UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Minimização de Funções de Custos Descontínuas

Jorge Paulo de Araújo

Porto Alegre, 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Minimização de Funções de Custos Descontínuas

Jorge Paulo de Araújo

Orientador: Prof. Dr. Nali de Jesus de Souza

Tese submetida ao programa de Pós-graduação em Economia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia

Porto Alegre, 2003

Índice

Resumo

Nesta tese mostramos que uma função de custo contínua e uma tecnologia uniproduto, convexa, monótona não-crescente e regular implicam que a função de custo mínimo é semicontínua superior em relação ao produto e que a demanda por insumos é fechada. Se a imagem da tecnologia for compacta então a função de custo mínimo é contínua e a demanda por insumos é hemicontínua superior e valor-compacto em relação ao produto. Se a tecnologia possuir a propriedade de ser localmente não-disjunta então a função de custo mínimo é contínua e a demanda por insumos é hemicontínua superior e valor-compacto em relação ao produto. Se a função de custo for monótona não-decrescente, semicontínua inferior em relação aos contornos inferiores e a tecnologia for uniproduto, convexa, monótona não-crescente, regular, fechada com imagem compacta então a função de custo mínimo é semicontínua inferior em relação ao produto e a demanda ampliada por insumos é hemicontínua superior e valor-compacto em relação ao produto. Se a tecnologia possuir a propriedade de ser localmente não-disjunta então o mesmo resultado é válido. Introduzimos as noções de função monótona não-decrescente e semicontínua inferior em relação aos contornos num espaço topológico ordenado, de correspondência localmente não-disjunta e de demanda ampliada. Mostramos que funções com a propriedade anterior são semicontínuas inferiores e que correspondências convexas localmente não-disjuntas são hemicontínuas inferiores.

Abstract

In this thesis we show that a continuous cost function with a one product, convex, monotonous non-increasing and regular tecnology imply that the minimum cost function is upper semicontinuous in relation to the product and that the demand for inputs is closed. If the technology has a compact image, the minimum cost function is continuous and the demand for inputs is upper hemicontinuous and compact- value in relation to the product. If the technology is locally non-disjoint then the minimum cost function is continuous and the demand for inputs is upper hemicontinuous and compact- value in relation to the product. If the cost function is monotonous non-decreasing, lower semicontinuous in relation to the lower contours and the technology is a one product tecnology, convex, monotonous non-increasing, regular, closed with compact image the minimum cost function is lower semicontinuous in relation to the product and the enlarged demand for inputs is upper hemicontinuous and compact- value in relation to the product. If the technology is locally non-disjoint the same result is valid. We introduce three di®erent notion: i) lower semicontinuous non-decreasing monotonous function in relation to contours in a ordered topological space; ii) correspondence locally non-disjoint; iii) enlarged demand for inputs. We show that functions with the previous property are lower semicontinuous and that locally non-disjoint convex correspondences are lower hemicontinuous.

Parte I

Introdução

Introdução

Tradicionalmente, as funções são diferenciáveis em teoria econômica. Por um lado, a diferenciabilidade está associada aos princípios da teoria marginalista como a lei da utilidade marginal decrescente na teoria do consumidor ou à produtividade marginal na teoria da firma. Por outro lado, a diferenciabilidade fornece instrumentos para a análise das relações entre as variáveis definidas na teoria. Este tipo de procedimento é aquele que chamamos estática comparativa.

Arrow e Intriligator (1982) chamam de marginalista o período da teoria econômica no qual a diferenciabilidade tem o papel fundamental. Os autores escolhem o livro de Samuelson, Foundations of Economic Analysis, publicado em 1947, como o fim deste período cujas origens recuam até Cournot na primeira metade do século XIX.

O período posterior à teoria marginalista começa com o livro Value Theory de autoria de Debreu (1975) de 1959. Há uma modificação substancial em relação ao período anterior. Na teoria do consumidor, as funções de utilidade são definidas pelas escolhas. Na teoria da firma, as tecnologias substituem as funções de produção. A derivabilidade cede lugar para a continuidade e convexidade.

No prefácio do Value Theory, Debreu (1975) atribui a Morgenstein e von Neumann ter libertado a economia matemática de seus compromissos com o cálculo diferencial. Desde a década de 1930 von Neumann (Ingrao e Israel, cap. 7, 1987) indicara a importância da análise convexa e da topologia para a teoria econômica através do uso do teorema do ponto fixo de Brouwer. Em consonância com esta indicação, Debreu (1959) estabelece um sistema de axiomas que "...resulta em notáveis ganhos em generalidade e simplicidade da teoria " (1975, p. x). A conseqüência é que algumas propriedades que dependem da derivabilidade perdem a validade geral.

Economistas tendem a interpretar a continuidade das funções e a convexidade de certos subconjuntos do R^n como exigências naturais para uma teoria econômica, mesmo sabendo que em determinadas situações tais hipóteses não são válidas. Tecnologias podem não ser convexas. Custos podem exibir descontinuidades se consideramos imposição de tarifas. Todavia, uma ampla classe de fenômenos é adequadamente descrita com as exigências anteriores e isto é suficiente para que estes conceitos prevaleçam. Entretanto, existe outra razão menos aparente e mais preponderante. A continuidade e a convexidade são necessárias para que possamos empregar os teoremas do ponto fixo de Brouwer e Kakutani. A convexidade também é fundamental para demonstrar o segundo teorema do bem-estar através do teorema de Hahn-Banach da separação de subconjuntos abertos por hiperplanos.

Curiosamente, as exigências de continuidade e convexidade são insuficientes para garantir resultados que podem parecer mais fracos. Na teoria da firma os axiomas básicos são insuficientes para assegurar a existência de funções de produção ou a continuidade da função custo mínimo em relação ao produto. Por exemplo, dada uma determinada tecnologia, Mandy (1994) analisa o exemplo simples de função de custo "two-part tariff"

$$\phi(x_1; x_2) = \begin{cases} p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + F; & x_1 > 0 \\ p_2 \cdot x_2; & x_1 = 0 \end{cases}$$

que resulta numa função de custo mínimo descontínua em relação ao produto.

Normalmente, a expressão da função de custo é

$$p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n;$$

onde $p_i; i = 1; \dots; n$ são os preços por unidade do insumo i. Todavia, esta definição não é válida nas situações onde há discriminação de preços ou imposição de tarifas. São comuns os casos em que determinado produto ou insumo têm o preço por unidade dependente da quantidade adquirida.

Discriminação de preços de primeiro grau é aquela em que o fornecedor considera o quanto cada consumidor está disposto a pagar por unidade do bem conforme a quantidade adquirida. Este tipo de discriminação leva em conta o perfil do comprador. Na discriminação de segundo grau, os preços por unidade são diferentes conforme a quantidade adquirida mas iguais para todos os consumidores que compram naquela faixa de quantidade.

Não se pretende neste trabalho estudar discriminação de preços mas tratar da questão dos custos se os definimos de maneira mais geral que

$$p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n.$$

De fato, estaremos permitindo que as funções de custo tenham descontinuidades de salto.

Considerando a classificação usual de formas de discriminação, estaremos possibilitando formas para a função custo que permitam tratar discriminação de primeiro e segundo graus. Em ambas existe diferenciação de preços conforme a quantidade adquirida do bem. Isto implica que a expressão simples

$$p \cdot x$$

não é válida pois o preço p por unidade varia segundo a quantidade x.

Outra possibilidade de descontinuidade na função de custo é através da imposição de tarifas sobre o consumo com o objetivo de limitá-lo. Como exemplo pode ser citado as tarifas sobre consumo de energia elétrica que aumentam em função dos patamares de consumo.

A seguir, indicamos as principais contribuições da presente tese.

Tendo em vista o que foi comentado acima, este trabalho tem como objetivo indicar propriedades para uma tecnologia que podem assegurar a continuidade da função de custo mínimo em relação ao produto e a hemicontinuidade da demanda por insumos.

Estudamos o problema admitindo que a firma possa encontrar um mercado de insumos gerando custos descontínuos. O problema de modelagem das funções de custo total nos conduziu a uma estrutura topológica particular que chamamos espaços topológicos parcialmente ordenados com a propriedades da interseção topológica dos contornos. Definimos, nestes espaços, as funções de custo como funções monótonas não-decrescentes semicontínuas inferiores em relação aos contornos inferiores. Mostramos no teorema 2.6 que tais funções são semicontínuas inferiores.

Formulamos o problema como um problema de otimização paramétrica e utilizamos o teorema de Berge. Os teoremas da seção 3.2.3 são generalizações deste teorema. O teorema do máximo foi desmembrado em duas questões diversas: o problema de estabelecer a continuidade da função valor ótimo e o de estabelecer a hemicontinuidade da correspondência dos argumentos ótimos. Em relação ao primeiro problema, obtivemos condições necessárias e suficientes para a semicontinuidade da função de valor ótimo. Estes resultados estão expressos no corolário 3.2.

Para demonstrar o teorema do máximo e suas generalizações utilizamos um resultado obtido por Walker(1979). Na seção 3.2.1, estabelecemos algumas conseqüências do que chamamos lema de Walker.

As tecnologias foram vistas inicialmente de maneira muito geral como correspondências entre espaços topológicos. Formulamos o conceito de correspondência localmente não-disjunta. Obtivemos o teorema 2.18 que estabelece que correspondências convexas com a propriedade anterior são hemicontínuas inferiores. O corolário 2.20 estabelece que correspondências convexas tais que a imagem de algum ponto é todo o espaço têm inversas que são hemicontínuas inferiores. Em termos de tecnologias o fato que a imagem de algum ponto é todo o espaço é chamada "possibilidade de inação". No corolário 2.21, generalizamos o resultado 2.20.

O teorema 2.18, nos permitiu estabelecer dois resultados. No teorema 4.3, provamos que tecnologias uniprodutos, convexas, não-crescentes são hemicontínuas inferiores.

Na seção 4.1.1, definimos uma generalização das funções de produção comuns que chamamos correspondências de produção. Mostramos no teorema 4.6, que para tecnologias convexas. com gráficos compactos e com a propriedade da "possibilidade de inação", a correspondência de produção é hemicontínua e valor-compacto.

Na seção 4.2.2, mostramos na parte i) do teorema 4.8 que tecnologias uniproduto, convexas, monótonas não-crescentes e regulares implicam função de custo mínimo semicontínua superior e demanda por insumos fechada; na parte ii), mostramos que tecnologias uniproduto, convexas, fechadas, monótonas não-crescentes, regulares com imagem compacta implicam função de custo mínimo contínua e demanda por insumos hemicontínua superior e valor-compacto se a função de custo total é contínua. Se a tecnologia for multiproduto e possuir a propriedade da interseção local dos conjuntos de requerimentos de insumos então o teorema 4.9 estabelece que os mesmos resultados são válidos.

Se a função de custo total não for contínua, obtemos que a função de custo mínimo é semicontínua inferior.

Na seção 4.2.2 estabelecemos a hemicontinuidade do que chamamos a demanda ampliada. Estes resultados estão nos teoremas 4.11 e 4.12.

Para atingir o objetivo proposto, a tese está dividida do seguinte modo. No capítulo 1, a seguir, Otimização Paramétrica, introduzimos os conceitos e resultados básicos, a serem empregados no desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2, Funções e Correspondências Monótonas, definimos a estrutura de espaço topológico parcialmente ordenado que possui a propriedade da interseção topológica dos contornos. Nestes espaços, estudamos a classe de funções monótonas não-decrescentes semicontínuas inferiores em relação aos contornos inferiores. Também, estudamos o que chamamos correspondências monótonas não-crescentes hemicontínuas inferiores em relação aos contornos superiores. Além disso, estudamos a classe das correspondências que possuem a propriedade de serem localmente não-disjuntas. A finalidade deste capítulo é fornecer funções e correspondências que possam modelar custos e tecnologias.

No capítulo 3, Teorema do Máximo, obtemos as versões do teorema do máximo que são os instrumentos básicos para o processo de minimização de custos no capítulo 4.

Finalmente, no capítulo 4, empregamos os resultados dos capítulos anteriores para analisar tecnologias, a continuidade em relação ao produto da função de custo mínimo e a hemicontinuidade da demanda por insumos.

Capítulo 1

Otimização Paramétrica

Otimização paramétrica trata daqueles problemas de otimização em que algumas quantidades são vistas como parâmetros e outras como variáveis do problema. Em teoria econômica, os parâmetros e variáveis são chamadas variáveis exógenas e endógenas, respectivamente.

Do ponto de vista matemático, se modelamos o problema como um problema de otimização paramétrica, as questões gerais que surgem são sobre as propriedades que relacionam os valores ótimos e as variáveis exógenas, por exemplo, se a dependência é contínua; sobre as propriedades dos conjuntos de restrições determinados pelos parâmetros, por exemplo, se é compacto, convexo, etc.; sobre as propriedades dos conjuntos de soluções do problema e a dependência destes conjuntos em relação ao parâmetros, por exemplo, se a dependência é dada por uma correspondência hemicontínua.

Neste capítulo, expomos os conceitos básicos e resultados de otimização paramétrica que estão relacionados à chamada análise de sensibilidade ou estabilidade. Intuitivamente, está análise se refere aos tipos de continuidade que os valores ótimos e os conjuntos de soluções exibem em relação aos parâmetros. Em relação aos conjuntos de soluções ótimas, existem dois tipos básicos: a hemicontinuidade inferior e superior.

O resultado básico de otimização parametrizada é o chamado teorema do máximo. Este é um dos mais importantes teoremas dentre os utilizados em teoria econômica. Este resultado em suas inúmeras versões fornece condições suficientes para a existência da hemicontinuidade superior para o conjunto de soluções de problemas de otimização parametrizada. Além disso, as condições são ainda suficientes para assegurarem a continuidade da função valor ótimo. A primeira versão deste teorema aparece no capítulo 4 do livro de Claude Berge, Espaces Topologiques, Functions Multivoques de 1962. Exceto por uma pequena modificação no conceito de hemicontinuidade superior a versão atual deste teorema é aquela dada por Berge.

1.1 Estática Comparativa

No capítulo IX do Foundations (1947), Samuelson (1974) afirma que "para que a análise seja útil ela tem que fornecer informações a respeito do modo em que nossas quantidades de equilíbrio irão variar como resultado das variações dos parâmetros tomados como dados independentes" (p. 257). Matematicamente, formulamos o problema através de um sistema de n equações

$$f^i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \; i = 1, \ldots, n,$$

onde introduzimos explicitamente certos dados, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, sob a forma de parâmetros, que, ao mudarem, provocam variações nas variáveis $(x_1, \ldots x_n)$. O conjunto de equilíbrio, ou seja, o conjunto dos pontos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f^i(x, y) = 0, \; i = 1, \ldots, n,$$

pode, sob certas condições, ser localmente representado por n funções

$$x_1(y), \ldots, x_n(y), \; i = 1, \ldots, n.$$

As variações das quantidades de equilíbrio em função dos parâmetros, $\frac{dx_i}{dy_j}$, são obtidas por meio do sistema

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f^1}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dy_j} + \ldots + \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dy_j} = -\frac{\partial f^1}{\partial y_j} \\
\cdots \\
\frac{\partial f^n}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dy_j} + \ldots + \frac{\partial f^n}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dy_j} = -\frac{\partial f^n}{\partial y_j}.
\end{gathered}
$$

Em geral, as equações $f^i(x; y) = 0;\ i = 1; \ldots; n$; resultam das condições de primeira ordem do lagrangeano implicado num problema de otimização parametrizada. As condições de segunda ordem, que expressam as condições de convexidade da função f, servem para analisar os sinais das derivadas $\frac{dx_i}{dy_j}$.

A continuidade está associada a uma questão mais geral que àquela da estática comparativa. Neste caso, a análise está restrita à estabilidade das variáveis em relação aos parâmetros.

1.2 Correspondências

Em problemas de otimização, pontos ótimos podem não ser únicos. Para cada conjunto de valores dos parâmetros podemos ter inúmeras soluções e portanto a relação que associa os paramêtros aos pontos pode não ser função.

Na década de 1930, Boulingand, Kuratowski e Blanc (Aubin e Frankowska, 1990 e Rockafellar, 1998) estenderam o conceito de continuidade de funções para relações.

Relações aparecem na literatura matemática e econômica com designações diferentes. Correspondences, set-valued functions, multivalued functions, multifunctions, point-to-set maps são algumas das expressões empregadas. Neste trabalho, adotamos a denominação "correspondência". Formalmente, uma correspondência $F : X \longrightarrow Y$, do conjunto X no conjunto Y, é uma parte do cartesiano $X \times Y$, isto é,

$$F \subseteq X \times Y.$$

Funções $f : X \rightarrow Y$ são um tipo particular de correspondência de X em Y tal que a cada $x \in X$ existe apenas um $y \in Y$ associado, isto é, se

$$(x, y), (x, y') \in f \rightarrow y = y'.$$

Dada uma correspondência $F : X \longrightarrow Y$, definimos dois tipos diferentes de imagens inversas de $B \subseteq X$:

$$F^-(B) = \{x \in X | F(x) \cap B \neq \emptyset\},$$
$$F^+(B) = \{x \in X | F(x) \subseteq B\}.$$

$F^-(B)$, $F^+(B)$ são ditas imagens inversa inferior e superior, respectivamente.

Os principais conceitos de continuidade para correspondências são os de hemicontinuidade inferior e hemicontinuidade superior. Intuitivamente, o significado da hemicontinuidade inferior num ponto x_0 é que em torno de x_0 os conjuntos $F(x)$ não podem ser muito "menores" que o conjunto $F(x_0)$. O significado da hemicontinuidade superior num ponto x_0 é que em torno de x_0 os conjuntos $F(x)$ não podem ser muito "maiores" que $F(x_0)$. Como dizem Hildebrand e Kirman (1988), num caso os conjuntos $F(x)$ não podem "implodir" e no outro não podem "explodir".

Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que F é hemicontínua superior (uhc) em $x_0 \in X$ se para toda a vizinhança aberta $V \subseteq Y$ de $F(x_0)$, existe vizinhança aberta $U \subseteq X$ de x_0 tal que se $x \in U$ então $F(x) \subseteq V$, isto é, as imagens inversas superiores de vizinhanças abertas de $F(x_0)$ são vizinhanças abertas de x_0. De maneira similar, dizemos que F é hemicontínua inferior(lhc) em x_0 se para todo aberto $V \subseteq Y$ tal que

$F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ existe vizinhança aberta $U \subseteq X$ de x_0 tal que se $x \in U$ então $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Em outras palavras, as imagens inversas inferiores de abertos que interceptam $F(x_0)$ são vizinhanças abertas de x_0. Se diz que F é hemicontínua (hc) em x_0 se for uhc e lhc em x_0.

Dizemos que F é hemicontínua superior em X se for hemicontínua superior em todos os pontos de X. Igualmente, se diz que F é hemicontínua inferior em X se for hemicontínua em todos os pontos. Neste caso, podemos caracterizar a hemicontinuidade superior dizendo que F é hemicontínua superior se a imagem inversa superior $F^+(G)$ de todo o aberto G de Y é aberto de X e F é hemicontínua inferior se a imagem inversa inferior $F^-(G)$ de todo o aberto G de Y é aberto de X.

