

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

NÚBIA LÚCIA CARDOSO GUIMARÃES

**FAZER E COMPREENDER NA GÊNESE INSTRUMENTAL: PENSANDO-COM
REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE) do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte das exigências para obtenção do título de Doutora em Informática na Educação.

Orientadora: Márcia Rodrigues Notare

Linha de pesquisa: Interfaces Digitais em
Educação, Arte, Linguagem e Cognição

Porto Alegre
2024

CIP - Catalogação na Publicação

Guimarães, Núbia Lúcia Cardoso
FAZER E COMPREENDER NA GÊNESE INSTRUMENTAL:
PENSANDO-COM REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS DAS SUPERFÍCIES
QUÁDRICAS / Núbia Lúcia Cardoso Guimarães. -- 2024.
626 f.
Orientador: Márcia Rodrigues Notare.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. Desenvolvimento cognitivo. 2. Registros de representação semiótica. 3. Gênese instrumental. 4. Matemática dinâmica. 5. Superfícies quádricas. I. Notare, Márcia Rodrigues, orient. II. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CINTED – CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PPGIE – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

**ATA SOBRE A DEFESA DE TESE DE DOUTORADO
NÚBIA LÚCIA CARDOSO GUIMARÃES**

Às quatorze horas do dia vinte e quatro de junho de dois mil e vinte e quatro, no endereço eletrônico <https://mconf.ufrgs.br/webconf/00108989>, conforme a portaria 02 de 10/10/2022 da PROPG/UFRGS que regulamenta a modalidade híbrida ou a distância para as bancas de defesas de cursos *stricto sensu*, reuniu-se a Comissão de Avaliação, composta pelos Professores Doutores: Marcus Vinicius de Azevedo Basso, Vandoir Stormowski e Nicolau Matiel Lunardi Diehl, para a análise da Defesa de Tese de Doutorado intitulada “Fazer e Compreender na Gênese Instrumental: Pensando-com Representações Dinâmicas das Superfícies Quádricas” da doutoranda de Pós-Graduação em Informática na Educação Núbia Lúcia Cardoso Guimarães sob a orientação da Prof.^a Dr.^a Márcia Rodrigues Notare Meneghetti. A Banca, reunida, após a apresentação e arguição, emite o parecer abaixo assinalado.

[X] Considera a Tese Aprovada

() sem alterações;

(X) sem alterações, com voto de louvor;

() e recomenda que sejam efetuadas as reformulações e atendidas as sugestões contidas nos pareceres individuais dos membros da Banca;

[] Considera a Tese Reprovada.

Considerações adicionais (a critério da Banca):

A tese defendida pela doutoranda atende plenamente os requisitos do PPGIE. Trata-se de trabalho original com contribuições para as áreas de Informática na Educação, Educação Matemática e Psicologia Cognitiva ao articular as teorias de Rabardel, Duval e Piaget.

A banca sugere a escrita de artigos visando a disseminação dos importantes resultados obtidos durante a realização da cuidadosa investigação empreendida pela doutoranda.

Finalmente, sugere-se que os pareceres enunciados durante a arguição dos membros da banca sejam levados em consideração para a apresentação do texto a ser publicado no repositório de teses da UFRGS e CAPES.

Documento assinado digitalmente
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE MENEGHETTI
Data: 26/06/2024 10:55:31-0300
Verifique em <https://validar.jf.gov.br>

Prof.^a Dr.^a Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Orientadora

Documento assinado digitalmente
MARCUS VINICIUS DE AZEVEDO BASSO
Data: 25/06/2024 21:58:55-0300
Verifique em <https://validar.jf.gov.br>

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
PPGIE/UFRGS

Documento assinado digitalmente
VANDOIR STORMOWSKI
Data: 25/06/2024 14:19:59-0300
Verifique em <https://validar.jf.gov.br>

Prof. Dr. Vandoir Stormowski
IME/UFRGS

Documento assinado digitalmente
NICOLAU MATIEL LUNARDI DIEHL
Data: 25/06/2024 07:49:13-0300
Verifique em <https://validar.jf.gov.br>

Prof. Dr. Nicolau Matiel Lunardi Diehl
PROFMAT/IFRS

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal do Rio Grande do Sul – IFRS Campus Canoas, especialmente representados pela professora doutora Patrícia Hubler na direção geral e pelo professor doutor Alexandre Morey na direção de ensino, pela confiança na minha capacidade e investimento no meu crescimento profissional.

Ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE) e a Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), pela oportunidade dessa maravilhosa formação.

Aos professores doutores Marcus Basso, Vandoir Stormowski e Nicolau Diehl, pelas valiosas contribuições na qualificação, que contribuíram para que chegássemos até aqui, quando ajudaram a dar norte a esta pesquisa.

À minha querida e maravilhosa orientadora, professora doutora Márcia Notare, a qual serei eternamente grata pelo aceite em me orientar, pelo incentivo, pela sensibilidade oriunda da sua profunda compreensão do processo de construção de conhecimento.

Aos meus amados irmãos, Ana Paula Guimarães Brasil, Fernanda Guimarães Branco, Maikel Cardoso Guimarães e Douglas Guimarães, extensivo aos seus cônjuges e meus queridos sobrinhos, com os quais sempre recuperei minhas energias após intensos e prolongados momentos de *stress*.

Aos meus amados pais, Nildo Souza Guimarães e Tânia Maria Cardoso Guimarães (*in memorian*), sem os quais sequer estaria nesse mundo e cujos sacrifícios e esforços nos permitiram chegar até aqui.

Aos meus amados companheiros de caminhada, Jamir da Silva Alves e Gabrielle Guimarães Alves, pelo apoio nessa escolha pessoal com influência nas relações de convívio diário, pelas suas compreensões nas minhas ausências, pela necessária segurança proporcionada pelas suas presenças.

A Deus, pela presença em todos os momentos, proporcionando a paz e o equilíbrio necessários para essa jornada, os direcionamentos nos momentos de incertezas, a força e a fé para persistir nas dificuldades.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção.” (Paulo Freire), porque “O conhecimento não está no sujeito nem no objeto de estudo, mas é decorrente das contínuas interações entre os dois.” (Jean Piaget)

RESUMO

Esse estudo está centrado nas questões que envolvem os processos cognitivos desencadeados durante a gênese instrumental dos participantes, em situações de ensino e aprendizagem envolvendo as representações dinâmicas das superfícies quádricas. A presente pesquisa nasce de muitas motivações, mais especialmente das necessidades de enfrentamento dos obstáculos de aprendizagem comuns na prática do professor de matemática. Um dos desafios encontrados pela pesquisadora na sua trajetória como docente, relacionava-se ao ensino e aprendizagem das superfícies quádricas. Além de dar suporte a outras disciplinas no Ensino Superior e posterior, e das aplicações envolvendo diversas áreas do conhecimento, o estudo dessas superfícies engloba parte significativa dos conhecimentos de Geometria Analítica. Consistindo na associação entre entes algébricos e geométricos, a Geometria Analítica torna possível a representação de diversos fenômenos e situações. A análise de gráficos permeia todos os níveis de ensino em diferentes disciplinas e cursos, inclusive a prática cotidiana, consistindo em um conhecimento base para a formação do professor de matemática. O acesso a um objeto matemático só é possível através de representações, por exemplo sua equação ou gráfico, que carregam informações parciais e complementares sobre este ente. A articulação entre essas representações enriquece o conhecimento sobre o objeto de estudo, podendo ser explorada por meio de ambientes de matemática dinâmica. A presente pesquisa teve por objetivo compreender como ocorre o desenvolvimento cognitivo durante o processo de gênese instrumental com representações dinâmicas das superfícies quádricas. Para investigação do processo de construção do conhecimento sobre superfícies quádricas, por meio de representações obtidas no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, o referencial teórico desse estudo teve por base a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Teoria da Gênese Instrumental. Ambas as teorias apresentam aspectos particulares considerados nessa investigação, com ponto comum no ‘Fazer e Compreender’ de Piaget, que fornece o alicerce para o tratamento das questões relacionadas à construção do conhecimento matemático. É na concepção do fazer para compreender que foram embasadas as situações de ensino e aprendizagem, com atividades em que foi necessário ‘pensar-com tecnologias’. Essa investigação, de natureza aplicada, qualitativa e exploratório-descritiva, propôs-se à análise da seguinte questão: Como ocorre o desenvolvimento cognitivo no processo de gênese instrumental, envolvendo registros dinâmicos de representações semióticas das superfícies quádricas? Para responder à questão de pesquisa, foi utilizado o método de triangulação de dados, cujos procedimentos consistiram no levantamento bibliográfico, observação das condutas cognitivas nas atitudes comportamentais, produções escritas e construções do GeoGebra e aplicação de questionários e entrevistas. Entre os resultados dessa investigação, destacamos a articulação teórica, que foi base para a construção do conjunto de atividades que compôs as situações de ensino e aprendizagem instrumental. Durante a análise dos dados, foi possível observar a existência de uma espécie de engrenagem, funcionando como mola propulsora da construção do conhecimento por meio de representações dinâmicas das superfícies quádricas. Os elementos dessa engrenagem ocorriam de forma entrelaçada durante o processo de fazer para compreender, favorecendo as tomadas de consciência responsáveis pela expansão da estrutura cognitiva. Nesses momentos de tomada de consciência, observamos a presença da articulação teórica, tanto na ocorrência da coordenação de registros quanto da apropriação tecnológica.

Palavras-chave: Desenvolvimento cognitivo, Registros de representação semiótica, Gênese Instrumental, Matemática Dinâmica, Superfícies Quádricas.

ABSTRACT

This study focuses on issues involving the cognitive processes triggered during the instrumental genesis of participants in teaching and learning situations involving dynamic representations of quadric surfaces. This research was motivated by many factors, most notably the need to address common learning obstacles in the practice of mathematics teachers. One of the challenges the researcher encountered in her career as a teacher was related to the teaching and learning of quadric surfaces. In addition to supporting other disciplines in higher education and beyond, and applications involving various areas of knowledge, the study of these surfaces encompasses a significant part of the knowledge of Analytical Geometry. Consisting of the association between algebraic and geometric entities, Analytical Geometry makes it possible to represent various phenomena and situations. Graph analysis permeates all levels of education in different disciplines and courses, including daily practice, and consists of basic knowledge for the training of mathematics teachers. Access to a mathematical object is only possible through representations, for example its equation or graph, which carry partial and complementary information about this entity. The articulation between these representations enriches knowledge about the object of study, and can be explored through dynamic mathematics environments. The present research aimed to understand how cognitive development occurs during the process of instrumental genesis with dynamic representations of quadric surfaces. To investigate the process of knowledge construction about quadric surfaces, through representations obtained in the dynamic mathematics environment of GeoGebra, the theoretical framework of this study was based on the Theory of Semiotic Representation Registers and the Theory of Instrumental Genesis. Both theories present particular aspects considered in this investigation, with a common point in Piaget's 'Doing and Understanding', which provides the foundation for the treatment of issues related to the construction of mathematical knowledge. The teaching and learning situations were based on the concept of doing in order to understand, with activities that required 'thinking with technologies'. This applied, qualitative and exploratory-descriptive research proposed the analysis of the following question: How does cognitive development occur in the process of instrumental genesis, involving dynamic records of semiotic representations of quadric surfaces? To answer the research question, the data triangulation method was used, whose procedures consisted of a bibliographic survey, observation of cognitive behaviors in behavioral attitudes, written productions and GeoGebra constructions, and application of questionnaires and interviews. Among the results of this research, we highlight the theoretical articulation, which was the basis for the construction of the set of activities that composed the instrumental teaching and learning situations. During the data analysis, it was possible to observe the existence of a kind of gear, functioning as a driving force for the construction of knowledge through dynamic representations of quadric surfaces. The elements of this mechanism occurred in an intertwined manner during the process of doing to understand, favoring the awareness responsible for the expansion of the cognitive structure. In these moments of awareness, we observed the presence of theoretical articulation, both in the occurrence of the coordination of records and in the technological appropriation.

Keywords: Cognitive development, Records of semiotic representation, Instrumental Genesis, Dynamic Mathematics, Quadric Surfaces.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Gênese Instrumental na situação de ensino e aprendizagem.....	32
Figura 2 - Esquema da pesquisa.	33
Figura 3 – Representações figural e simbólica do parabolóide elíptico.	37
Figura 4 - Representações de signo.	42
Figura 5 - Tríade de Pierce.	43
Figura 6 - Semiose como processo de geração ad infinitum de interpretantes.	45
Figura 7 - Tríade peirceana de um objeto matemático.	46
Figura 8 - Estrutura triádica em Duval.	47
Figura 9 - Representações semióticas do hiperbolóide de uma folha.....	53
Figura 10 - Representações simbólicas e gráfica de um hiperbolóide de uma folha.	55
Figura 11 - Modelo cognitivo de funcionamento do pensamento matemático de Duval.	60
Figura 12 - Procedimento Informático de Interpretação Global.....	66
Figura 13 - Instrumento como entidade mista.	70
Figura 14 - Instrumentação e Instrumentalização.....	77
Figura 15 - O processo de Gênese Instrumental.	78
Figura 16 - Modelo de Situações de Atividades Instrumentais.	80
Figura 17 - Situações de Atividades Instrumentais.	82
Figura 18 – Ferramentas para análise das condutas cognitivas.	84
Figura 19 - O falso paradoxo do fazer e compreender.	92
Figura 20 - Fazer e compreender fazendo.	95
Figura 21 - Evolução dos Esquemas de Ação Instrumentada.....	96
Figura 22 – Representações nos registros figural e em língua natural de superfícies quádricas.	99
Figura 23 - Abordagem dos estudos.	102
Figura 24 - Pontuação relativa à aproximação com a pesquisa.	108
Figura 25 - Características dos estudos primários.	110
Figura 26 - Abordagem dos objetivos nas pesquisas.	117
Figura 27 - Fundamentação teórica das pesquisas.....	118
Figura 28 - Escolhas metodológicas das pesquisas.	118

Figura 29 - Tecnologias digitais utilizadas nas pesquisas.	119
Figura 30 - Posições do parabolóide elíptico padrão no plano cartesiano.	123
Figura 31 - Esquema da correlação entre representações gráficas e simbólicas.	125
Figura 32 - Seções planas do hiperbolóide de duas folhas.	127
Figura 33 – Elipsoide em α e β , esferoide e esfera.	130
Figura 34 - Valores visuais da variável “posição no sistema cartesiano” do hiperbolóide de uma folha.	132
Figura 35 - Valores visuais da variável “posição padrão” do hiperbolóide de duas folhas.	133
Figura 36 - Valores visuais da variável “posição no sistema cartesiano” do parabolóide elíptico.	134
Figura 37 - Parábolas assento e estribo da sela.	135
Figura 38 - Valores visuais da variável “posição no sistema cartesiano” do parabolóide hiperbólico.	137
Figura 39 - Representações de um objeto matemático tridimensional.	140
Figura 40 - Representações simbólica e gráfica do parabolóide elíptico.	141
Figura 41 – Modelo impresso em 3D do elipsoide.	145
Figura 42 - Representações figurais 3D-estáticas.	146
Figura 43 – Imagens por anáglifo.	147
Figura 44 - Representação em realidade aumentada do parabolóide elíptico.	148
Figura 45: Esquema da abordagem pedagógica.	153
Figura 46 – Trajetória da construção do conhecimento sobre quádricas.	157
Figura 47: Procedimentos metodológicos para coleta de dados.	173
Figura 48 – Instrumentos utilizados na coleta de dados.	174
Figura 49 – Mapa dos encontros.	177
Figura 50 – Representações figurais 2D-estáticas.	187
Figura 51 - Classificação das superfícies quádricas pelos participantes P1 e P2.	188
Figura 52 – Utilização das representações figurais 2D-estáticas por P2.	188
Figura 53 - Classificação das superfícies quádricas por P3.	189
Figura 54 – Utilização das representações figurais 3D-estáticas por P1.	190
Figura 55 – Utilização das representações figurais 3D-estáticas por P2.	191
Figura 56 – Utilização das representações figurais 3D-estáticas por P3.	191
Figura 57 – Representação bidimensional de um objeto matemático tridimensional.	192
Figura 58 – Utilização das representações figurais 3D-dinâmicas obtidas por anáglifo por P1.	193

Figura 59 - Utilização das representações figurais 3D-dinâmicas obtidas por realidade aumentada por P1.....	194
Figura 60 - Utilização das representações figurais 2D-dinâmicas com o apoio de um plano por P1.	195
Figura 61 - Estratégia para correlação entre representações gráficas e simbólicas.	199
Figura 62 - Procedimento algébrico para obter as seções planas de uma superfície quádrlica.....	201
Figura 63 – Procedimento informático para obter as seções planas de uma superfície quádrlica.	207
Figura 64 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas de um hiperboloide de uma folha por P2.	208
Figura 65 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas de um hiperboloide de uma folha por P3.	209
Figura 66 – Tratamentos algébricos para obter as seções planas de um paraboloides elíptico por P1.....	211
Figura 67 - Tratamentos gráficos para obter as seções planas de um paraboloides elíptico por P1 e P2.....	212
Figura 68 - Tratamentos gráficos para obter as seções planas de um paraboloides elíptico por P3.....	213
Figura 69 – Esferoide como superfície de rotação.	219
Figura 70 – Proposta para construção da esfera como superfície de revolução.....	223
Figura 71 – Construção da esfera como superfície de revolução por P1.....	224
Figura 72 – Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P1.....	226
Figura 73 – Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P2 (parte 1).	227
Figura 74 - Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P2 (parte 2).	228
Figura 75 - Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P2 (parte 3).	229
Figura 76 – Construção da esfera como superfície de revolução por P2.....	230
Figura 77 – Construção da esfera como superfície de revolução por P3.....	231
Figura 78 – Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P3.....	231
Figura 79 – Possibilidades para a posição de um hiperboloide de uma folha por P1.	240
Figura 80 – Interpretação geométrica da representação simbólica de uma quádrlica por P1 e P2.	246
Figura 81 – Tratamentos algébricos para identificação das seções planas de um paraboloides elíptico por P1. ...	249
Figura 82 - Tratamentos algébricos para identificação das seções planas de um paraboloides elíptico por P2. ...	251
Figura 83 - Representações gráficas de dois dos seis casos de paraboloides elíptico por P2.....	253
Figura 84 – Representações gráficas dos seis casos de paraboloides elíptico por P1.	254
Figura 85 – Representações 2D-estáticas dos eixos real e imaginário de duas hipérbolas por P1.	258
Figura 86 – Tratamentos algébricos para identificação das seções planas de um paraboloides hiperbólico por P1.	260
Figura 87 – Paraboloides elíptico sem e com o recurso ‘Usar clipping’.....	261

Figura 88 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas parabólicas de um parabolóide hiperbólico por P1.	262
Figura 89 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas hiperbólicas de um parabolóide hiperbólico por P1.	262
Figura 90 – Tratamentos algébricos para identificação das seções planas de um parabolóide hiperbólico por P2.	263
Figura 91 – Reconhecimento das seções planas do parabolóide hiperbólico por P3.....	265
Figura 92 – Possibilidades para a representação simbólica de um parabolóide hiperbólico.	266
Figura 93 – Representações simbólicas e gráficas de dois casos de parabolóides hiperbólicos por P1.....	267
Figura 94 – Parábolas assento e estribo de um parabolóide hiperbólico.	268
Figura 95 – Parábolas assento e estribo obtidas por P1.....	269
Figura 96 – Parábolas assento e estribo obtidas por P1 com a troca do sinal do termo linear.....	270
Figura 97 – Parábolas assento e estribo obtidas por P2.....	271
Figura 98 – Parábolas assento e estribo obtidas por P3.....	272
Figura 99 – Tratamentos gráficos para correlação entre as representações gráficas e simbólicas dos parabolóides hiperbólicos por P3.....	272
Figura 100 – Parábolas assento e estribo de dois parabolóides hiperbólicos obtidas por P3.....	273
Figura 101 - Correlação entre as representações gráficas e simbólicas dos parabolóides hiperbólicos por P2...	274
Figura 102 – Exemplo da atividade ‘Sobrepondo a quádriga’.....	282
Figura 103 – Conversão da representação gráfica dos parabolóides para a representação em língua natural por P2.	283
Figura 104 - Conversão da representação gráfica dos parabolóides para a representação em língua natural por P2.	284
Figura 105 – Proposta para a conversão da representação gráfica para a simbólica do elipsoide.	286
Figura 106 - Proposta para a conversão da representação gráfica para a simbólica do hiperboloide de uma folha.	287
Figura 107 - Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do hiperboloide de duas folhas.	287
Figura 108 - Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do parabolóide elíptico.	288
Figura 109 - Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do parabolóide hiperbólico. ...	289
Figura 110 – Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do hiperboloide de duas folhas por P1.	290
Figura 111 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do parabolóide elíptico por P1.	290
Figura 112 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do hiperboloide de uma folha por P2.	293

Figura 113 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do hiperboloide de duas folhas por P2.	294
Figura 114 – Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do paraboloides elíptico por P2.....	295
Figura 115 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do paraboloides hiperbólico por P2... ..	297
Figura 116 – Identificação das variáveis visuais nas representações gráficas das quádras por P3.	299
Figura 117 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do paraboloides elíptico por P3.	300
Figura 118 – Exemplos das atividades de sobreposição da quádras.	302
Figura 119 – Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do elipsoide.	303
Figura 120 - Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de uma folha.	303
Figura 121 – Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de duas folhas.....	304
Figura 122 – Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do paraboloides elíptico.....	305
Figura 123 – Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do paraboloides hiperbólico.....	306
Figura 124 – Processo para conversão do registro gráfico para simbólico do elipsoide e do hiperboloide de uma folha por P1 (parte 1).....	307
Figura 125 – Processo de conversão do registro gráfico para simbólico do hiperboloide de uma folha por P1 (parte 2).	308
Figura 126 – Processo de conversão do registro gráfico para simbólico do hiperboloide de duas folhas por P1.	308
Figura 127 – Processo de conversão do registro gráfico para simbólico do paraboloides elíptico por P1.....	310
Figura 128 – Processo de conversão do registro gráfico para simbólico do paraboloides hiperbólico por P1.....	311
Figura 129 – Estimativa dos coeficientes nas equações dos hiperboloides e do paraboloides elíptico por P2.	313
Figura 130 – Estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de uma folha por P2 (parte 1).....	314
Figura 131 – Estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de uma folha por P2 (parte 2).....	314
Figura 132 - Estimativa dos coeficientes na equação do paraboloides hiperbólico por P2.....	315
Figura 133 - Estimativa dos coeficientes nas equações dos hiperboloides e do paraboloides elíptico por P3.....	316
Figura 134 - Estimativa dos coeficientes na equação do paraboloides hiperbólico por P3.....	317
Figura 135 – Estimativa dos coeficientes nas equações do elipsoide e do hiperboloide de uma folha por P3.	317
Figura 136 - Estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de duas folhas por P3.....	318
Figura 137 – Estimativa dos valores dos coeficientes na equação do paraboloides elíptico por P3.	319
Figura 138 – Estimativa dos coeficientes na equação do paraboloides hiperbólico por P3 (parte 1).....	319
Figura 139 – Estimativa dos coeficientes na equação do paraboloides hiperbólico por P3 (parte 2).....	320
Figura 140 – Conversão das representações gráficas para a simbólicas das cônicas.....	321

Figura 141 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica da elipse.	322
Figura 142 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica da parábola.	322
Figura 143 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica da hipérbole.	323
Figura 144 – Conversão do registro gráfico para o simbólico da elipse e da parábola por P2.	324
Figura 145 – Conversão do registro gráfico para o simbólico da hipérbole por P2.	325
Figura 146 - Conversão do registro gráfico para o simbólico da elipse por P3.	326
Figura 147 - Conversão do registro gráfico para o simbólico da parábola por P3.	327
Figura 148 - Conversão do registro gráfico para o simbólico da hipérbole por P3.	328
Figura 149 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do elipsoide e do hiperboloide de uma folha.	330
Figura 150 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do hiperboloide de duas folhas.	331
Figura 151 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do paraboloides elíptico.	332
Figura 152 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do paraboloides hiperbólico. .	333
Figura 153 - Conversão do registro gráfico para o simbólico do elipsoide por P2.	334
Figura 154 – Tratamentos gráficos e algébricos para obtenção do coeficiente de x^2 na representação simbólica do hiperboloide de uma folha por P2.	335
Figura 155 – Tratamentos gráficos e algébricos para obtenção dos coeficientes de x^2 e y^2 na representação simbólica do hiperboloide de duas folhas por P2.	336
Figura 156 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do paraboloides elíptico por P2.	337
Figura 157 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do paraboloides hiperbólico por P2.	338
Figura 158 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do elipsoide por P3.	339
Figura 159 – Obtendo valores visuais para a conversão do registro gráfico para o simbólico do elipsoide por P3.	340
Figura 160 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha por P3 (parte 1).	341
Figura 161 - Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha por P3 (parte 2).	342
Figura 162 - Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de duas folhas por P3.	343
Figura 163 - Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do paraboloides elíptico por P3.	344

Figura 164 – Tratamentos gráficos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do parabolóide hiperbólico por P3.	345
Figura 165 – Tratamentos algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do parabolóide hiperbólico por P3.	346
Figura 166 – Planificando o corte do cilindro.	348
Figura 167 – Parabolóide hiperbólico em $oz +$ no plano xoz	349
Figura 168 – Tratamentos gráficos para obter as parábolas assento e estribo por P2.	352
Figura 169 – Tratamentos gráficos para a correlação entre registros gráfico e simbólico de uma seção plana do parabolóide hiperbólico por P2.	353
Figura 170 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas hiperbólicas de um parabolóide hiperbólico por P3.	355
Figura 171 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas hiperbólicas de um parabolóide hiperbólico por P2.	356
Figura 172 – Retas concorrentes como seção plana do parabolóide hiperbólico.	357
Figura 173 – Obtenção das parábolas assento de dois parabolóides hiperbólicos por P2.	359
Figura 174 – Obtenção da parábola assento de um parabolóide hiperbólico com assento em $ox +$ no plano xoz por P3.	360
Figura 175 - Quádrica escondida nas janelas de álgebra e de visualização 2D e 3D do GeoGebra.	364
Figura 176 – Hiperboloide de uma folha gerado por uma circunferência.	368
Figura 177 – Protocolo de construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência.	371
Figura 178 – Construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P1.	372
Figura 179 – Processo para a tomada de consciência na construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P1.	374
Figura 180 – Construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P2.	376
Figura 181 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P2.	377
Figura 182 – Construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P3.	378
Figura 183 – Superfície de revolução.	382
Figura 184 – Hiperboloide de uma folha em z de revolução.	383
Figura 185 – Proposta de construção de um hiperboloide de uma folha em z como superfície de revolução. ...	385
Figura 186 – Explorando a construção de um hiperboloide de uma folha de revolução por P2.	386
Figura 187 – Elementos organizados pela ordem da construção na janela de álgebra.	388
Figura 188 – Construção de um hiperboloide de uma folha em z pela rotação de uma hipérbole por P2.	390
Figura 189 – Construção de um hiperboloide de uma folha em z pela rotação de uma hipérbole por P3.	391

Figura 190 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em z pela rotação de uma hipérbole por P3.	392
Figura 191 – Proposta para construção de um hiperboloide de uma folha em x pela rotação de uma hipérbole.	394
Figura 192 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em x pela rotação de uma hipérbole por P2.....	396
Figura 193 – Construção de um hiperboloide de uma folha em x pela rotação de uma hipérbole por P3.....	397
Figura 194 – Proposta para construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole.	400
Figura 195 – Construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P2.....	401
Figura 196 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3 (parte 1).	402
Figura 197 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3 (parte 2).	403
Figura 198 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3 (parte 3).	404
Figura 199 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3 (parte 4).	405
Figura 200 – Construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3.....	406
Figura 201 – Proposta para construção do paraboloides elíptico em $oz +$ pela rotação de uma parábola.....	408
Figura 202 – Construção de um paraboloides elíptico em $oz +$ pela rotação de uma parábola por P2.	410
Figura 203 – Construção de um paraboloides elíptico em $oz +$ pela rotação de uma parábola por P3.	411
Figura 204 – Processo de construção de um paraboloides elíptico em $oz +$ pela rotação de uma parábola por P3.	412
Figura 205 – Proposta para construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução.....	415
Figura 206 – Construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução por P2.....	416
Figura 207 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução por P2 (parte 1). ...	417
Figura 208 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução por P2 (parte 2). ...	418
Figura 209 – Construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução por P3.....	419
Figura 210 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução por P3.....	420
Figura 211 – Proposta para a conversão do registro gráfico para a simbólico do hiperboloide de uma folha em y	421
Figura 212 – Processo de conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha em y por P2 (parte 1).	422
Figura 213 – Processo de conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha em y por P2 (parte 2).	423

Figura 214 – Processo de conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha em y por P3 (parte 1).	424
Figura 215 – Processo de conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha em y por P3 (parte 2).	425
Figura 216 – Paraboloide elíptico em $ox +$ pela rotação de uma parábola.	427
Figura 217 – Tratamentos gráficos e algébricos para obtenção do coeficiente de y^2 na representação simbólica do paraboloide elíptico em $ox +$ por P2.	429
Figura 218 - Tratamentos gráficos e algébricos para obtenção do coeficiente de z^2 na representação simbólica do paraboloide elíptico em $ox +$ por P2.	430
Figura 219 – Tratamentos gráficos para conversão de registro gráfico para simbólico do paraboloide elíptico em $ox +$ por P3.	431
Figura 220 – Geratriz e diretriz de uma superfície cilíndrica elíptica regradada.	436
Figura 221 – Proposta para construção de uma superfície cilíndrica hiperbólica como superfície regradada.	436
Figura 222 – Construção de uma superfície cilíndrica hiperbólica como superfície regradada por P2.	437
Figura 223 – Construção de uma superfície cilíndrica hiperbólica como superfície regradada por P3.	438
Figura 224 - Superfície cônica regradada.	439
Figura 225 – Proposta para construção de uma superfície cônica regradada.	441
Figura 226 – Processo para a construção de uma superfície cônica regradada por P2 (parte 1).	442
Figura 227 – Processo para a construção de uma superfície cônica regradada por P2 (parte 2).	443
Figura 228 – Construção de uma superfície cônica regradada por P2.	443
Figura 229 – Processo para a construção de uma superfície cônica regradada por P3.	444
Figura 230 – Protocolo da construção de uma superfície cônica regradada por P3.	445
Figura 231 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regradada por P1 (parte 1).	447
Figura 232 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regradada por P1 (parte 2).	448
Figura 233 – Protocolo de construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regradada por P1.	449
Figura 234 – Hiperboloide de uma folha obtido como superfície regradada.	449
Figura 235 – Exploração da construção de um hiperboloide de uma folha obtido como superfície regradada por P2 (parte 1).	451
Figura 236 – Exploração da construção de um hiperboloide de uma folha obtido como superfície regradada por P2 (parte 2).	452
Figura 237 – Exploração da construção de um hiperboloide de uma folha obtido como superfície regradada por P3.	452
Figura 238 – Ângulo de 30° no \mathbb{IR}^2 e no \mathbb{IR}^3 .	454

Figura 239 – Obtenção de um ângulo de 30° no $IR2$ por P2.....	457
Figura 240 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P2 (parte 1).....	458
Figura 241 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P2 (parte 2).....	459
Figura 242 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P2 (parte 3).....	460
Figura 243 – Construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P2.....	461
Figura 244 - Conversão do registro gráfico para o simbólico de um hiperboloide de uma folha por P2.	462
Figura 245 – Obtenção de um ângulo de 30° no $IR2$ por P3.....	462
Figura 246 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P3.....	463
Figura 247 – Construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P3.....	465
Figura 248 – Identificação de valores visuais para conversão do registro gráfico para o simbólico de um hiperboloide de uma folha por P3.....	465
Figura 249 – Tratamentos algébricos para conversão do registro gráfico para o simbólico de um hiperboloide de uma folha por P3.	466
Figura 250 – Proposta para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica.....	468
Figura 251 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica por P2 (parte 1).....	470
Figura 252 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica por P2 (parte 2).....	471
Figura 253 – Construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica por P2.	471
Figura 254 - Conversão do registro gráfico para o simbólico de um hiperboloide de uma folha por P3.	472
Figura 255 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica por P3.	473
Figura 256 – Construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica por P3.	473
Figura 257 – Construção de um paraboloides hiperbólicos como superfície regrada.....	475
Figura 258 – Proposta para construção de paraboloides hiperbólicos como superfície regrada (parte 1).....	477
Figura 259 – Proposta para construção do paraboloides hiperbólicos como superfície regrada (parte 2).....	478
Figura 260 – Proposta para construção do paraboloides hiperbólicos como superfície regrada (parte 3).....	479

Figura 261 – Tratamentos gráficos e algébricos para conversão do registro gráfico para o simbólico do parabolóide hiperbólico por P3.	480
Figura 262 – Conversão e construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3.	481
Figura 263 – Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3 (parte 1).	482
Figura 264 – Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3 (parte 2).	483
Figura 265 – Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3 (parte 3).	484
Figura 266 - Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3 (parte 4).	484
Figura 267 - Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3 (parte 5).	486
Figura 268 - Construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3.	487
Figura 269 – Identificação de valores visuais para conversão do registro gráfico para o simbólico parabolóide hiperbólico por P2.	488
Figura 270 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico parabolóide hiperbólico por P2.	488
Figura 271 - Conversão do registro gráfico para o simbólico parabolóide hiperbólico por P2.	489
Figura 272 – Processo para construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P2 (parte 1). .	490
Figura 273 – Processo para construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P2 (parte 2). .	491
Figura 274 – Processo para construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P2 (parte 3). .	493
Figura 275 – Construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P2.	495
Figura 276 – Apropriação tecnológica e as apreensões figurais e conceituais	498

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Classificação das representações semióticas	50
Quadro 2 - Representações semióticas e respectivos registros	50
Quadro 3 - Mudança de registro e congruência	58
Quadro 4 - Identificação das unidades gráficas	63
Quadro 5 - Correspondência entre unidades simbólicas e gráficas da reta	64
Quadro 6 - Combinações dos valores das três variáveis cognitivas	65
Quadro 7 - Modelo das situações de atividades instrumentais A e B	82
Quadro 8 - Estudos secundários	104
Quadro 9 - Revisões bibliográficas	106
Quadro 10 - Estudos primários de maior aproximação com a pesquisa	109
Quadro 11 - Níveis de representação de Parzysz	138
Quadro 12 – Equações parametrizadas para obtenção das superfícies quádricas	143
Quadro 13 - Impressão 3D do hiperboloide de uma folha e do paraboloides hiperbólico.	144
Quadro 14 - Situações de Ensino e Aprendizagem Instrumental	178
Quadro 15 – Passos para obtenção de um ângulo de 30° num plano qualquer do \mathbb{R}^3	455
Quadro 16 – Categorias de análise.	499

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EAI	Esquema de Ação Instrumentada
EC	Esquema Conceitual
EU	Esquema de Uso
CCM	Construção do Conhecimento Matemático
RA	Realidade Aumentada
RGi	Representação Gráfica inicial
RGf	Representação Gráfica final
RSi	Representação Simbólica inicial
RSf	Representação Simbólica final
SAI	Situação de Atividade Instrumental
SEAI	Situação de Ensino e Aprendizagem Instrumental
SQ	Superfícies Quádricas
TD	Tecnologias Digitais
TGI	Teoria da Gênese Instrumental
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
2	O CAMINHO DO FAZER AO COMPREENDER NA ÓTICA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DA TEORIA DA GÊNESE INSTRUMENTAL	35
2.1	A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A COMPREENSÃO EM MATEMÁTICA	35
2.1.1	<i>O acesso ao objeto matemático e os sistemas semióticos na atividade matemática</i>	36
2.1.2	<i>Apreensão conceitual de um objeto matemático</i>	51
2.1.3	<i>Mudanças de registro de representação na atividade matemática</i>	57
2.1.4	<i>Abordagens para coordenação de registros</i>	61
2.2	A TEORIA DA GÊNESE INSTRUMENTAL NA ATIVIDADE MATEMÁTICA	68
2.2.1	<i>Origem da abordagem instrumental e definições iniciais</i>	68
2.2.2	<i>A noção de esquema e o nascimento do instrumento</i>	72
2.2.3	<i>Gênese Instrumental em situações de ensino e aprendizagem</i>	76
2.3	FAZER E COMPREENDER NOS ESTUDOS DE DUVAL, RABARDEL E NOTARE	85
2.3.1	<i>Fazer e Compreender em Duval</i>	85
2.3.2	<i>Fazer e Compreender em Rabardel</i>	87
2.3.3	<i>Fazer e Compreender no desenvolvimento cognitivo</i>	89
3	REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ESTUDO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS MEDIADO POR TECNOLOGIAS DIGITAIS	98
3.1	ESTADO DO CONHECIMENTO SOBRE OS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS COM O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS	100
3.1.1	<i>Planejamento da revisão bibliográfica</i>	100
3.1.2	<i>Análise das produções com dados secundários</i>	103
3.1.3	<i>Análise das produções com dados primários</i>	108
3.1.4	<i>Panorama atual dos estudos sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com o uso de tecnologias digitais</i>	116
3.2	IMPLICAÇÕES DA TRRS NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO SOBRE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	121
3.3	CORRELAÇÕES ENTRE REPRESENTAÇÕES DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	128
3.3.1	<i>Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos elipsoides</i>	129
3.3.2	<i>Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos hiperboloides de uma folha</i>	131
3.3.3	<i>Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos hiperboloides de duas folhas</i>	132
3.3.4	<i>Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos paraboloides elípticos</i>	134

3.3.5	<i>Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos paraboloides hiperbólicos.....</i>	135
3.4	REPRESENTAÇÕES ESTÁTICAS E DINÂMICAS DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS.....	138
4	ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONCEPÇÕES PEDAGÓGICAS DA INVESTIGAÇÃO	151
4.1	CONCEPÇÕES PEDAGÓGICAS DESTE ESTUDO	151
4.2	SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTAL	155
4.3	ESPECIFICIDADES METODOLÓGICAS DA INVESTIGAÇÃO	168
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	176
5.1	AS CONDUTAS COGNITIVAS NAS SITUAÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTAL.....	176
5.1.1	<i>SEAI 1 – Apresentação e aquecimento</i>	179
5.1.2	<i>SEAI 2 - Explorando as representações figurais e em língua natural gerais de superfícies quádricas por meio de diferentes recursos.....</i>	185
5.1.2.1	ATIVIDADE 1.....	186
5.1.2.2	ATIVIDADE 2.....	189
5.1.2.3	ATIVIDADE 3.....	192
5.1.2.4	ATIVIDADE 4	193
5.1.2.5	ATIVIDADE 5.....	193
5.1.2.6	ATIVIDADE 6.....	194
5.1.2.7	OBSERVAÇÕES FINAIS	196
5.1.3	<i>SEAI 3 - Esquema para correlação entre registros de representação de superfícies quádricas..</i>	198
5.1.3.1	ATIVIDADE 1.....	200
5.1.3.2	ATIVIDADE 2.....	205
5.1.3.3	ATIVIDADE 3.....	210
5.1.3.4	OBSERVAÇÕES FINAIS	213
5.1.4	<i>SEAI 4 - Explorando as representações gráficas, simbólicas e em língua natural específicas dos elipsoides</i>	215
5.1.4.1	ATIVIDADE 1.....	216
5.1.4.2	ATIVIDADE 2.....	219
5.1.4.3	ATIVIDADE 3.....	222
5.1.4.4	OBSERVAÇÕES FINAIS	234
5.1.5	<i>SEAI 5 - Explorando as representações gráficas, simbólicas e em língua natural específicas dos hiperboloides e dos paraboloides.....</i>	234
5.1.5.1	ATIVIDADE 1.....	236
5.1.5.2	ATIVIDADE 2.....	242
5.1.5.3	ATIVIDADE 3.....	245
5.1.5.4	ATIVIDADE 4.....	247
5.1.5.5	ATIVIDADE 5.....	257
5.1.5.6	ATIVIDADE 6.....	276
5.1.5.7	OBSERVAÇÕES FINAIS	279

5.1.6 SEAI 6 – Desafio da correspondência: sobrepondo a quádrica.....	281
5.1.6.1 ATIVIDADE 1.....	281
5.1.6.2 ATIVIDADE 2.....	302
5.1.6.3 ATIVIDADE 3.....	321
5.1.6.4 OBSERVAÇÕES FINAIS.....	346
5.1.7 SEAI 7 – Desafiando a percepção: a seção plana desconhecida	348
5.1.7.1 ATIVIDADE 1.....	349
5.1.7.2 ATIVIDADE 2.....	351
5.1.7.3 ATIVIDADE 3.....	354
5.1.7.4 ATIVIDADE 4.....	356
5.1.7.5 ATIVIDADE 5.....	359
5.1.7.6 OBSERVAÇÕES FINAIS.....	361
5.1.8 SEAI 8 – Desafiando a percepção: a quádrica escondida.....	363
5.1.8.1 ATIVIDADE 1.....	365
5.1.8.2 ATIVIDADE 2.....	367
5.1.8.3 ATIVIDADE 3.....	369
5.1.8.4 OBSERVAÇÕES FINAIS.....	379
5.1.9 SEAI 9 – Desafio dinâmico: O giro da cônica.....	381
5.1.9.1 ATIVIDADE 1.....	382
5.1.9.2 ATIVIDADE 2.....	394
5.1.9.3 ATIVIDADE 3.....	399
5.1.9.4 ATIVIDADE 4.....	408
5.1.9.5 ATIVIDADE 5.....	414
5.1.9.6 ATIVIDADE 6.....	426
5.1.9.7 OBSERVAÇÕES FINAIS.....	433
5.1.10 SEAI 10 – Desafio dinâmico: Regrado a sela.....	434
5.1.10.1 ATIVIDADE 1.....	436
5.1.10.2 ATIVIDADE 2.....	439
5.1.10.3 ATIVIDADE 3.....	446
5.1.10.4 ATIVIDADE 4.....	454
5.1.10.5 ATIVIDADE 5.....	468
5.1.10.6 ATIVIDADE 6.....	474
5.1.10.7 OBSERVAÇÕES FINAIS.....	496
5.2 A GÊNESE INSTRUMENTAL E A COORDENAÇÃO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	498
5.2.1 Gênese instrumental de P1 na coordenação dos registros de representação.....	504
5.2.1.1 ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NA CORRELAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO.....	505
5.2.1.2 ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM AMBIENTES DE MATEMÁTICA DINÂMICA.....	509
5.2.2 Gênese instrumental de P2 na coordenação dos registros de representação.....	511

5.2.2.1	ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NA CORRELAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO	512
5.2.2.2	ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM AMBIENTES DE MATEMÁTICA DINÂMICA	516
5.2.3	<i>Gênese instrumental de P3 na coordenação dos registros de representação</i>	523
5.2.3.1	ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NA CORRELAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO	523
5.2.3.2	ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM AMBIENTES DE MATEMÁTICA DINÂMICA	529
5.2.4	<i>Fazer e compreender pensando-com as representações dinâmicas de superfícies quádricas</i>	536
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	544
	REFERÊNCIAS	551
	APÊNDICE A — PONTUAÇÃO DOS ESTUDOS	571
	APÊNDICE B — TCLE E PARECER CONSUBSTANCIADO AO CEP	574
	APÊNDICE C — QUESTIONÁRIOS	580
	APÊNDICE D — SEAI 1	582
	APÊNDICE E — SEAI 2	591
	APÊNDICE F — SEAI 3	595
	APÊNDICE G — SEAI 4	599
	APÊNDICE H — SEAI 5	602
	APÊNDICE I — SEAI 6	608
	APÊNDICE J — SEAI 7	611
	APÊNDICE K — SEAI 8	615
	APÊNDICE L — SEAI 9	618
	APÊNDICE M — SEAI 10	622

1 INTRODUÇÃO

Os conceitos sobre superfícies quádricas, presentes nas disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, aparecem como suporte para aprendizagem de conteúdos de Cálculo e de outras disciplinas em cursos do Ensino Superior e posterior. Na trajetória profissional dessa pesquisadora, como professora substituta na Universidade Federal do Rio Grande (FURG) e efetiva no Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS), as dificuldades dos estudantes na aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica foram a principal motivação para a presente pesquisa.

Em acordo com Duval (2018), para que haja compreensão em matemática, é necessário que se estabeleçam as correlações entre as diferentes representações de um objeto matemático (por exemplo, uma equação e um gráfico). E a Geometria Analítica é a disciplina cujo foco está na relação entre representações algébricas e gráficas de um ente matemático. Sua origem deu-se numa ideia introduzida por Descartes no século XVII, a criação de um sistema de coordenadas cartesianas que identifica um ponto P do plano com um par de números reais (x, y) .

De acordo com Boulos e Camargo (1987 apud Richit, 2005), a Geometria Analítica é o estudo da Geometria pelo método cartesiano (René Descartes, 1596-1650), consistindo na associação entre equações e entes geométricos. Assim, a Geometria Analítica promove a articulação entre a Geometria e a Álgebra sob duas perspectivas: (a) estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em sua equação (geometria sob o olhar da álgebra); (b) estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (álgebra sob o olhar da geometria).

As orientações curriculares, que norteiam a prática dos professores no Ensino Médio, destacam a importância da articulação entre conceitos geométricos e algébricos (Brasil, 2006). A análise de gráficos permeia todos os níveis de ensino em diferentes disciplinas e cursos, inclusive a prática cotidiana, consistindo em “[...] uma ferramenta matemática muito importante nos tempos atuais por tornar possível a representação de diversos fenômenos e situações” (Corrêa; Moretti, 2014, p. 39).

Disso decorre a necessidade desse conhecimento na formação do professor de Matemática, fato observado por Richit (2005), quando considera a Geometria Analítica um alicerce para os cursos de Licenciatura em Matemática. O diálogo entre os conceitos de Geometria e de Álgebra pode proporcionar importantes contribuições para a aprendizagem de

Matemática. Nesses dois campos, Geometria e Álgebra, um mesmo objeto matemático pode ser representado de formas distintas.

Para que ocorra o diálogo entre essas duas formas de representações, é necessário que o sujeito saiba operar tanto no interior de cada sistema quanto no exterior, articulando essas formas de representação. É com base nesse diálogo entre a Geometria e a Álgebra, especialmente através das seções planas das superfícies quádricas, que foram realizadas as análises da presente pesquisa. A escolha pelas superfícies quádricas como objeto de estudo nessa pesquisa se deve ao fato de envolver parte significativa dos assuntos abordados em Geometria Analítica (pontos, retas, planos, cônicas).

Assim como na relação entre ponto e par ordenado, existe uma correspondência biunívoca entre as representações simbólicas e gráficas das seções planas das quádricas. No estudo dessas seções planas é possível constatar que, para cada valor de k (referentes aos planos coordenados e paralelos a estes $x = k$, $y = k$ e $z = k$ que interceptam as quádricas) na equação da quádrica, corresponde uma única representação gráfica (cônica degenerada ou não degenerada) e vice-versa.

Numa revisão de literatura na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações e no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, Vargas e Leivas (2019) encontraram apenas seis estudos envolvendo superfícies quádricas no ponto de vista da Educação Matemática. Os estudos referiam-se a dissertações, não havendo pesquisas no nível de doutorado naquela oportunidade. Estes estudos, juntamente com uma atualização deste mapeamento, são apresentados com mais detalhes no capítulo que trata do estado do conhecimento a respeito do processo de construção do conhecimento sobre superfícies quádricas com tecnologias digitais.

A análise das produções obtidas no levantamento bibliográfico revela que existem poucas pesquisas sobre os processos de ensino e de aprendizagem dessas superfícies, o que indica a importância de estudos que se dediquem a compreender esse processo. Essa investigação visa trazer contribuições nesse sentido, ancorando-se em aportes teóricos e metodológicos que fundamentem a abordagem tecnológica e pedagógica. Além disso, concordamos com Medeiros (2020) que a integração das tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática ainda caminha a passos lentos no contexto brasileiro.

Seja pela dificuldade dos professores da área ou pelas condições de acesso às tecnologias nas escolas, existem desafios que precisam ser superados para a efetiva integração de tecnologias no contexto educacional. No nosso entendimento, antes mesmo das questões que se referem à integração da tecnologia aos processos de ensino e de aprendizagem, está o principal desafio que se refere às concepções epistemológicas dos professores. A evolução

tecnológica mudou as formas de pensar e de fazer das pessoas, mas entendemos que o avanço necessário à Educação se refere mais à prática docente do que aos aparatos tecnológicos.

Ponderamos que “Os professores e futuros professores de matemática precisam estar capacitados para dialogar com essa realidade da sala de aula, atuando como mediadores e não mais como protagonistas na aprendizagem” (Guimarães; Behar; Notare, 2019, p. 1488). Essa e outras questões oriundas da prática docente da pesquisadora, foram sendo abordadas desde o início da sua jornada nesse doutoramento, trazendo importantes reflexões para o enfrentamento das demandas do processo de construção do conhecimento matemático.

Ao fazer considerações sobre a sociedade atual, que vem sendo pautada na tríade informação-conhecimento-aprendizagem, já ficava clara a necessidade de mudança na conduta do professor e do aluno. Dessa forma, fica evidente a importância do investimento em pesquisas a respeito da formação inicial e continuada de professores com vistas a contribuir para que ocorram as mudanças necessárias nas formas de aprender e ensinar (Guimarães; Behar; Notare, 2019, p. 1488).

A presente pesquisa nasce de muitas motivações, mais especialmente das necessidades de enfrentamento dos obstáculos de aprendizagem comuns na prática docente. A Geometria Analítica apresentou-se como um desafio pedagógico em diversas oportunidades na trajetória docente dessa pesquisadora. Um dos maiores e mais instigadores desafios relacionava-se ao ensino e aprendizagem das superfícies quádricas, que engloba parte significativa de conhecimentos de Geometria Analítica.

Essa investigação visa analisar a abordagem inicial desses entes matemáticos, por entendermos que o aprofundamento dos conceitos sobre superfícies quádricas depende de conhecimentos prévios bem constituídos. Assim, o foco dessa investigação refere-se à posição padrão¹ dessas superfícies, o que pode favorecer a extensão para o estudo de quádricas transladadas ou rotacionadas. Além disso, o cilindro quádrico e o cone quádrico, também não são alvo dessa investigação, podendo ser abordados de forma integral no estudo das superfícies cilíndricas e cônicas.

Este estudo trata da representação das superfícies quádricas no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais que, por simplicidade na comunicação, denominamos sistema cartesiano. Além disso, o caminho escolhido para analisar o desenvolvimento dos conhecimentos a respeito de quádricas dá foco às intersecções destas superfícies por planos

¹ Na posição padrão, a representação gráfica de uma quádrica tem centro ou vértice na origem do sistema cartesiano ortogonal e eixo central sobre um dos eixos coordenados. As características da sua representação no registro simbólico serão tratadas com mais detalhes no capítulo 3. No caso de superfícies em outras posições, por meio de translações e/ou rotações, é sempre possível colocá-la na posição padrão.

coordenados ou paralelos a estes. A elaboração da sequência de atividades para a experimentação teve como suporte teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval.

Seus estudos foram baseados nas ideias de Charles Peirce, considerado o pai da semiótica, e nos princípios de Piaget, no que se refere à representação mental que cada sujeito produz do objeto que internaliza. Constatando a especificidade da aprendizagem matemática, Duval (2003, 2009, 2010) investigou o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão conceitual, que considera fundamental para a evolução do pensamento matemático. Duval diz que uma das especificidades do conhecimento matemático se refere ao “[...] fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos” (Duval, 2003, p. 14).

De acordo com o autor, o acesso a esses objetos está ligado à utilização de uma representação que o permita designar e as possibilidades de tratamento matemático dependem do registro utilizado. Outra especificidade desse conhecimento destacada pelo autor refere-se à variedade de representações semióticas, uma vez que “[...] além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural² [...]” (Duval, 2003, p. 14).

Essas representações podem pertencer a dois tipos de sistemas semióticos: os comuns, a língua natural e os diagramas; ou os especializados, os sistemas de coordenadas gráficas (cartesianas, polares, esféricas, etc.), o sistema de escrita simbólica da álgebra, o sistema de numeração decimal e o sistema de representação das figuras geométricas em diferentes dimensões. Duval (2003) constatou que a compreensão integral em matemática exige a coordenação de ao menos dois registros de representação, ou seja, a passagem espontânea de uma forma de representação a outra.

Na investigação sobre o papel das representações semióticas na compreensão em matemática, segundo D’Amore (2005), “[...] Duval não trabalha na observação de uma classe durante semanas, mas comporta-se mais como faz um biólogo ou um médico quando quer entender o funcionamento do cérebro” (apud Maggio, 2018, p. 35). Nessa perspectiva, essa pesquisa visa observar as condutas cognitivas dos participantes por meio das atitudes comportamentais, produções escritas, construções do GeoGebra e gravações.

Entendemos as condutas cognitivas como as atividades mentais que, não podendo ser observadas, são inferidas a partir da análise do comportamento do sujeito durante uma atividade

² Associações verbais.

matemática. Além disso, essa pesquisa concebe o ensino e a aprendizagem como processos distintos, mas não isolados. Entendemos que, como uma única atividade, professores e alunos realizam um trabalho em comum para produção de determinado saber (Maggio, 2018).

Consideramos que aspectos do processo de ensino, como o planejamento das atividades, influenciam no processo de aprendizagem. Todavia, essa pesquisa visa analisar o processo de aprendizagem, com foco no desenvolvimento cognitivo. Este estudo aborda os seguintes tipos de representação do objeto matemático em estudo: figurais, gráficas, simbólicas e em língua natural. As representações figurais e gráficas³ foram apresentadas nas formas bi e tridimensionais, estáticas e dinâmicas.

Cada registro de representação possui regras e convenções específicas que permitem não só a identificação de uma representação em um dado sistema semiótico, mas também a transformação tanto interna quanto externa das diferentes representações. As manipulações algébricas de uma equação são um exemplo de transformação interna (tratamento), pois ocorrem dentro do mesmo sistema semiótico. Já a transformação externa (conversão) envolve mudança de sistema semiótico, como por exemplo, o tratamento algébrico de um gráfico.

Segundo Duval (2010), para a apreensão conceitual é necessário conhecer ao menos dois registros de representação do objeto matemático, sabendo operar as transformações internas e externas nesses sistemas semióticos. Além disso, Duval (2011a) destaca que a compreensão integral de um gráfico não é alcançada apenas por um desenho no papel ou por um *software* que representa uma equação, sendo necessária uma abordagem específica para tal.

Nessa abordagem, a identificação e a correspondência entre as representações possibilitam a coordenação entre registros que, segundo Duval (2011a), é a base para a compreensão em Matemática. O presente estudo, envolvendo os registros de representação em língua natural, figurais, simbólicos e gráficos, busca promover situações de ensino e aprendizagem que conduzam o participante à passagem espontânea entre estes. Os obstáculos relativos à compreensão, encontrados na construção do conhecimento sobre essas superfícies, consistem na motivação para esse estudo.

Todavia, as constatações oriundas dos aportes teóricos servem para qualquer conteúdo de Matemática, em qualquer nível de ensino. Em acordo com Duval (2011a), entendemos que essas dificuldades estão relacionadas mais ao tipo de conhecimento do ponto de vista epistemológico, do que à sua complexidade. Isso devido à necessidade das representações

³ As representações figurais e gráficas se distinguem, respectivamente, pela ausência e presença do sistema de coordenadas cartesianas.

semióticas para o acesso ao objeto matemático que, sendo complementares, o representam de forma parcial.

E na confusão entre o objeto e sua representação, ou nas diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático, podem ocorrer os obstáculos para a aprendizagem (Duval, 2011a). Operar com diferentes registros, que vai exigir transformações internas e externas, envolve a identificação das diferentes representações das superfícies quádricas e saber operar tanto no interior de cada registro quanto transitar de um para o outro. Duval (2018) considera que a passagem espontânea de um registro de representação a outro, envolvendo as transformações de tratamento e conversão, constituem os gestos intelectuais na atividade matemática.

E, segundo Duval (2018), “Os conhecimentos matemáticos de base a serem apreendidos são, em primeiro lugar, os gestos intelectuais necessários para compreender a construção do que agora [depois] é sintetizado em ‘conceitos’ ” (p. 17). Do ponto de vista matemático, a apreensão conceitual de definições e teoremas, requer o conhecimento de conceitos prévios. Do ponto de vista cognitivo, a coordenação dos registros de representação precede e, mais do que isso, possibilita a construção dos conceitos matemáticos.

A partir disso, podemos entender que a concepção de que o conhecimento matemático está pronto, restando apenas ensinar (transmitir), consiste em uma ideia equivocada. Na perspectiva de Piaget, o conhecimento não pode ser ensinado, devendo ser construído pelo próprio indivíduo, resultando das “[...] interações entre sujeito e objeto que são mais ricas do que aquilo que os objetos podem fornecer por eles” (Piaget, 1977, p. 87). E isso não pode ser alcançado por meio de uma prática baseada em ensinar por repetição o que já está pronto.

Torna-se necessária uma aprendizagem ativa, em que o sujeito seja desafiado a interagir com o objeto de estudo, explorando-o, construindo e criando. Nesse processo de construção de conhecimento, conforme Becker (1992), ‘estudante-e-professor’ e ‘problema-e-teoria’ devem estar em condição de complementaridade. É na perspectiva do Fazer e Compreender de Piaget (1978) que foram embasadas as situações de ensino e aprendizagem presentes nessa investigação, envolvendo o desafio de ‘pensar-com tecnologias’ na busca pela solução dos problemas propostos.

Basso e Notare (2015) analisam o papel dos recursos digitais de matemática dinâmica na construção de conceitos com base na Teoria Construcionista de Papert (1985), que chamou as representações de objetos matemáticos obtidos por meio das tecnologias de ‘objetos-de-pensar-com’. Adotando a expressão ‘pensar-com tecnologias’, Basso e Notare (2015) destacam

que os problemas precisam ser propostos de forma que a tecnologia seja usada para desencadear o pensamento matemático.

Por conta dessa integração das tecnologias digitais à construção do conhecimento sobre superfícies quádricas, surge a exigência da apropriação tecnológica das ferramentas do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, trazendo a necessidade de um olhar a partir da Teoria da Gênese Instrumental (TGI) de Rabardel. Essa teoria está voltada para a compreensão das funções psicológicas que condicionam o desenvolvimento humano durante uma atividade mediada por artefatos.

Nessa investigação, as atividades foram mediadas pelo ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, sendo denominadas ‘atividades instrumentadas’ em Rabardel (1995a). Assim, a noção de esquema (com influência piagetiana) ganha elementos que levam em consideração a especificidade da atividade instrumentada (Rabardel, 1995a). Os esquemas constituídos durante uma atividade instrumentada podem ser esquemas de uso, quando se referem a atividades secundárias (como clicar em um botão), ou esquemas de ação instrumentada, quando se constituem durante a atividade principal.

Segundo (Rabardel, 1995a), os esquemas de uso coordenam-se entre si e com outros esquemas, constituindo os esquemas de ação instrumentada. Nessa pesquisa, esses outros esquemas referem-se ao objeto de estudo, por essa causa chamaremos esquemas conceituais⁴. No caso da aprendizagem das superfícies quádricas (objeto de estudo), o participante (sujeito) precisou realizar atividades com o uso do GeoGebra (artefato). Nesse exemplo, podemos entender que os esquemas de ação instrumentada englobam os esquemas de uso, que se referem às funcionalidades do artefato, e os esquemas conceituais, relativos aos conhecimentos matemáticos.

O artefato acrescido desses esquemas constitui-se em um instrumento para o participante e, esse processo de transformação do artefato em instrumento é denominado Gênese Instrumental. Essa teoria nos possibilita a compreensão do processo de apropriação das ferramentas do GeoGebra, dos limites e potencialidades desse artefato no estudo das superfícies quádricas, dos esquemas que podem ser desenvolvidos pelos participantes e da adequação das situações de ensino e aprendizagem às necessidades do ‘pensar-com tecnologias’.

Dessa forma, as teorias de Duval e Rabardel têm características particulares que se complementam e fundamentam essa proposta, mas também apresentam um ponto comum no Fazer e Compreender de Piaget (1978). A abordagem pedagógica nessa investigação tem

⁴ A expressão ‘esquema conceitual’, nesse estudo, refere-se aos esquemas relacionados aos conceitos matemáticos, que são mobilizados ou constituídos durante uma atividade instrumentada.

inspiração nas situações de aprendizagem que a própria pesquisadora vivenciou nesse doutoramento⁵, e em outras encontradas nos estudos de Notare e Basso, onde o ‘fazer e compreender’ e o ‘pensar-com tecnologias’ estavam sempre presentes.

Uma situação de ensino e aprendizagem com base no Fazer e Compreender de Piaget (1978), envolvendo o uso das tecnologias digitais, requer a criação de atividades em que seja necessário ‘pensar-com tecnologias’. Por essa causa, chamamos situações de ensino e aprendizagem instrumental, uma vez que envolvem um processo de apropriação tecnológica. Entendendo a aquisição do conhecimento como a construção de esquemas que constituem a estrutura cognitiva do sujeito, as situações de ensino e aprendizagem consideram a primazia do fazer para compreender.

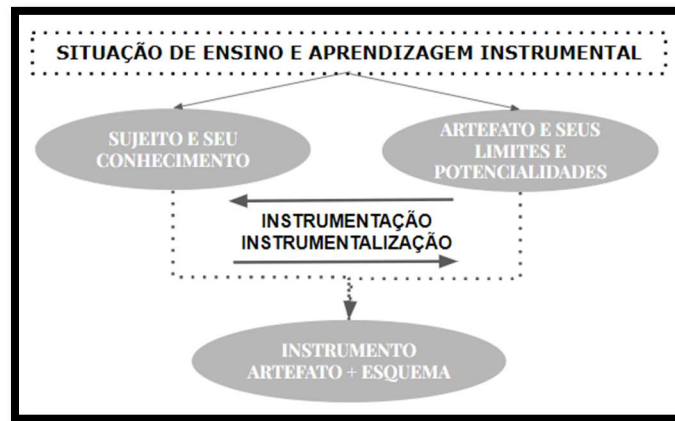
Sendo compostas por atividades que envolvem exploração, construção e criação, as atividades foram propostas com a finalidade de conduzir o aluno à construção do seu conhecimento, buscando privilegiar a sua autonomia intelectual. Visando desencadear os processos cognitivos, as situações de ensino e aprendizagem instrumental foram propostas por meio de desafios cujas exigências cognitivas aumentam progressivamente.

O **problema de pesquisa** de que trata essa investigação refere-se aos processos cognitivos desencadeados durante a gênese instrumental dos participantes, em situações de ensino e aprendizagem envolvendo as representações dinâmicas das superfícies quádricas. Numa situação de ensino e aprendizagem instrumental, quando o participante é desafiado a pensar-com as representações dinâmicas de superfícies quádricas, de um lado está o sujeito e o seu conhecimento (esquemas) e, do outro, o artefato com seus limites e potencialidades (Figura 1).

Nesse processo, o participante (sujeito) vai interagir com as representações obtidas no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra (artefato), que podem apresentar limitações e potencialidades de acordo com a tarefa e o objeto de estudo. No caso dessa pesquisa, durante a realização das atividades com as representações dinâmicas das superfícies quádricas, os participantes poderiam se deparar com obstáculos ora provenientes do uso das ferramentas do GeoGebra, ora dos conhecimentos sobre Geometria Analítica.

⁵ Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Figura 1 - Gênese Instrumental na situação de ensino e aprendizagem.



Fonte: Adaptado de Rabardel (2011).

A análise desses obstáculos e saltos cognitivos, por meio da investigação dos momentos em que cada um desses elementos potencializa ou limita o processo de construção do conhecimento sobre as quádricas, pode gerar evidências sobre o desenvolvimento cognitivo do sujeito. Diante do problema aqui exposto, essa investigação visa responder à seguinte **questão de pesquisa**: “Como ocorre o desenvolvimento cognitivo no processo de gênese instrumental, envolvendo registros dinâmicos de representações semióticas das superfícies quádricas?”

Para responder a essa questão de pesquisa, tem-se por **objetivo geral**: “Compreender o desenvolvimento cognitivo no processo de gênese instrumental, envolvendo registros dinâmicos de representações semióticas das superfícies quádricas”. O alcance do objetivo geral dessa investigação passa pelos seguintes **objetivos específicos**:

- Identificar as condições necessárias para as apreensões conceituais durante a gênese instrumental com registros dinâmicos de representação de superfícies quádricas.
- Investigar a contribuição das representações semióticas estáticas e dinâmicas para as apreensões figurais de superfícies quádricas.
- Analisar os obstáculos e saltos cognitivos ocorridos durante o processo de gênese instrumental com as representações dinâmicas das superfícies quádricas, considerando a relação destes com as potencialidades e limitações das ferramentas do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra.
- Analisar os esquemas mobilizados ou constituídos pelos participantes durante uma situação de ensino e aprendizagem instrumental para a coordenação dos diferentes registros de representação semiótica.

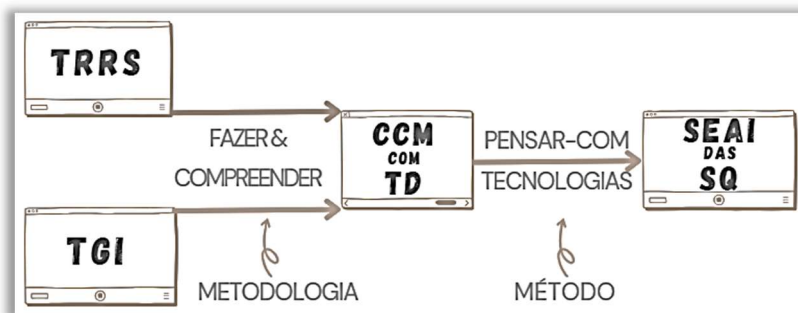
Com caráter interdisciplinar, essa pesquisa envolve elementos da Informática na Educação, Educação Matemática e Psicologia Cognitiva. Consideramos que é de natureza

aplicada, por gerar conhecimentos sobre a gênese instrumental na construção do conhecimento sobre superfícies quádricas. Quanto à forma de abordagem do problema, caracteriza-se como pesquisa qualitativa, uma vez que consiste numa análise subjetiva da relação que o sujeito estabelece com as ferramentas na construção do seu conhecimento. Tendo os processos cognitivos dos sujeitos da pesquisa como foco principal, deve ser tratada por meio de interpretação de fenômenos e seus significados.

Caracteriza-se como pesquisa exploratório-descritiva em relação aos objetivos, pois visa proporcionar maior compreensão dos aspectos que envolvem o ensino e aprendizagem de superfícies quádricas, expondo com mais precisão os fenômenos. Os participantes foram convidados a participar de um projeto de extensão que ocorreu de forma híbrida, com momentos presenciais no Laboratório de Educação Matemática do IFRS Campus Canoas e à distância por meio do *Google Meet*.

O número de encontros sofreu variação, pois foram consideradas a disponibilidade, a bagagem e o ritmo de cada participante. Participaram da pesquisa dois graduandos, dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Engenharia Civil, e um aluno do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. A abordagem pedagógica das situações de ensino e aprendizagem instrumental, ilustrada pelo esquema da Figura 2, organiza essa pesquisa, incorporando e conectando as peças-chave desse estudo.

Figura 2 - Esquema da pesquisa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Nesse esquema, a articulação das teorias - TRRS e a TGI - com o olhar para a Construção do Conhecimento Matemático (CCM) com Tecnologias Digitais (TD), fundamenta as Situações de Ensino e Aprendizagem Instrumental (SEAI) das Superfícies Quádricas (SQ). A pesquisa observa esse processo por meio das lentes do Fazer e Compreender de Piaget (1978), que consiste no elo entre essas teorias.

A partir das reflexões sobre o processo de construção do conhecimento matemático com tecnologias digitais, nascem as situações de ensino e aprendizagem instrumental para o estudo das superfícies quádricas, cujas atividades exigem a concepção do ‘pensar-com tecnologia’. Entendemos que a dupla ‘fazer e compreender’ e ‘pensar-com tecnologias’, no contexto desse estudo, tem características similares às de ‘metodologia e método’.

Enquanto a principal função da primeira é o planejamento das situações de ensino e aprendizagem instrumental, a da segunda é a implementação, envolvendo questões relacionadas à execução das atividades com o uso das tecnologias digitais. Esse estudo está organizado em sete capítulos. Neste capítulo, apresentamos em linhas gerais os aspectos necessários à compreensão do problema de pesquisa, discorrendo sobre a justificativa para essa investigação, a questão de pesquisa e os objetivos geral e específicos.

No capítulo 2, são abordados os aportes teóricos desse estudo, a saber, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a Teoria da Gênese Instrumental e a articulação entre estas no Fazer e Compreender de Piaget (1978). O capítulo 3 apresenta um estudo sobre os registros de representação semiótica das superfícies quádricas, o estado do conhecimento sobre os processos de ensino e de aprendizagem de superfícies quádricas, as implicações desses registros de representação nesse processo, as correlações entre os diferentes registros e as representações estáticas e dinâmicas utilizadas para as apreensões figurais das quádricas.

O capítulo 4 aborda os aspectos metodológicos e as concepções pedagógicas da presente pesquisa, apresentando o objetivo e as possibilidades de análise de cada situação de ensino e aprendizagem instrumental. O capítulo 5 apresenta a análise e discussão dos dados, iniciando pela descrição dos dados relacionados à implementação das situações de ensino e aprendizagem instrumental, seguida de uma síntese dos achados que respondem à questão de pesquisa. E, por fim, no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais.

Assim, o capítulo a seguir discorre sobre os aportes teóricos que embasaram essa investigação, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Teoria da Gênese Instrumental, articuladas por meio do Fazer e Compreender de Piaget (1978).

2 O CAMINHO DO FAZER AO COMPREENDER NA ÓTICA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DA TEORIA DA GÊNESE INSTRUMENTAL

Nessa pesquisa, as apreensões conceituais das superfícies quádricas passam pelas apreensões figurais possibilitadas pelas suas representações dinâmicas, obtidas no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra. O tratamento das questões que envolvem as representações dinâmicas requer a integração da tecnologia para acesso às superfícies quádricas, por essa causa recorremos à Teoria dos Registros de Representação Semiótica e à Teoria da Gênese Instrumental.

E as questões que se referem à construção do conhecimento matemático foram tratadas por meio do Fazer e Compreender de Piaget. Assim, neste capítulo discorreremos sobre a imersão efetuada nesses três aportes teóricos, que possibilitou a descoberta de pontos comuns e uma articulação dessas teorias.

2.1 A teoria dos registros de representação semiótica e a compreensão em matemática

O filósofo e psicólogo Raymond Duval, responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, estudou o uso da linguagem e de representações para o ensino da matemática. Para o pesquisador, a apreensão conceitual em matemática diferencia-se epistemologicamente das demais áreas de conhecimento pela impossibilidade de acesso ao objeto de estudo.

Não pertencendo ao mundo físico, o acesso a um objeto matemático requer uma de suas formas de representação, o que motivou a investigação que deu origem à Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Segundo Duval (2018, p. 2), essa teoria “é essencialmente um instrumento que foi elaborado para analisar a maneira de pensar e de trabalhar a matemática quaisquer que sejam os conceitos e domínios (geometria, álgebra, análise...) tratados” (Duval, 2018, p. 2).

Nessa subseção, discorreremos sobre os aspectos relacionados ao acesso a objetos matemáticos, ao modo de fazer matemática, ao significado de “compreender matemática” em (Duval, 2018), entre outros. E para compreender essas e outras questões relacionadas, é preciso começar por conhecer as características que tornam o objeto matemático diferente dos demais, o que veremos a seguir.

2.1.1 O acesso ao objeto matemático e os sistemas semióticos na atividade matemática

O homem sempre buscou representar tudo ao seu redor, objetos, eventos, ideias, pensamentos etc. Inicialmente, usou desenhos; depois criou a linguagem falada; a seguir, criou a linguagem escrita e os símbolos; após, aprimorou a linguagem e os símbolos. Por fim, criou os sistemas de representação, munidos de regras e estabelecendo-os como linguagem formal.

Esses sistemas semióticos, utilizados pelo homem para representar, comunicar, conhecer, ensinar, aprender etc., foram evoluindo ao longo do tempo com especificidades para atender as necessidades de cada área do conhecimento. Nessa subseção, são apresentados os aspectos teóricos e práticos da TRRS, que apresenta uma epistemologia específica para a apreensão conceitual de objetos matemáticos a partir do estudo dos sistemas semióticos.

A questão central dessa teoria está relacionada à especificidade dos objetos matemáticos que, sendo abstratos, necessitam de uma de suas representações para acessá-los. Esse fato pode causar obstáculos à compreensão em matemática, porque o objeto matemático pode ser confundido com sua representação e pode ter várias representações que, pertencendo a diferentes sistemas, exigem regras próprias para tratamento (Duval, 2018).

Por exemplo, uma planta pode ser vista a olho nu e tocada, um vírus pode ser observado usando um microscópio, ou ainda, alguns corpos celestes podem ser visualizados com um telescópio. Esses entes podem ser representados por maquetes, desenhos, fotos, descrições etc., mas essas representações não são confundidas com os objetos a que se referem. Ao contrário, um objeto matemático é imaterial⁶. Por exemplo, um número pode ser usado para contar objetos do mundo físico, mas ele mesmo é um objeto abstrato, uma construção do cognitivo humano.

Para o conhecimento desses objetos que não pertencem ao mundo físico, é necessário ir além das investigações empíricas, tendo noções que só são atingidas por abstração. O fato de os objetos matemáticos não serem diretamente acessíveis à percepção sensível conduz à necessidade do uso de uma representação que, para a TRRS, fundamenta toda a comunicação em matemática. O processo de construção do conhecimento matemático é permeado por essas representações, uma vez que elas consistem na única forma de acesso aos objetos matemáticos.

Um professor utiliza diferentes representações - expressões algébricas, tabelas, gráficos - para o ensino de funções. As representações de um objeto do mundo físico cumprem o papel de substituí-lo na sua ausência, enquanto o papel da representação de um objeto matemático vai além de substituí-lo, consistindo na única forma de acessá-lo para comunicar ou operar sobre

⁶ A imaterialidade dos objetos matemáticos se refere ao fato de que as investigações matemáticas incidem sobre coisas que não tem consistência material, não é da natureza da matéria, não tem existência palpável.

ele. Isso explica porque “[...] a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversidade de registros de representação [...]” (Duval, 2003, p. 21).

Por exemplo, o parabolóide elíptico é um objeto abstrato, não podendo ser visto a olho nu ou através de instrumentos. Dessa forma, só é possível evocar (no sentido de tornar presente) esse objeto matemático por meio de uma de suas representações (Figura 3), o que as tornam de suma importância no ensino e na aprendizagem em matemática.

Figura 3 – Representações figural e simbólica do parabolóide elíptico.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Fonte: Elaborado pela autora.

Segundo Duval (2009), a inexistência física do objeto matemático pode implicar em dificuldades na aprendizagem matemática, uma vez que na sua substituição, é comum confundir o objeto matemático com a sua representação. E, segundo o autor, “Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem [...]” (Duval, 2009, p. 14).

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica do pesquisador francês Raymond Duval, originou-se dos seus estudos sobre o funcionamento cognitivo relacionado à atividade matemática e sobre as dificuldades dessa aprendizagem. Em sua tese, sob orientação de Pierre Gréco, Duval investigou o desenvolvimento de noções físicas e matemáticas em crianças e adolescentes, tendo a epistemologia genética de Jean Piaget como referencial teórico.

Após conclusão da tese, Duval tornou-se pesquisador do *Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (IREM), quando se engajou em duas linhas de pesquisas. Em seus estudos, a língua natural ganhava destaque em Geometria, uma vez que raciocínios que mobilizavam vocabulário técnico e o uso de figuras geométricas eram considerados fonte de confusão. Havia uma demanda pelo uso de sinais e símbolos para designar os objetos, as relações e as operações aritméticas, algébricas, lógicas, de conjuntos etc.

Abandonando essas duas linhas de pesquisa devido a uma série de discordâncias, Duval coloca a epistemologia específica da matemática em posição central em suas análises,

dedicando-se à elaboração de sua própria teoria. Sob a influência das concepções psicológicas e cognitivas piagetianas, o autor dedicou-se a investigar a aprendizagem matemática e o papel da representação para a apreensão conceitual do objeto matemático.

Duval investigou a compreensão das demonstrações por alunos do *Collège* (12-15 anos) e a variedade das formas de linguagem nas atividades matemáticas (Freitas; Rezende, 2013). Percebendo que muitos estudos apontavam dificuldades de leitura e de interpretação das representações gráficas, Duval (2011a) propôs um teste de reconhecimento a estudantes franceses do *Séconde*.

Algumas dessas dificuldades foram identificadas: (1) “[...] a ligação entre o conceito de inclinação e direção da reta no plano não é em geral efetuada [...]” (Duval, 2011a, p.97); (2) “[...] a confusão entre inclinação e altura parece ser frequente [...]” (Duval, 2011a, p.97); (3) “[...] impossibilidade de encontrar a equação de uma reta partindo de sua representação gráfica, até para os casos mais elementares [...]” (Duval, 2011a, p.97); (4) “[...] para o caso das retas, a articulação entre o registro das representações gráficas e das equações parece não se estabelecer mesmo depois que os alunos tenham tido aulas sobre funções afins [...]” (Duval, 2011a, p. 97).

Duval constatou a necessidade de representações para o desenvolvimento do conhecimento matemático, quando percebeu que:

A razão profunda dessas dificuldades não se deve procurar nos conceitos matemáticos ligados à função afim, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica (Duval, 2011a, p. 97).

Considerando a aprendizagem de matemática um importante campo de estudos por abranger as principais atividades cognitivas - a conceituação, o raciocínio, a resolução de problemas e a compreensão de textos - Duval dedicou-se ao estudo da noção de representação em matemática.

Segundo Levy (1993), o ato de representar sempre esteve presente na atividade do homem, que possui três capacidades cognitivas básicas: a de perceber, a de imaginar e a de manipular. Essa capacidade de manipular é “[...] a mais fundamental e abrangente das capacidades cognitivas, uma vez que elas nos possibilitam o acesso a todo e qualquer conhecimento, motor do desenvolvimento humano [...]” (Colombo; Flores; Moretti, 2007, p. 187).

No caso de objetos matemáticos, que não podem ser vistos nem tocados, o acesso ao conhecimento se dá pela capacidade de manipular representações. Os fenômenos relativos ao conhecimento só podem ser estudados a partir da noção de representação, “Porque não há

conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação” (Duval, 2009, p. 29).

O autor descreve a trajetória histórica da noção de representação em três fases: 1ª fase - representação mental; 2ª fase - representação interna ou computacional; 3ª fase - representação semiótica, cada uma representando fenômenos de naturezas e funções distintas.

Na primeira fase, a noção de representação estava relacionada à evocação do objeto ausente. As crenças, explicações e concepções das crianças eram extraídas de suas representações mentais pelo método da conversa. A segunda fase foi a das representações internas ou computacionais que, como algoritmos ou processos, traduzem-se por um fazer automatizado. Teve provável início dado por Broadbent (1958), suscitando duas questões:

Sob que forma as informações provenientes do exterior podem entrar no sistema, quer dizer, que descrição feita com a ajuda de símbolos, suscetíveis de serem utilizados pelo sistema, permite captar as informações dadas no exterior? Quais são as regras que vão permitir a transformação das informações no interior do sistema, essa transformação devendo poder ser de tipo cálculo? (Duval, 2009, p. 31).

Sendo tratada como uma codificação da informação, o método utilizado para estudo da representação interna ou computacional é o de tempos de reação, como o estudo cronométrico da apreensão visual de uma letra (Duval, 2009).

Na terceira fase, surge a representação semiótica que se distingue das demais por pertencerem a sistemas de signos (linguagem, escrita algébrica, gráfico), permitindo a sua representação e conversão nos diferentes sistemas. A mudança na forma pela qual um conhecimento pode ser representado é bastante comum na atividade matemática. Por exemplo, quando é preciso escrever uma equação por meio da leitura do enunciado de um problema ou se deseja encontrar o gráfico de uma função dada na sua forma algébrica.

Duval (2009) classifica as representações em interna ou externa, quando é ou não observável e, em consciente ou não-consciente, quando o sujeito percebe ou não. As representações mental e computacional são internas, enquanto a representação semiótica é externa. A representação computacional é não-consciente, enquanto as representações mental e semiótica são conscientes. Com caráter intencional, as representações conscientes permitem a significação, que possibilita a apreensão perceptiva ou conceitual de um objeto, sendo a condição necessária à tomada de consciência.

A representação mental apresenta a função de objetivação que permite a passagem do não consciente para o consciente, a tomada de consciência, a descoberta pelo sujeito daquilo que ele não havia descoberto ainda que outros já lhe houvessem explicado. A representação interna ou computacional tem a função de tratamento, automático ou quase instantâneo, das

informações recebidas para produzir uma resposta. Já as representações semióticas apresentam três funções: comunicação, objetivação e tratamento intencional.

Convém destacar a diferença entre as funções de comunicação e objetivação. A função de comunicação é a que possibilita as interações orais e escritas, por meio da transmissão de mensagens ou informações usando um código comum aos sujeitos envolvidos. A função de objetivação também exerce esse trabalho de exteriorização da representação mental, mas enquanto a comunicação expressa para outros, a objetivação é a expressão para o próprio sujeito. Flores e Moretti (2005) explicam essa diferença dizendo que a função de objetivação:

[...] às vezes, é confundida com a função de comunicação porque ela dá lugar a uma produção de modo vocal ou gráfico, quando se trata de uma produção que é por si e não por outra. De uma certa maneira, a objetivação corresponde a um uso estritamente privado de um registro de representação, mesmo se a produção é materialmente acessível a outra e pode parecer em uma produção para fins de comunicação ou às vezes de tratamento (p. 3).

A função de tratamento intencional é acionada quando uma atividade, não podendo ser realizada apenas por meio das representações mentais, necessita da utilização de sistemas semióticos. Esses dois tipos de tratamentos, os quase instantâneos (representações internas) e os intencionais (representações mentais ou semióticas), se complementam e são fundamentais no desenvolvimento cognitivo (Duval, 2009).

Os tratamentos quase instantâneos são oriundos da familiaridade ou da experiência oriundas de prática ou competência que o sujeito possua, enquanto os tratamentos intencionais são aqueles “[...] que tomam ao menos o tempo de um controle consciente para serem efetuados, apoiando-se exclusivamente sobre os dados provisoriamente remarcados” (Duval, 2009, p. 52).

Os primeiros podem ocorrer simultaneamente e não são sensíveis à quantidade de elementos a integrar e, ao contrário, os segundos só ocorrem um após o outro e são muito sensíveis ao número de elementos a integrar. A construção do conhecimento se dá pelo aumento dos tratamentos quase instantâneos, que passa por uma fase de tratamentos intencionais, de forma que “Toda atividade cognitiva humana repousa sobre a complementaridade desses dois tratamentos” (Duval, 2009, p. 52).

Por exemplo, a aprendizagem da operação matemática de adição se inicia com tratamentos intencionais de contagem, que vão progressivamente se tornando quase instantâneos. A partir desses tratamentos quase instantâneos, inicia-se a aprendizagem da operação de multiplicação com tratamentos intencionais de adições de parcelas iguais, que vão progressivamente se tornando quase instantâneos.

Através da aquisição de novos tratamentos quase instantâneos ocorre o progresso na aprendizagem e, “O conjunto de tratamentos dos quais um sujeito dispõe determina o nível e o horizonte epistêmicos para a aplicação de tratamentos intencionais” (Duval, 2009, p. 52). Isto é, quanto maior o número de tratamentos quase instantâneos que um sujeito consegue realizar em determinado domínio do conhecimento, maior é a sua condição para a realização de tratamentos intencionais cada vez mais complexos nesse domínio.

Segundo Duval, não é difícil entender a confusão gerada em torno da relação entre representações mentais e semióticas, uma vez que ambas se caracterizam pela intencionalidade e realizam papel na objetivação. O autor ainda diz que o sujeito pode concluir efetivamente um processo de objetivação sem que consiga produzir adequadamente uma representação semiótica correspondente.

Uma superfície quádrada, por exemplo, pode ter uma equação ou um gráfico como representação semiótica. Cada uma dessas representações, pertence a um sistema semiótico que consiste em “[...] um conjunto de signos que possui convenções e regras próprias de formação” (Corrêa; Moretti, 2014, p. 41).

Um signo, segundo Santaella (2004 apud Almeida; Silva, 2017, p. 205), é “[...] qualquer coisa de qualquer espécie (uma palavra, um livro, uma biblioteca, um grito, uma pintura, um museu, uma pessoa, uma mancha de tinta, um vídeo etc.) que representa outra coisa, chamada de objeto do signo, e que produz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial”.

Na matemática, os signos mais primitivos surgiram para simbolizar quantidades que receberam o nome de números naturais. Além desses, a matemática tem outros signos, como os que representam objetos, conjuntos etc., cuja formalização linguística possibilitou não só a interação social, mas também o desenvolvimento da ciência. O acesso e a operação sobre os objetos matemáticos exigem o uso de suas representações e uma das características do ser humano é a capacidade de abstração, de simbolização por meio da manipulação de signos.

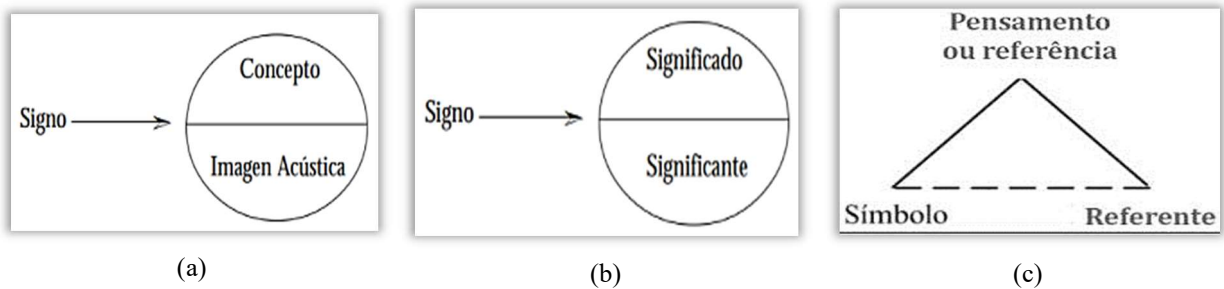
Os signos são objetos de estudo da semiótica, com origem na Grécia Antiga, mas que acabaram se desenvolvendo a partir dos estudos de alguns pesquisadores como Ferdinand de Saussure (1857-1913) e Charles Sanders Peirce (1839-1914), este último considerado o mais importante dos fundadores da moderna semiótica geral (Nöth, 1995 apud Jorge, 2000). E, segundo Tezani (2006),

É a partir de sua experiência com o mundo objetivo e do contato com as formas culturalmente determinadas de organização do real (e com os signos fornecidos pela cultura) que os indivíduos vão construir seu sistema de signos, o qual consistirá numa espécie de “código” para decifração do mundo. (p. 8)

Como entidades representativas que têm a capacidade de gerar entendimento a partir da representação e da experiência no mundo que cerca o ser humano, os signos são “[...] compartilhados pelo conjunto dos membros do grupo social, permitindo a comunicação entre os indivíduos e o aprimoramento da interação social” (Oliveira, 1997 apud Silva, 2017, p. 2).

Segundo Gómez (2005), para Saussure o que une um signo não é uma coisa e um nome, mas um conceito com uma imagem acústica (Figura 4a). O conceito não é a coisa em si, mas o que um sujeito entende sobre a coisa. E, a palavra, é associada ou reconhecida por sua imagem acústica. Mais adiante, o autor propôs conservar o termo signo, mas substituir conceito por significado e imagem acústica por significante (Figura 4b).

Figura 4 - Representações de signo.



Fonte: Gómez (2005, p. 135-137).

Outras concepções se desenvolveram, como a de Ullmann (1967 apud Gómez, 2005), com o triângulo básico de Ogden e Richards que relaciona três componentes do significado: referente, símbolo e pensamento ou referência (Figura 4c). O triângulo representa a existência de três relações, entre: (1) símbolo e pensamento, (2) pensamento e referente e (3) símbolo e referente.

O lado pontilhado indica que a associação entre símbolo e referente passa pelo pensamento, por exemplo: uma palavra (símbolo) simboliza um pensamento que por sua vez se refere a uma coisa ou evento (referente). Segundo Colombo, Flores e Moretti (2007), a estrutura tríade (Figura 4c) foi utilizada por Eco (1974) e Gómez (2005) para explicar o “significado” e, por Peirce, para compreender o “signo”. No entanto, a compreensão do significado ou do signo por meio da tríade, passa pela análise tanto de um quanto do outro.

Ainda, é possível encontrar a mesma estrutura tríade com outras designações para cada vértice: (a) símbolo: signo, significante, veículo do signo etc.; (b) pensamento: interpretação, referência, significado, conceito, conteúdo etc. e (c) referente: objeto, significado, denotação etc.

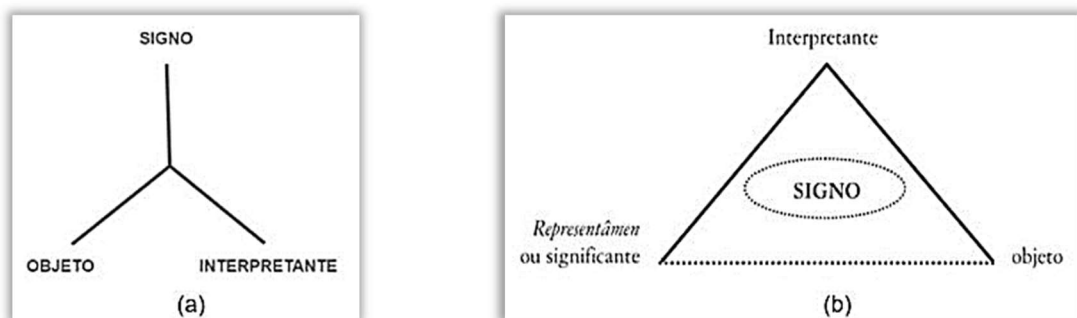
Peirce, que realizou estudos em Lógica, Matemática e Filosofia, elaborou várias definições para signo:

[...] um signo representa, ao menos em parte, um objeto que é, num certo sentido, a causa ou determinante do signo, mesmo que o signo represente o objeto falsamente. Entretanto, dizer que ele representa seu objeto implica que ele afeta a mente de tal modo que determina na mente algo que é próprio do objeto. Essa determinação da qual a causa imediata ou determinante é o signo e da qual a causa mediada é o objeto pode ser chamada de interpretante [...] (Santaella, 2001 apud Silva, 2013, p. 69).

Um signo ou *representamén*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Representa esse objeto, não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia de que eu, por vezes, denominei fundamento do signo (Colombo; Flores; Moretti, 2007, p. 46).

Em ambas as definições, é possível identificar os três elementos do triângulo básico de Ogden e Richards: referente, símbolo e pensamento ou referência (Figura 5). Na primeira, também encontrada em Jorge (2000) junto com a tríade da Figura 5a, temos: o objeto (referente) é representado pelo signo (símbolo) que produz o interpretante (pensamento).

Figura 5 - Tríade de Peirce.



Fonte: (a) Jorge (2000, p. 12); (b) Colombo, Flores e Moretti (2007, p. 187).

Na segunda, encontrada em Colombo, Flores e Moretti (2007) junto com a tríade da Figura 5b, o signo ou *representamén* (símbolo) representa o objeto (referente) que gera o interpretante (pensamento).

Segundo Peirce, “Realmente, uma representação necessariamente envolve uma tríade genuína. Pois envolve um signo [...] mediando entre um objeto e um pensamento interpretador [...]” (Jorge, 2000, p. 12). Ou, explicitando mais a relação entre os elementos da tríade peirceana:

O signo cria algo na mente do Intérprete, algo esse que foi também, de maneira relativa e mediada, criado pelo Objeto do Signo, embora o Objeto seja essencialmente diverso do Signo. Ora, esta criatura do Signo chama-se Interpretante. Ele é criado a partir do signo e é também signo. (Almeida; Silva, 2017, p. 206).

Para os autores, a representação caracteriza-se pela relação entre o signo e o objeto, uma vez que representar é estar no lugar de alguma coisa. A representação pode ser entendida de diversas formas, até mesmo como sinônimo de signo, uma vez que:

John Locke (1632-1704), que em 1690 utilizou o termo Semeiotiké para designar uma “doutrina dos signos”, considerava signo e representação como conceitos sinônimos. Também Peirce, em 1865, caracterizou a semiótica como a “teoria geral das representações” (Gambarato, 2005, p. 205).

Peirce considera que signo é aquilo que representa alguma coisa para alguém em algum aspecto. E, criando em sua mente um signo equivalente, gera o interpretante (Gambarato, 2005). Na concepção de Peirce, “[...] representar é estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro [...]” (Almeida; Silva, 2017, p. 205). Operamos com as representações na atividade matemática, no entanto, o conceito matemático não pode ser apreendido por mera leitura de signos (Steinbring, 2006 apud Almeida; Silva, 2017).

De acordo com Peirce, conhecer tem por finalidade “[...] oferecer uma linha de conduta suficientemente boa para que nosso ardente desejo de comungar com o objeto possa com o tempo, e cada vez melhor, se realizar [...]” (Almeida; Silva, 2017, p. 205). Essa perspectiva peirceana da construção do conhecimento se refere ao processo de semiose, em que o efeito cognitivo do signo sobre a mente do intérprete gera o interpretante (Nöth, 1995). Como signo, este interpretante gera nova tríade, podendo passar a constituir ele próprio um objeto e indicar novo signo.

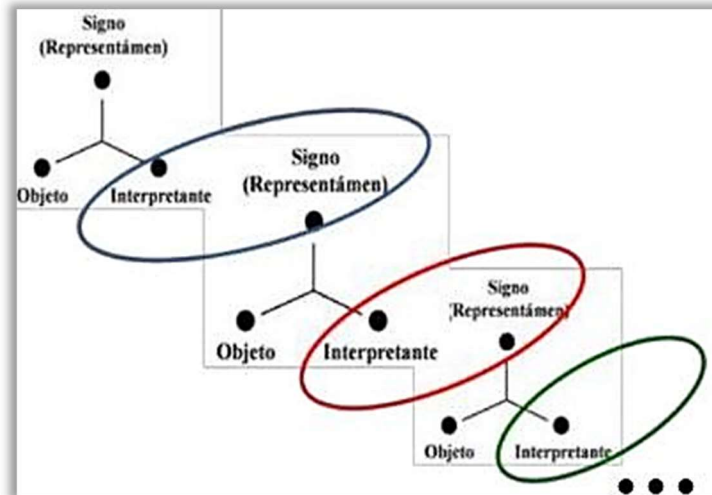
E assim, sucessivamente, de forma que essa atividade é eminentemente evolutiva e possivelmente iniciada pela identificação de uma instabilidade (Drigo, 2007). Para Santaella (2012), a definição de signo como processo relacional entre três elementos ou mediação, conduz à noção de semiose infinita ou ação dialética do signo, uma vez que:

[...] Peirce definiu essa relação como sendo aquela própria da ação do signo ou semiose, ou seja, a de gerar ou produzir e se desenvolver num outro signo, este chamado de “interpretante do primeiro”, e assim *ad infinitum* [...] (Lafuente, 2016, p. 29).

Nas palavras de Peirce, “Qualquer coisa que conduz alguma outra coisa (seu interpretante) a referir-se ao objeto ao qual ela mesma se refere (seu objeto) de modo idêntico,

transformando-se o interpretante, por sua vez, em signo, e assim sucessivamente *ad infinitum* [...]” (Almeida; Silva, 2017, p. 208). Esse processo de geração *ad infinitum* de interpretantes foi representado pelos autores por meio do esquema da Figura 6.

Figura 6 - Semiose como processo de geração *ad infinitum* de interpretantes.



Fonte: Almeida e Silva (2017, p. 208).

Lafuente (2016) usa as palavras em um dicionário para exemplificar o processo de semiose infinita. O significado de uma palavra no dicionário é explicado por meio de outras palavras; estas últimas, por sua vez, necessitam de outras para serem entendidas; e assim sucessivamente. O autor explica que, assim como a semiose, esse processo é infinito uma vez que o conhecimento está em constante evolução, com novos conceitos e novas palavras sendo adicionados.

Um outro exemplo foi dado por Colombo, Flores e Moretti (2007), visando esclarecer esse processo que envolve a tríade semiótica de Peirce com outro exemplo: a “palavra borboleta” (signo) cria na mente do intérprete uma imagem mental (interpretante); esse interpretante, que também é um signo do “animal borboleta” (objeto), deve criar um interpretante mais perfeito do objeto, e assim sucessivamente.

Duval (2011b), que fez uma análise da diversidade e função do signo na atividade científica e na comunicação a partir dos trabalhos de Peirce, Saussure e Frege, afirma que todos os demais trabalhos que surgiram sobre os signos tiveram a contribuição destes. Segundo ele, os estudos desses autores se distinguem por se direcionarem a diferentes disciplinas, o que o levou a perceber a necessidade de um modelo de análise específico para os processos de compreensão em matemática.

Isso se deve à natureza simbólica dos objetos matemáticos que, segundo Almeida e Silva (2017), “[...] são conhecidos, não no que eles são, mas apenas em suas propriedades, no que deles se pode dizer [...]” (p. 208). Um enunciado em língua materna, uma fórmula algébrica, um gráfico de uma função ou uma figura geométrica, um conjunto de números, por exemplo, são representações semióticas. Para Henriques e Almouloud (2016),

Representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótico e de outro lado, pela referência do objeto representado (p. 467).

A tríade de Peirce, segundo Colombo, Flores e Moretti (2007), foi desenhada para objetos perceptíveis, não sendo o caso do objeto matemático, que possui existência ideal necessitando das representações para que possa ser acessado. Assim, os autores apresentam um exemplo para a estrutura tríade peirceana do objeto matemático “reta” (Figura 7).

Figura 7 - Tríade peirceana de um objeto matemático.



Fonte: Colombo, Flores e Moretti (2007, p. 189).

A reta (objeto, referente⁷) é representada pela palavra “reta” (signo, símbolo, significante) que, por sua vez, cria o conceito de reta (interpretante, referência). Os Fundamentos da Aritmética de Frege trazem “[...] contribuições importantes a respeito da natureza semântica da referência, do sentido de uma dada representação e do objeto como invariante de referência de muitas representações” (Colombo; Flores; Moretti, 2007, p. 190).

A referência é o “conteúdo” da representação, ou seja, “[...] uma mera expressão, a forma de um conteúdo, não pode ser a essência da coisa, mas só o pode ser o próprio conteúdo” (Colombo; Flores; Moretti, 2007, p. 190). As representações 2.3² e 3.6 (signos) fazem

⁷ Na semiologia, referente é o objeto real, aquilo que o signo representa.

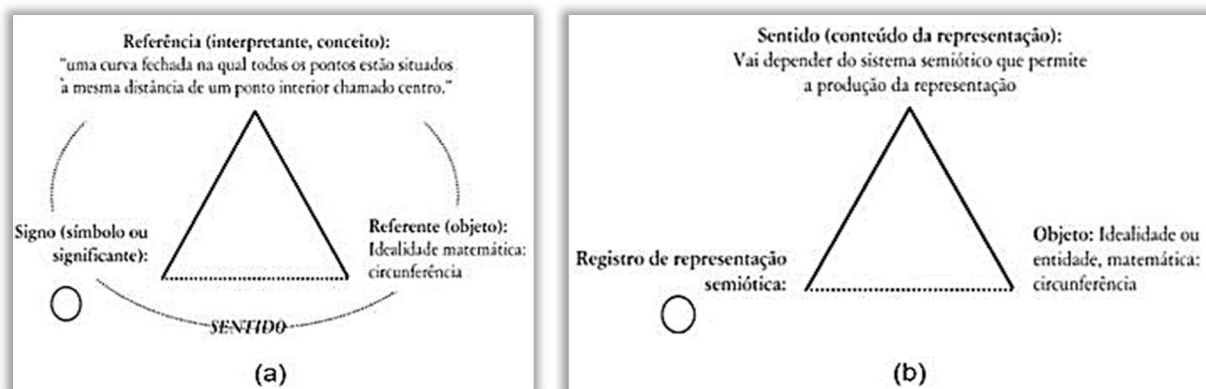
referência ao mesmo “número 18” (objeto). Nesse caso, a referência, que une signo e objeto, é o objeto do conhecimento.

Distinguindo sentido de referência, “[...] terem $2^4 = 4^2$ e $4 \cdot 4 = 4^2$, na verdade, a mesma referência, mas não o mesmo sentido, isto é, neste caso, não contêm o mesmo pensamento” (Colombo; Flores; Moretti, 2007, p. 191). Isso permite distinguir a significação da referência, uma vez que a primeira depende do registro de representação e a segunda do objeto representado (Duval, 2012a). Para o autor, “[...] duas expressões, com a mesma referência, podem ser trocadas uma pela outra, em uma frase ou em uma fórmula, sem que o valor da verdade mude [...]” (Silva, 2013, p. 52).

Colombo, Flores e Moretti (2007) analisam, nas Figura 8a e Figura 8b, dois esquemas para o funcionamento do signo na atividade matemática, de acordo com a perspectiva de Duval. A Figura 8a representa uma estrutura da tríade de Duval, em que a idealidade matemática “circunferência” (objeto, referente) é representada pela “figura circunferência” (signo, símbolo, significante) que, por sua vez, gera na mente do intérprete o “conceito de circunferência” (interpretante, referência).

Nesse caso, se a representação fosse a “equação da circunferência”, a referência e o referente continuariam sendo os mesmos - o “conceito de circunferência” e o objeto matemático “circunferência”, respectivamente - mas o sentido mudaria. Representado pela linha pontilhada envolvendo a tríade, o sentido se relaciona com cada representação (figural e algébrica) segundo as regras próprias do sistema semiótico a que pertencem.

Figura 8 - Estrutura triádica em Duval.



Fonte: Colombo, Flores e Moretti (2007, p. 194-195).

No entanto, para Duval:

[...] $4/2$, $1+1$ e $\sqrt{4}$, são formas escritas que designam um mesmo número, expressões que fazem referência a um mesmo objeto e que não possuem a mesma significação, uma vez que não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: a primeira exprime o número em função de propriedades de divisibilidade e razão, a segunda em função da recorrência à unidade ... Simples mudanças na escrita permitem exibir propriedades diferentes do mesmo objeto, mas mantendo a mesma referência (Colombo; Flores; Moretti, 2007, p. 193).

Isso quer dizer que a estrutura triádica em Duval pode ser entendida como na Figura 8b: uma representação semiótica (a figura da circunferência) se refere ao objeto matemático (a entidade circunferência), produzindo um sentido que vai depender do registro utilizado. Assim, os três elementos da tríade semiótica de Duval são: o objeto matemático (referência), a representação semiótica (signo) e o sentido (conteúdo do registro). De acordo com Silva Filho e Moretti (2020) no modelo triádico de Duval para as representações semióticas, o objeto (referência do registro) se relaciona com dois elementos que compõem o registro: o conteúdo (significado) e a forma (significante).

Duval (2009) descreve três aspectos inerentes às representações semióticas: (1) A importância da forma em relação ao conteúdo, uma vez que as representações se fazem necessárias em toda atividade matemática significativa; (2) A diversidade das formas de representação; (3) A mudança de forma de representação. Essas duas últimas, facilitam o tratamento da informação, tornando mais simples ou rápidos os cálculos ou permitindo a investigação de um problema por meio de diferentes representações.

O autor acrescenta que o papel fundamental das representações semióticas na atividade cognitiva se refere a dois fatos. Um deles é que, diferente das outras duas, as representações semióticas preenchem as três funções, de comunicação, tratamento de informações e objetivação. O outro, é que as representações semióticas são indispensáveis para a produção do conhecimento, visto que não é possível destacar o conteúdo da forma.

Em outras palavras, não existe noese (apreensão conceitual do objeto representado) sem semiose (apreensão ou produção de uma representação semiótica), pois a semiose é que determina as condições para o exercício da noese (Duval, 2009). Segundo D'Amore (2005)⁸, Duval foi o primeiro a afirmar que para a aquisição conceitual de um objeto em Matemática é necessária a aquisição de uma ou mais representações semióticas. Entendendo noese como aquisição conceitual de um objeto e semiose como representação realizada por meio de signos,

⁸ Bruno D'Amore, com formação em Matemática, Pedagogia e Filosofia, tem PhD em Educação Matemática é um italiano especialista em Didática da Matemática, reconhecido internacionalmente nessa linha de investigação que mantém conversas e troca de ideias com Raymond Duval.

Maggio (2018) considera que há uma “[...] estreita interdependência existente entre noesis e semiosis [...]” (apud D’Amore, 2005, p. 60).

Isso significa dizer que a atividade matemática requer a manipulação de registros de representação semiótica. Sem apreensão de representações semióticas não há apreensão conceitual, ou seja, as representações são indispensáveis na construção do conhecimento. Duval (2009) ainda destaca, além do papel da semiose, outras condições são necessárias para o desenvolvimento dos conhecimentos, são elas: a diferenciação entre o representante e o representado e a diversidade de registros.

Três atividades cognitivas caracterizam um tipo específico de sistema semiótico que Duval (2009) chamou de registros de representação semiótica, neste estudo, simplesmente registros ou registros de representação. Uma delas é a formação de uma representação identificável, sendo necessárias regras próprias a cada sistema que garantam o seu reconhecimento. Os atos mais elementares de formação são a designação nominal de objetos, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de certas propriedades de um movimento (Duval, 2009).

A segunda, refere-se às transformações internas das representações que, segundo às regras do sistema, consistem na transformação de uma representação em outra, sem mudar de sistema e mantendo a referência ao objeto representado. Por exemplo, efetuar um cálculo para resolver uma equação ou um sistema de equações. Por fim, as transformações externas de uma representação, que consistem na mudança de registro, mantendo a referência ao mesmo objeto. Por exemplo, a passagem da representação simbólica para a gráfica de uma função, ou vice-versa.

O código morse ou o código de trânsito são sistemas semióticos em que não é possível realizar transformações, ao contrário de outros que “[...] permitem transmitir as informações, ou mudar o suporte físico de comunicação como, por exemplo, os alfabetos que permitem passar da fala à escrita” (Duval, 2011b, p. 71). Além da linguagem natural, a linguagem simbólica, os gráficos etc., são exemplos de sistemas semióticos que permitem as três atividades cognitivas, podendo ser chamados de registros de representação semiótica.

Em matemática existem registros de representação semiótica comuns, como a língua natural e os diagramas, e registros de representação semiótica especializados, como os sistemas de coordenadas gráficas (cartesianos, polares, esféricas), o sistema de escrita simbólica da álgebra, os sistemas de numeração decimal e os sistemas de representação das figuras em diferentes dimensões (Flores; Moretti, 2005). Os diferentes tipos de representações semióticas são classificados em Duval (2003), conforme o *Quadro 1*.


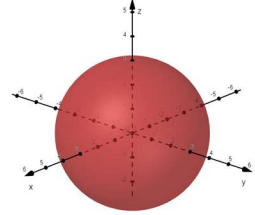
Quadro 1 - Classificação das representações semióticas

	<i>Representação Discursiva</i>	<i>Representação não-discursiva</i>
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma racional: argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva. Aprecensão operatória e não somente perspectiva. Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: numéricas (binárias, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos Mudanças de sistema de coordenadas. Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p. 14).

O *Quadro 2* traz uma categorização dos diferentes registros de representação que serão utilizados para a exploração dos conceitos de superfícies quádricas, assim como seus sistemas de representações semióticas correspondentes. Baseados na classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento cognitivo matemático proposto por Duval (2010), são eles: registros em língua natural, simbólico, figural e gráfico.

Quadro 2 - Representações semióticas e respectivos registros

REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	Registro em Língua Natural	esfera
	Registro Simbólico	$x^2 + y^2 + z^2 = 9$
REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA	Registro Figural	
	Registro Gráfico	

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Cada um desses registros possui regras próprias e a construção do conhecimento matemático envolve o reconhecimento dessas representações, saber operar em cada registro e correlacionar representações de diferentes registros.

É dessa forma que, de acordo com Duval (2003), é possível adquirir conhecimento sobre o objeto matemático, sabendo que nenhuma das suas representações comporta todas as informações sobre ele. Henriques e Almouloud (2016, p. 467), referindo-se aos termos objeto e representação, dizem que “[...] as relações existentes entre os dois termos são as noções centrais para toda a análise do conhecimento”.

2.1.2 *Apreensão conceitual de um objeto matemático*

Segundo Duval (2011b), “A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos [...]” (p.15). E, o fato de o acesso a um objeto matemático necessitar de sistemas de representação e, de ele possuir diferentes representações, o levou a alguns questionamentos.

O autor buscou compreender como os alunos reconheciam o que é matematicamente preservado quando se passa de um tipo de representação à outra e se os alunos reconhecem o que é e o que não é matematicamente pertinente em uma representação. Na passagem de um tipo de representação a outra, assim como na diferença de procedimentos matemáticos empregados nos diferentes tipos de representação, ele constatou que a atividade matemática deveria ser analisada em termos de transformações de representações semióticas. Duval observou que:

Desde os primeiros anos do *Collège*⁹, era solicitado aos alunos um malabarismo com diferentes representações associadas a estas atividades, como se fosse tão natural como folhear uma revista em quadrinhos! E, ao mesmo tempo, tomei consciência do caráter fundamentalmente semiótico da atividade matemática, quaisquer que sejam as formas de atividade escolhidas para as “engenharias didáticas” (Freitas; Rezende, 2013, p. 13).

Para o autor, as atividades cognitivas relacionadas à aprendizagem da matemática estão intimamente ligadas ao uso de sistemas de expressão e representação. E, baseado nos princípios de Piaget, no que se refere à imagem mental que cada sujeito produz e internaliza do objeto, e nas ideias de Percie, Duval investigou o papel das representações semióticas na aprendizagem matemática e sua relação com as representações mentais.

⁹ Corresponde aos anos finais do Ensino Fundamental no Brasil.

Para Duval (2009), as representações mentais permitem uma visão do objeto na ausência do significante perceptível, sendo compostas de imagens e conceitos que o sujeito tem sobre um objeto ou situação. A esse respeito, Gambarato (2005) considera que, a representação mental inicial de um enunciado, que está próximo de sua forma linguística, é usada para construir um modelo de estado de coisas.

E, segundo Nöth (1995), “O processo é guiado pelo conhecimento da contribuição para as condições de verdade produzidas pelas palavras no enunciado, de acordo com a sintaxe [...] por um conhecimento do contexto [...] e pelo conhecimento geral do domínio das convenções do discurso” (apud Gambarato, 2005, p. 212).

Essa concepção remete ao modelo de Peirce, em que a representação é mediada, sendo terceira em meio a um segundo (seu objeto) e primeiro (seu signo). As representações semióticas, definidas por Duval (2009) como aquelas que permitem uma visão do objeto através da percepção de estímulos (pontos, traços, caracteres, sons, ...), consistem no conjunto de signos utilizados para expressar a representação mental de modo a torná-la visível.

O autor também diz que:

As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceituações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento (Duval, 2012b, p. 269).

Dessa forma, as representações semióticas constituem um meio pelo qual o indivíduo pode exteriorizar suas representações mentais, constituídas de todo o conjunto de imagens e conceituações que o indivíduo possui sobre o objeto, tornando-as visíveis ou acessíveis a outros.

Por outro lado, a interiorização das representações semióticas permite a construção da representação mental do objeto de estudo, pois na ótica de Duval, "As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas" (Duval, 2003, p. 31).

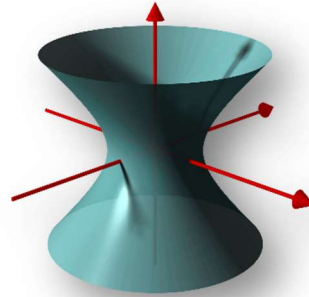
O autor diz que em produção externa é possível tratar e controlar um número maior de informações do que em produção interna. No entanto, conforme Duval (2012b), as representações semióticas não servem apenas para comunicar as representações mentais, uma vez que são também essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.

Por exemplo, a comunicação do objeto matemático “hiperboloide de uma folha” pelo professor, ou a formação da representação mental deste pelo seu aluno, dependem de

representações semióticas (Figura 9) do referido ente matemático. E para aquisição do conhecimento sobre este objeto matemático, o aluno precisa não só reconhecer e operar com essas representações, mas também correlacionar suas representações em diferentes registros, sendo capaz de transitar entre estes.

Figura 9 - Representações semióticas do hiperboloide de uma folha.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Fonte: Elaborado pela autora.

Segundo Duval, a noção de registros de representação semiótica traz como princípio a mobilização de vários registros como uma maneira de se representar um objeto matemático, fazendo uma distinção clara entre a matemática e o funcionamento cognitivo (Mineiro, 2011). Conseqüentemente, o ensino e a aprendizagem de tais objetos envolve a exteriorização das representações mentais e a interiorização das representações semióticas.

As dificuldades sistemáticas de compreensão que surgem na aprendizagem de matemática nem sempre estão relacionados à complexidade epistemológica dos conceitos. Para Duval (2010), elas se referem primeiramente às transformações sobre as representações semióticas, que o autor considera o motor semiótico-cognitivo dos processos de pensamento.

Em matemática, a atividade cognitiva depende das representações semióticas, que consistem na única maneira de acessar objetos matemáticos. Sendo assim, a realização de uma atividade matemática consiste na formação e transformação dessas representações semióticas e:

Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida (Duval, 2003, p. 21).

A formação de uma representação semiótica é a função comparada a uma descrição que, de acordo com as regras próprias do sistema, permite a identificação e o reconhecimento da representação. As regras de formação devem permitir a transformação de uma representação

em outra equivalente dentro de um mesmo sistema. Conforme Duval (2009), “Os atos mais elementares de formação são, conforme os registros, uma designação nominal de objetos, uma reprodução de seu contorno percebido, a vinculação de relações ou de certas propriedades de um movimento” (p. 55).

Todavia, segundo Duval (2011b), “[...] o que é matematicamente essencial em uma representação semiótica são as transformações que se podem fazer, e não a própria representação” (p. 68). As transformações permitem a diversificação das formas de representação de um ente, constituindo-se de dois tipos: internas (tratamentos) e externas (conversões).

Os tratamentos são transformações internas a um registro de representação que, a partir das regras próprias desse registro e, conforme a conveniência, permitem passar de uma representação a outra sem mudar de registro e se referindo ao mesmo objeto. Conforme explica Duval (2009),

O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas. Um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação a um sistema. (p. 56)

Por exemplo, na resolução de equações, as transformações realizadas desde a equação inicial até a final (quando se obtém o conjunto solução) são do tipo tratamento, uma vez que ocorrem sempre dentro do mesmo registro de representação. Os tratamentos são transformações bastante comuns no ensino de matemática, mas que não são suficientes para promover a apreensão conceitual.

Supondo uma situação em que é solicitado que o aluno encontre o ponto de intersecção entre duas retas, dadas as suas equações nas variáveis x e y , com abordagem apenas do registro simbólico. Então, pode ser que o aluno até resolva o sistema de equações, encontrando corretamente os valores de x e y sem que tenha compreendido o significado da solução encontrada. Isso porque operar em um registro apenas não é suficiente para a compreensão desse objeto de estudo, sendo necessária a utilização do registro gráfico, com o estabelecimento da relação entre os registros.

A transformação que possibilita a passagem, por exemplo, de uma representação pertencente a um registro algébrico a outra em registro gráfico, e vice-versa, chama-se conversão. As conversões, transformações externas a um registro de representação, consistem na passagem de uma representação inicial em outra, mas de registro diferente, referindo-se ao mesmo objeto. Nas palavras de Duval (2009),

Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação deste mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. As operações que designamos habitualmente pelos termos “tradução”, “ilustração”, “transposição”, “interpretação”, “codificação”, etc. são operações que a uma representação em um registro dado fazem corresponder outra representação num outro registro. A conversão é então uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida. (p. 58)

A conversão tem um importante papel na apreensão conceitual, uma vez que as dificuldades de compreensão surgem por conta da diversidade e complexidade de transformações desse tipo (Duval, 2012b). Um ensino centrado em tratamentos dentro de um ou mais registros, mas sem o estabelecimento de uma correlação entre eles, é insuficiente para uma apreensão conceitual significativa.

De acordo com Damm (2003), “Essa apreensão é significativa a partir do momento que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e ‘passar’ de um a outro o mais naturalmente possível” (apud Souza; Souza, 2020, p. 6). E, conforme Duval (2012b), apenas sistemas semióticos específicos, os por ele denominados registros de representação semiótica, permitem a formação de uma representação identificável¹⁰ e as transformações de tratamento e conversão.

No caso do hiperboloide de uma folha representado na Figura 10, por exemplo, a transformação da representação (a) na representação (b) consiste em um tratamento, pois as duas pertencem ao mesmo registro de representação (o da escrita algébrica).

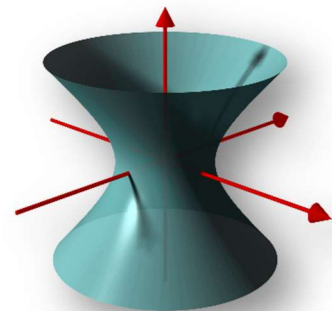
Figura 10 - Representações simbólicas e gráfica de um hiperboloide de uma folha.

$$9x^2 + 4y^2 - 6z^2 = 36$$

(a)

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{6} = 1$$

(b)



(c)

Fonte: Elaborado pela autora.

¹⁰ A formação de uma representação identificável é uma das três atividades cognitivas caracterizam um tipo específico de sistema semiótico, que Duval (2009) chamou de registros de representação semiótica, a formação de uma representação identificável requer regras próprias a cada sistema que garantam o seu reconhecimento (Subseção 2.1.1).

Já a transformação das representações simbólicas (a) ou (b) na representação gráfica (c), consiste em uma conversão porque na passagem da primeira representação para a segunda ou vice-versa, ocorre uma mudança de registro de representação. A compreensão de uma questão matemática envolve a formação e a conversão de representações semióticas, enquanto a produção de uma resposta mobiliza ao mesmo tempo a formação, o tratamento e a conversão de representações semióticas.

Os diferentes tipos de representação semiótica possibilitam tratamentos equivalentes a custos menores, a partir de uma adequada mudança de registro, permitindo também que os limites de um registro sejam ultrapassados e complementados por outro. O ensino dos números racionais, por exemplo, pode possibilitar maior compreensão se realizado também por meio do uso de figuras, ao invés de apenas pela escrita de frações.

Por outro lado, a fração $\frac{1}{2}$ e o número decimal 0,5 são exemplos de diferentes registros que representam um mesmo objeto matemático, mas que exigem conhecimentos específicos para realizar tratamentos por meio das quatro operações. As regras para operar nos diferentes registros de representação semiótica não são as mesmas e:

Para a expressão de um número é preciso, de fato, distinguir a significação operatória ligada ao significante, em virtude das regras do sistema de expressão escrita (esta significação operatória não é a mesma para 0,25, $\frac{1}{4}$ e $25 \cdot 10^{-2}$ não são os mesmos tratamentos que devem ser considerados para efetuar as adições $0,25 + 0,25 = 0,5$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ e $25 \cdot 10^{-2} + 25 \cdot 10^{-2} = 50 \cdot 10^{-2}$ e o número representado que não é o significante 0,25, nem o significante $\frac{1}{4}$ e nem o significante $25 \cdot 10^{-2}$. Cada uma destas três expressões tem uma significação operatória, mas representa o mesmo número (Duval, 2012b, p. 273).

Essa complementação proporcionada pela mudança da representação fracionária para a decimal, ou vice-versa, é importante para a compreensão integral dos números racionais. Segundo Duval (2012b), o conhecimento do objeto matemático só se dá quando o sujeito dispõe de ao menos dois registros de representação semiótica diferentes e quando ele seja capaz de converter uma representação de um registro em outro.

Duval (2009) diz que “[...] a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos” (p. 63). Dessa forma, “[...] a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação [...]” (Duval, 2009, p. 81).

Além disso, o processo de conceitualização em matemática está fortemente relacionado à coordenação de registros, que se caracteriza pela mudança instantânea de registro. Na concepção de Duval (2016),

a atividade e a compreensão em matemática apresentam faces opostas; uma é a face exposta dos conhecimentos e dos métodos de cálculo, de resolução ou de raciocínio; e a outra é a face oculta das coordenações dos pré-requisitos de, ao menos, dois registros para poder começar a compreender e poder utilizar conhecimentos matemáticos. (p. 34)

Segundo Duval (2016), “Essas coordenações precisam ser desenvolvidas, uma vez que o pensamento matemático é a sinergia de diversos registros, e o que se chama de “conceitualização” não é nada mais do que a mobilização sinérgica de diversos registros” (p. 34). O autor considera que, para obter conhecimentos e o domínio de métodos da face exposta da matemática, é necessário ultrapassar os dois patamares de compreensão que dizem respeito a face oculta da matemática.

Esses patamares de compreensão em matemática identificados por Duval (2016) permitem que se organizem atividades específicas. As atividades relativas ao primeiro patamar referem-se ao reconhecimento de um mesmo objeto em duas representações semióticas distintas. E, as atividades relativas ao segundo patamar, à conscientização do funcionamento próprio de cada um dos registros.

2.1.3 Mudanças de registro de representação na atividade matemática

Duval constatou que é nas mudanças de registro, processo necessário para aprender matemática, que se observam os maiores obstáculos à compreensão em matemática. O autor constatou que:

No caso de as conversões requeridas serem não congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes. Falando de outra maneira, o sucesso, para grande parte dos alunos em matemática, ocorre no caso dos monorregistros. Existe como um “enclausuramento” de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem (Duval, 2003, p. 21).

Duval (2009) diz que os problemas específicos às mudanças de registro podem ser observados a partir do procedimento de correspondência de dois registros de representação diferentes, denominados registro de partida e registro de chegada, conforme *Quadro 3*.

Quadro 3 - Mudança de registro e congruência

Casos	Registros de partida	Registro de chegada
1	conjunto dos pontos com ordenada superior à abscissa	$y > x$
2	conjunto dos pontos que têm abscissa positiva	$x > 0$
3	conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal	$x y > 0$

Fonte: Adaptado de Duval (2009, p. 64-65).

O primeiro caso do quadro é um caso em que há congruência entre as representações, pois existe uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes dos diferentes registros, permitindo reencontrar a expressão inicial na conversão inversa. O mesmo não acontece nos casos seguintes, onde ocorre a não-congruência das representações.

No caso 2, porque não há escrita algébrica para “positivo”, sendo necessário escrever “ > 0 ”, para compensar essa ausência. E, no caso 3, não há correspondência direta entre os registros de partida e de chegada, uma vez que a escrita em língua natural do registro de chegada é completamente diferente da utilizada no registro de saída.

Segundo Duval, “[...] se a conversão das representações é quase imediata em caso de congruência, esse não é mais o caso desde que haja não-congruência entre a representação inicial e a representação convertida” (Duval, 2009, p. 65). Além do tempo de tratamento aumentar no caso de não-congruência, o autor diz que a conversão pode se tornar difícil de efetuar e até de compreender, caso não haja uma aprendizagem prévia das especificidades semióticas de cada registro.

Usando como exemplo os registros simbólicos e em língua natural, pode-se compreender os três critérios que, segundo Duval (2009), são necessários para que haja congruência: (1) correspondência semântica dos elementos significantes: correspondência direta entre a escrita algébrica e a língua natural; (2) univocidade semântica terminal: correspondência única entre a escrita algébrica e a língua natural; (3) ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das suas representações: quando a ordem na escrita algébrica é a mesma na língua natural.

As dificuldades com a não-congruência das representações frequentemente interferem na atividade cognitiva de conversão, podendo ser observadas também nas relações entre escrita algébrica e representação gráfica. Duval (2009) constatou que a conversão da escrita algébrica para a representação gráfica costuma ser facilmente realizada, mas o mesmo não acontece em caso contrário, na conversão da representação gráfica para a escrita algébrica.

Conforme em Moretti (2003), “[...] se há congruência semântica entre um par ordenado e sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente” (p. 151). O autor destaca que essas dificuldades aparecem até mesmo com os casos mais simples, como o da função linear e mesmo depois de seu ensino, porque as unidades significantes de um gráfico correspondem aos valores de diferentes variáveis visuais.

Para Duval (2009), “O aluno que não as discrimine é como cego para a conversão inversa da que é classicamente ensinada” (p. 79), ou seja, ele apresenta limitações para fazer uma leitura correta dos gráficos. Segundo o autor, se o ensino for limitado a um só registro ou, se mobiliza vários registros sem a conversão de um no outro, o sujeito pode apresentar incapacidade de mobilização dos conhecimentos adquiridos. Já uma compreensão baseada na coordenação de registros, oferece possibilidades de transferência, de forma que:

Uma aprendizagem especificamente centrada sobre a conversão de representações e efetuada fora de toda tarefa de tratamento parece, então, necessária ao início de todo ensino que dá acesso a um novo domínio ou a uma nova rede conceitual (Duval, 2009, p. 99).

É possível que um aluno realize corretamente operações com frações e com números decimais sem, contudo, saber que essas duas representações se referem ao mesmo número. A identificação de representações e das regras próprias de cada registro podem permitir a realização de tratamentos, mas não garantem a compreensão integral do número racional. Na passagem da fração para o número decimal ou vice-versa, pode ocorrer apenas uma codificação, não havendo conceitualização.

Para compreender as dificuldades enfrentadas pelos alunos, Duval (2011a) realizou um teste de reconhecimento com três turmas de segundo ano no primeiro trimestre de 1987. Depois, aplicou este teste de reconhecimento em outras duas turmas de segundo ano, após terem tido um ensino sobre funções afins. Neste teste, com 165 participantes, Duval (2011a) verificou que “[...] somente 1/4 dos alunos distinguem $y = x + 2$ e $y = 2x$ e menos de um aluno em cada cinco acertaram os cinco itens [...]” (Duval, 2011a, p.106). Não só isso, mas “[...] mesmo tendo passado por esta prova, somente 99 (60%) deles viam uma diferença de sentido na inclinação da reta associada à diferença entre $y = x$ e $y = -x$ [...]” (Duval, 2011a, p. 106).

Isso mostra que nem sempre um instrumento de avaliação consegue verificar se realmente ocorreu uma apreensão conceitual. Uma nota boa na prova pode ser análoga a um resultado “falso positivo” em um exame, pois pode parecer para o professor que o aluno aprendeu quando, na verdade, isso não ocorreu de fato. Para avaliar a compreensão em

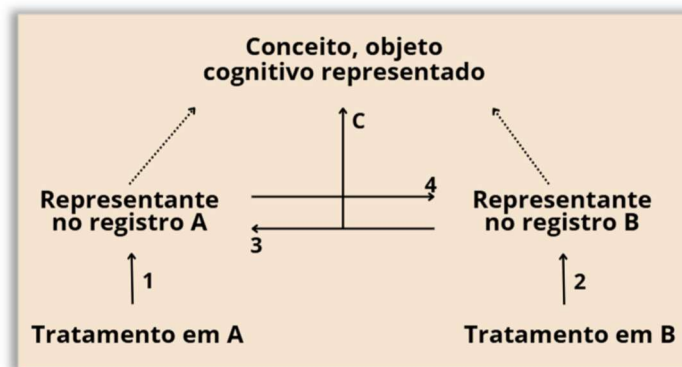
matemática, Duval utilizou o reconhecimento como critério cognitivo, uma vez que “[...] compreender em matemática é, antes de tudo, reconhecer os objetos matemáticos representados [...]” (Duval, 2012a, p. 310).

Conforme Duval, “[...] os processos cognitivos de reconhecimento de um mesmo objeto matemático estão baseados em fazer a correspondência entre as unidades de sentido que se podem distinguir dos conteúdos respectivos de duas representações diferentes [...]” (Duval, 2012a, p. 311). O autor ainda considera que, “[...] o tipo de tarefa que permite estudar o reconhecimento dos objetos representados é uma tarefa de conversão de representação [...]” (Duval, 2012a, p. 317).

Tendo sido utilizado nas décadas de 80 e 90, esse critério cognitivo se tornou a base para a Hipótese Fundamental de Aprendizagem de Duval, segundo a qual “A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” (Duval, 2012b, p. 282).

Para explicar essa hipótese, Duval elaborou um esquema, que expomos a seguir na Figura 11, e que explica como se estrutura o funcionamento cognitivo durante o processo de aprendizagem em Matemática.

Figura 11 - Modelo cognitivo de funcionamento do pensamento matemático de Duval.



Fonte: Duval (2012b, p. 282).

Falando sobre o seu modelo cognitivo de funcionamento do pensamento matemático (Figura 11), Duval (2012b) explica que,

No esquema desta figura, as flechas 1 e 2 correspondem as transformações internas [tratamento] a um registro e as flechas 3 e 4 às transformações externas, quer dizer, mudança de registro por conversões. A flecha C corresponde à compreensão integral de uma representação: ela supõe uma coordenação de dois registros. As flechas pontilhadas marcam a distinção clássica entre representante e representado [objeto/conceito]. (p. 282)

Esse modelo revela a relação entre a representação e a conceitualização, uma vez que é possível ver que não há apreensão conceitual (conceitualização) de um objeto matemático (conceito) sem apreensão ou produção de representações semióticas. E, mais que isso, a apreensão conceitual de um objeto matemático requer a coordenação das diferentes representações semióticas, ou seja, a passagem espontânea de um registro de representação para o outro.

Em outras palavras, a conceitualização implica coordenação de registros de representação (Duval, 2012b). De acordo com D'Amore (2005 apud Maggio, 2018, p. 37), “[...] aquilo que se denomina ‘conceitualização’ começa somente quando se coloca em ação, mesmo que apenas num esboço, a coordenação de dois distintos registros de representação [...]”. Esse processo, que não é espontâneo no aprendiz, exige abordagem que oportunize tal coordenação.

2.1.4 Abordagens para coordenação de registros

Em atividades com gráficos, Duval (2011a) categoriza três formas de abordar a conversão entre os registros simbólico e gráfico: (1) Abordagem ponto a ponto; (2) Abordagem de extensão do traçado; (3) Abordagem de Interpretação Global das Propriedades Figurais.

A abordagem mais comum na passagem de uma representação simbólica para gráfica é a que obtém uma tabela de pontos (Abordagem Ponto a Ponto). Por um lado, essa abordagem “[...] impossibilita que se perceba que modificações na equação são responsáveis por modificações no gráfico e vice-versa” (Moretti, 2003, p. 150). Do outro lado, sugerindo um estudo discreto da relação entre pontos e pares ordenados que, na verdade é contínua, essa abordagem impede que os alunos tenham plena compreensão dos conceitos estudados (Né, 2013).

Segundo Duval (2011a), o ensino que privilegia a passagem da equação para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, esquece-se que é a passagem inversa que apresenta maior dificuldade. Por outro lado, para essa passagem do gráfico para a equação correspondente, os autores destacam que a abordagem ponto a ponto não é somente inadequada, constituindo-se também num obstáculo.

Outra abordagem costumeiramente utilizada, a Abordagem de Extensão do Traçado Efetuado), corresponde às atividades de interpolação e extrapolação que se apoiam em valores particulares sem preocupação com a expressão algébrica. A aprendizagem dos gráficos na TRRS, necessária no estudo das curvas e superfícies, exige uma abordagem semiótica, sem a qual ocorrem as dificuldades de aprendizagem por falta de conhecimento das regras de

correspondência. Para isso, torna-se necessário outro tipo de tratamento gráfico, que Duval denomina de Interpretação Global de Propriedades Figurais.

Para Duval (2011a), essas três abordagens para a conversão de representações gráficas em algébricas e vice-versa não levam em conta os mesmos dados visuais do gráfico. A abordagem por Interpretação Global de Propriedades Figurais, distingue-se das demais por considerar as propriedades globais da figura, possibilitando a sua visualização como um todo, na medida que reforça a relação entre o gráfico e sua equação (Corrêa; Moretti, 2014).

A Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais consiste na identificação e correlação das unidades significantes necessárias e suficientes para a conversão entre duas representações de registros distintos. Segundo Duval (2009), falando sobre o caso da função polinomial do primeiro grau, a conversão de um registro algébrico para um registro gráfico não consiste apenas na construção de uma tabela de pontos.

Apesar de comum no ensino dessa função, o autor afirma que essa abordagem não é suficiente para a compreensão integral desses conceitos, “Porque toda a atividade de conversão pressupõe a discriminação das unidades significantes a serem postas em correspondência nos registros de partida e nos de chegada” (Duval, 2009, p. 100).

Em seus experimentos, Duval constatou que os obstáculos à compreensão em matemática estão justamente nas dificuldades com a conversão, pois “[...] a dificuldade própria à atividade de conversão reside essencialmente nessa discriminação [de unidades significantes]” (Duval, 2009, p. 100). Essas unidades são os elementos orientadores que intermediarão as conversões das representações do registro de partida para o de chegada, e vice-versa.

Para a identificação das unidades significantes, de acordo com Duval (2009), é necessário explorar as variações possíveis de uma representação num registro, mantidas as demais constantes, observando as variações concomitantes no outro. Dessa forma,

A discriminação das unidades significantes de uma representação e, por consequência, a possibilidade de apreensão daquilo que ela representa, depende da apreensão de um campo de variações possíveis relativamente à significância num registro (Duval, 2009, p. 101).

E, ainda:

A discriminação de unidades significantes nos registros de representação constitui então um problema análogo àquele da procura de diferentes fatores de variação na análise de um conjunto de fatores que, na ocorrência de um fenômeno, intervêm simultaneamente e não podem então ser apreendidos isoladamente: para dissociá-los é preciso recorrer ao “método consistindo em fazer variar um só fator a cada vez, os outros estando todos mantidos invariáveis” (Duval, 2009, p. 101).

Segundo Duval (2009), fazendo variar uma representação R em um registro A, observando sua conversão R' em outro registro B, duas situações podem ocorrer: (1) as variações de R em A não produzem mudança de R' em B; (2) as variações de R em A produzem variação concomitante de R' em B. As primeiras são cognitivamente neutras, mas as segundas, chamadas variações cognitivas, devem ser consideradas nas situações de aprendizagem para que ocorra a coordenação de registros.

Esse método, conhecido por Método de Análise e Identificação das Variáveis Cognitivas, possibilita identificar as unidades significantes simbólicas e as correspondentes unidades significantes gráficas (variáveis visuais). A distinção das unidades significantes de um sistema semiótico decorre do princípio utilizado pelos linguistas a partir de Saussure, onde “[...] o valor de um signo é constituído pela diferença em relação aos outros signos que constituem um sistema” (Silva; Moretti, 2018a, p. 286).

Dessa forma, os signos não podem ser entendidos de forma isolada, mas de forma relacional, pois “Os signos só podem ser reconhecidos como signos por meio das relações de oposição que eles têm com outros signos no interior de um sistema” (Duval, 2011a). No caso da reta de equação $y = ax + b$ ($a \neq 0$), conforme Duval (2011a), a discriminação das unidades significantes gerais da sua expressão algébrica resulta em: símbolos relacionais ($>$, $<$, $=$, ...); símbolos de operações ou de sinais (+, -); símbolos de variável (x, y, ...); símbolos do tipo expoente, coeficiente e constante (1, 2, ...).

Na discriminação das propriedades figurais da sua representação gráfica, identificou-se três variáveis visuais, conforme Quadro 4.

Quadro 4 - Identificação das unidades gráficas

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
- o sentido da inclinação do traçado:	- a linha sobe da esquerda para a direita; - a linha desce da esquerda para a direita. OBSERVAÇÃO: a referência esquerda/direita é o sentido normal do percurso visual de uma página escrita em caracteres latinos.
- os ângulos do traçado com os eixos:	Há uma repartição simétrica do quadrante percorrido . - o ângulo formado com o eixo horizontal é menor que o ângulo formado com o eixo vertical; - o ângulo formado com o eixo horizontal é maior que o ângulo formado com o eixo vertical; OBSERVAÇÃO: no caso em que o traçado não passa pela origem, basta deslocar o eixo vertical, por exemplo, até o ponto de intersecção da reta com o eixo horizontal.
- a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical:	- o traçado passa abaixo da origem; - o traçado passa acima da origem; - o traçado passa pela origem .

Fonte: Duval (2011a, p.101).

A variável visual “sentido da inclinação” pode assumir dois valores visuais: ascendente (crescente) ou descendente (decrecente). A variável visual “ângulo com os eixos”, pode assumir três valores visuais: ângulo com o eixo dos x menor, igual ou maior que 45° . E, a variável visual “posição sobre o eixo vertical”, pode assumir três valores visuais: intersecção da reta com o eixo dos y abaixo da origem, acima da origem ou na origem. Esses oito valores das variáveis visuais e as unidades significantes simbólicas são correlacionadas no *Quadro 5*.

Quadro 5 - Correspondência entre unidades simbólicas e gráficas da reta

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: Duval (2011a, p.101).

Os valores visuais “ascendente e descendente” correspondem, respectivamente, aos valores simbólicos do coeficiente angular $a > 0$ e $a < 0$ na equação $y = ax + b$ ($a \neq 0$) da reta. Para cada um desses casos, os valores visuais “partição simétrica¹¹, ângulo menor e ângulo maior” correspondem, respectivamente, aos valores simbólicos do coeficiente angular $a = 1$ (ângulo de 45° com o eixo dos x), $a < 1$ (ângulo menor do que 45° com o eixo dos x) e $a > 1$ (ângulo maior do que 45° com o eixo dos x).

E, os valores visuais “corta acima, abaixo e na origem” correspondem, respectivamente, aos valores simbólicos do coeficiente linear na equação $y = ax + b$ ($a \neq 0$) da reta: $b < 0$, quando a intersecção da reta com o eixo dos y for abaixo da origem; $b > 0$, quando for acima da origem; ou $b = 0$, quando for na origem.

Os valores visuais não são separáveis, ou seja, os valores relativos à intersecção com o eixo das ordenadas e ao ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas formam um único valor visual em cada ponto da reta. Assim, para discriminar esses valores visuais, é preciso variar um dos três valores visuais mantendo constantes os valores das outras duas. Cada

¹¹ A partição simétrica refere-se ao caso em que $a = 1$ e $b = 0$. Nos casos em que $b \neq 0$, conforme observação na segunda coluna e terceira linha do Quadro 4, é possível obter a equação da reta em que $b = 0$ por meio de uma translação. De forma mais geral, podemos dizer que os valores visuais “partição simétrica, ângulo menor e ângulo maior” correspondem a “ângulo de 45° , ângulo agudo e ângulo obtuso.”, respectivamente.

mudança nos valores visuais promove uma mudança na equação da reta e, por outro lado, cada variação nos valores simbólicos envolve uma alteração na representação gráfica (Duval, 2009).

O *Quadro 6* apresenta as dezoito variações obtidas por Duval (2011a), ao combinar valores visuais e simbólicos da reta, nove para cada valor visual da variável “sentido da inclinação” (ascendente e descendente).

Quadro 6 - Combinações dos valores das três variáveis cognitivas

Sentido da inclinação	ângulo	Posição (da reta)	Exemplos
> 0	$= 1$	(na origem)	$y = x$
		+ (acima da origem)	$y = x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = x - 1$
	> 1	(na origem)	$y = 2x$
		+ (acima da origem)	$y = 2x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = 2x - 1$
	< 1	(na origem)	$y = (1/2)x$
		+ (acima da origem)	$y = (1/2)x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = (1/2)x - 1$
< 0			

Fonte: Duval (2011a, p.102).

Conforme Duval, “[...] neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação ponto e par de números, mas na associação variável visual da representação e unidade significativa da escrita algébrica” (Moretti, 2003, p. 151). A discriminação das unidades significantes gráficas, a partir da identificação do que é visualmente diferente, possibilita a determinação das unidades significantes simbólicas correspondentes. Essas unidades permitem diferenciar e identificar os diferentes casos, favorecendo a coordenação dos diferentes registros.

Segundo Duval (2011a), “[...] a significação dos gráficos cartesianos e, por consequência a sua leitura, dependem da percepção desta articulação” (p.111). E, mais que isso, para a apreensão de um conceito matemático é necessário mobilizar simultaneamente ao menos dois registros de representação, ou seja, coordenar dois registros de representação trocando espontaneamente de um para o outro.

Assim, “[...] a aprendizagem em matemática segundo a TRRS envolve um processo semiótico que inclui claras identificações, delimitações e regras de articulações entre distintos registros” (Silva; Moretti, 2018a, p. 286). O trânsito entre os registros de representação simbólico e gráfico, realizado no caso das retas (Duval, 2011a), das parábolas (Moretti, 2003)

ou entre outras curvas estudadas no Ensino Médio (Silva, 2008), exige um procedimento que inclua o uso de um *software* para o caso de curvas mais complexas.

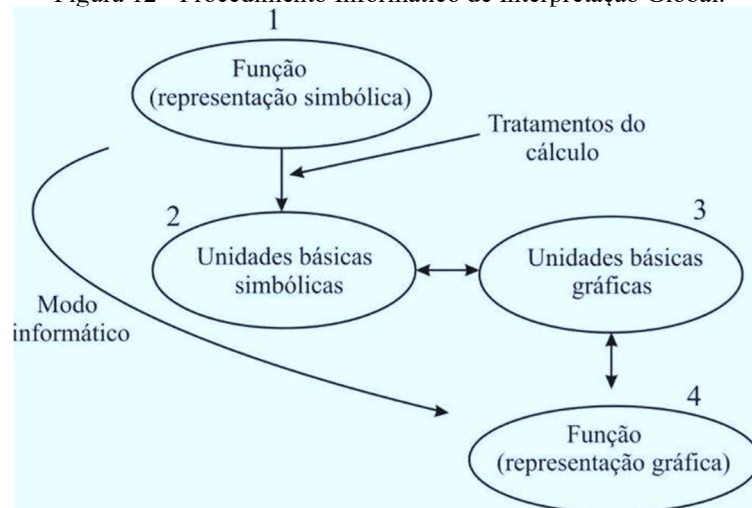
Torna-se necessário um procedimento de conversão que permita acompanhar as modificações simultâneas entre os registros de representação simbólico e gráfico. Para orientar a conversão entre as formas simbólica e gráfica dessas funções, Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) buscaram uma forma semelhante a que Duval (2011a) usou para o caso das retas.

Com base na tese de doutorado de Ferraz (2008), que propôs um modo de tratar o traçado de curvas que promovesse a interpretação global das propriedades figurais, Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) fazem uma análise semiótica das unidades básicas gráficas e apontam uma formalização simbólica adequada. Os autores utilizaram essas unidades gráficas e simbólicas em um procedimento de traçado de curvas que levava em conta a interpretação global das propriedades figurais para as conversões em mão dupla.

Denominado como Procedimento Informático de Interpretação Global por Moretti e Luiz (2010), o método inclui a utilização de um *software* para obtenção das representações gráficas e, em sintonia com a abordagem proposta por Duval, permite a correlação entre as unidades significantes linguísticas, simbólicas e gráficas. Os autores, partindo do esquema de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), acrescentaram um caminho informático para as conversões entre registros simbólico e gráfico (Figura 12).

Para a correspondência entre os registros simbólicos (1) e gráficos (4) dessas funções, Moretti e Luiz (2010) sugerem que a conversão ocorra no sentido de 1 para 4 seja realizada por meio do uso de um *software*. Segundo os autores, a volta (sentido de 4 para 1), pode ser obtida a partir das unidades gráficas (3) e suas respectivas unidades simbólicas (2).

Figura 12 - Procedimento Informático de Interpretação Global.



Fonte: Moretti e Luiz (2010, p. 531).

Este último caminho consistindo em tratamentos em (1) para obter (2) e em (4) para obter (3) e correspondência entre as unidades básicas simbólicas (2) e gráficas (3). Em outras palavras, os autores propõem realizar as operações $1 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftarrow 1$, ou seja:

$1 \rightarrow 4$: a conversão direta da representação simbólica (1) para a gráfica (4) da função por meio da informática; $4 \rightarrow 3$: tratamentos na curva (visuais inicialmente) em sua representação gráfica (4) para reconhecer e destacar as unidades básicas gráficas (3); $1 \rightarrow 2$: tratamentos de cálculo na função em sua forma simbólica (1) para determinar as unidades básicas simbólicas (2) relacionadas às unidades básicas gráficas (3); $3 \leftrightarrow 2$: conversão que confirma a correspondência entre as unidades básicas gráficas (3) e as unidades básicas simbólicas (2). (Moretti; Luiz, 2010, p. 79)

Considerando que, segundo Duval (2011a), as maiores dificuldades são observadas na conversão que vai da representação gráfica para a simbólica, essa obtenção da representação gráfica de curvas mais complexas de modo informático favorece o trânsito entre os registros. No entanto, esse procedimento se distancia da obtenção de um gráfico apenas pela digitação da sua equação num *software*, uma vez que os autores sugerem a articulação entre as unidades significantes dos diferentes registros.

Nessa abordagem, evita-se o uso exclusivo de um *software*, que não garante a aprendizagem. Por exemplo, a obtenção do gráfico de uma superfície quádrlica com o uso do GeoGebra exige que o aluno apenas digite a sua equação no *software*. O GeoGebra faz a conversão da representação simbólica para a gráfica, não havendo ganho cognitivo nessa ação.

Ainda que o *software* ofereça a possibilidade de manipular a representação gráfica da superfície quádrlica, segundo Duval, a compreensão integral só ocorre a partir da coordenação de ao menos dois de seus registros de representação. Quer dizer, o aluno precisa conhecer duas ou mais representações dessa superfície, sabendo efetuar transformações tanto internas quanto externas nesses ou entre esses registros.

Duval afirma, que as dificuldades encontradas na aprendizagem matemática estão mais relacionadas à variedade e coordenação dos registros de representação semiótica do que à complexidade do conteúdo (Duval, 2003, 2009, 2010, 2012b). Esse procedimento pode promover o reconhecimento de representações semióticas em diferentes registros, possibilitando o trânsito espontâneo entre eles.

Nessa pesquisa, interessa-nos analisar como o sujeito constrói o conhecimento sobre superfícies quádrlicas por meio de suas representações dinâmicas. Esse processo envolve a apropriação de ferramentas do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra durante uma situação de ensino e aprendizagem instrumental. Fornecendo elementos teóricos apropriados

para pesquisas referentes à aprendizagem com ferramentas digitais, a Teoria da Gênese Instrumental de Rabardel foi o aporte teórico escolhido para subsidiar essa parte da pesquisa.

2.2 A teoria da gênese instrumental na atividade matemática

A teoria de Rabardel, que inicialmente estudou as ações dos sujeitos mediadas por instrumentos voltada para ergonomia cognitiva, tem sido utilizada em estudos sobre as relações entre o aluno e as tecnologias digitais (Notare; Basso, 2017b a, 2017 b; Trouche, 2004, 2005a; Abar; Alencar, 2013; Bussolotto, 2019; Medeiros; Basso, 2019; Medeiros, 2020; Salazar, 2009). Estes, entre outros estudos, tiveram em comum a intenção de analisar o processo de transformação do artefato em instrumento durante a realização de atividades matemáticas com o uso de *software*.

Isso porque a integração da tecnologia a uma situação de ensino e aprendizagem não ocorre de forma neutra. As influências dessa integração já começam no planejamento das atividades, uma vez que a possibilidade de obter a representação dinâmica de um objeto matemático requer novas formas de pensar e fazer matemática (Notare; Basso, 2016). Nesse caso, para desencadear o processo de construção do conhecimento matemático, as atividades precisam estar em acordo com essas formas de pensar matemática por meio do *software* (Stormowski, 2015).

2.2.1 Origem da abordagem instrumental e definições iniciais

A Teoria da Gênese Instrumental originou-se da necessidade de tratar problemas encontrados nos campos sociais - trabalho, educação e cotidiano - referentes às atividades realizadas pelo homem com o uso de artefatos. Dentro desta teoria, os termos artefato, ferramenta, técnica, esquema e instrumento ganham destaque (Jupri; Drijvers; Ileuvcl-Panhuizcn, 2016). O artefato é um objeto, material (um lápis ou um computador etc.) ou simbólico (uma figura ou um gráfico etc.), produzido pelo homem para a realização das suas atividades.

A atividade matemática é permeada por artefatos desde os primeiros registros de contagem. A linguagem, os registros semióticos (conjuntos numéricos, figuras geométricas, representações algébricas etc.), os algoritmos, as régua, os compassos, as calculadoras, os *softwares* etc. são exemplos de artefatos produzidos pelo homem para a realização das suas atividades.

O ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra é o principal artefato nesta investigação, mas o ambiente estático (do lápis e papel) e a própria linguagem matemática também se fazem presentes e com forte influência. Rabardel (2011) destaca que os artefatos evoluem constantemente e, descrevendo um histórico de prática dos usuários, modelam essa prática e são transformados pela atividade. Na atividade matemática, a evolução dos artefatos pode ser observada no cálculo com o ábaco, que foi progressivamente substituído pelo cálculo com algorismos.

Trouche (2005b, 2014, 2018) afirma que a presença dos artefatos na atividade matemática só aumenta, encontrando-se em todas as fases, da produção de conjecturas às demonstrações. Essa presença se amplia no meio tecnológico, onde os artefatos digitais dão acesso a numerosas representações, acrescentando novas relações entre a ação e o pensamento (Notare; Basso, 2012, 2016, 2018; Basso; Notare, 2015; Gravina, 1996, 2001; Gravina; Dias, 2013; Gravina; Santarosa, 1999).

Para Rabardel (2011), um *software* pode ser considerado como um grupo de ferramentas que cria condições de trabalho, alterando aspectos da prática. Drijvers e Trouche (2008, p. 368, tradução nossa) distinguem artefato e ferramenta, da seguinte forma: “O artefato é a ferramenta nua, o material ou objeto abstrato para dar suporte à certa atividade, podendo ser um objeto sem sentido para o usuário, caso não saiba em que tipo de tarefas pode auxiliar e de que maneiras”.

De acordo com Jupri, Drijvers e Iieuvcl-Panhuizcn (2016, p. 66, tradução nossa), “Se um artefato é usado para realizar uma tarefa específica, como resolver uma equação, chamamos de ferramenta”. Assim, para que um artefato possa ser considerado ferramenta, o usuário precisa saber para que ele serve e como usá-lo na tarefa. Segundo os autores, um artefato é inútil como ferramenta, se o usuário não souber para qual tarefa ele serve ou como usá-lo.

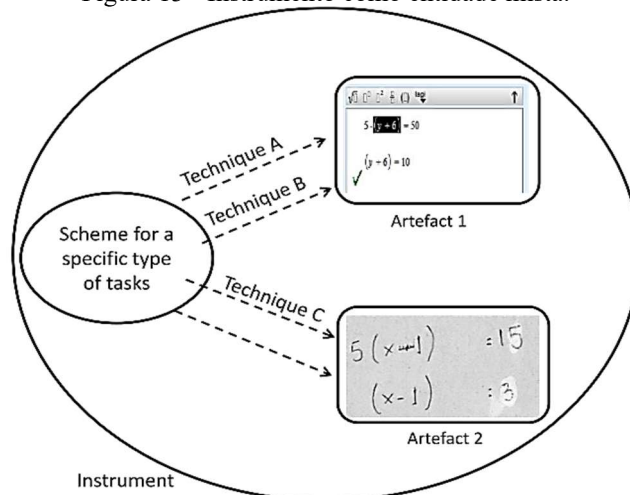
A técnica, conforme Artigue (2002) em Medeiros (2020), é a forma de resolver uma tarefa usando um artefato. As técnicas são baseadas em fundamentos cognitivos, são essas bases que formam os esquemas (Jupri; Drijvers; Iieuvcl-Panhuizcn, 2016). Estes autores, com base em Vergnaud, consideram “[...] um esquema como uma organização invariante de comportamento para uma determinada classe de situações” (Jupri; Drijvers; Iieuvcl-Panhuizcn, 2016, p. 66, tradução nossa).

Os esquemas e as técnicas têm em comum elementos conceituais e técnicos envolvendo o uso de um artefato para realizar uma tarefa. Apesar disso, diferenciam-se pelo fato de os esquemas não serem visíveis, ao contrário das técnicas que podem ser observadas. “Na verdade, consideramos as técnicas como as manifestações observáveis dos esquemas invisíveis” (Jupri; Drijvers; Iieuvcl-Panhuizcn, 2016, p. 66, tradução nossa).

Por fim, “Um instrumento é uma entidade mista de esquema, técnica, artefato e tarefa” (Jupri; Drijvers; Iieuvcl-Panhuizcn, 2016, p. 66, tradução nossa). Quer dizer, uma mistura de todos os elementos envolvidos na realização de uma atividade com o uso de artefato, em acordo com Drijvers e Trouche (2008) e Trouche (2004): “Como tal, é o amálgama de todos os 'jogadores' envolvidos quando um aluno resolve uma tarefa matemática usando uma ferramenta digital” (Jupri; Drijvers; Iieuvcl-Panhuizcn, 2016, p. 66, tradução nossa).

A Figura 13 apresenta um exemplo em que, para a realização de uma atividade matemática usando dois artefatos, o sujeito mobiliza seus esquemas cognitivos na execução de diferentes técnicas.

Figura 13 - Instrumento como entidade mista.



Fonte: Jupri, Drijvers e Iieuvcl-Panhuizcn (2016, p. 66).

A gênese instrumental é esse processo em que o sujeito desenvolve o instrumento, quer dizer mobiliza esquemas e técnicas para o uso de artefatos em uma tarefa. É um processo individual, mas que geralmente ocorre em um contexto social. Tendo sido projetado para produzir determinadas transformações no objeto da atividade, o artefato apresenta uma solução para um problema ou uma classe de problemas levantados socialmente. O artefato produzido pela cultura humana é um objeto social cujas modalidades de uso são elaboradas, enquanto para os animais é apenas um meio natural, não se tornando operacional.

“A evolução dos animais é apenas biológica, enquanto a evolução humana ocorre também através da transmissão do capital cultural da espécie [...]” (Rabardel, 2002, p. 20, tradução nossa). Sendo as técnicas os meios pelos quais o capital cultural é transmitido, o autor considera que as pessoas devem ser estudadas pelo que fizeram, construíram, instituíram, criaram: ferramentas, técnicas, línguas, instituições, literatura, artes etc.

Uma vez que, “Diante de uma ferramenta, as pessoas podem ser mestras ou meramente engrenagens” (Rabardel, 2002, p. 22, tradução nossa), o impacto das atividades com instrumentos em humanos é um importante objeto de estudo. A abordagem instrumental teve grande influência em Vygotsky, para o qual “O comportamento do adulto contemporâneo, culturalmente evoluído, é o resultado de dois processos diferentes de desenvolvimento psíquico” (Rabardel, 2002, p. 22, tradução nossa).

Esses dois processos de desenvolvimento, a evolução biológica e o desenvolvimento cultural, se fundem em um processo único e complexo, sendo a razão da dificuldade no estudo das funções psíquicas superiores. E, para Vygotsky, as duas formas fundamentais de desenvolvimento cultural são o uso de instrumentos e da linguagem humana. Segundo Vygotsky, citado por Rabardel (2002), a integração do instrumento ativa toda uma série de novas funções ligadas ao uso e ao controle do instrumento.

Substitui os processos psíquicos anteriores ao uso do instrumento, transforma o progresso e os aspectos particulares dos processos psíquicos que envolvem o ato instrumental, substitui algumas funções por outras, recria e reconstitui toda a estrutura comportamental. Esses processos formam uma unidade complexa, estrutural e funcional voltada para a solução do problema em questão que, coordenados durante a atividade desafiada pelo instrumento, formam um novo complexo: o ato instrumental.

Para Vygotsky, “[...] a explicação de formas superiores de comportamento é a dos meios que permitem que as pessoas dominem o processo de seu próprio comportamento” (Rabardel, 2002, p. 19, tradução nossa). Assim, os estudos de Vygotsky sobre a linguagem foram realizados sobre uma perspectiva instrumental, influenciando os estudos psicológicos com esta abordagem. Segundo Rabardel (2002), os problemas envolvendo pessoas em suas atividades com instrumentos não eram tratados de forma adequada quando abordados de pontos de vista exclusivamente tecnocêntrico ou antropocêntrico.

O autor buscou situar a abordagem instrumental em termos dos campos sociais (trabalho, educação e cotidiano) e dos campos científicos da psicologia, didática e ergonomia¹². A teoria da ergonomia cognitiva, na qual se apoia a abordagem instrumental, se refere aos processos mentais (percepção, memória, raciocínio etc.) que afetam as interações entre seres humanos e outros elementos de um sistema (por exemplo, interação homem-computador).

¹² Ergonomia “[...] inscreve-se como uma contribuição para a reflexão teórica e a análise empírica das relações homem-sistema técnico, centradas no homem e observadas do ponto de vista de seu engajamento nas atividades e ações reais; de seu contexto de trabalho, ou no cotidiano.” (Rabardel, 1995a, p. 23, tradução nossa).

Uma vez que a atividade instrumental só existe quando é praticada por alguém, não pode ser tratada de um ponto de vista estritamente tecnocêntrico: “Um problema relacionado a atividade instrumental é necessariamente centrado em seres humanos e fundamentado em uma opção antropocêntrica” (Rabardel, 2002, p. 2, tradução nossa).

Por outro lado, apesar de colocar os seres humanos em uma posição central e tratar das relações estabelecidas com as técnicas, máquinas e sistemas, uma abordagem majoritariamente antropocêntrica apresenta limitação quanto à especificidade tecnológica do problema. Assim, consideradas isoladamente, essas duas abordagens tornam-se insuficientes para tratar problemas envolvendo atividades instrumentais, pois:

A abordagem tecnocêntrica por si só tende a colocar os humanos em uma posição residual e não permitindo uma verdadeira apreensão de sua atividade. No entanto, uma abordagem unilateralmente antropocêntrica é incapaz de apreender sistemas técnicos em sua especificidade tecnológica (Rabardel, 2002, p. 5, tradução nossa).

Como em um sistema de produção híbrido, composto por homens e máquinas, é necessária a associação dessas duas abordagens para a compreensão das relações entre o sujeito e o artefato na atividade instrumental.

Assim, “[...] situada em um nível de análise de técnicas com constituintes psicológicos [...]” (Rabardel, 2002, p. 14, tradução nossa), surgiu a abordagem instrumental. Sua finalidade é de contribuir com a reflexão teórica acerca da relação instrumental, expressão utilizada por Rabardel (2002) para designar a relação estabelecida entre o homem e o artefato durante a ação, analisando-a à medida que é construída pelo sujeito e o seu significado para o próprio sujeito.

2.2.2 A noção de esquema e o nascimento do instrumento

As aprendizagens proporcionadas pela integração de diferentes artefatos na atividade podem ser distintas, motivo pelo qual os processos precisam estar no centro da pesquisa. Os artefatos digitais, como o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, podem fornecer ao usuário informações sobre o processo e amplificar algumas das suas funções cognitivas, através do desenvolvimento de esquemas.

Na abordagem de Piaget, “[...] um esquema de ação é o grupo estruturado de características generalizáveis da ação que permite que a mesma ação seja repetida ou aplicada a novos conteúdos [...]” (Rabardel, 2002, p. 65, tradução nossa). Como estruturas que prolongam a organização biológica, os esquemas constituem os meios que permitem que o sujeito assimile as situações e objetos com os quais interage.

Nessa perspectiva, o desenvolvimento da estrutura cognitiva do sujeito ocorre através da evolução desses esquemas, por sucessivos processos complementares de assimilação e acomodação. Uma série de coordenações ocorre por assimilação/adaptação progressiva de esquemas, oriundos de ações primeiro práticas e depois conceituais.

A origem do conhecimento deve ser encontrada em ação, pois para Piaget: “O sujeito só aprende a conhecê-lo agindo sobre objetos e objetos que só se tornam conhecidos através do progresso das ações exercidas sobre eles” (Rabardel, 2002, p. 72, tradução nossa). No entanto, o autor argumenta que a abordagem piagetiana tem foco na gênese cognitiva das propriedades do real e ações que progressivamente constituem estruturas, categorias e instrumentos de conhecimento.

Já a abordagem instrumental, está voltada para a análise funcional do comportamento do sujeito psicológico, estando interessada na dinâmica do comportamento finalizado e das ações organizadas dos sujeitos, seus objetivos, escolha de meios, controles e a heurística específica que lhes permite alcançar um resultado particular através de caminhos diferentes.

Além disso, segundo Rabardel (2002), a abordagem piagetiana não considera a especificidade do comportamento em relação à natureza dos conteúdos, sendo insuficiente para o tratamento de problemas relacionados à aquisição de conhecimento científico. Para Vergnaud, filósofo, matemático e psicólogo francês que foi aluno de doutorado de Piaget, a teoria piagetiana não considera o fato de o desenvolvimento cognitivo depender de situações e de conceituações específicas para lidar com elas.

Assim, Vergnaud “[...] amplia e redireciona, em sua teoria, o foco piagetiano das operações lógicas gerais, das estruturas gerais do pensamento, para o estudo do funcionamento cognitivo do sujeito-em-situação” (Moreira, 2002, p. 7). Na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, “Os esquemas compõem uma organização invariante do comportamento do sujeito para uma classe de situações, tanto em termos de ação quanto de atividade simbólica” (Rabardel, 2002, p. 78, tradução nossa).

Nos esquemas, podem ser encontrados os conhecimentos-em-ato do sujeito, que são os elementos cognitivos que permitem que sua ação seja operatória. Os conhecimentos-em-ato são as invariantes operatórias, teorema-em-ato ou conceitos-em-ato, que podem se tornar visíveis na ação (Moreira, 2002).

Um esquema compreende antecipações dos efeitos esperados e possíveis estágios intermediários; regras-de-ação que permitem o sequenciamento das ações; inferências que possibilitam cálculos e antecipações com base em informações; invariantes operatórias que auxiliam o sujeito a reconhecer elementos pertinentes à situação a ser tratada (Moreira, 2002).

Segundo Vergnaud, “[...] conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do iceberg da conceituação: sem a parte escondida, constituída pelas invariantes operatórias, esta parte visível nada seria” (Salazar, 2009, p. 72). E, a construção do conceito, é “[...] um processo unido à ação do sujeito em uma situação específica, na qual o esquema é composto por objetivos, regras de ação e invariantes operatórias que permitem o tratamento pertinente da informação” (Trouche, 2005b, p. 103, tradução nossa).

Esses componentes do esquema são traduzidos por Rabardel (2002) como funções: heurística, referindo-se ao controle e organização da ação; pragmática, relativa à ação de transformação dos objetos; e epistemológica, relacionada à tomada da informação e à compreensão dos objetos. O autor considera a análise em termos de invariantes operatórias importante na abordagem instrumental, por permitir a identificação das características das situações em que os sujeitos estejam inseridos. Estas podem ser situações familiares, onde as invariantes operatórias já estejam constituídas, ou situações em que sua elaboração esteja em curso.

O esquema é uma organização ativa da experiência, transformada à medida que se adapta a uma gama mais ampla de situações e dados, sendo generalizado em acordo com os conteúdos a que é aplicado (Rabardel, 2002). Os esquemas já constituídos servem como instrumentos para a atividade organizadora e os novos objetos assimilados contribuem para a extensão desses significados e a formação de novas redes de significação.

A adaptação dos esquemas à realidade externa e a outros esquemas e a aplicação de uma série de esquemas a um objeto são as fontes de diferenciação progressiva. Assim, em Rabardel (2002), a noção de esquema foi ganhando novos elementos para atender a especificidade da atividade instrumental. Os esquemas relacionados ao uso do artefato foram denominados esquemas de utilização, que são organizadores da ação, da aplicação e do uso do artefato, apoiando-se nas propriedades do artefato que eles mesmos organizam.

Os esquemas de utilização podem estar relacionados aos artefatos, que podem assumir uma posição de mediadores, e aos objetos da atividade sobre os quais esses artefatos permitem agir. Os esquemas relacionados à gestão do artefato, conhecimento das suas características e funcionamento, são os esquemas de uso. Já os esquemas orientados para o objeto da atividade são os esquemas de ação instrumentada.

Descrevendo o que ocorre com os esquemas quando o sujeito é submetido a situações habituais e novas, Rabardel (2011) descreve os processos de assimilação e adaptação na atividade instrumental. Os esquemas facilmente mobilizados são responsáveis pelo funcionamento automatizado, característico das situações comuns ou bem dominadas. A

implementação de esquemas de utilização em situações novas, mas semelhantes, conduz à generalização de esquemas por extensão das classes de situações, de artefatos e de objetos.

Esse é o processo de assimilação, que também leva à diferenciação, quando os esquemas existentes precisam se adaptar a novos e diferentes aspectos específicos destes. Já em situações muito novas, onde novos artefatos devem ser usados como meio de ação ou quando a ação se refere a novos objetos ou novas transformações desses objetos, o processo de adaptação se torna temporariamente predominante (Rabardel, 2002).

Esse processo leva à transformação dos esquemas disponíveis, “A reorganização, fragmentação e reestruturação, assimilação e coordenação desses esquemas produzem novas composições de esquema, permitindo o domínio da nova classe de situações e ampliando as capacidades de assimilação e adaptação” (Rabardel, 2002, p. 86, tradução nossa).

O autor ainda destaca que “A assimilação de novos objetos e novos artefatos em esquemas de utilização, fonte de generalização e diferenciação adaptacional, leva ao enriquecimento e desenvolvimento da rede de significados do sujeito [...]” (Rabardel, 2002, p. 86, tradução nossa). Os esquemas construídos pelo sujeito durante a atividade instrumental progressivamente diferenciam o artefato do instrumento, destacando a diferença entre os dois conceitos: o artefato, como objeto material feito pelo homem, e o instrumento, como uma construção psicológica.

Segundo Maschietto e Trouche (2010), um instrumento é o que o sujeito constrói com o artefato para solucionar determinado problema. É nessa construção que fica evidente a presença dos esquemas que, juntamente com os artefatos, compõe a entidade mista instrumento:

[...] por um lado, o artefato material ou simbólico, produzido para o sujeito ou para outros sujeitos; por outro lado, os esquemas de utilização associados, que são resultado de uma construção própria do sujeito ou de uma apropriação de esquemas de utilização já existentes (Rabardel, 2002, p. 86, tradução nossa).

É o componente psicológico do instrumento, formado pelos esquemas, que torna o instrumento uma entidade dinâmica. Os esquemas determinam tanto a evolução do instrumento, de acordo com o desafio proposto ao sujeito, quanto a diferenciação entre os instrumentos construídos com o mesmo artefato por diferentes sujeitos. Rabardel afirma que:

[...] a descoberta progressiva de propriedades intrínsecas do artefato pelos sujeitos está relacionada à acomodação de seus esquemas e às mudanças de significado do instrumento como resultado da associação do artefato aos novos esquemas (Rabardel, 2002, p. 108, tradução nossa).

Os dois componentes do instrumento, o artefato e o esquema de utilização, possuem uma relação de interdependência relativa. Um mesmo esquema pode ser aplicado a uma

multiplicidade de artefatos de uma mesma classe e, por outro lado, um artefato pode ser inserido em uma multiplicidade de esquemas de utilização que lhe atribuem outro significado ou função.

Em uma posição intermediária, o instrumento sofre adaptações tanto ao sujeito quanto ao objeto, em termos de material e de propriedades cognitivas e semióticas. Drijvers e Trouche (2008) destacam que, só depois que o usuário compreende como o artefato pode ampliar suas capacidades para uma tarefa e desenvolve meios para utilizá-lo, é que o artefato se torna parte de um instrumento capaz de mediar a atividade.

Rabardel (2002) destaca dois tipos principais de mediação do instrumento: (1) mediação epistêmica (do objeto ao sujeito), na qual o instrumento é um meio para o conhecimento do objeto; (2) mediação pragmática (do sujeito ao objeto), onde o instrumento é um meio de ação transformadora direcionada ao objeto.

No entanto, conforme Rabardel (2002), o instrumento não é apenas uma entidade intermediária, mas também um meio de ação. As ações são muito diversas quanto a sua natureza, constituindo diferentes instrumentos que o autor classifica em: (1) instrumento material - transformação de um objeto material com uma ferramenta portátil; (2) instrumento cognitivo - tomada de decisão, por exemplo, em uma situação de gestão de um ambiente dinâmico; (3) instrumento psicológico - gestão da própria atividade; (4) instrumento semiótico - interação semiótica com um objeto semiótico ou com outros.

2.2.3 Gênese Instrumental em situações de ensino e aprendizagem

O processo que envolve a transformação progressiva do artefato em instrumento é denominado gênese instrumental que, conforme Verillon e Rabardel (1995), busca a integração entre as características dos artefatos (potencialidades e limitações) e as atividades do sujeito (conhecimentos e métodos de trabalho). Durante o processo de gênese instrumental, o artefato vai sendo modificado por meio dos esquemas, componentes psicológicos construídos pelo sujeito ao longo da atividade.

A gênese instrumental é composta por dois processos: a instrumentalização, orientada para o artefato; e a instrumentação, orientada para o sujeito. Os processos de instrumentalização estão relacionados ao surgimento e evolução do componente artefato do instrumento. Algumas ações do sujeito que dizem respeito a esse processo são: “[...] selecionando, agrupando, produzindo e definindo funções, transformando o artefato (estrutura, funções etc.), enriquecendo as propriedades do artefato [...]” (Rabardel, 2002, p. 103, tradução nossa).

Os processos de instrumentação referem-se aos esquemas de utilização desenvolvidos pelo sujeito na ação instrumental, descrevendo os aspectos desse componente do instrumento referentes a esse processo, “[...] sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por acomodação, coordenação e combinação, inclusão e assimilação recíproca, a assimilação de novos artefatos aos esquemas preexistentes” (Rabardel, 2002, p. 103, tradução nossa).

Ao integrar um artefato para realizar uma tarefa, o sujeito pode desenvolver sua gênese instrumental, por sucessivos processos de instrumentação e instrumentalização. Por exemplo, na integração do GeoGebra numa Situação de Ensino e Aprendizagem Instrumental (SEAI)¹³, inicialmente o *software* é apenas um artefato (Figura 14).

Figura 14 - Instrumentação e Instrumentalização.



Fonte: Elaborado pela autora.

Durante a ação instrumentada, o sujeito explora as funções do artefato e seleciona as que serão necessárias à sua tarefa (instrumentalização). Então, esquemas de utilização passam a ser desenvolvidos pelo sujeito (instrumentação). E a partir da ação do próprio sujeito, engajado na SEAI, o artefato é enriquecido pelos esquemas de utilização, transformando-se em instrumento. A respeito desses processos, de instrumentação e de instrumentalização, Notare e Basso (2017a) consideram que:

O processo de instrumentação é o processo no qual o artefato imprime uma marca no sujeito, enquanto o processo de instrumentalização engloba dois estágios: um estágio de descoberta e seleção de funções relevantes do artefato, e um estágio de personalização e de transformação do artefato (Notare; Basso, 2017a, p. 326).

Na instrumentalização, o sujeito busca identificar características e recursos oferecidos pelo artefato, para que foi projetado e como deve ser utilizado, dando início ao seu uso. A seguir, moldado pelas restrições e potencialidades do artefato, o sujeito inicia o processo de

¹³ Cunhamos o termo ‘Situação de Ensino e Aprendizagem Instrumental - SEAI’ por entendermos o ensino e a aprendizagem como uma atividade única (Maggio, 2018), em que professor e aluno trabalham para a produção de determinado saber, envolvendo a apropriação tecnológica.

instrumentação com o desenvolvimento dos seus esquemas de utilização. Mobilizando esses esquemas, o sujeito amplia o uso dos recursos do artefato que, por sua vez, aumenta suas capacidades para o conhecimento do objeto de estudo.

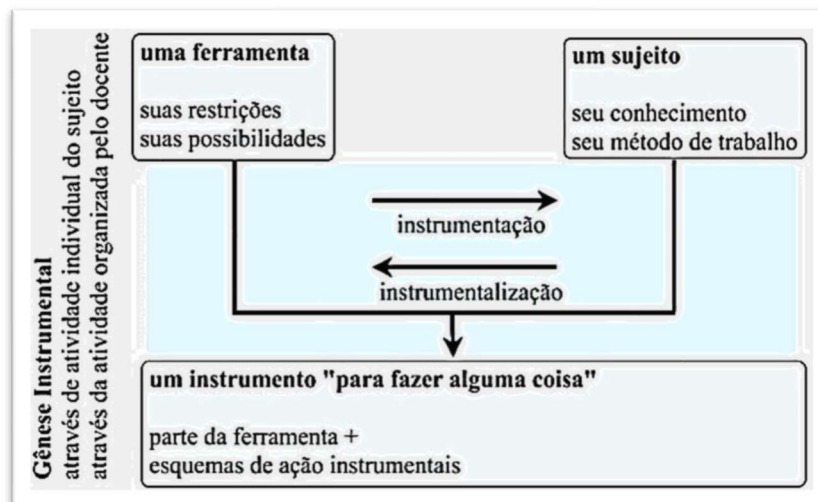
Na continuidade desses processos, e através do suporte que um oferece ao outro, ocorre a evolução dos esquemas de utilização do sujeito. O uso de um instrumento aumenta as capacidades assimilativas do sujeito e amplia as suas possibilidades de ação. Entendemos que, conforme em Rabardel (1995b), os instrumentos têm dupla função, influenciando a construção do conhecimento do aluno e fornecendo variáveis para apoiar a concepção e o controle das situações de ensino e aprendizagem pelo professor.

O autor destaca que “O domínio dessas variáveis depende de uma boa compreensão dos processos pelos quais o uso influencia a atividade cognitiva dos usuários” (Rabardel, 1995b, p. 61, tradução nossa). Essa dupla função corresponde, em Haspekian (2014), a duas dimensões da gênese instrumental: a pessoal e a profissional. A dimensão pessoal é relativa à apropriação do artefato propriamente dito, enquanto a profissional se refere à transformação deste em um instrumento didático para integração à situação de ensino e aprendizagem (Figura 15).

No processo de gênese instrumental profissional, conforme Bueno-Ravel e Gueudet (2013):

[...] o professor se apropria do recurso, explora suas potencialidades técnicas e suas funcionalidades, revelando o movimento de instrumentalização; por outro lado, o artefato e o processo de apropriação influenciam a atividade do professor e, mais amplamente, seu desenvolvimento profissional, revelando o movimento de instrumentação (apud Notare; Basso, 2017a, p. 326-327).

Figura 15 - O processo de Gênese Instrumental.



Fonte: Notare e Basso (2017a, p. 326).

A dupla gênese do professor é importante no desenvolvimento da gênese dos seus alunos, pois uma limitação no processo de gênese instrumental pessoal do professor pode implicar numa redução do potencial didático do instrumento.

Estas duas gêneses, fundamentais para a incorporação efetiva das tecnologias no contexto escolar, ocorrem de forma simultânea quando se trata de professores de matemática em formação. No entanto, a Gênese Instrumental Pessoal contribui para que ocorra a Gênese Profissional, já que para pensar em atividades didáticas com o software, o professor precisa reconhecer as formas de mobilizar conceitos matemáticos com o mesmo (Stormowski, 2015, p. 62).

O processo pelo qual passa o professor tem duas dimensões: a apropriação do artefato, transformando-o em uma ferramenta pessoal de trabalho (gênese instrumental pessoal); e a apropriação das funcionalidades didáticas do artefato (gênese instrumental profissional). Nesta última dimensão da gênese instrumental, o instrumento constituído para uso pessoal se transforma em um instrumento didático (Notare; Basso, 2017a).

Pode-se compreender que as duas dimensões da gênese instrumental, pessoal e profissional, são complementares e igualmente necessárias para a apropriação tecnológica efetiva do professor. “O professor precisa reconhecer formas de pensar matemática com o *software*, e deste modo, planejar atividades que desencadeiem este processo com seus alunos” (Stormowski, 2015, p. 62). Para ilustrar essa afirmação, vamos utilizar um exemplo proposto por Rabardel (1995b), relativo à construção da noção de simetria com diferentes instrumentos.

De forma resumida, uma folha quadriculada pode facilitar a obtenção de objetos simétricos, mas o conceito de simetria resultante não está associado à presença da ortogonalidade. Tendo sido fornecida pelo instrumento, a noção de ortogonalidade não é construída pelo aluno. Ao contrário, o uso de um esquadro implica a gestão da ortogonalidade pelo usuário na construção de objetos simétricos.

A análise dessas propriedades dos instrumentos pode ser utilizada pelo professor na criação de situação de ensino e aprendizagem adequadas aos seus objetivos educacionais. Segundo Rabardel (1995b), “[...] a influência dos instrumentos na atividade cognitiva, é dada por um lado, pelas limitações próprias do instrumento e, por outro, pelas possibilidades de ação que eles proporcionam” (p. 64, tradução nossa). O autor diz que o instrumento carrega um conjunto de restrições que o sujeito precisa identificar, compreender e gerenciar.

Essas restrições diferem de acordo com os tipos de atividade, especificidade do instrumento, métodos de ação sobre a realidade que ele organiza, pré-estruturação da ação de quem o utiliza. Parte da atividade do sujeito decorre dessas restrições, no entanto, as

possibilidades de ação que os recursos do instrumento proporcionam também precisam ser colocadas na balança.

No caso dessa pesquisa, as possibilidades de criação e manipulação de representações gráficas de uma quádriga por meio do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra podem contribuir para o conhecimento deste objeto matemático. Assim, o domínio dos limites e potencialidades deste *software* possibilita antecipar possíveis obstáculos e contribuições do instrumento na situação de ensino e aprendizagem.

Conforme Artigue (2002), a transformação do artefato em instrumento não é uma tarefa fácil, o que torna importante o papel do professor. Primeiro, porque os instrumentos não são neutros, tendo influência sobre as conceituações que ele deseja construir. Depois, porque é necessário ver que os conhecimentos a serem construídos diferem quando instrumentos distintos são utilizados.

O centro de interesse da abordagem instrumental é a gênese instrumental do sujeito, ou seja, os reflexos da transformação do artefato em instrumento nas capacidades de assimilação que podem ser observadas na ação do sujeito. Para análise das ações do sujeito em Situações de Atividades Instrumentais (SAI), Rabardel (2002) segue a concepção de Vygotsky, onde três polos se destacam e se distinguem: o sujeito, que exerce a ação; o objeto, sobre o qual o sujeito age; e o instrumento, como mediador entre sujeito e objeto.

Na Figura 16, o modelo SAI apresenta as relações existentes entre os três pólos da tríade: sujeito (S), instrumento (i) e objeto (O), conforme em Verillon e Rabardel (1995).

Figura 16 - Modelo de Situações de Atividades Instrumentais.



Fonte: Salazar (2009, p. 66).

O modelo evidencia as múltiplas interações que ocorrem nas atividades instrumentais: interação sujeito-objeto [S-O], sujeito-instrumento [S-i], instrumento-objeto [i-O] e a relação

sujeito-objeto mediada pelo instrumento [S(i)-O]. Além disso, cada um dos polos e cada uma das interações podem interagir com o ambiente, cujas condições também influenciam a atividade instrumental.

Na atividade proposta em um de seus estudos, no qual os sujeitos da pesquisa deveriam construir um triângulo e obter a soma dos seus ângulos utilizando o *software* GeoGebra, Abar e Alencar (2013) exemplificam os tipos de interações que ocorrem na gênese instrumental. O aluno, mobilizando seus conhecimentos prévios (ou desenvolvendo novos), utiliza as ferramentas do GeoGebra (interação sujeito-instrumento) para a construção do triângulo e obtenção da soma dos seus ângulos internos (interação instrumento-objeto).

Com a manipulação do triângulo, o aluno pode observar que as mudanças das características geométricas do triângulo alteram as medidas dos seus ângulos, mas a soma dos seus ângulos internos permanece constante e igual a 180° (interação sujeito-objeto mediado pelo instrumento). Rabardel (1995b) destaca que o modelo SAI permite analisar a sequência de ações realizadas pelo sujeito, tornando mais visíveis os esquemas de utilização mobilizados durante a atividade.

O exemplo que segue, emprestado de Salazar (2009), mostra como o modelo pode ser usado para análise da atividade do sujeito mediada pelo instrumento. A atividade instrumentada¹⁴ consiste na translação de um triângulo ABC, segundo um vetor v , paralelo ao lado AC. A tarefa deveria ser realizada com ferramentas diferentes, dando origem a situações de atividades instrumentais distintas: uma com o uso de lápis e papel (SAI A) e outra do *software* Cabri 3D (SAI B).

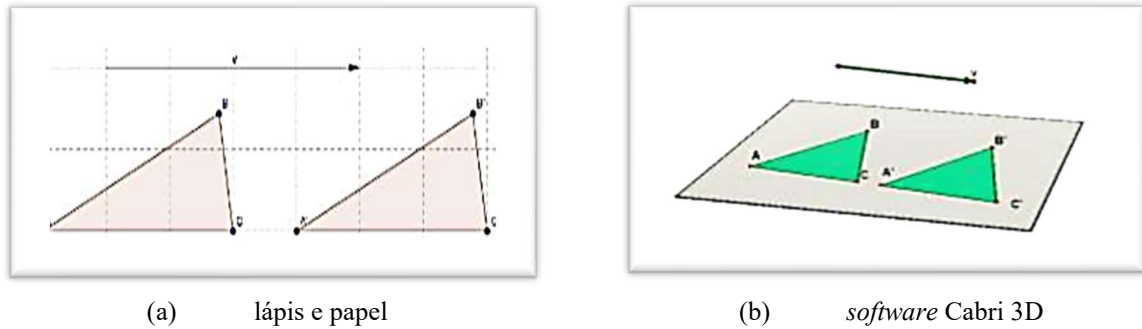
Nesse exemplo, os elementos da tríade são: o licenciando (sujeito), o *software* Cabri 3D (artefato) e o conceito de translação (objeto). Dessa forma, o sujeito utiliza o artefato para a construção de seus conhecimentos sobre translação (gênese instrumental pessoal). Confrontado pela tarefa, o sujeito precisa iniciar mobilizando esquemas adquiridos anteriormente (conhecimentos prévios) tanto sobre as ferramentas do *software* quanto referentes ao conteúdo matemático.

Na SAI A (Figura 17a), tendo disponível régua, lápis e uma folha de papel quadriculado com o triângulo ABC e o vetor \vec{v} , paralelo ao lado AC, o estudante realiza a tarefa da seguinte forma: (1) obtém o comprimento x do vetor \vec{v} contando os quadradinhos do papel quadriculado;

¹⁴ Rabardel (1995a) denomina por atividade instrumentada àquela que é mediada por instrumentos, transformando as relações do sujeito com o ambiente, suas funções psicológicas e cognitivas, bem como seu desenvolvimento. Assim, é relevante compreender como o uso de tecnologias afeta a cognição e aprendizagem durante uma atividade instrumentada, quando um artefato se torna um instrumento para o sujeito.

(2) desloca o ponto A na medida x , no sentido e direção do vetor \vec{v} , obtendo o ponto A'; (3) realiza a mesma ação para traçar os pontos B' e C'; (4) usa a régua para desenhar o triângulo A' B' C'.

Figura 17 - Situações de Atividades Instrumentais.



Fonte: Salazar (2009, p. 67-68).

Na SAI B (Figura 17b), podendo usar as ferramentas do Cabri 3D, com o triângulo ABC e o vetor v no plano de base do *software*, o estudante realiza a tarefa como segue: (1) seleciona a caixa de ferramentas “transformações”; (2) aciona a ferramenta “translação”, clicando sobre o triângulo e sobre o vetor v , realizando a translação; (3) nomeia o triângulo transladado A'B'C'.

O modelo SAI do *Quadro 7* descreve detalhadamente as ações do estudante, as ferramentas que utiliza e o objeto acessado das duas situações de atividades instrumentais propostas.

Quadro 7 - Modelo das situações de atividades instrumentais A e B

Modelo SAI: Translação					
SAI A			SAI B		
Ação	Instrumento	Objeto	Ação	Instrumento	Objeto
Conta	Aponta com o dedo	Quantidade de quadrados	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
Desenha	Lápis	Ponto A'	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta translação
Conta	Aponta com o dedo	Mesma quantidade de quadrados	Clica	Ferramenta translação	Triângulo ABC
Desenha	Lápis	Ponto B'	Clica	Ferramenta translação	Vetor (validar a translação)
Conta	Aponta com o dedo	Mesma quantidade de quadrados	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
Desenha	Lápis	Ponto C'	Clica	Ferramenta ponto	Ponto A'
			Clica	Ferramenta ponto	Ponto B'
Traça	Lápis e régua	Triângulo A'B'C'	Clica	Ferramenta ponto	Ponto C

Fonte: Salazar (2009, p. 68).

Através do modelo, é possível observar como os estudantes interagem com o objeto de estudo e se apropriam das ferramentas, permitindo perceber os processos pelos quais o sujeito passa durante a atividade instrumental. A partir do modelo SAI, em acordo com Salazar (2009), é possível identificar as limitações e potencialidades das situações de atividades instrumentais propostas. Por exemplo, uma limitação da SAI A é o fato de a translação ocorrer apenas pela contagem inteira dos quadradinhos do papel quadriculado. Enquanto isso, a SAI B possibilita a utilização adequada das noções de translação com as ferramentas do *software*.

Isso mostra que o modelo permite antecipar possíveis obstáculos e vantagens, possibilitando a regulação de uma situação de atividade instrumental. Além disso, a análise com o modelo SAI também pode ser realizada com base numa descrição da tarefa *a priori*, ajudando assim o professor a avaliar a relevância pedagógica das tarefas de acordo com os objetivos pretendidos. Segundo Rabardel, o modelo SAI não abrange todas as características das situações em que as atividades são mediadas por instrumentos.

Por exemplo, “[...] a gama de instrumentos utilizados por um único sujeito em uma ação complexa; a natureza variável e, por vezes, coletiva dos contextos da ação; as finalizações específicas dos sujeitos, etc. [...]” (Rabardel, 2002, p. 44, tradução nossa). No entanto, o autor afirma que a presença do instrumento constitui a tríade e as múltiplas interações entre seus polos, formando um núcleo comum característico da classe de situações de atividade mediada por instrumentos.

