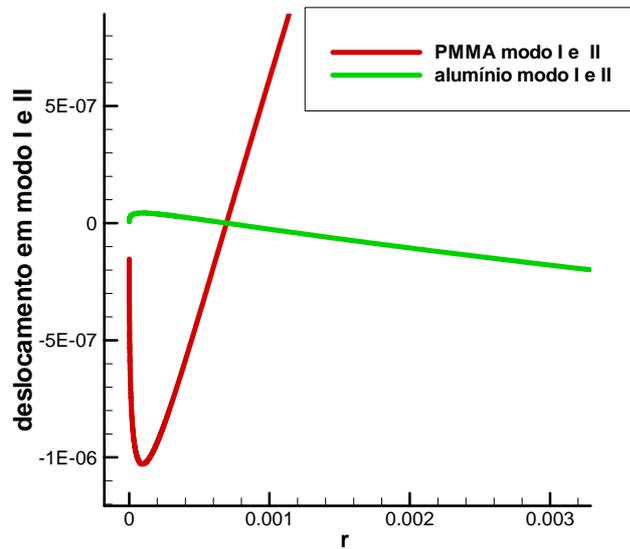


FIGURA 4.9 - Perfil de deslocamentos das faces da trinca ($\sigma_{22}^{\infty} > 0$; $\sigma_{12}^{\infty} = -2\sigma_{22}^{\infty}$)

Portanto, o uso da MFLE fica condicionado à forma do carregamento, sendo sua utilização possível somente quando a interpenetração for pequena frente a outras dimensões características.

4.2. APLICAÇÕES DAS INTERFACES COESIVAS

Nesta seção serão considerados dois exemplos, ambos apresentam a mesma geometria descrita na Fig. 4.1. No primeiro, condição de carregamento quase-estático será considerado, enquanto que no segundo, considerações dinâmicas serão impostas. Em todos os casos, a propagação da trinca ficará restrita à interface dos dois materiais, (PMMA como material 1 e alumínio como material 2). Para tanto, elementos de interface serão colocados ao longo de toda a linha da interface do PMMA / Al exceto na posição correspondente à presença da trinca.

4.2.1. Caso quase-estático

Neste item o objetivo é identificar o potencial do modelo de interfaces coesivas de prever o início da propagação. Será considerada uma tensão máxima de interface $\sigma_{m\acute{a}x}$, conforme visto na Eq. 3.11 igual a $\frac{E^{PMMA}}{10}$, $\delta_n = 4.10^{-4} mm$, o que resultam uma energia de fratura normal $\phi_n = 8,81.10^{-2} N/mm$ conforme visto na Eq. 3.6. Caso o modo de propagação seja unicamente em modo I puro, esta energia então corresponde à energia de fratura total G conforme Xu e Needleman (1996) e Rice (1988). Dois casos foram analisados:

a) Propriedades idênticas às usadas no item 4.1:

Nesse caso a ruptura (início da propagação) na interface dos materiais ocorreu para uma tensão remota de 24,6MPa. Aplicando as fórmulas para o cálculo de K_I e K_{II} vistas nas Eq. 4.1, 4.2 e um fator de correção de (1,122), conforme Anderson (2005), devido às dimensões da peça sobre ambas as equações. Utilizando a Eq. 2.18, chegou-se a um valor de $G = 8,22.10^{-2} N/mm$.

b) Propriedades idênticas às usadas no item 4.1, exceto $\nu^{PMMA} = 0$.

Nesse caso a ruptura na interface dos materiais ocorreu a uma tensão remota de 25,4MPa, o que corresponde a um $G = 8,78.10^{-2} N/mm$.

TABELA 4.1 – Início da ruptura na interface coesiva PMMA / Al

v_{PMMA}	v_{Al}	ϕ_n (N/mm) (Int.coesiva)	G (N/mm) (MFLE)	Erro(%)
0,35	0,30	8,81E-02	8,22E-02	6,69
0	0,30	8,81E-02	8,78E-02	0,34

Conforme visto na Tabela 4.1, em ambos os casos a ruptura na interface dos materiais ocorreu para valores de energia ligeiramente abaixo de ϕ_n , porém dentro de uma tolerância aceitável para a imprecisão nos cálculos de K_I e K_{II} . Pode-se dizer então que a ruptura no início é apenas dominada pelo modo I de propagação ($G \approx \phi_n$). Xu e Needleman (1996) também reportaram resultados similares aos aqui encontrados. Estes autores também observaram que para continuação da propagação, modo II começa a operar de forma mais significativa fazendo com que a propagação aconteça somente para valores de energia bem maiores que ϕ_n .

4.2.2. Caso dinâmico

A fratura interfacial é ainda mais complicada em condições dinâmicas de carregamento. Estudos teóricos têm sido inibidos pela complexidade analítica do problema.

Estudos experimentais indicam que a velocidade de propagação das trincas pode exceder a menor velocidade de onda de Rayleigh. O grau de mistura dos modos aumenta com a velocidade de propagação das trincas, bem como o desenvolvimento de zonas de contato na ponta da trinca (XU e NEEDLEMAN, 1996). Ou seja, no caso de carregamento em modo I puro visto no item 4.2.1, a componente de modo II aumenta de importância, à medida que a velocidade de propagação aumenta.

O problema tratado neste item é o mesmo na Fig. 4.1 e item 4.2.1, um bloco composto de PMMA /Al é considerado com uma trinca central na linha de ligação. Condições de impacto uniforme em tração são considerados no lado do PMMA (na metade superior da peça) onde são aplicados:

$$u_y = \int V(t) dt$$

$$\text{onde } V(t) = \begin{cases} V_1 t/t_r & \text{para } t \leq t_r \\ V_1 & \text{para } t > t_r \end{cases}$$

sendo $V_1 = 15m/s$ e $t_r = 0,1\mu s$

Três valores de resistência para a linha de ligação entre PMMA /Al são empregados conforme a Tabela 4.2:

TABELA 4.2 - Propriedades da interface coesiva

Energia de fratura normal ϕ_n (N/mm)	Máxima tensão normal na interface $\sigma_{m\acute{a}x}$ (MPa)
0,08	81 ($E^{PMMA} / 40$)
0,17	162 ($E^{PMMA} / 20$)
0,26	243 ($3E^{PMMA} / 40$)

Em todos os casos um comprimento característico de 4,0E-04 mm foi empregado.