Se F for uma função então a hemicontinuidade inferior e superior são ambas equivalentes à continuidade de F.

Se $F(x)$ for um conjunto fechado ou compacto para todo $x \in X$, dizemos que F é valor-fechado ou valor-compacto. Se Y for um espaço vetorial e $F(x)$ for convexo para todo $x \in X$, dizemos que F é valor-convexo.

Se o gráfico de F,

$$\mathrm{graf}(F) = \overline{F} = \{(x, y) \in X \times Y \,|\, y \in F(x)\},$$

é um subconjunto fechado de $X \times Y$ dizemos que F é fechada. Se X e Y são espaços vetoriais e $\mathrm{graf}(F)$ for convexo, dizemos que F é convexa.

Os resultados mais importantes sobre correspondências e que estaremos utilizando ao longo do texto estão abaixo.

Sejam X, Y e Z conjuntos. Dadas duas correspodências $F_1 : X \to Y$ e F_2 :

$Y \to Z$ definimos a composição $F_2 \circ F_1 : X \to Z$ através de

$$(F_2 \circ F_1)(x) = \bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y).$$

Não é difícil observar que

$$(F_2 \circ F_1)^-(B) = F_1^-\left(F_2^-(B)\right)$$

e

$$(F_2 \circ F_1)^+(B) = F_1^+\left(F_2^+(B)\right).$$

Podemos mostrar que se F_1 e F_2 são hemicontínuas inferiores então $F_2 \circ F_1$ é hemicontínua inferior. Igualmente, se F_1 e F_2 são hemicontínuas superiores então $F_2 \circ F_1$ é hemicontínua superior.

Um espaço topológico X é dito T_1 se para todos os $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$ tais que $x_1 \neq x_2$ existem subconjuntos abertos U_1 e U_2 de X tais que

$$x_1 \in U_1 \text{ e } x_1 \notin U_2$$

e

$$x_2 \notin U_1 \text{ e } x_2 \in U_2.$$

Caso seja sempre possível determinar U_1 e U_2 disjuntos, dizemos que o espaço X é de Hausdorff. Um espaço topológico X é dito regular ou T_3 se for T_1 e se para todo o ponto $x \in X$ e todo subconjunto fechado F de X, existem subconjuntos abertos disjuntos U e V de X tais que

$$x \in U \text{ e } F \subseteq V.$$

Neste trabalho, os espaços topológicos mencionados são todos T_3.

Caso as topologias de X e Y satisfaçam o primeiro axioma da enumerabilidade, isto é, cada ponto do espaço tenha uma base de vizinhanças enumerável, então podemos caracterizar a hemicontinuidade inferior e superior através de seqüências. Este é o caso de espaços métricos, por exemplo.

<u>Teorema 1.1</u>

i) $F : X \longrightarrow Y$ é hemicontínua inferior em $\overline{x}$ se e só se para toda seqüência

$$x_n \to \overline{x} \text{ e } \overline{y} \in F(\overline{x})$$

existe uma subseqüência x_{n_k} e uma seqüência $y_{n_k} \in F(x_{n_k})$ tal que

$$y_{n_k} \to \overline{y}.$$

ii) $F : X \longrightarrow Y$ é valor-compacto. F é hemicontínua superior em $\overline{x}$ se e só se para todas seqüências

$$x_n \to \overline{x} \text{ e } y_n \in F(x_n)$$

existe subseqüência $y_{n_k} \in F(x_{n_k})$ tal que y_{n_k} converge para algum ponto em $F(\overline{x})$, isto é, existe $\overline{y} \in F(\overline{x})$ tal que

$$y_{n_k} \to \overline{y}.$$

■

<u>Teorema 1.2</u>

Se $F : X \longrightarrow Y$ é hemicontínua superior e valor-fechado então F é fechada. ■

<u>Teorema 1.3</u>

Sejam $F_1, F_2 : X \longrightarrow Y$. F_1 é fechada e F_2 é hemicontínua superior e valor-compacto então

$$F(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$$

é hemicontínua superior e valor-compacto. ■

Dos dois teoremas acima podemos obter os corolários abaixo.

Corolário 1.4

Seja Y um espaço compacto. $F : X \longrightarrow Y$ é hemicontínua superior e valor-fechado se e só se F é fechada. ■

Corolário 1.5

Se $F : X \longrightarrow Y$ é uma correspondência com gráfico compacto então F é hemicontínua superior e valor-compacto. ■

Dada a correspondência $F : X \longrightarrow Y$ definimos a inversa fraca

$$F^{-1} : Im(F) \subset Y \longrightarrow X$$

como

$$F^{-1}(y) = \{x \in X | y \in F(x)\},$$

onde

$$Im(F) = \{y \in Y | \exists x \in X \text{ tal que } y \in F(x)\}.$$

Dizemos que $Im(F)$ é a imagem de F.

Observe que

$$graf(F^{-1}) = \{(y, x) | (x, y) \in graf(F)\}.$$

Portanto, F tem gráfico fechado se e só se F^{-1} tem gráfico fechado; F tem gráfico compacto se e só se F^{-1} tem gráfico compacto. Da mesma maneira, F tem gráfico convexo se e só se F^{-1} tem gráfico convexo, se X e Y são espaços vetoriais.

Corolário 1.6

$F : X \longrightarrow Y$ é uma correspondência com gráfico compacto então F^{-1} é hemicontínua superior e valor-compacto. ■

Dadas n correspondências $F_1 : X \longrightarrow Y_1, \ldots, F_n : X \longrightarrow Y_n$ definimos o produto cartesiano de $F_1, \ldots, F_n$,

$$F_1 \times \cdots \times F_n : X \to Y_1 \times \cdots \times Y_n;$$

por $(F_1 \times \cdots \times F_n)(x) = F_1(x) \times \cdots \times F_n(x)$.

Teorema 1.7

Se $F_1 : X \to Y_1, \ldots, F_n : X \to Y_n$ são hemicontínuas superiores e valores-compactos então $F_1 \times \cdots \times F_n$ é semicontínua superior e valor-compacto. ■

Teorema 1.8

Se $F_1 : X \to Y_1, \ldots, F_n : X \to Y_n$ são hemicontínuas inferiores então $F_1 \times \cdots \times F_n$ é hemicontínua inferior. ■

As demonstrações dos teoremas anteriores estão em Ichiishi (1983), Aubin (1982), Aubin e Frankowska (1990), Bank (1983), Berge (1997), Hildebrand e Kirmann (1988).

1.3 O Teorema do Máximo

Seja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $F : X \to Y$ uma correspondência. No caso geral, X e Y são espaços topológicos. Definimos um problema de otimização parametrizada como

$$m(x) = \inf \{f(x, y) | y \in F(x)\}$$

ou

$$M(x) = \sup \{f(x, y) | y \in F(x)\};$$

onde para cada parâmetro $x \in X$, $F(x) \subseteq Y$. Associadas às funções acima temos duas correspondências: $\arg\min : X \to Y$ e $\arg\max : X \to Y$ tais que

$$\arg\min(x) = \{y^* \in F(x) | f(x, y^*) = m(x)\}$$

e

$$\arg\max(y) = \{y^* \in F(x) | f(x; y^*) = M(x)\}:$$

Nos casos mais comuns, X e Y são subconjuntos dos espaços R^n. Em estática comparativa, dada a diferenciabilidade de f, os teoremas de envelope nos fornecem as derivadas de m e M em relação ao parâmetro x. Se temos a continuidade de f podemos estudar a continuidade de M e m.

Em relação às correspondências $\arg\min(x)$ e $\arg\max(x)$, no caso geral, não temos como expressá-las localmente através de equações

$$f^i(x; y^*) = 0; i = 1; \ldots; n$$

para $y^* \in \arg\min(x)$ ou $y^* \in \arg\max(x)$ e a análise destas soluções em relação aos parâmetros não pode ser feita via os procedimentos da estática comparativa.

O teorema do máximo de Berge assegura que se f é contínua e F é uma correspondência não-vazia, valor-compacto e hemicontínua em Y então m e M são contínuas em X e $\arg\min$ e $\arg\max$ são hemicontínuas superiores.

<u>Teorema do Máximo</u>(Berge, 1962)

Sejam dois espaços topológicos X e Y, onde Y é um espaço T_3. Se $f : X \times Y \longrightarrow R$ é função contínua e $F : X \longrightarrow Y$, correspondência hemicontínua tal que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ e valor-compacto então

$$M(x) = \max_{y \in F(x)} f(x; y);$$

$$m(x) = \min_{y \in F(x)} f(x; y)$$

são contínuas e

$$\arg\max(x) = \{y \in F(x) | f(x; y) = M(x)\};$$

$$\arg\min(x) = \{y \in F(x) | f(x; y) = m(x)\}$$

são hemicontínuas superiores e valores-compactos.

Chamemos indistintamente $M(x)$ ou $m(x)$ por $\varphi(x)$ e $\arg\max(x)$ ou $\arg\min(x)$ por $\Phi(x)$.

A demonstração do teorema do máximo se resume em mostrar que a correspondência $\Phi(x)$ é fechada. Como

$$\Phi(x) = \Phi(x) \cap F(x);$$

onde Φ é fechada, F é hemicontínua superior e valor-compacto então concluímos que Φ é hemicontínua superior, pelo teorema 1.3.

A continuidade de φ pode ser concluída utilizando diretamente a continuidade de f e a hemicontinuidade de F ou utilizando a hemicontinuidade superior de Φ e a continuidade de f.

No capítulo 3, obtemos uma prova do teorema do máximo através de um teorema devido a Walker(1979).

O teorema do máximo trata dois problemas. Um dos problemas é demonstrar a continuidade das funções valor-ótimo φ. Outro problema é demonstrar a hemicontinuidade superior de Φ. Este último problema é substituído pelo problema de demonstrar que Φ é fechada. Estes problemas se relacionam. Se sabemos que Φ é hemicontínua superior e que f é contínua concluímos a continuidade de φ. Da mesma maneira, se sabemos que φ e f são contínuas podemos concluir que Φ é fechada. Se existe uma inclusão G hemicontínua superior e valor-compacto de Φ então Φ é hemicontínua superior, pelo teorema 1.3.

As hipóteses do teorema do máximo são condições suficientes e não necessárias.

Em certas aplicações, tanto a hipótese da continuidade de f quanto a hipótese de hemicontinuidade da F são demasiadamente restritivas. Por exemplo, Mandy(1994) observa que as exigências de regularidade, monoticidade e convexidade no conjunto de requerimentos de insumos não garantem a hemicontinuidade da correspondência que determina o conjunto das restrições no problema de minimização de custos. Outra observação de Mandy, referente ao mesmo problema é em relação à discriminação de preços. Se a função objetivo é descontínua o teorema de Berge não é aplicável, em princípio. Como veremos no capítulo 3 é possível generalizar este resultado para funções objetivo descontínuas.

Neste capítulo foram apresentados os conceitos básicos empregados na tese. Vimos o teorema de Berge que pode ser empregado, sob algumas hipóteses, para assegurar a continuidade da função custo mínimo em relação ao produto assim como também a hemicontinuidade superior da demanda por insumos. Este teorema constitui a base para um novo resultado utilizado neste estudo. Esta versão do teorema do máximo está no capítulo 3.

No capítulo 2, a seguir, apresentamos as formas básicas que atribuimos às funções de custo e às correspondências que representam as tecnologias.

Capítulo 2

Funções e Correspondências Monótonas

Neste capítulo introduzimos a noção de ordem parcial fechada num espaço topológico, os conceitos de funções monótonas não-decrescentes semicontínuas e de funções monótonas não-decrescentes rígidas em relação aos contornos determinados pela ordem.

Na seção 2.1, definimos espaços topológicos parcialmente ordenados e os contornos de pontos de tais espaços. Provamos algumas propriedades básicas. Os contornos inferiores e superiores de um ponto não esgotam totalmente o espaço se a ordem definida não é completa. Por exemplo, este é o caso do R^n em relação à ordem $\leq$. Afirmações que relacionam propriedades da função em determinado ponto com propriedades dos contornos a ele relativos não permitem em princípio a obtenção de resultados sobre os pontos que não são comparáveis com o ponto inicial. Esta é a principal dificuldade relacionada às funções de custo. A propriedade mais básica de uma função de custo é ser monótona não-decrescente sobre vetores de insumos comparáveis pela ordem parcial $\leq$ em R^n. Nenhuma afirmação é feita quando os vetores não são comparáveis.

Na seção 2.1, definimos ponto de máximo de um subconjunto S em relação à ordem parcial.

Dado um espaço topológico parcialmente ordenado definimos uma noção que chamamos de propriedade da interseção topológica dos contornos. A definição desta categoria de espaços topológicos não existe na literatura e é própria do presente trabalho. Na seção 2.2, a partir da noção anterior, provamos no teorema 2.6 que uma função monótona não-decrescente, definida num espaço topológico parcialmente ordenado, semicontínua inferior no ponto em relação ao contorno inferior deste ponto é semicontínua inferior nele.

De maneira similar, definimos correspondências mónotonas não-crescentes na seção 2.4. Mostramos que estas correspondências são hemicontínuas inferiores se forem hemicontínuas inferiores em relação aos contornos superiores e hemicontínuas superiores se forem hemicontínuas superiores em relação aos contornos inferiores. Estes resultados são os teoremas 2.15 e 2.16

Na seção 2.5, introduzimos a noção de correspondência localmente não-disjunta. Mostramos - teorema 2.18 - que correspondências definidas nos espaços R^n com gráficos convexos que possuem a propriedade anterior são hemicontínuas inferiores. Usamos este teorema para obter a hemicontinuidade inferior da inversa fraca nos corolários 2.20 e 2.21. No corolário 2.19, obtemos uma generalização de uma observação de Dutta e Mitra(1989).

Convexidade é um conceito algébrico que resulta numa propriedade topológica básica. Se um segmento possui um extremo no interior e o outro extremo na fronteira de um subconjunto convexo então os pontos intermediários estão no interior do subconjunto. Esta propriedade permite os resultados importantes da teoria da otimização. Todavia, implica severas restrições sobre as classes de funções tratadas. Por exemplo, uma função convexa limitada na vizinhança de um ponto no interior de seu domínio é contínua no interior deste domínio. Esta pode ser uma propriedade bastante restritiva do ponto de vista da teoria econômica. Não há em princípio razão para supormos que custos limitados na vizinhança de determinado vetor de insumos determinem a continuidade destes custos em todo o plano de produção. Entretanto, a análise de alguns argumentos utilizados nos permite observar a validade da argumentação sob condições mais gerais. Por exemplo, para certos resultados não é necessária a concavidade ou convexidade da função mas apenas a concavidade ou convexidade em alguma direção.

Utilizando a existência da ordem parcial, definimos a noção do que chamamos uma função rígida na seção 2.3. Este conceito generaliza as noções usuais de funções côncavas e convexas para espaços topológicos ordenados. Mostramos que funções monótonas rígidas são semicontínuas em espaços que possuam a propriedade da interseção topológica dos contornos. Este resultado é o teorema 2.11.

Este resultado generaliza um outro anterior de Kahn e Mitra(1984), McKenzie(1986), Dutta e Mitra(1989). Veja o Corolário 2.13. Intuitivamente, a noção de função inferiormente rígida procura traduzir a idéia que se dado um vetor de insumos existe um vetor de insumos com custo inferior ao custo do vetor dado então fixado um valor de custo intermediário haverá pelo menos um vetor com quantidades menores de insumos com custo no mínimo igual ao valor intermediário fixado.

2.1 Espaços Topológicos Ordenados

O trabalho clássico sobre espaços topológicos com uma ordem parcial é a monografia Topology and Order de Leopoldo Nachbin (1950, 1965). O artigo de Eilenberg (1941) Ordered Topological Spaces não tem interesse para nós pois o autor supõe uma ordem completa.

Seja um espaço topológico X e uma ordem parcial $\leq$ definida neste espaço. Na literatura, em geral, diz-se que X é um espaço topológico ordenado se o gráfico da ordem $\leq$ é um subconjunto fechado de $X \times X$, isto é,

$$M = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \leq x_2\}$$

é fechado.

Por enquanto, não estamos supondo que X seja ordenado no sentido acima: X é um espaço topológico com uma ordem parcial.

Sejam os conjuntos

$$\inf M(x_0) = \{x \in X | x < x_0\}$$

e

$$\sup M(x_0) = \{x \in X | x_0 < x\}.$$

Os conjuntos $\inf M(x_0)$ e $\sup M(x_0)$ são ditos os contornos inferior e superior do ponto x_0, respectivamente. Observe que estamos definindo estes contornos em relação a uma ordem parcial definida em X e não em relação a uma preferência. Os contornos definidos em relação a ordens ou preferências guardam uma relação óbvia mas são conceitualmente diversos. Observe ainda que contornos definidos em relação a preferências esgotam o espaço,

$$X \setminus \{x_0\} = \inf M(x_0) \cup \sup M(x_0);$$

pois preferências são completas. Em relação a ordens isto não é necessariamente verdadeiro exceto se for completa.

Vamos supor que

$$\inf M(\overline{x}) = \{x \in X | x < \overline{x}\}$$

e

$$\sup M(\overline{x}) = \{x \in X | \overline{x} < x\}$$

são abertos para todo $\overline{x} \in X$.

<u>Teorema 2.1</u>

Seja X um espaço topológico com uma ordem parcial tal que vale a propriedade acima.

Suponhamos que

$$x_1 < x_0$$

então existem vizinhanças abertas $U(x_1)$ e $U(x_0)$ de x_1 e x_0 respectivamente tal que $U(x_0) \times U(x_1) \subseteq M^c$.

<u>Prova</u>

Suponhamos que

$$x_1 < x_0.$$

Digamos que existe $\bar{x}$ tal que $x_1 < \bar{x} < x_0$ então $\sup M(\bar{x})$ e $\inf M(\bar{x})$ são vizinhanças abertas de x_0 e x_1, respectivamente. Digamos que $(z_0, z_1) \in \sup M(\bar{x}) \times \inf M(\bar{x})$ então $z_1 < \bar{x} < z_0$. Logo, $(z_0, z_1) \in M^c$, isto é, $\sup M(\bar{x}) \times \inf M(\bar{x}) \subseteq M^c$.

Digamos que não existe $\bar{x}$ tal que $x_1 < \bar{x} < x_0$ então $\sup M(x_1)$ e $\inf M(x_0)$ são vizinhanças abertas de x_0 e x_1, respectivamente. Digamos que $(z_0, z_1) \in \sup M(x_1) \times \inf M(x_0)$. Se $z_0 \le z_1$ então $x_1 < z_0 \le z_1 < x_0$, o que é absurdo pois estamos supondo que não existe $\bar{x}$ tal que $x_1 < \bar{x} < x_0$. Logo, $(z_0, z_1) \in M^c$, isto é, $\sup M(x_1) \times \inf M(x_0) \subseteq M^c$. ■

Observe que não estamos afirmando que existem vizinhanças $U(x_1)$ e $U(x_0)$ de x_1 e x_0 respectivamente tal que $z_0 \in U(x_0)$ e $z_1 \in U(x_1)$ então $z_0 < z_1$. Esta última afirmação só é válida se existe $\bar{x}$ tal que

$$x_1 < \bar{x} < x_0;$$

pois, neste caso, podemos fazer $U(x_0) = \sup M(\bar{x})$ e $U(x_1) = \inf M(\bar{x})$. Esta hipótese será necessária posteriormente.