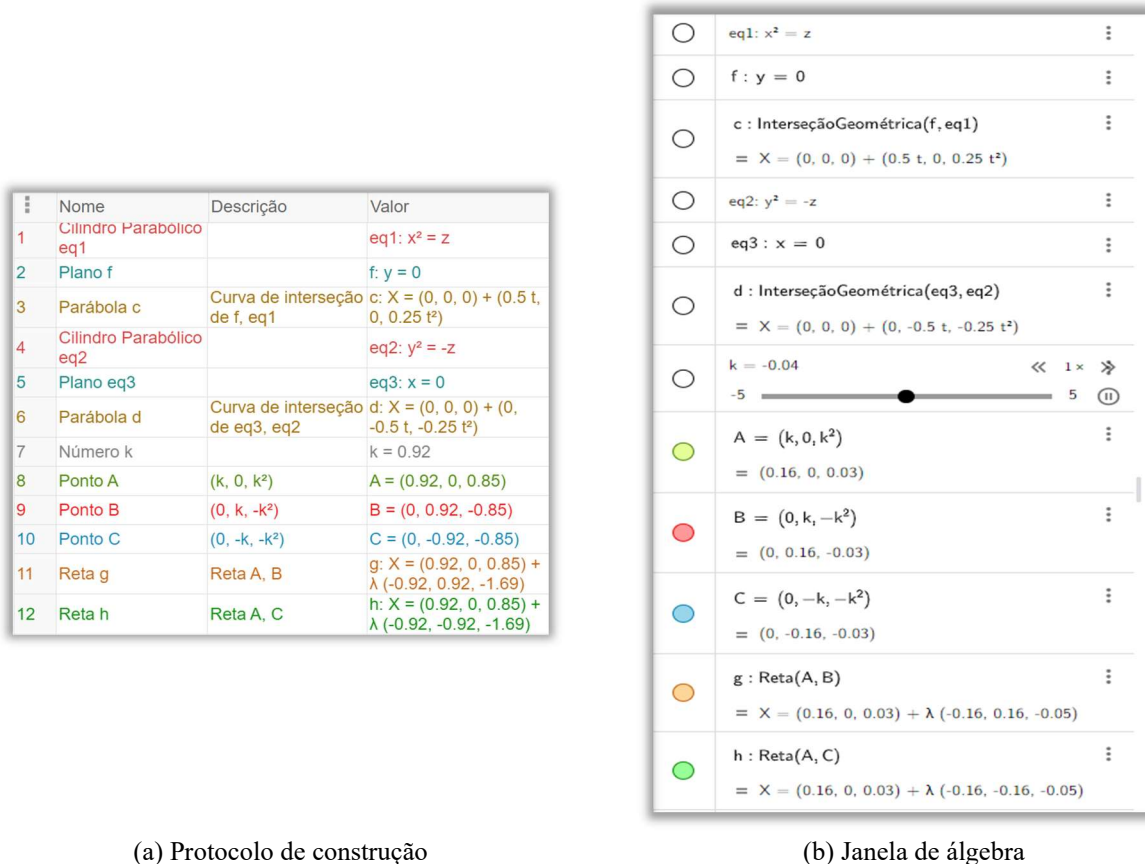
Na presente investigação, a tríade é composta pelo participante (sujeito), pelas superfícies quádricas (objeto) e pelo ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra (instrumento). E entendemos que, como no modelo SAI, o protocolo de construção e a janela de álgebra do GeoGebra também possibilitam a análise da sequência de ações realizadas pelo sujeito que tornam mais visíveis os esquemas utilizados durante uma atividade instrumental envolvendo as superfícies quádricas.

Como exemplo, podemos analisar o protocolo de construção e a janela de álgebra de uma das atividades na SEAI 10, em que um parabolóide hiperbólico é obtido como superfície regrada¹⁵ (Figura 18). O protocolo de construção apresenta os elementos utilizados para obter a superfície regrada, na ordem em que foram incluídos, e também mostra a dependência entre eles.

¹⁵ “Um subconjunto S de pontos do espaço é uma superfície regrada se as seguintes condições são satisfeitas: (i) Existe uma curva D contida em S, tal que para cada ponto P de D existe uma reta L_P contida em S, passando por P; (ii) A união de todas as retas L_P é a superfície S. A curva D é chamada diretriz da superfície S e cada reta L_P é denominada geratriz de S.” Disponível em: <https://www.professores.uff.br/kowada/wp-content/uploads/sites/63/2017/08/ga2V1aula13.pdf> Acesso em: 11 jan. 2022.

As colunas do protocolo de construção apresentam três características do elemento inserido: o nome, o que ajuda a identificá-lo na janela de visualização; a descrição, ou a forma como foi obtido, o que mostra a dependência entre os elementos; e o valor, o que ajuda a identificá-lo na janela de álgebra. Por exemplo, a parábola c (coluna nome) da linha 3 no protocolo de construção (Figura 18a), foi obtida pela intersecção do cilindro parabólico eq1 da linha 1 com o plano f da linha 2 (coluna descrição) e tem equação $X = (0,0,0) + (0, -0.5t, -0.25t^2)$ (coluna valor).

Figura 18 – Ferramentas para análise das condutas cognitivas



Fonte: Elaborado pela autora.

A janela de álgebra do GeoGebra também possibilita a identificação dos elementos na construção, da ordem em que esses elementos foram inseridos e da dependência entre eles. Ambos apresentam os mesmos doze passos para a construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada. Na janela de álgebra, os elementos da construção podem ser organizados de quatro formas diferentes: dependência, tipo de objeto, ordem de construção e camada.

A organização dos elementos pela ordem de construção assemelha-se ao protocolo de construção, uma vez que apresenta de outra forma os mesmos dados. Por exemplo, a parábola

c na terceira linha da janela de álgebra (Figura 18b), foi obtida pela intersecção do cilindro parabólico eq1 da linha 1 com o plano f da linha 2 e tem equação $X = (0,0,0) + (0, -0.5t, -0.25t^2)$.

Uma vez apropriado da ferramenta tecnológica, o sujeito pode manipular e visualizar diferentes representações dinâmicas das superfícies quádricas em diferentes configurações. A exploração e apropriação do *software* de matemática dinâmica por estes sujeitos foi analisada sob a perspectiva da gênese instrumental, com foco na análise da evolução dos esquemas de utilização desenvolvidos pelo sujeito na interação com o artefato no decorrer da ação instrumentada.

Na próxima subseção, vamos apresentar uma articulação entre as teorias de Duval e Rabardel, continuamente presentes nos estudos de Notare e Basso (Notare; Basso, 2012, 2016, 2017b, 2017a, 2018; Basso; Notare, 2015), alguns dos quais tivemos oportunidade de participar com geração de publicação (Guimarães *et al.*, 2020, 2021; Guimarães; Notare, 2022; Ribeiro *et al.*, 2023).

2.3 Fazer e compreender nos estudos de Duval, Rabardel e Notare

A escolha pelo Fazer e Compreender de Piaget como aporte teórico para essa investigação teve origem nas experiências como docente, e também como discente, durante este doutoramento. Experienciando diferentes situações de ensino e aprendizagem, foi possível constatar que “A postura ativa, ao contrário de uma transmissão ordenada de conteúdo, permite ao sujeito realizar ações como experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair e generalizar” (Guimarães *et al.*, 2020, p. 147).

Observamos que esses verbos, que constituem os atos físicos e cognitivos do Fazer e Compreender de Piaget (1978), são essenciais na atividade matemática. Assim, para compreender o desenvolvimento cognitivo no processo de gênese instrumental envolvendo registros dinâmicos de representações semióticas das superfícies quádricas, vamos usar as lentes do Fazer e Compreender de Piaget (1978), estabelecendo relações com os estudos de Duval e de Rabardel.

2.3.1 Fazer e Compreender em Duval

Para Duval, “A matemática desempenha um papel chave na aprendizagem de outras disciplinas e, sobretudo, a compreensão da matemática é pedagogicamente fundamental e

insubstituível para o desenvolvimento das capacidades mentais” (Duval, 2016, p. 4). Ao destacar a importância da matemática na formação do aluno, o autor afirma que o significado de ‘fazer matemática’ e ‘compreender matemática’, constitui o cerne do entendimento sobre o ensino e a aprendizagem de matemática.

Duval encontra e explica esses significados a partir da análise sobre os processos cognitivos usados na atividade matemática, quando constata a presença da noção de registro de representação semiótica (Duval, 2012c, 2016, 2018). Toda atividade matemática se apoia nas representações semióticas, que são utilizadas para modelar fenômenos e, nas suas transformações.

Duval verificou que a comparação dos conteúdos das representações semióticas é fundamental para compreensão em matemática, sendo necessário reconhecer os objetos matemáticos na mudança de representação semiótica dentro de um mesmo registro (tratamento) e entre diferentes registros (conversão). Conforme o autor,

[...] em termos cognitivos a autonomia intelectual resulta da coordenação dos registros de representação. A atividade matemática requer, sempre, a mobilização sinérgica de dois, às vezes de três registros de representação, dependendo dos domínios matemáticos (aritmética, Álgebra, Geometria, análise etc.) (Duval, 2016, p. 28).

O reconhecimento de um objeto matemático em diferentes registros e a conscientização da maneira específica que cada representação pode se transformar em novas representações semióticas constituem o que Duval (2016) chamou de patamares cognitivos para a compreensão em matemática. Além disso, o autor ainda destaca a importância de dar oportunidade para o aluno explicar o que fez, uma vez que isso lhe possibilita a tomada de consciência dos gestos intelectuais ligados à mobilização dos registros de representação.

A matemática é um tipo de conhecimento em que é necessário fazer para compreender, conforme Duval: “Isto quer dizer que as explicações de outros (professor ou aluno) podem não ser suficientes para fazê-lo compreender. É apenas quando se consegue fazer por si mesmo que se pode compreender matemática” (Duval, 2015, p. 5). Mas, segundo Duval, “Para compreender matemática e poder utilizá-la, é preciso tomar consciência das formas de ver, de raciocinar, de reconhecer e de organizar as informações pertinentes” (Duval, 2015, p. 11).

Por um lado, a compreensão em matemática ocorre a partir da tomada de consciência do fazer. Por outro, o autor diz que é preciso compreender para poder utilizar a matemática, ou seja, é necessário compreender para fazer. No nosso entendimento, essa relação aparentemente circular, trata-se de um processo que se inicia pela ação do sujeito sobre as formas iniciais das representações semióticas do objeto matemático.

Cada representação semiótica evidencia propriedades específicas do objeto matemático, que se complementam. Entendemos que, quanto mais representações semióticas forem mobilizadas e transformações efetuadas sobre estas, mais a representação mental do objeto matemático é enriquecida das suas propriedades. Nesse processo, os atos cognitivos do sujeito são aprimorados, produzindo avanços na construção dos conceitos sobre o objeto matemático.

Vamos retomar essa suposição mais adiante, mas antes analisaremos o ‘Fazer e compreender’ na abordagem instrumental de Rabardel (1995a, 2002, 2011).

2.3.2 Fazer e Compreender em Rabardel

A atividade mediada por instrumento, centrada no uso humano, está voltada para a compreensão das funções psicológicas que condicionam o seu desenvolvimento. Assim, assumindo um papel importante na abordagem instrumental, a noção de esquema piagetiana ganha elementos que levam em consideração a especificidade da atividade instrumental.

Esse esquema é construído durante a atividade com instrumento, quando ocorre o processo de gênese instrumental que, conforme abordado anteriormente, consiste na transformação progressiva do artefato em instrumento. Os esquemas relacionados ao uso de um artefato são os esquemas de utilização, que apresentam duas dimensões dentro da atividade: uma principal e outra secundária.

Por exemplo, para a aprendizagem do conceito de superfície quádrica (objeto), o estudante (sujeito) precisa realizar uma atividade com o uso do GeoGebra (artefato). Nesse caso, a dimensão secundária refere-se ao conhecimento das funcionalidades do artefato (GeoGebra) e, a principal, orientada para o objeto da atividade mediada por instrumento (as superfícies quádricas).

Os esquemas de uso são os relacionados às atividades secundárias, ou seja, esquemas mais elementares como clicar em um botão do menu de ferramentas do GeoGebra. Os esquemas de ação instrumentada são os esquemas que se constituem durante a atividade principal, que consistem na exploração do objeto de estudo por meio do GeoGebra. Os esquemas de ação instrumentada englobam os esquemas do primeiro nível (esquemas de uso) quando, para realizar a atividade instrumentada sobre as quádricas, por exemplo, o sujeito precisa mobilizar os esquemas de uso.

Por outro lado, “Os esquemas de uso [...] se coordenam entre si e com outros esquemas, sendo assimilados e reciprocamente acomodados para constituir os esquemas de ação instrumentada” (Rabardel, 2011, p. 172, tradução nossa). Quem são estes ‘outros esquemas’

que, juntamente com os esquemas de uso, compõem o esquema de ação instrumentada? Rabardel exemplifica o conteúdo do esquema de ação instrumentada da seguinte forma:

Para um motorista experiente ultrapassar um veículo, ele precisa determinar o momento certo, indicar que tem intenção de ultrapassar, mudar a velocidade, modificar o caminho do veículo etc. Este é um esquema de ação instrumentada que incorpora como componentes esquemas de uso, subordinados à sua organização geral, como os que permitem controlar uma mudança de velocidade ou uma mudança de trajetória (Rabardel, 2011, p.173, tradução nossa).

É possível constatar a partir desse exemplo que, além dos esquemas de uso, um esquema de ação instrumentada é composto de outros esquemas relacionados ao objeto da atividade. Conforme Rabardel, “Os esquemas de utilização estão relacionados, por um lado, com os artefatos que podem ser convertidos em meios; por outro lado, com os objetos em que estes artefatos permitem ação” (Rabardel, 2011, p. 176, tradução nossa).

Nesse estudo, um esquema de ação instrumentada pode ser composto por esquemas relacionados às ferramentas do GeoGebra (artefato) e outros às representações semióticas das superfícies quádricas (objeto da atividade). Os primeiros são os já denominados esquemas de uso e, os segundos, os que chamamos neste estudo de esquemas conceituais. Conforme em Bretscher (2009), uma ferramenta pode envolver uma dependência funcional entre elementos técnicos e conceituais.

Por exemplo, para utilizar a ferramenta ‘Hipérbole’, é necessário inserir dois focos e um ponto da cônica. Assim, o sujeito precisa saber o que é uma hipérbole, o que são os focos, etc. (esquemas conceituais). Por outro lado, essa ferramenta tem a sua forma própria de funcionamento, que requer que os focos e o ponto da hipérbole já tenham sido inseridos na janela de visualização (esquemas de uso). Ao iniciar uma atividade no GeoGebra, o sujeito precisa de alguns conhecimentos sobre as ferramentas para adquirir conhecimentos matemáticos.

Por outro lado, para utilizar as ferramentas, ele vai precisar de alguns conhecimentos matemáticos. Num primeiro olhar, surge novamente uma exigência aparentemente circular. Entendemos que, ao iniciar uma atividade instrumental, o sujeito mobiliza esquemas prévios. À medida que vai progredindo no conhecimento do instrumento, torna-se capacitado para explorar o objeto de estudo, ampliando seus conhecimentos sobre este (evolução dos esquemas conceituais).

Por outro lado, o progresso nos esquemas conceituais o capacita para ampliar os seus conhecimentos sobre as ferramentas, e assim sucessivamente. Dessa forma, é possível reconhecer a evolução dos esquemas de ação instrumentada através de um processo de

abstração reflexionante com tomada de consciência (abstração refletida). Na subseção seguinte, essas suposições são confirmadas a partir de algumas das investigações de Notare e Basso (Notare; Basso, 2012, 2016, 2017b, 2017a, 2018; Basso; Notare, 2015; Guimarães et al., 2020, 2021), estas duas últimas em que tive o privilégio de participar como doutoranda.

2.3.3 Fazer e Compreender no desenvolvimento cognitivo

As constatações descritas nas subseções anteriores (subseções 2.3.1 e 2.3.2), sob o ponto de vista da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e da Teoria da Gênese Instrumental, têm ponto comum nos estudos de Notare e Basso. Nesses estudos, foi possível observar a permanente presença de um fazer para compreender, com origem na teoria de Piaget. Sob essa perspectiva, os autores consideram que:

Para compreender melhor a construção do conhecimento matemático, recorremos à teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget, que trata da origem do conhecimento e o entende como sendo um processo contínuo de construção, sem início ou final absoluto (Piaget, 1983). A inteligência, para Piaget, é construída pelo mecanismo de adaptação do organismo a uma situação nova e, como tal, implica a construção contínua de novas estruturas. Desta forma, os indivíduos desenvolvem-se intelectualmente a partir das vivências e experiências oferecidas pelo meio que os cercam, agindo sobre este meio (Notare; Basso, 2012, p. 2).

As situações de ensino e aprendizagem, nessa perspectiva, consistem em “[...] engajar os estudantes em processo de organização de ideias e encadeamento lógico-dedutivo [...]” (Notare; Basso, 2018, p. 1). De acordo com estes autores, de um lado “Os alunos realizam a atividade, não para atender à exigência do professor, mas para atender suas necessidades individuais” (Notare; Basso, 2018, p. 1). Por outro lado, os alunos vivenciam “Ações como experimentar, formular conjecturas, testá-las e validá-las, processos naturais do fazer matemática” (Notare; Basso, 2018, p. 1).

Basso e Notare (2015) e Medeiros e Basso (2020) consideram que as tecnologias digitais abrem novas possibilidades para o pensamento matemático, se o sujeito for conduzido a pensar com a tecnologia digital, a partir de situações com potencial para levá-lo à compreensão dos conceitos envolvidos. Mas o poder da tecnologia no processo de tomada de consciência de conceitos matemáticos, depende de uma metodologia que privilegie a participação ativa dos estudantes.

Essa percepção, que já se fazia presente na experiência docente da pesquisadora, confirmava-se desde os primeiros estudos realizados nesse doutoramento. Nessa oportunidade, já foi possível constatar que:

O professor precisa estar preparado para desempenhar esses novos papéis, que perpassam ao simples uso das TD [Tecnologias Digitais], mas exigem novas metodologias associadas ao seu uso. As TD não garantem a qualidade do ensino e da aprendizagem, mas podem ser um instrumento importante, quando utilizadas com uma análise crítica sobre seus limites e possibilidades (Guimarães; Behar, 2019, p. 468).

Em acordo com Moran (2018), aprendemos desde o nascimento e ao longo da vida por processos de aprendizagem ativa, ampliando as competências por processos gradualmente mais complexos. Ao contrário de um ensino que requer apenas prestar atenção, copiar e repetir.

Até mesmo o conhecimento matemático formal a que hoje temos acesso, não esteve sempre pronto, mas percorreu um caminho de construção de conhecimento que envolveu exploração, dedução, investigação, argumentação, prova matemática etc. Sendo assim, é possível constatar que “O ensino sequencial de definições e propriedades, seguido de atividades que apenas exigem memorização e repetição, não carregam características que apontem para a efetiva construção de conhecimentos matemáticos” (Guimarães et al., 2020, p. 147).

Piaget derruba a ideia de um universo de conhecimento dado, seja na bagagem hereditária (apriorismo), seja no meio físico ou social (empirismo) e, elabora a ideia de conhecimento-construção. Na perspectiva piagetiana, “[...] partindo do simples ao complexo, o sujeito constrói o seu conhecimento por meio de um processo que começa com ações que são interiorizadas em forma de operações” (Guimarães et al., 2020, p. 147).

Dessa forma, os métodos de ensino não podem privilegiar a simples transmissão de conteúdo, medindo o sucesso pela capacidade de reproduzi-lo, sem evidências de compreensão (Gravina; Santarosa, 1999). Ao contrário, a concepção de um projeto de ensino e aprendizagem com abordagem construtivista, deve ter como princípio a construção do conhecimento a partir das ações do sujeito, mediadas por suas estruturas mentais já constituídas ou que vão sendo constituídas durante o processo.

Gravina e Santarosa (1999) consideram que:

No contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o 'fazer matemática': experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. E o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, a qual é baseada essencialmente na transmissão ordenada de 'fatos', geralmente na forma de definições e propriedades (p. 73).

Esta metodologia está relacionada ao Fazer e Compreender de Piaget (1978) e, para Gravina e Santarosa (1999), as tecnologias digitais podem oferecer suporte às concretizações e ações mentais do aluno.

A representação de objetos matemáticos na tela do computador gera um novo tipo de objeto que, para Papert (1985), permite mudar os limites entre o concreto e o formal. Hebenstreint (1987) denominou objeto concreto-abstrato, por possuir características de ambos. Concreto porque pode ser acessado e manipulado por meio das tecnologias digitais e abstrato por tratar-se de produto das construções mentais.

Nesse sentido, podemos constatar a importância das representações semióticas, uma vez que “No contexto da Matemática, são as ações, inicialmente sobre objetos concretos, que se generalizam em esquemas, e num estágio mais avançado são as ações sobre objetos abstratos que se generalizam em conceitos e teoremas” (Gravina; Santarosa, 1999, p. 7).

É nessa perspectiva que Notare e Basso entendem o uso do computador na aprendizagem de matemática (Notare; Basso, 2012, 2016, 2017b, 2017a, 2018; Basso; Notare, 2015). Com base em Piaget, eles compreendem que “[...] o processo de construção do conhecimento se constitui na ação do sujeito sobre um objeto (assimilação) e na ação do sujeito sobre si mesmo (acomodação), respondendo às estranhezas trazidas pelo material assimilado” (Notare; Basso, 2012, p. 2).

Assim, desafiado por uma situação de ensino e aprendizagem, o sujeito inicia a atividade com ações físico-experimentais: modificação das posições, movimentos ou propriedades para explorar o objeto. A seguir, ele conduz sua investigação com ações lógico-matemáticas: enriquecimento do objeto de propriedades ou relações novas, que conservam as anteriores, completando-as por sistemas de classificações, ordenações, colocações em correspondência, enumerações ou medidas etc.

A partir de certo nível, as ações lógico-matemáticas do sujeito não se limitam mais às propriedades físicas do objeto, interiorizando-se e dando lugar a uma atividade puramente mental. De acordo com Gravina (2001), estas ações que se internalizam e se organizam, desencadeiam um processo evolutivo de estruturas lógicas. Dessa evolução das estruturas lógicas, de menos acabadas para mais completas, decorre a ascensão de patamar de conhecimento.

Segundo Piaget, a interação entre o sujeito e o objeto possibilita o processo de equilíbrio das estruturas cognitivas, por meio da assimilação e da acomodação. Esse processo é representado por uma espiral para indicar um avanço para um novo patamar juntamente com uma expansão da estrutura cognitiva. É um processo ativo e contínuo, onde os desequilíbrios causados por novos desafios, provocam o processo de equilíbrio, preparando o sujeito para um novo ciclo.

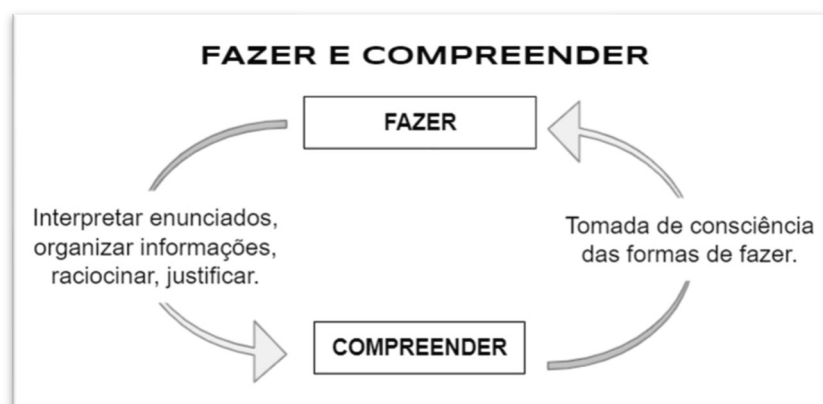
Em outras palavras, o sujeito inicia agindo sobre o objeto matemático e, por meio de abstrações pseudoempíricas, desenvolve esquemas. A partir das coordenações desses esquemas, ele pode chegar a abstrações refletidas, provocando a criação de novas estruturas cognitivas. Esse é o processo de abstração reflexionante, composto por reflexionamentos e reflexões, que dá origem a novos patamares.

O reflexionamento consiste na projeção sobre um patamar superior daquilo que foi retirado do patamar inferior e, na reflexão, ocorre a reorganização do patamar superior para acomodar o que foi transferido do inferior. Alternando continuamente entre reflexionamentos e reflexões, esse processo descreve o movimento em espiral de Piaget, conforme dito anteriormente.

A partir da reflexão, surge o conhecimento como capacidade: “Piaget diz que o desenvolvimento do conhecimento como capacidade dá-se por continuidade funcional (assimilações e acomodações) e rupturas estruturais” (Becker, 2014, p. 110). Segundo o autor, o reflexionamento pode ser considerado como assimilação e a reflexão como sendo a acomodação.

Assim desencadeia-se a construção do conhecimento, com base em Piaget, uma união indissociável entre a experiência e a dedução e entre os dados oferecidos pelo objeto e as ações ou operações do sujeito, que constituem o quadro lógico-matemático. Agora torna-se possível compreender a relação aparentemente circular discutida nas seções anteriores: para “compreender matemática” é preciso “fazer matemática”, mas por outro lado, para “fazer matemática” é necessário “compreender matemática” (Figura 19).

Figura 19 - O falso paradoxo do fazer e compreender.



Fonte: Produção do autor.

Segundo Notare e Basso (2012, p. 3), “O estudo da tomada de consciência busca aprofundar essas questões, na tentativa de desvendar os verdadeiros limites existentes entre o

fazer e o compreender”. Para os autores, o sujeito constrói estruturas do conhecimento ou capacidades de conhecer por um processo de (re)construção e tomada de consciência e,

Nesse processo de desenvolvimento cognitivo, é possível identificar certos níveis, quando trilham o caminho do fazer ao compreender. Em outras palavras, pode-se dizer que essa evolução inicia na ação pura, impulsionada pela busca em alcançar determinado objetivo, muitas vezes de fato alcançado, mesmo que sem a compreensão dos meios que levaram a tal êxito, até a total compreensão das ações realizadas. Assim, tal evolução caminha do “fazer” ao “fazer e saber o que se está fazendo” (Notare; Basso, 2012, p. 3).

Para melhor compreensão desse processo, vamos analisar essa citação dividindo-a em partes. Primeiro, em “[...] trilham o caminho do fazer ao compreender [...]” (Notare; Basso, 2012, p. 3), podemos constatar a exigência do fazer para compreender, ou seja, tudo começa pelo fazer. Segundo os autores, não se aprende porque alguém ensina, mas por meio da ação em que o sujeito tem compreensão sobre o que fez.

Depois, Notare e Basso (2012, p. 3) afirmam que “[...] essa evolução inicia na ação pura, impulsionada pela busca em alcançar determinado objetivo, muitas vezes de fato alcançado, mesmo que sem a compreensão dos meios que levaram a tal êxito [...]”. Conforme Piaget (1978), isso se deve a um atraso da conceituação em relação à ação. Quer dizer que, impulsionado por alcançar um determinado objetivo, o sujeito inicia o seu processo de desenvolvimento cognitivo por ações que não foram escolhidas a partir da compreensão, mas para serem testadas.

Nessa experimentação, onde o sujeito obtém êxitos ou fracassos nas suas escolhas, é que entra o importante papel da tomada de consciência. Nas palavras de Notare e Basso (2012):

Para compreender as razões funcionais da tomada de consciência, deve-se entender que esta se dá por meio de um percurso de um determinado comportamento, que é iniciado com a busca de um fim, onde os dados de observação iniciais são denominados de periféricos. Essa periferia não é definida nem pelo objeto, nem pelo sujeito, mas pela reação do sujeito em face do objeto. Dessa forma, Piaget (1977) afirma que a tomada de consciência procede da periferia para o centro, ou seja, dos objetivos e resultados, para o reconhecimento dos meios empregados e das escolhas realizadas, que levaram a um êxito ou fracasso (p. 3).

Assim, segundo os autores, “[...] a tomada de consciência consiste em uma conceituação, ou seja, à passagem de uma assimilação prática a uma assimilação por meio de conceitos” (Notare; Basso, 2012, p. 4). Aqui podemos observar a importância do conceito de tomada de consciência na aprendizagem de Matemática. No ensino que privilegia a memorização e repetição de fórmulas e procedimentos, o aluno pode alcançar êxito na obtenção

da solução em uma atividade, sem necessariamente ter compreendido o que fez. Ou, conforme Notare e Basso (2012):

[...] quanto mais o sujeito se limitar às reações elementares, mais ele deformará conceitualmente os dados de observação, levando a leituras deformadas de dados, mesmo em casos de êxito na ação. Essa deformação inferencial não constitui uma característica da tomada de consciência, refletindo a própria inconsciência do sujeito em relação aos meios empregados para obter tal êxito (p. 4).

No trecho “[...] até a total compreensão das ações realizadas. Assim, tal evolução caminha do “fazer” ao “fazer e saber o que se está fazendo” (Notare; Basso, 2012, p. 3), os autores referem-se à inversão nessa relação a partir de determinado nível, onde a conceituação passa a influenciar a ação do sujeito. É a partir daí que a compreensão começa a se estabelecer e o sujeito se torna capaz de antecipar, fazer escolhas e coordenar ações.

Nas palavras de Notare e Basso (2012, p. 4):

As ações do sujeito são vistas por ele e assimiladas adequadamente por sua consciência, tratando-se de uma reconstrução capaz de explicar as conexões observadas no êxito de suas ações. A tomada de consciência realiza-se a partir dos dados de observação relativos ao objeto; por outro lado, é a análise desses dados de observação que vai fornecer informações sobre o objeto e a explicação causal do seu comportamento (Notare; Basso, 2012, p. 4).

Por fim, em “Nesse processo de desenvolvimento cognitivo, é possível identificar certos níveis [...]” (Notare; Basso, 2012, p. 3), os autores referem-se à passagem do nível material para o da representação, possibilitada pela conceituação, quando o sujeito passa a poder operar sobre representações mentais e não somente sobre observáveis. Então, ele reflete sobre a situação proposta, cria conjecturas, valida ou refuta as suas hipóteses, volta a refletir; até atingir o seu objetivo, mas dessa vez com compreensão. De acordo com os autores,

Isso provoca uma ação recíproca dos dados de observação sobre a ação e vice-versa. Ao ser estabelecido um relacionamento entre eles, seguem-se as coordenações inferenciais, que ultrapassam o campo dos dados de observação e permitem ao sujeito compreender causalmente os efeitos observados. Dá-se, então, um processo de idas e vindas, que refina os dados de observação e o grau de compreensão (Notare; Basso, 2012, p. 4).

Com base nisso, podemos compreender o falso paradoxo anteriormente citado. O processo no caminho do fazer ao compreender corresponde à ação que constitui um conhecimento cuja conceituação somente se efetua por tomadas de consciência posteriores (Notare; Basso, 2012). Começando com uma ação inicialmente desprovida de conceituação, a partir das reflexões acerca dos sucessivos sucessos ou fracassos nas escolhas, ocorre uma

evolução para uma ação com conceituação. A Figura 20 apresenta um esquema desse processo de “fazer e compreender fazendo”, expressão utilizada por Notare e Basso (2018).

Figura 20 - Fazer e compreender fazendo.



Fonte: Elaborado pela autora.

De acordo com Becker (2014), as abstrações reflexionantes apoiam-se sobre esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas etc., de onde retiraram qualidades para utilizar em outras finalidades. Segundo o autor, quando o resultado destas abstrações reflexionantes se tornam conscientes, ocorreram abstrações refletidas. Para Piaget, os esquemas estão na origem da formação de conceitos e o conhecimento é o resultado das “[...] interações entre sujeito e objeto que são mais ricas do que aquilo que os objetos podem fornecer por eles” (Piaget, 1995, p. 87).

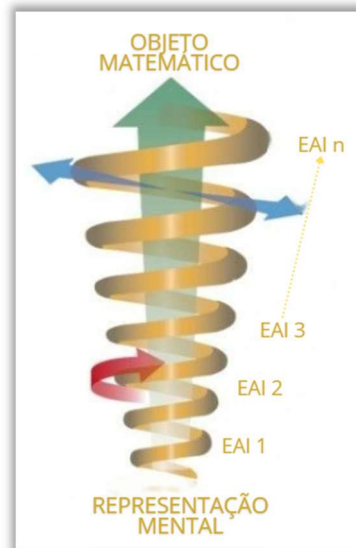
Com a integração da tecnologia a esse processo, em interação com o objeto de estudo, o sujeito vai transformando o artefato em instrumento, por sucessivos processos de instrumentação e instrumentalização. Durante a instrumentalização, o componente artefato do instrumento surge e evolui, enquanto pela instrumentação, os esquemas de utilização vão sendo desenvolvidos pelo sujeito.

O esquema da Figura 21 representa a evolução dos esquemas durante uma situação de ensino e aprendizagem instrumental. Tomemos como exemplo uma atividade em que é necessário obter a equação de uma superfície quádrlica a partir do seu gráfico. Na realização dos tratamentos gráficos para a identificação de valores visuais necessárias à conversão para o registro simbólico, o sujeito precisa mobilizar Esquemas de Ação Instrumentada (EAI).

Esses esquemas são compostos por Esquemas de Uso (relacionados ao artefato) e Esquemas Conceituais (relacionados ao objeto matemático), cuja evolução se dá de forma entrelaçada. Coadunando com Piaget, Rabardel constatou que durante uma atividade

instrumentada, nas situações que o sujeito já domina, a ação é automatizada pelos esquemas facilmente mobilizados.

Figura 21 - Evolução dos Esquemas de Ação Instrumentada.



Fonte: Elaborado pela autora.

Nas situações novas, mas semelhantes a outras que o sujeito já domine, ocorre uma assimilação direta em esquemas já existentes (assimilação) com adaptação dos aspectos específicos (diferenciação). E, nas situações muito novas para o sujeito, novos esquemas são produzidos pela transformação dos esquemas disponíveis (adaptação), permitindo o domínio da nova classe de situações e ampliando as suas capacidades de assimilação e adaptação.

Trata-se do processo de abstração reflexionante com tomada de consciência, representado por uma espiral em Piaget, considerando que a expansão da estrutura cognitiva se dá por duas formas: uma mudança de patamar e um aumento na largura da espiral. A mudança de patamar refere-se ao reflexionamento, que projeta no patamar superior aquilo que foi retirado do patamar inferior. A nova estrutura cognitiva, “com mais conteúdo” que a anterior, é representada pelo aumento na largura da espiral. E também à reflexão, que reorganiza o patamar superior para acomodar o que foi levado do inferior.

Esse processo explica a exigência aparentemente circular, abordada nas subseções 2.3.1 e 2.3.2, carregando três características que se destacam no fazer e compreender sempre presente nos estudos de Notare e Basso e ancorados na teoria piagetiana. A primeira se refere à necessidade de fazer para compreender, pois o conhecimento não está pronto e não pode ser transmitido, precisando ser construído por meio da ação do sujeito.

A segunda trata da compreensão que capacita o sujeito a fazer mais e melhor, pois consiste em abstrações reflexionantes com tomada de consciência (abstrações refletidas), que promovem a expansão cognitiva do sujeito. E a terceira, é que as tecnologias digitais só promovem construção de conhecimento quando integradas a situações de ensino e aprendizagem devidamente planejadas para esse fim.

Dada a relevância do estudo dos registros de representação semiótica para fazer e compreender matemática, o capítulo seguinte trata da sua aplicação no estudo das superfícies quádricas. Iniciamos pelo estado do conhecimento sobre os processos de ensino e de aprendizagem dessas superfícies, discorrendo sobre as implicações da TRRS nesse processo, apresentando propostas para as correlações entre os registros de representação e, por fim, discutindo acerca dos limites e potencialidades das ferramentas que deram acesso a esses objetos matemáticos.

3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ESTUDO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS MEDIADO POR TECNOLOGIAS DIGITAIS

As superfícies quádricas são algebricamente representadas pela equação geral do segundo grau em três variáveis reais x , y e z , em que $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ são constantes reais, com pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F diferente de zero:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Essa equação pode representar uma quádrica na posição padrão, transladada ou rotacionada. Uma quádrica está na posição padrão quando tem centro (ou vértice) na origem do sistema cartesiano e seus eixos estão sobre os eixos coordenados. Nesse caso, a sua equação não possui termos mistos e dizemos que está na forma canônica.

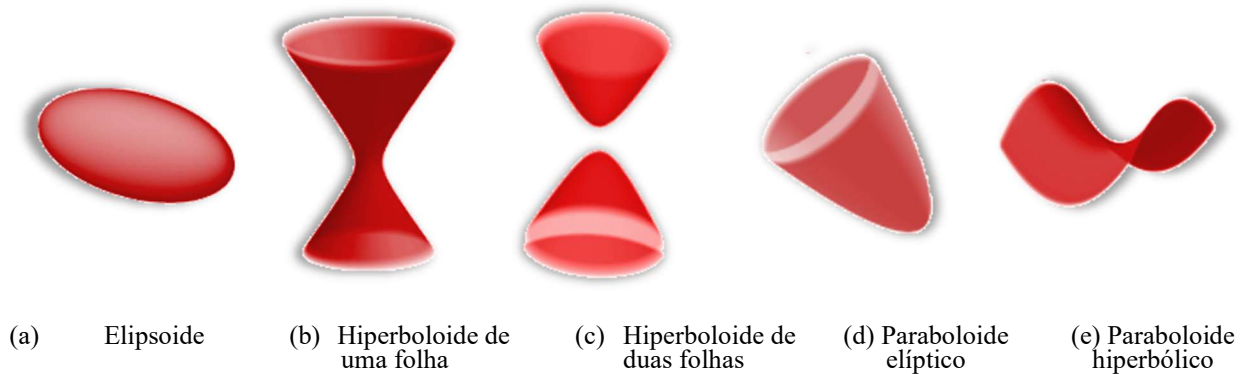
Dizemos que uma quádrica está transladada, quando seu centro (ou vértice) não coincide com a origem do sistema cartesiano, mas seus eixos são paralelos aos eixos coordenados. E, dizemos que uma quádrica está numa posição rotacionada, quando seus eixos não forem paralelos aos eixos coordenados. É sempre possível, por meio dos movimentos de translação ou rotação, escrever a equação de uma quádrica na forma canônica.

Na forma canônica, a equação dessa superfície pode representar uma quádrica degenerada ou não degenerada. Algumas alterações na forma canônica da equação dessas superfícies podem caracterizar um dos casos de quádrica degenerada. Por exemplo, o termo independente nulo na equação de um elipsoide na posição padrão configura um caso de quádrica degenerada, uma vez que essa equação representa um ponto.

A equação geral de uma quádrica pode representar: (1) o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um plano, um par de planos paralelos ou um par de planos concorrentes, denominados quádricas degeneradas; (2) o elipsoide, o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas, o paraboloides elíptico, o paraboloides hiperbólico, o cilindro quádrico e o cone quádrico, denominados quádricas não degeneradas.

Este estudo trata dos seguintes casos: (a) elipsoide, (b) hiperboloide de uma folha, (c) hiperboloide de duas folhas, (d) paraboloides elíptico e (e) paraboloides hiperbólico, cujas representações nos registros figural e em língua natural (denominações mais gerais), podem ser vistos na Figura 22.

Figura 22 – Representações nos registros figural e em língua natural de superfícies quádricas.



Fonte: Elaborado pela autora.

Entendemos que essas representações figurais estáticas e bidimensionais apresentam limitações para revelar as propriedades dos objetos matemáticos a que se referem, quando comparadas às representações figurais dinâmicas e tridimensionais. Restringir-se a essas representações pode gerar uma representação mental equivocada ou imprecisa do objeto matemático. Porém, essa questão é melhor abordada na subseção que trata das representações semióticas bi e tridimensionais, estáticas e dinâmicas.

As representações em língua natural serão ditas gerais se estiverem relacionadas à diferenciação dos tipos de quádrica. As representações em língua natural específicas estarão relacionadas à diferenciação de quádricas do mesmo tipo. Por exemplo, para o hiperboloide de uma folha que se desenvolve ao longo do eixo das abcissas, a representação em língua natural geral é apenas ‘hiperboloide de uma folha’ e a representação em língua natural específica é ‘hiperboloide de uma folha ao longo do eixo dos x ’.

Esse capítulo trata de uma discussão sobre os registros de representação semiótica de superfícies quádricas e das ferramentas que serão utilizadas para promover a apreensão conceitual destas. O capítulo está organizado em quatro seções: o estado do conhecimento sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais, as implicações da TRRS neste processo, as correlações entre os diferentes registros de representação e as representações estáticas e dinâmicas que darão acesso a esses objetos matemáticos.

Sendo assim, a subseção a seguir apresenta o estado do conhecimento sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais.

3.1 Estado do conhecimento sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com o uso de tecnologias digitais

Essa subseção trata da revisão bibliográfica dessa pesquisa, que teve como objetivo obter um panorama geral dos estudos existentes sobre superfície quádrica, envolvendo os processos de ensino e de aprendizagem com tecnologias digitais. Para isso, a subseção foi dividida em quatro partes: o planejamento do levantamento bibliográfico, a análise de estudos secundários¹⁶, a análise de estudos primários¹⁷ e um fechamento com o panorama atual dos estudos sobre os processos de ensino e de aprendizagem de superfícies quádricas e as implicações com essa pesquisa.

3.1.1 Planejamento da revisão bibliográfica

Buscando conhecer o que já foi produzido sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais, iniciamos por uma revisão sistemática, embasada na metodologia utilizada pela própria pesquisadora em uma componente curricular deste curso (Silva *et al.*, 2019). Assim, o planejamento e a execução da revisão foram realizados com o apoio da ferramenta Parsifal¹⁸.

O primeiro passo consistiu em definir os objetivos da revisão, a saber: (1) Buscar nos estudos secundários sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais, as produções que apresentam aproximação com essa investigação; (2) Analisar as pesquisas que têm sido realizadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais, buscando conhecer o estado do conhecimento sobre esse tema.

A questão principal a responder foi: Qual o panorama atual das pesquisas que envolvem estudos sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com o uso de tecnologias digitais?

Elaboramos outras questões mais específicas para nortear a coleta de dados nas produções, com a intenção de buscar responder à questão principal: (1) Quais os objetivos da investigação? (2) Quais os aportes teóricos que fundamentaram a pesquisa? (3) Quais as escolhas metodológicas para atingir os objetivos? (4) Quais aspectos tecnológicos estavam

¹⁶ Os estudos secundários são estudos que consistem na análise de estudos primários, podendo ser mapeamentos, revisões sistemáticas, metassínteses, estados da arte etc. Assim, teses e dissertações apresentam dados das duas naturezas, primários e secundários.

¹⁷ Conforme nota de rodapé acima.

¹⁸ Parsifal é uma ferramenta online desenvolvida para apoiar pesquisadores na realização de revisões sistemáticas da literatura (Disponível em: <https://parsif.al/>. Acesso em: 10 jan. 2020).

envolvidos nas pesquisas? (5) Quais foram os principais resultados? (6) Quais as indicações de pesquisas futuras?

As bases inicialmente escolhidas foram o Portal de periódicos da Capes, *Google Scholar*, *Scopus*, *Springer*, *Web of Science* e *Scielo*. Começamos com as palavras-chave “superfícies quádricas” ou “quádricas”, para ter uma visão mais ampla dos trabalhos que retornariam e, a partir disso, especificar melhor os termos de busca. Depois de alguns experimentos, constatamos a necessidade de permanecer com os termos de busca mais gerais e realizar a triagem dos estudos por meio da análise das produções. Assim, os termos “superfícies quádricas” e “quádricas” foram utilizados em três idiomas: português, inglês e espanhol.

Os critérios de inclusão escolhidos no planejamento foram: (1) idioma: português, inglês ou espanhol; (2) período: 2010 a 2021; (3) estudos revisados por pares; (4) estudos em bases de dados. Os critérios de exclusão foram: (1) estudos aplicados a outras áreas do conhecimento; (2) resumo ou artigo curto; (3) problemas com o acesso ao estudo; (4) estudos duplicados.

A metodologia para a seleção dos estudos levou em consideração três filtros. O primeiro refere-se a uma filtragem automática pelos critérios de inclusão, usando os próprios filtros da base. Nos casos de impossibilidade de filtragem na própria base, foi realizada a análise nos dados dos estudos. O segundo filtro, tratou de uma triagem pelos critérios de exclusão. Em alguns casos, a leitura do título, resumo e palavras-chave na própria base, foi suficiente para eliminar as produções que se tratava de estudos teóricos ou aplicados a outras áreas do conhecimento, que não a Educação Matemática.

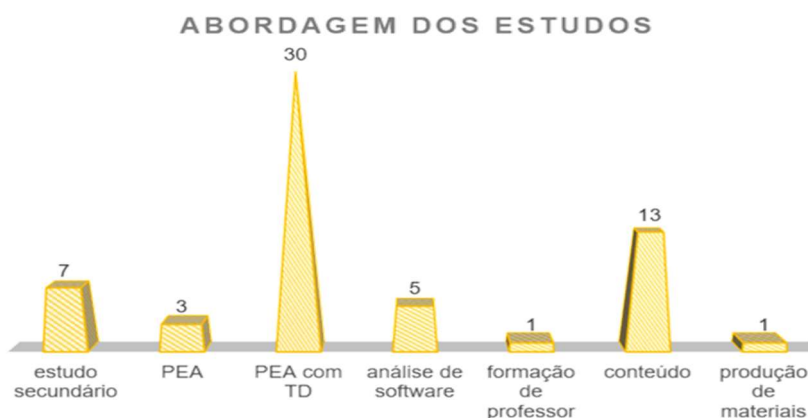
Todos os demais trabalhos foram baixados para verificar os demais critérios de exclusão. Para selecionar estudos com maior relação com essa investigação, utilizamos um terceiro filtro, que consistiu no critério de qualidade, por ser determinante na aproximação com o tema dessa pesquisa. Em uma avaliação inicial dos estudos encontrados, foi possível perceber que a análise da aproximação com essa pesquisa poderia ser feita por meio da verificação da presença dos seguintes temas: Superfície Quádrica, Processos de Ensino e de Aprendizagem, Tecnologias Digitais, Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Teoria da Gênese Instrumental.

Assim, o procedimento escolhido para definição do critério de qualidade foi o de dar um ponto para cada um desses temas, caso fossem abordados na produção. Por exemplo, a presente pesquisa teria cinco como pontuação, uma vez que aborda todos os temas. Portanto, cada produção recebeu uma pontuação de 0 a 5, onde os extremos (0 e 5) são a pior e a melhor aproximação com essa pesquisa, respectivamente.

Todos os estudos foram analisados buscando verificar se abordavam esses temas, recebendo uma nota de 1 a 4. Não houve estudos com pontuação 0, porque estes foram eliminados na triagem. Também não houve estudos com a pontuação máxima, uma vez que nenhum dos estudos aborda os cinco temas. Após análise das produções, verificando que há coerência nesse procedimento, consideramos como critério de qualidade a seleção de estudos com pontuações 3 ou 4.

Foram realizados quatro levantamentos bibliográficos, em diferentes oportunidades, variando quando necessário os procedimentos, de acordo com as características de cada base. Assim, após triagem pelos dois primeiros filtros, retornaram 60 produções com as seguintes abordagens (Figura 23): estudo secundário (7), PEA - Processos de Ensino e de Aprendizagem (3), PEA com TD - Processos de Ensino e de Aprendizagem com Tecnologias Digitais (30), análise de *software* (5), formação de professor (1), conteúdo (13) e produção de materiais (1).

Figura 23 - Abordagem dos estudos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Antes de aplicar o filtro do critério de qualidade às produções, separamos os sete estudos secundários para análise. Dessas produções, apenas uma tinha o processo de ensino das superfícies quádricas como foco principal da revisão de literatura (Vargas; Leivas, 2019). As demais buscavam pesquisas sobre ensino e ou aprendizagem de matemática com tecnologias digitais, Geometria Analítica, realidade aumentada ou TRRS como tema central. Apesar disso, essas produções foram analisadas, considerando a possibilidade de retornarem referências sobre esse tema.

Os dados primários e secundários desses estudos são tratados separadamente nas subseções seguintes. Na próxima subseção, a discussão versa sobre os sete estudos secundários propriamente ditos e as revisões de literatura das teses e dissertações. Nessa oportunidade, são

apresentadas apenas os dados secundários desses estudos. Os dados primários oriundos destas investigações são tratados na subseção seguinte. Assim, dissertações e teses são tratadas nas duas subseções, de dados primários e secundários, uma vez que possuem dados das duas qualidades.

Dessa forma, cada uma das subseções seguintes responde a um dos objetivos da revisão de literatura, que nos permitiram responder à questão principal desse levantamento bibliográfico: “Qual o panorama atual das pesquisas que envolvem estudos sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com o uso de tecnologias digitais?”

3.1.2 Análise das produções com dados secundários

Essa subseção corresponde ao primeiro objetivo dessa revisão de literatura: “Buscar nos estudos secundários sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais, as produções que apresentam aproximação com essa investigação”. Para isso, são apresentadas as produções encontradas nesses estudos que têm maior aproximação com essa investigação. Essa subseção consta apenas na busca por referências sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais. A análise dos dados primários de todas as produções foi realizada na subseção seguinte.

Foram encontrados sete estudos secundários, que tiveram como temas principais: produções da revista *Bolema* (Borba; Almeida; Chiari, 2015; Oliveira, 2019), processo de ensino e/ou aprendizagem de Geometria Analítica (Santos; Bianchini, 2017; Souza Junior; Lopes, 2017); TRRS (Almouloud; Moretti, 2021) e superfície quádrica (Schaun; Alves, 2019; Vargas; Leivas, 2019).

Apenas a produção de Vargas e Leivas (2019) tem processo de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas como foco principal da revisão de literatura. No estudo de Schaun e Alves (2019), embora com intenção de contribuir para a compreensão dos processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas, o levantamento bibliográfico foi centrado na realidade aumentada. Apesar disso, consideramos importante fazer a análise de todos os estudos secundários para verificar a frequência com que aparecem as pesquisas envolvendo esse tema, além da possibilidade de encontrar mais estudos que se aproximem da abordagem dessa investigação.

O Quadro 8 apresenta a relação das produções que consistem apenas em estudos secundários. As revisões de literatura de trabalhos de conclusão de curso, que também consistem em estudos secundários, serão apresentadas em outro quadro nessa subseção.

Quadro 8 - Estudos secundários

CITAÇÃO	TÍTULO	FONTE
Borba, Almeida e Chiari (2015)	Tecnologias Digitais e a relação entre teoria e prática: uma análise da produção em trinta anos de BOLEMA	BOLEMA: Boletim de Educação Matemática
Santos e Bianchini (2017)	Um panorama das pesquisas brasileiras sobre o ensino da geometria analítica	Libro de Actas do VIII Congreso Iberoamericano De Educación Matemática
Souza Junior e Lopes (2017)	Um mapeamento de pesquisas brasileiras sobre o trabalho educativo com tecnologias digitais de informação e comunicação no processo de ensinar e aprender geometria analítica	VIDYA
Vargas e Leivas (2019)	Superfícies Quádricas e o ensino de Geometria Analítica: intersecções na pesquisa	REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática
Oliveira (2019)	Um estudo sobre a aprendizagem matemática no periódico BOLEMA nos anos de 2013 a 2017	Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas
Schaun e Alves (2019)	Um panorama sobre pesquisas em realidade aumentada em matemática	24º Seminário Internacional de Educação, Tecnologia e Sociedade: Ensino Híbrido
Almouloud e Moretti (2021)	Metassíntese de pesquisas apoiadas na teoria dos registros de representação semiótica	Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em 2015, o estudo secundário de Borba, Almeida, Chiari (2015) analisou as pesquisas envolvendo o ensino de Matemática com tecnologias digitais no Brasil, considerando as publicações dos trinta anos de existência da revista Bolema. Nessa produção, apenas o estudo de Mota e Laudares (2013) abordava superfícies quádricas. Em 2019, a dissertação de Oliveira (2019) atualiza esses dados, apresentando um estudo secundário no período de 2013 a 2017. Na relação das produções que compõem o corpus deste estudo, apenas o trabalho de Mota e Laudares (2013) envolve superfície quádrica.

Os dois estudos secundários de 2017, Santos e Bianchini (2017) e Souza Junior e Lopes (2017), analisaram estudos com foco no ensino e aprendizagem de Geometria Analítica. Com um mapeamento no período de 2010 a 2016, os autores dessas produções buscaram dissertações e teses brasileiras que abordassem a utilização de tecnologias digitais. No levantamento realizado no Portal da CAPES e de programas de pós-graduação ligados à Educação e Matemática, apenas a dissertação de Mota e Laudares (2011) envolvia superfície quádrica.

Já o estudo secundário de Santos e Bianchini (2017) teve por objetivo apresentar um panorama das pesquisas brasileiras no período de 1991 a 2014, encontrando quarenta e uma produções acadêmicas sobre o tema, mas nenhum estudo envolvendo superfície quádrica.

O levantamento bibliográfico de Schaun e Alves (2019) investiga a influência da utilização de um aplicativo de realidade aumentada para melhorar a compreensão das superfícies quádricas. Com as palavras-chave “realidade aumentada” e “educação”, no período de 2013 a 2018, foi encontrado apenas o estudo de Pereira et al. (2017) abordando superfície quádrica no ensino de Cálculo.

Do mapeamento de Vargas e Leivas (2019), realizado na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações e no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, retornaram seis dissertações sobre superfície quádrica, com datas que variam de 2010 a 2017. As produções encontradas pelos autores foram: Correia (2010), Mota; Laudares (2011), Gaspar (2014), Silva (2016), Alves (2016) e Londero (2017).

A metassíntese de Almouloud e Moretti (2021) analisa trabalhos de conclusão com a TRRS como referencial teórico principal. Os autores consideram que, na metassíntese qualitativa, são analisados poucos estudos com critério de seleção próprio do pesquisador e interpretações das investigações. Nessa perspectiva, eles selecionam sete teses e uma dissertação. Dessas, apenas a tese de Silva, S. (2018) envolve estudo sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas.

Com isso, foram encontrados nove estudos primários que serão analisados na subseção seguinte, a saber: Correia (2010), Mota e Laudares (2011, 2013), Gaspar (2014), Alves (2016), Silva (2016), Londero (2017), Pereira (2017) e Silva, S. (2018). Antes, considerando que as revisões bibliográficas presentes em teses e dissertações também possuem dados secundários, buscamos por referências sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais em dez trabalhos de conclusão de curso (*Quadro 9*).

Três dessas produções - Alves (2016), Silva, E. (2018) e Novais (2019) - objetivaram a criação de atividades sobre quádricas, mas abordando a teoria sobre essas superfícies. Essas dissertações também propõem atividades com o uso do GeoGebra, mas distanciam-se dessa investigação por não apresentarem reflexões a respeito do processo de construção do conhecimento sobre essas superfícies. Não foram encontrados estudos primários entre as referências deste estudo, que se aproximem com a presente pesquisa.

Outros dois trabalhos de conclusão de curso, a dissertação de Couto (2015) e a tese de Neves (2020), envolvem questões sobre EaD. Couto (2015) investiga as mediações didáticas da tutoria online em um curso de Geometria Analítica, com o uso das tecnologias digitais e a articulação de diferentes representações semióticas. E Neves (2020) traz um estudo sobre recursos semióticos - linguagem, simbolismo matemático, imagens, linguagem corporal, músicas, sons e vídeos digitais - na produção de significados no discurso matemático.

Quadro 9 - Revisões bibliográficas

CITAÇÃO	TÍTULO	FONTE
Mineiro (2011)	Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional	Mestrado em Educação Matemática (UBSP)
Couto (2015)	Mediações Didáticas da Tutoria Online da Geometria Analítica: uma análise à luz da orquestração instrumental e das representações semióticas	Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação (UFPE)
Alves (2016)	Uma abordagem do estudo de cônicas e quádricas com o auxílio do software GeoGebra	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (UNESP)
Londero (2017)	Explorando recurso do GeoGebra Book no estudo de quádricas a partir de diferentes representações	Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física (UFMS)
Silva, E. (2018)	Estudo de cônicas e quádricas: construções com o uso do GeoGebra	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia (UNESP)
Silva, S. (2018)	Ensino e aprendizagem de superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do GeoGebra	Doutorado Em Educação Científica E Tecnológica
Siqueira (2018)	Das cônicas aos cilindros e quádricas: a transição do plano para o espaço tridimensional	Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática (PUC-MG)
Novais (2019)	Identificação de cônicas e quádricas utilizando o software GeoGebra	Mestrado em Matemática em Rede Nacional (UFTM)
Schaun (2019)	As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada	Mestrado em Educação Matemática (UF Pelotas)
Neves (2020)	Intersemioses em vídeos produzidos por licenciandos em Matemática da UAB	Doutorado em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (UNESP)

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com referencial teórico direcionado para questões específicas das suas investigações, essas produções não apresentam estudos com a abordagem dessa pesquisa. O tema “processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais” aparece de forma casual nesses estudos, quando os autores investigam fenômenos relacionados a outras questões.

A dissertação de Mineiro (2011) teve por objetivo verificar se uma abordagem envolvendo tratamentos e conversões entre diferentes registros de representação semiótica, mediada por um modelo de representação tridimensional, pode favorecer a visualização das superfícies quádricas. Na revisão de literatura, o autor não apresenta estudos sobre superfície quádrica, citando outros trabalhos que envolvem representações semióticas.

A pesquisa de mestrado de Siqueira (2018) teve como objeto de estudo a transição das cônicas para os cilindros e quádras, visando potencializar as habilidades de visualização espacial por meio de atividades com lápis e papel e Winplot 3D. Neste estudo, aparecem cinco produções: Mota e Laudares (2011, 2013), Gaspar (2014), Oyafuco (2015) e Alves (2016).

A dissertação de Schaun (2019) buscou compreender como os estudantes compreendem conceitos de superfície quádras a partir do uso da realidade aumentada na visualização de objetos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no Espaço Tridimensional. As referências dessa investigação tiveram foco voltado para realidade aumentada, apresentando um estudo em que aparecia apenas o elipsoide, mas de maneira transversal.

A pesquisa de mestrado de Londero (2017) investigou as potencialidades do GeoGebra Book para o estudo das superfícies quádras, com a finalidade de gerar material didático que aborde diferentes representações dessas superfícies. Após realizar um levantamento bibliográfico para definição do tema da sua pesquisa, no período de 2005 a 2015, a autora escolhe superfície quádras por não ter encontrado trabalhos com esse tema.

A maior parte das citações encontradas na revisão de Londero (2017) tratavam de estudos voltados para outras áreas do conhecimento, com apenas as produções de Mineiro (2011) e Mota e Laudares (2011) tendo maior aproximação com a nossa investigação. Por fim, a tese de Silva, S. (2018) teve por finalidade analisar os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádras sob a ótica da TRRS. Do levantamento bibliográfico, que teve como foco principal a TRRS, apenas os estudos de Mineiro (2011) e Mota e Laudares (2013) trataram das superfícies quádras.

Em sua maioria, com exceção da pesquisa de Oyafuco (2015), as produções encontradas nesses trabalhos de conclusão de curso coincidiram com as da subseção anterior. Os dez estudos primários encontrados, junto aos demais encontrados pela própria pesquisadora, serão analisados na próxima subseção.

No total, foram encontrados seis estudos com dados primários entre as referências desses trabalhos de conclusão de curso, a saber: Mineiro (2011), Mota e Laudares (2011, 2013), Gaspar (2014), Oyafuco (2015) e Alves (2016). Com exceção das pesquisas de Mineiro (2011) e Oyafuco (2015), as outras quatro produções coincidiram com as já encontradas anteriormente.

Dessa forma, entre as referências presentes nos dados secundários dos estudos analisados, foram encontradas onze produções com dados primários: Correia (2010); Mineiro (2011); Mota e Laudares (2011, 2013); Gaspar (2014); Oyafuco (2015); Alves (2016); Silva (2016); Londero (2017); Pereira et al. (2017); Silva, E. (2018). Os dados primários de todas as produções encontradas serão analisados na subseção a seguir.

3.1.3 *Análise das produções com dados primários*

Essa subseção permite responder ao segundo objetivo da presente revisão de literatura: “Analisar as pesquisas que têm sido realizadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com as tecnologias digitais, buscando conhecer o estado do conhecimento sobre esse tema”. Para tal, avaliamos os estudos primários obtidos da análise feita nos estudos com dados secundários das subseções anteriores e de outras buscas realizadas pela pesquisadora.

De um total de 60 estudos, 7 eram estudos secundários que já foram analisados na subseção anterior, restando 53 produções com dados primários para serem analisadas. Nessa oportunidade, as teses e dissertações tiveram apenas as suas revisões bibliográficas analisadas. Os dados primários dessas produções também serão alvo de análise da presente subseção.

Antes, o procedimento referente ao critério de qualidade foi aplicado às 53 pesquisas, obtendo 13 produções com pontuação igual a 1; 14 com pontuação 2; 17 com pontuação 3 e 9 com pontuação 4 (*Figura 24*).

Figura 24 - Pontuação relativa à aproximação com a pesquisa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os estudos selecionados pelo critério de qualidade foram os que obtiveram pontuação três ou quatro, uma vez que nenhum dos estudos aborda os cinco temas (Superfície Quádrica, Processos de Ensino e de Aprendizagem, Tecnologias Digitais, Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Teoria da Gênese Instrumental). A tabela com esses dados encontra-se no **APÊNDICE A** — Pontuação dos estudos, de onde foram extraídas as 26 produções com pontuações maiores. No entanto, nem todos esses estudos selecionados apresentavam elementos que poderiam contribuir com essa investigação. Em alguns casos, somente na leitura dos resultados foi possível fazer essa constatação.

Analisando esses 26 estudos, identificamos as razões pelas quais essas produções não se enquadravam no *corpus* deste estudo, apesar de terem alcançado a pontuação mínima necessária (três pontos). Algumas produções não tinham superfícies quádricas como tema central; outras apresentavam apenas o conteúdo sobre essas superfícies, uma proposta de atividades, as etapas de um processo de papietagem ou a análise de *software*; ou ainda, consistiam em um artigo com resultados parciais da dissertação ou tese. Nesse último caso, consideramos a análise da produção mais completa.

Assim, depois de uma leitura mais aprofundada dos 26 estudos, foram selecionadas 18 pesquisas que mais se aproximam dessa investigação: 12 artigos, 4 dissertações e 2 teses (*Quadro 10*).

Quadro 10 - Estudos primários de maior aproximação com a pesquisa

CITAÇÃO	TÍTULO	FONTE
Mineiro (2011)	Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional	Mestrado em Educação Matemática (UBSP)
Mota e Laudares (2011)	Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais para o desenvolvimento da visualização, com o WINPLOT	XIII CIPEM - Conferência Interamericana De Educação Matemática
Mota e Laudares (2013)	Um estudo de planos, cilindros e quádricas, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software WINPLOT	BOLEMA: Boletim de Educação Matemática
Richit e Silva (2014)	Superfícies quádricas e TIC's: concepção, aplicação e análise de uma proposta didática à luz da teoria da representação semiótica de Duval	Revista #Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia
Londero (2017)	Explorando recurso do GeoGebra Book no estudo de quádricas a partir de diferentes representações	Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física (UFMS)
Londero e Ferreira (2017)	Representações semióticas mobilizadas no conteúdo de superfícies quádricas em algumas publicações desde a década de 40	VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática
Bavaresco <i>et al.</i> (2018)	Modelagem tridimensional de objetos conceituais de matemática	ScientiaTec: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia do IFRS
Silva, S. (2018)	Ensino e aprendizagem de superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do GeoGebra	Doutorado em Educação Científica e Tecnológica
Silva e Moretti (2018a)	A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas	Revista Educação Matemática Pesquisa
Silva e Moretti (2018b)	Registros em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros	Revista Educação Matemática Pesquisa
Siqueira (2018)	Das cônicas aos cilindros e quádricas: a transição do plano para o espaço tridimensional	Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática (PUC-MG)
Alves <i>et al</i> (2019)	Atividades Investigativas com Apoio de Tecnologias Digitais: Contribuições para o estudo de Quádricas	XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática
Lopes (2019)	Integração de mídias na disciplina de geometria analítica em um curso de graduação em matemática	Doutorado em Educação (UFU-MG)

Schaun (2019)	As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada	Mestrado em Educação Matemática (UFPE-RS)
Silva e Costa (2019)	A utilização dos softwares GeoGebra, WINPLOT e K3DSURF no estudo das superfícies quádricas	Boletim Cearense de Educação e História da Matemática
Silva e Moretti (2020)	Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas mediado pelo GeoGebra: articulações entre a abordagem de interpretação global e a teoria das situações didáticas	Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT
Lopes <i>et al.</i> (2021)	Manipulação e visualização de superfícies quádricas por meio de modelos impressos em 3D e modelos digitais	RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação
Salcedo <i>et. al.</i> (2021)	Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas	Tecné, Episteme y Didaxis: TED

Fonte: Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na *Figura 25*, é possível ver que houve um aumento das pesquisas envolvendo os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais no período considerado (2010-2021). Desses estudos, 22,2% (4) foram publicados no período de 2011 a 2016, enquanto 77,8% (14) nos últimos cinco anos (2017 a 2021).

Figura 25 - Características dos estudos primários.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para responder as perguntas que guiaram a fase de coleta de dados, os 18 estudos serão apresentados em duas categorias:

- Produções com pontuação 3: Mineiro (2011), Mota e Laudares (2011, 2013), Londero e Ferreira (2017), Bavaresco *et al.* (2018), Siqueira (2018), Lopes (2019), Schaun (2019), Silva e Costa (2019), Lopes *et al.* (2021) e Salcedo *et al.* (2021);
- Produções com pontuação 4: Richit e Silva (2014), Londero (2017), Silva, S. (2018), Alves *et al.* (2019), Silva e Moretti (2018a, 2018b, 2020).

Entre as onze produções com três de pontuação, temos: 7 artigos (Mota; Laudares, 2011, 2013; Londero; Ferreira, 2017; Bavaresco et al., 2018; Silva; Costa, 2019; Lopes et al., 2021; Salcedo et al., 2021); 3 dissertações (Mineiro, 2011; Siqueira, 2018; Schaun, 2019); e 1 tese (Lopes, 2019). Iniciamos pela análise dos artigos, a seguir dissertações e, por fim, das teses.

O artigo de Londero e Ferreira (2017) visou escrever uma análise realizada em alguns livros de Geometria Analítica, publicados desde a década de 40, tendo como foco o estudo das superfícies quádricas. Os autores basearam-se na TRRS para a realização da pesquisa, realizando a análise de livros didáticos. Os resultados dessa análise serão discutidos na sequência, juntamente com as pesquisas de pontuação 4, uma vez que são resultados parciais da pesquisa de mestrado de Londero (2017).

O artigo de Mota e Laudares (2011, 2013) tratam do estudo de planos, cilindros e quádricas por meio das seções transversais obtidas com Winplot, com intenção de desenvolver a visualização. Os autores visam favorecer o esboço de gráficos das superfícies tendo o Modelo de Van Hiele como aporte teórico. Eles propõem uma sequência de atividades com as mídias lápis e papel e Winplot e observam uma postura mais ativa dos participantes no processo de aprendizagem.

Em 2011, os autores também verificaram que a utilização das seções transversais e curvas de níveis das superfícies contribuem para a visualização das mesmas, minimizando a dificuldade de esboçar gráficos em três dimensões. A articulação entre as representações algébrica e geométrica contribuiu para uma abordagem integrada entre álgebra e geometria e a interação entre as diferentes mídias possibilitou a diversificação da sequência didática.

No estudo publicado em 2013, os autores analisam a forma como os estudantes realizaram as representações gráficas, suas reflexões, dúvidas e resultados. Eles verificaram novamente uma postura mais ativa no processo de aprendizagem. Também observaram uma melhora na visualização espacial, com diminuição da dificuldade de esboçar gráficos em três dimensões. Segundo os autores, a articulação entre as representações algébrica e geométrica trouxe importantes contribuições para o ensino das superfícies quádricas.

O artigo de Bavaresco et al. (2018) teve por objetivo desenvolver a modelagem e confecção de uma peça composta por três cilindros e a definição de uma metodologia para confecção de superfícies quádricas. Utilizando conceitos e conhecimentos matemáticos para dimensionamento e posicionamento, os autores afirmam que é possível contribuir para uma aprendizagem significativa. Com a metodologia de Pesquisa de Desenvolvimento em Projetos Experimentais, usando a impressão 3D, eles propõem um processo de resolução dos problemas para a obtenção de modelos tridimensionais.

Os autores destacam que o conhecimento matemático se constitui como base fundamental para a modelagem tridimensional precisa e de qualidade. Eles também destacam que esse tipo de atividade possibilita a atribuição de significados para o aprofundamento e a consolidação de conceitos e conhecimentos estudados teoricamente. A modelagem tridimensional, segundo os autores, além de possibilitar a confecção de materiais didáticos inovadores, apresenta-se como uma proposta de inovação educacional, sobretudo para o ensino e a aprendizagem das ciências exatas.

O artigo de Silva e Costa (2019) abordou a utilização dos *softwares* GeoGebra, Winplot e K3DSurf no estudo das superfícies quádricas. Os autores tiveram como objetivo contribuir e facilitar a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica e o desenvolvimento da visualização geométrica de objetos tridimensionais, por meio desses *softwares* educacionais.

Os autores relataram dificuldades de aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica, especialmente no que se refere à visualização e construção gráfica de superfícies. Para eles, os *softwares* GeoGebra, Winplot e K3DSurf se caracterizam como um instrumento que contribui de modo significativo para que diminuir essas dificuldades. No entanto, segundo os autores, os benefícios desses instrumentos didáticos dependem da forma que como serão utilizados pelo professor.

O artigo de Lopes et al. (2021) propôs a manipulação e visualização das superfícies quádricas por meio de modelos impressos em 3D e modelos digitais. O estudo teve como objetivo compreender as possibilidades que a atividade experimental, desenvolvida com a utilização desses modelos, trazem ao processo de ensinar e aprender Geometria Analítica.

Os autores elaboraram uma proposta com experimentações em um arquivo do GeoGebra, possibilitando a integração das explorações de modelos digitais com modelos impressos em 3D. Os autores apontam que os modelos manipulados pelos participantes, sob condução do professor, favoreceram o entendimento dos conceitos e a articulação entre as representações algébrica e geométrica dessas superfícies.

O artigo de Salcedo et. al. (2021) investigou a influência de um *software* educativo, o GeoGebra, na aprendizagem das superfícies quádricas. Os autores analisaram o caráter construtivista e colaborativo do ensino e as habilidades de visualização necessárias para a interação com o *software*. Com o estudo de caso, os autores concluíram que o *software* permite relacionar as representações algébricas e gráficas das superfícies quádricas, favorecendo a compreensão.

Os participantes demonstraram avanços na aprendizagem dos conceitos por meio do *software* educativo, o que levou os autores a concluírem que uma metodologia de ensino

enriquecida de um *software* é uma importante ferramenta didática no ensino da Geometria Analítica tridimensional. Os participantes resolvem mais problemas em menos tempo, permitindo aplicar facilmente diversos conceitos. Para os autores, a manipulação dos objetos por meio do *software* permite o desenvolvimento de habilidades na formulação de estratégias, algoritmos e procedimentos para obter uma solução de problemas.

Passando agora para a análise dos trabalhos de conclusão de curso, a dissertação de Mineiro (2011) apresenta atividades para o estudo de superfícies quádricas por meio de um modelo de representação tridimensional. O objetivo dessa pesquisa de mestrado foi verificar se uma abordagem envolvendo tratamentos e conversões entre diferentes registros de representação semiótica, mediada por um modelo de representação tridimensional, pode favorecer a visualização das superfícies quádricas.

O aporte teórico utilizado foi baseado em Duval e Fishbein, tendo a Engenharia Didática como metodologia. O *software* escolhido foi o GeoGebra e o autor considera que aspectos intuitivos se sobrepuseram a aspectos formais e algorítmicos, bloqueando iniciativas para ir além da percepção visual das representações. Para ele, mudanças nos enunciados das questões, na concepção dos modelos tridimensionais e na dinâmica das atividades podem oferecer outras oportunidades de estudo e reflexão.

A dissertação de Siqueira (2018) teve por objetivo a criação de atividades para a compreensão da transição das cônicas para as quádricas, desenvolvendo habilidades de visualização. No aporte teórico desse estudo aborda visualização, informática educativa, sequência didática e práticas educativas. O autor analisa livros didáticos e cria sequência de atividades com o Winplot.

Como resultados, o autor considera que os participantes apresentaram uma melhora da capacidade de visualização, de analisar e fazer conjecturas, demonstrando maior envolvimento na realização das atividades. As estratégias utilizadas pelos mesmos para a transição do espaço bidimensional para o tridimensional foram mais eficazes. Em relação ao *software*, o autor destaca como fator negativo a necessidade de vários comandos para execução de tarefas, considera que é preciso apresentar uma melhor resposta com as superfícies tridimensionais.

Quanto a análise dos livros selecionados, o autor destaca que a abordagem das superfícies é feita com uma breve introdução, destacando a definição a partir das equações de tais superfícies e fazendo a apresentação das mesmas em gráficos 3D. Apenas um dos livros faz indicação de utilização de um *software* e somente um dos livros realiza uma abordagem das superfícies quádricas a partir das suas seções cônicas, mas de caráter meramente ilustrativo. Ele

destaca que a articulação de atividades que envolvem as tecnologias lápis e papel e *software* complementaram-se na resolução das atividades propostas.

A dissertação de Schaun (2019) abordou a realidade aumentada de representações tridimensionais das superfícies quádricas em uma disciplina de Cálculo. O objetivo foi de investigar como os participantes compreendem os conceitos dessas superfícies, usando realidade aumentada para a visualização desses objetos do Espaço Tridimensional. O aporte teórico utilizado foi o Pensamento Matemático Avançado de Deivid Tall e, a metodologia, pesquisa-ação e análise de conteúdo.

Ao analisar os questionários respondidos pelos participantes, a autora observou uma melhora nos conhecimentos sobre superfícies quádricas, indicando a urgência na utilização de aplicativos para trabalhar com representação gráfica, especialmente a tridimensional, em português, com edição de equações e multiplataforma. A autora considera que a utilização do aplicativo MateAR, com a tecnologia de realidade aumentada, auxiliou os estudantes na compreensão de gráficos tridimensionais, gerando mais motivação dos alunos.

Por fim, a tese de Lopes (2019) propõe a integração de mídias na disciplina de Geometria Analítica em um curso de graduação em Matemática, analisando o processo de constituição e implementação de uma proposta pedagógica que inseriu a tecnologia digital para ensinar e aprender Geometria Analítica. Como aporte teórico a autora apresentou os modelos pedagógicos, com o uso do GeoGebra.

Os resultados apontados pela autora foram: a proposta pedagógica favoreceu as interações entre os participantes, o modelo pedagógico possibilitou o acompanhamento dos mesmos pelo professor e o AVA permitiu a integração de diversas mídias, tornando-se uma ferramenta de organização do estudo.

Entre as sete produções com quatro de pontuação, consistindo nas que mais aproximam-se dessa pesquisa, estão: 5 artigos (Richit; Silva, 2014; Alves et al., 2019; Silva; Moretti, 2018a, 2018b, 2020); 1 dissertação (Londero, 2017); e 1 tese (Silva, S., 2018).

O artigo de Alves et al. (2019), que propôs atividades investigativas apoiadas pelas tecnologias digitais, teve por objetivo investigar as contribuições dessa proposta para o estudo das superfícies quádricas. A sequência de atividades com o uso do GeoGebra teve a TRRS como suporte e, conforme o autor, contribuiu para a compreensão das conversões entre representações algébricas e geométricas. O autor também considera que atividades investigativas com apoio de tecnologias digitais permitem que o professor apoie o estudante no seu processo de aprendizagem. Também possibilitam que os alunos explorem e testem suas hipóteses, tornando-se protagonista de seus próprios processos.

O artigo de Richit e Silva (2014), envolvendo a concepção, aplicação e análise de uma proposta didática sobre superfícies quádricas com o uso de tecnologias digitais, teve a TRRS como aporte teórico. O objetivo foi de investigar como os participantes apropriaram-se dos conceitos matemáticos por meio de uma sequência de atividades com o *software* Winplot. Os autores consideram que a inserção da tecnologia produziu bons resultados no ensino das superfícies quádricas.

Entre as contribuições dessa inserção, eles destacam a possibilidade de verificar, testar e validar hipóteses, apenas alterando a representação do objeto na tela do computador. Para os autores, a proposta contribuiu não apenas para uma melhor compreensão do conteúdo proposto, mas também na formação dos futuros professores. Isso porque, para eles, o experimento didático vivenciado pode gerar reflexões sobre a inserção das tecnologias digitais nas práticas de ensino.

A dissertação de Londero (2017) tem como objetivo investigar as potencialidades do GeoGebra Book para o estudo das superfícies quádricas. Na análise de livros didáticos, o autor constatou que 54,9% das atividades mobilizaram apenas o tratamento no registro algébrico e 45,1% envolviam a conversão, articulando diferentes registros de representação. No entanto, mesmo diante dessa variedade de representações, foi constatada a predominância do registro algébrico (74,6% como registro de partida e 69,3% como registro de chegada). O autor destaca que a representação gráfica aparece somente uma vez como registro de partida e a maioria das atividades propõe isso de forma complementar.

Segundo o autor, os livros digitais elaborados com o uso do *software* GeoGebra e apoiados na TRRS, promoveram maior mobilização dos registros. Isso porque possibilitaram explorar mais os aspectos visuais, favorecendo a identificação de características das quádricas. As atividades não foram aplicadas, por isso a aplicação é uma das propostas do autor como pesquisas futuras. Ele também sugere o desenvolvimento de novas atividades que não foram contempladas na sua pesquisa e o estudo das superfícies cônicas.

Os artigos de Silva e Moretti (2018a, 2018b, 2020) apresentam resultados parciais da sua pesquisa de doutorado e, por isso, serão analisados a partir da tese de Silva, S. (2018). Esses foram os estudos que mais aproximaram-se dessa investigação e, cuja análise só não foi mais extensa, porque os achados dessa pesquisa permeiam os capítulos do presente trabalho.

A tese de Silva, S. (2018) teve o objetivo de analisar o ensino e a aprendizagem das superfícies quádricas, com base na TRRS e com o uso do GeoGebra. Através da análise de livros didáticos, ele constatou que os registros recorrem, ainda que nem sempre de forma explícita, a variáveis visuais e a propriedades globais das figuras. O autor destaca a

complexidade do estudo das superfícies quádricas em relação às dimensões epistemológica, cognitiva e didática. Por exemplo, no caso da variável visual “posição padrão”, os valores visuais mudam conforme o tipo de quádrica.

O autor também sugere o uso do GeoGebra no ensino das superfícies quádricas, uma vez que favorece o trabalho apoiado na TRRS. Também propõe o uso das seções planas das superfícies quádricas, articulando valores visuais e unidades simbólicas. Constatando que mesmo usando as intersecções dessas superfícies, a identificação e correlação de tais unidades significantes não são normalmente realizadas, o autor propõe atividades para superar esse problema.

Utilizando a Engenharia Didática como metodologia, o autor realizou análises a priori e a posteriori, validando a sequência de ensino proposta e experimentada. Ele considera que o caminho proposto possibilita compreender semioticamente a relação entre os registros simbólicos e cartesianos das superfícies quádricas. O autor sugere como pesquisas futuras o estudo das superfícies quádricas em posições rotacionadas; as superfícies cilíndricas, cônicas, de rotação e outras mais genéricas; e o estudo de outros sistemas gráficos, como os de coordenadas polares ou esféricas.

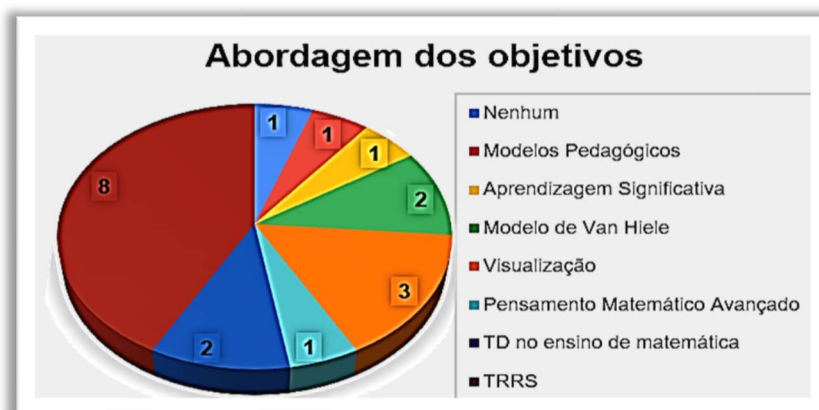
3.1.4 Panorama atual dos estudos sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com o uso de tecnologias digitais

A questão principal dessa revisão de literatura é “Qual o panorama atual das pesquisas que envolvem estudos sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com o uso de tecnologias digitais?” Respondemos a essa questão, por meio de respostas às perguntas específicas que conduziram a coleta de dados.

Em relação aos objetivos da investigação, os estudos analisados tiveram, em primeiro lugar, o objetivo de investigar os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas, em sua maioria por meio de tecnologias digitais. Os objetivos tiveram, como segunda abordagem: a análise de livros didáticos, as atividades criadas, as dificuldades com a aprendizagem e caminhos para superá-las, o esboço de gráficos, os modelos em 3D, o GeoGebra Book, a realidade aumentada, a visualização, a apropriação de conceitos matemáticos e questões relacionadas a teorias como a TRRS, o Pensamento Matemático Avançado de David Tall e o Modelo de Van Hiele.

A TRRS apresentou predominância nos objetivos das pesquisas analisadas, ocorrendo em 42% dos casos, conforme mostra a Figura 26. Os estudos em que os objetivos envolviam a visualização ficaram em segundo lugar, com 16,8% das preferências.

Figura 26 - Abordagem dos objetivos nas pesquisas.



Fonte: Elaborado pela autora.

A presente pesquisa que também pretende contribuir para o progresso do conhecimento sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas, tem objetivo mais específico de “Compreender o desenvolvimento cognitivo no processo de gênese instrumental envolvendo registros dinâmicos de representações semióticas das superfícies quádricas”.

Os aportes teóricos escolhidos para apoiar as pesquisas realizadas foram: tecnologias digitais no ensino de matemática, aprendizagem significativa, visualização, informática educativa, sequência didática, práticas educativas, modelos pedagógicos, Modelo de Van Hiele, Pensamento Matemático Avançado de Deivid Tall, visualização em Duval e Fishbein e a TRRS.

Esta última, apresentando predominância de 40,9% das escolhas, deixa a visualização em segundo lugar com 13,6%, conforme pode ser visto na *Figura 27*. A fundamentação teórica da presente investigação está baseada na TRRS -Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na TGI – Teoria da Gênese Instrumental, com articulação envolvendo um ponto em comum dessas duas teorias, o Fazer e Compreender em Piaget (1978). A TRRS dá suporte aos aspectos dessa pesquisa que envolvem a relação entre a álgebra e a geometria, necessárias para o estudo das superfícies quádricas.

Figura 27 - Fundamentação teórica das pesquisas.



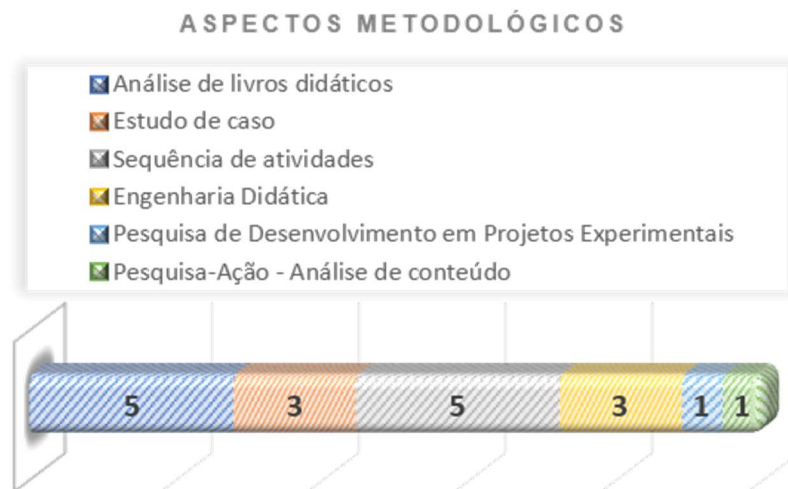
Fonte: Elaborado pela autora.

A TGI nos fornece elementos que permitem compreender a construção do conhecimento por meio das tecnologias digitais. O Fazer e Compreender em Piaget (1978), unificando o aporte teórico desse estudo, oferece informações sobre a metodologia para a construção das atividades.

As escolhas metodológicas para alcance dos objetivos foram: pesquisa de desenvolvimento de projetos experimentais, pesquisa-ação com análise de conteúdo, estudo de caso, engenharia didática, sequência de atividades e análise de livros didáticos.

Esses dois últimos, com maior predominância entre os estudos, consistiram cada um em 27,8% das escolhas. No segundo lugar, o estudo de caso e a engenharia didática ficaram, cada um, com 16,7% da preferência (Figura 28).

Figura 28 - Escolhas metodológicas das pesquisas.



Fonte: Elaborado pela autora.

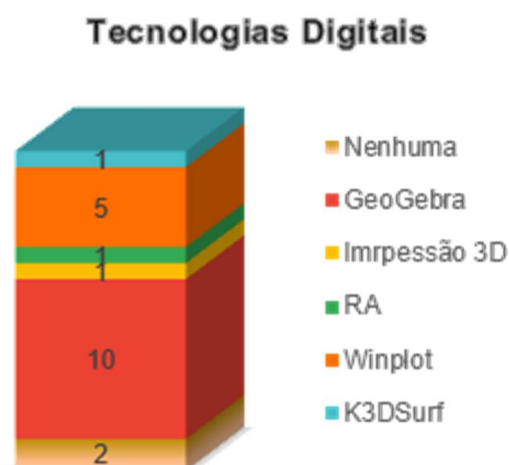
A presente pesquisa é de natureza aplicada, quanto à abordagem do problema qualitativa e quanto aos objetivos exploratório-descritiva, cujos cenários de investigação são compostos por situações de ensino e aprendizagem instrumental.

Com metodologia baseada no Fazer e compreender em Piaget (1978), as situações de ensino e aprendizagem instrumental foram constituídas com base no entendimento de que a aprendizagem de novos conceitos depende dos esquemas prévios possuídos pelo sujeito; da sua pré-disposição para aprender, uma vez que apenas o próprio sujeito pode desenvolver a sua estrutura cognitiva; e das escolhas didáticas do professor, cujo papel principal é o de provocar os conflitos cognitivos necessários para desencadear os processos de abstração.

Quanto aos aspectos tecnológicos, em dois desses estudos não houve utilização de tecnologias digitais. Das outras produções, as escolhas tecnológicas foram: 1 tratou de Realidade Aumentada (RA), 1 de impressão 3D, 1 do *software* K3DSurf, 5 usaram o Winplot e 10 o GeoGebra. Um dos artigos utilizou os três *softwares* - K3DSurf, Winplot e GeoGebra, tendo sido contado nos três tipos de tecnologias digitais.

No gráfico da Figura 29 fica evidente a predominância da escolha pelo GeoGebra em estudos envolvendo superfícies quádricas (50%), deixando o Winplot em segundo lugar (25%).

Figura 29 - Tecnologias digitais utilizadas nas pesquisas.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na presente investigação, as mídias lápis e papel não serão dispensadas, mas complementadas por modelos de impressão 3D e representações dinâmicas, obtidas na janela de visualização 3D, por anáglifo e por realidade aumentada.

Entre os resultados dos estudos anteriormente apresentados, destacamos os que trazem maiores contribuições para a presente pesquisa. Na análise de livros didáticos com foco nas

superfícies quádricas, observou-se o privilégio pelo registro algébrico, pouca indicação do uso de *software* e de uma abordagem das superfícies quádricas a partir das cônicas. Os autores constataram que, ainda que as propostas de ensino utilizassem as seções planas para o ensino das superfícies quádricas, as correlações semióticas eram negligenciadas.

Para dar conta da complexidade epistemológica, cognitiva e didática que envolve o estudo das superfícies quádricas, os autores sugerem o uso: (1) de estratégias de ensino que promovam maior engajamento dos estudantes, mesclando atividades com as mídias “lápiz e papel” e *software*; (2) do procedimento informático de interpretação global, que permite correlacionar registros algébricos e gráficos; (3) das interseções com planos, uma vez que a desconstrução dimensional tem papel importante na visualização de objetos tridimensionais; (4) o uso do GeoGebra, pois o mesmo favorece a correlação entre os registros e permite explorar mais aspectos visuais, favorecendo a identificação das características das quádricas envolvidas.

Os autores ainda destacam que atividades investigativas com apoio de tecnologias digitais permitem que o professor acompanhe o processo de construção do conhecimento, intervindo e apoiando o aprendiz quando necessário. Que a mediação pelo *software* possibilita que os alunos testem e validem ou refutem suas hipóteses, (re)construindo seus conhecimentos, como protagonista do seu processo de aprendizagem.

Que estratégias adequadas de ensino, associadas ao uso do *software*, podem promover uma postura mais ativa e participativa dos estudantes no processo de aprendizagem. E que as contribuições de investigações desse tipo podem ir além das esperadas na perspectiva do ensino, podendo favorecer a formação do professor de matemática, uma vez que as reflexões sobre a prática docente com o uso das tecnologias digitais servem para todos os níveis de ensino.

Como oportunidades de pesquisa, os estudos indicaram a aplicação das atividades criadas e compartilhadas por meio de um livro virtual no GeoGebra; o estudo das superfícies quádricas em posições rotacionadas e de outras superfícies, como as cilíndricas, as cônicas, de rotação etc.; e o estudo de outros sistemas gráficos, como os de coordenadas polares ou esféricas.

Nessa investigação, são propostas atividades que visam envolver o participante no processo de construção do conhecimento sobre superfícies quádricas, por meio de atividades que promovam um desenvolvimento contínuo. As atividades, envolvendo uma espécie de taxonomia das ações, apresentam exigências progressivas partindo da exploração, passando pela construção e chegando à criação. Esta última, considerada o estágio mais avançado do conhecimento.

Por fim, sintetizando o panorama atual das pesquisas, entendemos que já existem movimentos com a intenção de contribuir para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com tecnologias digitais. No entanto, consideramos que a inserção da tecnologia nesse processo produz mudanças significativas que necessitam de investigação.

Entendemos que, para a realização de uma tarefa que envolve o uso do GeoGebra, o sujeito precisa mobilizar esquemas relacionados ao uso da ferramenta e ao objeto de estudo. Quanto mais o sujeito apropria-se das ferramentas, mais torna-se hábil em conhecer o objeto de estudo. Por outro lado, quanto mais desenvolve esquemas conceituais, mais se torna capacitado para utilizar as ferramentas.

Essa investigação visa analisar a evolução dos esquemas de utilização por meio de situações de ensino e aprendizagem instrumental que envolvem as representações semióticas das superfícies quádricas. Na subseção a seguir, discorreremos sobre as implicações da teoria dos Registros de Representação Semiótica para o ensino e aprendizagem de superfícies quádricas.

3.2 Implicações da TRRS na construção do conhecimento sobre superfícies quádricas

Em matemática, mais do que em outra disciplina, a variedade de sistemas de representação semiótica é fundamental não só para a aprendizagem, mas também para a criação de novos conceitos. Segundo Boyer (1974, p. 70), “Foram as deficiências das notações algébricas que mais fortemente operaram para impedir que os gregos construíssem uma verdadeira geometria de coordenadas”.

Os estudos iniciais da Geometria Analítica surgiram muito tempo depois, com as teorias de René Descartes. As dificuldades com o ensino e a aprendizagem desse componente curricular referem-se justamente à existência e necessidade de coordenação das representações simbólicas e gráficas (Dallemore; Groenwald; Ruiz, 2014). Essas dificuldades percebidas desde o Ensino Médio, agravam-se no Ensino Superior, em especial na aprendizagem das superfícies quádricas. Conforme Silva e Moretti (2018a, 2018b), o estudo dessas superfícies costuma exigir um custo cognitivo maior dos alunos.

O teste de reconhecimento de Duval (2003) sugere que os problemas de compreensão em matemática estão relacionados ao caráter semiótico da atividade matemática. Aplicado a estudantes franceses após um ensino de funções, os resultados lhe permitiram afirmar que a semiose é condição para a conceitualização. O reconhecimento do conteúdo de uma

representação e do que é preservado na passagem de um registro para o outro são fundamentais para a compreensão em matemática.

A Geometria Analítica é a parte da matemática em que o cerne está na correlação entre os registros simbólicos e gráficos, não havendo forma de ensiná-la privilegiando um ou outro registro. Essa foi a causa da escolha da TRRS nessa investigação, uma vez que essa teoria tem como foco principal o tratamento das questões especificamente relacionadas à coordenação entre registros.

Para Duval (2011a), a compreensão integral vem por meio da coordenação entre os diferentes registros, ou seja, o domínio da passagem de um registro para o outro. Para isso, torna-se necessária a coordenação de ao menos dois registros de representação e, o domínio desse trânsito entre registros, é medido pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

Dessa forma, o reconhecimento de um objeto matemático nas diferentes representações, a diversidade de tipos de representações semióticas, o modo de funcionamento de cada uma delas, as transformações sobre ou entre os diferentes registros de representação e, sobretudo, a coordenação delas são questões que precisam ser consideradas na atividade matemática.

Dessa forma, torna-se necessário priorizar a coordenação de registros, uma vez que a diversidade de registros e a capacidade de passagem natural de um para outro são essenciais na aprendizagem matemática. É na coordenação entre registros, que exige regras de correspondência semiótica, onde se encontram os principais obstáculos à compreensão em matemática Duval, 2003, 2009, 2010, 2011a, 2012b).

Segundo Duval (2011a), a correlação entre representações gráficas e simbólicas, geralmente realizada por meio das abordagens ponto a ponto ou de extensão do traçado, não apresenta as condições necessárias para superar essas dificuldades. Isso porque a questão da congruência semântica, que revela o grau de transparência entre representações de um mesmo objeto matemático, exige uma abordagem específica, que o autor chamou de Abordagem de Interpretação Global das Propriedades Figurais.

Essa abordagem, que consiste na discriminação e correspondência entre as unidades significantes em cada registro, permite que se identifique o que é visualmente diferente de modo significativo. A partir da identificação dessas variáveis cognitivas, novos registros são propostos com base nas variáveis visuais e são feitas as articulações entre os diferentes registros.

Expondo as propriedades globais da figura, essas variáveis cognitivas permitem estabelecer a correlação entre os registros e o consequente trânsito entre estes (conversão), até

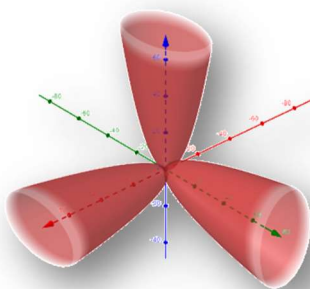
a naturalização dessas conversões (coordenação). De acordo com Silva e Moretti (2018b), por trás da coordenação de registros há um processo semiótico que inclui identificações, delimitações e regras de correspondência, o que explica a constatação de Duval (2009):

A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e estudantes. (p. 18)

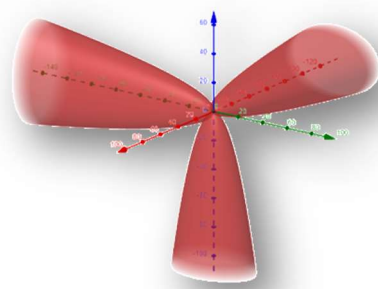
Em geral, os alunos não reconhecem o objeto matemático nas suas representações em diferentes sistemas semióticos (Duval, 2009), o que mostra a necessidade da abordagem proposta por Duval. Silva, S. (2018)¹⁹ dedicou-se ao estudo das representações semióticas e possíveis articulações entre os registros figurais, simbólicos, gráficos e em língua natural das superfícies quádricas, propondo novos registros que levassem em conta as propriedades figurais dessas superfícies.

O método consiste na identificação de variáveis visuais que permitem a diferenciação, no caso deste estudo, entre os tipos de quádricas (elipsoide, hiperboloide de uma folha etc.); entre quádricas do mesmo tipo (por exemplo, hiperboloide de uma folha em x , y ou z) e correspondência entre os diferentes registros. Por exemplo, a variável visual ‘posição no plano cartesiano’ do parabolóide elíptico pode assumir seis valores visuais. Esses valores referem-se ao desenvolvimento da quádrica ao longo dos semieixos positivos (a) ou negativos (b) dos eixos dos x , y ou z (Figura 30).

Figura 30 - Posições do parabolóide elíptico padrão no plano cartesiano.



(a) semieixos positivos



(b) semieixos negativos

Fonte: Elaborado pela autora.

¹⁹ Silva, S. (2018) foi orientando no doutorado do professor Mércles Tadeu Moretti, líder do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM) – UFSC, autor de várias das traduções dos textos de Duval utilizadas nesta pesquisa e de estudos sobre a TRRS na matemática do Ensino Superior.

A partir desses valores visuais, registros em língua natural são escolhidos de forma adequada. Por exemplo, o registro ‘parabolóide elíptico em ox_+ ’ refere-se à superfície que se desenvolve ao longo do semieixo ox_+ . As diferenças visuais relacionadas a essa variável também produzem alterações na escrita algébrica da sua equação. Essas oposições qualitativas favorecem a identificação e correspondência entre os registros gráficos e simbólicos.

Por exemplo, na Figura 30a, os parabolóides que se desenvolvem ao longo dos semieixos positivos dos eixos dos x (eixo vermelho), dos y (eixo verde) e dos z (eixo azul) têm registros simbólicos $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = x$, $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = y$ e $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$, respectivamente. Como a soma dos dois termos quadráticos (lado esquerdo da equação) não pode ser negativa, essas superfícies só existem para valores de x , y ou z (lado direito da equação) não negativos (semieixos positivos).

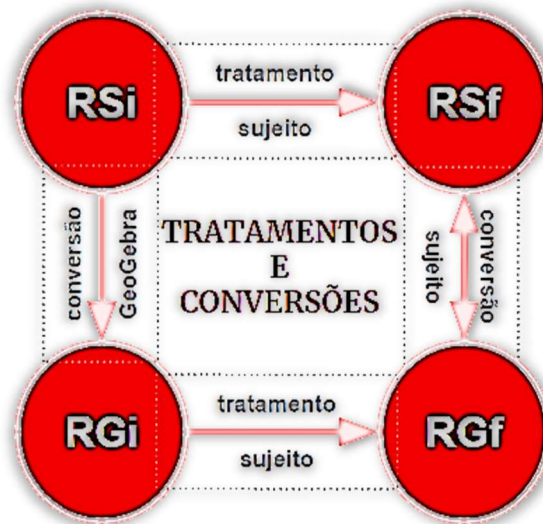
Já os parabolóides elípticos da Figura 30b que se desenvolvem ao longo dos semieixos negativos dos eixos dos x (eixo vermelho), dos y (eixo verde) e dos z (eixo azul) têm registros simbólicos $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = -x$, $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -y$ e $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -z$, respectivamente. Como a soma dos dois termos quadráticos (lado esquerdo da equação) não pode ser negativa, essas superfícies só existem para valores de x , y ou z (lado direito da equação) não positivos (semieixos negativos).

Outra variável visual cujas oposições qualitativas favorecem a identificação e correspondência entre os diferentes registros é a ‘seção plana da quádrlica’. Neste estudo, as seções planas são obtidas pela intersecção da superfície por um plano coordenado ou paralelo a este. Os valores visuais obtidos desses cortes são as cônicas (elipse, hipérbole ou parábola) ou as cônicas degeneradas (conjunto vazio, um ponto, uma reta, um par de retas paralelas ou um par de retas concorrentes).

Essas seções planas consistem em uma importante variável visual, uma vez que por meio dos cortes dessas superfícies por planos coordenados ou paralelos a estes, é possível analisar a forma da superfície e como ela se comporta ao longo dos eixos coordenados. A correlação entre os registros simbólicos e gráficos, indispensável à compreensão integral, pode ser obtida a partir do Procedimento Informático de Interpretação Global (Moretti; Luiz, 2010).

O esquema da Figura 31 apresenta as transformações que precisam ser executadas para estabelecer a correspondência entre os registros simbólicos e gráficos usando recurso informático e quem as executa. A conversão em mão dupla decorre da correlação entre esses registros por meio da variável visual ‘seção plana’.

Figura 31 - Esquema da correlação entre representações gráficas e simbólicas.



Fonte: Elaborado pela autora.

Esse esquema apresenta quatro transformações, uma realizada pelo GeoGebra e três pelo sujeito. O sujeito pode iniciar executando os tratamentos algébricos sobre a Representação Simbólica inicial (RSi), obtendo as Representações Simbólicas finais (RSf). Na sequência, a conversão entre a Representação Simbólica inicial (RSi) e a Representação Gráfica inicial (RGi) é efetuada pelo *software*, quando o participante insere a equação da quádrlica (RSi) na janela de álgebra.

Depois, o sujeito executa os tratamentos gráficos sobre a Representação Gráfica inicial (RGi), obtendo as Representações Gráficas finais (RGf). Por fim, o sujeito executa a conversão entre as RSf e as RGf. A conversão em mão dupla $RSf \leftrightarrow RGf$ decorre da correlação entre as equações das seções planas (RSf) e seus respectivos gráficos (RGf). Os parágrafos seguintes esclarecem o que ocorre em cada uma dessas etapas.

Inicialmente, o participante efetua tratamentos sobre a RSi, que consiste em encontrar a solução de um sistema que contém a equação da quádrlica e do plano de intersecção ($x = k$, $y = k$ ou $z = k$, para $k \in IR$). Esses tratamentos permitem obter a RSf, equações das seções planas da quádrlica, resultantes das suas intersecções por planos coordenados e paralelos a esses (RSi \rightarrow RSf).

A seguir, a equação da superfície quádrlica é inserida na janela de álgebra e o GeoGebra faz a conversão da forma simbólica para a gráfica (RSi \rightarrow RGi). Então, o sujeito realiza os tratamentos sobre a representação gráfica da superfície quádrlica, que consistem em inserir as equações desses planos ($x = k$, $y = k$ e $z = k$ para $k \in IR$) na janela de álgebra. Selecionando

o botão de intersecção entre superfícies no GeoGebra, ele obtém o gráfico da referida seção plana (RGf).

E, por fim, a conversão em duplo sentido entre as representações simbólicas e gráficas ($RSf \leftrightarrow RGf$), ocorre por meio da correlação entre essas representações, na medida em que se faz variar o valor da constante k no conjunto dos números reais em ambos os registros. Usamos a seta simples (\rightarrow) na primeira conversão e dupla (\leftrightarrow) na segunda porque entendemos que, no segundo caso, o movimento é em mão dupla.

Vamos aplicar o esquema no exemplo do hiperboloide de duas folhas de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{8} = 1$. Realizando os tratamentos algébricos sobre essa equação, as seções obtidas de cortes por planos coordenados e paralelos a estes, podem ser: (a) hipérbolas para $z = k$, $k \in IR$; (b) hipérbolas para $y = k$, $k \in IR$ e (c) para $x = k$, elipses quando $k < -2$ ou $k > 2$; dois pontos, um para $k = -2$ e outro para $k = 2$; ou não há intersecção quando $-2 < k < 2$, com $k \in IR$.

Esses tratamentos sobre as representações simbólicas ($RSi \rightarrow RSf$) do hiperboloide de duas folhas são realizados substituindo:

(a) z por k na equação desse hiperboloide de duas folhas, de onde obtemos as equações das hipérbolas $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1 + \frac{k^2}{8}$ nos planos $z = k$ ($k \in IR$). Essas hipérbolas possuem eixo real sobre o eixo dos x no plano xoy ($k = 0$) ou sobre eixo paralelo a eixo dos x ($k \neq 0$) contido em plano paralelo a xoy (Figura 32a).

(b) y por k , obtendo as equações das hipérbolas $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = 1 + \frac{k^2}{2}$ nos planos $y = k$ ($k \in IR$). Essas hipérbolas possuem eixo real sobre o eixo dos x no plano xoz ($k = 0$) ou sobre eixo paralelo a eixo dos x ($k \neq 0$) contido em plano paralelo a xoz (Figura 32b).

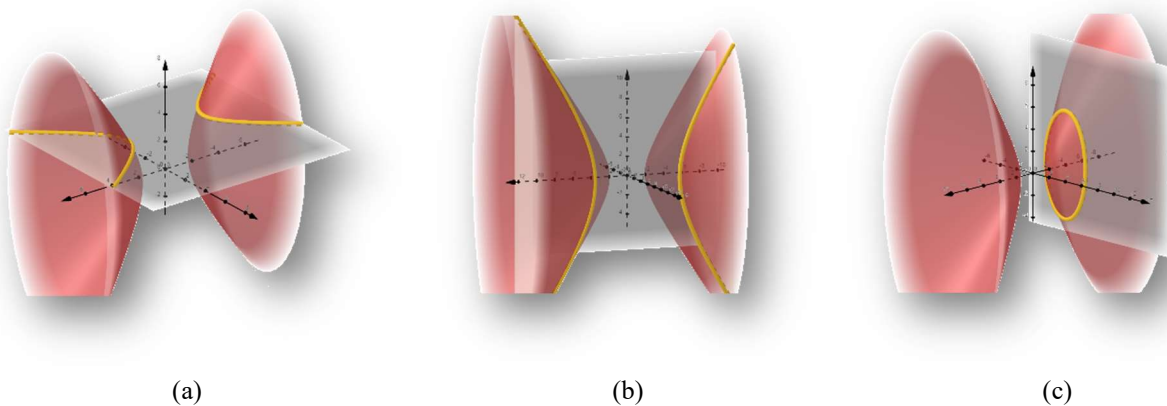
(c) x por k , resultando nas equações $\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{8} = \frac{k^2}{4} - 1$, que representam lugares geométricos distintos para os diferentes valores de k , sendo necessário estudar o sinal da expressão algébrica $\frac{k^2}{4} - 1$ (Figura 32c).

Fazendo isso, é possível constatar que as seções obtidas por cortes da superfície pelos planos $x = k$ podem ser elipses, um ponto ou vazio. Temos elipses quando o termo independente dessas equações for positivo $\frac{k^2}{4} - 1 > 0$, o que ocorre para $k < -2$ ou $k > 2$ ($k \in IR$). Temos um ponto quando o termo independente for nulo $\frac{k^2}{4} - 1 = 0$, o ponto $(-2, 0, 0)$

para $k = -2$ ou o ponto $(2,0,0)$ para $k = 2$. E a interseção com planos $x = k$ é vazia quando o termo independente for negativo $\frac{k^2}{4} - 1 < 0$, o que ocorre para $-2 < k < 2$ ($k \in \mathbb{R}$).

Fazendo o valor de k variar na forma final da equação da seção plana (RSf) e, comparando com a respectiva forma gráfica (RGf), é possível estabelecer a correspondência entre esses registros (Figura 32).

Figura 32 - Seções planas do hiperboloide de duas folhas.



Fonte: Elaborado pela autora.

Esse procedimento, permite explorar a forma da superfície (diferenciação entre os tipos de quádrlica) e o eixo ao longo do qual ela se estende (diferenciação entre quádrlicas do mesmo tipo). Essa quádrlica, que se desenvolve ao longo do eixo dos x , tem registro simbólico com o coeficiente de x^2 positivo, enquanto os demais são negativos. Os sinais dos coeficientes das variáveis na representação simbólica, assim como o grau dessas variáveis, consistem nos valores visuais que possibilitam a correlação entre representações gráficas e simbólicas dessa superfície.

Além disso, é possível estabelecer representações em língua natural específicas, nesse exemplo, temos um ‘hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo dos x ’. Dessa forma, todos os registros (figural, gráfico, simbólico e em língua natural) ficam correlacionados. A interpretação geométrica dos tratamentos simultâneos sobre as representações simbólicas e gráficas permite a correlação entre seus respectivos registros.

Nesse caso, a manipulação geométrica das representações dinâmicas e algébrica das representações simbólicas tornam-se indispensáveis. Esses tratamentos são responsáveis pela significação e: “Ao desprezá-los, ao invés de fazermos conversões nos limitamos a realizar trânsitos entre registros apenas em forma de codificações.” (Silva; Moretti, 2018a, p. 294).

Além disso, essas seções planas consistem em desconstruções dimensionais, permitindo visualizar dimensões menores. No caso de superfícies, consiste em uma forma de apreensão da figura espacial por meio da identificação de partes planas que a compõem, o que se torna relevante considerando que “A dificuldade de olhar dimensões inferiores em problemas de geometria é causa de insucesso” (Moretti; Brandt, 2015, p. 602).

Segundo Duval, contemplar esse aspecto no ensino tem importante contribuição para a visualização, pois “A desconstrução dimensional se faz contra a percepção, isto é, contra o reconhecimento imediato de unidades figurais 2D ou 3D que se impõem à primeira vista e que bloqueiam o reconhecimento de outras unidades figurais” (Duval, 2011a, p.93). Segundo o autor, o modo matemático de ver a figura de um cubo (3D) é decompondo-o em quadrados (2D), que podem ser decompostos em segmentos (1D), que ainda podem ser decompostos em pontos (0D).

A passagem de uma dimensão a outra representa um salto cognitivo considerável, para o qual “Ver ‘geometricamente’ uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel” (Duval, 2011b, p.87). No caso das superfícies quádricas, objetos matemáticos tridimensionais, as suas seções planas consistem das partes bidimensionais que a compõem. Essa desconstrução dimensional (3D \rightarrow 2D), além de eliminar possíveis enganos de uma apreensão figural, possibilita a significação decorrente da interpretação geométrica dos tratamentos algébricos para a identificação das seções planas.

Segundo Silva, S. (2018), sem isso a passagem de um registro a outro se daria apenas em forma de codificações, ao invés de conversões. Também, conforme visto anteriormente, as seções planas das superfícies quádricas revelam importantes valores visuais que contribuem para as oposições qualitativas necessárias à diferenciação das representações simbólicas e gráficas dessas superfícies. A seguir, passamos a analisar as representações simbólicas das superfícies quádricas, estabelecendo as correlações entre os seus diferentes registros de representação semiótica.

3.3 Correlações entre representações de superfícies quádricas

Para a discussão sobre representações semióticas das quádricas, vamos considerar a posição padrão das representações gráficas dessas superfícies, conforme mencionado. Nessa posição, a quádrica tem centro ou vértice na origem do sistema cartesiano ortogonal e eixo

central sobre um dos eixos coordenados. E, no registro simbólico, vamos considerar a forma canônica²⁰ da equação das superfícies quádricas.

As unidades significantes simbólicas e gráficas podem se referir à diferenciação entre tipos de quádrica, possibilitando a correlação entre esses registros e com os registros em língua natural geral (elipsoide, hiperboloide de uma folha etc.). Existem ainda unidades significantes simbólicas e gráficas que podem se referir à diferenciação entre quádricas de mesmo tipo, possibilitando a correlação entre esses registros e com os registros em língua natural específicos (por exemplo, hiperboloide de uma folha em x).

A variável visual para os hiperboloides de uma ou duas folhas e os paraboloides elípticos ou hiperbólicos ‘posição no sistema cartesiano’, por exemplo, refere-se às diferentes posições que essas superfícies podem estar no sistema cartesiano. Na subseção a seguir, veremos que são três valores visuais para o caso dos hiperboloides de uma folha, três para o hiperboloide de duas folhas, seis para os paraboloides elípticos e seis para os paraboloides hiperbólicos. Iniciamos a discussão pelo elipsoide, que apresenta mais de uma variável visual, totalizando treze valores visuais.

3.3.1 *Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos elipsoides*

O elipsoide padrão tem representação simbólica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e não nulos. As unidades significantes simbólicas gerais são analisadas pela composição dos membros da equação, que é constituída pela soma de três termos quadráticos de coeficientes positivos de um lado e pela constante unitária positiva do outro. As intersecções dessa superfície com os planos coordenados são três elipses, com eixos dois a dois comuns, que são os três eixos do elipsoide.

O ‘comprimento dos eixos’ de um elipsoide é uma variável visual que pode assumir três valores: três eixos com medidas diferentes, dois eixos com medidas iguais e uma diferente e três eixos com medidas iguais. As representações em língua natural específicas para esses três casos serão definidas, respectivamente, como: elipsoide em α e β (ou β e α), em β e γ (ou γ e

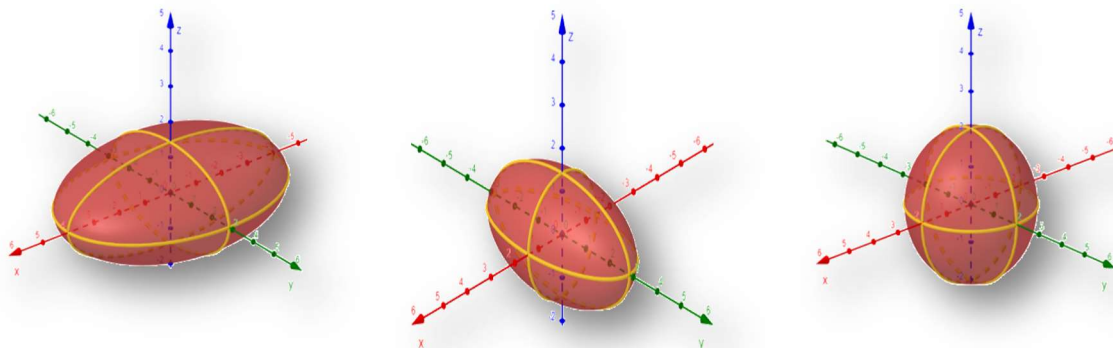
²⁰ Nas equações dos elipsoides e hiperboloides, os coeficientes dos termos quadráticos no lado esquerdo da equação têm numeradores iguais a 1 e o termo no lado direito é igual a 1. No caso dos paraboloides, o termo linear com coeficiente +1 ou -1 está no lado direito da equação dessas superfícies e os coeficientes dos termos quadráticos no lado esquerdo da equação têm numeradores iguais a 1.

β) e em α e γ (ou γ e α); esferoide alongado (ou achatado) em α (β ou γ) e esfera de raio r , onde α , β e γ correspondem aos eixos coordenados (Silva, S. 2018)²¹.

No caso dos elipsoides em α e β , a variável visual ‘posição dos eixos em relação aos eixos coordenados’ tem seis valores visuais. Se o eixo maior estiver sobre o eixo dos x , há duas possibilidades para a posição dos demais eixos: médio sobre o eixo dos y e menor sobre o eixo dos z (elipsoide em x e y), ou vice-versa (elipsoide em x e z). De forma análoga, há mais quatro possibilidades, duas para o caso do eixo maior sobre o eixo dos y (elipsoide em y e x e elipsoide em y e z) e duas sobre o eixo dos z (elipsoide em z e x e elipsoide em z e y).

Por exemplo, a *Figura 33a* apresenta um desses seis casos, o do elipsoide com eixo maior sobre o eixo dos x , eixo médio sobre o eixo dos y e eixo menor sobre o eixo dos z , cuja representação em língua natural específica é elipsoide em x e y . As unidades significantes simbólicas específicas são analisadas a partir dos coeficientes dos termos quadráticos das equações. Considerando que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é a representação simbólica deste elipsoide, então temos que $c < b < a$.

Figura 33 – Elipsoide em α e β , esferoide e esfera.



(a) elipsoide em x e y

(b) esferoide alongado em y

(c) esfera

Fonte: Elaborado pela autora.

No caso dos esferoides, a variável visual ‘comprimento do eixo de medida diferente’ tem dois valores visuais: o esferoide alongado em α , se a medida diferente for maior que as outras duas; e esferoide achatado em α , se a medida diferente for menor que as outras duas. Alongado (ou achatado) em α significa dizer que o eixo maior (ou menor) está contido no eixo α , onde α é um dos eixos coordenados (eixos dos x , dos y ou dos z). O eixo alongado (ou achatado) pode estar sobre o eixo dos x , dos y ou dos z , totalizando seis casos.

²¹ Apesar de denominadas como ‘esfera’ ou ‘esferoide’, essas superfícies são casos particulares de elipsoides.

No exemplo da *Figura 33b*, o eixo do esferoide com medida diferente está sobre o eixo dos y e a medida deste eixo é maior do que a medida dos demais. Assim, a representação em língua natural específica é esferoide alongado em y . As unidades significantes simbólicas específicas referem-se à existência de dois termos quadráticos com coeficientes iguais nas equações, e ao valor do coeficiente do terceiro termo, que pode ser maior ou menor do que os demais. Nesse exemplo, na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ temos que $b > a$ e $a = c$.

Por fim, no caso em que os três eixos do elipsoide têm medidas iguais, temos uma esfera de raio r (*Figura 33c*). Dessa forma, é possível ver que as variáveis visuais escolhidas geram um total de treze valores: seis para os elipsoides em α e β , seis para os esferoides e um para a esfera.

3.3.2 *Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos hiperboloides de uma folha*

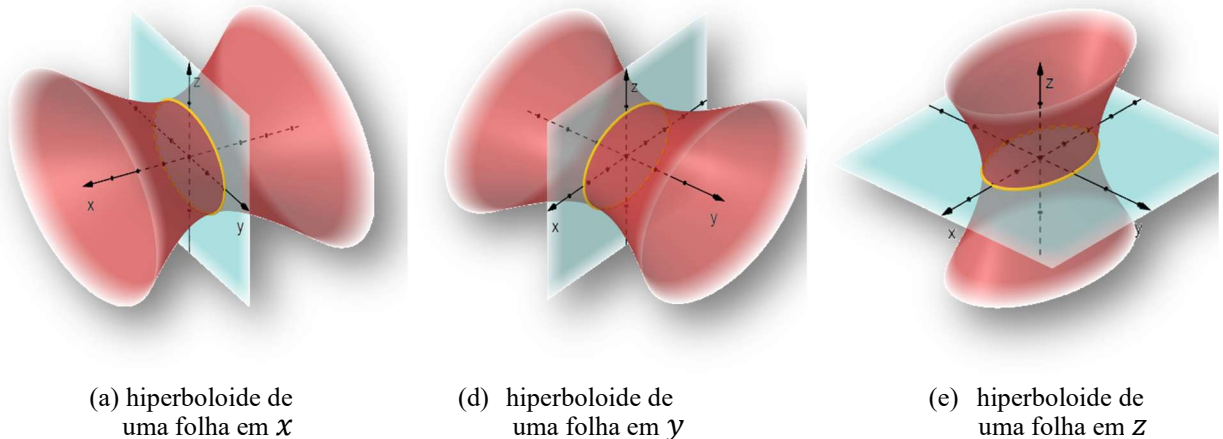
Um hiperboloide de uma folha tem representação simbólica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ou $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e não nulos. As unidades significantes simbólicas gerais são analisadas pela composição dos membros da sua equação, que tem três termos quadráticos de um lado, com um deles de coeficiente negativo, e a constante unitária positiva do outro.

As cônicas não degeneradas resultantes das interseções de um hiperboloide de uma folha na posição padrão com planos coordenados ou paralelos a esses podem ser elipses ou hipérbolas. Na obtenção dessas seções planas, uma das variáveis na equação dessa quádrlica se anula e, quando as demais tiverem sinais iguais teremos elipses, em caso contrário hipérbolas.

A diferenciação das posições dessas quádrlicas no sistema cartesiano se dá em relação ao eixo central, que se situa sobre o eixo coordenado perpendicular aos planos cujas seções planas são elípticas. Assim, a representação em língua natural específica dessa quádrlica é hiperboloide de uma folha em α , sendo α o eixo central da superfície.

Com base nisso, a variável visual ‘posição no sistema cartesiano’ tem três valores visuais, referentes aos três eixos coordenados ao longo dos quais essas superfícies podem se desenvolver: (a) hiperboloide de uma folha em x , quando a superfície se desenvolve ao longo do eixo dos x (*Figura 34a*), (b) hiperboloide de uma folha em y , quando a superfície se desenvolve ao longo do eixo dos y (*Figura 34b*) ou (c) hiperboloide de uma folha em z , quando a superfície se desenvolve ao longo do eixo dos z (*Figura 34c*).

Figura 34 - Valores visuais da variável “posição no sistema cartesiano” do hiperboloide de uma folha.



Fonte: Elaborado pela autora.

A diferenciação entre as unidades significantes simbólicas específicas decorre da posição do sinal negativo na representação simbólica do hiperboloide de uma folha, considerando que a constante no lado direito da equação é positiva. As seções planas são elípticas quando o termo negativo é nulo (ou constante), o que ocorre na intersecção pelo plano coordenado relativo à variável deste termo (ou por planos paralelos a este), determinando o eixo ao longo do qual a quádrlica se desenvolve.

Por exemplo, o hiperboloide de uma folha que se desenvolve ao longo do eixo dos z tem representação simbólica igual a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (com $a, b, c \in \mathbb{R}$). Ou seja, o sinal negativo é do coeficiente de z^2 e a representação em língua natural específica nesse caso é hiperboloide de uma folha em z (Figura 34c).

3.3.3 Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos hiperboloides de duas folhas

Um hiperboloide de duas folhas tem representação simbólica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ou $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e não nulos. As unidades significantes simbólicas gerais são analisadas pela composição dos membros da equação, que tem três termos quadráticos de um lado, com somente um deles de coeficiente positivo, e a constante unitária positiva do outro.

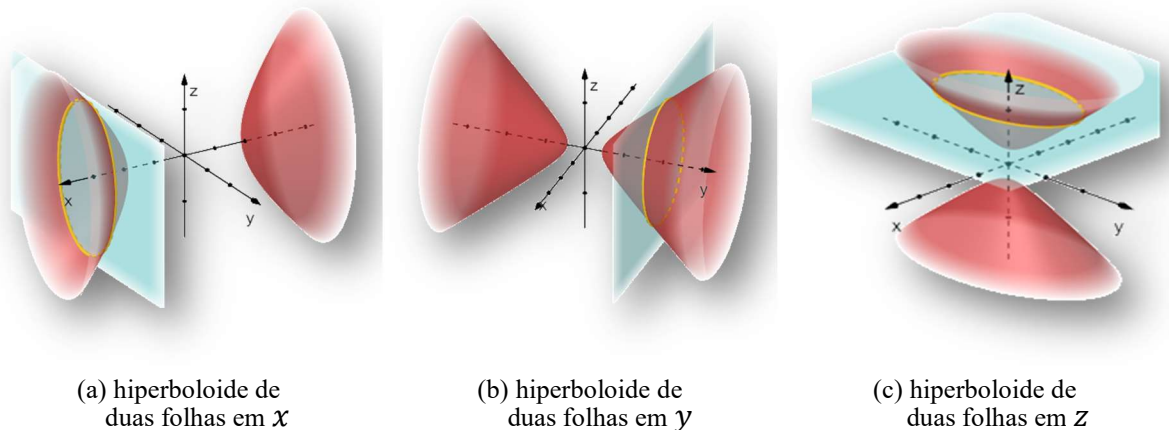
Da mesma forma que o hiperboloide de uma folha, as cônicas não degeneradas resultantes das interseções de um hiperboloide de duas folhas na posição padrão com planos coordenados ou paralelos a esses podem ser elipses ou hipérbolas. Na obtenção dessas seções

planas, uma das variáveis nas equações dessas quádricas se anula e, quando as demais tiverem sinais iguais teremos elipses, em caso contrário hipérbolos.

A diferenciação das posições dessas quádricas no sistema cartesiano se dá em relação ao eixo central, que se situa sobre o eixo coordenado perpendicular aos planos cujas seções planas são elípticas. Assim, a representação em língua natural específica dessa quádrica é hiperboloide de duas folhas em α , sendo α o eixo central da superfície.

Desse modo, a variável visual ‘posição no sistema cartesiano’ pode assumir três valores, referentes aos três eixos coordenados ao longo do qual essas superfícies podem se desenvolver: (a) hiperboloide de duas folhas em x , quando se desenvolve ao longo do eixo dos x (*Figura 35a*), (b) hiperboloide de duas folhas em y , quando se desenvolve ao longo do eixo dos y (*Figura 35b*) ou (c) hiperboloide de duas folhas em z , quando se desenvolve ao longo do eixo dos z (*Figura 35c*).

Figura 35 - Valores visuais da variável “posição padrão” do hiperboloide de duas folhas.



Fonte: Elaborado pela autora.

A diferenciação entre as unidades significantes simbólicas específicas decorre da posição do sinal positivo na representação simbólica do hiperboloide de duas folhas, considerando que a constante no lado direito da equação é positiva. As seções planas são elípticas para cortes da quádrica pelo plano coordenado relativo à variável do termo positivo (ou por planos paralelos a este), determinando o eixo ao longo do qual a quádrica se desenvolve.

Por exemplo, o hiperboloide de duas folhas que se desenvolve ao longo do eixo dos x tem representação simbólica igual a $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (com $a, b, c \in \mathbb{R}$). Ou seja, o sinal positivo é do coeficiente de x^2 na sua representação simbólica. E, nesse caso, a representação em língua natural específica é hiperboloide de duas folhas em x (*Figura 35a*).

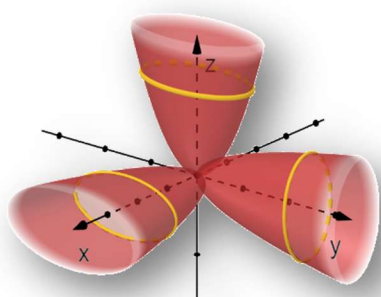
3.3.4 Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos paraboloides elípticos

Um parabolóide elíptico tem representação simbólica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \pm y$ ou $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm x$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e não nulos. As unidades significantes simbólicas gerais dessa quádrlica referem-se a dois termos quadráticos com coeficientes sempre positivos e um termo linear com coeficiente que pode ser positivo ou negativo. As cônicas não degeneradas resultantes das interseções de um parabolóide elíptico na posição padrão com planos coordenados ou paralelos a esses podem ser elipses ou parábolas.

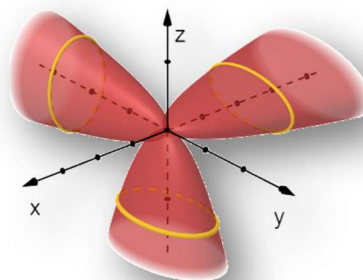
As unidades significantes gráficas específicas, que permitem a diferenciação dessas quádrlicas em relação à posição no sistema cartesiano, têm como referência o eixo central dessas superfícies. Esse eixo contém o vértice e está sobre o eixo coordenado α (eixo dos x , y ou z) perpendicular aos planos das seções planas elípticas. A representação em língua natural específica dessa quádrlica é dada por parabolóide elíptico em α_+ ou α_- , respectivamente, para os casos em que a superfície se desenvolve ao longo do semieixo positivo ou negativo de α .

Nesse caso, a variável visual ‘posição no plano cartesiano’ pode ter seis valores visuais, que se referem ao semieixo ao longo do qual se desenvolvem: (a) parabolóide elíptico em ox_+ , oy_+ e oz_+ (Figura 36a); (b) parabolóide elíptico em ox_- , oy_- e oz_- (Figura 36b).

Figura 36 - Valores visuais da variável “posição no sistema cartesiano” do parabolóide elíptico.



(a) paraboloides elípticos em ox_+ , oy_+ e oz_+ .



(b) paraboloides elípticos em ox_- , oy_- e oz_- .

Fonte: Elaborado pela autora.

A diferenciação entre as unidades simbólicas específicas correspondentes é analisada a partir do sinal do coeficiente do termo linear nessas equações, considerando que os coeficientes

dos termos quadráticos no outro membro da equação são positivos. O valor positivo varia de acordo com o semieixo ao longo do qual a quádrlica se desenvolve.

Por exemplo, a representação simbólica do parabolóide elíptico que se desenvolve ao longo do semieixo negativo do eixo dos y é dado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -y$ (com $a, b \in \mathbb{R}$). O sinal negativo é do coeficiente de y na sua representação simbólica e a representação em língua natural específica, nesse caso, é parabolóide elíptico em oy_- (Figura 36b).

3.3.5 Correlações entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos parabolóides hiperbólicos

Um parabolóide hiperbólico tem representação simbólica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \pm y$ ou $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm x$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e não nulos. As unidades significantes simbólicas gerais dessa quádrlica referem-se a dois termos quadráticos com coeficientes de sinais opostos e um termo linear. As cónicas não degeneradas resultantes da interseção de um parabolóide hiperbólico com os planos coordenados ou paralelos a esses podem ser hipérbolas ou parábolas.

Ao interceptar um parabolóide hiperbólico na posição padrão com cada um dos três planos coordenados obtemos sempre duas parábolas e um par de retas concorrentes. As duas parábolas - com vértice comum e na origem do sistema cartesiano, concavidades opostas e o mesmo eixo de simetria - são chamadas de assento e estribo. O eixo de simetria das parábolas assento e estribo de um parabolóide hiperbólico está sobre o eixo central dessa quádrlica que, na posição padrão, coincide com um dos eixos coordenados.

A parábola assento tem concavidade voltada para o semieixo positivo do eixo coordenado sobre o qual está o eixo central da quádrlica e, a parábola estribo, para o semieixo negativo (Figura 37).

Figura 37 - Parábolas assento e estribo da sela.



(a) Parábola assento no plano XOZ

(b) Parábola assento no plano YOZ

Fonte: Elaborado pela autora.

As unidades significantes gráficas que permitem a diferenciação das posições dos paraboloides hiperbólicos referem-se ao semieixo para o qual está voltada a concavidade da parábola assento e o plano que a contém. No exemplo do paraboloides hiperbólico da *Figura 37a*, a parábola assento tem concavidade voltada para o semieixo positivo do eixo dos z e está contida no plano xoz . Esses valores visuais permitem determinar o grau de cada uma das variáveis na equação dessa quádrlica e os seus sinais.

Nesse caso, a equação para esse paraboloides hiperbólico seria da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, cujo corte pelo plano xoz ($y = 0$) é a parábola assento com concavidade voltada para oz_+ de

equação $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases}$. E a intersecção com o plano yoz ($x = 0$) é a parábola estribo com

concavidade voltada para oz_- de equação $\begin{cases} z = -\frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}$.

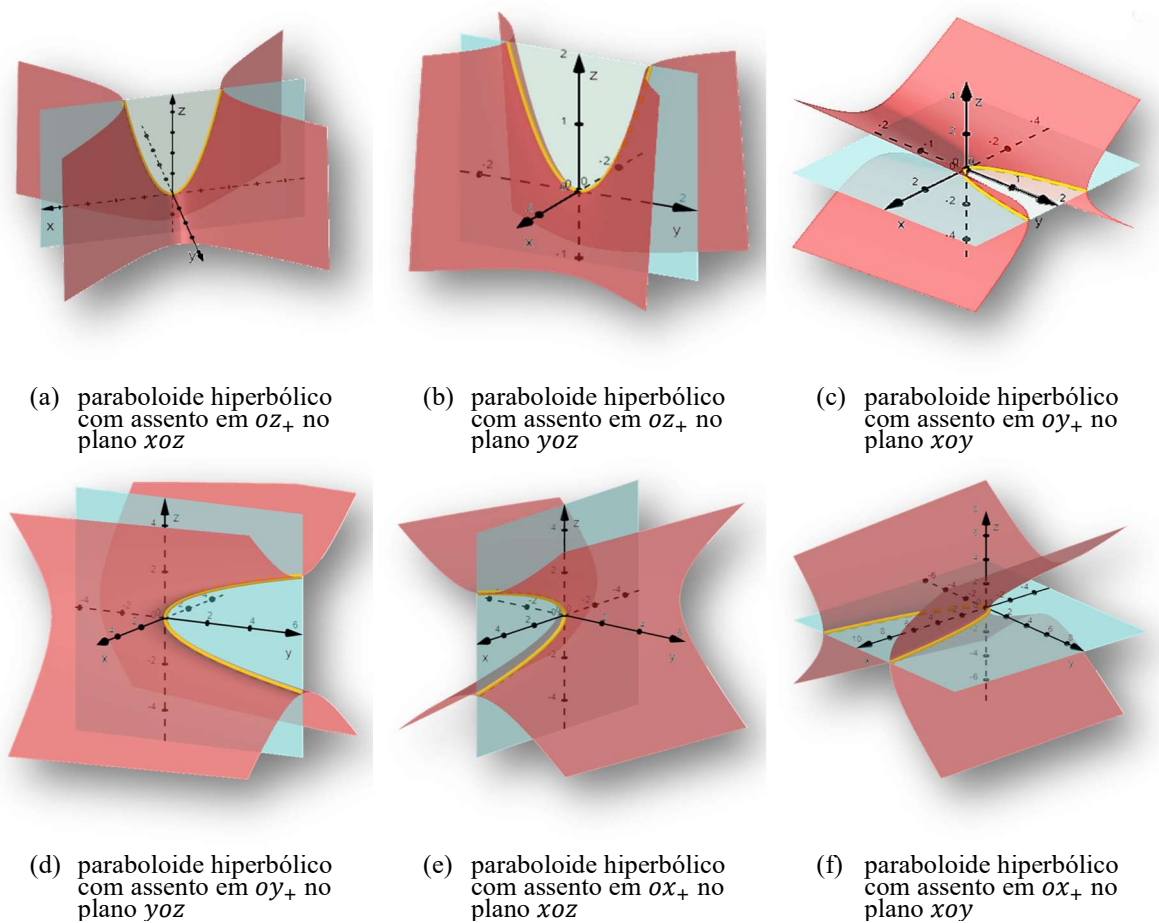
Já o paraboloides hiperbólico da *Figura 37b* tem parábola assento com concavidade voltada para o semieixo positivo do eixo dos z sobre o plano yoz . Assim, a equação dessa quádrlica seria da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -z$. Nesse caso, o corte pelo plano yoz ($x = 0$) é a parábola

assento com concavidade voltada para oz_+ de equação $\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}$ e com o plano xoz ($y = 0$) é a

parábola estribo com concavidade voltada para oz_- de equação $\begin{cases} z = \frac{-x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases}$.

Convencionamos que as representações em língua natural específicas são: para o primeiro caso, paraboloides hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz e, para o segundo, paraboloides hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz . Assim, a variável visual ‘posição no plano cartesiano’ tem seis valores visuais, dois para cada semieixo positivo: (a) oz_+ no plano xoz (*Figura 38a*), (b) oz_+ no plano yoz (*Figura 38b*), (c) oy_+ no plano xoy (*Figura 38c*), (d) oy_+ no plano yoz (*Figura 38d*), (e) ox_+ no plano xoz (*Figura 38e*), (f) ox_+ no plano xoy (*Figura 38f*).

Figura 38 - Valores visuais da variável “posição no sistema cartesiano” do parabolóide hiperbólico.



Fonte: Elaborado pela autora.

As unidades significantes simbólicas específicas dessa quádrca referem-se aos sinais dos coeficientes dos dois termos quadráticos, de sinais contrários, considerando que o coeficiente do termo linear é positivo. Por exemplo, na *Figura 38e*, a representação simbólica do parabolóide hiperbólico com parábola assento em ox_+ , contida no plano xoz , é dado por $\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = x$ (com a e $b \in IR$).

Essa correlação entre representações gráficas e simbólicas possibilita o trânsito entre esses registros. Da representação simbólica para a gráfica, consideremos como exemplo o parabolóide hiperbólico de equação $x^2 - y^2 = z$. A parábola assento dessa quádrca tem equação $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$, com concavidade voltada para oz_+ contida no plano xoz . Assim, trata-se do parabolóide hiperbólico em oz_+ no plano xoz .

Por outro lado, partindo da representação gráfica para a simbólica, é possível obter a equação da parábola assento por análise do gráfico do parabolóide hiperbólico. Na representação gráfica dessa quádrca, a parábola assento tem concavidade voltada para oz_+ e

está contida no plano xoz , logo tem equação da forma $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = z \\ y = 0 \end{cases}$. Analisando alguns pontos dessa

parábola, pode-se constatar que $a = 1$, então a equação fica $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$.

Da mesma forma, é possível obter a equação da parábola estribo, que é dada por $\begin{cases} y^2 = -z \\ x = 0 \end{cases}$. A partir das equações das parábolas assento e estribo, em que $x^2 = z$ e $y^2 = -z$, podemos obter a representação simbólica desse parabolóide hiperbólico, que fica $x^2 - y^2 = z$. Essa correlação torna possível a conversão do registro gráfico para o simbólico que, conforme Duval (2009, 2011a, 2012a), costuma ser mais difícil de realizar do que em caso contrário.

A subseção a seguir discorre sobre as representações gráficas das superfícies quádricas - estáticas e dinâmicas, bi e tridimensionais.

3.4 Representações estáticas e dinâmicas das superfícies quádricas

A relevância das representações para a aquisição de conhecimentos sobre objetos tridimensionais também foi constatada nos estudos de Parzysz (1988). Para ele, a representação de um objeto tridimensional é necessária, porque dela dependem as imagens mentais construídas pelos estudantes.

No entanto, Parzysz (1988) considera que nas representações gráficas há muitas propriedades que nem sempre são percebidas ou compreendidas pelos alunos. O autor distingue três níveis de representação quanto às informações que carregam sobre o objeto matemático, conforme mostra o *Quadro 11*.

Quadro 11 - Níveis de representação de Parzysz.

		Quadrado	Cubo
Objeto real	Nível 0	OBJETO REAL	OBJETO REAL
Representação próxima	Nível 1	DESENHO	MAQUETE
Representação distante	Nível 2	-	DESENHO

perda de informação ↓

Fonte: Adaptado de Parzysz (1988, p. 80).

No caso de objetos matemáticos tridimensionais, o nível 0 refere-se ao objeto propriamente dito (objeto real); o nível 1, a uma representação tridimensional (maquete); e o nível 2, a uma representação bidimensional (desenho). Parzysz (1988) considera que há uma

perda de informação quando o acesso ao objeto matemático (nível 0) se dá por meio de uma maquete (nível 1). E essa perda, segundo o autor, é ainda mais significativa quando se trata do desenho (nível 2).

Nesse estudo, classificamos as representações gráficas construídas no papel ou no quadro como representações 2D-estáticas. E as obtidas por maquete ou, mais recentemente, por protótipos produzidos com a impressão 3D foram classificadas como representações 3D-estáticas. No entanto, o avanço tecnológico ampliou as possibilidades de acesso a objetos matemáticos, antes restritas a representações estáticas, como é o caso da proposta por Parzysz.

Conforme Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008): “A natureza dos símbolos matemáticos têm evoluído nos últimos anos de um caráter estático, inerte, para objetos dinâmicos ou diagramas que são construtíveis, manipuláveis e interativos” (apud Basso; Notare, 2015, p. 2). Assim, as representações gráficas de um objeto matemático passaram de uma condição estática para dinâmica. O termo “dinâmico” opõe-se ao “estático”, característico das representações impressas ou construídas em papel, quadro ou, mais recentemente, impressão 3D.

Segundo Notare e Basso (2016), as tecnologias digitais criadas para a aprendizagem de Matemática tornaram acessíveis e manipuláveis objetos matemáticos antes tratados de forma estática e abstrata. Para os autores,

Uma das principais contribuições das tecnologias digitais para a educação matemática foi tornar possível a “concretização” dos objetos matemáticos na tela do computador, dando a sensação de realismo e de existência material pela possibilidade de manipulação e alteração de suas propriedades. (Notare; Basso, 2016, p. 2)

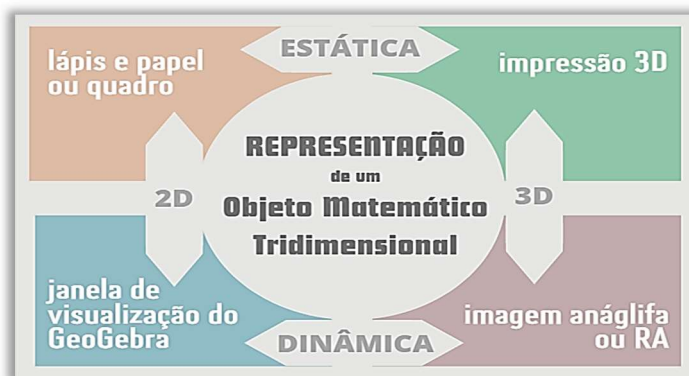
As representações dinâmicas de um objeto tridimensional são as que podem ser obtidas por um gráfico na janela de visualização de um *software*, que denominamos representações 2D-dinâmicas. E também os gráficos oriundos de imagens obtidas por anáglifo ou realidade aumentada, que designamos representações 3D-dinâmicas.

Com as representações dinâmicas, Basso e Notare (2015, p. 2) destacam o fato “[...] do próprio aprendiz poder manipular, controlar, observar, agir sobre o objeto digital, caracterizando uma situação ativa no processo de pensar na matemática envolvida”. A Figura 39 reúne e classifica em 2D ou 3D e estáticas ou dinâmicas, as possíveis formas de acesso a um objeto matemático tridimensional.

Cada uma dessas representações – 2D-estática, 3D-estática, 2D-dinâmica e 3D-dinâmica - apresenta potencialidades e limitações, revelando ou escondendo propriedades do

objeto matemático tridimensional. Como exemplo, no quadro de Parzysz, o desenho apresenta mais limitação do que a maquete para revelar as propriedades de um objeto tridimensional.

Figura 39 - Representações de um objeto matemático tridimensional



Fonte: Elaborado pelo autor.

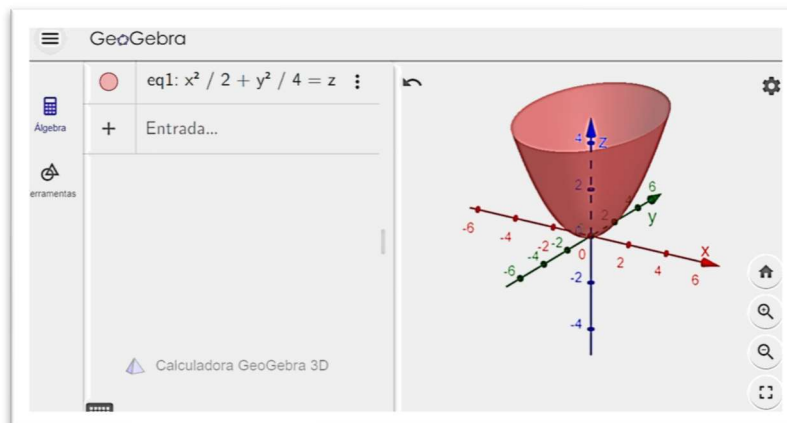
O acesso aos objetos matemáticos por meio de representações dinâmicas abre espaço para novas formas de pensar e fazer matemática. Nessa pesquisa, esse acesso foi viabilizado por meio do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra²². O GeoGebra é um *software* gratuito que pode ser hospedado em computador ou dispositivo móvel, ou acessado diretamente no navegador, as duas versões com boas interfaces. O GeoGebra possibilita a abordagem de uma ampla gama de conceitos, como geometria, funções, cálculo infinitesimal, geometria espacial, geometria analítica, vetores, álgebra, matrizes, etc.

Além disso, pode ser customizado de acordo com a finalidade de uso, tendo código aberto e em constante desenvolvimento. Através de suas janelas de álgebra e de visualização, esse ambiente de matemática dinâmica permite a visualização e a manipulação das representações gráficas a partir das suas formas algébricas. Essa possibilidade de observar as mudanças gráficas ocasionadas por alterações nas suas equações, possibilita a exploração da correspondência entre as representações gráfica e simbólica do objeto matemático.

Tomando como exemplo a reta, cada alteração em um dos coeficientes da sua equação implica em modificações quase instantâneas no seu gráfico, quando realizadas por meio de um *software*. Viabilizando a correlação entre os registros gráfico e simbólico, esses tratamentos sobre as representações dinâmicas possibilitam a coordenação desses registros, condição necessária para a compreensão integral (Figura 40).

²² O GeoGebra (Disponível em: <https://www.geogebra.org/> Acesso em: 10 jan. 2020) foi idealizado em 2001, por Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburg. Foi produto do seu doutorado e recebeu muitos prêmios internacionais (FERREIRA, 2010), (CAVALCANTI, 2014), (RICHIT, 2015).

Figura 40 - Representações simbólica e gráfica do parabolóide elíptico.



Fonte: Elaborado pela autora.

Outra importante característica da matemática dinâmica, proporcionada por ambientes como o do GeoGebra, é a dependência geométrica entre os elementos de uma construção. Essa dependência geométrica refere-se à ordem em que os objetos matemáticos precisam ser inseridos numa construção e a relação de dependência entre eles. Uma construção estável sob a ação do movimento requer a dependência geométrica entre os elementos que a constituem.

Ea estabilidade resulta das relações geométricas impostas à construção e que contemplam as propriedades do objeto matemático (Gravina, 2001), de forma que “a manipulação dos elementos geométricos que dão início à construção, transformam o desenho que está na tela do computador, mas as relações geométricas impostas à construção, bem como as relações que delas decorrem, se mantêm invariantes” (Stormowski, 2015).

Os sistemas dinâmicos não somente tornam acessíveis e manipuláveis objetos matemáticos antes tratados de maneira estática, como modificam a atividade matemática. Segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014),

[...] a Matemática baseada no uso de lápis e papel é qualitativamente diferente da matemática baseada no uso de softwares; há uma moldagem recíproca entre pensamento e tecnologia; a produção de conhecimento matemático é condicionada pela tecnologia utilizada; as tecnologias não são neutras ao pensamento matemático; as tecnologias transformam a Matemática; [...] (p. 31)

A possibilidade de obter uma representação manipulável de objetos matemáticos, dá lugar a novas formas de pensar e fazer matemática (Notare; Basso, 2016). De forma conotativa, Gravina et al. (2012) consideram que o artefato tem o poder de agir sobre o sujeito. E, segundo Rabardel (1995a), a ferramenta muda a forma de realizar uma tarefa, provocando o desenvolvimento dos esquemas de utilização no sujeito.

Assim, a integração das tecnologias digitais pode influenciar o processo de construção do conhecimento matemático, e entendemos que essas interferências variam em acordo com os conceitos abordados e os recursos tecnológicos utilizados. No entanto, entendemos também que não há mudanças nesse processo com a inclusão da tecnologia sem metodologia. As novas formas de pensar e fazer matemática que podem ser desencadeadas dependem da proposta didática, com planejamento de atividades que envolvam a necessidade de pensar com o apoio das tecnologias.

A expressão “matemática dinâmica” surge dessas novas possibilidades de pensar com o apoio das tecnologias digitais que esses sistemas proporcionam à atividade matemática. Basso e Notare (2015) apresentam um exemplo mediante a representação gráfica de uma função dada pela sua equação. A possibilidade de alterar o valor de coeficientes na expressão algébrica da função, observando as simultâneas alterações gráficas provocadas, é característica da matemática dinâmica.

Referindo-se à atividade matemática mediada pelas tecnologias, Valente (1993) denominou os objetos matemáticos produzidos por *softwares* de ‘objetos-de-pensar-com’. E, mais recentemente, Basso e Notare (2015) adotaram a expressão ‘pensar-com tecnologias’ quando se referiam à atividade matemática em que é necessário pensar com o apoio das tecnologias.

É nesse sentido que as ferramentas se situam nessa pesquisa, não apenas como uma forma de acesso ao objeto matemático, mas como estruturadora do pensamento (Medeiros, 2020). A movimentação oferecida pelo ambiente de matemática dinâmica possibilita o confronto entre a imagem mental que o sujeito possui do objeto matemático e a imagem oferecida pelo *software* (Medeiros; Basso, 2020).

No entanto, entendemos que a representação que vemos na tela do computador ou dispositivo móvel ainda é uma projeção na janela de visualização 2D de um objeto matemático que é tridimensional. Embora com muitas potencialidades, essas representações dinâmicas ainda são bidimensionais, podendo apresentar limitações oriundas da apresentação do objeto matemático em perspectiva.

Parzysz (1988, 1991) constatou que os problemas de compreensão ocorrem tanto na codificação (produção) quanto na decodificação (leitura/interpretação) de representações planas de objetos tridimensionais. O autor destaca que os estudantes tendem a considerar as propriedades do desenho (representação) como as da própria figura (objeto real). Com base em Parzysz, entendemos que cada recurso tem suas próprias limitações e potencialidades no que se refere a revelar as propriedades de um objeto matemático tridimensional.

A impressão 3D, o anáglifo e a realidade aumentada são mais três possibilidades de obter representações que podem revelar outras propriedades de um objeto matemático tridimensional. Diferentemente das anteriormente tratadas, essas são representações em 3D de um objeto matemático tridimensional, sendo possível que possam superar as limitações das representações bidimensionais. Por essa causa, consideramos nessa pesquisa a obtenção de representações tridimensionais por meio da impressão 3D, de anáglifo e da realidade aumentada.

A impressão 3D surgiu na década de 1980 e sua expansão ocorreu devido ao código aberto, compartilhamento gratuito de arquivos e da função da tecnologia FDM (*Fused Deposition Modeling*), que utiliza a impressão camada por camada com plástico derretido (Hedler, 2020; Henriques; Farias; Funato, 2021; Lopes et al., 2021). A impressão 3D de baixo custo está em evolução e com grandes contribuições para a ciência, educação e sustentabilidade (Fonda, 2013; Hedler, 2020).

Essa acessibilidade já permitiu, por exemplo, a utilização dos modelos impressos em 3D das superfícies quádricas nessa investigação. Os arquivos *stl*, utilizados para a impressão 3D desses modelos foram obtidos por meio do GeoGebra. O Quadro 12 apresenta as equações parametrizadas utilizadas para obter os modelos em 3D das superfícies quádricas.

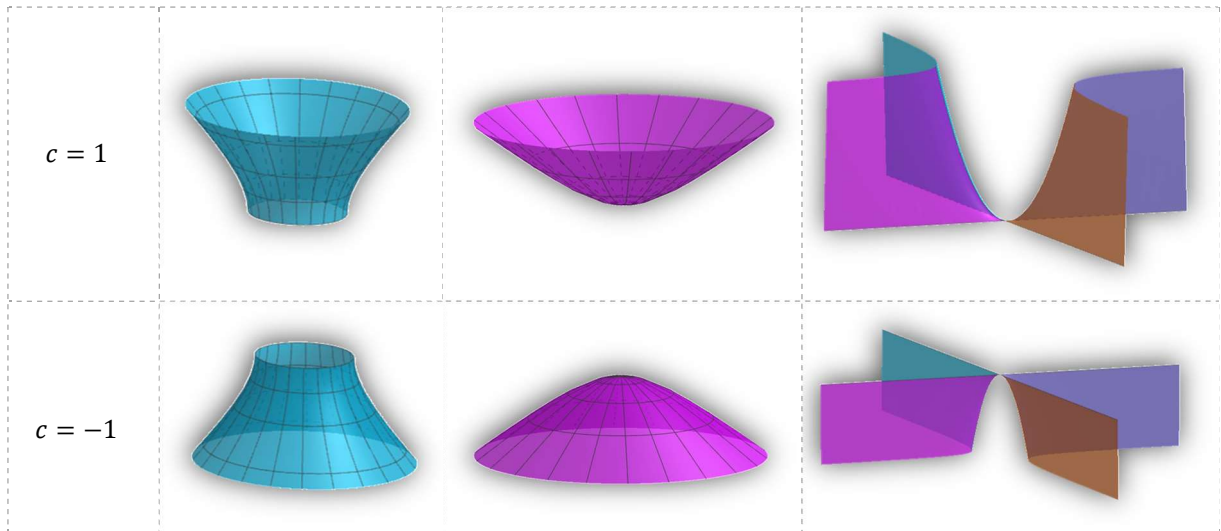
Quadro 12 – Equações parametrizadas para obtenção das superfícies quádricas.

Quádrlica	Equação parametrizada
Elipsoide	$d = \text{Superfície}(a \text{ sen}(u) \cos(v), b \text{ sen}(u) \text{ sen}(v), c \cos(u), u, 0, \pi, v, 0, 2 \pi)$
Hiperboloide de uma folha	$d = \text{Superfície}(a \cosh(u) \cos(v), b \cosh(u) \text{ sen}(v), c \sinh(u), u, 0, \pi, v, 0, 2 \pi)$
Hiperboloide de duas folhas	$d = \text{Superfície}(a \sinh(u) \cos(v), b \sinh(u) \text{ sen}(v), c \cosh(u), u, 0, \pi, v, 0, 2 \pi)$
Paraboloide elíptico	$d = \text{Superfície} \left(a u \cos(v), b u \text{ sen}(v), \left(\frac{u^2}{c} \right), u, 0, 5, v, 0, 2 \pi \right)$
Paraboloide hiperbólico	$d = \text{Superfície} \left(u + v, \left(\frac{b}{a} \right) v, \left(\frac{u^2}{a^2 c} \right) + \left(\frac{2 u v}{a^2 c} \right), u, 0, 100, v, 0, 100 \right)$ $e = \text{Superfície} \left(u + v, - \left(\frac{b}{a} \right) v, \left(\frac{u^2}{a^2 c} \right) + \left(\frac{2 u v}{a^2 c} \right), u, 0, 100, v, 0, 100 \right)$ $f = \text{Superfície} \left(-u - v, \left(\frac{b}{a} \right) v, \left(\frac{u^2}{a^2 c} \right) + \left(\frac{2 u v}{a^2 c} \right), u, 0, 100, v, 0, 100 \right)$ $g = \text{Superfície} \left(-u - v, - \left(\frac{b}{a} \right) v, \left(\frac{u^2}{a^2 c} \right) + \left(\frac{2 u v}{a^2 c} \right), u, 0, 100, v, 0, 100 \right)$

Fonte: Elaborado pela autora.

O elipsoide e o parabolóide elíptico foram impressos de uma só vez, ao contrário dos hiperbolóides e do parabolóide hiperbólico. Para impressão da parte superior dos hiperbolóides, foi necessário utilizar um valor para o parâmetro c maior que zero (Quadro 13). E, para impressão da parte inferior, o valor do parâmetro c precisou ser menor que zero.

Quadro 13 - Impressão 3D do hiperbolóide de uma folha e do parabolóide hiperbólico.



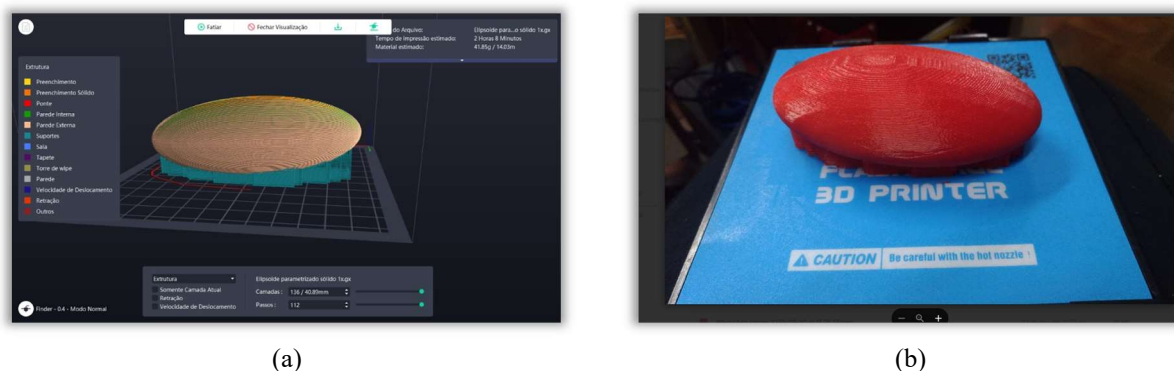
Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme o Quadro 12, no caso do parabolóide hiperbólico utilizamos quatro equações na sua parametrização, as equações d, e, f e g representam as partes lilás, laranja, verde e rosa, respectivamente (Quadro 13). E o parâmetro c definiu as partes superior ou inferior do parabolóide hiperbólico.

Os modelos foram obtidos pela impressora 3D do IFRS Campus Canoas. O *software Tinkercad*²³, online e gratuito, foi utilizado para redimensionar as figuras. E para impressão em 3D, foi utilizado o software da própria impressora *FlashPrint*, que é uma *Flashforge Finder* (Figura 41).

²³ Disponível em: <https://www.tinkercad.com>. Acesso em: 16 mar. 2022.

Figura 41 – Modelo impresso em 3D do elipsoide.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para Knill e Slavkovsky (2013), em Hedler (2020), a prototipagem rápida faz parte da Terceira Revolução Industrial, na qual a fabricação é digital, pessoal e acessível. Os espaços de fabricação digital Fab Lab²⁴ contribuíram para a popularidade e descentralidade dessa tecnologia, estimulando a inovação por meio da prototipagem em ambientes colaborativos. De laboratórios comunitários a centros avançados de pesquisa, existem mais de 1750 Fab Labs, em mais de 100 países.

O IFRS Campus Porto Alegre²⁵ possui um Fab Lab, o PoaLab²⁶, sediado como um programa de extensão do IFRS. O espaço conta com impressora 3D, cortadora laser/máquina de corte, fresadora de precisão, plotter de recorte e de impressão, extrusora de filamento, bancada de eletrônica com osciloscópio, fonte de bancada, estação de solda e componentes eletrônicos diversos.

Segundo o coordenador do PoaLab, os Fab Labs possuem um conjunto padronizado de equipamentos, permitindo que um projeto desenvolvido em qualquer um dos laboratórios possa ser replicado nos demais. Os Fab Labs fornecem acesso ao ambiente, aos materiais, aos conhecimentos e à tecnologia avançada, com o objetivo de democratizar o acesso às ferramentas para invenção.

Na perspectiva da Fab Foundation²⁷, um Fab Lab é um lugar de aprendizado e inovação, para brincar, criar, aprender, orientar, inventar. A rede internacional de Fab Labs forma uma comunidade aberta e criativa de fabricantes, artistas, cientistas, engenheiros, educadores,

²⁴ Fab Lab (Laboratório de fabricação digital, do inglês *Fabrication Laboratory*) é um espaço para engajamento comunitário, criatividade, empreendedorismo, educação etc., que dá acesso a meios modernos de invenção. Eles começaram como um projeto de divulgação do *Center for Bits and Atoms* do MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) e se tornaram uma rede colaborativa e global.

²⁵ Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS).

²⁶ Disponível em: <https://www.facebook.com/poalab> Acesso em: 10 jan. 2020.

²⁷ A *Fab Foundation* foi formada em 2009 com o intuito de apoiar o crescimento da rede internacional de Fab Labs e o desenvolvimento de organizações regionais de capacitação.

estudantes, amadores, profissionais de todas as idades. Na educação, a comunidade SCOPES-DF²⁸ reúne profissionais que usam essa tecnologia para apoiar a aprendizagem de alunos, compartilhando planos de aula para educação em STEM²⁹ por meio da fabricação digital.

Segundo Bicer et al. (2017) em Hedler (2020), a modelagem com *software* 3D para projetar e imprimir objetos matemáticos tridimensionais pode melhorar as habilidades de visualização espacial, criatividade e resolução de problemas dos alunos. Para Fonda (2013) permitindo a impressão de objetos matemáticos em 3D, essa tecnologia melhora a visualização de estruturas mais complexas (apud Hedler, 2020). Em razão disso, entendemos que os modelos impressos em 3D podem trazer contribuições na apreensão figural das superfícies quádricas (Figura 42).

Figura 42 - Representações figurais 3D-estáticas.



Fonte: Elaborado pela autora.

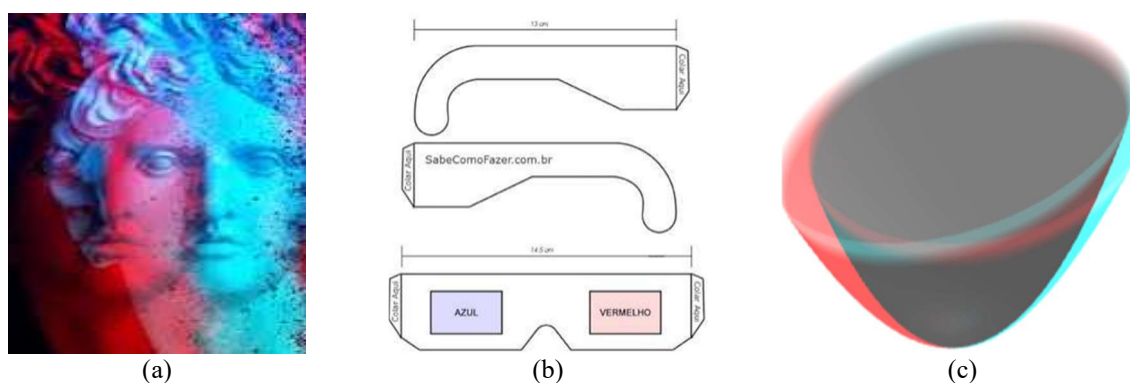
Esses protótipos obtidos pela impressão 3D são representações 3D-estáticas que apresentam potencialidades e limitações distintas das demais representações. O fato de não possuir a dinamicidade oferecida pela janela de visualização 3D do GeoGebra, por exemplo, consiste numa limitação importante nesse estudo. E a potencialidade relativa à sua condição tridimensional, com a possibilidade de manuseio, pode revelar propriedades como as oferecidas por uma representação 3D-dinâmica como o anáglifo ou a realidade aumentada (Pereira *et al.*, 2017; Ribeiro; Guterres; Silveira, 2020; Schaun, 2019).

²⁸ O SCOPES-DF, comunidade voltada para a educação em STEM, fornece recursos, oportunidades de rede e suporte para a implementação de tecnologias de fabricação digital para o aprendizado do aluno em ambientes formais e informais.

²⁹ O STEM (Science, Technology, Engineering and Math ou, em português, Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática) é um modelo de ensino com foco em estimular o aprendizado dos alunos de forma multidisciplinar, abrangente e sem a segmentação comum nos currículos escolares.

As imagens obtidas por anáglifo produzem um efeito de profundidade quando observadas com o uso de óculos com filtro azul e vermelho. O anáglifo é constituído por duas imagens diferentes filtradas, uma para cada olho. Essas imagens são sobrepostas com uma pequena distância entre as duas para produzir um efeito de profundidade (Figura 43a).

Figura 43 – Imagens por anáglifo.



Fonte: Elaborado pela autora.

A que deve ser vista por um dos olhos é impressa em vermelho e a outra em verde de forma \underline{e} , observando através de um filtro especial (óculos 3D), vemos uma imagem estereoscópica integrada. As duas imagens são fundidas pelo córtex visual do cérebro humano dando a percepção de uma imagem tridimensional³⁰. De acordo com o princípio da visão estereográfica de um anáglifo, a quebra de fusão e a complementaridade das cores produz um efeito tridimensional.

Os óculos 3D (Figura 43b) podem ser facilmente construídos³¹ e existem *softwares* que permitem produzir as imagens por anáglifo. Nessa pesquisa, as representações das superfícies quádricas por anáglifo foram obtidas pelo GeoGebra, usando a funcionalidade ‘Projeção para óculos 3D’ (Figura 43c). As representações por anáglifo de superfícies quádricas ainda são apresentadas numa tela plana, mas por proporcionar a impressão de profundidade, classificamos como 3D-dinâmicas. Assim, essa funcionalidade pode produzir representações que revelem mais propriedades do objeto matemático, quando comparadas às bidimensionais.

O termo “realidade aumentada” surgiu em 1990, quando o professor Thomas Caudell desenvolvia, em colaboração com a empresa Boing, o projeto de um mostrador digital para

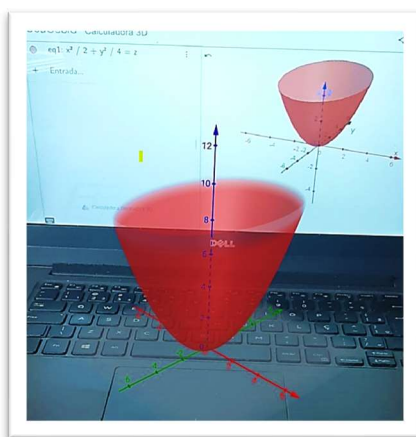
³⁰ Disponível em: <https://igeo.ufrgs.br/museudetopografia/images/acervo/artigos/Anglifo.pdf> Acesso em: 16 mar. 2021.

³¹ Disponível em: <http://geoden.uff.br/wp-content/uploads/sites/391/2019/04/Guia-Pr%C3%A1tico-Constru%C3%A7%C3%A3o-de-Anaglifo-1.pdf> Acesso em: 07 mar. 2021.

aviões que mesclava gráficos virtuais em uma realidade física. A realidade aumentada é a tecnologia em que conteúdos reais e virtuais interagem em tempo real, acrescentando elementos à realidade, ao invés de substituí-la (Azuma *et al.*, 2001; Kirner; Kirner, 2011).

O autor destaca três características fundamentais de um sistema de realidade aumentada: combinar conteúdo virtual e real; interatividade em tempo real; e o alinhamento de elementos reais e virtuais em três dimensões. O ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra para dispositivos móveis oferece essa funcionalidade (Figura 44), permitindo ampliar/reduzir e arrastar a representação do objeto tridimensional.

Figura 44 - Representação em realidade aumentada do parabolóide elíptico.



Fonte: Elaborado pela autora.

O sujeito ainda pode mover a câmera para olhar a representação de diversos ângulos, como também se movimentar, andando em torno dela. Essa funcionalidade permite que o objeto tridimensional seja observado em três dimensões e não mais como uma projeção, podendo revelar mais propriedades do objeto matemático. Ainda é possível relacionar representações gráficas e simbólicas, da mesma forma como no caso das representações na janela de visualização 3D.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) consideram que a inserção da realidade aumentada no ensino e aprendizagem é inerente à quarta fase das tecnologias digitais na Educação Matemática, marcada por tecnologias móveis, novos designs, interatividade, interações através do toque na tela, câmeras etc.

As representações dinâmicas, que vem ganhando destaque entre as formas de acesso a um objeto matemático, configuram um novo tipo de registro, o registro dinâmico de representação semiótica (Stormowski, 2015). Esse registro não é um dos classificados por Duval, apesar de já vislumbrar o seu potencial quando afirmou que as representações exibidas

por um *software* “constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração de tratamentos” (Duval, 2011b, p. 137).

Nessa pesquisa, as representações dinâmicas evitaram que a visualização das superfícies quádricas se restringisse a casos particulares, como no caso das representações estáticas. Além disso, os sucessivos tratamentos possibilitados pelo GeoGebra possibilitaram a visualização desses objetos matemáticos tridimensionais por diferentes ângulos e a exploração de suas características para a correlação com as correspondentes representações simbólicas. Dessa forma, os tratamentos possibilitados por esse novo registro podem favorecer o enriquecimento das apreensões figurais, que contribuem para as apreensões conceituais.

As representações dinâmicas vem sendo alvo de estudos para compreensão dos processos de ensino e aprendizagem em ambientes de matemática dinâmica. É o caso das investigações de Salazar (2009), que adotaram a expressão “registro figural dinâmico” para referir-se a um sistema de representação de figuras geométricas no ambiente de geometria dinâmica. Stormowski (2015) considera que o dinamismo confere características específicas à representação de um objeto matemático por meio de um *software*.

Stormowski (2015) destaca o potencial dessa forma de representação de um objeto matemático, tomando como exemplo a ferramenta ‘Mover’, cujas funções “estão relacionadas tanto a diferentes símbolos e implicações de uso quanto às propriedades matemáticas subjacentes ao dinamismo e à possibilidade de movimento ou não de cada elemento” (Stormowski, 2015, p. 28). O autor define como figura dinâmica a coleção de representações obtidas da manipulação de elementos geométricos de um objeto matemático na tela do computador e que guardam invariantes geométricos.

Em acordo com Stormowski (2015), guardando as informações sobre o conceito e as propriedades do objeto matemático, esta coleção de figuras diferencia-se da obtida pelo desenho no papel. O autor distingue essa figura dinâmica até mesmo da que possa ter sido obtida por meio de um *software*, mas que não goze dessa invariância geométrica. Com o exemplo de dois quadrados cujas construções se diferenciam por considerar ou não a invariância geométrica, o autor destaca que ambos têm o mesmo aspecto inicial na tela do computador, mas ao serem manipulados um se deforma e o outro não, respectivamente.

Essas diferenças, que dizem respeito ao potencial das representações dinâmicas, configuram o registro dinâmico de representação semiótica, conforme Stormowski (2015). Nessa pesquisa, as representações dinâmicas referem-se a esse sistema semiótico, por serem obtidas no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, que as confere o potencial proporcionado pela dinamicidade.

A seguir, apresentamos os aspectos metodológicos e as concepções pedagógicas que nortearam o planejamento, a implementação e a análise dos resultados dessa investigação.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONCEPÇÕES PEDAGÓGICAS DA INVESTIGAÇÃO

Essa seção apresenta as concepções pedagógicas sobre as escolhas didáticas e os aspectos metodológicos dessa investigação. A primeira subseção discute as concepções pedagógicas, destacando a que foi a base para a criação e implementação das situações de ensino e aprendizagem instrumental. Na segunda subseção, essas situações de ensino e aprendizagem instrumental são apresentadas e discutidas do ponto de vista da sua concepção.

As subseções seguintes abordam as escolhas metodológicas que conduziram essa investigação, trazendo uma descrição de aspectos teóricos e práticos que envolveram o seu planejamento, concepção, execução e análise. Esta última, tratada na subseção que finaliza este capítulo, aborda as categorias escolhidas para a análise dos resultados.

4.1 Concepções pedagógicas deste estudo

Essa subseção discorre sobre as concepções pedagógicas que influenciaram a forma como o conhecimento é produzido nas situações de ensino e aprendizagem instrumental. Conforme Becker (1995), existem três concepções pedagógicas distintas: a pedagogia diretiva, a não diretiva e a relacional, cada uma sustentada por uma epistemologia específica. A pedagogia diretiva é baseada em uma epistemologia empirista, onde as estruturas do conhecimento são impostas pelo meio físico ou social e o sujeito é subestimado em relação ao meio.

Para o autor, o professor que tem por base essa epistemologia acredita que o aluno é como uma folha em branco e que aprende através dos sentidos, pelo que ouve ou vê. Nessa concepção, ao ensinar álgebra por exemplo, o professor partiria do pressuposto de que o aluno não teria entendimento sobre incógnitas ou valores escondidos. Segundo Piaget, isso implica em partir do princípio de que a transmissão educativa oferece ao sujeito as condições para a assimilação, quando a aquisição do conhecimento se dá por meio da sua atividade (Munari, 2010).

A pedagogia não diretiva tem por base uma epistemologia apriorista, onde se acredita que o conhecimento humano advém de herança genética. Nesta concepção, o processo de desenvolvimento ocorre em decorrência da maturação do sistema nervoso e das estruturas perceptivas. O professor é um facilitador que, interferindo o mínimo possível, apenas desperta o conhecimento que já existe no aluno, pois acredita que as possibilidades do conhecimento são

dadas a priori. A postura apriorista opõe-se à empirista, uma vez que relativiza a experiência e absolutiza o sujeito (Becker, 1995).

Na pedagogia relacional, embasada no interacionismo, o conhecimento não está nem no sujeito e nem no meio, mas é construído a partir da interação do sujeito com o meio. A aprendizagem é uma construção por meio da ação e da tomada de consciência das ações e o conhecimento construído serve de patamar para novas construções. O sujeito, ao reagir aos desequilíbrios que surgem da interação com o objeto, desencadeia processos de abstração inicialmente pseudoempíricas e depois reflexionantes. Conforme em Becker (2012a):

Toda característica que retiramos de um objeto, ou de uma ação em suas características materiais, características que estes objetos ou ações já possuíam antes do sujeito agir sobre eles, dá-se por abstração empírica ou experiência física. Ao contrário, a experiência lógico-matemática ou abstração reflexionante retira suas informações das coordenações das ações, coordenações que ocorrem no universo endógeno, e, portanto, não são observáveis; são “percebidas” somente pelo sujeito que as produz (p. 52).

Entendemos que a aprendizagem de um conceito depende dos esquemas prévios possuídos pelo sujeito; da sua pré-disposição para a aquisição do novo conhecimento, uma vez que a sua estrutura cognitiva só pode ser construída por ele próprio; e da abordagem pedagógica escolhida pelo professor. O papel principal do professor nesse processo é o de provocar os conflitos cognitivos necessários para desencadear os processos de abstração reflexionante.

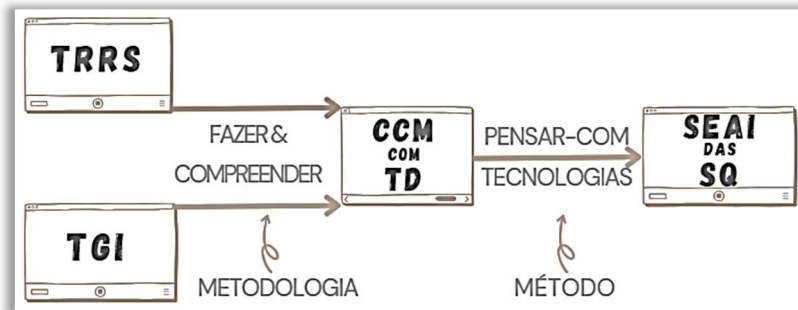
As situações de ensino e aprendizagem instrumental foram embasadas nessa perspectiva, desde a sua concepção e até a sua implementação. As teorias escolhidas para embasar essa pesquisa têm ponto comum no Fazer e Compreender de Piaget (1978), dialogando fortemente com essa concepção pedagógica. E a inserção da tecnologia digital envolve a necessidade da proposta de atividades que promovam o pensar-com tecnologias.

Entendendo o ensino e a aprendizagem como uma única atividade, em que professor e aluno executam seus trabalhos para produção de determinado saber (Maggio, 2018), e por envolver a apropriação tecnológica, passamos a utilizar a denominação ‘Situação de Ensino e Aprendizagem Instrumental - SEAI’. A concepção dessas SEAI teve por base o esquema da Figura 45, apresentado na introdução como esquema da pesquisa. Entendemos que a abordagem pedagógica nessas SEAI está fundamentada nas escolhas teóricas, metodológicas e tecnológicas desse estudo e, portanto, os elementos se conectam da mesma maneira.

As SEAI, baseadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), buscam promover a aprendizagem das Superfícies Quádricas (SQ) por meio da coordenação de diferentes registros. Isso passa pelas questões do acesso a essas superfícies através de representações semióticas, identificação de superfícies quádricas nos diferentes registros de

representação, modo de funcionamento desses registros, transformações de tratamento e conversão, correlação entre registros (figural, gráfico, simbólico e em língua natural).

Figura 45: Esquema da abordagem pedagógica.



Fonte: Elaborado pela autora.

Aliado a isso, para dar conta da integração das Tecnologias Digitais (TD) ao Processo de Construção do Conhecimento Matemático (CCM) sobre superfícies quádricas, tem-se a Teoria da Gênese Instrumental (TGI) contribuindo para a compreensão do processo de apropriação das ferramentas do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, dos limites e potencialidades desse artefato para o estudo das superfícies quádricas, dos esquemas que podem ser desenvolvidos pelos participantes e da adequação das SEAI às necessidades do ‘pensar-com tecnologias’.

Além dos aspectos individuais que cada um desses aportes traz para o modelo pedagógico proposto, há um ponto comum entre eles que é o Fazer e Compreender de Piaget (1978). Nas situações de ensino e aprendizagem vivenciadas pela pesquisadora ao longo desse doutoramento foi possível constatar a constante presença do ‘fazer e compreender’ e do ‘pensar-com tecnologias’. Esse fato inspirou a presente investigação, que propõe situações de ensino e aprendizagem com base no Fazer e Compreender de Piaget (1978).

O acréscimo das tecnologias digitais no processo de construção do conhecimento matemático envolve a criação de atividades em que seja necessário ‘pensar-com tecnologias’. Entendemos que a dupla, ‘fazer e compreender’ e ‘pensar-com tecnologias’, apresenta-se em termos de função como ‘metodologia e método’, consistindo na abordagem pedagógica dessa pesquisa. A desconstrução dimensional que, para Duval (2009, 2011a) é onipresente em toda definição, raciocínio ou explicação relacionados à figura geométrica, permeia todo o conjunto das situações de ensino e aprendizagem.

Isso porque, para as apreensões figurais de representações gráficas de uma quádrica (objeto matemático tridimensional), propomos a análise das suas seções planas (objetos

matemáticos bidimensionais). As seções planas são unidades figurais bidimensionais com importante contribuição para a visualização no estudo das superfícies quádricas, consistindo em unidades significantes gráficas (variáveis visuais) que viabilizam a correlação com as respectivas unidades significantes simbólicas.

Ao considerar a desconstrução dimensional das formas prontamente reconhecidas pela percepção, provocamos o reconhecimento de outras não percebidas no primeiro momento. Essa passagem de uma dimensão a outra representa um importante salto cognitivo, uma vez que para ver geometricamente uma figura é necessário operar uma desconstrução dimensional das formas imediatamente reconhecidas em outras inicialmente não observadas (Duval, 2011a).

Cada SEAI foi elaborada visando a aprendizagem com autonomia, considerando a primazia do fazer para compreender no processo de construção do conhecimento matemático. Entendendo a aprendizagem como o desenvolvimento de esquemas que constituem a estrutura cognitiva do sujeito, as atividades conduzem o aluno à construção do seu conhecimento da forma mais autônoma possível. Assim, o objetivo é “[...] produzir a maior aprendizagem a partir do mínimo de ensino [...]” (Papert, 2008, p.134), situação em que os participantes devem mobilizar os esquemas de utilização necessários para a realização das atividades com a menor intervenção possível de outros.

O papel do ensino nesse processo é o de cooperação do professor/pesquisador (Guimarães *et al.*, 2021; Ribeiro *et al.*, 2023), provocando os conflitos cognitivos necessários para desencadear as abstrações reflexionantes com tomada de consciência (abstrações refletidas). A concepção das SEAI também é inspirada em estudos de Gravina e Santarosa (1999), que classificam as atividades em dois grandes tipos: as de expressão e as de exploração. No primeiro caso, o sujeito cria seus próprios modelos para exteriorizar suas concretizações mentais, podendo experimentar, ajustando suas concepções.

No outro caso, é apresentado um modelo pronto que é explorado e, não tendo sido construído por ele, conduz ao desafio de compreendê-lo, favorecendo a construção de relações e conceitos. De forma similar à proposta de Gravina e Santarosa (1999), as atividades nas SEAI são propostas por meio de desafios que aumentam progressivamente, envolvendo uma espécie de taxonomia das ações: a exploração, a construção e a criação. Enquadrando-se na perspectiva piagetiana, em que o progresso do conhecimento se dá pela expansão da estrutura cognitiva do sujeito, exige sua ação, capacitando-o a fazer mais e melhor.

Cada SEAI possui um conjunto de questões norteadoras e um questionário com questões mais abertas. O questionário (APÊNDICE C — Questionários) visa complementar a observação com mais evidências sobre os esquemas de utilização constituídos pelos

participantes, as restrições e contribuições dos artefatos, as dificuldades encontradas, a adequação das atividades propostas, as contribuições para a prática docente e a compreensão do papel do professor e do aluno no processo de construção do conhecimento matemático. Já as questões norteadoras apresentam um caminho a ser percorrido pelo participante na construção do seu conhecimento.

A subseção a seguir apresenta uma discussão do ponto de vista da concepção e análise dessas questões norteadoras, presentes nas atividades das SEAI propostas nesta investigação.

4.2 Situação de ensino e aprendizagem instrumental

Essa subseção apresenta o objetivo e as possibilidades de análise que motivaram a concepção de cada SEAI. Apresentando um panorama geral do conjunto das SEAI, essa subseção mostra como os aspectos teóricos, metodológicos e tecnológicos permeiam as atividades propostas. Para dar conta da complexidade epistemológica, cognitiva e didática do estudo de superfícies quádricas, no planejamento das SEAI foram considerados alguns dados levantados na revisão bibliográfica.

Os estudos analisados evidenciaram o privilégio pelo registro algébrico, pouca indicação do uso de *software* e de uma abordagem das quádricas a partir das cônicas. E estas últimas, quando utilizadas, não contemplavam as correlações semióticas. Entendendo que a coordenação dos diferentes registros é uma condição necessária para a compreensão em matemática, as atividades envolveram as correlações entre as diferentes representações semióticas das superfícies quádricas.

No planejamento das SEAI, foram considerados os seguintes aspectos destacados nesses estudos: a utilização de estratégias de ensino para engajamento dos estudantes, o procedimento informático de interpretação global para correlação entre registros simbólico e gráfico, o uso das seções planas para promover a desconstrução dimensional e a utilização do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra. Também buscamos utilizar estratégias que, associadas ao uso do *software*, promovessem uma postura ativa dos estudantes no processo de construção do conhecimento matemático.

Em concordância com os dados levantados na revisão de literatura, nas SEAI são propostas atividades investigativas com apoio de tecnologias, envolvendo a intervenção da pesquisadora para apoio ao participante apenas quando necessário. E também contemplaram a mediação pelo *software*, que ofereceu aos participantes a possibilidade de testar e validar ou refutar suas hipóteses. Assim, as atividades foram propostas de forma que, com a menor

intervenção possível da pesquisadora, os participantes tivessem autonomia na (re)construção de seus conhecimentos.

As SEAI abordam conceitos sobre as superfícies quádricas, exigindo conhecimentos prévios relativos aos espaços dimensionais, ponto, reta, plano e cônicas. A primeira situação de ensino e aprendizagem instrumental foi planejada para promover a mobilização ou (re)constituição desses esquemas prévios, uma vez que eles são indispensáveis para a constituição dos novos esquemas conceituais relativos aos conceitos de quádricas.

Os esquemas conceituais, que as SEAI possibilitam mobilizar ou constituir, referem-se à identificação das representações gráficas, simbólicas e em língua natural das quádricas e às transformações de tratamentos e conversões, para correlações entre registros de representação. As atividades das SEAI 1 a 6 foram planejadas com o intuito de promover a constituição desses esquemas. Envolvendo o uso de tecnologias, essas atividades possibilitam a mobilização de esquemas de utilização para a apreensão de conceitos sobre as superfícies quádricas.

As atividades das SEAI 7 a 10 envolvem a mobilização de esquemas de utilização previamente constituídos para a constituição de novos esquemas, especialmente relacionados à obtenção de construções geométricas em ambientes de matemática dinâmica. Assim, essas atividades possibilitam a inferência sobre as representações mentais de superfícies quádricas envolvidas, constituídas pelos participantes nas SEAI anteriores. Por outro lado, acessando novamente esses conhecimentos, os participantes têm a oportunidade de enriquecer essas representações mentais por meio de novas apreensões conceituais.

Envolvendo a obtenção de construções geométricas, essas atividades visam intensificar o desenvolvimento da gênese instrumental dos participantes no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra. Para isso, as atividades nessas SEAI consideram algumas das formas apontadas por Bretscher (2009) para apoiar esse processo: (1) desvendar a dependência geométrica; (2) explorar a variação dinâmica; (3) reconhecer as diferenças entre os ambientes dinâmico e estático; (4) destacar as restrições e limitações do *software*.

As duas últimas são exploradas ao longo das SEAI, enquanto as duas primeiras nas atividades que envolvem as construções geométricas. A dependência geométrica refere-se às propriedades dos objetos matemáticos e as relações entre esses elementos, que precisam ser consideradas para a estabilidade da construção. A variação dinâmica é a característica do *software*, que permite verificar se a construção permanece estável diante do movimento, possibilitando a identificação de possíveis erros de construção.

As SEAI visam envolver o participante no processo de construção do conhecimento sobre superfícies quádricas, por meio de desafios progressivos que promovam um

desenvolvimento contínuo. Envolvendo uma espécie de taxonomia das ações, as atividades apresentam exigências progressivas - partindo da exploração, passando pela construção e chegando à criação – esta última considerada por Piaget o estágio mais avançado do conhecimento.

A Figura 46, alusiva ao conceito de espiral do conhecimento de Piaget, apresenta o conjunto das SEAI.

Figura 46 – Trajetória da construção do conhecimento sobre quádricas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada ‘espira’ simboliza a estrutura cognitiva do participante, representando o conjunto de esquemas possuídos por ele quando cada SEAI é proposta. Como estruturas mentais que se transformam, esses esquemas modificam-se quando o indivíduo age por abstrações pseudoempíricas sobre o objeto do conhecimento, desencadeando a criação de novos esquemas ou modificação de antigos. A coordenação desses esquemas possibilita as abstrações refletidas que promovem a criação de novas estruturas cognitivas.

Esse processo de abstração reflexionante, composto por reflexionamentos e reflexões, dá origem aos novos patamares. O reflexionamento é responsável por projetar sobre um patamar superior aquilo que foi retirado do patamar inferior e, a reflexão, por reorganizar o patamar superior para acomodar o que foi transferido do inferior. Os desequilíbrios causados pelos novos desafios, alternando continuamente entre reflexionamentos e reflexões, provocam o processo de equilibração. O avanço para um novo patamar com alargamento da espira,

simboliza uma expansão da estrutura cognitiva do sujeito, que se amplia em decorrência da aquisição de novos conhecimentos.

Nessa perspectiva, considerando e partindo da estrutura cognitiva existente, cada SEAI foi planejada de modo a oferecer atividades compatíveis com o degrau onde o participante encontra-se para, de forma progressiva, promover a mudança de patamar. Os desafios foram propostos para desencadear a construção do conhecimento que, com base em Piaget, devem ser uma união indissociável entre a experiência e a dedução e entre os dados oferecidos pelo objeto e as ações ou operações do sujeito.

Considerando que para “compreender matemática” é necessário “fazer matemática”, as SEAI propõem atividades que conduzem o participante por meio de uma construção o mais autônoma possível. Para isso, em contrapartida, é preciso considerar que para “fazer matemática” é necessário “compreender matemática”. Assim, os desafios propostos precisam estar em acordo com o patamar em que o participante se encontra, subsidiando-o para que ele sempre tenha as condições necessárias para dar continuidade ao seu processo de construção do conhecimento.

O primeiro patamar simboliza os esquemas que podem ser mobilizados ao iniciarmos a SEAI 1, com a retomada dos conceitos que são pré-requisitos ao estudo de superfícies quádricas. Os esquemas constituídos nessa ocasião promovem a mudança de patamar com expansão na estrutura cognitiva do participante, dando-lhe condições para os desafios propostos na SEAI 2, que abordam as representações figurais e em língua natural de superfícies quádricas. Assim, o segundo patamar representa a nova estrutura cognitiva do participante, cujos esquemas podem ser mobilizados para a realização das atividades na SEAI seguinte, e assim por diante.

Então, a SEAI 3 apresenta um esquema para reconhecimento de uma representação em diferentes registros, as SEAI 4 e 5 apresentam unidades significantes que possibilitam a correlação entre representações gráfica, simbólica e em língua natural das superfícies quádricas, a SEAI 6 completa as unidades significantes necessárias à correlação entre os diferentes registros de representação das superfícies quádricas, as SEAI 7 e 8 apresentam desafios que envolvem a desconstrução dimensional para resolver problemas com a percepção e as SEAI 9 e 10 apresentam desafios que envolvem superfícies de revolução³² e regradadas.

³² “Consideremos uma curva C e uma reta r , ambas contidas num plano Π . Imaginemos o movimento de rotação desse plano em torno da reta r . O conjunto de pontos do espaço descrito pela curva C , ao dar uma volta completa em torno de r , determinam uma superfície S denominada superfície de revolução. A curva C é denominada uma geratriz de S e a reta r é chamada eixo de revolução (ou eixo de rotação) de S .” Disponível em: <https://www.professores.uff.br/kowada/wp-content/uploads/sites/63/2017/08/ga2V1aula13.pdf> Acesso em: 11 jan. 2022.