A Fig. 4.10 mostra o incremento da trinca (Δa) como uma função do tempo para diferentes $\sigma_{m\acute{a}x}$ na ponta da trinca.

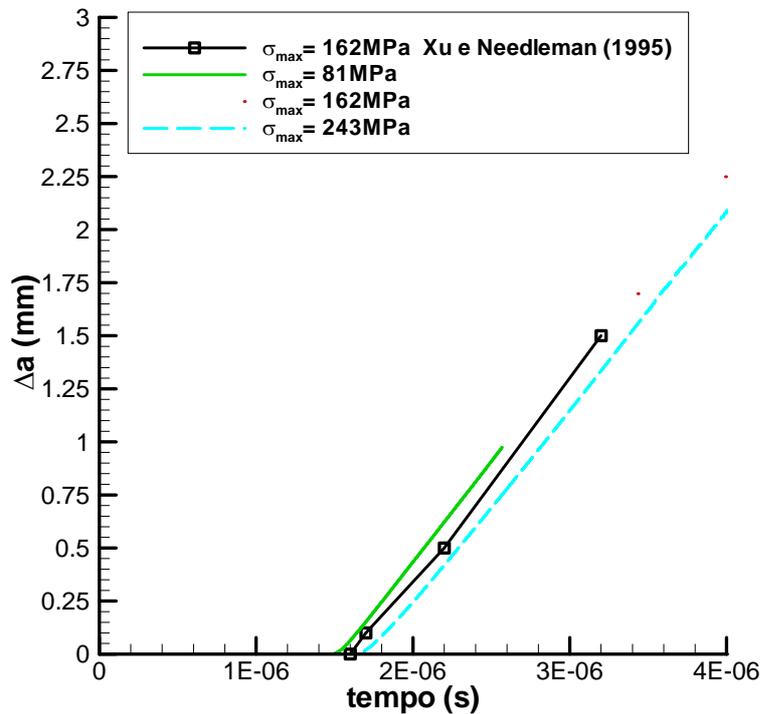


FIGURA 4.10 – Avanço da trinca em relação ao tempo

Observa-se que o tempo em que a trinca inicia-se aumenta com σ_{max} . Esta conclusão é consistente com as conclusões vistas no item 4.2.1, ou seja, uma maior coesão em modo I (maior energia de fratura) retarda o início da propagação da trinca. Também pode-se observar um decréscimo da velocidade de propagação com o aumento da coesão, isso é melhor ilustrado na Fig. 4.11, onde a velocidade de propagação das trincas da/dt como uma função da coesão da interface é mostrada. (da/dt é calculado como $\frac{da}{dt} = \frac{\Delta a}{\Delta t}$ onde Δa é o incremento da trinca de Δt o correspondente tempo de propagação).

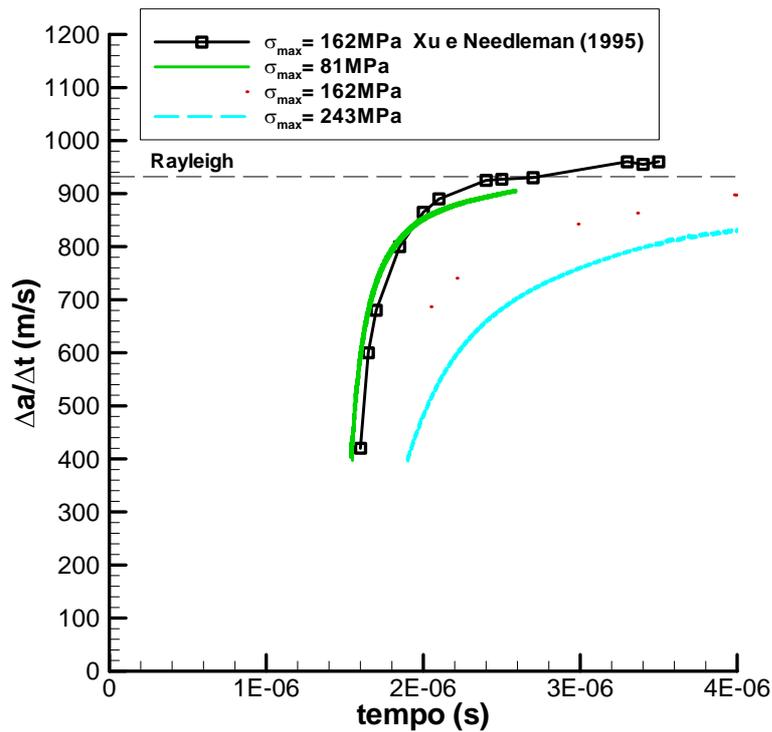


FIGURA 4.11 – Velocidade de propagação das trincas em relação ao tempo

Conforme visto na Fig. 4.11 é também indicado a velocidade das ondas de Rayleigh se propagando no PMMA.

Finalmente, nas Fig. 4.12 a 4.14 são mostrados os campos de tensões normal σ_{22} (modo I) para os tempos de análise 2,00 , 2,20 e 2,60 μs com $\sigma_{max} = 81\text{MPa}$. Pode-se observar uma tendência de redução desta componente na ponta da trinca com o aumento da velocidade de propagação das trincas que aumenta com o tempo.