Dado $S \subseteq X$, dizemos que um ponto $\bar{x} \in X$ é um ponto de máximo de S se não existe $x \in S$ tal que

$$\bar{x} < x.$$

Pontos de máximo de S podem existir ou não. Observe que afirmar que $\bar{x}$ é um ponto de máximo de S não é afirmar que

$$x \leq \bar{x}, \forall x \in S;$$

pois a ordem não é necessariamente completa. A última afirmação acima só é válida para os pontos de S que são comparáveis com $\bar{x}$.

Dizemos que $C \subseteq X$ é um subconjunto monótono não-decrescente se

$$x_1 \in C \text{ e } x_1 \leq x_2 \text{ então } x_2 \in C.$$

Analogamente, dizemos que um subconjunto $D \subseteq Y$ é monótono não-crescente se

$$x_2 \in D \text{ e } x_1 \leq x_2 \text{ então } x_1 \in D.$$

Se o subconjunto $E \subseteq X$ for não-decrescente ou não-crescente, diremos que X é monótono.

Dado um subconjunto qualquer $V \subseteq X$, definimos o fecho monótono não-decrescente de V como

$$c(V) = \cap C$$

tal que C é monótono não-decrescente e $V \subseteq C$. Da mesma maneira definimos o fecho monótono não-crescente de V como

$$d(V) = \cap D$$

tal que D é monótono não-crescente e $V \subseteq D$. Facilmente se verifica que $c(V)$ e $d(D)$ são monótonos. Seja $x_1 \in c(V)$. Então, $x_1 \in C$ para todo C monótono não-decrescente tal que $V \subseteq C$. Caso $x_1 \leq x_2$ então $x_2 \in C$ para todo C monótono não-decrescente tal que $V \subseteq C$, ou seja, $x_2 \in c(V)$. Portanto, $c(V)$ é monótono não-decrescente.

Lema 2.2

$$c(V) = V \cup \{x \notin V \mid \exists x_0 \in V; x_0 < x\}$$

e

$$d(V) = V \cup \{x \notin V \mid \exists x_0 \in V; x < x_0\}$$

Prova

Sejam x_1 e x_2 tal que $x_1 \in V \cup \{x \notin V \mid \exists x_0 \in V; x_0 < x\}$ e $x_1 < x_2$. Se $x_1 \in V$ e $x_2 \notin V$ então $x_2 \in \{x \notin V \mid \exists x_0 \in V; x_0 < x\}$. Portanto, $x_2 \in V \cup \{x \notin V \mid \exists x_0 \in V; x_0 < x\}$. Se $x_1; x_2 \notin V$ então existe $x_0 \in V$ tal que $x_0 < x_1$ então $x_0 < x_2$ o que implica que $x_2 \in V \cup \{x \notin V \mid \exists x_0 \in V; x_0 < x\}$. Portanto, $V \cup \{x \notin V \mid \exists x_0 \in V; x_0 < x\}$ é monótono não-decrescente. Por outro lado se C é monótono não-decrescente e $V \subseteq C$ então

$$V \cup \{x \notin V \mid \exists x_0 \in V; x_0 < x\} \subseteq C.$$

De maneira análoga se prova a afirmação sobre $d(V)$. ■

Teorema 2.3

Se V é aberto então $c(V)$ e $d(D)$ são abertos.

Prova

Seja $x_1 \in c(V)$. Se $x_1 \in V \subseteq c(V)$ então V é uma vizinhança aberta de x_1 contida em $c(V)$. Se $x_1 \notin V$ então existe $x_0 \in V$ tal que $x_0 < x_1$ então $x_1 \in \sup M(x_0) \subseteq c(V)$. De maneira similar se prova a afirmação sobre $d(V)$.

Também, podemos obter o resultado anterior observando que

$$c(V) = V \cup \left(\bigcup_{x_0 \in V} \sup M(x_0) \right).$$

Seja $x_3 \in V$. $\forall x \in X$ tal que $x_3 < x$ então $x \in c(V)$. Portanto, $\sup M(x_3) \subseteq c(V)$. Por outro lado, se $x_3 \in c(V)$ e $x_3 \notin V$ então existe $x_0 \in V$ tal que $x_0 < x_3$ o que implica que $x_3 \in \sup \mathcal{M}(x_0)$. Como cada $\sup \mathcal{M}(x_0)$ é aberto então $c(V)$ é aberto. De maneira análoga, temos que

$$d(V) = V \cup \left(\bigcup_{x_0 \in V} \inf \mathcal{M}(x_0) \right).$$

■

Teorema 2.4

Seja X um espaço topológico tal que os contornos são abertos. Uma ordem em X é fechada se e só se para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{M}^c$ existem uma vizinhança aberta não-decrescente de x_1 e uma vizinhança aberta não-crescente x_2 que são disjuntas.

Prova

Digamos que $(x_1, x_2) \in \mathcal{M}^c$. Primeiramente observemos que se x_1 e x_2 são comparáveis o resultado é imediato. Neste caso, $x_2 < x_1$.Se existe $\overline{x} \in Y$ tal que $x_2 < \overline{x} < x_1$ então $x_2 \in \inf \mathcal{M}(\overline{x})$, $x_1 \in \sup \mathcal{M}(\overline{x})$. Se não existe $\overline{x} \in X$, tal que $x_2 < \overline{x} < x_1$ então $x_2 \in \inf \mathcal{M}(x_1)$, $x_1 \in \sup \mathcal{M}(x_2)$.

No caso geral como $(x_1, x_2) \in \mathcal{M}^c$ e $\mathcal{M}^c$ é aberto então existem $V(x_1)$ e $V(x_2)$ tal que $V(x_1) \times V(x_2) \subseteq \mathcal{M}^c$. Consideremos $c(V(x_1))$ e $d(V(x_2))$. Se existe

$$x \in c(V(x_1)) \cap d(V(x_2))$$

então existe $z_1 \in V(x_1)$ tal que $z_1 \leq x$ e existe $z_2 \in V(x_2)$ tal que $x \leq z_2$. Mas, $z_1 \leq x \leq z_2$ implica que $(z_1, z_2) \in V(x_1) \times V(x_2) \cap \mathcal{M}$ e isto é absurdo pois $V(x_1) \times V(x_2) \subseteq \mathcal{M}^c$. Logo, $c(V(x_1))$ e $d(V(x_2))$ são disjuntos. Pelo teorema 2.3, $c(V(x_1))$ e $d(V(x_2))$ são abertos.

Por outro lado, se para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{M}^c$ existem uma vizinhança aberta $V(x_1)$ não-decrescente e uma vizinhança aberta $V(x_2)$ não-crescente disjuntas então $V(x_1) \times V(x_2) \subseteq \mathcal{M}^c$ Pois, se $(z_1, z_2) \in (V(x_1) \times V(x_2)) \cap \mathcal{M}$ então $z_1 \leq z_2$, como $V(x_1)$ é não-decrescente e $z_1 \in V(x_1)$ então $z_2 \in V(x_1)$ o que é absurdo pois $V(x_1)$ e $V(x_2)$ são disjuntas. Portanto, M^c é aberto, ou seja, a ordem é fechada. ■

Digamos que a ordem é completa. Neste caso, os contornos abertos implicam ordem fechada. Digamos que $(x_1, x_2) \in M^c$. então $x_2 < x_1$.Se existe $\bar{x} \in X$ tal que $x_2 < \bar{x} < x_1$ então $x_2 \in \inf M(\bar{x})$, $x_1 \in \sup M(\bar{x})$. Se não existe $\bar{x} \in X$, tal que $x_2 < \bar{x} < x_1$ então $x_2 \in \inf M(x_1)$, $x_1 \in \sup M(x_2)$.

Debreu(1952) chama de uma topologia natural em X aquela em relação a qual os complementares dos contornos acima são fechados. A observação a fazer é que as definições de Debreu são referentes a uma preferência, que ele chama de ordem, e as nossas definições são com relação a uma ordem parcial.

Uma conseqüência do teorema anterior é que um espaço topológico ordenado com contornos abertos é de Hausdorff. Dados dois pontos distintos x_1 e x_2 sempre existem vizinhança abertas disjuntas de cada um deles pois $(x_1, x_2) \in M^c$ ou $(x_2, x_1) \in M^c$.

2.2 Funções Monótonas Não-decrescentes

Se $f : D \subseteq Y \to R$ é tal que

$$x_1 \leq x_2 \text{ então } f(x_1) \leq f(x_2);$$

dizemos que f é monótona não-decrescente.

Os limites

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0)$$

e

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0 + 0)$$

chamamos respectivamente limites em relação ao contorno inferior e superior em x_0. Como $\inf M(x_0)$ é aberto, diremos que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \inf M(x_0)}} f(x)$$

existe e é igual a $f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança aberta $U(x_0)$ tal que se $x \in U(x_0) \cap \inf M(x_0)$ então $|f(x) - f(x_0 - 0)| < \varepsilon$. De maneira análoga definimos $f(x_0 + 0)$. Estes limites sempre existem para funções monótonas.

<u>Teorema 2.5</u>

Se f é monótona não-decrescente então $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ existem e

$$f(x_0 - 0) \le f(x_0 + 0).$$

<u>Prova:</u>

Se $x < x_0$ então $f(x) \le f(x_0)$. Portanto, existe

$$l = \sup\{f(x) | x < x_0\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon$ tal que $x_\varepsilon < x_0$ e $l - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$. Se

$$x \in V(x_0) = \{x | x_\varepsilon < x < x_0\}$$

então
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon;$$
ou seja, $l = f(x_0 - 0)$.

De maneira análoga, podemos mostrar que

$$f(x_0 + 0) = \inf \{f(x) | x_0 < x\}.$$

Finalmente, $f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0)$. ■

Facilmente, observa-se que $x_1 \le x_2$ implica

$$f(x_1 - 0) \le f(x_2 - 0) \text{ e } f(x_1 + 0) \le f(x_2 + 0)$$

pois $\inf M(x_1) \subseteq \inf M(x_2)$ e $\sup M(x_2) \subseteq \sup M(x_1)$.

Como observamos anteriormente, o principal problema neste capítulo é como estabelecer determinada propriedade da função em determinado ponto quando a propriedade é afirmada apenas em relação aos contornos. No nosso caso particular, a questão é sob quais hipóteses a continuidade em relação aos contornos implica a continuidade no ponto.

Dizemos que f é semicontínua inferior(lsc) em relação ao contorno inferior em x_0 se dado $\lambda \in R$ tal que $f(x_0) > \lambda$, existe $V(x_0)$, vizinhança aberta de x_0, tal que se $x \le x_0$ e $x \in V(x_0)$ então $f(x) > \lambda$. Dizemos que f é semicontínua superior(usc) em relação ao contorno inferior em x_0 se dado $\lambda \in R$ tal que $f(x_0) < \lambda$, existe $V(x_0)$, vizinhança aberta de x_0, tal que se $x \le x_0$ e $x \in V(x_0)$ então $f(x) < \lambda$. Definimos semicontinuidade em relação ao contorno superior de maneira similar.

Dizemos que um espaço topológico ordenado X possui a propriedade da interseção topológica dos contornos se para todo $x_0 \in Y$ e toda a vizinhança aberta $V(x_0)$ então

$$V(x_0) \cap \inf M(x_0) \neq \emptyset \text{ e } V(x_0) \cap \sup M(x_0) \neq \emptyset.$$

Intuitivamente, estamos dizendo que os contornos inferior e superior de cada ponto estão tão "próximos" quanto quisermos.

A partir de agora, nossos espaços topológicos são ordenados, os contornos são abertos e vale a propriedade acima.

A definição desta categoria de espaços topológicos não existe na literatura e é própria do presente trabalho. Os resultados abaixo são fundamentais para os capítulos posteriores.

Teorema 2.6

Seja X um espaço com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Se f é monótona não-decrescente e semicontínua inferior em relação ao contorno inferior em x_0 então f é semicontínua inferior em x_0.

Prova:

Digamos que $\lambda < f(x_0)$. $\exists V(x_0)$ tal que se $x \leq x_0$ e $x \in V(x_0)$ então $\lambda < f(x)$. Como

$$\inf M(x_0) \cap V(x_0) \neq \emptyset:$$

escolhamos $\overline{x}$ tal que $\overline{x} < x_0$ e $\overline{x} \in V(x_0)$. O subconjunto $U(x_0) = \{x \in Y | \overline{x} < x\}$ é uma vizinhança aberta de x_0. Se $x \in U(x_0)$ então $f(x) \geq f(\overline{x}) > \lambda$ pois f é monótona não-decrescente e $\overline{x} \in V(x_0)$. Esta última afirmação é equivalente a semicontinuidade inferior de f em x_0.

Observe que se

$$\inf M(x_0) \cap V(x_0) = \emptyset$$

teríamos que exigir que a ordem fosse completa. Neste caso, se $x \in V(x_0)$ e $x \geq x_0$ então $f(x) \geq f(x_0) > \lambda$. Por hipótese, se $x \leq x_0$ então $\lambda < f(x)$. Portanto, f é semicontínua inferior em x_0. ■

<u>Teorema 2.7</u>

Seja X um espaço com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Se f é monótona não-decrescente e semicontínua superior em relação ao contorno superior em x_0 então f é semicontínua superior em x_0.

<u>Prova:</u>

Digamos que $f(x_0) < \lambda$. $\exists V(x_0)$ tal que se $x_0 \leq x$ e $x \in V(x_0)$ então $f(x) < \lambda$. Como

$$\sup M(x_0) \cap V(x_0) \neq \emptyset,$$

escolhamos $\bar{x}$ tal que $x_0 < \bar{x}$ e $\bar{x} \in V(x_0)$. O subconjunto $U(x_0) = \{x \in Y \mid x < \bar{x}\}$ é uma vizinhança aberta de x_0. Se $x \in U(x_0)$ então $f(x) \leq f(\bar{x}) < \lambda$ pois f é monótona não-decrescente e $\bar{x} \in V(x_0)$. Esta última afirmação é equivalente a semicontinuidade superior de f em x_0. ■

Como anteriormente, se

$$\sup M(x_0) \cap V(x_0) = \emptyset$$

e exigíssemos que a ordem fosse completa, obteríamos o mesmo resultado. Se $x \in V(x_0)$ então $x \leq x_0$ o que implica $f(x) \leq f(x_0) < \lambda$ e f é semicontínua superior em x_0.

<u>Corolário 2.8</u>

Seja X um espaço com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Se f é monótona não-decrescente, semicontínua inferior em relação ao contorno inferior em x_0 e semicontínua superior em relação ao contorno superior em x_0 então f é contínua em x_0. ■

Teorema 2.9

Seja f monótona não-decrescente. f é semicontínua inferior em relação ao contorno inferior em x_0 se e só se

$$f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

f é semicontínua superior em relação ao contorno superior em x_0 se e só se

$$f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Prova

Por definição de $f(x_0 - 0)$ temos que

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0).$$

Suponhamos que f é semicontínua inferior em relação ao contorno inferior x_0. Digamos que $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ então existe uma vizinhança aberta $V(x_0)$ de x_0 tal que se $x < x_0$ e $x \in V(x_0)$ então $f(x_0 - 0) < f(x)$. Isto contradiz a definição de $f(x_0 - 0)$. Portanto,

$$f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Seja $\lambda < f(x_0) = f(x_0 - 0)$. Pela definição de $f(x_0 - 0)$, existe $x_\lambda < x_0$ tal que $\lambda < f(x_\lambda) \leq f(x_0 - 0)$. Se $x_\lambda < x \leq x_0$ então $\lambda < f(x_\lambda) \leq f(x)$, ou seja, f é semicontínua inferior em x_0 em relação ao contorno inferior. A outra afirmação prova-se de maneira análoga. ■

Corolário 2.10

Seja X um espaço com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Seja f monótona não-decrescente. f é contínua em x_0 se e só se

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

$\blacksquare$

2.3 Funções Rígidas Não-decrescentes

As definições de funções monótonas rígidas são próprias deste trabalho e não existem na literatura.

Seja $D \subseteq X$ monótono não-crescente. Seja $f : D \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona não-decrescente. Consideremos o conjunto dos pontos

$$\{x \in D \mid f(x) < f(x_0)\} = I(x_0)$$

Diremos que f é inferiormente rígida em $x_0 \in D$ se $I(x_0) = \emptyset$ ou se $I(x_0) \neq \emptyset$ então para todo $x_1 \in I(x_0)$, para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) \leq c < f(x_0)$$

então existe $\overline{x} \in D$, $x_1 \leq \overline{x} < x_0$ tal que $f(\overline{x}) \geq c$.

<u>Teorema 2.11</u>

Seja X um espaço com a propriedade da intersecção topológica dos contornos. Seja

$$f : D \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$$

monótona não-decrescente. Se f é inferiormente rígida em x_0 então f é semicontínua inferior em x_0.

<u>Prova:</u>

Digamos que $f(x_0) > \lambda$. Suponhamos que $I(x_0) \neq \emptyset$. Seja $x_1 \in I(x_0)$ com a propriedade acima. Como

$$\lim_{\mu \to 1^-} (1 - \mu) \cdot f(x_1) + \mu \cdot f(x_0) = f(x_0);$$

então existe $\mu; 0 < \mu < 1$ tal que

$$(1-\mu)\cdot f(x_1) + \mu \cdot f(x_0) > \lambda.$$

Como

$$f(x_1) \leq (1-\mu)\cdot f(x_1) + \mu\cdot f(x_0) < f(x_0)$$

então existe $\overline{x} \in D; x_1 \leq \overline{x} < x_0$ tal que

$$f(\overline{x}) \geq (1-\mu)\cdot f(x_1) + \mu\cdot f(x_0).$$

Se $x \in U(x_0) = \{x \in Y | \overline{x} < x < x_0\}$ então

$$f(x) \geq (1-\mu)\cdot f(x_1) + \mu\cdot f(x_0) > \lambda.$$

Logo, f é semicontínua inferior em x_0 em relação ao contorno inferior de x_0 o que implica f semicontínua inferior em x_0 pelo resultado provado anteriormente.

Digamos que $I(x_0) = \emptyset$. Neste caso, para todo $x_1 \in D$ tal que $x_1 < x_0$ temos $f(x_1) = f(x_0)$. Se

$$x \in U(x_0) = \{x \in X | x < x_0\}$$

então $f(x) = f(x_0) > \lambda$. Igualmente, neste caso f é semicontínua inferior em relação ao contorno inf $M(x_0)$. ■

Seja $C \subseteq X$ monótono não-decrescente. Seja $f : C \subseteq X \to \mathbb{R}$ monótona não-decrescente. Consideremos o conjunto dos pontos

$$\{x \in C | f(x_0) < f(x)\} = S(x_0)$$

Diremos que f é superiormente rígida em $x_0 \in C$ se $S(x_0) = \emptyset$ ou se $S(x_0) \neq \emptyset$ então para todo $x_1 \in S(x_0)$, para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) < c \leq f(x_1)$$

então existe $\bar{x} \in C$, $x_0 < \bar{x} \leq x_1$ tal que $f(\bar{x}) \leq c$.