As atividades propostas nas SEAI buscam levar o participante a fazer para compreender, estabelecendo as correlações entre os registros gráfico, simbólico e em língua natural dos conceitos que abordam. Por um lado, a elaboração das atividades em cada SEAI precisa considerar o patamar em que o sujeito se encontra, para que ele tenha condições necessárias para realizá-las. De outro lado, as atividades criadas precisam oferecer aos sujeitos novos desafios, para possibilitar o avanço com a mudança de patamar.

Assim, na SEAI 1 (**APÊNDICE D** — SEAI 1) escolhemos promover uma aproximação com os conceitos que são pré-requisitos para o estudo das superfícies quádricas, a saber: espaços dimensionais, ponto, reta, plano e cônicas. Embora a proposta dessa SEAI seja de conhecer os esquemas de utilização que os participantes já possuem e prepará-los para o estudo das superfícies quádricas, as atividades propostas já foram concebidas levando em consideração os aspectos teóricos, metodológicos e tecnológicos discutidos na subseção anterior.

Assim, essas atividades buscam estabelecer as correlações entre os registros gráfico, simbólico e em língua natural dos conceitos que abordam. A atividade 1 trata dos espaços de dimensão 0, 1, 2 e 3. A atividade 2 aprofunda esse conhecimento, explorando as coordenadas dos pontos nos diferentes quadrantes do \mathbb{R}^2 e octantes do \mathbb{R}^3 . A atividade 3 trata dos conhecimentos relativos a planos no \mathbb{R}^3 . As atividades 4 e 5 propõe questões para explorar os conhecimentos de retas no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , respectivamente. Por fim, as atividades 6, 7 e 8 são propostas para retomar conceitos sobre parábola, elipse e hipérbole, respectivamente.

Além da aproximação com o conteúdo de Geometria Analítica, o participante tem a oportunidade de iniciar a utilização das ferramentas disponíveis no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra. As atividades propostas nessa SEAI têm dupla finalidade, conhecer os esquemas já constituídos pelos participantes e desenvolver os necessários ao estudo das superfícies quádricas. Dessa forma, dá-se início à mobilização ou elaboração dos primeiros esquemas de utilização, assim como à observação da contribuição das ferramentas do GeoGebra para o estudo dos quádricas.

Iniciando o estudo das quádricas propriamente dito, na SEAI 2 (**APÊNDICE E** — SEAI 2) são propostas atividades que exploram as representações figural e em língua natural gerais dessas superfícies, por meio da variável visual ‘seção plana’. As atividades consistem na identificação das suas seções planas para a correlação entre os registros figural e em língua natural. Isso é possível porque as denominações das superfícies quádricas têm relação com as seções planas que as constituem.

Para a realização dessas atividades, são apresentadas representações figurais bi e tridimensionais, estáticas e dinâmicas, obtidas por meio de diferentes recursos. Na primeira

parte (atividades de 1 a 5), o participante é convidado a reconhecer as seções planas apenas por meio da observação e manipulação das diferentes representações figurais das superfícies quádricas (2D-estática, 3D-estática, 2D-dinâmica, 3D-dinâmica), sem o auxílio de um plano. Na segunda parte (atividade 6), o participante pode inserir a equação de um plano na janela de álgebra, confirmando suas respostas nas atividades anteriores.

A atividade 1 propõe a observação das representações figurais 2D-estáticas, que são representações como as impressas em papel, porém oferecidas num arquivo do Google Docs. Na atividade 2, são fornecidas representações figurais 3D-estáticas, obtidas por modelos impressos em 3D. A atividade 3 oferece as representações figurais 2D-dinâmicas por meio de uma janela de visualização do GeoGebra 3D, que apresenta uma imagem bidimensional da superfície quádrica.

Nas atividades 4 e 5, as representações figurais 3D-dinâmicas são apresentadas por meio de anáglifo e de realidade aumentada, respectivamente. Por fim, na atividade 6 o participante pode utilizar a janela de álgebra do GeoGebra para inserir a equação de um plano, confirmando ou refutando suas conjecturas nas atividades anteriores. As atividades propostas envolvem a desconstrução dimensional quando, para reconhecimento da quádrica (objeto matemático tridimensional), analisamos as suas seções planas (bidimensionais).

Consistindo nas ‘fatias’ que constituem a superfície quádrica, essas seções planas qualificam as apreensões figurais desse objeto matemático, enriquecendo a sua apreensão conceitual. Essa SEAI permite observar e descrever as apreensões figurais proporcionadas pelas diferentes representações e suas contribuições para a correlação entre suas representações figural e em língua natural gerais. Entendemos que a segunda parte (atividade 6) apresenta mais possibilidade de revelar as seções planas do que a primeira, devido ao apoio do plano no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra.

Além dos esquemas conceituais que as atividades nessa SEAI possibilitam mobilizar ou constituir, ao começarem a utilização do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, os participantes podem iniciar os seus processos de gênese instrumental. Depois de apresentar as quádricas através das suas representações figurais e em língua natural, a SEAI 3 (**APÊNDICE F — SEAI 3**) apresenta um esquema que mistura procedimentos algébricos e gráficos para a correlação entre registros de representação de superfícies quádricas por meio da variável visual ‘seção plana’.

O esquema possibilita a correlação entre registros gráfico e simbólico a partir de quatro transformações, duas conversões e dois tratamentos. Essa SEAI inicia apresentando as equações de um hiperboloide de uma folha e de um paraboloides hiperbólico para promover uma primeira

diferenciação entre representações simbólicas. A primeira equação, com todos termos quadráticos, é tratada nas atividades 1 e 2. A segunda, com dois termos quadráticos e um linear, é tratada na atividade 3.

A atividade 1 propõe um procedimento algébrico que consiste em tratamentos sobre a representação simbólica da quádriga, de modo a obter as representações simbólicas das suas seções planas. Na atividade 2, o procedimento gráfico proposto envolve a obtenção das representações gráficas das seções planas da quádriga; a seguir, os tratamentos sobre essa representação gráfica, de modo a obter as representações gráficas das suas seções planas; e, por fim, a conversão entre registros gráfico e simbólico das seções planas da quádriga.

A atividade 3 propõe a aplicação dos dois procedimentos, algébrico e gráfico, à segunda equação. Além da correlação entre registros gráficos e simbólicos, esse esquema possibilita a constituição das representações em língua natural geral e específicas. Isso porque promove a identificação do tipo de quádriga (representação em língua natural geral) e a diferenciação entre quádrigas do mesmo tipo (representação em língua natural específica).

Conforme Silva e Moretti (2019), os procedimentos algébricos e gráficos utilizados nesse esquema possibilitam as operações responsáveis pela significação. Sem isso, a passagem de um registro ao outro se daria apenas em forma de codificações em lugar de conversões. Esses procedimentos, considerando o uso da variável visual ‘seção plana’, envolvem a desconstrução dimensional.

Apresentando exigência maior que a da SEAI anterior, essas atividades podem promover a constituição de novos esquemas de utilização. Com isso, esperamos que seja possível observar a mobilização ou constituição, em especial, dos esquemas conceituais. Os esquemas conceituais nessa SEAI estão relacionados à identificação da superfície, tratamentos sobre as representações gráficas e simbólicas, conversões entre esses registros de representação, estabelecimento das representações em língua natural específicas.

Esperamos que também possam ser mobilizados ou constituídos os esquemas relativos ao uso das janelas de álgebra e de visualização do GeoGebra e da ferramenta de intersecção de superfícies para a correspondência entre representações gráficas e simbólicas. Essa utilização do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra também pode gerar evidências sobre suas limitações e potencialidades para o estudo de superfícies quádrigas.

Depois de fornecida a principal ferramenta conceitual para o estudo das quádrigas na SAEI 3, o esquema envolvendo os tratamentos e conversões, as SEAI 4 e 5 visam estabelecer as correlações entre os registros gráfico, simbólico e em língua natural dessas superfícies. Para

isso, são propostas atividades em que as unidades significantes gráficas e simbólicas das superfícies quádricas são identificadas e correlacionadas.

A SEAI 4 (**APÊNDICE G** — SEAI 4) explora as unidades significantes para distinguir elipsoides em α e β , esferoides e esfera, correlacionando suas representações gráficas e simbólicas e estabelecendo suas representações em língua natural específicas. Para isso, as atividades propõem a análise das possíveis posições que essas quádricas podem assumir no sistema cartesiano, correlacionando com as possíveis formas de escrever suas equações.

Utilizando as variáveis visuais ‘comprimento dos eixos’ e ‘posição dos eixos em relação aos eixos coordenados’, é possível distinguir treze casos para o elipsoide. A variável ‘comprimento dos eixos’, possuindo três valores visuais (três eixos com medidas diferentes, dois eixos com medidas iguais e uma diferente e três eixos com medidas iguais), permite a distinção de três casos. Esses três casos – elipsoides em α e β , esferoides e esferas - são apresentados, respectivamente, nas atividades 1, 2 e 3.

A variável ‘posição dos eixos em relação aos eixos coordenados’ possui seis valores visuais no caso dos elipsoides em α e β e seis dos esferoides. A discriminação dos seis casos de elipsoides em α e β e dos seis casos de esferoides é realizada nas atividades 1 e 2, respectivamente. A identificação das diferenças visuais nas suas representações gráficas, relacionando-as com as correspondentes nas representações simbólicas, possibilita a correlação entre esses registros de representação e o estabelecimento das representações em língua natural para os treze casos de elipsoide.

Dessa forma, essa SEAI envolve a desconstrução dimensional, quando as seções planas (2D) são utilizadas para o estudo dos elipsoides (3D). As atividades propõem o acesso aos elipsoides por meio de representações gráficas, simbólicas e em língua natural, tratamentos e conversões para correlação entre esses registros de representação. Com isso, esperamos que seja possível observar a mobilização ou constituição desses esquemas conceituais.

Os esquemas conceituais nessa SEAI estão relacionados à identificação dos treze casos de elipsoides, tratamentos sobre as suas representações gráficas e simbólicas, conversões entre esses registros de representação e, por fim, o estabelecimento da correlação. No entanto, ampliando o repertório de ferramentas para obtenção da esfera como superfície de revolução, essa SEAI promove também a constituição de novos esquemas que envolvem a apropriação desses artefatos.

Os esquemas relacionados ao uso das ferramentas, que podem ser mobilizados ou constituídos por meio das atividades aqui propostas, referem-se ao uso das janelas de álgebra e de visualização 2D e 3D do GeoGebra para a exploração de um esferoide e para a construção

de uma esfera como superfície de revolução. E, considerando que as características do instrumento tendem a ficar mais transparentes na medida em que se intensifica o seu uso, essa ampliação pode gerar mais evidências sobre as contribuições das ferramentas para o estudo das quádricas.

Com a mesma proposta que a SEAI anterior, a SEAI 5 (**APÊNDICE H** — SEAI 5) explora as unidades significantes para distinguir hiperboloides e paraboloides, correlacionando suas representações gráficas e simbólicas e estabelecendo suas representações em língua natural específicas. Os hiperboloides são tratados nas atividades 1 e 2, quando os sinais dos coeficientes dos termos quadráticos (unidades significantes simbólicas gerais) possibilitam a diferenciação entre os hiperboloides de uma e de duas folhas.

A atividade 3 analisa outras possibilidades para as representações simbólicas que têm todos os termos quadráticos. As atividades 4 e 5 tratam dos paraboloides, propondo a diferenciação entre os paraboloides elípticos e hiperbólicos por meio da análise dos sinais (unidades significantes simbólicas gerais) nas suas representações simbólicas. As unidades significantes simbólicas específicas possibilitam a diferenciação entre quádricas do mesmo tipo, levando em consideração a posição no sistema cartesiano.

Isso é feito por meio da análise dos sinais dos coeficientes que precedem as variáveis nas equações das quádricas e da correspondente posição da representação gráfica no sistema cartesiano. As atividades 1 a 5 propõem essa correlação entre os registros gráfico e simbólico dos hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas, paraboloides elíptico e dos paraboloides hiperbólicos, respectivamente.

A partir da correlação entre os registros gráfico e simbólico, é proposta a constituição dos registros em língua natural. Por fim, como os hiperboloides e paraboloides são tratados separadamente nas atividades anteriores, a atividade 6 propõe questões que possibilitam a distinção entre essas quádricas. Nesse caso, as unidades significantes gerais que possibilitam essa diferenciação entre as representações simbólicas dos hiperboloides e paraboloides são os termos quadráticos e linear.

Essa SEAI propõe atividades que envolvem o acesso aos hiperboloides e paraboloides por meio de representações gráficas, simbólicas e em língua natural, tratamentos e conversões para correlação entre esses registros de representação. Assim, essas atividades podem promover a constituição de novos esquemas de utilização, em especial, os relacionados aos conceitos sobre quádricas.

Os esquemas conceituais que podem ser mobilizados ou constituídos nessa SEAI estão relacionados à identificação dos hiperboloides e paraboloides nos três registros de

representação, aos tratamentos efetuados sobre as representações gráficas e simbólicas, às conversões entre esses registros de representação e, por fim, o estabelecimento da correlação.

Os esquemas relacionados ao uso das ferramentas que podem ser mobilizados ou constituídos por meio das atividades propostas nessa SEAI referem-se ao uso das janelas de álgebra e de visualização do GeoGebra 3D e da ferramenta ‘intersecção de superfícies’ para correspondência entre as representações gráficas e simbólicas. Essa utilização do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra também pode gerar mais evidências sobre suas contribuições para o estudo dos hiperboloides e paraboloides.

A SEAI 6 (**APÊNDICE I** — SEAI 6) completa o conjunto de elementos necessários para a correlação entre registros de representação de superfícies quádricas, quando propõe a conversão do registro gráfico para o simbólico. As unidades significantes gerais e específicas nas SEAI anteriores permitiram diferenciar os tipos de quádrica e os possíveis casos relativos à posição da superfície no sistema cartesiano. Essa SEAI vai propor a identificação dos coeficientes na representação simbólica dessas superfícies a partir da sua representação gráfica, completando todas as condições necessárias para a conversão do registro gráfico para o simbólico, e vice-versa.

Para isso, de forma progressiva, são propostas atividades que consistem em encontrar as representações simbólicas das quádricas, obtendo representações gráficas que se sobrepõem exatamente às que já estão presentes na janela de visualização. A atividade 1 retoma a relação entre as representações gráfica e simbólica, considerando as características da equação da quádrica quanto aos sinais e termos quadráticos e lineares. Depois disso, a atividade 2 propõe uma estimativa dos valores dos coeficientes na equação das quádricas, apenas pela observação das suas representações gráficas.

Por fim, na atividade 3, o participante pode utilizar as ferramentas do GeoGebra para obter os valores desses coeficientes. Isso pode ser realizado por meio das intersecções das superfícies com os planos coordenados, uma vez que cada seção plana tem dois coeficientes da equação da quádrica. Dessa forma, a desconstrução dimensional faz-se presente, favorecendo a conversão entre os registros gráfico e simbólico. Além disso, esquemas de utilização já constituídos anteriormente, em especial os conceituais, são mobilizados para a constituição de novos esquemas.

Com a SEAI 6, fechamos a parte deste estudo que tem como foco os conceitos sobre quádricas, com o rol de condições que possibilitam as correlações entre os diferentes registros de representação dessas superfícies. Nas SEAI 7 e 8 são propostas atividades que envolvem

mudanças de dimensão. A SEAI 7 propõe a passagem do tridimensional para o bidimensional e, ao contrário, na SEAI 8 é proposta a passagem do bidimensional para o tridimensional.

A SEAI 7 (**APÊNDICE J** — SEAI 7) propõe a visualização de uma seção plana pouco evidente do parabolóide hiperbólico, envolvendo uma questão relacionada à percepção imediata e desconstrução dimensional. As três primeiras atividades nessa SEAI preparam o participante, retomando e aprofundando o conhecimento dessa quádriga. Nessa oportunidade, são exploradas as seções planas parabólicas e hiperbólicas da superfície para, na atividade 4, apresentar o problema.

O desafio proposto na atividade 4 consiste na identificação da seção plana obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico com o plano xoy que, à primeira vista, pode não parecer um par de retas concorrentes. Além da identificação no registro gráfico, essa atividade propõe a correlação com o registro simbólico, quando o participante precisa obter algebricamente essa seção plana. Por fim, a atividade 5 propõe o trânsito entre registros de representação gráfico, simbólico e em língua natural.

Propondo uma desconstrução dimensional da representação imediatamente reconhecida em outras não observadas à primeira vista, essa SEAI possibilita a constituição da imagem mental das retas concorrentes que são seções planas pouco evidentes do parabolóide hiperbólico. Para isso, representações gráficas são utilizadas para que o participante possa manipular a quádriga, em acordo com Notare e Basso (2016), construindo imagens com o realismo necessário para encontrar a solução do problema.

Essa SEAI oportuniza a mobilização de esquemas de utilização constituídos em atividades anteriores. Os esquemas conceituais estão relacionados à identificação da superfície, tratamentos sobre as representações gráficas e simbólicas, conversões entre esses registros de representação e o estabelecimento da correlação entre eles. Em especial, a conversão entre as representações gráfica e simbólica das retas concorrentes que são seções planas do parabolóide hiperbólico. E, segundo Duval (2011b), as maiores dificuldades de são observadas na atividade de conversão do registro gráfico para o simbólico.

Os esquemas relacionados ao uso das ferramentas nessas atividades referem-se à utilização das janelas de álgebra e de visualização do GeoGebra 3D e da ferramenta de intersecção de superfícies para a correspondência entre representações gráficas e simbólicas. Essa utilização do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra pode gerar mais evidências sobre os limites e potencialidades de suas ferramentas para o estudo das quádrigas.

A SEAI 8 (**APÊNDICE K** — SEAI 8) também envolve uma mudança de dimensão, mas ao contrário da SEAI 7, propõe a passagem do bidimensional para o tridimensional. Com

inspiração em problemas do tipo ‘caixa-preta’, as atividades dessa SEAI propõem a reconstrução das configurações da construção que gera uma quádriga a partir de uma cônica. Explorando uma representação dinâmica da superfície, o participante observa a dependência entre os elementos e o que permanece invariante, desvendando a sua construção.

Inicialmente, a atividade 1 propõe uma antecipação, quando por meio da apresentação do problema com uma representação gráfica 2D-estática, o participante tem que identificar a(s) quádriga(s). Na atividade 2, o participante é convidado a identificar a ‘quádriga escondida’ por meio de uma representação gráfica 2D-dinâmica, onde ele pode movimentar um ponto que desliza sobre uma hipérbole. Na atividade 3, o participante precisa identificar os elementos necessários e a dependência entre eles e gerar a quádriga a partir da cônica.

Essas atividades possibilitam a mobilização de esquemas de utilização desenvolvidos pelos participantes em SEAI anteriores. As exigências cognitivas se ampliam no decorrer dessa SEAI, oportunizando a constituição de novos esquemas de utilização. E, a ampliação do repertório de ferramentas do GeoGebra necessárias para resolver o problema do tipo ‘caixa-preta’ pode gerar mais evidências sobre a gênese instrumental dos participantes.

As atividades nas SEAI 7 e 8 exploram mais diretamente a dialética entre a percepção e a desconstrução dimensional. Envolvendo a desconstrução dimensional, essas atividades podem dirimir possíveis enganos nas apreensões figurais, enriquecendo as apreensões conceituais. Com isso, essas atividades podem tornar mais evidentes as contribuições da desconstrução dimensional para a visualização geométrica em situações de ensino e aprendizagem que envolvem as quádrigas.

Por fim, as SEAI 9 e 10 propõem desafios que envolvem construções geométricas, intensificando ainda mais o processo de gênese instrumental dos participantes. A SEAI 9 (APÊNDICE L — SEAI 9) propõe atividades que envolvem a construção de superfícies de revolução, sendo necessária a mobilização de esquemas de utilização para constituição de novos esquemas. Após apresentar uma definição para superfície de revolução, as atividades são propostas de forma progressiva no que diz respeito à complexidade dos desafios.

Na atividade 1, é proposta a observação de uma construção em que a quádriga é obtida pela rotação de uma cônica em torno de um dos eixos coordenados. Com acesso aos dados disponíveis na janela de álgebra, o participante é convidado a identificar os elementos necessários à construção e a dependência entre eles. As atividades 2 a 4 desafiam o participante a obter as construções de diferentes superfícies de revolução.

Ao contrário das anteriores, na atividade 5 o participante tem que obter uma quádriga específica por meio da rotação de uma cônica, sendo desafiado a sobrepor a superfície já

existente na janela de visualização. Por fim, a atividade 6 (ao contrário da 5), apresenta uma construção com uma quádriga, onde são conhecidas duas de seções planas e o desafio é encontrar a equação dessa superfície.

Dessa forma, temos novamente a contribuição da variável visual ‘seção plana’ na conversão do registro gráfico para o simbólico que, segundo Duval (2011a), é a transformação em que mais se observa dificuldades em realizar. Propondo a passagem de uma dimensão a outra, essa atividade também envolve a desconstrução dimensional, favorecendo a diminuição da chance de enganos nas apreensões figurais e enriquecendo as apreensões conceituais.

Mobilizando esquemas de utilização desenvolvidos pelos participantes em SEAI anteriores e, com exigências cognitivas que se ampliam, as atividades propostas nessa SEAI podem promover a expansão de esquemas relacionados à apropriação de novas ferramentas, com tomadas de consciência acerca dos conceitos envolvidos. Proporcionando uma ampliação no repertório de ferramentas do GeoGebra utilizado, podem gerar mais evidências sobre o processo de gênese instrumental dos participantes.

Da mesma forma que na SEAI anterior, a SEAI 10 (**APÊNDICE M** — SEAI 10) propõe atividades que requerem a mobilização de esquemas de utilização para a constituição de novos esquemas. Os desafios propostos nessa SEAI envolvem as superfícies regradas, propondo questões que ampliam o repertório de ferramentas do GeoGebra para resolvê-las. Depois de apresentar uma definição para superfícies regradas, as atividades são propostas de forma progressiva em relação ao grau de complexidade na resolução.

Assim, preparando o participante para as atividades seguintes, as atividades 1 e 2 propõem a obtenção de uma superfície cilíndrica hiperbólica e de uma superfície cônica, respectivamente. A atividade 3 apresenta um hiperboloide de uma folha que é gerado por duas retas concorrentes, propondo uma análise da construção para preparar o participante para a próxima atividade. O primeiro desafio é proposto na atividade 4, quando o participante precisa obter um hiperboloide de uma folha gerado por um par de retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy .

Na atividade 5, sendo fornecida a representação gráfica de um hiperboloide de uma folha, o participante tem que obter as retas concorrentes que o desenham. Nessa atividade também é proposta uma conversão da representação gráfica para a simbólica, quando o participante precisa encontrar a equação dessa quádriga. Outro desafio é proposto na atividade 6, que propõe a obtenção de um paraboloides hiperbólico como superfície regrada. Para tal, o participante precisa encontrar as retas concorrentes que desenham essa superfície.

A desconstrução dimensional se faz presente novamente nessa SEAI, qualificando as apreensões figurais que, por sua vez, favorecem o enriquecimento das apreensões conceituais. As exigências se ampliam no decorrer das atividades, necessitando da mobilização ou constituição de esquemas de utilização relacionados, tanto aos conhecimentos matemáticos quanto ao uso das ferramentas do GeoGebra.

Ampliando progressivamente as exigências cognitivas, entendemos que as atividades propostas nessa SEAI podem favorecer a expansão dos esquemas de utilização, com tomadas de consciência acerca dos conceitos envolvidos. A ampliação no repertório de ferramentas do GeoGebra, necessárias para realizar as tarefas propostas, pode favorecer o processo de gênese instrumental dos participantes.

Essas SEAI foram oferecidas por meio de um projeto de extensão³³, vinculado ao projeto de pesquisa de doutorado³⁴, que foi submetido ao CEP - Comitê de Ética na Pesquisa pela Plataforma Brasil. O parecer consubstanciado com a aprovação do projeto de pesquisa e o TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido podem ser encontrados no **APÊNDICE B** — TCLE e parecer consubstanciado ao CEP. Esse termo esclarece os objetivos da pesquisa (para a investigadora) e do projeto (para os participantes), a programação, os benefícios e as implicações para os participantes, a forma de coleta de dados etc.

Os participantes também foram informados sobre as gravações para a coleta de dados, sendo solicitada autorização para divulgação de imagens, transcrições de áudios e produções, sem identificação dos autores. Através do TCLE, ficou esclarecido que a pesquisa visa compreender a dinâmica da relação entre o participante e as tecnologias digitais durante o seu processo de construção de conhecimento. Esse termo também apresenta os possíveis proveitos para o participante, que se refere à vivência das situações de ensino e aprendizagem instrumental, pensadas para oferecer benefícios também aos participantes.

As subseções seguintes abordam aspectos metodológicos dessa investigação, da classificação aos procedimentos para a coleta e análise dos dados.

4.3 Especificidades metodológicas da investigação

³³ Projeto de extensão “Ensinar ou Aprender? Reflexões a partir de um estudo sobre quádras em ambiente de matemática dinâmica”, vinculado ao Edital IFRS nº 57/2020 – Registro de ações de extensão – Fluxo Contínuo 2021/2022. Cadastro em 2023: Projeto de extensão ‘Competências digitais docentes no ensino de matemática’, vinculado ao Edital PROEX - Registro de ações de extensão sem auxílio financeiro – Fluxo Contínuo Permanente.

³⁴ Pesquisa de doutorado vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação e ao Edital IFRS Nº 75/2019 – Fluxo Contínuo – Projetos de Pesquisa e/ou Inovação Desenvolvidos por Servidores do IFRS em Cursos de Pós-Graduação Lato Sensu, Programas de Pós-Graduação Stricto Sensu ou Pós-Doutorado do Campus Canoas

Tratando do processo de construção do conhecimento sobre as superfícies quádricas, essa pesquisa se enquadra em duas grandes áreas de estudos de pós-graduação, Informática na Educação e Educação Matemática. E, considerando que os pesquisadores de cada área do conhecimento organizam as estratégias mais adequadas às suas práticas, buscamos compreender as especificidades metodológicas dessas áreas envolvidas.

Segundo Gomes e Gomes (2020a, p. 20), “A identidade epistemológica da Informática na Educação confunde-se com duas grandes áreas: Ciência da Computação e Humanas”. De acordo com os autores, a pesquisa em Ciência da Computação assemelha-se à pesquisa na Matemática e áreas afins, mas também envolve a análise de sistemas informáticos criados por humanos.

Com a evolução dos sistemas computacionais, algumas subáreas da Ciência da Computação passam a seguir aspectos epistemológicos da área das Ciências Humanas. Uma dessas subáreas é a de Interação Humano-Computador e a outra é a de Informática na Educação. Não gerando conhecimentos de base nem sobre seres humanos e nem sobre computação, a pesquisa em Informática na Educação é aplicada, utilizando conhecimentos, métodos e teorias de ambas para construir novos conhecimentos sobre a relação entre sistemas e sujeitos (Gomes; Gomes, 2020a).

É o caso desta pesquisa, que pretende analisar os processos cognitivos desencadeados pelo participante, durante a aprendizagem das superfícies quádricas com apoio das tecnologias digitais, a partir das suas representações semióticas. A presente investigação é uma pesquisa de natureza aplicada, por gerar conhecimentos que podem ser empregados na solução de problemas que envolvem interesses locais, uma vez que gera conhecimentos que agregam valor à prática de estudantes e professores.

Quanto à abordagem do problema, é uma pesquisa qualitativa por se tratar da análise de uma relação subjetiva estabelecida entre o sujeito e as ferramentas na construção do seu conhecimento. Tendo o processo como foco principal, deve ser tratada por meio de uma interpretação de fenômenos, permitindo a realização de inferências sobre os significados que os sujeitos constroem.

Uma pesquisa de abordagem qualitativa refere-se a fenômenos e não a fatos. Um fenômeno, conforme Martins e Bicudo (1989 apud Garnica, 1997) é aquilo que pode se tornar manifesto, visível. Já os fatos são eventos, realidades objetivas, dados empíricos disponíveis ou apreensíveis pela experiência, observáveis e mensuráveis. Segundo Alves-Mazzotti (2006):

É comum que pesquisadores, sobretudo oriundos das Ciências Exatas, a priori, estranhem os procedimentos adotados em pesquisas de cunho qualitativo. Isto se deve, em parte, ao apego a paradigmas de pesquisa alinhados à abordagem positivista (Castro Filho; Freire; Maia, 2020, p. 3).

Entretanto, os autores defendem que, no contexto científico atual e numa área interdisciplinar, é preciso abandonar antigas concepções, para avaliar o que é mais adequado no estudo que está sendo realizado.

No Brasil, a pesquisa qualitativa surgiu por meio do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Os pesquisadores, percebendo que os dados quantitativos não seriam suficientes para tratar adequadamente um problema, tiveram que incluir recortes de entrevistas nas suas análises (Minayo, 2019 apud Fernandes; Garnica, 2021). De acordo com os autores:

Os pesquisadores, percebendo que apenas os levantamentos estatísticos e as respostas a questionários objetivos não seriam suficientes para abordar de modo adequado, por exemplo, o problema da pobreza extrema, da fome, das necessidades básicas não atendidas pelo Estado, exigiu deles a inclusão – não muito bem aceita, naquele momento – de recortes de entrevistas realizadas por 1200 agentes do censo, dentre os 30 mil que atuavam nas atividades de coleta de dados, que se dispuseram a registrar informações, ao final do caderno de pesquisa, sobre aspectos não previstos no questionário e sobre suas próprias impressões a respeito da situação dos entrevistados (Fernandes; Garnica, 2021).

Destacando a relevância da pesquisa qualitativa, os autores declaram ainda que “Não tivessem os pesquisadores considerado a viabilidade e a legitimidade de variar suas fontes e seus modos de coletar e disponibilizar informações, não se teria um dos mais emblemáticos estudos já produzidos sobre a desigualdade social no Brasil” (Fernandes; Garnica, 2021, p. 10).

De acordo com Araújo e Borba (2004, p. 2), “Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento”, mas que em alguns casos:

A padronização, a pressuposição equivocada e enganadora de que se pode falar de algo desprezando as singularidades, aliada à centralização do olhar e à opção por rejeitar aprioristicamente *approaches* alternativos, implica a criação de um ponto de vista hegemônico e homogêneo a partir de um lugar tido como representativo, adequado e melhor, mas que não existe (Araújo; Borba, 2004, p. 10).

Dados quantitativos podem ser utilizados na pesquisa qualitativa, desde que seja feito de forma crítica e priorizando procedimentos descritivos, a partir de uma interferência subjetiva. Mas o ponto principal a ser destacado aqui é o valor que uma pesquisa qualitativa pode agregar à análise de determinados problemas, pela possibilidade de considerar a singularidade dos casos (os vieses, tempos, espaços etc.).

Tomando como exemplo as pesquisas sobre o professor de matemática, Fernandes e Garnica (2021, p. 9) questionam:

De qual professor de matemática? Aquele professor de Matemática para o ensino secundário, cujo modelo atual foi criado – ou é em boa parte tributário – de estratégias dos anos de 1950? Ou do professor do ensino médio do Tocantins, que até hoje opera em missões emergenciais para levar o ensino médio ao interior do estado? Ou se fala do professor do ensino fundamental formado pelos Centros Específicos de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (CEFAMs), projeto cujo desenvolvimento atingiu seu auge na década de 1980 no estado de São Paulo, quando o estado do Maranhão ainda não tinha nenhum curso de formação de professores de Matemática? Fala-se de um professor formado para atuar numa escola que tolera a diversidade ou numa escola que promove a diversidade? (Fernandes; Garnica, 2021, p. 9).

Da perspectiva da Informática na Educação, segundo Gomes e Gomes (2020b), a pesquisa qualitativa apresenta as seguintes características: (1) Tem o ambiente natural como fonte direta de dados; (2) Tem o pesquisador como principal instrumento; (3) Os dados coletados são predominantemente descritivos; (4) O processo e seu significado são os focos principais de abordagem; (5) A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.

Isso significa que, conforme Lüdke e André (1986), os pesquisadores não buscam comprovar hipóteses previamente definidas, pois "As abstrações se formam ou se consolidam basicamente a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima" (Garnica, 1997, p. 111). Em outras palavras, a descoberta de princípios gerais pode ocorrer a partir de conhecimentos específicos sobre um fenômeno.

Na ótica da Educação Matemática, segundo Garnica (2004) a pesquisa qualitativa tem como características:

(a) transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (Araújo; Borba, 2004, p. 1).

No entanto, os autores destacam que essas condições não são regras, uma vez que o entendimento do que é pesquisa qualitativa está em constante movimento, entendendo o conhecimento como compreensão e não como uma verdade rígida. Para Fernandes e Garnica (2021), um método tem que ser problematizado, ajustado ou até abandonado, para atender às necessidades do pesquisador e de seu tema.

Araújo e Borba (2004), entendem que, na pesquisa qualitativa, o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, nem do contexto social, político etc. O conjunto de conceitos, crenças e valores que o pesquisador traz consigo, influenciam na sua forma de pensar e são considerados os paradigmas de pesquisa. E, segundo

Castro Filho, Freire e Maia (2020, p. 3), o caráter histórico e identitário do objeto de estudo demanda uma análise qualitativa, com descrição minuciosa dos fenômenos.

É o caso da presente investigação, que visa analisar a implicação da inserção da tecnologia digital no processo de construção do conhecimento sobre as superfícies quádricas. Em relação aos objetivos, trata-se de uma pesquisa exploratório-descritiva, por incorporar características de ambas qualidades. As pesquisas exploratórias possibilitam uma aproximação com o tema, proporcionando mais familiaridade com o fenômeno em estudo e a descoberta de pesquisadores.

No caso da presente investigação, os levantamentos bibliográficos possibilitaram conhecer melhor as questões e pesquisadores envolvidos no estudo do processo de construção do conhecimento sobre as superfícies quádricas. No entanto, a presente investigação também apresenta características de pesquisa do tipo descritiva, que costumam envolver levantamentos ou observações sistemáticas.

O estudo descritivo visa expor com mais precisão os fenômenos, o que requer clareza sobre o que se deseja investigar, os procedimentos de coleta de dados e as teorias que nortearão a interpretação dos dados. A coleta de dados da presente pesquisa envolve observações para a descrição de fenômenos relacionados ao processo de construção do conhecimento sobre as superfícies quádricas. Dessa forma, entendemos que essa investigação apresenta características de uma pesquisa do tipo exploratório-descritiva.

Os dados coletados com a finalidade de analisar qualitativamente o objeto de estudo, exigem procedimentos que não consideram apenas a frequência de eventos, mas procuram compreender fenômenos. As evidências originam-se da estratégia de investigação de campo que combina o uso de: (1) levantamento bibliográfico; (2) observação de condutas cognitivas por meio das atitudes comportamentais, produções escritas e protocolos de construção do GeoGebra; e (3) questionários e entrevistas. Esses procedimentos estão representados pelos vértices do triângulo na *Figura 47*.

O levantamento bibliográfico desta pesquisa teve por objetivo conhecer o estado do conhecimento sobre os processos de ensino e de aprendizagem das superfícies quádricas com o uso das tecnologias digitais, assim como os aportes teóricos, metodológicos e tecnológicos necessários.

Figura 47: Procedimentos metodológicos para coleta de dados.



Fonte: Adaptado de Lazzarin (2016).

A observação é “[...] uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade” (Marconi; Lakatos, 1999, p. 190 apud Marin; Marcos, 2014). Não tratando-se de apenas ver ou ouvir, mas de examinar fenômenos, a observação propicia a coleta de dados sobre um conjunto de atitudes comportamentais, permitindo obter informações não contempladas em questionários e entrevistas.

A análise das condutas cognitivas dos participantes dessa investigação se efetuou por meio da observação das suas atitudes comportamentais durante uma situação de ensino e aprendizagem instrumental. Não sendo possível observar a atividade mental de um sujeito, a pesquisadora faz a análise do seu comportamento para a inferência sobre os esquemas mobilizados ou constituídos durante a atividade matemática instrumental.

Para isso, os encontros foram gravados por meio do Google Meet, com o compartilhamento de tela pelo participante e captação de voz, ficando registradas todas as ações e diálogos entre este e a pesquisadora. Além disso, os registros escritos, os dados inseridos na janela de álgebra e o protocolo de construção do GeoGebra possibilitam a inferência da pesquisadora a respeito das representações mentais e condutas cognitivas dos participantes. Assim, o levantamento de informações foi realizado ora por meio de observação-participante (durante os encontros) e ora não-participante (após os encontros).

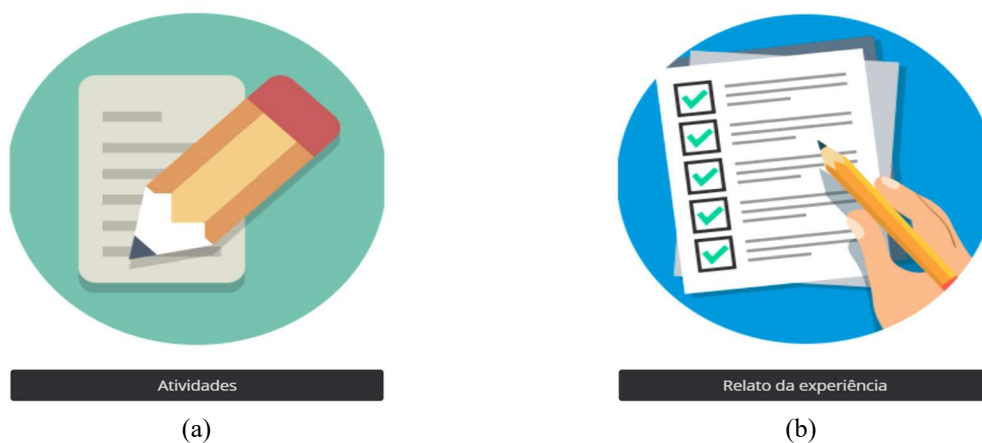
A observação-participante, possibilitando a observação das condutas cognitivas por meio das atitudes comportamentais no momento em que estas ocorrem, possibilitou as intervenções da pesquisadora. No entanto, a observação não-participante também foi fundamental na coleta de dados, uma vez que permitiu uma análise posterior das condutas

cognitivas, por meio das gravações, produções escritas, protocolos de construção do GeoGebra, questionários e entrevistas.

Os questionários e as entrevistas foram utilizados de forma complementar, visando levantar mais evidências sobre a mobilização ou constituição de esquemas pelos participantes. O questionário é um “[...] instrumento de coleta de dados constituído por uma série de perguntas, que devem ser respondidas por escrito” (Marconi; Lakatos, 1999, p. 100 apud Marin; Marco, 2014).

Nessa investigação foram utilizados dois tipos de questionários para cada situação de ensino e aprendizagem instrumental, um com as atividades que contém as questões norteadoras e o outro para registro da experiência (Figura 48).

Figura 48 – Instrumentos utilizados na coleta de dados.



(a)

(b)

Fonte: Elaborado pela autora.

No primeiro tipo de questionário (Figura 48a), estão descritas as atividades com as questões norteadoras que compõem as situações de ensino e aprendizagem instrumental, visando conduzir o participante de forma mais autônoma na construção do seu conhecimento. As questões misturam-se às ordens das atividades, visando conduzir, instigar e produzir evidências sobre os esquemas mobilizados ou constituídos pelo participante durante às atividades.

Essas atividades foram apresentadas em arquivos do Google Docs (**APÊNDICE D** — SEAI 1 a **APÊNDICE M** — SEAI 10), tendo sido discutidas na subseção anterior. Segundo Marconi e Lakatos (1999), a entrevista é o encontro entre duas pessoas para que uma delas obtenha informações a respeito de um determinado assunto (Marin; Marco, 2014). Esse procedimento, que se baseia no diálogo entre o pesquisador e o participante, permeou as

situações de ensino e aprendizagem, visando produzir evidências sobre a gênese instrumental dos participantes.

O segundo tipo de questionário (Figura 48b), consistindo num espaço para registro da experiência, busca levantar mais evidências sobre o fenômeno em estudo. Para esses relatos, foram utilizados formulários do Google (**APÊNDICE C** — Questionários). Com perguntas mais abertas, esse instrumento de coleta de dados visou complementar o primeiro, produzindo mais indícios acerca da gênese instrumental dos participantes. Para isso, as questões foram propostas de forma a aproximar os relatos dos participantes dos dados necessários para responder às questões de pesquisa.

Assim, o roteiro para os registros consistia das seguintes perguntas: 1) ‘O que você aprendeu sobre as quádricas?’; 2) ‘O que você aprendeu sobre as ferramentas do GeoGebra?’; 3) ‘Você sentiu alguma dificuldade na realização da atividade? Qual?’; 4) ‘O que achou da abordagem pedagógica que articula os eixos teórico, metodológico e tecnológico?’; 5) ‘Você acha que essa vivência contribui para a sua prática docente? De que forma?’; 6) ‘Qual o papel do aluno e do professor nessa experiência?’; 7) ‘O que você faria diferente?’; 8) ‘Ficou com dúvidas? Quais?’; 9) ‘Sugestões? Serão bem-vindas!’; 10) ‘Outros comentários?’.

Em resumo, os dados coletados para posterior análise são constituídos de gravações de tela com voz; notas de campo das observações *in loco*; produções escritas dos participantes em resposta às atividades (Google Docs) e aos questionários (Google Forms); arquivos do GeoGebra com protocolos de construção; e imagens das atividades resolvidas com lápis e papel. Essas diferentes fontes de dados oferecem mais confiabilidade à pesquisa qualitativa, uma vez que permitem compreender um fenômeno a partir de múltiplas faces.

A triangulação dos dados pode confirmar, refutar ou complementar constatações, fazendo emergir diversos pontos que conversam entre si, aproximando a pesquisa da totalidade do fenômeno. Dados de diferentes vértices do triângulo podem ser confrontados, “[...] a fim de levantar inconsistências, contradições, corroborar afirmações entre os vértices, enfim, problematizar nosso objeto” (Lazzarin, 2016, p. 42), dando mais certeza a respeito dos indícios oriundos dos dados coletados.

O capítulo seguinte apresenta os resultados dessa investigação, cuja análise foi organizada em duas seções, as condutas cognitivas dos participantes nas SEAI e o desenvolvimento de esquemas para a coordenação de registros de representação de superfícies quádricas.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Este capítulo apresenta os resultados dessa investigação em duas subseções, a primeira com uma análise das produções dos participantes e a segunda buscando responder de forma mais objetiva à questão de pesquisa. Assim, a seção a seguir apresenta os resultados da implementação das SEAI, com uma análise das condutas cognitivas dos participantes.

5.1 As condutas cognitivas nas situações de ensino e aprendizagem instrumental

A implementação das SEAI ocorreu de forma individual, ao contrário do inicialmente planejado, levando em consideração a disponibilidade dos participantes. Ao nosso ver, essa mudança foi positiva, uma vez que possibilitou o acompanhamento integral e individualizado do processo vivenciado pelos participantes. Partindo do pressuposto de que cada indivíduo é único, os esquemas constituídos pelos participantes e os ritmos de cada um variam, e tivemos a possibilidade de considerar essas condições no desenvolvimento das SEAI.

Participaram da pesquisa três estudantes, que denominamos participante 1 (P1), participante 2 (P2) e participante 3 (P3). Um destes estudante de Engenharia Civil, um licenciando em Matemática e um mestrando em Matemática. Os tempos para o desenvolvimento das atividades foram distintos e a Figura 49 apresenta uma linha do tempo dos encontros com cada um dos participantes da pesquisa.

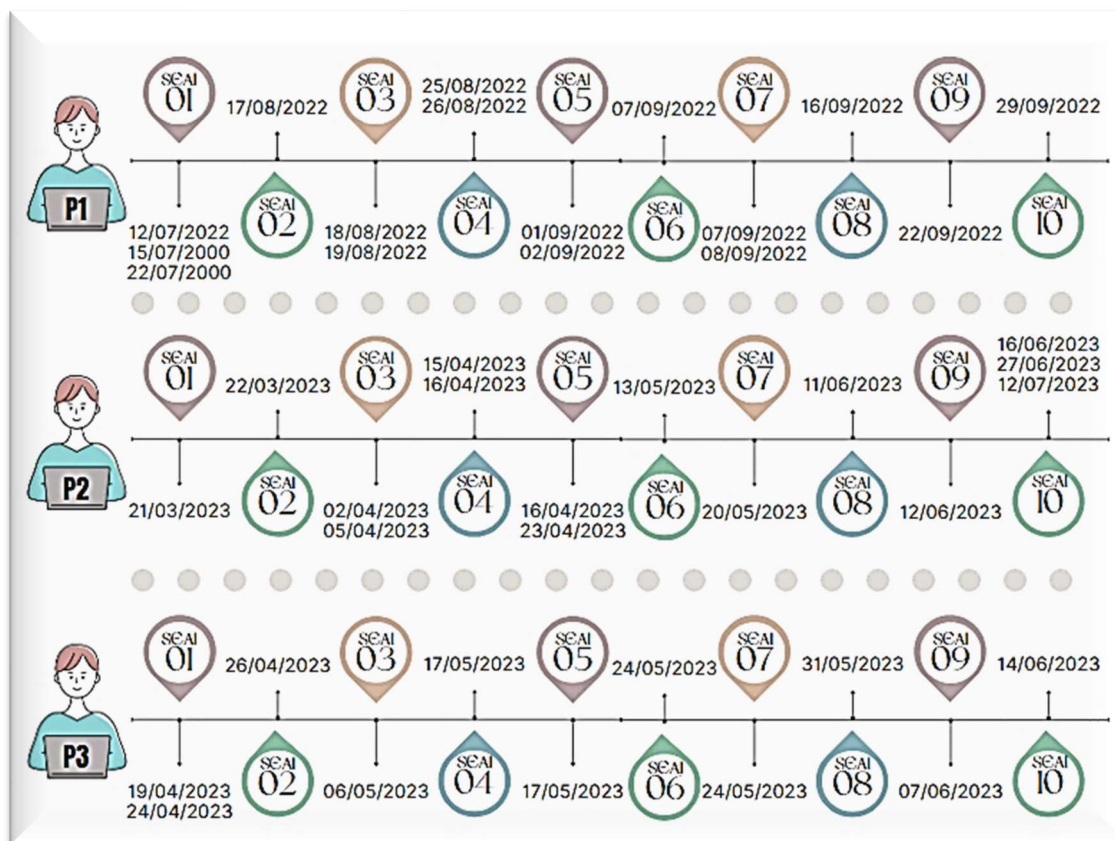
Esses encontros ocorreram ora presencial e ora à distância, em ambos os casos, com gravação de tela e dos diálogos através do Google Meet. Como os encontros foram realizados de forma individual, as gravações ficaram integrais, contendo todas as ações de cada participante e diálogos entre estes e a pesquisadora. A implementação das dez SEAI ocorreu em 16, 15 e 11 encontros, respectivamente, com os participantes P1, P2 e P3.

O tempo de duração de cada encontro também sofreu variações, ocorrendo em acordo com o ritmo e a disponibilidade de cada participante. Foram 18 horas e 34 minutos de gravação com o participante P1, 34 horas e 48 minutos com P2 e 20 horas e 3 minutos com P3, totalizando 73 horas e 25 minutos gravados. Esses números são meramente informativos, não tendo efeito de comparação, uma vez que a concepção pedagógica desse estudo considera que o sujeito inicia o seu processo em condições distintas.

Portanto, as comparações válidas são as que se referem ao sujeito com ele mesmo, para observação do seu progresso. No primeiro encontro, ocorreu a apresentação do projeto de extensão, esclarecendo que faz parte do projeto de pesquisa de doutorado, que visa compreender

a dinâmica da relação entre o participante e as tecnologias digitais durante o seu processo de construção do conhecimento.

Figura 49 – Mapa dos encontros.



Fonte: Elaborado pela autora.

Nessa oportunidade, foram apresentados os objetivos da pesquisa (para a investigadora) e do projeto (para os participantes), a programação, os benefícios e as implicações, forma de coleta de dados etc. Os participantes foram informados que seriam realizadas gravações para a coleta de dados e, foi solicitada autorização para publicação de imagens, transcrições de áudios e produções, sem identificação dos autores.

Conforme mencionado, todas essas informações constam no TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, aprovado pelo CEP - Comitê de Ética na Pesquisa pela Plataforma Brasil, tendo sido assinado pelos participantes. Foram propostas dez situações de ensino e aprendizagem instrumental e uma atividade de fechamento, que buscaram promover o estudo das superfícies quádricas na perspectiva do fazer para compreender.

Nessa perspectiva, a aprendizagem é uma construção por meio da ação do aprendiz e da tomada de consciência dessas ações, e o conhecimento construído serve de patamar para novas construções. O percurso metodológico visou promover a coordenação dos diferentes registros

de representação, que passa pelas questões do acesso aos objetos matemáticos por meio de representações semióticas, identificação de superfícies quádricas nos diferentes registros, conhecimento do modo de funcionamento desses registros, transformações de tratamento e conversão e correlação entre os registros figural, simbólico, gráfico e em língua natural.

O problema da percepção imediata e a desconstrução dimensional, fatores importantes relacionados à visualização, permeia o conjunto das atividades. Considerando uma espécie de taxonomia das ações, as atividades propostas envolvem exploração, construção e criação, esta última considerada por Piaget o resultado da construção do conhecimento. O Quadro 14 apresenta um panorama geral do conjunto das SEAI, com o tema e o objetivo de cada uma.

Quadro 14 - Situações de Ensino e Aprendizagem Instrumental.

SEAI	TEMA	OBJETIVO
1	Apresentação e aquecimento.	Conhecer a bagagem e o ritmo do participante, possibilitar a constituição dos esquemas de utilização necessários para dar início ao estudo das quádricas.
2	Correlação entre representações figurais e em língua natural das superfícies quádricas.	Desenvolver esquemas conceituais relativos às representações figurais das quádricas e correlação com as representações em língua natural gerais.
3	Esquema para correlação entre registros de representação simbólico e gráfico.	Desenvolver esquemas conceituais relativos ao esquema para correlação entre registros de representação simbólico e gráfico das quádricas.
4	Correlação entre representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos elipsoides.	Desenvolver esquemas conceituais relativos à identificação e correlação entre representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos elipsoides.
5	Correlação entre representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos hiperboloides e dos paraboloides.	Desenvolver esquemas conceituais relativos à identificação e correlação entre representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos hiperboloides e paraboloides.
6	Desafio da correspondência: sobrepondo as quádricas.	Desenvolver esquemas conceituais relativos à conversão do registro gráfico para o simbólico das quádricas.
7	Desafio da percepção: revelando a seção plana.	Desenvolver esquemas conceituais relativos à desconstrução dimensional para a apreensão figural de um parabolóide hiperbólico e consequente enriquecimento da apreensão conceitual dessa quádrica.
8	Desafio da percepção: descobrindo a quádrica escondida.	Desenvolver esquemas de utilização envolvendo a desconstrução dimensional e as características da matemática dinâmica.
9	Desafio dinâmico: o giro da cônica.	Desenvolver esquemas de utilização relativos a construções dinâmicas das quádricas, usando o conceito de superfície de revolução.
10	Desafio dinâmico: regradando a sela.	Desenvolver esquemas de utilização relativos a construções dinâmicas das quádricas, usando o conceito de superfície regradadas.

Fonte: Elaborado pela autora.

Com os instrumentos de coleta de dados planejados e utilizados na implementação das SEAI, foram gerados 10 arquivos do *Google Docs* com as questões norteadoras, 10 arquivos

do *Google Forms* com os questionários, 40 arquivos do *GeoGebra* com as construções e 81 vídeos. A seguir, passamos a relatar os fatos relacionados à implementação de cada uma das situações de ensino e aprendizagem instrumental.

Como o experimento foi realizado por meio de uma sequência de atividades, fez-se necessário abordar o estudo das superfícies quádricas começando pelos conhecimentos prévios. As análises foram realizadas por meio da observação da conduta cognitiva dos participantes *in loco* e por meio das gravações, dos protocolos de construção no *GeoGebra* e dos registros escritos e falados. Os protocolos de construção possibilitaram a análise dos passos dados pelo participante durante a realização da atividade, não tendo sido possível observar as tentativas e erros, nos casos em que os participantes apagam os passos equivocados.

Essas tentativas e erros fazem parte do desenvolvimento dos esquemas de utilização por meio do fazer para compreender, oferecendo importantes informações sobre o processo de construção do conhecimento. A análise dessas condutas cognitivas para observação da apropriação tecnológica, que favorece a apreensão figural e a consequente apreensão conceitual, pôde ser realizada por meio das gravações de vídeo. Com base nisso, interessa-nos observar os obstáculos que conduziram o participante ao erro e se ele conseguiu superá-los com compreensão, obtendo as construções solicitadas.

5.1.1 SEAI 1 – Apresentação e aquecimento

No primeiro encontro, após a apresentação do projeto de extensão, foi realizado um ‘aquecimento’ através da situação de ensino e aprendizagem instrumental 1 (APÊNDICE D — SEAI 1). Nessa oportunidade, foram retomados conceitos sobre ponto, reta, plano e cônicas, que são base para o estudo das superfícies quádricas, e iniciado o uso do ambiente de matemática dinâmica do *GeoGebra*.

Apesar de tratarem de uma preparação para o estudo das superfícies quádricas, as atividades nessa SEAI já foram elaboradas com base em Piaget, priorizando o fazer para compreender na sua concepção. E, com base na TRRS, buscaram estabelecer as correlações entre os registros gráficos, simbólicos e em língua natural dos conceitos que abordam.

Ao iniciar as atividades com a utilização das ferramentas disponíveis no ambiente de matemática dinâmica do *GeoGebra*, os participantes tiveram a oportunidade de mobilizar ou (re)constituir os esquemas relacionados aos pré-requisitos para o estudo das superfícies quádricas. Nessa e nas demais situações de ensino e aprendizagem instrumental, as atividades

foram realizadas pelos participantes considerando os esquemas possíveis de serem mobilizados, os esquemas que precisavam ser (re)constituídos e os seus ritmos próprios.

A primeira atividade tratou dos espaços de dimensão 0, 1, 2 e 3, com questões norteadoras que versam sobre suas denominações, os eixos que os constituem e o número de coordenadas de um ponto em cada um desses espaços. Na sequência, a segunda atividade aprofunda o conhecimento sobre pontos no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , usando as janelas de álgebra e de visualização 2D e 3D do GeoGebra.

Iniciando com a utilização da janela de visualização 2D do GeoGebra, primeiro foi proposto que pontos fossem colocados em cada quadrante (fora dos eixos coordenados) e depois sobre os eixos coordenados. Sendo solicitada a observação das coordenadas desses pontos em cada uma dessas posições, essa atividade permitiu (re)constituir o conhecimento referente à coordenada de um ponto nula, positiva ou negativa.

Para pontos no espaço tridimensional, foi proposta uma atividade inversa. Os participantes foram convidados a inserir pontos sobre cada um dos octantes e sobre os eixos coordenados, mas a partir da janela de álgebra do GeoGebra 3D. Entendemos que a primeira atividade ofereceu condições para essa proposta, que apresenta uma exigência um pouco maior, consolidando o conhecimento sobre as características das coordenadas de um ponto em diferentes espaços e posições.

Os participantes P1 e P2 constituíram os primeiros esquemas de utilização relativos às ferramentas do GeoGebra, uma vez que não haviam utilizado o *software* ainda. Ao contrário de P3, que já possuía os esquemas exigidos nessa atividade. No entanto, todos participantes mobilizaram ou constituíram esquemas de utilização, correlacionando as representações de um ponto nas janelas de álgebra e de visualização.

A atividade três visou a (re)constituição de conhecimentos relativos a planos no \mathbb{R}^3 . Primeiro, foi solicitado que três pontos quaisquer, não pertencentes aos eixos coordenados, fossem colocados na janela de visualização do GeoGebra 3D. A seguir, foi solicitado que se construísse um plano que passa por esses três pontos, observando a sua equação na janela de álgebra.

Os participantes foram convidados a repetir esse procedimento algumas vezes, inserindo outros pontos e obtendo novos planos. Observando as correspondentes equações desses planos, os participantes identificaram o que permaneceu invariante (as variáveis x, y, z). Substituindo por constantes (a, b, c, d) os elementos que mudam de um plano para outro (os coeficientes das variáveis), as questões norteadoras conduziram os participantes à conclusão de que a equação geral de um plano qualquer ($ax + by + cz + d = 0$).

As questões norteadoras seguintes visaram estabelecer a correlação entre a equação de um plano, que tem um (ou mais) coeficiente(s) das variáveis nulo(s), e a sua posição no espaço tridimensional. Primeiro, foi proposto que a equação geral de um plano qualquer, com todos os coeficientes das variáveis e termo independente diferentes de zero, fosse inserida na janela de álgebra. Observando a posição desse plano no sistema cartesiano, foi perguntado aos participantes se esse plano é paralelo a algum plano ou eixo coordenado e em que pontos esse plano intercepta os eixos coordenados.

Para estabelecer as diferenças visuais entre as equações e gráficos de planos em posições distintas no sistema cartesiano, as questões norteadoras seguintes propuseram a inserção de equações de planos com um dos coeficientes das variáveis nulo, depois dois e, por fim, a nulidade do termo independente. E, no fechamento dessa atividade, foram exploradas as equações dos planos coordenados e paralelos a estes. Os esquemas conceituais relacionados às representações simbólicas dos planos coordenados e paralelos a estes foram reconstituídos nessa oportunidade.

Os participantes mobilizaram os esquemas de utilização, correlacionando representações simbólicas e gráficas de planos com distintas posições em relação aos planos coordenados. Na quarta atividade, foi proposto o estudo das retas no \mathbb{R}^2 , iniciando por uma atividade que solicita a obtenção de uma reta a partir de dois pontos. Após algumas explorações com diferentes pontos, são obtidas distintas equações de retas. Analisando o que muda na equação de uma reta para outra (os coeficientes das variáveis a, b, c) e o que é comum (as variáveis x, y), os participantes foram instigados a escrever a equação geral para uma reta qualquer ($ax + by + c = 0$).

Nos passos seguintes dessa atividade, foram exploradas as intersecções da reta com os eixos coordenados e suas posições no \mathbb{R}^2 , quando um dos coeficientes das variáveis ou o termo independente é nulo. Ao final desta atividade, foram exploradas as equações dos eixos coordenados e de retas paralelas a estes no \mathbb{R}^2 . Mobilizando esquemas de utilização, os participantes (re)construíram os seus conhecimentos sobre reta no \mathbb{R}^2 .

A quinta atividade visou a construção do conhecimento sobre retas no \mathbb{R}^3 . Usando as janelas de visualização do GeoGebra, essa atividade iniciou por uma comparação entre as representações gráficas e simbólicas de uma reta no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 . Nessa oportunidade, observamos que os participantes ainda não haviam constatado que uma equação do 1º grau em duas variáveis representa uma reta no plano e um plano no espaço.

Essa constatação foi percebida nas condutas cognitivas dos três participantes, que dizem com a seguinte resposta ao questionário pelo participante P2: “Aprendi que a mesma

equação pode representar diferentes estruturas, dependendo se for considerada no plano ou no espaço. A mesma equação de uma reta por exemplo, pode representar uma reta no 2D, ou uma infinidade de retas no 3D". P2 referiu-se a um plano quando utilizou a expressão ‘uma infinidade de retas no 3D’.

Como consequência, o fato de a equação da reta no IR^3 ser representada por duas equações de planos também se constituiu em conhecimento novo. As questões norteadoras conduziram os participantes a observarem que isso se deve ao fato de que a reta no IR^3 é o resultado da intersecção de dois planos. Nessa oportunidade, os participantes constituíram os esquemas conceituais relativos à representação gráfica de uma equação do 1º grau em x e y no IR^2 e no IR^3 .

As atividades 6, 7 e 8 foram propostas para retomar conceitos sobre parábola, elipse e hipérbole, respectivamente. A atividade 6 propôs que fossem inseridos um ponto (foco) e uma reta (diretriz) na janela de álgebra e, obtida a parábola, foi solicitada a observação da sua concavidade e forma da equação. Para utilização da ferramenta ‘Parábola’, os participantes precisavam mobilizar esquemas conceituais relativos à parábola para posicionar adequadamente o foco e a diretriz no sistema cartesiano.

Nessa atividade, observamos que P1 leu o enunciado e, abrindo o GeoGebra, procurou pela ferramenta parábola. Após encontrar a ferramenta, P1 a seleciona por três vezes para ler a descrição dos elementos necessários para utilizá-la: “*Selecione o foco e, depois, a diretriz*”. Mesmo após a leitura dessa descrição de uso da ferramenta ‘Parábola’, P1 experimenta obter a cônica antes de inserir o foco $A(2,0)$ e a diretriz $x = -2$.

Então, P1 obtém uma reta, deslocando-a até o ponto $A(-2,0)$. Percebendo que não é possível obter a cônica assim, P1 apaga todos os elementos, insere o ponto $A(2,0)$ e a reta $x = -2$, selecionando a ferramenta ‘Parábola’ e obtendo a cônica solicitada. Esse esquema de utilização também foi constituído por P2, que experimenta essa ferramenta pela primeira vez, enquanto P3 o mobiliza com espontaneidade na realização da tarefa.

Na sequência, os participantes é que escolheram um ponto para foco e uma reta para diretriz, de maneira que obtivessem uma parábola com concavidade voltada para o semieixo negativo do eixo dos x . Mobilizando os esquemas constituídos na questão anterior, em que a parábola tem concavidade voltada para o semieixo positivo do eixo dos x , os participantes inseriram o foco e a diretriz em posições adequadas para a obtenção da parábola com concavidade voltada para o semieixo negativo do eixo dos x . Observamos que os participantes já apresentaram maior desenvoltura na realização dessa atividade.

Então, a questão seguinte propôs uma comparação entre as equações dessas duas parábolas, com o intuito de descobrir o que define a concavidade. Tendo sido proposto que a forma canônica das equações dessas parábolas é dada por $y^2 = 2px$ ou $y^2 = -2px$, os participantes perceberam que o sinal do coeficiente da variável de primeiro grau (concavidade para a direita quando o sinal é positivo e para a esquerda quando é negativo).

A questão norteadora seguinte propôs que os participantes conjecturassem a respeito da forma das equações das parábolas concavidade para cima ($x^2 = 2py$) ou para baixo ($x^2 = -2py$). A partir de diferentes equações de parábolas na forma canônica, os participantes observaram que a distância entre o foco e a diretriz da parábola (p) é a metade do valor do coeficiente da variável de primeiro grau ($2p$) na equação da parábola.

Usando as janelas de visualização 2D e 3D do GeoGebra, as questões norteadoras seguintes levaram os participantes a observarem que a mesma equação representa uma parábola no \mathbb{R}^2 e um cilindro parabólico no \mathbb{R}^3 . Dessa forma, para escrever a equação de uma parábola no \mathbb{R}^3 , os participantes entenderam que são necessárias duas equações. Nesse caso, a partir das equações de uma superfície cilíndrica parabólica e de um determinado plano, os participantes observaram que a parábola é o resultado da intersecção dessas duas superfícies.

Explorando as características específicas de cada uma das demais cônicas (elipse e hipérbole), as atividades 7 e 8 percorrem o mesmo caminho descrito para a parábola. Observamos que P1, na atividade em que foram dados os elementos necessários para obter uma elipse (dois focos e um ponto da elipse), clica no botão e lê a descrição dos elementos necessários para obter essa cônica: “*Selecione dois focos e, depois, um ponto da elipse*”. Então, P1 insere os três pontos no sistema cartesiano para, a seguir utilizar a ferramenta, selecionando adequadamente os pontos.

A mesma espontaneidade na utilização da ferramenta ‘Elipse’ ocorre com P2, sendo possível ver que a ferramenta ‘Parábola’ se transformou em instrumento para estes participantes. Também observamos que esse esquema de utilização foi mobilizado e, com a devida adequação, utilizado com maior espontaneidade para obtenção da elipse. Assim, consideramos que as atividades dessa SEAI levaram os participantes à mobilização ou constituição dos esquemas de utilização que são base para o estudo das superfícies quádricas.

Conforme previsto, essas atividades também nos permitiram conhecer alguns esquemas de utilização já constituídos pelos participantes e possibilitaram (re)constituir, em especial os esquemas conceituais prévios necessários para o desenvolvimento deste estudo. O participante

P2 nunca tinha utilizado o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra; P1 havia feito pouco uso durante a graduação³⁵; e P3, já fazia uso nas suas atividades docentes.

Podemos observar essa relação que os participantes tinham com o GeoGebra por meio das suas respostas ao questionário no Google Forms:

P1:[...] conhecia muito pouco o GeoGebra, além disso sempre tive dificuldade com tecnologias de modo geral. Me sinto um pouco "enferrujada", vamos assim dizer, para aprender utilizar ferramentas tecnológicas e que estão em constante mudanças.

P2: Considero que aprendi algo novo, pois com as ferramentas do geogebra, pude visualizar algo que nunca tinha visto aprendendo em livros, me permitindo ter uma série de novas percepções a partir da possibilidade de movimentar, dar zoom, mudar o ângulo ou mudar a equação.

P3: Acredito que o GeoGebra potencializa e otimiza as construções gráficas, algébricas e geométricas, pois por meio de suas diversas funções ajuda-nos a entender o funcionamento das estruturas matemáticas.

Também foi possível conhecer um pouco os esquemas conceituais constituídos pelos participantes, relativos aos conceitos de espaço dimensionais, ponto, reta, plano e cônicas, necessários para o estudo das superfícies quádricas. Os participantes já haviam tido a disciplina de Geometria Analítica na graduação, uma vez que esse era um pré-requisito para a participação na pesquisa.

No entanto, em alguns momentos conseguiram mobilizar os esquemas prévios e em outros precisaram (re)constituí-los, como podemos observar durante a implementação da SEAI 1. Isso também pode ser observado nos relatos dos participantes:

P1: Pude perceber que na primeira vez que estudei este conteúdo na faculdade eu não compreendi, apenas "decorei" de forma mecânica, sem fazer as relações possíveis e necessárias para construir um conhecimento.

P2: No começo da atividade me senti um pouco enferrujado, uma pequena insegurança de mesmo que não fosse uma avaliação, eu deveria ter um mínimo de embasamento naquilo justamente por já ter estudado. Sentimentos que rapidamente foram deixados de lado por saber que ali eu estava em uma relação de confiança.

P3: Inicialmente, para mim que sou da área relembrei conceitos e termos mais técnicos matemáticos. Além disso, visualizei de forma mais nítida as justificativas das equações, sejam gerais paramétricas e afins a partir da visualização do GeoGebra no R2 e R3, reparando em suas diferenças gráficas e de equações.

No relato do participante P2, entendemos que a ‘confiança’ a que ele se refere foi proporcionada pela abordagem pedagógica, que combinou autonomia dos participantes e cooperação da pesquisadora. As atividades propostas tiveram a finalidade de promover gradativamente a aprendizagem dos participantes, com o mínimo de intervenção da

³⁵ P1 relatou que os alunos sempre usavam os computadores em dupla quando haviam atividades com o uso do GeoGebra na graduação e que a sua dupla é quem utilizava o GeoGebra.

pesquisadora. Privilegiando o fazer para compreender, essas intervenções foram realizadas por meio de questionamentos para provocar os desequilíbrios necessários à (re)construção do conhecimento.

Observamos que os participantes foram evoluindo ao longo dessa SEAI, por meio do desenvolvimento de esquemas de utilização. Em cada atividade, na medida em que correlacionavam os registros gráfico, simbólico e em língua natural dos objetos matemáticos envolvidos, os esquemas conceituais passavam a ser mais facilmente mobilizados nas atividades seguintes. Por outro lado, as atividades nessa SEAI iniciam uma aproximação dos participantes com o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, exigindo pouco uso das suas ferramentas.

No entanto, entendemos que se deu o início de um importante e gradativo processo de transformação deste artefato em instrumento, em especial para os participantes P1, que utilizou pouco esse recurso na graduação, e P2 que nunca havia utilizado. Podemos dizer que, mobilizando alguns esquemas conceituais e (re)constituindo outros, os participantes retomaram conhecimentos que ofereceram condições para a realização das atividades da SEAI 2.

A situação de ensino e aprendizagem instrumental seguinte, tendo dado início ao estudo das superfícies quádricas propriamente dito, teve por objetivo estabelecer as correlações entre os registros figurais e em língua natural das quádricas por meio da variável visual ‘seção plana’.

5.1.2 SEAI 2 - Explorando as representações figurais e em língua natural gerais de superfícies quádricas por meio de diferentes recursos

Iniciamos o estudo das quádricas, com as atividades propostas nessa situação de ensino e aprendizagem instrumental (APÊNDICE E — SEAI 2), apresentando aos participantes as representações figurais dessas superfícies e suas denominações. As atividades do tipo ‘associação’, usando diferentes recursos, buscaram promover o desenvolvimento de esquemas conceituais relativos à correlação entre os registros figurais e em língua natural gerais.

Considerando o fato de que a desconstrução dimensional contribui para diminuir os possíveis erros oriundos da percepção imediata, propomos o uso da variável visual ‘seção plana’ para a identificação das quádricas. Essas seções planas são as intersecções das quádricas com planos coordenados ou paralelos a esses, que podem ser cônicas não degeneradas (parábola, elipse ou hipérbole) ou cônicas degeneradas (o conjunto vazio, um ponto, uma reta ou duas retas concorrentes).

As denominações das superfícies quádricas - elipsoide, hiperboloide de uma ou duas folhas, paraboloides elíptico ou hiperbólico - têm relação com o(s) tipo(s) de cônica(s) não degenerada(s) resultantes dessa intersecção. O elipsoide tem apenas seções elípticas, fato que facilita a correlação entre a representação figural e em língua natural. Das quatro quádricas restantes, duas são paraboloides e duas hiperboloides. Os hiperboloides podem ser identificados pela ausência da seção plana parabólica e, a diferenciação entre eles, pode ser obtida considerando a quantidade de folhas.

O hiperboloide de uma folha é uma superfície inteira, enquanto o hiperboloide de duas folhas é composto de duas partes. Então, as duas quádricas restantes são os paraboloides, que possuem parábola como seções planas. A distinção entre eles pode ser obtida considerando que, além das parábolas, o paraboloides elíptico e o paraboloides hiperbólico possuem seções planas elípticas e hiperbólicas, respectivamente. Assim, por meio da desconstrução dimensional, é possível correlacionar os registros figurais e em língua natural geral das quádricas.

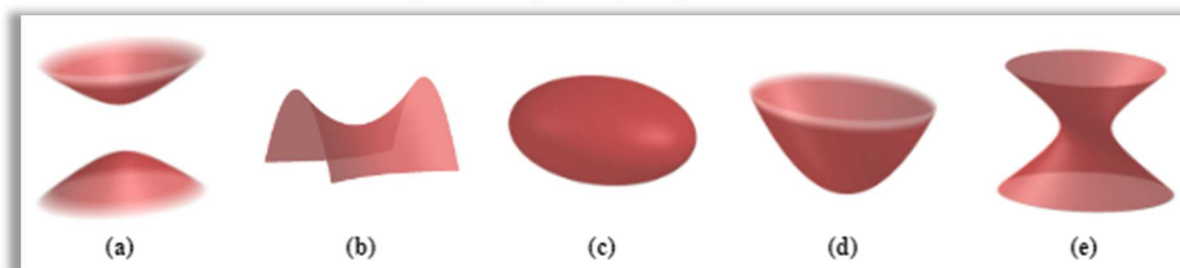
Nessa SEAI, os participantes realizaram essa correlação por meio de representações figurais bi e tridimensionais, estáticas e dinâmicas, obtidas por meio de diferentes recursos. Na primeira parte (atividades de 1 a 5), os participantes foram convidados a reconhecer as seções planas das quádricas apenas por meio da observação e manipulação das diferentes representações figurais dessas superfícies (2D-estática, 3D-estática, 2D-dinâmica, 3D-dinâmica).

E, na segunda parte (atividade 6), a mesma atividade foi proposta com a possibilidade de inserir a equação de um plano na janela de álgebra do GeoGebra, obtendo a intersecção com a representação figural da quádrica. Obtendo as representações figurais dinâmicas das seções planas, os participantes tiveram a oportunidade de confirmar as suas conjecturas relativas à classificação das quádricas, construindo argumentação baseada nas seções planas que constituem essas superfícies.

5.1.2.1 ATIVIDADE 1

A atividade 1 propôs a observação das representações figurais 2D-estáticas das superfícies quádricas para a identificação das suas seções planas. Essas representações figurais foram apresentadas em arquivo do Google Docs que, tendo as mesmas características que as impressas em papel, não apresentam a ideia de volume e não são manipuláveis (Figura 50).

Figura 50 – Representações figurais 2D-estáticas.



Fonte: Elaborado pela autora.

A partir da identificação das seções planas, as superfícies quádricas deveriam ser classificadas em elipsoide (Figura 50c), hiperboloide de uma folha (Figura 50e), hiperboloide de duas folhas (Figura 50a), paraboloides elíptico (Figura 50d) ou paraboloides hiperbólico (Figura 50b). As respostas deveriam ser justificadas em termos das seções planas dessas superfícies.

O participante P1 identificou primeiramente o elipsoide, demonstrando compreender que os cortes dessa superfície por planos horizontais ou verticais são sempre elipses. Em seguida, P1 classificou o hiperboloide de duas folhas, cuja escolha foi baseada no fato de que é a única quádrica composta por duas partes. A terceira superfície reconhecida por P1 foi o paraboloides hiperbólico, tendo observado que o corte por um plano vertical é uma parábola, mas ficando em dúvida em relação às seções planas hiperbólicas.

A seguir, o participante P1 identificou de forma equivocada o paraboloides elíptico como hiperboloide de duas folhas. É possível entender que esse engano ocorreu pelo fato do paraboloides elíptico parecer com uma das partes do hiperboloide de duas folhas. Como consequência, P1 identificou de forma errada o hiperboloide de uma folha como um paraboloides elíptico.

Observamos que P1 percebeu que a representação figurais da quádrica na Figura 50d era paraboloides elíptico e não um hiperboloide de uma folha, quando tenta justificar suas conjecturas. Isso porque, analisando as seções planas dessa quádrica, P1 diz: *“Quando eu corto ela por um plano vertical também, eu tenho uma parábola. E aqui talvez seja uma parábola elíptica, um paraboloides elíptico, porque se eu cortar ela por um plano horizontal eu fico com a imagem de uma elipse”*.

Então, o participante P1 altera suas escolhas, apresentando a resposta no arquivo do *Google Docs* da Figura 51a:

Figura 51 - Classificação das superfícies quádricas pelos participantes P1 e P2.

- a) hiperboloide de duas folhas
- b) paraboloides hiperbólico
- c) elipsoide
- d) paraboloides elíptico
- e) hiperboloide de uma folha

(a) Registros escritos de P1.

- a) Hiperboloide de duas folhas
- b) Paraboloides hiperbólico
- c) Elipsoide
- d) Paraboloides elíptico
- e) Hiperboloide de uma folha

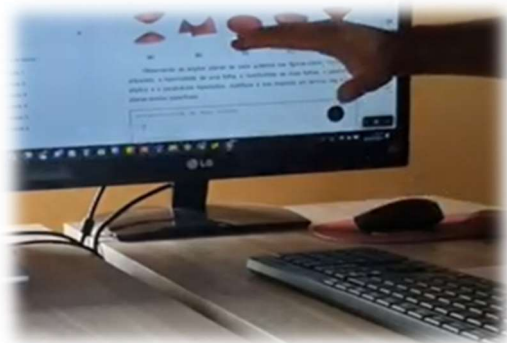
(b) Registros escritos de P2.

Fonte: Dados da pesquisa.

O participante P1 conjecturou a respeito da classificação das superfícies quádricas nessa atividade e, apesar das suas hipóteses estarem corretas, observamos dificuldades em justificar suas escolhas em alguns casos. O participante 2 identificou corretamente as superfícies quádricas na primeira atividade, com as representações 2D-estáticas (Figura 51b).

O elipsoide foi a primeira quádrica escolhida para a classificação, depois o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas e o paraboloides elíptico nessa ordem e, por último, o paraboloides hiperbólico. Ao justificar a sua resposta no caso do elipsoide, P2 utiliza a mão para representar um plano, dizendo: “... *se eu passar um plano assim* (Figura 52a) *é uma elipse e se passar um plano assim* (Figura 52b) *segue sendo uma elipse*”.

Figura 52 – Utilização das representações figurais 2D-estáticas por P2.



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pela autora.

Usando novamente a mão para representar um plano horizontal e outro vertical, P2 identifica as seções planas parabólicas e elípticas do paraboloides elíptico e as seções planas parabólicas e hiperbólicas do paraboloides hiperbólico.

Em relação aos hiperboloides, P2 identifica as seções planas hiperbólicas e elípticas. Ele os diferencia dizendo, no caso do hiperboloide de uma folha: “[...] *independente do lugar que eu cortar eu vou seguir tendo uma elipse*”. E, em relação ao hiperboloide de duas folhas: “*Só que esse aqui se eu cortar aqui no meio, eu não vou ter uma elipse eu não vou ter nada. Se eu*

cortar aqui embaixo eu tenho uma elipse e se eu cortar em cima também”. Com isso, podemos observar que o participante P2 correlacionou corretamente representações figurais e em língua natural a partir das seções planas das superfícies quádricas.

O participante P3 também relacionou corretamente as representações figurais e em língua natural com as representações 2D-estáticas (Figura 53).

Figura 53 - Classificação das superfícies quádricas por P3.

a) hiperboloide de duas folhas - seção plana = hipérbole, elipse, **parábola??**
 b) paraboloides hiperbólico - seção plana = parábola, hipérbole
 c) elipsoide - seção plana = elipse
 d) paraboloides elíptico - seção plana = parábola, elipse
 e) hiperboloide de uma folha - seção plana = hipérbole, parábola, elipse

Fonte: Dados da pesquisa.

P3 começou identificando o elipsoide, depois o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas e o paraboloides elíptico nessa ordem e, por último, o paraboloides hiperbólico. O participante P3 justificou as suas escolhas colocando, ao lado das denominações das superfícies quádricas, as seções planas que o levaram a classificá-las dessa forma.

Observamos que, nos itens b, c e d, P3 identificou conforme esperado as seções planas. Além da elipse e da hipérbole (nos itens a e e), o participante apresentou a parábola como seção plana dos hiperboloides. Então, perguntamos como ele visualiza essa seção plana parabólica, ao que P3 responde que o fez usando um plano que não é paralelo aos planos coordenados. Esse fato estava relacionado a um problema no enunciado dessa atividade, pois as seções planas que nos interessam são as obtidas por planos paralelos aos planos coordenados, podendo ser os próprios.

Assim, foi necessário esclarecer isso no enunciado e, uma vez que as representações figurais não contêm o sistema cartesiano, resolvemos esse impasse dizendo que as seções planas devem ser obtidas por cortes das superfícies com planos horizontais ou verticais. Com isso, entendemos que o participante P3 não apresentou dificuldades com identificação das seções planas por meio das representações 2D-estáticas.

5.1.2.2 ATIVIDADE 2

Na atividade 2, foram fornecidas representações figurais 3D-estáticas, obtidas por modelos impressos em 3D, que oferecem a ideia de volume e possibilitam o manuseio, mas sem

a dinamicidade de um *software*. Para ajudar na visualização das seções planas e na argumentação, o participante P1 utiliza uma folha de ofício para simular um plano que intercepta o modelo 3D do parabolóide elíptico. A Figura 54a mostra o momento em que P1 argumentava que os cortes do parabolóide elíptico por planos verticais são parábolas.

Figura 54 – Utilização das representações figurais 3D-estáticas por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar os modelos impressos em 3D, P1 diz que o hiperbolóide de uma folha lembra muito o hiperbolóide de duas folhas, porém com os centros afastados (Figura 54b). Construindo sua argumentação, P1 complementa dizendo: “*Então se eu cortar ela num plano vertical por exemplo eu vou ter o formato de uma elipse num plano, de uma hipérbole, perdão. Mas, por outro lado, se eu cortasse ela na horizontal, ela ficaria uma elipse, por isso que eu me confundi*”.

Assim, foi possível perceber que o desafio encontrado por P1 na classificação das quádricas não se referia à identificação das seções planas, mas à relação dessas cônicas com as representações em língua natural dessas superfícies. E continuando a diferenciação entre os hiperbolóides, P1 diz: “*Então, um dos motivos que eu escolhi o mesmo nome né, hiperbolóide, foi isto. Porque eles me parecem similares*”. Em seguida, apontando primeiro para o hiperbolóide de uma folha e depois para o de duas folhas, o participante diz: “*E esse tá numa imagem só e esse tá em duas, então uma folha e duas folhas*”.

O participante P2, usando as representações 3D-estáticas, encontrou uma forma diferente para construir a sua argumentação em relação às suas conjecturas na atividade anterior. Por exemplo, P2 identificou as seções planas do parabolóide elíptico usando uma folha de ofício para produzir as sombras do modelo impresso em 3D (Figura 55). Essas imagens, simulando as utilizadas pelo participante P2, referem-se às sombras produzidas pelo modelo 3D no papel posicionado contra a luz.

Figura 55 – Utilização das representações figurais 3D-estáticas por P2.

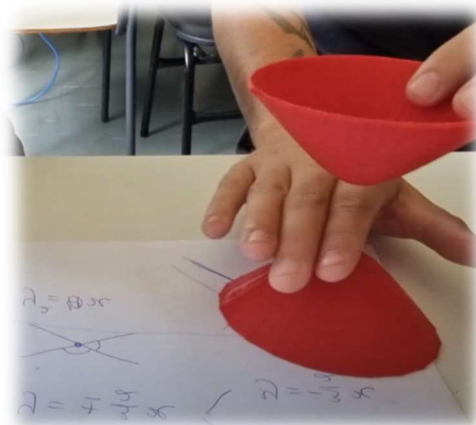


Fonte: Elaborado pela autora.

Produzindo as sombras, o participante P2 confirma a classificação do parabolóide elíptico dizendo que: “*Se eu olhar ele assim contra luz ele vai ser um caso específico da elipse (Figura 55a) que é o círculo e se eu olhar ele assim contra a luz eu vou ver uma parábola (Figura 55b)*”. Com base nesse recurso, P2 analisa as demais superfícies quádricas, confirmando suas conjecturas na atividade 1.

O participante P3, quando em contato com as representações figurais 3D-estáticas, argumentou novamente a respeito das seções planas parabólicas identificadas como seções planas de um hiperbolóide de duas folhas. P3 utiliza a mão para simular um plano, considerando outras possibilidades para a sua inclinação (Figura 56).

Figura 56 – Utilização das representações figurais 3D-estáticas por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

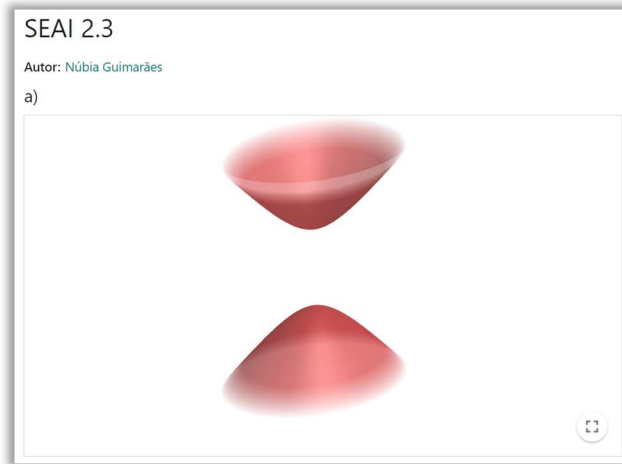
O participante P3 explica novamente que considerou a possibilidade de utilização de planos nem paralelos e nem perpendiculares aos planos coordenados, fato que nos levou a especificar melhor o enunciado dessa atividade. E, sem dúvidas em relação às suas conjecturas

na atividade 1, o participante apenas as confirma. P3 acrescenta que agora esse recurso não faz diferença para ele, referindo-se a possíveis contribuições, mas que na graduação teria feito.

5.1.2.3 ATIVIDADE 3

A atividade 3 forneceu representações figurais 2D-dinâmicas por meio de uma janela de visualização do GeoGebra 3D, que apresenta uma imagem bidimensional de um objeto tridimensional (Figura 57).

Figura 57 – Representação bidimensional de um objeto matemático tridimensional.



Fonte: Elaborado pela autora.

O participante P1 manipulou as representações figurais 2D-dinâmicas fornecidas pela janela de visualização 3D do GeoGebra para construir suas argumentações. Observamos que P1 utilizava o plano de fundo da janela de visualização como plano para ajudar na visualização das seções planas e na confirmação das suas conjecturas. Por exemplo, quando desejava justificar que o hiperboloide de duas folhas (Figura 57) tem seções planas elípticas, P1 girava a representação 2D-dinâmica da quádrlica de modo que o plano da elipse ficasse paralelo ao plano da janela de visualização.

Considerando as representações 2D-dinâmicas, P1 diz: *“Olhando para o computador eu consigo enxergar o que eu estava imaginando”*. No entanto, o participante afirma que classificou o parabolóide hiperbólico por eliminação, pois ainda não consegue visualizar as seções planas hiperbólicas com essa representação 2D-dinâmica. Os participantes P2 e P3 manusearam as representações figurais 2D-dinâmicas e, demonstrando convicção, confirmaram suas conjecturas quanto à classificação das superfícies quádrlicas.

5.1.2.4 ATIVIDADE 4

Na atividade 4, foram fornecidas representações figurais 3D-dinâmicas através de imagens obtidas por anáglifo, que oferecem a ideia de volume e possibilitam o manuseio. Perguntamos ao participante P1 se, com essa representação do parabolóide hiperbólico, ele conseguia identificar as seções planas hiperbólicas. Girando a representação dinâmica da quádrlica para tornar os planos das hipérboles paralelos ao plano da janela de visualização do GeoGebra, apontando para a tela do computador, o participante responde que visualiza uma curva voltada para cima e outra para baixo (Figura 58).

Figura 58 – Utilização das representações figurais 3D-dinâmicas obtidas por anáglifo por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar de já imaginar que essas ‘curvas voltadas para cima e para baixo’ são as seções planas hiperbólicas, isso só ficou claro para P1 na atividade 6. No entanto, o participante não alterou as suas respostas na atividade 1, permanecendo com a classificação inicial das superfícies quádrlicas. Para os participantes P2 e P3, essas representações figurais obtidas por anáglifo não apresentaram novos elementos em relação às apreensões figurais anteriores.

5.1.2.5 ATIVIDADE 5

Na atividade 5, foram fornecidas representações figurais 3D-dinâmicas obtidas por realidade aumentada, que oferecem a ideia de volume e possibilitam o manuseio. Quando utiliza a realidade aumentada para visualizar as seções planas, o participante P1 encontrou algumas dificuldades para manipular a superfície. Diferente do computador, no aplicativo do celular, o movimento do objeto matemático precisa ser realizado com os dedos (Figura 59).

Figura 59 - Utilização das representações figurais 3D-dinâmicas obtidas por realidade aumentada por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A dificuldade relatada por P1 refere-se ao esquema de uso que P1 precisou constituir para utilizar as representações 3D-dinâmicas obtidas por realidade aumentada. Comparando essas representações com as 2D-dinâmicas, o participante P1 disse: *“Ainda prefiro daquela maneira, eu acho que só pelo fato de estar mexendo com os dedos”*.

Então, foi solicitado a P1 que considerasse o fato de que a representação na janela de visualização 3D é uma representação plana de um objeto tridimensional e, portanto, uma imagem projetada. Com base nisso, perguntamos a P1 se por ser uma representação em três dimensões de um objeto tridimensional, a realidade aumentada poderia apresentar alguma vantagem em relação às outras na identificação das propriedades de uma quádrlica. Já apresentando avanços em relação à constituição dos esquemas de uso relacionados ao movimento das representações obtidas por realidade aumentada, P1 respondeu: *“Acho que sim. É como se eu tivesse com a imagem na mão ... dá mais clareza”*.

No entanto, as apreensões figurais proporcionadas por essas representações não acrescentaram elementos novos às propriedades das quádrlicas para nenhum dos participantes. Apesar de ter relatado que essas representações ajudam na visualização, P1 ainda não conseguia justificar suas conjecturas em relação às seções planas hiperbólicas do parabolóide hiperbólico. Aos participantes P2 e P3, essas representações figurais 3D-dinâmicas obtidas pela realidade aumentada também não acrescentaram elementos novos às apreensões figurais anteriores.

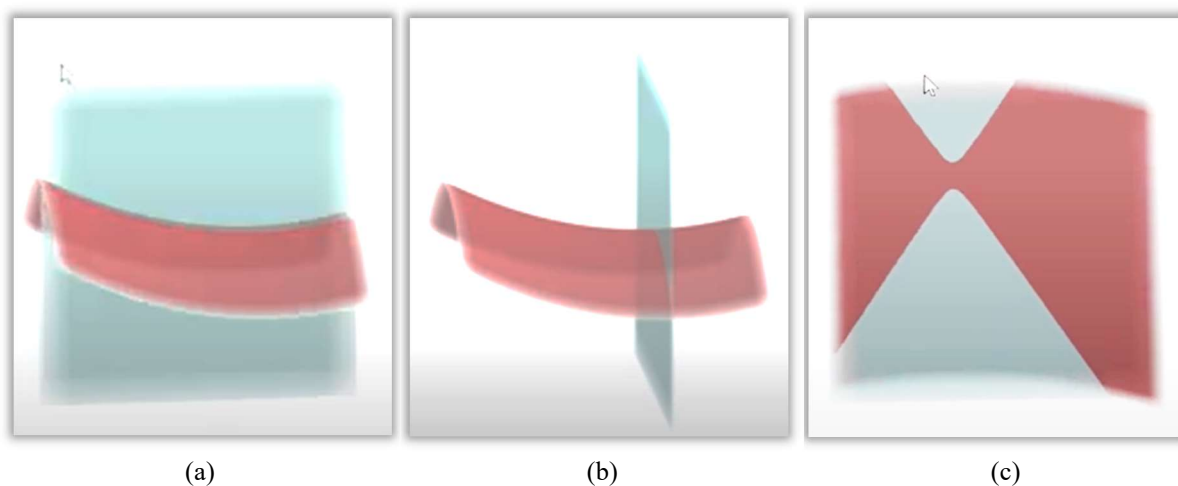
5.1.2.6 ATIVIDADE 6

Na segunda parte desta SEAI, a atividade 6 apresentou a mesma proposta, porém com o uso de um plano coordenado ou paralelo a este. Usando as representações figurais obtidas na

janela de visualização do GeoGebra 3D, os participantes poderiam inserir a equação desse plano na janela de álgebra para obter a seção plana da quádrlica.

O participante P1 explorou os cortes por planos coordenados ou paralelos a estes de algumas quádrlicas e, em seguida, decidiu analisar as seções planas do parabolóide hiperbólico. Buscando as seções planas hiperbólicas dessa quádrlica, P1 iniciou inserindo as equações de planos verticais - xoz (Figura 60a) e yoZ (Figura 60b) - verificando que as seções planas são parábolas.

Figura 60 - Utilização das representações figurais 2D-dinâmicas com o apoio de um plano por P1.



Fonte: Elaborado pela autora.

Então, P1 conjecturou que as seções planas obtidas pelos cortes com planos paralelos ao plano xoy são hiperbólicas. O participante iniciou inserindo na janela de álgebra a equação do plano $z = 3$, paralelo a xoy . Não obtendo intersecção com o parabolóide hiperbólico, P1 inseriu a equação do plano xoy , obtendo uma hipérbole como seção plana do parabolóide hiperbólico (Figura 60c). No entanto, essa é a representação gráfica do parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz , logo o corte pelo plano xoy deveria resultar em duas retas concorrentes.

O engano ocasionado pela representação do GeoGebra não trouxe prejuízo a essa atividade porque o participante esperava que essa seção plana fosse hiperbólica. A hipótese de P1 acabou se confirmando, apesar do erro do *software*, não causando dificuldades de compreensão nessa atividade. No entanto, entendemos que se o participante tivesse encontrado as retas concorrentes na intersecção com o plano $z = 0$, teria continuado a busca pelas seções planas hiperbólicas, qualificando mais a sua apreensão figurativa.

Esse erro de representação gráfica do GeoGebra foi contornado nessa atividade, não tendo sido observado com as demais superfícies, o que possibilitou ao participante P1 a

confirmação e argumentação das suas conjecturas. E o problema das retas concorrentes como seção plana de um parabolóide hiperbólico também foi integralmente abordado na SEAI 7. A cada atividade dessa SEAI, os participantes foram convidados a conjecturar a respeito das seções planas, podendo confirmar ou refutar as suas conjecturas nas atividades anteriores.

Para os participantes P2 e P3, as representações 2D-estáticas já proporcionaram apreensões figurais suficientes para a constituição dos esquemas conceituais relativos à correlação entre os registros figurais e em língua natural das superfícies quádricas. O mesmo não ocorreu com P1 que, classificando o parabolóide hiperbólico por eliminação, não conseguiu construir uma argumentação para justificar sua escolha. No caso de P1, a apreensão figural que possibilitou a identificação das seções planas hiperbólicas só ocorreu com as representações 2D-dinâmicas e após a inserção do plano para obter o corte com a quádrica.

A situação de ensino e aprendizagem instrumental a seguir teve por objetivo apresentar um esquema que mistura procedimentos algébricos e gráficos para correlacionar registros gráficos, simbólicos e em língua natural das quádricas por meio da variável visual ‘seção plana’.

5.1.2.7 OBSERVAÇÕES FINAIS

As representações 2D-estáticas permitiram aos participantes realizarem conjecturas a respeito do reconhecimento das superfícies quádricas, mas em alguns casos, não foram suficientes para produzir argumentações relacionadas à identificação das suas seções planas. Essas representações foram suficientes no reconhecimento do parabolóide elíptico por P1, mas o mesmo não ocorreu na identificação das suas seções planas hiperbólicas.

Além dessa limitação, observamos que ao manusearem essas representações 2D-estáticas, os participantes utilizaram recursos (a própria mão, uma folha de papel, a sombra da superfície) para identificar seções planas das superfícies. A inserção de elementos continua sendo uma das limitações observadas também nas representações 3D-estáticas, ocorrendo em várias oportunidades. As representações 2D-dinâmicas, que parecem não acrescentar elementos novos na identificação das seções planas pelos participantes P2 e P3, contribuíram para a confirmação das conjecturas a respeito de algumas quádricas por P1.

Da mesma forma que as representações 2D-dinâmicas, para P2 e P3 as representações figurais 3D-dinâmicas obtidas por anáglifo também não apresentam novidades, mas o mesmo não ocorre com P1, que consegue visualizar as seções planas hiperbólicas do parabolóide hiperbólico através da representação obtida por anáglifo. As experiências dos participantes P2 e P3 com as representações 3D-dinâmicas obtidas por realidade aumentada seguem tendo os

mesmos resultados que com as outras representações dinâmicas, não acrescentando informações novas.

Já com o participante P1 esse tipo de representação proporcionou uma experiência do tipo ‘pegar a superfície com a mão’, apesar de ainda não demonstrar convicção a respeito das seções planas hiperbólicas que observava, o que só ocorreu quando inseriu um plano para obter a intersecção com o parabolóide hiperbólico. Nessa oportunidade, os participantes puderam obter as parábolas e hipérbolas como cortes do parabolóide hiperbólico por planos coordenados e paralelos a estes.

Assim, observamos que a possibilidade de inserção do plano favoreceu a identificação do parabolóide hiperbólico pelo participante P1, o que já não ocorreu com P2 e P3. Com a análise dos aportes teóricos já havíamos entendido que as diversas maneiras de acesso aos objetos matemáticos tridimensionais, que carregam potencialidades e limitações distintas, que poderiam revelar ou esconder propriedades do objeto matemático.

Com a implementação dessa situação de ensino e aprendizagem instrumental, podemos adicionar a essa constatação o fato de que as propriedades que podem ser conhecidas por meio das diferentes representações variam de acordo com os conceitos abordados, com a atividade proposta ou, também, com os conhecimentos prévios possuídos pelo sujeito. Em relação aos conceitos, usando os exemplos abordados nesse estudo, a exploração da representação 3D-estática de um cubo pode ser suficiente para revelar as propriedades desse objeto matemático, diferente do caso de um parabolóide hiperbólico, por exemplo.

No entanto, mesmo no caso do cubo, uma representação dinâmica pode evitar que a visualização do objeto matemático tridimensional se restrinja a casos particulares. Além disso, a dinamicidade desse tipo de representação possibilita a visualização, a exploração das características do objeto matemático e a generalização. No tocante às atividades, para a classificação das superfícies quádricas foi necessária apenas a identificação das suas seções planas, o que foi realizado sem a necessidade de muitos recursos da matemática dinâmica.

Ainda assim, observamos em algumas oportunidades, a relevância da possibilidade de inserção do plano para a visualização das seções planas. No entanto, o mesmo não ocorreria numa atividade em que se desejasse correlacionar representações gráficas e simbólicas de uma superfície quádrica, por exemplo. Nesse caso, as representações dinâmicas possibilitam a alteração do valor dos coeficientes na expressão algébrica da equação da quádrica, observando as simultâneas alterações gráficas provocadas.

Os tratamentos que os ambientes de matemática dinâmica possibilitam realizar sobre as representações dinâmicas enriquecem as apreensões figurais, contribuindo para a apreensão

conceitual dos conceitos envolvidos. E, em relação aos conhecimentos prévios possuídos pelo sujeito, consideramos que essa experiência poderia ter resultados bem diferentes com sujeitos que ainda não tivessem alguma noção sobre superfícies.

O que não foi o caso dos participantes dessa pesquisa que, com formação na área de ciências exatas finalizada ou finalizando, já possuíam alguns conhecimentos prévios que favoreceram a visualização das seções planas para classificação das superfícies quádricas. Consideramos que as diferentes formas de representação de um objeto matemático tridimensional, bi ou tridimensionais, estáticas ou dinâmicas, podem ser utilizadas de forma complementar e a partir de uma análise das suas características, dos conceitos abordados, das atividades propostas e do perfil do aluno.

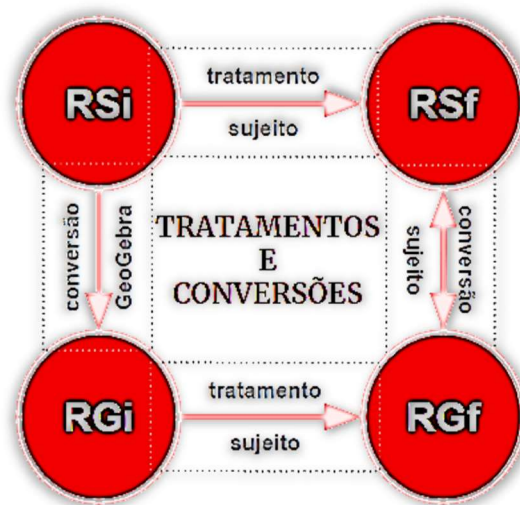
5.1.3 SEAI 3 - Esquema para correlação entre registros de representação de superfícies quádricas

Depois que as superfícies quádricas foram apresentadas aos participantes nas suas representações figural e em língua natural geral, foi proposta a terceira situação de ensino e aprendizagem instrumental (**APÊNDICE F** — SEAI 3). Essa SEAI propôs a correlação entre representações gráficas e simbólicas das quádricas, através da variável visual ‘seção plana’. As seções planas das quádricas revelam importantes valores visuais que contribuem para as oposições qualitativas necessárias à diferenciação entre representações simbólicas e gráficas dessas superfícies.

Por meio de procedimentos algébrico e informático, a correlação entre registros simbólicos e gráficos é obtida a partir de quatro transformações: uma realizada pelo GeoGebra e três pelo participante. Para melhor compreensão da estratégia para correlação entre registros simbólicos e gráficos, trouxemos novamente aqui a Figura 61, que já havia sido apresentada na subseção 3.2.

Nessa SEAI, essas transformações foram realizadas em quatro passos: 1º) tratamentos sobre a RS_i (equação da quádrica) obtendo as RS_f (equações das seções planas); 2º) conversão entre as RS_i e RG_i (gráfico da quádrica); 3º) tratamentos sobre a RG_i , resultando nas RG_f (gráficos das seções planas); 4º) conversão entre RS_f e RG_f . Os três parágrafos seguintes explicam a estratégia para correlação entre registros gráficos e simbólicos.

Figura 61 - Estratégia para correlação entre representações gráficas e simbólicas.



Fonte: Elaborado pela autora.

No primeiro passo, os tratamentos ($RSi \rightarrow RSf$) foram realizados sobre as equações das superfícies quádricas (RSi) para obter as equações das seções planas (RSf) resultantes das suas intersecções por planos coordenados e paralelos a estes. Assim, substituindo $x = k$, $y = k$ ou $z = k$ ($k \in \mathbb{R}$) na equação da quádrica, foram obtidas as RSf das suas seções planas. Fazendo um estudo do sinal nas expressões que contém k e a correspondente interpretação geométrica, ficam caracterizadas no registro simbólico todas as seções planas possíveis para cada valor de $k \in \mathbb{R}$.

No segundo passo, a equação da quádrica é inserida na janela de álgebra e o GeoGebra é quem realiza a conversão da representação simbólica inicial para a gráfica inicial ($RSi \rightarrow RGi$). A seguir, no terceiro passo, inserimos as equações dos planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ na janela de álgebra, o que gera um controle deslizante para $k \in \mathbb{R}$. Variando os valores de k , obtém-se planos que podem ser os próprios planos coordenados ($k = 0$) ou planos paralelos a esses ($k \neq 0$). Então, são realizados os tratamentos dinâmicos ($RGi \rightarrow RGf$) por meio do GeoGebra, que consistem nas intersecções entre os planos e a quádrica.

Por fim, no quarto passo, as conversões ($RSf \leftrightarrow RGf$) ocorrem por meio da análise e correlação entre as representações gráficas e simbólicas das seções planas. A partir da variação do valor de k nas RGf e RSf , e observando a correspondência entre as representações nesses registros, fica estabelecida a correlação entre os registros gráficos e simbólicos da superfície quádrica. A seguir, apresentamos a forma como as atividades foram propostas nesta SEAI, seguidas das resoluções dos participantes.

Na introdução dessa SEAI, foram apresentadas as equações de um hiperboloide de uma folha (1) e de um paraboloides elíptico (2):

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

$$(2) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$$

Os participantes foram informados que as atividades propõem a análise algébrica e gráfica das seções planas dessas superfícies quádricas, com o objetivo de identificá-las e de relacionar seus gráficos e equações.

5.1.3.1 ATIVIDADE 1

No item a da primeira atividade, foi proposta uma antecipação ao perguntar se os participantes teriam uma ideia de que superfície quádrica é representada pela equação (1). Para isso, propomos que eles pensassem nas seções planas das superfícies representadas por essas equações, a partir de seus registros simbólicos. Então, os participantes tiveram que fazer mentalmente o exercício de obter a representação simbólica da seção plana obtida pela substituição das variáveis x , y e z por zero, cada uma a sua vez.

Ao participante P1, pelo fato de ter sido a primeira vez que a atividade foi aplicada, não foi solicitada essa antecipação. No entanto, entendemos que essa antecipação poderia contribuir na análise e incluímos essa questão para os participantes seguintes. O participante P2 disse que a equação 1 refere-se a um hiperboloide de uma ou duas folhas, mas não justifica a resposta. E, no caso da segunda equação, o mesmo respondeu: “*Eu acho que a equação 2 é um parabolóide elíptico ... porque a variável z tá em grau 1*”.

O participante P3 respondeu corretamente que as equações 1 e 2 referem-se a um hiperboloide de uma folha e um parabolóide elíptico, respectivamente. Justificando essas respostas, referindo-se à equação 1, P3 disse: “*Voltando aqui para a equação né, vamos dizer que eu boto $z=0$, eu vou ter uma elipse. Se eu colocar o $z=1$, eu vou ter um valor positivo aqui, vai ter uma elipse em outro formato. Para qualquer valor que eu colocar aqui eu sempre vou ter uma elipse né*”.

P3 seguiu argumentando que as seções planas são elípticas para qualquer valor de $k \in \mathbb{R}$, de onde inferimos que ele entendeu que isso só ocorre com o hiperboloide de uma folha. Isso ficou mais claro quando, na antecipação da equação 2, disse que não poderia se tratar de um hiperboloide de uma folha porque as seções planas obtidas por planos paralelos a xoy não eram sempre elipses. E, buscando imaginar quais seções planas podem ser obtidas pelas intersecções por planos paralelos a xoy , diz: “*Se z for negativo, eu não vou ter elipse, então*

seria um parabolóide ali, né. Deixa eu pensar aqui mais um pouco também. É vou ter a letra d né parabolóide elíptico”.

No item b, foi proposto o primeiro passo da estratégia para correlação entre registros gráficos e simbólicos: tratamentos sobre a RSi (equação da quádrlica), obtendo as RSf (equações das seções planas). Esses tratamentos são realizados por meio de procedimento algébrico que possibilita a obtenção das seções planas resultantes da intersecção da superfície representada pela equação (1) com planos coordenados e paralelos a estes.

Para a apropriação do procedimento algébrico, na dinâmica do fazer para compreender, a atividade proposta ora mostra o caminho e ora deixa que o participante preencha as lacunas (Figura 62).

Figura 62 - Procedimento algébrico para obter as seções planas de uma superfície quádrlica.

Os planos paralelos ao plano xoz tem equação na forma _____.

Para obter algebricamente as intersecções destes planos com a superfície dada, é necessário resolver o sistema composto pelas equações dos planos e da superfície:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, fazemos $y = k$ na equação (1), ficando:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{k^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{9}$$

- Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for positivo, teremos _____ (parábolas, elipses ou hipérboles) com eixo _____ (de simetria, maior ou real) paralelo ao eixo dos _____ (x , y , z). Para que valores de k isso ocorre? _____

- Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for negativo, teremos _____ (parábolas, elipses ou hipérboles) com eixo _____ (de simetria, maior ou real) paralelo ao eixo dos _____ (x , y , z). Para que valores de k isso ocorre? _____

- E, qual é a seção plana obtida quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for nulo? Para que valores de k isso ocorre? _____

Fonte: Elaborado pela autora.

Dessa forma, os participantes precisam mobilizar esquemas conceituais relativos à resolução de inequações do 2º grau para a (re)constituição de outros relacionados à resolução e interpretação geométrica desse sistema de equações.

A atividade conduziu os participantes à compreensão de que, para obter as seções planas da quádrlica da equação (1) por cortes com o plano xoz e paralelos a este, era necessário

substituir as equações desses planos ($y = k$) na equação da superfície. E depois de obter a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{k^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, analisando a resolução proposta na atividade, os participantes puderam observar que o termo que contém k é constante, devendo compor o lado direito da equação.

Deixando apenas os termos que contém as variáveis na parte esquerda equação, ficamos com a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{9}$, que pode representar uma cônica degenerada ou não degenerada, dependendo do valor de $k \in \mathbb{R}$. Então, os participantes precisaram realizar um estudo do sinal da expressão $1 - \frac{k^2}{9}$ para a identificação das seções planas da quádrlica com os planos $y = k$, para cada valor de $k \in \mathbb{R}$.

Esse estudo do sinal gerou a necessidade da resolução de uma inequação do 2º grau, quando observamos que esses esquemas conceituais foram mobilizados por P2 e P3 e (re)constituídos por P1. No final, os três participantes chegaram à conclusão que as hipérbolas têm eixo real paralelo ao eixo dos x quando $-3 < k < 3$, ao eixo dos z quando $k < -3$ ou $k > 3$ e que, para cada valor de $k = \pm 3$, existem duas retas concorrentes como seções planas. Os registros escritos com as conclusões finais dos participantes foram:

P1: Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for positivo, teremos hipérbolas com eixo real paralelo ao eixo dos x . Para que valores de k isso ocorre? Para $-3 < k < 3$. Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for negativo, teremos hipérbolas com eixo real paralelo ao eixo dos z . Para que valores de k isso ocorre? Para $k < -3$ ou $k > 3$. E, qual é a seção plana obtida quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for nulo? Para que valores de k isso ocorre? A seção plana será duas retas e isso ocorre para valores de $k = -3$ e $k = +3$.

P2: Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for positivo, teremos uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos x . Para que valores de k isso ocorre? Para os valores dentro do intervalo de $(-3,3)$. Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for negativo, teremos uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos z . Para que valores de k isso ocorre? Para os valores fora do intervalo de $[-3,3]$. E, qual é a seção plana obtida quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for nulo? Para que valores de k isso ocorre? Quando for nulo temos duas cônicas degeneradas que representam duas retas concorrentes, para os valores de $k = +3$ ou -3 .

P3: Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ é positivo, as seções planas são hipérbolas com eixo real paralelo ao eixo dos x . Para que valores de k isso ocorre? $-3 < k < 3$. Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for negativo, as seções planas são hipérbolas com eixo real paralelo ao eixo dos z . Para que valores de k isso ocorre? $k < -3$ ou $k > 3$. E, quando $1 - \frac{k^2}{9}$ for nulo, as seções planas são duas retas concorrentes. Para que valores de k isso ocorre? $k = 3$ ou $k = -3$.

No entanto, o processo que levou os participantes a essas constatações revelou esquemas conceituais já constituídos por eles e outros que foram (re)constituídos. No caso de P1, antes

de resolver a inequação em k , o participante conjecturou que as seções planas eram hipérbolas, com argumentos baseados nos sinais diferentes dos termos em x e z . Essa antecipação nos permite observar que P1 mobilizou adequadamente esquemas conceituais relacionados à identificação das cônicas, com exceção do caso em que as seções planas são duas retas concorrentes.

O caso em que as seções planas são duas retas concorrentes foi identificado na resolução da inequação, juntamente com a interpretação dos resultados. Nessa oportunidade, observamos alguns obstáculos relacionados à interpretação da solução da inequação do 2º grau, considerando que a cada valor de k corresponde uma seção plana da quádrlica. A dificuldade observada nessa oportunidade refere-se à identificação das representações simbólicas das retas concorrentes quando $k = \pm 3$, uma vez que a equação da quádrlica reduz-se à $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 0$.

Perguntando a P1 o que essa equação representa, o participante inicialmente conjectura que se trataria de uma hipérbole. Depois, ponderando a respeito do termo nulo na direita da equação, refuta a sua hipótese. Propondo um direcionamento para a interpretação geométrica desse caso, pedimos para que P1 resolvesse essa equação. P1 resolve a equação obtendo $z = \pm 2x$ e, quando perguntamos o que essas equações representam, P1 responde com uma pergunta “Uma reta?” E, observando que são duas equações, corrige: “Duas retas”.

Esse procedimento algébrico foi novamente proposto para os planos coordenados yoz (item c) e xoy (item d) e paralelos a estes. Porém, nos itens c e d, a proposta foi para a execução do procedimento algébrico sem a condução anteriormente realizada no item b. Assim, mobilizando os esquemas conceituais constituídos no item b, os participantes realizaram o procedimento algébrico no item c. Nesse caso, foi proposto o reconhecimento das representações simbólicas das seções planas obtidas por cortes com planos paralelos a yoz para $k \in IR$.

Os resultados do procedimento algébrico nesse caso foram muito próximos ao do caso anteriores e os registros escritos com as conclusões finais dos participantes foram:

P1: $-2 < k < 2$ hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos y ; $k < -2$ ou $k > 2$ hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos z ; $k = -2$ ou $k = 2$ serão duas retas.

P2: Para seções obtidas através do plano yoz , igualamos o $x = k$. Ficando com a equação $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{4}$. Depois, quando é feito o estudo do sinal, verificamos que para os valores de k entre o intervalo $(-2, +2)$, teremos uma hipérbole de eixo real em y . Para valores fora do intervalo $(-2, +2)$, teremos uma hipérbole de eixo real em z . E para valores de $k = +2$ ou -2 , teremos cônicas degeneradas, que representam 2 retas concorrentes.

P3: [...] a equação das seções planas: $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{4}$ e $x=k$ [...] Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{4}$ for positivo, as seções planas são hipérbolas de eixo real y . Para que valores de k isso ocorre? $-2 < k < 2$. Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{4}$ for negativo, as seções planas são hipérbolas de eixo real z . Para que valores de k isso ocorre? $k < -2$ ou $k > 2$. E, quando o valor de $1 - \frac{k^2}{4}$ for nulo, as seções planas são duas retas concorrentes. Para que valores de k isso ocorre? $k = 2$ ou $k = -2$.

Nessa questão, os participantes P2 e P3 já mobilizam de forma espontânea os esquemas conceituais constituídos no item anterior, obtendo algebricamente as seções planas da quádrlica com os planos de equações $x = k$. E, ainda que de forma menos espontânea, P1 também mobiliza os esquemas conceituais necessários para a realização dessa questão. A identificação das seções planas que essas representações simbólicas representavam já ocorreu de forma mais espontânea para os três participantes.

O procedimento algébrico do item d, quando precisaram identificar as representações simbólicas das seções planas obtidas por planos paralelos a xOy , tem resultados diferentes dos anteriores. Os participantes precisaram mobilizar esquemas conceituais para o estudo dos sinais da expressão $1 + \frac{k^2}{16}$, para $k \in \mathbb{R}$. Nesse caso, foi necessário resolver e realizar a interpretação geométrica da solução da solução, identificando as seções planas obtidas.

Analisando os sinais dessa expressão, P1 verbalizou: “Qualquer valor que eu colocar aqui (no lugar de k) vai se tornar positivo e qualquer coisa que eu somar aonde vai ser positivo então nunca vai ser zero e também nunca vai dar negativo”. Da mesma forma, os participantes P2 e P3 constataram que a expressão $1 + \frac{k^2}{16}$ é positiva para quaisquer valores de $k \in \mathbb{R}$. Realizando a interpretação geométrica da equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + \frac{k^2}{16}$, para os distintos valores de k , os participantes registram as seguintes respostas:

P1: Elipse para qualquer valor de k .

P2: Para seções obtidas através do plano xOy , igualamos o $z=k$. Ficando com a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + \frac{k^2}{16}$. Depois, quando é feito o estudo do sinal, verificamos que para os valores de k , teremos apenas valores de $1 + \frac{k^2}{16}$ positivos. A partir disso, voltando para a equação inicial, teremos apenas a representação de uma elipse, independente do valor de k . O valor de k vai impactar na distância dos eixos, maior e menor.

P3: Tomando $z=k$ obtemos equação das seções planas: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + \frac{k^2}{16}$. Analisando para os valores de $1 + \frac{k^2}{16}$. Se este termo for positivo, negativo ou nulo, podemos obter somente elipses, pois este termo é sempre positivo. Para o caso em que $1 + \frac{k^2}{16}$ é positivo, obtemos a seção plana elipse, para todos os valores de k . O caso em que $1 + \frac{k^2}{16}$ é negativo ou nulo não é possível pois $\frac{k^2}{16}$ é sempre positivo.

Observamos que, a cada questão, os esquemas conceituais necessários para utilização do procedimento algébrico foram sendo mobilizados de forma mais espontânea. Entendemos que isso se deve ao fato de que as questões nessa atividade foram propostas de forma progressiva, gerando subsídios para que os participantes conseguissem prosseguir. Envolvendo um fazer para compreender, na questão do item b os participantes exploraram o procedimento, o que lhes ofereceu subsídios para aplicar em caso semelhante na questão do item c.

E, os esquemas conceituais constituídos nestas questões, lhes deram condições de aplicar numa nova situação no item d. Assim, observamos que a cada questão os participantes utilizavam o procedimento algébrico com maior compreensão. No item e da atividade 1, conhecendo as equações das seções planas obtidas por cortes da superfície com os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$, os participantes foram desafiados a juntar mentalmente as fatias que compõem a quádrlica para identificá-la. As respostas dos participantes a esta questão foram:

P1: Temos um hiperboloide de uma folha.

P2: Acredito ser um hiperboloide de 1 folha, justamente por ter sempre a representação de uma elipse.

P3: Então eu tenho elipses em todos (referindo-se às seções planas paralelas a xoy). Então vai ser hiperboloide de uma folha.

O participante P1, levando em consideração que haviam seções planas hiperbólicas e elípticas, ficou em dúvida entre os hiperboloides de uma ou duas folhas. Quando convidado a pensar sobre a sua resposta no item d, sobre as seções planas obtidas por cortes com planos paralelos a xoy : “*Elipse para qualquer valor de k* ”, rapidamente percebeu que se tratava de um hiperboloide de uma folha.

Inferimos que os participantes P2 e P3 apoiaram-se no fato de que o hiperboloide de uma folha é a única quádrlica que tem como seção plana uma elipse para todo valor de $k \in \mathbb{R}$. Os demais passos da estratégia para correlação entre os registros gráficos e simbólicos foram propostos na atividade 2.

5.1.3.2 ATIVIDADE 2

Nessa atividade, os participantes foram convidados a realizar o segundo passo, que envolveu a conversão da RSi (equação da quádrlica) para o RGi (gráfico da quádrlica), proposto no item a dessa atividade. Essa conversão é realizada pelo GeoGebra 3D, quando o participante inseriu a equação da quádrlica na janela de álgebra, obtendo a representação gráfica da superfície.

Os participantes confirmaram suas conjecturas a respeito de que quádrlica teria as seções planas obtidas pelo procedimento algébrico na atividade anterior. Inserindo a equação 1 na janela de álgebra do GeoGebra, os três participantes obtiveram êxito nas suas antecipações, encontrando o hiperboloide de uma folha. Considerando a proposta de imaginar a quádrlica formada pelas seções planas obtidas algebricamente, o participante P3 argumenta que: “*Sim, pois analisando a situação algébrica para todos os planos paralelos aos planos coordenados é possível ter uma visualização mental da figura*”.

Com isso, podemos perceber a contribuição da desconstrução dimensional para a apreensão figural, nesse caso, apenas por meio da representação mental das representações simbólicas das seções planas. A composição dessas representações bidimensionais, como peças de um quebra-cabeças, torna possível o reconhecimento da superfície. E ainda não trabalhamos com as representações gráficas dessas seções planas, que é tratada nos terceiro e quarto passos da estratégia para correlação entre registros de representação, propostos nos itens b, c e d da atividade 2.

No terceiro passo, o participante efetua os tratamentos dinâmicos sobre a RGi (gráfico da quádrlica), obtendo as RGf (gráficos das seções planas). Esses tratamentos consistem num procedimento informático que, da mesma forma que o procedimento algébrico, permite obter as seções planas da superfície por cortes pelos planos coordenados e paralelos a estes. Esse procedimento informático consiste na inserção das equações dos planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ na janela de álgebra e na utilização da ferramenta de intersecção de superfícies do GeoGebra 3D.

Na dinâmica do fazer para compreender, as questões norteadoras nessa atividade conduzem o participante a identificar as seções planas da quádrlica de equação (1), obtidas de cortes por planos paralelos aos planos coordenados. Da mesma forma que na atividade 1, o item b da atividade 2 mostra o caminho para a realização dos tratamentos dinâmicos (RGi em RGf) necessários para a obtenção das seções planas obtidas por cortes com planos paralelos a xOz (Figura 63).

Nessa ocasião, os participantes observaram e experimentaram o procedimento informático no item b para depois aplicar nos itens c e d, obtendo as seções planas por cortes com planos paralelos a yOz e a xOy , respectivamente. Para responder às duas primeiras questões (item b), os participantes inseriram a equação $y = k$ na janela de álgebra, gerando um controle deslizante para o parâmetro $k \in IR$.

Os participantes apresentaram-se em diferentes estágios em relação ao esquema de uso relacionado ao controle deslizante, uma vez que antes de iniciar os encontros referentes a essa

investigação: P2 nem conhecia o GeoGebra; P1 apenas o conhecia, mas não havia utilizado; e P3 já fazia uso pessoal e profissional.

Figura 63 – Procedimento informático para obter as seções planas de uma superfície quádrlica.

As seções planas obtidas pela intersecção da superfície de equação (1) por planos paralelos a xoz são:

- hipérbolos com eixo real paralelo ao eixo dos x para que valores de k ? _____

- hipérbolos com eixo real paralelo ao eixo dos z para que valores de k ? _____

Para quais valores de k ocorre essa mudança no eixo real das hipérbolos? _____

Qual a seção plana obtida para esses valores de k ? _____

Agora, compare as suas respostas, obtidas pela análise gráfica, com as encontradas algebricamente no item b da atividade 1.

As respostas coincidiram? Se não, como você explicaria a diferença nos resultados? _____

Fonte: Elaborado pela autora.

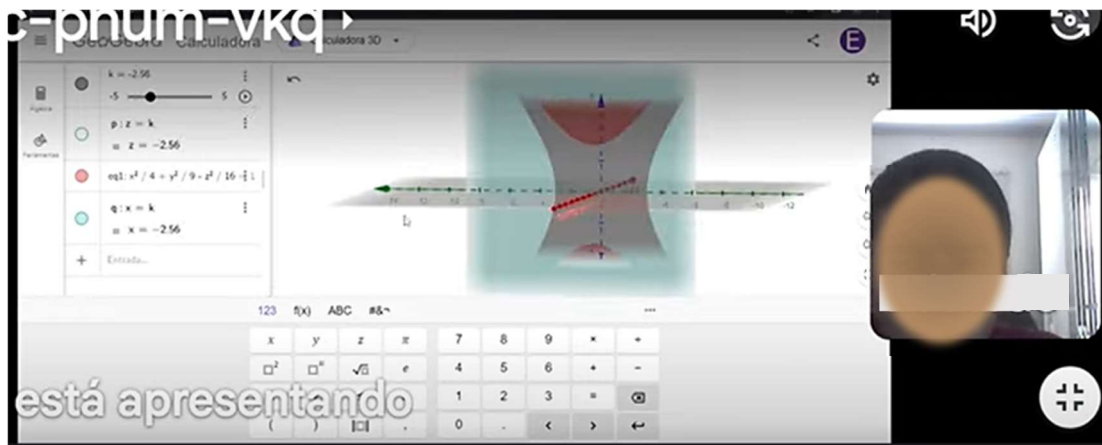
O participante P2 escolheu inserir primeiro as equações dos planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$, experimentando o controle deslizante e desafiando-se a imaginar a quádrlica. P2 iniciou inserindo a equação $x = k$, não obtendo a representação gráfica da quádrlica ainda. Dizendo que estava tentando imaginar a quádrlica a partir das suas seções planas, conhecidas apenas pelo procedimento algébrico, P2 move o controle deslizante. Observando o plano $x = k$ percorrer o eixo dos x quando o valor de k varia, P2 afirmou que as seções planas são hipérbolos.

Depois, P2 inseriu a equação $y = k$ e ocultou $x = k$. Movendo o controle deslizante, observa o plano $y = k$ percorrer o eixo dos y , dizendo que essas seções planas também são hiperbólicas. Por fim, dizendo que as seções planas obtidas por cortes com os planos $z = k$ são elípticas, P2 concluiu que se trata de um hiperboloide de uma folha. Somente depois, P2 insere a equação da quádrlica na janela de álgebra do GeoGebra, analisando as seções planas obtidas ao mover o controle deslizante para cada uma das equações dos planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$.

Na Figura 64, podemos ver um dos momentos em que o participante P2 realiza o procedimento informático, efetuando tratamentos dinâmicos sobre a representação gráfica da quádrlica da equação (1). Iniciando pela equação $x = k$, P2 moveu o controle deslizante fazendo o plano deslizar sobre o eixo dos x à medida que o valor de k varia, observando a mudança na concavidade das seções planas hiperbólicas. Essa imagem mostra o momento em que P2

constatou que para valores de $k < -3$ as hipérbolas tem eixo real paralelo ao eixo dos z e eixo imaginário paralelo ao eixo dos y .

Figura 64 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas de um hiperboloide de uma folha por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Da mesma forma, os participantes P1 e P3 também executaram o procedimento informático, identificando os valores de k para os quais as seções planas são hipérbolas com eixo real paralelo ao eixo dos x e ao eixo dos z . Os participantes registraram as seguintes respostas às duas primeiras questões norteadoras do item b (Figura 63):

P1: uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos x para os valores de k : Para $-3 < k < 3$; uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos z para os valores de k : $k < -3$ ou $k > 3$.

P2: uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos x para que valores de k ? $(-3,3)$; uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos z para que valores de k ? Fora do intervalo de $[-3,3]$.

P3: uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos x para que valores de k ? $-3 < k < 3$; uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos z para que valores de k ? $-3 > k$ ou $k > 3$.

Na terceira pergunta do item b da atividade 2 (Figura 63), os participantes verificaram para que valores de k ocorre essa mudança na posição das hipérbolas. E, na quarta pergunta, eles precisaram observar que, para estes valores de k , temos duas retas concorrentes como seções planas. As respostas dos participantes foram:

P1: A mudança ocorre para $k = -3$ e para $k = 3$. Encontramos duas retas concorrentes para cada valor de k .

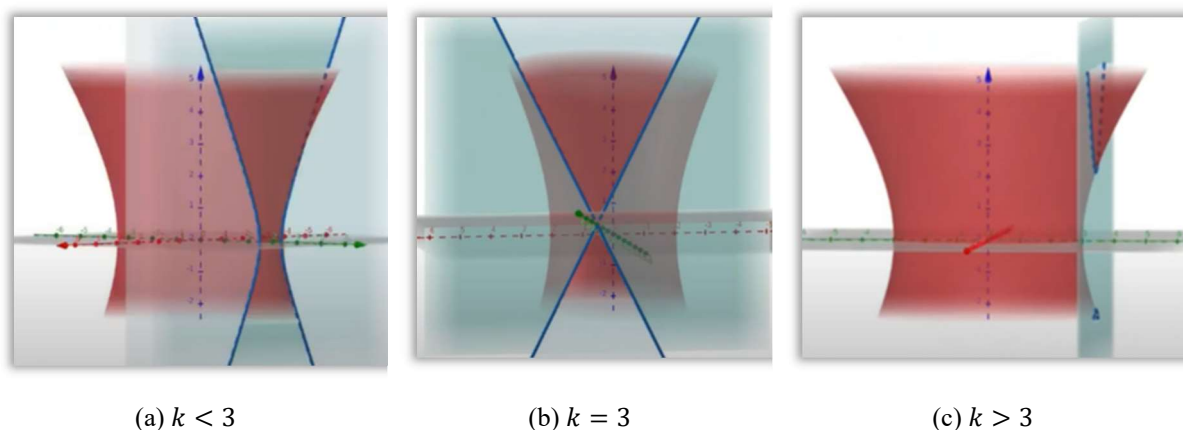
P2: Nos pontos -3 e 3 . Obtivemos uma cônica degenerada, representando 2 retas concorrentes.

P3: $k = 3$ ou $k = -3$.

Por fim, a última pergunta do item b da atividade 2 (Figura 63), refere-se ao quarto passo da estratégia para correlação entre os registros gráficos e simbólicos, com a conversão entre RSf e RGf. Essa conversão ocorre quando os resultados dos procedimentos algébrico e informático são contrastados para cada valor de $k \in \mathbb{R}$. Por exemplo, no caso dos planos de equação $y = k$, o participante P3 observou a mudança no eixo real das seções planas hiperbólicas a partir da variação dos valores de k , para relacionar com os resultados obtidos no procedimento algébrico.

Para isso, P3 moveu o controle deslizante e observou que, conforme as representações simbólicas obtidas pelo procedimento algébrico, para $-3 < k < 3$ essas seções planas hiperbólicas têm eixo real paralelo ao eixo dos x (Figura 65a) e para $k < -3$ ou $k > 3$ paralelo ao eixo dos z (Figura 65c). Analisando essa mudança no eixo real das seções planas hiperbólicas, P3 constatou que ocorre em $k = 3$ e que, nesse caso, as seções planas são duas retas concorrentes (Figura 65b).

Figura 65 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas de um hiperboloide de uma folha por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Os tratamentos realizados sobre as representações dinâmicas possibilitaram, de maneira muito fluida, a constituição de esquemas conceituais relacionados à correlação entre os registros simbólico e gráfico. Envolvendo um pensar-com a tecnologia, foi possível ver a apropriação da ferramenta ‘controle deslizante’ favorecendo as apreensões figurais que, por sua vez, qualificaram as correspondentes apreensões conceituais. Os tratamentos dinâmicos tornaram possível a observação das fatias que compõem essa quádrlica, correlacionando com os resultados dos tratamentos algébricos para cada valor de k .

Quando analisava o momento da mudança no eixo real das seções planas hiperbólicas, o participante P3 comentou: “*Essa transição é complexa de se imaginar né*”. Esta fala revela a

contribuição do ambiente de matemática dinâmica para a Educação Matemática, corroborando com Basso e Notare (2015), esse trabalho seria custoso e impreciso se realizado apenas com o uso de lápis e papel. Podemos dizer que é praticamente inviável a realização de todos tratamentos dinâmicos para obtenção das seções planas relativas a cada valor de $k \in \mathbb{R}$ fora de um ambiente de matemática dinâmica.

No item c da atividade 2, os participantes mobilizam os esquemas de utilização constituídos no item b para aplicar o procedimento informático às seções planas que podem ser obtidas por cortes com planos paralelos a yoz . Com mais espontaneidade na utilização do procedimento informático, os participantes inserem a equação $x = k$ na janela de álgebra. Ocultando a equação do plano da atividade anterior, os participantes fazem variar os valores de k para analisar os cortes desses planos com a quádrlica.

Movendo o controle deslizante, os participantes observam as seções planas, registrando as seguintes respostas:

P1: $-2 < k < 2$ hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos y ; $k < -2$ ou $k > 2$ hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos z ; $k = -2$ ou $k = 2$ serão duas retas.

P2: uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos y para que valores de k ? $(-2,2)$; uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo dos z para que valores de k ? Fora do intervalo de $[-2,2]$. Em que valores de k ocorre essa mudança de eixo real das hipérbolés? Qual a seção plana obtida nesses valores de k ? Nos pontos -2 e 2 Obtivemos uma cônica degenerada, representando 2 retas concorrentes.

P3: Para $-2 < k < 2$ obtemos hipérbolés com eixo real em y ; para $-2 > k$ ou $k > 2$ obtemos hipérbolés com eixo real em z ; para $k = 2$ ou $k = -2$ obtemos duas retas concorrentes.

E, no item d da atividade 2, os participantes aplicam novamente o procedimento informático às seções planas que podem ser obtidas por cortes com planos paralelos a xoy . Movendo o controle deslizante, os participantes observam o plano deslizar sobre o eixo dos z , obtendo seções planas elípticas para todo valor de k . Então, eles registram as seguintes respostas:

P1: As seções planas dessa superfície são elipses para todos os valores de k . Mesma resposta da c da atividade 1.

P2: Independente do valor de k , a cônica representada vai ser sempre uma elipse. O que acontece é que quanto maior o módulo de k , maior vai ser a amplitude dos eixos maior, e menor.

P3: Para todos os valores de z obtemos Elipses.

5.1.3.3 ATIVIDADE 3

Por fim, na atividade 3 dessa SEAI, os participantes percorreram os mesmos passos da estratégia para a identificação da quádrica da equação (2) por meio das suas seções planas. Sem o auxílio das questões norteadoras, os participantes executaram os procedimentos algébrico e informático, correlacionando as representações gráfica e simbólica das seções planas e identificando o parabolóide elíptico.

O participante P1 iniciou realizando os tratamentos algébricos para obtenção das representações simbólicas das seções planas da superfície de equação (2), conforme Figura 66.

Figura 66 – Tratamentos algébricos para obter as seções planas de um parabolóide elíptico por P1.

The figure consists of two panels of handwritten mathematical work. The left panel shows the derivation of the intersection curve for a plane $y = k$. It starts with the equation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$. Substituting $y = k$ yields $\frac{x^2}{4} + \frac{k^2}{9} = z$. Rearranging gives $\frac{x^2}{4} = z - \frac{k^2}{9}$. The text notes that for every value of k , there is a parabola with concavity towards the oz^+ axis.

The right panel shows the derivation for a plane $x = k$. It starts with $\frac{k^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$. Rearranging gives $\frac{y^2}{9} = z - \frac{k^2}{4}$. The text notes that this is a parabola with concavity towards the oz^+ axis for every value of k . It then lists conditions for the resulting conic sections: an ellipse for $k > 0$, a point $(0,0,0)$ for $k = 0$, and no intersection for $k < 0$ because the square of a real number is non-negative. The algebraic steps show $9x^2 + 4y^2 = 0.36$ leading to $9x^2 = -4y^2$, which implies $x = \pm \sqrt{-\frac{4y^2}{9}}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

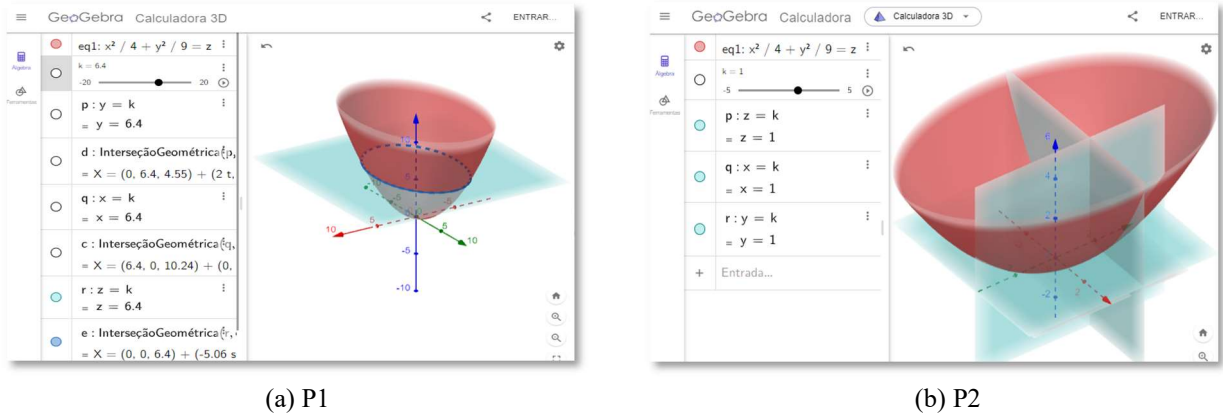
A partir desses tratamentos algébricos, o participante P1 analisou as equações para os diferentes valores de k , registrando no arquivo do *Google Docs*: “Plano xoz e $y=k$, temos uma parábola com concavidade voltada para oz^+ ; plano yoZ e $x=k$, temos uma parábola com concavidade voltada para oz^+ ; plano xoy e $z=k$, temos: Para valores de $k=0$, um ponto, para valores de $k < 0$ não tem intersecção, para valores de $k > 0$, será sempre uma elipse”. Depois, P1 correlacionou esses resultados com os tratamentos dinâmicos para obtenção das representações gráficas das seções planas.

Esses tratamentos consistem no movimento do controle deslizante para fazer variar o valor de k para cada uma das equações $x = k$, $y = k$ e $z = k$ dos planos coordenados e paralelos a estes. A Figura 67a apresenta o momento em que P1 inseriu a equação $z = k$ de planos paralelos ao plano xoy e, variando o valor de k , observa que as seções planas são elipses para $k > 0$, um ponto para $k = 0$ e não há lugar geométrico para $k < 0$.

A Figura 67b mostra o instante em que P2 inseriu os planos $x = k$ e $y = k$ para analisar as seções planas obtidas por cortes com planos paralelos aos planos yoZ e xoz , respectivamente. P2 inicia inserindo as equações $x = k$, $y = k$ e $z = k$ na janela de álgebra, obtendo planos

paralelos aos planos coordenados. Em seguida, ocultando os planos de equação $y = k$ e $z = k$ e variando o valor de k , P2 constatou que as seções planas obtidas por cortes com os planos de equação $x = k$ são parabólicas.

Figura 67 - Tratamentos gráficos para obter as seções planas de um parabolóide elíptico por P1 e P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Depois, o participante P2 ocultou os planos de equação $x = k$ e $z = k$ e, variando o valor de k , confirmou que as seções planas obtidas por cortes com os planos de equação $y = k$ também são parabólicas. E, por fim, ocultando os planos de equação $x = k$ e $y = k$ e, variando o valor de k , verifica que as seções planas obtidas por cortes com os planos de equação $z = k$ são elípticas para $k > 0$, um ponto para $k = 0$ e não existe lugar geométrico para $k < 0$.

Após realizar os tratamentos algébricos na equação (2), P2 registrou os seguintes resultados:

Quando interceptamos por um plano paralelo ao xoy, consideramos $z=k$, e a partir disso, para qualquer valor de k diferente de 0 e positivo, a cônica representada será uma elipse, apenas quando $k=0$, teremos uma elipse degenerada que representa o ponto de origem do parabolóide elíptico. Quando interceptamos por um plano paralelo ao xoz, consideramos $y=k$, e a partir disso temos a representação de uma parábola em x . Quando interceptamos por um plano paralelo ao yoz, consideramos $x=k$, e a partir disso temos a representação de uma parábola em y .

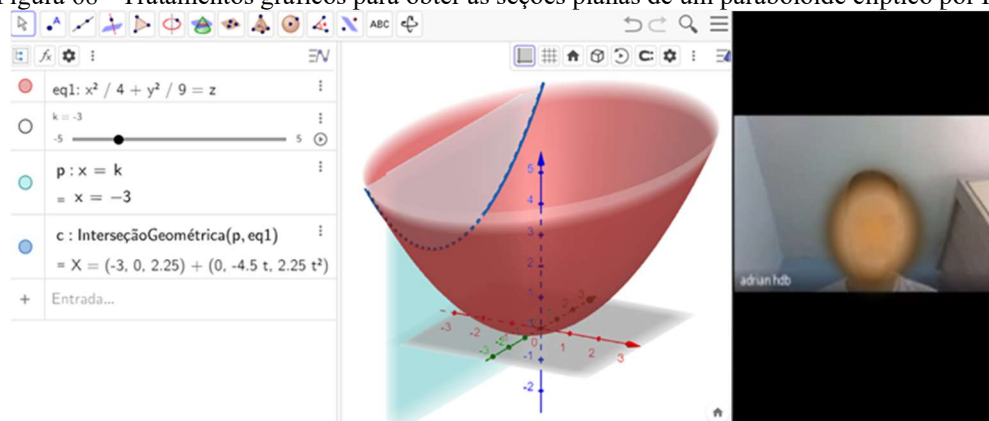
O participante P3, com os tratamentos algébricos, analisou todas as representações simbólicas das seções planas, constatando que:

Para os planos paralelos ao plano xoy, com $z = k$ obtemos algebricamente: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = k$. Analisando cada caso de k , obtemos: Para $k > 0$ obtemos elipses, para $k = 0$ obtemos o ponto de origem e para $k < 0$ não obtemos figuras, pois $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \geq 0$. Agora para as seções planas paralelas ao plano xoz, temos para $y=k$ a equação: $\frac{x^2}{4} + \frac{k^2}{9} = z$, ou seja, $\frac{x^2}{4} = z - \frac{k^2}{9}$. Analisando para os valores de k obtemos: Para qualquer valor de k , é uma parábola. [...]Analogamente para o caso dos planos paralelos ao plano yoz, com $x=k$, obtemos também estas parábolas com concavidade para cima e transladadas.

Analisando os resultados do procedimento algébrico, o participante P3 experimentou montar o quebra-cabeças juntando as fatias (seções planas) que compõem a quádrlica, conjecturando que se trata de um parabolóide elíptico. Então, P3 insere a equação (2) na janela de álgebra, obtendo a representação gráfica da quádrlica e confirmando a sua hipótese.

A Figura 68 mostra o momento em que P3, depois de obter a representação gráfica do parabolóide elíptico, deu início aos tratamentos dinâmicos.

Figura 68 - Tratamentos gráficos para obter as seções planas de um parabolóide elíptico por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Inserindo a equação $x = k$ dos planos paralelos ao plano yoz , P3 moveu o controle deslizante obtendo as seções planas parabólicas, para diferentes valores de k . Depois, inserindo as equações $y = k$ e $z = k$, P3 obteve as demais seções planas. Ao gerar o controle deslizante, os valores de k variam de -5 a 5. Os valores dos extremos desse intervalo podem ser alterados, mas continuariam apresentando apenas uma parte dos infinitos valores de k .

Nesse caso, foi possível ver que as representações dinâmicas possibilitaram a generalização, quando o participante precisou ‘imaginar’ as seções planas obtidas por cortes com planos com valores de k fora do intervalo representado pelo controle deslizante. Além disso, observamos que os esquemas de utilização constituídos nas atividades anteriores dessa SEAI foram mobilizados de forma mais espontânea nessa atividade.

Observamos isso quando os participantes mobilizaram esquemas de utilização tanto para os tratamentos sobre as representações simbólicas quanto sobre as representações gráficas. Nesse caso, podemos ver a ocorrência das regulações ativas de Piaget, quando o sujeito controla e antecipa suas ações, passando da ação pura para uma ação com compreensão.

5.1.3.4 OBSERVAÇÕES FINAIS

Consideramos que a correlação entre registros gráfico e simbólico proposta nas atividades dessa SEAI contribuíram para essa passagem de uma ação pura para uma ação com compreensão. As atividades, privilegiando o fazer para compreender, iniciaram dando subsídios e evoluíram para uma ação mais autônoma dos participantes. Observamos que os participantes, de forma cada vez mais espontânea, mobilizaram esquemas de utilização, percebendo a correspondência biunívoca entre as representações gráficas e simbólicas para cada valor de $k \in \mathbb{R}$.

E a desconstrução dimensional teve importante participação nessa correspondência entre os registros de representação simbólico e gráfico. A junção das fatias bidimensionais (seções planas) que compõem a quádriga proporcionou a construção da imagem mental da superfície. Isso pôde ser observado no tratamento dinâmico, mas também no algébrico, conforme podemos ver na fala do participante P3: “[...] *analizando a situação algébrica para todos os planos paralelos aos planos coordenados é possível ter uma visualização mental da figura*”.

Os esquemas de utilização exigidos pelas atividades nessa SEAI são os relacionados aos tratamentos dinâmicos para a correlação entre os registros simbólico e gráfico. Os participantes precisaram inserir as equações $x = k$, $y = k$ e $z = k$ na janela de álgebra, o que gerou um controle deslizante. E, para a correlação entre as representações gráficas e simbólicas das seções planas das superfícies, eles utilizaram a ferramenta de ‘Intersecção de superfícies’.

No entanto, consideramos que apesar de ainda restrito, esse uso das ferramentas do GeoGebra é parte inicial e importante de um processo de transformação deste artefato em instrumento. A estratégia para a correlação entre os registros de representação gráfico e simbólico, que envolveu os procedimentos algébricos e informáticos, proporcionou a constituição de esquemas conceituais que possibilitam o reconhecimento das representações de uma quádriga nos registros gráfico e simbólico para a correlação entre esses registros.

No entanto, essa estratégia também possibilitou a identificação da superfície (representação em língua natural geral) e a discriminação de sua posição no sistema cartesiano (representação em língua natural específica). Consistindo na classificação quanto ao tipo, as representações em língua natural geral das quádrigas de equações (1) e (2) são hiperboloide de uma folha e paraboloides elíptico, respectivamente. A representação em língua natural específica inclui a identificação do eixo ao longo do qual a superfície se desenvolve.

No caso das superfícies quádrigas nessa SEAI, hiperboloide de uma folha ao longo do eixo dos x (quádriga da equação 1) e paraboloides elíptico ao longo do eixo dos x (quádriga da equação 2). Tratamos verbalmente destas representações em língua natural específicas aqui,

pois as SEAI 4 e 5 tratam da correlação entre registros de representação gráfico, simbólico e em língua natural de forma mais integral.

A situação de ensino e aprendizagem instrumental seguinte abordou os possíveis casos de representação em língua natural específica por meio das unidades significantes que permitem a distinção entre elipsoides em α e β , esferoides e esferas. As atividades propostas levaram os participantes a correlacionarem as representações gráficas e simbólicas dessas superfícies para, a partir disso, estabelecer suas representações em língua natural específicas.

5.1.4 SEAI 4 - Explorando as representações gráficas, simbólicas e em língua natural específicas dos elipsoides

Após a experiência com a diferenciação entre tipos de quádrlica, essa situação de ensino e aprendizagem instrumental (APÊNDICE G — SEAI 4) propôs a diferenciação entre quádrlicas do mesmo tipo. Os participantes foram convidados a constituir as representações em língua natural específicas dos elipsoides, que são as denominações completas dessas superfícies, ou seja, que consideram as suas posições no sistema cartesiano.

As atividades nessa SEAI promovem a correlação entre registros de representação por meio da comparação entre as unidades significantes simbólicas e gráficas, com a constituição das representações em língua natural específicas para cada caso. Essas correlações entre os registros de representação gráfico e simbólico possibilitam a identificação dos diferentes casos de elipsoide (representação em língua natural geral) e a discriminação de sua posição no sistema cartesiano (representação em língua natural específica).

Desse modo, as atividades conduzem os participantes a estabelecerem as correspondências entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos treze casos de elipsoide. Essas representações em língua natural específicas podem ser constituídas a partir da diferenciação e correlação entre as representações gráfica e simbólica dos elipsoides. Para isso, os participantes tiveram que analisar as possíveis posições que estas quádrlicas podem assumir no sistema cartesiano, correlacionando com as possíveis formas de escrever suas equações.

Essas diferenciações foram realizadas por meio da variável visual ‘comprimento dos eixos’ do elipsoide, que permite a distinção de três casos: elipsoide em α e β , quando os três eixos têm medidas diferentes; esferoide, quando dois eixos têm medidas iguais e um diferente;

e esfera, quando os três eixos têm medidas iguais³⁶. Esses três casos são apresentados a seguir, respectivamente, nas atividades 1 (elipsoide em α e β), 2 (esferoide) e 3 (esfera).

5.1.4.1 ATIVIDADE 1

A primeira atividade consistiu em, inserindo as equações dos elipsoides:

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad \text{e} \quad (2) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{2} = 1$$

na janela de álgebra do GeoGebra 3D, identificar as diferenças visuais nas suas representações gráficas, relacionando-as com as correspondentes representações simbólicas.

O que possibilita essa diferenciação é a variável visual ‘posição dos eixos em relação aos eixos coordenados’. Assim, o participante pôde constatar que as diferenças visuais entre as representações gráficas dos elipsoides de equações (1) e (2) referem-se às posições dos seus eixos maior, médio e menor no sistema cartesiano. Para começar, no item a foi proposta uma antecipação ao perguntar se o participante já saberia dizer a que quádrlica referem-se essas equações.

Os participantes consideraram as seções planas dessas quádrlicas para responder a essa pergunta. O participante P3 disse que as duas são equações de elipsoides, “*Pois o elipsoide possui coeficientes são positivos*” e P2 justifica a sua resposta dizendo: “*Eu acho que é uma elipse em todos os planos*”. O participante P1 considerou que as duas equações representam a mesma superfície, mas ainda não as identifica. Então, sugerimos que P1 utilizasse as seções planas por planos coordenados para identificação do tipo de quádrlica.

Mobilizando esquemas constituídos na SEAI anterior, P1 utilizou o procedimento algébrico e, fazendo $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ na equação 1, reconheceu as elipses que são intersecções com os planos yoz , xoz e xoy , respectivamente. Com base nisso, P1 conjecturou que a equação é de um elipsoide. Após as análises e conjecturas a respeito da antecipação proposta, os participantes registraram as seguintes respostas:

P1: Depois de analisar as equações e o sinal das variáveis, conclui-se que é um elipsoide.

P2: Numa análise superficial das equações, é possível identificar que se trata de uma elipse quando interceptamos com um plano paralelo aos planos coordenados, por isso, temos um elipsoide.

³⁶ A esfera e o esferoide são casos particulares de elipsoides que receberam denominações especiais. Essas denominações são oriundas da tese de Silva, S. (2018), que analisou e correlacionou as unidades significantes simbólicas, gráficas e em língua natural das superfícies quádrlicas.

P3: Elipsoide.

No item b, propõe-se que as equações (1) e (2) dos elipsoides sejam inseridas na janela de álgebra, quando os participantes obtiveram as representações gráficas e confirmando as suas respostas à antecipação proposta no item a. Então, no item c, os participantes foram convidados a inserir as equações dos planos coordenados na janela de álgebra do GeoGebra para identificação das diferenças visuais entre as representações gráficas desses elipsoides.

Obtendo as elipses resultantes das intersecções desses planos com os elipsoides, os participantes observaram os comprimentos dos eixos maior e menor nas representações gráficas das suas seções planas. Com isso, os participantes constataram que o elipsoide da equação (1) tem eixo maior sobre o eixo dos y , eixo médio sobre o eixo dos x e eixo menor sobre o eixo dos z . Já o elipsoide de equação (2) tem eixo maior sobre o eixo dos x , eixo médio sobre o eixo dos y e eixo menor sobre o eixo dos z .

Assim, observamos que os participantes identificaram as diferenças visuais nas representações gráficas e simbólicas dos elipsoides de equações 1 e 2, o que também é possível ver nas suas respostas:

P1: A diferença entre essas quádricas é o tamanho dos eixos.

P2: A diferença entre as quádricas se dá na dimensão dos eixos. A equação 1 é mais alongada no eixo y do que no x , já a equação 2, é mais alongada no eixo x . É possível confirmar isso pelo valor de a^2 e b^2 , que são os divisores de x e y respectivamente.

P3: As intersecções entre os planos e os dois elipsoides resultam em elipses, e cada uma delas possui eixo focal e não focal de tamanhos diferentes de acordo com os coeficientes das quádricas.

É possível ver também que, nesse momento, P1 conjecturou apenas baseado nas representações gráficas. E P2 e P3 relacionaram o comprimento dos eixos das elipses nas representações gráficas com os valores dos coeficientes dos termos quadráticos nas respectivas representações simbólicas. Essa correlação entre registros gráficos e simbólicos é proposta na questão do item d, quando se perguntou qual a relação entre essas diferenças visuais nas representações gráficas e as que podem ser observadas nas suas respectivas representações simbólicas.

Com isso, os participantes puderam constatar que os valores dos coeficientes nos termos quadráticos das equações dos elipsoides correspondem ao inverso do quadrado das medidas dos semieixos maior, médio e menor nas suas representações gráficas. E ainda a correspondência entre a posição desses valores nas representações gráfica e simbólica desses elipsoides. Isso pode ser constatado por meio dos seus registros escritos:

P1: Observando o gráfico e a equação constatamos que na primeira superfície, o eixo maior do elipsoide está sobre o eixo y ; e o menor está sobre o eixo x . E na segunda superfície, o eixo maior do elipsoide está sobre o eixo x , e o menor está sobre o eixo z .

P2: A relação se dá pelo valor do divisor de x , y e z , conhecidos como a^2 , b^2 e c^2 . Os valores de a , b e c , nos dizem respeito à distância do centro até a extremidade dos eixos.

P3: [...] quanto maior o coeficiente, maior os eixos da elipse de intersecção criada entre a quádrlica e o plano.

No caso da equação (1), o coeficiente de maior (médio e menor) denominador é o do termo quadrático que contém a variável y (z e x), correspondendo à representação gráfica em que o elipsoide tem eixo maior (médio e menor) sobre o eixo dos y (z e x). Com base nesse caso e no caso do elipsoide da equação 2, o item e desta atividade perguntou sobre a existência de outras possibilidades.

No caso em que o eixo maior está sobre o eixo dos y , há duas possibilidades: eixo médio sobre o eixo dos x e eixo menor sobre o eixo dos z ; (b) eixo médio sobre o eixo dos z e eixo menor sobre o eixo dos x . Então, fazendo o mesmo exercício para o eixo maior sobre o eixo dos x e depois dos z , é possível constatar a existência de mais quatro possibilidades. Constatando que são seis as possibilidades, os participantes demonstram compreensão quando registram suas argumentações:

P1: Sim, ao todo existem 6 possibilidades de elipsoides. Se for “alongado” no eixo x , podemos ter um elipsoide “achado” nos eixos y ou z . Se for “alongado” no eixo y , podemos ter um elipsoide “achado” nos eixos x ou z . Se for “alongado” no eixo z , podemos ter um elipsoide “achado” nos eixos y ou x .

P2: São 6 possibilidades, considerando 2 para cada eixo quando considerado o maior em dimensão. Quando: x maior, $y > z$ ou $y < z$; y maior, $x > z$ ou $x < z$; z maior $x > y$ ou $x < y$.

P3: Alterando os valores de a , b e c embaixo de cada variável temos 6 possibilidades. Possibilidades = $\{abc, acb, bca, bac, cba, cab\}$ na ordem de coeficientes de cada variável.

Para finalizar, a questão proposta no item f convidou os participantes para uma discussão sobre as denominações desses seis casos de elipsoides em α e β , esclarecendo a importância de uma forma única e clara de representar essas superfícies no registro em língua natural. Depois de correlacionados os registros gráfico e simbólico, essa questão tem a intenção de correlacionar estes registros com o registro em língua natural específico. A correlação entre os registros de representação gráfico e simbólico proposta nessa atividade possibilitou aos participantes a identificação da superfície (representação em língua natural geral) e a discriminação de sua posição no sistema cartesiano (representação em língua natural específica).

Assim, consistindo na classificação quanto ao tipo, as representações em língua natural geral das quádrlicas de equações (1) e (2) são elipsoides. E a proposta para as representações em

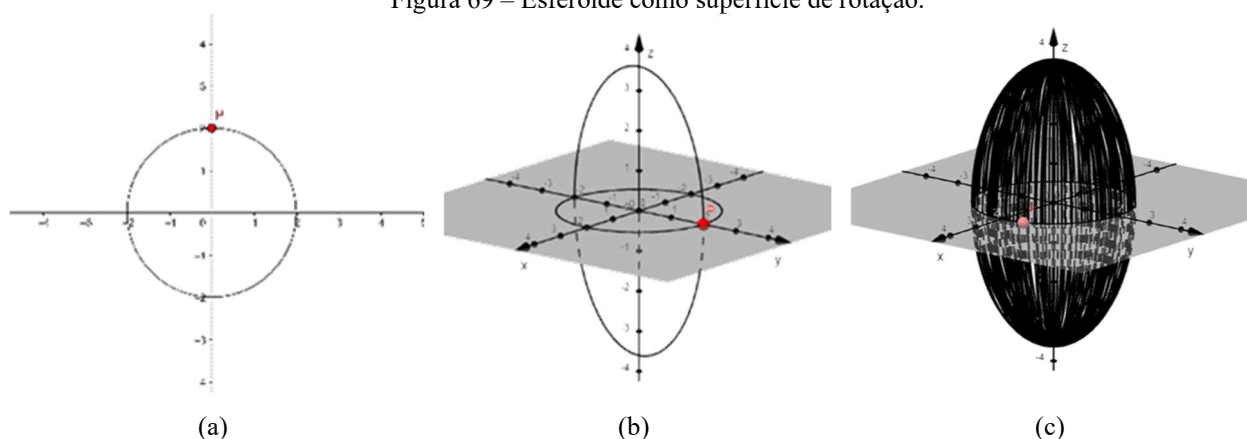
língua natural específicas desses elipsoides leva em conta os seus eixos maiores. Nesse caso, a representação em língua natural específica, que inclui a identificação do eixo ao longo do qual a superfície se desenvolve, é ‘elipsoide em y e z ’ para a quádrlica da equação 1 e ‘elipsoide em x e y ’ para a quádrlica da equação 2. Deixamos os participantes apresentarem sugestões, para depois chegarmos num consenso, levando em consideração o estudo de Silva (2018).

Para chegar a essas denominações de forma que fizessem sentido para os participantes, estabelecemos um diálogo com base na análise das possibilidades, considerando a forma mais simples que possibilite a diferenciação entre os seis casos. Assim, ficou estabelecida a correspondência entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural dos elipsoides em α e β , que têm os três eixos de medidas diferentes. Na sequência, as atividades 2 e 3 apresentaram propostas para estabelecer a correlação entre registros de representação para o esferoide e a esfera.

5.1.4.2 ATIVIDADE 2

Na segunda atividade, o problema consistiu na identificação das características visuais do elipsoide de revolução ou esferoide. Essa atividade iniciou apresentando uma definição de esferoide, onde consta que essa superfície pode ser gerada pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos. Então, para explorar essa definição, foi oferecida uma construção do esferoide como superfície de revolução num arquivo do GeoGebra (Figura 69).

Figura 69 – Esferoide como superfície de rotação.



Fonte: Elaborado pela autora.

Ao mover o ponto A sobre a circunferência na janela de visualização 2D (Figura 69a), a elipse (Figura 69b) da janela de visualização 3D sofre uma rotação em torno do eixo dos z ,

dando origem ao esferoide (Figura 69c). Então, a variável visual ‘comprimento dos eixos’ é utilizada na pergunta do item a, com o objetivo de identificar as características do esferoide. Nessa questão, os participantes observaram as seções planas do esferoide, obtidas por cortes com os planos coordenados, identificando a característica visual que o diferencia de um elipsoide com os três eixos de medidas diferentes.

Movimentando o ponto A sobre a circunferência, o participante P3 afirmou que a quádrlica gerada é um elipsoide e o participante P2 disse que a seção plana dessa quádrlica com o plano xoy é uma circunferência. Os participantes constataram que, diferentemente do elipsoide que tem os três eixos de medidas diferentes, no esferoide dois eixos têm o mesmo comprimento. Isso pode ser observado quando registram seus argumentos:

P1: O tamanho do eixo x e do eixo y são iguais. E do eixo z é maior. Chamamos de esferoide quando a superfície tem dois eixos iguais.

P2: O que diferencia da quádrlica do exercício anterior é que os valores de a e b são iguais, isso implica num caso particular da elipse, que é a representação de um círculo no plano xoy.

P3: A projeção do elipsoide em relação a uma visão perpendicular resulta em um círculo.

A atividade do item b propôs a escrita das equações de um esferoide e de um elipsoide em α e β . Com essa questão, visamos promover a diferenciação entre as representações simbólicas dessas quádrlicas, estabelecendo também a correspondência entre representações nos registros gráfico e simbólico.

Para isso, primeiro foi solicitado um exemplo de equação para um esferoide para, a seguir, perguntarmos seriam as equações de um esferoide e de um elipsoide em α e β . Com base nas diferenciações visuais propostas na questão anterior, os participantes constatam e registram as seguintes respostas:

$$P1: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1; \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

$$P2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$P3: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{6} = 1$$

O participante P1 apresentou um exemplo de esferoide com eixo diferente sobre o eixo dos z e, antecipando o que foi solicitado na questão seguinte, escreve as representações simbólicas dos três casos de esferoide. O participante P2 registrou apenas um exemplo de esferoide com eixo diferente sobre o eixo dos z, enquanto P3 apresentou um exemplo de esferoide e outro de elipsoide em α e β . Com base nesta e na questão seguinte, podemos

verificar que houve diferenciação entre as representações simbólicas dos esferoides e dos elipsoides com os três eixos de medidas diferentes.

Na questão do item c, os participantes foram desafiados a pensar na existência de possíveis casos para os esferoides, o que é possível realizar por meio da variável visual ‘comprimento do eixo de medida diferente’. A distinção entre os possíveis casos para o esferoide pode ser obtida considerando que o eixo de medida diferente pode estar sobre o eixo dos x , dos y ou dos z . Além disso, para cada um desses casos, o eixo de medida diferente pode ser maior ou menor que os outros dois eixos de medidas iguais.

Assim, é possível distinguir seis casos para o esferoide. Nos registros escritos dos participantes é possível ver que eles reconhecem as seis possibilidades:

$$P1: \text{Seja } a < b: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1; \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

$$\text{Seja } a > b: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1; \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

P2: Sim, podemos (ter) 3 casos: $x=y$, $y=z$ e $z=x$. E também dentro dessas hipóteses, temos que cada uma pode ser mais alongada ou achatada na direção do eixo de dimensão diferente. Exemplo: $x=y$ e $z > x$, é um caso. O outro poderia ser, $x=y$ e $z < x$. Sendo assim, temos mais 4 hipóteses (possibilidades), totalizando 6.

P3: Sim. 6 casos. Pois dois dos coeficientes são iguais. Sem perda de generalidade podemos tomar $a > b = c$, logo temos como possibilidades = $\{abb, bab, bba\}$. Por outro lado, podemos ter $a < b = c$. Logo gerando as outras 3 possibilidades.

O participante P1 escreveu as três equações que representam o eixo de medida diferente sobre o eixo dos x , dos y e dos z para os casos em que o eixo de medida diferente é maior ($a < b$) e menor ($a > b$). P2 discriminou os seis casos de forma diferente, representando as medidas dos eixos por x , y e z . Então, P2 registrou que $x = y$ e $z > x$ (esferoide com eixo diferente sobre o eixo dos z , sendo este o maior eixo) e $x = y$ e $z < x$ (esferoide com eixo diferente sobre o eixo dos z , sendo este o menor eixo) são duas, havendo mais quatro possibilidades.

No seu registro escrito, o participante P3 considerou que dois dos três coeficientes dos termos quadráticos na representação simbólica dessa superfície têm o mesmo valor. Usando a para representar a medida do eixo diferente e b para os eixos de mesmo tamanho, P3 apresentou as três possibilidades para a posição dos eixos do esferoide: eixo de medida diferente sobre o eixo dos x (abb), dos y (bab) e dos z (bba). Na sua argumentação, P3 também considerou que o eixo de medida distinta pode ser maior ($a > b = c$) ou menor ($a < b = c$) que os demais, totalizando os seis casos de esferoide.

A atividade do item d propôs uma discussão para a denominação dos seis casos de esferoides. A proposta para a representação em língua natural específica dessas superfícies é a utilização da palavra alongado (ou achatado), quando o eixo de medida diferente for maior (ou

menor) do que os demais. Assim, no caso dessa atividade, o eixo de medida diferente do esferoide é maior que os demais e está sobre o eixo dos z . Dessa forma, a representação em língua natural específica dessa superfície fica ‘esferoide alongado em z ’.

A proposta de um diálogo a respeito das representações em língua natural específicas dos esferoides teve por objetivo levar os participantes a correlacionarem esse registro de representação com os registros gráfico e simbólico dos esferoides. Para chegar a denominações que permitissem diferenciar os casos de esferoides, de forma simples e que fizessem sentido para os participantes, estabelecemos um diálogo com base na análise das possibilidades. Dessa forma, os participantes constituíram os esquemas conceituais relativos ao reconhecimento e correspondência entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural específicas dos seis casos de esferoides.

5.1.4.3 ATIVIDADE 3

Por fim, a atividade 3 propôs a análise do caso da esfera, a partir de um problema que a apresenta como uma superfície de revolução. A atividade anterior apresentou o esferoide como superfície de revolução e, nessa atividade, propomos que o participante obtenha a construção de uma esfera como superfície de revolução. Assim, o participante pôde explorar a construção do esferoide para identificar os elementos necessários e a dependência entre eles, para obter a esfera como superfície de revolução. Entendemos que proposta dessa forma, a SEAI privilegia o fazer para compreender, desafiando os participantes, mas dando subsídios para que possam prosseguir.

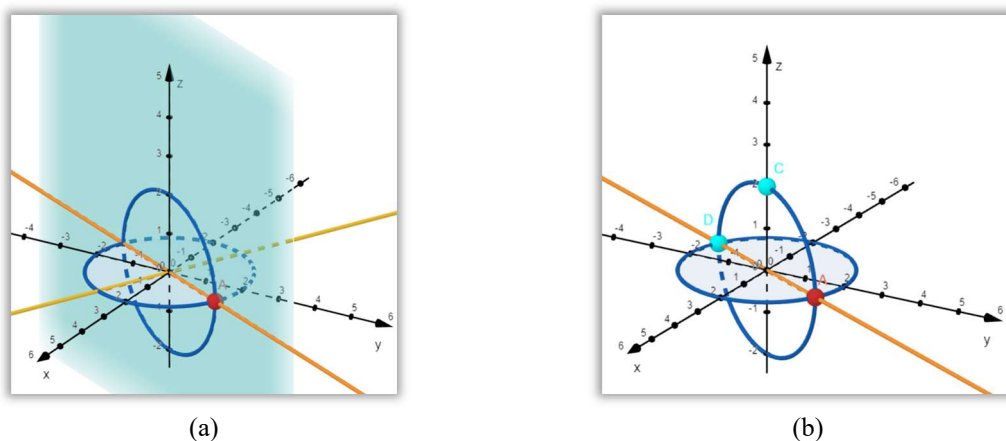
Essa foi a primeira atividade de maior complexidade no uso do GeoGebra, uma vez que envolve a obtenção de uma construção geométrica, sendo necessário considerar as propriedades dos objetos matemáticos inseridos e relações entre estes. Analisando o protocolo de construção do esferoide, os participantes observaram que os elementos necessários, por ordem de dependência, são: uma circunferência, um ponto móvel P sobre a circunferência, os dois focos A e B da elipse e a elipse que passa pelo ponto P e tem focos A e B .

A partir daí, os participantes puderam constatar que os elementos necessários à construção da esfera como superfície de revolução são, por ordem de dependência: uma circunferência, um ponto móvel P sobre a circunferência e uma outra circunferência que passa pelo ponto P . Os dois primeiros elementos podem ser obtidos da mesma forma que na construção do esferoide, usando as duas janelas de visualização 2D e 3D. No entanto, a construção também pode ser feita no GeoGebra 3D.

Por exemplo, a primeira circunferência pode ser obtida inserindo a equação de uma superfície cilíndrica circular ao longo do eixo dos z ($x^2 + y^2 = 4$) na janela de álgebra e obtendo a sua intersecção com o plano xoy . Então, um ponto A pode ser colocado sobre essa circunferência, sendo possível movê-lo sobre ela. Para obter a segunda circunferência, duas ferramentas do GeoGebra 3D podem ser utilizadas: ‘círculo dados eixo e um de seus pontos’ ou ‘círculo definido por três pontos’.

A primeira ferramenta exige a obtenção de um eixo que passa pelo centro dessa circunferência e é perpendicular ao plano que a contém (Figura 70a). Para obter esse eixo, primeiro é necessário obter a reta que passa pelo ponto A e pela origem do sistema cartesiano.

Figura 70 – Proposta para construção da esfera como superfície de revolução.



Fonte: Elaborado pela autora.

A seguir, obtém-se um plano que contém essa reta e é perpendicular ao plano da primeira circunferência. Com a ferramenta que permite a obtenção de um plano por duas retas, esse plano pode ser obtido por meio da reta que passa por A e do eixo dos z . Então, obtém-se o eixo por meio da ferramenta ‘reta perpendicular’, usando este plano e a origem do sistema cartesiano como ponto. Por fim, a segunda circunferência é obtida a partir desse eixo e do ponto P .

Usando a outra ferramenta (círculo definido por três pontos), para obter a segunda circunferência são necessários três pontos: o ponto A , o outro ponto que é obtido pela intersecção da reta que contém o ponto A e a primeira circunferência e o ponto $C(0,0,2)$ sobre o eixo dos z (Figura 70b). Por fim, habilitando o rastro na circunferência que está em plano perpendicular ao plano xoy e animar o ponto A , obtém-se a esfera.

Iniciando a descrição das questões propostas na atividade 3, no item a foi proposta uma antecipação, em que o participante precisou conjecturar a respeito da superfície que é gerada

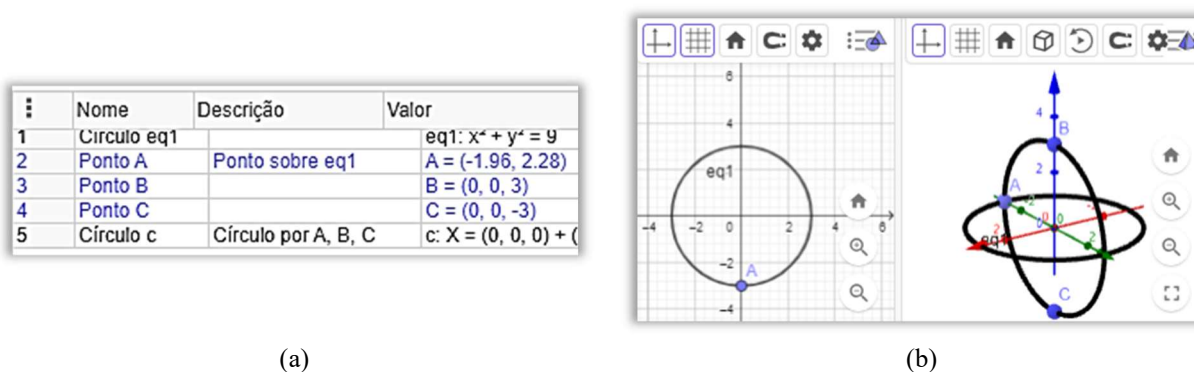
pela rotação de uma circunferência. Em seguida, nessa mesma questão, solicitou-se a construção da esfera como superfície de revolução. Os três participantes anteciparam corretamente que se tratava de uma esfera. Utilizando o GeoGebra para realizar essa atividade, os participantes P1 e P2 reproduziram a construção baseando-se no protocolo de construção do esferoide, fornecido na atividade 2.

No fato de possibilitar a análise da construção do esferoide para obter a construção da esfera poderia ocorrer um ‘fazer sem compreender’, quando o sujeito obtém sucesso na ação sem necessariamente compreender o que está fazendo. No entanto, apesar de também utilizarem as janelas 2D e 3D do GeoGebra, os participantes P1 e P2 seguiram por caminhos diferentes. E o participante P3 nem considerou a construção do esferoide, utilizando apenas a janela de visualização do GeoGebra 3D para realizar a tarefa.

A seguir, apresentamos a análise das construções dos três participantes, a começar por P1. O protocolo de construção (Figura 71a) do participante P1 contém apenas os cinco passos que foram necessários na construção final, os demais foram apagados (Figura 71b). No entanto, considerando que os passos que envolvem as tentativas e erros são importantes para a compreensão do processo de construção do conhecimento, utilizamos também as gravações para analisar as condutas cognitivas de P1.

O mesmo aconteceu com os demais participantes e, em todas as atividades que envolveram a análise dos protocolos de construção, os dados obtidos foram cruzados com os dos vídeos.

Figura 71 – Construção da esfera como superfície de revolução por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Para obter a esfera como superfície de revolução, o participante P1 iniciou inserindo a equação de uma circunferência eq1 na janela de visualização 2D. Em seguida, o participante

colocou um ponto sobre a intersecção entre a circunferência e o eixo dos y , observando que este não fica móvel. Então, apagando esse ponto, P1 usou a ferramenta ‘Ponto em objeto’ e colocou o ponto móvel A sobre a circunferência.

Para a obtenção da segunda circunferência, o participante P1 explorou as ferramentas para obtenção de um círculo referentes à janela de visualização 2D e considerou que pode usar a ferramenta ‘Círculo dados centro e um de seus pontos’ ou ‘Círculo: centro & raio’. Percebendo que a segunda circunferência precisaria ser obtida na janela de visualização 3D, P1 constituiu um novo esquema de uso quando clica nessa janela, verificando que as ferramentas não são as mesmas.

Então, P1 explorou as ferramentas para obtenção do círculo, escolhendo a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’ como primeira alternativa. O participante P1 selecionou um ponto sobre a circunferência eq1 e o eixo dos z , obtendo uma circunferência que se sobrepõem a eq1. Percebendo que não pode ser o eixo dos z , obtém uma circunferência usando o ponto A e o eixo dos x . A Figura 72a mostra o momento em que movendo o ponto A, P1 constatou que também não pode utilizar os eixos dos x e nem dos y para obter a esfera como superfície de revolução.

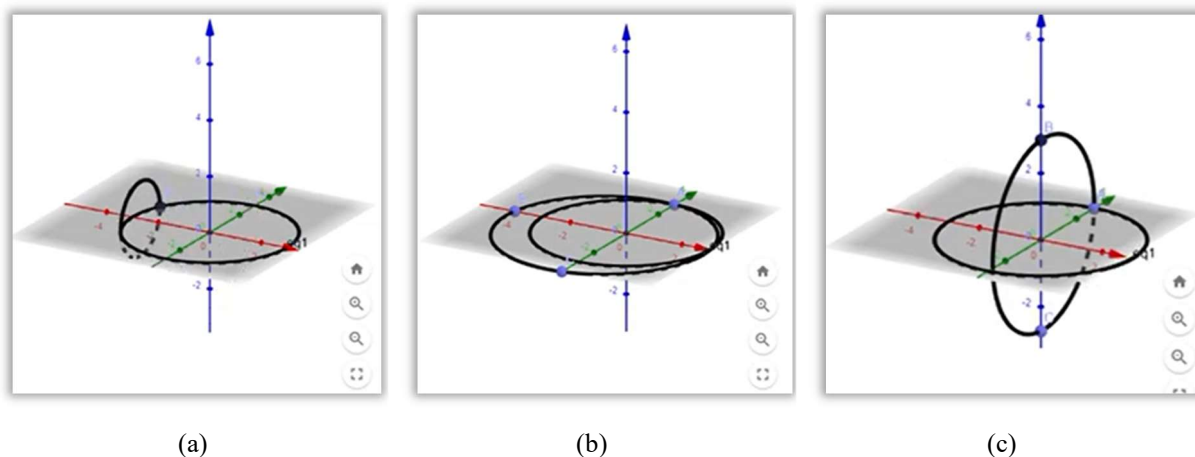
Nessa ocasião, perguntamos ao participante P1 porque a construção não deu certo, ao que P1 respondeu que é devido ao eixo escolhido para obter a circunferência estar fixo. Então, P1 explorou outras ferramentas para obtenção de circunferências na janela de visualização 3D. Escolhendo a ferramenta ‘Círculo (Centro – Raio + Direção)’, P1 fez uma antecipação dizendo: *“Isso também não vai dar certo”*. Mas, ainda assim, experimentou a ferramenta. Selecionando a origem do sistema cartesiano como centro da circunferência e conjecturando a respeito da direção, diz: *“Mas quando fizer a direção eu vou estar fazendo a mesma situação da anterior”*.

P1 percebe que as duas ferramentas escolhidas dependem da direção do eixo que passa pelo centro da circunferência, perpendicular ao plano que a contém. Então, escolheu uma terceira, a ferramenta ‘Circunferência por três pontos’. Experimentando a ferramenta, P1 disse que só tem um ponto e insere outros dois pontos (um sobre o eixo dos y e outro sobre o eixo dos x), obtendo a segunda circunferência no mesmo plano da primeira (Figura 72b).

Então, perguntamos a P1 em que lugar esses pontos precisariam estar para obter a segunda circunferência, uma vez que P1 já havia entendido que esta precisava passar pelo ponto móvel e estar em plano perpendicular ao da primeira. P1 respondeu: *“Eu acredito que sobre o eixo z e com o mesmo raio né”* e utiliza a ferramenta ‘Circunferência por três pontos’ selecionando o ponto móvel A e outros dois pontos sobre o eixo dos z . P1 entendeu que esses

pontos precisam ser simétricos e ter cota igual a 3, que é a medida do raio da primeira circunferência.

Figura 72 – Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Porém, o número 3 não estava aparente devido à escala do eixo dos z e P1 seleciona de forma aleatória um ponto médio entre 2 e 4, obtendo os pontos $(0,0,2.99)$ e $(0,0,-2.99)$. A Figura 72c mostra o momento em que P1 obteve a circunferência que passa por esses dois pontos e o ponto móvel A. Depois disso, P1 experimentou fazer o ajuste nos valores das cotas e, verificando que não é possível, apaga esses pontos. Então, P1 insere os pontos $B(0,0,3)$ e $C(0,0,-3)$ e, utilizando a ferramenta ‘Círculo definido por três pontos’, obtém a circunferência c que passa pelos pontos A, B e C.

Selecionando a ferramenta rastro, P1 move o ponto A, experimentando a sua construção. Obtendo a esfera, expressa surpresa e alegria dizendo que estava: “[...] parecendo uma criança quando ganha um brinquedo novo”. Apesar de P1 já conhecer o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, sua expressão por meio da fala demonstra que a obtenção de construções geométricas foi uma experiência nova.

Dessa forma, podemos inferir que P1 estava constituindo os seus primeiros esquemas de utilização relativos às características de uma construção geométrica em ambiente de matemática dinâmica. Isso pode ser visto no momento em que P1 precisou considerar as propriedades dos objetos matemáticos envolvidos e relações entre estes, para planejar a ordem de inserção e dependência entre os elementos da construção. Neste último caso, vemos que P1 inseriu a segunda circunferência passando pelo ponto móvel A para que seu rastro dê origem à esfera.

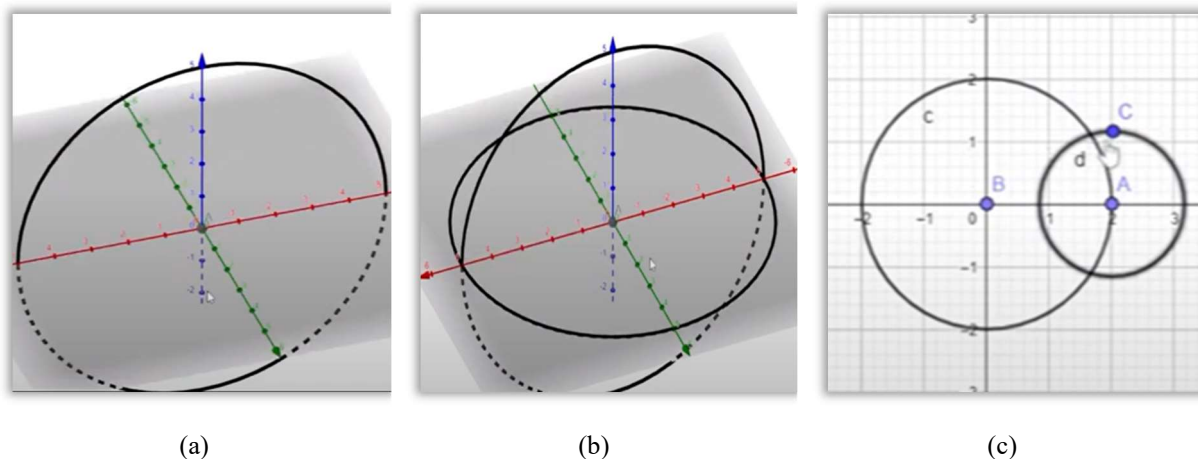
O participante P2, que teve o primeiro contato com o software GeoGebra durante a participação nessa pesquisa, iniciou utilizando o GeoGebra 3D para realizar essa atividade. Experimentando esse ambiente de matemática dinâmica, P2 inseriu a equação de um elipsoide. Deixando todos os coeficientes nos termos quadráticos na equação desse elipsoide com o mesmo valor P2 obteve a esfera. E, apagando o termo que contém a variável z , P2 obteve uma superfície cilíndrica.

Apagando essa equação, P2 analisa as ferramentas para obtenção de circunferências. Então, P2 utiliza a ferramenta ‘Ponto’ para inserir um ponto na origem do sistema cartesiano. A seguir, clicando no ponto que colocou sobre a origem e no eixo dos y , P2 utilizou a ferramenta ‘Círculo (Centro – Raio + Direção)’ para obter uma circunferência de raio 5 (Figura 73a). Depois, P2 obtém uma segunda circunferência de mesmo raio, com centro na origem e direção do eixo dos z (Figura 73b).

O participante P2 percebeu que com essa construção não vai conseguir obter a esfera como superfície de revolução, pois as duas circunferências são fixas. Então, mudando para o GeoGebra, P2 inicia inserindo os pontos $A(2,0)$ e $B(0,0)$ na janela de visualização 2D. Selecionando os pontos A e B, P2 obteve a primeira circunferência usando a ferramenta ‘Círculo dados centro e um de seus pontos’.

A Figura 73c mostra o momento em que, sem ter exibido a janela de visualização 3D ainda, P2 experimentou obter a segunda circunferência. P2 percebe o erro, uma vez que a segunda circunferência ficou no mesmo plano da primeira. Então, P2 limpou a janela de álgebra, inseriu o ponto $A(0,0)$ e obteve uma circunferência de raio 5 com a ferramenta ‘Círculo: centro e raio’, colocando um ponto B sobre a esta circunferência.

Figura 73 – Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P2 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

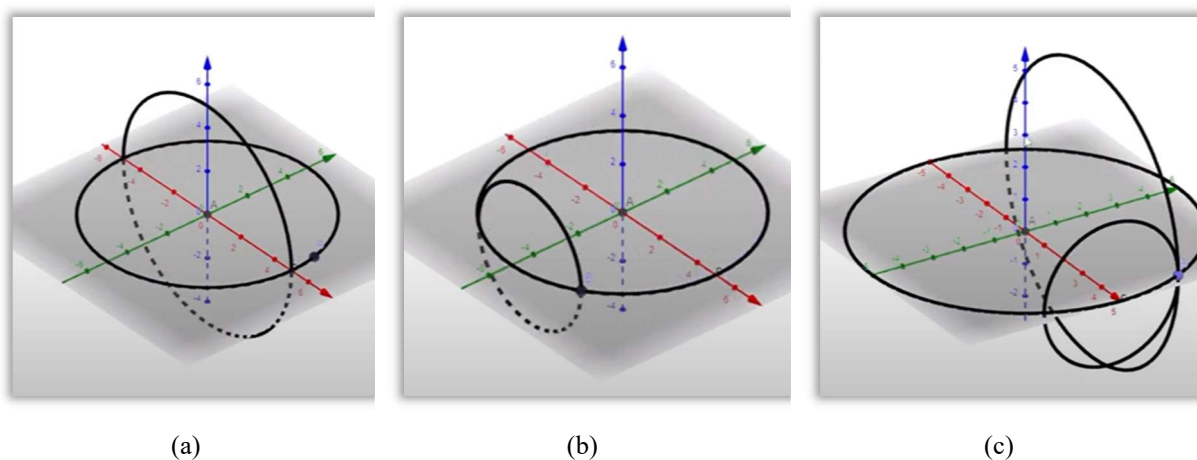
Entendendo que a construção não pode ser realizada na janela bidimensional, P2 abriu a janela de visualização 3D, explorando as ferramentas disponíveis para obter a segunda circunferência. Nessa oportunidade, P2 experimenta a mudança na barra de ferramentas ao alternar entre as janelas 2D e 3D. Escolhendo a ferramenta ‘Círculo: centro – raio + direção’, P2 obteve uma circunferência de centro A, raio 5 e direção do eixo dos z, que se sobrepõem a primeira.

Então, P2 seleciona o centro A, raio 5 e direção do eixo dos y e, obtendo uma circunferência perpendicular ao plano da primeira, mas fixa. A Figura 74a mostra o momento em que o participante move o ponto B e, percebendo que a circunferência não acompanha o movimento, diz: “*Mas não tá movendo*”. O participante P2 percebeu que precisava utilizar o ponto móvel B para obter a segunda circunferência.

Então, utilizando a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’, P2 obteve a circunferência selecionando o eixo dos y e o ponto móvel B. Com isso, vemos que P2 compreendeu que precisava existir uma dependência entre a circunferência e o ponto móvel. A Figura 74b mostra o momento em que P2 move o ponto B, percebendo que a circunferência não realiza o movimento esperado. Movendo-se ao longo do eixo dos y, com mudança na medida do raio, a trajetória da circunferência não descreve uma esfera.

E, na Figura 74c, P2 mostra que também não funciona utilizando o eixo dos x. Então, P2 experimenta selecionar o eixo dos z e o ponto móvel B, usando a mesma ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’, obtendo uma circunferência que se sobrepõem à primeira.

Figura 74 - Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P2 (parte 2).



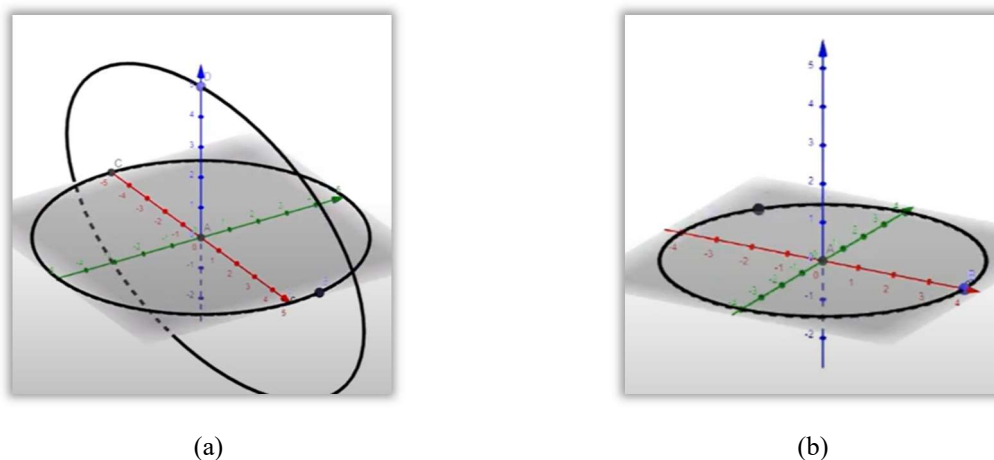
Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 75a, podemos ver quando P2 experimentou a ferramenta ‘Elipse’, selecionando os pontos $C(-5,0,0)$, $D(0,0,5)$ e $E(5,0,0)$. P2 percebe que também não é possível obter a esfera dessa forma, apagando a construção. Em função da disponibilidade do participante, essa atividade precisou ser realizada no encontro seguinte. Iniciando uma nova construção, P2 selecionou a ferramenta ‘Círculo dados Centro e Um de seus Pontos’ e, na janela de visualização 2D, clicou nos pontos $A(0,0)$ e $B(4,0)$, obtendo a primeira circunferência.

Experimentando mover o ponto B, P2 percebe que ocorre uma mudança no raio da circunferência. Então, P2 insere um ponto C sobre a circunferência e o eixo dos x , percebendo que este ponto fica fixo. Entendendo que para o ponto ficar móvel não pode ficar na intersecção entre o eixo e a circunferência, P2 insere novamente este ponto apenas sobre a circunferência.

A Figura 75b representa o momento em que P2, movendo o ponto B, diz: “*Bah cheio de detalhezinho!*” Nessa oportunidade, podemos ver P2 constituindo esquemas relacionados a inserção de pontos no GeoGebra, com três características distintas: ponto fixo, cujo movimento altera o raio da circunferência, e ponto que se move sobre a circunferência sem alterá-la. A seguir, na janela de visualização 3D, P2 experimentou a ferramenta ‘Círculo definido por três pontos’. Ao ser instigado pela pesquisadora a pensar sobre como é a circunferência que deseja obter, P2 respondeu que ela precisaria girar em torno do eixo dos z . Assim, P2 compreendeu que, para usar a ferramenta ‘Círculo definido por três pontos’, precisaria de dois pontos simétricos em relação à origem sobre o eixo dos z , além do ponto móvel. Então, P2 inseriu os pontos $D(0,0,4)$ e $E(0,0,-4)$ sobre o eixo dos z , obtendo a circunferência que passa pelos pontos C, D e E.

Figura 75 - Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P2 (parte 3).