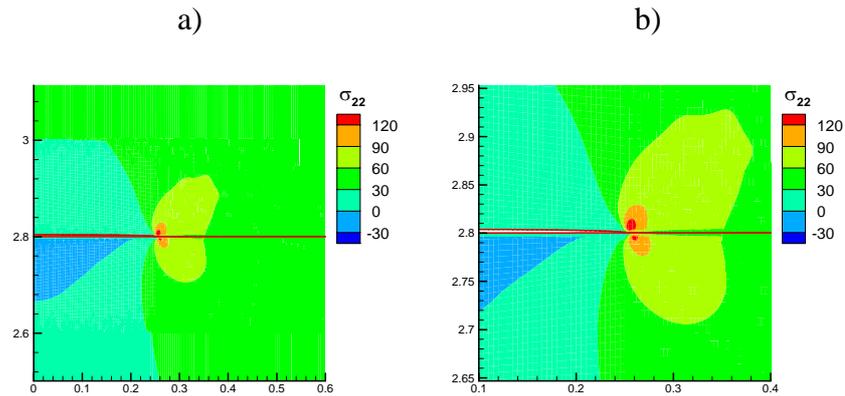


FIGURA 4.12 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,00\mu s$ $a = 0,269\text{mm}$ a) imagem original b) imagem ampliada

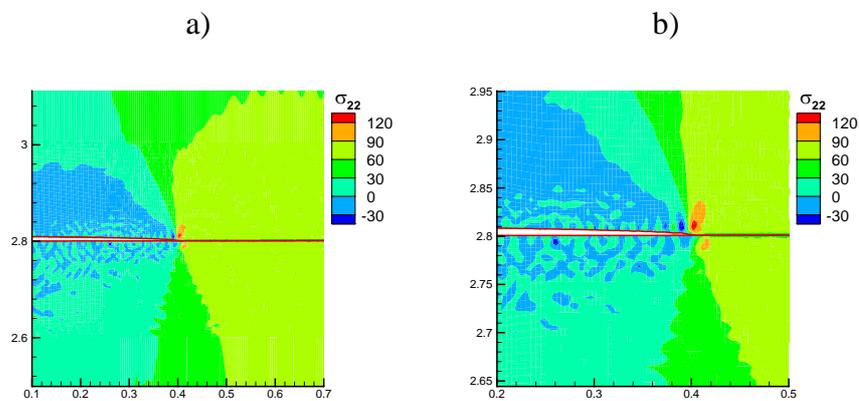


FIGURA 4.13 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,20\mu s$ $a = 0,417\text{mm}$ a) imagem original b) imagem ampliada

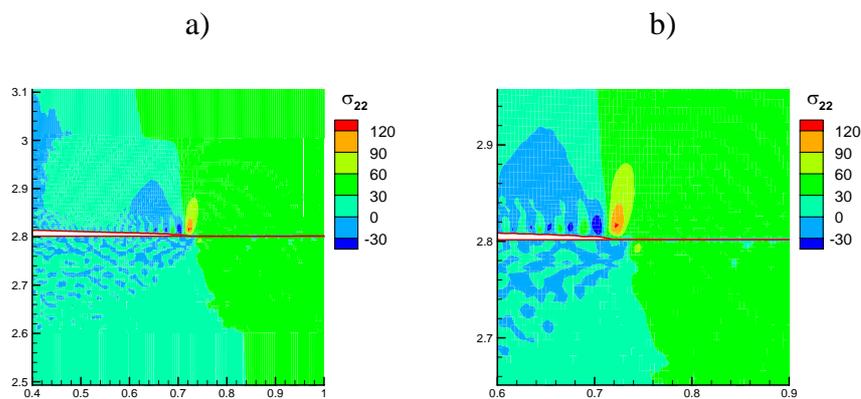


FIGURA 4.14 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,60\mu s$ $a = 0,733\text{mm}$ a) imagem original b) imagem ampliada

Já as Fig. 4.15 a 4.17 mostram as componentes de tensão de corte σ_{12} (modo II) para os mesmos tempos de análise 2,00 , 2,20 e 2,60 μ s com $\sigma_{m\acute{a}x} = 81$ MPa. Pode-se observar uma tend\^encia de aumento desta componente na ponta da trinca com o aumento da velocidade da mesma.

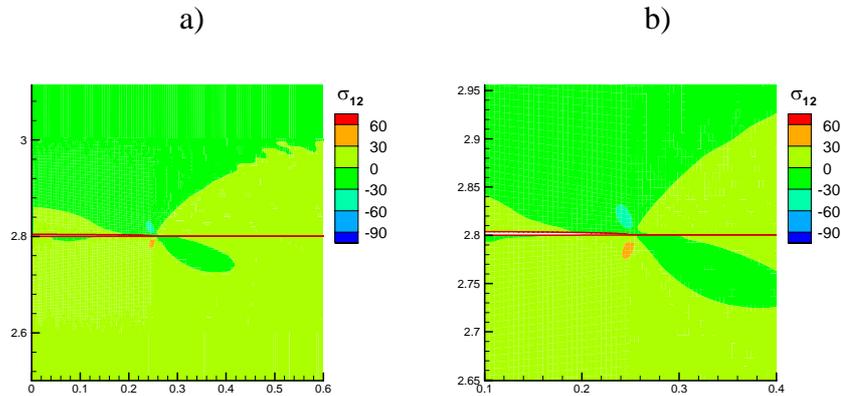


FIGURA 4.15 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,00\mu$ s a = 0,256mm a) imagem original b) imagem ampliada

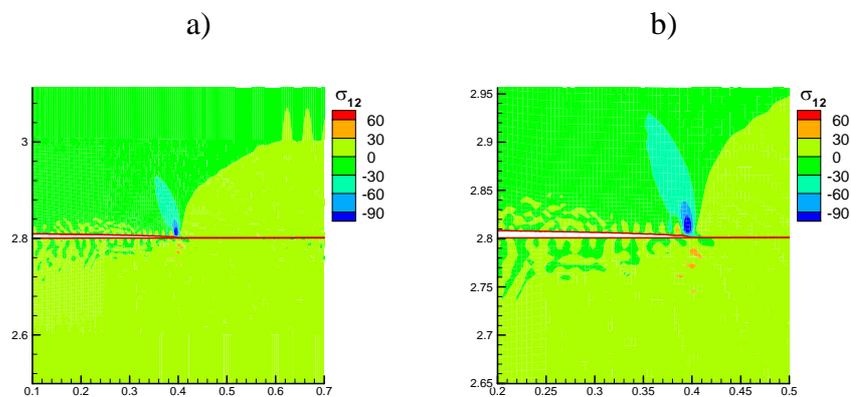


FIGURA 4.16 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,20\mu$ s a = 0,406mm a) imagem original b) imagem ampliada