<u>Teorema 2.12</u>

Seja X um espaço com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Seja

$$f : C \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$$

monótona não-decrescente. Se f é superiormente rígida em x_0 então f é semicontínua superior em x_0.

<u>Prova:</u>

Digamos que $f(x_0) < \lambda$. Suponhamos que $S(x_0) \neq \emptyset$. Seja $x_1 \in S(x_0)$ com a propriedade definida acima. Como

$$\lim_{\mu \to 0^+} (1 - \mu) \cdot f(x_0) + \mu \cdot f(x_1) = f(x_0);$$

então existe $\bar{\mu}$; $0 < \bar{\mu} \leq 1$ tal que

$$(1 - \bar{\mu}) \cdot f(x_0) + \bar{\mu} \cdot f(x_1) < \lambda:$$

Como

$$f(x_0) < (1 - \bar{\mu}) \cdot f(x_1) + \bar{\mu} \cdot f(x_0) \leq f(x_1)$$

então existe $\bar{x} \in D$; $x_0 < \bar{x} \leq x_1$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq (1 - \bar{\mu}) \cdot f(x_0) + \bar{\mu} \cdot f(x_1).$$

Se $x \in U(x_0) = \{x \in X | x_0 < x < \bar{x}\}$ então

$$f(x) \leq (1 - \mu) \cdot f(x_0) + \mu \cdot f(x_1) < \lambda:$$

Logo, f é semicontínua superior em x_0 em relação ao contorno superior de x_0 o que implica f semicontínua superior em x_0.

Digamos que $S(x_0) = \emptyset$. Neste caso, para todo $x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$ temos $f(x_0) = f(x_1)$. Se

$$x \in U(x_0) = \{x \in X | x < x_1\}$$

então $f(x) = f(x_0) < \lambda$. Igualmente, neste caso f é semicontínua superior em relação ao contorno sup $M(x_0)$. ■

O resultado abaixo de Kahn e Mitra (1984), Dutta e Mitra (1989) e McKenzie (1986) pode ser obtido como corolário dos nossos resultados anteriores.

<u>Corolário 2.13</u>

Seja $M : X \subseteq R^n_+ \to R$ monótona não-decrescente e côncava então M é semicontínua inferior.

<u>Prova:</u>

A propriedade da interseção topológica dos contornos é evidentemente válida para R^n_+ com a ordem parcial $\leq$. M é inferiormente rígida sendo côncava e monótona não-decrescente. Se

$$x_1 < x_0 \text{ e } f(x_1) \leq c < f(x_0)$$

então existe $\lambda \in [0; 1)$ tal que

$$c = (1 - \lambda) \cdot f(x_1) + \lambda \cdot f(x_0).$$

Como f é côncava então

$$f((1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda\cdot x_0) \geq (1-\lambda)\cdot f(x_1) + \lambda\cdot f(x_0).$$

Faça $\overline{x} = (1-\lambda)\cdot x_1 + \lambda\cdot x_0$ como $0 \leq \lambda < 1$ então $x_1 \leq \overline{x} < x_0$. ■

2.4 Correspondências Monótonas Não-crescentes

Seja X um espaço topológico ordenado. Dizemos que a correspondência $F : X \to Y$ é monótona não-crescente se

$$x_1 \leq x_2 \text{ implica } F(x_2) \subseteq F(x_1).$$

Dizemos que F é monótona não-decrescente se

$$x_1 \leq x_2 \text{ implica } F(x_1) \subseteq F(x_2).$$

<u>Lema 2.14</u>

Seja Y espaço topológico ordenado. Se $F : X \to Y$ é tal que $F(x) \subseteq Y$ é um subconjunto não-decrescente para todo $x \in X$ então $F^{-1} : Im(F) \subseteq Y \to X$ é não-decrescente.

<u>Prova:</u>

Digamos que $y_1 \leq y_2$. Suponhamos que $x \in F^{-1}(y_1)$ então $y_1 \in F(x)$. Como $F(x)$ é não-decrescente então $y_2 \in F(x)$ ou seja, $x \in F^{-1}(y_2)$. ■

Como fizemos para funções, podemos definir as noções de correspondência hemicontínua inferior e superior em relação aos contornos de um ponto qualquer x.

<u>Teorema 2.15</u>

Seja X um espaço com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Se F é monótona não-crescente e hemicontínua inferior em relação ao contorno superior em x_0

então F é hemicontínua inferior em x_0.

Prova:

Digamos que $G \subseteq Y$ é um aberto tal que $G \cap F(x_0) \neq \emptyset$. Por hipótese, $\exists V(x_0)$ tal que se $x_0 \leq x$ e $x \in V(x_0)$ então $G \cap F(x) \neq \emptyset$. Como

$$\sup M(x_0) \cap V(x_0) \neq \emptyset.$$

escolhamos $\bar{x}$ tal que $x_0 < \bar{x}$ e $\bar{x} \in V(x_0)$. O subconjunto $U(x_0) = \{x \in Y \mid x < \bar{x}\}$ é uma vizinhança aberta de x_0. Se $x \in U(x_0)$ então $F(\bar{x}) \subseteq F(x)$ pois F é monótona não-crescente. Como $G \cap F(\bar{x}) \neq \emptyset$ então $G \cap F(x) \neq \emptyset$ para $x \in U(x_0)$. Esta última afirmação é equivalente a hemicontinuidade inferior de F em x_0. ■

Teorema 2.16

Seja X um espaço com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Se F é monótona não-crescente e hemicontínua superior em relação ao contorno inferior em x_0 então F é hemicontínua superior em x_0.

Prova:

Digamos que $G \subseteq Y$ é um aberto tal que $F(x_0) \subseteq G$. Por hipótese, $\exists V(x_0)$ tal que se $x \leq x_0$ e $x \in V(x_0)$ então $F(x) \subseteq G$. Como

$$\inf M(x_0) \cap V(x_0) \neq \emptyset.$$

escolhamos $\bar{x}$ tal que $\bar{x} < x_0$ e $\bar{x} \in V(x_0)$. O subconjunto $U(x_0) = \{x \in Y \mid \bar{x} < x\}$ é uma vizinhança aberta de x_0. Se $x \in U(x_0)$ então $F(x) \subseteq F(\bar{x}) \subseteq G$ pois F é monótona não-crescente e $\bar{x} \in V(x_0)$. Esta última afirmação é equivalente a hemicontinuidade superior de F em x_0. ■

Corolário 2.17

Seja X um espaço com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Se F é monótona não-crescente, hemicontínua inferior em relação ao contorno superior em x_0 e hemicontínua superior em relação ao contorno inferior em x_0 então F é hemicontínua em x_0. ■

2.5 Correspondências Localmente Não-disjuntas

Dizemos que uma correspondência $F : X \longrightarrow Y$ é localmente não-disjunta em $\bar{x} \in X$ se existe uma vizinhança aberta $V(\bar{x})$ de $\bar{x}$ e existe pelo menos um $\bar{y} \in F(x)$, para todo $x \in V(\bar{x})$, isto é,

$$\exists V(\bar{x}); \exists\, \bar{y} \in Y;\ \bar{y} \in F(x); \forall x \in V(\bar{x}).$$

Em outras palavras, existe uma vizinhança aberta $V(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que

$$\bigcap_{x \in V(\bar{x})} F(x) \neq \emptyset.$$

Observe que se $\bigcap_{x \in V(\bar{x})} F(x) \neq \emptyset$ então $\bigcap_{x \in U(\bar{x})} F(x) \neq \emptyset$ para todas as vizinhanças $U(\bar{x}) \subseteq V(\bar{x})$.

Diremos que F é localmente não-disjunta se o for em todos os pontos de X.

<u>Teorema 2.18</u>

Seja $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ correspondência localmente não-disjunta, com gráfico convexo então F é hemicontínua inferior.

<u>Prova:</u>

Por hipótese, existe uma $V(\bar{x})$ e $\bar{y} \in Y$, tal que $\bar{y} \in F(x)$, para todo $x \in V(\bar{x})$, em outras palavras,

$$(x; \bar{y}) \in graf(F); \forall x \in V(\bar{x}).$$

Seja $B[\bar{x}; r] \subseteq V(\bar{x})$ uma bola fechada centrada em $\bar{x}$ de raio $r > 0$ contida em $V(\bar{x})$. Seja $S(\bar{x}; r) \subseteq V(\bar{x})$ a esfera centrada em $\bar{x}$ de raio $r > 0$, isto é, se $x \in S(\bar{x}; r)$ então

$\|x - \bar{x}\| = r$. Seja $G \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto tal que

$$F(\bar{x}) \cap G \neq \emptyset.$$

Seja $y_0 \in F(\bar{x}) \cap G$.

Caso $y_0 = \bar{y}$, o teorema está demonstrado pois $\bar{y} \in F(x) \cap G \neq \emptyset$ para todo $x \in V(\bar{x})$. F é hemicontínua inferior em $\bar{x}$.

Suponhamos $y_0 \neq \bar{y}$. Seja $x_r \in S(\bar{x}; r)$. Como $(\bar{x}; y_0) \in \mathrm{graf}(F)$ e F tem gráfico convexo então

$$[(1 - \lambda) \cdot (\bar{x}; y_0) + \lambda \cdot (x_r; \bar{y})] \in \mathrm{graf}(F),$$

para $\lambda \in [0; 1]$, isto é,

$$[(1 - \lambda) \cdot y_0 + \lambda \cdot \bar{y}] \in F((1 - \lambda) \cdot \bar{x} + \lambda \cdot x_r),$$

para todo $x_r \in S(\bar{x}; r)$. Como G é aberto e $y_0 \in G$ então existe uma bola aberta $B(y_0; \varepsilon)$, centrada em y_0 e raio $\varepsilon > 0$, tal que

$$B(y_0; \varepsilon) \subseteq G$$

e

$$\frac{\varepsilon}{\|y_0 - \bar{y}\|} = \bar{\lambda} < 1.$$

Se

$$0 \leq \lambda < \frac{\varepsilon}{\|y_0 - \bar{y}\|} = \bar{\lambda}$$

e

$$y = (1 - \lambda) \cdot y_0 + \lambda \cdot \bar{y}$$

então

$$\|y_0 - y\| < \varepsilon.$$

Portanto, $y \in B(y_0; \varepsilon) \subset G$. Mas, $y \in F((1-\lambda)\cdot\bar{x} + \lambda\cdot x_r)$ então

$$y \in F((1-\lambda)\cdot\bar{x} + \lambda\cdot x_r) \cap G \neq \emptyset,$$

para todo $x_r \in S(\bar{x}; r)$. Se $x \in B(\bar{x}; \bar{\lambda}\cdot r) \cap V(\bar{x})$ então

$$x = (1-\lambda)\cdot\bar{x} + \lambda\cdot x_r,$$

para algum λ tal que $0 \leq \lambda < \bar{\lambda}$ e $x_r \in S(\bar{x}; r)$. Portanto,

$$y \in F(x) \cap G \neq \emptyset.$$

F é hemicontínua inferior em $\bar{x}$. ■

O resultado acima nos permite generalizar a observação 3 de Dutta e Mitra(1989). Se $F : X \longrightarrow Y$ é uma correspondência tal que

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset,$$

diremos que F tem a propriedade da interseção das imagens.

<u>Corolário 2.19</u>

Seja $F : R^m \longrightarrow R^n$ uma correspondência com gráfico convexo tal que existe $\bar{y}$ tal que

$$\bar{y} \in F(x), \forall x \in R^m$$

então F é hemicontínua inferior.

<u>Prova:</u>

Como

$$\bar{y} \in \bigcap_{x \in R^m} F(x) \neq \emptyset$$

então F tem a propriedade de ser localmente não-disjunta.

<u>Corolário 2.20</u>

Seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ correspondência com gráfico convexo e existe $\bar{x}$ tal que

$$F(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$$

então F^{-1} é hemicontínua inferior.

<u>Prova:</u>

Como

$$\bar{x} \in \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} F^{-1}(y) \neq \emptyset$$

então F^{-1} tem a propriedade de ser localmente não-disjunta. ■

Digamos que a correspondência $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ possua a seguinte propriedade: dado $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança aberta $V(\bar{y})$ de $\bar{y}$ tal que existe pelo menos um $\bar{x} \in X$ tal que

$$V(\bar{y}) \subseteq F(\bar{x}).$$

Observe que a propriedade acima é equivalente a F^{-1} ter a propriedade de ser localmente não-disjunta. Neste caso, se a F^{-1} for convexa então F^{-1} é hemicontínua inferior.

O corolário 2.20 é um caso particular do teorema abaixo.

<u>Corolário 2.21</u>

Seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma correspondência com gráfico convexo tal que $\forall \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\exists V(\bar{y})$, vizinhança aberta de $\bar{y}$, $\exists \bar{x} \in X$ tal que

$$V(\bar{y}) \subseteq F(\bar{x}).$$

então F^{-1} é hemicontínua inferior. ■

Neste capítulo, definimos uma estrutura topológica que chamamos espaços topológicos ordenados com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Nestes espaços, estudamos determinada classe de funções monótonas não-decrescentes. Chamamos estas funções semicontínuas inferiores nos contornos inferiores. Mostramos que tais funções são semicontínuas inferiores. Introduzimos o conceito de funções monótonas rígidas. Mostramos que se tais funções são semicontínuas em relação aos contornos inferiores então são semicontínuas. Generalizamos um resultado da Kahn e Mitra (1984), Dutta e Mitra (1984) e McKenzie (1986).

Definimos o que chamamos de correspondências monótonas não-crescentes. Mostramos que tais correspondências são hemicontínuas inferiores se forem hemicontínuas inferiores nos contornos superiores. Se forem hemicontínuas superiores nos contornos inferiores então são hemicontínuas superiores.

Além disso, definimos uma classe de correspondências que dissemos possuir a propriedade de ser localmente não-disjunta. Nos espaços R^n, provamos que a convexidade de tais correspondências implica a hemicontinuidade inferior. Utilizamos o resultado anterior para mostrar a hemicontinuidade inferior da inversa fraca de correspondências convexas, $F : R^m \to R^n$, que possuam a propriedade que $\forall \bar{y} \in R^n$, $\exists V(\bar{y})$, $\exists \bar{x} \in X$ tal que $V(\bar{y}) \subseteq F(\bar{x})$. Além disso, generalizamos uma outra observação de Dutta e Mitra(1989, p. 82).

No capítulo 3, demonstramos o teorema do máximo a partir de uma generalização proposta por Walker(1979) e formulamos uma versão deste teorema adequada aos nossos objetivos. Estes resultados são necessários para análise das tecnologias no capítulo 4.

Capítulo 3

Teorema do Máximo

Neste capítulo, como afirmamos anteriormente, demonstramos e formulamos uma nova versão para o teorema do máximo.

Na seção 3.1, obtemos condições necessárias e suficientes para a semicontinuidade da função m(x) em termos das imagens inversas inferiores e superiores da correspondência $f \pm F$. Estas condições estão expressas no teorema 3.1 e no corolário 3.2. Os corolários 3.4 e 3.6 fornecem condições suficientes para a semicontinuidade.

Na seção 3.2, utilizamos um teorema de Walker(1979) para obter um resultado que fornece uma maneira de demonstrar o teorema do máximo. Este resultado é o teorema 3.7 e o chamamos de lema de Walker. O teorema 3.9 estende o lema de Walker para correspondências convexas e localmente não-disjuntas. O teorema 3.11 é outra extensão do lema de Walker necessária para generalizar o teorema do máximo. Sob algumas hipóteses, o teorema 3.12 mostra que a correspondência que maximiza correspondências hemicontínuas inferiores é fechada.

O teorema de Berge é o teorema 3.13. Os corolários 3.14, ao 3.20 são generalizações do teorema do máximo que iremos empregar no capítulo 4.

3.1 A Continuidade das Funções Valor-Ótimo

Para as funções valor-ótimo podemos estabelecer condições necessárias e suficientes para a continuidade.

Bank et al.(1983) determinam a continuidade de m em termos dos conjuntos

$$\psi_\varepsilon(x) = \{y \in F(x) | f(x; y) < m(x) + \varepsilon\}.$$

Os elementos dos conjuntos acima, os autores chamaram pontos $\varepsilon-$ótimos. Dada F hemicontínua inferior em x_0: m é contínua em x_0 se e só se ψ_ε é hemicontínua inferior em x_0 para todo $\varepsilon > 0$.

Mandy(1984) define

$$\Lambda_\varepsilon(x) = \{y \in F(x) | f(x; y) > M(x_0) + \varepsilon\},$$

que chamou um conjunto $\varepsilon-$ótimo, e mostra que M é contínua em x_0 se e só existe uma vizinhança $U(x_0)$ de x_0 tal que $\Lambda_\varepsilon(x_0)$ e $\Lambda_{-\varepsilon}(x_0)$ são não-vazios. Mandy usa este resultado para analisar a continuidade em relação ao produto da função custo mínimo.

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $F : X \longrightarrow Y$ uma correspondência. Como definimos anteriormente,

$$\inf_{y \in F(x)} f(x; y) = m(x);$$

é dita a função valor mínimo e

$$\arg\min(x) = \{y \in F(x) | f(x; y) = m(x)\}$$

a correspondência argumento mínimo.

Dada uma correspondência $F : Y \rightarrow X$, definimos o gráfico de F como

$$\mathrm{graf}(F) = \{(x; y) | y \in F(x)\} \subset X \times Y.$$

Vamos notar $\mathrm{graf}(F)$ por $\overline{F}$. Observe que $\overline{F} : X \rightarrow X \times Y$ é uma correspondência.

<u>Teorema 3.1</u>

i) m é semicontínua superior em x_0 se só se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x_0) \cap (-\infty; \lambda) \neq \emptyset;$$

$\exists U(x_0)$, vizinhança aberta de x_0, tal que se $x \in U(x_0)$ então

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x) \cap (-\infty; \lambda) \neq \emptyset.$$

ii) m é semicontínua inferior em x_0 se só se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x_0) \subset (\lambda; +\infty);$$

$\exists U(x_0)$, vizinhança aberta de x_0, tal que se $x \in U(x_0)$ então

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x) \subset (\lambda; +\infty).$$

<u>Prova</u>

Caso i) Suponhamos que m é semicontínua superior em x_0. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x_0) \cap (-\infty; \lambda) \neq \emptyset$$

então existe $y \in F(x_0)$ tal que $f(x_0; y) < \lambda$ logo $m(x_0) < \lambda$. Como m é semicontínua superior em x_0 então $\exists U(x_0)$ tal que se $x \in U(x_0)$ então $m(x) < \lambda$. Portanto, existe

$y \in F(x)$ tal que $f(x,y) < \lambda$, ou seja,

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x) \cap (-\infty, \lambda) \neq \emptyset.$$

Por outro lado, suponhamos $m(x_0) < \lambda$. Portanto,

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x_0) \cap (-\infty, \lambda) \neq \emptyset.$$

Por hipótese, $\exists U(x_0)$ tal que se $x \in U(x_0)$ então

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x) \cap (-\infty, \lambda) \neq \emptyset,$$

ou seja, existe $y \in F(x)$ tal que $f(x,y) < \lambda$ o que implica que $m(x) \leq f(x,y) < \lambda$. Portanto, m é semicontínua superior em x_0.