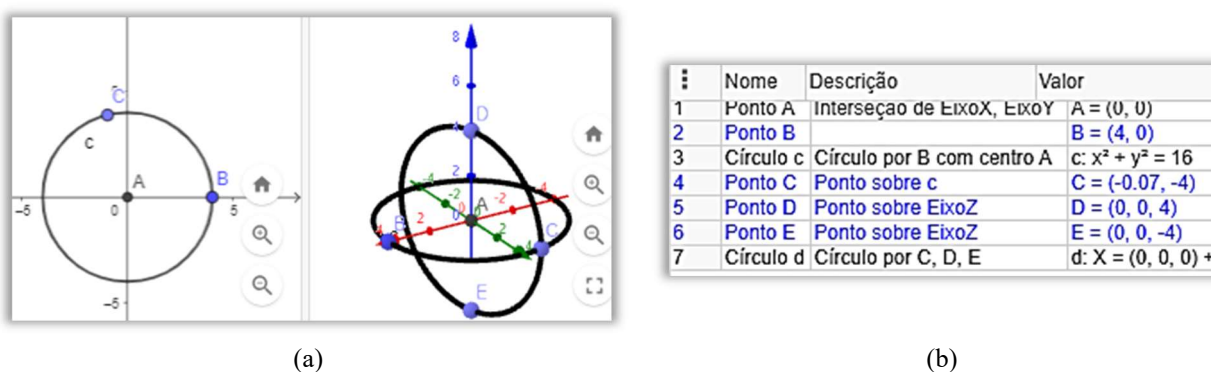


Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 76a mostra o momento em que P2 experimenta a sua construção movendo o ponto C. Após verificar que a construção obtida gera a esfera pela revolução da circunferência, P2 seleciona a funcionalidade ‘Exibir rastro’, obtendo a esfera. Como vimos, o participante P2 percorreu outros caminhos antes de chegar no protocolo de construção (Figura 76b) com apenas sete passos.

Assim, complementando os dados fornecidos pelo protocolo de construção, as gravações consistiram num importante instrumento de coleta de dados. Estas gravações nos permitiram observar as condutas cognitivas do participante que, confirmando o que já havíamos visto, não conhecia o GeoGebra até a participação nesta pesquisa.

Figura 76 – Construção da esfera como superfície de revolução por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Para o participante P2, essa foi a primeira experiência com uma construção geométrica que envolveu esquemas de utilização relacionados às características da matemática dinâmica. Vemos que P2 constitui esses esquemas quando observamos a ordem em que insere os elementos na construção e quando o participante percebe a necessidade da dependência entre os elementos inseridos.

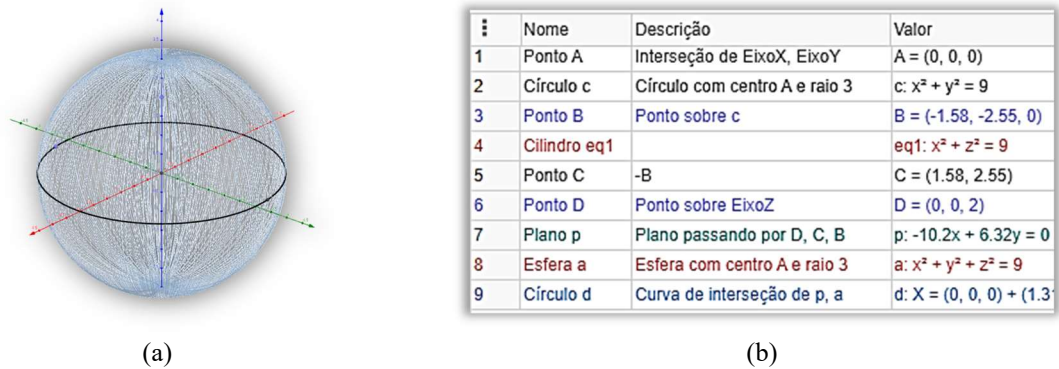
Conforme já foi dito, os participantes P1 e P2 estavam tendo suas primeiras experiências com o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, em especial as que envolvem as características de uma construção geométrica.

O participante P3, que já fazia uso pessoal e profissional do GeoGebra, não explorou a construção do esferoide (atividade 2) para obter a construção na atividade 3. P3 desafiou-se a obter a esfera como superfície de revolução no GeoGebra 3D (Figura 77a).

No protocolo de construção do participante P3, constam nove passos (Figura 77b). No entanto, os passos que envolveram tentativas e erros não estão no protocolo de construção, com exceção do passo 4 que ficou por engano. Assim, os caminhos percorridos pelo participante P3

também são apresentados a partir do cruzamento dos dados do protocolo de construção com os dados obtidos pelas gravações.

Figura 77 – Construção da esfera como superfície de revolução por P3.

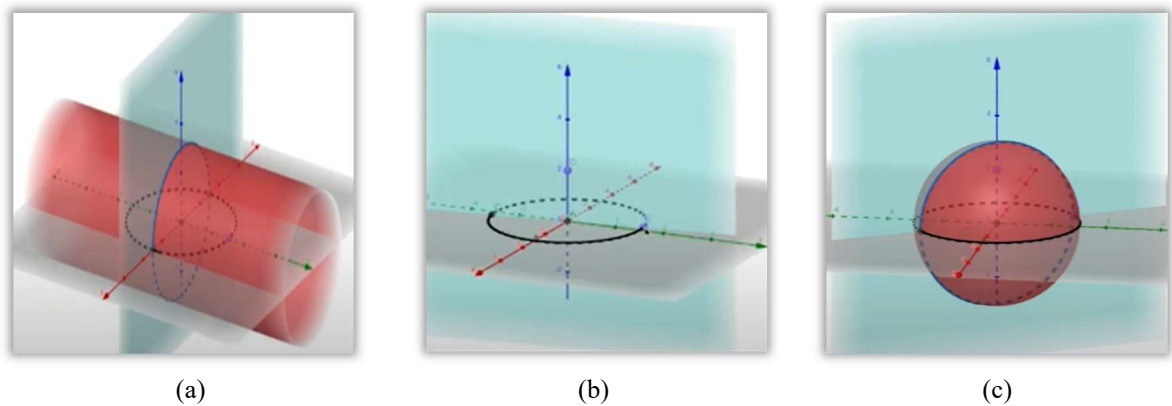


Fonte: Dados da pesquisa.

O participante P3 iniciou inserindo um ponto A na origem do sistema de coordenadas e obteve uma circunferência c com centro em A, raio 3 e direção do eixo dos z, utilizando a ferramenta ‘Círculo: centro – raio + direção’. A seguir, o participante colocou um ponto B sobre a circunferência c, experimentando o seu movimento. Para obter a segunda circunferência, primeiro P3 inseriu a equação de uma superfície cilíndrica $x^2 + z^2 = 9$ e do plano $y = 0$, obtendo a interseção entre essas superfícies (Figura 78a).

Nessa oportunidade, P3 diz: “*Olha só como eu aprendi alguma coisa*”, entendemos que o mesmo se referia aos conhecimentos mobilizados na obtenção da segunda circunferência. Esse é um dos indícios de que P3 também estava constituindo esquemas conceituais relacionados ao estudo de superfícies, ao menos com a abordagem proposta nesse estudo.

Figura 78 – Processo de construção da esfera como superfície de revolução por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Embora essa circunferência não resolva o desafio proposto, o participante mobilizou espontaneamente esquemas de utilização para inserção do plano xoz e de uma superfície cilíndrica que se desenvolve ao longo do eixo dos y . Essa conduta cognitiva nos permite ver a coordenação dos registros de representação gráfico e simbólico, quando P3 imaginou a circunferência que deseja inserir no sistema cartesiano e escolheu adequadamente os termos nas equações do plano e da superfície cilíndrica para obtê-la.

Depois de ocultar o plano e a superfície cilíndrica, P3 moveu o sistema cartesiano e, percebendo o erro disse: “*Ahhh, mas eu teria que ter essa circunferência dependente do ponto B aqui né*”. Então, P3 apagou a segunda circunferência e analisou as ferramentas do GeoGebra para identificar outra forma de obtê-la, considerando que deve depender do ponto B. Aqui é possível ver que P3 reconhece a ordem em que os elementos precisam ser inseridos na construção, assim como as dependências entre eles.

Então, buscando obter a segunda circunferência de forma que ela passe pelo ponto móvel B, P3 inseriu o ponto C simétrico de B em relação à origem fazendo $C = -B$. Em seguida, analisou demoradamente a ferramenta ‘Círculo por três pontos’, mas escolheu a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’, o que demonstra que P3 não sabia como obter a circunferência desejada com essa ferramenta.

Selecionando o eixo dos z e o ponto móvel B, obteve a segunda circunferência sobre a primeira. Então, P3 dizendo: “*Vou apelar!*”, querendo dizer que vai obter a circunferência a partir da intersecção da esfera por um plano. Para tal, P3 inseriu o ponto $D(0,0,2)$ e obteve o plano p que passa pelos pontos B, C e D usando a ferramenta ‘Plano por três pontos’ (Figura 78b). Então, P3 move o ponto B para confirmar a dependência entre o plano e o ponto. A seguir, P3 utiliza a ferramenta ‘Esfera’ para obter a esfera de centro em A e raio 3.

Depois, utilizando a ferramenta ‘Intersecção de superfícies’, P3 obteve a segunda circunferência d como intersecção dessa esfera com o plano p (Figura 78c). E, ocultando o plano e a esfera, habilitando a função ‘Mostrar traço’ e clicando no botão de animação do ponto móvel B, o participante observou a circunferência desenhando a esfera (Figura 77a). Foi possível observar que o participante conjecturava e fazia testes com base no *feedback* da representação dinâmica, realizando ajustes até a obter a construção.

Essa atividade envolveu a primeira construção geométrica do conjunto das SEAI, apresentando-se como algo novo, especialmente para os participantes P1 e P2. Os participantes precisaram mobilizar esquemas conceituais necessários para a utilização das ferramentas do GeoGebra envolvidas, ocasionando uma apropriação desses artefatos. Essa gênese do

instrumento, capacitando os participantes a exploração do objeto matemático, tem influência na (re)constituição dos esquemas conceituais, e assim por diante.

Nesse caso, entendemos que ocorre uma retroalimentação, onde esquemas conceituais prévios possibilitam a apropriação tecnológica que, por sua vez, favorece as apreensões figurais. Essas apreensões figurais, enriquecendo a apreensão conceitual do objeto matemático em estudo, capacitam o sujeito para avançar no uso da tecnologia. O desafio de obter uma esfera como superfície de revolução deu início a um conjunto de atividades que evidenciam mais a gênese instrumental dos participantes.

Concluído o item a da atividade 3, perguntou-se o que diferencia as representações gráfica (item b) e simbólica (item c) da esfera das do esferoide e do elipsoide em α e β . Nessa oportunidade, os participantes precisaram constatar que os três eixos têm medidas iguais, assim como são iguais os valores de a^2 , b^2 e c^2 na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

E resposta à questão do item b, considerando as seções planas obtidas por cortes da esfera com os planos coordenados, os participantes argumentam acerca da característica visual que diferencia a esfera do elipsoide em α e β e do esferoide:

P1: São circunferências, em todos os planos. Todos os eixos têm o mesmo tamanho. A esfera é um caso especial do esferoide e do elipsoide, porém com os três eixos de tamanhos iguais.

P2: A esfera é um caso específico do elipsoide. A equação tem a mesma forma geral, no entanto, os divisores a^2 , b^2 e c^2 , vão ter o mesmo valor.

P3: Independente da posição de visão desta figura, teremos uma esfera em qualquer âmbito.

No item c, considerando a característica na equação da esfera que a diferencia das equações do elipsoide em α e β e do esferoide, os participantes registram:

$$P1: \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1 \text{ ou } x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$P2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

$$P3: \text{Todos os coeficientes são iguais. } x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Essas respostas demonstram a (re)constituição de esquemas conceituais relativos ao reconhecimento da representação de uma esfera em cada registro de representação, gráfico ou simbólico, e a correlação entre esses registros. Por fim, o item d dessa atividade propôs uma discussão para chegar na denominação dessa superfície, cuja representação em língua natural é ‘esfera de raio r ’. A partir de uma conversa sobre as possíveis denominações para essa

superfície, os participantes correlacionaram os registros gráfico, simbólico e em língua natural da esfera.

5.1.4.4 *OBSERVAÇÕES FINAIS*

Nessa SEAI, a desconstrução dimensional teve papel fundamental no reconhecimento dos elipsoides, quando os participantes precisaram identificar as representações gráficas e simbólicas das seções planas que os constituem. Essas fatias bidimensionais que compõem as quádricas favorecem a diferenciação entre representações gráficas e simbólicas de elipsoides em α e β , esferoides e esfera, além de permitirem a constituição das representações em língua natural específicas.

Além da constituição de esquemas conceituais relativos à identificação e correlação entre os diferentes registros de representação dos elipsoides, foi dado um primeiro passo na constituição de esquemas de utilização de maior complexidade em relação ao uso das ferramentas do GeoGebra. Esses esquemas são os relativos à obtenção construções geométricas em ambientes de matemática dinâmica, envolvendo a observação das propriedades e relações entre os elementos inseridos.

No caso do desafio de obter a esfera como superfície de revolução, além da apropriação das ferramentas do GeoGebra, os participantes precisaram observar a ordem de inserção dos elementos na construção e a dependência entre estes. Essas condições precisam ser observadas para que a construção permaneça estável diante do movimento. Com isso, essa SEAI proporcionou aos participantes uma primeira experiência com construções em ambiente de matemática dinâmica, que envolvem a dependência geométrica e a variação dinâmica.

A situação de ensino e aprendizagem instrumental seguinte abordou todos os possíveis casos de representação em língua natural específica, a partir das unidades significantes que permitem a distinção entre hiperboloides e paraboloides. As atividades propostas levaram os participantes a correlacionarem as representações gráficas e simbólicas dessas superfícies para, a partir disso, estabelecer suas representações em língua natural específicas.

5.1.5 *SEAI 5 - Explorando as representações gráficas, simbólicas e em língua natural específicas dos hiperboloides e dos paraboloides*

Da mesma forma que com os elipsoides na SEAI anterior, essa situação de ensino e aprendizagem instrumental (APÊNDICE H — SEAI 5) propôs a diferenciação entre tipos de

quádrica e quádricas do mesmo tipo. Assim, os participantes foram convidados a constituir as representações em língua natural específicas dos hiperboloides e paraboloides, a partir das correlações entre as suas representações gráficas e simbólicas.

A primeira parte dessa SEAI (atividades 1 e 2) refere-se aos hiperboloides e a segunda (atividades 4 e 5) aos paraboloides. A atividade 3 propõe outras variações de sinais na equação que tem todos os termos quadráticos e, resumindo e relacionando os conceitos abordados, a atividade 6 faz um fechamento dessa SEAI. Entendemos que essa organização foi importante para tratar separadamente as características gerais e específicas dessas quádricas.

As unidades simbólicas gerais são utilizadas nas atividades 1 e 2 para fazer as distinções entre hiperboloides de uma e de duas folhas e, nas atividades 4 e 5, entre paraboloides elípticos e hiperbólicos. E, na atividade 6, outras unidades simbólicas gerais permitem diferenciar hiperboloides de paraboloides. As unidades significantes que permitem a diferenciação entre hiperboloides e paraboloides são os termos quadráticos e/ou linear. As equações dos hiperboloides têm três termos quadráticos e, as dos paraboloides, dois termos quadráticos e um linear.

As unidades significantes que possibilitam a diferenciação entre as representações simbólicas dos hiperboloides de uma e de duas folhas são os sinais dos coeficientes nos termos quadráticos. O hiperboloide de uma folha tem um dos termos quadráticos com coeficiente negativo e os outros dois positivos. Ao contrário, no hiperboloide de duas folhas, um dos termos quadráticos tem coeficiente positivo e os outros dois negativos. E, no caso das representações simbólicas dos paraboloides elípticos e hiperbólicos, as unidades significantes que permitem diferenciá-las são identificadas por meio da análise dos sinais dos coeficientes dos termos quadráticos. No primeiro caso, os termos quadráticos têm coeficientes de mesmo sinal e, no segundo caso, de sinais contrários.

As unidades simbólicas específicas possibilitam a diferenciação quanto à posição no sistema cartesiano que, nos hiperboloides, também se dá por meio da análise dos sinais dos coeficientes que precedem as variáveis quadráticas. No caso do hiperboloide de uma folha, o valor negativo varia de acordo com o eixo ao longo do qual a quádrica se desenvolve (atividade 1). No hiperboloide de duas folhas, o sinal positivo determina o eixo ao longo do qual a superfície se desenvolve (atividade 2).

No caso dos paraboloides, as unidades simbólicas específicas que possibilitam a diferenciação quanto à posição no sistema cartesiano são o termo linear e o sinal deste. No paraboide elíptico, o termo linear indica o eixo que contém o centro das suas seções planas elípticas. O sinal positivo (ou negativo) desse termo indica que esses centros estão sobre a parte

positiva (ou negativa) desse eixo (atividade 4). E, no caso dos paraboloides hiperbólicos, o termo linear indica o eixo de simetria das parábolas assento e estribo. E, a diferenciação entre as posições dessa quádrlica no sistema cartesiano, deu-se em relação ao semieixo para o qual está voltada a concavidade da parábola assento e o plano que a contém (atividade 5).

Assim, as atividades envolveram a análise da relação entre a variação nos sinais dos coeficientes das variáveis nas representações simbólicas das quádrlicas e as respectivas diferenças nas representações gráficas. As oposições qualitativas oriundas dessa variação de sinais permitem conhecer os elementos que constituem o conjunto das unidades significantes simbólicas e gráficas e possíveis combinações.

As oposições qualitativas que possibilitam a diferenciação relativa à posição no sistema cartesiano são oriundas da variável visual ‘posição no sistema cartesiano’. Essa variável tem três valores visuais para o caso dos hiperboloides de uma folha (atividade 1), três para o hiperboloide de duas folhas (atividade 2), seis para os paraboloides elípticos (atividade 4) e seis para os paraboloides hiperbólicos (atividade 5).

Para explorar todos os casos de hiperboloides e paraboloides, essa SEAI propôs atividades a partir de duas equações:

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1 \quad \text{e} \quad (2) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = z$$

A equação (1) foi utilizada como referência na atividade 1 para a discriminação dos três casos do hiperboloide de uma folha, ao variar os sinais dos coeficientes; na atividade 2, para a discriminação dos três casos do hiperboloide de duas folhas; e, na atividade 3, para analisar as demais possibilidades para os sinais de equações dessa forma. A equação (2) e suas variações são utilizadas nas atividades 4 para a discriminação dos seis casos do paraboloides elíptico e, na atividade 5, para a discriminação dos seis casos do paraboloides hiperbólico. A atividade 6 propõe um resumo que concatena todos os casos para todas as quádrlicas.

5.1.5.1 ATIVIDADE 1

A primeira atividade refere-se ao hiperboloide de uma folha e inicia com uma antecipação (item a), perguntando se o participante sabe que quádrlica é representada pela equação (1). Observando a primeira representação simbólica, os participantes registram suas conjecturas:

PI: Um hiperboloide de uma folha.

P2: *É um hiperboloide de uma folha, pois nos planos xoz e yoz , temos a representação de uma hipérbole, e no plano xoy temos sempre a representação de uma elipse.*

P3: *Hiperboloide de uma folha.*

P2 argumenta a sua hipótese, identificando as seções planas hiperbólicas que resultantes da intersecção da superfície com os planos xoz e yoz e elípticas com o plano xoy . No entanto, esse resultado foi obtido após algumas tentativas e erros, que observamos por meio de suas conjecturas e argumentações. Inicialmente, P2 conjectura que se trata de um hiperboloide de duas folhas. Pedindo para que expressasse o que o levou a essa conjectura, considerando o sinal do termo que contém a variável z na equação (1), P2 disse *“Porque ele tem aquele negativo ali”*.

Nesse momento, pedimos para que P2 analisasse as seções planas dessa quádriga, quando P2 disse *“Eu sei que ele tem uma elipse no plano paralelo ao xoy e no plano paralelo ao xoz e ao yoz ele vai ter a representação de uma hipérbole”*. Então, perguntamos a P2 porque ele considerou que era um hiperboloide de duas folhas, ao que o participante respondeu: *“Tá deixa eu pensar. Bah pior é que eu acho que ele é de uma”*. Assim, P2 inicia a realização do procedimento algébrico, *“Eu acho que ele é um hiperboloide de uma folha porque a elipse eu só vou ter por exemplo quando eu passo quando eu assumo $z = k$ e eu faço o estudo do sinal eu vejo que [...] o k sendo positivo ou negativo ele vai ser sempre positivo”*.

No entanto, P2 considerou que essas elipses só existem para $k > 0$, quando disse: *“Então a minha elipse vai ser sempre acima do plano coordenado xoy . [...] Ela não vai nem ser zero ela é só positiva”*. Então, pedimos para que P2 analisasse a equação dessa seção plana

elíptica $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1 + \frac{k^2}{2} \\ z = k \end{cases}$ para valores de $k < 0$. Verificando que para qualquer valor de k , as

seções planas são elípticas, P2 responde: *“Eu acho que ele é um hiperboloide de uma folha justamente por ele ter sempre a representação dessa elipse Ele sempre vai ser uma elipse”*.

No caso de P1 e P3, que não apresentaram as justificativas, também recorreremos às gravações para analisar as condutas cognitivas que levaram os participantes a essas respostas nos registros escritos. O participante P1 iniciou indagando *“Eu tenho que só olhar para ela e saber?”* e, referindo-se à equação do elipsoide, complementou *“O que ela tem diferente da semana passada é o sinalzinho ali né no $-\frac{z^2}{2}$, então ela não vai ser uma superfície elíptica, ela vai ser uma hiperbólica. Agora, qual delas eu não sei olhando para ela”*.

Com isso, P1 deu início à diferenciação entre as representações simbólicas das quádricas, onde identificou a presença de seções planas hiperbólicas. P1 observou os modelos

impressos em 3D, conjecturando que pode ser um hiperboloide de uma ou de duas folhas. A seguir, considera a possibilidade de ser um paraboloides hiperbólico, fechando o rol de quádricas que possuem hipérbolas como seções planas. Então, pedimos para que P1 analisasse a equação a partir das suas seções planas por meio do procedimento algébrico que aprendemos na SEAI 3.

Então, apresentamos a seguir o diálogo com P1 para a retomada dos conhecimentos relativos a esse procedimento:

Pesquisadora: Como podemos analisar as seções planas resultantes das interseções dessa quádrica pelos planos coordenados?

P1: Se eu quiser ver no plano xoy , o meu z vai ser uma constante.

Pesquisadora: No plano xoy , z é uma constante, mas qual?

P1: É zero.

Pesquisadora: Então, que seção plana é obtida quando $z = 0$?

P1: Se eu devia saber, eu esqueci.

Pesquisadora: Como fica essa equação quando $z = 0$?

P1: É uma elipse? Eu achei que não pudesse ser uma elipse porque a elipse a gente viu semana passada.

Então, esclarecemos que no encontro anterior trabalhamos com o elipsoide, cujas seções planas são todas elípticas. No entanto, tem mais superfícies quádricas com seções planas elípticas, quando P1 observa a presença dessa cônica nos modelos impressos em 3D dos hiperboloides e do paraboloides elíptico. A seguir, solicitamos que P1 analisasse as seções planas obtidas com cortes pelos planos xoz e $yozy$. Então, P1 disse “*Digamos que eu pegasse o xoz . Aí meu y vai ser zero*”. E, afirmando que a seção plana é uma hipérbole, complementa “*Então é uma elipse um determinado momento e uma hipérbole em outro momento*”.

Continuando a análise por meio do procedimento algébrico, P1 disse “*Se eu pegar $yozy$ e o x for 0 também é uma hipérbole*”. Então, pegando o modelo impresso em 3D do paraboloides elíptico, P1 disse “*Essa aqui eu tenho que eliminar né*” e, referindo-se aos hiperboloides, complementa “*Sobrando só essas duas*”. Nessa oportunidade, observamos um obstáculo na identificação da quádrica relativo a uma limitação nos modelos impressos em 3D. Observamos que reconhecer que a seção plana da quádrica de equação (1) com o plano xoy é uma elipse, não favoreceu a diferenciação entre os hiperboloides.

Isso ocorreu porque os dois hiperboloides têm seções planas elípticas e, observando os modelos impressos em 3D, P1 não sabia onde o plano xoy passava. Então, esclarecemos que estamos considerando as superfícies quádricas na posição padrão, quando o centro dos hiperboloides fica sobre a origem do sistema cartesiano. Com base nessa informação, P1

conjectura que se trata de um hiperboloide de uma folha. Com isso vemos que, paulatinamente, P1 foi mobilizando esquemas conceituais relativos ao procedimento informático, chegando à identificação da superfície a partir da sua representação simbólica.

P3 conjecturou que a quádrlica da equação (1) se trata de um hiperboloide. Quando perguntamos o que o levou a essa conclusão, P3 reconsidera a sua hipótese, conjecturando que é um paraboloides. Então, novamente perguntamos o que o levou a pensar que se trata de um paraboloides. Então, P3 analisa as seções planas na equação (1) e, por meio do procedimento algébrico, argumenta “*Esse z^2 eu passo para o outro lado e aí eu tenho uma elipse. Essa elipse depende desse valor aqui né (falando da expressão $1 + \frac{z^2}{2}$) e esse valor sempre vai ser positivo. Então vai ser um paraboloides*”.

Nessa oportunidade, levamos o participante a considerar o que tinha dito anteriormente, que o corte com planos paralelos xoy é sempre uma elipse. E, perguntando se os cortes de um plano paralelo xoy com o paraboloides é sempre uma elipse, P3 reconsiderou a sua hipótese, voltando a sua conjectura inicial de que se trata de um hiperboloide. Novamente, perguntamos de que forma é possível justificar essa escolha, quando P3 disse “*Eu vou ter elipses no caso dos cortes com $z = k$ e se eu passar o y ou o x para o outro lado eu vou ter uma hipérbole*”.

Então, perguntamos se era o hiperboloide de uma ou de duas folhas e o que define isso na equação. P3 considera que o que diferencia a equação de um hiperboloide de uma ou duas folhas é o sinal, quando disse “*Quando são dois sinais negativos ou um só né*”. E, quando pergunto novamente se é o hiperboloide de uma ou de duas folhas, P3 argumenta: “*Esse é de uma porque sempre vai ter uma elipse independente do valor de z* ”. Assim, observamos que P3 mobilizou esquemas conceituais relativos ao procedimento algébrico, realizando o reconhecimento da representação simbólica da quádrlica a partir das suas seções planas.

No item b, os participantes inseriram a equação (1) na janela de álgebra do GeoGebra 3D, obtendo a representação gráfica dessa quádrlica. Respondendo sobre a representação gráfica obtida ser a que esperavam, os participantes registraram:

P1: Sim.

P2: Sim, pois pude ver exatamente o que havia imaginado nos planos de corte.

P3: Sim e não. Estava em dúvida, após retomei os conceitos da última SEAI e relembrei.

Observamos na fala do participante P2 a contribuição do procedimento algébrico para o reconhecimento das representações simbólicas de uma quádrlica e correlação entre essas e as representações gráficas e em língua natural. Isso porque, para reconhecer a quádrlica na sua

representação simbólica, os participantes precisaram recorrer às suas características gráficas. Nesse momento, seja por meio do modelo impresso em 3D ou através da imagem mental, os participantes correlacionavam registros de representação gráfico e simbólico.

Após identificar a superfície, os participantes precisaram expressar essa classificação, levando-os a correlacionar os registros de representação gráfico e simbólico com o registro em língua natural. Vemos com isso, a atividade promovendo a correlação entre esses registros de representação das quádricas, e o recurso utilizado para isso foi a identificação das suas seções planas. Podemos observar a contribuição da desconstrução dimensional, uma vez que os resultados obtidos são oriundos do reconhecimento das fatias bidimensionais que compõem as superfícies.

A questão do item c propôs a diferenciação entre quádricas do mesmo tipo quando, a partir da posição dessas superfícies no sistema cartesiano. Os participantes correlacionaram registros de representação gráfico e simbólico e constituíram as representações em língua natural específicas dessas quádricas. Para identificar o que diferencia um hiperboloide de uma folha do outro, considerando à posição no sistema cartesiano, os participantes foram convidados a inspecionarem as características da equação (1) e suas variações quanto aos sinais dos coeficientes.

Para isso, perguntamos quais as características visuais da quádrica que tem o coeficiente do termo que contém x negativo e os demais positivos em representações simbólicas da forma da equação (1). Antes de obter a representação gráfica no GeoGebra 3D, os participantes fizeram antecipações. P1 conjectura que “*A superfície irá se desenvolver na direção do eixo x* ”. A Figura 79 mostra o momento em que P1 utiliza o modelo impresso em 3D para mostrar o que a posição do hiperboloide de uma folha quando o termo que contém x tem coeficiente negativo com os demais positivos (Figura 79). Supondo que a lapiseira fosse o eixo dos x , P1 argumenta que a superfície se desenvolveria ao longo deste eixo.

Figura 79 – Possibilidades para a posição de um hiperboloide de uma folha por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

O participante P2 conjecturou: “*Eu acho que a representação da elipse passará a ser num plano paralelo ao plano yoz*”. E argumentou: “*A partir do momento que eu fico só com o x negativo o plano yoz passa a ser o plano que vai interceptar a elipse*”. E o participante P3 disse que “*Terá em relação aos planos paralelos $x = k$, elipses nos planos paralelos yoz*”. Em seguida, os participantes inserem a equação do hiperboloide de uma folha em x na janela de álgebra do GeoGebra 3D e, obtendo a sua representação gráfica, confirmaram suas conjecturas.

Para fechar as possibilidades relativas à posição de um hiperboloide de uma folha no sistema cartesiano, correlacionando registros de representação gráfico e simbólico, na questão do item d. Os participantes precisaram considerar a situação em que o coeficiente do termo que contém a variável y é negativo e os demais positivos em representações simbólicas da forma da equação (1). Novamente, antes de obter a representação gráfica no GeoGebra 3D, foram propostas antecipações à pergunta sobre as características visuais da superfície nessas condições.

Como é a terceira e última possibilidade de escrever a representação simbólica do hiperboloide de uma folha, por óbvio, os participantes registram suas respostas:

P1: A superfície irá se desenvolver na direção do eixo y.

P2: Eu acho que a representação da elipse passará a ser num plano paralelo ao plano xoz.

P3: Terá em relação aos planos paralelos $y = k$, elipses nos planos paralelos xoz.

Assim, considerando que um dos termos é negativo e os demais positivos, os participantes puderam verificar que só existem três possibilidades para escrever a equação dessa quádrlica. E, antes de obter as representações gráficas, os participantes antecipam as relações entre essas representações simbólicas e as gráficas. Mobilizando esquemas conceituais, os participantes analisam as seções planas nas representações simbólicas dos hiperboloides de uma folha em x , y e z , relacionando com as respectivas representações gráficas.

E mobilizando esquemas de utilização, os participantes obtêm suas representações gráficas, confirmando suas conjecturas e constatando a existência de três possibilidades para a representação gráfica de um hiperboloide de uma folha na posição padrão. Com isso, os participantes verificaram que o sinal diferente determina o eixo ao longo do qual o hiperboloide de uma folha se desenvolve, correlacionando registros de representação gráfico e simbólico dessa quádrlica.

E para correlacionar esses registros de representação com o registro em língua natural, a questão do item e propôs uma discussão. Instigando os participantes a pensarem numa

denominação para os hiperboloides de uma folha, diferenciando-os quanto à posição no sistema cartesiano, levamos os participantes a correlacionar as representações gráficas e simbólicas com as representações em língua natural específicas. Assim, os participantes registraram as seguintes propostas:

P1: Hiperboloide de uma folha ao longo de ox , quando o coeficiente da variável x for negativo; Hiperboloide de uma folha ao longo de oy , quando o coeficiente da variável y for negativo; Hiperboloide de uma folha ao longo de oz , quando o coeficiente da variável z for negativo.

P2: hiperboloide de uma folha em x ; hiperboloide de uma folha em y ; hiperboloide de uma folha em z .

P3: Hiperboloide de uma folha de eixo central x , para o caso em que o coeficiente de x é negativo. Igualmente para y e z .

No fechamento dessa questão, esclarecemos a importância de uma forma única e clara de representação dos hiperboloides de uma folha no registro de representação em língua natural. Então, conforme Silva (2018), propomos a representação em língua natural específica ‘hiperboloide de uma folha em x ’ (y ou z) para o hiperboloide de uma folha cujas intersecções por planos paralelos a yoz (xoz ou xoy) fossem elipses. Com a descrição das representações em língua natural específica, os participantes identificaram a existência de três casos para os hiperboloides de uma folha, correlacionando com os registros de representação gráfico e simbólico.

5.1.5.2 ATIVIDADE 2

A atividade 2, possibilitando a diferenciação entre as representações simbólicas dos hiperboloides de uma e duas folhas, também tem a intenção de levar os participantes a descoberta dos três casos de hiperboloides de duas folhas. De forma análoga a anterior, os participantes analisam as seções planas a partir das representações simbólicas dessas superfícies, relacionando com as características visuais das suas representações gráficas.

Com isso, os participantes puderam verificar a existência de três possibilidades para a escrita da equação de um hiperboloide de duas folhas e que também há três formas de posicionar essas superfícies no sistema cartesiano. Na questão do item a, foi proposta uma antecipação ao considerar que a representação simbólica similar à da quádrlica representada pela equação (1), porém com dois termos que contém as variáveis de sinais negativos e um positivo.

Os participantes P2 e P3 já haviam constatado na análise da representação simbólica do hiperboloide de uma folha que, caso dois sinais fossem negativos e um positivo em

representações simbólicas da forma da equação (1), se trataria de um hiperboloide de duas folhas. Assim, esses participantes responderam espontaneamente que se tratava de um hiperboloide de duas folhas. P1 apresentou dificuldade na realização dessa atividade, então perguntamos a P1 como podemos obter a seção plana dessa superfície por um plano paralelo a xoy .

Esclarecemos que, da mesma forma como foi proposto na questão anterior, precisamos identificar a seção plana obtida quando $z = 0$ na representação simbólica. Observamos que a dificuldade estava relacionada a uma confusão entre a proposta de alterar os sinais na equação (1) e o procedimento algébrico para analisar as seções planas. Isso pode ser observado na fala de P1 que, misturando a alteração do sinal da equação do hiperboloide de duas folhas com o procedimento algébrico para obtenção de suas seções planas, pergunta: “*Eu não sei se entendi aquela pergunta ali. Eu teria que ter dois coeficientes das variáveis negativos mas daí o outro seria zero?*”

Então, esclarecendo que dois coeficientes dos termos quadráticos são negativos e o outro positivo na equação dessa superfície, perguntamos qual seria a seção plana obtida pelo corte com o plano xoy . Em representações simbólicas da forma da equação (1), supondo que os termos que contém as variáveis x e z tivessem sinais negativos ($-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1$), P1 disse: “*Se eu tivesse avaliando no xoy , o meu z é zero. Daí eu tenho um positivo e um negativo e vai me dar uma hipérbole*”. E continua a análise considerando que no corte com o plano xoz , dois sinais seriam negativos, perguntando se nesse caso seria uma elipse. Então, solicitamos que P1 analisasse essa equação ($-\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$), quando o participante constata que essa equação não tem solução real.

Ao constatar que não existe seção plana com o corte com o plano xoz e que os cortes com os demais planos coordenados eram hipérbolas, P1 concluiu que se trata de um hiperboloide de duas folhas. Então, considerando que existe um intervalo de valores reais em que não existe seção plana com os planos $y = k$, perguntamos a P1 quais seriam as seções planas fora desse intervalo. P1 responde com segurança e objetividade: “*Vai ter um determinado momento, vai ser um ponto, depois vai ser uma elipse*”.

Então, P1 disse que no caso do hiperboloide de duas folhas, dois sinais são negativos, demonstrando compreensão a respeito da diferenciação entre os hiperboloides de uma e de duas folhas. Nessa oportunidade, perguntamos ao longo de qual dos eixos esse hiperboloide de duas folhas se desenvolve, ao que P1 responde: “*Do y né. [...] vai depender de quem for positivo*”. E, referindo-se ao caso do hiperboloide de uma folha, complementa: “*Vai ser o contrário da*

resposta anterior”. Então, P1 inseriu a equação do hiperboloide de duas folhas em y na janela de álgebra do GeoGebra 3D, obtendo a sua representação gráfica e observando que condizia com as suas conjecturas.

Na questão do item b foi proposta a inserção de uma equação nesses moldes (dois termos negativos e um positivo) na janela de álgebra do GeoGebra 3D, obtendo a representação gráfica de um hiperboloide de duas folhas. Ao obterem a representação gráfica de um hiperboloide de duas folhas, os participantes puderam confirmar suas conjecturas, finalizando a diferenciação entre hiperboloides de uma e de duas folhas.

Na questão do item c, propomos a diferenciação entre as representações gráficas dos hiperboloides de duas folhas padrão, considerando as suas possíveis posições no sistema cartesiano. Com base no eixo que contém os centros das seções planas elípticas, os participantes foram convidados a identificar as formas distintas essa quádrlica pode estar posicionada no sistema cartesiano.

Na primeira aplicação com P1, essa questão solicitava a investigação das possíveis formas de escrever essa equação, com a obtenção das representações gráficas. O participante, mobilizando esquemas conceituais, identificou três possibilidades, registrando a seguinte resposta: “ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1$; $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1$; $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1$ ”. Nas aplicações seguintes, as análises das possibilidades para as representações simbólicas e gráficas foram realizadas separadamente, entendendo que contribuiria mais para a correlação entre esses registros de representação.

Então, na questão do item c, os participantes P2 e P3 analisam as possíveis posições de um hiperboloide de duas folhas no sistema cartesiano. Diferenciando as representações gráficas dos hiperboloides de duas folhas quanto à posição no sistema cartesiano, eles registram as seguintes respostas:

P2: Podemos posicionar um hiperboloide de duas folhas de 3 formas diferentes. A variável de valor positivo é quem define onde o ponto que fica no centro da elipse vai estar, ou seja, em qual eixo coordenado, as elipses irão se desenvolver com a equação. Pode se desenvolver em x , y ou z .

P3: há 3 eixos, então 3 formas.

E na questão do item d, propomos a diferenciação entre as representações simbólicas dos hiperboloides de duas folhas, através da identificação das três possibilidades para escrever a equação de um hiperboloide de duas folhas. Os participantes registram as seguintes respostas:

P2: 3 formas, pois como uma obrigatoriamente deve ser positiva, no momento que isso acontecer, as outras duas serão negativas. Como temos 3 variáveis com possibilidade de ser positivas isoladamente, temos 3 casos onde a combinação

das outras duas será negativa. São eles: $(x, -y, -z)$; $(-x, +y, -z)$; $(-x, -y, +z)$.

P3: 3 formas, de forma que um dos coeficientes de ou x , y ou z ser negativo.

Entendemos que houve um engano na resposta de P3, quando ele escreve que um dos coeficientes é negativo, em lugar de positivo. Isso pode ser observado na resposta no item e apresentada a seguir. E, relacionando os casos possíveis para as representações gráficas com os das representações simbólicas, os participantes correlacionam esses registros de representação. Os participantes constataram que o sinal diferente determina o eixo ao longo do qual o hiperboloide de duas folhas se desenvolve.

Para fechar a atividade 2, na questão do item e foi proposta uma discussão para a constituição das representações em língua natural específicas dos hiperboloides de duas folhas. A partir dessa conversa para propor as denominações dessas quádras, os participantes correlacionaram os registros de representação gráficos e simbólicos com os registros em língua natural. As propostas apresentadas pelos participantes foram:

P1: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1$, neste caso: hiperboloide de duas folhas ao longo de ox , quando somente o coeficiente da variável x for positivo. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1$, neste caso: hiperboloide de duas folhas ao longo de oy , quando somente o coeficiente da variável y for positivo. $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1$, neste caso: hiperboloide de duas folhas ao longo de oz , quando somente o coeficiente da variável z for positivo.

P2: Hiperboloide de duas folhas em x ; Hiperboloide de duas folhas em y ; Hiperboloide de duas folhas em z .

P3: Hiperboloide de duas folhas de eixo central x , no caso de x positivo.

Embora o participante P3 não tenha escrito exatamente o que foi pedido, ele e os demais participantes compreenderam e correlacionaram os registros de representação gráfico, simbólico e em língua natural dos hiperboloides de duas folhas. No fechamento dessa discussão acerca das representações em língua natural específicas, propomos as obtidas nos estudos de Silva (2018): hiperboloide de duas folhas em x (y ou z), quando as intersecções por planos paralelos a yoz (xoz ou xoy) são elipses.

5.1.5.3 ATIVIDADE 3

A atividade 3 propôs a identificação das outras possibilidades para a representação simbólica $\pm \frac{x^2}{4} \pm \frac{y^2}{8} \pm \frac{z^2}{2} = 1$. Na atividade 1 e 2, foram propostas as variações dos sinais dos termos que contém as variáveis, considerando um positivo e dois negativos e um negativo e

dois positivos, respectivamente. A ideia aqui é esgotar as possibilidades de variação do sinal dos coeficientes em equação dessa forma, realizando a interpretação geométrica.

Assim, nas questões dos itens a e b propomos a análise das equações em que todos os sinais dos coeficientes das variáveis quadráticas fossem positivos ou negativos, respectivamente. Os participantes, conjecturando a respeito dos lugares geométricos das referidas equações, respondem:

P1: (a) Se todos os coeficientes das variáveis têm sinais positivos tem-se um elipsoide.
(b) E se todos os coeficientes das variáveis têm sinais negativos não existe um lugar geométrico.

P2: (a) Elipsoide; (b) Quando não é possível resolver a equação, não existe representação espacial.

P3: (a) é um elipsoide. (b) não existe.

O participante P3 mobilizou instantaneamente esquemas conceituais, registrando as suas respostas e passando para as questões seguintes. O participante P1, analisando o caso em que todos os sinais eram positivos, disse: “Quando tudo era positivo não era uma elipse [...] um elipsoide?” E, considerando o caso em que todos os sinais eram negativos, disse: “E quando todos forem negativos é a mesma coisa né”.

Então, propomos que P1 escrevesse a equação em que todos os sinais, com exceção do termo independente, fossem negativos. A Figura 80a mostra os registros escritos do participante P1. O participante P1 observou a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = -1$ e disse: “Isso aqui nunca vai poder ser -1 né”. E a seguir, perguntando sobre o lugar geométrico dos pontos que satisfazem essa equação, P1 complementou: “Isso aqui não existe”.

Figura 80 – Interpretação geométrica da representação simbólica de uma quádrlica por P1 e P2.

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = -1$$

∄ lugar geométrico
nenhum ponto

(a) Registros escritos de P1.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = -1$$

(b) Registros escritos de P2.

Fonte: Dados da pesquisa.

O participante P2 iniciou conjecturando que a equação que tem todos os termos positivos ($\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1$) era a representação simbólica de um esferoide. Argumentando que

as intersecções com os planos coordenados eram elípticas, P2 corrigiu a sua resposta, dizendo que se tratava de um elipsoide. Então, perguntamos o que aconteceria se todos os sinais (exceto o do termo independente) fossem negativos.

P2 escreveu a equação e, analisando-a disse: “*Se forem todos negativos vai ser um ponto*” (Figura 80b). Nessa ocasião, pedimos que P1 reescrevesse a equação, multiplicando-a por -1. Obtendo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = -1$, pedimos para que P2 analisasse os sinais da soma na parte esquerda, quando P2 disse: “*Não pode dar negativo*”. Conjecturando novamente a respeito da interpretação geométrica dessa equação, P2 refuta a sua hipótese anterior, dizendo: “*O ponto é quando é zero*”.

Nessa fala, P2 referiu-se à equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 0$, que tem solução (0,0,0). Assim, P2 compreendeu que não há lugar geométrico porque a equação não tem solução. A questão do item c propôs que as respostas aos itens a e b fossem verificadas por meio da obtenção das representações gráficas de equações como, por exemplo, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1$ e $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1$. Ao obter as representações gráficas dessas equações, os participantes confirmaram suas conjecturas relacionando essas representações simbólicas com suas respectivas representações gráficas.

Sendo assim, com a atividade 3 encerramos a análise das possibilidades para as representações simbólicas de equações que têm as três variáveis de grau 2. Isso proporcionou aos participantes a diferenciação entre as quádricas representadas por essas equações, incluindo os elipsoides que foram trabalhados na SEAI anterior.

5.1.5.4 ATIVIDADE 4

As questões propostas na atividade 4 levaram os participantes à descoberta e diferenciação das representações gráficas e simbólicas dos seis casos de paraboloides elípticos. Considerando a posição no plano cartesiano, os participantes identificaram seis possibilidades para as representações gráficas e seis para as simbólicas, relacionando-as.

A partir da correlação entre as representações gráficas e simbólicas desses seis casos, foram estabelecidas as representações em língua natural específicas: parabolóide elíptico em ox_+ (oy_+ , oz_+ , ox_- , oy_- ou oz_-) quando se desenvolve ao longo do semieixo ox_+ (oy_+ , oz_+ , ox_- , oy_- ou oz_-).

Assim, na questão do item a dessa atividade propomos uma antecipação quando, antes de iniciar qualquer tipo de análise, os participantes foram instigados a identificar a quádriga representada pela equação (2), de um parabolóide elíptico em oz_+ . Analisando sua representação simbólica ($\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = z$), os participantes registraram as seguintes respostas:

P1: Um parabolóide elíptico.

P2: Parabolóide elíptico, porque quando interceptamos por um plano paralelo ao xoy , temos a representação de uma elipse, para todo k positivo. Quando interceptamos por um plano paralelo ao yoz e xoz , teremos a representação de uma parábola.

P3: parabolóide elíptico, pois dependendo do valor de z , se positivo temos elipses, se negativo não temos figura. Também, se ou x ou y igual a zero temos uma equação de parábola.

No entanto, entendemos que essas respostas não são suficientes para mostrar que houve uma construção de conhecimento por parte dos participantes, uma vez que pode ter ocorrido um fazer sem compreender. Consideramos necessária a análise das condutas cognitivas dos participantes por meio da observação do caminho percorrido para chegar nesses resultados. Envolvendo tratamentos algébricos e interpretações geométricas das representações simbólicas, esse processo pode retratar os esquemas conceituais já constituídos pelos participantes e os que foram desenvolvidos por meio dessa proposta.

O participante P1 iniciou analisando a representação simbólica da seção plana obtida pela intersecção com o plano xoy , conjecturando que se $z = 0$ a seção plana seria uma elipse. Confirmando que a parte esquerda dessa equação apresenta as características da representação simbólica de uma elipse, perguntamos a P1 como teria que ser a parte direita dessa equação para representar essa cônica. O participante P1 rapidamente mobilizou esquemas conceituais, respondendo que teria que ser 1.

Então, perguntamos o que essa equação ($\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 0$) representaria, ao que P1 respondeu: “*Uma circunferência? [...] Não, eu acho que é um ponto*”. Não apresentando argumentos para justificar suas conjecturas, sugerimos que P1 obtivesse a solução da equação. Escrevendo e observando essa equação, P1 antecipou: “*Não dá nada porque eu vou ter uma raiz quadrada negativa é isso né*”. E resolvendo a equação, P1 obteve $x^2 = -\sqrt{-\frac{y^2}{2}}$, dizendo que só: “*Tem solução nos imaginários*” (Figura 81a).

E, ao dizer ao participante que essa equação possuía uma solução real, antes mesmo de fazer alguma pergunta, P1 complementou: “*Que é quando todo mundo for zero. Vou ter só um pontinho então. A única solução é zero. Tá então é um ponto*”.

Figura 81 – Tratamentos algébricos para identificação das seções planas de um parabolóide elíptico por P1.

(a)

(b)

(c)

Fonte: Dados da pesquisa.

No diálogo a seguir, seguimos na análise da equação para valores de z diferentes de zero:

Pesquisadora: O que aconteceria se z fosse diferente de zero?

Participante P1: Vai ter alguma coisa.

Pesquisadora: E o que que vai ser essa coisa se for diferente zero?

Participante P1: Uma elipse.

Pesquisadora: Mas é elipse para todos os valores de z diferentes de zero, positivos ou negativos?

Participante P1: Se ele for negativo, eu acho que se eu for resolver, não daria né.

Então, para analisar o caso em que z é negativo, P1 escreveu a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = -4$ e perguntou se poderia trocar de lado os termos da equação. Propondo que analisasse a equação na forma em que se encontrava, P1 demonstrou compreensão de que essa equação não tem solução quando disse: “Quando que a soma de duas coisas positivas vai dar uma coisa negativa né?”. Mas, instigado a compreender como esse resultado apareceria na forma algébrica, o participante P1 realizou os tratamentos sobre essa equação, obtendo $x^2 = -\sqrt{-16 - \frac{y^2}{2}}$ (Figura 81b).

A seguir, apresentamos o diálogo em que podemos ver que P1 demonstra compreensão na interpretação geométrica dessa equação:

Pesquisadora: Na situação em que o termo independente era nulo ($x^2 = -\sqrt{-\frac{y^2}{2}}$), ainda tínhamos uma solução. Por que nesse caso ($x^2 = -\sqrt{\frac{-32 - y^2}{2}}$) não tem solução?

Participante P1: Porque independente do valor que eu colocar aqui (valor de y), eu ainda vou ter esse -32 aqui.

Pesquisadora: Então, temos um ponto para $z = 0$, não há lugar geométrico para $z < 0$ e quando $z > 0$?

Participante P1: Eu tenho uma elipse né.

A seguir, propomos a análise das seções planas obtidas por cortes com planos paralelos a xoz e $yozy$, quando P1 pegou o modelo impresso em 3D do parabolóide elíptico e disse: “Podemos fazer isso, mas pela análise que não existe, tem que ser essa aqui né”. Insistindo na pergunta sobre as seções planas obtidas por cortes com planos paralelos a xoz e $yozy$, utilizando o modelo impresso em 3D do parabolóide elíptico, P1 disse: “Vai ser uma parábola né”.

Então, pedimos ao participante para identificar essas seções planas algebricamente. A Figura 81c mostra os tratamentos algébricos efetuados por P1, que conclui que são parábolas porque as equações têm um termo quadrático e outro linear. Com isso, vimos que o participante P1 reconheceu a representação simbólica do parabolóide elíptico por meio das suas seções planas, relacionando com a sua representação gráfica. O participante apoiou-se no modelo impresso em 3D para estabelecer essa correspondência, mas na questão seguinte (item b) obtendo a sua representação gráfica no GeoGebra.

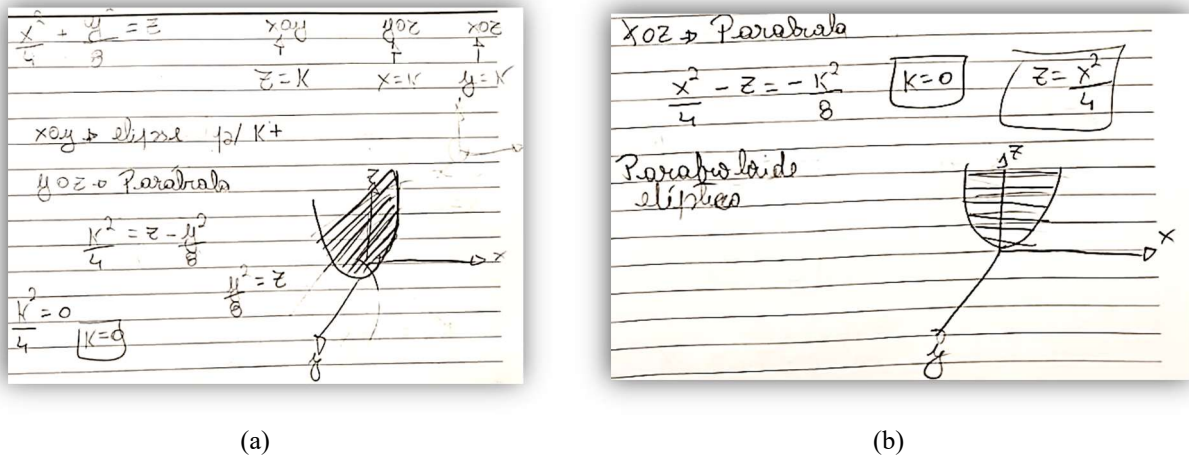
O participante P2 escreveu a equação da seção plana obtida pela intersecção do parabolóide elíptico da equação (2), $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = z$, realizando os tratamentos algébricos para obter as intersecções com os planos paralelos aos planos coordenados. $z = k$. Na Figura 82a, P2 registrou que as seções planas obtidas por cortes com planos paralelos a xoy é uma elipse. Então, perguntamos se é para todo k , ao que P2 responde: “Para todo k , menos para zero. Para zero é um ponto”.

Então, perguntamos: “E para k negativo?”, ao que P2 respondeu: “Para k negativo eu não vou ter nada”. E P2 passa a analisar as seções planas obtidas por cortes com planos paralelos a $yozy$, antecipando: “Agora eu tô olhando o $yozy$, mas eu acho que é uma parábola. Agora eu preciso ver quando que ela vai ser, então eu igualei o x a k ” (Figura 82a). Substituindo x por k na equação (2) e realizando os tratamentos algébricos, P2 obteve $\frac{k^2}{4} = z - \frac{y^2}{8}$. Falando do termo que contém k , P2 disse: “Isso aqui vai ser sempre igual a zero [...] aí isso é uma parábola. Então, para cada valor de z eu vou ter dois valores de y ” e desenha essa cônica (Figura 82a).

Analisando outras seções planas, obtidas por cortes com planos paralelos a xoz , P2 antecipou: “Em xoz eu acho que vai ser a mesma coisa, só vai ser em torno do eixo x . Deixa eu ver para ter certeza”. Então, P2 realizou os tratamentos algébricos sobre a equação (2) do

parabolóide elíptico, obtendo $\frac{x^2}{4} - z = \frac{k^2}{8}$ (Figura 82 b). Fazendo $k = 0$, P2 escreve a equação $z = \frac{x^2}{4}$, dizendo: “Vai ser a mesma coisa, só que agora para cada valor de z nós vamos ter dois valores de x ”.

Figura 82 - Tratamentos algébricos para identificação das seções planas de um parabolóide elíptico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

E desenhando essa cônica, P2 disse: “Ai que difícil desenhar isso no papel!” (Figura 82 b). Então, concluindo o procedimento algébrico para reconhecimento da quádrlica por meio das suas seções planas, P2 disse: “Então, agora eu tenho um parabolóide. Esse é o parabolóide elíptico porque ele tem uma elipse”. Assim, podemos observar nas condutas cognitivas de P2, que o participante realiza os procedimentos algébricos necessários para estabelecer a identificação da superfície a partir das suas seções planas. E, quando montou o quebra-cabeças das fatias bidimensionais para dizer que se trata de um parabolóide elíptico, P2 apoiou-se numa imagem mental dessa superfície, relacionando as representações simbólica e gráfica.

O participante P3 observou a equação (2) do parabolóide elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = z$ e registrou ‘parabolóide’ na sua resposta. Mobilizando esquemas conceituais para definir se é elíptico ou hiperbólico, ‘pensando alto’ P3 disse: “Quem são eles? Parabolóide hiperbólico e elíptico né”. Então, P3 completou a sua resposta com a palavra ‘elíptico’, quando perguntamos porque parabolóide e porque elíptico. P3 argumenta: “Primeiro a questão do z , que vai definir se tem elipses né. E o z só pode ser positivo”.

Continuando sua argumentação, P3 antecipa a diferenciação entre as representações simbólicas dos parabolóides quando, referindo-se ao coeficiente do termo que contém a variável y disse: “Mas se fosse com sinal negativo aqui, eu teria hiperboles. E daí meu z vai poder ser

qualquer né, porque meu z vai poder ser negativo também”. Os argumentos de P3 justificam apenas a escolha do segundo nome desta quádrlica (elíptico). Então, perguntamos novamente a relação que P3 estabelecia entre o primeiro nome (paraboloide) e a representação simbólica desta quádrlica. P3 completou a sua argumentação, respondendo: “Se eu tenho x ou y nulo, eu tenho equação de parábola, né”.

Então, ao propor a obtenção da representação gráfica dessa equação no item b, os participantes confirmaram suas hipóteses, verificando que se trata de um paraboloide elíptico. A seguir, na questão do item c, respondendo à pergunta sobre o que aconteceria se o coeficiente da variável z fosse negativo e os demais positivos na equação (2), os participantes responderam:

P1: Quando o coeficiente da variável z for negativo, a parábola [paraboloide]³⁷ tem concavidade voltada para baixo.

P2: A concavidade do paraboloide estaria voltada para baixo, e ele se desenvolveria para valor de Z negativos, sendo sua origem no 0. No plano xoy, quando o coeficiente de Z é negativo, a elipse só vai existir para valores de k negativos. E nos planos yoz e xoz, a representação da parábola passa a ter a concavidade apontando para baixo.

P3: Teríamos um paraboloide voltado para baixo.

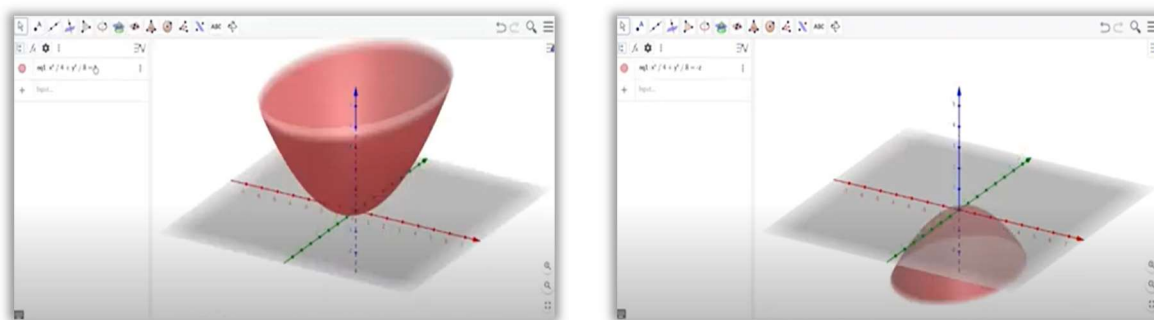
Vale destacar que P1 estava referindo-se ao paraboloide quando escreveu parábola por engano. Analisando as condutas cognitivas dos participantes por meio das gravações, observamos que P1 inicia conjecturando que não há superfície. Então, P1 disse “Não foi isso que a gente fez ali”, confundindo a proposta da questão de trocar o sinal do coeficiente de z com analisar as seções planas obtidas por cortes com planos $z = k$, para $k < 0$. Esclarecendo a proposta dessa questão, P1 responde: “A concavidade dela vai estar para cima ou para baixo. Positivo, ela vai estar no sentido positivo do z. Negativo, ela vai estar no sentido negativo do z”.

O participante P2, observando a equação (2) do paraboloide elíptico ($\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = z$), disse que: “Se eu trocasse o sinal do coeficiente z, eu acho que o paraboloide ia para baixo”. E continuando a análise das seções planas na equação dessa quádrlica, disse: “No xoy, eu vou ter uma elipse só para k negativo. Se o meu z é negativo, eu vou ter uma elipse só para k negativo, então para k positivo eu não tenho elipse”. E, referindo-se às seções planas obtidas por cortes com os planos xoz e yoz, P2 disse: “E se o meu z é negativo, a minha parábola fica com concavidade voltada para baixo nos dois planos”. Referindo-se à interpretação geométrica das parábolas com concavidades voltadas para baixo, P2 considera que: “Foi bom ter desenhado”, o que mostra que o mesmo se apoiou nas representações gráficas 2D-estáticas.

³⁷ O participante P1 refere-se ao paraboloide quando registra por engano parábola.

Com P3 não alongamos muito as intervenções para investigar os esquemas conceituais porque o participante já havia demonstrado compreensão no reconhecimento das seções planas. Assim, P3 reconhece que ao trocar o sinal do coeficiente de z na equação (2), essa torna-se a representação simbólica de um parabolóide elíptico com concavidade voltada para baixo. A Figura 83a mostra o momento em que P3 inseriu a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = z$ do parabolóide elíptico em oz_+ e, alterando o sinal do coeficiente da variável de 1º grau, obteve a representação gráfica do parabolóide elíptico em oz_- (Figura 83b).

Figura 83 - Representações gráficas de dois dos seis casos de parabolóide elíptico por P2.



(a) Parabolóide elíptico em oz_+

(b) Parabolóide elíptico em oz_-

Fonte: Dados da pesquisa.

Com isso, constatamos a compreensão de que, quando o coeficiente da variável z é negativo e os demais positivos em representações simbólicas da forma da equação (2), o parabolóide elíptico tem a concavidade voltada para baixo (semieixo oz_-). A seguir, as questões dos itens d e e solicitaram o reconhecimento dos demais casos de parabolóides elípticos nas representações gráficas e simbólicas, respectivamente.

Em relação às representações gráficas, os participantes precisaram identificar as possíveis posições dessa quádrlica no sistema cartesiano (item d). Nas representações simbólicas, os participantes tiveram que verificar de quantas formas distintas é possível escrever representações simbólicas na forma da equação (2) alterando a posição das variáveis e os coeficientes da variável de 1º grau (item e). Nesta última questão (item e), os participantes ainda deveriam obter os gráficos dos diferentes casos, relacionando-os com as respostas da questão anterior (item d).

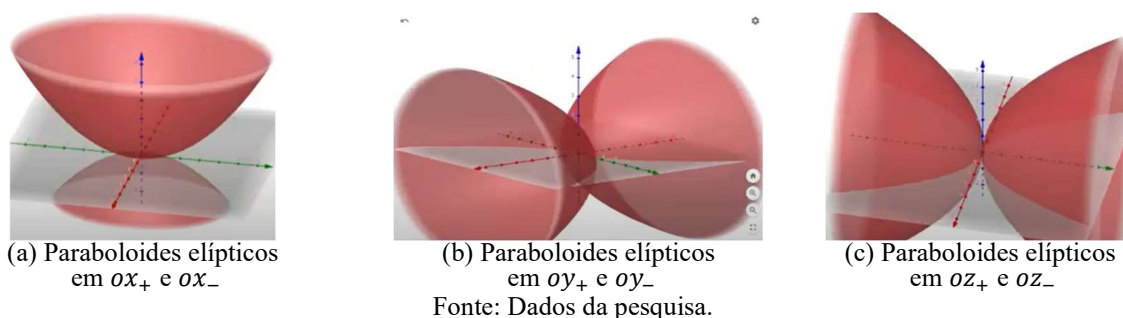
Ao iniciar a análise das possibilidades para a posição do parabolóide elíptico no sistema cartesiano, P2 disse: “São três eixos, eu tenho seis possibilidades. Eu tenho duas possibilidades para cada eixo, porque ela pode ser com concavidade voltada para cima ou para baixo e ela pode se desenvolver ao longo dos três eixos”. E, antes que fizéssemos a pergunta, P2 relacionou

as representações gráficas e simbólicas dizendo: “E o que define qual eixo que ela se desenvolve é o eixo que não tá ao quadrado³⁸. E o que define se é para cima ou para baixo é o sinal do valor do coeficiente que não está ao quadrado”.

A seguir, P2 responde à questão do item d, registrando suas conjecturas a respeito das representações gráficas: “Temos 6 possibilidades. Temos 3 eixos que a superfície pode se desenvolver. E dentro desses 3 eixos, ela pode se desenvolver no sentido do semieixo positivo, ou negativo. Logo, serão 6 possibilidades”. E, respondendo à questão do item e, deu exemplos de equações para as seis possibilidades de representar algebricamente um parabolóide elíptico, considerando a posição no sistema cartesiano: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = -z$; $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{8} = y$; $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{8} = -y$; $\frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{8} = x$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = z$; $\frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{8} = -x$.

A Figura 84 mostra o momento em que P2 inseriu essas seis equações de parabolóides elípticos na janela de álgebra do GeoGebra, confirmando suas conjecturas. Considerando a posição dessa quádrica no sistema cartesiano, P2 obteve as seis possibilidades de representações gráficas: parabolóide elíptico em ox_+ e ox_- (Figura 84a), parabolóide elíptico em oy_+ e oy_- (Figura 84b) e parabolóide elíptico em oz_+ e oz_- (Figura 84c).

Figura 84 – Representações gráficas dos seis casos de parabolóide elíptico por P2.



Analisando as possíveis posições de um parabolóide elíptico no sistema cartesiano, P3 registra que são seis possibilidades. E, quanto às possibilidades para as representações simbólicas, P3 disse: “Pode ser três variáveis de grau 1 e cada uma delas pode ser positiva ou negativa. Os coeficientes de x e y são sempre positivos”. Nessa oportunidade, P3 disse que: “Sendo os coeficientes das variáveis de grau 2 positivos, temos 3 possibilidades, xy , yz ou xz .”

³⁸ Nessa pesquisa, interessava saber qual a representação mental que os participantes constituíam das superfícies quádricas, que era externada por meio de uma comunicação verbal ou escrita sem o rigor da linguagem matemática. Um exemplo disso ocorre nessa oportunidade, em que o participante usou a expressão ‘eixo que não tá ao quadrado’ para referir-se à variável linear na equação da superfície.

Dentre cada uma dessas possibilidades temos que a variável de grau um pode ser positiva ou negativa”.

P3 quis verificar o que ocorre quando $z = 0$, fazendo a seguinte conjectura: “*Se $z=0$ vai dar uma reta né, duas retas*”. Então, propomos a análise da equação de um parabolóide elíptico quando $z = 0$. Observando que a equação apresenta uma soma de dois quadrados igual a zero, P3 disse, referindo-se ao vértice do parabolóide elíptico na sua representação gráfica: “*A soma de dois quadrados só pode ser zero... Ah, sim, é esse ponto*”.

A resposta final de P3 a essa questão ficou: “*Sendo os coeficientes das variáveis de grau 2 positivos, temos 3 possibilidades, xy , yz ou xz . Dentre cada uma dessas possibilidades temos que a variável de grau um pode ser positiva ou negativa. Se $z = 0$ temos o ponto de origem*”. Assim, podemos observar que P3 reconhece as seis possibilidades para as representações simbólicas de um parabolóide elíptico, considerando a posição no sistema cartesiano. Vemos também que o participante relaciona essas representações com as representações gráficas.

No caso de P1, que participou da primeira aplicação, a identificação dos demais casos de parabolóides elípticos nas suas representações simbólicas e gráficas foi solicitada na mesma questão. P1 registrou a seguinte resposta: “ *$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = \pm z$, um parabolóide elíptico que se desenvolve ao longo do eixo z ; $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{8} = \pm y$, um parabolóide elíptico que se desenvolve ao longo do eixo y ; $\frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{8} = \pm x$, um parabolóide elíptico que se desenvolve ao longo do eixo x* ”.

Porém, antes de chegar nesse resultado, P1 iniciou apresentando uma dificuldade para identificar as possibilidades para a equação de um parabolóide elíptico. Primeiro observamos uma confusão entre o sinal do coeficiente de z com os valores que essa variável pode assumir, quando P1 disse: “*Agora eu buguei! A gente não tinha discutido que quando todo esse lado for positivo não tem como dar algo negativo aqui?*” Então, esclarecemos que quando o coeficiente de z é positivo, essa variável pode assumir valores positivos ou nulo. E, ao contrário, para coeficientes de z negativos, essa variável pode assumir valores negativos ou nulo.

Então, o participante P1 parecia ter ultrapassado esse obstáculo conceitual, diferenciando o coeficiente da variável do valor que esta pode assumir quando, falando do sinal do termo linear, disse: “*Esse menos aqui é do meu coeficiente*”. Porém, o mesmo obstáculo conceitual surge em outra situação, podendo ser observado na seguinte fala: “*Então, vai ser nas outras situações, quando o coeficiente do x for negativo? Mas o coeficiente dele, sempre que eu elevar ao quadrado, vai dar positivo*”. Procurando obter as outras possibilidades para a equação de

um parabolóide elíptico, P1 confunde novamente o valor do coeficiente da variável com o valor que esta pode assumir.

Diante disso, propomos a análise das representações gráficas dos dois casos que já vimos de parabolóides elípticos:

Pesquisadora: Quais as posições dos parabolóides elípticos vistos nas questões anteriores?

Participante P1: Ele tá no eixo z, [...] A primeira em z+ e a segunda em z-.

Pesquisadora: E quais as outras possibilidades para a posição de um parabolóide elíptico no sistema cartesiano?

Participante P1: O parabolóide elíptico pode se desenvolver para o x+ e x- e para o y+ e y-.

Pesquisadora: Como você acha que seriam as equações desses parabolóides elípticos?

Participante P1: Eu vou substituir o x pelo z e o z pelo x e depois o y pelo z e o z pelo y.

Então, afirmando que são seis possibilidades, P1 registrou a seguinte resposta: “ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = \pm z$, um parabolóide elíptico que se desenvolve ao longo do eixo z; $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{8} = \pm y$, um parabolóide elíptico que se desenvolve ao longo do eixo y; $\frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{8} = \pm x$, um parabolóide elíptico que se desenvolve ao longo do eixo x”. Foi possível observar que, ultrapassados alguns obstáculos, P1 consegue reconhecer e correlacionar as representações simbólicas e gráficas dos seis casos de parabolóide elíptico.

Como vimos, P1 precisou apoiar-se nas representações gráficas para a análise das possibilidades para a equação dessa quádrlica. Esse foi o motivo da alteração dessa questão na aplicação com os participantes P2 e P3. Entendemos que analisar as representações gráficas antes das simbólicas favorece a descoberta e correlação entre as possibilidades para estas representações.

Por fim, a questão do item f propôs uma discussão para a denominação dos seis casos de parabolóide elíptico, de forma que fosse possível diferenciá-los no registro de representação em língua natural. Analisando as características das representações gráficas dessas quádrlicas, os participantes registraram as seguintes propostas:

P1: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = +z$, um parabolóide elíptico em oz+; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = -z$, um parabolóide elíptico em oz-; $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{8} = +y$, um parabolóide elíptico em oy+; $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{8} = -y$, um parabolóide elíptico em oy-; $\frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{8} = +x$, um parabolóide elíptico em ox+; $\frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{8} = -x$, um parabolóide elíptico em ox-.

P2: Parabolóide elíptico em oz positivo; parabolóide elíptico em oz negativo; parabolóide elíptico em ox positivo; parabolóide elíptico em ox negativo; parabolóide elíptico em oy positivo; parabolóide elíptico em oy negativo.

P3: Parabolóide elíptico de eixo central $\pm z$, em caso de z ser a variável de grau 1.

Ao final da discussão, apresentamos a proposta de Silva (2018) para as representações em língua natural dos seis casos de parabolóides hiperbólicos. Nesse caso, a quádrlica com seções planas elípticas com centro sobre o semieixo oz_+ , de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = z$, tem representação em língua natural específica ‘parabolóide elíptico em oz_+ ’. Assim, os participantes estabeleceram uma correspondência entre as representações em língua natural e gráficas, sendo que estas últimas já haviam sido relacionadas às simbólicas.

Com isso, fechamos as correlações entre os registros de representação gráfico, simbólico e em língua natural do parabolóide hiperbólico, onde os participantes puderam (re)constituir esses esquemas conceituais. Através da desconstrução dimensional, que possibilitou a identificação das representações simbólicas dos parabolóides elípticos por meio de suas fatias bidimensionais, os participantes puderam enriquecer as suas representações mentais dessas superfícies.

5.1.5.5 ATIVIDADE 5

A atividade 5 foi proposta com a finalidade de correlacionar os registros de representação simbólico, gráfico e em língua natural dos parabolóides hiperbólicos. As questões começam propondo a distinção entre os parabolóides elíptico e hiperbólico. Depois, propomos a descoberta das seis maneiras de escrever sua equação e, na sequência, das seis possibilidades de posicionar um parabolóide hiperbólico no sistema cartesiano. Em seguida, os participantes estabelecem a correspondência entre as representações gráficas e simbólicas para, por fim, relacionar com as representações em língua natural específica.

Como nas atividades anteriores, a questão do item a dessa atividade iniciou propondo uma antecipação. Considerando ainda a equação (2), propomos uma mudança de sinal do coeficiente do termo que contém a variável y , ficando com a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ de um parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz . Os participantes, conjecturando acerca das seções planas dessa superfície, registraram as seguintes respostas:

P1: Tem-se um parabolóide hiperbólico.

P2: Parabolóide hiperbólico. Porque temos a representação de uma hipérbole com eixo real em x , para $z=k$ com valores de k positivos. Temos a representação de

uma hipérbole com eixo real em y , para $z=k$ com valores de k negativos. Temos a representação de uma parábola em oz negativo, quando $x=k$. E Temos a representação de uma parábola em oz positivo, quando $y=k$.

P3: Paraboloide hiperbólico, pois indiferente do sinal da variável de grau 1, temos sempre uma hipérbole.

O participante P1 iniciou analisando as representações simbólicas das seções planas obtidas por cortes com planos paralelos a xoy , substituindo $z = k$ na equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ do parabolóide hiperbólico. Na tentativa de ‘resolver a equação’, P1 experimentou mover termos na representação simbólica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = k$. Auxiliando P1 na mobilização de esquemas conceituais relativos ao procedimento algébrico, solicitamos que o participante realizasse a interpretação geométrica da equação na forma como essa se encontra. Então, realizamos algumas perguntas:

Pesquisadora: Qual seção plana é obtida quando z é uma constante positiva?

Participante P1: Eu imagino que seja uma hipérbole.

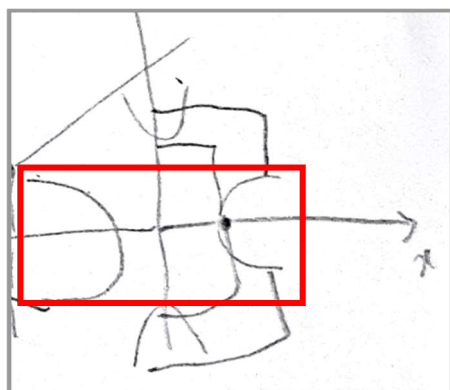
Pesquisadora: E quando z for negativo?

Participante P1: Também vai ser uma hipérbole.

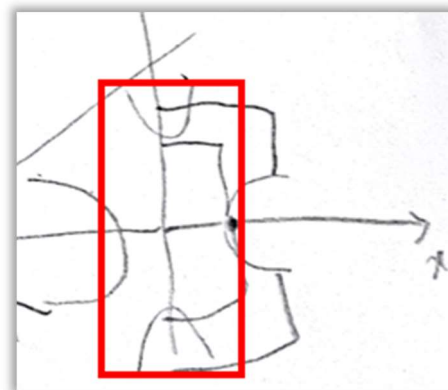
Pesquisadora: E o que muda quando z assume valores positivos ou negativos?

Diante da dificuldade na mobilização de esquemas conceituais relativos ao conceito de hipérbole, perguntamos a P1: “Lembra dos eixos real e imaginário de uma hipérbole? O eixo real é o que contém os seus vértices e o imaginário que, contendo o seu centro, não a intercepta”. Então, o participante P1 desenhou em papel um esboço de duas hipérbolas no mesmo sistema cartesiano (Figura 85).

Figura 85 – Representações 2D-estáticas dos eixos real e imaginário de duas hipérbolas por P1.



(a) Destaque na hipérbole com eixo real sobre o eixo dos x e imaginário sobre o eixo dos y .



(b) Destaque na hipérbole com eixo real sobre o eixo dos y e imaginário sobre o eixo dos x .

Fonte: Dados da pesquisa.

O participante mostra que a primeira (Figura 85a) tem eixo real sobre o eixo dos x e imaginário sobre o eixo dos y e a, ao contrário, a segunda (Figura 85b) eixo real sobre o eixo dos y e imaginário sobre o eixo dos x . A seguir, perguntamos como é possível identificar os eixos real e imaginário na representação simbólica da hipérbole, ao que P1 respondeu: “Se eu quiser com eixo real em y , meu y [coeficiente de y] vai ser positivo e meu x [coeficiente de x] vai ser negativo. Quando eu quero eixo real em x , o x é positivo e y negativo. É isso?”³⁹

Observando que P1 conseguiu correlacionar os registros de representação simbólico e gráfico, voltamos para a interpretação geométrica da equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = k$:

Pesquisadora: Para z positivo temos uma hipérbole com eixo real sobre x . E quando z for negativo?

Participante P1: Continua sendo em x .

Pesquisadora: Considere que na forma padrão o termo independente é igual a 1, ou seja, positivo.

Participante P1: É aquela situação em que não existe, então?

Então, propomos a análise da equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = k$ substituindo k por um valor positivo e, depois, negativo. Supondo que $k = 4$, escrevemos a equação e perguntamos qual seria o eixo real dessa hipérbole, ao que P1 respondeu que era o eixo dos x . Depois, escrevemos a equação fazendo $k = -4$ e perguntamos qual seria o eixo real, considerando a equação na forma canônica (coeficiente do termo independente igual a 1). Então, relacionando com a situação anterior em que o eixo real estava sobre o eixo dos x , P1 respondeu: “*Inverte*”.

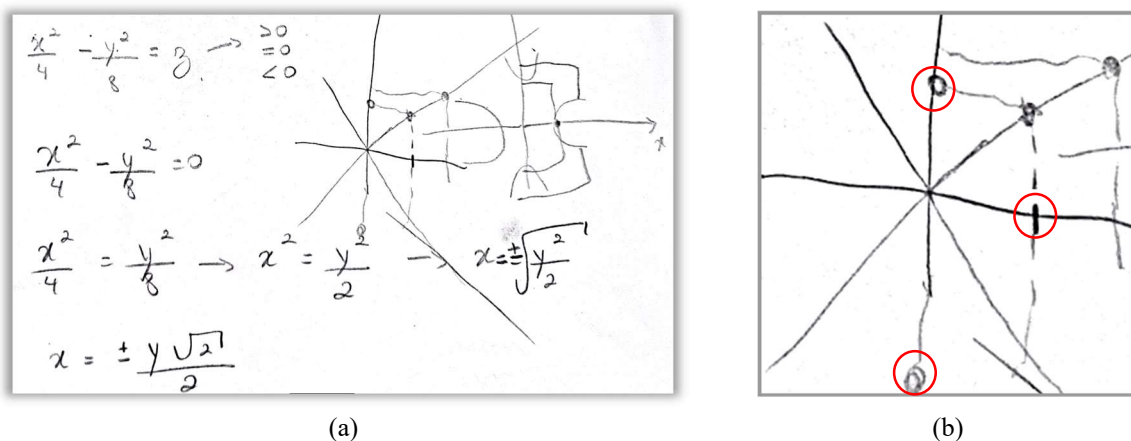
E, para fechar a análise das intersecções do parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ pelo plano xoy e paralelos a este, perguntamos quais seções planas seriam obtidas quando $z = 0$. Então, P1 efetuou o procedimento algébrico, obtendo as equações $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}y$ (Figura 86a). E, perguntando a P1 o que essa equação representa geometricamente, o participante respondeu: “*A cada x eu tenho dois valores de y , então eu tenho uma parábola*”.

Então, auxiliando P1 na mobilização dos esquemas conceituais relativos às características das representações simbólicas, dissemos: “*A equação da parábola tem um termo de grau 2 e outro de grau 1*”, o que levou o participante a observar que na equação $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}y$

³⁹ O participante referia-se ao coeficiente de y (coeficiente de x) quando usou a expressão ‘meu y ’ (‘meu x ’). Da mesma forma, quis dizer que o coeficiente de x é positivo (coeficiente de y é negativo) quando falou ‘ x é positivo’ (‘ y negativo’).

os dois termos são de 1º grau. Então, perguntamos novamente: “Então, que equação é essa aqui?”, ao que P1 respondeu: “Uma reta”.

Figura 86 – Tratamentos algébricos para identificação das seções planas de um parabolóide hiperbólico por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa oportunidade, dissemos que se tratam de duas equações, quando P1 relata: “Era isso que eu não estava entendendo. Um único x vai dar dois valores de y ”. E, desenhando e mostrando os pontos destacados com círculos vermelhos na Figura 86b, P1 complementou: “Vai dar um valor de y aqui, por exemplo, e outro aqui”. Nesse caso, entendemos que o obstáculo encontrado por P1 estava relacionado com essa característica das equações das duas retas concorrentes, que se assemelhava com a da parábola.

No entanto, em seguida P1 ultrapassa esse obstáculo conceitual, efetuando a interpretação geométrica. Foi possível observar isso quando P1 fez um esboço das retas concorrentes para mostrar o que estava compreendendo (Figura 86b). Apontando para as retas que formam ângulos agudo e obtuso com o eixo dos x , respectivamente, P1 conjecturou: “Mas então eu vou ter uma reta assim e outra assim”.

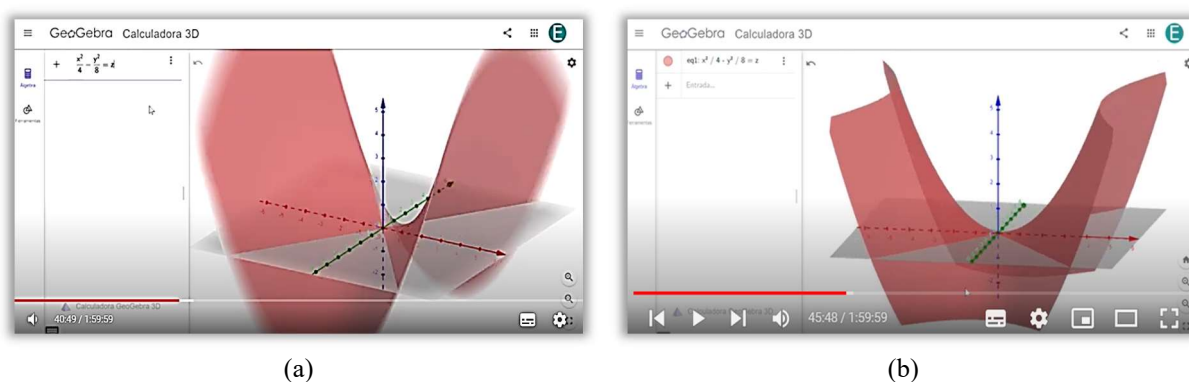
Também perguntamos ao participante P1 quais são as seções planas resultantes dos cortes do parabolóide hiperbólico com o plano xoz e paralelos a este. O participante observou a equação $\frac{x^2}{4} = z + \frac{k^2}{8}$ e disse que: “Quando tem uma variável com (grau) um e outra com dois eu tenho uma parábola, né”. Ao perguntarmos sobre os cortes com o plano xoz e paralelos a este, P1 observou a equação $\frac{y^2}{8} = -z + \frac{k^2}{4}$ e, relacionando com as seções planas parabólicas do caso em que $y = k$, respondeu que temos: “Exatamente a mesma coisa”.

Então, pedimos que o participante juntasse as fatias que compõe essa superfície para identificá-la. No entanto, P1 não conseguiu criar a representação mental do parabolóide hiperbólico a partir das suas seções planas. Diante disso, sugerimos a obtenção da representação

gráfica do parabolóide hiperbólico no GeoGebra, para a realização da correspondência no sentido contrário, do registro de representação gráfico para o simbólico. Então, antecipamos a utilização do procedimento informático, que estava proposto no item b dessa atividade, para a confirmação das conjecturas realizadas na questão do item a.

A Figura 87a mostra o momento em que P1 inseriu a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ na janela de álgebra, obtendo a representação gráfica do parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ . Antes de analisar as seções planas dessa quádrlica, sugerimos que P1 habilitasse a função ‘Usar clipping’, que limita a representação gráfica da superfície pelos lados de um cubo. A Figura 87b mostra o resultado depois do ajuste nas dimensões do cubo, o que já permite a observação das seções planas hiperbólicas.

Figura 87 – Parabolóide elíptico sem e com o recurso ‘Usar clipping’.



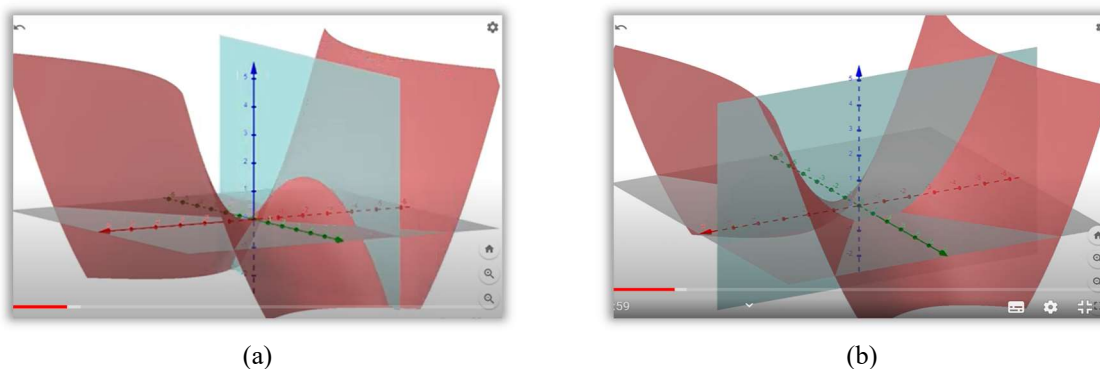
(a)

(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

Para a correlação entre os registros de representação simbólico e gráfico, propomos o procedimento informático para estabelecer as correspondências entre as representações gráficas e simbólicas das suas seções planas dessa superfície. P1 pôde observar que os cortes desse parabolóide hiperbólico com os planos $x = k$ são parábolas em planos paralelos a yoz , com concavidades voltadas para baixo (Figura 88a). E os cortes com os planos $y = k$ são parábolas em planos paralelos a xoz , com concavidades voltadas para cima (Figura 88b).

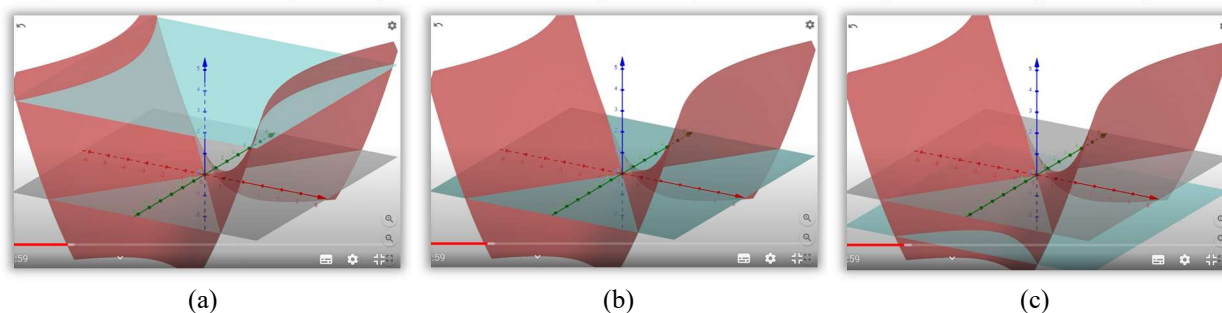
Figura 88 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas parabólicas de um parabolóide hiperbólico por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, perguntamos quais as seções planas dessa superfície quando interceptadas por planos paralelos a xoy . Então, inserindo a equação $z = k$ na janela de álgebra do GeoGebra, P1 moveu o controle deslizante, observando as seções planas. A Figura 89a mostra o momento em que P1 escolhe um valor positivo de k por meio do controle deslizante, dizendo: “*Aqui eu tenho uma hipérbole*”. E, perguntando qual o eixo real dessa hipérbole, P1 respondeu: “*O eixo vermelho é o x , né. Então, é sobre o eixo dos x* ”.

Figura 89 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas hiperbólicas de um parabolóide hiperbólico por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Fazendo $k = 0$ no controle deslizante, P1 seguiu relacionando as representações gráficas com as simbólicas, dizendo: “*E quando for exatamente zero, a gente tem as duas retas, né*” (Figura 89b). Por fim, P1 moveu o controle deslizante, alternando entre valores positivos e negativos de k , observando a mudança na concavidade das hipérbolas. Então, o participante escolheu um valor negativo para k e, referindo-se ao eixo real, P1 disse: “*Quando vem para cá é ao contrário, aqui é sobre o y* ” (Figura 89c).

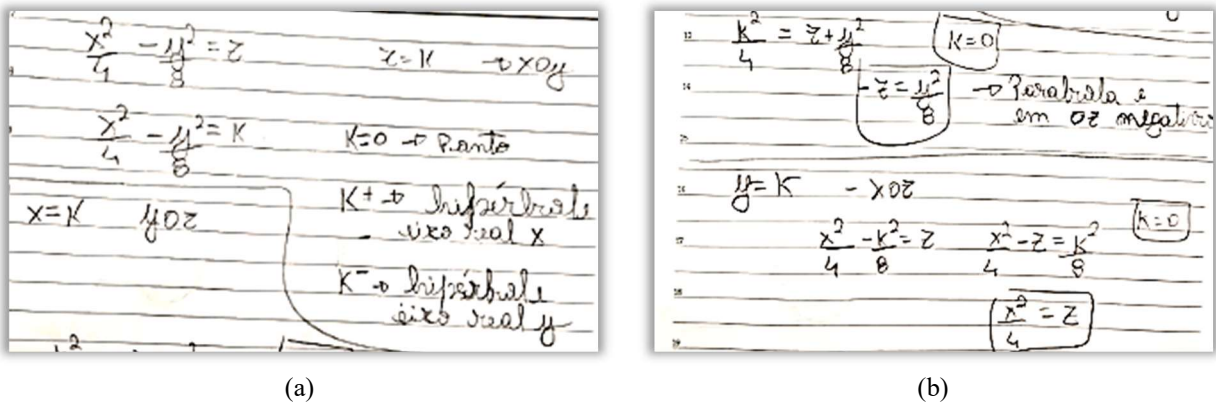
Com isso, observamos o participante P1 ultrapassar alguns obstáculos durante os tratamentos algébricos, identificando as seções planas do parabolóide hiperbólico. P1 não conseguiu criar a ‘imagem mental’ dessa quádrlica a partir da análise das representações simbólicas das suas seções planas. No entanto, efetuando tratamentos informáticos sobre a

representação gráfica dinâmica dessa quádrlica, foi possível ver que P1 correlacionou os registros de representação gráfico e simbólico. P1 também correlacionou esses registros com o registro de representação em língua natural.

O participante P2 iniciou realizando os tratamentos algébricos sobre a representação simbólica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ do parabolóide hiperbólico em oz_+ , para identificação das suas seções planas. Experimentando fazer os tratamentos algébricos apenas mentalmente, P2 conjecturou que: “Em z , eu sigo tendo as elipses para k positivo. Então, eu vou ter uma elipse no xoy ”. Sem interferir, deixamos P2 prosseguir na análise da representação simbólica da quádrlica.

P2 faz mais algumas conjecturas do mesmo tipo e, percebendo que precisava organizar melhor a análise, disse: “Eu tô tentando fazer de cabeça. Eu vou fazer no papel”. A Figura 90 mostra esses tratamentos algébricos realizados por P2 para a identificação das seções planas do parabolóide hiperbólico.

Figura 90 – Tratamentos algébricos para identificação das seções planas de um parabolóide hiperbólico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

P2 iniciou fazendo $z = k$, obtendo a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = k$, para identificar as seções planas resultantes da intersecção dessa superfície pelo plano xoy e planos paralelos a este. Conforme vemos na Figura 90a, P2 reconheceu as seções planas hiperbólicas, registrando que o eixo real tem a direção do eixo dos x para $k > 0$ e do eixo dos y para $k < 0$. Analisando a situação em que $k = 0$, P2 não reconheceu as retas concorrentes a partir da representação simbólica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 0$, considerando que se trata de um ponto.

Então, no final da Figura 90a e início da Figura 90b, podemos ver os tratamentos algébricos realizados por P2 para a identificação das seções planas resultantes da intersecção pelo plano yoz e paralelos a este. Fazendo $x = k$ na representação simbólica da superfície, P2

obteve a equação $\frac{k^2}{4} - z = \frac{y^2}{8}$. Considerando $k = 0$, P2 analisou a equação $-z = \frac{y^2}{8}$, conjecturando: “*Eu vou ter uma parábola em oz_- . E agora vamos para o xoz* ”.

E, fazendo $y = k$ na representação simbólica da quádrlica, obteve a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{k^2}{8} = z$. Fazendo $k = 0$ novamente, P2 obteve a equação $\frac{x^2}{4} = z$, conjecturando: “*Aí isso vai ser uma parábola em oz_+* ”. Tendo concluído a análise das seções planas que compõem a superfície para identificá-la, P2 experimenta montar o quebra-cabeças e, expressando surpresa disse: “*Então ... Que isso, tchê!*” E, conjecturando que se trata de um parabolóide hiperbólico, começou a registrar a sua resposta percebendo que precisaria justificar.

O participante P2 poderia basear a sua resposta no fato de que essa era a quádrlica que faltava, mas a questão solicitava uma justificativa para a sua resposta. P2 relatou que realmente considerou a hipótese de ser um parabolóide hiperbólico, mas pensou: “*Não, tu não vai me fazer enxergar a sela, né*”. E, mostrando que conseguiu construir a imagem mental dessa quádrlica, argumentou: “*Quando eu vi que invertia o eixo real, eu pensei que isso aqui era a sela, né. Eu calculei aqui para o $z=k$. Para k positivo eu vou ter uma hipérbole com eixo real em x e para k negativo eu vou ter uma hipérbole com eixo real em y* ”.

P2 complementou a sua argumentação, dizendo que lembrava de uma atividade com o parabolóide hiperbólico em outra SEAI, em que experimentou essa mudança do eixo real da hipérbole no GeoGebra. Com isso, mobilizando esquemas conceituais, P2 conseguiu criar a imagem mental do parabolóide hiperbólico a partir da sua representação simbólica. E, continuando a análise da representação simbólica dessa quádrlica, conjecturou: “*O zero é o ponto em que acontece a troca do eixo real. E aí eu botei que é um ponto aqui, mas eu não sei se é um ponto ou se é uma reta. Eu acho que é uma reta*”.

Retomando a interpretação geométrica da equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 0$, P2 mobilizou esquemas conceituais constituídos em outra SEAI, dizendo: “*É uma degenerada. E a degenerada da hipérbole são duas retas que se cruzam*”. Entendendo que P2 baseou essa resposta no registro de representação gráfico, perguntamos como identificar as retas concorrentes como seção plana do parabolóide hiperbólico com o plano xoy no registro de representação simbólico. Então, respondendo ao solicitado na questão do item b, P2 inseriu a representação simbólica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ de um parabolóide hiperbólico na janela de álgebra. Obtendo a sua representação gráfica, P2 mobilizou esquemas de uso para habilitar o recurso ‘Usar clipping’ e ajustar o gráfico da quádrlica.

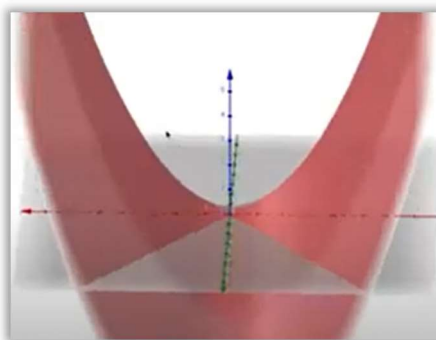
P2 pôde confirmar suas conjecturas quando obteve a representação gráfica desse parabolóide hiperbólico. Observamos que P2 mobilizou de forma cada vez mais espontânea seus esquemas conceituais, correlacionando as representações simbólica e gráfica desse parabolóide hiperbólico, e fez isso por meio da imagem mental que constituiu juntando as fatias bidimensionais dessa superfície. Por outro lado, ao considerar que essa superfície é um parabolóide hiperbólico, P2 correlacionou esses registros de representação com o registro em língua natural geral.

O participante P3 respondeu, na questão do item a, que a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ é de um parabolóide hiperbólico. Então, perguntamos a P3: “O que na equação te faz pensar que é um ‘parabolóide’ e ‘hiperbólico’?” O participante argumentou: “Eu tenho uma hipérbole dependendo do meu valor de z . Na verdade, eu sempre tenho uma hipérbole ali, indiferente do meu valor de z ”. E P3 complementou, dizendo que: “No zero, um quadrado igual a outro quadrado. São as assíntotas. Mas agora eu fiquei me questionando onde é que eu tenho as assíntotas no parabolóide hiperbólico”.

Então, propomos que P3 deixasse para fazer essa análise na questão do item b, voltando a perguntar porque ‘parabolóide’, ao que o participante respondeu: “Parabolóide por causa que se eu botar o $x=0$ ou o $y=0$ ali eu tenho parábolas né”. E iniciando a questão proposta no item b dessa atividade, P3 inseriu a representação simbólica do parabolóide hiperbólico na janela de álgebra do GeoGebra, obtendo a sua representação gráfica.

Então, voltando à questão das seções planas com o plano xoy , P3 girou a representação dinâmica da superfície, dizendo: “Tá mais agora eu acho que enxerguei. Eu vejo ela preenchida assim. É porque ele tem esse vazado”, apontando com a seta do mouse para o espaço entre as retas concorrentes e sobre o plano (Figura 91).

Figura 91 – Reconhecimento das seções planas do parabolóide hiperbólico por P3.



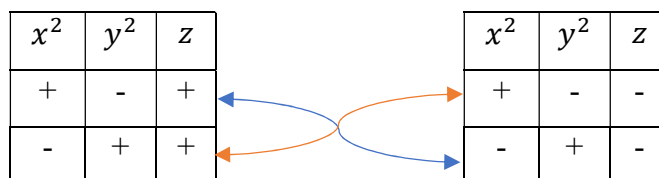
Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que o participante P3 mobilizou com espontaneidade esquemas conceituais, correlacionando os registros de representação gráfico e simbólico, a partir da análise das seções planas do parabolóide hiperbólico. De forma sucinta, P3 realizou apenas os tratamentos algébricos necessários para a identificação dessa superfície. Obtendo os cortes dessa quádrica com os planos coordenados,

P3 construiu os argumentos necessários e suficientes para mostrar a correlação que estabeleceu entre os seus registros de representação simbólico e gráfico. E, ao classificá-la como parabolóide hiperbólico, também está correlacionando esses registros com o registro de representação em língua natural geral.

A seguir, com base na experiência adquirida nas atividades anteriores, o item c instigou o participante à descoberta das outras possibilidades para a equação dessa quádrica. Por exemplo, se a variável z é linear, existem apenas dois casos, porque as duas possibilidades em que o coeficiente de z é positivo coincidem com os dois casos em que esse coeficiente é negativo (Figura 92). Assim, os participantes constataram a existência de seis valores visuais para a variável ‘posição no sistema cartesiano’, dois para cada variável (x, y, z) no termo linear.

Figura 92 – Possibilidades para a representação simbólica de um parabolóide hiperbólico.



Fonte: Elaborado pela autora.

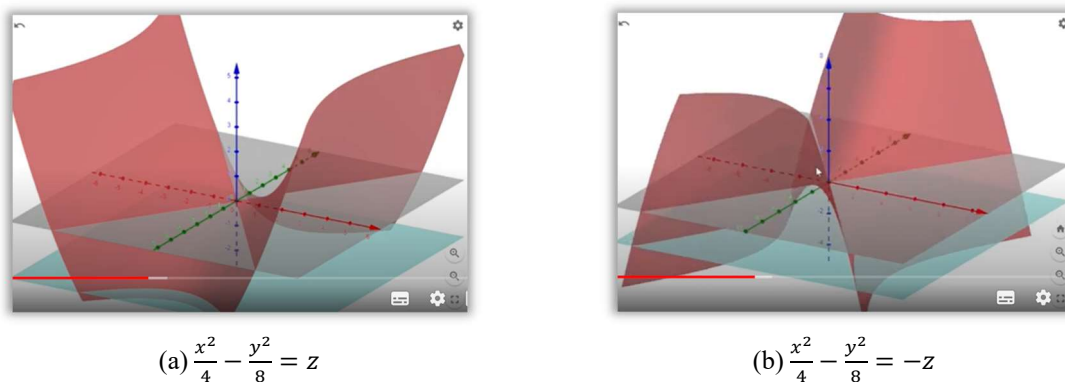
O participante P1 iniciou dizendo: “*Eu vou ter essa possibilidade aqui com o z aqui, depois com o x aqui e com o y aqui*”. Vemos que, utilizando a palavra ‘aqui’ para referir-se ao termo linear na equação do parabolóide hiperbólico, P1 identifica as três possibilidades para a variável linear. Observando a primeira das três equações, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$, P1 conjectura: “*É mais ou menos z ?*” Então, perguntamos: “*O coeficiente de z sendo positivo ou negativo a equação seria a mesma?*”

P1 respondeu inicialmente que sim e, depois, considerando que ao alterar o sinal do coeficiente de z sem mudar os coeficientes de x e de y , as equações não são iguais. Então, o participante registrou as seis possibilidades para a representação simbólica de um parabolóide

hiperbólico: “ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = \pm z$; $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = \pm y$; $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = \pm x$ ”. E, argumenta: “*Eu fiquei imaginando pelo número de quadrantes, não poderia ser só três*”.

E, observando a representação gráfica dessa quádrlica, complementa: “*Eu não tenho a opção de ser só sobre o x e o y, né. Eu vou ter para cima e para baixo e depois nos outros eixos ainda. Então, eu tenho seis né*”. Como P1 já estava com a representação gráfica do caso em que o coeficiente de z era positivo (Figura 93a) no GeoGebra, pedimos para que alterasse esse sinal para negativo (Figura 93b). Trocando o sinal do coeficiente de z na equação e girando a representação dinâmica da superfície, P1 observou a mudança na representação gráfica e disse: “*Ela fica invertida*”.

Figura 93 – Representações simbólicas e gráficas de dois casos de paraboloides hiperbólicos por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ocorre que a parábola assento do paraboloides hiperbólico da Figura 93a está sobre o plano xoz , enquanto que a da Figura 93b está sobre o plano yoz . Essa relação entre as representações gráfica e simbólica dos paraboloides hiperbólicos foi melhor abordada na questão seguinte.

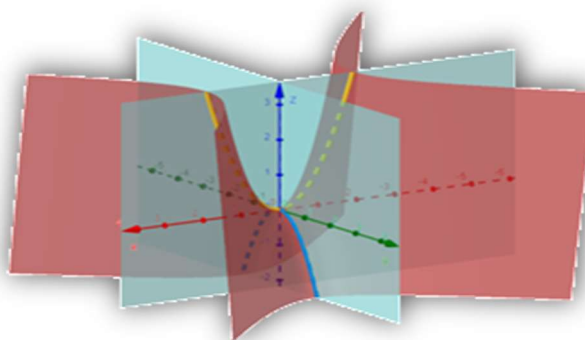
O participante P2 iniciou conjecturando acerca das possibilidades para a posição no sistema cartesiano, quando reforçamos que essa questão está propondo a identificação das possíveis formas de escrever a equação dessa quádrlica. O participante respondeu: “*Então, eu posso variar o grau dos coeficientes, eu posso ter três formas diferentes. E, além do grau, eu posso variar um sinal na equação. Então, eu tenho três e, para cada eixo eu tenho duas, então eu tenho seis possibilidades*”. E o participante registrou os seis casos: “ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$; $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -z$; $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = y$; $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = -y$; $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = x$; $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -x$ ”.

O participante P3 iniciou dizendo que são seis possibilidades, argumentando que são três para cada variável x , y e z no termo linear, com os coeficientes desse termo podendo ser

positivo ou negativo. Em seguida, P3 registrou a seguinte resposta: “São 6 possibilidades. As outras possibilidades são dadas alternando a variável de grau 1. Para cada variável de grau um temos ou o coeficiente de x ou o coeficiente de y negativo “. Com isso, podemos dizer que os participantes reconheceram as seis formas de escrever a equação do parabolóide hiperbólico, que está relacionada com a posição dessa quádrlica no sistema cartesiano.

A questão do item d propôs a análise das possibilidades para a posição das representações gráficas dos parabolóides hiperbólicos no sistema cartesiano. Para a diferenciação entre as representações gráficas dessas quádrlicas, utilizamos as parábolas assento e estribo. A questão iniciou informando que nos parabolóides hiperbólicos, as duas parábolas com vértice comum, concavidades opostas e o mesmo eixo de simetria são chamadas assento e estribo (Figura 94).

Figura 94 – Parábolas assento e estribo de um parabolóide hiperbólico.



Fonte: Elaborado pela autora.

Definimos a parábola assento como a que tem concavidade voltada para o semieixo positivo, e a parábola estribo, como a que tem concavidade voltada para o semieixo negativo. Então, a questão propôs a obtenção das parábolas assento (amarela) e estribo (azul) do parabolóide hiperbólico de equação $x^2 - y^2 = z$ no GeoGebra 3D. Com base nessa representação gráfica e, considerando a posição da parábola assento no sistema cartesiano, a questão desafiou os participantes a encontrarem todas as possibilidades de obter diferentes representações gráficas do parabolóide hiperbólico.

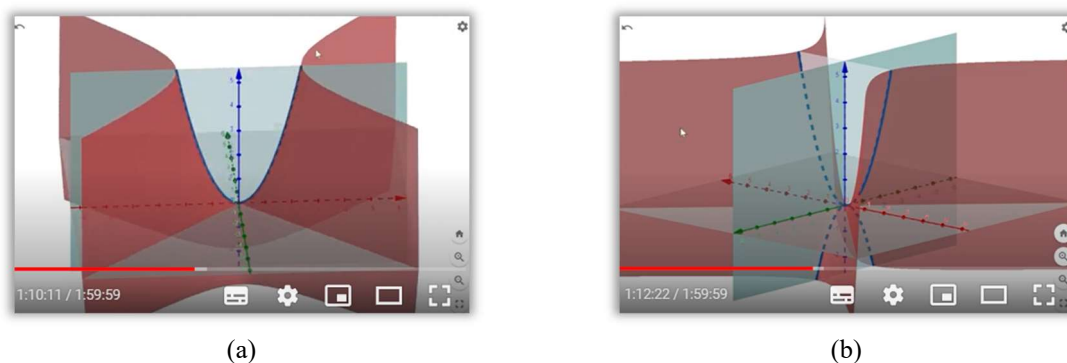
Considerando que uma parábola assento com concavidade voltada para o semieixo oz_+ pode estar contida no plano xoz ou no plano yoZ , os participantes puderam identificar duas possibilidades. O mesmo ocorre para os semieixos ox_+ e oy_+ , em que a parábola assento pode estar sobre os planos xoy ou yoZ no primeiro caso e sobre os planos xoy ou xoz no segundo

caso. Assim sendo, foi possível encontrar seis valores visuais para a variável ‘posição no plano cartesiano’.

Após a leitura do enunciado da questão do item d, o participante P1 inseriu a equação $x^2 - y^2 = z$, dizendo que a representação simbólica era de um parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz . Então, perguntamos como obter as parábolas assento e estribo nessa representação gráfica, ao que P1 respondeu: “*Eu tenho que fazer um plano*”. E, perguntando se o eixo vermelho é o eixo dos x , complementou: “*Nesse caso, é o xoz* ”. Então, P1 mobilizou esquemas conceituais, conjecturando que é o plano de equação $y = 0$. Então, P1 inseriu a equação $y = k$ na janela de álgebra, fazendo $k = 0$ no controle deslizante.

A seguir, P1 mobilizou esquemas de utilização para obter a parábola como intersecção do parabolóide hiperbólico com o plano xoy . Usando a ferramenta ‘Intersecção de superfícies’, selecionou a quádrica e o plano, obtendo a parábola assento com concavidade voltada para oz_+ no plano xoz (Figura 95a). Considerando as parábolas assento e estribo, P1 disse: “*Essa aqui (parábola assento) é no xoz , então a outra (parábola estribo) é no yoz . Então, agora eu ponho $x=0$* ”. Assim, P1 obteve a parábola estribo inserindo a equação $x = 0$ e obtendo a intersecção do plano yoz com o parabolóide hiperbólico (Figura 95b).

Figura 95 – Parábolas assento e estribo obtidas por P1.

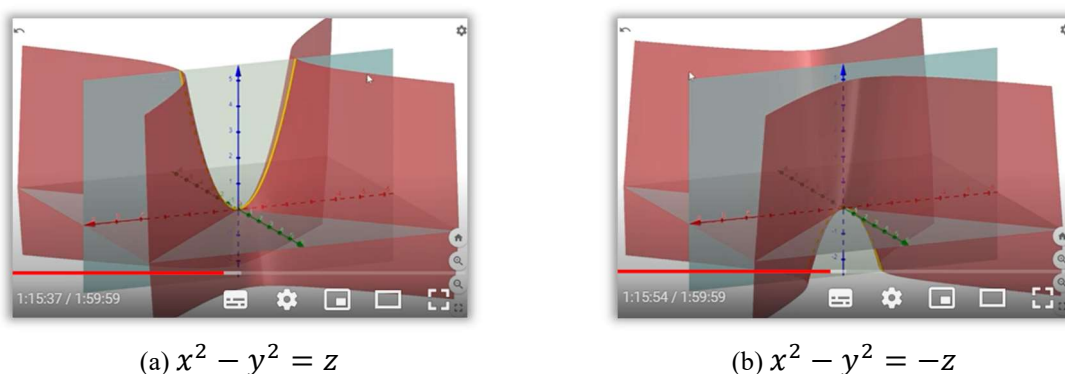


Fonte: Dados da pesquisa.

O participante P1 trocou a cor da parábola assento sobre o plano xoz com concavidade voltada para oz_+ , do parabolóide hiperbólico de equação $x^2 - y^2 = z$ (Figura 96a). Então, para identificar as posições possíveis para as representações gráficas de um parabolóide hiperbólico, P1 iniciou conjecturando a respeito da possibilidade de alterar todos os sinais nessa equação. Entendendo que ficaria com a equação da mesma superfície, P1 mudou apenas o coeficiente do termo linear, obtendo a representação gráfica do parabolóide hiperbólico de equação $x^2 - y^2 = -z$.

A Figura 96b mostra a mudança ocasionada pela alteração do sinal. Agora, sobre o plano xoz encontra-se a parábola estribo, uma vez que a parábola assento do novo parabolóide hiperbólico está no plano yoz . E, relacionando com as representações simbólicas, P1 disse: “*Eu vou ter seis possibilidades, então. Para o z eu tenho duas, para o y eu tenho duas e para o x eu tenho duas*”. Então, perguntamos quais são as seis possibilidades e P1 respondeu: “*Parábola assento voltada para ox_+ , ox_- , oy_+ , oy_- , oz_+ e oz_-* ”.

Figura 96 – Parábolas assento e estribo obtidas por P1 com a troca do sinal do termo linear.



Fonte: Dados da pesquisa.

A questão foi proposta considerando que a concavidade da parábola assento estaria voltada para o semieixo positivo. Nesse caso, as seis possibilidades para a posição do parabolóide hiperbólico no sistema cartesiano seriam com: parábola assento com concavidade voltada para oz_+ sobre o plano xoz ou yoz , parábola assento com concavidade voltada para oy_+ sobre o plano xoy ou yoz e parábola assento com concavidade voltada para ox_+ sobre o plano xoy ou xoz .

Essa proposta teve a intenção de favorecer a correlação desses registros de representação simbólico e gráfico com o registro em língua natural. No entanto, o participante P1 escolheu outra forma para identificar as seis possibilidades para as representações gráficas dos parabolóides hiperbólicos. Porém, consideramos que a forma escolhida por P1 favorecia a correlação dessas representações gráficas com as representações simbólicas.

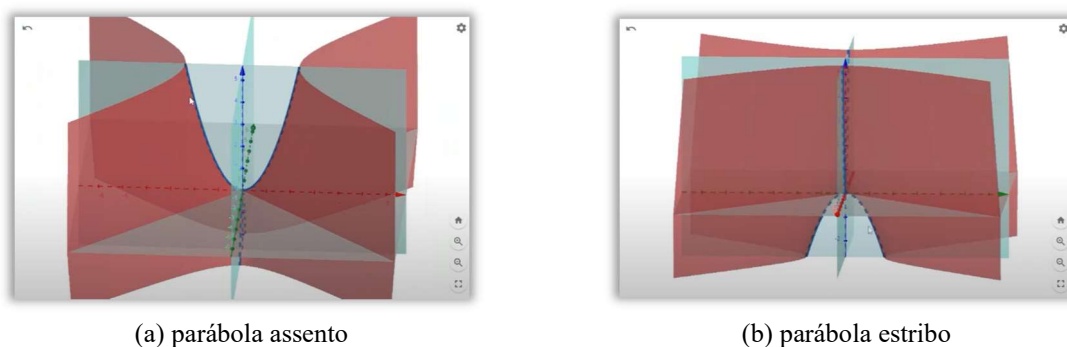
Na descoberta das seis possibilidades para escrever a equação de um parabolóide hiperbólico, P1 organizou a sua resposta da seguinte forma: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = \pm z$; $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = \pm y$; $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = \pm x$. Essa forma escolhida por P1 para descrever as seis possibilidades no registro de representação simbólico ficou mais próxima dos resultados obtidos graficamente. Sendo assim,

deixamos essa questão para o momento da discussão sobre as representações em língua natural específicas.

Depois da leitura do enunciado da questão do item d, o participante P2 perguntou se poderia usar as representações simbólicas para encontrar as possibilidades nas representações gráficas. Esclarecemos que a proposta dessa atividade é que os seis casos sejam encontrados apenas por análise das possibilidades de posicionar a parábola assento no sistema cartesiano, para relacionar as equações e gráficos depois.

Então, o participante P2 inseriu na janela de álgebra do GeoGebra as equações $x = k$ e $y = k$ dos planos yoZ e xoZ , respectivamente. Mobilizando esquemas de utilização, P2 obteve as parábolas assento e estribo com a ferramenta ‘Intersecção de duas superfícies’. A Figura 97a e a Figura 97b mostram o momento em que P2 girou a representação dinâmica do parabolóide hiperbólico para mostrar as parábolas assento e estribo, respectivamente.

Figura 97 – Parábolas assento e estribo obtidas por P2.



(a) parábola assento

(b) parábola estribo

Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando a posição do parabolóide hiperbólico no sistema cartesiano com a parábola assento voltada para o semieixo positivo, P2 respondeu que são seis possibilidades. Então, perguntamos quais são essas possibilidades e, observando a parábola assento da Figura 97a, P2 disse: “A minha parábola assento tá agora em xoz , mas ela pode tá em yoZ ”. E seguiu identificando as outras quatro possibilidades: parábola assento com concavidade voltada para oy_+ em xoy ou em yoZ e parábola assento com concavidade voltada para ox_+ em xoy ou em xoz .

Na resposta a essa questão, o participante P2 descreveu todas as possibilidades: “6 formas diferentes. 2 formas para cada eixo. Quando a parábola se desenvolve no eixo z, ela pode se desenvolver nos eixos xoz ou yoZ . Quando a parábola se desenvolve no eixo y, ela pode se desenvolver nos eixos xoy ou yoZ . Quando a parábola se desenvolve no eixo x, ela pode se desenvolver nos eixos xoy ou xoz ”.

O participante P3 iniciou a questão do item d, inserindo na janela de álgebra do GeoGebra, as equações $y = 0$ e $x = 0$, dos planos xOz e yOz , respectivamente. E, usando a ferramenta ‘Intersecção de duas superfícies’, P3 obteve as parábolas assento (Figura 98a) e estribo (Figura 98b).

Figura 98 – Parábolas assento e estribo obtidas por P3.

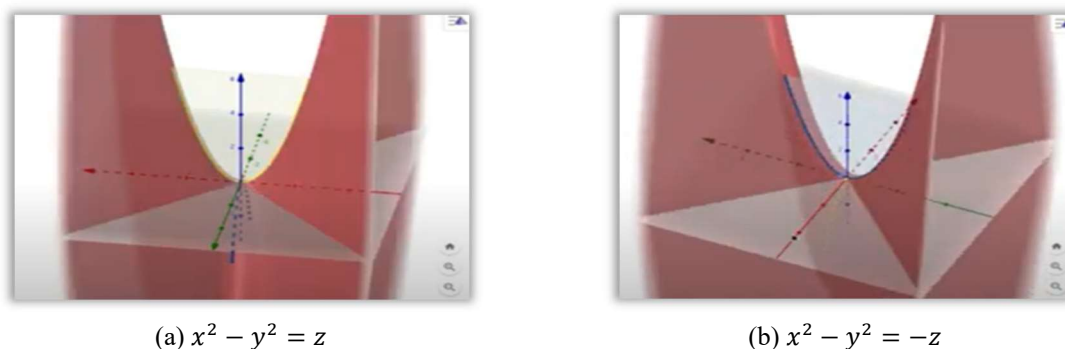


Fonte: Dados da pesquisa.

Então, o participante P3 passou a analisar as possibilidades para a posição do parabolóide hiperbólico no sistema cartesiano, respondendo que são seis. P3 apresentou como argumento que, quando uma das variáveis x ou y fosse nula na equação $x^2 - y^2 = z$, teríamos uma parábola $z = x^2$ ($y = 0$) ou $z = -y^2$ ($x = 0$). Considerando que P3 baseou seu argumento nas representações simbólicas, pedimos para que o participante analisasse as possibilidades relativas à posição da parábola assento no sistema cartesiano.

P3 identificou três casos referentes às suas concavidades que podem estar voltadas para os semieixos ox_+ , oy_+ e oz_+ , mas não conseguiu explicar porque são seis possibilidades para posição no sistema cartesiano. P3 apoia-se novamente nas representações simbólicas, considerando duas possibilidades para o eixo dos z . Uma referente ao parabolóide hiperbólico de equação $x^2 - y^2 = z$ (Figura 99a), com a parábola assento em xOz .

Figura 99 – Tratamentos gráficos para correlação entre as representações gráficas e simbólicas dos parabolóides hiperbólicos por P3.

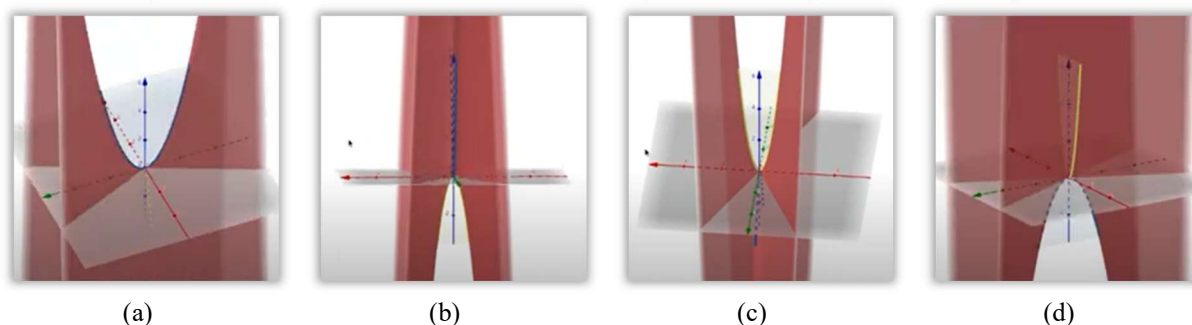


Fonte: Dados da pesquisa.

E trocando o sinal do termo linear dessa equação, obteve a outra parábola assento em yoz , referente ao parabolóide hiperbólico de equação $x^2 - y^2 = -z$ (Figura 99b).

Para analisar o que ocorre com as parábolas ao mudar apenas o sinal do termo linear, P3 alterou os coeficientes na equação do parabolóide hiperbólico. Com coeficientes diferentes, a quádrlica de equação $5x^2 - y^2 = z$ tem parábolas assento (Figura 100a) e estribo (Figura 100b) com aberturas diferentes. Alterando o sinal do termo linear nessa equação, P3 obteve as parábolas assento (Figura 100c) e estribo (Figura 100d) do parabolóide hiperbólico de equação $5x^2 - y^2 = -z$, dizendo: “*Na verdade, tu tem essa sela invertida, né*”.

Figura 100 – Parábolas assento e estribo de dois parabolóides hiperbólicos obtidas por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Vemos que com a troca de sinal na equação do parabolóide hiperbólico, P3 identificou as duas possibilidades para a parábola assento com concavidade voltada para oz_+ . Uma no plano xoz referente ao parabolóide hiperbólico de equação $5x^2 - y^2 = z$ (Figura 100a) e, a outra, no plano yoz referente ao parabolóide hiperbólico de equação $5x^2 - y^2 = -z$ (Figura 100c).

Então, na questão do item e, foi proposta uma correspondência entre as seis representações simbólicas e as seis representações gráficas do parabolóide hiperbólico. Na questão anterior, os participantes identificaram seis possibilidades para a representação gráfica do parabolóide hiperbólico, duas para cada eixo coordenado. Considerando o eixo dos z , por exemplo, um parabolóide hiperbólico pode ter parábola assento em oz_+ no plano xoz ou no plano yoz .

Assim, partindo do registro de representação simbólico, é possível reconhecer a representação gráfica do parabolóide hiperbólico a partir das suas seções planas parabólicas. O parabolóide hiperbólico de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$, por exemplo, tem duas seções planas

parabólicas: as parábolas assento $\begin{cases} \frac{x^2}{4} = z \\ y = 0 \end{cases}$ e estribo $\begin{cases} \frac{y^2}{8} = -z \\ x = 0 \end{cases}$.

Então, a representação gráfica da equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ é o parabolóide hiperbólico que tem como seções planas uma parábola com concavidade voltada para oz_+ no plano xoz e outra com concavidade voltada para oz_- no plano yoz . Tomando como referência a parábola assento, podemos dizer simplesmente que é o parabolóide hiperbólico que tem parábola assento com concavidade voltada para oz_+ no plano xoz .

O participante P2 relacionou as representações gráficas e simbólicas por meio da identificação da parábola assento nas equações dos parabolóides hiperbólicos. P2 argumentou que o parabolóide hiperbólico de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ é o que tem parábola assento em xoz e, o de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -z$, em yoz . Inserindo as seis equações na janela de álgebra, P2 relacionou essas representações simbólicas (Figura 101a) com as representações gráficas (Figura 101b), utilizando as denominações dadas pelo GeoGebra (eq1, eq3, eq4, eq5, eq6 e eq7).

Figura 101 - Correlação entre as representações gráficas e simbólicas dos parabolóides hiperbólicos por P2.

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ eq 1	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -z$ eq3	<input type="radio"/>	eq1: $x^2 / 4 - y^2 / 8 = z$:
$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = y$ eq4	$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = -y$ eq 5	<input checked="" type="radio"/>	eq3: $x^2 / 4 - y^2 / 8 = -z$:
$\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = x$ eq 6	$\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -x$ eq7	<input type="radio"/>	eq4: $x^2 / 4 - z^2 / 8 = y$:
		<input type="radio"/>	eq5: $x^2 / 4 - z^2 / 8 = -y$:
		<input type="radio"/>	eq6: $z^2 / 4 - y^2 / 8 = x$:
		<input type="radio"/>	eq7: $z^2 / 4 - y^2 / 8 = -x$:

(a)

(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, P2 registrou a seguinte resposta: “ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ (eq1); $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -z$ (eq3); $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = y$ (eq4); $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = -y$ (eq5); $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = x$ (eq6); $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -x$ (eq7)”. Então, perguntamos como o participante estabeleceu essa relação entre as equações e gráficos, ao que P2 disse: “Foi um misto de coisas”. Exemplificando, P2 referiu-se à equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ (eq1), dizendo: “Na equação 1, eu vi que eu tinha uma parábola em oz_+ no plano xoz . Então, esse é meu assento”.

E, referindo-se à equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -z$ (eq3), argumentou: “E aí, como eu sabia que a parábola positiva era em xoz na equação 1, na equação 3, como ela é negativa, as parábolas se invertem. Então, na equação 3 a parábola assento é no plano yoz ”. Assim, o participante relacionou as representações simbólicas $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = z$ e gráfica ‘eq1’, considerando que a

parábola assento desse parabolóide hiperbólico está sobre o plano xoz . E, o parabolóide hiperbólico de representações simbólica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -z$ e gráfica ‘eq3’, P2 disse que tem parábola assento sobre o plano yoZ .

Para confirmar a identificação da parábola assento no registro de representação simbólico, perguntamos a P2 como ele reconheceu a parábola assento na equação. O participante respondeu que a parábola com concavidade voltada para cima tem os coeficientes dos termos quadrático e linear iguais. Com isso, podemos ver que o participante P2, mobilizando esquemas de utilização, estabeleceu as correlações entre as representações gráficas e simbólicas do parabolóide hiperbólico.

Os participantes P1 e P3 utilizaram as representações simbólicas para pensar nas possibilidades para as representações gráficas do parabolóide hiperbólico. Dessa forma, P1 e P3 já relacionaram as representações gráficas e simbólicas na questão anterior, apenas registrando suas respostas aqui. O participante P1, considerando as possibilidades para o sinal do termo linear na representação simbólica do parabolóide hiperbólico, registrou a seguinte resposta: “ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = \pm z$, tem-se duas possibilidades, com assento para oz_+ ou com assento para oz_- ; $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = \pm y$, tem-se duas possibilidades, com assento para oy_+ ou com assento para oy_- ; $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = \pm x$, tem-se duas possibilidades, com assento para ox_+ ou com assento para ox_- ”.

O participante P3, que também já havia explorado as correspondências entre as representações por meio do GeoGebra, nessa questão (item e) apenas registrou a sua resposta: “*Após refletir e pensar sobre a construção geométrica da parábola assento, podemos, em cada eixo, obter duas parábolas, em planos perpendiculares uma a outra. Como temos 3 eixos, logo 6 possibilidades* “. Nas respostas dos participantes P2 e P3 não fica clara a relação entre as representações gráficas e simbólicas, mas esse problema foi retomado na questão do item f, para estabelecer uma correspondência com as representações em língua natural específicas.

Na questão do item f, propomos uma discussão para a denominação dos possíveis casos para essa quádriga, diferenciando-os em relação à posição no sistema cartesiano. A proposta de discussão para denominação dos casos de parabolóide hiperbólico teve a intenção de levar os participantes a estabelecer a correspondência das representações gráficas e simbólicas com a representação em língua natural específica.

A representação em língua natural específica considera a posição do parabolóide hiperbólico no sistema cartesiano. No primeiro momento, os participantes poderiam fazer suas propostas para as representações em língua natural específicas, baseados nas representações

simbólicas e gráficas do parabolóide hiperbólico. Depois, apresentamos a proposta de Silva (2018), que tem como referência a parábola assento, convencionando que esta tem sempre concavidade voltada para o semieixo positivo.

Assim, por exemplo, o parabolóide hiperbólico de equação $x^2 - y^2 = z$, que tem parábola assento com concavidade voltada para o semieixo oz_+ e está contida no plano xoz , tem representação em língua natural ‘parabolóide hiperbólico em oz_+ no plano xoz ’. Mobilizando esquemas conceituais relativos à correlação entre os registros de representação gráfico e simbólico, os participantes registraram as seguintes propostas para as representações em língua natural específica do parabolóide hiperbólico:

P1: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = +z$, parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ ; $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -z$, parabolóide hiperbólico com assento em oz_- ; $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = y$, parabolóide hiperbólico com assento em oy_+ ; $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = -y$, parabolóide hiperbólico com assento em oy_- ; $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = x$, parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ ; $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -x$, parabolóide hiperbólico com assento em ox_- .

P2: eq1 Parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz ; eq3 Parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yo_+ ; eq4 Parabolóide hiperbólico com assento em oy_+ no plano xoy ; eq5 Parabolóide hiperbólico com assento em oy_+ no plano yo_+ ; eq6 Parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz ; eq7 Parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy .

P3: Os parabolóides formados com eixo central x no plano xoz , também de eixo central x no plano xoy . Igualmente para y e z .

As propostas apresentadas pelos participantes levaram em consideração a forma como haviam correlacionado os registros gráficos e simbólicos. E, com denominações distintas, cada participante correlacionou estes registros com o registro em língua natural. Então, apresentamos a proposta para a denominação dessas quádricas, tendo como referência a parábola assento (parábola assento em ox_+ no plano xoy ou xoz , parábola assento em oy_+ no plano xoy ou yo_+ , parábola assento em oz_+ no plano xoz ou yo_+).

5.1.5.6 ATIVIDADE 6

A atividade 6 propôs uma análise do todo, em algumas questões promovendo a diferenciação entre quádricas que foram vistas separadamente e, em outras, fazendo uma retomada das correlações. Nas primeiras três questões (itens a, b e c), foi proposta a diferenciação entre os tipos de quádrica e, nas questões seguintes (itens d, e, f e g), entre quádricas do mesmo tipo. Os parabolóides e hiperbolóides foram tratados em atividades

diferentes, por isso propomos na primeira questão uma diferenciação entre essas quádras (item a).

Depois, foi proposta a diferenciação entre os hiperboloides de uma e de duas folhas (item b) e, na sequência, entre os paraboloides elípticos e hiperbólicos (item c). Nas questões seguintes, foram propostas a diferenciação entre os tipos de hiperboloides de uma folha (item d), hiperboloides de duas folhas (item e), paraboloides elípticos (item f) e paraboloides hiperbólicos (item g).

Na questão do item a, os participantes registraram as seguintes conjecturas a respeito da diferenciação entre as representações simbólicas dos hiperboloides e dos paraboloides:

P1: Nas equações dos hiperboloides as variáveis são de grau 2. Enquanto que nos paraboloides, uma das variáveis é de grau 1.

P2: Nos hiperboloides, todos as variáveis estão elevadas ao quadrado. Já nos paraboloides, temos sempre uma das variáveis que não está elevada ao quadrado.

P3: Duas variáveis de grau dois em cada uma delas e uma terceira variável de grau 2 nos hiperboloides e uma variável de grau 1 nos paraboloides.

Mobilizando esquemas conceituais, os participantes identificaram os termos quadráticos e lineares nas representações simbólicas, diferenciando paraboloides e hiperboloides. As questões dos itens b e c visaram a diferenciação entre os hiperboloides de uma e de duas folhas (item b) e entre os paraboloides elípticos e hiperbólicos (item c). Na questão do item b, os participantes registraram as seguintes conjecturas a respeito da diferenciação entre os hiperboloides de uma e de duas folhas:

P1: No hiperboloide de uma folha somente uma variável tem [coeficiente de] sinal negativo. Enquanto que no hiperboloide de duas folhas, duas variáveis têm [coeficientes de] sinais negativos.⁴⁰

P2: O que diferencia a equação dos hiperboloides são as combinações dos sinais. O hiperboloide de uma folha, tem 2 sinais positivos, por isso ele sempre terá a representação da elipse ao longo do eixo de coeficiente negativo. Já para o hiperboloide de duas folhas, teremos 2 sinais negativos e 1 positivo. Dentro disso, ao fazer o estudo do sinal, será constatado que a elipse não terá representação dentro de um determinado intervalo, caracterizando o hiperboloide de duas folhas que se desenvolve ao longo do eixo do coeficiente positivo.

P3: Se há um ou dois sinais negativos.

Os participantes, mobilizando esquemas conceituais, reconheceram que os sinais (um ou dois negativos) diferenciam os hiperboloides (de uma ou de duas folhas).

⁴⁰ P1 refere-se ao sinal do coeficiente da variável quando diz que ‘somente uma variável tem sinal negativo’ ou ‘duas variáveis têm sinais negativos’.

Na questão do item c, referindo-se à diferenciação entre os paraboloides elípticos e hiperbólicos, os participantes responderam:

P1: Nos paraboloides elípticos existe a soma das variáveis de grau 2. Nos paraboloides hiperbólicos existe a diferença entre as variáveis de grau 2.

P2: O que diferencia os paraboloides, é que no paraboloides elíptico, os coeficientes das variáveis elevadas ao quadrado têm o mesmo sinal. Já no paraboloides hiperbólico, um dos coeficientes das variáveis elevadas ao quadrado tem sinal diferente.

P3: se há um sinal negativo.

Os participantes P1 e P2, mobilizando esquemas conceituais, reconheceram que os sinais iguais ou contrários das variáveis quadrática diferenciam os paraboloides elípticos dos hiperbólicos, respectivamente. Apesar do registro de P3 não estar completo, o participante também reconheceu as características que diferenciam paraboloides elípticos de hiperbólicos.

As questões dos itens d e e visaram a diferenciação relativa à posição no sistema cartesiano entre os hiperboloides de uma folha (item d) e entre os hiperboloides de duas folhas (item e). Na questão do item d, referindo-se à diferenciação relativa à posição no sistema cartesiano entre os hiperboloides de uma folha, os participantes responderam:

P1: O sinal negativo precede a variável correspondente ao eixo ao longo do qual ele se desenvolve.

P2: Ele vai se desenvolver ao longo da variável com coeficiente negativo.

P3: Diferencia qual variável possui coeficiente negativo.

E na questão do item e, referindo-se à diferenciação relativa à posição no sistema cartesiano entre os hiperboloides de duas folhas, os participantes responderam:

P1: O sinal positivo precede a variável correspondente ao eixo ao longo do qual ele se desenvolve.

P2: Ele vai se desenvolver ao longo da variável com coeficiente positivo.

P3: Qual variável possui coeficiente positivo.

Os participantes P1 e P2 identificaram o eixo ao longo do qual os hiperboloides de uma ou de duas folhas se desenvolvem pelo sinal diferente nos coeficientes das variáveis quadráticas nas equações dessas quádricas. No hiperboloides de uma folha, o sinal contrário é negativo e a variável quadrática com coeficiente negativo indica o eixo ao longo do qual essa quádrica se desenvolve. Ao contrário, no hiperboloides de duas folhas, o sinal contrário é positivo e a variável quadrática com coeficiente positivo indica o eixo ao longo do qual essa quádrica se desenvolve.

As questões dos itens f e g visaram a diferenciação relativa à posição no sistema cartesiano dos paraboloides elípticos (item f) e dos paraboloides hiperbólicos (item g). Na questão do item f, referindo-se à diferenciação relativa à posição no sistema cartesiano dos paraboloides elípticos, os participantes respondem:

P1: Os paraboloides elípticos se desenvolvem ao longo do eixo correspondente à variável de grau 1. Levando em consideração o sinal [do coeficiente]⁴¹ desta variável para saber se será ao longo do semieixo positivo ou negativo.

P2: A variável de grau 1 define o eixo em que o paraboloides se desenvolve, e o sinal do coeficiente dessa variável, vai definir qual semieixo isso vai ocorrer.

P3: qual a variável de grau 1 e seu sinal.

E na questão do item g, referindo-se à diferenciação relativa à posição no sistema cartesiano dos paraboloides hiperbólicos, os participantes respondem:

P1: A posição no sistema cartesiano será identificada a partir da concavidade da parábola assento. Poderá estar voltada para o semieixo positivo ou negativo, dependendo do sinal que precede a variável de grau 1.

P2: A variável de grau 1 define o eixo em que a parábola assento se desenvolve. A variável de grau 2 com o mesmo sinal da variável de grau 1, define qual plano está a parábola assento.

P3: qual a variável de grau 1 e o sinal das variáveis de grau 2.

Os participantes diferenciam os paraboloides elípticos entre si, quando consideram que a variável linear define o eixo de simetria dessa quádrlica e que o sinal do coeficiente dessa variável determina o semieixo ao longo do qual essa superfície se estende. Observamos que os participantes P1 e P2 relacionaram as representações simbólicas e gráficas nas suas respostas.

O participante P1, seguindo a forma como correlacionou registros gráficos e simbólicos, estabeleceu essas relações entre os paraboloides hiperbólicos de forma similar à que utilizou com os paraboloides elípticos. Já o participante P2, utiliza a parábola assento como referência. Na resposta do participante P3 podemos entender que a variável de grau 1 indica o eixo de simetria da parábola assento e, o sinal dos coeficientes de grau 2, o plano que contém essa cônica.

5.1.5.7 OBSERVAÇÕES FINAIS

Nessa SEAI, nos registros escritos ou falados, encontramos evidências de que os participantes foram superando obstáculos e avançando na construção do conhecimento sobre quádrlicas. Nas condutas cognitivas observadas nesses registros, por meio das conjecturas e

⁴¹ Novamente, P1 utiliza a expressão ‘sinal desta variável’ referindo-se ao coeficiente da variável.

argumentações, foi possível observar uma evolução dos participantes. As antecipações propostas, além de instigar os participantes, também revelavam os esquemas conceituais constituídos pelos mesmos.

Com as questões propostas nessa SEAI, os participantes (re)constituíram esquemas conceituais relativos à identificação e correlação entre as representações gráficas, simbólicas e em língua natural específicas dos hiperboloides e paraboloides. Consideramos que as unidades significantes gerais e específicas, simbólicas e gráficas, possibilitaram todas as diferenciações propostas. Essas unidades significantes simbólicas e gráficas, possibilitaram as correlações entre os registros gráficos e simbólicos e, por consequência, a constituição das representações em língua natural específicas.

Essas correlações foram viabilizadas pelo reconhecimento das representações gráficas e simbólicas das seções planas da quádriga que, favorecendo a identificação dessas superfícies, possibilitou o trânsito entre os diferentes registros de representação. Sendo assim, a desconstrução dimensional teve um importante papel na qualificação das apreensões figurais, enriquecendo as apreensões conceituais.

Essas apreensões figurais foram obtidas por meio de representações dinâmicas do GeoGebra, que permitiram o acesso e a manipulação desses objetos matemáticos. Nessa SEAI, o foco ainda estava no desenvolvimento de esquemas relativos ao conceito de quádricas, envolvendo pouco uso das ferramentas do GeoGebra. As atividades exigiram a mobilização de esquemas de utilização anteriormente constituídos. Nos tratamentos gráficos, os participantes precisaram inserir as equações $x = k$, $y = k$ e $z = k$ na janela de álgebra, gerando um controle deslizante.

E na correlação entre as representações gráficas e simbólicas das seções planas das superfícies, os participantes utilizaram a ferramenta de ‘Intersecção de superfícies’. No entanto, a análise praticamente instantânea das alterações gráficas ocasionadas pela variação de sinais nas suas representações simbólicas que o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra possibilitou, teve um papel relevante nesse trabalho.

Nessa SEAI, através das unidades significantes simbólicas e gráficas, específicas ou gerais, os participantes (re)constituíram esquemas conceituais que possibilitaram a diferenciação entre os tipos de quádriga e quádricas do mesmo tipo. Com base nesses esquemas conceituais, que possibilitam o reconhecimento dos elementos simbólicos e gráficos que caracterizam a equação ou o gráfico de uma quádriga, propomos a situação de ensino e aprendizagem instrumental a seguir.

5.1.6 SEAI 6 – Desafio da correspondência: sobrepondo a quádrlica

A presente situação de ensino e aprendizagem instrumental (APÊNDICE I — SEAI 6) teve a finalidade de complementar as condições necessárias para a correlação entre registros de representação das superfícies quádrlicas. Os participantes precisaram mobilizar os esquemas conceituais que permitiram diferenciar tipos de quádrlica e quádrlicas de mesmo tipo quanto à posição no sistema cartesiano.

Partindo do reconhecimento dos termos quadráticos e lineares e seus sinais, na equação de uma quádrlica, os participantes precisaram obter os coeficientes das variáveis quadráticas. Na primeira atividade, foi realizada uma retomada da relação entre as representações gráficas e simbólicas, no que diz respeito termos quadráticos e lineares e seus sinais nas equações das superfícies quádrlicas.

A segunda atividade desafiou os participantes a estimarem os valores dos coeficientes das variáveis quadráticas. E, na terceira atividade, as ferramentas do GeoGebra ficaram disponíveis para que os participantes obtivessem esses valores. Nas atividades 1 e 2, os valores dos coeficientes consistiram em inversos de números quadrados perfeitos, para facilitar a correspondência entre as representações simbólicas e gráficas, uma vez que os participantes não tiveram acesso às ferramentas do GeoGebra.

E na atividade 3, visando promover o uso das ferramentas do GeoGebra para determinar os coeficientes nas equações das superfícies quádrlicas, esses números ora eram inversos de quadrados perfeitos e ora não. Assim, essa SEAI propôs a conversão do registro gráfico para o simbólico que, segundo Duval, é onde as maiores dificuldades são observadas (Duval, 2011a).

As atividades propostas de forma progressiva, consistiram em encontrar as equações das superfícies quádrlicas, obtendo representações gráficas que se sobrepõem exatamente às que já estavam presentes na janela de visualização. Na atividade 2, as ferramentas do GeoGebra também ficaram ocultas, ao contrário da atividade 3. O acesso às configurações também precisou ficar desabilitado para que as equações das superfícies quádrlicas ficassem escondidas.

5.1.6.1 ATIVIDADE 1

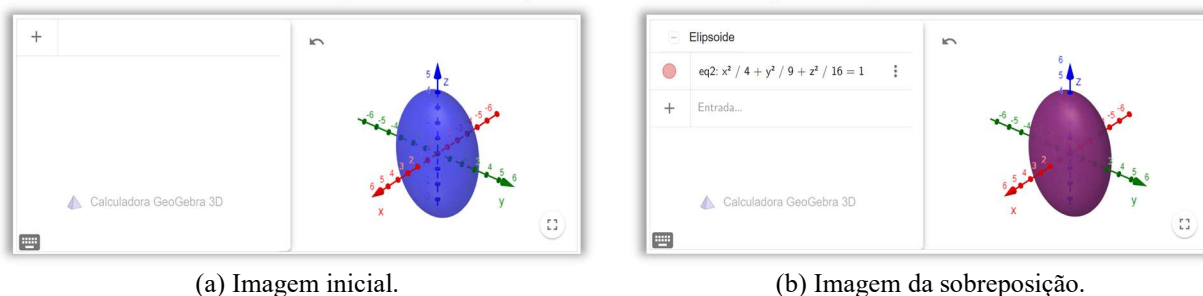
A atividade 1 teve por objetivo retomar conceitos trabalhados nas SEAI anteriores, preparando os participantes para a construção de novos conhecimentos. Nessa atividade, os participantes começaram fazendo a conversão dos registros gráficos para os registros em língua natural (item a). Na questão seguinte (item b), foi proposta a conversão do registro gráfico para

o simbólico, envolvendo a escolha de termos lineares e quadráticos e sinais destes termos para obter as equações dessas quádricas.

Na questão do item c, os participantes precisaram inserir as equações obtidas na janela de álgebra para confirmar suas conjecturas e realizar os ajustes necessários. E a questão do item d propôs que os participantes apresentassem uma justificativa para a escolha dos termos lineares e quadráticos e seus sinais, baseando suas argumentações nas seções planas que compõem essas superfícies.

Os resultados referentes às questões dos itens b, c e d são apresentados de forma integrada. Com o exemplo do elipsoide, a Figura 102a mostra como a atividade foi proposta, com a representação gráfica visível e a representação simbólica escondida.

Figura 102 – Exemplo da atividade ‘Sobrepondo a quádrica’.



(a) Imagem inicial.

(b) Imagem da sobreposição.

Fonte: Elaborado pela autora.

A ferramenta ‘Objeto auxiliar’ torna possível esconder a equação do elipsoide, deixando a janela de álgebra disponível para a inserção de novas equações. Depois de realizar a conversão da representação gráfica para a simbólica, inserindo a sua equação na janela de álgebra, obtém-se uma representação gráfica (vermelha) que se sobrepõe a que já está presente na janela de visualização (azul), ocorrendo uma mudança de cor (Figura 102b).

Assim, no item a da atividade 1, foi proposta a conversão do registro de representação gráfico para o registro em língua natural, quando os participantes classificaram as quádricas a partir da análise das suas representações gráficas. Nessa questão foi solicitada uma justificativa para as escolhas das representações em língua natural, baseando os argumentos nas seções planas dessas quádricas.

Mobilizando esquemas conceituais constituídos nas SEAI anteriores, os participantes relacionaram as representações gráficas e em língua natural da seguinte forma:

P1: a) Elipsoide, pois as suas seções planas são elipses; b) Hiperboloide de uma folha, pois quando suas seções planas são paralelas ao eixo central temos uma hipérbole; e, quando temos suas seções planas perpendiculares ao eixo central

temos elipses; c) Hiperboloide de duas folhas, pois quando suas seções planas são paralelas ao eixo central temos uma hipérbole; e, quando temos suas seções planas perpendiculares ao eixo central temos elipses, pontos ou nenhum lugar geométrico; d) Paraboloides elíptico, pois quando suas seções planas são perpendiculares ao eixo central temos elipses, ponto ou nenhum lugar geométrico. Quando temos suas seções planas paralelas ao eixo central temos parábolas; e) Paraboloides hiperbólico, pois quando temos suas seções planas obtemos hipérbolas ou parábolas.

P2: a) Elipsoide em Z e Y. b) Hiperboloide de uma folha em X. c) Hiperboloide de duas folhas em Z. d) Paraboloides elíptico em OX-. e) Paraboloides hiperbólico com assento em OX no plano XOZ.

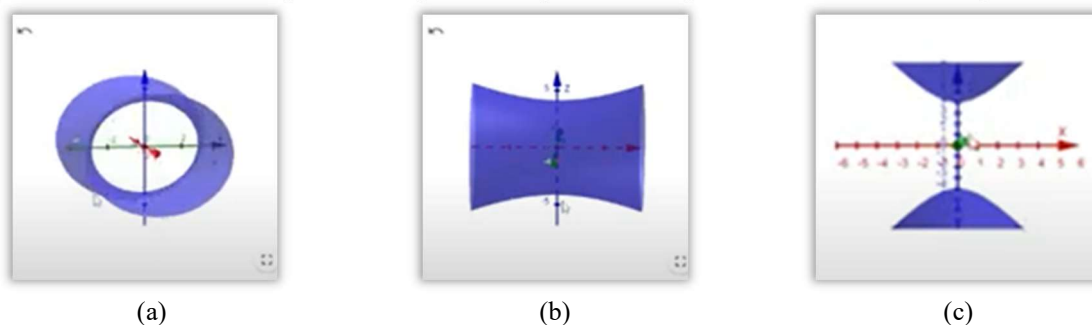
P3: a) Elipsoide, somente elipses; b) Hiperboloide de uma folha, elipse em uma seção e hipérbolas em dois planos paralelos; c) Hiperboloide de duas folhas, Hipérbolas em duas seções e na outra, se existir, é elipse; d) Paraboloides Elíptico, Parábolas em duas seções e elipse em uma das seções; e) Paraboloides hiperbólico, duas parábolas e uma hipérbole.

Nesses registros escritos de P1 e P3, é possível ver os participantes correlacionando corretamente as representações gráficas e em língua natural. Utilizando as representações dinâmicas como objetos para pensar-com, os participantes as giraram e observaram para basearem seus argumentos nas seções planas que compõem cada uma das superfícies quádricas. Apesar do registro de P2, não apresentar as justificativas, observamos que o participante também identificou corretamente as seções planas de todas as quádricas.

P2 analisou também a posição da quádrica no sistema cartesiano por meio das seções planas para obter as suas representações em língua natural específicas. A primeira quádrica que P2 identificou foi o elipsoide em z e y, relacionando com os eixos maior e médio desse elipsoide. Observando a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha, P2 disse: “É um paraboloides de uma folha”.

Perguntando como seriam as seções planas dessa quádrica, P2 girou a sua representação dinâmica (Figura 103a), identificando a elipse como seção plana com o plano yoz.

Figura 103 – Conversão da representação gráfica dos paraboloides para a representação em língua natural por P2.



Fonte: Elaborado pela autora.

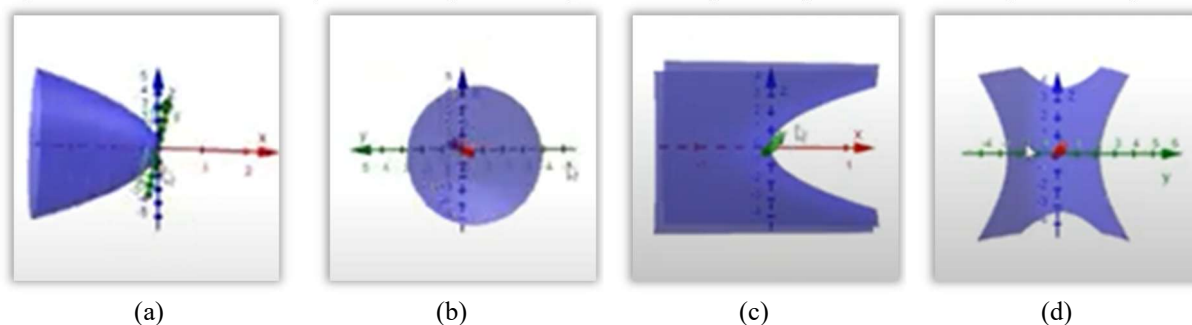
E, girando mais uma vez a representação dinâmica (Figura 103b), observou que as demais seções planas com planos coordenados são hiperbólicas, corrigindo a sua resposta:

“Ahhh é um hiperboloide de uma folha”. Perguntado ao longo de qual dos eixos essa quádrlica se desenvolve, P2 respondeu ao longo do eixo dos x , complementando a sua representação em língua natural específica, hiperboloide de uma folha em x .

Observamos que essa possibilidade de pensar-com a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha contribuiu para a mobilização dos esquemas conceituais nas quádrlicas seguintes, quando o processo de identificação ficou mais espontâneo. Girando a representação dinâmica do hiperboloide de duas folhas (Figura 103c), P2 observou as suas seções planas, dizendo: “Esse aqui é um hiperboloide de duas folhas em z ”.

A seguir, girando a representação dinâmica do paraboloides elíptico (Figura 104a), P2 observou a sua seção plana parabólica e disse: “Esse aqui é um paraboloides em ox_- , né? É assim que chama?”

Figura 104 - Conversão da representação gráfica dos paraboloides para a representação em língua natural por P2.



Fonte: Elaborado pela autora.

Confirmando que se trata de um paraboloides, instigamos o participante a observar as suas seções planas para completar a representação em língua natural dessa quádrlica. Então, P2 girou mais uma vez a representação dinâmica do paraboloides elíptico (Figura 104b), completando: “Elíptico? Tá, é um paraboloides elíptico em ox_- ”.

Por fim, no caso do paraboloides hiperbólico, girando a representação dinâmica dessa quádrlica, P2 identificou suas seções planas parabólicas (Figura 104c) e hiperbólicas (Figura 104d), dizendo: “É um paraboloides hiperbólico”. E, observando a seção plana parabólica da Figura 104c, completou: “[...] com assento em xoz +”. Então, propomos um pequeno ajuste na representação em língua natural, quando P2 registrou “Paraboloides hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz ”.

Assim, os três participantes mobilizaram os esquemas conceituais constituídos anteriormente, classificando as quádrlicas com base em argumentos que envolvem as seções planas. Foi possível ver as representações dinâmicas das superfícies quádrlicas, utilizadas como

objetos de pensar-com, favorecendo as correlações entre os registros gráfico e em língua natural.

No item b da atividade 1, foi proposta a conversão do registro gráfico para o simbólico, envolvendo a diferenciação entre tipos de quádriga e quádrigas do mesmo tipo. Com o intuito de oferecer subsídios para os desafios seguintes, essa questão propôs a obtenção das representações simbólicas das superfícies quádrigas, fornecendo os valores dos coeficientes dos termos quadráticos.

Assim, os coeficientes dos termos quadráticos x^2 , y^2 e z^2 nas equações dessas quádrigas eram, respectivamente iguais a $1/4$, $1/9$ e $1/16$, para equações com três termos quadráticos. E, os coeficientes dos termos quadráticos x^2 e y^2 (y^2 e z^2 ou x^2 e z^2) nas equações dessas quádrigas eram, respectivamente iguais a $1/4$ e $1/9$, para equações com dois (três) termos quadráticos. Com isso, nessa atividade foi necessário apenas fazer a escolha adequada dos termos lineares e quadráticos e seus sinais nas representações simbólicas dessas quádrigas. A determinação dos termos linear e quadráticos permite a diferenciação elipsoides e hiperboloides (três termos quadráticos) de paraboloides (dois termos quadráticos e um linear).

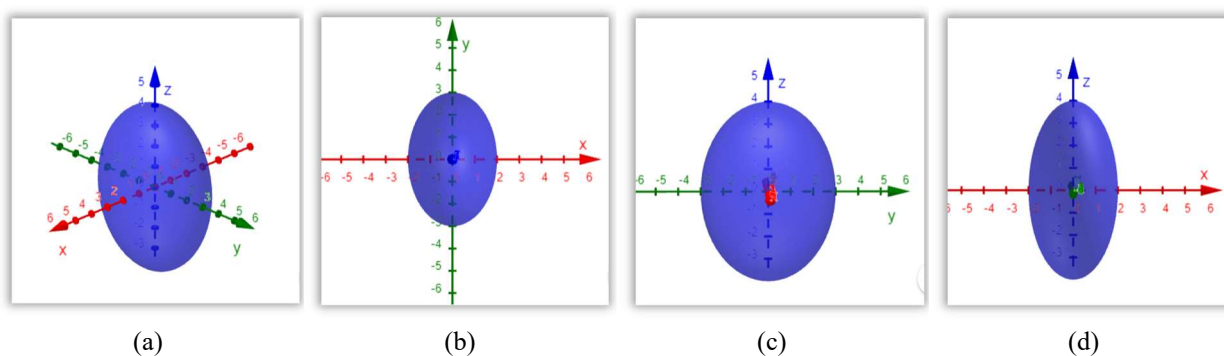
A escolha dos sinais possibilita a diferenciação entre as representações simbólicas das superfícies quádrigas que têm três termos quadráticos. As representações simbólicas dos elipsoides têm três sinais positivos, dos hiperboloides de uma folha têm dois sinais positivos e um negativo e dos hiperboloides de duas folhas têm um sinal positivo e dois negativos. E, nas representações simbólicas das quádrigas que têm dois termos quadráticos e um linear, a escolha dos sinais dos termos quadráticos (iguais ou contrários) permite a diferenciação entre os paraboloides (elíptico ou hiperbólico).

Essas unidades significantes gerais possibilitaram a diferenciação entre os tipos de quádriga. Depois, as unidades significantes específicas contribuíram para a diferenciação entre quádrigas de mesmo tipo. No caso dos elipsoides, nessa atividade os participantes precisaram apenas identificar os eixos maior, médio e menor a partir da representação gráfica. Nos hiperboloides, o eixo ao longo do qual essa quádriga se desenvolve determina o coeficiente de sinal diferente na representação simbólica.

Nos paraboloides elípticos, o semieixo (positivo ou negativo) ao longo do qual essa quádriga se desenvolve determina o sinal (positivo ou negativo) do termo linear na representação simbólica dessa quádriga. Por fim, nos paraboloides hiperbólicos, as posições das parábolas assento e estribo definem os sinais das variáveis quadráticas. Para dar maior visibilidade aos esquemas mobilizados ou constituídos pelos participantes, foi solicitada uma justificativa para as escolhas dos termos linear e quadráticos e seus sinais.

A seguir, apresentamos propostas para encontrar as representações simbólicas das superfícies quádricas dessa atividade e, na sequência, os caminhos percorridos pelos participantes. No caso do elipsoide (Figura 105a), os participantes poderiam observar na sua representação gráfica que as seções planas com os planos coordenados são todas elípticas. Sendo assim, a sua representação simbólica tem todas as variáveis de grau 2 e com sinais positivos, para que as seções planas com os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ sejam elipses.

Figura 105 – Proposta para a conversão da representação gráfica para a simbólica do elipsoide.



Fonte: Elaborado pela autora.

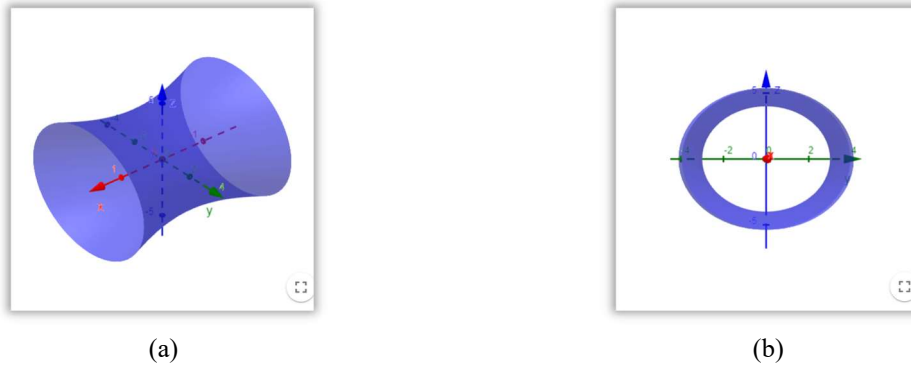
Nesse caso, os participantes poderiam chegar na representação simbólica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ de um elipsoide qualquer. E sabendo que $1/4$, $1/9$ e $1/16$ são, respectivamente, os valores dos coeficientes $1/a^2$, $1/b^2$ e $1/c^2$, a equação dessa quádrica ficaria $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Por outro lado, os participantes também poderiam identificar esses coeficientes a partir da representação gráfica do elipsoide.

Girando a sua representação dinâmica, de forma que os planos coordenados xoy (Figura 105b), $yozy$ (Figura 105c) e xoz (Figura 105d) coincidam com o plano de fundo da janela de visualização do GeoGebra, é possível ver que os eixos maior, médio e menor estão sobre os eixos dos z , dos y e dos x , respectivamente. Os coeficientes $1/4$, $1/9$ e $1/16$ poderiam ser relacionados com os valores de $1/a^2$, $1/b^2$ e $1/c^2$ na equação do elipsoide, considerando que 4, 9 e 16 são os quadrados das medidas dos semieixos menor, médio e maior do elipsoide.

A representação simbólica do hiperboloide de uma folha da Figura 106a, tem todas as variáveis de grau 2, uma vez que possui seções planas hiperbólicas e elípticas com os planos coordenados. Girando a representação dinâmica dessa quádrica (Figura 106b), podemos ver que a seção plana elíptica está no plano $yozy$ ($x = 0$), logo os coeficientes de y^2 e z^2 têm sinais positivos. Assim, a sua representação simbólica ficaria $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde o eixo

coordenado ao longo do qual essa quádrlica se desenvolve corresponde a variável de sinal contrário (negativo).

Figura 106 - Proposta para a conversão da representação gráfica para a simbólica do hiperboloide de uma folha.

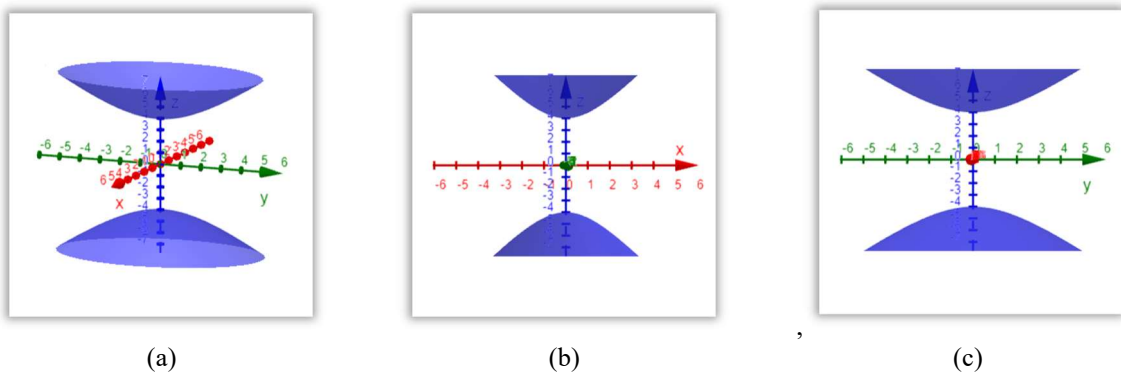


Fonte: Elaborado pela autora.

Sabendo que $1/4$, $1/9$ e $1/16$ são, respectivamente, os valores dos coeficientes $1/a^2$, $1/b^2$ e $1/c^2$, a equação dessa quádrlica ficaria $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. No caso dessa quádrlica, também é possível identificar ao menos dois dos coeficientes da sua representação simbólica através da análise da sua representação gráfica. Girando a sua representação dinâmica (Figura 106b), é possível identificar os valores de b e c na sua seção plana elíptica, que são as medidas 3 e 4 dos semieixos sobre o eixo dos y e dos z , respectivamente.

A representação simbólica do hiperboloide de duas folhas da Figura 107a, tem todas as variáveis de grau 2, uma vez que possui seções planas hiperbólicas e elípticas com os planos coordenados. Tendo seções planas hiperbólicas no plano xoz , os coeficientes de x^2 e z^2 tem sinais contrários. Da mesma forma, tendo seções planas hiperbólicas no plano yoz , os coeficientes de y^2 e z^2 tem sinais contrários. Assim, dois dos três coeficientes das variáveis quadráticas são negativos.

Figura 107 - Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do hiperboloide de duas folhas.



Fonte: Elaborado pela autora.

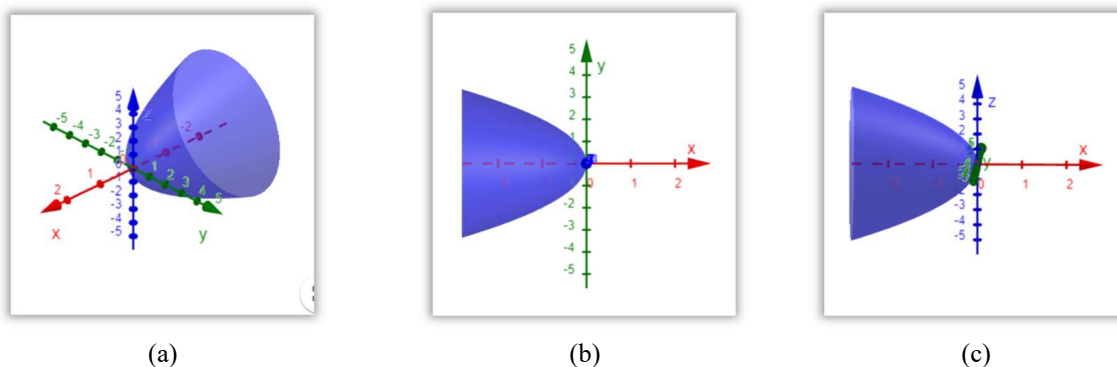
Girando a representação simbólica da quádrlica, podemos ver que as seções planas hiperbólicas em xoz (Figura 107b) e em yoz (Figura 107c) tem eixo real sobre o eixo dos z , logo esta é a variável quadrática de coeficiente positivo. Assim, a sua representação simbólica fica $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde o eixo coordenado ao longo do qual essa quádrlica se desenvolve corresponde a variável de sinal contrário (positivo).

Sabendo que $1/4$, $1/9$ e $1/16$ são, respectivamente, os valores dos coeficientes $1/a^2$, $1/b^2$ e $1/c^2$, a equação dessa quádrlica fica $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. No caso do parabolóide elíptico, sem a utilização das ferramentas do GeoGebra, os participantes poderiam identificar ao menos um dos coeficientes por análise da representação gráfica. A partir das coordenadas dos pontos $(0,0, \pm 4)$ de intersecção dessa quádrlica com o eixo dos z , os participantes poderiam concluir que $c = 4$, pois fazendo $x = y = 0$ na equação dessa quádrlica temos $\frac{z^2}{c^2} = 1$ ou $z^2 = c^2$.

O parabolóide elíptico (Figura 108a) possui seções planas parabólicas e elípticas, assim sua representação simbólica tem duas variáveis quadráticas e uma linear. Girando a representação dinâmica dessa quádrlica (Figura 108b), é possível ver que uma de suas seções planas parabólicas está sobre o plano xoy , tendo o eixo dos x como eixo de simetria logo, a variável x tem grau 1 e y tem grau 2 na sua equação.

Com outro giro da representação dinâmica dessa quádrlica (Figura 108c), é possível ver que a outra seção plana parabólica está sobre o plano xoz , tendo o eixo dos x como eixo de simetria logo, a variável x tem grau 1 e z tem grau 2 na equação dessa parábola. Além disso, as duas seções parabólicas têm concavidades voltadas para o semieixo ox_- , logo os termos lineares nas suas equações têm sinais negativos. Assim, os termos quadráticos na equação dessa quádrlica são y^2 e z^2 e o termo linear é x .

Figura 108 - Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do parabolóide elíptico.

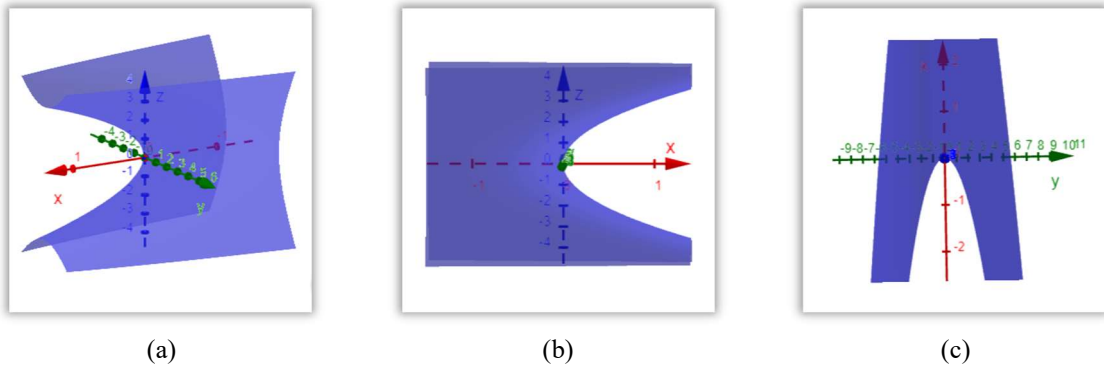


Fonte: Elaborado pela autora.

Como essa quádrlica tem seções planas elípticas, os termos quadráticos tem sinais iguais. Considerando o termo linear negativo, os termos quadráticos são positivos, e sua equação é dada por $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -x$, onde o termo linear e seu sinal determinam o semieixo ao longo do qual essa quádrlica se desenvolve. Tendo sido dado no enunciado da questão que 1/4 e 1/9 são, respectivamente, os valores de $1/a^2$ e $1/b^2$, a equação dessa quádrlica fica $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -x$.

O parabolóide hiperbólico (Figura 109a) tem seções planas parabólicas e hiperbólicas, assim sua representação simbólica tem dois termos quadráticos e um linear. Girando a representação dinâmica dessa quádrlica, é possível ver as parábolas assento (Figura 109b) e estribo (Figura 109c), ambas com eixo de simetria sobre o eixo dos x , logo essa é a variável linear na equação dessa quádrlica.

Figura 109 - Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do parabolóide hiperbólico.



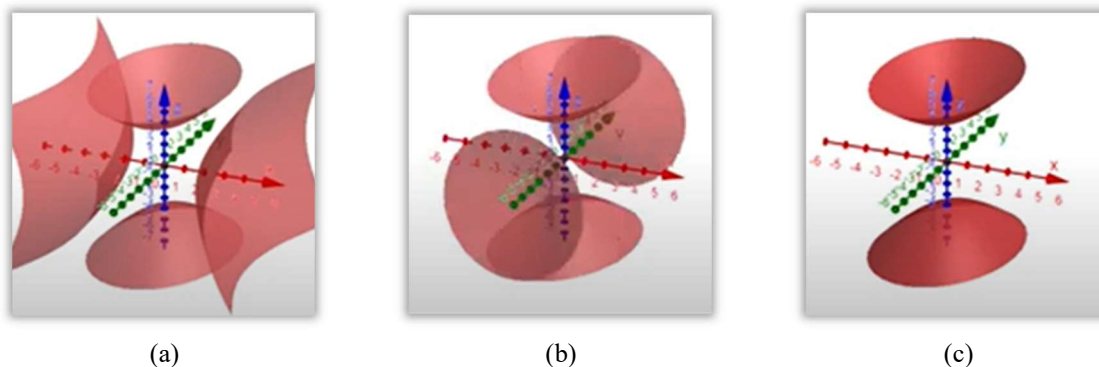
Fonte: Elaborado pela autora.

A parábola assento, que tem concavidade voltada para o semieixo positivo do eixo dos x e está sobre o plano xoz , logo os sinais dos coeficientes dos termos que contém x e z^2 são positivos. E a parábola estribo está sobre o plano xoy , logo os sinais dos coeficientes dos termos que contém x e y^2 são contrários. Então, esse parabolóide hiperbólico tem equação da forma $-\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = x$. Tendo sido dado no enunciado da questão que 1/4 e 1/9 são, respectivamente, os valores dos coeficientes $1/a^2$ e $1/b^2$, a equação dessa quádrlica fica $-\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = x$.

Iniciando a apresentação das produções dos participantes, P1 observou a representação gráfica do hiperboloide de duas folhas em z , identificando o grau dos termos com variáveis e os sinais de seus coeficientes. P1 conjecturou que todas as variáveis teriam grau dois, mas que os sinais não seriam todos positivos, caso em que se teria um elipsoide. Inserindo a equação

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, P1 obteve a representação gráfica de um hiperboloide de duas folhas em x (Figura 110a).

Figura 110 – Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do hiperboloide de duas folhas por P1.



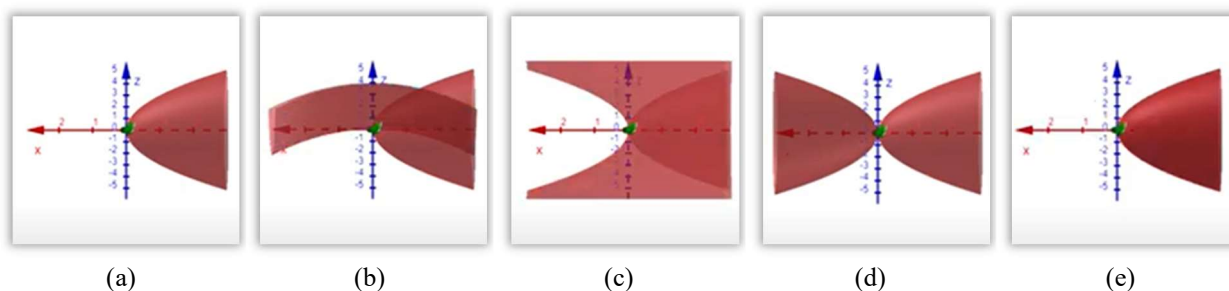
Fonte: Dados da pesquisa.

Então, P1 tornou o sinal do coeficiente de x^2 negativo e, dizendo que “*Se todos forem negativos, não vai existir*”, tornou o coeficiente de y^2 positivo (Figura 110b). Obtendo a representação gráfica do hiperboloide de duas folhas em y , P1 mudou novamente os sinais. Tornando z^2 positivo e y^2 negativo, P1 obteve a representação gráfica do hiperboloide de uma folha em z que se sobrepõe, exatamente, ao disponível na janela de visualização (Figura 110c).

Depois, P1 inseriu a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ na janela de álgebra, obtendo a representação gráfica do elipsoide em z e y , dizendo que esse era o mais fácil. Em seguida, girou a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha em x e escreveu a sua equação $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, argumentando a respeito dos sinais que: “*O único diferente é o x porque ele tá ao longo do x* ”.

Girando a representação dinâmica do paraboloides elíptico em ox_+ (Figura 111a), P1 disse: “*Para cada valor de z , eu tenho dois valores de x* ”.

Figura 111 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do paraboloides elíptico por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Depois, experimentou inserir a equação $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$ na janela de álgebra (Figura 111b). Então, P1 alterou as variáveis nos termos dessa equação, obtendo $-\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = x$ (Figura 111c). Em seguida, trocou o sinal de y^2 (Figura 111d). Por fim, considerando que x tem que ser negativo, obteve a equação $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -x$ do parabolóide elíptico em ox_- que se sobrepõe exatamente ao da janela de visualização (Figura 111e).

Com o parabolóide hiperbólico, P1 inseriu a equação $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = x$, obtendo o parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy . Constatando que não é a mesma quádrlica, P1 alterou o sinal do termo linear, obtendo o parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz .

Com isso, observamos que P1 mobilizou esquemas conceituais, identificando todos os termos quadráticos nas representações simbólicas do elipsoide e dos hiperbolóides. Quanto aos sinais, P1 diferenciou os elipsoides dos hiperbolóides, quando reconheceu que nos primeiros todos os sinais são positivos. No hiperbolóide de duas folhas, P1 reconheceu que nem todos sinais eram positivos, mas encontrou o termo negativo por meio da tentativa e do erro, fazendo suas escolhas a partir do *feedback* do GeoGebra.

P1 obteve a representação simbólica do hiperbolóide de uma folha de forma mais espontânea, o que sugere que a ocorrência de uma generalização de esquemas, quando o participante mobilizou esquemas conceituais relativos ao hiperbolóide de duas folhas, adaptando os aspectos específicos do hiperbolóide de uma folha. O participante identificou características comuns e distintas entre os hiperbolóides, o que indica a ocorrência de uma assimilação em esquemas já existentes com adaptação dos aspectos específicos (diferenciação).

Nos parabolóides, P1 constatou que um dos termos era linear, usando novamente a mediação do GeoGebra para determinar a variável linear e o sinal de cada termo. Novamente, percebemos que P1 obteve a representação simbólica do parabolóide hiperbólico de forma mais espontânea, o que sugere que o participante mobilizou esquemas conceituais constituídos na obtenção da equação do parabolóide elíptico. Consideramos que P1 identificou características comuns e distintas entre os parabolóides, novamente indicando a ocorrência de uma assimilação em esquemas já existentes com adaptação dos aspectos específicos (diferenciação).

É possível inferir que houve compreensão analisando os argumentos de P1, quando o participante organizou esses conhecimentos, registrando a seguinte justificativa:

Quando todas as variáveis são de grau 2: com todos os coeficientes positivos: elipsoide. Será alongado sobre o eixo com maior denominador e achatado sobre o eixo com

menor denominador; com um coeficiente negativo: hiperboloide de uma folha, que se desenvolve ao longo do eixo cujo coeficiente é negativo; com dois coeficientes negativos: hiperboloide de duas folhas, que se desenvolve ao longo do eixo cujo coeficiente é positivo; Quando duas variáveis são de grau 2 e uma variável é de grau 1: são os paraboloides: paraboloides elíptico: quando todas as variáveis quadráticas são positivas; paraboloides hiperbólico: quando tem uma das variáveis quadráticas positiva e a outra negativa.

Nessa experiência com o primeiro participante, em algumas oportunidades o GeoGebra foi utilizado para identificação das representações simbólicas das superfícies quádricas por meio de tentativa e erro. Por esse método, pode ocorrer que os termos e sinais na representação simbólica sejam obtidos mais por meio do *feedback* do *software* do que por meio da mobilização de esquemas conceituais. Entendemos que as apreensões conceituais poderiam ser mais efetivas se, antes de utilizar o GeoGebra, os participantes fizessem antecipações dessas representações simbólicas.

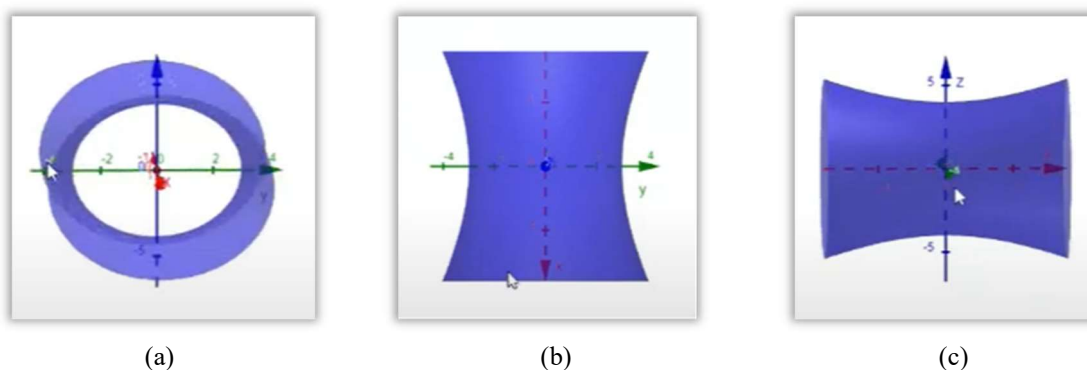
Assim, com os participantes P2 e P3 propomos que primeiro fossem obtidas as representações simbólicas das superfícies quádricas, registrando os argumentos a respeito das suas escolhas. E inserindo essas equações na janela de álgebra, os participantes poderiam confirmar ou refutar suas hipóteses, fazendo os ajustes necessários com o *feedback* do GeoGebra. Com base nessa nova proposta, o participante P2 realizou facilmente a passagem da representação gráfica para a simbólica no caso do elipsoide, obtendo a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

Inserindo essa equação na janela de álgebra, obtive a representação gráfica do elipsoide em z e y que se sobrepôs exatamente a existente. No caso do hiperboloide de uma folha, P2 escreveu a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, com todas as variáveis quadráticas e seus respectivos coeficientes, para depois analisar os sinais desses termos. A seguir, P2 analisou as seções planas elípticas e hiperbólicas da representação dinâmica dessa quádrica e pensou em realizar os tratamentos algébricos sobre essa equação para obter as seções planas por planos paralelos aos planos coordenados.

Então, pedimos para que P2 experimentasse identificar os sinais dos termos na equação dessa quádrica apenas pela observação das seções planas na sua representação dinâmica. Com isso, inferimos que P2 percebeu a relação que poderia fazer entre as representações gráficas e simbólicas das seções planas dessa quádrica. P2 constatou que as seções planas dessa quádrica com os planos coordenados xoy , yoz e xoz , equivalem às representações simbólicas obtidas quando $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ na equação da quádrica.

Isso pode ser observado nas condutas cognitivas de P2, descritas a seguir. P2 girou a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha e, observando que a seção plana elíptica está no plano yoz (Figura 112a), entendeu que os coeficientes de y^2 e z^2 precisam ser positivos para que se tenha uma elipse quando $x = 0$.

Figura 112 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do hiperboloide de uma folha por P2.



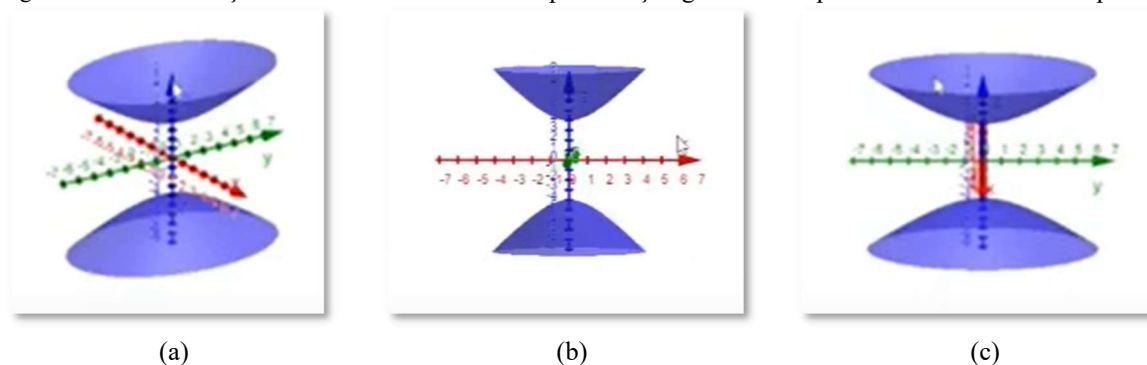
Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, P2 girou novamente a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha (Figura 112b), dizendo: “Agora, se o z for zero, eu vou ter uma hipérbole”. Perguntando sobre qual dos eixos coordenados está o eixo real, P2 respondeu: “O eixo real está em y ”. Então, perguntamos qual das variáveis na equação da hipérbole vai ter coeficiente negativo, P2 respondeu: “Vai ser o x ”.

E, girando mais uma vez a representação dinâmica da quádrca (Figura 112c), observou que a seção plana hiperbólica no plano xoz tem eixo real sobre o eixo dos z , dizendo: “E aí, se o y for zero, o x vai ser negativo também”. Então, P2 ajustou os sinais na equação do hiperboloide de uma folha, obtendo $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Inserindo essa equação na janela de álgebra, P2 obteve a representação gráfica do hiperboloide de uma folha em x que se sobrepôs exatamente ao existente.

No caso do hiperboloide de duas folhas, P2 também parte da equação que tem todas as variáveis quadráticas, com os coeficientes de z^2 positivo e de x^2 e y^2 negativos. Então, perguntamos a P2 qual teria sido o motivo da escolha para esses sinais, ao que o participante respondeu: “Porque ele está ao longo de z , o z é o eixo real da ... perai”. P2 analisou a representação gráfica do hiperboloide de duas folhas (Figura 113a), quando perguntamos se as seções planas hiperbólicas cortam o eixo dos z .

Figura 113 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do hiperboloide de duas folhas por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

P2 respondeu que não, então iniciamos um questionamento para o estabelecimento da relação entre as representações gráfica e simbólica. Observamos que P2 mobilizou esquemas conceituais constituídos anteriormente quando relacionou o termo de sinal contrário na representação simbólica dessa quádrca com o eixo ao longo do qual ela se desenvolve. No entanto, demonstrou insegurança quando tentou justificar essa resposta. Então, perguntamos a P2 qual é a seção plana dessa quádrca com o plano xOz ao que, girando a representação dinâmica da quádrca (Figura 113b), P2 respondeu: “É uma hipérbole”.

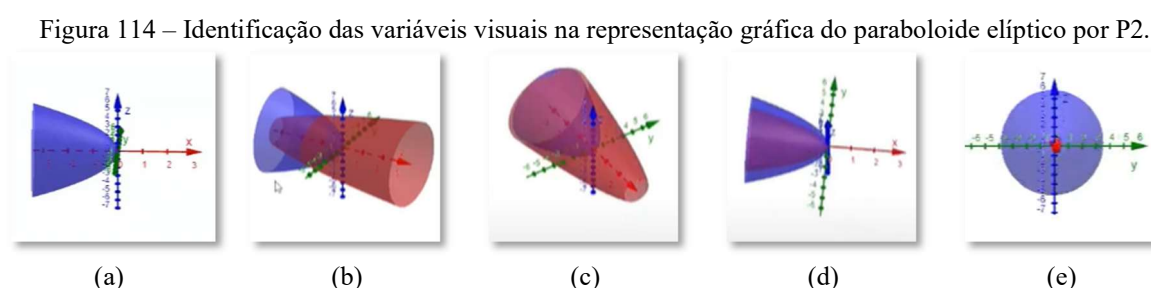
E perguntando sobre qual eixo coordenado estaria o eixo real dessa hipérbole, P2 respondeu: “Em z ”. Seguindo, perguntamos que seção plana dessa quádrca seria obtida quando $x = 0$. P2 girou novamente a representação dinâmica dessa superfície (Figura 113c) e respondeu: “Dá uma hipérbole com eixo real em z ”. Então, perguntamos como ficam os sinais na equação dessa quádrca, considerando que os eixos reais nas seções planas hiperbólicas ficam sobre o eixo dos z . P2 respondeu que os sinais negativos ficariam nos termos com x^2 e y^2 , escrevendo a equação $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

E, inserindo essa equação na janela de álgebra, P2 obteve a representação gráfica do hiperboloide de duas folhas em z que se sobrepôs exatamente ao existente. Conforme vimos, o participante mobilizou esquemas conceituais, correlacionando corretamente as representações gráficas e simbólicas dos elipsoides e hiperboloides. Com o hiperboloide de duas folhas, apesar de apresentar insegurança, P2 havia identificado corretamente os termos e seus sinais na primeira resposta.

As representações simbólicas dos elipsoides e hiperboloides estavam corretas logo, encontrando representações gráficas que se sobrepuseram exatamente às disponíveis na janela de visualização, P2 teve as confirmações de que suas conjecturas estavam corretas. O mesmo

não ocorreu com os paraboloides, em que o participante fez algumas antecipações corretas, mas precisou realizar alguns ajustes nas representações simbólicas com a mediação do GeoGebra.

No caso do parabolóide elíptico, P2 girou a sua representação dinâmica (Figura 114a) e, utilizando o padrão das equações anteriores, trocou apenas o grau da variável x para 1, escrevendo a equação $\frac{x}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Em seguida, manipulando a representação dinâmica dessa quádrlica, P2 trocou o sinal do termo linear, obtendo a equação $-\frac{x}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Então, P2 disse: “Acho que é isso aqui porque ele se desenvolve em x negativo”.



Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que P2 mobilizou esquemas conceituais constituídos anteriormente, fazendo a escolha correta de termos linear e quadráticos. No entanto, o termo linear é negativo quando está na parte direita da equação e com os termos quadráticos positivos na parte esquerda. Nos argumentos de P2, foi possível perceber que o participante reconhece a relação entre as representações gráfica e simbólica relativa à posição da quádrlica no sistema cartesiano. O engano se deve ao fato de não ter considerado a equação na forma padrão.

A representação simbólica de P2 também apresenta erro nos coeficientes, uma vez que o enunciado informava que $1/4$ e $1/9$ são os coeficientes dos termos quadráticos. Nessa oportunidade, entendemos que as antecipações importantes já haviam sido realizadas por P2 e que os ajustes na representação simbólica poderiam ser realizados através do *feedback* do GeoGebra. Assim, ao inserir a equação $-\frac{x}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, P2 obteve a representação gráfica da Figura 114b, com concavidade contrária.

Então, perguntamos o que estaria errado na representação simbólica e, girando a representação dinâmica da quádrlica (Figura 114e), P2 relacionou representações gráfica e simbólica e disse: “Quando x é zero, eu tenho essa *ellipse*”. Depois, P2 girou novamente a representação dinâmica da quádrlica (Figura 114a), dizendo: “Quando eu tiver x negativo, eu vou ter z ao quadrado”. Observamos que P2 mobilizou esquemas conceituais, analisando

corretamente as unidades significantes que permitem identificar os elementos nas equações dessa seção plana parabólica.

O problema com o sinal é referente à posição do termo linear na equação. Toda essa análise feita por P2 é válida para a equação na forma canônica, onde o termo linear fica na parte direita. Para que P2 percebesse isso, solicitando que o participante observasse a parábola (Figura 114a) novamente, perguntamos como seria a sua equação, ao que P2 respondeu que tem o termo linear de coeficiente negativo. Então, perguntamos onde fica o termo linear na equação dessa parábola, ao que P2 respondeu que ficaria na parte direita.

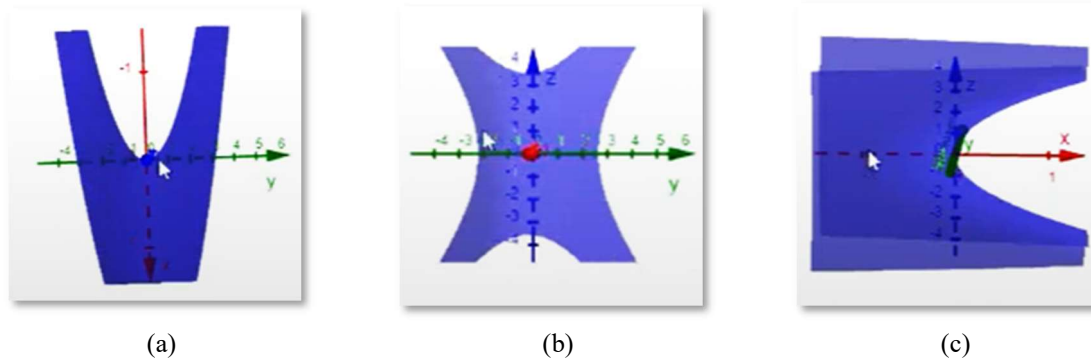
P2 entendeu que o erro estava no coeficiente do termo linear, que de fato é negativo quando a equação está na forma canônica, mas que ao colocar esse termo na parte esquerda da equação o seu sinal mudaria. Então, P2 alterou o sinal na equação do parabolóide elíptico, obtendo $\frac{x}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ (Figura 114c). Mobilizando esquemas conceituais, P2 identificou o erro, alterando o termo independente para zero ($\frac{x}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 0$). Obtendo a representação gráfica da Figura 114d, P2 identificou outro problema, quando disse: “*Ainda tem coeficiente errado*”.