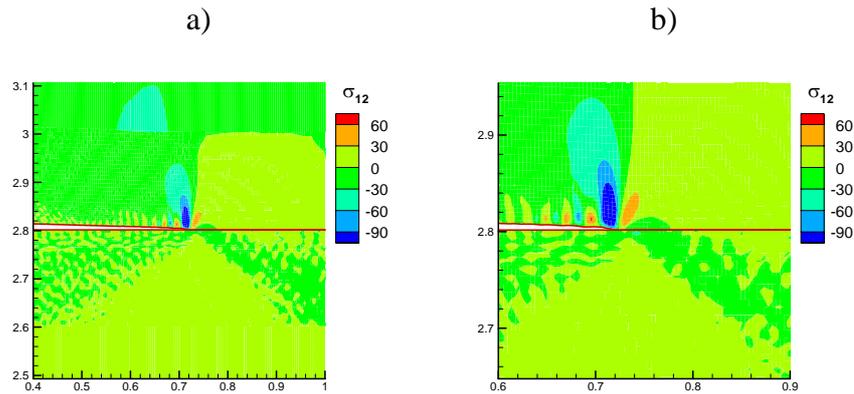


FIGURA 4.17 - Distribuição do campo de tensões na ponta da trinca com PMMA localizado na metade superior e o alumínio na metade inferior, $t = 2,60\mu s$ a = 0,723mm a) imagem original b) imagem ampliada

Portanto a importância dos modos I e modo II dependem da velocidade de propagação das trincas e não apenas das tensões remotas aplicadas. O modo II tende a aumentar de importância com a velocidade, aumentando a tenacidade da interface. Conclusões são similares às encontradas em Xu e Needleman (1996). Analisando-se as outras coesões de interface visto na Tabela 4.2, chegou-se às mesmas conclusões.

4.3. EFEITO DAS PROPRIEDADES DE INTERFACE NA TENACIDADE DE UM COMPÓSITO

Neste exemplo, um material composto de uma matriz de PMMA reforçado por barras cilíndricas de alumínio é analisado. O objetivo aqui é observar como as propriedades de interface alteram o comportamento global da estrutura. A geometria é descrita na Fig. 4.18, por simetria apenas metade da peça é discretizada.

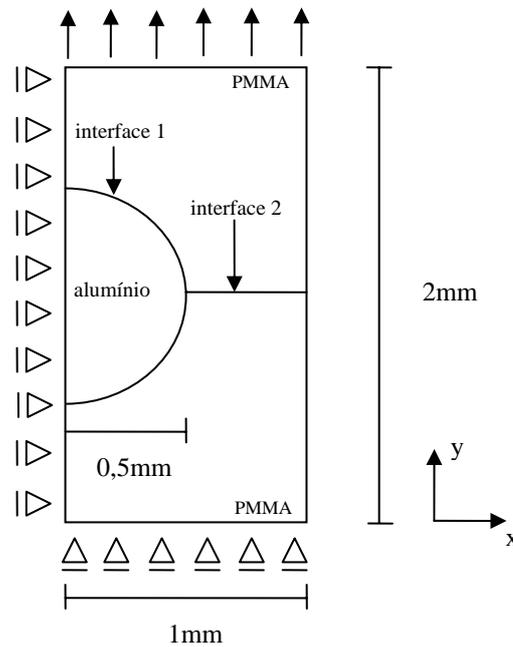


FIGURA 4.18 - Geometria empregada

Um deslocamento prescrito u_y trativo é aplicado na face superior, sendo os deslocamentos em y impedidos na face inferior. A malha de elementos finitos é mostrada na Fig. 4.19, os elementos finitos empregados são quadriláteros bilineares. Elementos coesivos são unicamente considerados na interface dos dois materiais, interface 1 e no plano de maior tensão no PMMA, interface 2. Pode-se, com tal modelo, capturar de forma aproximada a ruptura no PMMA (uma análise mais detalhada exigiria o emprego de interfaces coesivas entre todos os elementos finitos). As propriedades dos materiais são as mesmas empregadas na seção 4.1. Diferentes propriedades da interface 1 serão consideradas, analisando-se as conseqüências sobre a interface 2.

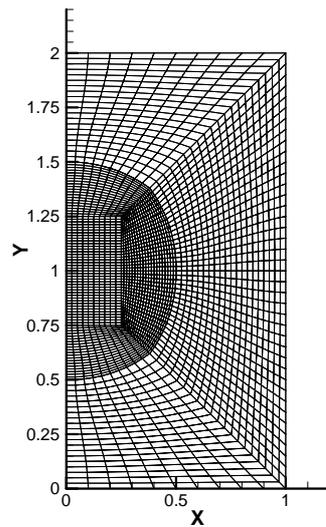


FIGURA 4.19 – Malha empregada

Em todas as interfaces o comprimento característico $\delta_n = \delta_t = 4,0E-04$ mm e $\phi_n = \phi_t$, na interface 2 o $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{E^{PMMA}}{10} = 324MPa$ em todos os casos. Na interface 1, diferentes valores de $\sigma_{m\acute{a}x}$ foram empregados, conforme a Tabela 4.3, o que corresponde à diferentes valores de energia de fratura para esta interface. A Tabela 4.3 também indica o tempo de início e fim de ruptura e o tempo de propagação da interface 2 (PMMA / PMMA).

Pode-se observar que o aumento da energia da interface PMMA / Al aumenta o tempo de início da propagação da trinca no PMMA o que corresponde a um aumento na carga de colapso do compósito. No entanto existe um valor intermediário de energia da interface que faz com que a propagação da trinca no PMMA ocorra de forma mais lenta ($\sigma_{m\acute{a}x}^{Al/PMMA} = 162MPa$) ou menos frágil. Portanto uma maior coesão na interface não necessariamente significa uma melhora geral no desempenho do compósito. Uma conclusão similar já havia sido obtida em Ghassemieh (2002).