Caso ii) Suponhamos m semicontínua inferior em x_0. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $m(x_0) > \lambda$ então $\exists U(x_0)$, vizinhança aberta de x_0, tal que se $x \in U(x_0)$ então $m(x) > \lambda$. Então, para $x \in U(x_0)$, se $y \in F(x)$ temos $f(x,y) \geq m(x) > \lambda$ portanto

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x) \subset (\lambda, +\infty).$$

Por outro lado, suponhamos que $m(x_0) > \lambda$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $m(x_0) > \lambda + \varepsilon > \lambda$. Logo,

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x_0) \subset (\lambda + \varepsilon, +\infty).$$

Por hipótese, $\exists U(x_0)$, tal que se $x \in U(x_0)$ então

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x) \subset (\lambda + \varepsilon, +\infty).$$

Portanto, se $y \in F(x)$ então $f(x,y) > \lambda + \varepsilon$. Portanto, $m(x) \geq \lambda + \varepsilon > \lambda$, ou seja, m é semicontínua inferior em x_0. ■

<u>Corolário 3.2</u>

i) m é semicontínua superior em X se e só se

$$\left(f \circ \overline{F}\right)^{-1}(-\infty;\lambda)$$

é aberto, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

ii) m é semicontínua inferior em X se e só se

$$\left(f \circ \overline{F}\right)^{+}(\lambda;+\infty)$$

é aberto, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Prova:</u>

caso i) Suponhamos que m seja semicontínua superior. Seja

$$x_0 \in \left(f \circ \overline{F}\right)^{-1}(-\infty;\lambda)$$

então $m(x_0) < \lambda$. Pelo resultado anterior, $\exists U(x_0)$, vizinhança aberta de x_0, tal que se $x \in U(x_0)$ então

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x) \cap (-\infty;\lambda) \neq \emptyset;$$

isto é,

$$U(x_0) \subseteq \left(f \circ \overline{F}\right)^{-1}(-\infty;\lambda).$$

Da mesma maneira, se

$$\left(f \circ \overline{F}\right)^{-1}(-\infty;\lambda)$$

é aberto e

$$x_0 \in \left(f \circ \overline{F}\right)^{-1}(-\infty;\lambda)$$

então $\exists U(x_0)$ tal que

$$U(x_0) \subset \left(f \circ \overline{F}\right)^{-1}(-\infty; \lambda):$$

Se $x \in U(x_0)$ então

$$(f \circ \overline{F})(x) \cap (-\infty; \lambda) \neq \emptyset:$$

ou seja $m(x) < \lambda$. Logo, m é semicontínua superior.

caso ii) Suponhamos que m seja semicontínua inferior. Seja

$$x_0 \in \left(f \circ \overline{F}\right)^{+}(\lambda; +\infty)$$

então

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x_0) \subset (\lambda; +\infty):$$

Como m é semicontínua inferior então $\exists U(x_0)$, vizinhança aberta de x_0, tal que se $x \in U(x_0)$ então

$$\left(f \circ \overline{F}\right)(x) \subset (\lambda; +\infty);$$

ou seja,

$$U(x_0) \subset \left(f \circ \overline{F}\right)^{+}(\lambda; +\infty):$$

Da mesma maneira, se $m(x_0) > \lambda$ então,

$$x_0 \in \left(f \circ \overline{F}\right)^{+}(\lambda + \varepsilon; +\infty);$$

para algum $\varepsilon > 0$:

$$\left(f \circ \overline{F}\right)^{+}(\lambda + \varepsilon; +\infty)$$

é aberto então

$$\exists U(x_0) \subset \left(f \circ \overline{F}\right)^{+}(\lambda + \varepsilon; +\infty):$$

Se $x \in U(x_0)$ então $m(x) \geq \lambda + \varepsilon > \lambda$. logo, m é semicontínua inferior. ■

O conceito de semicontinuidade inferior pode ser expresso como continuidade se a reta real está munida com a topologia da semicontinuidade inferior, ou seja, a topologia cujos abertos não vazios são os intervalos da forma $(\lambda; +\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Da maneira similar em relação à semicontinuidade superior, se definimos na reta a topologia cujos abertos não vazios são os intervalos $(-\infty; \lambda)$. O corolário anterior pode ser expresso como: m é semicontínua inferior em X se e só se $f \circ \overline{F}$ é hemicontínua superior em relação a topologia da semicontinuidade inferior; m é semicontínua superior em X se e só se $f \circ \overline{F}$ é hemicontínua inferior em relação à topologia da semicontinuidade superior.

<u>Lema 3.3</u>

Se $F : X \longrightarrow Y$ é hemicontínua superior e valor-compacto então $\overline{F} : X \longrightarrow X \times Y$ é hemicontínua superior e valor-compacto.

<u>Prova</u>

Se $F_1 : X \longrightarrow Y_1$ e ; $F_2 : X \longrightarrow Y_2$ são correspondências hemicontínuas superiores tal que $F_1(x) \subseteq Y_1; F_2(x) \subseteq Y_2$ são compactos para todo $x \in X$ então $F_1 \times F_2 : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ é hemicontínua superior e $F_1(x) \times F_2(x)$ é compacto em $Y_1 \times Y_2$ para todo $x \in X$. Se definimos $I : X \longrightarrow X$ como $I(x) = \{x\}$ então I é hemicontínua e valor-compacto. Então $\overline{F} = I \times F$ é hemicontínua superior e valor-compacto. ■

<u>Corolário 3.4</u>

Se $F : X \longrightarrow Y$ é hemicontínua superior e valor-compacto e $f : X \longrightarrow X \times Y$ é semicontínua inferior então m é semicontínua inferior.

<u>Prova</u>

m é semicontínua inferior se e só se $\left(f \circ \overline{F}\right)^{+}(\lambda; +\infty)$ é aberto, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left(f \circ \overline{F}\right)^{+}(-\infty; \lambda) = \overline{F}^{+}(f^{-1}(\lambda; +\infty))$$

Como f é semicontínua inferior então $f^{-1}(\lambda; +\infty)$ é aberto. Como F é hemicontínua superior então $\overline{F}^{+}(f^{-1}(\lambda; +\infty))$ é aberto. Portanto, $\left(f \circ \overline{F}\right)^{+}(\lambda; +\infty)$ é aberto, ou seja,

m é semicontínua inferior. ∎

<u>Lema 3.5</u>

Se $F : X \longrightarrow Y$ é hemicontínua inferior então $\overline{F} : X \longrightarrow X \times Y$ é hemicontínua inferior.

<u>Prova</u>

Se $F_1 : X \longrightarrow Y_1$ e $F_2 : X \longrightarrow Y_2$ são correspondências hemicontínuas inferiores então $F_1 \times F_2 : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ é hemicontínua inferior. Se definimos $I : X \longrightarrow X$ como $I(x) = \{x\}$ então I é hemicontínua. Então $\overline{F} = I \times F$ é hemicontínua inferior. ∎

<u>Corolário 3.6</u>

Se $F : X \longrightarrow Y$ é hemicontínua inferior e $f : X \longrightarrow X \times Y$ é semicontínua superior então m é semicontínua superior.

<u>Prova:</u>

m é semicontínua superior se e só se $\left(f \circ \overline{F}\right)^{-}((-\infty, \lambda))$ é aberto, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left(f \circ \overline{F}\right)^{-}((-\infty, \lambda)) = \overline{F}^{-}(f^{-1}((-\infty, \lambda))).$$

Como f é semicontínua superior então $f^{-1}((-\infty, \lambda))$ é aberto. Como F é hemicontínua inferior então $\overline{F}^{-}(f^{-1}((-\infty, \lambda)))$ é aberto, ou seja, $\left(f \circ \overline{F}\right)^{-}((-\infty, \lambda))$ é aberto. ∎

3.2 A Hemicontinuidade de Ψ

3.2.1 Lema de Walker

Em 1979, Walker apresentou uma versão do teorema do máximo tendo em vista a teoria dos jogos. Neste parágrafo utilizamos a argumentação do autor para obter o resultado abaixo, por isto nos referiremos a este resultado como lema de Walker.

Teorema 3.7 (Lema de Walker)

Sejam X e Y espaços topológicos. Sejam

$$F : X \longrightarrow Y$$

correspondência hemicontínua inferior e

$$D : X \longrightarrow X \times Y;$$

correspondência aberta então

$$M(x) = \{y_2 \in Y \mid \forall y_1 \in F(x), (y_1, y_2) \notin D(x)\}$$

é fechada.

Prova:

Se

$$(\bar{x}, \bar{y}_2) \notin \operatorname{graf}(M);$$

ou seja, $\bar{y}_2 \notin M(x)$, então existe $\bar{y}_1 \in F(\bar{x})$ tal que $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in D(\bar{x})$, isto é,

$$(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \operatorname{graf}(D).$$

Como D é aberta, existe $U(\bar{x})$, $V(\bar{y}_1)$, $V(\bar{y}_2)$, vizinhanças abertas de $\bar{x}$, $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$ respectivamente, tal que se $x \in U(\bar{x})$, $y_1 \in V(\bar{y}_1)$, $y_2 \in V(\bar{y}_2)$ então

$$(x, y_1, y_2) \in \operatorname{graf}(D);$$

isto é, $(y_1, y_2) \in D(x)$.

Existe $U'(\bar{x})$, vizinhança aberta de $\bar{x}$, tal que se $x \in U'(\bar{x})$ então $F(x) \cap V(\bar{y}_1) \neq \emptyset$ pois F é hemicontínua inferior e

$$\bar{y}_1 \in F(\bar{x}) \cap V(\bar{y}_1).$$

Se $x \in U(\bar{x}) \cap U'(\bar{x})$ então existe $y_1 \in F(x) \cap V(\bar{y}_1)$ e se $y_2 \in V(\bar{y}_2)$ então $(x, y_1, y_2) \in graf(D)$, ou seja, $(y_1, y_2) \in D(x)$. Portanto, $y_2 \notin M(x)$, isto é, $(x, y_2) \notin graf(M)$. Logo, se

$$x \in U(\bar{x}) \cap U'(\bar{x}) \text{ e } y_2 \in V(\bar{y}_2)$$

então $(x, y_2) \notin graf(M)$, ou seja, $graf(M)$ é fechado. ■

Podemos generalizar o lema de Walker. A hemicontinuidade inferior da correspondência F pode ser substituída pela hemicontinuidade inferior nos contornos superiores ou, no caso dos espaços R^k, pela propriedade de ser localmente não disjunta.

Teorema 3.8

Sejam X espaço topológico com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Sejam $F : X \longrightarrow Y$ correspondência monótona não-crescente, hemicontínua inferior nos contornos superiores e $D : X \longrightarrow X \times Y$, correspondência aberta então

$$M(x) = \{y_2 \in Y \mid \forall y_1 \in F(x), (y_1, y_2) \notin D(x)\}$$

é fechada. ■

Teorema 3.9

Sejam $F : R^m \longrightarrow R^n$ correspondência convexa, localmente não-disjunta e

$$D : X \longrightarrow R^m \times R^n$$

correspondência aberta então

$$M(x) = \{y_2 \in R^n | \forall y_1 \in F(x), (y_1, y_2) \notin D(x)\}$$

é fechada. ■

Nos resultados abaixo, definimos a correspondência D.

Teorema 3.10

Sejam X e Y espaços topológicos. Y com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Seja $f : Y \to R$ monótona não-decrescente e semicontínua inferior então

$$D(x) = \{(y_1, y_2) | f(y_1 + 0) < f(y_2)\}$$

é aberta.

Prova:

Seja $(\overline{x}, \overline{y}_1, \overline{y}_2) \in graf(D)$ e $\lambda \in R$ tal que

$$f(\overline{y}_1 + 0) < \lambda < f(\overline{y}_2).$$

Como f é monótona não-decrescente e semicontínua inferior, existem $V(\overline{y}_1)$ e $V(\overline{y}_2)$ tais que se

$$(y_1, y_2) \in V(\overline{y}_1) \times V(\overline{y}_2)$$

então

$$f(y_1 + 0) < \lambda < f(y_2).$$

Portanto,

$$X \times V(\overline{y}_1) \times V(\overline{y}_2) \subset graf(D).$$

■

Corolário 3.11

Sejam X e Y espaços topológicos. Y com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Sejam $f : Y \to R$ monótona não-decrescente, semicontínua inferior e $F : X \to Y$ correspondência hemicontínua inferior então

$$M(x) = \{y_2 \in Y | f(y_2) \leq f(y_1 + 0); \forall y_1 \in F(x)\}$$

é fechada.

Prova:

Como

$$D(x) = \{(y_1; y_2) | f(y_1 + 0) < f(y_2)\}$$

é aberta então, pelo primeiro teorema 3.7, $M(x)$ é fechada. $\blacksquare$

No corolário abaixo, vamos supor que Y tem uma propriedade adicional. Se $y_2; y_1 \in Y$ e

$$y_2 < y_1$$

então existe $\bar{y}$ tal que

$$y_2 < \bar{y} < y_1.$$

$\blacksquare$

Corolário 3.12

Sejam X e Y espaços topológicos. Y com a propriedade da interseção topológica dos contornos e se

$$y_2 < y_1$$

então existe $\bar{y}$ tal que

$$y_2 < \bar{y} < y_1.$$

Sejam $F : X \to Y$ correspondência hemicontínua inferior então

$$M(x) = \max_{y \in Y} F(x)$$

é fechada.

Prova:

Seja a correspondência

$$D : X \to X \times Y$$

definida como

$$D(x) = \{(y_1; y_2) \in Y \times Y | y_2 < y_1\}.$$

D é aberta pois se $y_2 < y_1$ então $\exists \bar{y} \in Y$ tal que $y_2 < \bar{y} < y_1$. Isto implica que

$$\sup M(\bar{y}) \times \inf M(\bar{y}) \subseteq D(x); \forall x \in X.$$

Pelo lema de Walker,

$$M(x) = \{y_2 \in Y | \forall y_1 \in F(x); (y_1; y_2) \notin D(x)\}$$

é fechada. $M(x)$ é formado por aqueles pontos de Y tal que não existem pontos $y_1 \in F(x)$ tal que $(y_1; y_2) \in D(x)$. Em outras palavras, não existem pontos $y_1 \in F(x)$ tal que $y_2 < y_1$. Portanto, y_2 é um ponto de máximo de $F(x)$ segundo a definição dada na seção 2.1. ■

3.2.2 Teorema de Berge

O teorema do máximo pode ser obtido como corolário do teorena 3.7.

Teorema 3.13 (Teorema do Máximo de Berge)

Sejam X e Y espaços topológicos. Y é um espaço T_3. Seja $f : X \times Y \to R$ contínua.

Seja $F : X \to Y$ correspondência hemicontínua, valor-compacto tal $F(x) \neq \emptyset$. Então,

$$m(x) = \inf_{y \in F(x)} f(x, y)$$

é contínua em X e

$$\Phi(x) = \{y \in F(x) | f(x, y) = m(x)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto.

<u>Prova:</u>

Como f é contínua e F é hemicontínua superior e valor-compacto então m é semicontínua inferior. Como f é contínua e F é hemicontínua inferior então m é semicontínua superior. Portanto, m é contínua.

Seja

$$D(x) = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y | f(x, y_1) < f(x, y_2)\}.$$

Se $(\overline{y_1}, \overline{y_2}) \in D(\bar{x})$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(\bar{x}, \overline{y_1}) < \lambda < f(\bar{x}, \overline{y_2}).$$

Como f é contínua, existem vizinhanças abertas $U(\bar{x})$, $V(\overline{y_1})$ e $V(\overline{y_2})$ de $\bar{x}$, $\overline{y_1}$ e $\overline{y_2}$, respectivamente, tal que se $x \in U(\bar{x})$, $y_1 \in V(\overline{y_1})$ e $y_2 \in V(\overline{y_2})$ então

$$f(x, y_1) < \lambda < f(x, y_2).$$

Isto implica que se

$$(x, y_1, y_2) \in U(\bar{x}) \times V(\overline{y_1}) \times V(\overline{y_2})$$

então $(y_1, y_2) \in D(x)$, isto é, D é aberta.

Seja

$$M(x) = \{y_2 \in Y | \forall y_1 \in F(x), (y_1, y_2) \notin D(x)\}$$

então $y_2 \in M(x)$ se e só se

$$f(x; y_2) \leq f(x; y_1), \forall y_1 \in F(x);$$

ou seja, $f(x; y_2) = m(x)$. Pelo lema do Walker, concluímos que M é fechada. Como

$$\Phi(x) = F(x) \cap M(x);$$

concluímos que Φ é hemicontínua superior e valor-compacto. ■

3.2.3 Teoremas do Máximo

Corolário 3.14

Sejam X e Y espaços topológicos. Y com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Sejam $f : Y \to R$ monótona não-decrescente e semicontínua inferior e $F : X \to Y$ correspondência hemicontínua e valor-compacto então

$$m(x) = \inf_{y \in F(x)} f(y)$$

é semicontínua inferior e

$$\Phi(x) = \{y_2 \in F(x) | f(y_2) \leq f(y_1 + 0); \forall y_1 \in F(x)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto.

Prova:

Pelo corolário 3.4, m é semicontínua inferior.

Como F é hemicontínua superior e valor-compacto, então

$$M(x) = \{y_2 \in Y | f(y_2) \leq f(y_1 + 0); \forall y_1 \in F(x)\}$$

é fechada pelo teorema 3.7. Como F é hemicontínua e valor-compacto então

$$\Psi(x) = F(x) \cap M(x)$$

é hemicontínua superior e valor-compacto, pelo teorema 1.3. ■

<u>Corolário 3.15</u>

Seja Y um espaço topológico com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Sejam $f : Y \to R$ monótona não-decrescente e semicontínua inferior em relação ao contorno inferior e $F : X \to Y$ correspondência hemicontínua e valor-compacto então

$$m(x) = \inf_{y \in F(x)} f(y)$$

é semicontínua inferior e

$$\Psi(x) = \{y_2 \in F(x) | f(y_2) \le f(y_1 + 0); \forall y_1 \in F(x)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto. ■

<u>Corolário 3.16</u>

Sejam X e Y espaços topológicos com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Suponhamos que Y é compacto. Sejam

$$f : Y \to R$$

monótona não-decrescente e semicontínua inferior em relação ao contorno inferior e

$$F : X \to Y$$

correspondência fechada, monótona não-crescente e hemicontínua inferior em relação aos contornos superiores então

$$m(x) = \inf_{y \in F(x)} f(y)$$

é semicontínua inferior e

$$\Psi(x) = \{y_2 \in F(x) | f(y_2) \leq f(y_1 + 0); \forall y_1 \in F(x)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto.