E, olhando o enunciado novamente, P2 identificou que os coeficientes 1/4 e 1/9 são dos termos quadráticos, reescrevendo a equação $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -x$. Inserindo essa equação na janela de álgebra, P2 obteve a representação gráfica do parabolóide elíptico em ox_+ que se sobrepôs exatamente ao que estava na janela de visualização. Por fim, no caso do parabolóide hiperbólico, P2 iniciou copiando a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, para depois fazer a escolha dos termos linear e quadráticos e seus respectivos sinais.

P2 iniciou girando a representação dinâmica do parabolóide hiperbólico, fazendo o plano xoy coincidir com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 115a). Observando a parábola estribo, P2 conjecturou que o termo em x seria o termo linear. P2 ia trocar o grau da variável x para 1, mas desistiu, demonstrando que ainda não tinha certeza. Em seguida, P2 girou a representação dinâmica do parabolóide hiperbólico, fazendo o plano yoZ coincidir com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 115b).

Então, P2 disse: “*Em $x=0$ eu vou enxergar uma hipérbole com eixo real em y* ” e, trocando o sinal do coeficiente do termo em z , obteve a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$. No entanto, essas seções planas com o plano yoZ consistiam em duas retas concorrentes.

Figura 115 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do paraboloides hiperbólico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, girando novamente a representação dinâmica dessa quádrlica, fez o plano xoz coincidir com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 115c), P2 disse: “Quando y é 0, eu vou enxergar uma parábola”. Então, trocando o grau de z^2 , P2 escreveu a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z}{16} = 1$. Sem certeza a respeito do termo linear, P2 observou novamente as parábolas assento e estribo, alterando também o grau do termo em x para um ($\frac{x}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z}{16} = 1$).

Então, perguntamos qual é a seção plana quando $y = 0$ ao que, alternando entre as representações gráficas das Figura 115c e Figura 115a, P2 respondeu: “Sim, eu tenho uma parábola para cada lado”. A seguir, perguntamos quem são as variáveis de grau 1 e 2 nas equações dessas parábolas e P2 respondeu: “Aqui o x é sempre de grau 1”. Então, concluindo que as variáveis de graus 2 seriam o y e o z , P2 reescreveu a equação da seguinte forma: $\frac{x}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$.

Depois, P2 analisou as seções planas parabólicas para verificar o sinal dos termos dessa equação. Observando a parábola assento (Figura 115c), P2 verificou que essa parábola no plano xoz tem concavidade voltada para o semieixo positivo do eixo dos x , logo tem os dois termos com sinais iguais (z^2 e x). E, observando a parábola estribo (Figura 115a), verificou que essa parábola no plano xoy tem concavidade voltada para o semieixo negativo do eixo dos x , logo tem os dois termos com sinais contrários (y^2 e x).

Como na parábola assento o coeficiente de x é positivo, então y^2 é que teria o coeficiente negativo na representação simbólica do paraboloides hiperbólico. Porém, P2 disse: “Só que não pode ser o y que vai ficar com o sinal de menos”. Perguntando o motivo da sua afirmação, P2 girou a representação dinâmica da quádrlica (Figura 115b), respondendo: “Quando x é zero, o eixo real da hipérbole é em y ”.

Esse obstáculo teve origem no engano cometido por P2, quando identificou uma hipérbole com eixo real sobre o eixo dos y como seção plana dessa quádrlica com o plano yoz , em lugar de duas retas concorrentes (Figura 115b). Surgindo novamente aqui, oportunizou a discussão sobre as seções planas obtidas de cortes com planos paralelos ao plano yoz , onde ocorre a mudança do eixo real das hipérbolas.

Assim, dizendo: “*Era nisso que eu estava me confundindo*”, P2 compreendeu que poderia se basear apenas nas seções planas parabólicas para obter a representação simbólica da quádrlica. Girando a representação dinâmica da quádrlica (Figura 115b), P2 verificou que a hipérbole que havia imaginado que estava sobre o plano yoz e tinha eixo real sobre o eixo dos y , na realidade, estava num plano paralelo a este de equação $x = k$ para $k < 0$. E, também observou que as hipérbolas passariam a ter eixo real sobre o eixo dos z , quando $k > 0$.

Então, com base nas seções planas parabólicas, P2 ajustou a equação obtendo $\frac{x}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Essa foi a equação do parabolóide hiperbólico que P2 obteve por antecipação, ou seja, antes de obter a sua representação gráfica. Com base nos ajustes realizados na equação do parabolóide elíptico com a mediação do GeoGebra, propomos outra antecipação. Desafiamos P2 a realizar os ajustes na equação do parabolóide hiperbólico antes de obter sua representação dinâmica.

Alterando alguns termos, P2 obteve a equação $-\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -x$ e passou a analisar novamente os sinais. Girando a representação dinâmica do parabolóide hiperbólico (Figura 115a), P2 observou a parábola estribo, dizendo: “*Quando z é zero, eu tenho x negativo e y ao quadrado*”. Depois, girou novamente a representação dinâmica (Figura 115c) e, observando a parábola assento disse: “*E, quando y é zero, eu tenho x positivo e z ao quadrado*”. Então, P2 reescreveu a equação, obtendo $-\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = x$, argumentando corretamente a respeito dos sinais com base nas seções planas.

Inserindo essa equação na janela de álgebra, P2 obteve a quádrlica que se sobrepôs exatamente a que já se encontrava na janela de visualização. P2, descrevendo as relações que utilizou para realizar as conversões das representações gráficas para as simbólicas, registrou: “*Nos elipsoides todos têm o mesmo sinal e grau. Nos hiperboloides a variável de sinal diferente é referente ao eixo em que a elipse se desenvolve. Nos paraboloides, o eixo de grau 1, define o eixo em que a parábola se desenvolve, e o sinal define o semieixo*”.

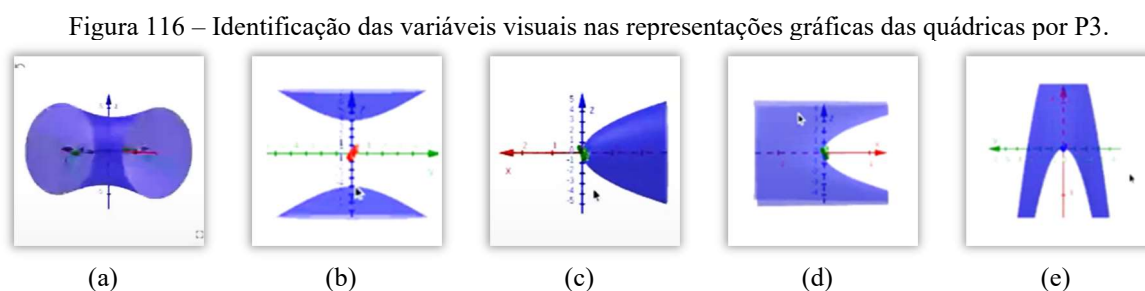
Os argumentos de P2 contemplam as características que diferenciam o elipsoide das demais quádrlicas. No caso dos hiperboloides de uma e de duas folhas, faltou apenas registrar

que todas as variáveis têm grau dois, mas P2 considerou isso na sua resolução. E, no caso dos paraboloides elíptico e hiperbólico, P2 utilizou os mesmos argumentos para as duas superfícies. A justificativa usada para o parabolóide elíptico não é válida para o parabolóide hiperbólico.

Nesse caso, o eixo de simetria das parábolas assento e estribo na representação gráfica do parabolóide hiperbólico definem a variável de grau um na sua representação simbólica. Essas parábolas também definem o sinal na equação dessa quádrlica, uma vez que uma tem concavidade positiva (sinais iguais) e a outra negativa (sinais contrários).

Apesar de não aparecer nas argumentações registradas por P2, vimos que o participante demonstrou compreensão quando realizava a correlação entre suas representações gráfica e simbólica do parabolóide hiperbólico. P2 realizou a conversão da representação gráfica para a simbólica do parabolóide hiperbólico por generalização, quando considerou as características semelhantes aos do parabolóide elíptico, adaptando os aspectos específicos.

O participante P3, manipulando a representação gráfica do elipsoide, relacionou as medidas dos semieixos menor, médio e maior com os valores dos coeficientes das variáveis quadráticas, escrevendo a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Nos hiperboloides, P3 relacionou o sinal diferente com o eixo ao longo do qual a superfície se estende. No hiperbolóide de uma folha, girando a sua representação dinâmica (Figura 116a), escreveu a equação $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, observando que a superfície se desenvolve ao longo do eixo dos x .



Fonte: Dados da pesquisa.

Depois, no hiperbolóide de duas folhas, girando a sua representação dinâmica para que o plano yoz coincidissem com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 116b), P3 escreveu a equação $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Nessa oportunidade, perguntamos como havia chegado nessa representação simbólica, ao que P3 respondeu: “*Esse aqui eu olho pelo ponto (0,0,4)*”. P3 relacionou a cota do ponto de intersecção com o eixo dos z com o coeficiente do termo que contém z na equação dessa quádrlica, verificando também que esse coeficiente não poderia ser negativo.

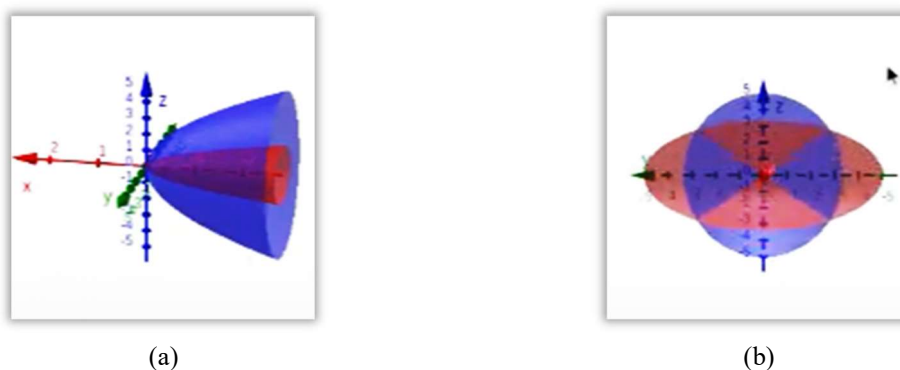
Depois, girando a representação dinâmica do parabolóide elíptico até que o plano xoz coincidissem com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 116c), P3 escreveu a equação $z^2 + y^2 = -x$. P3 relacionou o termo linear e o seu sinal com o semieixo ao longo do qual a quádrlica se estende. Assim, faltou apenas incluir os valores dos coeficientes $1/4$ e $1/9$. Por fim, P3 girou a representação dinâmica do parabolóide hiperbólico para que o plano xoz coincidissem com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 116d).

Observando a parábola assento, P3 disse: “Em $y=0$ eu tenho uma parábola”, definindo o grau dois para z e grau um para x na representação simbólica dessa superfície, ambas com sinal positivo. Depois, girando novamente a representação dinâmica da quádrlica para que o plano xoy coincidissem com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 116e), observou a parábola estribo, definindo que y tem grau dois e sinal negativo. Assim, a representação simbólica do parabolóide hiperbólico obtida por P3 ficou $z^2 - y^2 = x$.

P3 esqueceu novamente dos coeficientes $1/4$ e $1/9$, mas relacionou corretamente as representações simbólica e gráfica dessa quádrlica. Considerando que as antecipações importantes já haviam sido devidamente realizadas por P3, quando identificou as variáveis linear e quadráticas e seus respectivos sinais, entendemos que os ajustes nos coeficientes das equações dos parabolóides poderiam ser realizados por meio do GeoGebra.

Então, P3 iniciou inserindo as equações do elipsoide e dos hiperbolóides de uma e de duas folhas na janela de álgebra, obtendo representações gráficas que se sobrepuseram exatamente às que já estavam na janela de visualização. Nos casos dos parabolóides elíptico e hiperbólico, pelo fato de ter esquecido de colocar os coeficientes, P3 precisou realizar os ajustes nas equações por meio do *feedback* do GeoGebra. Inserindo a equação $z^2 + y^2 = -x$ do parabolóide elíptico, P3 obteve a representação gráfica da Figura 117a.

Figura 117 - Identificação das variáveis visuais na representação gráfica do parabolóide elíptico por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Depois, P3 inseriu os coeficientes, mas com as posições trocadas ($\frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -x$), obtendo a representação gráfica da Figura 117b. Ajustando novamente a equação ($\frac{z^2}{9} + \frac{y^2}{4} = -x$), encontrou o parabolóide elíptico que se sobrepôs exatamente ao que já estava na janela de visualização.

Generalizando, com base nos esquemas constituídos na experiência com o parabolóide elíptico, P3 antecipou a alteração na equação do parabolóide hiperbólico, escrevendo $-\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = x$. E, inserindo essa equação na janela de álgebra, observou essa superfície sobrepor-se exatamente a que estava na janela de visualização. Conforme foi possível observar, P3 realizou as conversões das representações gráficas para as simbólicas das superfícies quádricas de forma bem espontânea, dando indícios da ocorrência da coordenação dos registros de representação das superfícies quádricas.

Podemos observar que os participantes, mobilizando esquemas de utilização previamente constituídos e, por meio do fazer para compreender, desenvolveram novos esquemas relacionados à correlação entre registros gráfico, simbólico e em língua natural. Consideramos também que a possibilidade de pensar-com as representações dinâmicas das superfícies quádricas teve papel determinante para as apreensões conceituais envolvidas.

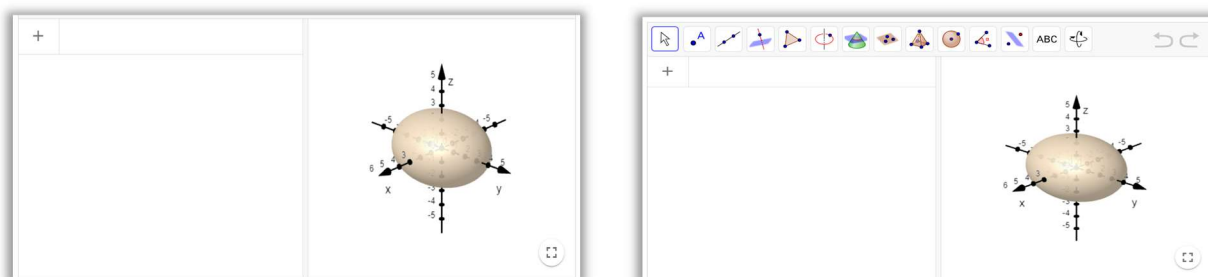
Inicialmente, a manipulação das representações dinâmicas nas antecipações e, depois, os ajustes na representação simbólica com observação dos efeitos sobre a representação gráfica qualificaram as apreensões figurais. Por sua vez, favorecendo o reconhecimento das superfícies quádricas por meio da análise das suas seções planas, essas apreensões figurais contribuíram para as conjecturas, ações e tomadas de consciência pelos participantes. Com isso, possibilitaram as apreensões conceituais com o enriquecimento das representações mentais dessas superfícies.

Essa atividade teve o objetivo de preparar os participantes para as seguintes (atividades 2 e 3), onde os desafios para a diferenciação entre as representações simbólicas das superfícies quádricas aumentam progressivamente. Na atividade 1, mobilizando esquemas de utilização, os participantes fizeram as escolhas adequadas dos termos linear e quadráticos e seus respectivos sinais nas representações simbólicas, a partir da observação das representações gráficas das superfícies quádricas.

Nas atividades 2 e 3, os participantes utilizaram esses conhecimentos para avançar, desenvolvendo esquemas conceituais para a diferenciação entre as quádricas, relativa aos

coeficientes nas suas representações simbólicas. A Figura 118 mostra a forma como essas atividades foram oferecidas.

Figura 118 – Exemplos das atividades de sobreposição da quádrlica.



(a) Sem a barra de menus.

(b) Com a barra de menus.

Fonte: Elaborado pela autora.

Para a conversão do registro gráfico para o simbólico na atividade 2, os participantes estimaram os valores dos coeficientes das variáveis a partir do acesso, manipulação e observação do objeto no registro gráfico dinâmico, mas sem a utilização das ferramentas do GeoGebra (Figura 118a). E, na atividade 3, os participantes puderam usar as ferramentas do GeoGebra para obter os valores dos coeficientes (Figura 118b).

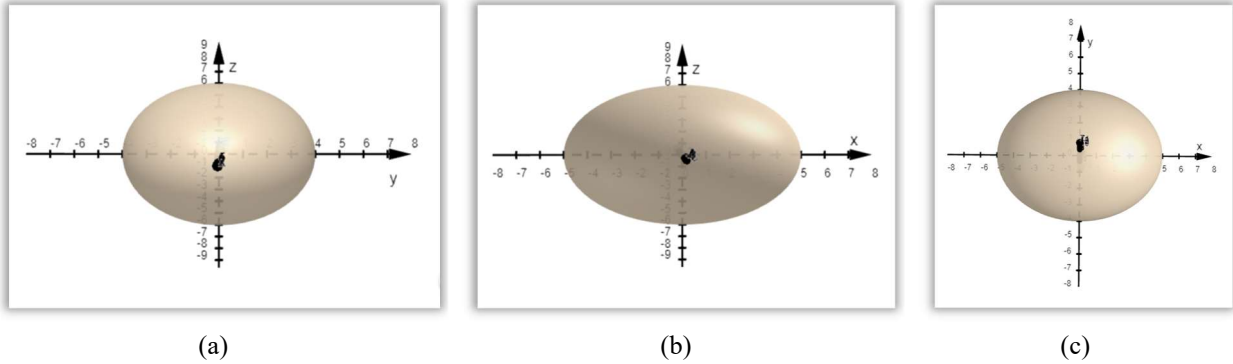
5.1.6.2 ATIVIDADE 2

No item a da atividade 2, os participantes foram desafiados a estimar os valores dos coeficientes nos termos quadráticos, apenas observando as representações gráficas das superfícies quádrlicas. Inicialmente, os coeficientes podem ser obtidos apenas por observação das representações dinâmicas. A intenção dessa atividade foi de instigar os participantes a encontrarem os coeficientes, preparando-os para a terceira atividade, quando foi possível utilizar as ferramentas para obter esses valores. A seguir, apresentamos uma possível solução para essa questão, seguida das propostas das questões dos itens b e c e dos dados das produções dos participantes.

No caso do elipsoide, a representação simbólica é dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde os valores de a , b e c correspondem às medidas dos semieixos das seções planas elípticas com os planos yoz , xoz e xoy , respectivamente. Essas medidas dos semieixos podem ser obtidas a partir das marcações sobre os eixos coordenados. Assim, girando a representação dinâmica dessa quádrlica para observar suas seções planas com os planos coordenados, é possível ver que

são elípticas e têm semieixos de medidas 5 e 4 no plano xoy (Figura 119a), 4 e 6 no plano yoz (Figura 119b) e 5 e 6 no plano xoz (Figura 119c).

Figura 119 – Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do elipsoide.

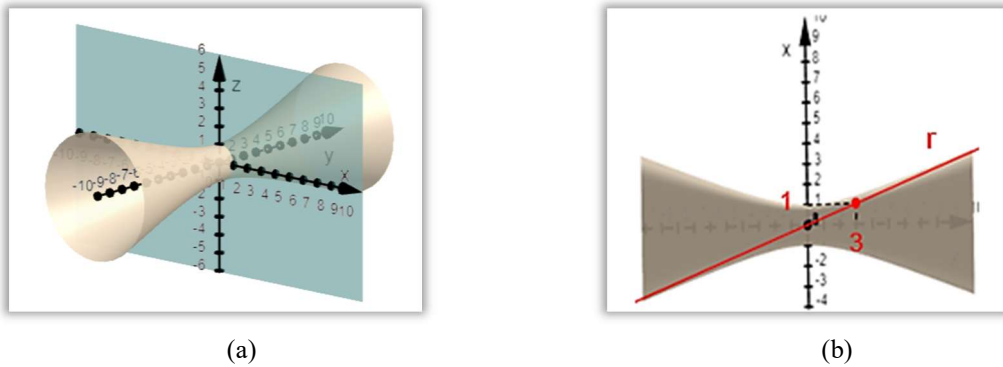


Fonte: Elaborado pela autora.

Relacionando as representações gráfica e simbólica, é possível dizer que as medidas dos semieixos do elipsoide sobre o eixo dos x , y e z equivalem, respectivamente, aos valores de a , b e c na equação dessa quádrlica. Dessa forma, a representação simbólica desse elipsoide em z e x é dada por $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$.

O hiperboloide de uma folha desenvolve-se ao longo do eixo dos y , logo tem equação da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Girando a representação dinâmica dessa quádrlica, é possível obter os coeficientes a e c a partir das medidas dos semieixos da sua seção plana elíptica com o plano xoz . Conforme mostra a Figura 120a, essa seção plana é uma circunferência de raio igual a 1, logo $a^2 = c^2 = 1$ e a equação desse hiperboloide de uma folha fica $x^2 - \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 1$.

Figura 120 - Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de uma folha.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para estimar o valor de b , é possível pensar numa reta r em posição aproximada da assíntota da seção plana hiperbólica do plano xoy (Figura 120b). Analisando essa reta, é

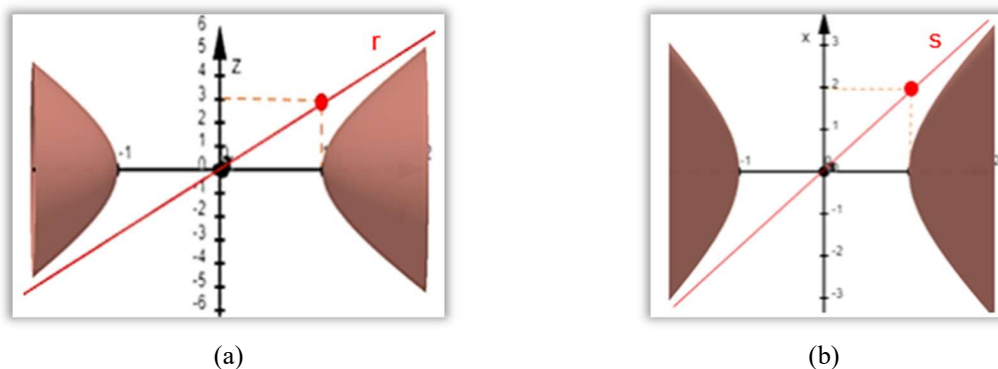
possível estimar as coordenadas do vértice da hipérbole. Quando $x = 1$ temos que $y = 3$, sendo estes os valores de a e b na equação desta quádrlica, respectivamente. O mesmo ocorre com a seção plana hiperbólica do plano yoz , em que $z = 1$ e $y = 3$ são os valores de c e b , respectivamente. Então, a representação simbólica desse hiperboloide de uma folha em y é dada por $x^2 - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$.

As linhas e os pontos dessa figura (Figura 120b) foram sobrepostos uma imagem dessa quádrlica, obtida por meio de um ‘print da tela’, uma vez que as ferramentas do GeoGebra não foram habilitadas nessa atividade. Assim, a proposta dessa atividade é que os valores obtidos por intermédio das assíntotas das hipérboles fossem aproximações das coordenadas daqueles pontos sobre as assíntotas.

No caso do hiperboloide de duas folhas, pelo fato de desenvolver-se ao longo do eixo dos y , sua representação simbólica é da forma $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Considerando o vértice dessa quádrlica, sabemos que $y = \pm 1$ quando $x = z = 0$, logo $b^2 = 1$. Girando a representação dinâmica dessa quádrlica, a partir da análise de suas seções planas hiperbólicas, podemos estimar os valores de a e c .

Imaginando uma reta r com a posição aproximada da assíntota da seção plana hiperbólica no plano yoz podemos estimar que a ordenada $y = 1$ do ponto sobre a reta r tem cota $z = 3$. Esses valores da ordenada e da cota correspondem, respectivamente, aos valores de b e de c na equação dessa quádrlica. (Figura 121a).

Figura 121 – Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de duas folhas.



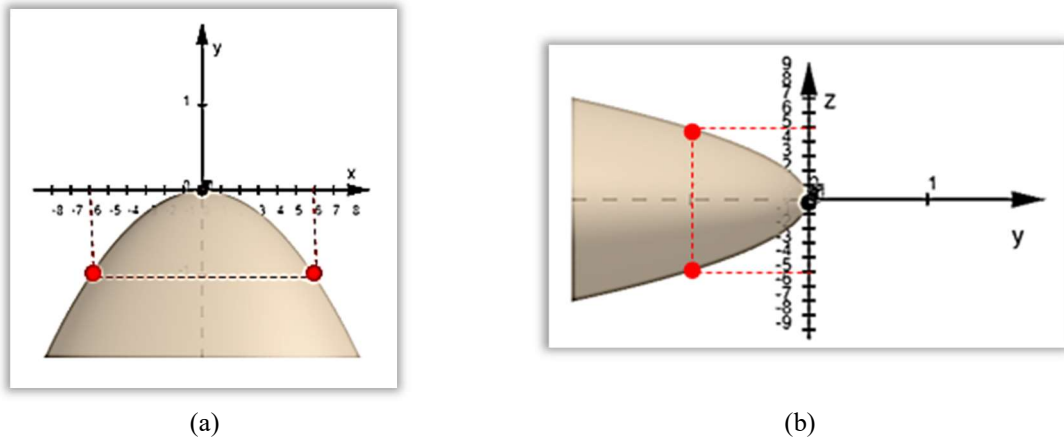
Fonte: Elaborado pela autora.

Analogamente, girando novamente a representação dinâmica da quádrlica e observando a seção plana hiperbólica no plano xoy (Figura 121b), é possível estimar que as coordenadas do ponto sobre a reta s são $x = 2$ e $y = 1$. Esses valores correspondem, respectivamente, aos

valores de a e b na equação dessa quádrlica. Assim, a representação simbólica do hiperboloide de duas folhas em y é dada por $-\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$.

O parabolóide elíptico tem concavidade voltada para o semieixo oy_- , logo tem equação da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -y$. Girando a representação dinâmica dessa quádrlica e observando a sua seção plana parabólica no plano xoy , é possível estimar que $x = \pm 6$ quando $y = -1$ (Figura 122a). Na representação simbólica dessa quádrlica, quando $z = 0$ (plano xoy) temos que $\frac{x^2}{a^2} = -y$, logo a^2 é igual a 36.

Figura 122 – Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do parabolóide elíptico.

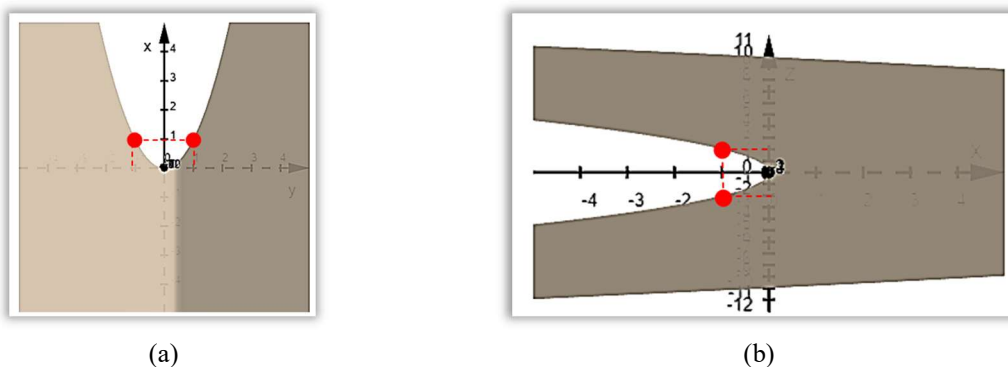


Fonte: Elaborado pela autora.

Girando novamente a representação gráfica dinâmica dessa quádrlica e observando a sua seção plana parabólica no plano yoz , é possível estimar que $z = \pm 5$ quando $y = -1$ (Figura 122b). Na representação simbólica dessa quádrlica, quando $x = 0$ (plano yoz) temos que $\frac{z^2}{b^2} = -y$, logo b^2 é igual a 25. Assim, a representação simbólica desse parabolóide elíptico em oy_- é dada por $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{25} = -y$.

Por fim, o parabolóide hiperbólico com parábola assento em ox_+ no plano xoy tem representação simbólica da forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = x$. Girando a representação dinâmica dessa quádrlica e observando a sua seção plana parabólica no plano xoy , é possível estimar que $y = \pm 1$ quando $x = 1$ (Figura 123a). Na representação simbólica dessa quádrlica, quando $z = 0$ (plano xoy) temos que $\frac{y^2}{a^2} = x$, logo $a^2 = 1$.

Figura 123 – Proposta para estimativa dos coeficientes na equação do parabolóide hiperbólico.



Fonte: Elaborado pela autora.

Girando novamente a representação gráfica dinâmica dessa quádrlica e analisando a sua seção plana parabólica no plano xoz , é possível estimar que $z = \pm 2$ quando $x = 1$ (Figura 123b). Na representação simbólica dessa quádrlica, quando $y = 0$ (plano xoz) temos que $\frac{z^2}{b^2} = -x$, logo $b^2 = 4$. Assim, a representação simbólica desse parabolóide hiperbólico com parábola assento em ox_+ no plano xoy é dada por $y^2 - \frac{z^2}{4} = x$.

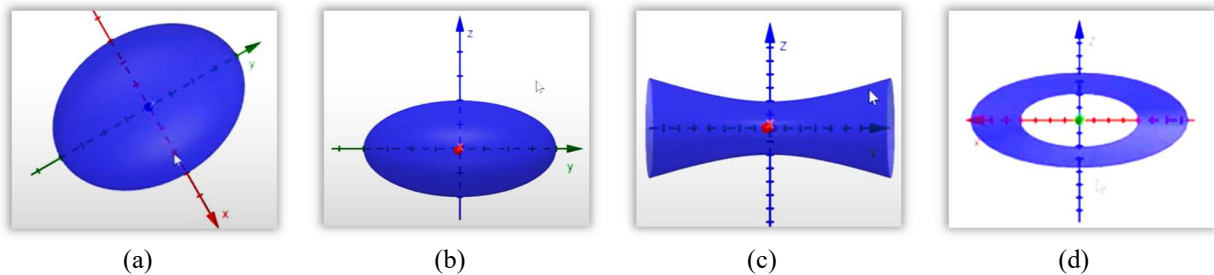
Depois de realizarem as antecipações no item a desta atividade, no item b os participantes foram convidados a inserir essas equações nas respectivas janelas de álgebra, quando foi possível confirmar ou refutar as suas conjecturas. Neste último caso, pensando-com as representações dinâmicas do GeoGebra, os participantes puderam realizar os ajustes nas equações, até que as quádrlicas se sobrepusessem exatamente às disponíveis na janela de visualização.

No item c, para dar maior visibilidade aos esquemas mobilizados ou constituídos pelos participantes, foram solicitadas justificativas para as escolhas dos termos lineares e quadráticos, seus sinais e coeficientes. As atividades sofreram alterações após a primeira aplicação, que ocorreu com o participante P1. Também ocorreram alterações nas representações gráficas das superfícies quádrlicas, de modo que algumas respostas de P1 podem ser diferentes dos demais participantes.

O participante P1, mobilizando espontaneamente esquemas conceituais, iniciou dizendo que as equações dos parabolóides têm duas variáveis de grau dois e uma de grau um e dos elipsoides e hiperbolóides tem as três variáveis de grau dois. A seguir, diferenciou os parabolóides elípticos e hiperbólicos, dizendo que o primeiro tem sinais positivos nos termos quadráticos e o segundo tem um sinal negativo. E diferenciou os hiperbolóides, dizendo que quando a equação tem um termo negativo é uma folha e dois negativos é de duas folhas.

Assim, partindo da representação simbólica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, P1 movimentou a representação dinâmica do elipsoide em y e z para observar as seções planas elípticas (Figura 124a e Figura 124b). P1 identificou as medidas dos semieixos dessa quádrlica (3, 4 e 2) contando as marcações sobre os eixos dos x , dos y e dos z , respectivamente. E, relacionando com os coeficientes de x^2 , y^2 e z^2 , P1 escreveu a equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ do elipsoide em y e x .

Figura 124 – Processo para conversão do registro gráfico para simbólico do elipsoide e do hiperboloide de uma folha por P1 (parte 1).



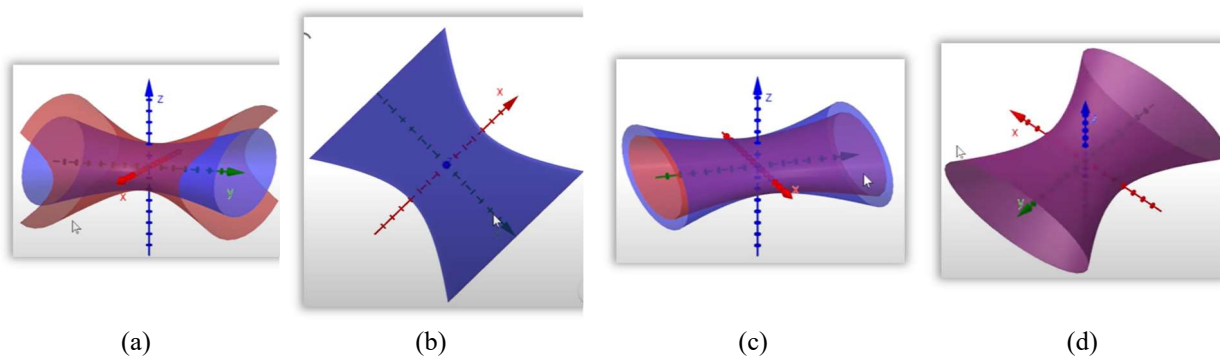
Fonte: Dados da pesquisa.

No hiperboloide de uma folha em y , P1 girou sua representação dinâmica (Figura 124c) e, relacionando representações gráfica e em língua natural, disse: “*É um hiperboloide de uma folha, então só um deles tem que ser o diferente. Então, é o y porque é ao longo do y que ele está*”. Com isso, P1 identificou os termos na equação dessa quádrlica e seus sinais, partindo da representação simbólica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Depois, girando novamente a representação dinâmica da quádrlica (Figura 124d), P1 relacionou as representações gráfica e simbólica, fazendo as seguintes conjecturas acerca dos valores dos coeficientes na equação dessa quádrlica: “*Agora para achar os valores dos denominadores, a única coisa que eu consigo dizer é que o z tá passando no 2 e o x está passando no 4. Então, eu acho que o z é 4, que é 2 ao quadrado (falando sobre o coeficiente c), e o x é 16, que é 4 ao quadrado (falando sobre o coeficiente a)*”.

Após analisar a seção plana elíptica no plano xoz , relacionando as medidas dos semieixos maior e menor (4 e 2) com os valores de a^2 e c^2 e supondo que $b^2 = 9$, P1 escreveu a equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$. Não encontrando a quádrlica que se sobrepõe exatamente a que está na janela de visualização (Figura 125a), o participante girou a representação dinâmica para que o plano xoy coincidissem com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 125b). Contando sete marcações sobre o eixo dos y , P1 disse “*Eu não sei, eu vou chutar, eu vou testar*”, alterando o valor de b^2 para 49.

Figura 125 – Processo de conversão do registro gráfico para simbólico do hiperboloide de uma folha por P1 (parte 2).



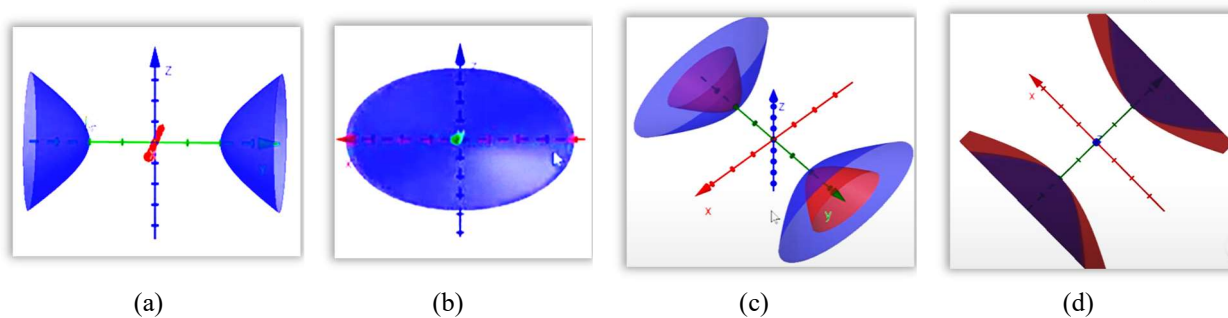
Fonte: Dados da pesquisa.

Obtendo a representação gráfica da Figura 125c, P1 conjecturou que o valor de b^2 precisaria ser menor e mudou para 25. Assim, P1 chegou na equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$ do hiperboloide de uma folha em y que se sobrepôs exatamente ao disponível na janela de visualização (Figura 125d).

Com isso, vimos que P1 mobilizou esquemas conceituais que possibilitaram a identificação de dois dos três coeficientes na equação dessa quádrlica. O terceiro coeficiente foi encontrado pela mediação do GeoGebra, quando P1 modificou o valor de b^2 até que o hiperboloide de uma folha obtido se sobrepusesse ao disponível na janela de visualização.

No caso do hiperboloide de duas folhas em y , P1 girou a sua representação dinâmica até que o plano yoZ coincidissem com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 126a), dizendo: “*Ele é de duas folhas, então o eixo que é diferente é o y . Então, o y tem que ser positivo e os outros dois tem que ser negativos*”. Assim, P1 relacionou representações gráfica e em língua natural específica, quando identificou que é um hiperboloide de duas folhas em y .

Figura 126 – Processo de conversão do registro gráfico para simbólico do hiperboloide de duas folhas por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

E também relacionou essas representações com a representação simbólica, quando identificou que a superfície se desenvolve ao longo do eixo dos y , logo tem o coeficiente

referente a esta variável de sinal positivo e os demais negativos. Partindo da representação simbólica $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ desse hiperboloide de duas folhas, P1 girou a sua representação dinâmica para analisar a seção plana elíptica num plano paralelo a xoz (Figura 126b).

Contando 4 unidades nas marcações sobre os eixos dos x e dos z , P1 relacionou essas medidas dos seus semieixos menor e maior com os valores de a^2 e c^2 na equação dessa quádrlica. Com isso, encontrando a equação $-x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, P1 inseriu-a na janela de álgebra, obtendo a representação gráfica da Figura 126c.

Observando que não coincide com a representação gráfica disponível na janela de visualização, P1 alterou o valor do coeficiente de x^2 . P1 escreveu a equação $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, relacionando as três unidades nas marcações sobre o eixo dos x com o valor de a^2 . Obtendo a representação gráfica da Figura 126d, que ainda não se sobrepôs a disponível na janela de visualização, P1 alterou novamente os coeficientes na equação da quádrlica.

Fazendo $a^2 = 4$ e $c^2 = 4$, P1 escreveu a equação $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$, cuja representação gráfica coincidiu com a outra. Argumentando a respeito da escolha dos coeficientes de x^2 e z^2 na equação dessa quádrlica, P1 disse: *“Eu até pensei que seria 4, só que eu olhava aqui parecia que ele não tava exatamente em 4. Eu acho que o eixo tá meio ‘compridinho’ assim. Aqui eu contava 4 que agora eu tô contando 3”*.

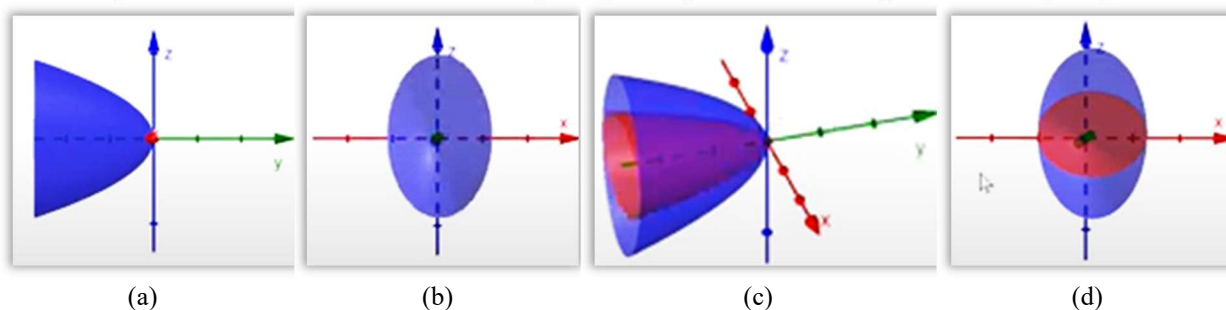
Dessa forma, podemos observar que o participante apresentou dificuldade em estabelecer as correspondências entre as unidades significantes gráficas e simbólicas relativas aos valores dos coeficientes na equação dessa quádrlica. Entendemos que é possível que o fato de o GeoGebra mostrar uma seção plana elíptica em lugar da circular contribuiu para isso. Esse obstáculo foi superado e a oportunidade aproveitada para conhecer essa limitação da representação gráfica no GeoGebra.

Com o parabolóide elíptico em oy_+ , P1 girou a sua representação dinâmica para observar a seção plana parabólica no plano yoz (Figura 127a). Relacionando as representações gráfica e em língua natural, disse: *“Isso aqui é um parabolóide elíptico”*. Depois, relacionando as representações gráfica e simbólica, P1 completou: *“Então vai ter duas variáveis ao quadrado e uma linear”*.

Então, P1 girou novamente a representação dinâmica do parabolóide elíptico (Figura 127b) e, observando a sua seção plana elíptica em plano paralelo ao plano xoz , disse: *“As minhas variáveis ao quadrado, eu imagino que seja o x e o z , que é quando eu tenho uma elipse”*. E, relacionando as medidas dos semieixos da projeção dessa elipse sobre o plano xoz ,

P1 disse: “E o meu x , se cada tracinho for um (falando da marcação sobre o eixo dos x), ele é 3”.

Figura 127 – Processo de conversão do registro gráfico para simbólico do parabolóide elíptico por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Movimentando essa representação gráfica, P1 observou que em z não existiam marcações, o que não lhe permitiu observar a medida do semieixo que é paralelo ao eixo dos z . Então, P1 disse: “Os denominadores eu tô com dificuldade de perceber nesse aqui”. P1 girou novamente a representação dinâmica dessa quádrlica, observando a seção plana parabólica no plano yoz . E, não chegando a uma conclusão, decidiu inserir a equação $x^2 + z^2 = -y$ na janela de álgebra, desconsiderando momentaneamente os coeficientes.

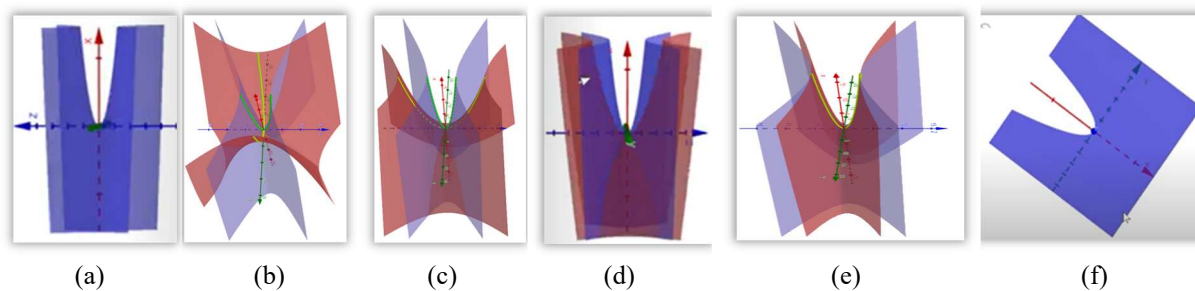
Obtendo a representação gráfica da Figura 127c, P1 observou que um dos eixos da seção plana elíptica em plano paralelo a xoz coincidia com o da quádrlica dada na questão, quando disse: “O x tá certo, mas o z não”. E, analisando as medidas dos semieixos paralelos ao eixo dos z das elipses vermelha e azul (Figura 127d), P1 alterou o valor do coeficiente de z^2 , obtendo a equação $x^2 + \frac{z^2}{4} = -y$ do parabolóide elíptico em oy_- que se sobrepôs exatamente ao disponível na janela de visualização.

Perguntando a razão das suas escolhas para os coeficientes na equação dessa quádrlica, P1 argumentou: “Primeiro eu vou deixar um nos dois (falando dos coeficientes de x^2 e z^2). Aí eu vi que um tava certo e outro tava mais ou menos metade assim, do tamanho. Aí eu só dobrei, deixei 2, e o quadrado é quatro”. Com isso, vimos o participante buscando as unidades significantes para a conversão da representação gráfica para a simbólica antes de inserir a equação no GeoGebra. Não conseguindo identificar os coeficientes na equação dessa quádrlica, P1 utilizou a mediação do GeoGebra.

Por fim, P1 girou a representação dinâmica do parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz , para analisar a parábola assento (Figura 128a), dizendo que: “Esse é aquele que é negativo (falando dos termos quadráticos), então o x é o que tá sozinho (falando do termo

linear). Então, vai ser y ao quadrado sobre alguma coisa mais o z ao quadrado sobre alguma coisa igual ao x “. Assim, o participante P1 reconheceu a existência de um termo negativo entre os termos quadráticos, mas a sua fala sugere a equação $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x$.

Figura 128 – Processo de conversão do registro gráfico para simbólico do parabolóide hiperbólico por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, P1 relacionou as representações gráfica, simbólica e em língua natural quando descreveu os termos na equação do parabolóide hiperbólico a partir da análise da sua representação gráfica. Considerando as palavras sublinhadas na fala de P1, entendemos que o participante identificou que os termos quadráticos têm sinais contrários e apenas se enganou quando usa a palavra ‘mais’.

Isso se confirmou quando P1 inseriu a equação $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = x$ na janela de álgebra, obtendo a representação gráfica do parabolóide hiperbólico da Figura 128b com assento em ox_+ no plano xoy (amarelo). O parabolóide hiperbólico dado na questão tem parábola assento em ox_+ no plano xoz (verde), então P1 inverteu os sinais na parte esquerda dessa equação. A parábola assento da nova equação ($-\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = x$), com eixo de simetria sobre o eixo dos x e concavidade voltada para o semieixo ox_+ , agora pertence ao plano xoz como a dada na atividade (Figura 128c).

Depois de encontrar os termos linear e quadráticos e os seus respectivos sinais, P1 fez a seguinte consideração: “*Tá parecido. Agora só falta ajustar os denominadores*”. E, relacionando elementos gráficos e simbólicos, P1 disse: “*O meu é o vermelho, né? Então, tem que ser mais estreito aqui*”. E, alterando o coeficiente de z^2 , P1 escreveu a equação $-\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = x$, obtendo a representação gráfica da Figura 128d.

Verificando que a abertura da parábola assento diminuiu, aproximando-se mais da quádrlica disponível na janela de visualização, P1 alterou novamente esse coeficiente. A nova equação ficou $-\frac{y^2}{9} + z^2 = x$ e tem a representação gráfica da (Figura 128e). Observando que

as parábolas assento das duas quádricas coincidiam, P1 alterou o coeficiente de y^2 para 4, escrevendo a equação $-\frac{y^2}{4} + z^2 = x$ do parabolóide hiperbólico em ox_+ no plano xoz , cuja representação gráfica coincidiu com a quádrica existente na janela de visualização.

Na justificativa das suas conjecturas na conversão da representação gráfica para a simbólica dessa quádrica, falando da parábola assento, P1 disse: *“Imaginei que x é a variável de grau 1 porque para cada valor de x tem dois das outras duas variáveis”*. E a respeito da escolha dos coeficientes, referindo-se à Figura 128f, P1 disse: *“Inicialmente eu coloquei assim e imaginei que aqui tava mais ou menos passando do 2 essa abertura”*. P1 argumentou que não tinha outro critério, e seguiu explicando: *“Daí como eu vi que tinha ficado mais amplo, eu tinha que diminuir um dos valores. Aí, eu fui testando os valores”*.

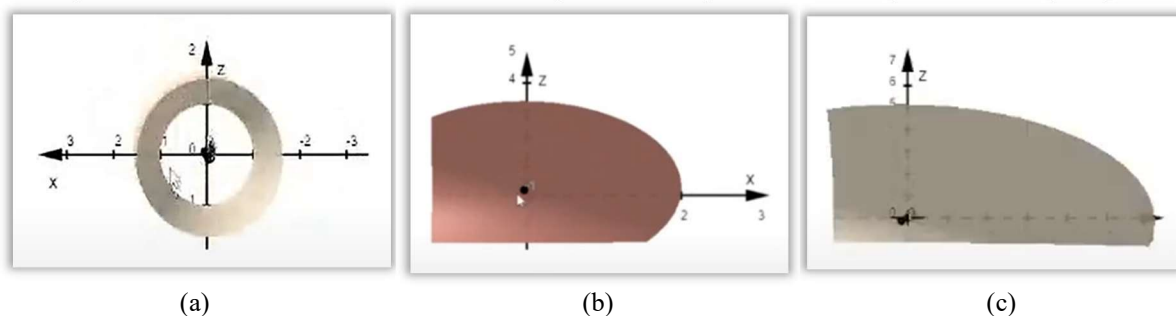
Novamente, vemos que P1 utilizou o *feedback* do GeoGebra para realizar a conversão da representação gráfica para a simbólica dessa quádrica. Pensando-com essas representações dinâmicas, P1 ajustou os sinais dos termos quadráticos colocando a parábola assento no mesmo plano (xoz) que a da superfície dada. E, depois de realizar os ajustes nos sinais, P1 iniciou a busca pelos valores dos coeficientes, observando a abertura da parábola assento.

Mudou algumas vezes um dos coeficientes, percebendo que precisaria mudar o outro coeficiente, uma vez que as parábolas assento coincidiram. Com isso, observamos maior espontaneidade do participante P1 na mobilização de esquemas de utilização para a realização da conversão da representação gráfica para a simbólica. O próprio participante percebeu a sua evolução, quando disse: *“Agora eu tenho mais claro as coisas na cabeça”*.

O participante P2 iniciou girando a representação dinâmica do elipsoide em z e x e, observando as seções planas elípticas nos planos xoy , xoz e $yozy$, identificou as medidas dos semieixos do elipsoide relativos aos eixos dos x , dos y e dos z (5, 4 e 6, respectivamente). Mobilizando esquemas conceituais, P2 relacionou esses valores com os coeficientes de x^2 , y^2 e z^2 , escrevendo a equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$.

Depois, girando a representação dinâmica do hiperbolóide de uma folha em y , P2 analisou sua seção plana no plano xoz , identificando que é uma circunferência e que $a^2 = c^2 = 1$ (Figura 129a). Girando novamente a representação dinâmica dessa quádrica, P2 observou a sua seção plana hiperbólica sobre o plano $yozy$, buscando identificar o valor do coeficiente de y^2 . Não chegando a uma conclusão sobre este coeficiente e, supondo que fosse igual a 1, P2 escreveu a equação $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$.

Figura 129 – Estimativa dos coeficientes nas equações dos hiperboloides e do parabolóide elíptico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

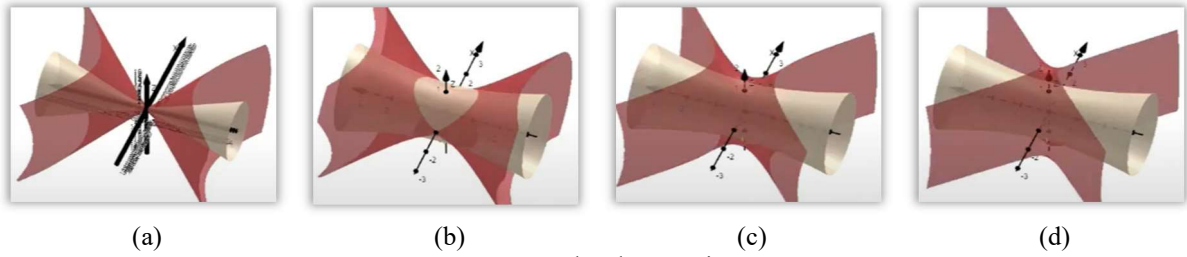
No hiperbolóide de duas folhas em y , P2 escolheu os coeficientes de x^2 e z^2 ($1/4$ e $1/9$) com base nas medidas (2 e 3) dos semieixos de uma seção plana elíptica sobre um plano paralelo ao plano xoz , considerando a sua projeção sobre este plano (Figura 129b). Girando novamente a representação dinâmica dessa quádrica, P2 analisou a seção plana hiperbólica no plano xoz para identificar o valor do coeficiente de y^2 . Não conseguindo estimar esse valor e, supondo novamente que fosse igual a 1, P2 escreveu a equação $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = 1$.

Girando a representação dinâmica do parabolóide elíptico em $oy_$, P2 observou as medidas dos semieixos de uma seção plana elíptica sobre um plano paralelo ao plano xoz (Figura 129c). Observando a projeção sobre o plano xoz , P2 considerou que os semieixos dessa elipse têm medidas 5 e 6. Então, P2 relacionou essas medidas com os coeficientes de x^2 e z^2 ($1/36$ e $1/25$), escrevendo a equação $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{25} = -y$.

Por fim, girando a representação dinâmica do parabolóide hiperbólico com assento em x no plano xoy , P2 analisou as suas seções planas parabólicas. Observando as parábolas assento e estribo, P2 conjecturou que os coeficientes de y^2 e z^2 fossem ambos iguais a $1/4$, escrevendo a equação $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = x$. Com isso, P2 concluiu as antecipações, quando o participante realizou a conversão das representações gráficas para as simbólicas antes de obter os seus gráficos. Inserindo as equações na janela de álgebra, P2 confirmou suas conjecturas nos casos do elipsoide, do hiperbolóide de duas folhas e do parabolóide elíptico.

E, nos casos do hiperbolóide de uma folha e do parabolóide hiperbólico, P2 realizou os ajustes nas equações, utilizando as ferramentas do GeoGebra para pensar-com as representações dinâmicas das superfícies quádricas. Inserindo a equação $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$ do hiperbolóide de uma folha na janela de álgebra, P2 obteve uma representação gráfica que não se sobrepôs exatamente a que estava na janela de visualização (Figura 130a).

Figura 130 – Estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de uma folha por P2 (parte 1).

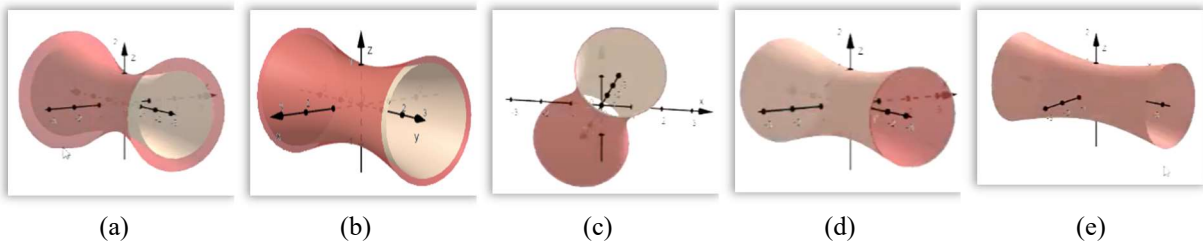


Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa ocasião, referindo-se ao valor de c^2 na equação $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, P2 disse: “*Eu acho que o valor de z deveria ser menor*”. Então, alterando algumas vezes esse valor, P2 obteve as representações gráficas para $c^2 = 0,5$ (Figura 130b), $c^2 = 2$ (Figura 130c) e $c^2 = 4$ (Figura 130d). Então, pedindo para que P2 observasse a seção plana elíptica, perguntamos quais eram as medidas dos eixos dessa elipse.

P2 respondeu que era igual a 1 e, percebendo que estava trocando o valor de outro coeficiente, disse: “*Ahhh não, é z e x, eu tinha que estar mexendo no y. Eu estava mexendo errado*”. Então, fazendo $c^2 = 1$ novamente, P2 iniciou a investigação do valor de b^2 na equação $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{1} = 1$. P2 alterou algumas vezes o valor de b^2 , obtendo as representações gráficas para $b^2 = 4$ (Figura 131a), $b^2 = 6$ (Figura 131b), $b^2 = 8$ (Figura 131c), $b^2 = 10$ (Figura 131d) e, finalmente, $b^2 = 9$ (Figura 131e).

Figura 131 – Estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de uma folha por P2 (parte 2).



Fonte: Dados da pesquisa.

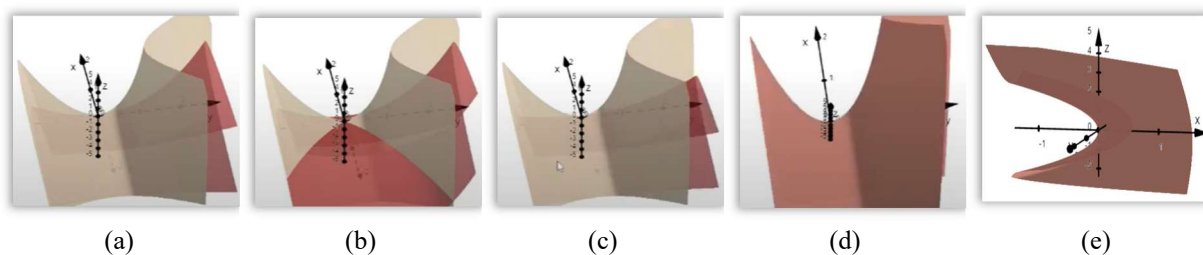
Com isso, observamos que P2 correlaciona unidades significantes gráficas e simbólicas, quando identificou os valores de dois dos coeficientes nas antecipações, analisando a seção plana elíptica. Não encontrando o valor do terceiro coeficiente dessa forma, P2 utilizou o *feedback* do GeoGebra. Pensando-com a representação dinâmica dessa quádrlica, P2 foi experimentando valores com base na representação gráfica obtida.

Consideramos que a escolha pela mudança no coeficiente de z^2 não foi consequência de um erro conceitual, mas de um engano. Isso ficou claro na fala de P2 e nas suas condutas

cognitivas, passando a fazer o ajuste no coeficiente de y^2 . Quando a quádrica obtida era externa a dada na questão, P2 diminuía o valor do coeficiente de y^2 (aumentando o valor de b^2) e, vice-versa, até que os hiperboloides de uma folha se sobrepusessem.

No caso do parabolóide hiperbólico, P2 inseriu a equação $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = x$ na janela de álgebra, obtendo a representação gráfica da Figura 132a. Não obtendo a quádrica que se sobrepõe exatamente a dada, alterou o coeficiente de z^2 para $-1/9$ (Figura 132b). Não encontrando o resultado esperado, retornou com o valor do coeficiente de z^2 para $-1/4$, alterando o coeficiente de y^2 para $1/9$ (Figura 132c). Por fim, alterando o coeficiente de y^2 para 1 (Figura 132d), P2 obteve a representação gráfica que se sobrepôs exatamente à presente na janela de visualização.

Figura 132 - Estimativa dos coeficientes na equação do parabolóide hiperbólico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Então, perguntamos a P2 os motivos das escolhas para os coeficientes na equação $\frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = x$ desse parabolóide hiperbólico. Girando a representação dinâmica dessa quádrica (Figura 132e), o participante disse: “Eu enxerguei aqui $y=0$ e o z aqui 2 e -2”. Observando a representação dinâmica na posição dessa figura, P2 entendeu que o eixo dos z interceptava a quádrica nos pontos $(0,0,-2)$ e $(0,0,2)$, mas esses pontos não pertencem à superfície.

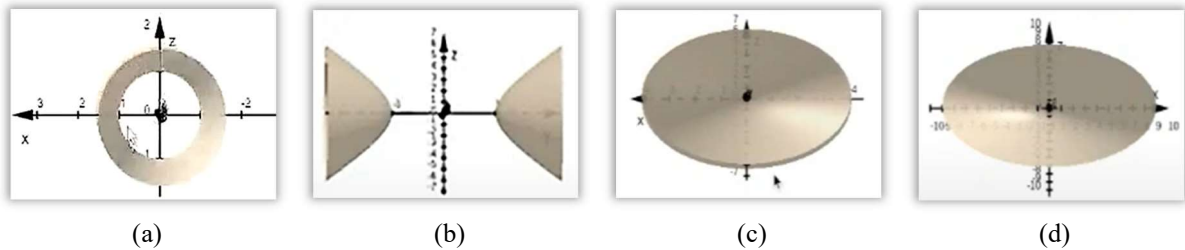
Com isso, foi possível ver que P2 mobilizou esquemas conceituais para analisar as seções planas das superfícies quádricas, identificando alguns dos coeficientes nas suas representações simbólicas por antecipação. Depois, obtendo as suas representações gráficas, P2 as utilizou como objetos de pensar-com para encontrar os demais coeficientes.

O participante P3 girou a representação dinâmica do elipsoide em z e x , para observar as suas seções planas elípticas sobre os planos coordenados. Mobilizando esquemas conceituais, P3 considerou que todas as variáveis são quadráticas, escolhendo corretamente os seus respectivos sinais e alguns dos coeficientes. Então, P3 escreveu a equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{15} = 1$.

A seguir, P3 considerou que todas as variáveis são quadráticas, identificando corretamente seus sinais na representação simbólica do hiperboloide de uma folha em y . Girando a representação dinâmica dessa quádrlica (Figura 133a), P3 observou que a seção plana no plano xoz é uma circunferência de raio 1. Relacionando aos coeficientes de x^2 e z^2 , P3 escreveu a equação $x^2 - \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 1$.

Girando esse gráfico e aumentando o zoom, P3 observou as suas seções planas hiperbólicas, mas não conseguiu estimar o valor de b^2 . Então, supondo que $b^2 = 1$, P3 escreveu a equação $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

Figura 133 - Estimativa dos coeficientes nas equações dos hiperboloides e do parabolóide elíptico por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Com o hiperboloide de duas folhas em y , P3 girou a sua representação dinâmica (Figura 133b) para observar a sua seção plana hiperbólica no plano yoz . Depois, girando novamente a representação dinâmica dessa superfície, observou a seção plana elíptica em plano paralelo a xoz . Então, considerando que todas as variáveis são quadráticas e escolhendo corretamente os seus respectivos sinais, P3 escreveu a equação $-\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{6} = 1$.

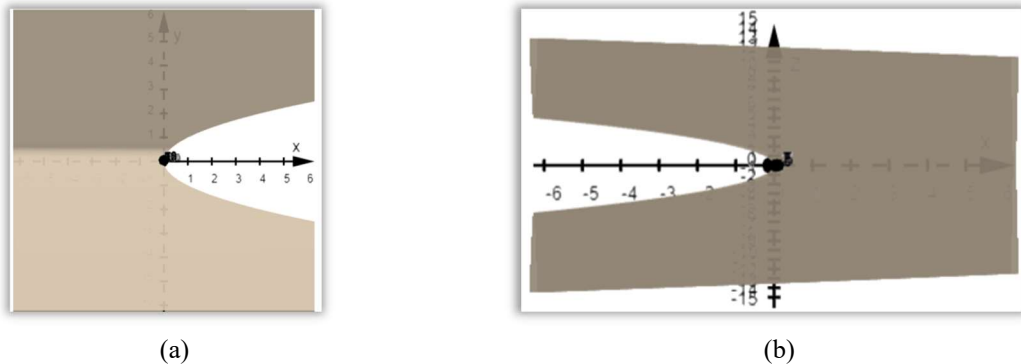
Observamos que P3 baseou a escolha dos denominadores dos termos quadráticos (4 e 6) nas medidas dos semieixos da seção plana elíptica que está num plano paralelo ao plano xoz , obtidas pela projeção dessa cônica neste plano coordenado (Figura 133c). No parabolóide elíptico em oy , P3 girou a sua representação dinâmica e, observando as seções planas parabólicas com os planos xoy e yoz , escolheu os termos linear e quadráticos e seus respectivos sinais.

A seguir, P3 baseou novamente a escolha dos denominadores dos termos quadráticos (9 e 8) nas medidas dos semieixos da seção plana elíptica que está num plano paralelo ao plano xoy , obtidas pela projeção dessa cônica neste plano coordenado (Figura 133d). Então, P3 obteve a equação $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{8} = -y$. Por fim, P3 observou as seções planas parabólicas do

parabolóide hiperbólico com assento em x no plano xoy , escolhendo corretamente seus termos linear e quadráticos e seus respectivos sinais.

Então, P3 observou a parábola assento no plano xoy , estimando que o valor do denominador de y^2 fosse igual a 4 (Figura 134a). E, observando a parábola estribo no plano xoz , P3 estimou que o valor do denominador de z^2 fosse igual a 12 (Figura 134b). Assim, P3 obteve a equação $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{12} = x$.

Figura 134 - Estimativa dos coeficientes na equação do parabolóide hiperbólico por P3.

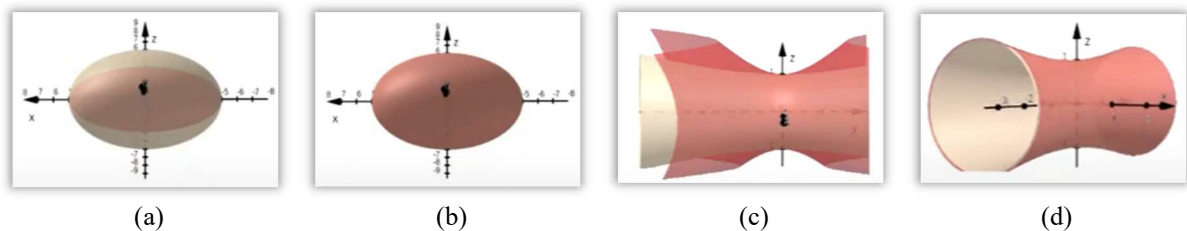


Fonte: Dados da pesquisa.

Encerrando as antecipações, P3 iniciou a inserção das representações simbólicas no GeoGebra para confirmar ou refutar suas conjecturas, realizando os ajustes com o apoio do GeoGebra. Então, P3 inseriu a equação do elipsoide $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{15} = 1$ na janela de álgebra, obtendo a representação gráfica da Figura 135a.

P3 observou que o eixo da seção plana elíptica no plano xoz que ficava sobre o eixo dos x coincidia com o da quádrica dada e que o outro, sobre o eixo dos z , era maior. Então, P3 alterou o denominador de z^2 para 36, obtendo a equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$ do elipsoide em z e x que se sobrepôs exatamente ao que estava disponível na janela de visualização (Figura 135b).

Figura 135 – Estimativa dos coeficientes nas equações do elipsoide e do hiperbolóide de uma folha por P3.



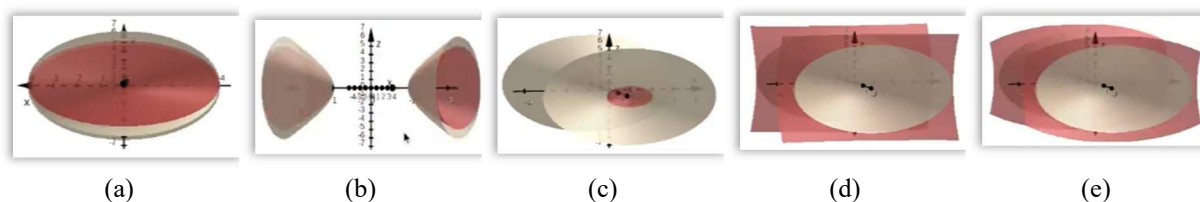
Fonte: Dados da pesquisa.

No hiperbolóide de uma folha, P3 inseriu na janela de álgebra a sua representação simbólica $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ obtida por antecipação, obtendo a representação gráfica da Figura

135c. Então, P3 reconheceu imediatamente o coeficiente errado, alterando o denominador de y^2 para 8. Girando novamente a representação dinâmica (Figura 135d), P3 observou que a superfície obtida ainda não coincidia com a que já estava na janela de visualização. Então, P3 alterou novamente o denominador de y^2 para 9, obtendo a equação $x^2 - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ do hiperboloide de uma folha em y dado na questão.

No hiperboloide de duas folhas, P3 inseriu a equação $-\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{6} = 1$ e, girando a representação dinâmica obtida, observou que esta não coincidia com a presente na janela de visualização (Figura 136a e Figura 136b). Então, conjecturando que o coeficiente de y^2 estaria errado. Então, P3 iniciou uma série de alterações nesse termo, obtendo as representações gráficas das equações $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{6} = 1$ (Figura 136c), $-\frac{x^2}{4} + 4y^2 - \frac{z^2}{6} = 1$ (Figura 136d) e $-\frac{x^2}{4} + 2y^2 - \frac{z^2}{6} = 1$ (Figura 136e).

Figura 136 - Estimativa dos coeficientes na equação do hiperboloide de duas folhas por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

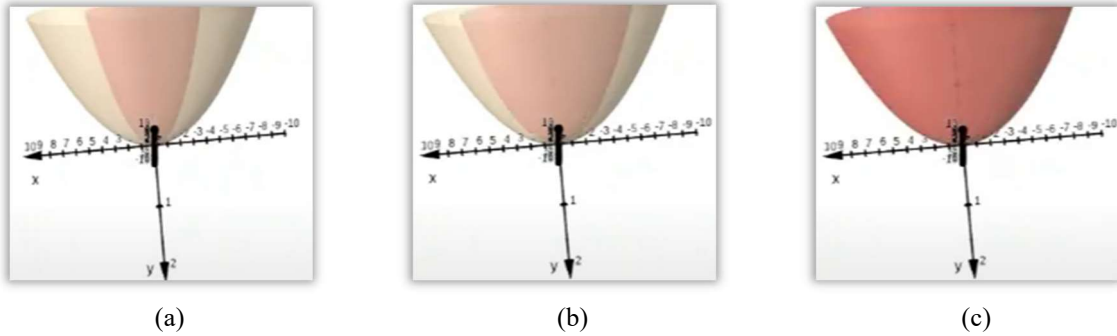
Não obtendo a representação simbólica do hiperboloide de duas folhas dado na questão, o participante parou de fazer os ajustes apoiado apenas no *feedback* do GeoGebra. Observando a representação gráfica correspondente à equação $-\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{6} = 1$ (Figura 136a), P3 verificou que o eixo menor da sua seção plana elíptica é menor.

Relacionando essa medida com o coeficiente de z^2 na equação do hiperboloide de duas folhas, P3 experimentou o denominador 7 para o coeficiente de z^2 , escrevendo a equação $-\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{7} = 1$. Não obtendo ainda a superfície desejada, P3 alterou o denominador de z^2 para 9, escrevendo a equação $-\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$ do hiperboloide de duas folhas em y dado na questão.

No paraboloides elíptico, P3 inseriu a equação $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{8} = -y$, obtendo a representação gráfica da Figura 137). Analisando a sua seção plana parabólica, P3 alterou o coeficiente do termo linear para 4, obtendo a equação $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{8} = -4y$ (Figura 137b). Então, P3 alterou esse

coeficiente novamente para 2, obtendo a equação $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{8} = -2y$ do parabolóide elíptico em $oy_$ cuja representação gráfica se sobrepôs exatamente ao dado na questão (Figura 137c).

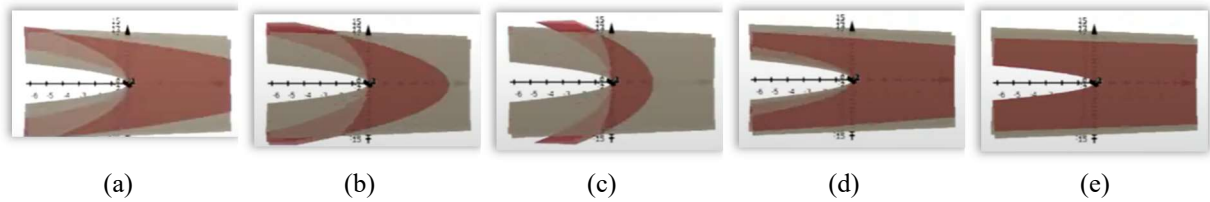
Figura 137 – Estimativa dos valores dos coeficientes na equação do parabolóide elíptico por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, com o parabolóide hiperbólico, P3 iniciou inserindo a equação $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{12} = x$, obtendo a representação gráfica da Figura 138a. Não obtendo uma representação gráfica coincidente com a que estava na janela de visualização, P3 alterou algumas vezes o coeficiente do termo linear, obtendo as representações gráficas das equações $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{12} = 2x$ (Figura 138b), $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{12} = 4x$ (Figura 138c), $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{12} = \frac{x}{2}$ (Figura 138d) e $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{12} = \frac{x}{4}$ (Figura 138e).

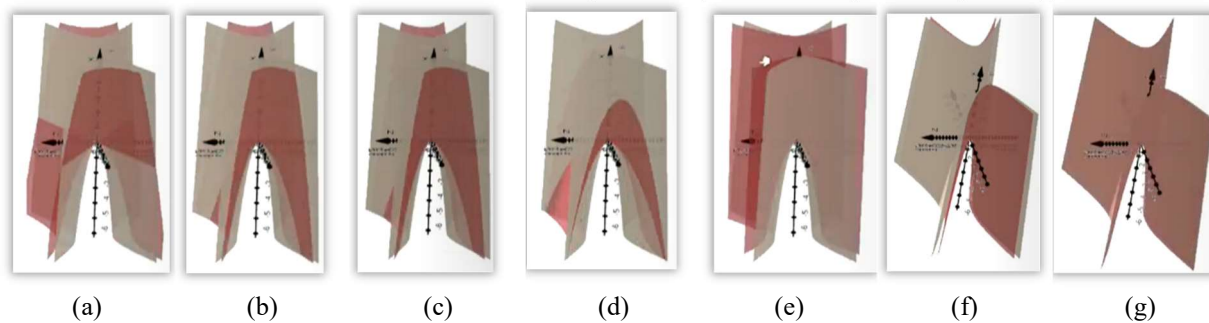
Figura 138 – Estimativa dos coeficientes na equação do parabolóide hiperbólico por P3 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Então, propomos que P3 considerasse a equação na forma canônica, onde o termo linear tem coeficiente 1, pensando nas possibilidades para os denominadores de y^2 e z^2 . Então, P3 iniciou mais uma série de alterações nos coeficientes de y^2 e z^2 , obtendo as representações gráficas das equações $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = x$ (Figura 139a), $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = x$ (Figura 139b), $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = x$ (Figura 139c), $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = x$ (Figura 139d), $\frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = x$ (Figura 139e), $\frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{3} = x$ (Figura 139f) e, finalmente, $\frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = x$ (Figura 139g).

Figura 139 – Estimativa dos coeficientes na equação do parabolóide hiperbólico por P3 (parte 2).



Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que o participante P3 escolheu não se deter muito nas antecipações, quando as equações foram obtidas apenas pela análise das representações gráficas, antes dos ajustes apoiados na mediação do GeoGebra. P3 utilizou, em grande parte das vezes, o método da tentativa e do erro, especialmente no caso do parabolóide hiperbólico.

As representações dinâmicas foram utilizadas pelos participantes de formas diferentes e igualmente importantes nessa atividade. Nas antecipações, os participantes manusearam esses objetos de pensar-com para analisar as representações gráficas das superfícies quádricas, buscando relacionar as unidades significantes gráficas e simbólicas sem o apoio do GeoGebra.

E no GeoGebra, os participantes utilizaram dois caminhos para pensar-com as representações dinâmicas na realização da atividade. Em algumas ocasiões, os mesmos fizeram alterações nas representações simbólicas até encontrar representações gráficas coincidentes, identificando os coeficientes apenas por meio da tentativa e do erro. Em outras, mesmo diante da possibilidade de se apoiar no *feedback* do GeoGebra, a análise da representação gráfica guiou as alterações na representação simbólica.

Em ambos os caminhos, os participantes fizeram antecipações e refletiram sobre os resultados obtidos. No entanto, entendemos que a tomada de consciência é mais provável de ocorrer nas situações em que os participantes identificaram as unidades significantes nas representações gráficas para obter as representações simbólicas.

Nessa atividade, vimos que os participantes já mobilizaram espontaneamente esquemas conceituais relativos às escolhas dos termos linear e quadráticos e seus sinais nas representações simbólicas das superfícies quádricas. Também iniciaram na identificação dos coeficientes, obtendo os valores possíveis no gráfico e estimando outros. O desafio proposto na atividade 3 é de utilizar as ferramentas do GeoGebra para obter os valores desses coeficientes nas representações simbólicas das superfícies quádricas.

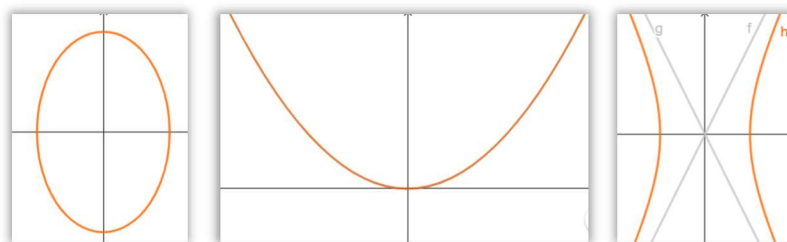
5.1.6.3 ATIVIDADE 3

De forma semelhante à proposta da atividade anterior, os participantes precisaram obter os coeficientes das representações simbólicas das superfícies quádricas, mas agora utilizando as ferramentas do GeoGebra. Outras equações foram utilizadas e, no caso do elipsoide, esses valores não eram inversos de números quadrados perfeitos. Essa escolha didática teve a intenção de levar o participante a usar as ferramentas do GeoGebra para fazer a conversão do registro gráfico para o simbólico.

Então, no item a desta atividade, foi proposto um ‘ensaio’ com as cônicas, quando os participantes foram desafiados a obter as suas equações. Conhecendo os sinais e termos lineares, quadráticos ou constantes nas equações das cônicas, os participantes utilizaram as ferramentas do GeoGebra para pensar-com as representações dinâmicas, descobrindo os valores dos coeficientes das variáveis nessas equações.

Assim, foram fornecidas representações gráficas das cônicas sem numeração ou marcação sobre os eixos coordenados. Dessa forma, os participantes não puderam basear-se apenas na observação das representações gráficas, precisando utilizar as ferramentas para obter os coeficientes nas suas equações (Figura 140). A seguir, apresentamos uma possível solução para esta proposta e, depois, as soluções dos participantes.

Figura 140 – Conversão das representações gráficas para a simbólicas das cônicas.

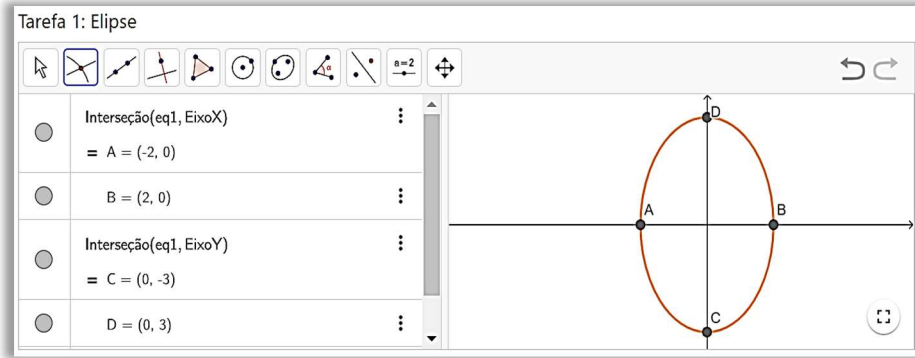


Fonte: Elaborado pela autora.

A elipse tem equação da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde a e b são as medidas dos semieixos menor e maior, respectivamente. Usando a ferramenta ‘Intersecção de objetos’, é possível encontrar os pontos $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 3)$ de intersecção dessa cônica com os eixos dos x e dos y , respectivamente (Figura 141).

Relacionando unidades significantes gráficas e simbólicas, podemos dizer que as medidas dos semieixos menor e maior são, respectivamente, $a = 2$ e $b = 3$ e a equação da elipse é dada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

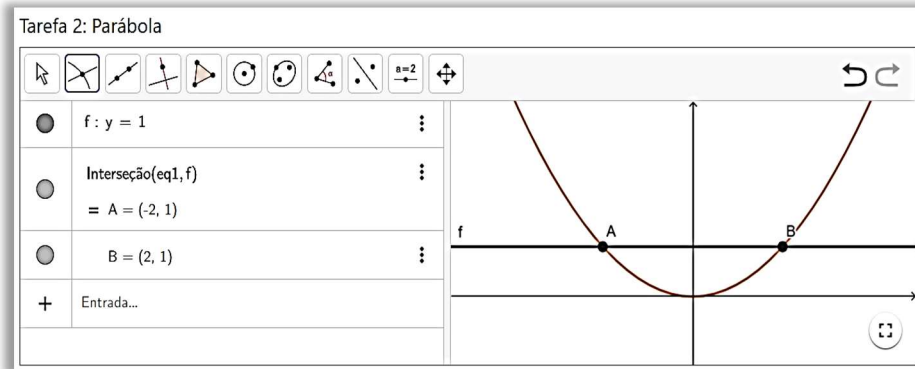
Figura 141 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica da elipse.



Fonte: Elaborado pela autora.

A parábola dessa atividade tem eixo de simetria sobre o eixo dos y e concavidade voltada para a parte positiva deste eixo, logo a sua equação é da forma $\frac{x^2}{a^2} = y$ (Figura 142). É possível calcular o valor de a^2 obtendo, por exemplo, o ponto de intersecção desta cônica com a reta de equação $y = 1$.

Figura 142 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica da parábola.



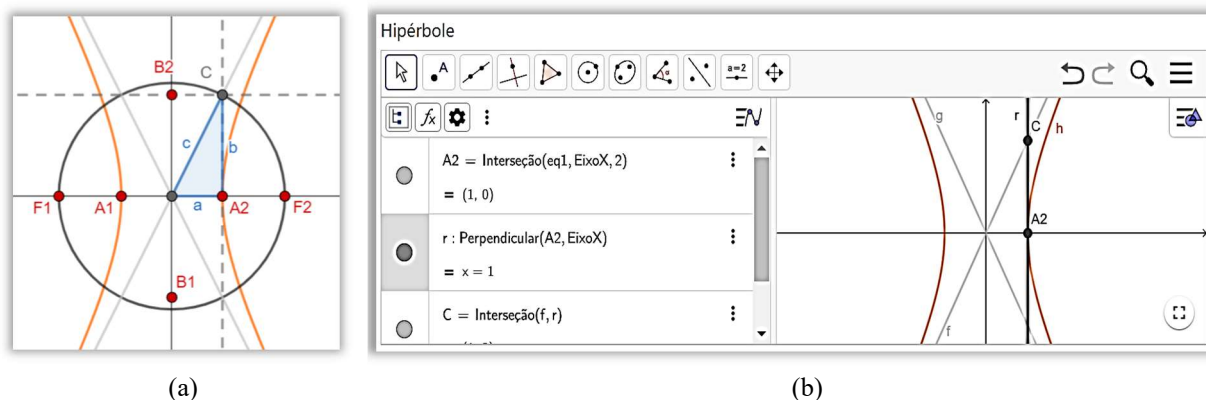
Fonte: Elaborado pela autora.

Inserindo a equação dessa reta na janela de álgebra, obtemos os pontos $(\pm 2, 1)$ de intersecção com esta cônica. Substituindo $x = 2$ e $y = 1$ na equação da parábola, obtemos $a^2 = 4$ e a sua representação simbólica fica $\frac{x^2}{4} = y$.

Na equação da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = \pm a$ para $y = 0$, onde $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ são os vértices da hipérbole, ou extremidades do eixo real. Na Figura 143a, consideremos a circunferência de centro na origem e que passa pelos focos da hipérbole $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. No triângulo retângulo OA_2C , a hipotenusa é a medida c do raio da circunferência e os catetos

a e b são as medidas dos semieixos real e imaginário, respectivamente. Então, as coordenadas do ponto C correspondem aos valores de a e b na equação da hipérbole.

Figura 143 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica da hipérbole.



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, na Figura 143b, os coeficientes na equação da hipérbole podem ser obtidos a partir das coordenadas do ponto C . Para obter as coordenadas do ponto C , podemos iniciar obtendo o vértice $A_2(1,0)$ da hipérbole, pela intersecção dessa cônica com o eixo dos x . Depois, obtemos a reta r , perpendicular ao eixo dos x no ponto A_2 .

O ponto $C(1,2)$ é obtido pela intersecção da reta r com a assíntota f da hipérbole. Relacionando unidades significantes gráficas e simbólicas, podemos dizer que as coordenadas desse ponto correspondem aos valores dos coeficientes na representação simbólica da hipérbole. Nesse caso, $a^2 = 1$ e $b^2 = 4$ e a equação fica $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

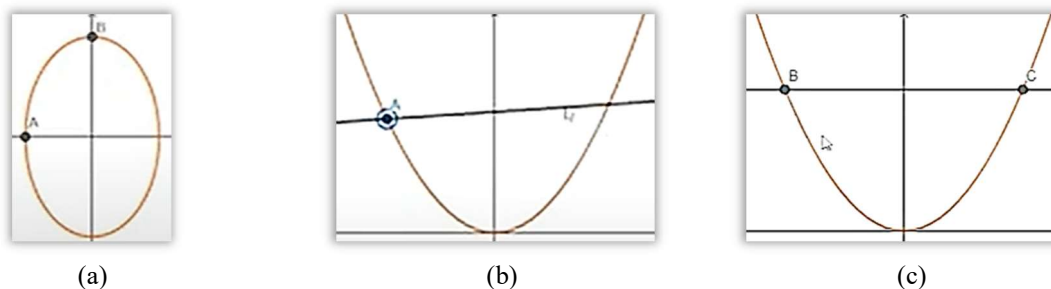
Nessa atividade, depois de realizarem as antecipações, os participantes puderam confirmar ou refutar suas conjecturas inserindo as representações simbólicas encontradas na janela de álgebra do GeoGebra. As representações gráficas obtidas precisavam coincidir com as já disponíveis na janela de visualização. Em caso contrário, foi possível utilizar o GeoGebra para fazer os ajustes nas representações simbólicas.

Essa questão não foi proposta na primeira aplicação, por isso apresentamos a seguir apenas os resultados dos participantes P2 e P3. O participante P2 iniciou definindo os termos e sinais destes, como na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Perguntando ao participante qual é a relação entre os valores de a e b nessa equação com o gráfico da elipse, P2 respondeu: “A raiz quadrada do a e do b me dá as extremidades dos eixos maior e menor”.

Então, perguntamos como determinar os valores de a e b e, demonstrando, P2 utilizou a ferramenta ‘Ponto’ para inserir os pontos $A(-2,0)$ e $B(0,3)$ (Figura 144a). Então, P2

relacionou as medidas dos semieixos da elipse (abscissa do ponto A e ordenada do ponto B) com os valores de a^2 e b^2 na equação da elipse. Assim, P2 escreveu a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ e, inserindo na janela de álgebra, obteve a representação gráfica coincidente com a disponível na janela de visualização.

Figura 144 – Conversão do registro gráfico para o simbólico da elipse e da parábola por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na justificativa, P2 explicou como encontrou os valores dos coeficientes a e b : “*Utilizei dois pontos nas extremidades*”. Com isso, podemos ver que o participante identificando as unidades significantes que permitiram a correlação entre as representações gráficas e simbólicas. P2 poderia ter utilizado a ferramenta ‘Intersecção de objetos’, mais adequada para obter os pontos A e B, mas isso não trouxe prejuízos nessa tarefa.

No caso da parábola, P2 iniciou escolhendo os termos linear e quadrático na sua representação simbólica, dizendo: “*Essa aqui eu sei que vai ser $y^2 = x$, agora os coeficientes eu não sei*”. Então, P2 selecionou a ferramenta ‘Reta por dois pontos’, clicando num ponto sobre a parábola e tentando clicar no ponto simétrico a este em relação ao eixo dos y . Referindo-se à tentativa de obter uma reta paralela ao eixo dos x , P2 disse: “*Eu consigo uma reta aqui, mas eu não tenho certeza se vai ser reto*” (Figura 144b).

Como P2 não havia feito uso do GeoGebra antes da participação nessa pesquisa, sugerimos que o participante explorasse as ferramentas do GeoGebra para obter essa reta com a inclinação desejada. Então, P2 analisou os menus de ferramentas, observando as relacionadas à obtenção de retas perpendiculares, paralelas, etc. Inserindo um ponto A sobre a parábola e, usando a ferramenta ‘Retas paralelas’, P2 obteve uma reta paralela ao eixo dos x e que passa por A (Figura 144c).

Depois, P2 analisou o menu de ferramentas para obtenção de pontos e, escolhendo a ‘Intersecção de dois objetos’, obteve os pontos B e C da parábola. O ponto B coincidente com o ponto A e, o ponto C, simétrico a B em relação ao eixo dos y . Como as coordenadas desses pontos não eram valores inteiros, P2 tentou obter informações do gráfico de outra forma.

Primeiro, P2 inseriu a equação $y = 3$ de uma reta paralela ao eixo dos x , e obteve os pontos E e F de intersecção com a parábola.

Observando que as abscissas não tinham valores inteiros, P2 alterou a equação da reta paralela ao eixo dos x para $y = 1$, obtendo os pontos $G(-2,1)$ e $H(2,1)$ de intersecção com a parábola. Então, perguntamos a relação desses pontos com a equação da parábola, quando P2 tentou substituir as coordenadas do ponto H na equação $\frac{y^2}{b} = x$ para obter o valor de b .

Nessa oportunidade, P2 identificou o erro na escolha dos termos linear e quadrático, reescrevendo a equação $\frac{x^2}{b} = y$. Fazendo $x = 2$ e $y = 1$, P2 calculou o valor de $b = 4$, obtendo $\frac{x^2}{4} = y$ e explicando a sua resolução através dos passos que utilizou “1 ponto, uma reta a partir do ponto e a intersecção da parábola com a reta”. Com isso, foi possível ver P2 constituindo novos esquemas de utilização relacionados à obtenção de retas paralelas.

Na hipérbole, P2 iniciou escrevendo a sua equação genérica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Então, perguntamos a relação entre os valores de a e b da equação com o gráfico. Considerando que a e b representam as medidas os eixos real e imaginário, P2 obteve o ponto $A(1,0)$ de intersecção da hipérbole com o eixo dos x . E, fazendo $x = 1$ e $y = 0$ na equação da hipérbole, P2 obteve o valor de $a^2 = 1$.

Não encontrando uma forma de identificar o valor de b^2 , oferecemos a P2 a possibilidade de explorar a construção da Figura 143a. Depois de analisar essa construção, P2 obteve a reta h que passa por A e é perpendicular a esse eixo, para obter o ponto $B(1,2)$ de intersecção de h com a assíntota da hipérbole. Então, P2 escreveu a equação $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1$, obtendo a representação gráfica de uma hipérbole que não coincide com a disponível na janela de visualização (Figura 145a).

Figura 145 – Conversão do registro gráfico para o simbólico da hipérbole por P2.



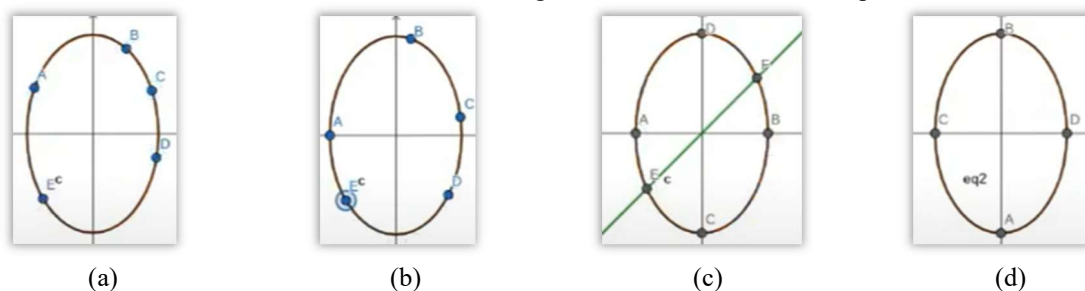
Fonte: Dados da pesquisa.

Percebendo o erro, P2 alterou o valor do denominador de y^2 , escrevendo a equação $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ e obtendo a representação gráfica que se sobrepôs a já existente na janela de visualização (Figura 145b).

Na justificativa, P2 explicou como encontrou as coordenadas do ponto sobre a assíntota da hipérbole que correspondem aos valores de a e b na sua equação, mostrando os passos que percorreu: “1 ponto na origem (vértice) da hipérbole, uma reta a partir deste ponto, e um ponto na intersecção da reta com a assíntota”. Nessa tarefa, foi possível observar que P2 conseguiu ultrapassar o obstáculo que surgiu na identificação das unidades significantes, realizando a correlação entre as representações gráficas e simbólicas.

O participante P3 iniciou a atividade experimentando a ferramenta ‘Cônica por 5 pontos’ para obter a elipse. Selecionando esta ferramenta e os pontos A, B, C, D e E sobre a representação gráfica da elipse já existente, obteve um novo gráfico coincidente (Figura 146a).

Figura 146 - Conversão do registro gráfico para o simbólico da elipse por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Então, buscando identificar os coeficientes na equação dessa cônica, P3 analisou o comando gerado por essa ação na janela de álgebra. A equação gerada se tratava de uma aproximação da representação simbólica da elipse, que continha o termo misto xy e coeficientes decimais infinitos (com mais de dez casas decimais). Então, P3 moveu os pontos sobre a elipse (Figura 146b) e, não encontrando os valores dos coeficientes da equação da elipse, apagou todos os passos para fazer uma nova tentativa.

P3 obteve os pontos $A(-2,0)$ e $B(2,0)$ de intersecção da elipse com o eixo dos x e $C(0,-3)$ e $D(0,3)$ com o eixo dos y . A seguir, P3 inseriu a reta $y = x$, obtendo os pontos E e F de intersecção com a elipse (Figura 146c). E, utilizando novamente a ferramenta ‘Cônica por 5 pontos’, P3 obteve uma nova representação gráfica da elipse. P3 observou novamente o comando gerado nesse passo na janela de álgebra e, não conseguindo identificar os coeficientes da equação da elipse, fez nova tentativa.

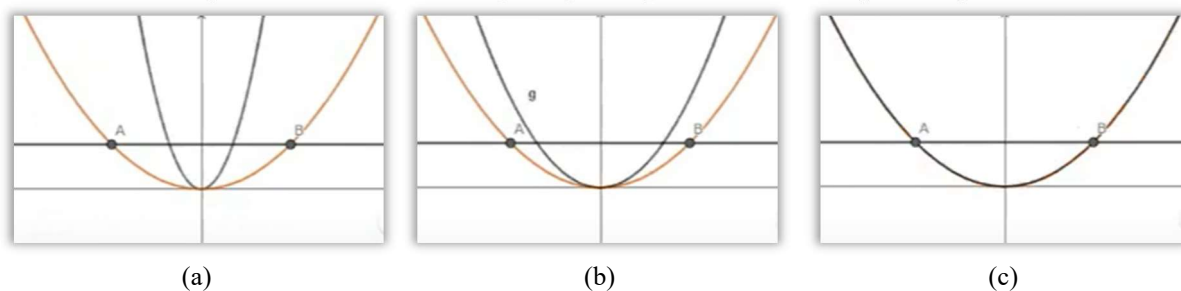
P3 obteve os pontos de intersecção da elipse com os eixos coordenados, $A(0, -3)$ e $B(0, 3)$ com o eixo dos y e $C(-2, 0)$ e $D(2, 0)$ com o eixo dos x (Figura 146d). Depois, P3 relacionou os coeficientes na equação da elipse com as medidas dos seus semieixos menor e maior, escrevendo direto na janela de álgebra a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Inserindo essa equação na janela de álgebra, P3 obteve uma representação gráfica coincidente com a disponível na janela de visualização.

Justificando as suas conjecturas, P3 argumentou: “*Sabendo que o valor de a e b são metade dos eixos focais, encontrei os valores de a e b sabendo as intersecções entre os eixos coordenados e a elipse*”. Observamos que os esquemas de utilização constituídos por P3 lhe permitiram experimentar e testar suas conjecturas com diferentes ferramentas. O participante conseguiu identificar as unidades significantes que lhe permitiram estabelecer a correspondência entre as representações gráficas e simbólicas da elipse.

Com a parábola, P3 inseriu a reta $y = 1$ na janela de álgebra, obtendo os pontos $A(-2, 1)$ e $B(2, 1)$, de intersecção com a parábola. Depois, P3 escolheu adequadamente o termo linear e quadrático, inserindo a equação $y = 2x^2$ (Figura 147a). Observando que a representação gráfica obtida não coincide com a já existente na janela de visualização, P3 alterou o coeficiente do termo quadrático, obtendo a equação $y = \frac{x^2}{2}$ (Figura 147b).

Não sendo a representação gráfica esperada, P3 alterou novamente o coeficiente do termo quadrático, obtendo a equação $y = \frac{x^2}{4}$ (Figura 147c) da parábola coincidente com a dada na questão.

Figura 147 - Conversão do registro gráfico para o simbólico da parábola por P3.



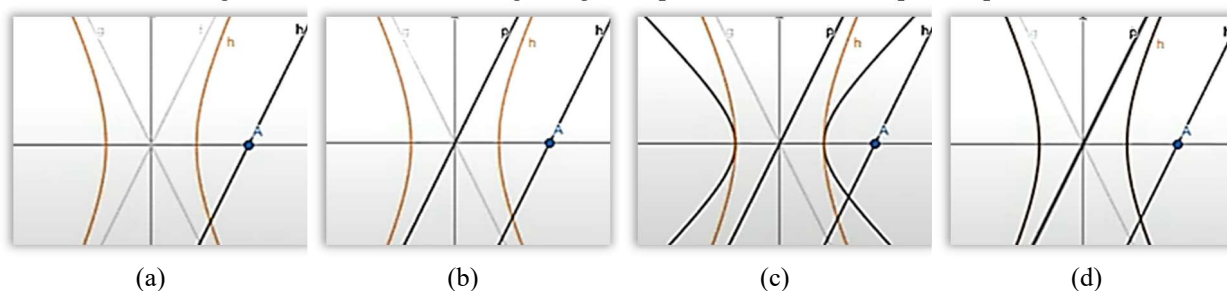
Fonte: Dados da pesquisa.

Na sua justificativa para a conversão do registro gráfico para o simbólico da elipse, P3 registrou: “*Traçando uma paralela ao eixo x , por exemplo $y=1$ e sabendo que $2py = x^2$ é a equação geral da parábola, obtemos $p=2$, logo obtemos a equação*”. Vimos que P3 identificou os termos linear e quadrático na representação simbólica da parábola por antecipação.

No entanto, não utilizou as ferramentas do GeoGebra para identificar as unidades significantes gráficas que lhe permitissem correlacionar com as simbólicas. P3 escolheu encontrar o coeficiente de x^2 na equação da parábola pelo método da tentativa e do erro, apoiando-se no *feedback* do GeoGebra. Porém, na sua justificativa, é possível ver que P3 mobilizou esquemas relacionados ao conceito de parábola, dando indícios de que conseguiu correlacionar as representações gráfica e simbólica dessa cônica.

Por fim, na hipérbole, P3 obteve uma reta h que passa por A e é paralela à assíntota f da hipérbole, observando a sua equação na janela de álgebra (Figura 148a). Então, P3 escreveu a equação $y = 2x$ da assíntota f , que tem o mesmo coeficiente angular da reta h e passa pela origem do sistema cartesiano (Figura 148b).

Figura 148 - Conversão do registro gráfico para o simbólico da hipérbole por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, P3 identificou os graus e sinais dos termos na equação da hipérbole e , inserindo a equação $x^2 - y^2 = 1$ na janela de álgebra, obteve a representação gráfica de outra hipérbole (Figura 148c). Então, alterando o coeficiente de y^2 , P3 obteve a equação $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, cuja representação gráfica coincidiu com a da hipérbole disponível na janela de visualização (Figura 148d).

Perguntando ao participante qual o motivo para a escolha desses coeficientes na equação da hipérbole, P3 respondeu que: “A proporção do b para o a é 2”. Observamos que P3 relacionou o coeficiente angular $\frac{b}{a} = \frac{2}{1}$ da equação $y = 2x$ da assíntota f com os denominadores de x^2 e y^2 na equação da hipérbole. É possível que P3 tenha considerado que os valores de a^2 e b^2 na equação da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ podem ser obtidos considerando a sua forma degenerada $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Da forma degenerada da equação dessa hipérbole, podemos escrever $y = \pm \frac{b}{a}x$, que são as equações das suas assíntotas. No entanto, na sua justificativa, P3 registrou duas maneiras de

obter esses coeficientes: “Traçando uma paralela r ao eixo y que passa no vértice, sendo a intersecção entre a hipérbole e o eixo x , logo obtemos $a = 1$. Duas maneiras de encontrar b são: 1) Traçar uma paralela a uma das assíntotas, obtendo $y = 2x$, e para o termo independente $k = 0$, obtemos $b^2x^2 - y^2 = 0$, logo $b^2 = 4$. Isto pois $a = 1$. 2) Para encontrar o b , traçamos uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto de intersecção entre r e as assíntotas, obtemos o valor de b no eixo y ”.

Com base nesses argumentos, vemos que P3 identificou o valor de a^2 considerando que, quando $y = 0$, a equação da hipérbole ficaria $\frac{x^2}{a^2} = 1$. Como o vértice $(1,0)$ da hipérbole é um ponto dessa cônica, fazendo $x = 1$ nessa equação, P3 obteve o valor de $a^2 = 1$. Para encontrar o valor de b , P3 obteve a assíntota da hipérbole $y = 2x$, realizando tratamentos algébricos sobre a forma degenerada da equação dessa cônica (termo independente nulo): $y^2 = 4x^2 \rightarrow 4x^2 - y^2 = 0 \rightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 0$. P3 também apresentou outra forma de obter o valor de b .

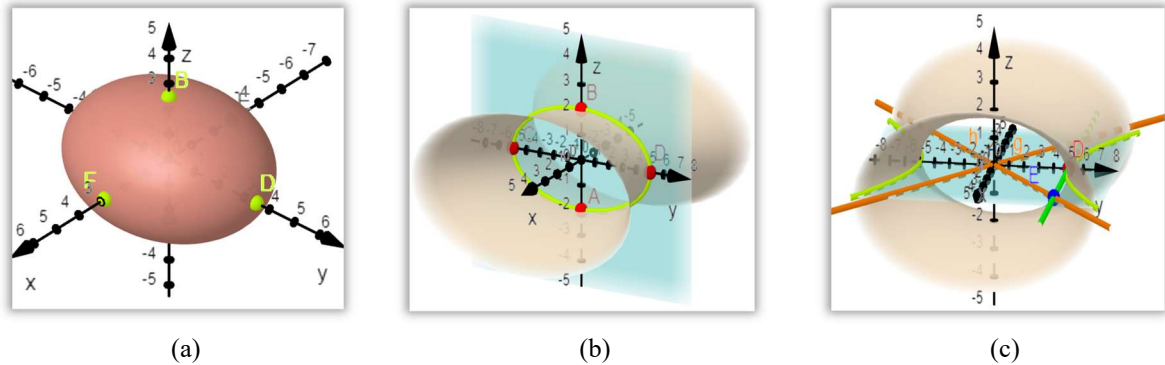
Com isso, foi possível ver que P3 mobilizou esquemas de utilização que lhe permitiram a correlação entre as representações gráfica e simbólica. Nessa questão, os participantes mobilizaram esquemas de utilização para estabelecer a correspondência entre as representações gráficas e simbólicas das cônicas. Foi possível ver que as representações dinâmicas, como objetos para pensar-com, possibilitaram aos participantes conjecturar, confirmar ou refutar hipóteses, refletindo sobre suas conjecturas até a tomada de consciência.

Como dito anteriormente, essa experiência com as cônicas consistiu de uma preparação para o desafio de conversão do registro gráfico para o simbólico com as quádricas. Assim, no item b dessa atividade, os participantes utilizaram as ferramentas do GeoGebra para obter os coeficientes nas equações dessas superfícies. Os valores dos coeficientes nem sempre eram inversos de números quadrados perfeitos, para que os participantes não os obtivessem apenas por observação do gráfico, mas que tivessem que utilizar ferramentas do GeoGebra para obtê-los.

A seguir, apresentamos uma das formas para encontrar os coeficientes nas equações das superfícies quádricas e, na sequência, as resoluções dos participantes. O elipsoide tem equação da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Usando a ferramenta ‘Intersecção de dois objetos’ é possível obter os pontos de coordenadas $x \cong \pm 2.83$ e $y = z = 0$; $y \cong \pm 3.46$ e $x = z = 0$; e $z \cong \pm 2.45$ e $x = y = 0$ ⁴², de intersecção dessa quádrica com os eixos coordenados (Figura 149a).

⁴² Nessas atividades, os valores não inteiros das coordenadas dos pontos foram obtidos do GeoGebra, com aproximação de duas casas decimais. Esse arredondamento mostrou-se suficiente para encontrar os coeficientes exatos nas equações das superfícies.

Figura 149 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do elipsoide e do hiperboloide de uma folha.



Fonte: Elaborado pela autora.

As coordenadas não nulas desses pontos correspondem às medidas dos semieixos das seções planas elípticas e , os inversos dos seus quadrados ($1/8$, $1/12$ e $1/6$), aos coeficientes na equação dessa quádrlica. Logo, a representação simbólica desse elipsoide em y e x fica $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1$. O hiperboloide de uma folha x tem equação $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Figura 149b).

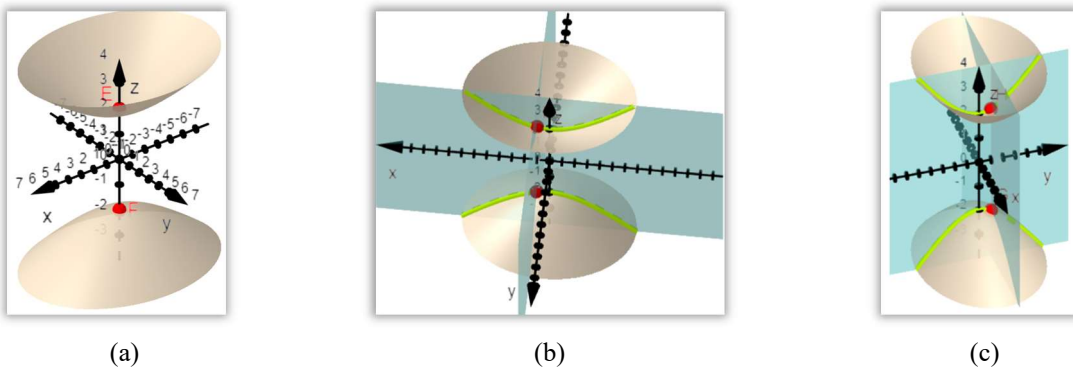
Fazendo $x = 0$ nessa equação, obtemos a seção plana elíptica com o plano yoz , de equação $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$. Geometricamente, depois de inserir o plano de equação $x = 0$ na janela de álgebra, podemos obter a sua intersecção com a quádrlica por meio da ferramenta ‘Intersecção de superfícies’. Depois, utilizando a ferramenta ‘Intersecção de objetos’, obtemos os pontos $(0, \pm 5, 0)$ e $(0, 0, \pm 2)$.

Relacionando as medidas dos semieixos da seção plana elíptica (ordenada 5 e cota 2 desses pontos), podemos dizer que $b^2 = 25$ e $c^2 = 4$. Então, para encontrar o valor de a^2 , podemos iniciar obtendo a seção plana hiperbólica c no plano xoy , como intersecção do plano $z = 0$ com a quádrlica (Figura 149c). E, utilizando a ferramenta ‘Assíntota(objeto)’, obtemos as assíntotas g e h da hipérbole (retas concorrentes na cor laranja).

A seguir, podemos obter a reta i que passa pelo vértice D da hipérbole, paralela ao eixo dos x . Então, obtemos o ponto $E(4, 5, 0)$ de intersecção entre a reta i (verde) e a assíntota h (laranja) da hipérbole. Relacionando novamente unidades significantes gráfica e simbólica, podemos dizer que a abscissa e a ordenada do ponto E correspondem, respectivamente aos coeficientes a e b na equação da quádrlica. Assim, a equação desse hiperboloide de uma folha em x fica $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$.

O hiperboloide de duas folhas em z tem equação $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Analisando a representação simbólica, temos que $z^2 = c^2$, quando $x = y = 0$. Na representação gráfica, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ é a equação do eixo dos z , e a sua intersecção com essa quádrica são os pontos $(0,0, \pm 2)$. Então, $c^2 = z^2 = 4$ e a equação fica $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 1$ (Figura 150a).

Figura 150 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do hiperboloide de duas folhas.



Fonte: Elaborado pela autora.

Não sendo possível obter as assíntotas de hipérbolas fora do plano xoy , podemos escolher um ponto em cada uma das seções planas hiperbólicas para determinar os valores de a^2 e b^2 . Para determinar o valor de a^2 na equação dessa quádrica, consideremos a sua seção plana hiperbólica no plano xoz , que tem equação $\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Na representação gráfica, primeiro obtemos essa hipérbole fazendo a intersecção da quádrica com o plano xoz (Figura 150b).

Depois, podemos obter os pontos de coordenadas $x = 1, y = 0$ e $z \cong \pm 2.06$ dessa hipérbole, fazendo a sua intersecção com o plano de equação $x = 1$. Substituindo as coordenadas de um desses pontos na equação da hipérbole, temos que $a^2 \cong 16$.⁴³ Analogamente, para determinar o valor de b^2 , consideremos a representação simbólica da seção plana hiperbólica no plano yoZ , que tem equação $\begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Na representação gráfica, obtemos a seção plana hiperbólica com o plano yoZ e os pontos $x = 0, y = 1$ e $z \cong \pm 2.11$ de intersecção dessa hipérbole com o plano de equação $y =$

⁴³ Em algumas atividades foi necessário inserir um ponto sobre a quádrica para, a partir das suas coordenadas, obter os coeficientes na equação dessa superfície. Os valores aproximados dos coeficientes desses pontos obtidos no GeoGebra permitiram encontrar aproximações dos coeficientes, que consistiam de números inteiros.

1 (Figura 150c). Substituindo as coordenadas de um desses pontos na equação da hipérbole, por exemplo $y = 1$ e $z \cong 2.11$, temos que $b^2 \cong 9$. Assim, a equação desse hiperboloide de duas folhas em z fica $-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

O paraboloides elíptico em oz_+ tem representação simbólica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -z$. Podemos determinar os valores de a^2 e b^2 nessa equação por meio das seções planas parabólicas dessa quádrlica. A seção plana parabólica dessa quádrlica no plano xoz tem equação $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = -z \\ y = 0 \end{cases}$.

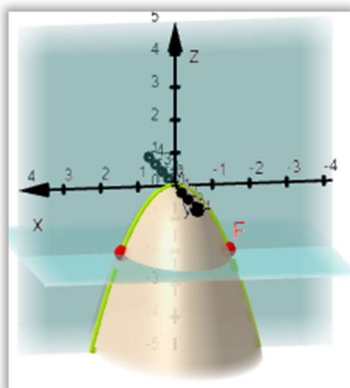
Podemos determinar o valor de a^2 , a partir das coordenadas de um ponto que pertença a essa seção plana.

Para isso, primeiro obtemos essa seção plana parabólica pela intersecção da quádrlica com o plano xoz (Figura 151a). Depois, interceptamos essa parábola pelo plano $z = -1$, por exemplo, obtendo os pontos $(\pm 1, 0, -1)$. Fazendo $x = \pm 1$, $y = 0$ e $z = -1$ na equação da seção plana parabólica obtemos $a^2 = 1$.

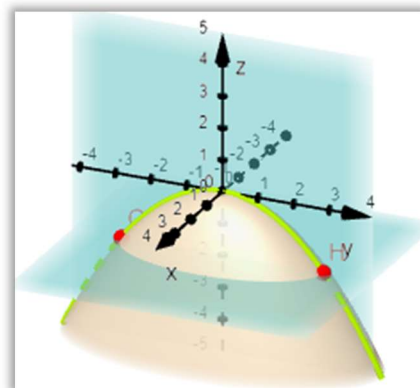
Analogamente, a seção plana parabólica dessa quádrlica no plano yoz tem equação $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = -z \\ x = 0 \end{cases}$. Podemos determinar o valor de b^2 , a partir das coordenadas de um ponto que pertença a parábola. Para isso, inicialmente obtemos a parábola resultante da intersecção da quádrlica com o plano yoz (Figura 151b).

A seguir, obtemos a sua intersecção com o plano $z = -1$, resultando nos pontos $(0, \pm 2, -1)$. Então, substituindo $x = 0$, $y = \pm 2$ e $z = -1$ na equação da seção plana parabólica no plano $x = 0$, obtemos $b^2 = 4$. Assim, a equação desse paraboloides elíptico em oz_+ fica $x^2 + \frac{y^2}{4} = -z$.

Figura 151 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do paraboloides elíptico.



(a)



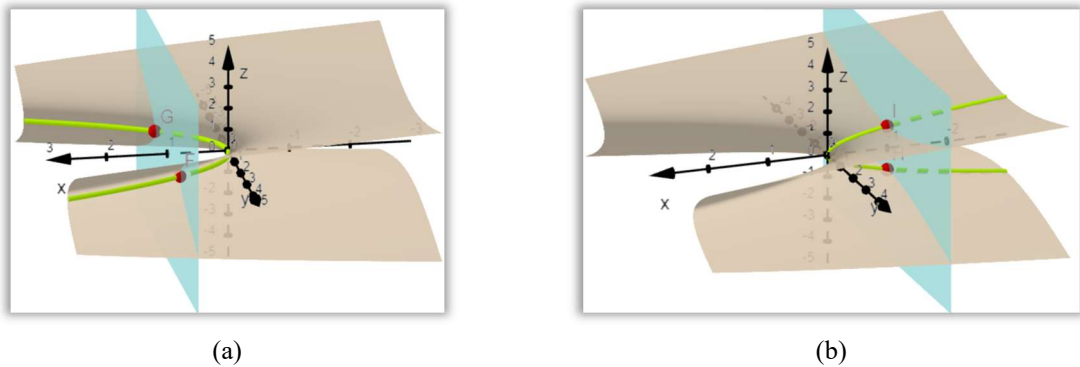
(b)

Fonte: Elaborado pela autora.

A representação gráfica do parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy é da forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = x$. Da mesma forma que com o parabolóide elíptico, podemos determinar os valores de a^2 e b^2 por meio das suas seções planas parabólicas. A seção plana parabólica dessa quádrlica com o plano xoy tem equação da forma $\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} = x \\ z = 0 \end{cases}$.

Para isso, inicialmente obtemos a parábola assento como intersecção dessa quádrlica com o plano xoy (Figura 152a). Depois, obtemos os pontos $(1, \pm 2, 0)$ de intersecção dessa parábola com o plano de equação $x = 1$. Substituindo $x = 1$ e $y = 2$ na equação da parábola em $z = 0$, obtemos $a^2 = 4$.

Figura 152 – Proposta para conversão da representação gráfica para a simbólica do parabolóide hiperbólico.



Fonte: Elaborado pela autora.

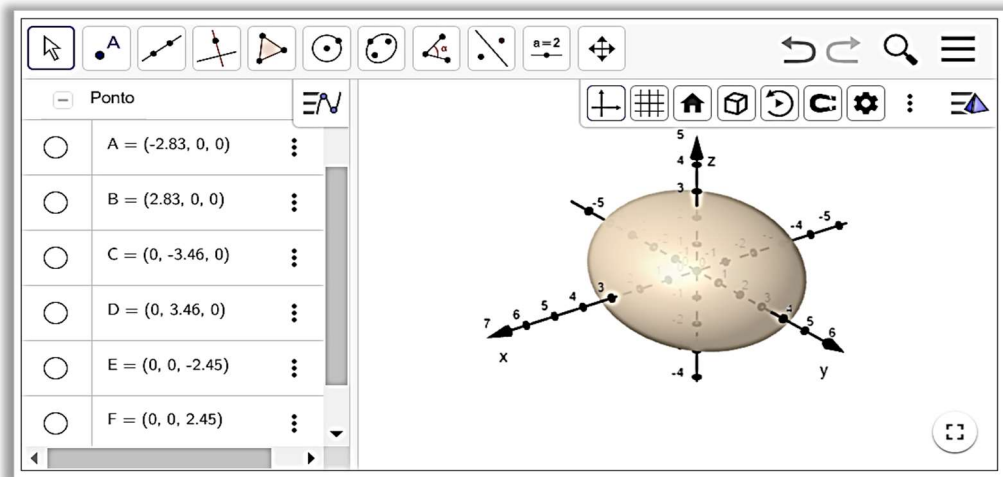
Analogamente, a seção plana parabólica dessa quádrlica com o plano xoz tem equação da forma $\begin{cases} -\frac{z^2}{b^2} = x \\ y = 0 \end{cases}$. Primeiro, obtemos a parábola estribo como intersecção dessa quádrlica com o plano xoz (Figura 152b). Depois, obtemos os pontos $(-1, 0, \pm 1)$ de intersecção dessa parábola com o plano de equação $x = -1$. Substituindo $x = -1$ e $z = 1$ na equação da parábola em $y = 0$, obtemos $b^2 = 1$. Assim, a equação desse parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy fica $\frac{y^2}{4} - z^2 = x$.

Após a apresentação dessa proposta para a correlação entre as representações gráficas e simbólicas dessas superfícies quádrlicas, realizamos uma análise dos caminhos percorridos pelos participantes. Essa questão não foi proposta na primeira versão dessa SEAI, assim, apresentamos a seguir apenas os resultados dos participantes P2 e P3.

O participante P2 iniciou obtendo os pontos de intersecção do elipsoide com os eixos coordenados, cujas coordenadas são $x \cong \pm 2.83$ e $y = z = 0$; $y \cong \pm 3.46$ e $x = z = 0$; $z \cong$

± 2.45 e $x = y = 0$, conforme Figura 153. P2 relacionou as coordenadas desses pontos, que são as extremidades dos eixos das seções planas elípticas, aos valores de $a \cong 2,83$, $b \cong 3,46$ e $c \cong 2,45$ na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ do elipsoide. Então, escreveu a sua equação $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1$, registrando o recurso que utilizou para resolver o problema: ‘*Intersecção entre a quádrlica e o eixo.*’.

Figura 153 - Conversão do registro gráfico para o simbólico do elipsoide por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

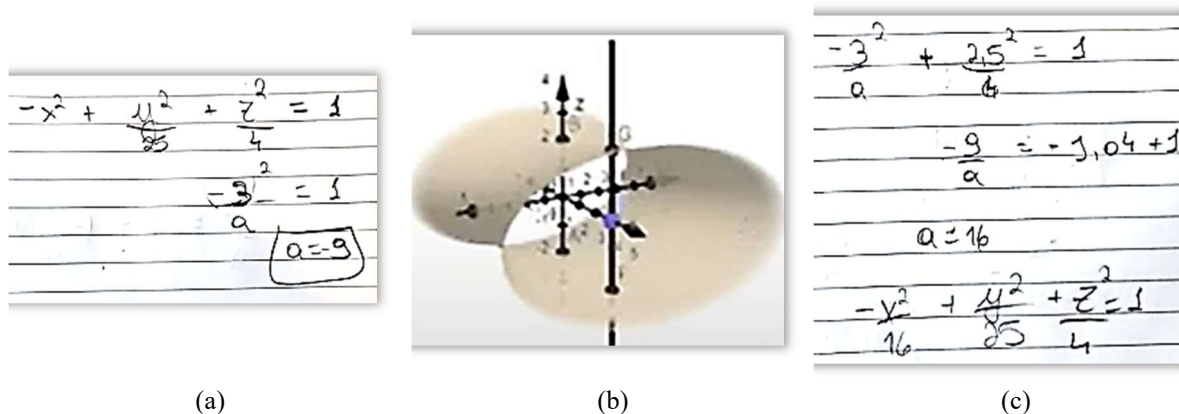
Com isso, podemos ver que P2 mobilizou esquemas de utilização que lhe permitiram realizar a conversão da representação gráfica para a simbólica de forma bem espontânea. No hiperboloide de uma folha em x , P2 iniciou girando a representação dinâmica para observar a representação gráfica da seção plana elíptica com o plano yoz . P2 encontrou os pontos de intersecção com os eixos dos y e dos z , respectivamente $(0, \pm 5, 0)$ e $(0, 0, \pm 2)$.

E, falando sobre os coeficientes dos termos que contém as variáveis y e z , P2 disse: “*Eu sei que em z ele é 4 e em y é 25*”. Dessa forma, P2 relacionou unidades significantes gráficas e simbólicas dessa quádrlica, considerando $b^2 = 25$ e $c^2 = 4$. Então, P2 escreveu a equação $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$ e, girando o observando a representação dinâmica da quádrlica, buscou encontrar uma forma de obter o valor de a^2 .

Entendendo que poderia utilizar as coordenadas de um ponto para calcular esse valor, P2 experimentou pontos sobre os eixos dos y ou dos z . Então, P2 observou que não seria possível utilizar pontos sobre esses eixos, porque o termo em x se anulava nos dois casos. Assim, P2 experimentou utilizar o ponto $(3, 0, 0)$, que não pertence à quádrlica. Substituindo as

suas coordenadas ($x = 3$, $y = 0$ e $z = 0$) na equação da quádrlica, P2 encontrou uma inconsistência (Figura 154a).

Figura 154 – Tratamentos gráficos e algébricos para obtenção do coeficiente de x^2 na representação simbólica do hiperboloide de uma folha por P2.



(a)

(b)

(c)

Fonte: Dados da pesquisa.

Diante disso, P2 percebeu que o ponto escolhido não pertencia à quádrlica. Então, perguntamos ao participante como poderíamos obter um ponto dessa superfície. P2 compreendeu que poderia obter um ponto sobre a quádrlica pela intersecção de uma reta que passa pelo ponto $(3,0,0)$ e é paralela ao eixo dos z . Usando a ferramenta ‘Retas paralelas’, P2 obteve essa reta e, usando a ferramenta ‘Intersecção de objetos’, obteve os pontos $(3,0,\pm 2.5)$ de intersecção dessa reta com a quádrlica (Figura 154b).

Realizando os tratamentos algébricos que consistiram na substituição de $x = 3$, $y = 0$ e $z = 2,5$ na equação dessa quádrlica, P2 calculou o valor de $a^2 = 16$ (Figura 154c). Então, P2 escreveu a equação $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$, e registrou os elementos que usou na sua resolução: “Intersecção entre a quádrlica e o eixo, um ponto, reta paralela ao eixo dos z a partir do ponto, intersecção da reta com a cônica”.

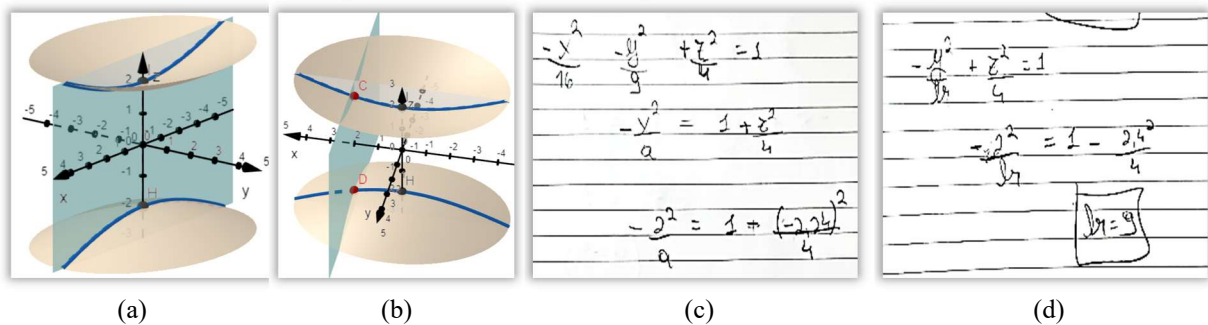
Observamos que a obtenção de um ponto sobre essa quádrlica, envolvendo novos tratamentos gráficos, apresentou-se como um conhecimento novo para o participante P2. Assim, constituindo um novo esquema de utilização relativo à obtenção de retas paralelas no espaço tridimensional, P2 conseguiu efetuar a conversão da representação gráfica para a simbólica desse hiperboloide de uma folha.

No caso do hiperboloide de duas folhas em z , o participante P2 encontrou os pontos $(0,0,\pm 2)$ de intersecção da quádrlica com o eixo dos z . Relacionando unidades significativas gráficas e simbólicas, P2 substituiu as coordenadas desse ponto na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

da quádrlica, obtendo $c^2 = 4$. A seguir, inserindo o plano $y = 0$ e usando a ferramenta ‘Intersecção de superfícies’, P2 obteve a seção plana hiperbólica no plano xoz dessa quádrlica (Figura 155a).

Então, P2 colocou um ponto sobre essa hipérbole e experimentou movê-lo na tentativa de encontrar valores inteiros para as suas coordenadas. Não logrando êxito, P2 experimentou inserir um ponto usando a ferramenta ‘Ponto(objeto)’, dizendo: “*Eu queria colocar um ponto e o valor do ponto*”. Não conseguindo alcançar o seu objetivo com essa ferramenta, P2 disse: “*Eu vou tentar colocar um plano*”. Inserindo a equação do plano $x = 2$ na janela de álgebra, P2 obteve a sua representação gráfica, dizendo: “*Agora eu vou querer a intersecção desse plano e dessa hipérbole*” (Figura 155b).

Figura 155 – Tratamentos gráficos e algébricos para obtenção dos coeficientes de x^2 e y^2 na representação simbólica do hiperboloide de duas folhas por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

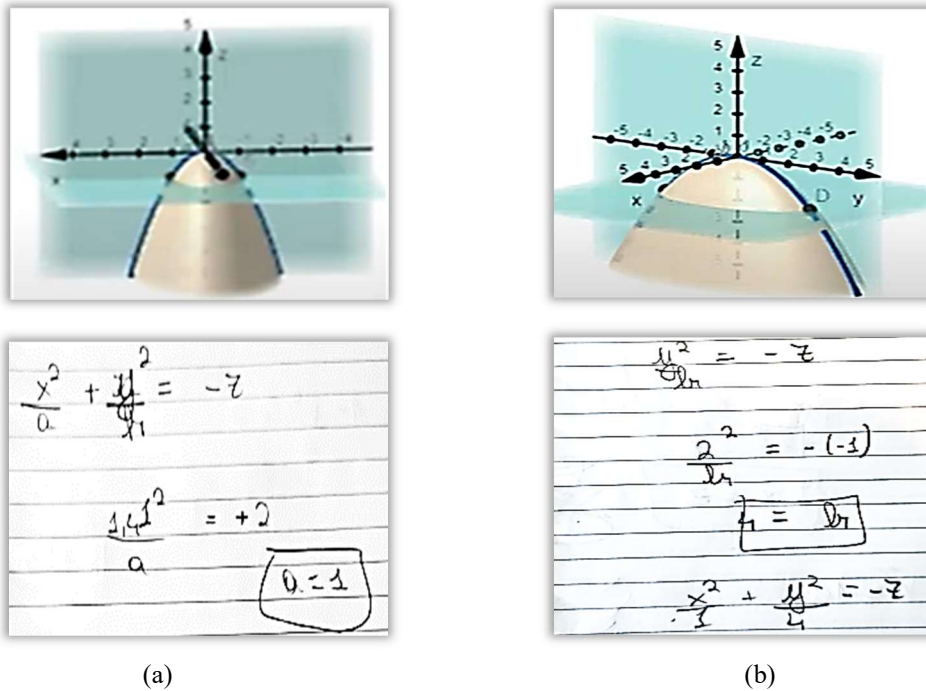
Com a ferramenta ‘Intersecção de dois objetos’, P2 selecionou esse plano e a hipérbole, obtendo os pontos de coordenadas $x = 2, y = 0$ e $z \cong \pm 2.24$. Relacionando unidades significantes gráficas e simbólicas, P2 substituiu $x = 2$ e $z \cong 2.24$ na equação $\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ dessa hipérbole e, realizando os tratamentos algébricos, obteve $a^2 \cong 16$ (Figura 155c). Analogamente, P2 obteve a seção plana hiperbólica em yoz e, em seguida, obteve os pontos $x = 0, y = 2$ e $z \cong \pm 2.4$ pela intersecção do plano $y = 2$ com essa hipérbole.

E, substituindo $y = 2$ e $z \cong 2,4$ na equação $\begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ dessa hipérbole, P2 obteve

$b^2 \cong 9$ (Figura 155d). Então, escreveu a equação $-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ do hiperboloide de duas folhas em z , registrando os passos executados para a resolução: “*Intersecção entre quádrlica e eixo, um plano, intersecção entre o plano e a quádrlica, outro plano perpendicular, intersecção entre o segundo plano e a cônica*”.

Nessa ocasião, observamos que P2 realizou os novos tratamentos gráficos com mais espontaneidade do que com a quádrica anterior, realizando a conversão da representação gráfica para a simbólica desse hiperboloide de duas folhas. No parabolóide elíptico em oz_+ , o participante P2 iniciou obtendo a representação gráfica da seção plana parabólica no plano xoz (Figura 156a).

Figura 156 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do parabolóide elíptico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, P2 obteve os pontos $(\pm 1, 0, -1)$ de intersecção do plano $z = -1$ com essa parábola. Depois, alterando a equação do plano $z = -1$ para $z = -2$, P2 obteve os pontos de coordenadas $x \cong \pm 1.41, y = 0$ e $z = -2$. Fazendo $x \cong 1.41, y = 0$ e $z = -2$ na equação $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = -z \\ y = 0 \end{cases}$ dessa seção plana, P2 obteve o valor de $a^2 \cong 1$ com os tratamentos algébricos da

Figura 156a.

Depois, o participante P2 obteve a seção plana parabólica no plano $yozy$ (Figura 156b) e os pontos $(0, \pm 2, -1)$ de intersecção do plano $z = -1$ com essa parábola. Fazendo $y = 2$ e $z = -1$ na equação $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = -z \\ x = 0 \end{cases}$ dessa parábola, P2 obteve o valor de $b^2 = 4$ com os tratamentos algébricos da Figura 156b.

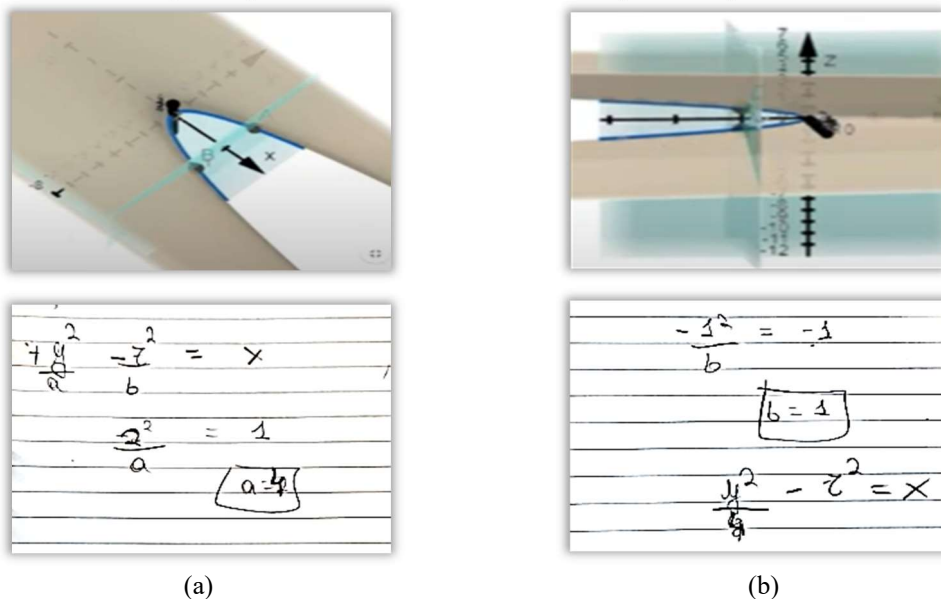
Então, P2 escreveu a equação $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = -z$ do parabolóide elíptico em oz_- , registrando os passos da sua resolução: “*Intersecção entre quádrlica e um plano, outro plano perpendicular, intersecção entre o segundo plano e a cônica*”. Nessa ocasião, observamos que P2 mobilizou esquemas de utilizando, realizando tratamentos gráficos distintos dos utilizados anteriormente e de forma cada vez mais espontânea.

Por fim, no parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy , o participante P2 iniciou movendo e observando a representação dinâmica, quando disse que: “*Eu sei que o meu x tem grau 1*”. Então, P2 inseriu a equação $z = 0$ do plano xoy , obtendo a representação gráfica da parábola assento (Figura 157a).

A seguir, P2 obteve os pontos $(1, \pm 2, 0)$ pela intersecção desta cônica com o plano $x = 1$. E, fazendo $y = 2$ na equação $\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} = x \\ z = 0 \end{cases}$ da parábola assento, P2 obteve $a^2 = 4$ com os tratamentos algébricos da Figura 157a. Analogamente, P2 obteve a representação gráfica da parábola estribo pela intersecção da quádrlica pelo plano xoz (Figura 157b).

A seguir, P2 obteve os pontos $(-1, 0, \pm 1)$ de intersecção dessa cônica com o plano $x = -1$. E, fazendo $z = 1$ na equação $\begin{cases} -\frac{z^2}{b^2} = x \\ y = 0 \end{cases}$ dessa parábola, P2 obteve $b^2 = 1$ com os tratamentos algébricos da Figura 157b. Então, P2 escreveu a equação $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = x$ do parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy .

Figura 157 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do parabolóide hiperbólico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

P2 registrou os seguintes passos da sua resolução: “*Intersecção entre quádrlica e um plano, outro plano perpendicular, intersecção entre o segundo plano e a cônica*”. Com isso, foi possível observar mais uma vez a evolução de P2 na mobilização de esquemas de utilização para a realização dos tratamentos tanto algébricos quanto gráficos. O participante identificou, de forma cada vez mais espontânea, as unidades significantes necessárias para efetuar as conversões das representações gráficas para as simbólicas dessas quádrlicas.

O participante 3 iniciou inserindo a equação $y = 0$ para obter a seção plana elíptica do elipsoide em y e x no plano xoz (

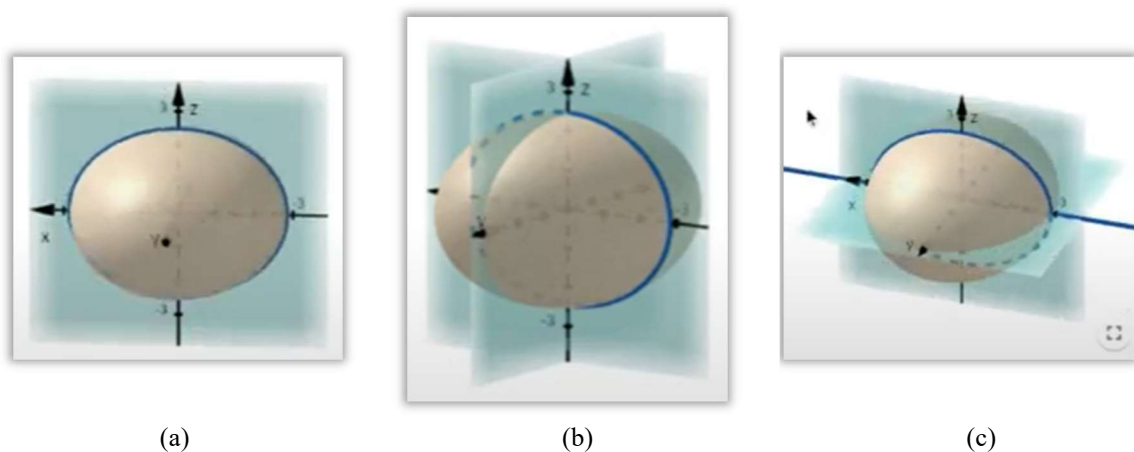
Figura 158a). Aumentando o zoom da representação dinâmica dessa quádrlica, P3 verificou a possibilidade de identificar as coordenadas dos pontos que são extremidades dos eixos dessas cônicas apenas através da observação. No entanto, as coordenadas desses pontos não tinham valores inteiros nessa atividade, o que levou P3 a utilizar as ferramentas do GeoGebra para obtê-los.

Inserindo os planos yoz (

Figura 158b) e xoy (

Figura 158c), P3 analisou as seções planas elípticas resultantes das suas intersecções com o elipsoide. Observando que as coordenadas das extremidades dos eixos dessas elipses não eram inteiras, usando a ferramenta ‘Intersecção de superfícies’, P3 obteve uma reta coincidente com o eixo dos x . E, usando a ferramenta ‘Intersecção de objetos’, P3 obteve os pontos de coordenadas $x \cong \pm 2.83$ e $y = z = 0$, pela intersecção dessa reta com a seção plana elíptica no plano yoz .

Figura 158 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do elipsoide por P3.

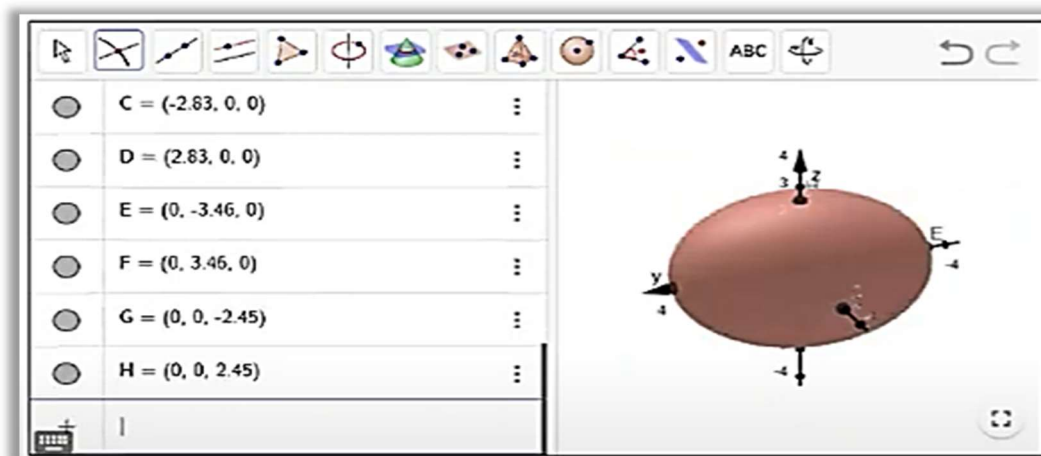


Fonte: Dados da pesquisa.

Depois, P3 entendeu que precisaria obter os pontos de intersecção do elipsoide com os eixos coordenados, mas que não seriam necessárias nem essa reta e nem as seções planas elípticas. Então, P3 apagou todos os elementos da janela de álgebra, obtendo os pontos de coordenadas $x \cong \pm 2.83$ e $y = z = 0$; $y \cong \pm 3.46$ e $x = z = 0$; $z \cong \pm 2.45$ e $x = y = 0$, através da intersecção do elipsoide com os eixos dos x , dos y e dos z , respectivamente (Figura 159).

Relacionando unidades significantes gráficas e simbólicas, P3 identificou que a abscissa, ordenada e cota desses pontos correspondiam aos valores de a , b e c na equação do elipsoide, respectivamente. Então, P3 escreveu a equação $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1$ do elipsoide em y e x , cuja representação gráfica se sobrepôs exatamente à disponível na janela de visualização.

Figura 159 – Obtendo valores visuais para a conversão do registro gráfico para o simbólico do elipsoide por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

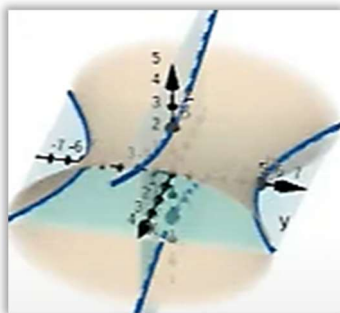
Na sua justificativa, P3 registrou a forma pensada inicialmente para a obtenção dos valores dos coeficientes na equação dessa quádrlica, onde o participante encontrava retas coincidentes com os eixos coordenados: “A intersecção entre os eixos coordenados e a quádrlica, oferecem os valores de a , b e c . Traçando os planos coordenados e intersectando dois a dois, obtemos as retas coincidentes aos eixos coordenados, e intersectando cada uma dessas retas com a quádrlica obtemos os valores de a , b e c ”.

Os esquemas conceituais mobilizados por P3 o levaram a relacionar as medidas dos semieixos das seções planas elípticas com os planos yoZ , xoz e xoy com os coeficientes na equação da quádrlica. Essa teria sido a causa de obter as seções planas elípticas, até que P3 percebeu que poderia simplificar a sua resolução, entendendo que seria suficiente obter a intersecção do elipsoide com os eixos coordenados.

No hiperboloide de uma folha em x , o participante P3 iniciou obtendo os pontos $(0, \pm 5, 0)$ e $(0, 0, \pm 2)$ de intersecção dessa superfície com os eixos dos y e dos z , relacionando-os com os valores de $b^2 = 25$ e $c^2 = 4$ na equação da quádrlica. Vemos aqui que P3 já não precisou mais obter a seção plana elíptica para relacionar as medidas dos seus semieixos com os respectivos valores dos coeficientes na sua representação simbólica.

Depois, P3 obteve a seção plana hiperbólica no plano xoy , inserindo um ponto sobre essa cônica (Figura 160a). Então, P3 moveu esse ponto sobre a sua representação dinâmica até obter as coordenadas $x = 3$, $y = 6,25$ e $z = 0$. Substituindo essas coordenadas na equação
$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$
 dessa cônica, P3 realizou os tratamentos algébricos, obtendo uma inconsistência ($a^2 = -12$) (Figura 160b).

Figura 160 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha por P3 (parte 1).



(a)

$$\begin{aligned} -\frac{9}{a^2} + \frac{6.25^2}{25} &= 1 \\ \downarrow \\ -\frac{9}{a^2} &= \frac{3}{4} \\ \frac{-9}{a^2} &= \frac{3}{4} \\ a^2 &= -\frac{36}{3} \\ a^2 &= -12 \end{aligned}$$

(b)

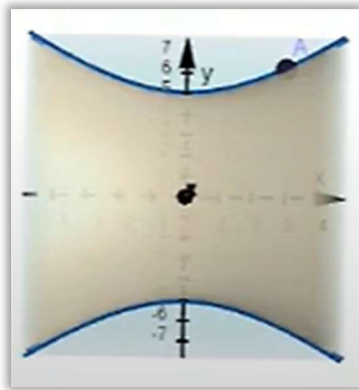
Fonte: Dados da pesquisa.

Diante disso, P3 experimentou obter a seção plana hiperbólica com o plano xoz , girando e observando essa representação dinâmica (Figura 160a). Então, P3 apagou todos os elementos da janela de álgebra para experimentar a obtenção das assíntotas de uma das seções planas hiperbólicas.

Considerando os valores de $b = 5$ e $c = 2$ conhecidos, P3 obteve a representação gráfica do plano de equação $y = \frac{5}{2}z$, fazendo a sua intersecção com o plano xoy . P3 girou a representação dinâmica e, percebendo que não resultava nas assíntotas que buscava, apagou tudo novamente. A seguir, P3 obteve novamente a seção plana hiperbólica no plano xoy e inseriu um ponto sobre esta, usando a ferramenta ‘Ponto sobre objeto’.

Movendo esse ponto sobre a representação dinâmica dessa hipérbole, P3 chegou nas coordenadas $x = 3$, $y = 6,25$ e $z = 0$ (Figura 161a). Então, P3 experimentou obter primeiro o termo $\frac{y^2}{25}$ na equação $\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ dessa cônica, fazendo $\left(\frac{y}{5}\right)^2 = \left(\frac{6,25}{5}\right)^2 = \left(\frac{625}{500}\right)^2 = \frac{25}{16}$ (Figura 161b).

Figura 161 - Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha por P3 (parte 2).



(a)

(b)

(c)

Fonte: Dados da pesquisa.

Fazendo $\frac{y^2}{b^2} = \frac{25}{16}$ e $z = 0$ na equação $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dessa quádrlica e realizando os devidos tratamentos algébricos, P3 obteve o valor de $a^2 = 16$ (Figura 161c). Então, P3 chegou na equação $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$ e registrou o caminho que percorreu: “Traçando a intersecção entre os eixos coordenados que intersectam a quádrlica, obtemos os valores de b e c . Já o valor de a pode ser obtido a partir de um ponto existente na hipérbole correspondente e utilizando a equação da hipérbole obtemos o valor de a ”.

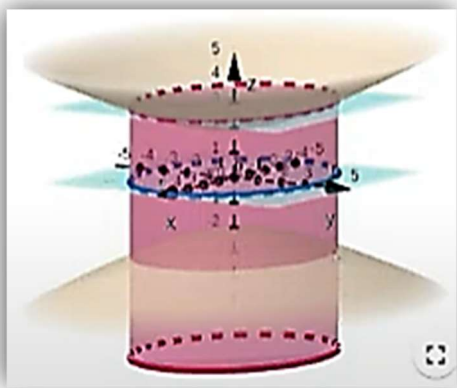
Dessa forma, foi possível observar maior espontaneidade na mobilização de esquemas de utilização para a conversão da representação gráfica para simbólica pelo participante. No hiperboloide de duas folhas em z , P3 iniciou inserindo as equações $x = 0$ e $y = 0$ dos planos yoz e xoz , respectivamente. P3 girou a representação dinâmica dessa superfície, observando as seções planas hiperbólicas determinadas por esses planos sobre a quádrlica.

Então, P3 inseriu o plano $z = 3$ e, girando novamente a representação dinâmica da quádrlica, observou a seção plana elíptica. Após obter essa seção plana elíptica no plano $z = 3$, P3 utilizou a ferramenta ‘Extrusão para prisma’, obtendo a superfície cilíndrica da Figura 162a.

Em seguida, P3 obteve a seção plana elíptica de intersecção dessa superfície cilíndrica com o plano xoy e os pontos de coordenadas $x \cong \pm 4,47$ e $y = z = 0$ e $y \cong \pm 3,35$ e $x = z = 0$, de intersecção dessa cônica com os eixos dos x e dos y , respectivamente. P3 observou que a abscissa e a ordenada desses pontos são as mesmas dos pontos sobre a seção plana elíptica no plano $z = 3$, logo $x \cong \pm 4,47$, $y \cong \pm 3,35$ e $z = 3$ seriam coordenadas de pontos do hiperboloide de duas folhas.

P3 também considerou que $c^2 = 4$, dizendo apenas que “O valor de c é nitidamente 2”. Entendemos que P3 relacionou a cota dos vértices $(0,0,\pm 2)$ dessa quádrlica ao valor de c^2 na sua equação. Substituindo $c^2 = 4$ e $z = 3$ na equação $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dessa quádrlica, P3 obteve a equação $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{5}{4} \\ z = 3 \end{cases}$ da sua seção plana elíptica (Figura 162b). E, fazendo $x \cong \pm 4,47$ e $y = 0$ na equação dessa cônica, P3 obteve $a^2 \cong 16$. Depois, fazendo $x = 0$ e $y \cong \pm 3,35$, P3 obteve $b^2 \cong 9$.

Figura 162 - Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de duas folhas por P3.



(a)

$z=3$ insendi
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$
 Intersectando os eixos coordenados $x \cong \pm 4,47$ e $y \cong \pm 3,35$
 $y=0$
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{4} = -1 \Rightarrow \frac{20}{a^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = 16$
 $x=0$
 $\frac{y^2}{b^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{11,225}{b^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow b^2 = 9$

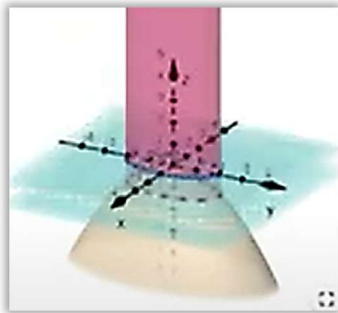
(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

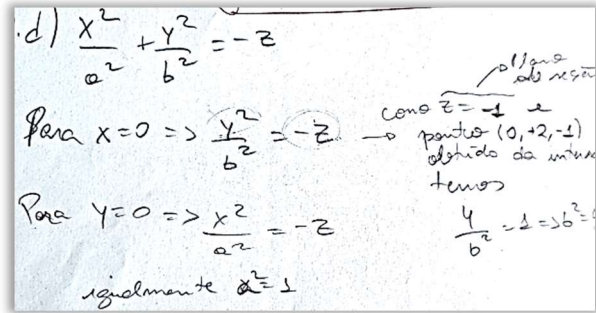
Então, P3 escreveu a equação $-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, registrando a sua resolução: “Intersectando a quádrlica pelo plano paralelo $z=3$, obtemos uma elipse. Quando $z = 3$, dois dos vértices das elipses é dado por $(4.47,0,3)$ e $(0,3.35,3)$. Tomando para $y=0$ para o primeiro ponto e para $x=0$ no segundo ponto obtemos os valores de a e b ”. Nessa oportunidade, P3 mobilizou esquemas de utilização distintos dos já utilizados nas SEAI anteriores, comprovando que já fazia uso das ferramentas do GeoGebra. É o caso da ferramenta ‘Extrusão para prisma’, que usou para obter as abscissas e ordenadas de pontos da quádrlica em plano paralelo ao da seção plana elíptica da quádrlica.

No parabolóide elíptico em oz_- , P3 encontrou a seção plana elíptica no plano $z = -1$ e, utilizando a mesma ferramenta ‘Extrusão para prisma’, obteve a seção plana elíptica no plano xoy (Figura 163a). A seguir, P3 determinou os pontos $(\pm 1,0,0)$ e $(0, \pm 2,0)$ de intersecção desta cônica com os eixos dos x e dos y , obtendo os pontos $(\pm 1,0, -1)$ e $(0, \pm 2, -1)$ da quádrlica. Substituindo as coordenadas destes pontos na equação da quádrlica, P3 realizou os tratamentos algébricos, obtendo $a^2 = 1$ e $b^2 = 4$ (Figura 163b).

Figura 163 - Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do parabolóide elíptico por P3.



(a)



(b)

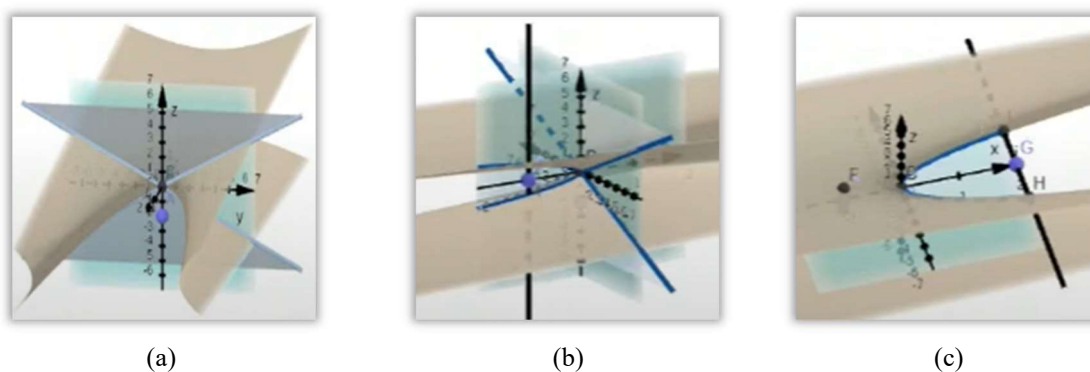
Fonte: Dados da pesquisa.

Então, P3 escreveu a equação $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = -z$ e justificou as suas escolhas na resolução: “Encontrando a seção de intersecção quando $z = -1$, obtemos uma elipse com dois vértices $(1,0,-1)$ e $(0,2,-1)$. Portanto $a^2 = 1$ e $b^2 = 4$ ”. P3 registrou a obtenção das coordenadas de uma das extremidades de cada um dos eixos de uma seção plana elíptica dessa quádrlica, $(1,0, -1)$ e $(0,2, -1)$, correlacionando essas variáveis visuais com as respectivas unidades significantes simbólicas ($a^2 = 1$ e $b^2 = 4$).

Nas condutas cognitivas de P3 durante a resolução, foi possível ver que o participante mobilizou com maior espontaneidade esquemas de utilização que lhe permitiram a conversão da representação gráfica para a simbólica dessa quádrlica. Por fim, no parabolóide hiperbólico

com assento em ox_+ no plano xoy , P3 iniciou inserindo a equação $x = 0$ do plano yoz e, usando a ferramenta ‘Intersecção de superfícies’, obteve as retas concorrentes como seção plana (Figura 164a).

Figura 164 – Tratamentos gráficos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do parabolóide hiperbólico por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, inserindo o ponto $(0,0,-2)$, P3 experimentou obter uma reta que passasse por esse ponto e fosse paralela a uma das retas concorrentes com a ferramenta ‘Retas paralelas’. Não conseguindo obter essa reta, experimentou encontrar a intersecção das retas concorrentes com a quádrlica, demonstrando estranheza pelo fato de não encontrar resultado no gráfico. Isso porque as retas obtidas eram coincidentes com as que já haviam sido inseridas anteriormente.

Então, P3 visualizou outra possibilidade. Observando a representação simbólica das retas obtidas na janela de álgebra, $c: X = (0,0,0) + \lambda(0,1, \pm 0.5)$, P3 disse: “*Tá, mas eu poderia pegar daqui, $y=1$ e $z=0,5$* ”. E complementando, disse: “*Quando $x=0$, $z=2y$* ”. A seguir, P3 abandonou novamente esse caminho, inserindo a equação $y = 0$ do plano xoz para obter a parábola estribo (Figura 164b). Então, P3 inseriu o ponto $(-1,0,0)$ e obteve a reta r que passa por esse ponto e é paralela ao eixo dos z .

A primeira equação da Figura 165a mostra as escolhas dos termos linear e quadráticos e sinais por P3, para a obtenção de uma equação genérica dessa quádrlica ($\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = x$). A segunda equação nessa figura já apresenta o resultado da substituição dos valores de b^2 e c^2 na equação do parabolóide hiperbólico ($\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = x$). Os tratamentos algébricos realizados por P3 para obter os valores de b^2 e c^2 , conforme descrevemos a seguir, podem ser observados na Figura 165b.

Para obter o valor de c^2 , usando a ferramenta ‘Intersecção de objetos’, P3 encontrou os pontos $(-1,0, \pm 1)$ de intersecção da reta r com a parábola estribo. Substituindo as coordenadas

deste ponto na equação $\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} = -x \\ y = 0 \end{cases}$ da parábola estribo, P3 obteve $c^2 = 1$ (Figura 165b). P3

registrou em papel apenas a equação da parábola estribo (primeira equação desta figura), realizando mentalmente os tratamentos algébricos.

Analogamente, P3 encontrou a parábola assento no plano xoy , obtendo uma reta que passa pelo ponto $(2,0,0)$ e é paralela ao eixo dos y (Figura 164c). Depois, P3 obteve os pontos de coordenadas $x = 2, y \cong \pm 2.83$ e $z = 0$ de intersecção dessa reta com a parábola assento. E,

substituindo as coordenadas deste ponto na equação $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = x \\ z = 0 \end{cases}$ da parábola assento, P3 obteve

$b^2 \cong 4$ (segunda equação na Figura 165b). Então, P3 escreveu a equação $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = x$ (segunda equação da Figura 165a).

P3 registrou o caminho percorrido da seguinte forma: “Fazendo as parábolas resultantes das intersecções entre os planos coordenados $y=0$ e $z=0$ obtemos os pontos das parábolas e após o valor de a e b ”.

Figura 165 – Tratamentos algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico do parabolóide hiperbólico por P3.

The image contains two photographs of handwritten mathematical work. The left photograph shows two equations: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = x$ and $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = x$. The right photograph shows the equations $\frac{z^2}{c^2} = -x$ and $\frac{y^2}{b^2} = +x \Rightarrow \frac{8}{b^2} = 2$, with a boxed result $b^2 = 4$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com isso, observamos que P3 foi evoluindo durante a realização das atividades nessa SEAI, mobilizando esquemas de utilização de forma cada vez mais espontânea para correlacionar registros gráficos e algébricos. Com as questões propostas nessa SEAI, os participantes mobilizaram ou (re)constituíram esquemas conceituais relativos à diferenciação entre quádricas do mesmo tipo, no tocante aos coeficientes nas suas representações simbólicas.

5.1.6.4 OBSERVAÇÕES FINAIS

Nessa SEAI, identificando unidades significantes gráficas e relacionando com as correspondentes unidades simbólicas, os participantes correlacionaram esses registros de representação das superfícies quádricas. Para essas correlações, eles utilizaram as representações gráficas e simbólicas das seções planas da quádrica, o que favoreceu a identificação dessas superfícies e também a obtenção de unidades significantes gráficas.

Vemos que, envolvendo tratamentos algébricos e gráficos, a desconstrução dimensional teve papel importante na conversão do registro de representação gráfico para o simbólico das superfícies quádricas. As representações dinâmicas, como objetos de pensar-com, possibilitaram esses tratamentos gráficos. A possibilidade de acessar e manipular o objeto matemático e de inserir elementos, favoreceram a retirada de informações pertinentes para a conversão entre registros.

Pensando-com as representações dinâmicas das superfícies quádricas, os participantes mobilizaram e (re)constituíram esquemas de utilização. Observando as representações dinâmicas de diferentes ângulos, obtendo seções planas e pontos sobre esses objetos matemáticos, os participantes puderam formular e testar suas conjecturas, refletindo sobre suas ações até a tomada de consciência.

Observamos que a apropriação das ferramentas pelos participantes, qualifica as suas apreensões figurais das representações dinâmicas dessas superfícies. E, essas apreensões figurais, contribuem para o enriquecimento das suas apreensões conceituais. Por sua vez, os esquemas constituídos nas apreensões conceituais, ampliam a capacidade dos participantes no uso das ferramentas.

Essa SEAI foi a última em que as atividades tiveram como objetivo principal o desenvolvimento de esquemas relacionados aos conceitos de quádricas. No entanto, envolveu também um aumento progressivo no uso das ferramentas do GeoGebra, promovendo a constituição de esquemas relacionados à apropriação desses artefatos. Nos tratamentos gráficos, os participantes precisaram inserir equações de planos coordenados e paralelos a estes, utilizar ferramentas para obter retas paralelas, seções planas e pontos de intersecção entre objetos matemáticos, entre outros.

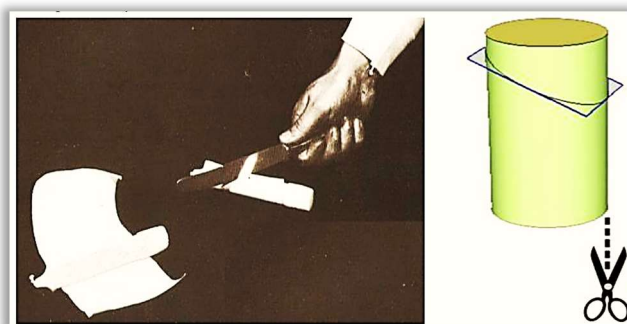
Fazendo para compreender, observamos os participantes utilizando novas estratégias para a resolução dos problemas e evoluindo ao longo da SEAI, transitando entre registros gráficos e simbólicos de forma cada vez mais espontânea. A situação de ensino e aprendizagem instrumental a seguir propôs um desafio relacionado à visualização de uma seção plana pouco evidente do parabolóide hiperbólico.

5.1.7 SEAI 7 – Desafiando a percepção: a seção plana desconhecida

Essa situação de ensino e aprendizagem instrumental (**APÊNDICE J** — SEAI 7) propôs um problema similar ao de um dos estudos de Notare e Basso (2016), quando os autores analisaram as imagens mentais produzidas pelos participantes, sem e com o uso da tecnologia. O problema consistiu no corte de uma vela, de superfície lateral cilíndrica e envolvida em papel, que produz dois sólidos (Figura 166).

A questão proposta foi a identificação da forma da seção plana na sua planificação: é ou não uma reta? A observação da figura impressa no papel ou mesmo o uso de objetos físicos para representar o corte do cilindro nem sempre é suficiente para revelar que essa seção plana não é uma reta.

Figura 166 – Planificando o corte do cilindro.



Fonte: Lieban (2012 apud Notare; Basso, 2016)

Com esse estudo, os autores mostram que “[...] apoiar-se sobre a percepção da imagem figural pode não ser suficiente para evocar a figura planificada, dada a complexidade do problema ao envolver dados que precisam ser antecipados por não estarem presentes na figura espacial representada em desenho” (Notare; Basso, 2016, p. 8). Os autores consideram que a manipulação do objeto matemático é importante para a construção da imagem mental com o realismo necessário à solução do problema.

Inspirada nesse estudo, essa SEAI propôs a identificação de uma seção plana do parabolóide hiperbólico pouco evidente. Consideramos que se trata de um problema similar, uma vez que é contra a percepção imediata o fato de um parabolóide hiperbólico ter retas concorrentes como seção plana. Essa proposta teve como objetivo observar a contribuição das representações dinâmicas como objetos de pensar-com na constituição da representação mental das superfícies quádricas.

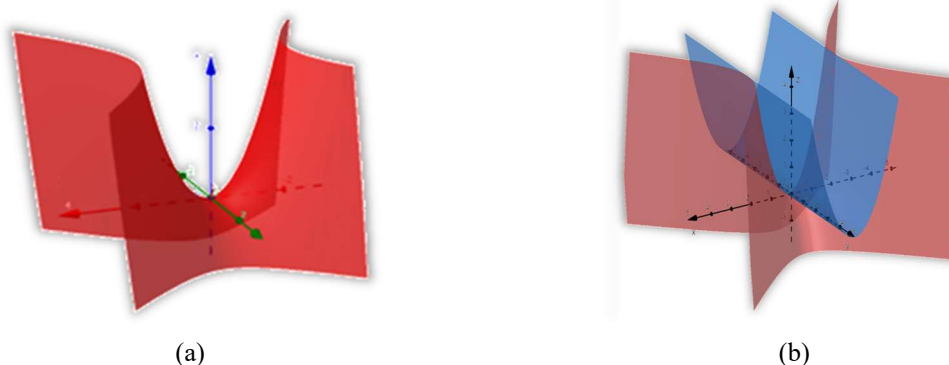
Esse problema foi proposto na atividade 4 dessa SEAI, uma vez que as três primeiras atividades tiveram a finalidade de preparar os participantes, retomando e aprofundando o conhecimento sobre essa quádrlica. Nessa oportunidade, foi possível revisitar a representação em língua natural específica dessa quádrlica, analisando e (re)constituindo esquemas conceituais relacionados. Assim, na atividade 1 foi solicitada a representação em língua natural específica dessa quádrlica, quando é necessário considerar a sua posição no sistema cartesiano.

A representação em língua natural específica dessa quádrlica requer a identificação do eixo de simetria e do plano coordenado da parábola assento. Por exemplo, a quádrlica dessa atividade é denominada parabolóide hiperbólico com assento em OZ_+ no plano xOz . Por essa razão, na atividade 5 propomos questões que levaram os participantes a perceberem que, para cada eixo coordenado, temos dois planos coordenados que podem conter a parábola assento.

Então, depois de observar que há duas possibilidades para a parábola assento em OZ_+ , que pode estar no plano xOz ou no plano yOz , os participantes voltaram na atividade 1 para verificar e complementar a representação em língua natural específica da quádrlica em questão. Na atividade 2, as questões exploraram as seções planas parabólicas dessa quádrlica e, na atividade 3, as hiperbólicas. Na atividade 4, os participantes precisaram identificar as duas retas concorrentes como seções planas com o plano xOy .

As atividades iniciavam propondo antecipações, quando os participantes respondiam questões relativas à representação em língua natural específica e às seções planas com base numa representação estática (Figura 167a) ou nas suas próprias imagens mentais da quádrlica. Depois, utilizando a representação dinâmica desse parabolóide hiperbólico como objeto de pensar-com, os participantes puderam confirmar ou refutar suas conjecturas.

Figura 167 – Parabolóide hiperbólico em OZ_+ no plano xOz .



Fonte: Elaborado pela autora.

5.1.7.1 ATIVIDADE 1

Iniciando a descrição e análise das condutas cognitivas dos participantes, na questão do item a da atividade 1, perguntamos a denominação da superfície dada pela representação gráfica da Figura 167a. Trata-se de um parabolóide hiperbólico em OZ_+ no plano xOz e os participantes, fazendo a conversão do registro gráfico para o registro em língua natural responderam:

P1: A um parabolóide hiperbólico. Porque no plano xoy temos uma hipérbole e num plano paralelo ao eixo z uma parábola.

P2: Parabolóide Hiperbólico em OZ.

P3: Parabolóide hiperbólico de centro z.

Como esperávamos, os participantes mobilizaram adequadamente esquemas conceituais relativos à diferenciação e correspondência entre as representações gráfica e em língua natural geral. No entanto, o mesmo não ocorre em relação à representação em língua natural específica, responsável pela diferenciação relativa à posição da quádriga no sistema cartesiano.

A seguir, os participantes foram convidados a escrever uma possível equação para as parábolas assento e estribo (item b) para, com base nisso, escrever uma equação para esse parabolóide hiperbólico (item c). Não sendo possível identificar os coeficientes das variáveis na imagem, a questão propôs a utilização do número 1 como coeficiente em todos os termos da equação. Realizando a conversão do registro gráfico para o simbólico, os participantes responderam:

P1:(c) $x^2 - y^2 = z$.

P2: (b) Assento: $x^2 = z$ e $y = 0$; Estribo: $y^2 = -z$ e $x = 0$; (c) $x^2 - y^2 = z$.

P3: (b) $z = x^2$ e $z = -y^2$; (c) $x^2 - y^2 = z$.

Podemos observar nesses registros, que os participantes mobilizam adequadamente esquemas conceituais relativos aos termos linear e quadráticos, assim como dos seus sinais. Na primeira versão das atividades não foram solicitadas as equações das parábolas assento e estribo, por essa causa o participante P1 não respondeu a essa questão. E, o participante P3 não registrou adequadamente as equações das parábolas, mas verificou que a parábola é o resultado da intersecção de duas superfícies, conforme veremos a seguir.

A questão do item d propôs a obtenção da representação gráfica dessa quádriga, para confirmar as conjecturas realizadas em resposta às questões do item b (equações das parábolas assento e estribo) e do item c (equação do parabolóide hiperbólico). Nessa oportunidade, ao

inserir as equações das parábolas assento e estribo na janela de álgebra, foram obtidas superfícies cilíndricas parabólicas.

Por exemplo, a equação no \mathbb{R}^3 da parábola assento nessa questão é dada por $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$.

Inserindo a equação $x^2 = z$ na janela de álgebra do GeoGebra, o resultado é a representação gráfica da superfície cilíndrica parabólica da Figura 167b. A mesma equação ($x^2 = z$) representa uma parábola no \mathbb{R}^2 e uma superfície cilíndrica parabólica no \mathbb{R}^3 .

Assim, revisitamos os conceitos relativos a diferenciação entre as representações simbólicas no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 abordadas na primeira SEAI. Os participantes P2 e P3, inserindo a equação $x^2 = z$ para obter a parábola assento, encontraram a superfície cilíndrica parabólica. Então, quando perguntamos como eles poderiam obter a parábola, ambos utilizaram a ferramenta ‘Intersecção de superfícies’ e, clicando nas duas superfícies, encontraram essa seção plana.

A partir disso, os participantes retomaram a questão da necessidade de duas equações para a representação simbólica de uma cônica no \mathbb{R}^3 , uma vez que é resultante da intersecção de duas superfícies. Além disso, os participantes mobilizaram esquemas relacionados aos conceitos de parábola assento e estribo, efetuando a conversão da representação gráfica para a simbólica do parabolóide hiperbólico em oz_+ no plano xoz .

5.1.7.2 ATIVIDADE 2

No item a da atividade 2, perguntamos quais planos coordenados ou paralelos a estes têm parábolas como seções planas. Os participantes, observando a representação estática, anteciparam:

P1: O plano xoz tem uma parábola com concavidade voltada para oz_+ e o plano yoz tem uma parábola com concavidade voltada para oz_- .

P2: $xoz: y = k$; $yoz: x = k$.

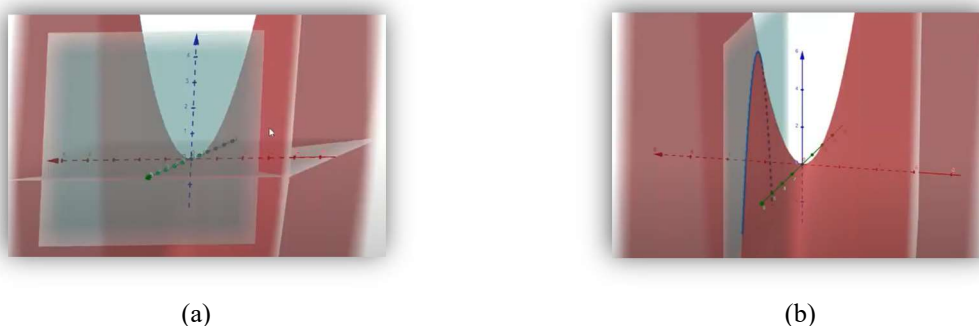
*P3: Assento: Com planos paralelos a xoz , temos $x^2 = z + k^2$, no plano $y = k$;
Estribo: Com planos paralelos a yoz , temos $-y^2 = z - k^2$, no plano $x = k$.*

Assim, as apreensões figurais obtidas a partir da representação estática ou das representações mentais que esses participantes constituíram dessa quádrlica, possibilitaram a identificação das suas seções planas parabólicas. O participante P3, inclusive, realizou a conversão do registro gráfico para o simbólico dessas seções planas. Com isso, foi possível ver que os esquemas conceituais anteriormente constituídos pelos participantes, foram

adequadamente mobilizados na identificação das seções planas parabólicas do parabolóide hiperbólico.

Então, no item b dessa atividade, os participantes inseriram as equações desses planos, obtendo as representações gráficas das seções planas parabólicas em planos paralelos aos planos xoz (Figura 168a) e yoz (Figura 168b).

Figura 168 – Tratamentos gráficos para obter as parábolas assento e estribo por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

No item c, foi solicitada uma análise algébrica da representação simbólica da quádrlica, com a descrição das suas seções planas parabólicas para os diferentes valores de $k \in \mathbb{R}$. Essa análise é realizada por meio de tratamentos algébricos relativos à intersecção dessa quádrlica por planos paralelos aos planos xoz e yoz . Assim, fazendo $y = k$ na representação simbólica dessa quádrlica, obtemos as seções planas em planos paralelos ao plano xoz .

Essas seções planas têm equações da forma $\begin{cases} x^2 = z + k^2 \\ y = k \end{cases}$, que consistem em parábolas com concavidade voltada para oz_+ , para qualquer $k \in \mathbb{R}$. E, fazendo $x = k$ na representação simbólica da quádrlica, obtemos as seções planas em planos paralelos ao plano yoz . Essas seções planas têm equações da forma $\begin{cases} y^2 = -z + k^2 \\ x = k \end{cases}$, que consistem em parábolas com concavidade voltada para oz_- , para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

Essa questão não foi proposta na primeira versão dessa SEAI, motivo pelo qual não há registro do participante P1. Realizando os tratamentos algébricos sobre a representação simbólica $x^2 - y^2 = z$ do parabolóide hiperbólico em oz_+ no plano xoz , os participantes P2 e P3 responderam:

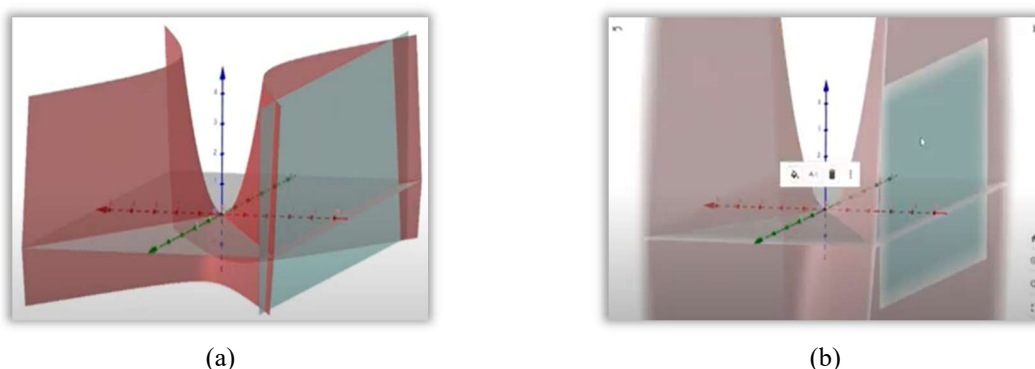
P2: $x^2 = z + k^2$ será sempre uma parábola com concavidade voltada para cima;
 $y^2 = -z - k^2$ será sempre uma parábola com concavidade voltada para baixo.

P3: Assento: $x^2 = z + k^2$, para todos os valores de k ; Estribo: $-y^2 = z - k^2$, para todos os valores de k . Em ambos os casos, o valor de k somente ocasiona uma translação nas parábolas.

Entendemos que P3 utilizou os termos assento e estribo quando queria dizer que as parábolas tinham concavidades voltadas para os semieixos positivos e negativos, respectivamente. Os registros dos participantes mostram que os mesmos mobilizaram adequadamente esquemas conceituais, identificando as seções planas parabólicas e realizando corretamente a conversão do registro gráfico para o simbólico.

Por fim, no item d, os participantes realizaram a comparação entre os gráficos (item b) e as equações (item c) das seções planas parabólicas, para cada valor de $k \in \mathbb{R}$. Aqui encontramos uma limitação da representação gráfica que poderia influenciar a correlação entre as representações gráficas e simbólicas das seções planas parabólicas dessa quádrlica. Na Figura 169a, essa quádrlica estava limitada pelas paredes de uma caixa invisível, com a função ‘Usar clipping’ selecionada.

Figura 169 – Tratamentos gráficos para a correlação entre registros gráfico e simbólico de uma seção plana do parabolóide hiperbólico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa imagem da Figura 169a, podemos observar que a seção plana parabólica resultante da intersecção do plano paralelo a yoZ com o parabolóide hiperbólico não fica claramente determinada. Então, propomos uma discussão a esse respeito, para que os participantes pudessem verificar a correspondência biunívoca entre as representações gráficas e simbólicas para os diferentes valores $k \in \mathbb{R}$. Como exemplo, perguntamos a P2 qual seção plana poderia ser obtida pela intersecção dessa quádrlica pelo plano $x = -5$ (Figura 169a).

P2 observou a representação dinâmica e, inicialmente, não respondeu. Nessa oportunidade, já haviam sido realizados os tratamentos algébricos que deram seções planas parabólicas como resultado. Então, pedimos para que P2 analisasse a representação simbólica dessa quádrlica, quando o participante verificou que a seção plana com o plano $x = -5$ era parabólica e que a concavidade da parábola era voltada para o semieixo oz_- .

Observando os seus tratamentos algébricos sobre a representação simbólica da quádrlica, P2 respondeu: “*Vai representar uma parábola com concavidade voltada para baixo*”. Então, perguntamos por que a representação gráfica não tem uma parábola com concavidade voltada para baixo. P2 respondeu que poderia ser por causa do recurso ‘Usar clipping’ e desabilitou essa função (Figura 169b).

Nesse caso, a superfície não ficou mais cortada pelas paredes da caixa, mas o problema continuou, pois o plano não tinha as dimensões necessárias para mostrar a seção plana parabólica. Então, perguntamos porque ainda não estava sendo possível visualizar essa parábola. Movimentando a representação gráfica da quádrlica, P2 respondeu: “*Porque essa parábola vai para o infinito*”. Com isso, observamos que o participante P2 compreendeu que o plano e a quádrlica estendem-se infinitamente, mas que estão limitados na representação gráfica.

Com os demais participantes a situação foi bem similar, de forma que consideramos que a discussão proposta contribuiu para o conhecimento dessa restrição e superação desse obstáculo. Assim, observamos que os participantes correlacionaram corretamente as representações gráficas e simbólicas das seções planas parabólicas do parabolóide hiperbólico em oz_+ no plano xoz .

5.1.7.3 ATIVIDADE 3

A atividade 3 teve a mesma proposta que a atividade 2, porém para as seções planas hiperbólicas dessa quádrlica. Dessa forma, a questão do item a perguntava quais planos coordenados ou paralelos a estes têm hipérbolos como seções planas, ao que os participantes responderam:

P1: Para os planos paralelos ao plano xoy teremos sempre hipérbolos.

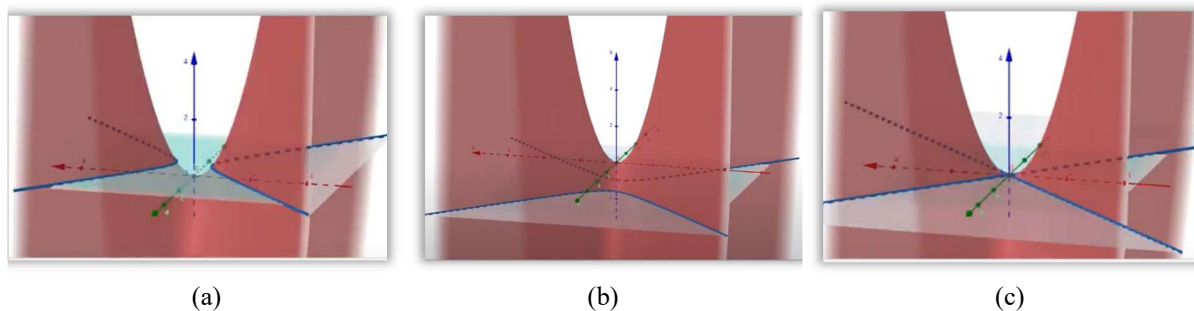
P2: Planos paralelos ao xoy . Equação do plano é $z = k$.

P3: $z = k$.

Nessa oportunidade, poderíamos inferir que os participantes ainda não perceberam a existência das retas concorrentes como seção plana com o plano $z = 0$. Porém, a forma como a questão foi proposta pode ter-lhes limitado a responder a respeito das seções planas hiperbólicas, como foi possível observar nas questões que seguem. Então, no item b, os participantes inseriram as equações desses planos ($z = k$, com $k \in \mathbb{R}$) e, com os devidos tratamentos gráficos, obtiveram as representações gráficas das seções planas hiperbólicas.

Essas representações gráficas das seções planas, obtidas por cortes da quádrlica por planos paralelos ao plano xoy , podem ser: hipérboles com eixo real paralelo ao eixo dos x , para $k > 0$ (Figura 170a); hipérboles com eixo real paralelo ao eixo dos y , para $k < 0$ (Figura 170b); e duas retas concorrentes, para $k = 0$ (Figura 170c).

Figura 170 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas hiperbólicas de um parabolóide hiperbólico por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

No item c, foi solicitada uma análise algébrica da representação simbólica da quádrlica para a descrição das seções planas hiperbólicas para os diferentes valores de $k \in \mathbb{R}$. Assim, efetuando os devidos tratamentos algébricos sobre a representação simbólica dessa quádrlica, os participantes puderam obter as equações das seções planas hiperbólicas $\begin{cases} x^2 - y^2 = k \\ z = k \end{cases}$, ($k \in \mathbb{R}$).

Com os tratamentos algébricos, os participantes puderam constatar que essa equação representa uma hipérbole com eixo real sobre o eixo dos x para $k > 0$, uma hipérbole com eixo real sobre o eixo dos y para $k < 0$ e duas retas concorrentes para $k = 0$. Não há registros do participante P1, porque essa questão também não foi proposta na primeira versão dessa SEAI.

Os participantes P2 e P3, convertendo da representação gráfica para a simbólica, apresentaram os seguintes registros:

P2: $x^2 - y^2 = z$ e $z = k$. Para os valores de k positivos, teremos uma hipérbole com eixo real em x . Já para os valores de k negativos, teremos uma hipérbole com eixo real em y .

P3: $x^2 - y^2 = k$, se $k = 0$ temos as assíntotas. Se $k > 0$ temos uma hipérbole de eixo real x , e se $k < 0$ temos uma hipérbole de eixo real y .

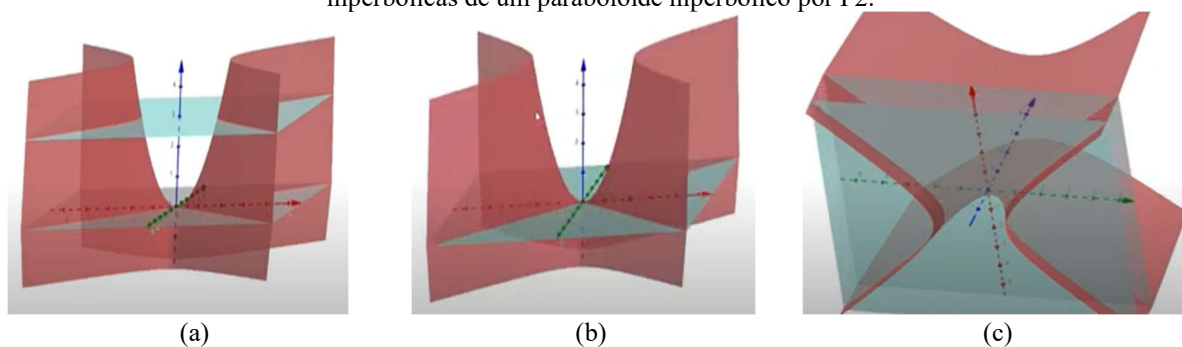
Podemos observar no registro do participante P3, que suas apreensões figurais possibilitaram a identificação das retas concorrentes como seção plana dessa quádrlica com o plano xoy . No caso de P2, o seu registro não deixa claro se o participante reconheceu a existência das retas concorrentes como seção plana dessa quádrlica. É possível que, ao referir-

se às seções planas hiperbólicas, o enunciado da questão tenha condicionado o participante à identificação das hipérboles apenas.

Entendemos que esse foi o motivo pelo qual P2 não evidenciou a existência das retas concorrentes em sua resposta, e isso pode ser confirmado no item d dessa atividade. Nessa questão, foi proposta a correlação entre as representações gráficas e simbólicas do parabolóide hiperbólico em oz_+ no plano xoz . Para isso, os participantes realizaram a correlação entre os gráficos (item b) e as equações (item c) das seções planas hiperbólicas para cada valor de $k \in \mathbb{R}$.

Nessa oportunidade, P2 moveu o controle deslizante do parâmetro k , para mostrar as seções planas obtidas por cortes da superfície por planos paralelos a xoy ($z = k$). P2 iniciou mostrando as seções planas para valores positivos de k , quando disse: “ $z = k$ está aqui, a minha hipérbole com eixo real em x ” (Figura 171a).

Figura 171 – Tratamentos gráficos para obter as seções planas hiperbólicas de um parabolóide hiperbólico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

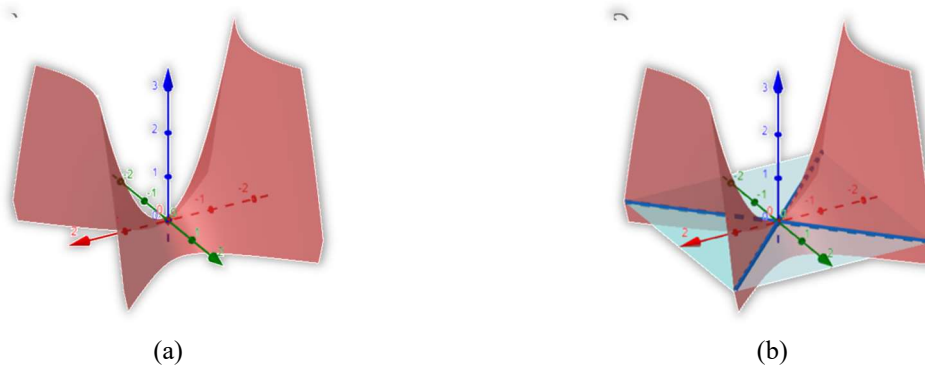
Então, movendo o controle deslizante até chegar em zero e, girando a representação dinâmica dessa quádrlica, P2 disse: “E aí, quando eu variar aqui, deixa eu ver ... Acho que é em zero. Aí, quando eu variar, eu vou ter uma ... Já é degenerada? É em zero que nós temos a degenerada da hipérbole” (Figura 171b). E, analisando a representação gráfica dessa superfície para valores de k negativos, P2 afirmou: “E aí o nosso eixo real passa a ser o y para baixo” (Figura 171c).

Vemos que, pensando-com as representações dinâmicas, P2 realizou os tratamentos gráficos, correlacionando representações gráficas e simbólicas das seções planas hiperbólicas dessa quádrlica. Além disso, consideramos que P2 também conseguiu identificar as retas concorrentes como seções planas desse parabolóide hiperbólico com o plano xoy .

5.1.7.4 ATIVIDADE 4

Na atividade 4, foi proposto o problema do corte pelo plano xoy do parabolóide hiperbólico em oz_+ no plano xoz . Da mesma forma que com o problema da vela, uma análise apressada da representação estática dessa quádrlica (Figura 172a) poderia não ser suficiente para revelar as retas concorrentes como seções planas no plano xoy , uma vez que essa seção plana parece ser uma hipérbole.

Figura 172 – Retas concorrentes como seção plana do parabolóide hiperbólico.



Fonte: Elaborado pela autora.

Então, no item a, perguntou-se aos participantes qual seria o resultado da intersecção do parabolóide hiperbólico com o plano xoy . Podendo observar apenas a representação estática nesse momento (Figura 172a), os participantes responderam:

P1: o resultado é uma hipérbole.

P2: É a representação da degenerada da hipérbole. Neste caso, são duas retas concorrentes que indicam a troca do eixo real da hipérbole. $x^2 = y^2 + z$ e $z = 0 \rightarrow \pm\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{y^2} \rightarrow x = -y$ e $x = y$.

P3: Duas retas concorrentes. $z = 0$ é a equação do plano.

Os participantes P2 e P3, que exploraram as representações dinâmicas dessa quádrlica nas atividades anteriores, identificaram as retas concorrentes. O mesmo não ocorreu com o participante P1, pois na primeira versão dessa SEAI, a observação das representações dinâmicas só foi possível ao final. Entendemos que esse foi o motivo do participante P1, diferente dos

demais, não conseguir identificar essa seção plana. P1 respondeu a essa questão apenas com base na observação da representação estática ou na sua própria representação mental dessa quádrlica.

A seguir, a questão do item b propôs que a equação desse plano fosse inserida na janela de álgebra, obtendo a sua intersecção com a quádrlica e constatando que as seções planas eram duas retas concorrentes (Figura 172b). E, na questão do item c, foi proposta a obtenção das representações simbólicas dessas retas concorrentes, para a correspondência com suas representações gráficas (item d).

Na resolução do sistema com as equações do parabolóide hiperbólico e do plano xoy , substituindo $z = 0$ na equação dessa quádrlica, obtém-se $x^2 - y^2 = 0$. Com os devidos tratamentos algébricos, obtemos as equações das retas concorrentes são dadas por $\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$. Aqui encontramos dois obstáculos conceituais, um deles relacionado aos tratamentos algébricos que transformam a equação $x^2 - y^2 = 0$ nas equações $y = \pm x$.