TABELA 4.3 - Efeitos na tenacidade do PMMA variando as propriedades de interface PMMA / Al

tensão coesiva na interface (MPa) $\sigma_{máx}^{PMMA/Al}$	tempo (s)		
	início do rompimento	fim da ruptura	duração da propagação
	20	9,48E-06	9,95E-06
40,5	9,53E-06	9,99E-06	0,46E-06
162	4,27E-06	5,00E-06	0,73E-06
324	7,83E-06	8,29E-06	0,46E-06
486	11,42E-06	11,64E-06	0,22E-06
607,5	12,01E-06	12,46E-06	0,45E-06
800	12,03E-06	12,49E-06	0,46E-06
1000	12,0E-06	12,50E-06	0,50E-06
1500	11,98E-06	12,49E-06	0,51E-06
1600	12,02E-06	12,47E-06	0,45E-06

O início do rompimento da trinca seguido da sua trajetória até a ruptura total também variou conforme $\sigma_{máx}^{PMMA/Al}$. A Fig. 4.20 indica o início da ruptura até o rompimento total da peça, os números, 1,2,3 e 4 localizado sobre a peça indica a ordem que foram sucedendo as rupturas. No presente trabalho $\sigma_{máx}^{PMMA/Al} = 20$ MPa até 324 MPa está representado na Fig. 4.20a. A Fig. 4.20b foi obtida somente para $\sigma_{máx}^{PMMA/Al} = 486$ MPa. Com variação da $\sigma_{máx}^{PMMA/Al}$ de 607,5 MPa até 1600 MPa a ruptura está representado na Fig. 4.20c.

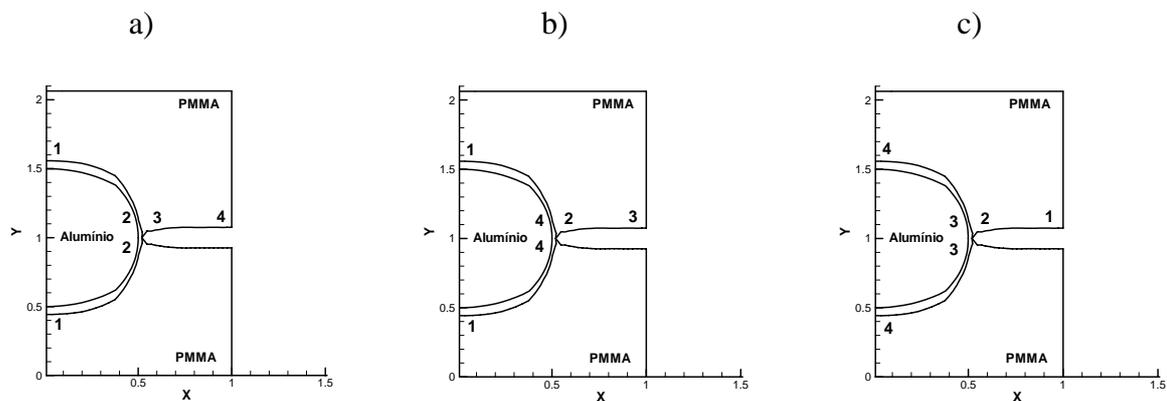


FIGURA 4.20 – Trajetória ordenada da ruptura da peça

Finalmente foi considerado o efeito de escala na propagação. É sabido que a MFLE não apresenta um comprimento característico, não sendo possível para esta metodologia capturar efeitos de escala. Para testar o método das interfaces coesivas em capturar este efeito, as dimensões e deslocamentos prescritos do compósito foram:

- a) multiplicado por 10
- b) multiplicado por 0,1

As propriedades da interface PMMA / Al foram mantidas idênticas ($\sigma_{máx}^{PMMA/Al} = 162\text{MPa}$) e no PMMA também ($\sigma_{máx}^{PMMA} = 324\text{MPa}$) os resultados do comportamento do PMMA são sumarizados na Tabela 4.4

TABELA 4.4 - Efeitos de escala

	fator de multiplicação		
	10	1	0,1
tempo (s) de início de propagação	3,19E-06	4,27E-06	4,80E-06
velocidade média de propagação das trincas (mm/s)	2,18E+06	0,68E+06	0,13E+06

Pode-se observar que quanto menor a peça, maior o tempo de início de propagação. Como o deslocamento aplicado neste caso aumenta linearmente com o tempo, a peça menor inicia o rompimento a uma tensão remota maior. A velocidade de propagação também diminui com a diminuição da peça. Logo o efeito de escala é capturado, ou seja, peças menores apresentam maior tenacidade que peças maiores, nas mesmas condições.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1. CONCLUSÕES

Pode-se concluir deste trabalho que:

- a) A fratura na interface de materiais dissimilares apresenta uma série de particularidade que não acontecem na fratura homogênea. As mais notáveis delas são a formação de zonas de contato e mistura de modos I e II na ponta da trinca (independentemente do carregamento remoto).
- b) O uso da MFLE apresenta uma série de limitações como: perda da validade na presença de grandes zonas de contato e dificuldade de definição da tenacidade a ser empregada nos cálculos que não podem ser unicamente baseados no modo I de propagação. Isto sem falar na dificuldade analítica de definir os fatores de intensidades de tensão.
- c) O uso do método das interfaces coesivas se mostrou uma ferramenta de grande potencial. Num caso simples, dominado pelo modo I, capturou de forma relativamente precisa o início da propagação, quando comparada à MFLE. O método também foi capaz de capturar o efeito, normalmente encontrado nos materiais, de aumento da tenacidade com a diminuição das dimensões dos corpos.
- d) Considerações analíticas num caso dinâmico são bem complicadas, mesmo assim, o método das interfaces coesivas conseguiu capturar efeitos medidos experimentalmente, como o aumento da importância do modo II de propagação com o aumento da velocidade de propagação das trincas. Este efeito tende a tornar a propagação mais difícil, pois normalmente a propagação em modo II é mais tenaz que a propagação em modo I.
- e) Estudo de tenacidade de interface é um estudo fundamental na mecânica da fratura pois em geral todas as falhas têm início nas interfaces. A idéia que esta tenacidade deve ser sempre a maior possível nem sempre é correta, como mostrado no exemplo 4.3, onde a tenacidade da matriz apresentou um valor máximo para um valor intermediário de tenacidade da interface.