<u>Prova:</u>

Como F é fechada e Y é compacto então F é hemicontínua superior e valor-compacto. Como F é hemicontínua inferior nos contornos superiores então F é hemicontínua inferior. Portanto, F é hemicontínua e valor-compacto. ■

Nos corolários anteriores podemos substituir a hipótese de f ser semicontínua inferior em relação ao contorno inferior por inferiormente rígida.

<u>Lema 3.17</u>

Seja $f : Y \longrightarrow R$ monótona não-decrescente então a função $\varphi : Y \longrightarrow R$ dada por

$$\varphi(y) = f(y + 0)$$

é semicontínua superior.

<u>Prova:</u>

Se $\varphi(y_0) = f(y_0 + 0) < \lambda$ então existe $y_\lambda > y_0$ tal que

$$f(y_0 + 0) \leq f(y_\lambda) < \lambda.$$

O conjunto $U(y_0) = \{y \in Y | y < y_\lambda\}$ é uma vizinhança aberta de y_0. Se $y < y_\lambda$ então $\varphi(y) = f(y + 0) \leq f(y_\lambda) < \lambda$. Portanto, φ é semicontínua superior em y_0. ■

Digamos que a correspondência $F : X \to Y$ seja valor-compacto. Se

$$m(x) = \inf_{y \in F(x)} f(y)$$

então existe $\bar{y} \in F(x)$ tal que

$$m(x) = f(\bar{y}) \leq f(y) \leq f(y+0);$$

para todo $y \in F(x)$, ou seja

$$f(\bar{y}) \leq \varphi(y); \forall y \in F(x)$$

Neste caso, podemos definir

$$s(x) = \inf_{y \in F(x)} f(y+0) = \inf_{y \in F(x)} \varphi(y).$$

Se F é hemicontínua inferior então $s(x)$ é semicontínua superior. Observe que

$$m(x) \leq s(x).$$

<u>Corolário 3.18</u>

Seja Y um espaço topológico com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Sejam $f : Y \to R$ monótona não-decrescente e semicontínua inferior em relação ao contorno inferior e $F : X \to Y$ correspondência hemicontínua e valor-compacto então

$$m(x) = \inf_{y \in F(x)} f(y)$$

é semicontínua inferior;

$$s(x) = \inf_{y \in F(x)} f(y+0)$$

é semicontínua superior;

$$\Psi(x) = \{y \in F(x) | f(y) \leq s(x)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto. ■

<u>Corolário 3.19</u>

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona não-decrescente semicontínua inferior em relação ao contorno inferior. Seja

$$F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

correspondência. Existe um subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $F(x) \subseteq K$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. F é localmente não-disjunta, com gráfico convexo e fechada.

Então,

$$m(x) = \inf_{y \in F(x)} f(y)$$

é semicontínua inferior;

$$\Psi(x) = \{y_2 \in \mathbb{R}^n | \forall y_1 \in F(x); f(y_2) \leq f(y_1 + 0)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto.

<u>Prova:</u>

Como F é valor-compacto e fechada então F é hemicontínua superior. Como F é convexa e possui a propriedade de ser localmente não-disjunta então F é hemicontínua inferior. Portanto, podemos concluir que F é hemicontínua e valor-compacto. ■

Se $K \subseteq \mathbb{R}^m$ é subconjunto compacto, existe pelo menos um ponto de máximo de K em K. A função distância

$$||x||_\infty = \sup |x_i|; i = 1; \dots; m;$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m_+$, é contínua, portanto tem pelo menos um ponto de máximo $\bar{x} \in K$. Este ponto $\bar{x}$ é um ponto de máximo para ordem $\leq$ em $\mathbb{R}^m_+$.

Nos espaços $\mathbb{R}^n$ com a ordem $\leq$ vale a propriedade exigida no teorema 3.12, isto é, se $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ e $y_1 < y_2$ então existe $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$y_1 < \bar{y} < y_2.$$

<u>Corolário 3.20</u>

Seja

$$F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

correspondência hemicontínua superior, com gráfico convexo, valor-compacto e existe $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\bar{y} \in F(x), \forall x \in F(x)$$

então

$$\Psi(x) = \left\{ y \in F(x) \mid y = \max_{y \in F(x)} y \right\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto.

<u>Prova:</u>

F possui a propriedade de ser localmente não-disjunta e é convexa, portanto F é hemicontínua inferior pelo teorema 2.18. Por hipótese, F é hemicontínua superior. Então, F é hemicontínua. Como vimos anteriormente, pelo corolário 3.11, a correspondência

$$M(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y = \max_{y \in F(x)} y \right\}$$

é fechada. Portanto,

$$\Psi = M \cap F$$

é hemicontínua superior e valor-compacto pelo teorema 1.3. ■

Neste capítulo, estudou-se condições necessárias e suficientes para a semicontinuidade da função valor mínimo ótimo. Formulamos três versões de um teorema de Walker(1979). Obtivemos o teorema de Berge e seis versões do teorema do máximo. Tais resultados são utilizados no capítulo 4.

Capítulo 4

Funções Custo

A função custo total é obtida através da minimização do funcional linear

$$f(x) = p \cdot x$$

sobre subconjuntos do $\mathbb{R}^n_+$ onde x representa um vetor de insumos e p o correspondente vetor de preços.

Neste capítulo, discutimos os axiomas usuais para uma tecnologia e observamos a continuidade da função custo mínimo em relação ao vetor de preços quando não existem bens livres.

Em relação ao produto y, as propriedades de regularidade, valor-monoticidade e valor-convexidade de uma tecnologia são insuficientes para assegurar a continuidade da função custo mínimo $C(y)$. Resultados de continuidade da função C em relação ao produto y estão relacionados às afirmações de como variam os conjuntos de requerimentos de insumos $V(y)$ em relação ao vetor produto y, como veremos mais adiante. Discutimos algumas propriedades para uma tecnologia que permitem assegurar a continuidade de $C(y)$. No caso em que f é contínua então C é contínua. No caso em que f é semicontínua inferior então C é semicontínua inferior.

Em relação às demandas condicionais por insumos $\Phi(y)$, no caso de f ser contínua, mostramos que $\Phi(y)$ é hemicontínua superior. Estes resultados são os teoremas 4.7, 4.8 e 4.9. Se f apresenta descontinuidades o conjunto $\Phi(y)$ inclui outros vetores que são aqueles nos quais os valores de f são menores que todos os limites de f nos contornos superiores de pontos de $V(y)$. Nesta situação, chamamos Φ de demanda ampliada. A noção de estabilidade topológica expressa pela hemicontinuidade superior só pode ser afirmada para este conjunto mais amplo. Os resultados referentes às demandas ampliadas estão nos teoremas 4.10, 4.11 e 4.12.

Na seção 4.1.1, estudamos o que chamamos correspondência de produção. Esta correspondência substitui as funções de produção usuais que podem não existir na situação geral. O teorema 4.5 estabelece que uma tecnologia convexa com a "possibility of inaction " tem inversa fraca hemicontínua inferior. O axioma da "possibilidade de inação" pode ser substituido por uma propriedade exposta no teorema 4.5 que conduz ao mesmo resultado. No teorema 4.6 completamos o resultado anterior. Mostramos que se a tecnologia além de ter as propriedades anteriores for compacta então a correspondência de produção é hemicontínua e valor-compacto.

No teorema 4.3, mostramos que toda a tecnologia uniproduto, convexa, regular e não-crescente é hemicontínua inferior.

4.1 Tecnologias

Formalmente, uma tecnologia é um subconjunto $Y \subseteq R^k$ de tal maneira que cada componente y_i de $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y$ representa o produto líquido do bem i para a firma em questão. Também se diz que Y é o conjunto de possibilidades de produção da firma.

A primeira restrição que fazemos é tratar insumos e produtos como bens separados. Neste caso, Y pode ser descrito como um subconjunto de pontos $(x, y) \in R_+^{n+m}$ onde

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ e $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m_+$. O vetor x representa as quantidades de insumos $i = 1, \ldots, n$ implicados na produção das quantidades y_j dos produtos $j = 1, \ldots, m$ representadas no vetor y. Chamemos uma tecnologia assim de separada. Neste trabalho, estudamos apenas tecnologias separadas.

Sejam

$$Y^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^m_+ | \exists x \in \mathbb{R}^n_+, (x, y) \in Y \right\}.$$

e

$$X^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ | \exists y \in \mathbb{R}^m_+, (x, y) \in Y \right\}.$$

Y^* e X^* são ditos o domínio e a imagem da tecnologia, respectivamente.

A restrição acima nos permite parametrizar a tecnologia Y pelo vetor de insumos ou pelo vetor produto. Adotando a parametrização pelo vetor de produto, podemos descrever a tecnologia pela correspondência

$$V : Y^* \subseteq \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n_+,$$

$$V(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ | (x, y) \in Y \right\}.$$

Exigimos que V seja não-vazia e valor-fechada, isto é, para todo $y \in Y^*$, $V(y) \neq \emptyset$ e fechado. Além disso, exigimos que se $y \neq 0$ então $0 \notin V(y)$, ou seja, não podemos produzir $y \neq 0$ sem insumos. Uma tecnologia Y separada tal que

i) $V(y) \neq \emptyset$;

ii) $V(y)$ é fechado,

iii) $y \neq 0$ então $0 \notin V(y)$

é dita regular.

Dizemos que V é valor-monótono não-decrescente se

$$x \in V(y) \text{ e } x' \geq x \text{ então } x' \in V(y).$$

Este axioma corresponde à livre disposição de insumos. Diz que se y pode ser produzido com x então pode ser produzido por qualquer vetor de insumo x' que tenha tanto quanto o anterior de cada insumo. Em relação aos conceitos do capítulo 2, a exigência de monotonicidade significa ser $V(y)$ um subconjunto monótono não-decrescente de $\mathbb{R}^n_+$. Dizemos que V é valor-monótono para sermos breves.

Dizemos que $V(y)$ é convexo inferiormente se $x; x' \in V(y)$ e $\lambda \in [0;1]$ então existe existe $x'' \in V(y)$ tal que $x'' \leq (1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot x'$.

A monotonicidade e a convexidade inferior de $V(y)$ implicam a convexidade de $V(y)$, pois se dados $x; x' \in V(y)$ e $\lambda \in [0;1]$ existe $x'' \in V(y)$ tal que

$$x'' \leq (1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot x';$$

então, pela monoticidade,

$$[(1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot x'] \in V(y):$$

Obviamente, todo convexo é inferiormente convexo. Então, podemos substituir a convexidade inferior pela convexidade pois estamos exigindo a monotonicidade.

As exigências usuais para uma tecnologia separada são que seja regular, valor-monótono e valor-convexa que correspondem a dizer que a correspondência V é não-vazia, valor-fechada, valor-monótono não-decrescente e valor-convexa.

Uma tecnologia Y é dita monótona se

$$\forall (x;y) \in Y \text{ e } y' \leq y,\ x' \geq x \text{ então } (x';y') \in Y.$$

Teorema 4.1

Y é monótona se e só se i) $x \in V(y)$ e $x' \geq x$ então $x' \in V(y)$ e ii) $y' \leq y$ então $V(y) \subseteq V(y')$.

Prova:

i) $(x, y) \in Y$ pois $x \in V(y)$, Se $x' \geq x$ então $(x', y) \in Y$, ou seja, $x' \in V(y)$. ii) Se $x \in V(y)$ então $(x, y) \in Y$. Se $y' \leq y$ então $(x, y') \in Y$, isto é, $x \in V(y')$.

Por outro lado, se $(x, y) \in Y$ e $y' \leq y$, $x' \geq x$ então $V(y) \subseteq V(y')$, por ii). Como $x \in V(y)$ então $x \in V(y')$. Como $x' \geq x$ então $x' \in V(y')$, por i). Portanto, $(x', y') \in Y$. ■

A propriedade i) está dizendo que a tecnologia é valor-monótono não-decrescente. A propriedade ii) afirma que a tecnologia é não-crescente na variável y.

Uma tecnologia é dita convexa se Y é convexo. Esta afirmação é mais forte que exigir $V(y)$ convexo. Se Y é convexo então $V(y)$ é convexo mas não vale a volta. Dizer que a tecnologia é convexa é equivalente a dizer que a correspondência V tem gráfico convexo o que é mais forte que ser valor-convexo.

Em resumo, as propriedades que enunciamos até aqui para uma tecnologia separada, $V : Y^* \subseteq R^m_+ \to R^n_+$, são

i) $V(y) \neq \emptyset$;

ii) $V(y)$ é fechado,

iii) $y \neq 0$ então $0 \notin V(y)$

que corresponde a ser regular; e ainda

iv) $V(y)$ é monótono não-decrescente,

v) V é não-crescente em y,

vi) $V(y)$ é convexo,

vii) V monótona,

viii) $graf(V)$ é convexo.

Varian (1992) define uma tecnologia através de i), ii), iv) e vi). McFadden (1978) postula i), ii), iii), iv) e $V(y)$ convexo inferiormente. Como vimos iv) e $V(y)$ convexo inferiormente é equivalente à propriedade vi). Portanto, McFadden(1971) é equivalente a exigir i), ii), iii), iv) e vi). Mas-Colell(1995) exige vii), viii). Estas duas propriedades implicam iv), v) e vi). Mas-Colell exige $Y \neq \emptyset$; que implica i); Y fechado que implica ii); a propriedade da impossibilidade de "free production ", isto é, se $y \in Y$ e $y \geq 0$ então $y = 0$ que implica iii); e finalmente $0 \in Y$. Portanto, Mas-Colell postula todas as oito propriedades. Debreu(1959) exige Y fechado, $0 \in Y$, a propriedade da impossibilidade de 'free production "; Y convexo que implica vi). Debreu está postulando i), ii), iii) e vi).

Suponhamos que as tecnologias respondam a todas as oito propriedades a menos que façamos uma referência explícita.

Observe que

$$\bigcap_{y \leq \bar{y}} V(y) = V(\bar{y})$$

pois V é não-crescente na variável y: Como $V(\bar{y}) \neq \emptyset$; então V é não-disjunta à esquerda de $\bar{y}$.

Intuitivamente, o que queremos dizer por uma tecnologia hemicontínua inferior é que se com o vetor de insumos $\bar{x}$ é possível produzir $\bar{y}$ então outros vetores de produto

y próximos a $\bar{y}$ devem ser possíveis de produzir com vetores de insumos x próximos a $\bar{x}$. Esta é aquela idéia intuitiva que os conjuntos $V(y)$ não podem implodir:

Seja G um aberto tal que $G \cap V(\bar{y}) \neq \emptyset$. Se $y \in \inf \triangle(\bar{y})$ então $V(y) \cap G \neq \emptyset$ pois $V(\bar{y}) \subseteq V(y)$. Isto é insuficiente para assegurar que V seja hemicontínua inferior pois $\inf \triangle(\bar{y})$ não é uma vizinhança aberta de $\bar{y}$. Existe a possibilidade que um aumento infinitesimal em $\bar{y}$ possa ocasionar a necessidade de grande aumento nas quantidades de insumos.

Se a tecnologia não é multiproduto então $Y^* \subseteq \mathbb{R}$. Neste caso, se afirmássemos a hemicontinuidade inferior de V à direita de $\bar{y}$ então teríamos V hemicontínua inferior em $\bar{y}$. É mais complicado tratar uma tecnologia multiproduto pois a ordem $\leq$ não é completa em $\mathbb{R}^m_+$. Nesta situação existem vetores de produto y próximos a $\bar{y}$ que não são comparáveis com $\bar{y}$ pois os contornos de $\bar{y}$ não esgotam o espaço.

Analisemos a possibilidade da tecnologia V ser hemicontínua. Suponhamos que

$$V : Y^* \subseteq Y \longrightarrow X;$$

onde X e Y são espaços topológicos. Suponhamos que Y é um espaço ordenado com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Das propriedades anteriormente definidas para uma tecnologia, vamos manter apenas aquela de ser monótona não-crescente. Neste caso, se exigimos que V seja hemicontínua inferior em relação aos contornos superiores então V é hemicontínua inferior, pelo teorema 2.15. Se exigimos que V seja hemicontínua superior em relação aos contornos inferiores então V é hemicontínua superior, pelo teorema 2.16.

Se a tecnologia V está definida nos espaços $\mathbb{R}^k$ e exigimos que V seja localmente não-disjunta e convexa então V será hemicontínua inferior. Intuitivamente, localmente não-disjunta significa que dado um vetor de produto $\bar{y}$ existe pelo menos um vetor de insumos $\bar{x}$ capaz de produzir todos os vetores de produto próximos ao vetor $\bar{y}$. Esta exigência não é equivalente a hemicontinuidade inferior de V. Todavia, como estamos afirmando que $graf(V)$ é convexo então pelo teorema 2.8 temos que V é hemicontínua inferior.

<u>Teorema 4.2</u>

i) Sejam X e Y espaços topológicos. Suponhamos que Y é um espaço ordenado com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Seja

$$V : Y^* \subset X \longrightarrow Y$$

tecnologia monótona não-crescente e hemicontínua inferior em relação aos contornos superiores então V é hemicontínua inferior. Se V é hemicontínua superior em relação aos contornos inferiores então V é hemicontínua superior.

ii) Se a tecnologia V,

$$V : Y^* \subset \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n_+,$$

tem a propriedade de ser localmente não-disjunta e é convexa então V é hemicontínua inferior. ■

Observe que na parte ii) do teorema anterior não fazemos a hipótese de tecnologia regular e monótona não-crescente.

Consideremos tecnologias que são uniproduto, não-crescentes e $V(y) \neq \emptyset$, $\forall y \in Y^* \subset \mathbb{R}$. Sejam $\bar{y} \in Y^*$ e $\varepsilon > 0$, se

$$y \in (\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon) \subset Y^*$$

então

$$\emptyset \neq V(\bar{y} + \varepsilon) \subset \bigcap_{y \in (\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon)} V(y).$$

Então, V é localmente não-disjunta. Se $\bar{y}$ está na fronteira de Y^* vale resultado semelhante.

<u>Teorema 4.3</u>

Se V é uma tecnologia uni-produto convexa, não-crescente tal que $V(y) \neq \emptyset$, $\forall y \in Y^* \subseteq R$ então V é hemicontínua inferior. ■

Se a tecnologia é regular então os conjuntos $V(y)$ são fechados. Neste caso, estamos afirmando que se uma seqüência

$$x_n \to \bar{x}$$

de vetores de insumo pertence ao conjunto $V(\bar{y})$ então $\bar{x} \in V(\bar{y})$. Em outras palavras, se podemos produzir $\bar{y}$ com vetores x_n arbitrariamente próximos ao $\bar{x}$ então podemos produzir $\bar{y}$ com $\bar{x}$. Isto não é equivalente a pedir que V seja hemicontínua inferior. Equivalente a hemicontinuidade inferior é a seguinte afirmação:

$$\text{se } y_n \to \bar{y} \text{ e } \bar{x} \in V(\bar{y})$$

então existem subseqüências

$$y_{n_k} \text{ e } x_{n_k} \in V(y_{n_k})$$

tal que

$$x_{n_k} \to \bar{x}.$$

Esta é uma outra maneira de entender a hemicontinuidade inferior. Para vetores de produto próximos de $\bar{y}$, que pode ser produzido com $\bar{x}$; existem vetores de insumos próximos de $\bar{x}$ que podem produzi-los.