O outro obstáculo conceitual é relativo à interpretação geométrica dessas equações que, representando dois planos no IR^3 , requerem uma segunda equação ($z = 0$) para que tenhamos duas retas concorrentes. Os participantes, mobilizando esquemas conceituais, registraram suas respostas como segue:

P1: A intersecção dessa superfície pelo plano xoy resulta em duas retas concorrentes. A intersecção dessa superfície com planos paralelos a xoy , são hipérboles com eixo real paralelo ao eixo x para valores de $k > 0$. A intersecção dessa superfície com planos paralelos a xoy , são hipérboles com eixo real paralelo ao eixo y para valores de $k < 0$.

P2: $x = y$ e $x = -y$.

P3: $y = x$ e $y = -x$, com $z = 0$.

P1 não realizou os tratamentos algébricos para obtenção das representações simbólicas dessas seções planas, mas suas respostas já demonstram que o participante conseguiu identificar as retas concorrentes como seção plana da quádrlica com o plano xoy . Na resposta do participante P2, faltou a equação do plano xoy . No entanto, P2 e P3 realizaram os tratamentos algébricos necessários, identificando as representações simbólicas das seções planas do parabolóide hiperbólico com o plano xoy e correlacionando com as representações gráficas.

Por fim, o item d propôs aos participantes a análise das suas conjecturas relacionadas às questões dos itens b e c. Os participantes foram realizando as correlações entre as representações gráficas e simbólicas dessas seções planas na medida em que efetuavam os tratamentos algébricos na questão anterior.

5.1.7.5 ATIVIDADE 5

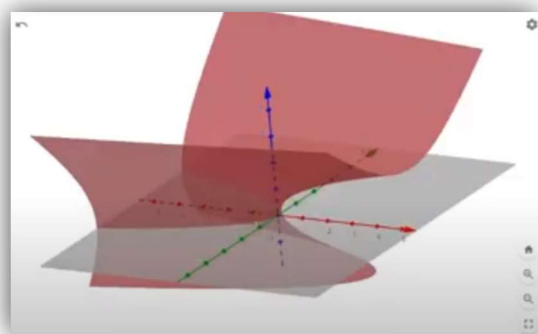
Na atividade 5, foi possível complementar a representação em língua natural específica do parabolóide hiperbólico, estabelecendo a correspondência entre esse e os registros de representação gráfico e simbólico. Inicialmente, foi solicitado que se escrevesse uma equação para o parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ (item a) e, a seguir, que se obtivesse o seu gráfico (item b). No item c, foi solicitado que se observasse a posição da parábola assento no sistema cartesiano.

Dessa forma, os participantes puderam constatar que existem duas possibilidades para essa parábola com concavidade voltada para ox_+ , que pode estar contida no plano xoy ou no plano xoz . Com a questão proposta, eles perceberam que a representação em língua natural dessa quádrica (parabolóide hiperbólico com assento em ox_+) não estaria completa. E que essa parábola assento poderia pertencer ao plano xoy (parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy) ou no plano xoz (parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz).

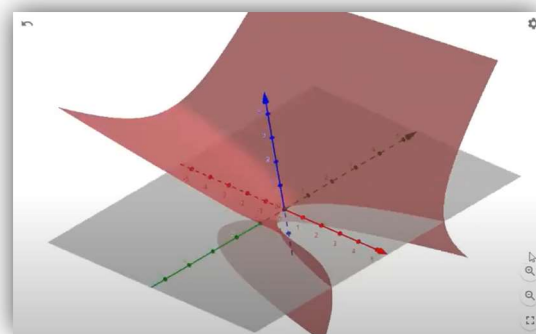
Para facilitar a comunicação, apresentamos de forma integrada os resultados dos itens a, b e c desta atividade. Essa atividade não foi proposta na primeira aplicação, por essa causa temos apenas os registros das respostas dos participantes P2 “ $z^2 - y^2 = x$ ou $y^2 - z^2 = x$ ” e P3 “ $z^2 - y^2 = x$ ”. O participante P2 escreveu a primeira equação ($z^2 - y^2 = x$) e percebeu que há outra possibilidade trocando os sinais na parte esquerda da equação ($y^2 - z^2 = x$).

Depois, P2 inseriu as duas equações na janela de álgebra do GeoGebra e, manipulando as representações dinâmicas dessas quádricas, confirmou que uma tem parábola assento no plano xoz (Figura 173a) e a outra no plano xoy (Figura 173b).

Figura 173 – Obtenção das parábolas assento de dois paraboloides hiperbólicos por P2.



(a) parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz



(b) parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy

Fonte: Dados da pesquisa.

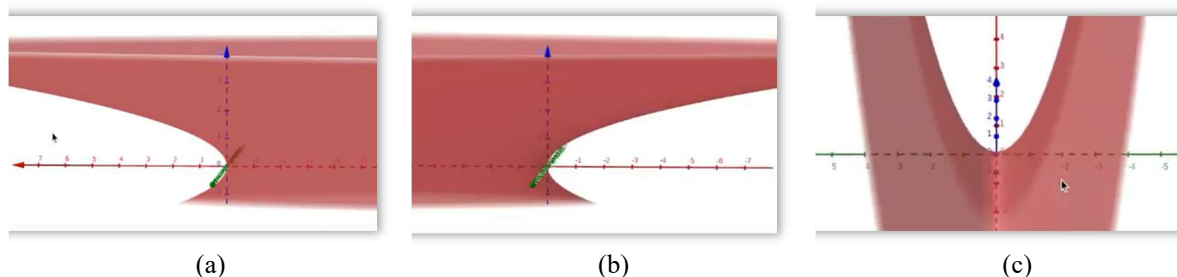
O participante P3 registrou apenas uma das possibilidades ($z^2 - y^2 = x$), então solicitamos que inserisse essa equação na janela de álgebra para que pudesse analisar. P3 inseriu essa equação na janela de álgebra, obtendo o gráfico do parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz (Figura 174a). Então, perguntamos a P3 de quantas maneiras podemos posicionar a parábola assento com eixo de simetria em ox_+ no sistema cartesiano.

P3 respondeu que haveriam várias maneiras de posicionar a parábola assento, referindo-se às possibilidades de alterar os coeficientes na equação da parábola assento. Então, pedimos para que P3 não se apoiasse na representação simbólica, mas fizesse apenas a análise da representação gráfica no GeoGebra. Pedimos que P3, observando a representação gráfica da Figura 174a, respondesse de quantas formas a parábola assento com eixo de simetria em ox_+ poderia ser posicionada sobre um plano coordenado.

P3 perguntou se o vértice seria a origem, ao que respondemos que sim, e completou: “*De uma única maneira né*”. Então, pedimos para P3 verificar novamente a existência de outras possibilidades. O participante continuou considerando a possibilidade de alterar os coeficientes na equação da parábola, mas pedimos que se baseasse apenas a representação gráfica nesse momento. Então, entendemos que P3 estaria falando da rotação da parábola assento em torno do eixo dos x , quando respondeu que existiriam várias possibilidades para a posição dessa cônica.

E, a seguir, P3 completou: “*Perpendiculares eu tenho duas só*”. Entendemos que P3 constatou que há apenas duas possibilidades para a posição da parábola assento em ox_+ , considerando que esta pertença a um dos planos coordenados. Para confirmar que o participante estaria falando das parábolas assento nos planos xoy e xoz , perguntamos em que planos estariam essas duas parábolas.

Figura 174 – Obtenção da parábola assento de um parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Então, P3 trocou o sinal na parte esquerda da equação ($-z^2 + y^2 = x$), obtendo o parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy . Porém, P3 continuou alterando o sinal na equação, entendemos que por não compreender o fato da parábola (assento na visão de P3) ter concavidade voltada para ox_- (Figura 174b). P3 estava observando a parábola estribo, percebendo isso quando girou novamente a representação dinâmica dessa quádrlica (Figura 174c).

Nessa oportunidade, foi possível constatar a contribuição da representação dinâmica para a diferenciação entre os parabolóides hiperbólicos, e conseqüente constituição da sua representação em língua natural específica. Então, perguntamos aos participantes se a denominação ‘parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ ’ representava unicamente essa quádrlica. Os participantes registraram as seguintes respostas:

P2: Não, porque precisamos da informação de um plano que contém a parábola assento. Logo precisamos da informação dos dois eixos.

P3: Parabolóide Hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz . Parabolóide Hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy . Não, pois podemos ter a rotação da quádrlica, e como estamos visualizando planos perpendiculares aos eixos, portanto temos duas parábolas por eixo. xoz e xoy .

Dessa forma, podemos entender que o objetivo da atividade proposta foi atingido, uma vez que os participantes diferenciaram e correlacionaram corretamente as representações gráfica, simbólica e em língua natural dessas quádrlicas. Para finalizar, na questão do item d, retomamos o problema discutido na questão do item a da atividade 1, a respeito da denominação daquele parabolóide hiperbólico.

Como denominação para o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz , o participante P2 havia respondido “*parabolóide hiperbólico em oz* ” e, corrigindo, registrou “*Parabolóide Hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz* ”. O participante P3, que havia respondido “*parabolóide hiperbólico de centro z* ”, também corrigiu, registrando “*A nomenclatura utilizada seria o parabolóide hiperbólico em oz_+ de assento no plano xoz* ”.

Com isso, podemos observar que os participantes mobilizaram esquemas de utilização, realizando os tratamentos algébricos e gráficos sobre as representações simbólicas e gráficas e correlacionando os registros de representação simbólico, gráfico e em língua natural.

5.1.7.6 OBSERVAÇÕES FINAIS

Nessa SEAI, os participantes (re)construíram esquemas conceituais referentes à identificação e correlação dessas representações nos registros gráficos e simbólicos,

(re)constituindo a representação em língua natural específica. Nessa oportunidade, foi possível inferir sobre a imagem mental constituída pelos participantes da seção plana com o plano xoy de um parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz . Inicialmente os participantes tiveram que identificar as retas concorrentes como seção plana a partir de uma representação estática.

O participante P1, que inicialmente utilizou apenas a percepção na sua resposta, não conseguiu constatar as retas concorrentes pela observação da representação estática. A observação desse tipo de representação gráfica não foi suficiente para a identificação das retas concorrentes como seção plana do parabolóide hiperbólico. Somente quando teve acesso à representação dinâmica, P1 conseguiu constatar que a intersecção com o plano xoy do parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz são duas retas concorrentes.

Esse caso, deixou mais evidente a contribuição das representações dinâmicas na construção da imagem mental dessa quádrlica. Como objeto de pensar-com, a representação dinâmica do parabolóide hiperbólico possibilitou o reconhecimento de propriedades desse objeto matemático não reveladas pela representação estática. Entendemos que os participantes P2 e P3 identificaram as retas concorrentes, pois tiveram a oportunidade de explorar as representações dinâmicas das seções planas hiperbólicas na questão anterior.

Consideramos que uma representação estática pode possibilitar a percepção ou reconhecimento de algumas propriedades do objeto matemático, mas que também pode causar distorção ou bloqueio de outras (Duval, 2011a). É o caso do parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoz proposto nessa SEAI, em que a percepção pode conduzir ao reconhecimento de uma hipérbole como seção plana com o plano xoy .

Em contrapartida, uma representação dinâmica permite a desconstrução dimensional que, ao contrário da percepção, é “[...] contra o reconhecimento imediato de unidades figurais 2D ou 3D que se impõem à primeira vista e que bloqueiam o reconhecimento de outras unidades figurais” (Duval, 2011a, p. 93). No caso dessa SEAI, a representação dinâmica possibilitou a obtenção das retas concorrentes (unidades figurais 2D) como intersecção do parabolóide hiperbólico (unidade figurais 3D) por um plano.

A passagem de uma dimensão a outra proporcionada por esses objetos de pensar-com, permitiram ‘ver geometricamente’ essa quádrlica, que consiste em “[...] operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista [...]” (Duval, 2011a, p. 87). O autor considera que essa desconstrução dimensional pode ser realizada “[...] sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel” (Duval, 2011a, p. 87).

No entanto, ponderamos que no caso de superfícies quádricas, a desconstrução dimensional por meio de uma representação estática do parabolóide hiperbólico apresentou limitação. Consideramos que, nesse caso, as representações dinâmicas foram fundamentais para as apreensões figurais que se fizeram necessárias nessa SEAI. Essas apreensões figurais possibilitaram as apreensões conceituais relativas à correlação entre os registros gráfico, simbólico e em língua natural específica dessa quádrica.

Por sua vez, as correlações entre esses diferentes registros de representação, proporcionaram o enriquecimento da representação mental dessa superfície, com a diferenciação entre os parabolóides hiperbólicos com mesmo semieixo de simetria (a exemplo do parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no plano xoy e no plano xoz). Dessa diferenciação advém a constituição da representação em língua natural específica dessa quádrica, envolvendo a discriminação das possibilidades para a posição de um parabolóide hiperbólico no sistema cartesiano.

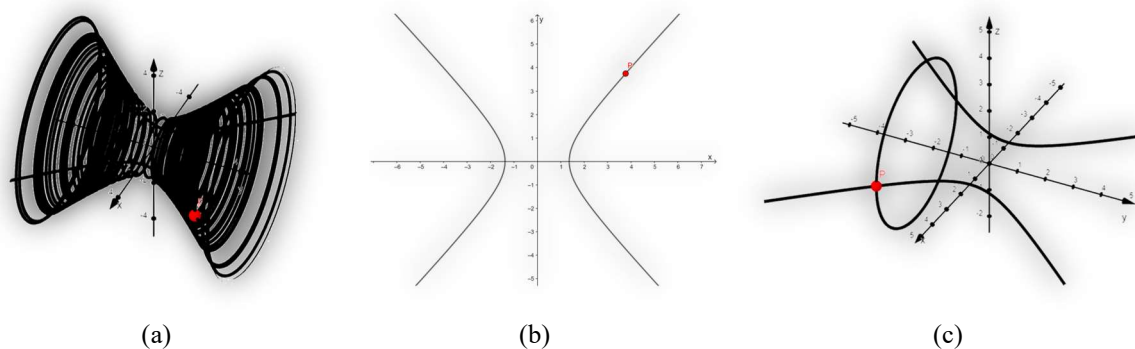
Com isso, fechamos o conjunto de situações de ensino e aprendizagem com foco principal na constituição de esquemas conceituais, onde também se fez necessária a mobilização ou (re)constituição de esquemas relacionados à apropriação das ferramentas do GeoGebra. As SEAI seguintes passam a propor a obtenção de construções geométricas, envolvendo um aumento no repertório de ferramentas e um planejamento para a inserção dos elementos.

A situação de ensino e aprendizagem instrumental a seguir propôs a identificação de uma quádrica dada uma de suas seções planas, envolvendo também uma questão relacionada à percepção imediata e desconstrução dimensional.

5.1.8 SEAI 8 – Desafiando a percepção: a quádrica escondida

Essa situação de ensino e aprendizagem instrumental (APÊNDICE K — SEAI 8) teve inspiração em problemas do tipo ‘caixa-preta’, presentes nos estudos de Notare e Basso (2018). Em atividades desse tipo, é preciso reconstruir as configurações geométricas de uma construção, a partir da abstração de propriedades não visíveis na tela do computador. A Figura 175 ilustra o problema proposto nessa SEAI, que consiste em reconstruir as configurações da construção que gera uma quádrica a partir de uma cônica.

Figura 175 - Quádrica escondida nas janelas de álgebra e de visualização 2D e 3D do GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora.

A atividade foi proposta no GeoGebra com uma hipérbole no plano xoy (Figura 175b) na janela de visualização 2D, sobre a qual uma circunferência em plano perpendicular a este, desliza apoiada num ponto comum às duas curvas na janela de visualização 3D (Figura 175c). Na atividade 1, foi proposta uma antecipação, onde os participantes foram convidados a identificar a ‘quádrica escondida’ antes da movimentação do ponto sobre a hipérbole.

Considerando que essa circunferência tem centro sobre um dos eixos coordenados e está em plano perpendicular ao plano da hipérbole, há duas respostas possíveis: hiperboloide de uma folha ou de duas folhas, quando o centro da circunferência estiver sobre o eixo dos y ou dos x , respectivamente. A atividade 2 também propôs antecipações nas questões dos itens a, b e c, com a possibilidade de confirmação no item d.

Na questão do item a, propomos a identificação da superfície desenhada por uma circunferência com centro no eixo dos y e em plano perpendicular a esse eixo, que deslizava apoiada num ponto sobre uma hipérbole no plano xoy com eixo real sobre o eixo dos x . E as questões dos itens b e c levaram os participantes a conjecturar a respeito das seções planas circulares e hiperbólicas, envolvendo a possibilidade de investigação da representação mental do hiperboloide de uma folha constituída pelos participantes.

Então, na questão do item d, os participantes puderam confirmar suas conjecturas, apoiados na representação dinâmica da quádrica. Para responder a essa questão, os menus com as ferramentas não ficaram disponíveis na versão para os participantes. Nessa oportunidade, eles puderam apenas movimentar o ponto P na janela de visualização 2D, que fazia com que a circunferência desenhasse a superfície na janela 3D. Na atividade 3, também são propostas antecipações nas questões dos itens a, b e c, com a construção de um hiperboloide de duas folhas no item d.

Na questão do item a, foi proposta a identificação da superfície que uma circunferência com centro sobre o eixo dos x e em plano perpendicular a esse eixo desliza, ao deslizar sobre a mesma hipérbole, no plano xoy e com eixo real sobre o eixo dos x . Na sequência, as questões dos itens b e c levaram os participantes a conjecturar a respeito das seções planas circulares e hiperbólicas, envolvendo a possibilidade de investigação da representação mental do hiperboloide de duas folhas constituída pelos participantes.

Então, na questão do item d, os participantes foram convidados a obter a construção dessa quádrlica apoiados nessa representação mental e na representação dinâmica do hiperboloide de uma folha. Para isso, um arquivo do GeoGebra com a construção do hiperboloide de uma folha foi disponibilizado, sem o acesso aos menus com as ferramentas. De forma similar às atividades do tipo ‘caixa-preta’, os participantes manipularam a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha, observando as relações entre os elementos para desvendar a construção do hiperboloide de duas folhas (abrir a ‘caixa-preta’).

Nesse tipo de problema, “Explorando o ‘desenho em movimento’ que aí se descortina, o desafio é construir réplicas das ‘caixas-pretas’, para o que eles devem analisar as propriedades geométricas contidas no dinamismo e na estabilidade da figura” (GRAVINA, 2001, p. 104). Com isso, os participantes iniciam um rol de atividades que requerem a observação da ordem de inserção e dependência entre os elementos das construções para a estabilidade destas diante do movimento.

5.1.8.1 ATIVIDADE 1

Na atividade 1, os participantes foram convidados a observar a representação gráfica da hipérbole nas janelas de visualização 2D e 3D (Figura 175b e Figura 175c), para responder a seguinte questão: “*Seja P um ponto móvel sobre uma hipérbole no plano xoy . Considere uma circunferência que contém P , com centro sobre um eixo coordenado e em plano perpendicular ao plano da hipérbole. Que superfície(s) quádrlica(s) pode(m) ser obtida(s) ao deslizar o ponto P sobre a hipérbole? Explique*”.

Nessa oportunidade, os participantes não tiveram acesso à construção no GeoGebra, precisando basearem-se nas representações estáticas das janelas de visualização 2D e 3D para a constituição da imagem mental dessas superfícies. Conjecturando a respeito da quádrlica que o rastro da circunferência desenhava quando o ponto P se movia sobre a hipérbole, os participantes registraram as seguintes respostas:

P1: Um hiperboloide de duas folhas quando giramos sobre o eixo x . E um hiperboloide de uma folha quando giramos sobre o eixo y .

P2: Podemos ter um hiperboloide de duas folhas, com o eixo x , passando no centro de todas as circunferências. Ou podemos ter um hiperboloide de uma folha, com o eixo y passando no centro das circunferências.

P3: Hiperboloide de duas folhas, devido haver a hipérbole fixada e a circunferência sendo perpendicular ao plano em que ela se encontra.

Na primeira aplicação dessa SEAI, o enunciado da atividade 1 era: “*Observe a cônica na janela de visualização 2D, que também está representada na janela 3D. Quais as quádricas que podem ser obtidas a partir dessa cônica? Explique*”. Dessa forma, o participante P1 poderia pensar numa: 1) hipérbole girando apoiada no ponto P que se move sobre a circunferência; 2) circunferência deslizando apoiada no ponto P que se move sobre a hipérbole.

O participante P1, manipulando o modelo 3D do hiperboloide de duas folhas, disse: “*Me parece que a gente conseguiria este aqui, com eixo real ali no x [...]. E daí o imaginário, que é o que não toca, é o y [...]. Essa superfície é o hiperboloide de duas folhas*”.

Podemos entender que P1 pensou na hipérbole com eixo real sobre o eixo dos x girando em torno desse eixo. Perguntamos se haveria outra possibilidade de resposta e, não sabendo responder, P1 passou a analisar a construção no GeoGebra.

Ao movimentar o ponto P, o participante conjecturou que poderia ser um hiperboloide de uma folha, mas disse: “*Tá, mas eu tô confusa ainda. Não consigo criar isso na minha cabeça*”. Entendemos que a momentânea confusão estaria relacionada à diferença entre as formas de tratar o problema, a proposta na construção e a imaginada pelo participante. A construção tratava de um hiperboloide de uma folha que era gerado por uma circunferência que deslizava apoiada sobre um ponto P da hipérbole. E o participante estava criando a imagem mental de uma hipérbole que girava apoiada num ponto sobre essa circunferência.

Apesar disso, consideramos que P1 superou esse obstáculo, conseguindo criar a imagem mental do hiperboloide de uma folha. Isso pode ser constatado na sua fala, quando disse: “*Se eu girar ela sobre o eixo vermelho (eixo dos x), eu sempre vou ter um hiperboloide de duas folhas. Agora, se eu tô girando essa imagem aqui no eixo verde (eixo dos y), eu vou ter o hiperboloide de uma folha*”. Diante disso, o enunciado dessa atividade foi alterado para deixar claro que é uma circunferência que desliza apoiada na hipérbole.

Com base no novo enunciado, P2 e P3 inicialmente identificaram apenas o hiperboloide de duas folhas. Ao perguntarmos qual seria o eixo que passaria no centro da circunferência, P2 respondeu que seria o eixo dos x . Então, perguntamos se existiria outra possibilidade, ao que o participante inicialmente disse que não saberia dizer. Avaliando novamente, P2 identificou a outra possibilidade, respondendo: “*[...] se eu considerasse a circunferência ainda no plano*

perpendicular, mas a circunferência com eixo y passando no centro eu tenho hiperboloide de uma folha”.

O participante P3, que também visualizou apenas o hiperboloide de duas folhas, ao perguntarmos se existiria outra possibilidade disse: *“Se ele pode gerar outra superfície quádriga? Elipsoide não, não tem fim, né. Hiperboloide de uma folha não, não tá conectado. Um paraboloide hiperbólico não também. Não tá conectado, né. Daí o paraboloide elíptico. Só esse né”.* Como vemos, P3 não conseguiu identificar o hiperboloide de uma folha na antecipação proposta.

No entanto, os participantes puderam confirmar ou refutar as suas respostas à atividade 1 por meio das atividades 2 e 3, que abordavam o hiperboloide de uma folha e o de duas folhas, respectivamente. Na atividade 2, os participantes exploraram a construção geométrica do hiperboloide de uma folha e, na atividade 3, eles foram convidados a construir um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência que deslizaria apoiada numa hipérbole.

5.1.8.2 ATIVIDADE 2

A questão do item a da atividade 2 trouxe o seguinte problema: *“Considere a hipérbole da atividade 1 sobre o plano xoy que tem eixo real sobre o eixo dos x e com centro na origem do sistema cartesiano. Suponha que a circunferência que passa pelo ponto P tem centro sobre o eixo dos y , pertencendo a um plano perpendicular a esse eixo. Ao deslizar o ponto P sobre a hipérbole na janela de visualização 2D, que superfície essa circunferência desenha na janela de visualização 3D?”*

Sem acessar a construção geométrica dessa quádriga, os participantes foram convidados a conjecturar a respeito da superfície que a circunferência desenharia quando o ponto P se movesse sobre a hipérbole. Porém, agora com a definição do eixo dos y como o eixo sobre o qual está o centro da circunferência. Com base nas suas imagens mentais constituídas a partir do enunciado, os participantes responderam de forma unânime que se tratava de um hiperboloide de uma folha.

As questões seguintes conduziram os participantes à verificação das suas respostas, conjecturando a respeito das seções planas circulares dessa quádriga. Envolvendo a desconstrução dimensional, essa proposta favoreceu à diferenciação entre os hiperboloides, uma vez que o reconhecimento das fatias bidimensionais (seções planas) favorece a constituição da imagem mental do objeto tridimensional (quádriga).

Então, no item b, os participantes precisaram identificar os planos que têm circunferências como seções planas, dizendo como são as equações desses planos. E no item c, perguntamos se todas as seções planas são circunferências, pedindo que os participantes justifiquem por meio da forma algébrica, descrevendo as seções planas que podem ser obtidas para os diferentes valores de k . Essa questão permite diferenciar os hiperboloides de uma e de duas folhas, uma vez que o primeiro tem todas as seções planas circulares, ao contrário do segundo.

Os participantes constataram que esses planos são os paralelos ao plano xoz ($y = k$) e que as seções planas são circulares para todo valor de $k \in \mathbb{R}$. Essa questão não foi proposta na primeira aplicação, assim não temos as respostas do participante P1. Mobilizando esquemas conceituais, P2 e P3 basearam-se apenas na representação estática da atividade 1 e nas suas próprias representações mentais, respondendo:

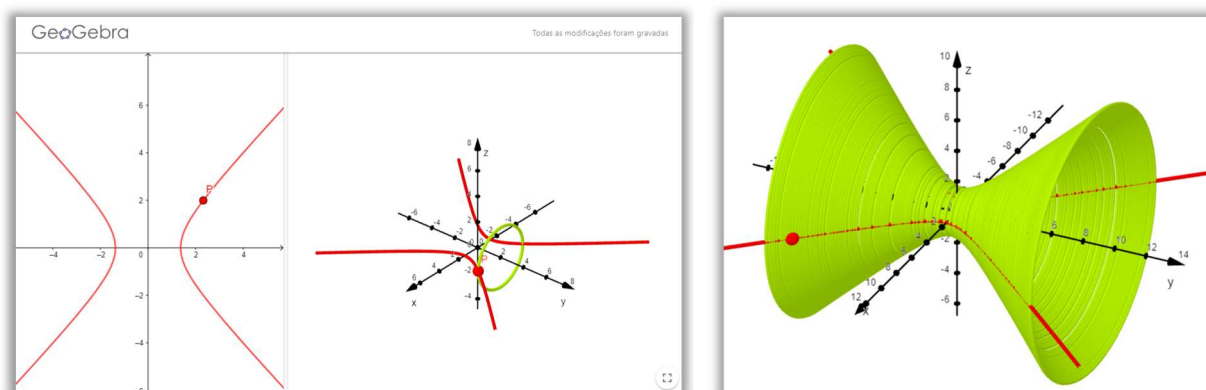
P2: O plano paralelo ao xoz , $y = k$. Todas as seções planas obtidas por cortes dessa superfície quádrlica por esses planos são circunferências. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ como, $y = k$: $x^2 + z^2 = 1 + k^2$, logo $1 + k^2$ será sempre positivo.

P3: sim. $x^2 + z^2 = 1 + y^2$, pois para todo k real teremos uma elipse. Todos os planos $y = k$.

Nas respostas de P2 e P3, podemos observar que os participantes fizeram corretamente as correlações entre os registros gráfico e simbólico das seções planas circulares. Esses registros escritos refletem as representações mentais constituídas pelos participantes, por meio de apreensões figurais e conceituais em atividades anteriores. Esquemas prévios lhes permitiram constituir as representações mentais dessas seções planas que, por sua vez, favoreceram a correlação com as representações simbólicas presentes nas suas respostas.

Por fim, a questão proposta no item d permitiu que os participantes confirmassem ou refutassem suas conjecturas relativas às questões dos itens a, b e c desta atividade. Para isso, os participantes tiveram acesso a um arquivo do GeoGebra, com uma construção do hiperboloide de uma folha em y , cujos elementos e dependência entre estes não estavam visíveis (Figura 176a).

Para descobrir a quádrlica escondida, os participantes moveram o ponto P na janela de visualização 2D (Figura 176a), fazendo a circunferência deslizar apoiada na hipérbole. Com a função ‘Rastro’ habilitada, a circunferência desenhou o hiperboloide de uma folha na janela de visualização 3D (Figura 176b), quando os participantes confirmaram as suas conjecturas.



(a)

(b)

Fonte: Elaborado pela autora.

5.1.8.3 ATIVIDADE 3

A atividade 3 apresentou uma proposta similar à da atividade 2, envolvendo a mesma hipérbole sobre o plano xoy que tem eixo real sobre o eixo dos x e com centro na origem do sistema cartesiano, mas com uma circunferência que tem centro sobre o eixo dos x . Dessa forma, ao deslizar apoiada num ponto sobre a hipérbole, essa circunferência desenhava o hiperboloide de duas folhas. Além disso, ao invés de manipular uma construção pronta dessa quádrlica, nessa atividade os participantes foram convidados a obtê-la.

O enunciado dessa questão dizia: “Agora, considere ainda a hipérbole da atividade 1 sobre o plano xoy que tem eixo real em ox e com centro na origem do sistema cartesiano. Supondo que a circunferência que passa pelo ponto P tem centro sobre o eixo dos x , pertencendo a um plano perpendicular a esse eixo. Ao deslizar o ponto P sobre a hipérbole na janela de visualização 2D, que superfície essa circunferência desenha na janela de visualização 3D?”

Então, com base em imagens mentais constituídas a partir desse enunciado, os participantes fizeram suas conjecturas, respondendo de forma unânime que se tratava de um hiperboloide de duas folhas. As questões seguintes conduziram os participantes a analisarem as seções planas circulares verificando que, além das circunferências, há pontos como seções planas e também intervalos em que não há seção plana.

Assim, no item b, os participantes precisaram responder quais planos têm circunferências como seções planas e como são as equações desses planos. E no item c, perguntamos se todas as seções planas são circunferências, pedindo que eles argumentassem por meio da forma algébrica, descrevendo as seções planas que poderiam ser obtidas para os

diferentes valores de k . Essa questão também envolveu a desconstrução dimensional, quando a apreensão figural das seções planas (2D) favoreceu a constituição da imagem mental do hiperboloide de duas folhas (3D).

Com isso, os participantes puderam constatar que esses planos são os paralelos ao plano yoz ($x = k$) e que as seções planas não são sempre circulares. Os participantes verificaram que essas seções planas também podem ser pontos (vértices da hipérbole) e que, para valores de k entre as abscissas desses vértices, não há lugar geométrico. Não tendo sido proposta na primeira versão dessa SEAI, não temos as respostas do participante P1 para essa questão.

Mobilizando esquemas conceituais, os participantes P2 e P3 responderam:

P2: $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, $x = k$. Como $y^2 + z^2 = -1 + k^2$, logo quando k está dentro do intervalo $(-1,1)$, a equação não existe, com isso não temos circunferências naquele plano. Quando k é 1 ou -1, teremos uma igualdade de $y^2 = -z^2$, essa é a equação da degenerada da elipse, que corresponde a um ponto pertencente eixo x , com $y = z = 0$. Circunferências quando k está dentro dos intervalos $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$.

P3: $x = k$. Não, pois $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, ou seja, $y^2 + z^2 = x^2 - 1$. Se $|x| < 1$ não existe intersecção e para $|x| = 1$ temos um ponto e no restante dos casos temos a circunferência.

Podemos observar em suas respostas, que as representações mentais do hiperboloide de duas folhas foram adequadamente constituídas por P2 e P3. Os esquemas conceituais previamente constituídos pelos participantes possibilitaram a correlação entre os registros gráfico e simbólico dessa quádrlica. Novamente podemos verificar também a contribuição da desconstrução dimensional para a apreensão figural dessa superfície, quando as fatias bidimensionais que compõem essa quádrlica (seções planas) favoreceram a constituição da imagem mental da quádrlica (3D).

Então, a questão proposta no item d permitiu que as conjecturas dos participantes, em resposta às questões dos itens a, b e c desta atividade, fossem confirmadas ou refutadas. Para isso, os participantes foram convidados a ‘abrir a caixa-preta’, descobrindo os elementos necessários e a dependência entre estes para obter uma construção similar, mas do hiperboloide de duas folhas. Esses elementos, por ordem de dependência, são: os dois focos e um ponto da hipérbole, a hipérbole, um ponto sobre a hipérbole e a circunferência, conforme protocolo de construção da Figura 177.

Figura 177 – Protocolo de construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência.

Nome	Descrição	Valor
1 Ponto A		$A = (-2, 0)$
2 Ponto B	Ponto sobre EixoX	$B = (2, 0)$
3 Ponto C		$C = (-4, -4)$
4 Hipérbole c	Hipérbole com focos B, A passando por C	$c: -33.99x^2 + 30.01y^2 = -63.75$
5 Ponto P	Ponto sobre c	$P = (2.89, 2.71)$
6 Círculo d	Círculo de eixo EixoY passando por P	$d: X = (0, 2.71, 0) + (2.89 \cos(t), 0, -2.89 \sin(t))$

Fonte: Elaborado pela autora.

Esse protocolo de construção apresenta uma proposta para a obtenção do hiperboloide de duas folhas de maneira similar ao da construção do hiperboloide de uma folha. Nesse caso, para obter a hipérbole são necessários três pontos: os dois focos (A e B) da hipérbole e um ponto (C) que pertence à essa cônica. Para isso, os participantes poderiam utilizar as ferramentas ‘Ponto’ e ‘Hipérbole’, mobilizando esquemas de utilização já constituídos na SEAI 1. A seguir, seria necessário usar um ponto da hipérbole para construir a circunferência, quando os participantes tiveram que constatar que não poderia ser o ponto C.

Nessa oportunidade, os participantes constituíram um novo esquema de utilização, quando precisaram inserir um ponto móvel na construção. Eles perceberam a diferença entre o ponto usado para obter a hipérbole e um ponto colocado sobre essa cônica, onde o primeiro fica fixo e o segundo móvel. Os participantes puderam observar que, diferente do ponto C, ao utilizarem a ferramenta ‘Ponto em objeto’ para colocar um ponto P sobre a hipérbole, este ponto pode ser movimentado sem alteração das características da cônica.

Os cinco primeiros elementos foram inseridos na janela de visualização 2D, o que permitiu a constituição de um novo esquema de utilização, relacionado à diferença entre às ferramentas disponíveis nas janelas de visualização 2D e 3D. Os participantes perceberem que as ferramentas na barra de menus mudavam em acordo com a janela (2D ou 3D) em que estivessem trabalhando. Assim, as ferramentas para obter os cinco primeiros elementos da construção ficaram disponíveis após clicar na janela 2D.

Já a circunferência precisaria ser inserida na janela de visualização 3D, uma vez que não pertence ao plano da hipérbole. Então, tornou-se necessário clicar na janela 3D, tornando visíveis as ferramentas para trabalhar nessa janela de visualização. Para obter a circunferência, os participantes poderiam selecionar a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’,

usando o eixo dos x e o ponto P. Para finalizar a construção, os participantes precisariam selecionar a circunferência e, em seguida, a ferramenta ‘Exibir rastro’.

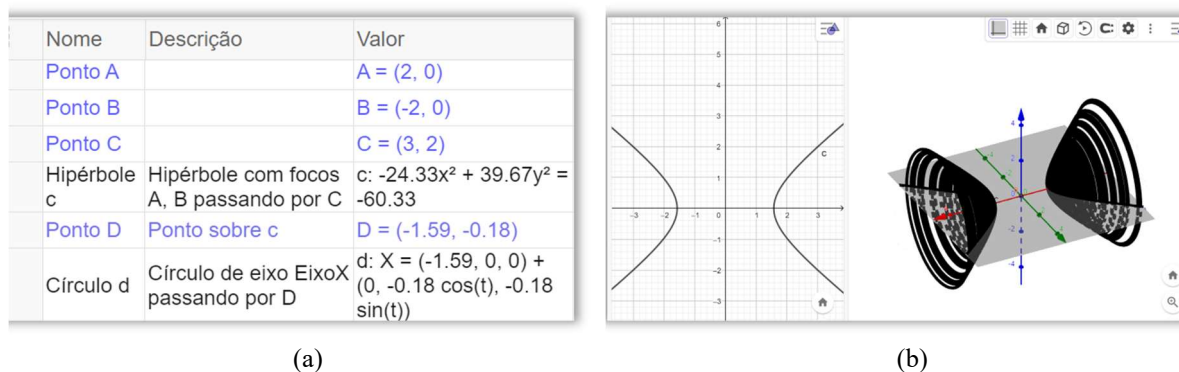
Com isso, movendo o ponto P sobre a hipérbole, foi possível ver a circunferência desenhando o hiperboloide de duas folhas. Consistindo na segunda atividade que envolve a obtenção de uma construção geométrica (a primeira foi a atividade 3 da SEAI 4), entendemos que o acesso às ferramentas do GeoGebra poderia ser necessário a um participante que estivesse numa fase inicial em relação ao uso desse ambiente de matemática dinâmica. Com esse acesso, é possível tornar visível tanto os elementos da construção na janela de álgebra quanto o protocolo da construção.

Assim, disponibilizamos um arquivo do GeoGebra com a construção do hiperboloide de uma folha da atividade 2 em que, diferente de como foi fornecido nesta ocasião, tinha todas as ferramentas disponíveis. Assim, em acordo com o caso, os elementos da construção na janela de álgebra ou o protocolo de construção foram utilizados para o conhecimento dos elementos necessários à construção, a ordem de inserção destes e a dependência entre eles.

Consideramos que a observação dos elementos da construção na janela de álgebra ou a exploração de um protocolo de construção por um iniciante em ambientes de matemática dinâmica também consiste numa atividade que pode trazer importantes contribuições para a apropriação das ferramentas. A seguir, apresentamos os caminhos percorridos pelos participantes para a obtenção dessa quádriga, associando a análise dos seus protocolos de construção com os dados coletados por observação *in loco* e gravações.

Em acordo com o protocolo de construção da Figura 178a, o participante P1 iniciou inserindo os focos $A(2,0)$ e $B(-2,0)$ da hipérbole e um ponto $C(3,2)$ que pertence a essa cônica.

Figura 178 – Construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Então, P1 selecionou a ferramenta ‘Hipérbole’ e os pontos A, B e C, obtendo essa cônica. A seguir, P1 utilizou a ferramenta ‘Ponto sobre objeto’ para colocar um ponto móvel D sobre a hipérbole. Depois, P1 obteve uma circunferência que passa pelo ponto D e tem centro no eixo dos x , usando a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’. Por fim, habilitando a função ‘Rastro’ e movendo o ponto D, o participante obteve o hiperboloide de duas folhas (Figura 178b).

Como os passos que não estavam corretos ou não foram necessários podem ser apagados do protocolo de construção, apresentamos a seguir o caminho completo percorrido por P1 e alguns diálogos que revelam condutas cognitivas do participante. O participante P1 iniciou a atividade dizendo: *“Eu tenho que primeiro fazer a minha hipérbole né”*. E, selecionando o menu de ferramentas das cônicas, P1 acessou a ferramenta ‘Hipérbole’. Verificando que precisava dos focos e de um ponto da hipérbole para obter essa cônica, P1 disse: *“Só que daí eu tenho que selecionar os pontos né [...] dois focos e depois um ponto”*.

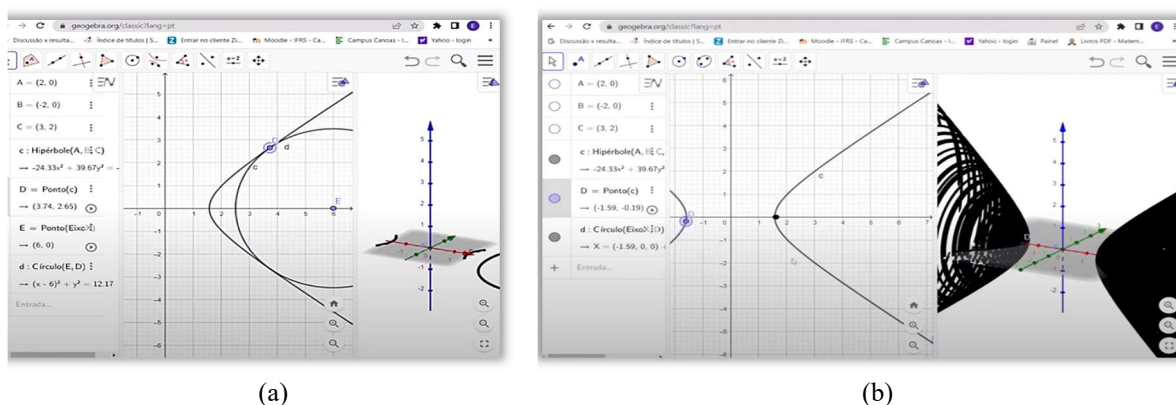
No entanto, P1 ainda apresentou dificuldades na mobilização de esquemas relacionados à utilização dessa ferramenta. P1 experimentou selecionar a ferramenta ‘Hipérbole’ primeiro, para depois inserir os pontos necessários para obter essa cônica. Através do *feedback* do GeoGebra, P1 constatou que os elementos precisavam ser inseridos no sistema cartesiano antes de selecionar a ferramenta. Então, P1 inseriu os pontos $A(2,0)$ e $B(-2,0)$ para focos e $C(3,2)$ como ponto que pertence à hipérbole.

Em seguida, P1 selecionou os dois focos A e B e o ponto C e, usando a ferramenta ‘Hipérbole’, obteve essa cônica na janela de visualização 2D. Então, P1 disse: *“Agora por aquela atividade que nós fizemos uma vez, o meu ponto tem que ficar deslizando. Eu tenho que imaginar agora uma circunferência onde o centro dela vai ser no eixo x e o raio dela caminha pelo traço da hipérbole”*. Com isso, podemos ver que P1 conseguiu abrir a caixa-preta dessa construção, desvendando os elementos necessários para obtê-la e entendendo a dependência entre eles.

E, falando da hipérbole, P1 continuou dizendo: *“Isso seria uma coisa, daí depois eu tenho que fazer de maneira que esse ponto aqui, ele ande sobre essa curva”*. No entanto, apesar de compreender os passos da construção, P1 ainda esbarrou num obstáculo referente à inserção de um ponto móvel sobre a hipérbole. Após analisar algumas ferramentas e, com o *feedback* do GeoGebra, P1 escolheu a ferramenta ‘Ponto sobre objeto’. Com essa ferramenta, P1 inseriu o ponto D sobre a hipérbole e experimentou o movimento deste, percebendo que era isso que precisava.

A seguir, P1 escolheu a ferramenta ‘Círculo dados centro e um de seus pontos’ entre as ferramentas para obtenção de círculo disponíveis na janela de visualização 2D (Figura 179a). Então, selecionando um ponto sobre o eixo dos x e o ponto C sobre a hipérbole, P1 obteve uma circunferência no mesmo plano desta cônica. Esse *feedback* do GeoGebra contribuiu para a tomada de consciência, quando P1 constatou que seria necessário que a circunferência estivesse em plano perpendicular ao plano xoy .

Figura 179 – Processo para a tomada de consciência na construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P1.



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa constatação não foi imediata, mas mediada por alguns questionamentos, como quando perguntamos em que posição essa circunferência deveria estar no sistema cartesiano. Lendo novamente o enunciado, P1 respondeu: “*Ela tem que ser perpendicular ao x* ”. E, perguntando a qual dos planos coordenados o plano dessa circunferência tem que ser paralelo, P1 respondeu: “[...] *paralela ao plano $yo z$* ”. Nesse momento, P1 constatou que a circunferência precisaria ser obtida na janela de visualização 3D, apagando a obtida no plano da hipérbole.

Iniciando a exploração das ferramentas para obtenção de circunferências disponíveis nessa janela, P1 disse, “*Eu posso escolher o círculo dado eixo, que daí nesse caso eu escolheria o eixo x e o ponto móvel que eu tenho*”. P1 escolheu a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’ e selecionou o eixo dos x e o ponto móvel P, obtendo a circunferência e experimentando o movimento desse ponto. Observando que a circunferência realizava o movimento desejado, P1 habilitou o seu rastro, movendo o ponto de novo.

Como P1 moveu o ponto apenas sobre um dos ramos da hipérbole, o rastro da circunferência também gerou somente uma das partes da superfície. Perguntando pela outra parte do hiperboloide de duas folhas, P1 respondeu: “*Era isso que eu ia falar. Um lado eu consegui, mas e o outro?*” Então, pedimos para que P1 experimentasse continuar movendo o ponto P, até que passasse para o outro ramo da hipérbole. Fazendo isso, o rastro da

circunferência gerou a outra parte da superfície e o participante P1 disse: “*Aí está ele. Ai, que incrível! Que bom que só faz de um lado!*” (Figura 179b).

Observando as condutas cognitivas de P1, vimos que o participante desvendou a construção, inserindo os elementos necessários para obtê-la e considerando a dependência entre estes. Evidenciamos a experimentação da variação dinâmica, quando P1 testou a dependência entre os elementos. O participante P1 constituiu novos esquemas de utilização, relacionados à obtenção e diferenciação entre pontos fixos e móveis e entre ferramentas para obtenção de circunferências nas janelas de visualização 2D e 3D.

P1 encontrou alguns obstáculos, especialmente o relacionado à alternância entre as janelas de visualização. No entanto, observamos que no processo de fazer para compreender com a mediação do GeoGebra, o participante conseguiu superar essas dificuldades. Ao pensar com os elementos que iam sendo inseridos para obter a representação dinâmica do hiperboloide de duas folhas, P1 mobilizou ou (re)constituiu esquemas de utilização, especialmente os relacionados às ferramentas para obtenção de uma hipérbole na janela 2D e de uma circunferência na janela 3D.

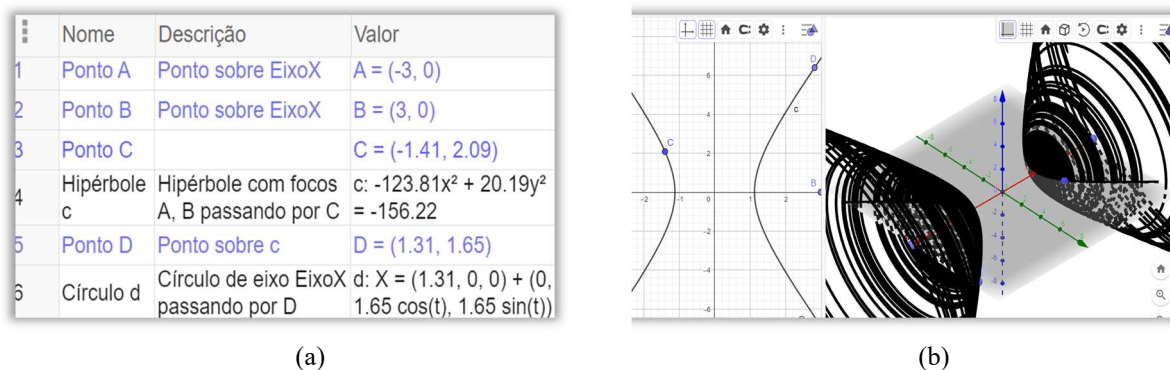
O participante P2 iniciou analisando a construção do hiperboloide de uma folha, mas como ainda não havia utilizado o GeoGebra antes da participação nessa pesquisa, precisou consultar também o protocolo de construção. Essa é a segunda atividade ao longo das SEAI que envolveu a obtenção de uma construção geométrica, o que se constitui num desafio maior para P2, especialmente pelo fato de ser iniciante no uso de um ambiente de matemática dinâmica.

Dessa forma, consideramos que a análise do protocolo de construção também poderia contribuir para a gênese instrumental do participante, preparando-o para construções progressivamente mais complexas. Entendendo que precisaria iniciar a construção com a inserção de uma hipérbole, P2 selecionou a ferramenta ‘Hipérbole’, fazendo a leitura dos elementos necessários para obtê-la (focos e um ponto dessa cônica). Então, P2 observou o protocolo de construção e, referindo-se aos pontos A e B, disse: “*Eu acho que vou inserir os focos da hipérbole*”.

Depois, referindo-se ao ponto C, P2 disse: “*E o ponto C eu não sei o que é*”. Observando novamente as instruções constantes na ferramenta ‘Hipérbole’, P2 disse: “*O ponto C poderia ser qualquer ponto*”. E, demonstrando dúvidas em relação à escolha desse ponto, disse: “*Por exemplo, se eu colocar um ponto (-4,3), aí já não vai ser a mesma hipérbole né. [...] Mas ele pode ser o (-3,3) aqui*”. Nessa ocasião, esclarecemos que a hipérbole não precisaria ser a mesma da atividade anterior, logo a escolha desses pontos seria livre.

Assim, podemos ver no protocolo de construção de P2 (Figura 180a), que o participante inseriu os focos $A(-3,0)$ e $B(3,0)$ da hipérbole e um ponto $C(-1.41,2.09)$ que pertence a essa cônica na janela de visualização 2D.

Figura 180 – Construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Utilizando a ferramenta ‘Hipérbole’, P2 selecionou os pontos A, B e C, nessa ordem, obtendo esta cônica. Depois disso, P2 olhou novamente o protocolo de construção, dizendo: “*Agora eu tenho que colocar um ponto P. Tá, deixa eu ver*”. Então, passou a procurar a ferramenta para inserir um ponto móvel sobre a hipérbole. Selecionando a ferramenta ‘Ponto sobre objeto’, P2 colocou o ponto móvel D sobre a hipérbole, quando perguntamos qual a diferença entre os pontos C e D da hipérbole.

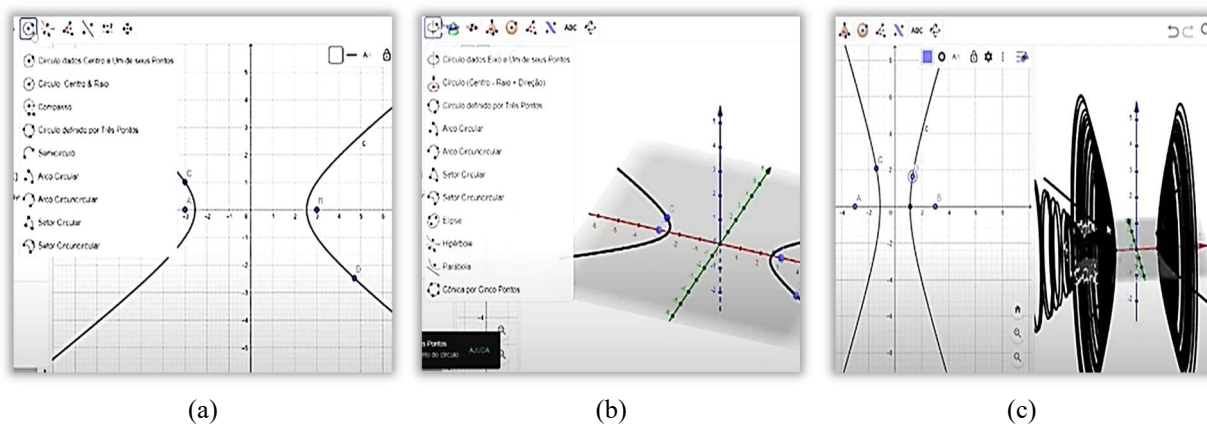
Movendo esses pontos, P2 respondeu: “*Eu vi que eu mexendo o ponto D, ele não mexe em nada. Ai eu consigo jogar ele de um lado para outro (falando do outro ramo da hipérbole). E o ponto C altera minha amplitude (referindo-se à abertura da hipérbole)*”. Ao mover esses pontos sobre a hipérbole, P2 pôde observar a diferença entre um ponto utilizado para obter a hipérbole (fixo), e outro inserido sobre essa cônica (móvel). Nessa oportunidade, podemos dizer que P2 constituiu novo esquemas de utilização, uma vez que estava utilizando pela primeira vez essas ferramentas.

A seguir, P2 analisou novamente o protocolo de construção para compreender o próximo passo, dizendo que precisava obter “*Um círculo de eixo y, passando por B*”. É exatamente nesse ponto que se encontrava a diferença entre os protocolos de construção dos hiperboloides de uma e de duas folhas. O plano das circunferências é perpendicular ao eixo dos y no primeiro caso e, no segundo, ao eixo dos x, o que P2 percebeu mais adiante.

Então, P2 analisou o menu de ferramentas na janela de visualização 2D (Figura 181a) e, em seguida, passou a analisar as disponíveis na janela de visualização 3D (Figura 181b). Nesse caso, podemos observar P2 constituindo esquemas de utilização relativos à alternância

entre as janelas de visualização e, também, constatando que a circunferência precisaria ser obtida na janela 3D.

Figura 181 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Escolhendo a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’, P2 obteve a circunferência que passa pelo ponto D e tem centro sobre o eixo dos x . Com isso, podemos observar que P2 compreendeu a diferença entre as construções dos hiperboloides de uma e de duas folhas. Por fim, o participante P2 procurou e habilitou a função ‘Rastro’ na circunferência. Movendo o ponto D, P2 obteve o hiperboloide de duas folhas, dizendo: “Bah que legal!” (Figura 180b).

E, experimentando a mudança na abertura da hipérbole com a alteração da posição do ponto C, P2 observou a circunferência desenhando outro hiperboloide de duas folhas, dizendo: “Olha lá que louco ficou o rastro da outra” (Figura 181c). Com isso, ao pensar-com as representações dinâmicas dos elementos que iam sendo inseridos na construção, P2 ora mobilizava e ora constituía esquemas de utilização que possibilitaram apreensões figurais e conceituais, enriquecendo a representação mental possuída pelo participante referente a essa quádrlica.

Entendemos que, apesar do desafio consistir em abrir a ‘caixa-preta’, a proposta de disponibilizar o protocolo de construção foi adequada para este participante. O fato de o acesso ao protocolo ter sido proposto quando se fizesse necessário, teve o objetivo de desafiar cada participante em acordo com a sua capacidade para responder. Consideramos que essa forma foi adequada para o participante P2, que ainda estava conhecendo o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra.

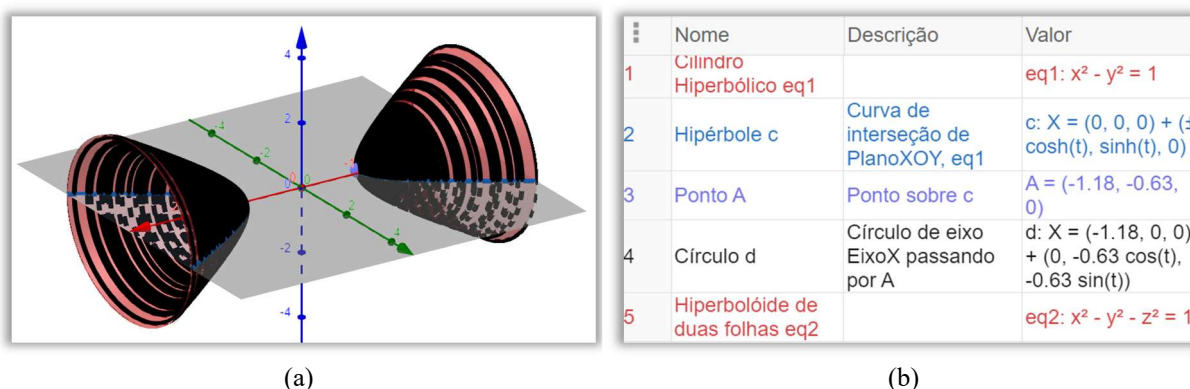
Isso pôde ser observado nas suas condutas cognitivas, mas também nas suas respostas à entrevista proposta por meio do *Google Forms*: “A mínima dificuldade que posso citar é apenas por não ter utilizado antes, e justamente por isso, não estar familiarizado onde ficavam as ferramentas. Acredito que em 30 minutos explorando o programa, já seria possível ter uma boa percepção de suas ferramentas”. O participante P2 relacionou as suas dificuldades na realização da atividade com o fato de não conhecer o GeoGebra antes da participação nessa pesquisa.

O participante considerou que sua experiência poderia ter sido mais significativa se tivesse explorado esse ambiente de matemática dinâmica antes de iniciar as atividades. No entanto, entendemos que foi importante que a exploração das ferramentas do GeoGebra estivesse vinculada a uma tarefa. Isso pode ser constatado no exercício de pensar-com as representações dinâmicas realizado pelo próprio participante, que favoreceu a constituição dos esquemas de utilização.

Consideramos que o desafio foi adequado ao patamar em que o participante se encontrava, instigando-o na medida em que poderia responder ao estímulo. Analisando o protocolo de construção e procurando as ferramentas correspondentes a cada comando, P2 explorou o ambiente de matemática dinâmica, constituindo esquemas de utilização. Assim, entendemos que a disponibilização do protocolo de construção, auxiliou o participante a ultrapassar os obstáculos iniciais, preparando-o para os desafios seguintes.

O participante P3, que já fazia uso do GeoGebra tanto a nível pessoal quanto profissional, escolheu fazer essa construção no GeoGebra 3D. Assim, P3 não utilizou o protocolo de construção do hiperboloide de uma folha como ‘caixa-preta’, obtendo a construção em um minuto e sete segundos (Figura 182a). Os passos utilizados por P3 foram exatamente os do seu protocolo de construção (Figura 182b), uma vez que não houveram comandos apagados.

Figura 182 – Construção de um hiperboloide de duas folhas gerado por uma circunferência por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

O participante P3 iniciou inserindo a equação da superfície cilíndrica hiperbólica $x^2 - y^2 = 1$ e, usando a ferramenta ‘Intersecção de superfícies’, obteve uma hipérbole como intersecção dessa superfície com o plano xoy . Então, P3 colocou um ponto móvel A sobre a hipérbole e, usando a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’, obteve uma circunferência que passa pelo ponto A e tem centro no eixo dos x . Por fim, habilitando a função ‘Rastro’ e movendo o ponto A, P3 observou a circunferência desenhando o hiperboloide de duas folhas.

Com isso, pensando-com as representações dinâmicas que ia inserindo, o participante P3 mobilizou espontaneamente esquemas de utilização para a obtenção dessa construção geométrica. O participante não abriu a ‘caixa-preta’ proposta na atividade, que constava na inserção de alguns elementos na janela 2D e outros na 3D. Ao contrário, P3 criou a sua própria construção geométrica, na qual inseriu todos os elementos apenas na janela de visualização 3D.

Entendemos que o caminho escolhido por P3, que não se baseou na análise de uma construção pronta, consistiu num processo de criação, que envolveu a mobilização de esquemas previamente constituídos na obtenção de algo novo. E, em acordo com Piaget, a criação é o resultado da construção de conhecimento.

5.1.8.4 OBSERVAÇÕES FINAIS

Nessa SEAI, as antecipações propostas nas atividades nos permitiram fazer inferências sobre as imagens mentais que os participantes constituíam sobre as quádricas envolvidas.

Envolvidos num processo de fazer para compreender, os participantes investigaram as seções planas das superfícies quádricas, externando suas imagens mentais em resposta às questões propostas. Essas imagens mentais são oriundas das apreensões figurais proporcionadas pelas representações dinâmicas que, como objetos de pensar-com, contribuíram para as apreensões conceituais. Por sua vez, essas apreensões conceituais efetuadas pelos participantes, os capacitam a uma melhor utilização das ferramentas.

Pensando-com as representações dinâmicas, os participantes analisaram as seções planas dos hiperboloides de uma e de duas folhas, correlacionando as representações gráfica e simbólica das seções planas dessas quádricas. Nessa atividade, os participantes mobilizaram esquemas de utilização para obter pontos (fixo e móvel), circunferência, hipérbole, entre outros. Considerando as propriedades dos objetos matemáticos e as relações entre estes, foi possível

ver os participantes adquirindo compreensão sobre a ordem em que os elementos precisavam ser inseridos e a dependência entre estes.

A obtenção da construção geométrica foi proposta de maneira diferente para os três participantes, considerando os patamares onde se encontravam, relativos aos esquemas de utilização disponíveis para mobilização. Essa flexibilidade permitiu que cada participante fosse desafiado na medida em que pudesse responder. O participante P1, que já conhecia o GeoGebra, mas não costumava utilizá-lo, teve acesso à construção geométrica do hiperboloide de uma folha. O participante P2, que não conhecia esse ambiente de matemática dinâmica, pôde explorar o protocolo de construção.

E o participante P3, que já fazia uso desse *software* matemático, escolheu não acessar nenhum dos dois recursos. Em todos os casos, pensar-com a representação dinâmica de cada elemento que ia sendo inserido na construção, foram fundamentais para o processo de gênese instrumental dos participantes. Fazendo para compreender, os participantes mobilizaram esquemas de utilização prévios para a obtenção da construção geométrica, considerando a ordem de inserção dos elementos e a dependência entre estes.

Em acordo com Rabardel (2002), uma atividade pode apresentar-se sob três formas para os participantes: 1) como situação já dominada; 2) como situação nova, mas semelhante a outras já dominadas; 3) como situações muito novas. No primeiro caso, “Os esquemas facilmente mobilizados são responsáveis pelo funcionamento automatizado, característico das situações comuns ou bem dominadas” (RABARDEL, 2002, p. 86).

No segundo caso, a implementação de esquemas de utilização conduz à generalização por extensão das classes de situações, de artefatos ou de objetos. Consistindo no processo de assimilação, também conduz à diferenciação, quando os esquemas existentes se adaptam aos novos elementos. E, no terceiro caso, diante do uso de novos artefatos, novos objetos ou novas transformações desses objetos, o processo de adaptação se torna temporariamente predominante (RABARDEL, 2002).

É possível que o participante P3 enquadre-se no primeiro caso, que se caracteriza por ações mais espontâneas, uma vez que o mesmo mobilizou facilmente esquemas previamente constituídos. Já os participantes P1 e P2 podem estar enquadrados no segundo ou terceiro casos. Suas condutas cognitivas sugerem que a atividade envolveu situações muito novas para os participantes, onde novos esquemas foram constituídos pela transformação dos esquemas disponíveis (adaptação).

Como dito anteriormente, essa foi a segunda atividade no conjunto das SEAI que propõe a obtenção de construções geométricas, envolvendo um planejamento da ordem de inserção e

da dependência entre os elementos. Os participantes demonstraram apropriação das características de construções em ambientes de matemática dinâmica quando consideravam e testavam a dependência geométrica entre os objetos matemáticos.

De forma progressiva, as atividades nas próximas SEAI apresentaram desafios que visaram promover a constituição de novos esquemas de utilização. A situação de ensino e aprendizagem instrumental a seguir propôs atividades que envolvem a construção de superfícies de revolução.

5.1.9 SEAI 9 – Desafio dinâmico: O giro da cônica

Na situação de ensino e aprendizagem instrumental 9 (APÊNDICE L — SEAI 9) foram propostas atividades que envolveram construções geométricas, proporcionando a constituição de esquemas de utilização e o enriquecimento da representação mental das superfícies quádricas envolvidas. Propondo a construção de superfícies de revolução, as atividades nessa SEAI possibilitaram a ampliação dos esquemas de utilização, uma vez que exigiram um progressivo aumento no repertório de ferramentas do GeoGebra para obtê-las.

Além disso, as atividades envolveram mais as características de construções em ambientes de matemática dinâmica, como a dependência geométrica e a variação dinâmica. Essas atividades também envolveram a mobilização de esquemas conceituais constituídos nas SEAI anteriores, contribuindo para o enriquecimento da representação mental das superfícies quádricas envolvidas.

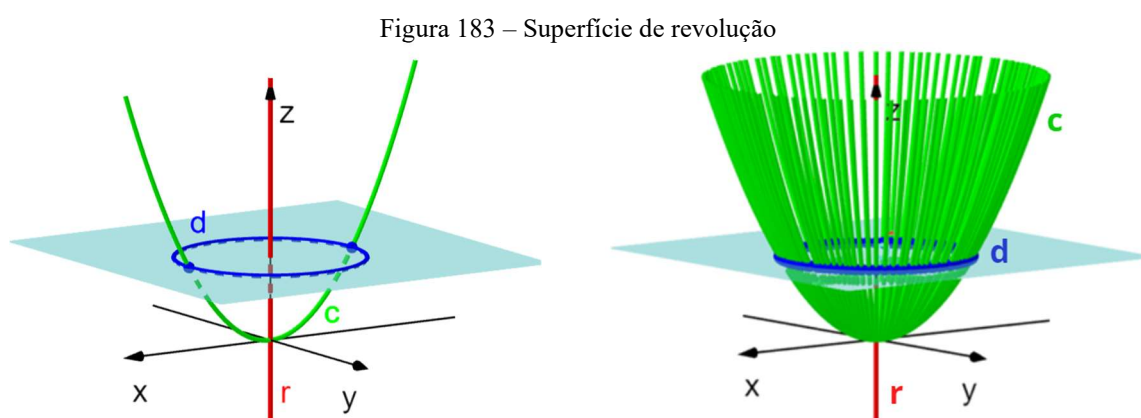
As atividades começavam levando o participante a explorar a construção e descobrir os elementos que a constituem e a dependência entre eles. Depois, os desafios aumentam progressivamente, de forma que uma atividade forneceu as condições para a resolução da outra. Na atividade 1, foi proposta a exploração de uma construção pronta do hiperboloide de uma folha em z e, a seguir, a construção dessa quádrica.

Nas atividades 2 a 4 foram propostas, respectivamente, a construção de um hiperboloide de uma folha em x , um hiperboloide de duas folhas em y e um paraboloides elíptico em oz_+ . Nessas atividades, ocorrem pequenas, mas significativas mudanças na construção. Então, as atividades 5 e 6 trouxeram uma proposta diferente. Na atividade 5, a quádrica apresentada na janela de visualização deveria ser sobreposta pela revolução de uma cônica.

E, na atividade 6, foi necessário obter a representação simbólica de uma quádrica, dadas as representações gráficas de duas de suas seções planas. Nessa SEAI, são apresentados apenas os resultados dos participantes P2 e P3, porque ela foi acrescentada após a participação de P1.

Com o resultado da primeira aplicação com este participante, entendemos que faltavam atividades que envolvessem a constituição de esquemas de utilização, especialmente os relacionados à obtenção de construções geométricas em ambientes de matemática dinâmica.

Na introdução dessa SEAI, apresentamos a seguinte definição: ‘Uma superfície de revolução S de geratriz c e eixo de revolução r é a superfície gerada pela rotação da curva c em torno da reta r . A interseção de S com um plano π perpendicular à reta r é a diretriz d , uma circunferência com centro no ponto em que a reta r corta o plano π .⁴⁴ Para elucidar essa definição, apresentamos na Figura 183, a representação dinâmica de um parabolóide elíptico em oz_+ obtido pela rotação de uma parábola.



Fonte: Elaborado pela autora.

5.1.9.1 ATIVIDADE 1

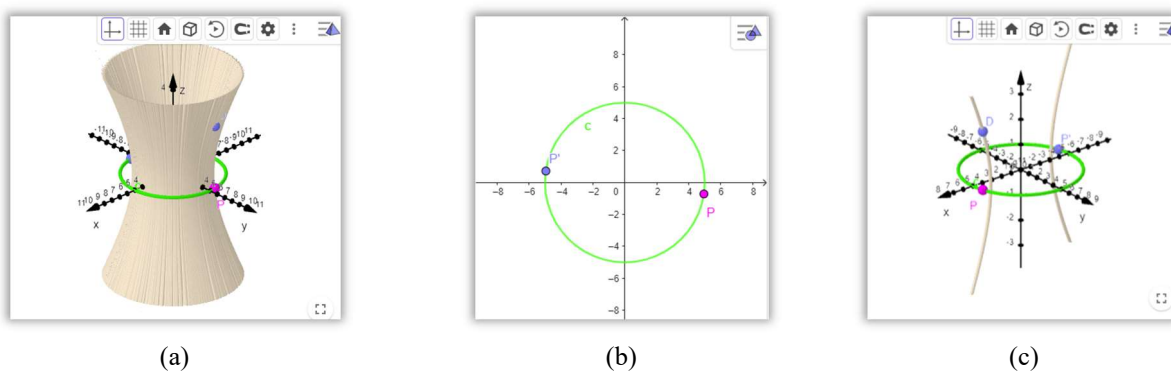
Na atividade 1, foi proposta a observação de uma construção em que o hiperbolóide de uma folha em z foi obtido pela revolução de uma hipérbole em torno do eixo dos z (Figura 184a). Nessa atividade, que teve por objetivo fornecer os subsídios necessários à realização da

⁴⁴ Disponível em: <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/2017/08/ga2-aula9.pdf> Acesso em: 11 jan. 2022.

atividade seguinte, todos os elementos ficaram disponíveis para acesso na janela de álgebra. Os elementos não foram organizados na ordem em que foram inseridos, com o intuito de propor uma antecipação a respeito da construção e, a seguir, levar o participante a desenvolver esquemas relacionados à leitura dos comandos.

Para isso, selecionamos a opção ‘Tipo de objeto’ utilizando a ferramenta ‘Ordenar por’, para organizar os elementos da construção por tipo. Vale destacar que, diferente das SEAI anteriores em que a hipérbole era obtida na janela de visualização 2D, aqui os participantes tiveram que obter essa cônica num plano perpendicular ao plano xoy . Além disso, essa hipérbole precisaria estar apoiada num ponto que se movesse sobre a circunferência.

Figura 184 – Hiperboloide de uma folha em z de revolução.



Fonte: Elaborado pela autora.

As questões propostas nos itens a a f dessa atividade foram elaboradas para levar o participante a explorar a construção, descobrindo os elementos que a constituem e a dependência entre eles. Assim, essa atividade proporcionou condições para que, até um participante iniciante no GeoGebra, pudesse desenvolver os esquemas de utilização necessários para as atividades seguintes. E, na questão do item g, os participantes foram convidados a completar uma construção iniciada.

Na questão do item a, foi proposta a exploração da construção para identificar os elementos utilizados na obtenção da quádrica e a dependência entre eles, por antecipação. Com acesso aos elementos que compõem a construção, que não estavam organizados pelo tipo na janela de álgebra, os participantes foram desafiados a identificar a ordem em que foram inseridos e a dependência entre eles.

Analisando a construção, podemos ver que os elementos são uma circunferência, uma hipérbole, uma reta e cinco pontos. Os elementos foram inseridos na seguinte ordem: o ponto $A(0,0)$, o ponto $B(5,0)$, a circunferência c de centro em A e que passa por B , ponto P sobre c , o ponto P' de reflexão de P em relação a A , o ponto D sobre a hipérbole, a reta f passando pelo

ponto P e paralela ao eixo dos z, o ponto D sobre a reta f e a hipérbole com focos em P e P' e passando por D.

Assim, nessa questão, os participantes precisaram antecipar a ordem de inserção dos objetos matemáticos que iam sendo inseridos na construção e a relação de dependência entre estes. Depois dessa antecipação proposta na questão do item a, os participantes puderam analisar os elementos da construção na janela de álgebra. Para isso, na questão proposta no item b, os participantes foram convidados a usar a ferramenta do GeoGebra que permite ordenar os elementos da construção.

Acessando o menu de ferramentas 'Ordenar por', os participantes poderiam selecionar a ferramenta 'Ordem da construção'. Essa atividade possibilitou a confirmação das antecipações propostas na questão do item a, permitindo também a constituição desse novo esquema de utilização. A questão do item c solicitava a identificação dos elementos utilizados para obter a circunferência e a hipérbole. Esta e as questões seguintes tornaram possível analisar se os participantes reconheciam a dependência entre os elementos da construção.

Então, os participantes poderiam verificar que para obter a circunferência seriam necessários o centro e um ponto da circunferência. E, para obter a hipérbole, os dois focos dessa cônica e um ponto sobre ela. A seguir, a questão do item d perguntava sobre a função dos pontos P e P' na construção e como foram inseridos. Mobilizando esquemas de utilização, os participantes precisaram verificar que eram os pontos necessários para usar a ferramenta 'Hipérbole' do GeoGebra.

Observando a construção, os participantes precisaram constatar que se tratam dos focos da hipérbole, onde P é um ponto sobre a circunferência e P' a reflexão de P em relação à origem (Figura 184b). E, a questão do item e refere-se ao ponto D, questionando a sua função e como teria sido inserido na construção (Figura 184c). Analisando a construção, os participantes puderam perceber que D é um ponto da hipérbole que, juntamente com os focos P e P', seriam selecionados para obtê-la ao utilizar a ferramenta 'Hipérbole'.

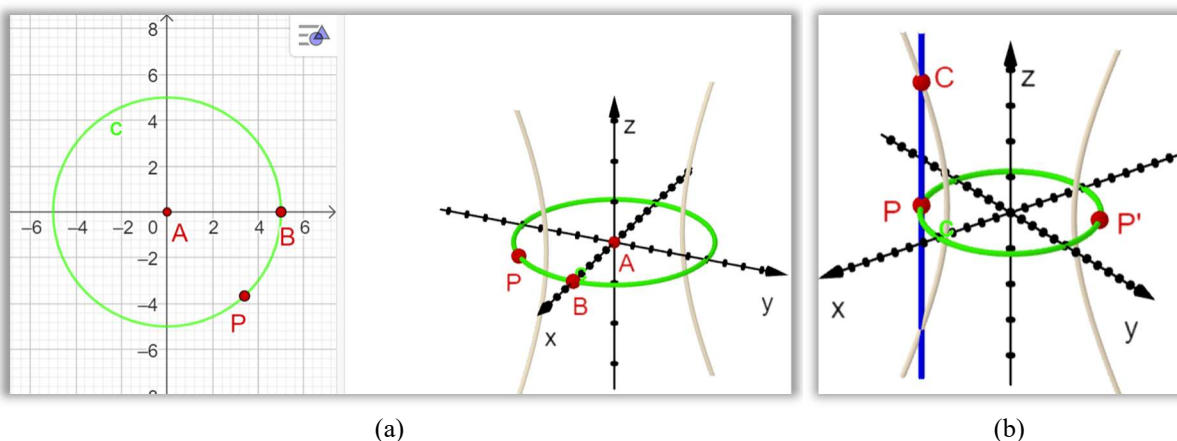
No item f, os participantes precisaram identificar o eixo imaginário (eixo dos z) e obter a representação gráfica do eixo real da hipérbole. Assim sendo, mobilizando esquemas de utilização, os participantes puderam relacionar o eixo real com o eixo em que estão localizados os pontos P e P', focos da hipérbole. Então, utilizando a ferramenta 'Reta' e selecionando os focos da hipérbole, os participantes poderiam obter o eixo real dessa cônica.

Por fim, utilizando os conhecimentos propostos nessa atividade, a questão do item g propôs que os participantes continuassem uma construção iniciada. A tarefa proposta nessa questão foi a de construir o hiperboloide de uma folha em z. Para isso, os participantes tiveram

acesso a uma construção iniciada no GeoGebra. Nessa construção, os passos para obtenção da circunferência e do ponto móvel sobre esta já haviam sido realizados, com elementos inseridos na janela de visualização 2D (Figura 185a).

Os pontos $A(0,0)$ e $B(5,0)$ foram inseridos para a obtenção da circunferência c de centro em A e que passa por B . E, para obter a representação dinâmica da hipérbole que gira apoiada na circunferência c , pode ser inserido um de seus focos P como ponto móvel sobre c .

Figura 185 – Proposta de construção de um hiperboloide de uma folha em z como superfície de revolução.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os passos seguintes nesta construção deveriam ser realizados pelos participantes, na janela de visualização 3D (Figura 185b). Então, os participantes precisaram obter uma hipérbole, quando foi necessário obter três pontos, os dois focos e um ponto da cônica. Um dos focos (o ponto P) já se encontrava na construção e, para obter o outro (o ponto P'), os participantes poderiam utilizar a ferramenta 'Reflexão em relação a um ponto'.

Assim, depois de obter o ponto P' , como reflexão do ponto P em relação ao ponto A (origem), faltaria obter um ponto sobre a hipérbole. Para que a hipérbole girasse em torno do eixo dos z , esse ponto precisaria mover-se sobre o plano dessa cônica, que era perpendicular ao plano xoy . Assim, esse problema poderia ser resolvido a partir da obtenção de uma reta paralela ao eixo dos z e que contém o ponto P .

Inserindo um ponto C sobre essa reta, torna-se possível obter a hipérbole de focos P e P' que passa por C . Depois, habilitando o rastro dessa cônica, foi possível ver a hipérbole desenhando o hiperboloide de uma folha. Como visto na apresentação de uma possível solução para este desafio, a cônica precisou ser obtida em plano perpendicular ao plano xoy e que se movesse apoiada num ponto sobre a circunferência neste plano.

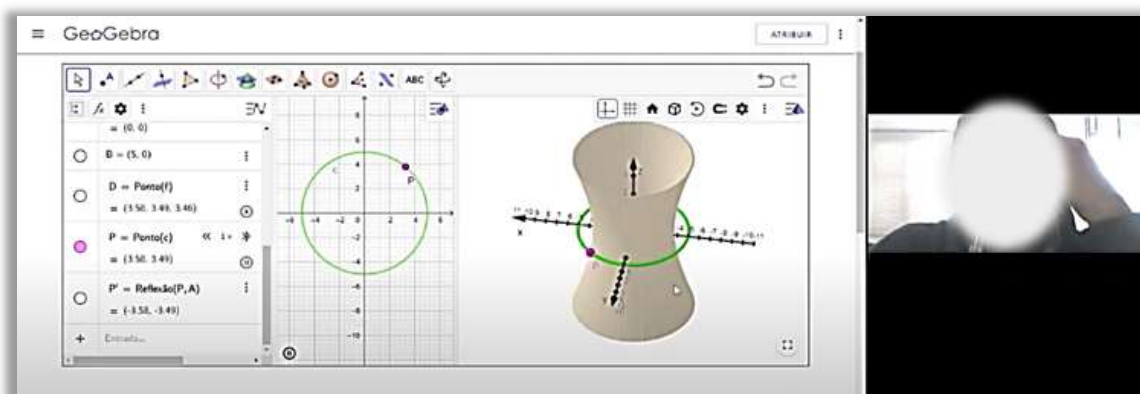
Dessa forma, essa atividade envolveu a constituição de esquemas de utilização diferentes das atividades propostas anteriormente, em que a cônica era obtida na janela de visualização 2D. Como essa atividade teve o objetivo de preparar os participantes para os desafios seguintes, entendemos que poderia ser importante para P2, mas redundante para P3. Lembrando que, como P2 não tinha experiência com o GeoGebra antes da participação nessa pesquisa, a passagem por todas as etapas o ajudaria a conhecer melhor esse ambiente de matemática dinâmica.

Assim, com as questões dos itens a a f, P2 pôde explorar a construção, descobrir as ferramentas, aprender a utilizá-las, perceber a relação entre os elementos numa construção, etc. O participante P3, que já fazia uso pessoal e profissional do GeoGebra, iniciou essa atividade pela construção proposta no item g. E, com base na sua própria construção, P3 poderia voltar e responder às questões dos itens a a f.

Nessa atividade, apresentamos primeiro os resultados do participante P2, na ordem em que as questões se apresentam. Depois, apresentamos os resultados de P3, iniciando pela construção na questão do item g, a partir da qual o participante respondeu as questões dos itens a a f. O participante P2 iniciou observando a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha em z, que já iniciava com a revolução da hipérbole, quando perguntamos se ele saberia parar a animação.

P2 respondeu que seria no ‘pause’ e, procurando o elemento da construção que gera o movimento, primeiro experimentou o ícone de animação do ponto D (Figura 185b). O participante observou que a variação nas coordenadas desse ponto alterava a forma da hipérbole, então selecionou o botão correto, parando a animação do ponto P. Depois de pausar a animação, referindo-se ao rastro, P2 perguntou: “*Como é que eu tiro aqui essas linhas*” (Figura 186).

Figura 186 – Explorando a construção de um hiperboloide de uma folha de revolução por P2.



Fonte: Dados da pesquisa

Com isso, podemos observar que apesar de já ter realizado duas construções mais simples em SEAI anteriores, alguns esquemas de utilização ainda estavam sendo constituídos. Diante disso, podemos considerar que as atividades planejadas para levar o participante da exploração à construção, foram importantes para desenvolver esquemas de utilização que deram subsídios para a constituição de novos esquemas.

Isso também pode ser constatado nas suas condutas cognitivas, quando foi instigado pela pesquisadora por meio de questões extras que o auxiliassem a responder as propostas na atividade. Perguntando ao participante qual dos pontos foi inserido primeiro, P ou P', P2 respondeu: *“Eu acho que P foi inserido primeiro”*. E, continuando a análise da dependência entre os elementos, perguntamos o que foi inserido primeiro, a circunferência ou os pontos P e P'.

O participante P2 respondeu: *“Eu acho que foi inserida primeiro a circunferência, depois o ponto P, o ponto P', depois foi inserida a reta paralela com o ponto P e o eixo z”*. E, observando os menus de ferramentas do GeoGebra, o participante disse: *“O esquema de girar que eu não lembro como é feito”*. Então, P2 foi convidado a observar que, ao colocar um ponto sobre a circunferência, ele fica móvel e o botão para animação é criado automaticamente.

A seguir, apresentamos o diálogo estabelecido com P2 para dar continuidade na análise da lista de elementos que constituem a construção do hiperboloide de uma folha pela revolução de uma hipérbole:

Pesquisadora: Qual elemento foi inserido na construção depois da reta que passa por P e é paralela ao eixo dos z?

P2: Depois foi colocada uma hipérbole e depois foi colocado exibir rastro.

Pesquisadora: Qual é a ferramenta usada para inserir a hipérbole na construção?

P2: (Observa os menus de ferramentas.) Hipérbole.

Pesquisadora: Que elementos são necessários para usar essa ferramenta?

P2: Eu preciso de três pontos.

Pesquisadora: Quem são esses pontos?

P2: São os dois focos e um ponto pertencente à hipérbole.

Pesquisadora: Quem são os focos nessa construção?

P2: (Analisa as janelas de visualização e de álgebra.) Acho que não é os focos que bota.

E, clicando sobre o ícone da ferramenta ‘Hipérbole’, P2 observou que não há uma descrição dos elementos necessários para obter essa cônica. Essa descrição da ferramenta, que informa quem são os pontos necessários para obter a hipérbole, não aparece quando a atividade é proposta como ‘Tarefa’. A falta dessa descrição consiste numa limitação que provocou um provisório obstáculo para o participante P2. Com o conhecimento dessa restrição, P2 foi incentivado a explorar esse recurso no modo ‘Atividade’, superando o obstáculo.























Depois de constatar que de fato os três pontos consistem nos focos e num ponto da hipérbole, P2 observou o comando ‘d: Hipérbole (P, P’, D)’ na janela de álgebra, que deu origem à hipérbole. Então, pedimos para o participante identificar na construção esses pontos P, P’ e D. Nessa oportunidade, identificamos um momentâneo obstáculo conceitual, quando o participante não conseguiu responder quem seriam os focos.

No entanto, os esquemas prévios relacionados ao conceito de hipérbole foram rapidamente revisitados e mobilizados por P2, que respondeu: “*Tá, os focos são P e P’ e o ponto é o D que tá sobre a reta*”. Por fim, P2 registrou a seguinte resposta à questão do item a, no arquivo do Google Docs: “*Foi inserido um círculo, dois pontos sobre o círculo (P e P’), uma reta paralela ao eixo z com intersecção no ponto P, um ponto D sobre esta reta, uma hipérbole a partir de 3 pontos (P e P’, e o ponto D sobre reta paralela ao eixo z)*”.

Vale destacar que P2 respondeu a todos esses questionamentos explorando a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha obtido pela revolução de uma hipérbole. Nessa ocasião, os elementos da construção estavam visíveis na janela de visualização, mas organizados por tipo. Assim, P2 mobilizou ou (re)constituiu esquemas de utilização durante a exploração dos elementos da construção, observando suas propriedades e relação entre eles.

Na questão proposta no item b, o participante P2 acessou o menu de ferramentas ‘Ordenar por’, selecionando ‘Ordem da construção’ (Figura 187).

Figura 187 – Elementos organizados pela ordem da construção na janela de álgebra.

			
	A = Interseção(EixoX, EixoY)		
	= (0, 0)		
	B = (5, 0)		
	c : Círculo(A, B)		
	= $x^2 + y^2 = 25$		
	P = Ponto(c)		
	= (-3.55, -3.52)		
	P' = Reflexão(P, A)		
	= (3.55, 3.52)		
	f : Reta(P, EixoZ)		
	= $X = (-3.55, -3.52, 0) + \lambda (0, 0, 1)$		
	D = Ponto(f)		
	= (-3.55, -3.52, 3.46)		
	d : Hipérbole(P, P', D)		
	= $X = (0, 0, 0) + (\pm 2.53 \cosh(t), \pm 2.51 \cosh(t), 3.51 \sinh(t))$		

(a)

(b)

Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, com os elementos da construção organizados pela ordem em que foram inseridos, P2 observou que haviam dois pontos que ele não tinha considerado na sua resposta. Os pontos $A(0,0)$ e $B(5,0)$ apareceram como os dois primeiros elementos inseridos, seguidos

da circunferência com centro em A e que passa por B. Perguntamos ao participante para que os pontos A e B foram inseridos na construção, ao que P2 respondeu: *“Para criar o círculo”*.

Então, P2 analisou as ferramentas que poderiam ser utilizadas para inserir uma circunferência e reconheceu que foi utilizada a ferramenta ‘Círculo dados o centro e um dos seus pontos’. Depois, P2 perguntou se poderia ter sido utilizada a ferramenta ‘Centro e raio’, dizendo: *“Economizaria dois pontos”*. Com isso, vemos que apesar de estar descobrindo o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, P2 já faz uma análise mais avançada da construção, visando à otimização dos passos.

Depois de entender que seria necessário ao menos um ponto para usar a ferramenta, P2 seguiu avaliando os passos da construção: *“Aí temos o círculo através de dois pontos. Aí depois o ponto P. E esse ponto P’ aqui, ele tem um comando específico de reflexão?”* Então, P2 analisou as ferramentas relativas à reflexão de um ponto, verificando que o ponto P’ foi obtido pela reflexão de P em relação à origem, por meio da ferramenta ‘Reflexão em relação a um ponto’.

E, continuamos a análise dos passos utilizados na construção por meio do diálogo:

P2: Depois foi a reta aqui paralela ao eixo z.

Pesquisadora: E, para que essa reta foi inserida?

P2: Para poder inserir depois o ponto D nela.

Pesquisadora: Para que serve esse ponto?

P2: Para construir a hipérbole.

Analisando os passos da construção na janela de álgebra, buscando verificar como o ponto D foi inserido, P2 conjecturou que poderia ter sido utilizada a ferramenta ‘Ponto sobre objeto’. E, concluindo a análise da construção, P2 disse: *“Depois acha a hipérbole por dois pontos P e P’ e pelo ponto D que está na reta”*. Depois disso, voltando a sua resposta na questão do item a, P2 verificou que haviam faltado apenas os pontos A e B que foram necessários para obter a circunferência.

Na questão do item c, que solicitou a identificação dos elementos utilizados para obter a circunferência e a hipérbole, o participante P2 registrou a seguinte resposta: *“circunferência: Dois pontos, centro e um ponto da circunferência. hipérbole: 3 pontos, dois focos e um ponto da hipérbole”*. Na questão do item d, que perguntava sobre a função dos pontos P e P’ na construção e como foram inseridos, P2 respondeu que: *“Os pontos P e P’, serão os dois focos da hipérbole. O ponto P foi inserido sob a circunferência, e o ponto P’ foi inserido através da reflexão do ponto P e do centro”*.

Na questão do item e, que perguntava qual era a função do ponto D e como este ponto foi inserido na construção, P2 registrou que: *“O ponto D é usado para construir a hipérbole*

através dos dois focos e o ponto D sob a hipérbole. Ele foi obtido através de uma reta paralela ao eixo z e um ponto (P). O ponto D está sob a reta”. Na questão do item f, foi solicitada a identificação do eixo imaginário e a obtenção da representação gráfica do eixo real da hipérbole.

P2 obteve o eixo real e respondeu: “O eixo imaginário é o eixo z . No plano xoz , o eixo real é o x . No plano yoz , o eixo real é y . Traçando uma reta pelos dois pontos que pertencem à circunferência e sejam o foco da hipérbole”. Nesses registros escritos de P2, assim como nas suas condutas cognitivas durante a realização dessas questões, foi possível ver o participante explorando e compreendendo cada passo da construção.

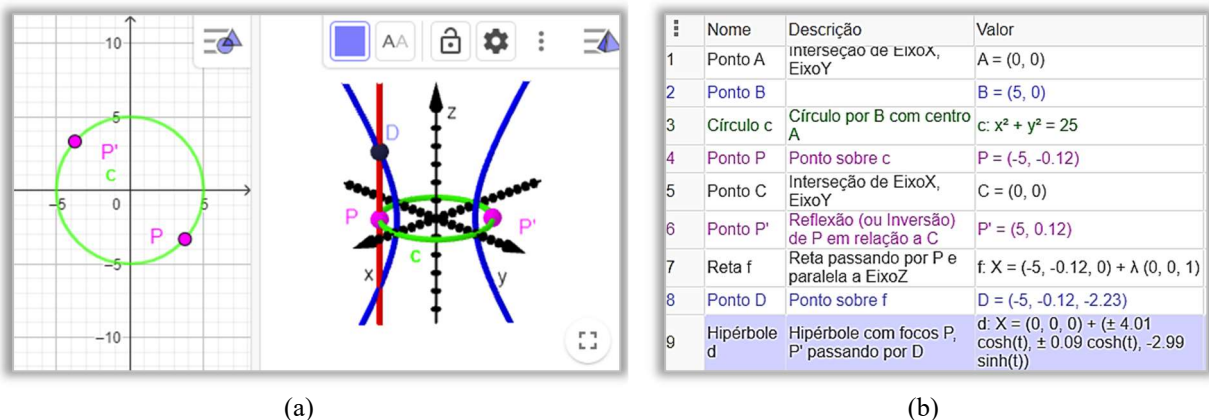
Por fim, na questão do item g, P2 mobilizou esquemas de utilização constituídos na tarefa de exploração, para obter o hiperboloide de uma folha em z na construção iniciada (

Figura 188a). Essa imagem da construção na janela de visualização 3D foi feita por P2, mas as cores dos elementos foram modificadas para dar mais clareza. No protocolo de construção da

Figura 188b, os pontos $A(0,0)$ e $B(5,0)$, inseridos para obter a circunferência c de centro em A e que passa por B e o ponto móvel P sobre c já se encontravam na construção.

O participante P2 iniciou inserindo o ponto $C(0,0)$, de intersecção entre os eixos coordenados, para encontrar o ponto P' . Então, P2 obteve o ponto P' , reflexão de P em relação a C , usando a ferramenta ‘Reflexão em relação a um ponto’.

Figura 188 – Construção de um hiperboloide de uma folha em z pela rotação de uma hipérbole por P2.



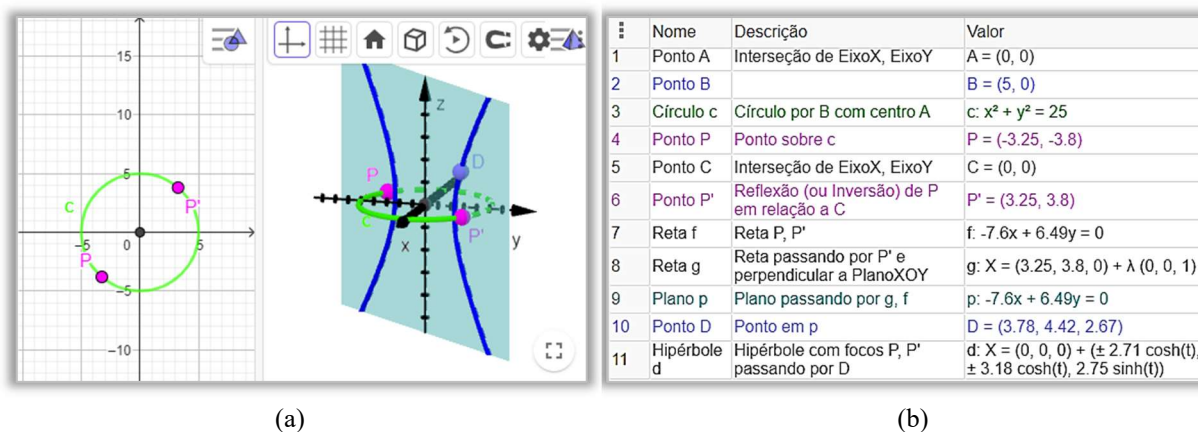
Fonte: Dados da pesquisa.

E, para obter o ponto D sobre a hipérbole, P2 usou a ferramenta ‘Reta paralela’, selecionando o ponto P e o eixo dos z . Depois de obter a reta f que passa por P e é paralela ao eixo dos z , P2 inseriu um ponto D sobre a reta f e, usando a ferramenta ‘Hipérbole’, obteve essa cônica selecionando os pontos P , P' e D . Com isso, foi possível ver que a proposta de explorar

a construção foi importante para P2, contribuindo para a constituição de esquemas de utilização necessários para a realização das tarefas seguintes.

Conforme dito anteriormente, com o participante P3 que já fazia uso do GeoGebra, sugerimos iniciar pela questão do item g para depois responder às questões dos itens a a f. Assim sendo, na questão do item g, P3 mobilizou esquemas de utilização para obter a construção do hiperboloide de uma folha em z (Figura 189a).

Figura 189 – Construção de um hiperboloide de uma folha em z pela rotação de uma hipérbole por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Lembramos que no protocolo de construção da Figura 189b, os pontos $A(0,0)$ e $B(5,0)$, a circunferência c de centro em A e que passa por B e o ponto móvel P sobre c já se encontravam antes do participante iniciar a tarefa. De acordo com esse protocolo, P3 iniciou sua construção obtendo o ponto $C(0,0)$ de intersecção entre os eixos coordenados para encontrar o ponto P' como reflexão de P em relação a C , usando a ferramenta 'Reflexão em relação a um ponto'. Então, P3 obteve o eixo real da hipérbole quando inseriu a reta f que contém P e P' , usando a ferramenta 'Reta' e experimentando o seu movimento.

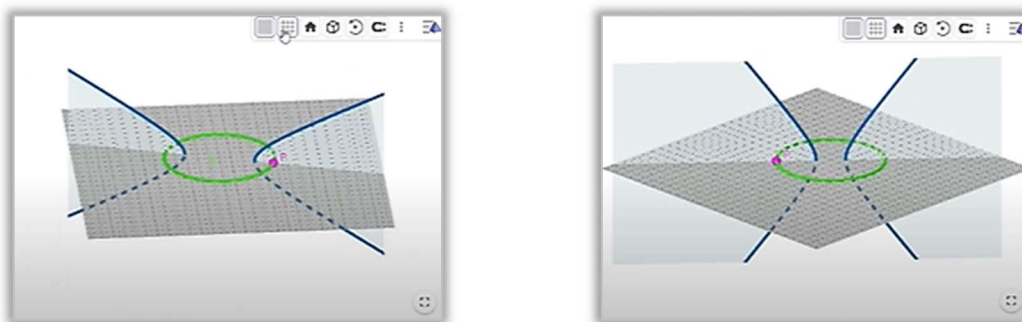
Depois, P3 encontrou a reta g que passa por P' e é perpendicular ao plano xoy , obtendo um plano p que contém as retas f e g . P3 colocou um ponto D sobre o plano p e, a seguir, com a ferramenta 'Hipérbole' obteve essa cônica selecionando os pontos P , P' e D . Esses dados oriundos do protocolo de construção apresentam apenas parte dos passos utilizados pelo participante P3. Não tendo explorado a construção como proposto no item a desta atividade, P3 experimentou outros caminhos que não ficaram registrados no protocolo de construção.

Assim, analisamos também os dados oriundos da observação *in loco* e da gravação, observando que P3 iniciou inserindo as equações $x^2 - y^2 = 1$ e $z = 0$, para obter a hipérbole. Depois, o participante moveu o ponto P , percebendo que a forma como inseriu a hipérbole não permitia o seu movimento. Então, P3 inseriu o ponto $C(0,0)$ para obter o ponto P' como

reflexão de P em relação a C. A seguir, P3 obteve a reta f que passa por P e P', experimentando o seu movimento.

A seguir, P3 experimentou a ferramenta 'Plano perpendicular', mas abandonou essa ideia, inserindo uma reta g perpendicular ao plano xoy no ponto P. Com a ferramenta 'Plano', P3 inseriu o plano p que passa pelas retas f e g. Então, P3 obteve a intersecção desse plano com a superfície cilíndrica hiperbólica de equação $x^2 - y^2 = 1$, obtendo uma hipérbole. No entanto, o participante P3 percebeu que essa hipérbole não mantinha a forma, alterando sua concavidade com o movimento do ponto P (Figura 190).

Figura 190 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em z pela rotação de uma hipérbole por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Então, buscando observáveis para conseguir avançar, P3 analisou a construção pronta da questão do item a, constatando que a hipérbole foi obtida a partir dos pontos P, P' e D. Analisando o ponto D, o participante disse que se tratava de um ponto da hipérbole e, voltando para a sua construção, inseriu o ponto D sobre o plano p. Então, P3 obteve a hipérbole que tem focos em P e P' e que passa por D e, experimentando o movimento do ponto D, observou que alterava a concavidade da hipérbole.

Depois, P3 movimentou o ponto P e, verificando que o giro da hipérbole gerava o hiperboloide de uma folha em z, habilitou o rastro da hipérbole e a animação de P. Com isso, podemos observar que até mesmo o participante P3 precisou explorar a construção pronta para gerar a sua. Claro que de forma distinta da exploração efetuada pelo participante P2, que observava os comandos na janela de álgebra, buscando identificar a ferramenta correspondente e os elementos envolvidos.

Por exemplo, no comando $P' = Reflexão(P, A)$, P2 identificou que foi utilizada a ferramenta 'Reflexão em relação a um ponto' e que os elementos envolvidos eram os pontos P e A. Já o participante P3, ao explorar a construção pronta, tinha o objetivo de compreender como obter uma hipérbole num plano perpendicular ao plano xoy e que se movesse apoiada

num plano. Assim, podemos dizer que a proposta de exploração da construção foi importante para os dois participantes.

Com base na construção, o participante P3 respondeu à questão do item a, sobre os elementos que foram utilizados na construção e a ordem em que foram inseridos: “*Eixo central, dois focos em uma elipse (em especial uma circunferência) e um ponto na hipérbole*”. Na questão do item c, que solicitava a identificação dos elementos utilizados para obter a circunferência e a hipérbole, o participante P3 registrou a seguinte resposta: “*Um foco (um ponto da circunferência de distância centro até o foco da hipérbole) e o ponto central. O ponto de foco, seu reflexo perante o centro e um ponto da hipérbole*”.

Na questão do item d, que perguntava sobre a função dos pontos P e P' na construção e como haviam sido inseridos, P3 respondeu que: “*Os focos da hipérbole. Foram inseridos na circunferência, sendo um deles reflexo do outro perante o centro. Para formar a hipérbole*”. Na questão do item e, que questionava a função do ponto D e como foi inserido na construção, P3 registrou que: “*Para a função do GeoGebra são necessários dois focos (P e P') e um ponto da hipérbole D*”.

E, na questão do item f, que solicitava a identificação do eixo imaginário e a obtenção da representação gráfica do eixo real da hipérbole, P3 obteve o eixo real e respondeu: “*O eixo oz. A reta traçada entre P e P'* ”. Com isso, observamos que a proposta de começar essa atividade pela construção (item g), respondendo às questões (itens a a f) depois, foi adequada ao patamar em que se encontrava o participante P3, que apresentava esquemas de utilização que puderam ser mobilizados para a realização da tarefa.

E, quando se fez necessário, P3 explorou a construção pronta oferecida no item a desta atividade. Nessa ocasião, o participante buscava compreender a relação de dependência entre os elementos da construção, o que oportunizou a constituição de novos esquemas de utilização. Voltando a um patamar inferior, P3 constituiu novos esquemas, reorganizando-os num patamar superior. Além da dependência geométrica, identificamos também a observação da variação dinâmica, quando P3 experimentava a estabilidade da construção diante do movimento.

Nessa atividade, para obter uma hipérbole que girava em torno do eixo dos z, foram necessários três pontos, os dois focos e um ponto sobre essa cônica. Como o vértice da hipérbole deveria ser a origem do sistema cartesiano, os seus focos precisariam ser equidistantes da origem. Os participantes precisaram constatar que os focos tinham que estar sobre uma reta (eixo real) que girasse junto com a hipérbole.

Então, um dos focos poderia ser o ponto móvel que já estava na construção e o outro o reflexo deste em relação à origem. O terceiro ponto necessário para obter a hipérbole, um ponto

que pertencesse a essa cônica, também teria que girar junto com ela. Então, os participantes precisaram constatar que seria necessário obter uma reta paralela ao eixo dos z e que passasse pelo ponto móvel. Assim, para resolver essa atividade, os participantes precisaram mobilizar esquemas de utilização relativos à obtenção de ponto, reta, circunferência e hipérbole.

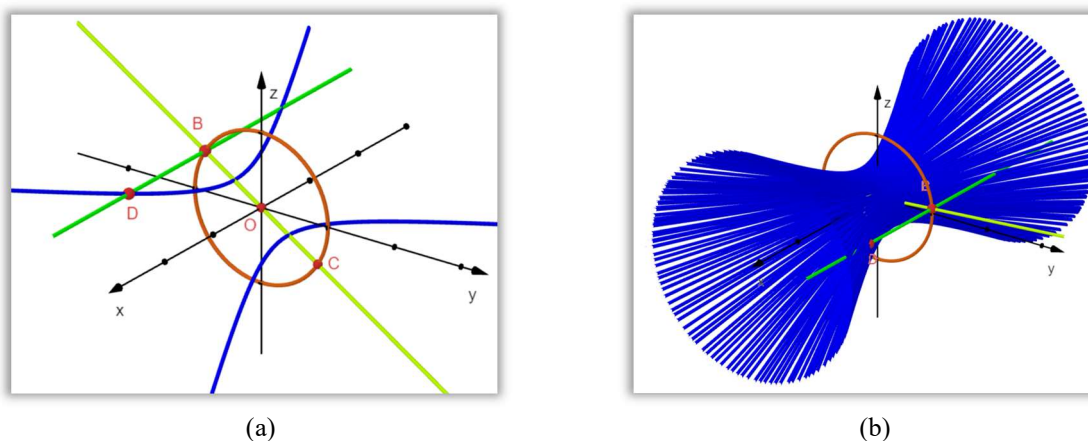
A descoberta da ‘chave’ dessa construção passou pela obtenção dos focos e do ponto sobre a hipérbole, o que foi viabilizado pela possibilidade de pensar-com as representações dinâmicas em cada etapa da construção. Essa atividade envolveu a mobilização de esquemas de utilização relacionados aos conceitos e formas de funcionamento de cada ferramenta, e também a observação da dependência geométrica entre os elementos e experimentação da variação dinâmica.

Os participantes mobilizaram esquemas de utilização, formulando hipóteses, testando conjecturas, refletindo sobre suas ações e fazendo os ajustes nas suas construções. Com a constituição de esquemas de utilização nesse processo de fazer para compreender, os participantes repetiam essas ações de forma cada vez melhor, até a tomada de consciência. Nesse processo, os esquemas de utilização constituídos são reorganizados num patamar superior, capacitando os participantes a desafios maiores.

5.1.9.2 ATIVIDADE 2

Na atividade 2, foi proposta a obtenção de um hiperboloide de uma folha em x , o que acrescentou um novo desafio. A circunferência que possibilitava a rotação da hipérbole precisava ser obtida no plano yo z , logo não seria possível obtê-la na janela de visualização 2D como na atividade anterior (Figura 191a).

Figura 191 – Proposta para construção de um hiperboloide de uma folha em x pela rotação de uma hipérbole.



Fonte: Elaborado pela autora.

Depois de inserir uma circunferência com centro na origem no plano yoZ , pode-se obter o eixo real da hipérbole de vértice na origem, inserindo uma reta (amarela) que passa pela origem e por um ponto móvel (ponto B) sobre essa circunferência. Tomando esse ponto móvel como um dos focos da hipérbole, o outro foco (ponto C) pode ser obtido pela intersecção dessa reta (amarela) com a circunferência. Então, para obter a hipérbole, ainda é necessário encontrar um ponto que pertença a essa cônica.

Como esse ponto precisa estar no plano da hipérbole, que gira com o ponto móvel (ponto B), podemos inserir esse ponto (ponto D) sobre uma reta que passa por B e é paralela ao eixo dos x . Então, habilitando a animação do ponto móvel (ponto B) e o rastro da hipérbole, essa cônica desenha o hiperboloide de uma folha em x da Figura 191b. Na questão do item a, foi proposta uma antecipação, perguntando o que seria necessário mudar na construção da atividade anterior, quando tínhamos um hiperboloide de uma folha em z .

Depois, a questão do item b pedia para que fosse obtido um hiperboloide de uma folha por meio da rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos x . Na questão do item c, os participantes puderam verificar se as suas conjecturas em resposta à questão do item a estavam corretas. E, para fechar essa atividade, no item d perguntamos quem seria o eixo imaginário dessa hipérbole, solicitando também a obtenção da representação gráfica do eixo real.

Iniciando a atividade 2, na questão do item a, pensando-com a construção do hiperboloide de uma folha em z , os participantes buscaram identificar o que seria modificar para obter um hiperboloide de uma folha pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos x . Os participantes precisaram observar que a circunferência teria que estar contida no plano yoZ (ou paralelo a este) e que o eixo imaginário da hipérbole deveria estar no eixo x . Os participantes responderam:

P2: É preciso mudar o plano da circunferência para o plano yoZ . O eixo imaginário da hipérbole seria em ox .

P3: Fazer a circunferência, o seu centro e o ponto P e P' no plano coordenado yoZ . Ter como eixo central ox .

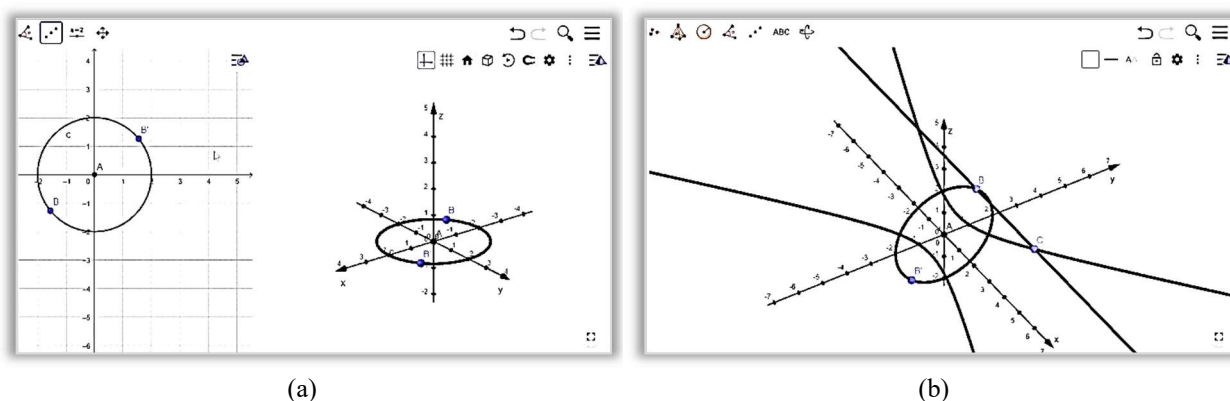
Podemos observar que os participantes anteciparam corretamente as modificações necessárias para obter a construção de um hiperboloide de uma folha em x pela rotação de uma hipérbole. Então, na questão do item b, foi fornecido um arquivo do GeoGebra por meio do recurso 'Tarefa', vazio e com todas as ferramentas e recursos disponíveis, para a obtenção dessa construção.

O participante P2 iniciou colocando o ponto $A(0,0)$ na janela de visualização 2D para, usando a ferramenta ‘Círculo dados centro e raio’, obter a circunferência c de centro em A e raio 2. Depois, P2 obteve um ponto B de intersecção entre a circunferência e o eixo dos x . Experimentando o ponto B , P2 buscou compreender porque não havia ficado móvel. A partir desse *feedback* do GeoGebra e, observando o comando que dava origem ao ponto B , P2 entendeu que o ponto não se movia sobre a circunferência porque foi inserido como intersecção desta com o eixo.

Então, P2 desfez essa ação e inseriu novamente o ponto B , desta vez sobre a circunferência apenas (Figura 192a). P2 experimentou novamente o movimento do ponto B e, observando que se movia como esperava, inseriu o ponto B' de reflexão do ponto B em relação ao ponto A (origem). Nesse momento, P2 observou que ainda havia outro problema. A circunferência obtida pertencia ao plano xoy , quando esperava que estivesse no plano yoZ (Figura 192a).

Verificando a possibilidade de usar apenas a janela de visualização 3D, P2 desfez novamente as ações, deixando apenas o ponto A na janela 2D (Figura 192b). O participante P2 escolheu a ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’, e a experimentou, selecionando o ponto A e o eixo dos z . Nessa oportunidade, abrindo uma janela para a inserção do valor do raio, P2 inseriu o número 2 e obteve uma circunferência no plano xoy novamente.

Figura 192 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em x pela rotação de uma hipérbole por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir desse *feedback* do GeoGebra, P2 compreendeu que o erro estava na escolha da direção. Então, P2 selecionou o eixo dos x em lugar do eixo dos z , obtendo a circunferência c no plano yoZ . Depois, P2 inseriu um ponto B sobre a circunferência, obtendo o ponto B' por reflexão em relação ao ponto A . A seguir, P2 inseriu uma reta f que passa por B e é paralela ao

eixo dos x . E, colocando um ponto C sobre a reta f , obteve a hipérbole que tem focos B e B' e passa por C .

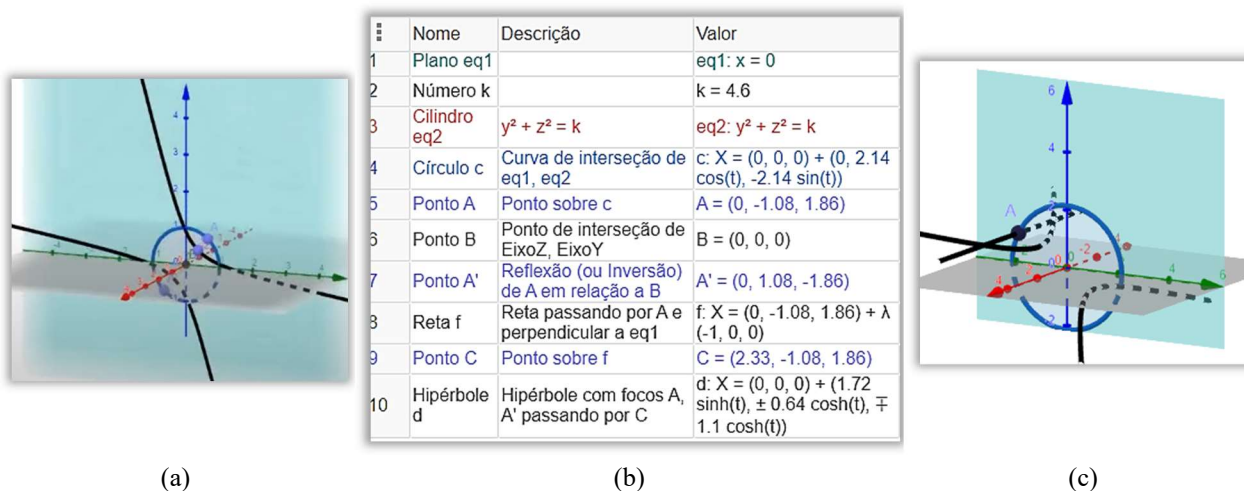
Por fim, habilitando o rastro e a animação da construção, P2 observou o hiperboloide de uma folha sendo desenhado pela rotação da hipérbole em torno do eixo dos x . Observamos que, nessa construção, P2 já mobilizou esquemas de forma mais espontânea do que nas anteriores, constituindo novos esquemas de utilização. P2 inseriu objetos matemáticos, refletindo sobre suas escolhas e fazendo os ajustes por meio do *feedback* do GeoGebra.

O participante P3 também não utilizou a janela de visualização 2D, escolhendo outro caminho para a construção, onde iniciou inserindo a equação $x = 0$ do plano yoZ (Figura 193a). Em seguida, P3 criou um seletor para mudar o raio da seção plana circular em yoZ na equação da superfície cilíndrica circular $y^2 + z^2 = k$, que inseriu depois. Então, P3 obteve a circunferência c , a partir da intersecção dessa superfície cilíndrica circular com o plano yoZ .

A seguir, P3 colocou um ponto A sobre a circunferência c e obteve o ponto $B(0,0,0)$ de intersecção entre os eixos dos x e dos y , para inserir o ponto A' como reflexão de A em relação a B . Então, usando os pontos A e A' como focos e um ponto C sobre o plano da circunferência c , P3 obteve uma hipérbole sobre o plano yoZ (Figura 193a). Com esse *feedback* do GeoGebra, P3 percebeu o engano e excluiu essa hipérbole, que não aparece no seu protocolo de construção (Figura 193b).

Pensando-com parte da construção já obtida, P3 inseriu uma reta f passando por A e perpendicular ao plano yoZ , colocando um ponto C sobre f . E, por fim, P3 obteve a hipérbole com focos nos pontos A e A' e que passa por C (Figura 193c). Experimentando o giro da hipérbole e, percebendo que a cônica desenharia o hiperboloide de uma folha em x , P3 habilitou o rastro e a animação do ponto A . Com isso, observamos que P3 formulou hipóteses e testou suas conjecturas quando experimentava inserir elementos na sua construção.

Figura 193 – Construção de um hiperboloide de uma folha em x pela rotação de uma hipérbole por P3.



(a)

(b)

(c)

Fonte: Dados da pesquisa.

Fazendo para compreender, com base na mediação do GeoGebra, P3 ora mobilizava esquemas de utilização e ora constituía novos, especialmente os relacionados às características de uma construção dinâmica. E, depois de obter a construção, na questão do item c os participantes responderam à questão do item a, confirmando as suas conjecturas nas antecipações propostas.

Para fechar essa atividade, a questão do item d perguntava qual seria o eixo imaginário e solicitava a obtenção da representação gráfica do eixo real. Os participantes responderam:

P2: Imaginário é o eixo ox e o real é a reta AA'.

P3: Eixo ox. Podemos definir uma reta passando pelos dois focos da hipérbole, este será sempre o eixo real.

Com isso, foi possível ver que os participantes mobilizaram esquemas conceituais relacionados à hipérbole, identificando corretamente os eixos real e imaginário. Nessa atividade, diferente da anterior, a circunferência que possibilitou a rotação da hipérbole precisou ser obtida no plano yoz. Então, os participantes tiveram que iniciar a construção na janela de visualização 3D, com as ferramentas disponíveis nessa janela.

Apesar de apresentar-se como algo novo, observamos que os participantes já demonstravam mais familiaridade com esse tipo de construção, que envolvia uma dependência entre os objetos matemáticos. Assim, os participantes iniciaram a atividade buscando identificar os elementos necessários para a construção e as relações entre estes, demonstrando mais iniciativa do que em situações anteriores.

Mobilizando esquemas de utilização, os participantes obtiveram a circunferência e colocaram um ponto móvel sobre esta. E para obter a hipérbole que girava em torno do eixo dos x, foram necessários três pontos, os dois focos e um ponto sobre essa cônica. Os

participantes precisaram mobilizar esquemas conceituais para, considerando que o vértice hipérbole pertence à origem do sistema cartesiano, encontrar os focos que precisariam ser equidistantes desse ponto.

Então, os participantes precisaram constatar que os focos tinham que estar sobre uma reta (eixo real) que girasse junto com a hipérbole, logo vinculados ao ponto móvel. E, por fim, os participantes precisaram constatar que o ponto que pertence à hipérbole precisaria ser obtido num plano que contém essa cônica. Assim, esse ponto poderia ser inserido sobre uma reta no plano da hipérbole, que estivesse apoiada no ponto móvel. Além de inserir os elementos da construção considerando o vínculo entre eles, os participantes avaliavam a sua estabilidade diante do movimento.

Dessa forma, para resolver esse desafio, os participantes precisaram mobilizar esquemas de utilização relativos à obtenção de ponto, reta, circunferência e hipérbole. A descoberta da relação entre os elementos dessa construção foi viabilizada pela possibilidade de pensar-com as representações dinâmicas que iam sendo obtidas em cada fase. Assim, além da mobilização de esquemas de utilização relacionados aos conceitos e formas de funcionamento de cada ferramenta, o problema proposto também exigiu a observação da dependência geométrica entre os elementos e experimentação da variação dinâmica.

Mobilizando esquemas de utilização, os participantes formularam hipóteses e testaram conjecturas, refletindo sobre suas ações e fazendo os ajustes nas suas construções. Nesse processo de fazer para compreender, os participantes constituíam esquemas de utilização que os capacitavam a repetir essas ações, mas de forma cada vez melhor, até a tomada de consciência. A evolução desses esquemas de utilização, que se reorganizam num patamar superior, fornecem condições aos participantes de realizarem desafios maiores.

5.1.9.3 ATIVIDADE 3

A atividade 3 propôs as mesmas questões que a atividade 2, porém para o hiperboloide de duas folhas em y , o que acrescentou um novo desafio. Nos hiperboloides de uma folha obtidos pela revolução de uma hipérbole, o eixo imaginário é fixo. Já nos hiperboloides de duas folhas, é o eixo real da hipérbole que é fixo, o que gera diferenças nos elementos que precisam ser inseridos na construção e na dependência entre eles.

Assim, no item a propomos uma antecipação, perguntando o que é necessário mudar na construção do hiperboloide de uma folha para obter o hiperboloide de duas folhas pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos y . Os participantes responderam:

P2: É preciso uma circunferência no plano xoz a partir de um ponto em y , uma reta a partir do ponto pertencente à circunferência para servir de apoio para outro ponto. Uma hipérbole a partir do ponto do centro da circunferência como foco, e o ponto sobre a reta como pertencente à hipérbole.

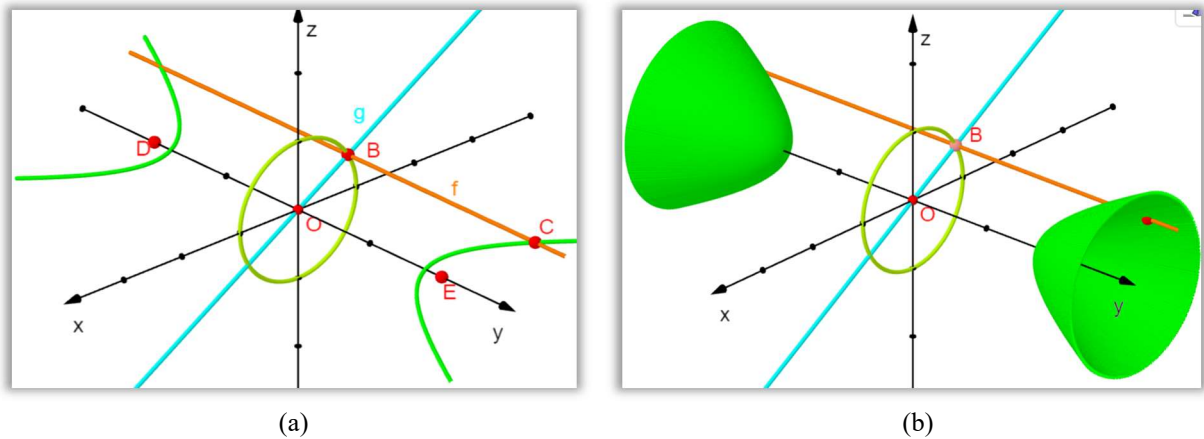
P3: Revolucionar a hipérbole de eixo central oy em torno de uma circunferência no plano xoz .

Ambos participantes entenderam que a circunferência poderia estar no plano xoz , não ficando claros os passos seguintes. A seguir, na questão do item b vamos entender os passos utilizados pelos participantes para obter o hiperboloide de duas folhas por meio da rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos y . Para essa atividade foi fornecido um arquivo do GeoGebra por meio do recurso ‘Tarefa’, vazio e com todas as ferramentas e recursos disponíveis.

No primeiro momento, os participantes precisaram observar que a circunferência poderia estar contida no plano xoz e que o eixo real da hipérbole estaria sobre o eixo dos y . E também que, enquanto no hiperboloide de uma folha era o eixo real que girava, no hiperboloide de duas folhas é o eixo imaginário da hipérbole. Conforme mostra a Figura 194a, no hiperboloide de duas folhas, o eixo imaginário da hipérbole (reta g) é o que gira apoiado no ponto móvel B sobre a circunferência. E o eixo real é o que contém os focos D e E , logo está sobre o eixo dos y .

Para obter um hiperboloide de duas folhas em y pelo giro de uma hipérbole, é possível começar inserindo um ponto $A(1,0,0)$ sobre o eixo dos x , obtendo a circunferência c que passa por A com eixo central no eixo dos y . Depois, inserimos um ponto móvel B sobre c e, a seguir, obtemos uma reta f que passa por B e é paralela ao eixo dos y . Sobre essa reta f colocamos o ponto C da hipérbole e inserimos os pontos $D(0, -2,0)$ e $E(0,2,0)$ sobre o eixo dos y , obtendo a hipérbole que passa por C e tem focos em D e E . E, habilitando a animação do ponto B e o rastro da hipérbole, podemos observar esta cônica desenhando o hiperboloide de duas folhas em y (Figura 194b).

Figura 194 – Proposta para construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole.



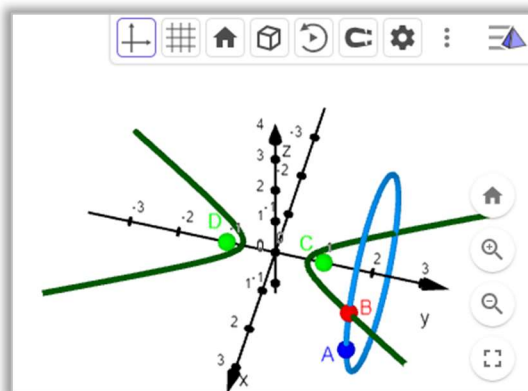
Fonte: Elaboradora pela autora.

A seguir, apresentamos os caminhos percorridos pelos participantes, juntamente com a análise das suas condutas cognitivas.

O participante P2 iniciou inserindo o ponto $A(2,2,0)$ na janela de visualização 3D e, usando a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’, obteve uma circunferência c que passa por A e tem centro no eixo dos y (Figura 195a). Depois, P2 inseriu o ponto B sobre c e obteve uma reta f que passa por B e é paralela ao eixo dos y , que acabou não sendo necessária na sua construção.

Então, P2 inseriu os pontos $C(0,1,0)$ e $D(0,-1,0)$ sobre o eixo dos y , obtendo a hipérbole com focos em C e D e que passava por B . Experimentando a sua construção, P2 observou que ao movimentar o ponto B , a hipérbole desenharia o hiperboloide de duas folhas em y . Então, P2 habilitou o rastro da hipérbole e animou o ponto B , observando o hiperboloide de duas folhas em y sendo gerado pela revolução da hipérbole.

Figura 195 – Construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P2.



(a)

Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A	$A = (2, 2, 0)$
2	Círculo c	Círculo de eixo EixoY passando por A $c: X = (0, 2, 0) + (2 \cos(t), 0, -2 \sin(t))$
3	Ponto B	Ponto sobre c $B = (-0.77, 2, -1.85)$
4	Reta f	Reta passando por B e paralela a EixoY $f: X = (-0.77, 2, -1.85) + \lambda (0, 1, 0)$
5	Ponto C	Ponto sobre EixoY $C = (0, 1, 0)$
6	Ponto D	Ponto sobre EixoY $D = (0, -1, 0)$
7	Hipérbole d	Hipérbole com focos D, C passando por B $d: X = (0, 0, 0) + (-0.28 \sinh(t), \pm 0.68 \cosh(t), -0.67 \sinh(t))$
8	Ponto B'	Reflexão (ou Inversão) de B em relação a EixoY $B' = (0.77, 2, 1.85)$
9	Reta g	Reta B, B' $g: X = (-0.77, 2, -1.85) + \lambda (1.54, 0, 3.69)$
10	Ponto E	Ponto sobre EixoX $E = (0, 0, 0)$
11	Reta h	Reta passando por E e paralela a g $h: X = (0, 0, 0) + \lambda (0.39, 0, 0.92)$

(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

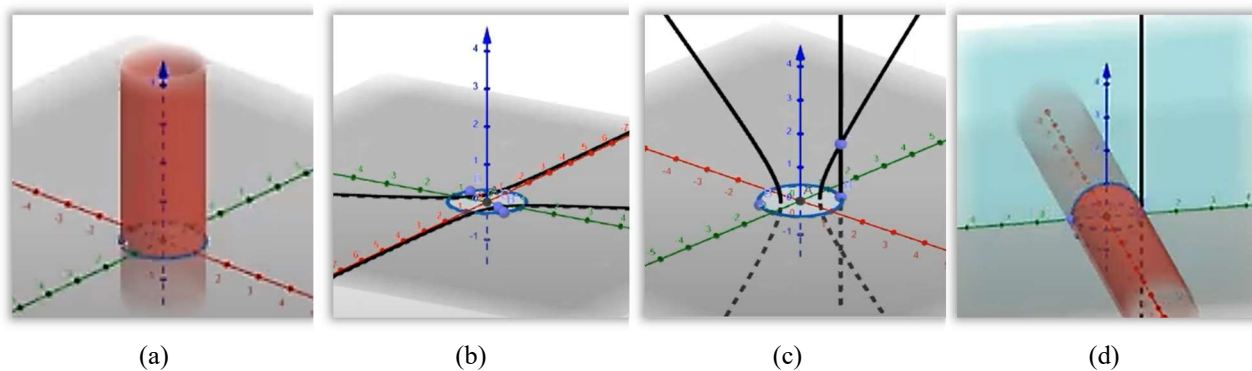
No protocolo de construção, podemos ver que P2 continuou inserindo elementos (passos 8 a 10), mas que não foram necessários para a obtenção da quádrlica (Figura 195b). Nessa atividade, P2 mobilizou espontaneamente os esquemas previamente constituídos a partir do momento que conseguiu ultrapassar o obstáculo relativo à diferença entre as construções dos hiperboloides. P2 inseriu os elementos na construção considerando a necessária dependência entre eles, movimentando a construção para analisar a sua estabilidade.

O participante P3 iniciou a sua construção inserindo o plano de equação $y = k$, que gerou um controle deslizante de parâmetro k . Apagando esses elementos, P3 inseriu novamente apenas o controle deslizante e , a seguir, analisou as ferramentas para obtenção de círculos. Então, P3 escolheu obter uma circunferência pela intersecção de superfícies. Inserindo uma superfície cilíndrica circular de equação $x^2 + y^2 = k$, P3 obteve a circunferência c pela intersecção entre essa superfície e o plano xoy (Figura 196a).

Ocultando a superfície cilíndrica, P3 inseriu o ponto $A(0,0,0)$ na origem do sistema e um ponto B sobre a circunferência c . Então, P3 obteve o ponto B' como reflexão de B em relação a A , experimentando repetir os passos utilizados em outras construções (Figura 196b). A seguir, podemos verificar que P3 ainda não tinha claro os passos necessários para essa construção, quando experimentou várias tentativas para obter esse hiperboloide de duas folhas pela revolução de uma hipérbole em torno do eixo dos y .

No passo seguinte, P3 inseriu uma reta f que passa por B' e é perpendicular ao plano xoy , ocultando-a na construção. Então, P3 experimentou obter a hipérbole que tinha os pontos B e B' como focos e que passava por um ponto qualquer do plano xoy (Figura 196b). Então, movimentando a construção dinâmica, P3 observou que a hipérbole ficou no mesmo plano dos focos, inviabilizando a obtenção da quádrlica.

Figura 196 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

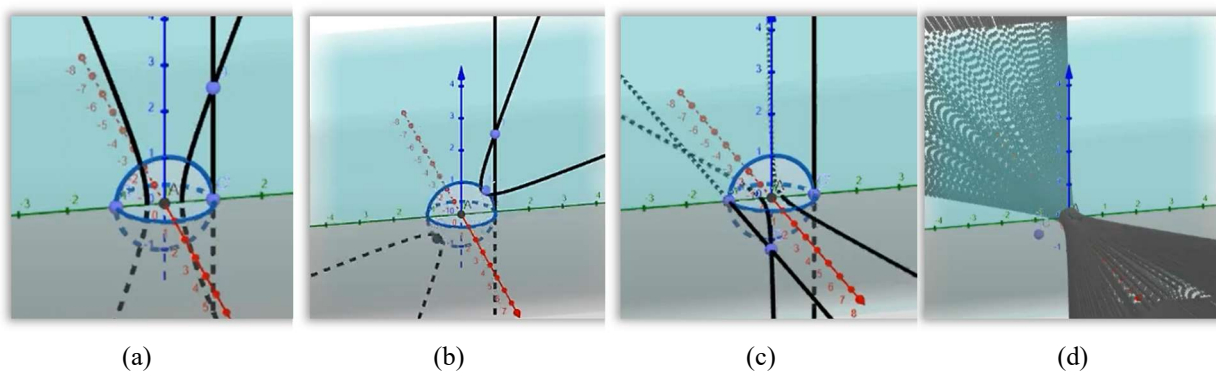
Na segunda tentativa, o participante P3 apagou alguns elementos da construção, inserindo uma reta f que passava por B' e era perpendicular ao plano xoy (Figura 196c). Então, P3 obteve uma hipérbole com focos em B e B' e que passa por um ponto C , pertencente à reta f . Movimentando a construção obtida, P3 observou que essa hipérbole não gerava o hiperboloide de duas folhas, apagando os elementos da construção para iniciar uma terceira tentativa.

O participante colocou os focos B e B' sobre o eixo dos y e inseriu uma reta g que passa por B' e é paralela ao eixo dos z (Figura 196d). A seguir, P3 obteve o plano yoz , que contém a reta g e o eixo dos y . Então, P3 analisou o menu de ferramentas para obter circunferências, experimentando algumas. Desistindo de utilizar uma ferramenta para obtenção de círculos, P3 inseriu a superfície cilíndrica de equação $y^2 + z^2 = k$, obtendo a circunferência d , pela intersecção dessa superfície com o plano yoz .

P3 ocultou a superfície e colocou um ponto C sobre a circunferência d , obtendo C' como reflexão de C em relação a A e movendo-os até que ficassem sobre o eixo dos y (Figura 197a). Então, P3 ocultou os pontos B e B' , que foram sobrepostos pelos pontos C e C' , obtendo uma hipérbole com focos em C e C' e que passava pelo ponto D sobre a reta g . Animando o ponto C , P3 observou que o giro dessa hipérbole também não gerava a quádrlica esperada (Figura 197b).

Apagando a hipérbole juntamente com o ponto D , P3 girou a construção, movimentando os pontos C e C' até ficarem sobre o eixo dos y . Refletindo sobre os próximos passos, P3 iniciou a quarta tentativa, colocando uma reta h passando por C e perpendicular ao plano yoz . E, inserindo um ponto D sobre h , obteve uma hipérbole com focos em C e C' e que passa por D (Figura 197c). Habilitando a animação do ponto C e o rastro da hipérbole, o participante observou que essa construção gerava um hiperboloide de uma folha em x (Figura 197d).

Figura 197 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3 (parte 2).



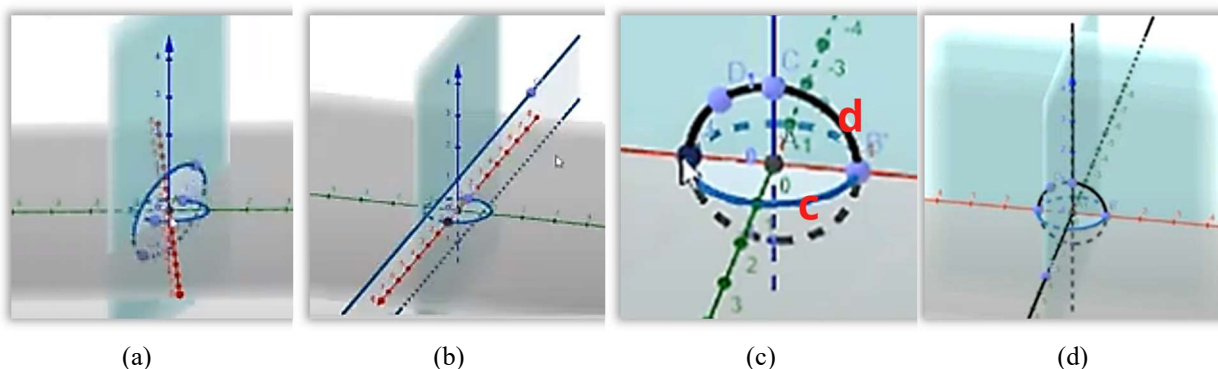
Fonte: Dados da pesquisa.

Então, P3 parou a animação, ocultou alguns elementos e apagou outros, iniciando a quinta tentativa. Nessa ocasião, perguntamos qual era o eixo real dessa hipérbole, ao que P3 respondeu: “*Acho que isso é indiferente, né! No caso, se eu for fazer para o y, eu só troco o eixo*”. Nessa ocasião, vimos que a circunferência c no plano xoy teve o objetivo de facilitar a mudança na posição do eixo real da hipérbole, apenas movendo os focos B e B' que foram inseridos sobre c .

A seguir, P3 disse: “*O meu problema eu acho que está sendo com as permissões do GeoGebra*”, apagando uns elementos e ocultando outros na janela de álgebra. Então, insistimos na pergunta: “*Qual é o eixo real dessa hipérbole?*”, ao que P3 respondeu que era o eixo dos x . Lembrando que o eixo real é o que contém os focos da hipérbole, P3 corrigiu sua resposta, dizendo que seria o $\overline{CC'}$. E, pensando-com a representação dinâmica obtida até o momento, P3 refletia sobre como fazer a hipérbole girar apoiada na circunferência de forma que gerasse um hiperboloide de duas folhas.

Então, P3 girou a representação dinâmica que continha as circunferências c (no plano xoy) e d (no plano yoZ), movimentando os pontos C e C' até que ficassem sobre o eixo dos y . A seguir, tornou os pontos B e B' visíveis sobre o eixo dos y , movendo os pontos C e C' para que deixassem de estar sobrepostos a B e B' . Movendo os pontos B e B' , P3 observou a alteração do plano e da forma da circunferência d (Figura 198a). E, experimentando colocar esses pontos sobre o eixo dos x , P3 obteve a imagem da Figura 198b.

Figura 198 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3 (parte 3).



Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio desse *feedback* do GeoGebra, P3 compreendeu que havia um problema na relação de dependência entre as circunferências c e d , apagando d e obtendo-a novamente. Dessa vez, P3 utilizou a ferramenta ‘Círculo por três pontos’, obtendo a circunferência d que

passa pelos B, B' e um ponto $C(0,0,1)$ que inseriu sobre o eixo dos z (Figura 198c). Colocando um ponto móvel D sobre a circunferência d, P3 disse: “Vai girar a partir do D”.

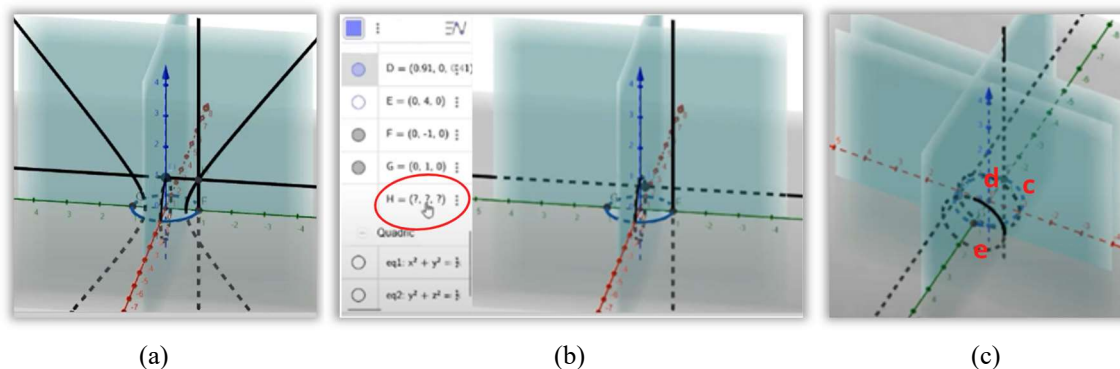
E, movimentando o ponto B sobre a circunferência c, P3 experimentou a dependência entre c e d, constatando que agora a circunferência d não se deforma. Analisando as ferramentas para obtenção de um plano, P3 inseriu duas retas coincidentes com os eixos dos y e dos z, obtendo o plano yoz que as contém (Figura 198d). Ocultando as retas e girando essa representação dinâmica, P3 inseriu os pontos $F(0,-1,0)$ e $G(0,1,0)$ de intersecção da circunferência c com o eixo dos y.

Nessa ocasião, ocorreu a tomada de consciência, quando P3 fez a seguinte afirmação: “A diferença aqui é que os focos são fixos né!” O participante descobriu a chave dessa construção quando, fazendo para compreender, P3 experimentou vários caminhos. Até o momento, o participante estava tentando reproduzir os passos da construção do hiperboloide de uma folha, na qual o eixo imaginário da hipérbole era fixo.

E pensando-com as representações dinâmicas que iam sendo inseridas na sua construção, que forneciam os *feedbacks* necessários para as confirmações ou não das suas conjecturas, P3 percebeu que o eixo real da hipérbole é que precisava ser fixo na construção do hiperboloide de duas folhas.

Então, ocultando alguns elementos da construção, P3 obteve duas retas (Figura 199a). Uma passando por D, perpendicular ao plano xoz e a outra, contendo F e perpendicular ao plano xoy . P3 obteve o ponto H de intersecção entre estas retas e, a seguir, inseriu a hipérbole com focos em F e G e que passa por H. Movimentando o ponto D sobre a circunferência d, P3 observou que as retas passavam a ser reversas quando D não pertencia ao eixo dos z, deixando de existir o ponto H e a hipérbole (Figura 199b).

Figura 199 – Processo de construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3 (parte 4).



Fonte: Dados da pesquisa.

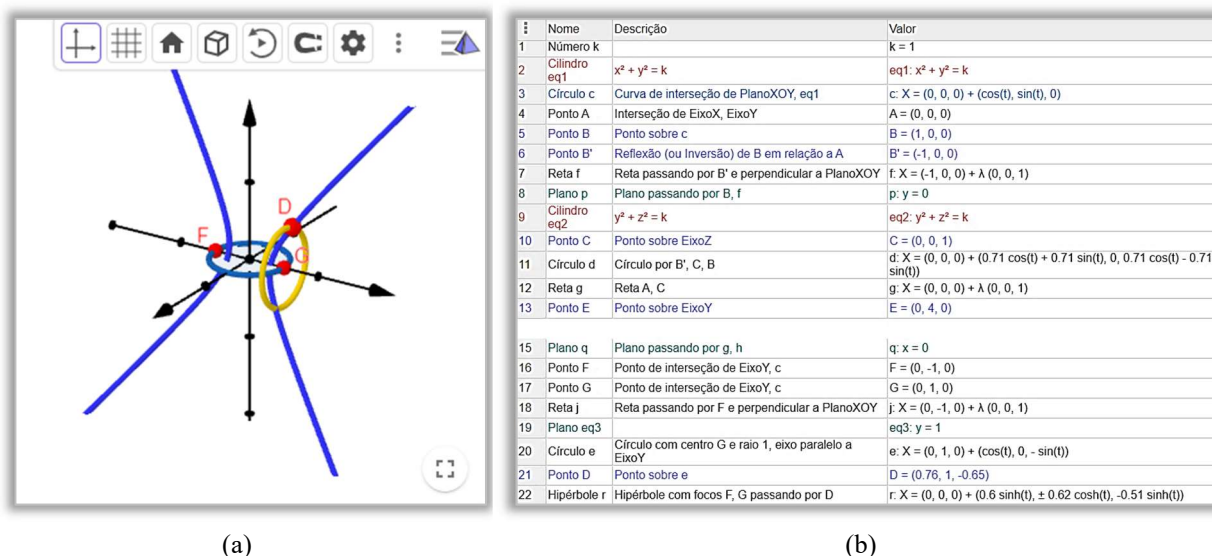
Então, pensando-com a construção, P3 experimentou inserir a superfície cilíndrica de equação $x^2 + z^2 = 1$, mas desistiu dessa ação. P3 fez mais algumas análises na sua construção, demonstrando a ocorrência de mais uma tomada de consciência quando disse que “*Não precisava nada daquilo que eu fiz*”. Nos passos seguintes do participante podemos confirmar isso.

Analisando o menu de ferramentas para obtenção de círculos, P3 escolheu a ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’. Então, P3 selecionou o ponto G e o eixo dos y, digitando o número 1 na janela *pop-up* que abriu para a inserção do valor do raio, obtendo a circunferência e (Figura 199c). P3 inseriu um ponto D sobre a circunferência e e obteve a hipérbole com focos em F e G e que passa por D (Figura 200a).

Então, P3 habilitou a animação do ponto D, para analisar a sua construção. Constatando que agora a hipérbole gerava o hiperboloide de duas folhas em y, habilitou o rastro da hipérbole, observando essa cônica desenhar a quádrica. O protocolo de construção de P3 não apresenta parte significativa das ações do participante, uma vez que muitos passos foram apagados a cada mudança de trajetória (Figura 200b).

Foi possível observar também que, fazendo para compreender, P3 pôde experimentar caminhos distintos até a tomada de consciência, quando constatou a diferença entre as construções dos hiperboloides de uma e de duas folhas. Pensar-com as representações dinâmicas a cada passo da construção possibilitou a formulação de hipóteses, testagem das conjecturas, reflexões e ajustes. Ações essas que permitiram que P3 resolvesse o desafio, após perceber que no hiperboloide de duas folhas o eixo real é fixo.

Figura 200 – Construção de um hiperboloide de duas folhas em y pela rotação de uma hipérbole por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão do item c, os participantes responderam com base nas suas construções, que as antecipações que fizeram na questão do item a estavam corretas. No entanto, podemos observar um planejamento da construção na antecipação feita pelo participante P2, o que resultou numa diminuição de tentativas para obter a construção. P3 já optou por ser bem breve na resposta à antecipação, não dando indícios de um planejamento da construção, o que pode ter sido a causa da necessidade de realizar várias tentativas até obter a construção.

E, para fechar a atividade 3, no item d perguntamos quem seria o eixo real da hipérbole, solicitando a obtenção da representação gráfica do eixo imaginário. Os participantes responderam:

P2: O eixo real é o oy . O eixo imaginário está no plano xoz e passa pela origem. É possível obter através de dois pontos pertencentes a hipérbole, uma reta apoiada nestes pontos, e uma reta paralela a esta outra reta, que passe pela origem.

P3: Real o eixo oy e imaginário teríamos o eixo ox e suas rotações em xoz .

Com base nas apreensões conceituais realizadas durante a obtenção da construção, os participantes responderam com bastante clareza sobre o eixo real. No tocante ao eixo imaginário da hipérbole, apesar de ficar claro nas suas respostas, foi possível ver que os participantes reconheceram que este eixo não é fixo. Observando suas construções, vemos que os participantes reconheceram que o eixo imaginário, pertencendo ao plano xoz e contendo os focos, girava junto com a hipérbole.

No desafio proposto nessa atividade, os participantes primeiro precisaram perceber a diferença entre as construções dos hiperboloides de uma e de duas folhas. Enquanto o eixo móvel no primeiro é o eixo real da hipérbole, no segundo, é o eixo imaginário. A ‘chave’ dessa construção constou na obtenção de uma hipérbole com eixo imaginário que se movia apoiado num ponto sobre a circunferência. Então, eles precisaram constatar que os focos tinham que estar sobre o eixo dos y , equidistantes da origem.

E, para obter um ponto que pertencesse à hipérbole, os participantes tiveram que perceber que esse ponto precisaria estar no plano da hipérbole. Para isso, era necessário vincular esse ponto a uma reta que girava apoiada no ponto móvel sobre a circunferência. Assim, esse ponto poderia ser inserido sobre uma reta no plano da hipérbole, que estivesse apoiada no ponto móvel. Essas constatações foram obtidas durante a construção, quando os participantes formulavam e testavam suas conjecturas.

E, a partir de reflexões sobre suas ações, os participantes faziam os ajustes com base em novas hipóteses. Baseadas nas constatações obtidas nas ações precedentes, as novas hipóteses

iam sendo formuladas de forma cada vez mais precisa, até a tomada de consciência. Essas ações foram viabilizadas pela possibilidade de pensar-com as representações dinâmicas que iam sendo obtidas a cada passo da construção.

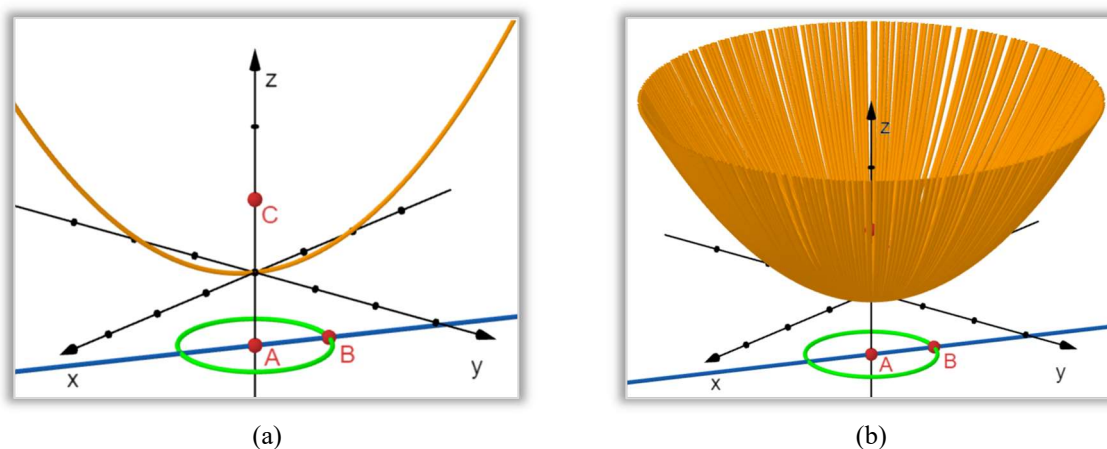
Nesse processo de fazer para compreender, os participantes mobilizavam esquemas prévios para a constituição de novos esquemas de utilização. Esses esquemas de utilização envolveram os conceitos de ponto, reta, circunferência e hipérbole e formas de funcionamento das respectivas ferramentas. Além disso, para obter a construção proposta, os participantes consideravam a dependência geométrica entre seus elementos e testavam a sua estabilidade.

Com a evolução dos esquemas de utilização, que se reorganizam num patamar superior, os participantes tornam-se aptos a resolver problemas progressivamente mais complexos.

5.1.9.4 ATIVIDADE 4

A atividade 4 apresentou a proposta da obtenção de um parabolóide elíptico em oz_+ pela rotação de uma parábola. Essa construção pode ser obtida pela inserção de uma circunferência sobre o plano xoy ou plano paralelo a este, e de uma parábola com vértice na origem, concavidade voltada para cima e em plano perpendicular ao da circunferência. Primeiro, podemos inserir um ponto $A(0,0,-1)$ sobre o eixo dos z e, usando a ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’, obter a circunferência c que passa por A , de raio 1 e direção do eixo dos z (Figura 201a).

Figura 201 – Proposta para construção do parabolóide elíptico em oz_+ pela rotação de uma parábola.



Fonte: Elaborado pela autora.

Depois, para obter a parábola, são necessários um foco e uma diretriz. Então, podemos inserir um ponto B sobre a circunferência c , que vai possibilitar a rotação da parábola. A seguir,

podemos obter a reta f (diretriz), que passa pelos pontos A e B , que vai girar junto com a parábola. Então, inserimos o ponto C (foco) sobre o eixo dos z , de modo que as distâncias do foco ao vértice (origem) da parábola e da diretriz ao plano xoy sejam iguais. E, selecionando a ferramenta ‘Parábola’, o ponto C e a reta f , obtemos essa cônica.

Por fim, habilitando o rastro da parábola e a animação do ponto B , podemos observar a cônica gerando o parabolóide elíptico em oz_+ (Figura 201b). A seguir, apresentamos as soluções dos participantes P2 e P3, juntamente com uma análise das suas condutas cognitivas. Na questão do item a na atividade 4, perguntamos quais os elementos necessários para a obtenção de um parabolóide elíptico em oz_+ pela rotação de uma parábola. Os participantes responderam:

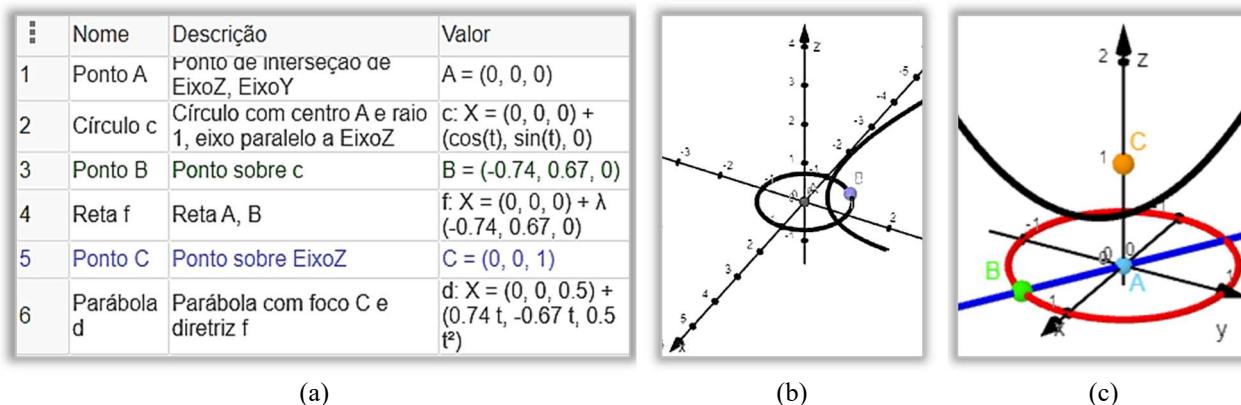
P2: Uma circunferência, e uma parábola a partir de um ponto da circunferência.

P3: Pré-solução: Eixo central, uma circunferência, um ponto A e seu reflexo A' perante o eixo central, um plano que contenha o eixo central e a reta AA' , e a parábola que pertence a esse plano. Pós-solução: Eixo central e um foco sobre ela, circunferência com um ponto D e seu reflexo D' , uma reta diretriz DD' , utilizar a função parábola de foco e diretriz, rotacionar o ponto D .

Nos registros acima, podemos entender que os participantes conseguiram antecipar os principais elementos dessa construção. Ao contrário da atividade anterior, agora P2 foi breve na descrição, enquanto P3 apresentou um planejamento para a obtenção da construção. Inferimos que P2 foi breve na sua descrição porque, mobilizando esquemas de utilização constituídos nas atividades anteriores, encontrou rapidamente a solução. Enquanto P3, com base experiência anterior, achou melhor refletir sobre os passos necessários antes de iniciar a construção.

No registro de P3 constam duas respostas, que o participante chamou de pré-solução e pós-solução. A primeira refere-se à antecipação, quando o participante tentou identificar os passos da construção antes de iniciá-la. E a segunda foi registrada após a obtenção da construção. Na questão do item b, foi solicitada a obtenção desse parabolóide elíptico em oz_+ pela rotação de uma parábola. Para essa atividade também foi fornecido um arquivo do GeoGebra por meio do recurso ‘Tarefa’, vazio e com todas as ferramentas e recursos disponíveis.

No protocolo de construção de P2 aparecem apenas seis passos, mas houveram outras tentativas que não ficaram registradas, por isso apresentamos as ações de P2 cruzando dados do protocolo e das gravações (Figura 202a). O participante P2 obteve o ponto $A(0,0,0)$, origem do sistema cartesiano, pela intersecção entre os eixos dos y e dos z . Esse ponto foi inserido com o objetivo de ser o centro da circunferência c , de raio 1 e direção do eixo dos z (Figura 202b).

Figura 202 – Construção de um parabolóide elíptico em oz_+ pela rotação de uma parábola por P2.

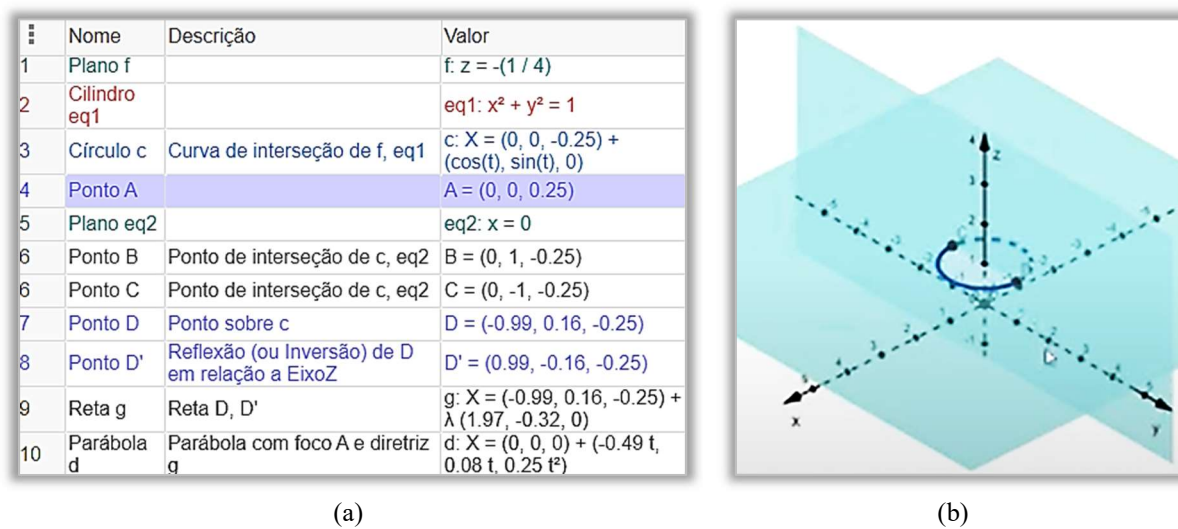
Fonte: Dados da pesquisa.

Depois, P2 inseriu um ponto móvel B sobre a circunferência c e analisou a ferramenta ‘Parábola’, inferimos que observando os elementos necessários para usá-la (foco e diretriz). Então, P2 experimentou usar a ferramenta ‘setor circular’ selecionando os pontos A e B e o eixo dos z, abandonando essa ação. A seguir, P2 obteve uma parábola selecionando o ponto B e o eixo dos z que, estando no mesmo plano da circunferência (plano xoy), não gerava a quádrlica esperada (Figura 202b).

Esse *feedback* do GeoGebra possibilitou as reflexões que levaram P2 a perceber que precisava inserir a diretriz da parábola antes de utilizar a ferramenta para sua obtenção. Então, o participante inseriu a reta f que passa por A e B e, afirmando que esse desafio seria mais difícil do que os anteriores, apagou a reta, analisou a construção e voltou a inseri-la. Colocando um ponto C(0,0,1) sobre o eixo dos z, P2 obteve a parábola de diretriz f e foco C, usando a ferramenta ‘Parábola’ (Figura 202c).

Por fim, P2 experimentou a sua construção, constatando a sua estabilidade diante do movimento. Então, o participante habilitou o rastro da parábola e a animação do ponto B, observando a parábola desenhar o parabolóide elíptico em oz_+ . Pelas condutas cognitivas de P2, foi possível observar que a atividade ofereceu um desafio novo. Mobilizando esquemas de utilização relativos à ferramenta ‘Parábola’, antes utilizada para obter essa cônica no IR^2 , o participante precisou obtê-la no IR^3 e com a diretriz móvel.

A Figura 203a apresenta o protocolo de construção do participante P3, onde constam dez passos, mas houveram passos inseridos de outras tentativas que não foram usados e passos que foram apagados. Assim, como em todas as demais análises, apresentamos a seguir um cruzamento dos dados oriundos do protocolo, das observações *in loco* e das gravações.

Figura 203 – Construção de um parabolóide elíptico em oz_+ pela rotação de uma parábola por P3.

(a)

(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

P3 iniciou a sua construção inserindo o plano de equação $z = 1$ e a superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 = 1$, para obter a circunferência c como intersecção dessas superfícies (Figura 203b). A seguir, P3 inseriu o ponto $A(0,0,0)$ sobre a origem do sistema cartesiano e, em seguida, selecionar os eixos dos y e dos z para obter o plano yoZ . Depois, P3 experimentou algumas possibilidades para obter a intersecção entre a circunferência c e o plano yoZ .

Utilizando a ferramenta ‘Ponto’, P3 tentou e não conseguiu encontrar os pontos de intersecção da circunferência c com o plano yoZ . Depois, tentando utilizar a ferramenta ‘Intersecção de superfícies’, P3 selecionou o plano yoZ e a circunferência c , que também não possibilitou a obtenção desses pontos de intersecção. Então, P3 disse: “*Esse é um negócio que eu acho bem ruim no GeoGebra, quando tu faz uma intersecção, ele não deixa fazer a intersecção da intersecção*”.

Nesse caso, o problema é que o participante estava utilizando a ferramenta para intersecção de superfícies e selecionando uma circunferência. A seguir, dizendo: “*Vai no olho então*”, P3 experimentou a ferramenta ‘Ponto sobre objeto’ para inserir pontos sobre a intersecção da circunferência com o plano. Não obtendo êxito novamente, propomos ao participante que experimentasse usar outra ferramenta. Então, usando a ferramenta ‘Intersecção de dois objetos’, P3 encontrou os pontos $B(0,1,1)$ e $C(0,-1,1)$ de intersecção entre a circunferência c e o plano yoZ .

Observamos aqui, que o participante mobilizou esquemas de utilização, experimentando ferramentas que já havia utilizado, mas que não serviam para essa situação. Dessa forma, P3 constituiu novos esquemas de utilização, especialmente os relacionados à diferenciação entre as ferramentas ‘Intersecção entre superfícies’ e ‘Intersecção entre dois objetos’. A seguir, P3

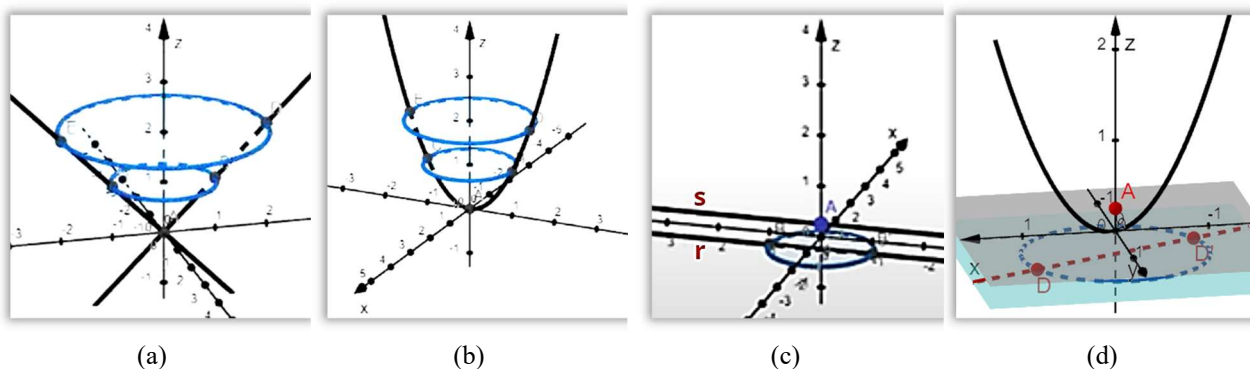
analisou as ferramentas para criar a parábola e, referindo-se à ferramenta ‘Cônica por cinco pontos’, disse: “*Eu poderia criar a cônica por cinco pontos*”.

Já tendo três pontos, $A(0,0,0)$, $B(0,1,1)$ e $C(0,-1,1)$, P3 precisava de mais dois para obter a parábola por cinco pontos. Assim, P3 inseriu o plano de equação $z = 2$ e a superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 = 4$, obtendo a circunferência d de intersecção entre essas superfícies. E, com a intersecção dessa circunferência com o plano yoz , P3 obteve os pontos $D(0,2,2)$ e $E(0,-2,2)$. Então, usando a ferramenta ‘Cônica por cinco pontos’, P3 selecionou os pontos A, B, C, D e E, obtendo duas retas concorrentes na origem (Figura 204a).

Mobilizando esquemas conceituais, P3 percebeu rapidamente que o problema estava relacionado à posição dos pontos D e E, uma vez que tanto os pontos A, B e D quanto os pontos A, C e E são colineares. Então, P3 alterou a equação $x^2 + y^2 = 4$ da superfície cilíndrica para $x^2 + y^2 = 2$, encontrando uma parábola como intersecção com o plano de equação $z = 2$ (Figura 204b).

No entanto, lembrando que a parábola precisava girar em torno do eixo dos z para gerar o parabolóide elíptico, P3 comentou a respeito dos cinco pontos utilizados para obter a cônica: “*Tem que rotacionar todos, né!*” A partir desse *feedback* do GeoGebra, P3 apagou todos os elementos da construção, iniciando uma nova tentativa com a ferramenta ‘Parábola’. P3 inseriu o plano de equação $z = -\frac{1}{4}$ e a superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, para obter a circunferência c de intersecção entre essas superfícies.

Figura 204 – Processo de construção de um parabolóide elíptico em oz_+ pela rotação de uma parábola por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ocultando a superfície cilíndrica, P3 inseriu o ponto $A(0,0,0.25)$ para ser o foco da parábola e, na sequência, a equação do plano yoz . Então, encontrou os pontos $B(0,1,-0.25)$ e $C(0,-1,-0.25)$ de intersecção desse plano com a circunferência c. Em seguida, P3 inseriu o ponto B' como reflexão do ponto B em relação ao eixo dos z, que coincidia com o ponto C.

Então, P3 encontrou uma reta r que passa pelos pontos B e B' e, uma reta s , paralela a essa passando por A (Figura 204c).

P3 obteve os pontos E e F de intersecção da reta s com a superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 = 1$, dizendo: “*Ah mas eu só preciso saber o foco e a linha né!*” Então, P3 obteve a parábola com foco A e diretriz r , dando indícios de uma tomada de consciência quando disse: “*É isso né! Difícil é pensar nisso né! Ah mas o B não se mexe*”. Os passos seguintes confirmam isso, quando P3 realizou ações de forma mais espontânea.

Ocultando alguns elementos e apagando outros, P3 ficou apenas com a circunferência c e o ponto A visíveis. Inserindo um ponto móvel D sobre a circunferência c , P3 obteve o ponto D' como reflexo de D em relação ao eixo dos z . Em seguida, inseriu a reta g que passa por D e D' , obtendo a parábola de foco A e diretriz g (Figura 204d). Analisando a estabilidade da sua construção, P3 experimentou o movimento do ponto D , observando que a diretriz e a parábola giram juntamente com este ponto.

Então, P3 habilitou o rastro da parábola e a animação no ponto D , observando essa cônica desenhar o parabolóide elíptico em oz_+ . Refletindo sobre a atividade, P3 disse: “*É difícil pensar porque tem que ser dentro do GeoGebra, né*”. Entendemos que P3 estava falando das características desse ambiente de matemática dinâmica, especialmente no que se refere às formas de uso das ferramentas e à dependência entre os elementos de uma construção.

P3 experimentou várias ferramentas para obter pontos de intersecção que já havia utilizado antes, mas que aqui não se aplicava à situação proposta nessa atividade. Depois, conseguiu obter uma parábola, mas sem observar a dependência desta com um ponto móvel sobre a circunferência para possibilitar a sua rotação. No entanto, podemos observar nas condutas cognitivas de P3, que o participante resolveu o desafio com mais espontaneidade do que nas atividades anteriores.

No item c dessa atividade, os participantes tiveram a oportunidade de voltar nas suas antecipações na questão do item a , analisando-as com base nas suas construções. O participante P3 acrescentou a correção que chamou de ‘Pós-construção’ a sua resposta: “*Pós-solução: Eixo central e um foco sobre ela, circunferência com um ponto D e seu reflexo D' , uma reta diretriz DD' , utilizar a função parábola de foco e diretriz, rotacionar o ponto D* ”.

P2 respondeu que: “*Não, pois faltou mencionar que após a circunferência e um ponto sob ela, deve ser feito uma reta a partir deste mesmo ponto e a origem, para servir de apoio para a parábola*”. Na construção de P2, a circunferência estava sobre o plano xoy , por isso o participante obteve a diretriz da parábola utilizando o ponto móvel sobre a circunferência e a origem do sistema cartesiano. Assim, a atividade propôs um novo degrau para avançar que,

considerando os esquemas possuídos pelos participantes, proporcionou a constituição de outros esquemas de utilização.

E por fim, no item d dessa atividade, respondendo quem seria a diretriz dessa parábola, P2 disse: “*A diretriz é uma reta, pertencente ao plano xoy que passa pela origem*” e P3 disse: “*A reta DD'* ”. Esses registros escritos dos participantes apenas confirmaram o que já havia sido possível perceber nas suas condutas cognitivas, uma vez que a diretriz da parábola foi essencial para a obtenção dessa construção. A obtenção da parábola de rotação passava pela inserção de uma reta (diretriz) que girava apoiada num ponto sobre uma circunferência.

A parábola precisou ser obtida a partir de dois elementos, o foco e a diretriz. Para que essa parábola girasse em torno do eixo dos z , os participantes precisaram perceber que a diretriz precisaria mover-se junto. Então, a ‘chave’ da construção consistia em obter uma reta que girasse apoiada numa circunferência. Essa reta precisava ser paralela ao plano xoy , para que a parábola tivesse eixo de simetria sobre o eixo dos z . E, com o vértice da parábola na origem do sistema cartesiano, a distância do foco à origem e da diretriz ao plano xoy precisariam ser iguais.

Assim, para resolver essa atividade, os participantes precisaram mobilizar esquemas de utilização relativos à obtenção de ponto, reta, circunferência e parábola. Pensando-com as representações dinâmicas em cada etapa da construção, os participantes descobriram a ‘chave’ dessa construção, que passava pela obtenção da diretriz. Além dos esquemas de utilização relacionados aos conceitos e formas de funcionamento de cada ferramenta, os participantes precisaram considerar a dependência geométrica entre os elementos e experimentar a variação dinâmica.

Fazendo para compreender, os participantes mobilizaram esquemas de utilização para formular hipóteses, testar suas conjecturas, refletir sobre suas ações e fazer os ajustes necessários nas suas construções. Com isso, os participantes constituíram novos esquemas de utilização que lhes deram condições de repetir essas ações de forma cada vez melhor, até a tomada de consciência. De forma que, esses novos esquemas de utilização reorganizam-se num patamar superior, possibilitando um progressivo avanço na complexidade dos desafios propostos.

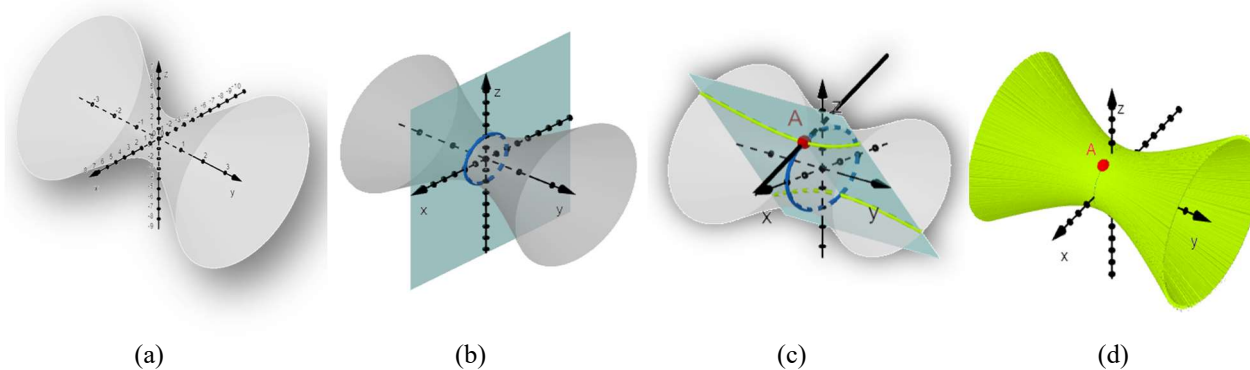
5.1.9.5 ATIVIDADE 5

Na atividade 5, ao contrário das anteriores, os participantes tiveram que obter uma quádriga específica. Por exemplo, na atividade 4, os participantes poderiam obter qualquer

parabolóide elíptico em oz_+ , havendo liberdade na escolha das características da parábola. Nessa atividade, o desafio foi o de obter um hiperbolóide de uma folha em y específico. Para isso, no item a desta atividade, essa quádrlica foi apresentada num arquivo do GeoGebra, por meio do recurso ‘Tarefa’.

A representação simbólica dessa quádrlica foi definida como objeto auxiliar e escondida, ficando visível apenas a sua representação gráfica, para o participante ‘pintar’ com a rotação de uma hipérbole específica (Figura 205a). Depois, na questão do item b, os participantes precisaram realizar a conversão do registro gráfico para o simbólico, obtendo a equação dessa quádrlica.

Figura 205 – Proposta para construção de um hiperbolóide de uma folha em y de revolução.



Fonte: Elaborado pela autora.

Essa tarefa poderia ser realizada por meio de dois passos, envolvendo a obtenção de duas seções planas: (1) a circunferência resultante da intersecção do hiperbolóide com o plano xoz (Figura 205b); (2) a hipérbole obtida pela intersecção da quádrlica por um plano que, sendo perpendicular ao plano da circunferência e passando pelo seu centro, girasse apoiado num ponto desta (Figura 205c). Essas informações sobre as seções planas circular e hiperbólica foram fornecidas no enunciado da atividade, juntamente com as respectivas imagens.

A seguir, apresentamos uma possível solução para o desafio proposto, seguida das resoluções dos participantes e análise das suas condutas cognitivas. Na questão do item a, para ‘pintar’ o hiperbolóide de uma folha em y com o rastro deixado pela rotação de uma hipérbole, precisamos obter uma seção plana circular e uma hiperbólica. A seção plana circular pode ser obtida pela inserção da equação $y = 0$ (plano xoz) e, a seguir, obtendo a circunferência c de intersecção desse plano com a quádrlica (Figura 205b).

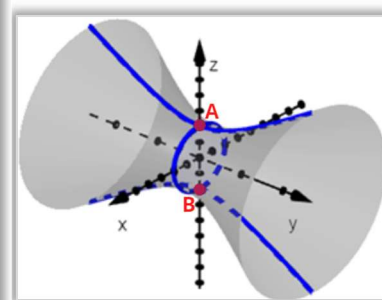
A seção plana hiperbólica precisa ser obtida sobre um plano que gira apoiado num ponto da circunferência c . Para obter esse plano, inserimos um ponto móvel A sobre essa

circunferência e obtemos uma reta t tangente à c neste ponto (Figura 205c). Então, utilizando a ferramenta ‘Plano perpendicular’ e selecionando o ponto A e a reta t , obtemos o plano π . Por fim, obtemos a hipérbole como intersecção entre o plano π e a quádrlica. E, habilitando o rastro da hipérbole e a animação do ponto A , podemos ver essa cônica ‘pintando’ o hiperboloide de uma folha em y (Figura 205d).

O protocolo de construção de P2 continha onze passos, pois passo 1 refere-se à inserção da equação do hiperboloide de uma folha em y , que foi escondida na janela de álgebra (Figura 206a). Porém, o participante obteve a construção em apenas seis passos (3, 4, 6, 9, 10 e 11), uma vez que os demais se referem a tentativas e não foram apagados.

Figura 206 – Construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução por P2.

Ícone	Descrição	Valor
		eq1: $x^2/4 - y^2 + z^2/4 = 1$
		eq2: $x = 0$
		f: $y = 0$
	Curva de intersecção de f, eq1	d: $X = (0, 0, 0) + (-2 \cos(t), 0, -2 \sin(t))$
	Curva de intersecção de eq2, eq1	c: $X = (0, 0, 0) + (0, -\sinh(t), \mp 2 \cosh(t))$
• A	Ponto sobre d	A = (-2, 0, -0.11)
	Reta passando por A e paralela a EixoY	g: $X = (-2, 0, -0.11) + \lambda (0, 1, 0)$
↖ ↗	Reflexão (ou Inversão) de A em relação a EixoY	A' = (2, 0, 0.11)
⊙	Tangente a d passando por A	h: $X = (-2, 0, 0) + \lambda (0.11, 0, -2)$
	Plano passando por A perpendicular a h	p: $0.11x - 2z = 0$
	Curva de intersecção de p, eq1	e: $X = (0, 0, 0) + (\pm 2 \cosh(t), -\sinh(t), \pm 0.11 \cosh(t))$
• A	Ponto sobre c	B = (0, 0.75, 2.5)



(a)

(b)

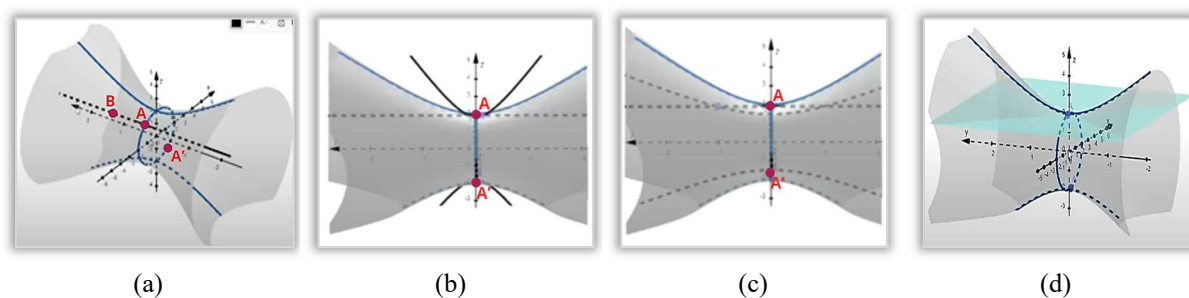
Fonte: Dados da pesquisa.

P2 iniciou inserindo as equações $x = 0$ e $y = 0$ dos planos yoZ e xoz , respectivamente. Em seguida, P2 obteve as seções planas circular d e hiperbólica c como intersecção da quádrlica com os planos xoz e yoZ , respectivamente (Figura 206b). Então, experimentando a sua construção, P2 constatou que essa hipérbole havia ficado fixa. P2 apagou essa seção plana e, refletindo sobre a relação que precisaria estabelecer entre os elementos da construção, inseriu um ponto móvel A sobre a circunferência c .

P2 experimentou o movimento do ponto A , mas não tendo estabelecido a dependência entre a hipérbole e este ponto, excluiu-o da construção. Então, P2 obteve os pontos $A(0,0,2)$ e $B(0,0,-2)$ de intersecção entre a hipérbole c e a circunferência d (Figura 206b). E, depois, P2 experimentou inserir um ponto coincidente com o ponto B , apagando-o em seguida, juntamente com os pontos A e B . Entendemos que P2 estava experimentando inserir um ponto móvel, uma vez que no passo seguinte inseriu outro ponto A sobre a circunferência d , observando seu movimento.

Em seguida, P2 obteve uma reta g que passa por A e é paralela ao eixo dos y (Figura 207a). Animando o ponto A , P2 observou a reta movendo-se apoiada no ponto A sobre a circunferência d , refletindo sobre a sua construção. Encontrando o ponto A' como reflexão do ponto A em relação ao eixo dos y , P2 animou o ponto A , observando novamente a sua construção.

Figura 207 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em y e de revolução por P2 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

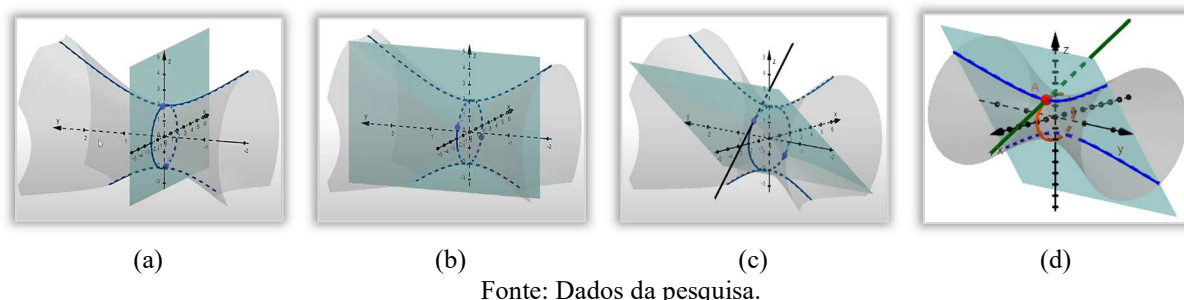
Nos passos seguintes, entendemos que P2 estava tentando encontrar um ponto da quádrlica para obter uma hipérbole com focos A e A' e que passasse por esse ponto. P2 experimentou obter a intersecção da reta g com a hipérbole, observando que não era possível (Figura 207a). Depois, inseriu um ponto B sobre a reta g , obtendo uma hipérbole de focos A e A' e que passa pelo ponto B .

Habilitando a animação do ponto A , P2 observou a alteração na forma dessa hipérbole, que ora tinha concavidade mais fechada (linha preta contínua na Figura 207b) e ora mais aberta (linha preta pontilhada na Figura 207c). Nessa ocasião, quando o participante dá sinais de que não sabe como prosseguir, propomos uma nova leitura do enunciado. Após a leitura, P2 apagou alguns elementos da construção, inserindo um plano perpendicular ao eixo dos z e que passa por A (Figura 207d).

Animando o ponto A , P2 observou que esse plano se movia sempre paralelo ao plano xoy . Em seguida, P2 apagou esse plano, inserindo o plano que passava por A e era perpendicular ao eixo dos y (Figura 208a). Nesse caso, animando o ponto A , P2 observou que esse plano não se movia porque era o próprio plano xoz . Então, perguntamos quem seria o plano que o participante estaria procurando, ao que P2 respondeu que seria um plano perpendicular ao eixo dos x e que passa por A .

Obtendo um plano perpendicular ao eixo dos x e que passa por A , P2 animou o ponto A , observando que o plano se movimentava sempre paralelo ao plano yoz (Figura 208b).

Figura 208 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução por P2 (parte 2).



Fonte: Dados da pesquisa.

Diante desses *feedbacks* do GeoGebra, P2 volta à leitura do enunciado referente à obtenção da hipérbole, observando a imagem ao lado (Figura 205c). Então, perguntamos a P2 a quem o plano na imagem do enunciado era perpendicular, ao que o participante respondeu: “A uma reta sobre a circunferência, sobre o ponto”. E, ao perguntarmos que reta era essa, P2 observou novamente a imagem do enunciado.

Quando entendeu que se tratava de uma reta tangente à circunferência no ponto móvel, P2 procurou a ferramenta para obtenção de reta tangente. Entendemos que nesse momento ocorreu a tomada de consciência por P2, uma vez que o participante passou a mobilizar espontaneamente esquemas de utilização. Selecionando a ferramenta ‘Reta tangente’, P2 selecionou o ponto A e a circunferência c, obtendo a reta h e o plano p perpendicular à reta h no ponto A (Figura 208c).

Então, P2 obteve a hipérbole e pela intersecção do plano p com a quádrlica (Figura 208d). Movendo o ponto A, P2 experimentou a sua construção. Então, habilitando o rastro na hipérbole e a animação do ponto A, P2 observou esta cônica pintando o hiperboloide de uma folha em y . Observamos que, apesar do enunciado apresentar os dois passos para uma possível solução, na hora de executar não foi tão simples. No entanto, consideramos que o participante P2 executou com compreensão os passos da construção necessários para resolver o desafio proposto.

Para resolver esse desafio, P2 ora mobilizava esquemas de utilização e ora os constituía. Utilizando as representações dinâmicas para pensar-com, P2 experimentou algumas possibilidades para obter o ponto móvel, parecendo que tentava vincular à hipérbole que já estava na construção. Entendemos que, apesar do participante já ter realizado atividades em que inseria o ponto móvel e depois a cônica passando por esse ponto, nesse caso a hipérbole deveria ser obtida pela intersecção de um plano com a quádrlica.

Assim, a principal diferença nessa construção, estava no fato de que era necessário obter o plano dependente do ponto móvel, e não a cônica. Quando P2 compreendeu isso, tentou

encontrar esse plano. Porém, limitado pelas experiências anteriores e a falta de conhecimento das ferramentas do GeoGebra, experimentou apenas planos perpendiculares aos eixos coordenados. A tomada de consciência ocorreu quando P2 analisou a representação estática disponibilizada junto com o enunciado.

Compreendendo que esse plano seria perpendicular à reta tangente à circunferência e, depois de encontrar a ferramenta ‘Reta tangente’, o participante obteve a construção rapidamente. Com isso, foi possível ver que essa atividade apresentou um desafio novo para esse participante. Também observamos que a proposta de fazer para compreender levou o participante a formular e testar suas hipóteses, refletir sobre suas ações e fazer ajustes, ações que envolveram a constituição de novos esquemas de utilização.

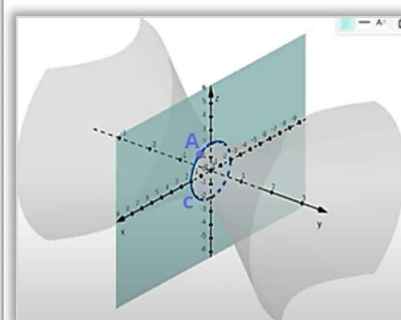
No protocolo de construção do participante P3 (Figura 209a), constam quatorze passos, porque o primeiro é a equação que foi escondida da quádrica. No entanto, o participante utilizou dez desses passos para obter a quádrica (passos 2 a 11). P3 iniciou inserindo o plano xoz na janela de álgebra para obter a seção plana circular c , por meio da sua intersecção com o hiperboloide de uma folha em y (Figura 209b).

Em seguida, P3 colocou um ponto móvel A sobre a circunferência c e abriu o menu de ferramentas para obtenção de planos, P3 disse: “*Agora tem que fazer um plano perpendicular*”. E, colocando o mouse sobre a ferramenta ‘Plano perpendicular’, P3 procurava a sua descrição, comentando: “*Não aparecem as especificações no desenho*”.

Figura 209 – Construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução por P3.

Nome	Ícone	Valor
1 Hiperbolóide de uma folha eq1		eq1: $x^2 / 4 - y^2 + z^2 / 4 = 1$
2 Plano f		f: $y = 0$
3 Círculo c		c: $X = (0, 0, 0) + (-2 \cos(t), 0, -2 \sin(t))$
4 Ponto A	• ^A	A = (1.93, 0, 0.54)
5 Reta g		g: $X = (1.93, 0, 0.54) + \lambda (0, -1, 0)$
6 Ponto B		B = (0, 0, 0)
7 Ponto A'	• ^{A'}	A' = (-1.93, 0, -0.54)
8 Reta h		h: $X = (1.93, 0, 0.54) + \lambda (-3.85, 0, -1.08)$
9 Ponto C	• ^A	C = (1.93, 3.33, 0.54)
10 Plano q		q: $-3.58x + 12.84z = 0$
11 Hipérbole d		d: $X = (0, 0, 0) + (\pm 1.93 \cosh(t), \sinh(t), \pm 0.54 \cosh(t))$
12 Plano p		p: $y = 1$
13 Círculo e		e: $X = (0, 1, 0) + (-2.83 \cos(t), 0, -2.83 \sin(t))$
14 Hiperbolóide de uma folha eq2		eq2: $x^2 / 4 + z^2 / 4 - y^2 / 1 = 1$
15 Ponto D	• ^A	D = (-2.83, 1, 0)

(a)



(b)

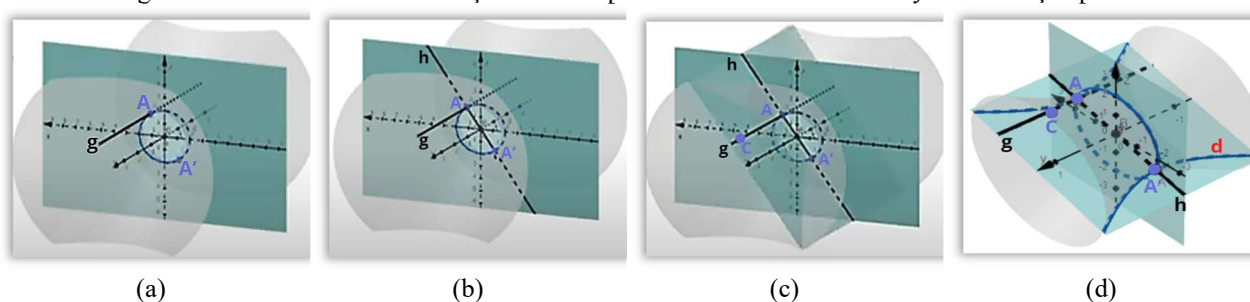
Fonte: Dados da pesquisa.

P3 observou que as descrições das ferramentas não apareciam no modo ‘Tarefa’ e, superando essa restrição, analisou o desenho do botão dizendo que “*Ele tem um ponto e uma reta perpendicular ao plano*”. Então, P3 obteve uma reta g perpendicular ao plano xoz em A

(Figura 210a). Depois, P3 inseriu o ponto $B(0,0,0)$ sobre a origem do sistema cartesiano para obter o ponto A' , de reflexão do ponto A em relação a B . A seguir, P3 inseriu uma reta h que passa por A e A' (Figura 210b).

E, selecionando a ferramenta ‘Plano por três pontos’, P3 obteve um plano q que passava pelos pontos A e A' e por um terceiro ponto C , que inseriu sobre a reta g (Figura 210c). Então, P3 girou a representação dinâmica obtida e, dizendo “*Agora eu faço a intersecção aqui*”, obteve a hipérbole d de intersecção do plano q com a superfície (Figura 210d).