5.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Muitas comparações entre expressões analíticas e simulações numéricas podem ainda ser realizadas, explorando o efeito do fator oscilatório ε para diferentes combinações

Outras sugestões de trabalho seriam:

- a) Estudo da fadiga na interface de materiais dissimilares, empregando a teoria desenvolvida em Machado (2007).
- b) Estudo da interface pasta de cimento/agregado, no caso do concreto.
- c) Consideração da fratura elasto-plástica.
- d) Fratura na interface de cristais (grãos) com diferentes orientações cristalinas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, T. L., 2005. **Fracture mechanics**: fundamentals and applications. Boca Raton: CRC, 621p.
- ARGON, A. S., GUPTA, V., LANDIS, H. S., CORNIE, J. A., 1989. Interfaces with controlled toughness as mechanical fuses to isolate fibres from damage. **Journal of Materials Science**, v.24, p.1406-1412
- BARENBLATT, G. I., 1962. The mathematical theory of equilibrium of crack in brittle fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v.7, p.55-129.
- BITTENCOURT, E., 2005. **Mecânica da fratura e do dano**. Porto Alegre - RS: CPGEC/UFRGS. 50p (Apostila Interna).
- BRANCO, C. M., FERNANDES, A. A., CASTRO, P. M. S. T., 1999. **Fadiga de estruturas soldadas**. 2ª ed. Lisboa: Calouste Gulbenkian. 902p.
- DOWLING, N. E., 1993. **Mechanical Behavior of Materials**. New Jersey: Prentice Hall, 773p.
- DUGDALE, D. S., 1960. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v.8, p. 100-108.
- DUNDURS, J. 1969. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges. **Journal of Applied Mechanics**, v.36, p. 650-652
- ENGLAND, A. H., 1965. A crack between dissimilar média. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v.32, p.400-402
- ERDOGAN, F., 1963. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v.30, p.232-236
- FEDRIGO, F., 2001. **Aplicação de interfaces coesivas na mecânica da fratura via método dos elementos finitos**. Porto Alegre, 2001, 93p. Dissertação de Mestrado em Engenharia – Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- FERNEY, B. D., DEVARY, M. R., HSIA, K. J., NEEDLEMAN, A., 1999. Oscillatory crack growth in glass. **Scripta Materialia**, v.41, n.3, p. 275-281.

- GDOUTOS, E.E., 1993. Fracture mechanics: an introduction Dordrecht: Kluwer Academic, 307p.
- GHASSEMIEH, E., 2002. Micro-mechanical analysis of bonding failure in a particle-filled composite. **Composites Science and Technology**, v.62, p.67-82
- GRIFFITH, A. A., 1921. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, A221, Delft, p.163-197.
- HUTCHINSON, J. M., SUO, Z., 1992. Mixed mode cracking in layered materials. **Advanced in applied mechanics**. New York: Academic Press, v.29, p.63-191
- IRWIN, G. R., 1948. Fracture Dynamics. In: **Fracture of Metals**. Cleveland: ASM.
- KANNINEN, M. F., POPELAR, C. H., 1985. **Advanced fracture mechanics**. New York: Oxford University, 573p.
- LIEBOWITZ, H., 1968. **Fracture**: an Advanced Treatise. New York: Academic, v.2, 759p.
- MACHADO, A., 2007. **Uso do Método das Interfaces Coesivas na Simulação do Processo de Propagação de Trincas por Fadiga**. Porto Alegre, 2007, 79p. Dissertação de Mestrado em Engenharia – Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- NEEDLEMAN, A., 1987. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. **Journal of Applied Mechanics**, v.54, p. 525-531.
- NEEDLEMAN, A., 1990a. An analysis of decohesion along an imperfect interface. **International Journal of Fracture**, v.42, p. 21-40.
- NEEDLEMAN, A., 1990b. An analysis of tensile decohesion along an interface. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.38, p. 289-324.
- NEEDLEMAN, A., ROSAKIS, A. J., 1999. The effect of bond strength and loading rate on the conditions governing the attainment of intersonic crack growth along interfaces. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.47, p. 2411-2449.
- ORTIZ, J.E., CISILINO, A.P., 2006. **Fracture and damage of composites**. Wit: Universidade de Michigan, v.8, p.249-288
- PONTHOT, J-P., 1995. **Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides em grandes transformations par la methode des éléments finis**. Liège, 1995, 462p. Tese

de Doutorado em Sciences Appliquées – Faculte dès Sciences Appliquees, Université de Liège.

RICE, J. R., 1988. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v.55, p.98-103

RICE, J. R., SUO, Z., WANG, J. S., 1990. **Mechanics and thermodynamics of brittle interface failure in bimaterial systems**. In: Rühle, M., Evans, A. G., Ashby, M.F. and Hirth, J.P. *Metal–Ceramic Interfaces*. Pergamon, Oxford, p. 269–294.

ROSE, J. H., FERRANTE, J., SMITH, J. R., 1981. Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces. **Physics Review Letters**, v.47, p. 675-678.

SHIH, C. F., AZARO, R. J., 1988. Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I-Small Scale Yielding. **Journal of Applied Mechanics**, v.55, p.299-316

SIEGMUND, T., NEEDLEMAN, A., 1997. A numerical study of dynamic crack growth in elastic-viscoplastic solids. **International Journal of Solids and Structures**, v.34, n.7, p. 769-787.

SIH, G. C., RICE, J. R., 1964. The bending of plates of dissimilar materials with cracks. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v.31, p.477-482

SILLS, L.B., TRAVITZKY, N., ASHKENAZI, D., 2000. Interface fracture properties of a bimaterial ceramic composite. **Mechanics of Materials**, v.32, p.711-722

TVERGAARD, V., HUTCHINSON, J. W., 1992. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.40, n.6, p. 1377-1392.

WILLIAMS, M. L., 1959. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. **Bulletin of the Seismological Society of America** , v.49, p.199-204

XU, X. -P., NEEDLEMAN, A., 1994. Numerical simulation of crack growth in brittle solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.42, n.9, p. 1397-1434.

XU, X. -P., NEEDLEMAN, A., 1995. Numerical simulation of dynamic interfacial crack growth allowing for crack growth away from the bond line. **Internacional Journal of Fracture** **74**, p. 253-275.

XU, X. -P., NEEDLEMAN, A., 1996. Numerical simulation of dynamic interfacial crack growth along an interface. **Internacional Journal of Fracture** **74**, p. 289-324.