A exigência que os conjuntos $V(y)$ sejam não-decrescentes implica que estes conjuntos não são limitados. Esta é a propriedade da livre disposição de insumos. Não se costuma postular a compacidade dos conjuntos $V(y)$ pela razão simples que isto não é necessário para provar os teoremas mais comuns da teoria da firma. Num aspecto importante a livre disposição de insumos tem uma implicação restritiva que é a impossibilidade de bens livres. Do ponto de vista da teoria econômica é muito razoável que os conjuntos $V(y)$ sejam limitados. Não dispomos de quantidades indefinidamente grandes de insumos e além disso as tecnologias reais não permitem o uso de quantidades não limitadas de insumos mesmo que tais quantidades estejam disponíveis. Portanto, é bastante razoável exigir que $V(y)$ limitado. Neste caso, se a tecnologia é regular os conjuntos $V(y)$ são compactos e a correspondência V é valor-compacto.

Igualmente, não podemos produzir quantidades indefinidamente grandes de produto. Se resolvemos considerar as duas condições estamos exigindo que a tecnologia Y seja limitada. Se exigimos além disso fechada então Y é um subconjunto compacto de R_+^{n+m}. Neste caso, temos um ganho adicional: a correspondência V é hemicontínua superior. Observe que a tecnologia Y é simplesmente o gráfico de V. Dada uma correspondência

$$F : X \longrightarrow Y;$$

tal que $\mathrm{graf}(F)$ é compacto e Y é um espaço T_3 então F é hemicontínua superior e valor-compacto.

<u>Teorema 4.4</u>

i) Sejam X e Y espaços topológicos. Suponhamos que Y é um espaço T_3 ordenado com a propriedade da interseção topológica dos contornos. Seja

$$V : Y^* \subseteq X \longrightarrow Y$$

tecnologia monótona não-crescente, hemicontínua inferior em relação aos contornos superiores e com gráfico $\overline{V}$ compacto então V é hemicontínua e valor-compacto.

ii) Se a tecnologia V;

$$V : Y^* \subseteq R_+^m \longrightarrow R_+^n;$$

tem a propriedade de ser localmente não-disjunta, é convexa e tem $\mathrm{graf}(V)$ compacto então V é hemicontínua e valor-compacto. ■

4.1.1 A Correspondência de Produção

Dada uma tecnologia

$$V : Y^* \subseteq \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$$

a inversa fraca de V é a correspondência

$$V^{-1} : X^* \subseteq \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m_+.$$

$V^{-1}(x)$ é o conjunto de todos os vetores de produto que podem ser produzidos com o vetor de insumo x.

V tem gráfico fechado se e só se V^{-1} tem gráfico fechado. Da mesma maneira, V tem gráfico convexo se e só se V^{-1} tem gráfico convexo.

Se a tecnologia é monótona então os subconjuntos $V(y)$ são monótonos não-decrescentes. Isto implica que V^{-1} é monótona não decrescente, isto é, se

$$x_1 \leq x_2 \text{ então } V^{-1}(x_1) \subseteq V^{-1}(x_2);$$

pelo lema 2.4.

Um postulado bastante razoável é

$$0 \in V^{-1}(x); \forall x \in X^*.$$

Este axioma é chamado "possibility of inaction". Estamos afirmando que dado qualquer vetor de insumos sempre podemos nada produzir com este vetor. Isto é o mesmo que afirmar que

$$V(0) = \mathbb{R}^m_+.$$

Neste caso V^{-1} tem a propriedade de ser localmente não disjunta.

O significado do axioma da "possibilidade de inação" é que qualquer vetor de insumos está no conjunto de requerimentos $V(0)$. Podemos substituir este axioma pela propriedade que utilizamos no corolario 2.21:

$$\forall x \in R^n_+, \exists U(x), \exists y \in R^m_+, U(x) \subseteq V(y),$$

onde $U(x)$ é uma vizinhança aberta de x.

Esta propriedade significa que dado qualquer vetor de insumo $\bar{x} \in R^n_+$ sempre existe uma vizinhança aberta, $U(\bar{x})$, de $\bar{x}$ tal que existe pelo menos um vetor de produto $\bar{y} \in R^m_+$ para o qual todos os vetores de insumos de $U(\bar{x})$ estão no conjunto de requerimentos de insumos $V(\bar{y})$.

A propriedade acima diz que a tecnologia tem uma certa imprecisão. Dado um vetor de insumos $\bar{x}$ sempre existe um vetor de produto $\bar{y}$ que pode ser obtido com $\bar{x}$ e com os vetores próximos a $\bar{x}$. O vetor 0 desempenha o papel do vetor $\bar{y}$ no caso da possibilidade de inação.

A propriedade a qual estamos nos referindo implica que V^{-1} tem a propriedade de ser localmente não-disjunta. Portanto, se V for convexa então V^{-1} é hemicontínua inferior.

<u>Teorema 4.5</u>

i) Se

$$V : Y^* \subseteq R^m_+ \longrightarrow R^n_+$$

é uma tecnologia convexa tal que $V(0) = R^m_+$ então V^{-1} é hemicontínua inferior.

ii) Se

$$V : Y^* \subseteq R^m_+ \longrightarrow R^n_+$$

é uma tecnologia convexa tal que

$$\forall x \in R^n_+, \exists U(x), \exists y \in R^m_+, U(x) \subset V(y)$$

então V^{-1} é hemicontínua inferior. ■

Para cada $x \in X^*$, seja

$$M(x) = \left\{ y \in R^m_+ \mid y = \max_{y \in V(x)} y \right\}$$

o conjunto de pontos de máximo do conjunto $V^{-1}(x)$. $M(x)$ é fechada, pelo teorema 3.12.

Definimos a correspondência de produção,

$$\phi : X^* \subset R^n_+ \longrightarrow R^m_+,$$

como

$$\phi(x) = M(x) \cap V^{-1}(x).$$

Fixado um vetor de insumos x, podemos produzir muitos vetores de produto. $\phi(x)$ são aqueles vetores de produto máximos $y \in V(x)$ que podemos produzir com x. No caso geral, podemos ter $\phi(x) = \emptyset$ mas se $V^{-1}(x)$ é compacto tal não ocorre.

<u>Teorema 4.6</u>

Se

$$V : Y^* \subset R^m_+ \longrightarrow R^n_+$$

é uma tecnologia convexa com gráfico compacto tal que $V(0) = R^m_+$ então $\phi(x)$ é hemicontínua e valor-compacto.

<u>Prova:</u>

V^{-1} é hemicontínua inferior, pelo corolário 2.20; V é hemicontínua superior, pelo corolário

1.6 então V^{-1} é hemicontínua e valor-compacto. Como M é fechada então ϕ é hemicontínua superior e valor-compacto, pelo teorema 1.3. ■

É claro que ϕ faz o papel da função de produção nos estudos mais tradicionais.

A seguir, estudamos a função custo. Como queremos analisar a variação do custo em relação ao produto, não utilizaremos a correspondência de produção neste trabalho.

4.2 A Função Custo

Em relação a função objetivo exigimos normalmente que a firma encontre um mercado de insumos competitivo. Existe um vetor de preços

$$p = (p_1, \ldots, p_n) > 0$$

onde cada $p_i > 0$ representa o preço unitário do insumo i. Exigindo $p_i > 0$, excluímos a possibilidade de bens gratuitos.

Definimos o funcional custo da firma como

$$\begin{aligned} c : \ \mathrm{graf}(V) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}_{+} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto c(x). \end{aligned}$$

Observe que $\mathrm{graf}(V) = Y$. Então, um mercado de insumos competitivo sem bens gratuitos traduz-se como

$$c(x, y) = p \cdot x$$

onde $p > 0$.

Dadas os pressupostos anteriores definimos a função custo mínimo como

$$C(p; y) = \inf_{x \in V(y)} p \cdot x.$$

Se exigimos a propriedades i) e iii) de uma economia regular então existe um vetor $x_0 \neq 0$ tal que $x_0 \in V(y)$, se $y \neq 0$. Se temos a propriedade ii), então

$$\left\{ x \in R^n_+ | p \cdot x \leq p \cdot x_0 \right\} \cap V(y) \neq \emptyset$$

é compacto pois o conjunto $\left\{ x \in R^n_+ | p \cdot x \leq p \cdot x_0 \right\}$ é compacto já que estamos supondo que $p > 0$. Observe que $p > 0$ significa que não existem bens livres. Portanto, a função $p \cdot x$ tem um vetor de mínimo x no conjunto acima. Para cada par $(p; y)$, o valor $C(p; y) = p \cdot x$.

A continuidade de C em relação ao vetor de preços p não exige muitas hipóteses sobre a tecnologia. Fixemos um vetor produto $\bar{y}$ e um vetor de preços $\bar{p}$. Suponhamos que $C(\bar{p}; \bar{y}) = \bar{p} \cdot \bar{x}$, ou seja, $\bar{x}$ é um vetor de insumos que minimiza custo para o $\bar{p}$ e o $\bar{y}$ fixados. Seja p_n um vetor de preços tal que

$$p_n \to \bar{p}.$$

Para cada vetor de preços p_n existe um vetor $x_n \in V(\bar{y})$ tal que $C(p_n; \bar{y}) = p_n \cdot x_n$, isto é, x_n minimiza custo para p_n e $\bar{y}$.

Se a subseqüência $C(p_{n_k}; y) = p_{n_k} \cdot x_{n_k}$ converge, como $\bar{p} > 0$, então x_{n_k} converge ou uma subseqüência de x_{n_k} converge. Suponhamos que x_{n_k} converge:Digamos que $x_{n_k} \to x^*$. Como $V(\bar{y})$ é fechado então $x^* \in V(\bar{y})$. Neste caso,

$$C(p_{n_k}; \bar{y}) = p_{n_k} \cdot x_{n_k} \to \bar{p} \cdot x^* \geq C(\bar{p}; \bar{y}) = \bar{p} \cdot \bar{x}.$$

Logo,

$$\liminf C(p_n; \bar{y}) \geq C(\bar{p}; \bar{y});$$

ou seja, $C(\cdot; \bar{y})$ é semicontínua inferior em $\bar{p}$. Por outro lado,

$$C(p_{n_k}; y) = p_{n_k} \cdot x_{n_k} \leq p_{n_k} \cdot \bar{x} \to \bar{p} \cdot \bar{x} = C(\bar{p}; \bar{y}):$$

Portanto,

$$\limsup C(p_n; \bar{y}) \leq C(\bar{p}; \bar{y});$$

ou seja $C(\cdot; \bar{y})$ é semicontínua superior em $\bar{p}$.

No caso, em que a função custo tem a forma $p \cdot x$ então as suposições de uma tecnologia regular e que não existam bens livres bastam para mostrar a continuidade de $C(\cdot; \bar{y})$.

O mesmo não se pode dizer em relação à variável y. Resultados de continuidade da função custo em relação ao produto estão relacionados às afirmações de como variam os conjuntos de requerimentos de insumos $V(y)$ em relação ao vetor produto y e não temos nenhum axioma em relação a isto.

4.2.1 Descontinuidades da Função Custo

Em relação ao produto y, as propriedades de regularidade, valor-monoticidade e valor-convexidade de uma tecnologia separada são insuficientes para assegurar a continuidade da função custo mínimo como veremos abaixo.

Exemplo1

Dado $y > 0$, definimos

$$V(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_i \geq y; \forall i = 1; 2 \right\};$$

se y é irracional e definimos

$$V(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_+ | x_1 \geq y \right\};$$

se y é racional. Facilmente, se observa que os conjuntos $V(y)$ são convexos, monótonos não-decrescentes e fechados. Seja

$$p = (p_1, p_2),\ p_2 > 0;$$

o vetor de preços. A função custo mínimo é dada por

$$C(y) = \begin{cases} (p_1 + p_2) \cdot y, \text{ se é } y \text{ irracional;} \\ p_1 \cdot y, \text{ se } y \text{ é racional.} \end{cases}$$

Portanto, C não é contínua em qualquer $y > 0$.

Neste exemplo,

$$\Psi(y) = \begin{cases} \{(y, y)\}, \text{ se é } y \text{ irracional;} \\ \{(y, 0)\}, \text{ se } y \text{ é racional.} \end{cases}$$

que não é hemicontínua superior ou inferior.

Exemplo 2

A tecnologia acima não possui a propriedade de ser monótona não-crescente ou convexa. O exemplo abaixo possui todas as oitos propriedades anteriores.

Dado $y \geq 1$, definimos

$$V(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_+ | x_i \geq y, \forall i = 1, 2 \right\};$$

se $0 < y < 1$ definimos
$$V(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_+ | x_1 \geq y \right\}.$$

Seja
$$p = (p_1, p_2),\ p_2 > 0,$$

o vetor de preços. A função custo mínimo é dada por
$$C(y) = \begin{cases} (p_1 + p_2) \cdot y, \text{ se } 1 \leq y; \\ p_1 \cdot y, \text{ se } 0 < y < 1. \end{cases}$$

Portanto, C não é contínua em $y = 1$. Como a tecnologia é monótona e tem a propriedade de ser localmente não-disjunta então é hemicontínua inferior; como a função custo é contínua então a função custo mínimo é semicontínua superior. Mas, a função custo mínimo não é semicontínua inferior. Portanto, podemos concluir que a tecnologia não é hemicontínua superior.

Neste exemplo,
$$\Psi(y) = \begin{cases} \{(y, y)\}, \text{ se } 1 \leq y; \\ \{(y, 0)\}, \text{ se } 0 < y < 1. \end{cases}$$
que não é hemicontínua superior ou inferior em $y = 1$.

4.2.2 Continuidade da Função Custo em Relação ao Produto

Se a forma da função custo é $f(x) = p \cdot x$ para $x \in V(y)$, a continuidade da função custo mínimo em relação ao produto y depende das propriedades da tecnologia Y. O objetivo dos exemplos acima é mostrar que as exigências usuais não bastam.

Sempre podemos postular a hemicontinuidade inferior ou superior para tecnologias em geral ou então verificar estas propriedades no caso particular.

Suponhamos que a função custo $f(x)$ é contínua. Se a tecnologia é hemicontínua, valor-compacto $V(y) \neq \emptyset$ para todo y, e

$$C(y) = \inf_{x \in V(y)} f(x)$$

então, $C(y)$ é contínua em relação à variável y e

$$\Psi(y) = \{x \in V(y) \mid f(x) = C(y)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto, pelo teorema 3.13. A correspondência $\Psi(y)$ é a demanda por fatores de produção. Na situação geral que estamos tratando, observe que Ψ não é necessariamente uma função.

A continuidade da função custo mínimo em relação ao produto é equivalente às condições

$$\left(f \circ \overline{V}\right)^{-}(-\infty; \lambda) \text{ e } \left(f \circ \overline{V}\right)^{+}(\lambda; +\infty)$$

sejam abertos do $\mathbb{R}^n_+$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. O significado disto é que a continuidade depende das propriedades da correspondência

$$f \circ \overline{V};$$

que representa a estrutura de custo, e indiretamente das propriedades individuais de f e V. As propriedades de $f \circ \overline{V}$ dependem das propriedades de f e V e da composição $\circ$. Se separamos as propriedades do custo e as propriedades da tecnologia estamos reduzidos a obter condições suficientes mas não necessárias para a continuidade. Esta é uma dificuldade inevitável. Aparentemente, o que observamos é a estrutura de custo. A decisão de estabelecer uma empresa e a tecnologia adotada levam em conta a estrutura de mercado pré-existente. Mas, das propriedades da estrutura de custo $f \circ \overline{V}$ não podemos obter as propriedades do custo e da tecnologia. Portanto, em princípio, deveríamos estabelecer independentemente do custo e da tecnologia propriedades básicas e economicamente relevantes da estrutura de custo $f \circ \overline{V}$.

As hipóteses que fazemos sobre a função custo

$$f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

são: f é monótona não-decrescente e semicontínua inferior no contorno inferior de cada vetor de insumo $x \in \mathbb{R}^n_+$. A primeira hipótese é bastante óbvia: maiores ou iguais quantidades de todos os insumos implicam um maior ou igual custo. A segunda hipótese interpreta uma assimetria do custo que é bastante razoável assumir. A semicontinuidade inferior em relação aos contornos inferiores expressa que os custos estão limitados por baixo sem fazer hipóteses sobre a limitação superior. Em outras palavras, a diminuição das quantidades de todos os insumos provavelmente diminua custos mas um aumento das quantidades de insumos, mesmo que pequeno, pode resultar num grande aumento de custos. Sobre o consumo de uma quantidade maior, mesmo que infinitesimal de determinado insumo, energia elétrica, por exemplo, pode resultar na incidência de um imposto ou tarifa maior, etc.

O conceito de rigidez inferior também procura expressar esta assimetria.

Como $\mathbb{R}^n_+$ é um espaço que tem a propriedade da interseção topológica dos contornos em relação à ordem $\leq$ então podemos concluir que f é semicontínua inferior.

Observe que não estamos excluindo os casos em que a função de custo é contínua como, por exemplo, a situação usual $f(x) = p \cdot x$.

Neste trabalho estamos interessados em quais exigências adicionais para uma tecnologia além das oitos anteriormente comentadas, asseguram a semicontinuidade ou continuidade do custo mínimo em relação ao produto.

Primeiramente, suponhamos que a função custo

$$f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

seja contínua.

<u>Teorema 4.7</u>

Seja $f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ função de custo contínua e seja X^* compacto.

i) $V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia regular, fechada então

$$C : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

é semicontínua inferior.

ii) $V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia regular, fechada, hemicontínua inferior então

$$C : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

é contínua e

$$\Psi(y) = \{x \in V(y) | f(x) = C(y)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto.

<u>Prova:</u>

i) V é hemicontínua superior e valor-compacto pelo corolário 1.4. Pelo corolário 3.4, C é semicontínua inferior.

ii) V é hemicontínua e valor-compacto pelo corolário 1.4. Pelos corolários 3.4 e 3.6, C é contínua. A demanda por insumos Ψ é hemicontínua superior e valor-compacto pelo teorema 3.13. ■

<u>Teorema 4.8</u>

Seja $f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ função de custo contínua.

i) $V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia uni-produto, convexa, monótona não-crescente e $V(y) \neq \emptyset$;

$\forall y \in Y^*$ então

$$C : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

é semicontínua superior e

$$\Phi(y) = \{x \in V(y) | f(x) = C(y)\}$$

é fechada.

ii) Seja X^* compacto. $V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia uni-produto, convexa, fechada, monótona não-crescente, $V(y) \neq \emptyset$, $\forall y \in Y^*$ então

$$C : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

é contínua e

$$\Phi(y) = \{x \in V(y) | f(x) = C(y)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto.