Figura 210 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha em y de revolução por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

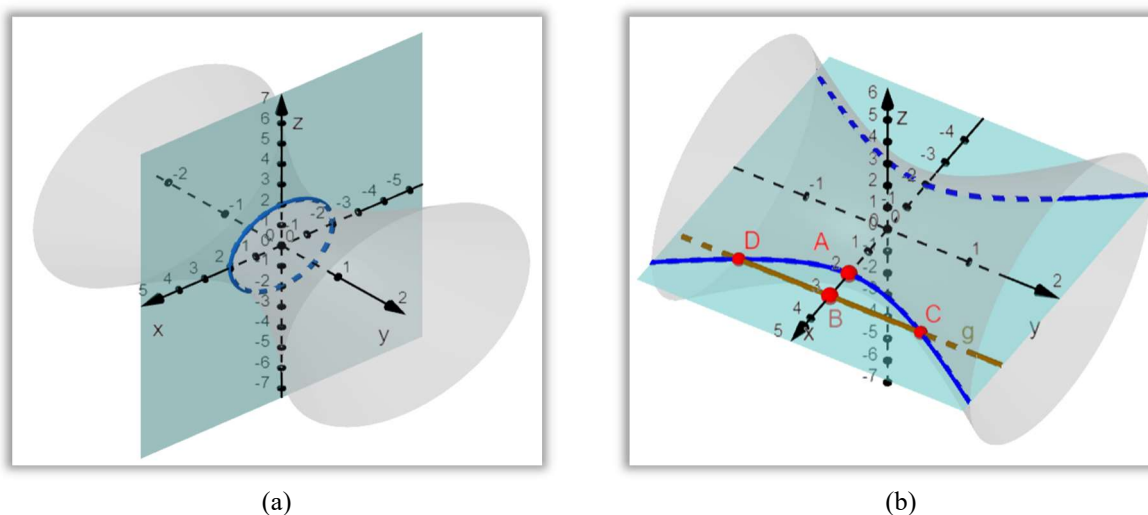
Apagando alguns elementos e ocultando outros, P3 animou o ponto A , experimentando a sua construção. Então, P3 habilitou o rastro da hipérbole e a animação do ponto A , observando a cônica ‘pintando’ o hiperboloide de uma folha em y . Observamos que P3 mobilizou esquemas de utilização de forma mais espontânea do que em outras oportunidades, resultado das experiências anteriores, resolvendo rapidamente o desafio. Com base nos passos propostos no enunciado e, fazendo para compreender, o participante descobriu os elementos necessários para a construção.

Pensando-com a representação dinâmica que obtinha a cada etapa da construção, o participante inseriu os objetos matemáticos considerando a ordem e a dependência entre eles. O participante também experimentou a sua construção, buscando verificar a sua estabilidade diante do movimento. Na questão do item b, os participantes foram desafiados a fazer uma conversão do registro gráfico para o simbólico, obtendo a equação dessa quádrlica. A seguir, apresentamos uma proposta de solução seguida das resoluções dos participantes.

Para realizar essa conversão, podemos começar estabelecendo a correspondência entre unidades significantes simbólicas e gráficas relativas aos termos (quadráticos ou lineares) na equação dessa quádrlica e seus sinais. Envolvendo a mobilização de esquemas conceituais previamente constituídos, é possível obter a equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ de um hiperboloide de uma folha ao longo do eixo dos y .

Analisando a representação gráfica da quádrlica, é possível ver que a seção plana circular no plano xoz tem raio 2, logo sua representação simbólica fica $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ (Figura 211a). Assim, ficam conhecidos os valores de $a^2 = c^2 = 4$ na equação dessa quádrlica.

Figura 211 – Proposta para a conversão do registro gráfico para a simbólico do hiperboloide de uma folha em y .



Fonte: Elaborado pela autora.

Tomando uma das suas seções planas hiperbólicas, por exemplo, a hipérbole no plano xoy podemos determinar o valor de b^2 . Essa hipérbole tem eixo real sobre o eixo dos x e vértices nos pontos $(\pm 2, 0, 0)$, logo sua equação se escreve $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ (Figura 211b). A partir das coordenadas de um ponto dessa hipérbole, podemos calcular o valor de b^2 . Esse ponto pode ser inserido sobre a hipérbole diretamente, mas também é possível escolher ao menos uma de suas coordenadas.

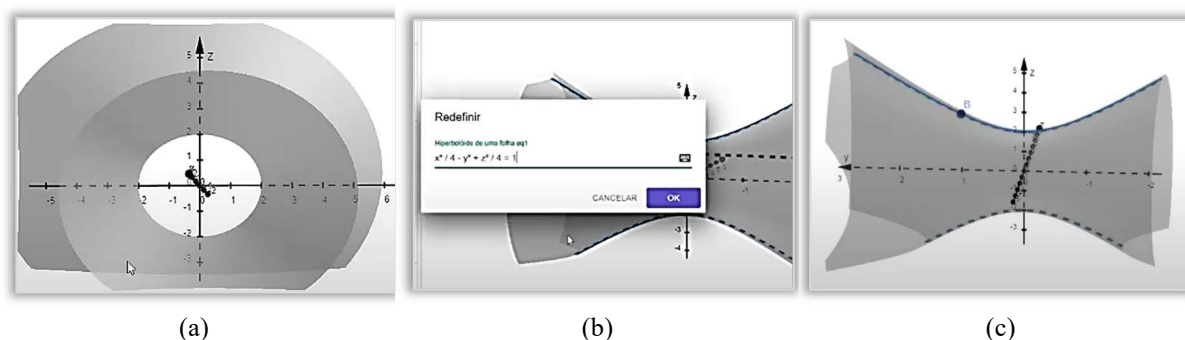
Por exemplo, se quisermos que o ponto tenha abscissa $x = 3$, inserimos o ponto $B(3, 0, 0)$ e obtemos uma reta g por esse ponto e paralela ao eixo dos y (Figura 211b). Então, obtemos os pontos C e D de coordenadas $x = 3$, $y \cong \pm 1.12$ e $z = 0$, de intersecção dessa reta com a hipérbole. Substituindo as coordenadas de um desses pontos na equação da hipérbole, obtemos $b^2 \cong 1$. Assim, a representação simbólica desse hiperboloide de uma folha em oy é dada por $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$. Ao inserir essa equação na janela de álgebra, os participantes puderam confirmar ou ajustar as equações obtidas.

Nessa atividade, quando os participantes clicavam sobre a quádrlica, uma janela com a equação da quádrlica era aberta. Assim, os mesmos poderiam ver as equações, o que poderia prejudicar a proposta da conversão do registro gráfico para o simbólico. No entanto, essa

situação foi contornada, uma vez que os participantes tiveram que encontrar os valores dos coeficientes das variáveis na equação dessa quádrica.

O participante P2 iniciou escrevendo uma equação genérica com todas as variáveis quadráticas e todos termos positivos e ocultando todos os elementos ineridos na construção. Então, o participante observou a seção plana circular, relacionando o seu raio (dois) com os coeficientes de y^2 e z^2 (Figura 212a). Assim, trocando o sinal do termo em y , escrevendo a equação: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Figura 212 – Processo de conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha em y por P2 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

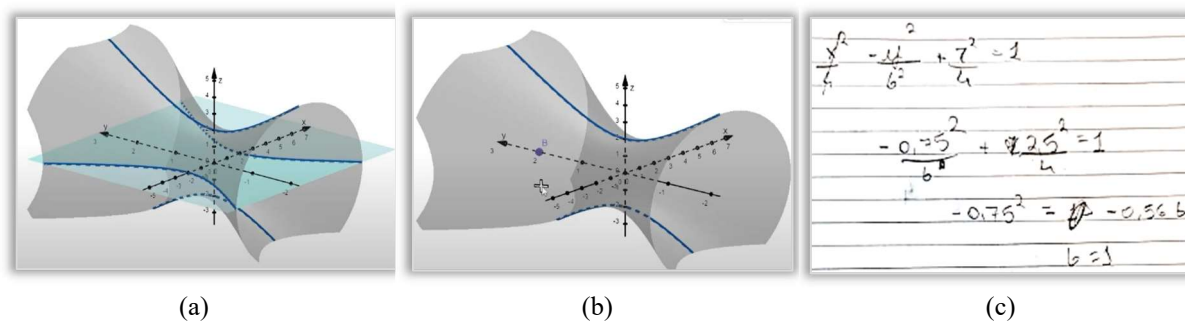
Clicando na representação dinâmica da quádrica, abriu-se uma janela *pop-up* com a sua equação (Figura 212b). A alteração do sinal do coeficiente de y^2 e dos denominadores dos coeficientes das variáveis quadráticas, podem ter tido origem nessa circunstância, levando P2 a reescrever a equação da seguinte forma $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 1$. No entanto, mostrando que havia estabelecido a correspondência entre as unidades significantes gráficas e simbólicas relativas aos coeficientes de x^2 e de z^2 , o participante disse: “*Esses aqui eu sei por causa da circunferência*”.

A seguir, P2 colocou um ponto B sobre a seção plana hiperbólica contida no plano yoz , mas não conseguiu obter as coordenadas com valores inteiros movendo esse ponto (Figura 212c). Nessa ocasião, o participante clicava sobre a representação dinâmica da quádrica, analisando a equação da quádrica na janela *pop-up* que se abria (Figura 212b). Apesar de ver que o coeficiente que faltava era igual a 1, o desafio de obtê-lo continuava o mesmo.

Então, buscando obter um ponto na representação gráfica da quádrica para calcular o valor do terceiro coeficiente na sua representação simbólica, o participante inseriu o plano de equação $z = 0$, obtendo seção plana hiperbólica no plano xoy (Figura 213a). Desistindo dessa

ação, o participante excluiu esse plano e inseriu um ponto $B(0,2,0)$ sobre o eixo dos y , observando que “*Esse ponto não tá na superfície*” (Figura 213b).

Figura 213 – Processo de conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha em y por P2 (parte 2).



Fonte: Dados da pesquisa.

P2 compreendeu que não poderia utilizar as coordenadas do ponto B para obter o coeficiente de y^2 porque esse ponto não pertence à superfície. Então, P2 inseriu a equação $x = 0$ na janela de álgebra, obtendo o plano yoz . Abandonando essa ação, excluiu esse plano e inseriu novamente um ponto móvel B sobre a seção plana hiperbólica no plano yoz . Então, P2 disse: “*Eu vou fazer com esse aqui mesmo*” e, moveu esse ponto até obter as coordenadas $x = 0$, $y \cong 0,75$ e $z \cong 2,5$. Então, substituindo-as na equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 1$, P2 obteve $b^2 \cong 1$ (Figura 213c).

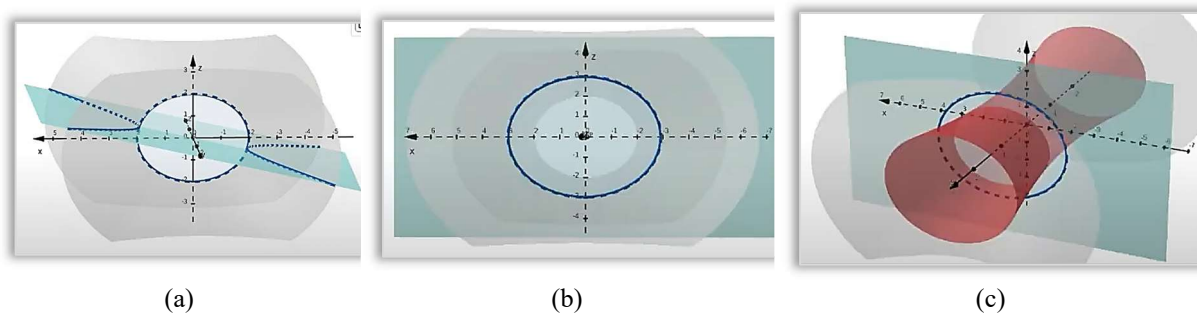
Depois, P2 inseriu a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$ na janela de álgebra, obtendo o hiperboloide de uma folha em y , que se sobrepôs exatamente ao que se encontrava na janela de visualização. Com isso, foi possível ver que o participante mobilizou de forma mais espontânea os esquemas de utilização necessários para obter a representação simbólica dessa quádrlica a partir da sua representação gráfica.

Utilizando a representação dinâmica da quádrlica como objeto para pensar-com, P2 realizou os tratamentos gráficos que permitiram a identificação das unidades significativas gráficas necessárias para a conversão. Com os respectivos tratamentos algébricos, foi possível observar que P2 correlacionou essas unidades significativas gráficas com as simbólicas, obtendo a equação da quádrlica.

O participante P3 mobilizou esquemas conceituais e escreveu a forma genérica da equação dessa quádrlica, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, determinando que todas as variáveis são quadráticas e que o sinal do coeficiente do termo que tem a variável y é negativo. A seguir, analisou a representação dinâmica da quádrlica e substituiu b^2 por 4 nessa equação. Observando

novamente a representação dinâmica, P3 perguntou se sua seção plana com o plano xoz era uma circunferência, uma vez que tinha a forma elíptica (Figura 214a).

Figura 214 – Processo de conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha em y por P3 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Lembrando que se tratava de uma superfície de revolução, P3 entendeu que essa seção plana era circular, identificando o raio dessa circunferência (dois), escrevendo a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 1$. Então, P3 iniciou as ações para obter o terceiro coeficiente dessa equação. Para obter o valor de b^2 , P3 inseriu um plano de equação $y = 1$, obtendo a sua intersecção com a quádrica (Figura 214b).

Observando que o raio dessa seção plana circular era igual a 3, o participante conjecturou que $b^2 = 9$. Então, o participante inseriu a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ na janela de álgebra, obtendo uma quádrica no interior da que foi proposta na atividade (Figura 214c).

Diante desse *feedback* do GeoGebra e com base na equação $\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y = 1 \end{cases}$ dessa seção plana circular, P3 substituiu $x^2 + z^2$ por 9 e y^2 por 1 na equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 1$, quando obteve $b^2 = 0.8$.

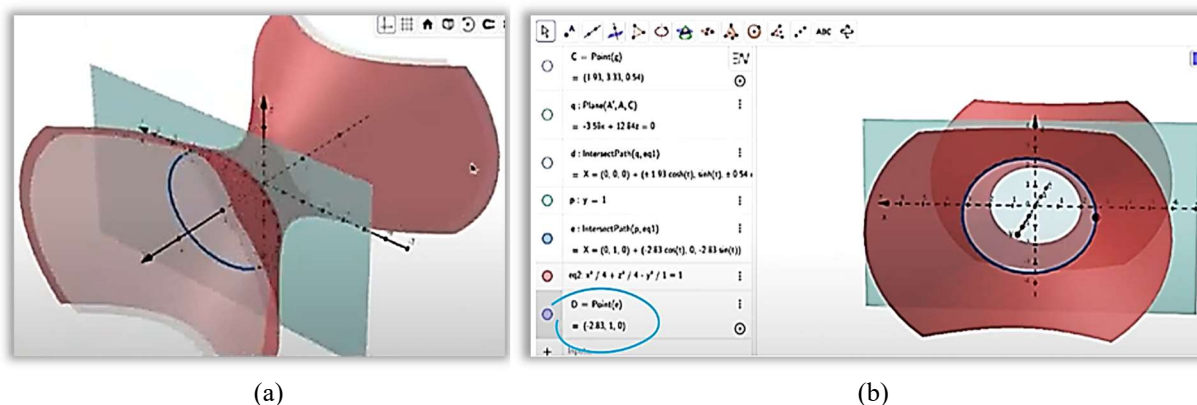
Inserindo a equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{0.8^2} + \frac{z^2}{4} = 1$ na janela de álgebra, P3 obteve outro hiperboloide de uma folha em y , dessa vez no exterior e com pouca diferença em relação à disponível na janela de visualização (Figura 215a). Então, P3 troca 0,8 por 1 nessa equação, obtendo o hiperboloide de uma folha em y , que se sobrepôs exatamente ao dado na questão (Figura 215b).

No entanto, o participante não entendeu porque o cálculo que realizou obtendo $b^2 = 0.8$ não deu certo. Iniciando uma investigação, P3 inseriu um ponto D sobre a seção plana circular dessa quádrica no plano $y = 1$. Analisando as coordenadas de D na janela de álgebra,

P3 verificou que o raio dessa seção plana circular era aproximadamente 2,83, e não 3 como havia pensado e utilizado para obter o valor de b^2 (Figura 215b). Assim, a seção plana circular

no plano $y = 1$ tem equação
$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 8 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Figura 215 – Processo de conversão do registro gráfico para o simbólico do hiperboloide de uma folha em y por P3 (parte 2).



Fonte: Dados da pesquisa.

E, fazendo $x^2 + z^2 = 8$ com $y = 1$ na equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 1$ dessa quádrlica, P3 constatou que $b^2 \cong 1$. Observamos que a mediação do *software* poderia ter limitado a correlação entre as representações gráfica e simbólica, se o participante tivesse utilizado o GeoGebra para obter os coeficientes apenas pelo método da tentativa e do erro. Apesar de também envolver um ‘fazer’, esse fazer poderia não culminar num ‘compreender’, se o participante não tivesse continuado tentando obter esse coeficiente por meio da correlação entre registros.

Pensando-com a representação dinâmica da quádrlica, o participante identificou outra forma de obter esse coeficiente, utilizando a equação de uma de suas seções planas em lugar de um dos seus pontos. E, não encontrando a representação gráfica correta, P3 ficou instigado, investigando e conseguindo identificar o erro. Vimos que, mobilizando esquemas de utilização, P3 identificou as unidades significantes necessárias para a conversão. E, realizando os devidos tratamentos gráficos e algébricos, P3 correlacionou as representações gráfica e simbólica da quádrlica.

Nas construções anteriores, gerar uma quádrlica a partir da rotação de uma cônica envolvia a dependência geométrica entre uma circunferência, um ponto e a cônica. No desafio proposto nessa atividade, os participantes precisaram perceber que a dependência agora

envolvia uma circunferência, um ponto sobre esta e um plano tangente à circunferência neste ponto. A cônica seria obtida depois, pela intersecção deste plano com a quádrlica.

Assim, a ‘chave’ dessa construção consistiu na obtenção do plano tangente à circunferência num ponto móvel desta. Considerando que esse problema se distanciava bastante dos desafios propostos anteriormente, o enunciado apresentava os dois passos para obter essa construção. Observamos que essa proposta foi bem apropriada para o participante P2, mas menos desafiadora para P3. Assim, consideramos que essas informações poderiam ser oferecidas em caso de necessidade.

De qualquer forma, a execução dos procedimentos exigiu de ambos os participantes a mobilização de esquemas de utilização no exercício de fazer para compreender até obter a construção. Pensando-com as representações dinâmicas obtidas a cada passo da construção, os participantes inseriam novos objetos matemáticos, considerando a dependência entre estes. E, com base na mediação do GeoGebra, os participantes movimentavam a construção, verificando a sua estabilidade, identificando erros e os corrigindo.

Para obter essa construção, os participantes passaram por um processo de fazer para compreender, onde eles formulavam e testavam suas hipóteses. Refletindo sobre esses resultados, eles faziam ajustes e assim sucessivamente. Mobilizando esquemas prévios para a constituição de novos esquemas de utilização a cada tentativa, as novas conjecturas tornavam-se cada vez mais precisas, até a tomada de consciência.

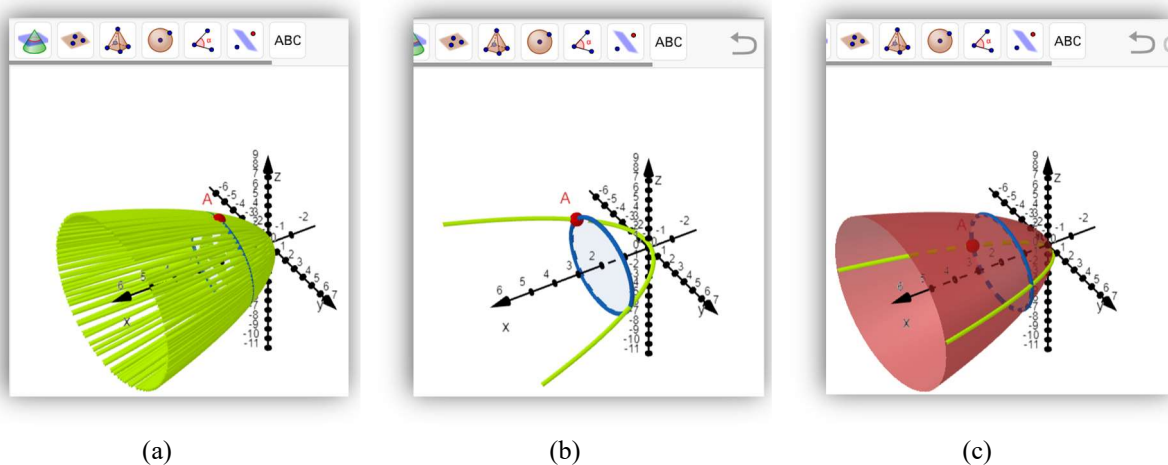
Os esquemas de utilização envolvidos no desafio proposto estavam relacionados aos conceitos de ponto, reta, plano, circunferência e hipérbole e formas de funcionamento das respectivas ferramentas. E, para obter a construção proposta, os participantes consideravam a dependência geométrica entre seus elementos e testavam a sua estabilidade. A evolução desses esquemas de utilização, que se reorganizam num patamar superior, tornam os participantes aptos para avançar na resolução de novos desafios.

E, na proposta de conversão do registro gráfico para o simbólico, os participantes identificaram as unidades significantes gráficas e simbólicas, correlacionando-as. Mobilizando esquemas de utilização, eles efetuaram os tratamentos gráficos e algébricos pertinentes, obtendo a representação simbólica da quádrlica. A realização dessas ações de forma espontânea dá indícios da ocorrência da coordenação de registros.

5.1.9.6 ATIVIDADE 6

Na atividade anterior, os participantes tiveram acesso à representação gráfica de um hiperboloide de uma folha em y , onde precisaram obter as suas seções planas circular e hiperbólica. Nessa atividade, o desafio foi de encontrar a representação simbólica do paraboloides elíptico em ox_+ , dadas as suas seções planas elíptica e parabólica. Para isso, apresentamos uma animação em que uma parábola, movendo-se juntamente com um ponto sobre uma elipse em torno do semieixo ox_+ , desenhava um paraboloides elíptico (Figura 216a).

Figura 216 – Paraboloides elíptico em ox_+ pela rotação de uma parábola.



Fonte: Elaborado pela autora.

Nesta construção, haviam duas seções planas do paraboloides elíptico em ox_+ , uma elipse e uma parábola, cujas equações estavam escondidas na janela de álgebra (Figura 216b). Apenas o ponto móvel A, de intersecção entre a elipse e a parábola, ficou visível na janela de álgebra, para que os participantes pudessem parar ou reiniciar a animação. Para propor esse desafio aos participantes, obtivemos a construção do paraboloides elíptico em ox_+ de equação $\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{8} = x$, como segue.

Inserindo essa equação na janela de álgebra, obtivemos a representação gráfica da quádrlica. Então, obtendo a seção plana elíptica c de intersecção da quádrlica com o plano $x = 2$, colocamos o ponto A sobre c . Inserindo a reta f que é tangente à c no ponto A, obtivemos um plano p que passa por A e é perpendicular a f . Por fim, a seção plana parabólica foi obtida pela intersecção do plano p com a quádrlica.

Definindo como objeto auxiliar todos esses elementos, com exceção do ponto A, foi possível escondê-los na janela de álgebra. Assim, na janela de álgebra aparecia apenas o ponto móvel A e, na janela de visualização, este ponto e as seções planas elíptica e parabólica (Figura 216b). O desafio proposto na questão do item a foi o de encontrar a equação desta quádrlica. E

na questão do item b, inserindo essa equação na janela de álgebra, obter o referido parabolóide elíptico em ox_+ .

A Figura 216c mostra a quádrlica obtida após a inserção da equação na janela de álgebra. A seguir, apresentamos uma possível solução para o problema proposto, seguida das resoluções dos participantes e análise das suas condutas cognitivas. Iniciando a descrição de uma possível solução para esse problema, é possível ver que essa superfície é um parabolóide elíptico em ox_+ , pois as seções planas elípticas têm seus centros sobre o semieixo ox_+ , em planos paralelos ao plano yoz .

Considerando que temos seções planas elípticas em planos paralelos ao plano yoz , podemos dizer que os termos quadráticos são os que contém as variáveis y e z e que esses termos são ambos positivos. E, considerando que as seções planas dessa quádrlica por planos paralelos a xoy e a xoz são parabólicas, o termo com a variável x é linear. Ainda, como as parábolas tem concavidades voltadas para o semieixo ox_+ , o coeficiente deste termo linear é positivo.

Assim, a representação simbólica dessa quádrlica pode ser dada por $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x$, onde os valores de b^2 e c^2 podem ser obtidos por meio das seções planas parabólicas. Movendo o ponto A de modo que sua cota seja nula, obtemos o ponto de coordenadas $x = 2, y \cong 3.46$ e $z = 0$, que pertence à seção plana parabólica dessa quádrlica com o plano xoy , de equação $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = x \\ z = 0 \end{cases}$. Ao substituir as coordenadas desse ponto na equação dessa parábola, obtemos o valor de $b^2 \cong 6$.⁴⁵

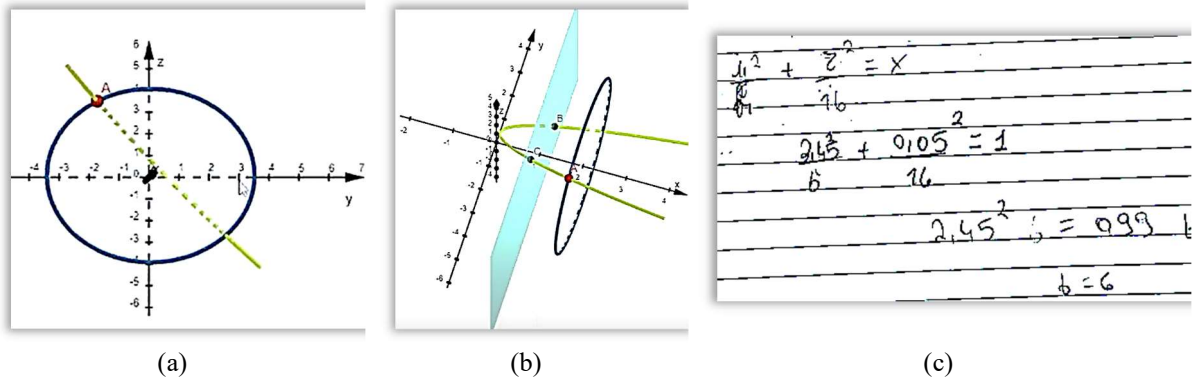
E, movendo o ponto A de modo que sua ordenada seja nula, obtemos o ponto (2,0,4) que pertence à seção plana parabólica dessa quádrlica com o plano xoz , de equação $\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} = x \\ y = 0 \end{cases}$. Ao substituir as coordenadas desse ponto na equação dessa parábola, obtemos o valor de $c^2 = 8$. Então, escrevemos a equação $\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{8} = x$, do parabolóide elíptico em ox_+ .

O participante P2 identificou os termos quadráticos e linear e os seus respectivos sinais, escrevendo a equação $y^2 + z^2 = x$, inicialmente com coeficientes iguais a 1. A seguir, P2 observou a seção plana elíptica e inseriu outros coeficientes nessa equação, que ficou $\frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{16} =$

⁴⁵ Neste e em alguns outros casos, foram utilizados pontos cujas coordenadas não eram exatas, sendo considerados arredondamentos na segunda casa decimal. Todavia, essa aproximação não inviabilizou a obtenção do valor exato dos coeficientes procurados.

x . P2 obteve os valores desses coeficientes (12 e 16) por meio da projeção no plano yoz de uma das seções planas elípticas. Analisando essa projeção, P2 considerou que seus semieixos tinham medidas $\sqrt{12}$ e 4 (Figura 217a).

Figura 217 – Tratamentos gráficos e algébricos para obtenção do coeficiente de y^2 na representação simbólica do parabolóide elíptico em ox_+ por P2.



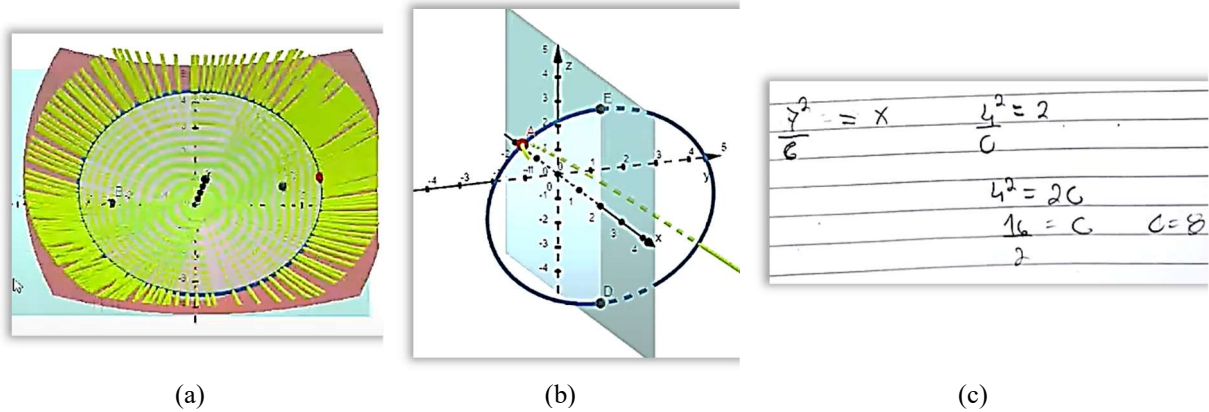
Fonte: Dados da pesquisa.

No entanto, antes de inserir essa equação na janela de álgebra, P2 resolveu calcular o valor de b^2 . O participante utilizou o plano de equação $x = 1$ para obter os pontos B e C de intersecção com a parábola (Figura 217b). Movendo o ponto A, P2 obteve as coordenadas $x = 1$, $y \cong 2,45$ e $z = 0,05$ para o ponto B, que se moveu sobre o plano $x = 1$. Considerando $c^2 = 16$ e, substituindo as coordenadas do ponto B na equação $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{16} = x$ da quádrlica, P2 encontrou o valor de $b^2 \cong 6$ (Figura 217c).

Porém, inserindo a equação $\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{16} = x$ na janela de álgebra, P2 não obteve a quádrlica esperada (Figura 218a). O problema estava no coeficiente de z^2 que não foi calculado, mas obtido pela medida do semieixo de uma das seções planas elípticas. Lembrando que a equação dessa quádrlica era $\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{8} = x$, observamos que mesmo fazendo $c^2 = 16$ (ao invés de $c^2 = 8$), o cálculo de P2 continuava dando o mesmo valor para b^2 .

Realizando esse mesmo cálculo com $c^2 = 64$, encontramos novamente $b^2 \cong 6$. A cota do ponto B, escolhido pelo participante, era 0,05. Nesse caso, o termo $\frac{z^2}{c^2}$ é aproximadamente zero, uma vez que $0,05^2$ dividido por 8, 16 ou 64 é igual a 0,00031, 0,00016 ou 0,00004, respectivamente. Por essa causa, o cálculo do valor de b^2 nas equações $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{8} = x$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{16} = x$ ou $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{64} = x$, dava sempre aproximadamente 6.

Figura 218 - Tratamentos gráficos e algébricos para obtenção do coeficiente de z^2 na representação simbólica do parabolóide elíptico em ox_+ por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Voltando ao problema anterior, no qual P2 não encontrou a mesma representação gráfica ao inserir a equação $\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{16} = x$, perguntamos como o participante teria obtido o valor de c^2 . E, falando da medida do semieixo da elipse que estava sobre o eixo dos z , o participante respondeu: “É porque aqui no z , a distância era 4. E aí é distância ao quadrado”. Então, P2 considerou a possibilidade de obter o coeficiente de z^2 de outra forma, por meio da substituição das coordenadas de um ponto da quádrlica.

Inserindo o plano de equação $y = 0$, P2 obteve os pontos $D(2,0,-4)$ e $E(2,0,4)$ de intersecção do plano xoz com uma das seções planas elípticas (Figura 218b). Então, P2 substituiu as coordenadas do ponto E na equação do parabolóide elíptico e calculou o valor de $c^2 = 8$ (Figura 218c). E, inserindo a equação $\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{8} = x$ na janela de álgebra, obteve o parabolóide elíptico em ox_+ .

Por meio de tratamentos gráficos e algébricos, o participante identificou as unidades significantes gráficas num registro e as correlacionou com as simbólicas no outro, obtendo a equação da quádrlica. Pensando-com a representação dinâmica, P2 mobilizou esquemas de utilização, realizando essa conversão do registro gráfico para o simbólico de forma mais espontânea.

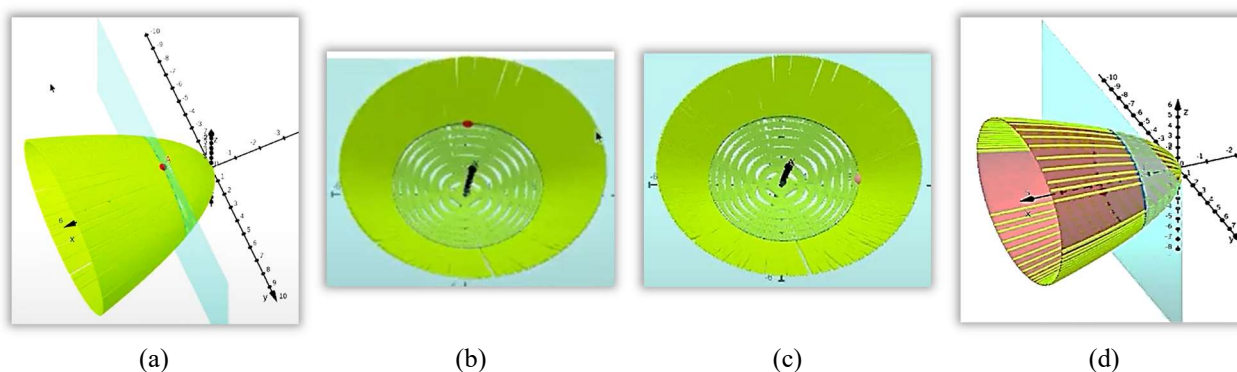
O participante P3 iniciou observando a construção e disse: “É um parabolóide em x ”. Copiando a equação do hiperbolóide de uma folha em y da atividade anterior e, P3 alterou alguns termos, obtendo a equação $\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = x$. Com isso, podemos observar que P3 escolheu os termos quadráticos e linear adequadamente, errando apenas na escolha do sinal do termo em y^2 .

E, manipulando a representação dinâmica, P3 inseriu o plano de equação $x = 1$, pensando em obter uma das seções planas elípticas da quádrlica. Porém, selecionando a ferramenta ‘Intersecção de superfícies’, P3 disse: “*Eu não tenho a circunferência, né*”. P3 constatou que não poderia obter a seção plana elíptica porque não havia uma representação gráfica da quádrlica na construção.

Então, P3 inseriu o plano de equação $x = 2$, que tinha a seção plana elíptica dada na questão como intersecção com a quádrlica da construção (Figura 219a). E procurando identificar o valor de a^2 , P3 deslocou o ponto A sobre a seção plana elíptica até que a ordenada ficasse nula ($y = 0$), obtendo abscissa $x = 2$ e cota $z = 4$ (Figura 219b). Então, dizendo que “*Se x é 2 e z é 4, com y zerado, então a^2 é 8*”, P3 reescreveu a equação $\frac{z^2}{8} - \frac{y^2}{b^2} = x$ da quádrlica.

Depois, P3 moveu o ponto A até a posição em que a cota ficou nula ($z = 0$), obtendo a abscissa $x = 2$ e a ordenada $y \cong 3,46$ (Figura 219c). Nesse momento, o participante constatou que o sinal do termo em y^2 não era negativo, reescrevendo a equação $\frac{z^2}{8} + \frac{y^2}{b^2} = x$ da quádrlica. Substituindo as coordenadas do ponto A na equação da quádrlica ($\frac{0^2}{8} + \frac{3,46^2}{b^2} = 2$), P3 disse que “*3,46 ao quadrado é [aproximadamente] 12 [$\cong 11,97$], e dividido por 2, é 6*”⁴⁶, obtendo o valor de $b^2 \cong 6$.

Figura 219 – Tratamentos gráficos para conversão de registro gráfico para simbólico do parabolóide elíptico em ox_+ por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, P3 escreveu a equação $\frac{z^2}{8} + \frac{y^2}{6} = x$ e, inserindo-a na janela de álgebra (Figura 219d). E, observando a superfície vermelha sendo pintada pela parábola amarela, P3 disse: “*Show! Aprendendo umas coisinhas*”. Como podemos observar, alegrando-se com o resultado

⁴⁶ O participante encontrou dois dos coeficientes da equação da quádrlica por meio de uma de suas seções planas. Para encontrar o terceiro, o mesmo inseriu um ponto sobre a superfície mas, não encontrando valores inteiros para suas coordenadas, obteve um valor aproximado para o terceiro coeficiente.

obtido, P3 reconheceu a sua evolução. O participante, mobilizando esquemas de utilização, realizou espontaneamente a conversão da representação gráfica para a simbólica.

Pensando-com a representação dinâmica, P3 realizou tratamentos gráficos que lhe permitiram identificar as variáveis visuais que, com os devidos tratamentos algébricos, correlacionou com as unidades significantes simbólicas. Ao mover o ponto A até que uma das suas coordenadas ficasse nula ($z = 0$ e $y = 0$), P3 fez uso das seções planas dessa quádrlica (nos planos xoy e xoz), determinando os valores dos coeficientes de y^2 e z^2 na sua equação.

Com essa atividade, propomos uma conversão do registro gráfico para o simbólico, segundo Duval, a atividade cognitiva onde se encontram as maiores dificuldades de execução. Essa constatação de Duval referia-se ao estudo da reta, ganhando maiores proporções no caso das superfícies quádrlicas. No entanto, foi possível ver que os participantes mobilizaram esquemas de utilização e, pensando-com as representações dinâmicas, efetuaram corretamente a conversão do registro gráfico para o simbólico.

Nessa atividade, os participantes precisaram mobilizar esquemas de utilização para realizar os tratamentos gráficos e algébricos necessários para a conversão. Utilizando a representação dinâmica da construção como objeto para pensar-com, os participantes realizaram os tratamentos gráficos que possibilitaram a identificação das variáveis visuais. Por sua vez, os tratamentos algébricos viabilizaram a correlação entre estas e as unidades significantes simbólicas, através da qual os participantes obtiveram a representação simbólica do parabolóide elíptico em α_+ .

Os esquemas de utilização necessários aos tratamentos algébricos foram os relativos aos conceitos de elipse e parábola, seções planas do parabolóide elíptico, que consistem em unidades significantes importantes para a conversão. E os esquemas de utilização necessários aos tratamentos gráficos, foram os relacionados ao acesso e à manipulação da representação dinâmica e à inserção de elementos para a identificação das unidades significantes.

A conversão da representação gráfica para a simbólica requer a identificação das representações em cada registro, tratamentos sobre as representações nos dois registros e a correlação entre as representações gráfica e simbólica. A realização dessas ações de forma mais espontânea fornece indícios da ocorrência da coordenação de registros.

Esse exercício de encontrar as variáveis pertinentes num registro para correlacionar com o outro, envolveu um processo de fazer para compreender, onde os participantes formulavam e testavam suas conjecturas. E, a partir de uma reflexão sobre esses resultados, realizavam ajustes e assim sucessivamente. De forma que, a cada nova tentativa, os esquemas constituídos pela experiência precedente qualificavam as novas conjecturas.

5.1.9.7 OBSERVAÇÕES FINAIS

Nessa SEAI, foram propostos dois tipos de atividades, envolvendo a conversão do registro gráfico para o simbólico das superfícies quádricas e a obtenção de construções de superfícies de revolução. Nas atividades que envolveram a conversão entre os registros de representação, os participantes efetuaram tratamentos gráficos para identificar as variáveis visuais e, operando os devidos tratamentos algébricos, as correlacionavam com as respectivas unidades significantes simbólicas.

Essas ações iam sendo realizadas de forma cada vez mais espontânea, o que indica a ocorrência de coordenação entre os registros de representação gráfico e simbólico. Nas construções geométricas, para obter as quádricas pela rotação de uma cônica, os participantes reconheciam as propriedades dos objetos matemáticos e as relações entre estes. Pensando-com as representações dinâmicas obtidas em cada fase da construção, os participantes inseriam esses objetos, considerando a ordem e a dependência necessárias para obter a quádrica pela rotação da cônica.

Os participantes movimentavam as suas construções, analisando a sua estabilidade, identificando erros e corrigindo a ordem e a dependência entre os elementos. Essas ações, envolvendo a dependência geométrica e a variação dinâmica, são evidências da ocorrência de apropriação tecnológica pelos participantes. E, a cada nova apropriação tecnológica, os novos esquemas de utilização constituídos pelos participantes os tornavam mais capacitados para utilizar os recursos do ambiente de matemática dinâmica.

Por meio das antecipações propostas nas questões, os participantes externavam em suas respostas as representações mentais constituídas das superfícies quádricas. Essas representações mentais, que carregam as imagens mentais e propriedades desses objetos matemáticos, foram constituídas por intermédio das suas representações dinâmicas. O acesso e a manipulação, juntamente com a possibilidade de inserir elementos para extrair informações dessas representações dinâmicas, possibilitaram o enriquecimento da respectiva representação mental.

Podemos dizer que essas representações mentais, obtidas pelas apreensões figurais, foram viabilizadas por apropriações tecnológicas ocorridas antes e durante essa SEAI. E, quanto mais os participantes se apropriavam das ferramentas e características do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, mais se tornavam capacitados para extrair propriedades desses objetos de pensar-com. De maneira que, entendemos que o processo de apropriação

tecnológica, qualificou as apreensões figurais que, por sua vez, enriqueceram as apreensões conceituais.

E isso ocorrendo num processo de fazer para compreender, onde os participantes formulavam hipóteses e, utilizando as representações dinâmicas como objetos de pensar-com, testavam suas conjecturas. A partir dos *feedbacks* do GeoGebra, refletiam sobre suas ações e faziam os devidos ajustes. E, quando repetiam essas ações, o faziam de forma cada vez mais qualificada, até a tomada de consciência.

A situação de ensino e aprendizagem instrumental a seguir propôs atividades que envolveram a construção de superfícies regradas, mobilizando esquemas de utilização para constituir novos esquemas.

5.1.10 SEAI 10 – Desafio dinâmico: Regrando a sela

As atividades nessa situação de ensino e aprendizagem instrumental (**APÊNDICE M** — SEAI 10) envolveram a obtenção de construções das superfícies quádricas como superfícies regradas. Um subconjunto S de pontos do espaço é uma superfície regrada se as seguintes condições são satisfeitas: (i) Existe uma curva D contida em S , tal que para cada ponto P de D existe uma reta L_P contida em S , passando por P ; (ii) A união de todas as retas L_P é a superfície S . A curva D é chamada diretriz da superfície S e cada reta L_P é denominada geratriz de S .

Envolvendo uma ampliação no repertório de ferramentas do GeoGebra, especialmente relacionadas às características de uma construção geométrica em ambientes de matemática dinâmica, promoveram a mobilização e/ou (re)constituição de esquemas de utilização. Além disso, as atividades também envolveram a mobilização de esquemas conceituais constituídos nas SEAI anteriores, contribuindo para o enriquecimento da representação mental das superfícies quádricas envolvidas.

Os desafios propostos aumentam progressivamente, de forma que uma atividade forneceu as condições para a resolução da outra. Na introdução, apresentamos uma definição de superfície regrada com a imagem de uma superfície cilíndrica gerada por uma reta (geratriz) que gira apoiada num ponto sobre uma circunferência (diretriz). Para elucidar a definição de superfície regrada, nas atividades 1 e 2 propomos a obtenção de uma superfície cilíndrica e de uma superfície cônica como superfície regrada, respectivamente.

Na atividade 1, não foi oferecida outra construção para que os participantes pudessem explorar para descobrir os elementos necessários e dependência entre estes. E também não foram dadas condições para obtenção de uma superfície cilíndrica específica, ao contrário da

atividade seguinte. Na atividade 2, os participantes poderiam observar a construção de uma superfície cônica como superfície regrada para obter outra, com geratriz formando ângulo de 45° com o plano xoy .

As questões propostas na atividade 3 preparam os participantes para obter o hiperboloide de uma folha em z na atividade 4, gerado por duas retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy . Nessa atividade, primeiro os participantes fizeram um ensaio no IR^2 , para depois obter esse ângulo num plano tangente a uma circunferência contida no plano xoy .

Na atividade 5, foi proposta a obtenção de um hiperboloide de uma folha em x como superfície regrada, sendo dada a sua representação gráfica. A diferença entre as construções propostas nas atividades 4 e 5 está na forma de obter as seções planas dos hiperbolidos de uma folha. Tendo sido dada a representação gráfica dessa quádrlica na atividade 5, os participantes precisaram obter suas seções planas por intersecção com planos específicos.

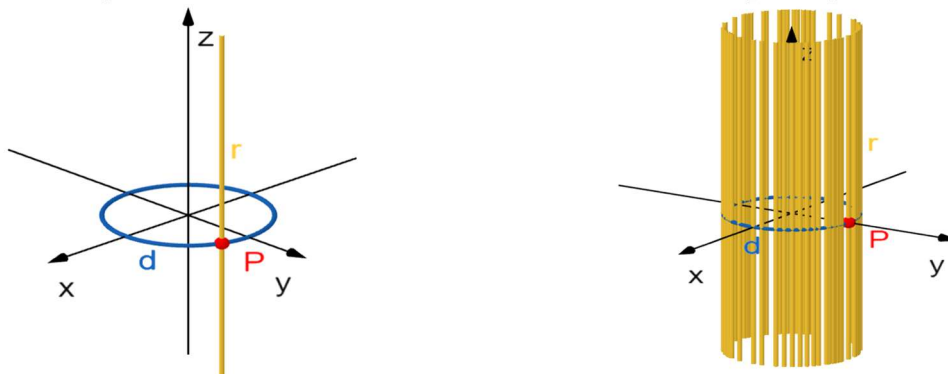
A proposta da atividade 6 foi a obtenção de um paraboloides hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz . Para isso, da mesma forma que na atividade anterior, foi oferecido um arquivo com a representação gráfica da quádrlica para obtenção das seções planas que geravam a superfície regrada. Por fim, na atividade 7, os participantes escolheram a equação de um paraboloides hiperbólico com assento em oy_+ no plano yoz , para obter a sua construção como superfície regrada.

Essas atividades envolveram a mobilização de esquemas de utilização para a obtenção de construções, exigindo uma ampliação no repertório de ferramentas utilizadas e a descoberta de novas relações entre os objetos matemáticos. Dito isso, vamos apresentar a seguir, cada atividade com uma possível solução, seguida das resoluções encontradas pelos participantes.

Na introdução dessa SEAI, foi apresentada a seguinte definição de superfície regrada: “Uma superfície regrada S é uma superfície gerada por uma reta r (geratriz) que se move ao longo de uma curva c (diretriz).⁴⁷ Assim, uma superfície é dita regrada se pode ser obtida pela união de retas, logo em cada ponto de uma superfície regrada passa uma reta nela contida”. Para elucidar essa definição, apresentamos na Figura 220, uma superfície cilíndrica circular regrada.

⁴⁷ Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v08a05-superficies-regradas.pdf> Acesso em: 11 jan. 2022.

Figura 220 – Geratriz e diretriz de uma superfície cilíndrica elíptica regrada.



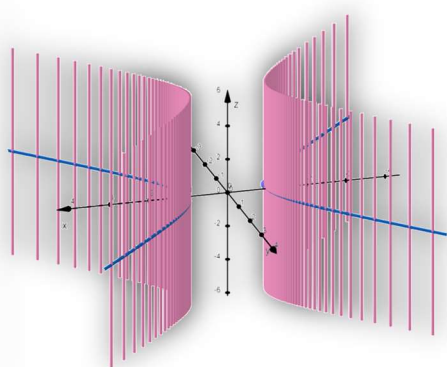
Fonte: Elaborado pela autora.

Essa SEAI foi reformulada após a primeira aplicação, por essa causa, em algumas atividades não há dados do participante P1.

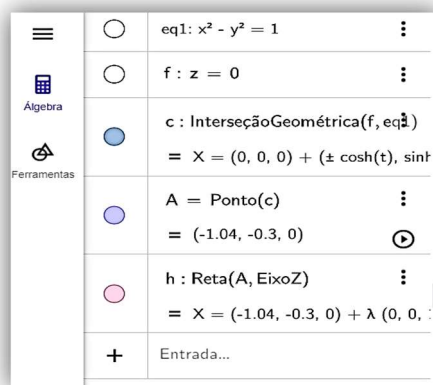
5.1.10.1 ATIVIDADE 1

Na atividade 1, propomos uma construção bem simples, para compreender a definição fazendo a construção de uma superfície cilíndrica hiperbólica como superfície regrada. Essa superfície deveria ter uma reta paralela ao eixo dos z como geratriz e, como diretriz, uma hipérbole no plano xoy, com centro na origem, eixo real sobre o eixo dos x e coeficientes das variáveis iguais a 1 (Figura 221a).

Figura 221 – Proposta para construção de uma superfície cilíndrica hiperbólica como superfície regrada.



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pela autora.

Para essa atividade, foi fornecido um arquivo do GeoGebra por meio do recurso ‘Tarefa’, vazio e com todas as ferramentas e recursos disponíveis. O protocolo de construção

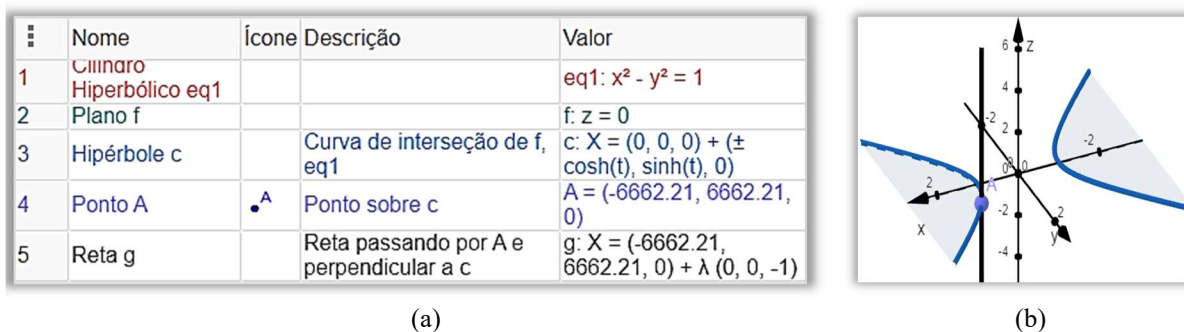
da Figura 221b apresenta uma forma de resolver o problema proposto. Com base no enunciado da questão, a hipérbole que tem eixo real sobre o eixo dos x , centro na origem e coeficientes das variáveis iguais a 1 tem representação simbólica da forma
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$
.

Inserindo a equação $x^2 - y^2 = 1$ de uma superfície cilíndrica hiperbólica e $z = 0$ do plano xoy na janela de álgebra, é possível obter a hipérbole c usando a ferramenta ‘Intersecção de duas superfícies’. Colocando um ponto móvel sobre a hipérbole c , podemos obter uma reta h que passa por esse ponto e é paralela ao eixo dos z . Para tal, podemos usar as ferramentas ‘Ponto sobre objeto’ e ‘Reta paralela’ do GeoGebra, respectivamente.

Habilitando o rastro da reta h e a animação do ponto A , é possível ver a reta h desenhando a superfície cilíndrica hiperbólica (Figura 221a). Assim, para obter essa construção, foi necessário mobilizar esquemas de utilização relativos aos objetos matemáticos envolvidos e às ferramentas necessárias para inseri-los. Essa atividade não foi proposta na primeira aplicação, por essa causa, apresentamos a seguir os dados da implementação com P2 e P3.

O participante P2 iniciou inserindo a equação $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ de um hiperboloide de uma folha em z , ação que não consta no protocolo de construção (Figura 222a). Apagando o termo que contém a variável z e trocando o sinal do coeficiente de y^2 , P2 ficou com equação $x^2 - y^2 = 1$ de uma superfície cilíndrica hiperbólica.

Figura 222 – Construção de uma superfície cilíndrica hiperbólica como superfície regradada por P2.



(a)

(b)

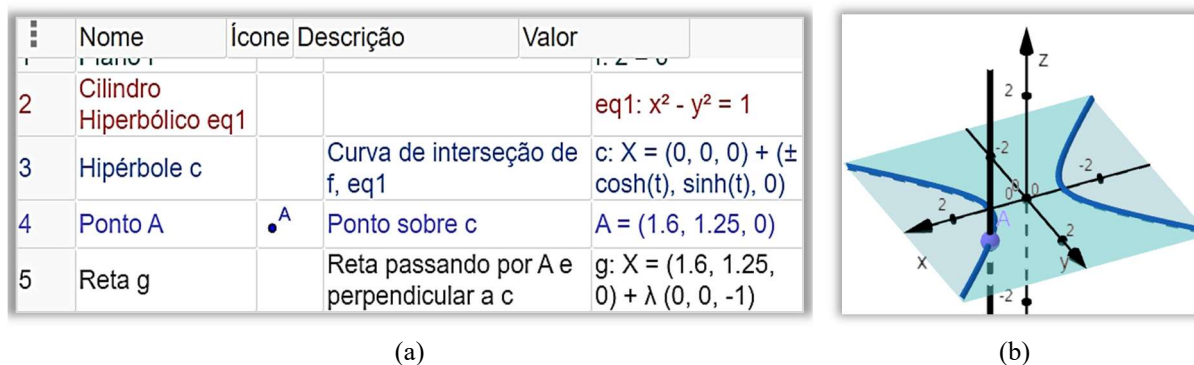
Fonte: Dados da pesquisa.

Inserindo o plano $z = 0$, P2 obteve a hipérbole c de intersecção dessas superfícies (Figura 222b). Depois, P2 colocou um ponto A sobre a hipérbole c , usando a ferramenta ‘Reta perpendicular’, obteve a reta g que passa por A e é perpendicular ao plano que contém a hipérbole. Então, P2 habilitou a animação do ponto A e o rastro da reta g , observando a reta desenhando a superfície cilíndrica hiperbólica.

O participante P3 apresentou dúvidas em relação ao conceito de superfície cilíndrica hiperbólica, entendendo depois que se trata de uma superfície cilíndrica como a da imagem

dada na introdução da SEAI (Figura 220), mas cuja diretriz é uma hipérbole. Então, P3 fez novamente a leitura do enunciado e seguiu exatamente os cinco passos do seu protocolo de construção (Figura 223a).

Figura 223 – Construção de uma superfície cilíndrica hiperbólica como superfície regradada por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Inserindo as equações do plano $z = 0$ e da superfície cilíndrica hiperbólica $x^2 - y^2 = 1$, P3 obteve a hipérbole c de intersecção dessas superfícies (Figura 223b). Em seguida, o participante inseriu um ponto A sobre c e obteve uma reta g que passa por A e é perpendicular ao plano que contém essa cônica. Habilitando o rastro da reta g e a animação do ponto A, P3 obteve a superfície cilíndrica hiperbólica como superfície regradada.

Em ambos os casos, observamos um obstáculo inicial que foi rapidamente superado. Com o participante P2, foi na mobilização de esquemas conceituais, quando precisou obter a equação da superfície cilíndrica hiperbólica que daria origem à hipérbole como diretriz. Nesse caso, P2 pareceu realizar a conversão do registro em língua natural para o gráfico sem problemas, quando reconheceu a superfície a partir da sua denominação.

O pequeno problema que encontrou, superando rapidamente, estava relacionado à conversão do registro gráfico para o simbólico. Quando, acessando a representação mental da quádrlica construída a partir do enunciado, P2 precisou encontrar a sua equação por intersecção de duas superfícies. Já com o participante P3, o obstáculo inicial estava relacionado com a primeira conversão, do registro em língua natural para o gráfico.

Quando, a partir da denominação ‘superfície cilíndrica hiperbólica’, P3 precisava construir a sua representação mental. Superando rapidamente esse obstáculo, P3 realizou de forma espontânea a conversão do registro gráfico para o simbólico, encontrando a equação dessa superfície que daria origem à hipérbole como diretriz. Nos dois casos, os participantes mobilizaram quase que instantaneamente esquemas de utilização, realizando de forma precisa os passos para obter a construção dessa superfície regradada.

5.1.10.2 ATIVIDADE 2

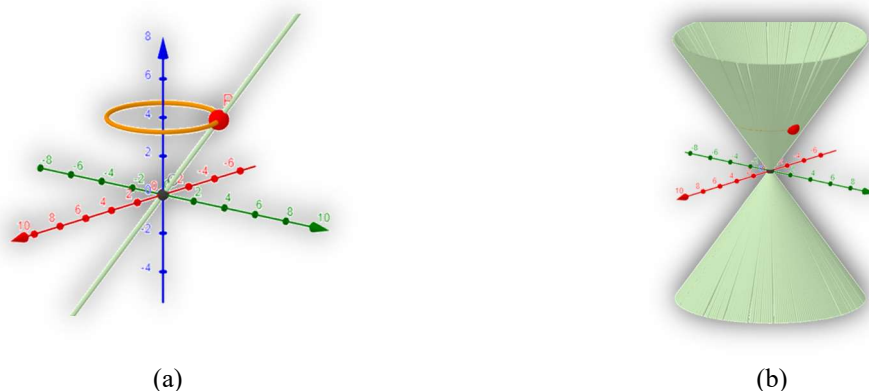
Na atividade 2, foi proposta a aplicação do conceito de superfície regrada à superfície cônica. Na primeira aplicação, com o participante P1, essa atividade constou de duas questões. A primeira questão dizia: “Qual superfície tem uma circunferência como diretriz e geratriz que gira apoiada em um ponto fixo sobre o eixo que contém o centro da diretriz e é perpendicular ao plano que a contém?” O participante P1 respondeu: “Penso que é o cilindro”.

E, na segunda questão, o participante P1 foi convidado a observar a construção dessa superfície regrada para verificar a sua resposta na questão anterior. Respondendo que não era a superfície que esperava, P1 justificou: “Não, porque eu imaginei uma superfície diferente. Somente depois de visualizar a superfície no GeoGebra que consegui entender a qual superfície se refere”. Após a primeira aplicação, essa atividade foi reformulada, passando a ter quatro questões.

Nos itens a e c, foram propostas antecipações, onde os participantes P2 e P3 precisaram descobrir qual superfície regrada seria gerada dadas algumas condições, e que elementos e relações entre estes seriam necessários para obtê-la. O enunciado da questão do item a dizia: “Seja P um ponto contido num plano π e r uma reta que passa por P e não está contida em π . Qual é a superfície gerada por essa reta, quando ela se move apoiada num ponto sobre uma circunferência contida em plano paralelo ao plano π ?”

E, na questão do item b, foi fornecido um arquivo do GeoGebra com as condições descritas no enunciado, em que era possível movimentar o ponto P , gerando a superfície cônica (Figura 224a).

Figura 224 - Superfície cônica regrada.



Fonte: Elaborado pela autora.

Movimentando o ponto P, os participantes observaram a superfície cônica sendo gerada por uma reta que se move apoiada nesse ponto sobre a circunferência (Figura 224b). Nessa questão, os participantes puderam verificar se as imagens mentais constituídas em resposta à questão anterior estavam corretas.

P2 disse inicialmente que se tratava de um hiperboloide de uma folha, mas chamando os vértices do hiperboloide de duas folhas de focos, questionou: “*Não poderia ser um hiperboloide de duas folhas coincidindo os focos?*” O participante relatou que esperava que fosse uma quádrlica pelo fato de ser esse o tema do nosso estudo. O participante P3 registrou a seguinte resposta: “*Dois cones refletidos e conectados*”. Nesse registro escrito de P3, entendemos que o participante conseguiu construir a imagem mental da superfície cônica a partir do enunciado.

Essas antecipações tiveram o objetivo de instigar os participantes, provocando a curiosidade dos mesmos para a realização da atividade, mas também possibilitaram o conhecimento das imagens mentais que eles haviam constituído a partir do enunciado. A seguir, na questão do item c, os participantes foram convidados a antecipar os elementos necessários para obter essa superfície regrada. Nesse caso, os participantes precisaram mobilizar esquemas de utilização para inserir os objetos matemáticos, considerando a ordem de inserção e a dependência entre eles.

Analisando a construção da superfície cônica regrada, os participantes poderiam verificar que é necessário inserir uma circunferência, um ponto móvel sobre esta e uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano e pelo ponto móvel. Os participantes observaram a construção da superfície cônica regrada, respondendo:

P2: Uma circunferência, um ponto contido na circunferência e outro na origem, que servirão de apoio para uma reta.

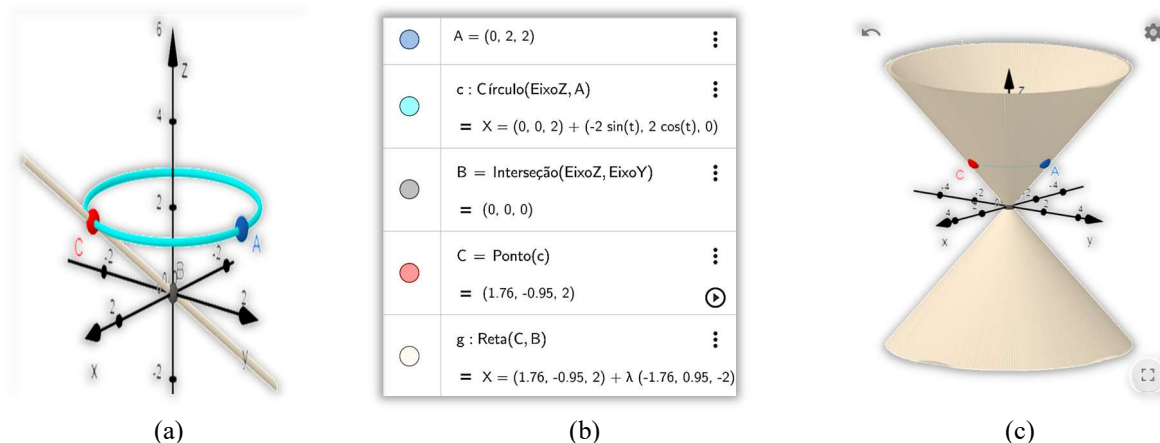
P3: Ponto num plano, plano paralelo com uma circunferência e a reta.

Como vemos, os participantes mobilizaram esquemas de utilização, antecipando de forma distinta os passos para a construção da superfície regrada. O registro escrito de P2 deixou bem claro os passos necessários para obter essa construção, não ocorrendo o mesmo com P3. Essa antecipação teve a intenção de levar os participantes à obtenção da sua própria construção na questão do item d, permitindo também observar os esquemas previamente constituídos por eles.

Então, na questão do item d, foi proposta a obtenção de uma superfície cônica regrada, considerando que a sua geratriz forma um ângulo de 45° com o eixo dos z. Assim, o desafio

dessa construção consistiu em obter uma reta que forma um ângulo de 45° com o eixo dos z (Figura 225a). Para essa questão, foi fornecido um arquivo do GeoGebra 3D por meio do recurso ‘Tarefa’, vazio e com todas as ferramentas e recursos disponíveis.

Figura 225 – Proposta para construção de uma superfície cônica regrada.



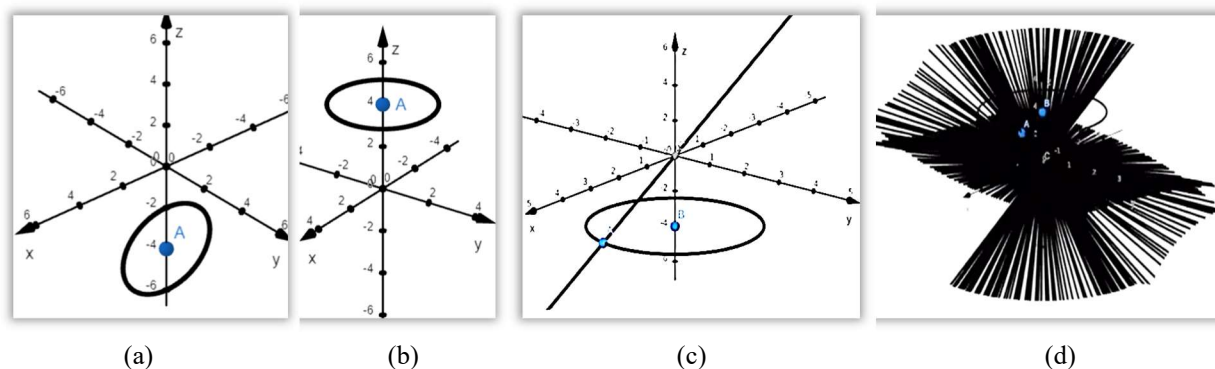
Fonte: Elaborado pela autora.

O protocolo de construção da Figura 225b apresenta uma possível solução para esse problema, que pode ser resolvido pela escolha adequada de um dos pontos da reta, uma vez que o outro tem que ser a origem do sistema cartesiano. Por exemplo, a reta que passa pelo ponto $A(0,2,2)$ e pela origem do sistema cartesiano forma ângulo de 45° com o plano xoy .

Então, para obter essa construção, podemos iniciar inserindo o ponto $A(0,2,2)$. Seleccionando a ferramenta ‘Círculo dados eixo e um ponto’, o ponto A e o eixo dos z , obtemos a circunferência c em plano paralelo ao plano xoy . Depois, inserindo um ponto móvel C sobre essa circunferência c , podemos obter a reta g que passa por C e pela origem do sistema cartesiano. Por fim, seleccionando os recursos de exibir o rastro da reta e a animação do ponto C, obtemos a superfície cônica regrada (Figura 225c).

O participante P2 iniciou explorando as ferramentas para obtenção de círculo, escolhendo ‘Círculo dados centro, raio e direção’. P2 fez algumas tentativas para utilizar essa ferramenta antes de ter inserido o ponto (centro) e, pensando alto, disse: “*Porque eu não consegui usar essa ferramenta?*” Então, P2 inseriu o ponto $A(0,0,-4)$, entendendo que o ponto precisava estar no sistema cartesiano antes de utilizar a ferramenta (Figura 226a). Seleccionando a ‘Círculo dados centro, raio e direção’, o ponto A e o eixo dos y , digitando 2 na janela *pop-up* aberta para a inserção do raio.

Figura 226 – Processo para a construção de uma superfície cônica regrada por P2 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

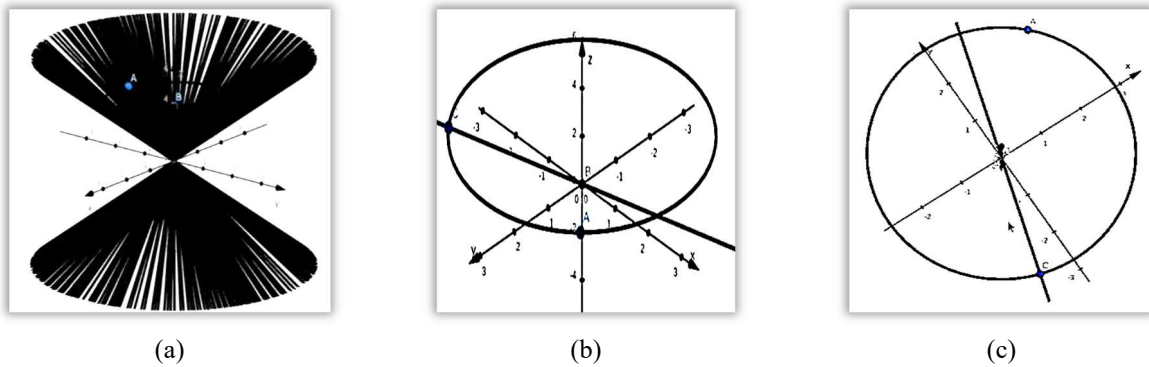
Então, P2 obteve uma circunferência c de centro em A e no plano xoz , dizendo: “*Não era para estar assim*”. O participante desejava que a circunferência c , com centro em A , estivesse em plano paralelo ao plano xoy . Apagando todos os elementos inseridos, P2 disse: “*Eu vou colocar o ponto aqui em cima agora, vamos ver se vai ser diferente*” (Figura 226b). Inserindo o ponto $A(0,0,4)$, P2 selecionou novamente a ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’, o ponto A e o eixo dos z .

E, digitando 2 para o raio, obteve uma nova circunferência c , dizendo: “*Agora foi*”. Porém, persistindo no objetivo de obter essa circunferência com centro em $B(0,0,-4)$, P2 inseriu novamente esse ponto. Dessa vez, selecionando o eixo dos z como direção, P2 obteve a circunferência d (Figura 226c). Dizendo que “*Agora deu*”, P2 apagou a circunferência anterior, colocando um ponto móvel A sobre a circunferência d .

Inserindo um ponto $C(0,0,0)$ na origem do sistema cartesiano, P2 obteve a reta que passava por A e C . Então, o participante selecionou o recurso para exibir o rastro da reta f e, experimentando a animação dos pontos A e B , disse: “*O ponto B também se mexendo o gráfico fica doido*” (Figura 226d). E, animando apenas o ponto A , P2 obteve uma superfície cônica regrada, mas ainda não era a solicitada na questão, cuja geratriz deveria formar ângulo de 45° com o plano xoy (Figura 227a).

Então, P2 disse que: “*Para ela ser a 45° , a altura do ponto B tem que ser a mesma do raio da circunferência*”. P2 experimentou movimentar os pontos A e B , de forma que o valor da cota do ponto B coincidissem com o raio da circunferência, medida do segmento \overline{AB} (Figura 226c). Não logrando êxito, P2 abandonou essa estratégia e excluiu todos os elementos, limpando a janela de álgebra. Nessa ocasião, P2 descobriu que poderia inserir o ponto $A(2,2,2)$ na janela de álgebra, constituindo um novo esquema de utilização (Figura 227b).

Figura 227 – Processo para a construção de uma superfície cônica regrada por P2 (parte 2).



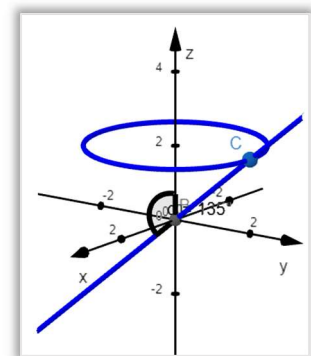
Fonte: Dados da pesquisa.

Depois, P2 inseriu uma circunferência c que passa por A e tem centro no eixo dos z . E, colocando um ponto B na origem do sistema cartesiano e um ponto C sobre a circunferência c , obteve a reta f que passa por B e C . E, habilitando o rastro da reta f e a animação do ponto A , P2 observou a cota do ponto B , dizendo: “*Tá aqui ó altura 2*”. Movimentando a representação dinâmica, P2 observou que o raio da circunferência é maior que 2 (cota de B) e disse: “*Não, a circunferência está errada. Ahhh é porque eu não botei pelo raio*”. (Figura 227c).

P2 considerou que precisaria usar a ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’ para que pudesse escolher o raio da circunferência, excluindo todos os elementos novamente. Considerando que a abscissa ou a ordenada do ponto A precisariam ser nulas, para que o raio da circunferência fosse igual a cota do seu centro, P2 seguiu os seis passos do protocolo de construção (Figura 228a).

Figura 228 – Construção de uma superfície cônica regrada por P2.

Nome	Ícone	Descrição	Valor
1 Ponto A			$A = (2, 0, 2)$
2 Círculo c		Círculo de eixo EixoZ passando por A	$c: X = (0, 0, 2) + (2 \cos(t), 2 \sin(t), 0)$
3 Ponto B		Ponto de interseção de EixoZ, EixoY	$B = (0, 0, 0)$
4 Ponto C		Ponto sobre c	$C = (-1.93, -0.53, 2)$
5 Reta f		Reta C, B	$f: X = (-1.93, -0.53, 2) + \lambda (1.93, 0.53, -2)$
6 Ângulo α		Ângulo entre f , EixoZ	$\alpha = 135^\circ$



(a)

(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

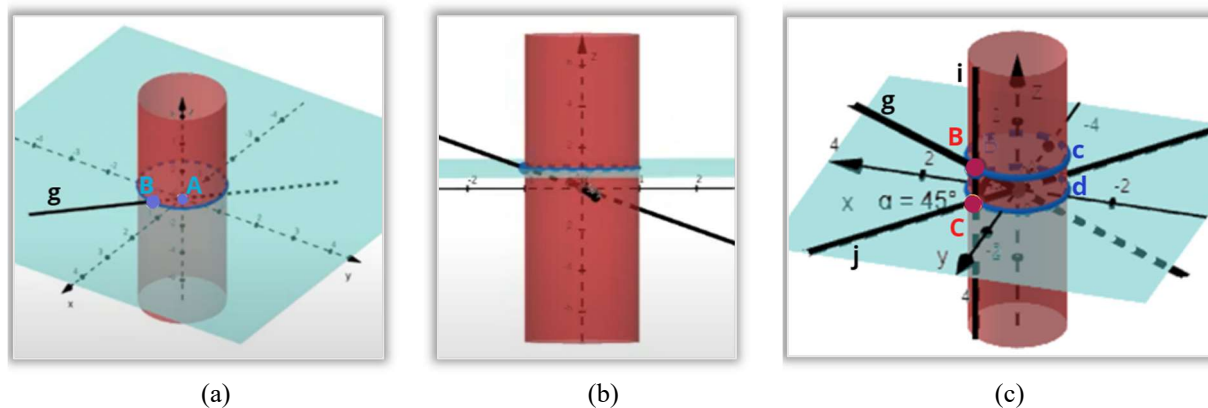
P2 inseriu o ponto $A(2,0,2)$ e obteve a circunferência c que passa por A e tem centro sobre o eixo dos z e, movimentando a construção, disse: “*Agora sim. Agora ela está com raio 2*”. Inserindo o ponto B na origem do sistema cartesiano e o ponto C sobre a circunferência c ,

P2 obteve a reta f que passa por B e C. Então, P2 constituiu novo esquema de utilização quando experimentou a ferramenta ‘Ângulo’, selecionando a reta f e o eixo dos z , obtendo o ângulo de 135° (Figura 228b).

Com isso, P2 constituiu novos esquemas de utilização, relacionados ao recurso de obtenção de ponto por inserção das coordenadas na janela de álgebra e à ferramenta ‘Ângulo’. O novo desafio consistiu em encontrar o ângulo de 45° , quando P2 mobilizou esquemas conceituais que se aplicavam ao IR^2 , constituindo novos esquemas para aplicar no IR^3 . Foi possível observar que o participante mobilizou espontaneamente esquemas de utilização para obter a superfície cônica, observando a dependência entre os elementos da construção.

O participante P3 iniciou inserindo um ponto $A(0,0,0)$ na origem do sistema cartesiano e um plano f de equação $z = 1$ (Figura 229a). Depois, inseriu a equação $x^2 + y^2 = 1$ da superfície cilíndrica circular, para obter a circunferência c de intersecção desta superfície com o plano f . Mobilizando esquemas de utilização relacionados ao conceito de ângulo, P3 inseriu o plano f e a circunferência c , considerando que o raio de c fosse igual à distância da origem ao plano de c .

Figura 229 – Processo para a construção de uma superfície cônica regradada por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, P3 inseriu o ponto B sobre a circunferência c e obteve a reta g que passa por A e B. Então, P3 habilitou a movimentação do ponto B e o rastro da reta g , observando a reta gerando a superfície cônica. Com isso, foi possível observar que P3 mobilizou espontaneamente esquemas de utilização, inserindo os elementos e vinculando-os adequadamente. Depois, de obter a construção da superfície cônica como superfície regradada, P3 analisou se o ângulo entre a reta g e o plano xoy era de 45° .

Movimentando a representação dinâmica, P3 observou o ângulo que a reta g formava com o eixo dos x , dizendo a respeito do ângulo: “*Ele ficou diferente por causa da proporção*”

aqui” (Figura 229b). Essa proporção estava relacionada às escalas dos eixos. Então, usando a ferramenta ‘Ângulo’, P3 selecionou a reta g e o eixo dos x, obtendo um ângulo de aproximadamente 135°. Observamos que P3 queria obter o ângulo da reta g com o plano xoy , mas selecionou esta reta e o eixo dos x, ao invés do eixo dos z. Então, perguntamos se o ângulo obtido seria sempre de 45°. E, movimentando o ponto B, P3 observou que esse ângulo variava.

Então, P3 inseriu o plano xoy e obteve uma circunferência d de intersecção desse plano com a superfície cilíndrica (Figura 229c). Em seguida, P3 inseriu uma reta i, perpendicular ao plano xoy e que passava por B. E obtendo um ponto C, de intersecção entre reta i e a circunferência d, P3 inseriu uma reta j que passa por C e pela origem do sistema cartesiano, obtendo o ângulo de 45° entre as retas g e j.

Os caminhos percorridos por P3 acima descritos, oriundos dos dados observados na observação *in loco* e gravação, coincidem com os encontrados no seu protocolo de construção

Figura 230. O participante P3 mobilizou esquemas conceituais, realizando a conversão do registro simbólico para o gráfico, quando precisou inserir as equações de planos e da superfície cilíndrica.

Figura 230 – Protocolo da construção de uma superfície cônica regrada por P3.

	Ícone	Descrição	Valor
1		Interseção de EIXOX, EIXOY	A = (u, u, u)
2			f: z = 1
3			eq1: x ² + y ² = 1
4		Curva de interseção de f, eq1	c: X = (0, 0, 1) + (cos(t), sin(t), 0)
5		Ponto sobre c	B = (-0.12, 0.99, 1)
6		Reta A, B	g: X = (0, 0, 0) + λ (-0.12, 0.99, 1)
7			h: z = 0
8		Curva de interseção de h, eq1	d: X = (0, 0, 0) + (cos(t), sin(t), 0)
9		Reta passando por B e perpendicular a h	i: X = (-0.12, 0.99, 1) + λ (0, 0, -1)
10		Ponto de interseção de d, i	C = (-0.12, 0.99, 0)
11		Reta A, C	j: X = (0, 0, 0) + λ (-0.12, 0.99, 0)
12		Ângulo entre g, j	α = 45°

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que o participante P3 mobilizou espontaneamente os esquemas de utilização, inserindo os elementos necessários e respeitando a relação de dependência entre estes. P3 também mobilizou esquemas relacionados a ângulo no IR^2 , para aplicar no IR^3 , o que o levou a constituir novos esquemas de utilização.

Nessa atividade, o diferencial estava na obtenção de uma reta que formasse ângulo de 45° com o plano xoy , para gerar a superfície cônica como superfície regrada. Observamos que o momentâneo obstáculo encontrado pelos participantes estava relacionado à mobilização de esquemas relativos à ângulo. Entendemos que isso pode estar relacionado às suas experiências

anteriores com esse conceito, em geral no espaço bidimensional, o que exigiu uma adaptação para o espaço tridimensional.

No desafio proposto nessa atividade, que se referia à obtenção de uma superfície regrada, foi resolvido com o mesmo procedimento para obter uma superfície de revolução. As superfícies de revolução foram tema da SEAI anterior, onde foram propostos diferentes e progressivos desafios de construções desse tipo. Assim, podemos constatar que os esquemas de utilização constituídos naquela oportunidade foram espontaneamente mobilizados nessa.

Os esquemas de utilização que foram necessários para a realização dessa atividade, e mobilizados pelos participantes, estavam relacionados a ponto, reta, plano, superfície cilíndrica. Também foi necessário mobilizar esquemas de utilização para vincular os elementos para a obtenção da construção, envolvendo as características de construções geométricas em ambientes de matemática dinâmica, a dependência geométrica e a variação dinâmica.

Essa atividade teve o objetivo de preparar os participantes para a atividade 4, onde foi necessário obter uma reta que forma ângulo de 30° com o plano xoy . Antes disso, a atividade 3 propôs a análise de mais algumas condições necessárias para resolver o desafio da atividade 4.

5.1.10.3 ATIVIDADE 3

A proposta da atividade 3 foi de levar os participantes a explorarem a construção de um hiperboloide de uma folha em z como superfície regrada. Na primeira aplicação, com o participante P1, esta atividade teve uma proposta diferente das demais. Uma das questões perguntava se era possível obter um hiperboloide de uma folha pelo giro de uma reta apoiada numa circunferência. E a outra solicitava que essa superfície regrada fosse obtida.

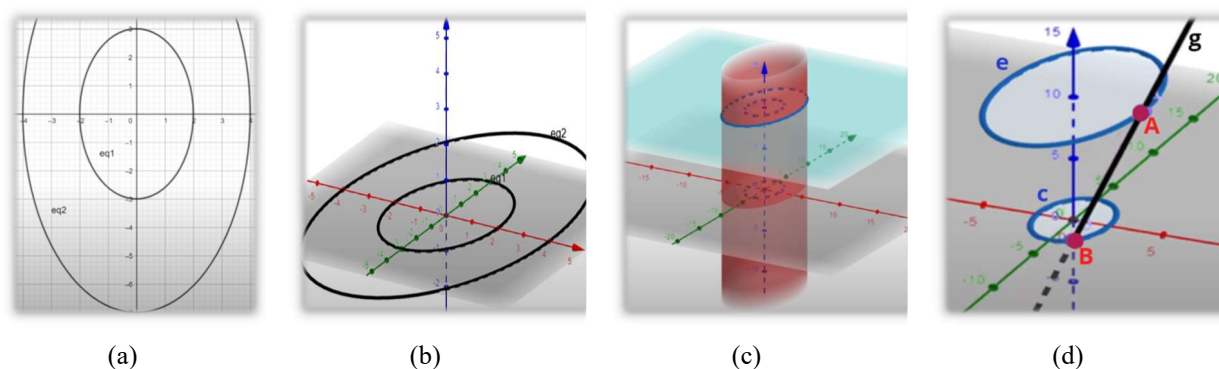
O participante P1, apontando para o vértice da superfície cônica da atividade anterior, disse que *“Para ser um hiperboloide de uma folha, necessariamente eu tenho que ter uma elipse aqui. Se eu tiver um ponto aqui, não vai ser, porque uma das características dele é que todos os planos que eu passo, perpendicular, eu sempre tenho uma elipse. Se eu tivesse somente um ponto já não é mais”*. Nesse registro, o participante reconheceu unidades significantes do hiperboloide de uma folha, correlacionado de forma espontânea a representação em língua natural com a gráfica (imagem mental).

A seguir, antecipando a construção dessa superfície, P1 respondeu sobre a possibilidade de obter um hiperboloide de uma folha como superfície regrada: *“Sim, se tivermos duas elipses em planos paralelos e com eixos de tamanhos diferentes, e fizermos com que a geratriz gire*

sobre um ponto na elipse maior e outro ponto na elipse menor”. Essas constatações foram obtidas quando P1 manipulava o modelo impresso em 3D dessa quádrlica, cujas seções planas elípticas foram citadas.

Então, para obter a construção, P1 inseriu as equações $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ e $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$ na janela de visualização 2D, obtendo duas elipses (Figura 231a).

Figura 231 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada por P1 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Vemos que P1 mobilizou adequadamente esquemas conceituais para a escolha dos termos quadráticos e sinais nas equações. Também escolheu os coeficientes nas equações das elipses na forma em que havia planejado, ou seja, uma elipse com eixos maiores do que a outra. Percebendo que havia obtido as duas elipses na janela de visualização 2D, P2 selecionou o recurso para exibir a janela 3D e, observando a representação dinâmica da Figura 231b disse:

P1: Eu fiz as duas elipses, mas eu tinha que dizer que elas estavam em planos separados né. Em planos paralelos. Então, eu teria que ter criado um plano primeiro né.

Pesquisadora: Como você inseriu as elipses?

P1: Eu desenhei no 2D, então ela ficou na no plano xoy. As duas ficaram no xoy. Se eu dissesse para passar uma linha entre as duas, ela vai formar uma superfície plana e não algo em 3D como eu quero. Então, eu tenho que ter elas em planos diferentes. Então eu vou excluir uma né. Ou dizer que esse aqui está em outro plano.

Pesquisadora: E se você tivesse inserido essas equações na janela 3D?

P1: É a mesma coisa porque não diz qual o plano. (E, refletindo sobre sua resposta continua.) Na verdade, o z estaria móvel né. É cone também, quando não é uma circunferência, como é que é o nome, cilindro? Eu posso chamar cilindro mesmo que não seja circular?

Pesquisadora: Sim. E como é que podemos obter as elipses?

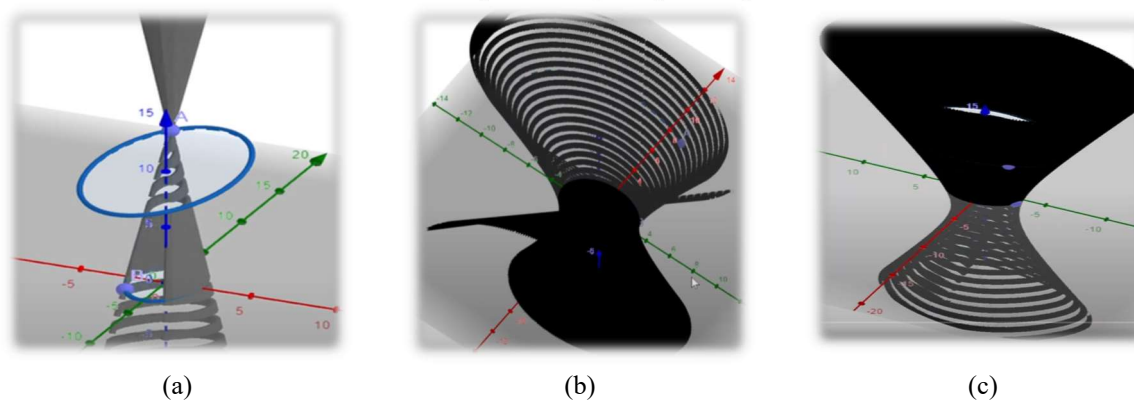
Então, P1 respondia ao mesmo tempo em que inseria os elementos na construção (Figura

231c). Primeiro, P1 obteve a superfície cilíndrica elíptica de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ e a elipse c , como intersecção entre essa superfície e o plano xoy . A seguir, P1 inseriu a superfície cilíndrica elíptica de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$ e o plano de equação $z = 10$, obtendo a elipse resultante da intersecção entre essas superfícies.

Nessa oportunidade, P1 mobilizou esquemas conceituais relacionados a equações de planos, além dos já mencionados anteriormente. E, usando a ferramenta ‘Ponto sobre objeto’, P1 inseriu um ponto A sobre a circunferência e , e um ponto B sobre a circunferência c . Depois, observando se os pontos A e B haviam ficado móveis, P1 obteve a reta g que passa por A e B. E, habilitando o rastro da reta g e a animação do ponto B, P1 observou uma superfície cônica sendo gerada (Figura 232a).

Depois, habilitando a animação do ponto A apenas, obteve resultado similar. Então, P1 habilitou a animação dos dois pontos, obtendo a superfície regrada com um pequeno erro no desenho, resultante da diferença de tempo entre o movimento de cada um dos pontos (Figura 232b). Por fim, P1 experimentou habilitar a animação dos pontos (quase) ao mesmo tempo, observando o hiperboloide de uma folha em z sendo gerado como superfície regrada (Figura 232c).

Figura 232 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada por P1 (parte 2).





Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados acima descritos são oriundos da observação *in loco* e da gravação, e foram cruzados com os obtidos do protocolo de construção de P1 (Figura 233). Como vimos, o participante mobilizou adequadamente esquemas de utilização relacionados a ponto, reta, planos, elipses, superfícies cilíndricas, rastro, animação de ponto.

Além desses, P1 mobilizou esquemas de utilização relacionados à dependência geométrica e variação dinâmica, quando precisou vincular objetos matemáticos e experimentar a construção. Apesar do atraso na animação dos pontos sobre as circunferências, a construção

de P1 possibilitou a obtenção do hiperboloide de uma folha em z como superfície regrada.

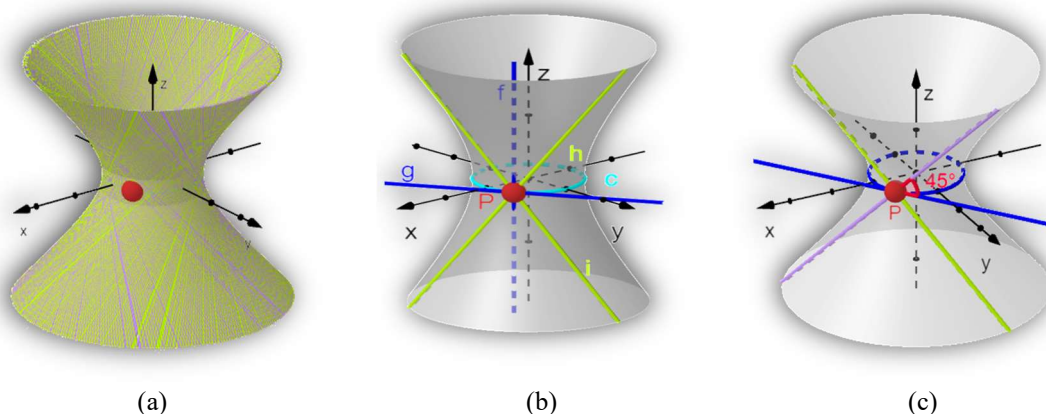
Figura 233 – Protocolo de construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada por P1.

Ícone	Descrição	Valor
1		eq1: $x^2 / 4 + y^2 / 9 = 1$
2	Curva de interseção de PlanoXOY, eq1	c: $X = (0, 0, 0) + (-2 \sin(t), 3 \cos(t), 0)$
3		eq2: $x^2 / 16 + y^2 / 49 = 1$
4		f: $z = 10$
5	Curva de interseção de f, eq2	e: $X = (0, 0, 10) + (-4 \sin(t), 7 \cos(t), 0)$
6	 Ponto sobre e	A = (-2.61, -5.3, 10)
7	 Ponto sobre c	B = (-1.75, -1.46, 0)
8	Reta B, A	g: $X = (-1.75, -1.46, 0) + \lambda (-0.86, -3.84, 10)$

Fonte: Dados da pesquisa.

Essa atividade foi reformulada após a primeira aplicação, tendo o propósito de preparar os participantes para obter um hiperboloide de uma folha só na atividade seguinte. Assim, nessa nova formulação, as questões foram propostas de modo que os participantes percebessem que um hiperboloide de uma folha pode ser gerado por duas retas concorrentes num ponto que se move sobre a circunferência (Figura 234a).

Figura 234 – Hiperboloide de uma folha obtido como superfície regrada.



Fonte: Elaborado pela autora.

No item a dessa atividade foi proposta a seguinte antecipação: “*Considere duas retas concorrentes num ponto P , que pertence a uma circunferência contida em plano perpendicular ao das retas. Qual é a superfície que essas retas desenharam quando o ponto P move-se sobre a circunferência?*” Essa antecipação nos permite conhecer a representação mental que os participantes conseguem produzir a partir do enunciado, e os esquemas prévios possuídos por eles. Entendemos que essa proposta também é capaz de instigá-los, provocando o interesse na realização da atividade.

No item b, foi fornecido um arquivo do GeoGebra com a construção de um hiperboloide de uma folha em z , que é gerado por duas retas concorrentes (Figura 234b). O ponto P era o único elemento visível na janela de álgebra, todos os demais foram classificados como objeto auxiliar e escondidos. E na janela de visualização ficaram visíveis a superfície quádrlica que é ‘desenhada’ pelas retas concorrentes, essas retas e o ponto P .

Essa superfície regrada foi obtida inserindo um ponto $A(0,1,0)$ e obtendo uma circunferência c que passa por A e tem centro sobre o eixo dos z (Figura 234b). Depois, inserimos um ponto P sobre c e obtemos uma reta f que passa por P e é paralela ao eixo dos z . Em seguida, inserimos uma reta g tangente a c e que passa por P . As retas f e g são perpendiculares entre si, então usando a ferramenta ‘Bissetriz’ e selecionando as retas f e g , obtemos as retas h e i que formam ângulos de 45° com o plano xoy .

E, habilitando o rastro dessas retas e a animação do ponto P , podemos observar as retas concorrentes h e i ‘pintando’ o hiperboloide de uma folha em z (Figura 234a). A proposta dessa questão foi que o participante, movendo o ponto P , visualizasse a superfície gerada e verificasse a sua resposta na antecipação proposta no item a. Nas questões seguintes, propomos a exploração da construção, visando preparar o participante para a construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada na atividade 4.

Na questão do item c, perguntamos qual era a equação da circunferência, o que poderia ser respondido pela análise da representação dinâmica, na qual o raio da circunferência era igual a 1 e o seu centro era a origem do sistema cartesiano. Na questão do item d, perguntamos qual seria o ângulo que essas retas formariam com o plano xoy . Para retirar essa informação da representação dinâmica, podemos usar a ferramenta ‘Ângulo’.

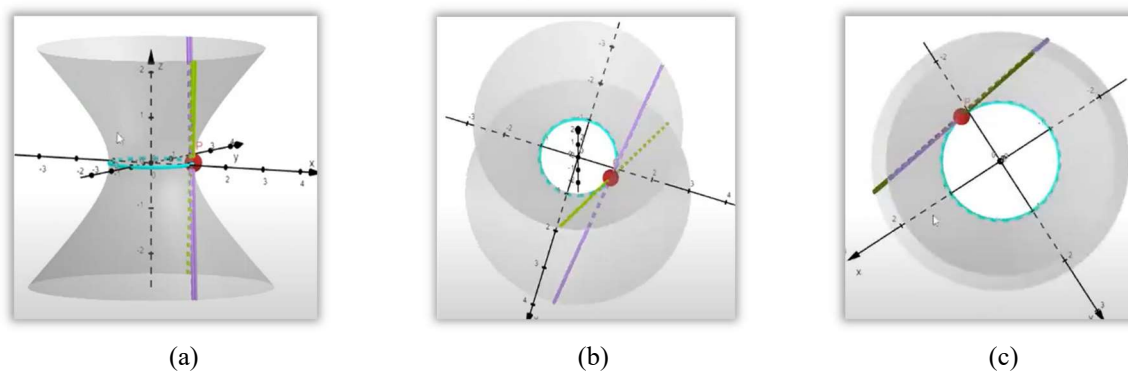
Clicando numa das retas concorrentes (h ou i) e na reta g tangente à circunferência, obtemos o ângulo de 45° (Figura 234c). A seguir, apresentamos as respostas dos participantes P2 e P3, juntamente com as análises das suas condutas cognitivas. Iniciando a atividade, o participante P2 leu o enunciado da questão do item a e, mobilizando esquemas conceituais, registrou que a superfície gerada “*É um cilindro*”. Com essa antecipação, o participante externou a imagem mental produzida pela leitura do enunciado, que não era a da quádrlica em questão.

Na questão do item b, utilizando a representação dinâmica como objeto para pensar-com, P2 posicionou-a como na Figura 235a. E, habilitando a animação do ponto P , o participante observou as retas desenhando a quádrlica.

Mudando a posição da superfície (Figura 235b) e, habilitando a animação do ponto P , P2 observou novamente as retas desenhando a quádrlica. Então, respondendo se conseguia

imaginar essas retas gerando essa superfície, P2 disse: “*Eu não imaginava e tô com dificuldade de entender porque*”. Então, alterando mais uma vez a posição da representação dinâmica (Figura 235c), P2 disse que agora conseguia compreender a construção.

Figura 235 – Exploração da construção de um hiperboloide de uma folha obtido como superfície regradada por P2 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

Com base na imagem mental constituída antes do acesso à representação dinâmica, quando o participante achou que se tratava de uma superfície cilíndrica, podemos ver as contribuições desses objetos de pensar-com. Nesse caso, o dinamismo relativo à mudança na posição da quádrica e a possibilidade de animação das retas concorrentes, foram fundamentais para a identificação da superfície regradada e compreensão da sua construção.

Na questão do item c, o participante P2 analisou a seção plana circular (Figura 235c) e, mobilizando esquemas conceituais, identificou as variáveis quadráticas e sinais na equação da superfície cilíndrica circular $x^2 + y^2 = 1$. Para realizar essa conversão do registro gráfico para o simbólico, o participante identificou e correlacionou as unidades significantes nos dois registros. Faltou apenas incluir a equação $z = 0$, do plano xoy , na escrita da representação simbólica da circunferência.

Na questão do item d, o participante P2 mobilizou esquemas de utilização para obter o ângulo que as retas concorrentes formam com o plano xoy . P2 disse que precisaria obter uma reta perpendicular ao eixo dos x , passando por P. Porém, explorando as ferramentas, P2 escolheu obter a reta j paralela ao eixo dos x , passando por P (Figura 236a).

Obtendo o ângulo $\beta = 128,46^\circ$ entre a reta j e uma das retas concorrentes, perguntamos se esse valor sofria alteração ao mover o ponto P. Movendo o ponto P e verificando que esse valor se alterava, P2 inseriu uma reta k paralela ao eixo dos z que passa por P (Figura 236b). Obtendo o ângulo de 135° entre a reta k e uma das retas concorrentes, P2 respondeu que o ângulo agudo que as retas concorrentes formam com o plano xoy era de 45° .

Figura 236 – Exploração da construção de um hiperboloide de uma folha obtido como superfície regradada por P2 (parte 2).

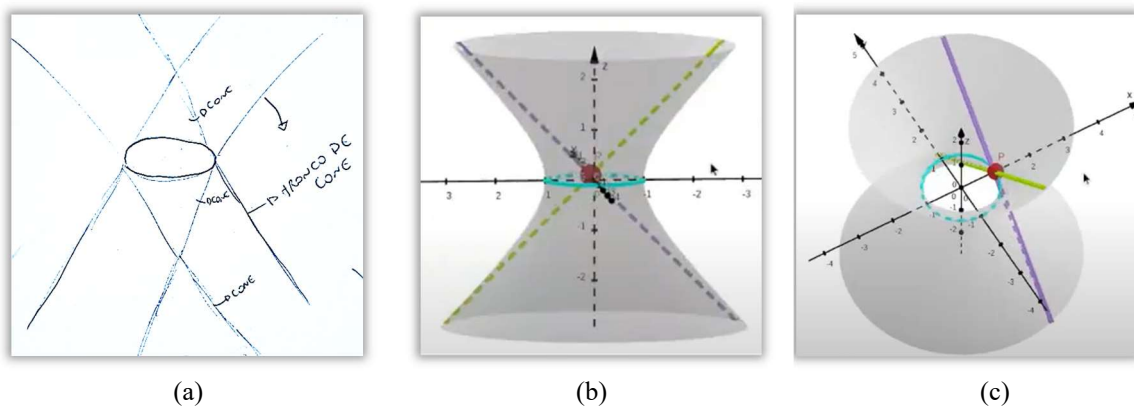


Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos observar as contribuições do dinamismo que, possibilitando o acesso, o movimento e a inserção de elementos na construção, viabilizou a exploração de propriedades dessas representações dinâmicas. Dessa forma, é possível observar a apropriação tecnológica contribuindo para as apreensões figurais que, por sua vez, qualificam as apreensões conceituais.

O participante P3, após a leitura do enunciado, respondeu na questão do item a que a superfície gerada era “*Um miolo em formato de dois cones inversos grudados e pela parte de fora dois troncos de cone grudados e dois cones internos um em cima e outro embaixo*”. P3, explicando o que estava dizendo, tentou externar sua imagem mental no desenho da Figura 237a.

Figura 237 – Exploração da construção de um hiperboloide de uma folha obtido como superfície regradada por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa imagem, as retas concorrentes são perpendiculares ao plano da circunferência, mas não pertencem a um plano tangente a esta. Então, na questão do item b, P3 pôde contrastar

a imagem mental produzida a partir do enunciado com a representação dinâmica. Abrindo o arquivo do GeoGebra e, habilitando a animação do ponto P, o participante disse: *“Como é que vai dar um hiperboloide se são duas retas?”* P3 não conseguiu visualizar as retas concorrentes como seção plana do hiperboloide de uma folha e/ou gerando esta quádrlica.

Então, pensando-com a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha, P3 parou a animação do ponto P e colocou a superfície na posição da Figura 237b. O participante observou as retas concorrentes com ponto de intersecção sobre a circunferência e, mudando a posição da quádrlica (Figura 237c), disse: *“Ahhh mas eu tava girando ele em outro formato”*. E, respondendo à pergunta se conseguia imaginar essas retas gerando essa superfície, P3 disse: *“Não, pois imaginei as retas voltadas para dentro da circunferência, logo as retas de um lado se intersectam com o outro lado da circunferência”*.

Assim, podemos observar as contribuições da representação dinâmica como objeto de pensar-com, viabilizando o acesso, a animação e a visualização do objeto matemático em diferentes posições. Na conversão proposta na questão do item c, P3 acessou novamente a representação dinâmica, buscando as unidades significantes no registro gráfico para correlacionar com o simbólico. P3 observou que a seção plana circular dessa quádrlica, no plano xoy , tinha raio igual a 1 (Figura 237c).

Mobilizando esquemas conceituais, P3 identificou as variáveis quadráticas e sinais da representação simbólica dessa seção plana, escrevendo as equações $x^2 + y^2 = 1$ da superfície cilíndrica circular e $z = 0$ do plano xoy como resposta. Para obter o ângulo que as retas concorrentes formam com o plano xoy , na questão do item d, P3 posicionou novamente a quádrlica como na Figura 237b. Observando a posição das retas concorrentes, P3 respondeu que o ângulo era de 45° .

Nessa atividade, os participantes experimentaram criar a imagem mental da superfície regrada gerada por um par de retas concorrentes que se moviam apoiadas num ponto sobre uma circunferência. Entendendo que a visualização de um par de retas concorrentes como seção plana de um hiperboloide de uma folha já não é evidente, mais difícil ainda é imaginar essa quádrlica sendo gerada pela rotação dessas seções planas. O dinamismo possibilitou a identificação da superfície quando, acessando a representação dinâmica, os participantes puderam mudar a posição e observar a animação.

Esses recursos foram fundamentais também para realizar a conversão do registro gráfico para o simbólico da seção plana circular e obter o ângulo que as retas concorrentes formavam com o plano xoy . Pensando-com a representação dinâmica, os participantes conseguiram obter as informações necessárias para a conversão e a obtenção do ângulo. Fazendo parte de um

processo de fazer para compreender, essas ações envolveram a mobilização de esquemas de utilização, como os relativos a ângulo, reta tangente e circunferência.

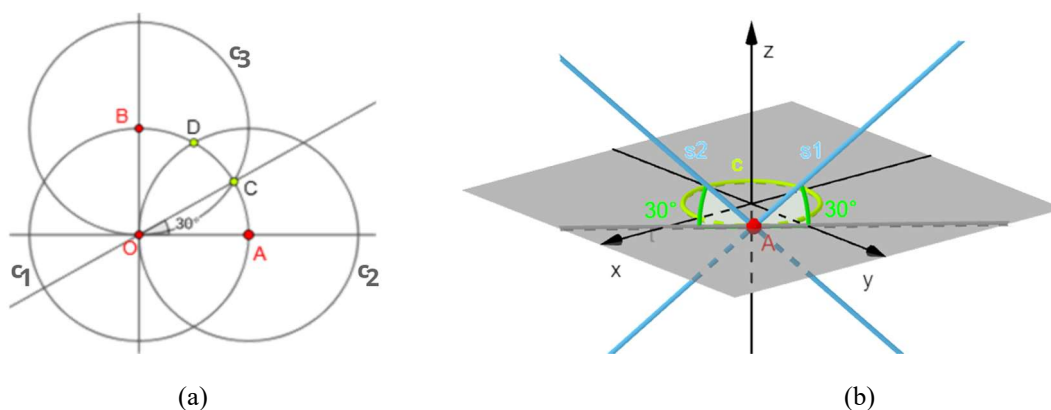
Os participantes produziram imagens mentais distintas a partir do enunciado da questão, por mais que tivéssemos tentado complementá-lo, fornecendo mais elementos para a sua compreensão. Com isso, foi possível perceber o quão distintas podem ser as imagens mentais de um mesmo objeto matemático, produzidas por diferentes sujeitos. Essa é uma questão que precisa ser considerada na comunicação, uma vez que uma representação escrita ou falada do professor pode levar os alunos a produzirem diferentes representações mentais.

5.1.10.4 ATIVIDADE 4

O desafio proposto nessa atividade consistiu em obter um hiperboloide de uma folha em z como superfície regradada, mas com retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy . Antes de resolver esse problema no \mathbb{R}^3 , a questão do item a propôs um ensaio para obtenção desse ângulo no \mathbb{R}^2 , usando o recurso ‘Tarefa’ no aplicativo Geometria do GeoGebra. No \mathbb{R}^2 , o ângulo de 30° pode ser obtido, dividindo em três partes iguais um ângulo reto.

Por exemplo, na Figura 238a cada um dos ângulos \widehat{AOC} , \widehat{COD} e \widehat{DOB} representa a terça parte do ângulo reto \widehat{AOB} .

Figura 238 – Ângulo de 30° no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 .



Fonte: Elaborado pela autora.

Para dividir o ângulo reto em três partes iguais no \mathbb{R}^2 , podemos iniciar inserindo os pontos $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(0,1)$. A seguir, inserimos três circunferências: 1) uma circunferência c_1 com centro em O e que contém o ponto A ; 2) uma circunferência c_2 com centro em A e que contém o ponto O ; 3) uma circunferência c_3 com centro em B e que contém o ponto O . Então, obtemos os pontos C e D de intersecção, respectivamente, das circunferências c_2 e c_3 com a

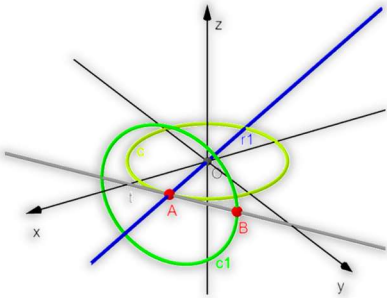
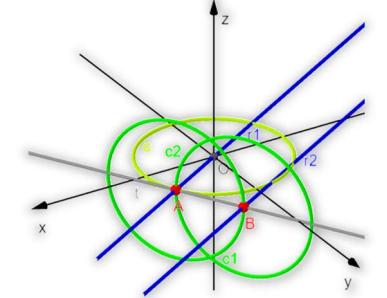
circunferência c_1 . Assim, obtemos os ângulos \widehat{AOC} , \widehat{COD} e \widehat{DOB} que dividem o ângulo reto \widehat{AOB} em três partes iguais.

Essa construção, na questão do item b, precisou ser obtida num plano perpendicular ao plano xoy e que se movesse apoiado num ponto sobre uma circunferência neste plano. No enunciado na questão dizia: “Seja c uma circunferência no plano xoy , de raio 2 e centro na origem do sistema cartesiano. Considere ainda, duas retas concorrentes em plano perpendicular ao plano xoy , com intersecção no ponto P que pertence a c , formando ângulos de 30° com esse plano. Obtenha a quádriga gerada pelo rastro dessas retas ao mover o ponto P sobre c ”.

A Figura 238b apresenta a circunferência c no plano xoy e as retas s_1 e s_2 concorrentes em A e que formam ângulos de 30° com este plano. Para essa questão, foi fornecido um arquivo do GeoGebra 3D por meio do recurso ‘Tarefa’. O problema consistiu em obter s_1 e s_2 com ângulos de 30° com o plano da circunferência (plano xoy), envolvendo a mobilização ou (re)constituição de outros esquemas de utilização.

Para obter as retas concorrentes, foram necessárias outras ferramentas, a inserção de outros elementos na construção e a observação da dependência entre estes, como mostra o Quadro 15 com uma possível solução para este desafio.

Quadro 15 – Passos para obtenção de um ângulo de 30° num plano qualquer do \mathbb{R}^3 .

	<ol style="list-style-type: none"> 1. Obter a circunferência c no plano xoy, com centro na origem e raio 1. 2. Inserir um ponto A sobre c. 3. Obter a reta t tangente à circunferência c em A. 4. Inserir um ponto B sobre t. 5. Obter a reta r_1 que passa pela origem O e por A. 6. Obter a circunferência c_1 que passa por B com centro em A.
	<ol style="list-style-type: none"> 7. Obter a reta r_2 paralela a r_1 por B. 8. Obter a circunferência c_2 que passa por A e tem centro em B.

	<ol style="list-style-type: none"> 9. Obter a reta p que passa por A e é perpendicular ao plano xoy. 10. Obter o ponto C de intersecção entre a circunferência c_1 e a reta p. 11. Obter a reta r_3 paralela a r_1 (ou r_2) e que passa por C. 12. Obter a circunferência que passa por A e tem centro em C.
	<ol style="list-style-type: none"> 13. Obter os pontos D e E de intersecção entre as circunferências c_1 e c_2 e c_1 e c_3, respectivamente. 14. Obter as retas concorrentes s_1 e s_2 que formam ângulo de 30° com o plano xoy, passando por A e D e por A e E, respectivamente.
	<ol style="list-style-type: none"> 15. Selecionar a opção 'Exibir rastro' para as retas concorrentes s_1 e s_2. 16. Animar o ponto A de intersecção de s_1 e s_2. <p>Construção com animação disponível em: https://www.geogebra.org/classroom/ceybaw6s</p>

Fonte: Elaborado pela autora.

Por fim, a questão do item c propôs uma conversão do registro gráfico para o simbólico, quando foi necessário mobilizar esquemas de utilização para encontrar a equação dessa quádrlica. Para obter as variáveis visuais necessárias para realizar a conversão, foi necessário acessar a representação dinâmica obtida com a construção, realizando os tratamentos gráficos pertinentes. A partir dessas variáveis visuais, é possível verificar se os termos na equação da quádrlica são lineares ou quadráticos, determinar os seus sinais e obter os valores dos coeficientes desses termos por meio dos devidos tratamentos algébricos.











Considerando que o hiperboloide de uma folha é composto de seções planas hiperbólicas e elípticas, todas as variáveis são quadráticas. Como as seções planas circulares pertencem ao plano xoy e planos paralelos a este, os termos que contém as variáveis x e y são positivos. E, para que essa quádrlica tenha seções planas hiperbólicas, o terceiro termo tem que ser negativo. Além disso, todas as seções planas hiperbólicas têm eixo imaginário sobre o eixo dos z , logo o termo que contém esta variável é o negativo.

Assim, a representação simbólica desse hiperboloide de uma folha é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. No registro simbólico, a seção plana dessa quádrlica com o plano xoy tem a forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Na representação gráfica, essa seção plana é uma circunferência ($a = b$) e tem raio igual a 2 ($a = b = 2$). Assim, a equação dessa quádrlica fica $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, faltando obter o valor de c .

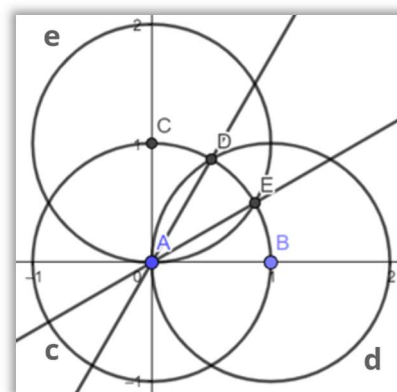
O valor de c pode ser calculado a partir das coordenadas de um ponto da quádrlica com cota diferente de zero. Então, podemos tomar um ponto sobre as retas s_1 ou s_2 que não pertença ao plano xoy . Por exemplo, substituindo na equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ da quádrlica, as coordenadas dos pontos $(\pm 1.73, 2, 1)$ de intersecção dessas retas com o plano $z = 1$, obtemos $c \cong 1,156$. Assim, a equação do hiperboloide de uma folha em z é dada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1,336} = 1$.

Essa atividade não foi proposta na primeira aplicação, por isso apresentamos a seguir os dados da implementação com P2 e P3. Na questão do item a, o participante P2 segue exatamente os mesmos passos do seu protocolo de construção para obter o ângulo de 30° (Figura 239a). P2 iniciou inserindo um ponto $A(0,0)$ na origem do sistema cartesiano e o ponto B sobre o eixo dos x , obtendo a circunferência c que tem centro em A e que passa por B (Figura 239b).

Figura 239 – Obtenção de um ângulo de 30° no IR^2 por P2.

Ícone	Descrição	Valor
1	 A	$A = (0, 0)$
2	 A Ponto sobre EixoX	$B = (1, 0)$
3	 Círculo por B com centro A	$c: x^2 + y^2 = 1$
4	 Círculo por A com centro B	$d: (x - 1)^2 + y^2 = 1$
5	 Interseção de c, EixoY	$C = (0, 1)$
6	 Círculo por A com centro C	$e: x^2 + (y - 1)^2 = 1$
7	 Interseção de c, d	$D = (0.5, 0.87)$
8	 Interseção de c, e	$E = (0.87, 0.5)$
9	 Reta A, E	$f: y = 0.58x$
10	 Reta A, D	$g: y = 1.73x$

(a)



(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

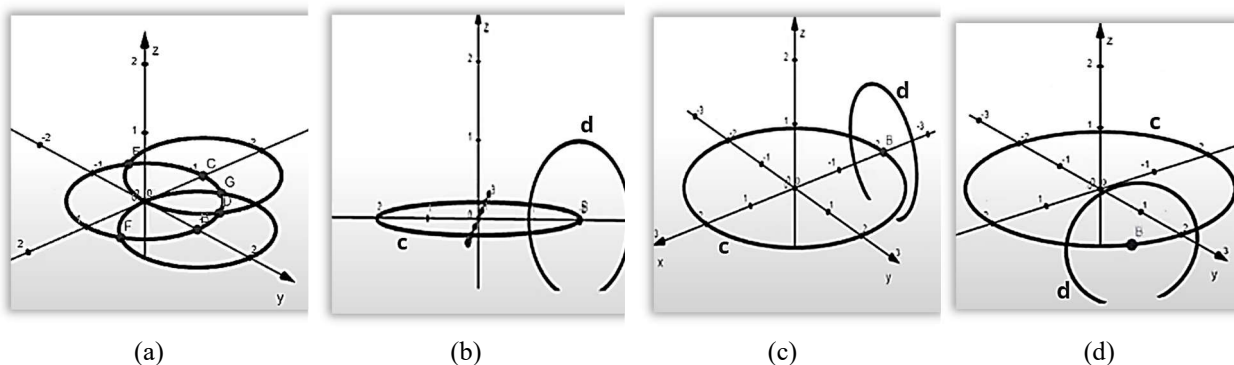
Depois, P2 obteve a circunferência d com centro em B e que passa por A . A seguir, P2 inseriu o ponto C sobre o eixo dos y e obteve a circunferência e com centro em C e que passa por A . Então, P2 obteve os pontos D e E de intersecção entre as circunferências c e d e c e e ,

respectivamente. Por fim, P2 inseriu as retas f e g que passam por A e E e A e D , respectivamente. Assim, P2 precisou mobilizar esquemas de utilização relacionados a obtenção de pontos, retas e circunferências, obtendo as retas que dividem o primeiro quadrante em três partes iguais.

Então, na questão do item b, P2 iniciou a construção para obter as retas concorrentes no plano xoy , quando percebeu que as retas não podem estar neste plano, uma vez que devem formar ângulos de 30° com este (Figura 240a).

Então, P2 reiniciou a construção, inserindo um ponto $A(0,0,0)$ na origem do sistema cartesiano e, usando a ferramenta ‘Círculo: centro-raio-direção’, obteve a circunferência c que passa por A , tem raio 2 e a direção do eixo dos z (Figura 240b). P2 inseriu um ponto B sobre c , mas que não era móvel por ter sido obtido sobre o eixo dos x . Com isso, P2 obteve uma circunferência d de centro em B , raio 1 e direção do eixo dos y . Nessa oportunidade, perguntamos a P2 se conseguia visualizar a posição que essas retas concorrentes estariam.

Figura 240 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P2 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

O participante respondeu que a circunferência d precisava estar num plano tangente à circunferência c no ponto B . Apagando a circunferência d , P2 obteve outra em seu lugar, com centro em B , raio 2 e direção do eixo dos x (Figura 240c). Então, perguntamos se o ponto B era móvel. Experimentando mover este ponto, P2 respondeu que não. Apagando o ponto B e a circunferência d , P2 inseriu novamente um ponto B sobre a circunferência c , verificando que desta vez havia ficado móvel.

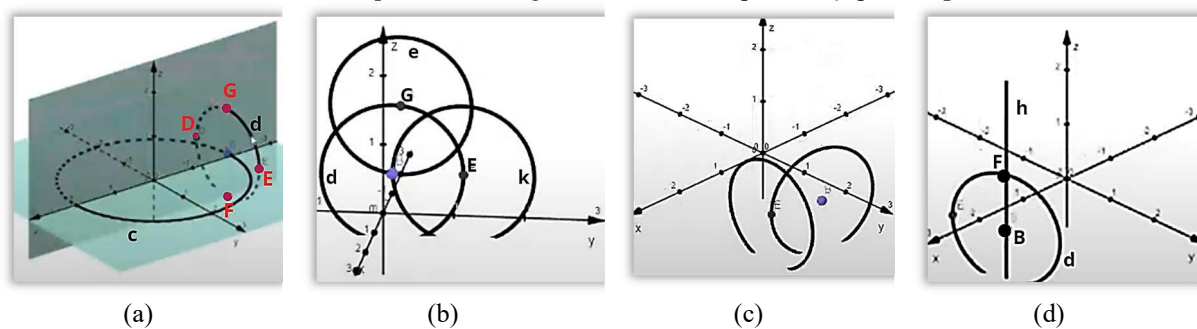
Observamos que o participante estava tentando inserir o ponto B sobre um dos eixos coordenados para obter a circunferência d por meio da ferramenta ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’. P2 estava constituindo esquemas de utilização para obter uma circunferência num plano tangente à circunferência c . Depois de analisar as ferramentas para obtenção de círculos,

P2 inseriu um ponto $C(0,0,0)$ novamente na origem do sistema cartesiano e obteve uma reta f que passa por B e C (Figura 240d).

Então, P2 obteve a circunferência d de centro em B , raio 1 e direção de f , com a ferramenta ‘Círculo: centro-raio-direção’, observando a circunferência d movendo-se apoiada no ponto B sobre a circunferência c . Para obter a terceira circunferência, P2 inseriu a equação $z = 0$, obtendo os pontos D e E de intersecção entre a circunferência d e o plano xoy (Figura 241a). E, inserindo a equação $y = 0$, obteve os pontos F e G de intersecção entre a circunferência d e o plano xoz .

Referindo-se aos pontos D , E , F e G , P2 disse: “*Eram esses pontos que eu precisava aqui*” (Figura 241b). E, usando a ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’, P2 obteve a circunferência e (centro em G , raio 1 e direção do eixo dos x) e a circunferência k (centro em E , raio 1 e direção do eixo dos x). Ao mover o ponto B , P2 observou que a construção perdia a estabilidade (Figura 241c). Tornando o plano xoz visível durante o movimento do ponto B , inferimos que P2 percebeu que o problema estava nos pontos obtidos pela intersecção com os planos coordenados.

Figura 241 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P2 (parte 2).



Fonte: Dados da pesquisa.

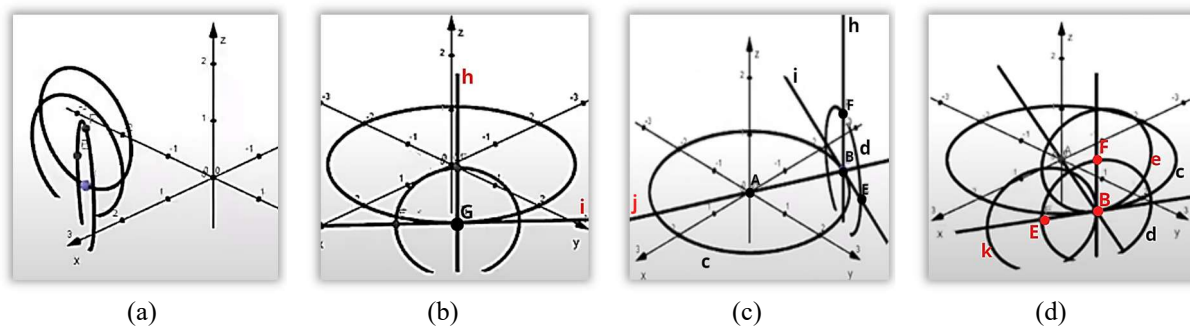
Então, P2 apagou as circunferências e e k e, inserindo uma reta h que passa por B e é paralela ao eixo dos z (Figura 241d). Observando que a construção permanecia estável com a animação do ponto B , P2 obteve os pontos F e G de intersecção da circunferência d com essa reta. A seguir, P2 inseriu a circunferência e (centro em F , raio 1 e direção do eixo dos x) e a circunferência k (centro em E , raio 1 e direção do eixo dos x). Movendo o ponto B , P2 percebeu que o problema da estabilidade da construção ainda não havia sido resolvido (Figura 242a).

O problema novamente está na utilização de elementos fixos (eixos ou planos coordenados) para obter as circunferências móveis. Nessa oportunidade, perguntamos a P2 se o eixo que contém o centro da circunferência teria que ser fixo ou móvel, ao que o participante

respondeu que precisaria ser móvel. Então, sugerimos que P2 inserisse uma reta tangente à circunferência c no ponto B , para visualizar o plano em que precisaria obter as circunferências (Figura 242b).

Inferimos que esse foi o momento em que ocorreu a tomada de consciência, quando P2 conseguiu visualizar o plano das circunferências, entendendo por que não poderia usar os eixos coordenados como direção. P2 descobriu a ‘chave’ da construção, quando disse que precisaria de uma reta que passa por A e B , obtendo a reta j (Figura 242c). E, explicando a necessidade de obter a reta j , P2 disse “*Eu vou precisar dessa reta porque ela que vai ser usada na ferramenta que usa centro, raio e direção. E aí a direção vai ser ela*”.

Figura 242 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P2 (parte 3).

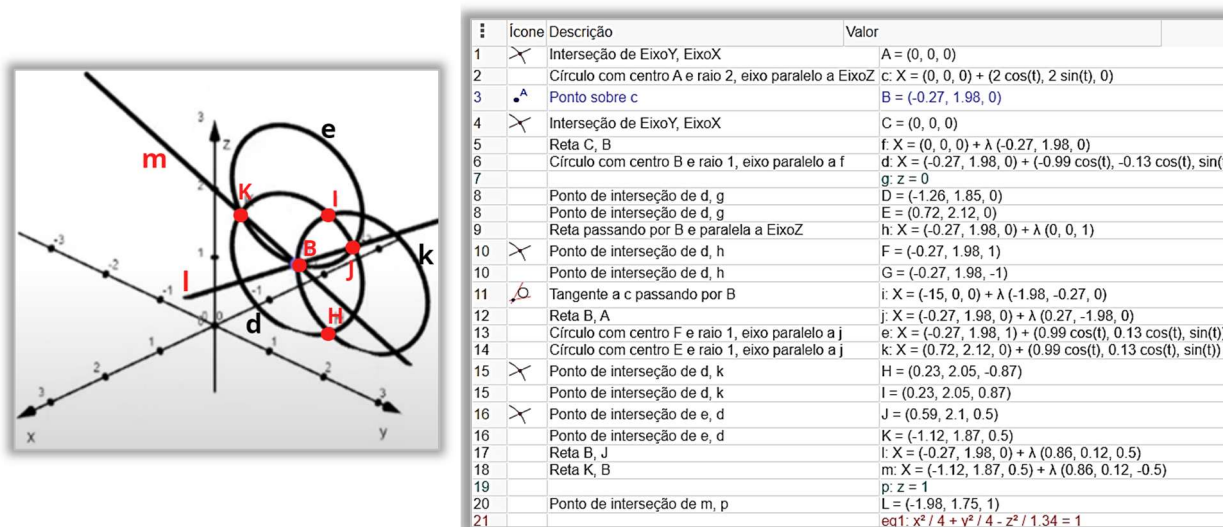


Fonte: Dados da pesquisa.

E, com a ferramenta ‘Círculo: centro-raio-direção’, P2 obteve a circunferência e (centro em F , raio 1 e direção de j) e a circunferência k (centro em E , raio 1 e direção de j) (Figura 242c). Habilitando a animação do ponto B , P2 observou que a sua construção permaneceu estável. Então, perguntamos a P2 sobre o ângulo de 30° que estava procurando obter com essa construção.

P2 obteve os pontos H e I (intersecção entre as circunferências d e k) e os pontos J e K (intersecção entre as circunferências d e e). Em seguida, P2 obteve as retas l e m que passam, respectivamente, pelos pontos B e J e pelos pontos B e K . Depois de obter as retas concorrentes l e m , o participante respondeu: “*Tá, aqui está o 30° e o 150°* ” (Figura 243a). A Figura 243b apresenta o protocolo de construção de P2.

Figura 243 – Construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P2.



(a)

(b)

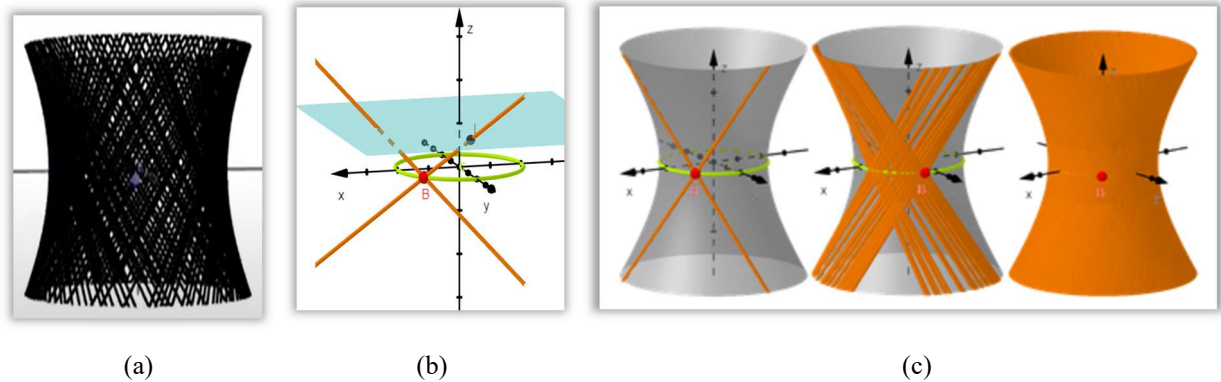
Fonte: Dados da pesquisa.

Habilitando o rastro das retas concorrentes, a animação do ponto B e configurando as dimensões dos eixos coordenados, P2 observou as retas concorrentes ‘desenhando’ o hiperboloide de uma folha em z (Figura 244a). Com isso, observamos que P2 ora mobilizava e ora constituía esquemas de utilização para obter a construção. Os esquemas que iam sendo constituídos durante sua gênese instrumental, habilitavam o participante a realizar novas e melhores tentativas.

Envolvido num processo de fazer para compreender, a cada nova tentativa, o participante experimentava a dependência entre os elementos da construção até encontrar a relação certa, testando a estabilidade da sua construção. Pensando-com as representações dinâmicas, P2 formulou hipóteses e testou suas conjecturas, refletindo sobre suas constatações e realizando os devidos ajustes até a tomada de consciência. E, depois que descobriu a ‘chave’ da construção, os seus passos foram precisos e espontâneos.

E para obter a representação simbólica dessa quádrlica, na questão do item c, o participante P2 mobilizou esquemas conceituais definindo o grau das variáveis e sinais dos termos na sua equação ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$). Acessando a representação dinâmica obtida da construção, P2 relacionou o valor do raio da seção plana circular no plano xoy com os valores de a e b nessa equação ($a = b = 2$). E, para obter o valor de c , P2 experimentou utilizar as coordenadas do ponto (2,0,0) da seção plana circular.

Figura 244 - Conversão do registro gráfico para o simbólico de um hiperboloide de uma folha por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao substituir as coordenadas desse ponto na equação da quádrlica, percebeu que a cota do ponto não poderia ser nula. Então, inseriu um plano de equação $z = 1$, obtendo o ponto $L(-2.33, 1.25, 1)$ de intersecção entre a reta m e esse plano (Figura 244b). Substituindo as coordenadas de L na equação da quádrlica, P2 obteve o valor de $c^2 = 1,341$, escrevendo a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1,34} = 1$.

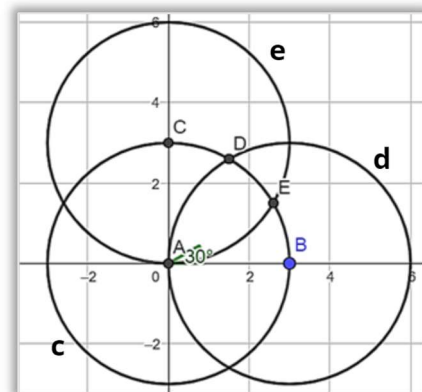
Inserindo essa equação na janela de álgebra, P2 obteve o hiperboloide de uma folha em z (imagem em cinza). E, habilitando a animação do ponto A, P2 observou essa quádrlica sendo ‘pintada’ pelas retas concorrentes (Figura 244c). Nessa ocasião, foi possível observar P2 buscando observáveis no registro dinâmico, para obter a representação simbólica da quádrlica. Identificando e correlacionando unidades significantes, por meio de tratamentos gráficos e algébricos, P2 realizou espontaneamente o trânsito do registro gráfico para o simbólico.

O participante P3, na questão do item a dessa atividade, também segue exatamente os mesmos passos do protocolo de construção para obter o ângulo de 30° , mobilizando espontaneamente esquemas de utilização (Figura 245a).

Figura 245 – Obtenção de um ângulo de 30° no IR^2 por P3.

Ícone	Descrição	Valor
1	Interseção de EIXOX, EIXOY	$A = (0, 0)$
2	A	$B = (3, 0)$
3	Círculo por B com centro A	$c: x^2 + y^2 = 9$
4	Interseção de c, EixoY	$C = (0, 3)$
5	Círculo com centro B e raio 3	$d: (x - 3)^2 + y^2 = 9$
6	Círculo com centro C e raio 3	$e: x^2 + (y - 3)^2 = 9$
7	Interseção de c, d	$D = (1.5, 2.6)$
8	Interseção de c, e	$E = (2.6, 1.5)$
9	Ângulo entre B, A, E	$\alpha = 30^\circ$

(a)



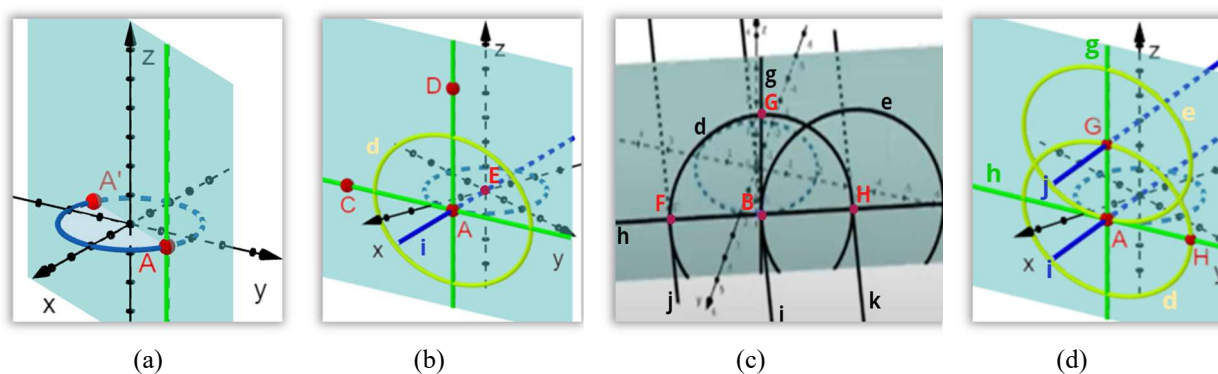
(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

P3 iniciou inserindo um ponto $A(0,0)$ como intersecção entre os eixos do x e do y , e obtendo uma circunferência c de centro em A e que passa pelo $B(3,0)$ (Figura 245b). Depois, P3 obteve o ponto $C(0,3)$ de intersecção de c com o eixo dos y e as circunferências d e e com raio 3 e centros em B e C , respectivamente. Então, P3 obteve os pontos D e E de intersecção entre as circunferências c e d e as circunferências c e e , respectivamente. E, utilizando a ferramenta ‘Ângulo’, P3 selecionou os pontos B , A e E , obtendo o ângulo $\widehat{BAE} = 30^\circ$.

Quando precisou obter esse ângulo num plano perpendicular ao plano xoy , na questão do item b, o participante P3 iniciou inserindo a equação $x^2 + y^2 = 4$ de uma superfície cilíndrica circular. Obtendo a circunferência c de intersecção dessa superfície com o plano xoy , P3 colocou um ponto A sobre c e inseriu uma reta g , que passa por A e é perpendicular ao plano xoy (Figura 246a). P3 inseriu um ponto $B(0,0,0)$ na origem do sistema cartesiano para obter o ponto A' , reflexo do ponto A em relação a B , obtendo um plano p por A' e g que se move junto com o ponto A .

Figura 246 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Percebendo que não poderia ser esse plano, P3 excluiu o plano p , para inserir o plano q tangente à circunferência c e que se movesse apoiado no ponto A (Figura 246b). Para isso, P3 inseriu uma reta h tangente à circunferência c em A . Colocando um ponto C sobre a reta h e um ponto D sobre a reta g , P3 obteve o plano q que passa por A , C e D . Experimentando a construção, P3 viu que o plano q se movia apoiado no ponto A , sempre tangente à circunferência c . Nessa oportunidade, P3 disse: “*Estamos obtendo um sistema de coordenadas fora do plano*”, parecendo ter descoberto a ‘chave’ dessa construção.

Para obter a circunferência d , P3 inseriu outro ponto $E(0,0,0)$ sobre a origem do sistema cartesiano, e inseriu a reta i que passava pelos pontos E e A . Observando a ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’, P3 disse: “*Olha só, eu precisava de centro, raio e direção, né. A*

direção pela que dá para entender é o que está saindo, né". Na segunda frase, P3 estava referindo-se ao eixo sobre o qual está o centro da circunferência e é perpendicular ao plano que a contém.

O participante P3 costumava obter circunferências por meio da intersecção entre superfícies cilíndricas e planos, tendo iniciado essa atividade dessa forma também. Assim, podemos observar na fala de P3, que o participante estava constituindo o esquema de utilização relacionado à ferramenta para obter circunferências. Então, com a ferramenta 'Circunferência: centro-raio-direção', P3 obteve a circunferência d de centro em A, raio 3 e direção de i .

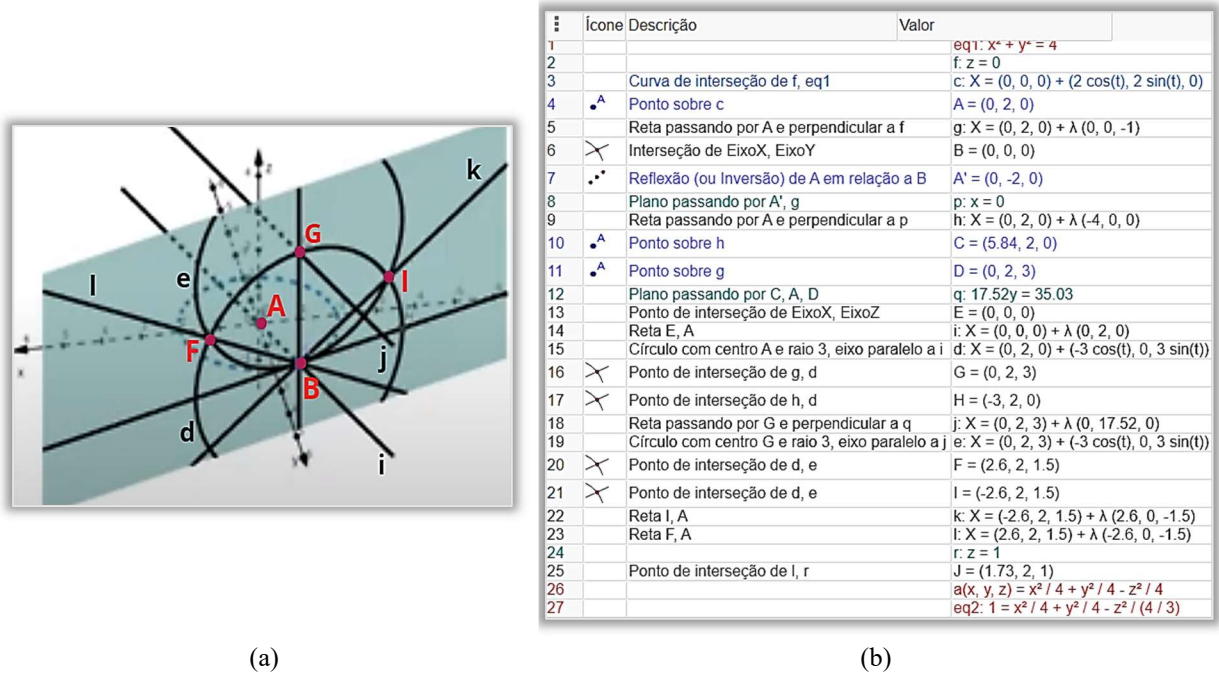
A seguir, P3 obteve os pontos G e H de intersecção entre as retas g e h e a circunferência d , respectivamente (Figura 246c). Inserindo o ponto F na intersecção entre a circunferência d e a reta h , P3 obteve duas retas j e k paralelas à reta i e que passavam nos pontos F e H, respectivamente, como intersecção da circunferência d com a reta h (Figura 246c). Então, obteve a circunferência e com centro em H, raio 3 e direção da reta i .

E quando iria obter uma circunferência com centro em F, teve uma tomada de consciência, dizendo: "*Eu não preciso dessas circunferências. Eu só preciso de uma circunferência em G*". Para obter essa circunferência com centro em G, P3 apagou alguns elementos da construção (ponto F, retas j e k e circunferência e), obtendo outra reta j que passa por G e é perpendicular ao plano q (Figura 246d).

Então, P3 obteve a outra circunferência e que passa por G, tem raio 3 e direção de j , usando a ferramenta 'Circunferência: centro-raio-direção'. E, inserindo os pontos F e I de intersecção entre as circunferências d e e , P3 obteve a reta k (que passa por A e I) e a reta l (que passa por A e F) (Figura 247a).

A Figura 247b apresenta o protocolo de construção de P3, que contém parte do processo descrito com base na observação *in loco* e gravação. Algumas imagens da construção de P3 tiveram as cores alteradas para dar mais clareza, e rótulos de objetos matemáticos inseridos para dialogar melhor com o texto.

Figura 247 – Construção de um hiperboloide de uma folha gerado por retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy por P3.



(a)

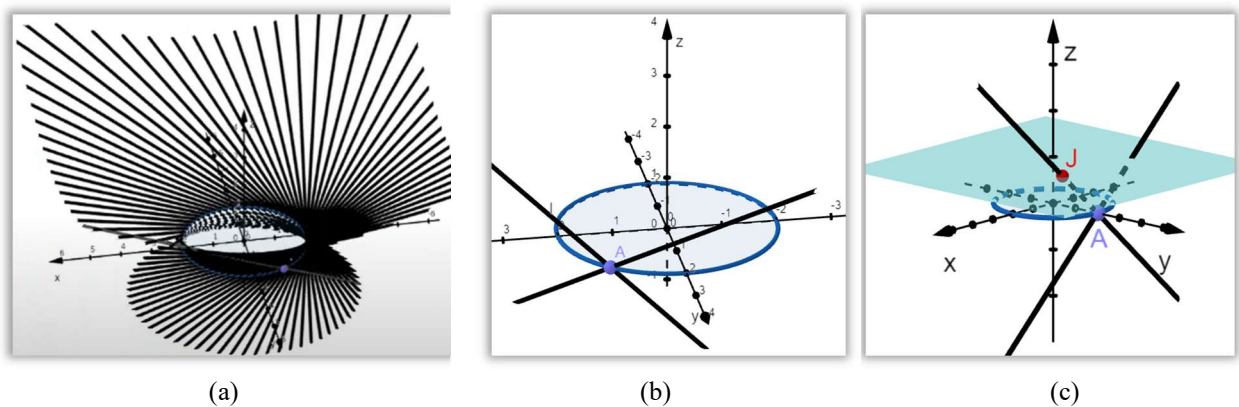
(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

Ocultando elementos da construção, P3 habilitou o rastro das retas concorrentes k e l e a animação do ponto A, observando o hiperboloide de uma folha em z sendo ‘desenhado’ pelas retas concorrentes (Figura 248a).

Assim, foi possível observar o participante ora mobilizando esquemas de utilização e ora constituindo-os. Num processo de fazer para compreender, P3 formulava hipóteses e as testava, usando as representações dinâmicas. E, refletindo sobre as respostas obtidas desses objetos de pensar-com, P3 realizava os ajustes necessários.

Figura 248 – Identificação de valores visuais para conversão do registro gráfico para o simbólico de um hiperboloide de uma folha por P3.



(a)

(b)

(c)

Fonte: Dados da pesquisa.

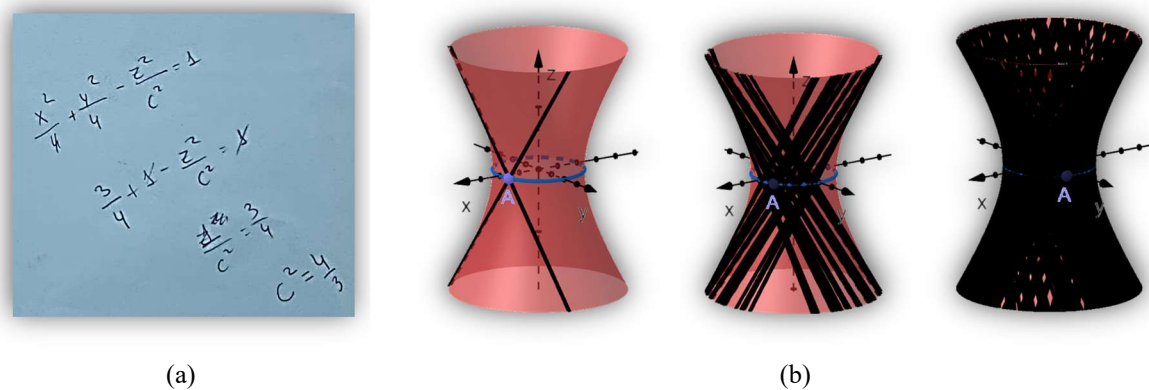
Os esquemas constituídos durante a gênese instrumental, capacitando o participante a realizar novas tentativas com mais segurança e precisão, o conduzem à tomada de consciência.

Para encontrar a representação simbólica da quádrlica, na questão do item c, P3 mobilizou espontaneamente esquemas conceituais, determinando o grau das variáveis e sinais dos termos na sua equação ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$). Observando que o raio da seção plana circular era igual a 2, P3 considerou que $c = 2$, experimentando mover o ponto A para extrair informações que o ajudassem a calcular os valores de a e b. P3 colocou o ponto A sobre o eixo dos y, onde suas coordenadas ficaram $x = 0$, $y = 2$ e $z = 0$. Depois, inseriu o ponto A sobre o eixo dos x, onde suas coordenadas ficaram $x = 2$, $y = 0$ e $z = 0$.

Por fim, P3 colocou o ponto A numa posição em que a abscissa e a ordenada do ponto A não fossem nulas, momento em que ocorreu uma tomada de consciência (Figura 248b). Relacionando unidades significantes gráficas e simbólicas, P3 percebeu que se o raio da seção plana circular era 2, então $a = b = 2$ e o que precisaria obter era o valor de c. Entendendo também que o valor da cota do ponto não poderia ser nulo, P3 inseriu um plano de equação $z = 1$, obtendo o ponto $J(1.73, 2, 1)$ de intersecção da reta l com esse plano (Figura 248c).

E substituindo as coordenadas de J na equação da quádrlica, P3 obteve o valor de $c^2 = \frac{4}{3}$, escrevendo a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4/3} = 1$ (Figura 249a). Nessa oportunidade, foi possível ver que o participante mobilizou esquemas de utilização, realizando o trânsito do registro gráfico para o simbólico de forma mais espontânea. Pensando-com as representações dinâmicas, o participante realizou os devidos tratamentos gráficos, na busca pelas variáveis visuais necessárias para a conversão.

Figura 249 – Tratamentos algébricos para conversão do registro gráfico para o simbólico de um hiperboloide de uma folha por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

E, por meio de tratamentos algébricos, obteve as respectivas unidades significantes simbólicas que permitem determinar a equação da quádrlica. Ocorrendo por meio de um fazer para compreender, esse processo foi viabilizado pelas representações dinâmicas, objetos de pensar-com que possibilitaram o conhecimento de propriedades da quádrlica. Por fim, inserindo a equação obtida na janela de álgebra, P3 obteve o hiperboloide de uma folha em z (imagem em vermelho) e, habilitando a animação do ponto A, observou essa quádrlica sendo ‘pintada’ pelas retas concorrentes (Figura 249b).

Nessa atividade, os participantes mobilizaram esquemas de utilização, para obter o hiperboloide de uma folha em z como superfície regrada, gerada pela rotação de um par de retas concorrentes que formam ângulos de 30° com o plano xoy . Os esquemas necessários para obter a construção proposta nessa atividade estavam relacionados à obtenção de pontos, retas, circunferências, ângulos, retas paralelas e/ou perpendiculares, intersecção entre retas e entre reta e circunferência, entre outros.

Dessa forma, além dos elementos conceituais e formas de funcionamento das ferramentas que constituem esses esquemas, foi necessário considerar a relação entre os elementos da construção para a sua estabilidade. Observamos que os participantes inseriam os objetos matemáticos, vinculando-os de acordo com a necessidade de dependência geométrica. E, observando a variação dinâmica, os participantes movimentavam a construção para verificar se não se deformava, identificando e corrigindo erros. Essas ações, características da dependência geométrica e da variação dinâmica, constituem-se em evidências de apropriação tecnológica pelos participantes.

Os participantes também mobilizaram esquemas de utilização necessários para a conversão do registro gráfico para o simbólico, identificando unidades significantes num registro para obter as correspondentes no outro. E, por meio de tratamentos gráficos e algébricos, os participantes correlacionaram as representações gráficas e simbólicas. Essas correlações, espontaneamente realizadas pelos participantes, consistem em evidências da coordenação de registros de representação.

Tanto a obtenção da construção geométrica quanto a conversão do registro gráfico para o simbólico, foram realizadas por meio de um processo de fazer para compreender, em que os participantes faziam uso das representações dinâmicas. Eles formulavam hipóteses e, com base nas respostas desses objetos de pensar-com, testavam suas conjecturas, refletiam sobre suas ações e realizavam ajustes. E, a cada tentativa, essas ações se repetiam enriquecidas de novos elementos, até a tomada de consciência. Nesse processo, foi possível observar a apropriação tecnológica capacitando os participantes para as apreensões figurais que, por sua vez,

qualificavam suas apreensões conceituais.

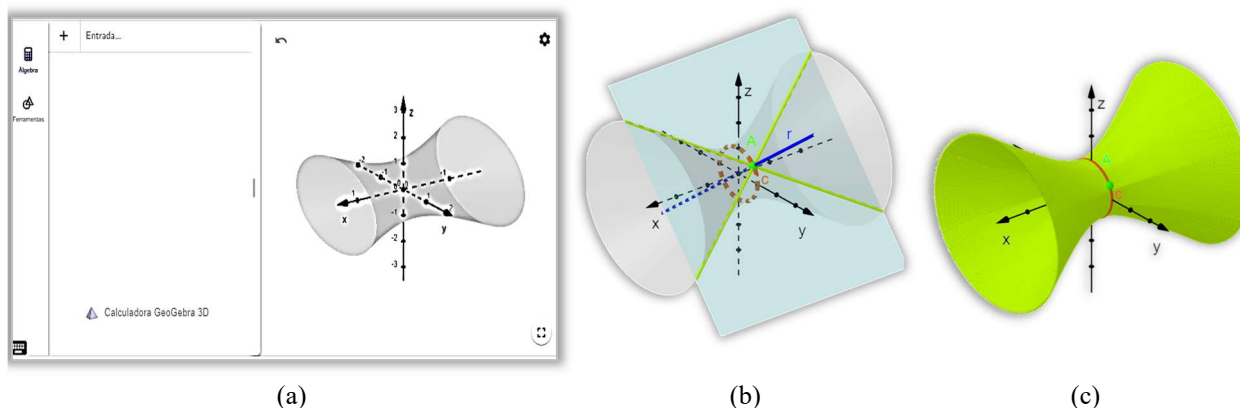
5.1.10.5 ATIVIDADE 5

A atividade 5 também trouxe a proposta de obter a construção de um hiperboloide de uma folha em x como superfície regradada. No entanto, diferente da atividade anterior, nessa atividade foi fornecida a representação gráfica dessa quádrlica. Para obter as retas concorrentes que ‘pintavam’ essa quádrlica, os participantes precisaram encontrar a sua intersecção com um plano tangente à seção plana circular no plano xoz .

Assim, essa proposta diferencia-se da atividade anterior em dois aspectos, na posição da quádrlica no sistema cartesiano e na forma de obter as retas concorrentes. Para essa questão, foi fornecido um arquivo do GeoGebra 3D por meio do recurso ‘Tarefa’, com um hiperboloide de uma folha em x na cor cinza claro, como se fosse uma sombra. A quádrlica ficava visível na janela de visualização, mas sua equação não aparecia na janela de álgebra (Figura 250a).

Na questão do item a dessa atividade, os participantes precisaram obter o hiperboloide de uma folha em x como superfície regradada, quando as retas concorrentes (Figura 250b) ‘pintam’ a superfície sombreada (Figura 250c). Para isso, podemos fazer a intersecção da quádrlica com o plano yoz , obtendo a seção plana circular c (Figura 250b). Depois, podemos obter uma reta r que passa pela origem do sistema cartesiano e por um ponto móvel A da circunferência c . Então, obtemos um plano p que contém A e é perpendicular à reta r .

Figura 250 – Proposta para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regradada a partir da sua representação gráfica.



Fonte: Elaborado pela autora.

As duas retas concorrentes podem ser obtidas pela intersecção dessa quádrlica com o plano p . E, habilitando o rastro das retas e a animação do ponto A , as retas concorrentes ‘pintam’ o hiperboloide de uma folha em x (Figura 250c). Na questão do item b dessa atividade, foi

proposta uma conversão do registro gráfico para o simbólico, ao solicitar que fosse encontrada a equação dessa quádrlica. Nesse caso, considerando que o hiperboloide de uma folha em x tem seções planas circulares pertencentes ao plano yoz e planos paralelos a este, os termos que contém essas variáveis (y e z) são quadráticos e positivos.

E, considerando que as seções planas obtidas pela intersecção da quádrlica por planos perpendiculares ao plano yoz são hipérbolés com eixo imaginário sobre o eixo dos x , o termo que contém a variável x também é quadrático e tem sinal negativo. Assim, um hiperboloide de uma folha em x tem representação simbólica $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

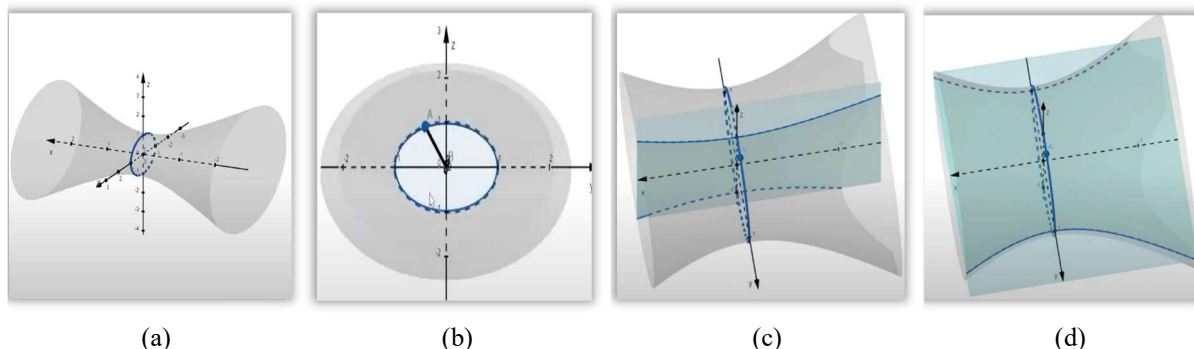
Relacionando unidades significantes gráficas e simbólicas, o raio 1 da circunferência no plano yoz , corresponde aos valores a de b e c na equação $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ dessa seção plana circular da quádrlica ($b = c = 1$). Assim, ficou faltando obter o valor de a na equação da quádrlica, que pode ser obtido a partir das coordenadas de um ponto com abscissa não nula dessa superfície. Então, podemos tomar um ponto sobre as retas concorrentes que não pertençam ao plano yoz .

Por exemplo, tomando os pontos $(1, 1, \pm 1)$ de intersecção dessas retas com o plano $x = 1$ e, substituindo as suas coordenadas na equação $-\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1$, obtemos o valor de $a^2 = 1$. Assim, o hiperboloide de uma folha em x tem representação simbólica $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$. E, inserindo essa equação na janela de álgebra, é possível verificar se a quádrlica obtida sobrepõem-se exatamente a que já se encontrava na janela de visualização.

Essa atividade não foi proposta na primeira aplicação, por esse motivo, apresentamos a seguir os dados da implementação com P2 e P3. O participante P2, na questão do item a, iniciou inserindo a equação $x = 0$ para obter a circunferência c como intersecção da quádrlica com o plano yoz (Figura 251a). P2 colocou um ponto A sobre a circunferência c e um ponto $B(0,0,0)$ sobre a origem do sistema, para obter o segmento de reta \overline{AB} , raio da circunferência c (Figura 251b).

Depois, P2 obteve a reta g que passa por A e é paralela ao eixo dos x , ocultando g e \overline{BA} . Nessa oportunidade, perguntamos ao participante o que estaria buscando, ao que respondeu: “Duas retas concorrentes vinculadas ao ponto A. Ai agora eu quero achar elas nos ângulos de 30° e 150° , igual a atividade 4 que eu fiz”. Propomos a leitura do enunciado da questão, esclarecendo que na atividade 4 não havia a representação gráfica da superfície, por isso haviam sido dadas condições para encontrar as retas.

Figura 251 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regradada a partir da sua representação gráfica por P2 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

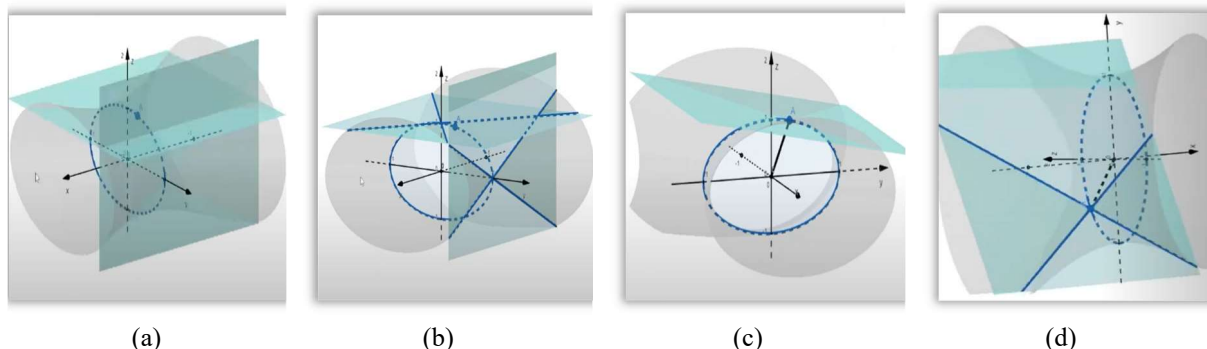
Com isso, o participante percebeu que as retas precisavam ser obtidas a partir da representação gráfica da quádrlica. A seguir, perguntamos como poderíamos obter essas retas concorrentes a partir da superfície, ao que o participante respondeu: “*Vai ser a degenerada de uma delas, de um de seus lados, dos seus planos, não sei como é que eu falo*”. Nessa resposta, vemos que o participante mobilizou esquemas conceituais constituídos em SEAI anteriores, reconhecendo que as retas concorrentes são seções planas do hiperboloide de uma folha.

Então, P2 deu início às tentativas para obtenção do plano para obter as retas concorrentes. A seguir, vamos observar P2 formulando hipóteses, e testando suas conjecturas por meio das respostas da representação dinâmica. E, refletindo sobre suas ações, realizando os ajustes. A cada nova tentativa, P2 repetia essas ações de forma cada vez mais qualificada, até a tomada de consciência.

P2 inseriu as equações $y = 0$ e $z = 0$ dos planos xoz (Figura 251c) e xoy (Figura 251d), respectivamente, obtendo as hipérboles de intersecção da quádrlica com esses planos. Não encontrando as retas concorrentes, P2 inseriu a equação do plano $y = 1$ (Figura 252a), dizendo: “*Aqui é que elas aparecem*”. E, inserindo o plano de equação $z = 1$, obteve os pares de retas concorrentes oriundos das intersecções desses planos com a quádrlica (Figura 252b).

Nessa oportunidade, a partir de uma tomada de consciência, o participante percebeu que essas retas precisariam estar num plano que se movesse com o ponto A. Então, P2 apagou alguns elementos na janela de álgebra e explorou as ferramentas para obtenção de planos. Escolhendo a ferramenta plano perpendicular, P2 obteve o plano p que passa por A e é perpendicular a \overline{AB} (Figura 252c). Com isso, podemos constatar que P2 já havia descoberto a ‘chave’ dessa construção, quando obteve o segmento \overline{AB} , raio da circunferência.

Figura 252 – Processo para construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica por P2 (parte 2).

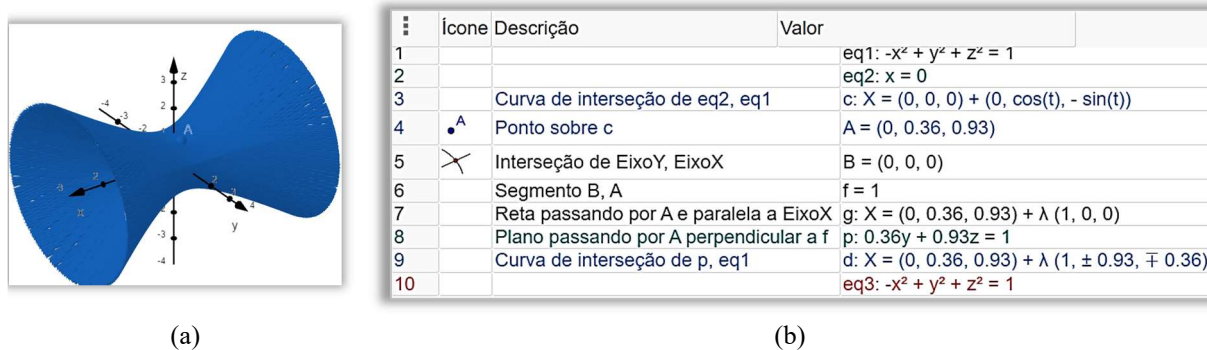


Fonte: Dados da pesquisa.

O momentâneo obstáculo estava relacionado à obtenção de um plano tangente à circunferência. Porém, sem muita demora, P2 mobilizou ou (re)constituiu esquemas de utilização que permitiram a obtenção desse plano. Então, P2 obteve as retas concorrentes pela intersecção da superfície com o plano p (Figura 252d). E, habilitando o rastro das retas concorrentes e a animação do ponto A , P2 observou o hiperboloide de uma folha em x sendo ‘pintado’ pelas retas concorrentes (Figura 253a).

A Figura 253b apresenta o protocolo de construção de P2, cujos dados foram cruzados com a observação *in loco* e a gravação. A seguir, para encontrar a equação dessa quádrlica na questão do item b, P2 iniciou escrevendo $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$. P2 iria obter os coeficientes depois, mas ao inserir a equação na janela de álgebra, já obteve a representação gráfica do hiperboloide de uma folha em x . Desse modo, não foi necessário calcular os valores de a , b e c .

Figura 253 – Construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda assim, observamos que P2 efetuou parte significativa da conversão, quando extraindo informações da representação gráfica, determinou os termos na representação

simbólica. Mobilizando espontaneamente esquemas conceituais, P2 identificou o grau das variáveis e sinais na equação da quádrlica, correlacionando as representações gráfica e simbólica. E, esse trânsito espontâneo entre registros de representação, consiste numa evidência da coordenação entre registros.

O participante P3 iniciou essa atividade pela questão do item b, encontrando a equação dessa quádrlica. Mobilizando esquemas de utilização, P3 identificou os termos quadráticos e seus sinais na equação $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ da quádrlica. A seguir, P3 iniciou ações para extrair informações pertinentes no registro gráfico para realizar a conversão para o registro simbólico. P3 relacionou o raio da seção plana circular dessa quádrlica no plano yoz , que é igual a 1, com os valores de $b = c = 1$ na equação $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ dessa circunferência.

E para obter o valor de a^2 , P3 inseriu o plano de equação $x = 1$, obtendo a circunferência c de intersecção desse plano com a quádrlica (Figura 254a). Então, o participante inseriu o ponto A sobre c , obtendo as suas coordenadas $x = 1$, $y = 0$ e $z = 1.41$. E, substituindo as coordenadas do ponto A na equação $-\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1$ da quádrlica, obteve o valor de $a^2 = 1$.

Então, P3 escreveu a equação $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e, inserindo-a na janela de álgebra, obteve o hiperboloide de uma folha em x (Figura 254b). Assim, foi possível observar que o participante buscou as unidades significantes no registro gráfico, correlacionando-as com as do registro simbólico. A forma espontânea com que P3 mobilizou esquemas de utilização, realizando a conversão do registro gráfico para o simbólico, consiste em evidência da coordenação de registros.

Figura 254 - Conversão do registro gráfico para o simbólico de um hiperboloide de uma folha por P3.

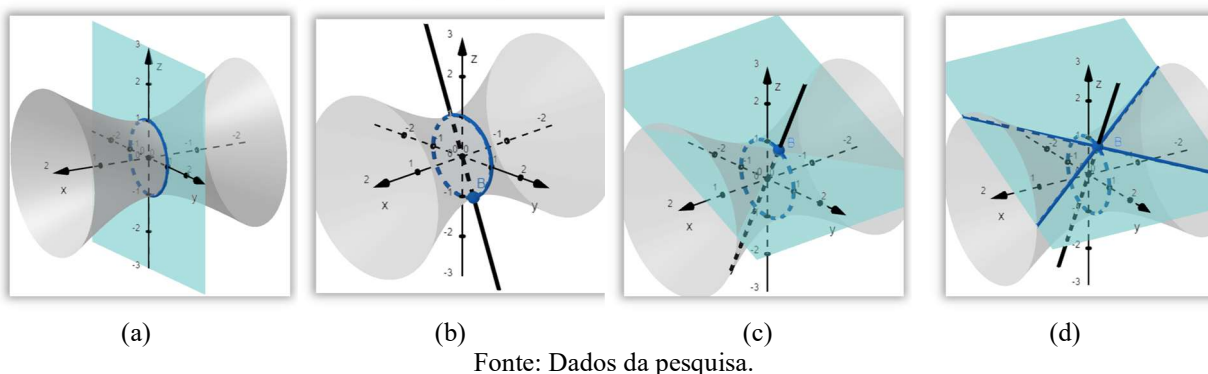


Fonte: Dados da pesquisa.

Para obter a superfície regrada na questão do item a, P3 iniciou inserindo a equação $z = 0$ do plano xoy , obtendo a circunferência d de intersecção desse plano com a quádrica (Figura 255a). Nos passos seguintes, podemos observar que P3 mobilizou espontaneamente esquemas de utilização, obtendo e vinculando adequadamente os elementos necessários para obter a construção.

Foi possível ver que P3 descobriu logo a ‘chave’ dessa construção, seguindo com segurança e precisão os passos para obter o plano tangente. O participante inseriu um ponto B sobre a circunferência d e um ponto $C(0,0,0)$ na origem do sistema cartesiano. Depois, inseriu a reta f que passa por B e C (Figura 255b).

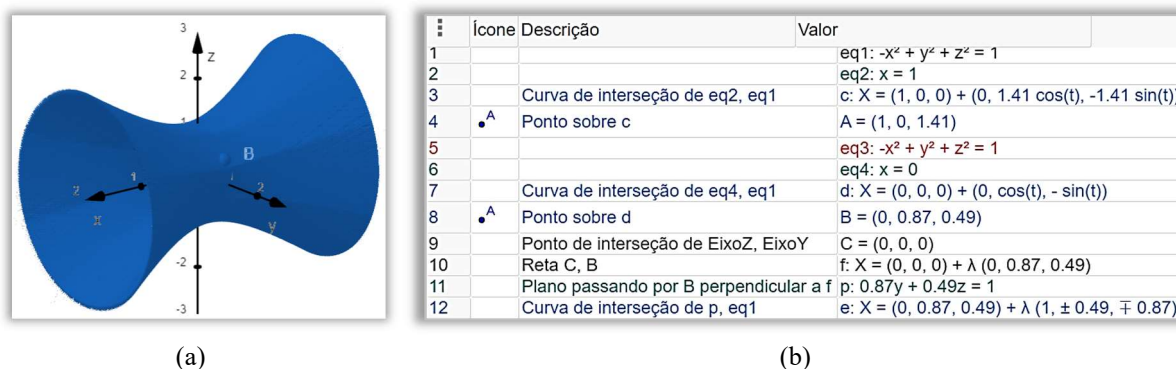
Figura 255 – Processo de construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Então, P3 inseriu o plano p perpendicular a f em B (Figura 255c). E, por meio da intersecção do plano p com a quádrica, P3 obteve as retas concorrentes (Figura 255d). Por fim, habilitando o rastro das retas concorrentes e a animação do ponto A, P3 observou o hiperboloide de uma folha em x sendo ‘pintado’ pelas retas concorrentes (Figura 256a).

Figura 256 – Construção de um hiperboloide de uma folha como superfície regrada a partir da sua representação gráfica por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, podemos observar que o participante mobilizou espontaneamente esquemas de utilização, obtendo a construção do hiperboloide de uma folha em x como superfície regrada. P3 identificou rapidamente os passos necessários para obter a construção, reconhecendo os elementos necessários e vinculando-os adequadamente, dando evidências de apropriação tecnológica. A Figura 256b apresenta o protocolo de construção de P3, cujos dados foram cruzados com a observação *in loco* e gravação.

Nessa atividade, mobilizando esquemas de utilização, os participantes construíram um hiperboloide de uma folha em x , a partir da rotação de um par de retas concorrentes. Diferente da atividade anterior, nessa atividade os participantes tinham acesso à representação gráfica da quádrlica. Assim, as seções planas circular e hiperbólica puderam ser obtidas por meio da intersecção de planos específicos com a superfície, o que produz alterações significativas na construção se comparada com a da atividade anterior.

A ‘chave’ dessa construção foi a obtenção de um plano tangente à seção plana circular dessa quádrlica no plano yoZ . Para isso, os participantes mobilizaram esquemas de utilização relativos à obtenção de ponto, reta, plano, circunferência, hipérbole, intersecção de superfícies, entre outros. Além desses esquemas de utilização, os participantes mobilizaram esquemas, relacionados à dependência entre os elementos para a estabilidade da construção.

Os participantes também mobilizaram esquemas de utilização para realizar a conversão do registro simbólico para o gráfico, quando inseriram equações de planos específicos na construção. E na conversão do registro gráfico para o simbólico, quando foi necessário obter a equação da quádrlica. Envolvidos num processo de fazer para compreender, os participantes mobilizaram esquemas de utilização para formular hipóteses, testar suas conjecturas, refletir sobre suas ações e realizar ajustes.

As respostas obtidas por meio das representações dinâmicas, enriquecendo a representação mental do objeto matemático, contribuía para uma repetição cada vez mais precisa dessas ações em novas tentativas. Pensando-com as representações dinâmicas, os participantes mobilizavam e/ou (re)constituía esquemas de utilização. Essa apropriação tecnológica, qualificando suas apreensões figurais, também enriqueciam suas apreensões conceituais.

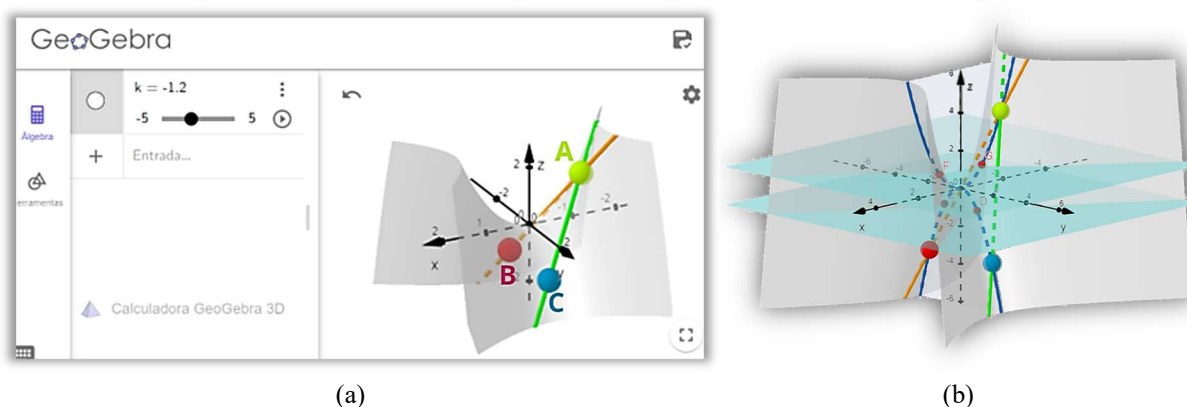
5.1.10.6 ATIVIDADE 6

O desafio proposto na atividade 6 foi a obtenção de um paraboloides hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz como superfície regrada. Para isso, na questão do item a, os

participantes foram convidados a explorar uma construção dessa quádrlica como superfície regrada. Nas questões dos itens b e c, foram propostas as conversões do registro gráfico para o simbólico das equações das parábolas assento e estribo e da quádrlica, respectivamente.

E, na questão do item d, os participantes precisaram obter a construção do parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz como superfície regrada. A questão do item a propôs a observação de uma construção dessa quádrlica, em que duas retas concorrentes ‘pintavam’ a sua representação gráfica, disponível na janela de visualização (Figura 257a).

Figura 257 – Construção de um parabolóide hiperbólico como superfície regrada.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para isso, foi fornecido um arquivo do GeoGebra, onde estão visíveis apenas as representações gráficas da quádrlica, das retas concorrentes e de três pontos. E, na janela de álgebra, só ficou visível o controle deslizante. Explorando a representação dinâmica, é possível constatar que o ponto A, de intersecção entre as retas concorrentes, move-se sobre a parábola assento. E, movimentando os pontos B e C, é possível ver que estes pertencem à parábola estribo.

No entanto, essa informação não é suficiente para resolver o problema, uma vez que não basta inserir os três pontos sobre as parábolas. A princípio, parece que a ‘chave’ dessa construção é obter as parábolas assento e estribo, inserindo o ponto A sobre a primeira e os pontos B e C simetricamente sobre a segunda. No entanto, esse não é o caminho para obter essa construção, conforme veremos na resolução do item d.

Antes disso, vamos analisar às questões propostas nos itens b e c, onde foram solicitadas as equações das parábolas assento e estribo e da quádrlica. Essas conversões das representações gráficas para as simbólicas podem ser obtidas por meio da identificação e correlação entre as unidades significantes nos dois registros de representação. Considerando que essa quádrlica tem

seções planas parabólicas e hiperbólicas, então os termos na sua representação simbólica têm variáveis de primeiro e de segundo grau e sinais contrários nos termos quadráticos.

Além disso, esse parabolóide hiperbólico tem parábola assento em oz_+ no plano xoz , logo a variável z é linear e as demais são quadráticas. Como a parábola assento está no plano xoz e tem concavidade voltada para oz_+ , os termos em x e z tem sinais positivos, logo o termo de sinal negativo é o da variável y . De fato, a parábola estribo pertence ao plano yoZ e tem concavidade voltada para oz_- , logo as variáveis y e z na sua equação tem sinais contrários.

Considerando que a variável z tem sinal positivo, o termo negativo nessa equação é o que contém a variável y . Assim, podemos dizer que a equação de um parabolóide hiperbólico tem parábola assento em oz_+ no plano xoz é da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$. A parábola assento é a que tem concavidade voltada para o semieixo positivo do eixo dos z , logo é a seção plana obtida pela intersecção dessa quádrlica com o plano xoz e tem equação da forma $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = z \\ y = 0 \end{cases}$.

Então, a parábola estribo é a seção plana obtida pela intersecção da quádrlica com o plano yoZ , tendo equação da forma $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = -z \\ x = 0 \end{cases}$. Para encontrar os valores dos coeficientes nas equações das parábolas assento e estribo, que são os mesmos na equação da quádrlica, obtemos as representações gráficas das parábolas assento e estribo. Assim, inserindo as equações dos planos $x = 0$ e $y = 0$ e obtendo as suas intersecções com a superfície, encontramos as representações gráficas das parábolas estribo e assento, respectivamente.

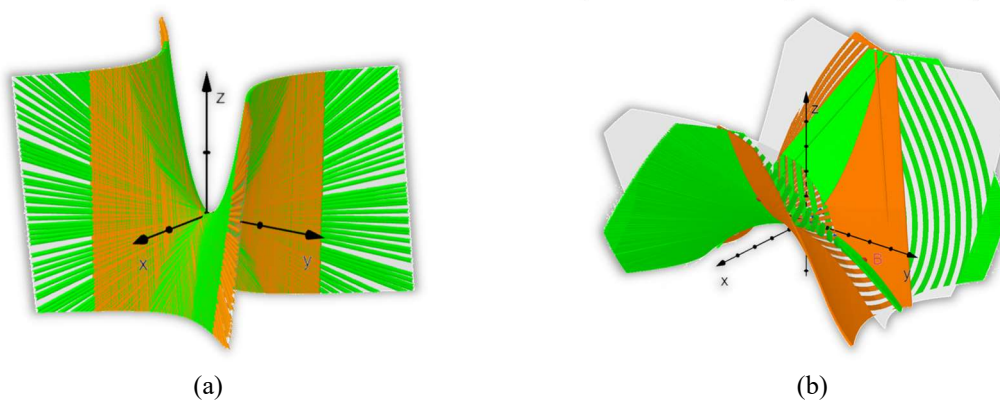
A seguir, podemos obter os pontos $(\pm 1, 0, 1)$ e $(0, \pm 1, -1)$ de intersecção das parábolas assento e estribo com os planos $z = 1$ e $z = -1$, respectivamente (Figura 257b). Substituindo as coordenadas desses pontos nas equações dessas parábolas, obtemos $a = b = 1$. Assim, as parábolas assento e estribo têm equações $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y^2 = -z \\ x = 0 \end{cases}$, respectivamente. E a equação deste parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz é dada por $x^2 - y^2 = z$.

Inserindo essas equações na janela de álgebra, obtemos as representações gráficas das cônicas e da quádrlica, esta última sobrepondo-se à que já se encontra na janela de visualização. E na questão do item d, os participantes foram desafiados a obter o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoZ como superfície regrada. Para isso, foi disponibilizado um arquivo com a representação gráfica da quádrlica em cinza claro e com a representação simbólica $y^2 - x^2 = z$ escondida na janela de álgebra.

A representação gráfica na questão do item a sugere que, inserindo um ponto sobre a parábola assento e os outros dois simetricamente sobre a parábola estribo, podemos obter a superfície regrada. Considerando que o ponto A pertence à parábola assento, a sua cota é o quadrado da sua ordenada, logo $A(0, k, k^2)$ onde $k \in \mathbb{R}$. E os pontos B e C pertencem à parábola estribo, então as suas cotas são os quadrados das suas abscissas, com sinais contrários.

Ainda, para que os pontos B e C sejam simétricos em relação ao eixo dos z, as suas abscissas precisam ter sinais contrários, logo $B(k, 0, -k^2)$ e $C(-k, 0, -k^2)$ para $k \in \mathbb{R}$. Inserindo esses pontos na janela de álgebra e obtendo as retas concorrentes que passam por A e B e por A e C, obtemos a superfície regrada da Figura 258a.

Figura 258 – Proposta para construção de paraboloides hiperbólicos como superfície regrada (parte 1).



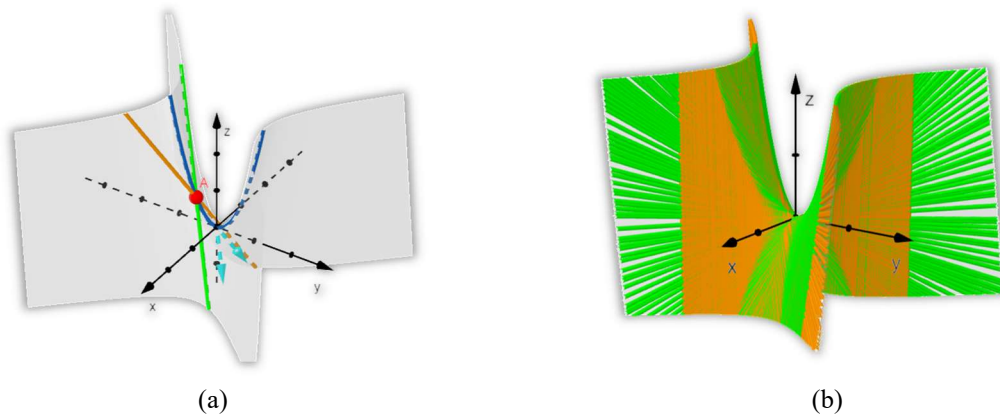
Fonte: Elaborado pela autora.

No entanto, ocorre que essas retas concorrentes não existem quando $k = 0$. De fato, se $k = 0$, então $A = B = C = (0,0,0)$. Utilizando esse procedimento com o paraboloides hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$, obtemos os pontos $A(k, 0, \frac{k^2}{4})$, $B(0, k, -\frac{k^2}{9})$ e $C(0, -k, -\frac{k^2}{9})$, $k \in \mathbb{R}$. Inserindo as retas concorrentes que passam por A e B e por A e C, podemos observar na Figura 258b, que não geram essa quádrlica.

Essas retas concorrentes têm $\overrightarrow{BA} = (k, -k, \frac{13}{36}k^2)$ e $\overrightarrow{CA} = (k, k, \frac{13}{36}k^2)$ como vetores direcionais, que não correspondem às direções das retas que pertencem a essa superfície para todo $k \in \mathbb{R}$. Os vetores direcionais das retas concorrentes o paraboloides hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$ são dados por $\vec{v} = (2, \pm 3, k)$, $k \in \mathbb{R}$ (Figura 259a).

Esse vetor pode ser obtido considerando um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ que pertence à parábola assento de equação $\begin{cases} \frac{x^2}{4} = z \\ y = 0 \end{cases}$. Assim, as coordenadas de P ficam $x_0 = k, y_0 = 0$ e $z_0 = \frac{k^2}{4}, k \in \mathbb{R}$. Considerando a reta de equação $r = (k, 0, \frac{k^2}{4}) + (a_1, a_2, a_3)t, k \in \mathbb{R}$, que passa pelo ponto $(k, 0, \frac{k^2}{4})$ da parábola e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$.

Figura 259 – Proposta para construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada (parte 2).



Fonte: Elaborado pela autora.

Se a reta r pertence à quádrica, fazendo $x = k + a_1t, y = a_2t$ e $z = \frac{k^2}{4} + a_3t$ ($k \in \mathbb{R}$) na equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$ da quádrica, temos que:

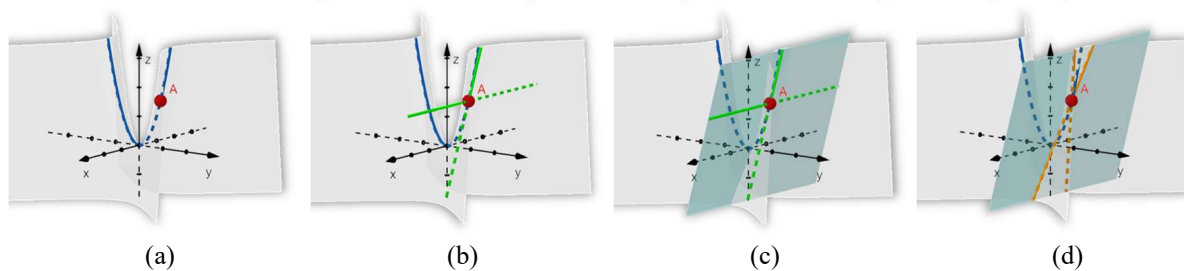
$$\begin{aligned} \frac{(k + a_1t)^2}{4} - \frac{a_2^2t^2}{9} &= \frac{k^2}{4} + a_3t \\ \frac{k^2 + 2ka_1t + a_1^2t^2}{4} - \frac{a_2^2t^2}{9} - \frac{k^2}{4} - a_3t &= 0 \\ \frac{k^2}{4} + \frac{2ka_1t}{4} + \frac{a_1^2t^2}{4} - \frac{a_2^2t^2}{9} - \frac{k^2}{4} - a_3t &= 0 \\ \left(\frac{a_1^2}{4} - \frac{a_2^2}{9}\right)t^2 + \left(\frac{2ka_1}{4} - a_3\right)t &= 0 \\ \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_2^2}{9} = 0 \text{ e } \frac{2ka_1}{4} - a_3 = 0 \\ a_2 = \pm \frac{3}{2}a_1 \text{ e } a_3 = \frac{k}{2}a_1 \end{aligned}$$

Tomando $a_1 = 2$, os vetores que dão as direções para as retas concorrentes são dados por $\vec{u} = (2, 3, k)$ e $\vec{v} = (2, -3, k)$, $k \in \mathbb{R}$. Então, inserindo as retas que passam pelo ponto $A(k, 0, \frac{k^2}{4})$ e tem \vec{u} e \vec{v} como vetores direcionais, obtemos essa quádrlica como superfície regradada. E, por fim, habilitando rastro nas retas concorrentes e animação no ponto A, as retas ‘pintam’ o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz (Figura 259b).

No entanto, há outra forma de encontrar essa superfície regradada, uma vez que tenha sido dada a representação gráfica da superfície quádrlica. Assim como no hiperboloide de uma folha, as duas retas concorrentes podem ser obtidas da intersecção de um plano com o parabolóide hiperbólico. O desafio é descobrir que plano é esse e como obtê-lo. Nesse caso, vamos obter o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz de equação $y^2 - x^2 = z$ como superfície regradada.

Primeiro, obtemos a parábola assento pela intersecção dessa quádrlica com o plano de equação $x = 0$, e inserimos um ponto móvel A sobre essa cônica (Figura 260a). Pelo ponto A, obtemos um plano tangente a essa cônica que, interceptando a quádrlica, dá origem às retas concorrentes que geram essa superfície. Esse plano pode ser obtido por meio de duas retas que passam no ponto A, uma tangente à parábola e outra paralela ao eixo dos y (Figura 260b).

Figura 260 – Proposta para construção do parabolóide hiperbólico como superfície regradada (parte 3).



Fonte: Elaborado pela autora.

A reta tangente pode ser obtida usando a ferramenta ‘Reta tangente’ e selecionando o ponto A e a parábola. A outra reta pode ser obtida com a ferramenta ‘Reta paralela’, selecionando o ponto A e o eixo dos y . Então, usando a ferramenta ‘Plano’ e selecionando essas duas retas, obtemos o plano tangente à parábola assento em A (Figura 260c). A seguir, obtemos as retas concorrentes pela intersecção desse plano com o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz (Figura 260d).

E, habilitando rastro nas retas concorrentes e animação no ponto A, podemos observar o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz sendo gerado como superfície regradada. Essa questão não foi aplicada com o participante P1, e os participantes P2 e P3

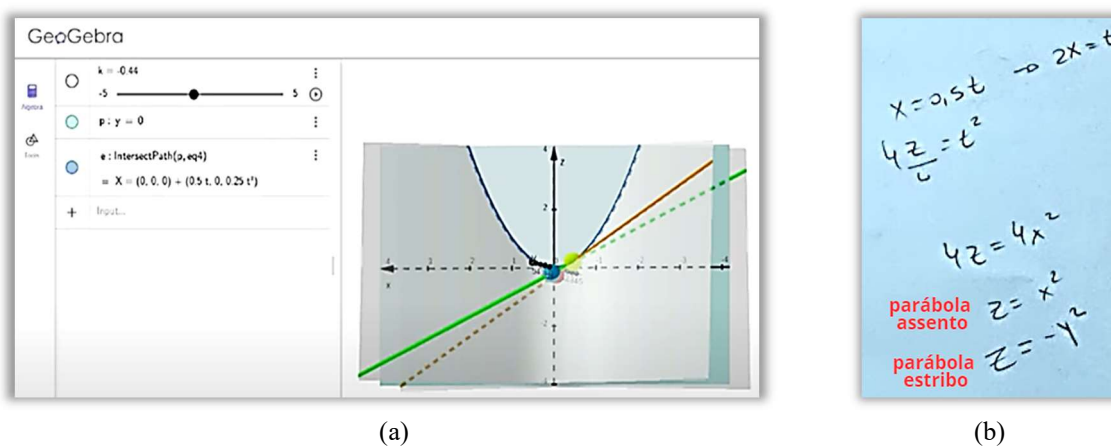
obtiveram essa construção de formas distintas. P2 obteve a construção encontrando as retas concorrentes como seções planas da quádrlica sobre um plano tangente à parábola assento.

E P3 utilizou um ponto da parábola assento e os vetores direcionais das retas concorrentes para obter a construção. Nesse caso, uma questão adicional foi proposta, para que o participante explorasse o procedimento algébrico para obtenção dos vetores direcionais dessas retas. Esse procedimento consistiu de dois passos, um para obter o ponto de intersecção das retas concorrentes e outro para calcular os seus vetores direcionais.

A seguir, apresentamos os dados da implementação dessa atividade com os participantes P2 e P3, juntamente com a análise das suas condutas cognitivas. O participante P3 iniciou observando o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz sendo ‘pintado’ pelas retas concorrentes no arquivo do GeoGebra disponibilizado na questão do item a. Referindo-se ao ponto (amarelo) sobre a parábola assento, P3 disse: “*Tem um percorrendo a parábola aqui*”.

E, falando dos pontos (azul e vermelho) pertencentes à parábola estribo, completou: “*E a azul e a vermelha estão fazendo a mesma função?*” Para obter as equações das parábolas assento e estribo na questão do item b, P3 girou a representação dinâmica da quádrlica de forma que o plano da parábola assento (plano xoz) coincidissem com o plano de fundo da janela de visualização (Figura 261a). Então, P3 inseriu a equação $y = 0$ do plano xoz , obtendo a representação gráfica da parábola assento, como intersecção desse plano com a quádrlica.

Figura 261 – Tratamentos gráficos e algébricos para conversão do registro gráfico para o simbólico do parabolóide hiperbólico por P3.