ZERBST, U., MÄDLER, K., HINTZE, H., 2005. **Fracture Mechanics in Railway Applications - an overview**, v.72 , p.163-194

**APÊNDICE A - DEDUÇÃO MATEMÁTICA DAS SOLUÇÕES
ANALÍTICAS DO CAMPO DE TENSÕES NA PONTA DA TRINCA
PARA MATERIAIS HOMOGÊNEOS COMO UM CASO PARTICULAR
DE MATERIAIS HETEROGÊNEOS**

As soluções analíticas do campo de tensões na ponta da trinca para materiais heterogêneos $(\sigma_{11})_j$, $(\sigma_{22})_j$ e $(\sigma_{12})_j$ Rice et al. (1990) são dadas pelas Eq. (A.1), (A.2) e (A.3) respectivamente. As soluções analíticas do campo de tensões na ponta da trinca para materiais homogêneos σ_{11} , σ_{22} e τ_{12} Kanninen e Popelar (1985) estão representadas pelas Eq. (A.4), (A.5) e (A.6) respectivamente.

As equações estão em coordenadas cartesianas.

$$(\sigma_{11})_j = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f_{11}^I - \frac{1}{\omega_j} \cos(\theta - \bar{\Theta}) \right] \quad (\text{A.1})$$

$$(\sigma_{22})_j = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f_{22}^I + \frac{1}{\omega_j} \cos(\theta - \bar{\Theta}) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$(\sigma_{12})_j = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f_{12}^I - \frac{1}{\omega_j} \text{sen}(\theta - \bar{\Theta}) \right] \quad (\text{A.3})$$

$$(\sigma_{11}) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\theta}{2} \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$(\sigma_{22}) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \text{sen} \frac{\theta}{2} \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$(\tau_{12}) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (\text{A.6})$$

Será demonstrado que $(\sigma_{11})_j = (\sigma_{11})$, para as outras componentes de tensões $(\sigma_{22})_j$ e $(\sigma_{12})_j$ as demonstrações são feitas analogamente.

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} \quad \mu_2 \right)}{\left(\frac{k_2 + 1}{\mu_2} \quad \mu_1 \right)} \right] \text{ fazendo } \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, \mu_1 = \mu_2 = \mu \text{ e } \nu_1 = \nu_2 = \nu,$$

κ_1, ν_1 e κ_2, ν_2 representa o estado plano de deformação e coeficiente de Poisson do material 1 e 2 respectivamente.

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{k}{\mu} + \frac{1}{\mu} \right)}{\left(\frac{k}{\mu} + \frac{1}{\mu} \right)} \right] \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln[1] \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} 0$$

$$\varepsilon = 0 \tag{A.7}$$

Substituindo a Eq. A.7 na Eq. A.8

$$\bar{\Theta} = \varepsilon \ln \left(\frac{r}{2a} \right) + \frac{\theta}{2} \tag{A.8}$$

temos:

$$\bar{\Theta} = \frac{\theta}{2} \tag{A.9}$$

Da mesma forma vamos substituir a Eq. A.7 nas equações A.10 e A.11

$$\omega_1 = e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} \tag{A.10}$$

$$\omega_1 = e^{-0(\pi-\theta)} \quad \omega_1 = e^0 \quad \omega_1 = 1$$

$$\omega_2 = e^{\varepsilon(\pi+\theta)} \tag{A.11}$$

$$\omega_2 = e^{0(\pi+\theta)} \quad \omega_2 = e^0 \quad \omega_2 = 1$$

Substituindo Eq. A.7 e a Eq. A.9 na Eq. A.12

$$f_{11}^l = 3 \cos \bar{\Theta} + 2\varepsilon \sin \theta \cos \left(\theta + \bar{\Theta} \right) - \sin \theta \sin \left(\theta + \bar{\Theta} \right) \tag{A.12}$$

temos,

$$f'_{11} = -3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \sin \left(\theta + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$f'_{11} = -3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \quad (\text{A.13})$$

Substituindo Eq. A.9, Eq. A.10 e Eq. A.13 na Eq. A.14

$$(\sigma_{11})_j = \frac{K_l}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f'_{11} - \frac{1}{\omega_j} \cos \left(\theta - \bar{\theta} \right) \right] \quad (\text{A.14})$$

$$\text{resultará } (\sigma_{11})_j = \frac{K_l}{2\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos \frac{\theta}{2} - \text{sen} \theta \text{sen} \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{A.15})$$

$$(\sigma_{11})_j = \frac{K_l}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \text{sen} \theta \text{sen} \frac{3\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{A.16})$$

$$(\sigma_{11})_j = \frac{K_l}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \text{sen} \theta \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad \text{mas} \quad -\frac{1}{2} \text{sen} \theta = -\cos \frac{\theta}{2} \text{sen} \frac{\theta}{2}$$

De fato

$$-\frac{1}{2} \text{sen} \theta = -\frac{1}{2} \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right] = -\frac{1}{2} 2 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -\text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

Portanto

$$(\sigma_{11})_j = \frac{K_l}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} - \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\text{Logo } (\sigma_{11})_j = (\sigma_{11})$$

**APÊNDICE B - SOLUÇÕES ANALÍTICAS DO CAMPO DE TENSÕES
NA PONTA DA TRINCA PARA MATERIAIS HETEROGÊNEOS NA
FORMA EXPLÍCITA**

Considere dois materiais, sólidos, elásticos e isotrópicos, utilizando os parâmetros de Dundurs (1969) definidos pelas Eq. B.1 e B.2. Esses parâmetros são empregado para caracterizar o campo de deformação para materiais bi-dimensionais.

$$\bar{\alpha} = \frac{\mu_1(\kappa_2 + 1) - \mu_2(\kappa_1 + 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)} \quad (\text{B.1})$$

$$\beta = \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)} \quad (\text{B.2})$$

onde μ_j e κ_j é o módulo de elasticidade transversal e estado plano de deformação respectivamente, para $j = 1, 2$.

O parâmetro $\bar{\alpha}$ mede a descontinuidade do módulo do plano de tensão sobre a interface e β mede a descontinuidade do módulo do plano volumétrico (Hutchinson 1992).

No presente trabalho é usado somente o parâmetro β . Seja ε definida na Eq. B.3 uma constante introduzida por Williams (1959), Erdogan (1963), Sih (1964) e England (1965). Substituindo β na Eq. B.3 resulta a Eq. B.4.

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right] \quad (\text{B.3})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} \right)}{\left(\frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right)} \right] \quad (\text{B.4})$$

As componentes do campo de tensões $(\sigma_{11})_j$, $(\sigma_{22})_j$ e $(\sigma_{12})_j$ apresentados por Rice et al. (1990) na interface de materiais heterogêneos na ponta da trinca são dadas pelas Eq. B.5, B.6 e B.7 respectivamente.