Prova:

i) V é hemicontínua inferior pelo teorema 4.3. Isto implica que C é semicontínua superior pelo corolário 3.6. A demanda Φ é fechada pelo teorema 3.7.

ii) V é hemicontínua e valor-compacto então C é contínua e a demanda Φ é hemicontínua superior pelo teorema 3.13. ■

Teorema 4.9

Seja $f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ função de custo contínua.

i) $V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia convexa com a propriedade de ser localmente não-disjunta e $V(y) \neq \emptyset$; $\forall y \in Y^*$ então

$$C : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

é semicontínua superior e

$$\Phi(y) = \{x \in V(y) \,|\, f(x) = C(y)\}$$

é fechada;

ii) Seja X^* compacto. $V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia convexa, fechada, com a propriedade de ser localmente não-disjunta e $V(y) \neq \emptyset$, $\forall y \in Y^*$ então

$$C : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

é contínua e

$$\Phi(y) = \{x \in V(y) \,|\, f(x) = C(y)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto. ■

Suponhamos que a função custo

$$f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

seja monótona não-decrescente e semicontínua inferior em relação ao contorno inferior.

Chamemos

$$\Phi(y) = \{x \in V(y) \,|\, f(x) \leq f(\overline{x} + 0); \forall \overline{x} \in V(y)\}$$

de demanda ampliada.

<u>Teorema 4.10</u>

Seja $f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ função de custo monótona não-decrescente, semicontínua inferior em relação ao contorno inferior e seja X^* compacto.

i) $V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia regular, fechada então

$$C : Y^* \longrightarrow R$$

é semicontínua inferior.

ii) $V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia regular, fechada, hemicontínua inferior então

$$C : Y^* \longrightarrow R$$

é semicontínua inferior e

$$\Psi(y) = \{x \in V(y) | f(x) \leq f(\overline{x} + 0); \forall \overline{x} \in V(y)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto.

<u>Prova:</u>

i) V é hemicontínua superior e valor-compacto então pelo corolário 3.4 C é semicontínua inferior.

ii) A demanda por insumos Ψ ampliada é hemicontínua superior e valor-compacto pelo teorema 3.15. ■

<u>Teorema 4.11</u>

Seja $f : X^* \longrightarrow R$ função de custo monótona não-decrescente, semicontínua inferior em relação ao contorno inferior e seja X^* compacto.

$V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia uni-produto, convexa, fechada, monótona não-crescente, $V(y) \neq \emptyset$; $\forall y \in Y^*$ então

$$C : Y^* \longrightarrow R$$

é semicontínua inferior e

$$\Psi(y) = \{x \in V(y) | f(x) \leq f(\overline{x} + 0); \forall \overline{x} \in V(y)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto.

<u>Prova:</u>

Como V é uni-produto, monótona não-crescente e convexa então tem a propriedade de ser localmente não-disjunta. Portanto, V é hemicontínua inferior pelo teorema 4.3. V é fechada e X^* é compacto então V é hemicontínua superior e valor-compacto então C é semicontínua inferior e a demanda Ψ ampliada é hemicontínua superior e valor-compacto pelo teorema 3.19. ■

<u>Teorema 4.12</u>

Seja $f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ função de custo monótona não-decrescente, semicontínua inferior em relação ao contorno inferior e seja X^* compacto.

i) $V : Y^* \longrightarrow X^*$ tecnologia convexa, fechada, com a propriedade de ser localmente não-disjunta e $V(y) \neq \emptyset$, $\forall y \in Y^*$ então

$$C : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

é semicontínua inferior e

$$\Psi(y) = \{x \in V(y) | f(x) \leq f(\bar{x} + 0); \forall \bar{x} \in V(y)\}$$

é hemicontínua superior e valor-compacto. ■

Usando os teoremas do capítulo 3 sobre correspondência monótonas não-crescentes hemicontínuas inferiores ou superiores em relação aos contornos, usando os teoremas do capítulo 2 sobre funções rígidas podemos formular teoremas similares aos de cima para estas funções e correspondências.

O conjunto $\Psi(\bar{y})$, definido pela demanda ampliada, inclui os vetores de custo mínimo pois se

$$f(x_0) \leq f(x)$$

para todo $x \in V(\bar{y})$ então

$$f(x_0) \leq f(x + 0)$$

para todo $x \in V(\bar{y})$.

Se f apresenta descontinuidades, o conjunto dos vetores que minimizam custos, fixado $\bar{y}$, inclui outros vetores que são aqueles nos quais os valores de f são menores que todos os limites de f nos contornos superiores de pontos de $V(\bar{y})$. Neste caso, a noção de estabilidade topológica expressa pela hemicontinuidade superior só pode ser afirmada para este conjunto mais amplo. Estamos incluindo na demanda por insumos além dos vetores que minimizam de fato os custos aqueles que minimizam os saltos que existem nos custos caso haja expansão no consumo.

Neste capítulo estudamos tecnologias, estabelecemos alguns resultados sobre a continuidade da função custo mínimo e da hemicontinuidade da demanda por insumos.

Estudamos ainda em relação às tecnologias, as funções de custo mínimo e as correspondências que resultam das demandas por insumos. Observamos algumas propriedades que permitem concluir a continuidade ou semicontinuidade das funções de custo mínimo e a hemicontinuidade das demandas.

Os resultados serão apresentados na conclusão, a seguir.

Parte II

Conclusão

Conclusão

O presente trabalho partiu da constatação de que as propriedades usuais atribuídas às tecnologias não são suficientes para assegurar a continuidade da função custo mínimo em relação ao produto, mesmo quando a função custo total tem a forma simples $p \cdot x$.

O objetivo desta tese foi tríplice: i) indicar as condições sobre as tecnologias que, juntamente com as condições usuais, implicam na referida continuidade; ii) analisar as propriedades de estabilidade das demandas por insumos associadas às tecnologias e aos custos; iii) permitir que as funções custo total possam exibir descontinuidades.

Formulamos o problema como um problema de otimização paramétrica e utilizamos o teorema de Berge. Obtivemos generalizações deste teorema. O teorema do máximo foi desmembrado em duas questões diversas: o problema de estabelecer a continuidade da função valor ótimo e o de estabelecer a hemicontinuidade da correspondência argumentos ótimos.

Em relação ao primeiro problema, obtivemos condições necessárias e suficientes para a semicontinuidade da função valor ótimo. Estes resultados estão expressos no corolário 3.2. Observamos, em relação à função custo mínimo, que a continuidade está determinada pelas propriedades de um terceiro conceito que chamamos de estrutura de custo. A estrutura de custo pode ter propriedades que não são inteiramente determinadas pela função de custo total e pela tecnologia.

Para demonstrar o teorema do máximo e suas generalizações utilizamos um resultado obtido por Walker. Na seção 3.2.1, estabelecemos algumas conseqüências do que chamamos lema de Walker. No teorema 3.12, provamos que a correspondência dada pelos pontos de máximo de uma correspondência hemicontínua inferior é fechada. No corolário 3.20, mostramos que correspondências hemicontínuas superiores valor-compacto, com gráfico convexo e imagens com interseção têm a correspondências definidas pelos pontos de máximo das imagens hemicontínua superior e valor-compacto.

O problema de modelagem das funções de custo total nos conduziu a uma estrutura topológica específica. Esta estrutura denominamos espaços topológicos parcialmente ordenados com a propriedades da interseção topológica dos contornos. Definimos, nestes espaços, as funções de custo como funções monótonas não-decrescentes semicontínuas inferiores em relação aos contornos inferiores. Mostramos no teorema 2.6 que tais funções são semicontínuas inferiores. Também, formulamos o conceito de função monótona não-decrescente rígida inferior com o mesmo objetivo. Mostramos no teorema 2.11 que tais funções são semicontínuas inferiores.

As tecnologias foram vistas inicialmente de maneira muito geral como correspondências entre espaços topológicos com vistas a determinar propriedades que juntamente com algumas outras mais comuns impliquem estabilidade. Formulamos o conceito de correspondência localmente não-disjunta. Obtivemos o teorema 2.18 que estabelece que correspondências convexas com a propriedade anterior são hemicontínuas inferiores. O corolário 2.20 estabelece que correspondências convexas tais que a imagem de algum ponto é todo o espaço são hemicontínuas inferiores. Em termos de tecnologias o fato que a imagem de algum ponto é todo o espaço é chamada "possibilidade de inação".

No corolário 2.20, estabelecemos o resultado que correspondências convexas tal que a imagem de algum ponto é todo o espaço têm inversas hemicontínuas inferiores. No corolário 2.21, generalizamos o resultado 2.20.

O teorema 2.18, nos permitiu estabelecer dois resultados. Provamos que tecnologias uniprodutos, convexas, não-crescentes são hemicontínuas inferiores. Isto está no teorema 4.3. Definimos o que chamamos correspondência de produção, uma generalização das funções de produção comuns. Mostramos no teorema 4.6, que para tecnologias convexas com gráficos compactos e com a propriedade da "possibilidade de inação", a correspondência de produção é hemicontínua e valor-compacto.

Na seção 4.2.2, mostramos na parte i) do teorema 4.8 que tecnologias uniproduto, convexas, monótonas não-crescentes, regulares implicam função de custo mínimo semicontínua superior e demanda por insumos fechada se a função de custo total é contínua; na parte ii), mostramos que tecnologias uniproduto, convexas, fechadas, monótonas não-crescentes, regulares com imagem compacta implicam função de custo mínimo contínua e demanda por insumos hemicontínua superior e valor-compacto se a função de custo total é contínua. Se a tecnologia for multiproduto e possuir a propriedade da interseção local dos conjuntos de requerimentos de insumos então os mesmos resultados são válidos. Este resultado encontra-se no teorema 4.9.

Se a função de custo total não for contínua, obtemos que a função de custo mínimo é semicontínua inferior. Estabelecemos a hemicontinuidade do que chamamos a demanda ampliada. Estes resultados estão nos teoremas 4.11 e 4.12.

As observações a seguir referem-se as linhas de pesquisa que poderão derivar deste trabalho.

A estrutura de espaços topológicos parcialmente ordenados foi pouco explorada na literatura matemática. De fato, o único trabalho digno de nota é o de Nachbin (1965). Espaços com a propriedade da interseção topológica dos contornos é própria do presente trabalho. Portanto, tem-se possibilidade de estudar esta estrutura caso haja interesse e possibilidades de aplicação.

Na verdade, a estrutura topológica proposta neste trabalho tem duas propriedades: i) os contornos são abertos e ii) toda a vizinhança aberta de um ponto intercepta os contornos deste ponto. Para alguns resultados supomos, além das propriedades anteriores, que dados dois pontos $x_1 < x_2$ sempre existe um ponto intermediário $\overline{x}$ tal que $x_1 < \overline{x} < x_2$. Tais estruturas podem servir para estudar preferências não-completas na teoria do consumidor.

Nosso resultado inédito de que correspondências convexas com a propriedade de serem localmente não-disjuntas são hemicontínuas inferiores tem interesse matemático próprio em teoria da otimização e análise não-linear. O mesmo pode se dizer dos corolários 2.20 e 2.21.

As relações entre as propriedades de uma correspondência e sua inversa fraca não tem chamado a atenção na literatura. Nosso resultado simples, expresso pelo corolário 2.20, é único e inédito, até onde sabemos. Neste trabalho, abordamos muito superficialmente a relação entre a tecnologia e aquela correspondência que chamamos correspondência de produção que é obtida pela maximização da inversa fraca da tecnologia. Existe nesta análise a possibilidade de novos resultados. A correspondência de produção tem mais propriedades topológicas que a tecnologia da qual se originou como se vê no teorema 4.5. Portanto, é razoável prosseguir nesta direção.

Parte III

Lista de Símbolos

Lista de S¶ımbolos

9 existe pelo menos um

8 para todo, para todos

; conjunto vazio

2 pertence

µ est¶a contido ou ¶e igual

\ interse»c~ao

[uni~ao

$A^c = X n A$ complementar de A em X se A µ X

R conjunto dos n¶umeros reais

R_+ conjunto dos n¶umeros reais maiores ou iguais a zero

R^n os espa»cos reais $(x_1; : : : x_n)$

R^n_+ os espa»cos reais $(x_1; : : : x_n)$ tal que x_i ¸ 0

$U(x); V(x)$ vizinhan»cas abertas de x num espa»co topol¶ogico

$V(y)$ conjunto de requerimentos de insumos no cap¶ıtulo 4

· a ordem parcial $(x_1; : : : x_n)$ · $(y_1; : : : y_n)$ se e s¶o se x_i · $y_i; i = 1; : : : ; n$

$f : X$ ¡! Y fun»c~ao de X em Y

$F : X$ ¡! Y correspond^encia de X em Y

Parte IV

Bibliogra¯a

Bibliografia

ARROW, K. e INTRILIGATOR, M. Handbook of Mathematical Economics. Ed. K. Arrow e M. Intriligator. Amsterdan: North-Holland, 1981. v.1.

AUBIN, J.-P. Applied Abstract Analysis. New York: Wiley Interscience, 1997.

AUBIN, J.-P. Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis. New York: Springer-Verlag, 1993.

AUBIN, J.-P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory. Revised edition. New York: North-Holland, 1982.

AUBIN, J.-P. e CELLINA, A. Differential Inclusions, Set-Valued Maps and Viability Theory. Berlin: Springer-Velag, 1984.

AUBIN, J.-P. e FRANKOWSKA, H. Set-Valued Analysis. Boston: Birkhäuser, 1990.

BANK, B. et alii. Non-Linear Parametric Optimization. Basil: Birkhäuser, 1983

BERGE, C. Topological Spaces. New York: Dover, 1997.

BORDER, K. Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory. England: Cambridge University Press, 1985.

BORISOVICH, Y. e alii. Multivalued Mappings, Journal of Soviet Mathematics, v. 24, n. 6, 1984.

BORWEIN, J. Set-Valued Analysis. Book Review. Bulletin of The American Mathematical Society, v. 26, n. 1, jan 1992.

BORWEIN, J e LEWIS, A. Convex Analysis and Optimization. Theory and Examples. New York: Springer-Verlag, 2000.

BREZIS, H. Analyse Fonctionelle: Théorie et Applications. Paris: Masson, 1987.

BROWN, D. Equilibrium Analysis with Non-Convex Tecnologies. Handbook of Mathematical Economics. Ed. W. Hildenbrand e H. Sonnenschein. Amsterdan: Elsevier Science Publishers, 1991. v.4.

CHAMBERS, R. Applied Production Analysis: a Dual Approach. New York: Cambridge University Press, 1998.

CHARALAMBOS, D. et alii. Existence and Optimality of Competitive Equilibria. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

CHRISTENSON, C. VOXMAN, W. Aspects of Topology. New York: Marcel Dekker, 1997.

CLARKE, F. Optimization an Nonsmooth Analysis. New York: Siam, 1990.

CORNES, R. Duality and Modern Economics. New York: Cambridge University Press, 1992.

DEBREU, G. Mathematical Economics. New York: Cambridge University Press, 1983.

DEBREU, G. Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. New York: Yale University Press, 1975.

DUTTA, P. e MITRA, T. Maximum Theorems for Convex Structures with an Application to the Theory of Optimal Intertemporal Allocation. Journal of Mathematical Economics, v. 18, p. 77-86, 1989.

EILENBERG, S. Ordered Topological Spaces. American Journal of Mathematical, v. 63, p. 39-45, 1941.

EKELAND, I. e TURNBULL, T. Infinite-Dimensional Optimization and Convexity. Chicago: The University of Chicago Press, 1983. (Chicago Lectures in Mathematics Series)

EVANS, L. e GARIEPY, R. Lectures Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions. University of Kentucky, Preprint Series, 1992.

GREEN, J. HELLER, W. Mathematical Analysis and Convexity with Applications to Economics. Handbook of Mathematical Economics, Ed. K. Arrow e M. Intriligator. Amsterdan: North-Holland, 1981. v.1.

HILDEBRAND, W. e KIRMAN, A. Equilbrium Analysis. Variations on the Themes by Edgeworth e Walras. New York: North-Holland, 1988.

HÖNIG, C. Aplicações da Topologia à Análise. Brasília: IMPA-CNPQ, 1976.

ICHIISHI, T. Game Theory for Economic Analysis. New York: Academic Press, 1983.

INGRAO, B. ISRAEL, G. The Invisible Hand. Economic Equilibrium in the History of

Science. New York: MIT Press, 1987

LUCAS, R., STOKEY, N. e PRESCOTT, E. Recursive Methods in Economic Dynamics. New York: Harvard University Press, 1989.

KATZ, M. Price Discrimination and Monopolistic Competition. Econometrica, v. 52, n. 6, p. 1453-1471, 1984..

KATZ, M. Non-Uniforming Pricing Output and Welfare under Monopoly. Review of Economics Studies, p.37-56, 1983

KELLEY, J. General Topology. Toronto: D. Van Nostrand Company Inc., 1955.

KHAN, M. e MITRA, T. On the Existence of a Stationary Optimal Stock for a Multi-sector Economic: a Primal Approach. Journal of Economic Theory, v. 40, p. 319-328, 1986.

KOMIYA, H. Inverse of the Berge Maximum Theorem, Economic Theory, v. 9, p. 371-375, 1997.

KOMIYA, H. A Simple Proof of K-K-K-M-S Theorem. Economic Theory, v. 4, p. 463-466, 1994.

KRASA, S. e YANNELIS, N. An Elementary Proof of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-Shapley Theorem. Economic Theory, v. 4, p. 467-471, 1994.

MANDY, D. Continuity of Optima, Journal of Economic Theory, v. 54, p. 460-467, 1991.

MAS-COLELL, A. et alii. Microeconomic Theory. New York: Oxford University Press, 1995.

McFADDEN, D e FUSS, M. Production Economics: a Dual Approach to Theory and Applications. Amsterdan: North-Holland, 1971. v.1.

McKENZIE, L. Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics. Handbook of Mathematical Economics. Ed. K. Arrow e M. Intriligator. Amsterdan: North-Holland, 1986. v. 3.

NACHBIN, L. Topologia e Ordem. Chicago: Chicago University Press, 1950.

NACHBIN, L. Topology and Order. Princeton: Van Nostrand, 1965.

NADIRI, M. Producers Theory. Handbook of Mathematical Economics. Ed. K. Arrow e M. Intriligator. Amsterdan: North-Holland, 1982. v. 2.

OREN, S., SMITH, S. WILSON, R. Competitive Non-Linear Tari®s. Journal of Economic Theory. v. 29, p. 49-71, 1983.

REED, M. e SIMON, B. Functional Analysis, Vol 1, Methods of Modern Mathematical Physics. New York: Academic Press, 1980.

ROCKAFELLAR, R. et alii. Variational Analysis. Berlin: Springer, 1998.

ROCKAFELLAR, R. Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970.

SAMUELSON, P. Foundations of Economic Analysis. New York: Atheneum, 1974.

SINGER, I. e THORPE, J. Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry. Scott, New York: Foresman and Company, 1967.

TAYLOR, A. General Theory of Functions and Integration. New York: Dover, 1985.

TIROLE, J. e BONIN, H. The Theory of Industrial Organization. New York: Mit Press, 1998.

VARIAN, H. Microeconomic Analysis. 3 th. New York: Norton, 1992.

WALKER, M. A Generalization of the Maximum Theorem. International Economic Review, v. 20, n. 1, 1979.

WILLARD, S. General Topology. New York: Addison-Wesley, 1970.

YOSIDA, K. Functional Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

ZEIDLER, E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Fixed-Points Theorems. New York: Springer-Verlag, 1986. v. 1.