As equações estão em coordenadas cartesianas onde $j = 1$ corresponde ao material localizada na metade superior da peça e $j = 2$ corresponde ao material localizada na metade inferior da peça.

$$(\sigma_{11})_j = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f_{11}^I - \frac{1}{\omega_j} \cos(\theta - \bar{\Theta}) \right] \quad (\text{B.5})$$

$$- \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f_{11}^{II} + \frac{1}{\omega_j} \text{sen}(\theta - \bar{\Theta}) \right]$$

$$(\sigma_{22})_j = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f_{22}^I + \frac{1}{\omega_j} \cos(\theta - \bar{\Theta}) \right] \quad (\text{B.6})$$

$$- \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f_{22}^{II} - \frac{1}{\omega_j} \text{sen}(\theta - \bar{\Theta}) \right]$$

$$(\sigma_{12})_j = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f_{12}^I - \frac{1}{\omega_j} \text{sen}(\theta - \bar{\Theta}) \right] \quad (\text{B.7})$$

$$- \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \left[\omega_j f_{12}^{II} - \frac{1}{\omega_j} \cos(\theta - \bar{\Theta}) \right]$$

As Eq. B.8 até B.18 são as parcelas que compõem as equações dos campos de tensão $(\sigma_{11})_j, (\sigma_{22})_j$ e $(\sigma_{12})_j$ na interface de materiais heterogêneos na ponta da trinca .

$$\bar{\Theta} = \varepsilon \ln\left(\frac{r}{2a}\right) + \frac{\theta}{2} \quad (\text{B.8})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{\kappa_1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)}{\left(\frac{\kappa_2}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right)} \right] \quad (\text{B.9})$$

$$\kappa_j = 3 - 4\nu_j \quad (\text{B.10})$$

$$\omega_1 = e^{-\varepsilon(\pi - \theta)} \quad (\text{B.11})$$

$$\omega_2 = e^{\varepsilon(\pi+\theta)} \quad (\text{B.12})$$

$$f_{11}^I = 3 \cos \bar{\Theta} + 2\varepsilon \sin \theta \cos(\theta + \bar{\Theta}) - \sin \theta \sin(\theta + \bar{\Theta}) \quad (\text{B.13})$$

$$f_{11}^{II} = 3 \sin \bar{\Theta} + 2\varepsilon \sin \theta \sin(\theta + \bar{\Theta}) + \sin \theta \cos(\theta + \bar{\Theta}) \quad (\text{B.14})$$

$$f_{22}^I = \cos \bar{\Theta} - 2\varepsilon \sin \theta \cos(\theta + \bar{\Theta}) + \sin \theta \sin(\theta + \bar{\Theta}) \quad (\text{B.15})$$

$$f_{22}^{II} = \sin \bar{\Theta} - 2\varepsilon \sin \theta \sin(\theta + \bar{\Theta}) - \sin \theta \cos(\theta + \bar{\Theta}) \quad (\text{B.16})$$

$$f_{12}^I = \sin \bar{\Theta} + 2\varepsilon \sin \theta \sin(\theta + \bar{\Theta}) + \sin \theta \cos(\theta + \bar{\Theta}) \quad (\text{B.17})$$

$$f_{12}^{II} = -\cos \bar{\Theta} - 2\varepsilon \sin \theta \cos(\theta + \bar{\Theta}) + \sin \theta \sin(\theta + \bar{\Theta}) \quad (\text{B.18})$$

**APÊNDICE C - SOLUÇÕES ANALÍTICAS DO DESLOCAMENTO NA
FORMA EXPLÍCITA**

Neste apêndice é mostrado explicitamente as equações h_{11} , h_{12} , h_{13} , h_{21} , h_{22} , h_{23} , κ_j e ω_j que compõem a Eq. C.1

$$(u_2)_j = \frac{K_I \sqrt{2\pi r}}{4\pi\mu_j} \left[\kappa_j \omega_j h_{21} - \frac{1}{\omega_j} h_{22} - \omega_j h_{23} \right] \quad (C.1)$$

$$+ \frac{K_{II} \sqrt{2\pi r}}{4\pi\mu_j} \left[-\kappa_j \omega_j h_{11} + \frac{1}{\omega_j} h_{12} + \omega_j h_{13} \right]$$

$$h_{11} = \frac{1}{1+4\varepsilon^2} \left[\cos(\theta - \bar{\Theta}) - 2\varepsilon \text{sen}(\theta - \bar{\Theta}) \right] \quad (C.2)$$

$$h_{12} = \frac{1}{1+4\varepsilon^2} \left[\cos \bar{\Theta} + 2\varepsilon \text{sen} \bar{\Theta} \right] \quad (C.3)$$

$$h_{13} = \text{sen} \theta \text{sen} \bar{\Theta} \quad (C.4)$$

$$h_{21} = \frac{1}{1+4\varepsilon^2} \left[\text{sen}(\theta - \bar{\Theta}) + 2\varepsilon \cos(\theta - \bar{\Theta}) \right] \quad (C.5)$$

$$h_{22} = \frac{1}{1+4\varepsilon^2} \left[-\text{sen} \bar{\Theta} + 2\varepsilon \cos \bar{\Theta} \right] \quad (C.6)$$

$$h_{23} = \text{sen} \theta \cos \bar{\Theta} \quad (C.7)$$

onde κ_j e ν_j é o estado plano de deformação e o coeficiente de Poisson respectivamente, para $j = 1, 2$.

$$\omega_1 = e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} \quad (C.8)$$

$$\omega_2 = e^{\varepsilon(\pi+\theta)} \quad (C.9)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{\left(\begin{array}{cc} \kappa_1 + 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{cc} \kappa_2 + 1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{array} \right)} \right] \quad (C.10)$$

$$\mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \quad (C.11)$$

onde μ_j e E_j é o módulo de elasticidade transversal e o módulo de elasticidade longitudinal respectivamente, para $j = 1, 2$.

$$\bar{\Theta} = \varepsilon \ln\left(\frac{r}{2a}\right) + \frac{\theta}{2}$$