(a)

(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

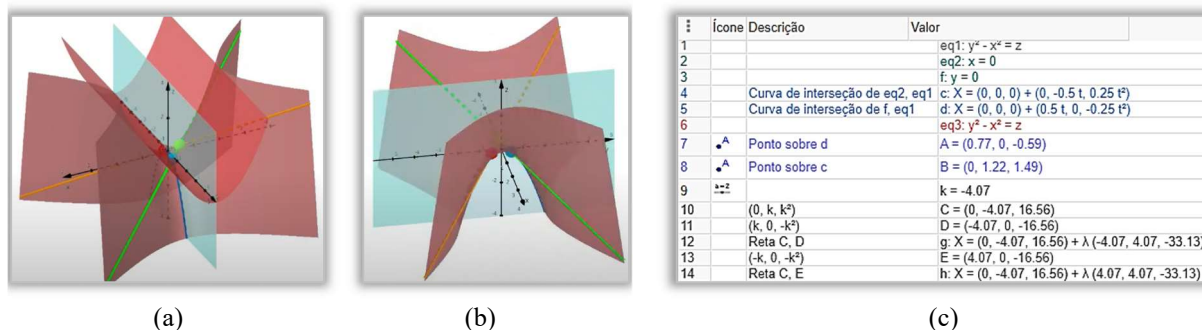
Depois, P3 fez o mesmo com a parábola estribo, girando a representação dinâmica para que o plano da parábola estribo (plano yoz) coincidissem com o plano de fundo da janela de visualização. E, inserindo a equação $x = 0$ do plano yoz , obteve a representação gráfica da parábola estribo como intersecção desse plano com a quádrlica. Então, P3 observou as equações

paramétricas $X = (0,0,0) + (0.5t, 0, 0.25t^2)$ e $X = (0,0,0) + (0, -0.5t, -0.25t^2)$, respectivamente, das parábolas assento e estribo na janela de álgebra. E, realizando os tratamentos algébricos sobre essas equações, P3 obteve e registrou as seguintes representações simbólicas: “ $z = x^2$ e $z = -y^2$ ” (Figura 261b).

Obtendo as representações gráficas dessas equações, P3 constatou que essas são equações de superfícies cilíndricas parabólicas, corrigindo o seu registro escrito: “ $z = x^2$ para o plano $y = 0$ (Figura 262a) e $z = -y^2$ para o plano $x = 0$ (Figura 262b)”. E, na questão do item c, registrou a seguinte equação do parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz : “ $z = x^2 - y^2$ ”.

Para chegar nessa equação, P3 mobilizou esquemas conceituais que lhe permitiram relacionar as equações das parábolas assento $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ e estribo $\begin{cases} z = -y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ com a equação $x^2 - y^2 = z$ da quádrlica. E, inserindo essa equação na janela de álgebra, P3 observou que a quádrlica obtida sobrepôs-se exatamente a que estava na janela de visualização.

Figura 262 – Conversão e construção do parabolóide hiperbólico como superfície regradada por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa ocasião, P3 disse: “*Sabe que sai de modo já natural assim. Tipo, eu não precisei pensar muito no que fazer assim*”. Essa fala condiz com as condutas cognitivas de P3, observadas durante a conversão do registro gráfico para o simbólico das parábolas assento e estribo e da quádrlica. Essa conversão envolveu a mobilização de esquemas de utilização para identificação e correlação de unidades significantes nos dois registros de representação.

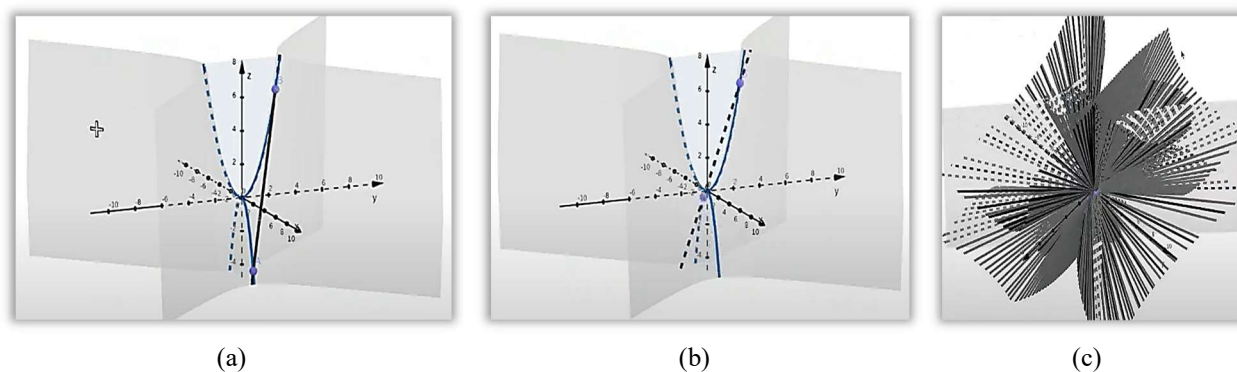
Realizando os devidos tratamentos gráficos, como girar a representação dinâmica e obter as seções planas parabólicas, o participante identificou as variáveis visuais necessárias para a conversão. Relacionando essas unidades significantes com as simbólicas, com adequados tratamentos algébricos, o participante obteve as representações simbólicas. O participante mobilizou espontaneamente esses esquemas de utilização, como foi possível ver nas suas

condutas cognitivas e também na sua fala, o que consiste em evidência da coordenação desses registros de representação.

O protocolo de construção de P3 apresenta alguns dos passos realizados pelo participante na questão do item d (Figura 262c). Porém, para obter o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz como superfície regrada, o participante percorreu caminhos que não ficaram registrados nesse protocolo. Assim, a seguir apresentamos os resultados do cruzamento dos dados obtidos do protocolo de construção, da observação *in loco* e da gravação.

P3 iniciou a sua construção, obtendo as parábolas assento e estribo. Para isso, o participante inseriu as equações $x = 0$ (plano yoz) e $y = 0$ (plano xoz), obtendo as parábolas assento e estribo como intersecções desses planos com a quádrica, respectivamente. Conjecturando que apenas uma das retas concorrentes seria necessária para obter a superfície regrada, P3 inseriu um ponto A sobre a parábola estribo e um ponto B sobre a parábola assento, obtendo uma reta g que passa por A e B (Figura 263a).

Figura 263 – Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

E, habilitando a animação dos pontos A e B, P3 observou o movimento da reta, que nem sempre pertencia à quádrica (Figura 263b). Então, habilitou também o rastro das retas, observando a imagem da Figura 263c. Com base nessa resposta da representação dinâmica, perguntamos ao participante o que teria faltado para obter a superfície regrada, ao que P3 respondeu: “*O problema é que os teus (construção da questão a) eles estão limitados, né. E aqui ele tá entrando aqui e saindo aqui. E daí tem que cortar, né. Teria que pôr um limite. Só se eu orientar o ponto A. Teria que criar um ponto orientado por um k* ”.

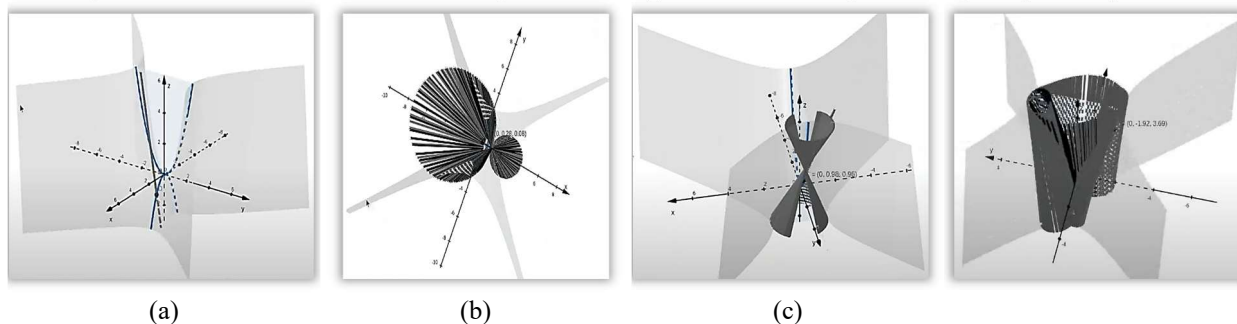
Então, o participante obteve a representação simbólica $y^2 - x^2 = z$ dessa quádrica para obter as coordenadas de pontos sobre as parábolas assento e estribo. Então, P3 inseriu o ponto $C(k, 0, k^2)$ e, observando que o ponto não pertencia à parábola assento, corrigiu a abscissa e a

cota desse ponto, escrevendo $C(0, k, k^2)$. P3 constatou que um ponto sobre a parábola assento dessa quádrica tinha abscissa nula e cota $z = y^2$.

E, considerando que um ponto sobre a parábola estribo tem ordenada nula e cota $z = -x^2$, P3 inseriu o ponto $D(j, 0, -j^2)$. Ao inserir os pontos C e D, foram gerados dois controles deslizantes, com os parâmetros k e j (Figura 264a). Então, P3 obteve uma reta que passa por C e D. Habilitando o rastro dessa reta e a animação do parâmetro k , P3 observou a imagem da Figura 264b, dizendo: “O resultado está saindo fora”.

E, experimentando a animação do parâmetro j , P3 observou a imagem da Figura 264c. Animando os dois controles deslizantes ao mesmo tempo, quando k e j assumiam valores distintos, P3 obteve a imagem da Figura 264d. Depois, P3 tentou fazer com que os dois controles deslizantes variassem juntos, ou seja, com valores de k e j iguais.

Figura 264 – Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regradada por P3 (parte 2).



Fonte: Dados da pesquisa.

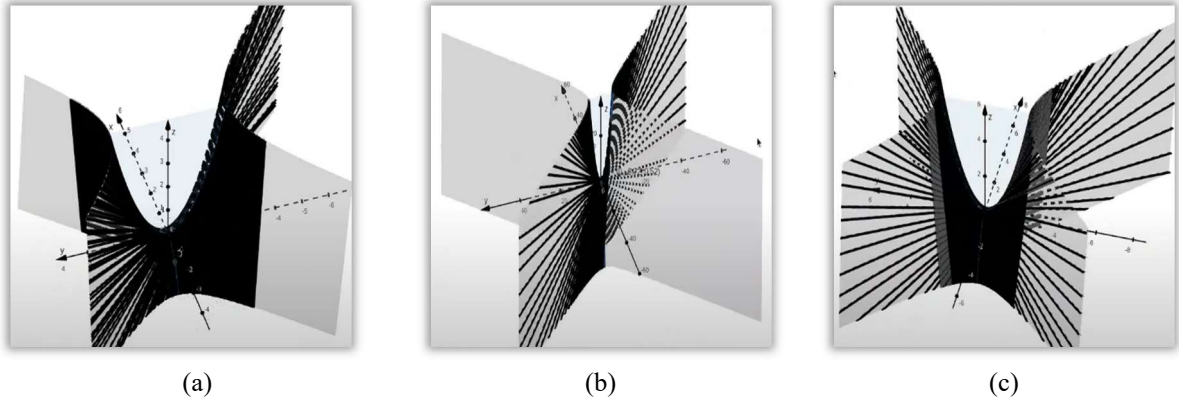
Então, P3 percebeu que isso poderia ser feito utilizando apenas um controle deslizante para os dois pontos C e D. Então, P3 reescreveu as coordenadas do ponto D em função do parâmetro k , obtendo $D(k, 0, -k^2)$. Habilitando a animação do controle deslizante, P3 observou parte do parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz sendo gerado pela reta que passa pelos pontos C e D (Figura 265a).

Com o *feedback* desse objeto de pensar-com, P3 refutou a hipótese de que apenas uma das retas seria suficiente para gerar a superfície regradada. Aplicando o zoom na representação dinâmica, P3 observou com mais clareza que essa reta gerava apenas parte da superfície (Figura 265b). Então, inserindo o ponto $E(-k, 0, -k^2)$ simétrico do ponto D sobre a parábola estribo, P3 obteve a outra reta concorrente passando por E e C.

Habilitando o rastro dessa reta e animação do controle deslizante, P3 observou as retas concorrentes ‘pintando’ o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz (Figura 265c). No entanto, conforme a discussão proposta anteriormente, esse procedimento ainda não é a solução desse problema. Para que o próprio participante chegasse a essa constatação,

propomos a realização do mesmo procedimento com o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$.

Figura 265 – Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3 (parte 3).

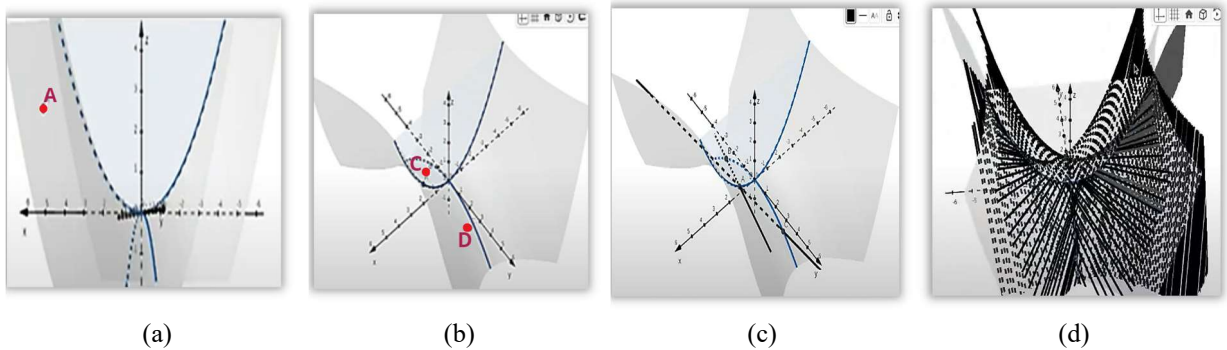


Fonte: Dados da pesquisa.

P3 inseriu a equação da quádrlica na janela de álgebra, trocando a cor da sua representação gráfica para cinza claro. A seguir, obteve as parábolas assento e estribo pelas intersecções da quádrlica com os planos $y = 0$ (plano xoz) e $x = 0$ (plano yoZ), respectivamente. O participante obteve as coordenadas do ponto A por meio da equação da parábola assento $X = (0,0,0) + (2t, 0, t^2)$ dessa quádrlica. Fazendo $t = k$ nessa equação, obtemos $x = 2k$ e $z = k^2$, coordenadas do ponto $A(2k, 0, k^2)$ da parábola assento.

Na hora de inserir o ponto, P3 escreveu $A(2k, 0, k)$, obtendo um ponto que não pertencia a essa parábola. E, animando o controle deslizante e girando a superfície, P3 disse: “Ah, tá fora ali. Mas esse não seria o ponto?” Refletindo sobre o problema encontrado, P3 percebeu o erro e corrigiu a cota do ponto $A(2k, 0, k^2)$. E, habilitou a animação do controle deslizante, observou o ponto A deslizar sobre a parábola assento (Figura 266a).

Figura 266 - Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3 (parte 4).



Fonte: Dados da pesquisa.

Depois, P3 inseriu os pontos $B(0, -2k, k^2)$ e $C(0, 2k, k^2)$ sobre a parábola estribo e, habilitando novamente a animação do controle deslizante, observou que esses pontos nem sempre pertenciam à parábola estribo (Figura 266b).

Então, perguntamos ao participante como obteve as coordenadas dos pontos B e C, ao que P3 respondeu: “*Eu estava pensando na proporção aqui*”. Entendemos que P3 queria garantir que os pontos B e C ficassem a mesma distância do plano xoy que o ponto A. Em seguida, P3 tem uma tomada de consciência, quando reconheceu o erro. P3 percebeu que as coordenadas desses pontos precisariam satisfazer a equação da parábola estribo, corrigindo-as.

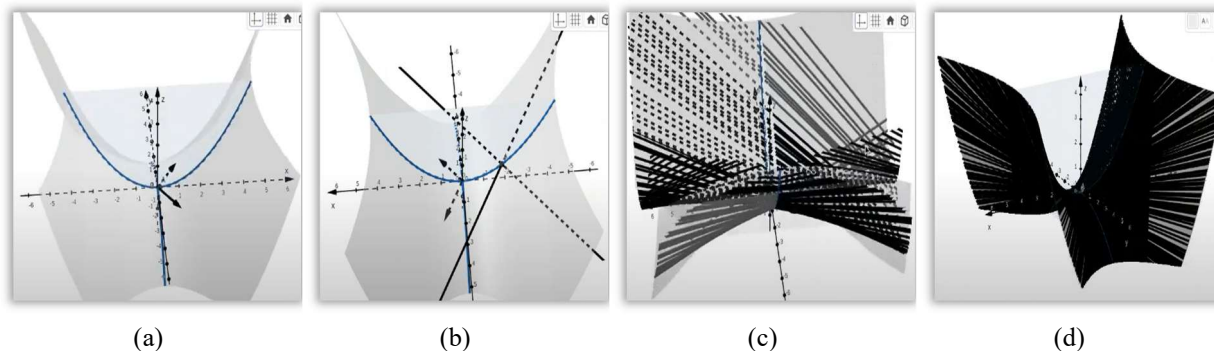
Com base na equação paramétrica $X = (0, 0, 0) + (0, -4.5t, -2.25t^2)$ da parábola estribo, P3 reescreveu as coordenadas desses pontos, ficando $B(0, -4.5k, -2.25k^2)$ e $C(0, 4.5k, -2.25k^2)$. Animando novamente o controle deslizante, P3 observou os pontos B e C movendo-se sempre sobre a parábola estribo. Então, P3 obteve as retas g e h concorrentes em A e que passam por B e C, respectivamente (Figura 266c).

Habilitando os rastros das retas g e h e a animação do controle deslizante, P3 obteve a representação dinâmica da Figura 266d. A superfície obtida não se sobrepôs exatamente à inserida anteriormente na janela de visualização e P3 comentou: “*Ela está fora aqui*”. Então, procurando alguma inconsistência, P3 observou as coordenadas dos pontos C e D na janela de álgebra, dizendo: “*Os dois estão fora, né*”. O participante constatou que as retas concorrentes nem sempre pertenciam à superfície.

Então, foi proposta a obtenção das retas concorrentes pelo procedimento algébrico que possibilita obter o ponto da parábola assento e os vetores direcionais dessas retas. P3 explorou um exemplo desse procedimento, aplicando ao parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$. Assim, P3 obteve os vetores direcionais $\vec{u} = (1, -\frac{3}{2}, \frac{k}{2})$ e $\vec{v} = (1, \frac{3}{2}, \frac{k}{2})$ das retas concorrentes. Inserindo \vec{u} e \vec{v} na janela de álgebra, P3 habilitou a animação do controle deslizante, observando o movimento dos vetores (Figura 267a).

A seguir, P3 inseriu o ponto $B = A + \vec{u}$, para obter a reta que passa por A e B. Porém, analisando novamente o procedimento algébrico, escolheu inserir as equações vetoriais das retas concorrentes, usando o ponto $A(2k, 0, k^2)$ da parábola assento e os vetores direcionais $\vec{u} = (1, -\frac{3}{2}, \frac{k}{2})$ e $\vec{v} = (1, \frac{3}{2}, \frac{k}{2})$. P3 inseriu a reta $r = A + \vec{v}t$ e, dizendo “*Será que está certo isto?*”, girou a representação dinâmica para observar se a reta estava contida na superfície (Figura 267b).

Figura 267 - Processo de construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P3 (parte 5).



(a)

(b)

(c)

(d)

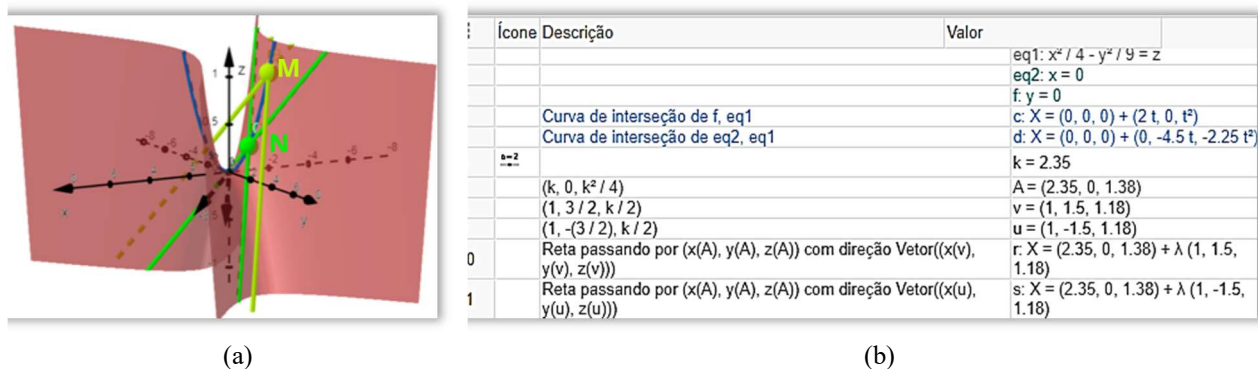
Fonte: Dados da pesquisa.

Depois, P3 inseriu a reta $s = B + \vec{u}t$ e, habilitando a animação do controle deslizante e o rastro das retas concorrentes, observou que ainda não geravam a quádrlica (Figura 267c). Então, P3 conjecturou que o erro poderia estar nas coordenadas do ponto A, de intersecção entre as retas concorrentes. E testando sua hipótese, P3 reescreveu as suas coordenadas com base na equação $\begin{cases} y = 0 \\ z = \frac{x^2}{4} \end{cases}$ da parábola assento, ficando $A(k, 0, \frac{k^2}{4})$. Obtendo a superfície regrada que se sobrepôs exatamente a que já se encontrava na janela de visualização (Figura 267d).

As coordenadas dos pontos $(2k, 0, k^2)$ e $(k, 0, \frac{k^2}{4})$ foram obtidas, respectivamente, a partir das equações $X = (0,0,0) + (2t, 0, t^2)$ e $\begin{cases} y = 0 \\ z = \frac{x^2}{4} \end{cases}$ da parábola assento. No entanto, apesar de ambos os pontos pertencerem à parábola assento, P3 não obteve a quádrlica utilizando o primeiro. Para entender o ocorrido, vamos considerar os pontos $(2k, 0, k^2)$ e $(k, 0, \frac{k^2}{4})$, respectivamente, M e N na Figura 268a.

De fato, as retas concorrentes que passam por M (amarelas) não pertencem à quádrlica, ao contrário das que passam por N (verdes), que geram o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz como superfície regrada. O problema é que P3 obteve os vetores direcionais das retas concorrentes utilizando o ponto N no procedimento algébrico. Os vetores direcionais relativos ao ponto M seriam $\vec{a} = (2, 3, 2k)$ e $\vec{b} = (2, -3, 2k)$, $k \in \mathbb{R}$. Dessa forma, as retas concorrentes poderiam ser obtidas utilizando o ponto M e os vetores \vec{a} e \vec{b} , ou ainda, com o ponto N e os vetores \vec{u} e \vec{v} .

Figura 268 - Construção do parabolóide hiperbólico como superfície regradada por P3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados do protocolo de construção foram cruzados com os dados obtidos pela análise da observação *in loco* e da gravação (Figura 268b). Foi possível observar que P3 mobilizou esquemas de utilização para formular hipóteses e, usando as representações dinâmicas, testar suas conjecturas. Refletindo sobre os *feedbacks* oriundos desses objetos de pensar-com, P3 fazia os ajustes baseando-se em novas hipóteses, que iam sendo formuladas de forma cada vez mais precisa até a obter a construção.

Num processo de fazer para compreender, os esquemas de utilização ora mobilizados e ora constituídos davam condições ao participante para avançar. Esses esquemas foram os relacionados a ponto, reta, plano, vetor, parábola, intersecção de superfícies, entre outros. Além disso, P3 inseria elementos considerando a ordem de inserção e relação entre eles, vinculando-os também por meio do controle deslizante e verificando a estabilidade da construção.

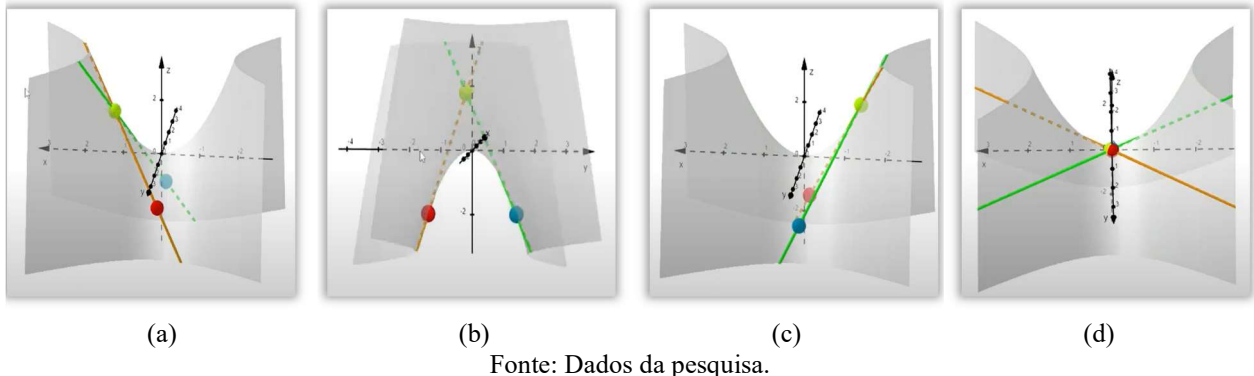
O participante P2 apresentou algumas reações de surpresa com a proposta da atividade 6. Ao iniciar essa atividade, o participante P2 disse: “Ah, é a sela. Que loucura! Agora o bicho pega”. Então, na questão do item a, P2 abriu o arquivo do GeoGebra e, observando as retas concorrentes ‘pintando’ a sela disse: “Olha lá! Meu Deus! Bah, que louco!” E, tirando o rastro das retas concorrentes e observando o movimento delas, disse: “Caraca! Meu Deus!”

A surpresa demonstrada por P2 pode estar relacionada ao fato de ser possível gerar um parabolóide hiperbólico a partir de duas retas concorrentes. O que é compreensível, uma vez que uma das SEAI propôs a descoberta da seção plana de um parabolóide hiperbólico no plano xoy que eram retas concorrentes. As demais seções planas eram parábolas ou hipérbolas, porque o estudo se limitou a obter cortes das superfícies quádricas por planos coordenados. Assim, talvez P2 não imaginasse que essa quádrica tem infinitas retas concorrentes como seções planas.

Então, perguntamos ao participante como ele entendia a construção. A Figura 269 mostra uma série de movimentos, dos pontos, das retas e da quádrica, que P2 realizou para

responder à pergunta. Então, com base na observação da representação dinâmica, P2 respondeu: “Eu estou vendo que o ponto amarelo se move sobre a parábola assento e que as retas concorrentes estão fixas neste ponto. E o que comanda o abre e fecha é a parábola estribo”.

Figura 269 – Identificação de valores visuais para conversão do registro gráfico para o simbólico parabolóide hiperbólico por P2.

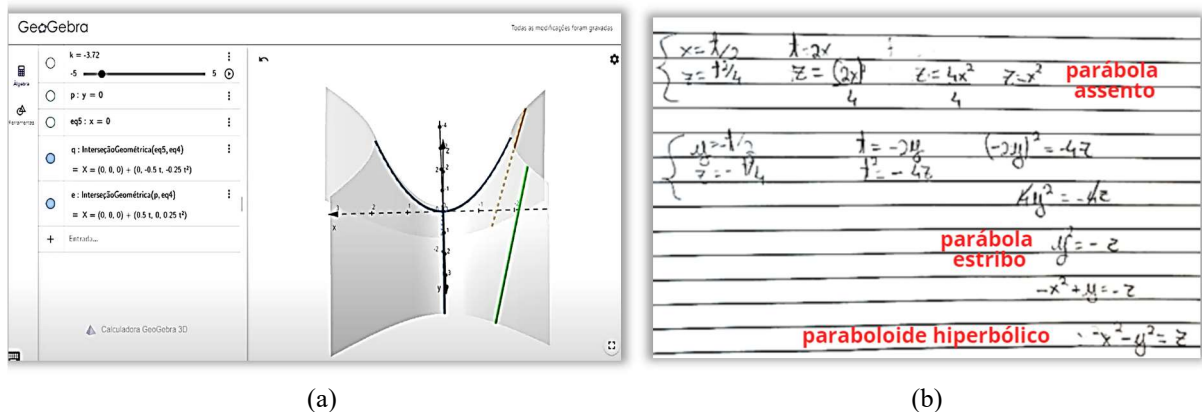


Fonte: Dados da pesquisa.

O participante observou os elementos visíveis na representação dinâmica e a dependência entre estes, mas essa leitura da construção não foi suficiente para obtê-la, como veremos na questão do item d. Antes, vamos apresentar os passos percorridos por P2 para realizar as conversões do registro gráfico para o simbólico, propostas nas questões dos itens b e c.

Para obter as equações das parábolas assento e estribo na questão do item b, P2 inseriu os planos $x = 0$ e $y = 0$, obtendo essas seções planas sobre os planos yoz e xoz , respectivamente (Figura 270a). Então, P2 obteve as representações simbólicas das equações das parábolas assento e estribo a partir das equações paramétricas disponíveis na janela de álgebra do GeoGebra.

Figura 270 – Tratamentos gráficos e algébricos para a conversão do registro gráfico para o simbólico parabolóide hiperbólico por P2.



(a)

(b)

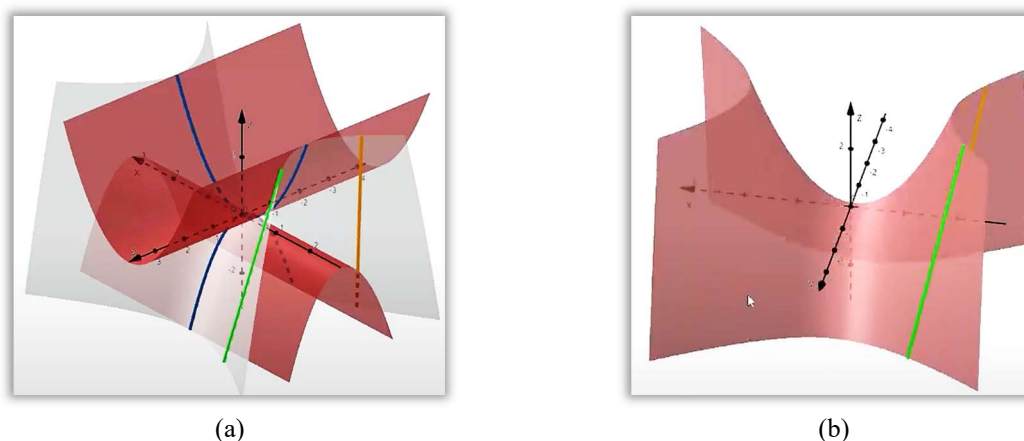
Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 270b apresenta os tratamentos algébricos realizados por P2, para obter as equações das parábolas assento e estribo e da quádrlica. Observando a equação paramétrica $X = (0,0,0) + (0.5t, 0, 0.25t^2)$, resultante da obtenção da parábola assento pela intersecção da quádrlica pelo plano yoZ , P2 obteve e registrou: “ $z = x^2$ e $y = 0$ “. E realizando os tratamentos algébricos sobre a equação paramétrica $X = (0,0,0) + (0, -0.5t, -0.25t^2)$, P2 obteve a representação simbólica da parábola estribo, registrando: “ $-z = y^2$ e $x = 0$ “.

E, inserindo as equações $z = x^2$ e $z = -y^2$ na janela de álgebra, P2 obteve as superfícies cilíndricas parabólicas da Figura 271a. Quando inseriu a primeira superfície cilíndrica, esperando obter uma parábola, ficou surpreso com a representação gráfica obtida. No entanto, girando a representação dinâmica, observou que a parábola assento era a intersecção entre o parabolóide hiperbólico e a superfície cilíndrica.

E, observando o mesmo ocorria com a outra superfície cilíndrica, P2 obteve a equação do parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz , registrando: “ $x^2 - y^2 = z$ “ (Figura 271a). Essa representação simbólica foi obtida a partir das equações das suas seções planas. Assim, P2 precisou pensar que se $z = x^2$ quando $y = 0$ (parábola assento) e $z = -y^2$ quando $x = 0$ (parábola estribo), então a equação da quádrlica seria $x^2 - y^2 = z$.

Figura 271 - Conversão do registro gráfico para o simbólico parabolóide hiperbólico por P2.



Fonte: Dados da pesquisa.

E, inserindo essa equação na janela de álgebra, P2 obteve a representação gráfica que se sobrepôs exatamente à disponível na janela de visualização (Figura 271b). Dessa forma, P2 mobilizou esquemas de utilização para realizar os tratamentos sobre a representação gráfica da quádrlica, obtendo as unidades significantes necessárias para a conversão. Esses tratamentos

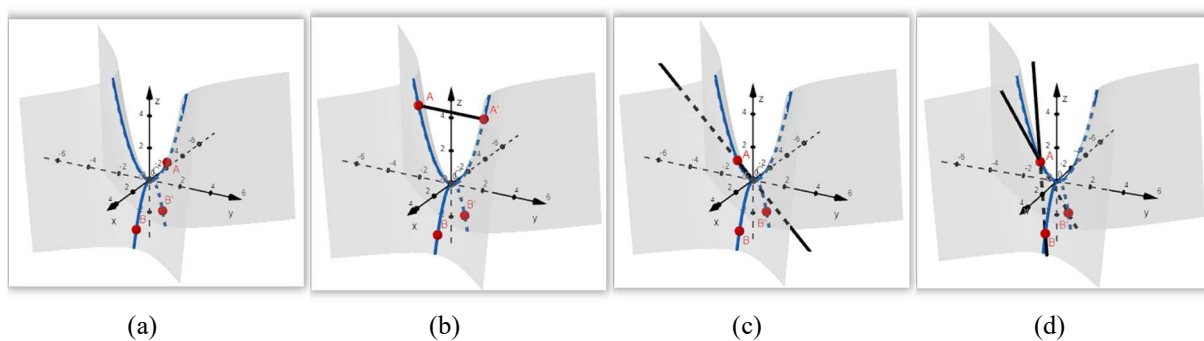
gráficos consistiram na intersecção de superfícies para obtenção das parábolas assento e estribo, dando origem às suas equações paramétricas.

Realizando os tratamentos algébricos sobre essas unidades significantes, P2 obteve as representações simbólicas das parábolas assento e estribo e, por consequência, da superfície quádrlica. Com isso, vimos que o participante reconhece as representações nos diferentes registros e realiza os tratamentos adequados para a conversão. A forma espontânea como P2 correlacionou as representações, realizando a conversão, consiste em evidências da coordenação dos registros de representação.

Na questão do item d, para obter o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz de equação $y^2 - x^2 = z$ como superfície regradada, P2 iniciou obtendo as parábolas assento e estribo. Para isso, P2 inseriu os planos de equação $x = 0$ e $y = 0$ e obteve as parábolas estribo e assento como intersecções da quádrlica com os planos yoz e xoz , respectivamente (Figura 272a).

Com base na leitura que fez da construção ao iniciar a atividade, P2 supôs que teria que inserir um ponto sobre a parábola assento e outros dois, simétricos em relação ao plano yoz , sobre a parábola estribo. Então, P2 inseriu os pontos A sobre a parábola assento e B e B' sobre a parábola estribo, sendo B' a reflexão de B em relação ao plano yoz .

Figura 272 – Processo para construção do parabolóide hiperbólico como superfície regradada por P2 (parte 1).



Fonte: Dados da pesquisa.

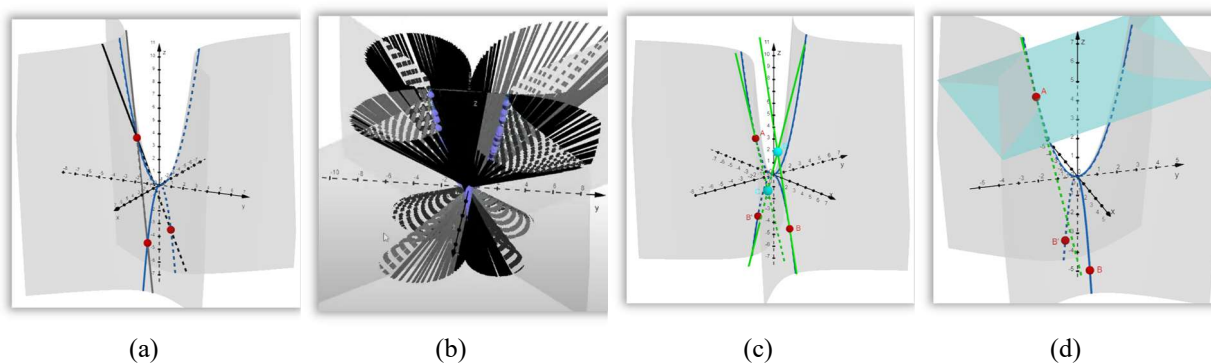
A seguir, P2 obteve o ponto A' de reflexão do ponto A em relação ao eixo dos z , inserindo um segmento de reta $\overline{AA'}$ (Figura 272b). Experimentando o movimento do ponto A, P2 disse: “*Não é isso*”, apagando o segmento de reta e o ponto A'. A inserção desse segmento pode ter sido baseada na construção do hiperbolóide de uma folha como superfície regradada, quando o participante obteve o plano das retas concorrentes usando um segmento da seção plana circular (raio).

Então, P2 obteve uma reta que passa por A e pela origem do sistema cartesiano, observando o seu comportamento diante da animação do ponto A (Figura 272c). Refutando a hipótese, P2 apagou novamente essa reta, obtendo as retas concorrentes em A e que passam pelos B e B' (Figura 272d). Habilitando a animação do ponto A, P2 observou que as retas concorrentes nem sempre pertenciam à superfície.

E, habilitando a animação do ponto B e observando o comportamento das retas, P2 disse: “*Elas não estão muito em sincronia*” (Figura 273a). Ainda assim, P2 habilitou o rastro das retas concorrentes e observando o resultado, disse: “*Nossa! Que horrível! Está faltando coisa*” (Figura 273b). Então, perguntamos o que estaria faltando para obter as retas concorrentes, ao que P2 respondeu: “*Eu acho que é alguma coisa em relação a um plano*”.

Entendemos que P2 remete-se novamente à obtenção do hiperboloide de uma folha como superfície regrada, em que a ‘chave’ da construção era a obtenção de um plano. P2 estava correto na sua suposição e, então, perguntamos o que precisaria acontecer para que as retas concorrentes gerassem a superfície. P2 respondeu que “*Elas têm que estar as duas sobre a superfície*”.

Figura 273 – Processo para construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P2 (parte 2).



Fonte: Dados da pesquisa.

Pelas respostas, o participante reconheceu que as retas concorrentes precisam pertencer à superfície. E, parece que também descobriu a ‘chave’ da construção, que consiste na obtenção do plano tangente à parábola assento. Então, o participante P2 seguiu formulando algumas hipóteses e testando-as por meio da representação dinâmica. P2 experimentou inserir o ponto de intersecção entre as parábolas assento e estribo e desistiu, apagando-o em seguida.

P2 experimentou inserir uma reta tangente à parábola assento, usando a ferramenta ‘Reta tangente’. Porém, P2 selecionou os pontos A e B para obter a reta tangente, em lugar do ponto A e da parábola assento. Quando a atividade é oferecida usando o recurso ‘Tarefas’, não aparece

a descrição dos elementos necessários para a utilização da ferramenta, podendo ter sido este um dos motivos para a escolha errada dos elementos da construção.

O ícone no botão dessa ferramenta também não favorece a compreensão de que esses elementos são a curva e um ponto da curva. A outra razão está relacionada ao conhecimento do conceito de reta tangente, que talvez fosse suficiente para que P2 superasse esse obstáculo, mas o participante não conseguiu mobilizar esse esquema conceitual. Então, não conseguindo obter a reta tangente, P2 tentou encontrar outra reta usando a ferramenta ‘Reta polar ou diametral’.

Selecionando essa ferramenta, o ponto A e a parábola assento, P2 obteve uma reta tangente a essa cônica em A, dizendo: “*Isso era uma das coisas que eu queria*”. E, perguntando ao participante como essa reta era denominada, P2 respondeu: “*Aqui diz que é uma reta polar. Eu quis usar a ferramenta tangente e não consegui*”. E, dizendo que iria tentar utilizar a ferramenta ‘Tangente’ de novo, P2 selecionou essa ferramenta, o ponto A e a parábola assento.

Obtendo a reta g tangente à parábola assento em A, P2 habilitou a animação desse ponto e, observando que a reta se movia sempre tangente à parábola assento, disse: “*Ah, agora deu*”. Como foi possível ver, ao experimentar a ferramenta ‘Reta polar ou diametral’ selecionando o ponto A e a parábola assento, P2 acabou constituindo o esquema de utilização relativo à ferramenta ‘Tangente’, que requer os mesmos elementos.

A seguir, P2 inseriu a reta h, tangente à parábola estribo no ponto B. E, habilitando a animação do ponto B, observou a reta h movendo-se sempre tangente à parábola estribo. Então, P2 inseriu um ponto C sobre g e um ponto D sobre a reta h, obtendo a reta i que passa por C e D (Figura 273c). P2 observou o movimento dessa reta, quando perguntamos o que estaria tentando fazer. Parando a animação da reta no momento em que as retas g e h eram reversas, P2 respondeu: “*Eu tinha tentado colocar uma reta aqui*”, colocando o ponteiro do mouse ora sobre o ponto C e ora sobre D.

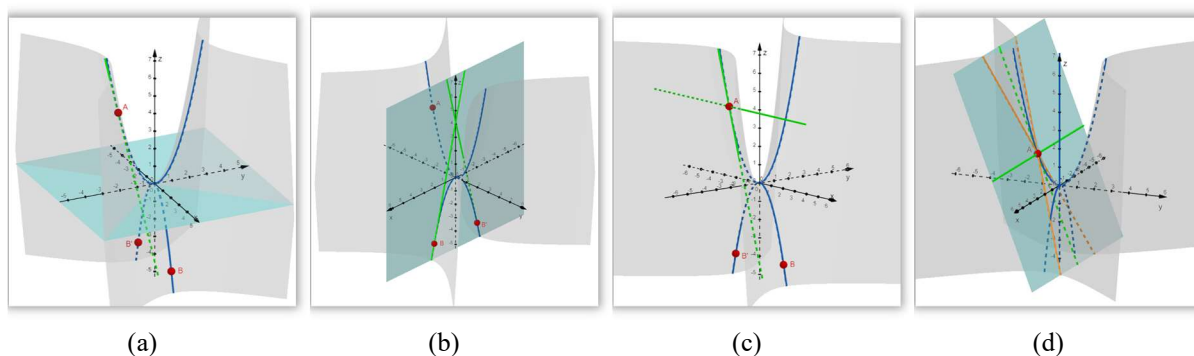
Então, perguntamos a P2 como ele havia obtido o hiperboloide de uma folha como superfície regrada, o que o remeteu ao plano tangente à superfície que já havia descoberto antes. O problema de P2 consistia na obtenção desse plano, mas a pergunta o levou a explorar as ferramentas para obtenção de planos. Então, apagou a reta i e inseriu um plano que passava por A e era perpendicular à reta g (reta tangente à parábola assento em A) (Figura 273d). Animando o ponto A, P2 disse: “*Deixa eu só ver o que ele vai fazer*”.

Então, perguntamos ao participante se ele conseguia visualizar em que local esse plano deveria estar para que, interceptando a superfície, encontrássemos as retas concorrentes. P2 respondeu que seria na origem, lembrando da seção plana dessa quádrlica com o plano *xoy*.

Então, pedimos para P2 obter esse plano (xoy), cuja intersecção com a quádrlica resulta em duas retas concorrentes.

O participante inseriu o plano de equação $z = k$, gerando um controle deslizante para o parâmetro k . Variando o valor de k , P2 observou as seções planas resultantes da sua intersecção com o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz , retas concorrentes ($k = 0$) e hipérbolés ($k \neq 0$) (Figura 274a).

Figura 274 – Processo para construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P2 (parte 3).



Fonte: Dados da pesquisa.

Perguntando a P2 como deveria obter, referindo-se ao plano tangente à parábola assento, P2 respondeu: “Era o que eu estava tentando fazer. Colocar uma reta, mas usar um plano para isso, se ele se movesse, ele ia ter as duas retas ainda”. Então, perguntamos quais as ferramentas que poderiam ser utilizadas para obter esse plano. Referindo-se às ferramentas ‘Plano perpendicular’ e ‘Plano paralelo’, P2 disse: “Eu estava tentando fazer com essas ferramentas aqui, perpendicular e paralelo”.

Assim, podemos entender mais uma vez que o participante já havia descoberto a ‘chave’ da construção, mas estava com problemas para obter o plano tangente. Numa das tentativas de obter esse plano, P2 obteve um plano perpendicular à reta g (tangente à parábola assento no ponto A), constatando que não era esse o plano que precisava. O problema aqui estava sendo encontrar outra reta, além da reta g , para obter o plano tangente.

Então, perguntamos ao participante quais elementos seriam necessários para utilizar as ferramentas para obtenção de planos. Abrindo o respectivo menu de ferramentas, P2 passou a analisar cada uma, não conseguindo dizer quais seriam os elementos necessários para utilizar a ferramenta ‘Plano’. Entendemos que esse obstáculo está relacionado ao fato do recurso ‘Tarefas’ do GeoGebra não apresentar a descrição da ferramenta.

O menu com as ferramentas para obtenção de planos tem quatro ferramentas: 1) Plano por três pontos; 2) Plano; 3) Plano perpendicular; 4) Plano paralelo. A descrição para cada

ferramenta de obtenção de planos é: 1) Plano por três pontos (selecione três pontos); 2) Plano (selecione três pontos, ou um ponto e uma reta, ou duas retas, ou um polígono; 3) Plano perpendicular (selecione um ponto e uma reta perpendicular); 4) Plano paralelo (selecione um ponto e um plano paralelo).

Os ícones das ferramentas ‘Plano por três pontos’, ‘Plano perpendicular’ e ‘Plano paralelo’ são intuitivos, dando uma ideia dos elementos necessários para utilizar essas ferramentas. Justamente o ícone da ferramenta ‘Plano’, que seria necessária nessa construção, não dá a ideia dos elementos necessários para utilizá-la, justamente porque existem várias possibilidades. Entendemos também que um conhecimento maior sobre o conceito de plano teria ajudado o participante a superar esse obstáculo relativo à falta da descrição da ferramenta ‘Plano’.

Diante desse problema, o participante perguntou quais os elementos necessários para utilizar a ferramenta ‘Plano’ e, ao respondermos, P2 experimentou a ferramenta ‘Plano’. P2 selecionou essa ferramenta e as retas g e h , tangentes às parábolas assento e estribo, respectivamente. Como essas retas são reversas para $k \neq 0$, P2 perguntou porque não estaria conseguindo obter o plano, ao que respondemos com uma pergunta: “*É possível obter essas retas no mesmo plano?*”

Movimentando essas retas, P2 observou que esse plano nem sempre existia. Então, P2 inseriu uma reta i , tangente à parábola estribo em B' . E obteve o plano p que passa pelas retas i e h , esta última também tangente à parábola estribo. Animando o ponto B , P2 viu que esse plano também não servia (Figura 274b). Então, P2 observou o menu de ferramentas para obtenção de retas e, escolhendo a ferramenta ‘Retas paralelas’, selecionou o ponto A e o eixo dos y .

Obtendo a reta i paralela ao eixo dos y e que passa por A , P2 disse: “*Finalmente*”, antes mesmo de experimentar a construção (Figura 274c). Esse é mais um indício de que P2 já sabia como resolver o problema, mas estava tendo dificuldade para obter o plano. Então, inserindo o plano p que contém as retas perpendiculares h (tangente à parábola assento em A) e i (paralela ao eixo dos y em A), experimentou a construção. P2 habilitou a animação do ponto A , observando o plano deslizar apoiado no ponto A e tangente à parábola assento.

Então, obteve as retas concorrentes pela intersecção do plano p com a quádrlica (Figura 274d). Habilitando a animação do ponto A , P2 observou que as retas concorrentes não passavam nos pontos simétricos que havia inserido sobre a parábola estribo no início da atividade, P2 disse: “*Não estão vinculados ao B e B'* ”. Habilitando a animação do ponto A e o rastro das

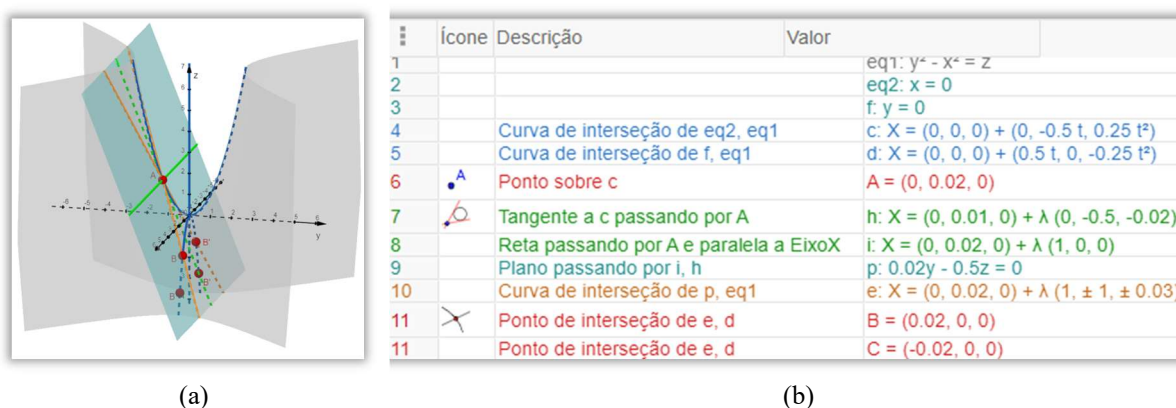
retas concorrentes, P2 observou o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano yoz sendo ‘pintado’ pelas retas concorrentes.

E, remetendo-se à construção da questão no item a, P2 disse: “*Não precisou dos pontos sobre a parábola estribo*”. Isso porque, ao explorar àquela representação dinâmica naquela oportunidade, P2 imaginou que precisaria de três pontos para obter a construção, um sobre a parábola assento e os outros dois sobre a parábola estribo. Por fim, P2 obteve a intersecção dessas retas com a parábola estribo, verificando que os pontos obtidos não eram os mesmos inseridos lá no início dessa construção (Figura 275a).

Refletindo sobre a atividade, o participante P2 disse que desde o início estava tentando inserir o plano tangente à parábola assento, analisando todas as ferramentas para obção de planos. O participante considerou que o problema estava no fato de não haver descrição na ferramenta ‘Plano’, que não cogitou em utilizá-la por não ter encontrado a descrição dos elementos.

O protocolo da Figura 275b apresenta apenas os passos necessários para obter a construção do participante P2, que foram cruzados com os dados com os da observação *in loco* e da gravação. As imagens das produções de P2 foram editadas para dialogar melhor com o texto, mas considerando a reprodução fiel da versão do participante. Foi possível ver que, para obter a sua construção, o participante P2 ora mobilizava e ora constituía esquemas de utilização para obter pontos, retas, planos, parábolas, etc.

Figura 275 – Construção do parabolóide hiperbólico como superfície regrada por P2.



(a)

(b)

Fonte: Dados da pesquisa.

Esses elementos precisaram ser inseridos em diferentes condições, paralelos, perpendiculares, passando por um ponto, resultante de intersecção, etc., exigindo esquemas de utilização relativos a diferentes ferramentas. Observamos também que o participante P2

verificava a necessária relação entre os elementos, vinculando-os adequadamente e experimentando a construção para verificar a sua estabilidade diante do movimento.

Nessa atividade, os participantes construíram um parabolóide hiperbólico com assento em OZ_+ no plano YOZ , a partir de um par de retas concorrentes que se movia apoiado num ponto sobre a parábola assento. Os participantes puderam explorar a construção de um parabolóide hiperbólico com assento em OZ_+ no plano XOZ , quando observaram que as retas concorrentes se moviam apoiadas num ponto sobre a parábola assento e outros dois simétricos sobre a parábola estribo.

Os participantes utilizaram caminhos distintos para obter a construção. P3 vinculou as retas concorrentes a um ponto sobre a parábola assento e seus vetores direcionais. E P2 obteve essas retas pela intersecção da quádriga por um plano que se movia apoiado num ponto sobre a parábola assento. Para isso, os participantes mobilizaram diferentes esquemas de utilização para os elementos necessários às suas construções, vinculando-os adequadamente e analisando a estabilidade da construção.

Esquemas de utilização também foram necessários para as conversões do registro simbólico para o gráfico, quando os participantes precisaram inserir equações de planos específicos na construção. E também nas conversões do registro gráfico para o simbólico, quando precisaram obter as equações das parábolas assento e estribo e da quádriga. Ora mobilizando e ora constituindo esquemas de utilização, num processo de fazer para compreender, os participantes formulavam.

E, com base no *feedback* das representações dinâmicas, testando suas conjecturas, refletindo sobre suas ações e realizando os ajustes. Esses ajustes eram realizados com base em novas hipóteses que, enriquecidas pelo conhecimento adquirido a cada tentativa, conduziam os participantes às tomadas de consciência. Pensando-com as representações dinâmicas, os participantes repetiam essas ações de forma cada vez mais qualificada pelos esquemas que iam sendo constituídos, o que favorecia o avanço até a obtenção da construção.

5.1.10.7 OBSERVAÇÕES FINAIS

Nessa SEAI, foram propostas tarefas de dois tipos, conversão da representação gráfica para a simbólica e construção geométrica de superfícies regradas. De forma progressiva, os desafios iniciaram pela construção de uma superfície cilíndrica, passando pela superfície cônica e o hiperbolóide de uma folha, até chegar a de um parabolóide hiperbólico. As tarefas que envolveram conversões entre registros de representação, os participantes efetuaram tratamentos

gráficos para identificar as variáveis visuais e, com os devidos tratamentos algébricos, as correlacionavam com as respectivas unidades significantes simbólicas.

Ora mobilizando e ora constituindo esquemas de utilização, os participantes realizavam essas ações de forma cada vez mais espontânea, indicando a ocorrência de coordenação entre os registros de representação gráfico e simbólico. E, nas tarefas que envolveram construções geométricas para obter superfícies regradas, os participantes reconheciam as propriedades dos elementos e as relações entre estes. Em cada fase da construção, esses objetos matemáticos iam sendo inseridos com base na ordem e a dependência necessárias para obter a superfície regradada.

E, experimentando as suas construções, os participantes analisavam a estabilidade diante do movimento, identificando e corrigindo erros. Essas ações, que envolvem a dependência geométrica e a variação dinâmica, são evidências da ocorrência de apropriação tecnológica pelos participantes. Essa apropriação tecnológica, envolvendo a constituição de novos esquemas de utilização, capacitava os participantes a utilizarem mais e melhor os recursos do ambiente de matemática dinâmica.

As antecipações propostas, levaram os participantes a externarem as representações mentais constituídas das superfícies quádricas através de registros falados, escritos ou desenhados. Carregando as imagens mentais e propriedades desses objetos matemáticos, essas representações mentais foram constituídas num exercício de pensar-com as representações dinâmicas. O acesso, a manipulação, a inserção de elementos, entre outras ações, como extensão do pensamento, possibilitam o enriquecimento da representação mental.

Pensando-com as representações dinâmicas, os participantes realizavam apreensões figurais que enriqueciam as representações mentais. E, quanto mais os participantes se apropriavam das ferramentas e características do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, mais ficavam hábeis para realizar as apreensões figurais. Por sua vez, essas apreensões figurais favoreciam a retirada de informações desses objetos de pensar-com, qualificando as apreensões conceituais.

Os participantes, envolvidos num processo de fazer para compreender, formulavam e testavam suas hipóteses, por meio das representações dinâmicas. A partir dos *feedbacks* desses objetos de pensar-com, refletiam sobre suas ações e faziam os ajustes, baseados em novas hipóteses. Com os esquemas constituídos a cada nova tentativa, essas novas hipóteses eram formuladas de forma cada vez mais qualificada, até as tomadas de consciência. E, cada nova tomada de consciência, produzia um avanço até a obtenção da construção.

A subseção seguinte encerra a análise dos dados que emergiram dessa investigação, trazendo respostas ao problema de pesquisa, com base nos aportes teóricos desse estudo. Os

dados obtidos foram analisados à luz da tríade teórica, respondendo à pergunta de pesquisa. As evidências oriundas de três procedimentos - levantamento bibliográfico, observação de condutas cognitivas por meio das atitudes comportamentais, produções escritas e protocolos de construção do GeoGebra e questionários e entrevistas - foram confrontadas. A triangulação desses dados visa reduzir interferências nos resultados, qualificando a interpretação.

5.2 A gênese instrumental e a coordenação dos registros de representação de superfícies quádricas

Para responder ao problema de pesquisa dessa investigação, propomos categorias de análise com os elementos que emergiram durante a análise dos aportes teóricos e o planejamento das SEAI. A partir dos dados oriundos da implementação dessas SEAI, foi possível observar como esses elementos integravam-se ao processo que estava sendo analisado. Nesse processo, destacaram-se três elementos principais: apropriação tecnológica, apreensão figural e a apreensão conceitual.

As apreensões conceituais, nesse processo de construção de conhecimento sobre quádricas, dependeram das apreensões figurais de representações dinâmicas dessas superfícies. E essas apreensões figurais, viabilizadas por essas representações, envolveram a apropriação tecnológica no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra. Dessa forma, percebemos que como elementos de uma engrenagem, um movimenta o outro, integrados num único processo. (Figura 276).

Figura 276 – Apropriação tecnológica e as apreensões figurais e conceituais



Fonte: Elaborado pela autora.

Num processo contínuo e progressivo, a apropriação tecnológica promove as apreensões figurais que favorecem a descoberta de propriedades do objeto de estudo. Por sua vez, essa

apreensão conceitual do objeto matemático favorece o avanço na apropriação tecnológica pelo sujeito, qualificando as suas novas apreensões figurais e assim por diante. Por exemplo, para utilizar a ferramenta ‘Parábola’ do GeoGebra, os participantes precisaram selecionar um foco e uma diretriz. Nesse caso, fez-se necessária a mobilização de esquemas relativos ao conceito de parábola.

Estes esquemas, que têm origem numa apreensão conceitual anterior, forneceram condições para a apropriação tecnológica da ferramenta ‘Parábola’ pelos participantes. E a apropriação tecnológica dessa ferramenta possibilitou a construção do paraboloide elíptico como superfície de revolução, quando os participantes precisaram obter uma parábola que girava apoiada numa circunferência⁴⁸. Em experiências anteriores, os participantes haviam obtido parábolas no plano. Agora, os participantes constituíram novos esquemas de utilização, que possibilitaram a obtenção da parábola num plano qualquer do IR^3 .

Com isso, entendemos que a apropriação tecnológica, a apreensão figural e a apreensão conceitual se retroalimentam, promovendo uma evolução dos esquemas de utilização. Essas constatações, que tiveram início na articulação dos aportes teóricos, ficaram ainda mais evidentes na análise dos dados oriundos da implementação das SEAI, dando origem às categorias de análise. O

Quadro 16 apresenta as categorias, os indicadores e os aspectos que foram considerados na análise dos dados que emergiram dessa investigação.

Quadro 16 – Categorias de análise.

<i>Categorias de análise</i>	<i>Indicador</i>	<i>Aspectos observados</i>
<i>Apropriação tecnológica</i>	Mobilização espontânea de esquemas de utilização. Transformação de esquema de ação instrumentada em esquema de uso.	Realiza os tratamentos dinâmicos. Reconhece a dependência geométrica. Analisa a variação dinâmica, identificando e corrigindo erros.
<i>Apreensão figural</i>	Evolução da imagem mental constituída.	Realiza antecipações externando a imagem mental. Acrescenta elementos à imagem mental. Utiliza a desconstrução dimensional.
<i>Apreensão conceitual</i>	Coordenação de registros de representação.	Reconhece uma representação nos diferentes registros. Realiza tratamentos e conversões. Estabelece a correlação entre registros de representação.

⁴⁸ Subseção 5.1.9.4.

Fonte: Elaborado pela autora.

Com atividades que envolveram a exploração, construção e criação, as SEAI foram estruturadas de modo a promover gradativamente a evolução dos esquemas de utilização. Cada novo desafio considerou os esquemas já constituídos pelos participantes, de modo que mobilizando esses esquemas, os mesmos tivessem as condições necessárias para constituir novos esquemas. Observamos que esse progresso dos esquemas de utilização envolve os três elementos da engrenagem: apropriação tecnológica, a apreensão figural e a apreensão conceitual.

Esses três elementos configuram as categorias de análise dessa investigação que, ocorrendo entrelaçadas, dificultam um tratamento individual na análise dos dados. O que não se constituiu num obstáculo para a escrita dessa subseção, que encerra as análises dos resultados, visto que esse entrelaçamento responde justamente ao problema de pesquisa. O objetivo desse estudo foi de compreender o desenvolvimento cognitivo no processo de gênese instrumental, envolvendo registros dinâmicos de representações semióticas das superfícies quádricas.

Em relação à apropriação tecnológica, interessa-nos analisar os esquemas de utilização constituídos pelos participantes. Para análise desses esquemas, consideramos a existência de dois tipos de atividades. As atividades que tiveram como objetivo a descoberta de propriedades das representações semióticas das superfícies quádricas para estabelecer as correlações entre os seus registros de representação. Nesse caso, a análise da apropriação tecnológica ficou voltada para a observação dos tratamentos dinâmicos realizados para correlacionar as representações simbólicas e gráficas das superfícies quádricas.

Os esquemas de utilização necessários à correlação entre registros de representação são os relativos aos tratamentos gráficos para identificação de variáveis visuais. Esses esquemas são os relacionados a ações como movimento de uma representação dinâmica, inserção de equações de planos na janela de álgebra, intersecção desses planos com as superfícies quádricas, alteração de coeficientes na representação simbólica para correlação com as representações gráficas.

O outro tipo de atividade envolve a utilização dos esquemas constituídos nas atividades anteriores para a obtenção de construções geométricas dessas superfícies. Essas atividades, além de oferecerem novas oportunidades para as tomadas de consciência sobre os conceitos envolvidos, aumentam o repertório de ferramentas utilizadas. A obtenção de uma construção

geométrica requer o conhecimento das propriedades dos objetos matemáticos inseridos e as relações entre estes.

Para análise dos esquemas de utilização nesse tipo de atividade, observamos dois aspectos: a dependência geométrica entre os elementos da construção e a exploração da variação dinâmica para destaque da invariância geométrica. Esses são dois dos aspectos considerados por Bretscher (2009) importantes para a gênese instrumental em ambientes de matemática dinâmica. A dependência geométrica pode ser observada por meio do vínculo entre os objetos matemáticos inseridos na construção.

E a variação dinâmica, pela análise da estabilidade da construção diante do movimento, com a identificação e correção de possíveis erros. Assim, os esquemas de utilização envolvidos numa construção geométrica estavam relacionados principalmente à dependência geométrica e à variação dinâmica, mas também envolvem os anteriormente citados. Dessa forma, para a análise da apropriação tecnológica observamos se os participantes realizaram os tratamentos dinâmicos, reconheceram a dependência geométrica e verificaram a variação dinâmica.

No ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, existem ferramentas como mover, rastro, controle deslizante, habilitar clipping, zoom, entre outras, que não envolvem elementos conceituais. Essas ferramentas requerem a mobilização de esquemas de uso que podem se coordenar entre si e com esquemas conceituais, para constituir os esquemas de ação instrumentada. E existem outras cuja utilização requer a mobilização ou constituição de esquemas conceituais.

Tomemos como exemplo a ferramenta ‘Hipérbole’, que possui elementos conceituais e relativos a sua forma de funcionamento. Não é possível utilizar essa ferramenta antes de inserir os elementos necessários para obtê-la. Quer dizer, antes de selecionar a ferramenta, os três pontos já precisam estar na janela de visualização. Esses três pontos são os focos e um ponto da hipérbole, cuja escolha depende da mobilização de esquemas conceituais, uma vez que requer o conhecimento deste conceito, definição, vértice, focos, eixos real e imaginário.

Assim, obter a representação gráfica de uma hipérbole requer a mobilização ou constituição de esquemas conceituais e relacionados à forma de uso da ferramenta. Para um iniciante, os esquemas relacionados à utilização de ferramentas que envolvem elementos técnicos e conceituais podem se constituir em esquemas de ação instrumentada. No entanto, segundo Rabardel (1995a), um mesmo esquema pode “ser um esquema de uso (por exemplo, a troca de marchas numa ultrapassagem de carro) ou um esquema de ação instrumentada (por exemplo, para um iniciante quando se trata de aprender a mudar de marcha)”.

Essa transformação de esquemas de ação instrumentada em esquemas de uso, que pode ser observada na mobilização espontânea de esquemas de utilização na realização de uma tarefa, é um indicador de apropriação tecnológica. Nas apreensões figurais, quando os participantes retiram informações das representações dinâmicas para resolver uma tarefa, os aspectos observados dizem respeito às representações mentais constituídas pelos participantes e à desconstrução dimensional.

Em algumas oportunidades, foram propostas antecipações, quando os participantes mobilizaram esquemas previamente constituídos para expressar a imagem mental e propriedades das superfícies quádricas envolvidas. Essas antecipações permitem inferir sobre a representação mental constituída pelos participantes. E, contrastando as imagens mentais obtidas antes e depois do acesso às representações dinâmicas, é possível identificar a contribuição desses objetos de pensar-com nas apreensões figurais desses objetos matemáticos.

Outro indicador considerado nessa categoria foi a desconstrução dimensional, por entendermos que a passagem de uma dimensão a outra representa um importante salto cognitivo. Com base em Duval (2011b), consideramos que ver geometricamente uma quádrica consiste em operar uma desconstrução dimensional, quando o objeto tridimensional é reconhecido pelas fatias bidimensionais que o compõem. Assim, a desconstrução dimensional possibilita o reconhecimento de uma quádrica, a conversão entre registros de representação e a obtenção de uma construção geométrica.

A análise das apreensões figurais pode ser realizada por meio das imagens mentais constituídas pelos participantes. Essas imagens mentais podem ser inferidas a partir das produções dos participantes, em especial, nas atividades em que foram propostas antecipações. Os registros escritos ou falados fornecem informações sobre as representações mentais do objeto matemático, indicando a qualidade das apreensões figurais.

Podemos observar se os participantes realizaram as antecipações, externando suas imagens mentais previamente constituídas das quádricas; acrescentaram elementos às suas imagens mentais após o acesso às representações dinâmicas e utilizaram a desconstrução dimensional para reconhecimento dessas superfícies, conversões e construções geométricas. Com relação à apreensão conceitual, consideramos que o funcionamento cognitivo na atividade matemática requer a multirrepresentação dos objetos matemáticos (Duval, 2018).

Nesse caso, o autor destaca dois aspectos precisam ser observados, um deles refere-se a confusão entre o objeto matemático e o conteúdo das suas representações. O outro, é que “A conversão de representações semióticas é o obstáculo maior e primordial a ser superado para que se possa compreender e aprender matemática, tanto nas reações dos alunos quanto nas suas

produções” (Duval, 2018, p.10). Assim, o principal indicador da categoria apreensão conceitual é a coordenação dos registros de representação, segundo o autor, condição necessária para a compreensão integral dos conceitos envolvidos.

A coordenação de registros de representação requer o estabelecimento da correlação entre os registros de representação, que passa pelo reconhecimento de unidades significantes nos diferentes registros e os tratamentos e conversões sobre estas. Dessa forma, podemos observar se os participantes reconheceram uma representação nos diferentes registros; realizaram os tratamentos no interior de cada registro; realizaram as conversões entre registros; e estabeleceram a correlação entre as unidades significantes nos diferentes registros.

Consideramos que a passagem espontânea de um registro de representação para o outro consiste num indicador da coordenação de registros (Duval, 2011a, 2012a). Olhando para a dinâmica da constituição de esquemas de utilização em tarefas que envolveram as representações dinâmicas das superfícies quádras, observamos que essas categorias apresentam aspectos que são comuns, por se apresentarem como processos que tem uma dependência entre si. Citando outro exemplo, os tratamentos necessários para a realização de uma tarefa de conversão entre registros de representação, envolvem elementos das três categorias.

Para a conversão do registro gráfico para o simbólico (apreensão conceitual), são necessários tratamentos gráficos (apropriação tecnológica) para a identificação das variáveis visuais por meio da desconstrução dimensional (apreensão figural). Com isso, entendemos que a apropriação tecnológica, a apreensão figural e a apreensão conceitual se retroalimentam, promovendo a constituição de novos esquemas de utilização. Essa engrenagem promove a evolução desses esquemas num movimento espiralado onde, por meio da tomada de consciência, ocorre uma mudança de patamar com expansão da estrutura cognitiva do sujeito.

Essa dinâmica ocorre de forma integrada, progressiva, contínua e individual, por meio de situações de ensino e aprendizagem em que o participante possa partir “[...] de um conhecimento mais simples a um mais complexo na medida em que se apropria das coordenações de suas ações, reconstruindo-as num patamar superior ao que existia até o momento” (Becker, 2012b, p.459). Assim, nessa subseção vamos destacar as condutas cognitivas que consistem em evidências desse processo por participante, observando o progresso do conhecimento por meio da constituição dos esquemas de utilização.

Há dois tipos de atividades que nos interessa analisar a evolução dos participantes, as relacionadas a obtenção de representações simbólicas, e as referentes às construções geométricas. Nas primeiras, a coordenação dos registros de representação consiste no foco da

análise, referindo-se ao trânsito espontâneo entre os registros de representação. E, nas atividades onde foram solicitadas as construções geométricas, o foco da análise passa a ser a gênese instrumental do participante.

No entanto, todas as atividades apresentam elementos conceituais e tecnológicos entrelaçados. A obtenção de uma representação simbólica requer o uso das ferramentas do GeoGebra, mas não tanto quanto as construções geométricas. Por outro lado, também é possível observar a coordenação de registros de representação em atividades que envolvem a obtenção de construções geométricas. O que diferencia essas duas classes de atividades é a intencionalidade, mais voltada para análise das apreensões conceituais ou das apropriações tecnológicas.

Assim, entendemos que a comunicação ficaria mais clara se a análise dessas duas classes de atividades fosse apresentada em tópicos distintos, que denominamos ‘Esquemas de utilização na correlação entre registros de representação’ e ‘Esquemas de utilização nas construções geométricas em ambientes de matemática dinâmica’. Assim, apresentamos a seguir uma análise da evolução dos esquemas de utilização para cada um dos participantes em duas subseções.

Iniciamos apresentando uma perspectiva sobre os conhecimentos prévios do participante e, em seguida, a evolução dos seus esquemas de utilização para a coordenação dos registros de representação. Buscamos destacar os fenômenos que emergiram da análise e que se conectam com o objetivo desse estudo, repetindo propositalmente em algumas das vezes em que ficavam mais evidentes.

5.2.1 Gênese instrumental de P1 na coordenação dos registros de representação

O participante P1 respondeu no formulário da entrevista na SEAI 1, com atividades relacionadas aos conhecimentos prévios necessários para o estudo de superfícies quádricas, que teve “*dificuldades tanto conceitual quanto de utilização do GeoGebra*“. Em relação aos conceitos, considerando que não fez as relações possíveis e necessárias para construir esse conhecimento, o participante disse: “*Eu não compreendi, apenas ‘decorei’ de forma mecânica*”.

E, em relação ao ambiente de matemática dinâmica, o participante disse: “*Conhecia muito pouco o GeoGebra, além disso sempre tive dificuldade com tecnologias de modo geral*”. As condutas cognitivas do participante confirmam as suas falas e citamos algumas,

assim como destacamos alguns dos momentos em que encontramos evidências da sua evolução na construção do conhecimento sobre quádricas.

5.2.1.1 ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NA CORRELAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Na SEAI 1⁴⁹, o participante não conseguiu mobilizar esquemas conceituais relacionados à representação simbólica de um plano coordenado ou paralelo a este, constituindo esses esquemas ao longo das SEAIs. Quando precisou inserir as equações de planos coordenados e paralelos a estes na SEAI 3⁵⁰, encontrou e superou alguns obstáculos iniciais. De forma que, observamos que o participante realizou os tratamentos algébricos e gráficos para obter as seções planas das superfícies quádricas, evoluindo gradativamente.

Encontramos mais evidências da constituição desses esquemas quando, na SEAI 5⁵¹, o participante precisou encontrar as seções planas de uma quádrica. Falando sobre como poderia obter as seções planas de uma determinada quádrica, o participante disse: “*Se eu quiser ver no plano xoy, o meu z vai ser uma constante*”. E, complementando, o participante falou que essa constante seria igual a zero. Além dessas condutas cognitivas, que evidenciam a constituição desses esquemas conceituais, podemos citar um relato do participante.

Durante os tratamentos gráficos sobre a representação dinâmica de um paraboloide hiperbólico, lembrando que antes não conseguia identificar as representações simbólicas dos planos coordenados e paralelos a estes, o participante falou: “*Já estou conseguindo*”. Nessa oportunidade, foi possível observar uma mobilização espontânea dos esquemas de utilização relacionados ao uso de planos coordenados e paralelos a estes para obter as representações simbólicas e gráficas das seções planas. O que também condiz com a percepção do próprio participante.

O outro obstáculo encontrado pelo participante, também estava relacionado aos tratamentos algébricos e gráficos para obter as representações simbólicas e gráficas das seções planas das superfícies quádricas. Na SEAI 3⁵², o participante apresentou dificuldade com a mobilização de esquemas conceituais na conversão do registro simbólico para o gráfico. Isso ocorreu nos tratamentos algébricos, quando precisou resolver as inequações do 2º grau e interpretar geometricamente as equações das seções planas para os diferentes valores de k .

⁴⁹ Subseção 5.1.1.

⁵⁰ Subseção 5.1.2.7.

⁵¹ Subseção 5.1.2.1.

⁵² Subseção 5.1.3.1.

Por exemplo, no caso da cônica degenerada de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 0$, que o participante iniciou dizendo que a era uma hipérbole. E, depois de realizar os tratamentos algébricos sobre essa equação, constatou que se tratavam de duas retas concorrentes. O participante mobilizou, de forma gradativamente mais espontânea, os esquemas de utilização para realizar os tratamentos algébricos e gráficos ao longo dessa SEAI.

Por exemplo, para reconhecer as seções planas de um hiperboloide de uma folha em z , o participante fez $z = k$ na sua equação, constatando que: *“Qualquer valor que eu colocar aqui [no lugar de k], vai se tornar positivo (...) então nunca vai ser zero e também nunca vai dar negativo”*. A evolução desses esquemas conceituais favoreceu a diferenciação entre os hiperboloides de uma e de duas folhas, que havia se apresentado como um obstáculo momentâneo para o participante, pelo fato de ambos possuírem hipérbolas e elipses como seções planas.

Refletindo sobre as seções planas obtidas por cortes com planos paralelos a xoy , o participante disse que eram *“elipses para qualquer valor de k ”*, constatando que se tratava de um hiperboloide de uma folha. Dessa forma, foi possível observar a evolução do participante ao longo dessa SEAI, ora mobilizando e ora constituindo esquemas de utilização. Esse progresso foi percebido pelo participante também, quando disse: *“Inicialmente, tive dificuldades algébricas e geométricas, pois não lembrava determinados conceitos, mas aos poucos fui relembrando”*.

Nos tratamentos gráficos, o participante constituiu esquemas de utilização relacionados ao controle deslizante, dizendo que: *“aprendi como usar o GeoGebra, pois conhecia muito pouco. Foi muito importante a utilização dessa ferramenta para visualizar a superfície quádrlica. Sem a visualização no espaço tridimensional ficaria muito mais difícil de fazer as correlações e construir um aprendizado”*. E essa apropriação tecnológica contribuiu para as apreensões figurais que permitiram a correlação entre as representações simbólicas e gráficas das superfícies quádrlicas.

Na SEAI 3⁵³, por exemplo, o participante mobilizou espontaneamente esquemas de utilização para obter as seções planas de um parabolóide elíptico em oz_+ . Obtendo a intersecção dessa quádrlica com os planos paralelos ao plano xoy ($z = k$), o participante variou o valor de k através do controle deslizante, identificando as elipses ($k > 0$), o ponto ($k = 0$) e nenhum lugar geométrico ($k < 0$). Os esquemas de utilização relacionados aos tratamentos algébricos

⁵³ Subseção 5.1.3.3.

e gráficos constituídos pelo participante na SEAI 3 foram mobilizados em diversos momentos nas SEAI posteriores.

Um dos momentos em que evidenciamos isso, ocorreu quando o participante correlacionou as representações gráfica, simbólica e em língua natural de elipsoides, diferenciando os possíveis casos em relação à posição no sistema cartesiano (SEAI 4⁵⁴). O participante analisou as seções planas obtidas por cortes com os planos coordenados, dizendo: *”Depois de analisar as equações e o sinal das variáveis, conclui-se que é um elipsoide”*. E com base nas suas representações gráficas, verificou que a *“diferença entre essas quádricas é o tamanho dos eixos”*, constatando que *“existem 6 possibilidades de elipsoides”* e identificando-as.

Na SEAI 5⁵⁵, observamos o participante constituindo esquemas conceituais para identificar um hiperboloide de uma folha em z a partir da sua representação simbólica. Ele se apoia nos esquemas constituídos na experiência com o elipsoide, dizendo: *“O que ela tem diferente da semana passada é o sinalzinho ali né no $-\frac{z^2}{2}$, então ela não vai ser uma superfície elíptica, ela vai ser uma hiperbólica”*. Vemos que o participante mobilizou esquemas conceituais relativos às cônicas, reconstituídos na SEAI 1, buscando unidades significantes simbólicas para a identificação da quádrica.

Ainda na SEAI 5⁵⁶, o participante mobilizou esquemas conceituais para obter as seções planas de um parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz no registro simbólico. Nas seções planas por planos paralelos a xoy , o participante encontrou alguns obstáculos conceituais, relativos à mudança de posição dos eixos real e imaginário e à identificação das retas concorrentes como seções planas. Esse fato dificultou a constituição da imagem mental dessa quádrica, a partir das representações simbólicas das suas seções planas.

Então, mobilizando esquemas de utilização, o participante realizou os tratamentos gráficos que permitiram a identificação dessas seções planas. Variando o valor de k no controle deslizante, o participante identificou as representações gráficas das hipérboles que alternam a posição dos eixos real e imaginário e das retas concorrentes, correlacionando com as representações simbólicas. Os tratamentos gráficos (apropriação tecnológica) proporcionaram a retirada de informações das representações dinâmicas (apreensões figurais), o que possibilitou a correlação entre os registros de representação dessa quádrica (apreensões conceituais).

⁵⁴ Subseção 5.1.4.1.

⁵⁵ Subseção 5.1.5.1.

⁵⁶ Subseção 5.1.5.5.

Essa apropriação tecnológica, relativa à obtenção das seções planas da quádrlica, foram possíveis devido à mobilização de esquemas de utilização constituídos anteriormente, relativos a planos coordenados e paralelos a estes e às cônicas. E esse progresso dos esquemas de utilização pode ser observado na SEAI 6⁵⁷, cujas atividades envolveram todos os conhecimentos sobre as quádrlicas adquiridos até o momento. O participante mobilizou esquemas de utilização, realizando a conversão do registro gráfico para o simbólico de elipsoides, hiperboloides de uma e de duas folhas e de paraboloides elípticos e hiperbólicos.

Analisando as representações gráficas das superfícies quádrlicas, o participante correlacionou os registros gráfico e em língua natural, com argumentações baseadas nas suas seções planas. No caso do paraboloides elíptico, o participante argumentou que quando *“suas seções planas são perpendiculares ao eixo central temos elipses, ponto ou nenhum lugar geométrico. Quando temos suas seções planas paralelas ao eixo central temos parábolas”*. Nesse caso, observamos que os esquemas que permitiram essas constatações foram espontaneamente mobilizados.

Depois, correlacionou registros gráfico e simbólico, quando obteve as representações simbólicas das quádrlicas a partir das suas representações gráficas. Identificando as variáveis visuais nas representações gráficas dessas superfícies, o participante correlacionou-as com as unidades significantes simbólicas, identificando os graus e sinais dos termos nas suas equações. O participante mobilizou espontaneamente os esquemas necessários à correlação das representações gráficas e simbólicas do elipsoide e dos hiperboloides de uma e de duas folhas.

E, no caso do paraboloides elíptico em ox_1 , o participante identificou a existência de termos lineares e quadráticos, quando disse: *“Para cada valor de z , eu tenho dois valores de x ”*. No entanto, prossegue na identificação da variável de grau um e sinais dos termos na sua representação simbólica por meio da mediação do GeoGebra. Dessa forma, observamos que o participante ainda estava constituindo os esquemas de utilização relacionados à correlação entre as representações gráfica e simbólica dessa quádrlica.

Generalizando, o participante obteve a representação simbólica do paraboloides hiperbólico de forma mais espontânea, indicando que ocorreu uma assimilação em esquemas já existentes com adaptação dos aspectos específicos (diferenciação). Com o paraboloides elíptico em oy_1 da atividade seguinte, o participante já mobilizou mais espontaneamente esquemas de utilização, identificando os termos quadráticos na sua representação simbólica: *“As minhas variáveis ao quadrado, eu imagino que seja o x e o z , que é quando eu tenho uma elipse”*.

⁵⁷ Subseção 5.1.6.

A evolução do participante, que também ocorreu ao longo dessa SEAI, pode ser observada pela maior espontaneidade na mobilização de esquemas de utilização para realizar as correlações entre os registros de representação. O que também condiz com a percepção do próprio participante, quando disse: “*Agora eu tenho mais claro as coisas na cabeça*”. E, para obter um hiperboloide de uma folha como superfície regrada na SEAI 10⁵⁸, o participante iniciou inserindo duas elipses por meio das suas representações simbólicas.

O participante escolheu adequadamente os graus e sinais nas suas representações simbólicas. Depois, escolheu os valores dos coeficientes nas equações dessas elipses de forma que a elipse que continha o centro do hiperboloide de uma folha tivesse eixos de medidas menores do que a outra. Para isso, o participante mobilizou espontaneamente esquemas de utilização relativos à correlação entre as representações gráfica e simbólica da cônica. Essa passagem espontânea de um registro para o outro é um indício da coordenação de registros de representação.

5.2.1.2 *ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM AMBIENTES DE MATEMÁTICA DINÂMICA*

O participante P1 iniciou sua trajetória de construção do conhecimento sobre quádras apresentando alguns obstáculos na utilização das ferramentas do GeoGebra. Por exemplo, quando foi solicitada a inserção da representação gráfica de uma parábola na SEAI 1⁵⁹, observamos que o participante selecionou a ferramenta e abriu sua descrição por três vezes. E, mesmo após a leitura da descrição, o participante experimentou utilizar a ferramenta antes de inserir o foco e a diretriz da parábola.

O participante fez algumas tentativas e, com as respostas das representações dinâmicas, obteve a cônica. A constituição desse esquema de utilização pôde ser observada também na atividade seguinte, quando o participante mobilizou espontaneamente esquemas de utilização para obter uma elipse. Depois de ler a descrição dos elementos necessários para obter essa cônica, ele inseriu os três pontos no sistema cartesiano, para depois selecionar a ferramenta. A utilização da ferramenta para obter a elipse apresentou-se para o participante como uma situação nova, mas com características semelhantes à da parábola.

Dessa forma, ocorreu uma assimilação com adaptação dos aspectos específicos (diferenciação). Assim, consideramos que o participante constituiu os esquemas de utilização

⁵⁸ Subseção 5.1.10.3.

⁵⁹ Subseção 5.1.1.

necessários para obter a parábola e, generalizando, mobilizou-os para obtenção da elipse. Com esse exemplo, podemos observar que o participante iniciou o percurso de construção de conhecimentos sobre as quádras com pouco conhecimento do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra. A seguir, mostramos a evolução do participante, destacando algumas das suas condutas cognitivas.

Na SEAI 4⁶⁰, o participante obteve a primeira construção, quando foi possível observar a constituição de alguns esquemas de utilização. Por exemplo, quando desejava inserir um ponto móvel sobre uma circunferência, para obter uma esfera como superfície de rotação. Colocando o ponto na intersecção desta com um eixo coordenado, verificou que o ponto havia ficado fixo e realizou o ajuste.

Depois, experimentando as ferramentas para obter uma circunferência que girasse apoiada nesse ponto, descobriu que haviam ferramentas da janela de visualização 2D e 3D. E, experimentando algumas ferramentas para obter circunferências, o participante percebeu que os elementos precisariam ser inseridos de forma que possibilitassem a sua rotação. Fazendo para compreender, o participante realizou algumas tentativas, constituindo os primeiros esquemas de utilização relativos às características de uma construção geométrica em ambiente de matemática dinâmica.

O que ficou visível também na sua fala quando, observando a circunferência gerar a esfera, disse: “[...] *parecendo uma criança quando ganha um brinquedo novo*”. Na SEAI 8⁶¹, o participante encontrou alguns obstáculos semelhantes a outros já mencionados, como selecionar a ferramenta para obter uma hipérbole antes de inserir os focos e o ponto desta cônica ou obter uma circunferência em plano móvel e perpendicular ao plano xoy .

No entanto, pensando-com a representação dinâmica que obtinha a cada passo da construção, observamos que o participante conseguia mobilizar esquemas de utilização previamente constituídos para superar esses obstáculos de forma mais fácil. O participante conseguiu antecipar os passos necessários para obter a construção, reconhecer a dependência entre os elementos, experimentar a variação dinâmica, superar obstáculos relativos à forma de funcionamento das ferramentas.

E, observando a circunferência que, deslizando sobre a hipérbole, gerava o hiperboloide de duas folhas, o participante disse: “*Aí está ele. Ai, que incrível!*” Essa fala representa a percepção do próprio avanço na apropriação do ambiente de matemática dinâmica. E, em suas condutas cognitivas, também encontramos evidências de uma evolução na constituição de

⁶⁰ Subseção 5.1.4.3.

⁶¹ Subseção 5.1.8.3.

esquemas de utilização. A construção, apresentando-se como uma situação nova, promoveu a constituição de novos esquemas pela transformação dos esquemas disponíveis.

Na SEAI 10⁶², quando precisou obter um hiperboloide de uma folha como superfície regradada, o participante antecipou os passos da construção, identificando os elementos necessários e relações entre estes, analisando a estabilidade da construção. O participante mobilizava espontaneamente esquemas de utilização, como quando obteve as elipses por meio da inserção das equações de superfícies cilíndricas elípticas e planos coordenados e intersecção entre estes.

Também quando inseriu os pontos móveis sobre as circunferências e obteve a reta geratriz da superfície regradada. Assim, destacamos alguns momentos em que foi possível observar nas condutas cognitivas do participante P1, os esquemas de utilização que foram constituídos ao longo das SEAI. A evolução desses esquemas de utilização, compostos por conhecimentos matemáticos e tecnológicos, também pode ser observada na impressão do participante: *“No decorrer dos encontros, fui ganhando mais prática em trabalhar com o GeoGebra, então minhas dificuldades foram diminuindo”*.

E relatando a sua percepção sobre o processo de construção do conhecimento, o participante disse que *“a abordagem foi muito interessante, pois pude ir construindo o conhecimento sobre cada quádrlica ao longo do caminho percorrido”*. Essa abordagem refere-se ao processo de fazer para compreender, pensando-com as representações dinâmicas das superfícies quádrlicas. O participante formulava hipóteses, testando-as por meio das representações dinâmicas. E, refletindo a partir das respostas desses objetos de pensar-com, realizava os ajustes até a tomada de consciência.

A cada nova tentativa, constituindo novos esquemas de utilização, o participante repetia essas ações de forma mais qualificada. Esse processo de fazer para compreender, pensando-com a representação dinâmica, o participante relatou que contribuiu para *“desconstruir minhas resistências quanto a esse assunto (...) para que eu construísse minhas próprias conclusões e assim realmente aprender”*. Consideramos que esse processo, movido pela engrenagem (apropriação tecnológica - apreensão figural - apreensão conceitual), promoveu a evolução dos esquemas de utilização.

5.2.2 Gênese instrumental de P2 na coordenação dos registros de representação

⁶² Subseção 5.1.10.3.

O participante P2, conforme havíamos dito antes, não conhecia o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, iniciando a sua apropriação tecnológica nesse estudo. O que pode ser confirmado por meio da sua resposta ao formulário da entrevista na SEAI 1⁶³, quando ele relatou que: *“A mínima dificuldade que posso citar é apenas por não ter utilizado antes, e justamente por isso, não estar familiarizado onde ficavam as ferramentas”*. E, na SEAI 7⁶⁴, o participante relatou novamente: *“Os obstáculos acredito que foram mais tecnológicos”*.

E, sobre os seus conhecimentos sobre superfícies quádricas, disse: *“No começo da atividade me senti um pouco enferrujado, uma pequena insegurança de mesmo que não fosse uma avaliação, eu deveria ter um mínimo de embasamento naquilo justamente por já ter estudado”*. Como o participante havia feito a algum tempo a disciplina de Geometria Analítica, entendemos que o mesmo poderia ter conhecimentos prévios sobre o assunto, apesar de sentir-se despreparado.

Isso também pode ser confirmado na sua fala: *“É uma sensação muito legal de rever antigos aprendizados, e trabalhar de forma diferente, poder relacionar o cálculo no papel, com a representação em 3D”*. No entanto, apesar de possuir esquemas previamente constituídos, o participante também disse: *“Considero que aprendi algo novo, pois com as ferramentas do GeoGebra, pude visualizar algo que nunca tinha visto aprendendo em livros [...]”*.

Assim, além da apropriação tecnológica, consideramos que a abordagem proposta nessa investigação tenha contribuído para o avanço do seu conhecimento sobre superfícies quádricas. A seguir, citamos algumas das condutas cognitivas do participante, destacando as evidências da evolução dos seus esquemas de utilização.

5.2.2.1 ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NA CORRELAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Na SEAI 1⁶⁵, que tratou dos conhecimentos prévios para o estudo das superfícies quádricas, o participante constituiu os primeiros esquemas de utilização relativos às ferramentas do GeoGebra. Observamos que o participante constituiu também esquemas conceituais relacionados à interpretação geométrica de equações no plano e no espaço. Um exemplo disso ocorreu com a equação da reta no IR^2 , que representa um plano no IR^3 ,

⁶³ Subseção 5.1.1.

⁶⁴ Subseção 5.1.7.

⁶⁵ Subseção 5.1.1.

quando o participante constatou que “*A mesma equação de uma reta por exemplo, pode representar uma reta no 2D, ou uma infinidade de retas no 3D*”.

A mobilização desse esquema conceitual também foi necessária em outros momentos, como no caso da atividade na SEAI 7⁶⁶. Tendo sido solicitadas as representações simbólicas das parábolas assento e estribo, reconhecendo que a parábola é o resultado da intersecção de uma superfície cilíndrica com o plano, o participante respondeu: “*Assento: $x^2 = z$ e $y = 0$; Estribo: $y^2 = -z$ e $x = 0$* ”.

E também na SEAI 10⁶⁷, quando o participante mobilizou esses esquemas conceituais para obter a representação gráfica da parábola assento de um parabolóide hiperbólico. Inserindo a representação simbólica $z = x^2$, o participante obteve uma superfície cilíndrica parabólica, percebendo rapidamente que a parábola era o resultado da intersecção desta com a quádrlica. Observamos que, ao longo das SEAIs, o participante mobilizava esses esquemas de forma mais natural.

Foi possível observar que as apreensões conceituais foram viabilizadas por apreensões figurais, quando o participante retirou informações da representação gráfica da equação do 1º grau em duas variáveis no IR^2 e no IR^3 . Para isso, antes foi necessária uma apropriação tecnológica, por meio da qual o participante constituiu esquemas de utilização para acessar e manipular a representação gráfica no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra. Essa apreensão conceitual, por sua vez, foi base para a constituição de novos esquemas de utilização.

Por exemplo, quando o participante mobilizou esses esquemas conceituais relativos a equações do 1º grau, constituindo os referentes a equações do 2º grau. Para isso, ele precisou utilizar outras ferramentas e, as novas apropriações tecnológicas possibilitaram novas apreensões figurais. De forma que, generalizando, o participante mobilizou esquemas conceituais relativos à diferenciação entre as representações gráficas de uma equação do 1º grau no IR^2 e no IR^3 , constituindo os esquemas relativos a equações do 2º grau.

Esses esquemas conceituais foram importantes nas correlações entre os registros de representação das superfícies quádrlicas. Na SEAI 3⁶⁸, o procedimento informático para a correlação entre registros de representação envolveu tratamentos gráficos sobre a representação dinâmica da quádrlica. O participante precisou inserir equações de planos coordenados e paralelos a estes ($x = k, y = k, z = k$) para, realizando a intersecção com as

⁶⁶ Subseção 5.1.7.1.

⁶⁷ Subseção 5.1.10.6.

⁶⁸ Subseção 5.1.2.7.

quádricas, identificar as suas seções planas pela variação do valor de k no controle deslizante.

A apropriação tecnológica que possibilitou esses tratamentos gráficos, viabilizou as apreensões figurais através das quais o participante identificou as variáveis visuais (seções planas) necessárias para a correlação com as unidades significantes simbólicas. Essa identificação das seções planas no registro gráfico, proporcionou as apreensões conceituais, quando o participante estabeleceu as correlações com as respectivas representações simbólicas para cada valor de k .

E esses esquemas de utilização foram mobilizados em várias oportunidades, como no caso da identificação dos possíveis casos para cada tipo de quádrlica, relativos à posição no sistema cartesiano (SEAI 4⁶⁹ e SEAI 5⁷⁰). Nesse caso, a apropriação tecnológica viabilizou as apreensões figurais necessárias para a diferenciação entre quádrlicas do mesmo tipo. Estas apreensões figurais, por sua vez, favoreceram as apreensões conceituais, quando o participante correlacionou as representações gráficas, simbólicas e em língua natural específicas.

Consideramos importante destacar que, a constituição dos esquemas relacionados ao reconhecimento do tipo de quádrlica foi iniciada na SEAI 2⁷¹. Naquela oportunidade, o participante analisou as seções planas das superfícies quádrlicas a partir das suas representações figurais, identificando as suas representações em língua natural gerais. Citando um exemplo, o participante observou que ambos hiperboloides têm seções planas hiperbólicas e elípticas.

Observando uma representação figural, o participante diferenciou os hiperboloides de uma e de duas folhas dizendo, respectivamente: “[...] independente do lugar que eu cortar eu vou seguir tendo uma elipse” e “Só que esse aqui se eu cortar aqui no meio, eu não vou ter uma elipse eu não vou ter nada. Se eu cortar aqui embaixo eu tenho uma elipse e se eu cortar em cima também”. Esses esquemas conceituais relativos à correlação entre registros figural, e depois gráfico, e em língua natural foram mobilizados de forma cada vez mais espontânea ao longo das SEAIs.

Na SEAI 6⁷², podemos observar o participante mobilizando esses esquemas de utilização para identificar as representações em língua natural a partir das representações gráficas das superfícies quádrlicas. Por exemplo, quando identificou as seções planas

⁶⁹ Subseção 5.1.4.

⁷⁰ Subseção 5.1.5.

⁷¹ Subseção 5.1.2.1.

⁷² Subseção 5.1.6.1.

parabólicas e elípticas no registro gráfico de uma quádrlica, para obter a sua representação em língua natural específica (paraboloide elíptico em ox_-).

Depois, o participante mobilizou esses esquemas de utilização para estabelecer as correlações entre registros gráficos e simbólicos, nessa mesma SEAI⁷³. A partir do reconhecimento de variáveis visuais (seções planas ou pontos da quádrlica), o participante identificou as unidades significantes simbólicas (graus, sinais e valores dos coeficientes). Para essa conversão do registro gráfico para o simbólico, além dos recursos para obter as seções planas, o participante precisou inserir retas ou planos em lugares específicos para encontrar as coordenadas de pontos da quádrlica.

Nesse caso, o participante fez uso de novas ferramentas, constituindo novos esquemas de utilização. Novamente, observamos que essa apropriação tecnológica possibilitou as apreensões figurais para identificação de novas variáveis visuais, quando o participante retirou informações da representação dinâmica da quádrlica. Por sua vez, essas propriedades obtidas nas apreensões figurais favoreceram as apreensões conceituais, quando o participante identificou as unidades significantes necessárias para obter a representação simbólica da superfície.

Apropriações tecnológicas anteriores permitiram as apreensões figurais que contribuíram para essas apreensões conceituais. Esquemas previamente constituídos foram mobilizados, promovendo a constituição de novos esquemas de utilização. Os esquemas conceituais anteriores, relativos à identificação do grau e sinais nas representações simbólicas das superfícies quádrlicas, exigiram ferramentas para intersecção de planos coordenados com essas superfícies.

A mobilização desses esquemas conceituais permitiu a constituição de novos esquemas, relativos à obtenção dos valores dos coeficientes nas representações simbólicas das superfícies quádrlicas. Para obter os valores desses coeficientes, o participante mobilizou esquemas para inserir e mover um ponto sobre uma seção plana⁷⁴, interceptar a quádrlica por uma reta⁷⁵ ou uma seção plana por um plano⁷⁶. A cada novo acréscimo, novos esquemas iam sendo constituídos. E, ao longo das SEAIs, esses novos esquemas foram mobilizados de forma cada vez mais espontânea.

Essas são algumas das evidências da evolução dos esquemas de utilização em atividades que envolveram a correlação entre os registros de representação semiótica das

⁷³ Subseção 5.1.6.3.

⁷⁴ Subseção 5.1.9.5.

⁷⁵ Subseção 5.1.6.3.

⁷⁶ Subseção 5.1.9.6.

superfícies quádricas. Nos casos citados, observamos que o participante reconhecia uma representação nos diferentes registros e realizava tratamentos e conversões, estabelecendo a correlação entre os registros de representação. E, na medida em que os desafios ficavam maiores, a mobilização dos esquemas de utilização dava-se de forma mais imediata, indicando a ocorrência da coordenação de registros de representação.

Por exemplo, quando o participante obteve as representações simbólicas das seções planas de um hiperboloide de uma folha a partir da representação mental dessa quádrica, constituída pela leitura do enunciado da questão⁷⁷; de um parabolóide elíptico a partir das suas seções planas parabólica e elíptica⁷⁸; de um hiperboloide de uma folha a partir das suas seções planas⁷⁹; entre outras.

Embora com um uso mais limitado das ferramentas do GeoGebra, se comparado com as construções geométricas, também foi possível observar a existência da engrenagem (apropriação tecnológica – apreensão figural – apreensão conceitual). O avanço na construção do conhecimento deu-se por meio dos elementos dessa engrenagem, que se retroalimentavam de forma contínua e progressiva.

5.2.2.2 *ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM AMBIENTES DE MATEMÁTICA DINÂMICA*

Na SEAI 1⁸⁰, o participante P2 iniciava a exploração do ambiente de matemática dinâmica, quando disse que as ferramentas do GeoGebra lhe permitiam “[...] *ter uma série de novas percepções a partir da possibilidade de movimentar, dar zoom, mudar o ângulo ou mudar a equação*”. Em determinados momentos, alguns obstáculos surgiam durante a constituição dos esquemas de utilização. Por exemplo, na inserção da representação gráfica de uma parábola, quando o participante experimentou utilizar a ferramenta antes de inserir o foco e a diretriz dessa cônica.

Observamos que o participante fez algumas tentativas até constituir esse esquema de utilização, obtendo a parábola. A constituição desse esquema pôde ser observada também na atividade seguinte, quando o participante mobilizou de forma mais espontânea os esquemas de utilização para obter uma elipse. Depois de ler a descrição dos elementos necessários para obter

⁷⁷ Subseção 5.1.8.2.

⁷⁸ Subseção 5.1.9.6.

⁷⁹ Subseção 5.1.10.4.

⁸⁰ Subseção 5.1.1.

essa cônica, ele inseriu os três pontos (dois focos e um ponto da cônica) no sistema cartesiano, selecionando a ferramenta depois.

E, na construção do hiperboloide de uma folha em x^{81} , o participante mobilizou de forma mais espontânea ainda esses esquemas com a ferramenta ‘Hipérbole’. A utilização da ferramenta para obter a elipse apresentou-se para o participante como uma situação nova, mas com características semelhantes à da parábola. Dessa forma, entendemos que ocorreu uma assimilação com adaptação dos aspectos específicos (diferenciação). O que indica que o participante constituiu os esquemas de utilização necessários para obter a parábola e, generalizando, mobilizou-os para obtenção da elipse.

Na SEAI 9⁸², foi possível ver que o participante mobilizou espontaneamente os esquemas de utilização relativos à ferramenta ‘Parábola’, constituídos na obtenção dessa cônica no IR^2 (SEAI 1), para obtê-la no IR^3 e com o adicional de uma diretriz móvel. Com esse exemplo, podemos constatar que o participante iniciou o percurso de construção de conhecimentos sobre as quádras com pouco conhecimento do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra. E também que os esquemas constituídos na SEAI 1 capacitaram o participante para um uso mais avançado da ferramenta.

A seguir, mostramos a evolução dos seus esquemas de utilização, destacando algumas das suas condutas cognitivas. A sua primeira experiência com uma construção geométrica envolveu obtenção de uma esfera gerada pela rotação de uma circunferência⁸³. O participante iniciou sua construção sem ideia de como obter a esfera como superfície de revolução. Pensando-com a representação dinâmica que obtinha, ele experimentou obter a esfera nas janelas de visualização 2D e 3D, tentou inserir equações, testou diferentes ferramentas para obter circunferências, etc.

A cada nova tentativa, os esquemas de utilização que iam sendo constituídos enriqueciam as novas hipóteses, até a tomada de consciência. Nesse processo de fazer para compreender, o participante experimentou obter ponto e circunferência que ficavam fixos, circunferências que ficavam no mesmo plano, entre outras ações, até descobrir a forma como os elementos precisavam ser inseridos. Nesses movimentos de idas e vindas, o participante fazia reflexões e realizava os ajustes, até obter a construção geométrica.

Dessa forma, ele constituía esquemas de utilização relativos às diferentes ferramentas que testava, à dependência geométrica e à variação dinâmica. Na experiência seguinte, quando

⁸¹ Subseção 5.1.9.2.

⁸² Subseção 5.1.9.4.

⁸³ Subseção 5.1.4.3.

foi proposta a análise da construção de um hiperboloide de uma folha em z como superfície de revolução⁸⁴, o participante ainda constituía esquemas de utilização mais elementares, como parar uma animação ou apagar um rastro. Num exercício de analisar cada linha dessa construção na janela de álgebra para obter a sua, o participante descobria as ferramentas utilizadas e suas formas de funcionamento, os elementos necessários para utilizá-las, a ordem de inserção e a dependência entre estes.

Nas construções seguintes, o repertório de ferramentas necessárias ampliava-se de forma progressiva, assim como a complexidade da construção, juntamente com os esquemas de utilização. Na construção do hiperboloide de uma folha em x ⁸⁵, o participante encontrou alguns obstáculos, como na escolha da direção quando experimentou a ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’ ou na inserção de um ponto que ficasse móvel. No entanto, observamos que o participante já mobilizou alguns esquemas de forma mais espontânea, constituindo novos esquemas de utilização.

Esses esquemas de utilização, relacionados a conceitos, ferramentas e às características de construções geométricas, lhe permitiram resolver o desafio proposto. Formulando e testando suas hipóteses, obteve os focos sobre uma reta (eixo real) que girasse junto com a hipérbole e o ponto da cônica sobre outra reta no plano da hipérbole que estivesse apoiada no ponto móvel. Dessa forma, observamos que os esquemas de utilização constituídos até o momento, capacitavam o participante a avançar resolvendo desafios progressivamente maiores.

Como no caso de um hiperboloide de duas folhas em y ⁸⁶, em que o participante não demorou muito para perceber que o eixo móvel agora era o imaginário, ao contrário do hiperboloide de uma folha. Ou no caso de um parabolide elíptico em oz_+ ⁸⁷, quando o participante antecipou os elementos necessários para a construção: “*Uma circunferência, e uma parábola a partir de um ponto da circunferência*”. E, mobilizou de forma mais espontânea esquemas de utilização previamente constituídos, obtendo rapidamente a construção.

Ou ainda, no caso do hiperboloide de uma folha em y ⁸⁸, em que a hipérbole precisava ser obtida pela intersecção da quádrlica por um plano dependente do ponto móvel, e não pela obtenção de uma cônica como nas outras situações. O participante fez algumas tentativas, obtendo uma hipérbole que ficou fixa; uma hipérbole a partir de uma reta que passava pelo

⁸⁴ Subseção 5.1.9.1.

⁸⁵ Subseção 5.1.9.2.

⁸⁶ Subseção 5.1.9.3.

⁸⁷ Subseção 5.1.9.4.

⁸⁸ Subseção 5.1.9.5.

ponto móvel e seu ponto de reflexão em relação à origem; obtendo planos perpendiculares aos eixos; entre outras.

Envolvido num processo de fazer para compreender, o participante formulava hipóteses, testando-as por meio das representações dinâmicas que obtinha a cada fase da construção. E, refletindo sobre suas ações, realizava os ajustes baseando-se em novas hipóteses, mais enriquecidas pelos esquemas que iam sendo constituídos a cada nova tentativa. Avançando por meio das tomadas de consciência, o participante descobriu que precisava de uma reta tangente à circunferência num ponto móvel sobre esta, para obter um plano perpendicular à reta e que passasse pela origem.

Pensando-com as representações dinâmicas, o participante experimentava ferramentas e relações entre os objetos matemáticos, constituindo esquemas de utilização em situações novas. Mobilizando esquemas de utilização em situações similares a outras que já foram dominadas, e generalizando em casos similares, mas com algumas características distintas. E, quando os esquemas de utilização constituídos eram necessários novamente, a mobilização se dava de forma cada vez mais espontânea.

Nas construções geométricas para obtenção de superfícies regradas, também foi possível observar que os esquemas de utilização previamente constituídos foram mobilizados, promovendo a constituição de novos esquemas. Os novos esquemas passam a ficar disponíveis para a mobilização, possibilitando a constituição de outros esquemas de utilização, e assim por diante. Por exemplo, esquemas de utilização previamente constituídos possibilitaram ao participante a obter rapidamente a superfície cilíndrica hiperbólica⁸⁹.

E, ainda que encontrando alguns obstáculos na construção da superfície cônica⁹⁰, o participante os superou de forma mais ágil. Os obstáculos encontrados eram similares aos de situações anteriores, como inserção dos elementos necessários antes de selecionar a ferramenta ou escolher a direção com a ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’. Entendemos que a superação imediata desses obstáculos estava relacionada aos esquemas constituídos em situações anteriores, que puderam ser espontaneamente mobilizados nessa situação de maior complexidade.

Outro obstáculo encontrado para obter essa construção foi relativo ao ângulo que a geratriz da superfície cônica precisava formar com o plano xoy . O participante utilizou seus conhecimentos sobre coordenadas de pontos no IR^2 , realizando algumas tentativas para adaptar ao IR^3 . Na construção seguinte, de um hiperboloide de uma folha em z , onde as retas

⁸⁹ Subseção 5.1.10.1.

⁹⁰ Subseção 5.1.10.2.

concorrentes formavam ângulos de 30° com o plano xoy ⁹¹, o participante mobilizou os esquemas de utilização constituídos no problema anterior com a superfície cônica.

O participante também pôde explorar a construção de um hiperboloide de uma folha em z ⁹², cujas retas concorrentes formavam ângulos de 45° com o plano xoy . E também foi proposta a obtenção do ângulo de 30° no IR^2 , na qual não surgem obstáculos, sendo facilmente obtida pelo participante. O principal desafio para o participante, na construção desse hiperboloide de uma folha em z , foi de obter as retas concorrentes num plano do IR^3 , perpendicular ao plano xoy , formando o ângulo de 30° com este e que se movesse apoiado num ponto sobre a circunferência.

Mobilizando esquemas de utilização constituídos anteriormente, o participante realizou várias tentativas para obter essa construção, superando os obstáculos que surgiam. Citando um desses momentos, o participante iniciou obtendo as retas concorrentes (geratrizes), e depois as circunferências que geram o ângulo de 30° no plano xoy . Conjecturando e testando suas hipóteses com as representações dinâmicas que obtinha a cada etapa da construção, o participante refletia e realizava ajustes baseado em novas conjecturas.

Essas novas hipóteses, mais qualificadas pelos esquemas de utilização que iam sendo constituídos, iam conduzindo o participante às tomadas de consciência e consequentes avanços. Por exemplo, no momento em que percebeu que precisaria inserir uma reta que girasse apoiada na circunferência que estava contida no plano xoy : *“Eu vou precisar dessa reta porque ela que vai ser usada na ferramenta que usa centro, raio e direção. E aí a direção vai ser ela”*.

Os esquemas de utilização necessários para a escolha da direção relativa à ferramenta ‘Círculo dados centro, raio e direção’, que se constituíram num obstáculo em situações anteriores, foram espontaneamente mobilizados nessa oportunidade. E, com essa tomada de consciência, o participante obteve a primeira das três circunferências necessárias para obter o ângulo de 30° , permitindo o seu avanço na construção. Observamos que os demais passos foram dados de maneira mais tranquila, com obstáculos superados de forma mais imediata.

No caso do hiperboloide de uma folha em x ⁹³, em que sua representação gráfica foi fornecida, o participante iniciou a construção tentando obter as retas concorrentes como na atividade anterior⁹⁴. Assim, que compreendeu que essas retas precisavam ser obtidas por intersecção de um plano com a quádriga, o participante mobilizou espontaneamente esquemas

⁹¹ Subseção 5.1.10.4.

⁹² Subseção 5.1.10.3.

⁹³ Subseção 5.1.10.5.

⁹⁴ Subseção 5.1.10.4.

previamente constituídos, respondendo: “*Vai ser a degenerada de uma delas, de um de seus lados, dos seus planos, não sei como é que eu falo*”.

O participante experimentou inserir os planos coordenados, obtendo seções planas hiperbólicas. Em seguida, inseriu o plano cuja intersecção com a quádrica eram as duas retas concorrentes, dizendo: “*Aqui é que elas aparecem*”. Rapidamente o participante entendeu que o plano teria que se mover tangente à circunferência, utilizando um segmento com a direção do raio para obtê-lo. Podemos identificar algumas tomadas de consciência e, em especial, observamos que não foram necessárias muitas tentativas para obter a construção.

Por fim, o participante mobilizou esquemas de utilização para resolver o desafio de obter a construção de um parabolóide hiperbólico⁹⁵ como superfície regradada, tendo sido fornecida a sua representação gráfica. Como vimos, a exploração da representação dinâmica fez com que o participante iniciasse essa construção obtendo as retas concorrentes que geram essa quádrica a partir de três pontos, um sobre a parábola assento e os outros dois sobre a parábola estribo. Em seguida, ele descobriu que precisava obter o plano, levando um tempo maior para encontrar os elementos e ferramentas necessárias para obtê-lo.

Fazendo para compreender, o participante formulou e testou suas conjecturas, refletindo sobre as respostas dadas pelas representações dinâmicas. Com base no *feedback* desses objetos de pensar-com, formulava novas hipóteses, testando-as novamente. A cada nova tentativa, o participante ora mobilizava e ora constituía esquemas de utilização. Por exemplo, o participante constituiu esquema de utilização para obter a reta tangente e, também para obter um plano a partir de duas retas.

E mobilizou espontaneamente esquemas de utilização, por exemplo, para obter as parábolas assento e estribo. Nesse caso, o esquema de ação instrumentada, inserir a equação de um plano coordenado para obter sua intersecção com a quádrica, transformou-se em esquema de uso para o participante. Assim como, a inserção das equações de planos paralelos aos planos coordenados, que gera o controle deslizante, possibilitando a observação das seções planas resultantes da intersecção desses planos com a quádrica.

Nesse movimento de fazer para compreender, pensando-com as representações dinâmicas, algumas tentativas ocasionavam a tomada de consciência, que possibilitava o avanço na construção. Por exemplo, quando o participante descobriu que precisaria de um plano tangente à parábola assento para obter as retas concorrentes como seção plana do parabolóide hiperbólico, ou quando percebeu como poderia obter esse plano.

⁹⁵ Subseção 5.1.10.6.

A tomada de consciência que levou o participante a obter essa construção também pode ser observada na sua fala, quando disse: *“O fato de a atividade ser pensada para o aluno perceber o seu próprio erro na primeira atividade, é um grande plot twist, daqueles que a gente descobre que na verdade, quem a gente achava que era o mocinho, na verdade é o vilão”*. O participante está referindo-se ao fato de a construção ser obtida de forma distinta da inicialmente pensada, que foi induzida pela exploração da representação dinâmica.

Com isso, apresentamos algumas das evidências da evolução dos esquemas de utilização durante a obtenção de construções geométricas de superfícies quádricas. Nos casos citados, o participante reconhecia a dependência geométrica entre os elementos da construção e analisava a variação dinâmica, identificando e corrigindo erros. Além disso, foi possível observar alguns esquemas de ação instrumentada sendo transformados em esquema de uso.

Por exemplo, para usar a ferramenta ‘Círculo dados centro e um de seus pontos’, é necessário inserir previamente o centro da circunferência e um ponto sobre a circunferência. O participante mobilizou espontaneamente os esquemas de ação instrumentada para obter uma circunferência⁹⁶ no IR^2 , o que indica a ocorrência da transformação desses esquemas em esquemas de uso pelo participante. A obtenção da seção plana de uma quádrica⁹⁷ é outro exemplo de transformação de esquemas de ação instrumentada em esquemas de uso pelo participante.

O participante mobilizava de forma imediata esquemas de ação instrumentada, inserindo a equação do plano e realizando a sua intersecção com a quádrica. Ao utilizar a ferramenta para obter um ponto por reflexão em relação a um plano⁹⁸, sendo necessário inserir um ponto e o plano para depois selecionar a ferramenta. A mobilização espontânea desses esquemas de ação instrumentada indica a transformação desses esquemas em esquemas de uso pelo participante.

A própria relação de dependência entre os elementos de uma construção requer um conjunto de esquemas, os esquemas de ação instrumentada. Em várias circunstâncias, o participante mobilizava de forma mais natural esses esquemas de ação instrumentada, indicando uma transformação em esquema de uso para o participante.

Reiteramos que há uma engrenagem (apropriação tecnológica – apreensão figural – apreensão conceitual), cujos elementos retroalimentam-se, promovendo a evolução dos esquemas de utilização. Entendemos que a apropriação tecnológica, promovida por uma

⁹⁶ Subseção 5.1.10.4.

⁹⁷ Subseção 5.1.9.5, 5.1.10.5, entre outras.

⁹⁸ Subseção 5.1.10.6.

apreensão conceitual anterior, possibilita as apreensões figurais necessárias para novas apreensões conceituais.

5.2.3 *Gênese instrumental de P3 na coordenação dos registros de representação*

O participante P3, conforme dito anteriormente, já fazia uso do GeoGebra em suas atividades acadêmicas e profissionais. Apesar disso, na SEAI 2⁹⁹, o participante relatou: *“Aprendi um pouco mais sobre o GeoGebra 2D, 3D e também sobre a AR. Acredito que o GeoGebra potencializa de diversas formas, seja na visualização das figuras em 2D e 3D, de forma algébrica, de forma a entender os conceitos, etc.”*.

E, em relação aos conhecimentos prévios¹⁰⁰, o participante relatou que *“Inicialmente, para mim que sou da área lembrei conceitos e termos mais técnicos matemáticos. Além disso, visualizei de forma mais nítida as justificativas das equações, sejam gerais paramétricas e afins a partir da visualização do GeoGebra no IR^2 e IR^3 , reparando em suas diferenças gráficas e de equações”*. E, quando questionado em relação a possíveis dúvidas, o participante disse que *“A princípio não, basta aplicar um pouco mais e compreender de fato todos os conceitos”*.

Assim, podemos entender que o participante P3 já possuía conhecimentos prévios, tanto conceituais quanto tecnológicos, quando iniciou a construção do seu conhecimento sobre superfícies quádricas. No entanto, na retomada de conhecimentos prévios, algumas abordagens se fizeram novas para o participante. Entendemos que as novidades estavam relacionadas ao processo de fazer para compreender, pensando-com as representações dinâmicas, que pode ter trazido elementos que não foram contemplados em abordagens tradicionais dos conceitos envolvidos (ponto, reta, plano, cônicas).

A seguir, apresentamos alguns dos momentos em que observamos a evolução dos esquemas de utilização do participante, por meio de uma análise transversal das suas condutas cognitivas ao longo das SEAIs.

5.2.3.1 *ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NA CORRELAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO*

O participante realizou espontaneamente as correlações entre as representações figurais e em língua natural gerais de superfícies quádricas¹⁰¹, considerando a análise das seções planas

⁹⁹ APÊNDICE E — SEAI 2.

¹⁰⁰ APÊNDICE D — SEAI 1.

¹⁰¹ Subseção 5.1.2.

dessas superfícies no registro gráfico. Ao antecipar a análise das seções planas de uma quádrlica na sua representação simbólica, o participante identificou e correlacionou sem dificuldades as unidades significantes (seções planas) nos diferentes registros. Essa tarefa requer o acesso à representação mental constituída pelo participante das cônicas em questão.

Por exemplo, no caso do hiperboloide de uma folha¹⁰², as unidades significantes simbólicas (seções planas hiperbólicas e elípticas) permitem a correlação entre representações gráficas, simbólicas e em língua natural. O participante facilmente mobilizou esquemas conceituais, correlacionando os diferentes registros de representação das seções planas em questão. Em seguida, realizou tratamentos algébricos¹⁰³ e gráficos¹⁰⁴ sobre as representações simbólica e gráfica dessa quádrlica, correlacionando as respectivas unidades significantes.

A correlação entre as representações gráfica e simbólica desse hiperboloide de uma folha, por meio desses tratamentos, foi viabilizada por uma apropriação tecnológica do participante. Os tratamentos gráficos, que consistiram na variação do valor de k na equação que representa um plano coordenado ou paralelo a este por meio de um controle deslizante, permitiram as apreensões figurais para a identificação das variáveis visuais (seções planas).

Por sua vez, as seções planas oriundas das apreensões figurais possibilitaram as apreensões conceituais relativas à correlação entre unidades significantes gráficas e simbólicas. Nesse caso, consideramos importante destacar que a significação de alguns resultados dos tratamentos algébricos realizados pelo participante ocorreu por conta dos respectivos tratamentos gráficos. É o caso da mudança de posição do eixo real e na correlação entre as representações simbólicas e gráficas das retas concorrentes.

Observamos a importante contribuição do dinamismo proporcionado pela variação do valor de k por meio do controle deslizante também na fala do participante: “*Essa transição é complexa de se imaginar né*”. Depois, verificamos que o participante correlacionou até mesmo as unidades significantes gráficas e simbólicas relativas aos coeficientes na equação dos elipsoides¹⁰⁵, conceito que foi explorado bem depois (SEAI 6), quando disse que “[...] *quanto maior o coeficiente, maior os eixos da elipse de intersecção criada entre a quádrlica e o plano*”.

Até mesmo nas construções geométricas, o participante utilizou representações simbólicas de superfícies e planos para obter cônicas, identificando graus, sinais e valores dos

¹⁰² Subseção 5.1.3.1.

¹⁰³ Subseção 5.1.3.1.

¹⁰⁴ Subseção 5.1.3.2.

¹⁰⁵ Subseção 5.1.4.1.

termos nas suas equações. É o caso da obtenção de uma circunferência nos planos xoz^{106} , yoZ^{107} , xoy^{108} e $z = 1^{109}$ e uma hipérbole no plano xoz^{110} e xoy^{111} . Nesses casos, quando precisava da representação gráfica de uma cônica na construção, ao invés de obtê-la usando as ferramentas específicas do GeoGebra, o participante realizava naturalmente a conversão da representação gráfica (imagem mental) para a simbólica.

E, esse trânsito espontâneo entre registros de representação, é um indício da coordenação de registros pelo participante. Por outro lado, entendemos que o esquema de ação instrumentada (inserção da equação de uma superfície, inserção a equação do plano, obtenção da intersecção entre essas superfícies), transformou-se num esquema de uso para o participante. Esse progresso, proporcionado pela apropriação tecnológica (transformação de esquemas de ação instrumentada em esquemas de uso), promoveu as apreensões figurais necessárias para as apreensões conceituais (coordenação de registros de representação).

De forma que a evolução foi constatada pelo participante também, quando disse: “*Olha só como eu aprendi alguma coisa*”. Continuando a apresentação dos indícios de coordenação de registros de representação, o participante realizou mentalmente a conversão da representação simbólica para a representação em língua natural de um parabolóide elíptico¹¹², justificando adequadamente sua resposta com base nas seções planas parabólicas e elípticas. O participante também constituiu um novo esquema conceitual, quando realizou a interpretação geométrica da representação simbólica do parabolóide elíptico quando o termo linear é nulo.

Na identificação dessa seção plana, conversão da representação simbólica para a representação em língua natural, o participante conjectura que se trata de uma e depois duas retas. E após correlacionar as unidades significantes gráficas e simbólicas, observamos uma tomada de consciência, quando relaciona o fato de a soma de dois quadrados ser nula ($x^2 + y^2 = 0$ com $z = 0$) com o vértice dessa quádrlica (origem do sistema cartesiano).

Depois, o participante realizou rapidamente a conversão da representação simbólica de um parabolóide hiperbólico para a sua representação em língua natural, justificando a sua resposta em termos das seções planas parabólicas e hiperbólicas¹¹³. Nessa oportunidade, o participante tem uma tomada de consciência quando correlacionava as representações

¹⁰⁶ Subseção 5.1.4.3.

¹⁰⁷ Subseção 5.1.9.2 e 5.1.9.3.

¹⁰⁸ Subseção 5.1.9.3, 5.1.9.4, 5.1.10.3, 5.1.10.4.

¹⁰⁹ Subseção 5.1.10.2.

¹¹⁰ Subseção 5.1.9.1.

¹¹¹ Subseção 5.1.10.1.

¹¹² Subseção 5.1.5.4.

¹¹³ Subseção 5.1.5.5.

simbólicas e gráficas das retas concorrentes que são seções planas do parabolóide hiperbólico com o plano xoy . Analisando a representação simbólica ($x^2 - y^2 = 0$), o participante reconheceu que se tratavam de duas retas concorrentes, quando disse: “*No zero, um quadrado igual a outro quadrado. São as assíntotas*”.

No entanto, a significação decorreu da correlação dessa representação simbólica com a gráfica, quando disse: “*Mas agora eu fiquei me questionando onde é que eu tenho as assíntotas no parabolóide hiperbólico?*” E, apontando para a representação gráfica que continha o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz e o plano xoy , disse que agora enxergava as retas concorrentes. Dessa forma, foi possível observar que o participante constituiu novo esquema conceitual, oriundo de apreensões figurais proporcionadas pela sua apropriação tecnológica.

Na SEAI 6¹¹⁴, o participante mobilizou e também constituiu esquemas de utilização, identificando graus e sinais dos termos nas representações simbólicas de superfícies quádricas¹¹⁵; graus e sinais dos termos, estimando os valores dos coeficientes¹¹⁶; graus e sinais dos termos, obtendo os valores dos coeficientes¹¹⁷. Em todas essas conversões, o participante buscava as variáveis visuais nas representações gráficas, correlacionando com as respectivas unidades significantes simbólicas.

Foi possível observar que a identificação dos graus e sinais dos termos nas representações simbólicas das superfícies quádricas, conceitos que vem sendo proposto em várias atividades das SEAIs, ocorria de forma cada vez mais espontânea. E os esquemas de utilização necessários para a identificação dos valores dos coeficientes desses termos ora foram mobilizados e ora constituídos. Por exemplo, o participante mobilizou espontaneamente os esquemas de utilização necessários para obter os coeficientes na representação simbólica do elipsoide¹¹⁸, por meio da intersecção da quádrica com os eixos coordenados.

Pensando-com a representação dinâmica do hiperboloide de uma folha¹¹⁹, o participante encontrou rapidamente os coeficientes relativos à representação simbólica da sua seção plana elíptica no plano, também pela intersecção com os eixos coordenados. E utilizou a estratégia correta para obter o terceiro coeficiente, cometendo um engano apenas quando realizava os tratamentos algébricos. No hiperboloide de duas folhas¹²⁰, ele identificou imediatamente um

¹¹⁴ Subseção 5.1.6.

¹¹⁵ Subseção 5.1.6.1.

¹¹⁶ Subseção 5.1.6.2.

¹¹⁷ Subseção 5.1.6.3.

¹¹⁸ Subseção 5.1.6.3.

¹¹⁹ Subseção 5.1.6.3.

¹²⁰ Subseção 5.1.6.3.

dos coeficientes (o relativo aos vértices dessa quádrlica), mobilizando espontaneamente esquemas de utilização para a identificação dos demais.

O participante utilizou a mesma estratégia, com a ferramenta ‘Extrusão para prisma’, identificando rapidamente os coeficientes na representação simbólica do parabolóide elíptico¹²¹. E no caso do parabolóide hiperbólico¹²², o participante também não demora muito para chegar na estratégia que lhe permitiu obter os valores dos coeficientes na sua representação simbólica. Essa representação simbólica foi obtida a partir das equações das parábolas assento e estribo, quando o participante encontrou um ponto de cada uma dessas cônicas, oriundas das suas intersecções com retas inseridas para essa finalidade.

Com isso, apesar dos desafios ficarem cada vez maiores, o participante mobilizava os esquemas de utilização necessários, realizando as conversões do registro gráfico para o simbólico com pouco ou nenhum obstáculo. Também consideramos importante chamar a atenção para o fenômeno que identificamos durante as análises. Nesses exemplos, fica novamente notório que a apropriação tecnológica permitiu ao participante as apreensões figurais necessárias para a identificação das variáveis visuais.

Por sua vez, as apreensões figurais possibilitaram a correlação entre essas unidades significantes gráficas e as respectivas unidades significantes simbólicas, condição necessária para as apreensões conceituais. Depois, nas SEAI 9 e 10, algumas atividades solicitavam novamente as conversões do registro gráfico para o simbólico. O foco dessas SEAI eram as construções geométricas, e essas atividades que solicitavam a obtenção das representações simbólicas foram inseridas para a análise do progresso dos participantes no tocante à coordenação dos registros de representação.

Nessas atividades, em alguns momentos o participante mobilizava os esquemas previamente constituídos e, fazendo para compreender, ora constituía novos esquemas de utilização. Por exemplo, ao realizar a conversão do registro gráfico para o simbólico de um hiperbolóide de uma folha em y ¹²³, o participante mobilizou rapidamente esquemas conceituais para determinar o grau e o sinal de cada termo na sua equação.

Depois, pensando-com a sua representação dinâmica, o participante identificou as variáveis visuais necessárias para obter os coeficientes dos termos na sua equação, correlacionando-as com as respectivas unidades significantes simbólicas. O participante identificou rapidamente dois dos três coeficientes da representação simbólica dessa quádrlica,

¹²¹ Subseção 5.1.6.3.

¹²² Subseção 5.1.6.3.

¹²³ Subseção 5.1.9.5.

relacionados à seção plana circular dessa quádrlica com o plano xOz , obtendo o último na terceira tentativa.

Fazendo para compreender, o participante (1) obteve uma circunferência no plano $y = 1$, relacionando o valor do seu raio com o do coeficiente que faltava; (2) realizou os tratamentos algébricos, substituindo os dados da seção plana circular ($x^2 + z^2 = 9$ e $y = 1$) na representação simbólica da quádrlica; (3) inseriu um ponto sobre a seção plana circular no plano $y = 1$, verificando que o seu raio era 2,83. Com a estratégia escolhida na segunda tentativa, o participante teria encontrado o valor do terceiro coeficiente, caso não tivesse considerado que o raio da seção plana circular era 3.

Com isso, podemos observar que o participante encontrava obstáculos, mas os superava rapidamente. E esses obstáculos estavam mais relacionados a leituras e resoluções apressadas do que a mobilização dos esquemas de utilização. E com o hiperboloide de uma folha em x^{124} , o participante realizou de forma mais natural a conversão para a representação simbólica, utilizando a sua representação dinâmica como objeto para pensar-com.

Na construção geométrica do paraboloides elíptico em ox_+^{125} , o participante teve acesso apenas a duas das suas seções planas, uma parabólica e outra elíptica. Para obter as variáveis visuais, o participante inseriu um plano perpendicular ao eixo de simetria da seção plana parabólica, obtendo as coordenadas de um ponto de ordenada nula e de outro com cota nula na intersecção entre essa cônica com o plano. Correlacionando essas unidades significantes gráficas e simbólicas, o participante realizou os tratamentos algébricos, obtendo os coeficientes.

Assim como o participante, que manifestou satisfação ao dizer “*Show! Aprendendo umas coisinhas*”, observamos o seu progresso ao mobilizar esquemas de utilização de forma cada vez mais natural nas conversões do registro gráfico para o simbólico das superfícies quádrlicas. No caso do hiperboloide de uma folha em z^{126} , o participante também teve acesso apenas a suas seções planas, uma circunferência e as retas concorrentes. O participante iniciou relacionando o raio da seção plana circular no plano xOy com o coeficiente de z^2 , superando rapidamente esse obstáculo por meio de uma tomada de consciência, quando identificou e corrigiu o erro.

Em seguida, inseriu um plano para interceptar uma das retas concorrentes (seção plana dessa quádrlica), utilizando as coordenadas desse ponto para obter o terceiro coeficiente. Com

¹²⁴ Subseção 5.1.10.5.

¹²⁵ Subseção 5.1.9.6.

¹²⁶ Subseção 5.1.10.4.

o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz ¹²⁷, o participante obteve as representações simbólicas das parábolas assento e estribo, escrevendo a equação da quádriga a partir desses resultados. Nessa oportunidade, o participante disse: “*Sabe que sai de modo já natural assim. Tipo, eu não precisei pensar muito no que fazer assim*”.

Essa fala condiz com a nossa observação das suas condutas cognitivas. O participante relatou o que também conseguimos perceber, uma evolução progressiva dos seus esquemas de utilização, proporcionando a coordenação dos registros de representação das superfícies quádrigas. Das primeiras correlações entre os registros de representação de superfícies quádrigas até o último momento mencionado, foi possível observar uma evolução dos esquemas de utilização, que possibilitou a coordenação dos registros de representação.

Essa progressiva apropriação tecnológica capacitava o participante a realizar os tratamentos gráficos para as apreensões figurais necessárias ao reconhecimento das variáveis visuais. Assim, essas apreensões figurais possibilitam as apreensões conceituais, oriundas das correlações entre essas unidades significantes gráficas e as simbólicas. Nas situações em que o participante cometia algum engano ou constituía novos esquemas de utilização, a correlação entre as unidades significantes gráficas e simbólicas se dava por meio de um fazer para compreender.

O participante formulava hipóteses e as testava, pensando-com as representações dinâmicas. Refletindo com base nos *feedbacks* desses objetos de pensar-com, o participante fazia os ajustes, baseando-se em novas hipóteses. A cada nova tentativa, o participante constituía novos esquemas de utilização, que qualificavam as novas ações. Nesse processo de fazer para compreender, observamos a engrenagem apropriação tecnológica - apreensão figural - apreensão conceitual promovendo a evolução dos esquemas de utilização.

5.2.3.2 ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM AMBIENTES DE MATEMÁTICA DINÂMICA

O participante P3 apresentou indícios da existência de conhecimentos prévios tanto conceituais quanto do ambiente de matemática dinâmica, durante a realização das atividades na SEAI 1. Por exemplo, o participante mobilizou espontaneamente os esquemas de utilização para obter uma parábola¹²⁸, usando ferramenta própria para tal tarefa. Essa ação requer a

¹²⁷ Subseção 5.1.10.6.

¹²⁸ Subseção 5.1.1.

mobilização de esquemas de utilização relativos ao conceito de parábola e à forma de funcionamento dessa ferramenta, conforme discutido anteriormente.

Na sua primeira construção geométrica, o participante não explorou a construção do esferoide da atividade anterior, percorrendo o caminho do fazer para compreender para obter uma esfera como superfície de revolução¹²⁹. O participante iniciou obtendo a segunda circunferência sem relação com a primeira, embora tivesse inserido e testado o movimento de um ponto sobre esta última. Ele já havia compreendido a relação entre os elementos da construção, a sua dificuldade estava relacionada a obtenção da segunda circunferência dependendo da primeira, o que ocorreu na quarta tentativa.

O participante obteve facilmente a primeira circunferência no plano xoy , usando a ferramenta ‘Círculo: centro – raio + direção’. No entanto, cogitou a possibilidade de usar as ferramentas ‘Círculo por três pontos’ e ‘Círculo dados eixo e um de seus pontos’, mas encontrou dificuldade para inserir a segunda circunferência (móvel e em plano perpendicular ao plano xoy). Sinalizando que não seria a forma ideal, ele obteve a segunda circunferência pela intersecção de um plano que girava apoiado num ponto móvel sobre a primeira e uma esfera.

Inferimos que as experiências anteriores do participante com o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra estariam mais relacionadas às ferramentas da janela de visualização 2D, quando observamos a mobilização espontânea de esquemas de utilização. Dessa forma, as construções aqui propostas apresentaram-se como novidades para o participante, fazendo-se necessária a constituição de novos esquemas de utilização. Consideramos importante o conhecimento desses dados iniciais, uma vez que contribuem para a análise da evolução dos esquemas de utilização do participante.

Na sua segunda construção, de um hiperboloide de duas folhas em x ¹³⁰, o participante precisou obter uma circunferência que deslizasse apoiada numa hipérbole no plano xoy , com eixo real sobre o eixo dos x . Para obter essa construção, o participante poderia, mas escolheu não explorar a construção similar de um hiperboloide de uma folha. O participante optou por fazer toda a construção na janela de visualização 3D, ao contrário da construção proposta para exploração, resolvendo rapidamente o desafio.

Na sua terceira construção, quando precisou obter um hiperboloide de uma folha pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos z ¹³¹, o participante novamente poderia, mas escolheu não explorar uma construção pronta. A circunferência sobre a qual a hipérbole

¹²⁹ Subseção 5.1.4.3.

¹³⁰ Subseção 5.1.8.3.

¹³¹ Subseção 5.1.9.1.

precisava estar apoiada e girar já estava na construção, cabendo ao participante realizar os demais passos. Na sua primeira conjectura, ele considerou a possibilidade de obter a hipérbole por meio de equações, não vinculando-a à circunferência, como havia feito com a construção da esfera¹³².

Porém, não demorou para perceber a necessidade da dependência entre esses elementos da construção, obtendo um plano que se movia apoiado num ponto sobre a circunferência e a hipérbole pela intersecção deste com uma superfície cilíndrica hiperbólica. Verificando que a construção não se manteve estável, decidiu explorar a construção pronta, fazendo uma leitura muito rápida dos elementos necessários para essa construção e obtendo-a. Observamos aqui alguns obstáculos, nas relações de dependência entre os elementos e na estabilidade da construção, ambos superados após a exploração de uma construção pronta.

Isso mostra que os esquemas de utilização do participante, relativos à obtenção dessas construções geométricas, ainda estavam sendo constituídos. Em especial, ainda foi possível observar uma mobilização mais morosa de esquemas de utilização na inserção de objetos matemáticos no espaço tridimensional. Porém, fazendo para compreender, o participante identificava a necessidade de dependência e também os erros na relação entre objetos, realizando os ajustes.

Na construção seguinte, de um hiperboloide de uma folha obtido pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos x ¹³³, o participante identificou rapidamente a diferença para a construção anterior. Isso pôde ser constatado pelo fato de ter iniciado a construção obtendo a circunferência no plano yoZ , e também por ter obtido a hipérbole na segunda tentativa. Observamos maior agilidade para, pensando-com a representação dinâmica, obter a construção.

Isso sugere que o participante mobilizou os esquemas de utilização necessários para obter o hiperboloide de uma folha pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos z , generalizando para o caso em que a hipérbole girava em torno do eixo dos x . O que indica uma assimilação dos aspectos comuns às duas construções (obter uma circunferência, os focos, uma reta, um ponto sobre a reta, uma hipérbole), com adaptação dos aspectos específicos (posição de cada um desses elementos).

No caso da construção de um hiperboloide de duas folhas pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos y ¹³⁴, o participante precisava perceber que o eixo real da hipérbole agora era fixo. Entre outras tentativas, o participante mobilizou os mesmos esquemas de utilização

¹³² Subseção 5.1.4.3.

¹³³ Subseção 5.1.9.2.

¹³⁴ Subseção 5.1.9.3.

que usou para obter o hiperboloide de uma folha, em que o eixo imaginário é fixo, obtendo esta quádriga. Nessa oportunidade, observamos maior facilidade na mobilização dos esquemas para obter o hiperboloide de uma folha, mas que não resolvia o desafio proposto.

Oscilando entre o nível da ação e da compreensão, o participante conjecturava e testava suas hipóteses, com base nos *feedbacks* das representações dinâmicas. Refletindo sobre as respostas desses objetos de pensar-com, o participante realizava ajustes com base em novas hipóteses, enriquecidas pelos esquemas constituídos. Fazendo para compreender, o participante repetiu essas ações até a tomada de consciência, quando entendeu que “*A diferença aqui é que os focos são fixos né!*”

Partindo dessa compreensão, o participante fez mais algumas tentativas, até uma nova tomada de consciência, quando disse que “*Não precisava nada daquilo que eu fiz*”. Depois disso, ele mobilizou espontaneamente os esquemas de utilização, obtendo rapidamente e em poucos passos a construção. Nesse desafio, o participante utilizou ferramentas próprias para obtenção de circunferências no IR^3 , demonstrando a constituição desses esquemas de utilização. Lembrando que, conforme apontado anteriormente¹³⁵, em várias oportunidades o participante obteve essas circunferências pela intersecção entre um plano e uma superfície cilíndrica circular.

Em algumas dessas ocasiões, observamos que o participante cogitou a possibilidade de utilizar as ferramentas do GeoGebra próprias para obtenção de círculos na janela de visualização 3D, mas desistiu. Esses são indícios de que o participante ainda estava constituindo esquemas de utilização relacionados à obtenção de circunferências no espaço tridimensional. Essa forma de obter circunferências através de equações foi utilizada pelo participante, por exemplo, no caso da construção de um parabolóide elíptico pela rotação de uma parábola em torno do semieixo oz_+ ¹³⁶.

O participante tentou inserir uma parábola usando a ferramenta ‘Cônica por cinco pontos’, encontrando alguns obstáculos, como quando tentou obter a intersecção de uma circunferência com um plano. Fazendo para compreender, o participante testou as ferramentas ‘Ponto’, ‘Intersecção de superfícies’ e ‘Ponto sobre objeto’, refletindo e realizando os ajustes a partir dos *feedbacks* da representação dinâmica. Não obtendo êxito, ele experimentou a ferramenta ‘Intersecção de objetos’, constituindo este novo esquema de utilização.

Utilizando a mesma estratégia, o participante obteve mais dois pontos, quando ocorreu uma tomada de consciência: “*Tem que rotacionar todos, né!*” Pensando-com a representação

¹³⁵ Notas de rodapé 106, 107, 108, 109, 110 e 111.

¹³⁶ Subseção 5.1.9.4.

dinâmica o participante fez mais algumas tentativas, experimentando a ferramenta ‘Parábola’, dando indícios de outra tomada de consciência ao dizer: “*Ah, mas eu só preciso saber o foco e a linha, né! É isso, né! Difícil é pensar nisso, né!*” Então, selecionando uma reta que passa por um ponto B como diretriz da parábola, o participante constatou que “*o B não se mexe*”.

Essa foi a última tomada de consciência nessa construção quando observamos que, a partir desse momento, o participante mobilizou espontaneamente os esquemas de utilização para finalizar a sua construção. É possível ver que, envolvido num processo de fazer para compreender, o participante formulava hipóteses e as testavam. E as representações dinâmicas, como objetos de pensar-com, forneciam as respostas que possibilitavam as novas conjecturas.

Os esquemas de utilização constituídos durante esse percurso capacitavam o participante à formulação de novas hipóteses mais qualificada, oportunizando as tomadas de consciência até a obtenção da construção. Podemos observar também a apropriação tecnológica do participante, viabilizada por esquemas anteriores, favorecendo as apreensões figurais que o conduziram às apreensões conceituais.

No caso do hiperboloide de uma folha que precisava ser obtido pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos y ¹³⁷, tendo sido dada a sua representação gráfica, o participante obteve rapidamente a sua construção. O único obstáculo encontrado pelo participante, e rapidamente superado, referia-se à descrição da ferramenta ‘Plano perpendicular’, que não aparece quando a atividade é proposta no modo ‘Tarefa’.

Na obtenção da superfície cilíndrica hiperbólica¹³⁸ como superfície regrada, observamos apenas um obstáculo na conversão do registro em língua natural para o gráfico, quando o participante apresentou dificuldade de criar a imagem mental dessa superfície. A partir dessa compreensão, ele mobilizou espontaneamente os esquemas de utilização, obtendo essa construção. Na construção da superfície cônica¹³⁹ como superfície regrada, o participante também mobilizou espontaneamente esquemas de utilização para obter a geratriz formando ângulos de 45° com o xoy .

Observamos que o participante vem superando os obstáculos relativos à dependência geométrica, observados em algumas oportunidades¹⁴⁰, de forma que nas últimas construções¹⁴¹ eles não apareceram. A construção da superfície cônica regrada, com geratriz que formava ângulo de 45° com o plano xoy , teve a intenção de preparar os participantes para obter um

¹³⁷ Subseção 5.1.9.5.

¹³⁸ Subseção 5.1.10.1.

¹³⁹ Subseção 5.1.10.2.

¹⁴⁰ Subseção 5.1.4.3, 5.1.9.1, 5.1.9.3, 5.1.9.4.

¹⁴¹ Subseção 5.1.9.5, 5.1.10.1 e 5.1.10.2.

hiperboloide de uma folha em z como superfície regradada. Neste caso, as retas concorrentes que desenham essa superfície deveriam formar ângulos de 30° com o plano xoy ¹⁴².

Além da possibilidade de explorar a construção de um hiperboloide de uma folha em z ¹⁴³, cujas retas concorrentes formavam ângulos de 45° com o plano xoy , também foi proposta a obtenção do ângulo de 30° no IR^2 . O participante mobilizou espontaneamente esquemas de utilização, obtendo as três circunferências que dividem o ângulo de 90° em três partes iguais no IR^2 . O desafio agora consistia na adaptação desses esquemas para realizar essa tarefa num plano do IR^3 , perpendicular ao plano xoy , obtendo retas concorrentes que formassem ângulos de 30° com este e se movessem apoiadas num ponto sobre a circunferência.

O participante rapidamente compreendeu que a tarefa consistia em obter o ângulo de 30° em “*um sistema de coordenadas fora do plano*” o que, além de outras coisas, requer o uso de outras ferramentas para obter circunferências. Com bastante clareza da necessária dependência entre os elementos da construção¹⁴⁴, o participante rapidamente obteve a base da construção, inserindo uma circunferência no plano xoy e colocando um ponto móvel sobre esta.

Então, o participante iniciou uma série de tentativas, num processo de fazer para compreender, pensando-com as representações dinâmicas que obtinha a cada fase da construção. Na sua primeira conjectura, ele obteve um plano que se movia apoiado na circunferência, mas que passava pela origem do sistema cartesiano, percebendo logo que o plano precisava ser tangente à circunferência.

Depois de obter esse plano, o participante reconheceu a ferramenta que vai utilizar para obter as circunferências e sua forma de uso, quando disse que “[...] *precisava de centro, raio e direção, né. A direção pelo que dá para entender é o que está saindo, né*”. Nessa fala, podemos inferir que o participante constituiu esquemas de utilização relacionados à obtenção de circunferências num plano qualquer do IR^3 , o que demonstrou uma superação desse obstáculo¹⁴⁵. As condutas cognitivas do participante nos passos que se seguem para obter essa construção confirmam isso.

Observamos que o obstáculo relativo à dependência entre os objetos matemáticos nas construções estava relacionado à inserção da segunda circunferência (ou da cônica) por meio de equações. Com essa forma de inserção das circunferências, o participante não havia percebido como vincular os elementos da construção. Ponderamos que o problema com a

¹⁴² Subseção 5.1.10.4.

¹⁴³ Subseção 5.1.10.3.

¹⁴⁴ Notas de rodapé 140 e 141.

¹⁴⁵ Nota de rodapé 135.

dependência entre os elementos da construção ficou resolvido a partir do momento em que o participante constituiu esquemas de utilização para obter circunferências no espaço tridimensional.

O participante inseriu uma reta, perpendicular ao plano tangente à circunferência, passando pela origem e por um ponto móvel sobre esta, utilizando-a como direção para obter a primeira circunferência no plano móvel. Nesta oportunidade, vimos que o participante mobilizou espontaneamente esquemas de utilização, inserindo os elementos da construção de acordo com a necessária relação de dependência entre eles¹⁴⁶.

Nos passos seguintes, o participante conjecturou que seriam necessárias mais duas circunferências, uma de cada lado da primeira circunferência inserida no plano tangente, para obter um ângulo de 30° de cada lado. Pensando-com a representação dinâmica, o participante iniciou inserindo as retas necessárias para obter essas circunferências usando a ferramenta ‘Círculo (Centro – Raio - Direção)’, quando disse: “*Eu não preciso dessas circunferências. Eu só preciso de uma circunferência em G*”.

Com essa tomada de consciência, o participante constatou que poderia obter apenas mais uma¹⁴⁷ circunferência em lugar de duas¹⁴⁸, para obter os pontos necessários para inserir as duas retas concorrentes formando ângulos de 30° com o plano xoy . O participante não só otimizou a sua construção, como também mobilizou espontaneamente esquemas de utilização desse momento em diante, obtendo essa superfície regrada.

Ponderamos que seja importante destacar que essa tomada de consciência ocorreu em decorrência da apreensão figural da representação dinâmica obtida até o momento¹⁴⁹. Essas apreensões figurais foram viabilizadas pela apropriação tecnológica do participante, que envolveram apreensões conceituais anteriores.

Na construção do hiperboloide de uma folha em x ¹⁵⁰ como superfície regrada, tendo sido dada a sua representação gráfica, o participante obteve rapidamente a sua construção. Observamos que o participante usa a mesma estratégia utilizada para obter o hiperboloide de uma folha em y , pela rotação de uma hipérbole¹⁵¹. Naquela ocasião, ele também obteve facilmente a superfície de revolução, encontrado e rapidamente superando o obstáculo relativo

¹⁴⁶ Nota de rodapé 144.

¹⁴⁷ Figura 246d.

¹⁴⁸ Figura 246c.

¹⁴⁹ Figura 246c e Figura 246d.

¹⁵⁰ Subseção 5.1.10.5.

¹⁵¹ Nota de rodapé 137.

a falta de descrição da ferramenta ‘Plano perpendicular’ na atividade proposta no modo ‘Tarefa’, que não ocorreu nessa oportunidade.

Para obter o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz como superfície regrada a partir da sua representação gráfica¹⁵², o participante iniciou o seu processo de fazer para compreender, realizando várias tentativas. Pensando-com a representação dinâmica do parabolóide hiperbólico sendo ‘pintado’ pelas retas concorrentes, o participante conjecturou que seria possível obter essa superfície regrada com apenas uma das retas. Testando a sua hipótese, com base na resposta do GeoGebra, o participante verificou que não gerava a superfície.

Refletindo sobre os dados que tem até o momento, o participante conjectura: “*Só se eu orientar o ponto A. Teria que criar um ponto orientado por um k*”, obtendo um ponto sobre a parábola assento e outro sobre a parábola estribo com coordenadas que dependiam de k e j , respectivamente. Com isso, o participante conseguiu verificar que precisaria das duas retas concorrentes para obter a superfície regrada. E, inserindo o segundo ponto sobre a parábola estribo, simétrico ao primeiro, o participante obteve a construção.

Assim, observamos que o participante mobilizou de forma mais espontânea os esquemas de utilização, obtendo essa superfície regrada. A seguir, utilizando a mesma estratégia com outro parabolóide hiperbólico, o participante constatou que as retas concorrentes não geravam essa superfície. Após a exploração do procedimento algébrico para obter os vetores direcionais das retas concorrentes de outro parabolóide hiperbólico¹⁵³, o participante obteve as retas concorrentes que geravam a superfície proposta.

Reiteramos que, fazendo para compreender, o participante conjecturava, testando suas hipóteses por meio dos *feedbacks* das representações dinâmicas. Repetindo essas ações até a tomada de consciência, quando constituía esquemas de utilização. Esses novos conhecimentos, qualificando as novas hipóteses, possibilitavam o seu avanço até a obtenção da construção. A utilização das representações dinâmicas como objetos de pensar-com, viabilizada pela apropriação tecnológica, oportunizou as apreensões figurais que favoreceram as apreensões conceituais.

5.2.4 Fazer e compreender pensando-com as representações dinâmicas de superfícies quádricas

¹⁵² Subseção 5.1.10.6.

¹⁵³ Figura 259.

Iniciamos esse capítulo, discorrendo sobre as condutas cognitivas dos participantes durante cada uma das situações de ensino e aprendizagem instrumental (subseção 5.1). Depois, realizando uma análise longitudinal, destacamos alguns dos momentos em que encontramos evidências da evolução de esquemas de utilização dos participantes (subseção 5.2). Por fim, essa subseção tem a finalidade de encerrar a análise dos dados, respondendo objetivamente à questão de pesquisa “Como ocorre o desenvolvimento cognitivo no processo de gênese instrumental, envolvendo registros dinâmicos de representações semióticas das superfícies quádricas?”

No estudo das superfícies quádricas, as questões relacionadas ao acesso a esses objetos matemáticos, que requerem o uso de representações, foram tratadas por meio da TRRS. Obtidas no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, o uso das representações envolveu questões relacionadas à apropriação das ferramentas desse artefato, que foram tratadas por meio da TGI. Por fim, para dar conta das questões relacionadas ao desenvolvimento cognitivo, consideramos de extrema relevância a abordagem da construção do conhecimento, como um processo em que a inteligência se desenvolve a partir das experiências vivenciadas.

A análise do desenvolvimento cognitivo nos estudos de Piaget buscava a compreensão da gênese e da evolução do conhecimento, de onde entendemos que as ações dos participantes sobre os objetos de análise e os *feedbacks* destes foram os responsáveis pelas mudanças nas suas estruturas mentais. Segundo Piaget (1975), o desenvolvimento cognitivo é um processo de construção que ocorre a partir da interação entre sujeito e objeto, envolvendo a expansão da estrutura cognitiva por meio de um mecanismo de adaptação do organismo a uma situação nova.

Com base em Piaget¹⁵⁴, as situações de ensino e aprendizagem foram estruturadas de forma que os participantes fossem envolvidos num processo de fazer para compreender até a(s) tomada(s) de consciência. Assim como na presente investigação, nesses estudos de Piaget, os sujeitos da pesquisa executaram uma série de tarefas a partir das quais desenvolveram uma ‘compreensão conceitualizada’ dos conceitos envolvidos. Piaget observou que as ações dos sujeitos poderiam apresentar características de um ‘saber fazer’, mesmo sem que houvesse compreensão.

E que a compreensão seria consequência de uma tomada de consciência, que se constituiria num nível de conceituação, alcançado num processo de transformação de esquemas em noções e em operações. Assim como Piaget, observamos que a compreensão estava diretamente relacionada à qualidade da interação entre o sujeito (participantes) e o objeto

¹⁵⁴ Piaget publicou dois livros em 1974, ‘La Prise de Conscience’ e ‘Réussir et Comprendre’, ambos traduzidos para o português como ‘A tomada de consciência’ e ‘Fazer e Compreender’, respectivamente.

(representações dinâmicas das superfícies quádricas). Ao serem desafiados pelas situações de ensino e aprendizagem instrumental, agindo sobre as representações dinâmicas e refletindo a respeito dos resultados obtidos, os participantes tiveram a possibilidade de alcançar o nível de ‘compreensão conceitualizada’ (Piaget, 1983).

Para dar conta da especificidade dessa investigação, que inclui a integração do *software* a esse processo e trata da construção de conhecimento matemático, buscamos suporte nos estudos de Notare e Basso (2012). Tendo por base a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget, os autores entendem a origem do conhecimento como um processo contínuo de construção, avançando para a compreensão da influência das representações de objetos matemáticos como objetos de pensar-com.

As representações dinâmicas das superfícies quádricas, como objetos de pensar-com desse estudo, permitiram mudar os limites entre o concreto e o formal (Papert, 1985), favorecendo a evolução das construções mentais. Assim, para a análise da inserção da tecnologia no processo de construção do conhecimento sobre as superfícies quádricas, as situações de ensino e aprendizagem foram planejadas de modo que os participantes fossem envolvidos num processo de fazer para compreender.

Engajados num processo de organização de ideias e encadeamento lógico-dedutivo, os participantes vivenciaram ações como experimentar, formular e testar conjecturas, realizar ajustes com base em novas hipóteses, até as tomadas de consciência. Conforme destacamos em algumas das várias ocorrências, a cada nova tentativa, os esquemas constituídos em tentativas anteriores capacitavam os participantes a formular hipóteses mais qualificadas. Essa escolha didática relaciona-se diretamente ao Fazer e Compreender de Piaget (1978), teoria que embasou a proposta de construção do conhecimento.

Em acordo com Notare e Basso (2012, p. 2), que investigaram a integração da tecnologia no fazer matemático sob a ótica do fazer e compreender, “à medida que o aluno é desafiado a resolver um novo problema até então desconhecido, um desequilíbrio cognitivo pode desencadear o processo de construção do conhecimento matemático”. Propostas nessa concepção, as situações de ensino e aprendizagem tiveram a finalidade de provocar as “[...] interações entre sujeito e objeto que são mais ricas do que aquilo que os objetos podem fornecer por eles” (Piaget, 1977/1995, p. 87).

Nesse caso, o processo de construção do conhecimento constituiu-se na ação do participante sobre as representações dinâmicas das superfícies quádricas (assimilação) e na sua ação sobre si mesmo (acomodação). A assimilação com a função de integrar novos elementos aos esquemas do sujeito e, a acomodação, de criar ou alterar os esquemas de assimilação

existentes. Conforme Piaget (1976), as reequilibrações ocasionadas pelos desequilíbrios levariam não apenas a um equilíbrio, mas a um equilíbrio melhor, a equibração majorante.

Para Piaget, obrigando o sujeito a ultrapassar o seu estado atual, “Os desequilíbrios constituem o motor da investigação, porque sem eles, o conhecimento manter-se-ia estático” (Piaget, 1977, p. 23 e 24). A adaptação cognitiva é ocasionada pelo equilíbrio entre os processos indissociáveis e complementares de assimilação e acomodação, explicando como ocorre o incremento do sistema conceitual. De outra forma, segundo Piaget, todo conhecimento é produto de um processo de abstração reflexionante, que ocorre em três tempos.

A abstração propriamente dita, que consiste em compreender modos de organização dos conhecimentos; o reflexionamento, que consiste em projetar o que foi abstraído num plano de conhecimento superior; e a reflexão num novo plano (Montenegro e Maurice-Naville, 1998). Ao refletir sobre algo, o sujeito está reconstruindo o que já existia num inferior num nível mais avançado, sendo este nível superior mais abrangente (Piaget, 2001, p. 16).

Para tal, foram oportunizadas atividades em que o participante precisou “conjecturar, testar, intuir, deduzir, generalizar – coordenar ações e retirar dessas coordenações novas coordenações, por abstrações refletidas” (Notare; Basso, 2018, p.2). Consideramos também a diferença entre ‘fazer certo’ e ‘compreender o que fez’, uma vez que o primeiro pode estar limitado ao entendimento de um conteúdo, enquanto o segundo vai além disso, envolvendo uma ampliação da capacidade de aprender. Para Piaget (1978), ‘compreender o que fez’ é resultado do processo de conceituação, e isso envolve a alteração da estrutura mental do sujeito envolvido.

O conjunto das situações de ensino e aprendizagem instrumental foi proposto de forma que cada atividade capacitasse o participante para a realização da seguinte, considerando que “Cada nova construção foi possibilitada por construções anteriores” (Becker, 2012b, p. 144). Referindo-se à estrutura cognitiva do sujeito, Becker (2012b, p. 144) diz que “Essas construções anteriores são os verdadeiros *a priori* – não apenas os prerequisites em termos de conteúdo”. Tomando como exemplo o estudo das superfícies quádricas, os pré-requisitos não consistem apenas numa relação de conteúdos, mas principalmente na condição da estrutura cognitiva do participante.

Esse talvez seja um dos desafios para estudantes e professores nos cursos superiores, uma vez que a retomada de uma relação de conteúdos pode não ser suficiente para iniciar o estudo de conceitos mais complexos. O aumento das capacidades assimilativas do sujeito é decorrente da expansão da sua estrutura cognitiva, o que requer mais do que ‘saber fazer’, mas também ‘compreender o que foi feito’. Foi possível constatar que, no caminho do fazer ao

compreender, os participantes iniciavam as atividades com ações mais puras (desprovidas de conceituação) e, a partir de determinado nível de conscientização, a conceituação começava a influenciar suas ações.

Entendemos que, devido a um atraso do compreender (conceituação) em relação ao fazer (ação), na fase inicial ocorre uma predominância do fazer. A seguir, numa fase intermediária, passam a ocorrer uma alternância entre ações puras e ações oriundas das conceituações. Até que o compreender passa a comandar o fazer, quando a conceituação oferece elementos para as escolhas das ações. Essa passagem da assimilação prática a uma assimilação por meio de conceitos se dá por meio da tomada de consciência.

Conforme Notare e Basso (2012), trilhando o caminho do fazer ao compreender, a evolução vai do ‘fazer’ ao ‘fazer e saber o que se está fazendo’, quando a conceituação se efetua por tomada de consciência. Como foi possível ver a partir da análise dos dados, retirando informações das representações dinâmicas de superfícies quádricas, os participantes formulavam e testavam hipóteses. Com base nos *feedbacks* desses objetos de pensar-com, eles realizavam os ajustes, formulando e testando novas hipóteses. Repetindo essas ações com mais qualidade a cada nova tentativa, num “processo de idas e vindas, que refina os dados de observação e o grau de compreensão” (Notare, Basso, 2012, p.4).

Com isso, constatamos que por meio de abstrações e da tomada de consciência, os participantes passavam de um estado inicial de cognição para outros, cada vez mais evoluídos. Com a integração da tecnologia a esse processo, tornou-se necessário considerar o acréscimo do artefato à dupla sujeito-objeto. O acesso a um objeto matemático se dá por meio de uma representação deste, o que requer a utilização de um *software* matemático. No caso dessa pesquisa, o acesso às representações gráficas das superfícies quádricas se deu por meio do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra.

Nesse caso, a interação entre o sujeito e o objeto no processo de fazer e compreender dependeu da apropriação tecnológica do sujeito da pesquisa (Rabardel, 2002). Na análise da tríade sujeito-artefato-objeto, conforme em Rabardel (2002), os esquemas tratados de modo único em Piaget, são tipificados em esquemas de utilização. Estes podem consistir em esquemas de uso ou esquemas de ação instrumentada, estes últimos compostos de esquemas de uso e esquemas conceituais.

Apesar das diferenças apontadas, a concepção de desenvolvimento cognitivo também está relacionada à evolução dos esquemas de utilização. Observamos que os esquemas de utilização construídos numa atividade, formavam uma base na estrutura cognitiva do participante, e a sua mobilização possibilitava a constituição de novos esquemas. Observamos

que nas situações em que os participantes dominavam, as suas ações eram mais espontâneas devido aos esquemas que conseguiam mobilizar mais facilmente.

E a implementação de esquemas de utilização em situações novas, mas semelhantes a outras conhecidas, conduzia à generalização de esquemas por extensão das classes de situações, de artefatos e de objetos. Rabardel (2002) diz que esse é o processo de assimilação, levando também à diferenciação quando os esquemas existentes precisam se adaptar aos aspectos que diferem. E nas situações muito novas, o processo de adaptação se torna temporariamente predominante.

Esse processo leva à transformação dos esquemas disponíveis, “A reorganização, fragmentação e reestruturação, assimilação e coordenação desses esquemas produzem novas composições de esquema, permitindo o domínio da nova classe de situações e ampliando as capacidades de assimilação e adaptação” (Rabardel, 2002, p. 86, tradução nossa).

Na articulação dos aportes teóricos, entendemos que tanto os estudos de Duval quanto de Rabardel tem ponto comum (ou gênese) na epistemologia genética de Piaget, o que contribuiu para a análise dos resultados dessa investigação. Assim, as situações de ensino e aprendizagem instrumental foram propostas de forma a envolver um fazer para compreender, onde a apropriação tecnológica fez-se necessária para obter as representações dinâmicas das superfícies. O acesso às representações dinâmicas de superfícies quádricas por meio do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra ofereceu suporte às ações mentais do aluno.

Para o uso das ferramentas do GeoGebra, identificamos a necessidade de mobilização de esquemas conceituais prévios, que possibilitavam a constituição de novos esquemas de utilização. E essas apreensões conceituais, eram viabilizadas pelas apreensões figurais proporcionadas pelas representações dinâmicas. Assim, identificamos a existência de uma engrenagem (apropriação tecnológica – apreensão figural – apreensão conceitual), proporcionando a evolução dos esquemas de utilização.

Os elementos dessa engrenagem passaram a constituir as categorias de análise, quando identificamos os indicadores de cada uma. A partir das conexões entre as análises teórica e dos dados, percebemos que a mobilização espontânea de esquemas de utilização consistia num indicador de apropriação tecnológica. A evolução da imagem mental constituídas pelos sujeitos dessa pesquisa poderiam dar indícios da qualidade das apreensões figurais. E a observação da coordenação dos diferentes registros de representação de superfícies quádricas indicaria a ocorrência de apreensões conceituais.

Analisando os momentos em que os participantes apresentaram indícios de apropriação tecnológica (mobilização espontânea de esquemas de utilização - Rabardel) ou apreensões

conceituais (coordenação de registros de representação - Duval), entendemos que a ‘mobilização espontânea dos esquemas de utilização para a coordenação dos registros de representação’ seria um indicador que serve para os dois casos, aplicando-se a todas as atividades e conectando as teorias de Duval e Rabardel.

Depois, percebemos que os momentos em que ocorrem essas mobilizações espontâneas de esquemas de utilização (Rabardel) e as coordenações de registros de representação (Duval) estão diretamente relacionados com as tomadas de consciência (Piaget). Desta feita, observamos que a mobilização espontânea dos esquemas de utilização (apropriação tecnológica), proporcionava as apreensões figurais que possibilitavam a coordenação dos registros de representação (apreensão conceitual).

Pensando-com as representações dinâmicas das superfícies quádricas, os sujeitos dessa pesquisa iniciaram mobilizando esquemas previamente constituídos, agindo sobre esses objetos de pensar-com. Essas ações, generalizando-se em esquemas, possibilitavam as ações sobre objetos abstratos num estágio mais avançado. Desafiados por uma situação de ensino e aprendizagem instrumental, os participantes iniciavam com ações físico-experimentais, que envolveram a manipulação das representações dinâmicas.

Entendemos que a evolução dos esquemas de utilização se deu por meio do equilíbrio progressivo entre um mecanismo assimilador e uma acomodação complementar (adaptação). Piaget (1991) representa esse processo por uma espiral, indicando um avanço para um novo patamar juntamente com uma expansão da estrutura cognitiva do sujeito. No caso desse estudo, os participantes desenvolviam esquemas de utilização quando agiam sobre as representações dinâmicas das superfícies quádricas, inicialmente por meio de abstrações pseudo-empíricas.

As coordenações desses esquemas conduzem a abstrações refletidas, quando ocorrem as tomadas de consciência, provocando a criação de novas estruturas cognitivas. Por contínuos reflexionamentos e reflexões, esse processo de abstração reflexionante é o que dá origem aos novos patamares. O reflexionamento representando a projeção num patamar superior do que foi retirado do patamar inferior e, a reflexão, a reorganização do que foi transferido do patamar inferior para o superior.

Por meio desse processo, que dá origem ao conhecimento como capacidade, entendemos que ocorreu a evolução dos esquemas de utilização dos participantes. Para isso, as situações de ensino e aprendizagem instrumental consideraram a necessidade da união indissociável entre a experiência e a dedução, e entre os dados oferecidos pelo objeto e as ações do sujeito (Piaget, 1972). Da mesma forma como descrita por Piaget, pensando-com as representações dinâmicas

das superfícies quádricas, os participantes iniciaram o caminho do fazer para o compreender com ações puras.

Testando suas conjecturas, eles obtinham êxitos ou fracassos, até a compreensão das ações realizadas (tomadas de consciência). Ocorrendo uma inversão onde a conceituação começa a influenciar as suas ações, os participantes iniciavam a passagem de um ‘fazer’ para ‘fazer e saber o que está fazendo’ (Notare; Basso, 2012). Possibilitando a passagem do nível material para o da representação, essa conceituação passa a possibilitar a operação sobre representações mentais e não somente sobre observáveis.

Então, pensando-com as representações dinâmicas das superfícies quádricas, os participantes criavam conjecturas, testavam as suas hipóteses, refletindo sobre as respostas desses objetos de pensar-com e realizando os ajustes, até atingirem o objetivo. Nesse processo do fazer ao compreender, a conceituação se efetua por tomadas de consciência posteriores (Notare; Basso, 2012), começando quando se coloca em ação a coordenação de ao menos dois registros de representação (Duval, 2012b apud Maggio, 2018, p. 37).

Essa produção de conceito (constituição de esquemas conceituais) se dá a partir de uma abstração reflexionante com tomada de consciência (abstração refletida), consistindo em “um ponto de chegada obtido mediante numerosas abstrações reflexionantes propriamente ditas que pressupõem outras tantas abstrações pseudo-empíricas” (Becker, 2014, p. 109). Os esquemas de utilização gerados nesse processo iam sendo mobilizados, e as novas tomadas de consciência gerando os sucessivos acréscimos de esquemas de utilização às suas estruturas cognitivas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Falando sobre as reformas nos sistemas educativos que todos os países experimentaram, Duval afirma que a verdadeira mudança surgiu com os desafios relacionados ao saber e à forma de ensinar (Duval, 2015). O conteúdo (saber) ganha papel secundário em relação ao saber fazer, uma vez que a exigência da capacidade de aprender a aprender dá mais ênfase aos métodos do que ao conteúdo.

A preocupação de Duval fica explícita quando ele diz que o resultado é uma defasagem crescente entre os conhecimentos ensinados e os conhecimentos reais, que estão em expansão em diferentes domínios da pesquisa e suas aplicações em todos os setores da atividade profissional. E “Essa defasagem impõe aprender não só na escola, mas ao longo de toda a vida. Hoje estamos em uma situação em que se deve aprender mais ao longo da vida do que durante o ensino médio, ou mesmo, universitário” (Duval, 2015, p. 2).

Essa passagem remete à concepção de competência que, segundo Zabala e Arnau (2010), surge da necessidade de superar um ensino que privilegiava a memorização. A necessidade de mudança nesse sentido se confirma em Moran (2018) quando diz que a aprendizagem na e para a vida é ativa, onde o sujeito amplia suas competências por processos abertos e progressivamente mais complexos.

Na construção de uma competência, o sujeito passa por raciocínios explícitos e toma decisões conscientes (Perrenoud, 2013). Os conflitos gerados pelos ensaios e erros permitem o desequilíbrio das certezas, a reflexão e posterior reconstrução do saber. Essa abordagem por competências relaciona-se com o Fazer e Compreender de Piaget (1978), no que se refere à construção do conhecimento. Nessa concepção, ‘o saber’ e ‘o saber fazer’ andam juntos, envolvendo aprender a aprender (autonomia) sem prejuízo do conteúdo (saber).

O que talvez explique a atual realidade educacional, em que os cursos superiores vêm sofrendo modificações na tentativa de diminuir a reprovação e evasão, ocasionadas por *déficits* de aprendizagem. Em alguns casos, semanas, meses ou semestres não são suficientes para (re)construir conhecimentos que precisariam ter sido construídos ao longo da Educação Básica. Em parte, entendemos que não se trata apenas da recuperação de conteúdos não aprendidos, mas da construção de uma estrutura cognitiva necessária para os novos desafios.

Oriundas de experiências e reflexões possibilitadas por esse doutoramento, essa constatação é um dos resultados dessa pesquisa, que teve por objetivo compreender o desenvolvimento cognitivo no processo de gênese instrumental envolvendo registros dinâmicos de representações semióticas das superfícies quádricas. Com caráter interdisciplinar, essa

pesquisa envolveu os campos de investigação de Informática na Educação, Educação Matemática e Psicologia Cognitiva.

Com base em Piaget e nos resultados dessa investigação, foi possível perceber que o que prepara um indivíduo para novos e mais complexos aprendizados é a constituição da sua estrutura cognitiva. Nessa perspectiva, cada nova construção é possibilitada por construções anteriores, sendo estas últimas os verdadeiros pré-requisitos (Becker, 2012b). Essa construção da estrutura cognitiva do sujeito está intimamente relacionada à capacidade de aprender a aprender, uma vez que “o desenvolvimento do conhecimento como capacidade dá-se por continuidade funcional (assimilações e acomodações) e rupturas estruturais” (Becker, 2014, p. 110).

A abordagem pedagógica das situações de ensino e aprendizagem instrumental nessa investigação caminharam nessa perspectiva, promovendo o engajamento dos participantes em atividades que envolveram a experiência, a dedução e a autonomia por meio do fazer para compreender. Incorporando as características do ‘pensar-com tecnologias’, cada situação de ensino e aprendizagem instrumental buscou favorecer não só a aprendizagem dessas superfícies, como também a condição de continuar aprendendo de forma cada vez mais independente.

Nessa perspectiva, a compreensão do processo de construção do conhecimento sobre as superfícies quádricas envolveu a apropriação das ferramentas do GeoGebra, quando esquemas de utilização foram ora mobilizados e ora constituídos pelos participantes durante as situações de ensino e aprendizagem instrumental. Os obstáculos e saltos cognitivos ocorridos durante esse processo de gênese instrumental produziram evidências sobre os gestos intelectuais dos participantes, indicando os momentos em que ocorreram as tomadas de consciência.

Essas evidências sobre o processo de gênese instrumental dos participantes foram inferidas a partir da observação das atitudes comportamentais por observações *in loco* e gravações, nas produções escritas e nas construções do GeoGebra. Observando as condutas cognitivas dos participantes, buscamos identificar os esquemas de utilização que as representações dinâmicas das superfícies quádricas possibilitavam mobilizar ou construir.

Considerando que a compreensão em matemática requer a coordenação de ao menos dois registros de representação das superfícies quádricas (Duval, 2009), as atividades envolveram a correlação entre os registros figural, gráfico, simbólico e em língua natural. Essas correlações entre os registros de representação das superfícies quádricas foram propostas por meio de situações de ensino e aprendizagem instrumental, cuja concepção de construção do conhecimento envolve um processo em que se faz necessário fazer para compreender.

Por esse processo, que inicia por abstrações pseudoempíricas e evolui para abstrações refletidas, ocorrem as tomadas de consciência. Desafiados por uma situação de ensino e aprendizagem nova, em que tinham que pensar-com as representações dinâmicas das superfícies quádricas, os participantes mobilizavam esquemas disponíveis nas suas estruturas cognitivas.

Iniciando a atividade instrumentada com a mobilização de esquemas prévios quando precisava utilizar as ferramentas do GeoGebra, o progresso no conhecimento do instrumento capacitava os participantes à exploração do objeto de estudo, ampliando a sua compreensão sobre este. Por outro lado, o progresso dos esquemas conceituais capacitava-os a ampliar o uso das ferramentas do GeoGebra. E na continuidade desses processos, por meio do suporte que um oferece ao outro, ocorre o desenvolvimento dos esquemas de utilização.

Aumentando suas capacidades assimilativas, o instrumento ampliava as suas possibilidades de ação. Esse processo requer um fazer para compreender, onde os participantes constituem novos esquemas de utilização, cuja acomodação promove a expansão das suas estruturas cognitivas. De forma que, a evolução dos esquemas de utilização pode ser concebida por um processo em que as tomadas de consciência promovem uma mudança de nível de compreensão, do mais simples ao mais complexo.

Foi possível perceber três elementos - apropriação das ferramentas, apreensão figural e apreensão conceitual – promovendo esse processo. Os esquemas constituídos durante a apropriação das ferramentas do GeoGebra, influenciando as apreensões figurais, contribuem para as apreensões conceituais. Por sua vez, a constituição dos esquemas conceituais favorecia a apropriação das ferramentas, e assim por diante. De forma que, esses elementos comportavam-se como uma engrenagem, impulsionando a evolução dos esquemas.

Conforme discutido no texto, a denominação ‘esquemas conceituais’ foi utilizada nessa pesquisa para representar os esquemas não classificados por Rabardel (1995a). O autor diz que os esquemas de uso se coordenam entre si e com ‘outros esquemas’, constituindo os esquemas de ação instrumentada. Entendemos que esses ‘outros esquemas’, relacionados à construção do conhecimento matemático por meio de tecnologias, são os resultantes das apreensões conceituais. Consideramos que esse construto teórico consiste em mais uma contribuição dessa investigação.

Todavia, entendemos que os resultados dessa pesquisa iniciam pela articulação teórica, que foi base para a criação do conjunto das atividades das SEAI, cuja validação emergiu da análise dos resultados. Destacamos que, apesar de oriundos de uma investigação relacionada às superfícies quádricas, esses resultados não se limitam a este tema. Essas constatações podem

ser válidas para outros tópicos e também para outros níveis de ensino. Nesse aspecto, esperamos que essas evidências possam impulsionar outras investigações, fornecendo subsídios para que pesquisadores e professores tenham mais chance de produzir impacto positivo na aprendizagem de Matemática.

A propósito, desde o estudo dos aportes teóricos até a análise dos dados, foram emergindo outras possibilidades de pesquisa. Entendemos que o aprofundamento necessário para dar conta desses outros temas exigiria metodologias de pesquisa específicas, ficando inviável realizar de forma concomitante com essa investigação. Apesar disso, apresentamos a seguir alguns dos resultados que foram possíveis de observar e indicações de possíveis pesquisas futuras.

O quadro de Parzysz (1988) foi um dos temas que emergiram dessa pesquisa, sobre o qual apresentamos parte dos resultados, podendo ser explorado em pesquisas futuras. Investigando as formas de acesso às superfícies quádricas e possíveis contribuições para as apreensões figurais desses objetos matemáticos, propomos uma atualização do quadro de níveis de representação de Parzysz (1988). Essa atualização refere-se à tipificação das possibilidades de representação figural ou gráfica de um objeto matemático tridimensional, apontando alguns resultados relativos ao nível de perda de informação de que trata Parzysz (1988).

Considerando apenas duas formas de representação de um objeto matemático tridimensional (maquete e desenho), Parzysz (1988) observou a ocorrência de perda de informação progressivamente maior quando o acesso ao objeto matemático se dava por meio da representação 3D e 2D, nessa ordem. A atualização desse quadro compreende a categorização das possíveis formas de acesso a um objeto matemático tridimensional qualquer: representações 2D-estáticas (papel ou quadro), 2D-dinâmicas (janela de visualização de um *software* gráfico), 3D-estáticas (protótipos de impressão 3D) e 3D-dinâmicas (imagens anáglifas ou realidade aumentada).

Entendemos que a análise da perda de informação quando se usa uma ou outra representação requer metodologia específica, como a de grupo de controle, para comparação de situações de ensino e aprendizagem com e sem as diferentes representações figurais ou gráficas. Não sendo possível conduzir concomitantemente esta e outras possibilidades de pesquisa, até pela necessidade de tornar algumas variáveis constantes para analisar a outra, consideramos que esta pode se configurar numa pesquisa futura.

Contudo, em acordo com as evidências dessa investigação, entendemos que cada representação (2D ou 3D, estática ou dinâmica) tem suas próprias limitações e potencialidades no que se refere à capacidade de revelar as propriedades de um objeto matemático

tridimensional. A transparência de uma representação figural ou gráfica, ou capacidade de revelar informações sobre um objeto matemático, também pode variar em acordo com os conceitos abordados, a atividade proposta ou os conhecimentos prévios possuídos pelo sujeito.

Outro aspecto que emergiu dessa pesquisa e indicamos como pesquisa futura é a contribuição da desconstrução dimensional para a compreensão em matemática. O reconhecimento de unidades figurais de dimensões inferiores pode dirimir possíveis enganos na identificação das propriedades de um objeto matemático tridimensional representado pela sua projeção bidimensional (papel, tela do computador ou celular). Em um hiperboloide de uma folha, por exemplo, uma seção plana circular pode se apresentar como uma elipse numa representação bidimensional.

Esta é uma das limitações de representações bidimensionais estáticas, que foi superada pelas representações dinâmicas e pela larga utilização das seções planas como unidades significantes, permeando todas as situações de ensino e aprendizagem instrumental. A respeito das seções planas, foi possível constatar que ‘ver geometricamente’ consiste em operar uma desconstrução dimensional (Duval, 2011b). Assim, no exemplo do hiperboloide de uma folha, o engano na identificação de uma elipse foi evitado ao propor a identificação e a correlação entre as representações gráfica e simbólica da seção plana circular.

Além de eliminar possíveis enganos nas apreensões figurais, constatamos que a desconstrução dimensional possibilita a significação decorrente da interpretação geométrica dos tratamentos algébricos para a identificação das seções planas. Entendemos com isso, porque Duval (2011a, 2011b, 2013) afirma que a passagem de uma dimensão a outra representa um salto cognitivo considerável. As seções planas das superfícies quádricas foram as unidades significantes responsáveis por revelar os valores visuais necessários para a diferenciação entre as representações simbólicas e as gráficas.

Essa diferenciação é essencial para estabelecer a correlação entre diferentes representações, sendo indispensável à coordenação dos registros, que precede e, mais do que isso, possibilita a construção dos conceitos matemáticos (Duval, 2011b, 2012c, 2013). Com isso, foi possível constatar também o que afirma Silva, S. (2018), que a passagem de um registro a outro se daria apenas em forma de codificações (ao invés de conversões) sem a desconstrução dimensional. Uma análise da contribuição da desconstrução dimensional também pode consistir em um tema para pesquisas futuras.

A observação e comparação de situações de ensino e aprendizagem com e sem o uso da desconstrução dimensional também requer metodologia adequada, incompatível com a necessária para responder ao problema de pesquisa da presente investigação. Conforme dito

anteriormente, nesse estudo, a desconstrução dimensional permeou todas as situações de ensino e aprendizagem. Em relação às representações dinâmicas, outra forma utilizada nessa investigação para superar as limitações de representações bidimensionais estáticas, foi possível constatar que também contribuem para dirimir enganos relacionados à projeção de um objeto matemático tridimensional.

No ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, por exemplo, uma representação na janela de visualização 3D ainda consiste na projeção de um objeto matemático tridimensional. No entanto, a possibilidade de manusear a representação dinâmica também contribui para dirimir enganos relativos às diferenças entre o objeto matemático e a sua projeção. Tomando novamente o hiperboloide de uma folha com seções planas circulares, a possível confusão na identificação de uma elipse em lugar de uma circunferência pode ser evitada ao girar a superfície.

Contudo, para além disso, as representações dinâmicas evitam que a visualização do objeto matemático tridimensional fique restrita apenas a casos particulares. A possibilidade de alteração do valor dos coeficientes na expressão algébrica da equação de uma quádrlica, observando as simultâneas alterações gráficas provocadas, foi condição necessária para a coordenação dos registros de representação gráficos e simbólicos. E a dinamicidade dessas representações qualifica as apreensões figurais, possibilitando a exploração das propriedades do objeto matemático e a generalização.

As atividades propostas para análise dos limites e potencialidades das diferentes representações envolveram apenas a classificação das superfícies quádrlicas, o que só exigiu a identificação das seções planas. No entanto, apesar de não requerer muitos recursos da matemática dinâmica, observamos que a possibilidade de inserção do plano para a visualização das seções planas se fez necessária em algumas circunstâncias. Os tratamentos que os ambientes de matemática dinâmica possibilitam realizar sobre as representações dinâmicas enriquecem as apreensões figurais, contribuindo para a apreensão conceitual dos conteúdos envolvidos.

Convém salientar que os conhecimentos prévios constituídos pelo sujeito consistem em variáveis importantes nessa análise. As evidências levantadas nesse estudo indicaram que, em algumas situações, as representações estáticas foram suficientes para os sujeitos dessa pesquisa, não tendo sido possível avaliar com profundidade. Assim, ponderamos que as diferentes formas de representação de um objeto matemático tridimensional (2D ou 3D, estáticas ou dinâmicas), podem ser utilizadas de forma complementar e a partir de uma análise das suas características, dos conceitos abordados, das atividades propostas e dos sujeitos envolvidos.

Todavia, reiteramos sobre a indicação desse tema como possibilidade de pesquisa futura. Outro tema que emergiu dessa investigação refere-se à relação entre autonomia e cooperação, que surge ao pensarmos na construção do conhecimento na perspectiva piagetiana. Nesse caso, o aprendiz deve assumir o papel de autor e os demais sujeitos envolvidos (em especial, o professor) de cooperadores. Esse tema surge das reflexões sobre um processo de construção do conhecimento matemático em que o objetivo é “[...] produzir a maior aprendizagem a partir do mínimo de ensino [...]” (Papert, 2008, p. 134). Essa dupla de conceitos (autonomia e cooperação) aparentemente dicotômicos, opostos e complementares, podem ser tratados do ponto de vista piagetiano.

Por fim, entendemos que a construção do conhecimento matemático fica condicionada pelas tecnologias utilizadas que, conforme Notare e Basso (2016), transformam as formas de pensar e fazer matemática. Com base nisso, ponderamos que os resultados dessa pesquisa evidenciaram a relevância e necessidade de estudos relacionados à construção do conhecimento matemático por meio das tecnologias.

REFERÊNCIAS

- ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; ALENCAR, Sergio Vicente. A Gênese Instrumental na Interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro - SP, v. 27, n. 46, p. 349–365, 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/j/bolema/a/C5Jm7tRkLDLFBwbFS5bSc4z/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 28 jul. 2021.
- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro - SP, v. 31, n. 57, p. 202–219, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a10>. Acesso em: 8 out. 2021.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; MORETTI, Méricles Thadeu. Metassíntese de pesquisas apoiadas na teoria dos registros de representação semiótica. **ReBECCEM - Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel - PR, v. 5, n. 3, p. 560–630, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.33238/ReBECCEM.2021.v.5.n.3.28505>. Acesso em: 23 abr. 2022.
- ALVES, Adriana Mota *et al.* Atividades Investigativas com Apoio de Tecnologias Digitais: Contribuições para o estudo de Quádricas. **XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**, Cuiabá - MT, 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/338634648_ATIVIDADES_INVESTIGATIVAS_COM_APOIO_DE_TECNOLOGIAS_DIGITAIS_CONTRIBUICOES_PARA_O_ESTUDO_DE_QUADRICAS. Acesso em: 2 out. 2021.
- ALVES, Luiz Fernando Giolo. **Uma abordagem do estudo de cônicas e quádricas com o auxílio do software GeoGebra**. 2016. 81 f. Dissertação de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/144298>. Acesso em: 16 jul. 2023.
- ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith. Usos e abusos dos estudos de caso. **Cadernos de Pesquisa**, Rio de Janeiro - RJ, v. 36, n. 129, p. 637–651, 2006. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/cp/a/BdSdmX3TsKKF3Q3X8Xf3SZw/?lang=pt>. Acesso em: 18 jul. 2021.
- AMARAL, Roberto Costa do. **Cônicas e Quádricas: uma abordagem didática para a ampliação do ensino médio e aprimoramento de cursos técnicos**. 2019. 110 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife -PE, 2019. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/8459>. Acesso em: 16 set. 2021.
- ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. **Anais da 27ª Reunião Anual da Anped**, Caxambu - MG, v. 1, p. 21–24, 2004. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html>. Acesso em: 18 jul. 2021.
- ARTIGUE, Michele. Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work.

International Journal of Computers for Mathematical Learning, Paris, v. 7, n. 3, p. 245–274, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>. Acesso em: 18 jul. 2021.

ASSIS, Cibelle de Fátima Castro de. **Diálogo didático matemático na EaD: uma perspectiva para o ensino e aprendizagem em fóruns no moodle**. 2010. Tese de Doutorado em Educação - Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3792>. Acesso em: 18 jul. 2021.

AZUMA, Ronald *et al.* Recent advances in Augmented Reality. **IEEE Computer Graphics and Applications**, IEEE, v. 21, n. 6, p. 34–47, 2001. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/963459>. Acesso em: 18 jul. 2021.

BASSO, Marcos Vinícius de Azevedo; NOTARE, Márcia Rodrigues. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre - RS, v. 13, n. 2, p. 1–10, 2015. Disponível em: <https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/61432>. Acesso em: 24 fev. 2020.

BAVARESCO, Delair *et al.* Modelagem tridimensional de objetos conceituais de matemática. **ScientiaTec: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia do IFRS**, Porto Alegre - RS, v. 5, n. 1, p. 3–19, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.35819/scientiatec.v5i1.2504>. Acesso em: 18 jul. 2021.

BECKER, Fernando. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional. **Schème - Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**, Marília - SP, v. 6, p. 104–128, 2014. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/126295>. Acesso em: 18 jul. 2021.

BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento**. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012a.

BECKER, Fernando. **Epistemologia do professor de matemática**. São Paulo: Penso, 2012b.

BECKER, Fernando. Modelos Pedagógicos e Modelos Epistemológicos. *In*: SILVA, L.H.; AZEVEDO, J.C. (org.). **Paixão de Aprender II**. Petrópolis: Vozes, 1995.

BECKER, Fernando. O que é construtivismo?. **Revista de Educação AEC**, Porto Alegre - RS, v. 21, n. 83, p. 7–15, 1992. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3632334/mod_resource/content/0/Becker.pdf. Acesso em: 18 jul. 2021.

BICER, Ali *et al.* Moving from STEM to STEAM: The effects of informal STEM learning on students' creativity and problem solving skills with 3D printing | Semantic Scholar. **IEEE Frontiers in Education Conference (FIE)**, [s. l.], v. 1, p. 1–6, 2017. Disponível em: <https://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/FIE.2017.8190545>. Acesso em: 20 abr. 2022.

BORBA, Marcelo De Carvalho; ALMEIDA, Helber Rangel Formiga Leite de; CHIARI, Aparecida Santana de Souza. Tecnologias Digitais e a relação entre teoria e prática: uma análise da produção em trinta anos de BOLEMA. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro - SP, v. 29, n. 53, p. 1115–1140, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a16>. Acesso em: 23 abr. 2022.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1987.

BOYER, B. Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974.

BRETSCHER, N. Dynamic Geometry Software: The Teacher's Role in Facilitating Instrumental Genesis. **Annals of Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - Proceedings of CERME 6**, Lyon, v. 1, p. 1340–1348, 2009. Disponível em: <https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/1541149/>. Acesso em: 18 jul. 2021.

BROADBENT, Donald E. **Perception and Communication**. Londres: Pergamon Press, 1958.

BUENO-RAVEL, Laetitia; GUEUDET, Ghislaine. L'approche instrumentale des genèses d'usage: le cas des bases d'exercices en ligne. Des technologies aux ressources numériques, genèses d'usages et genèses documentaires. *In*: LAGRANGE, J.-B. (org.). **Les technologies numériques pour l'enseignement - Usage, dispositif et genèses**. Toulouse: Octarès, 2013. p. 106–124. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00911866>. Acesso em: 19 abr. 2022.

BUSSOLOTTO, Débora. **Gênese Instrumental do GeoGebra 3D: um estudo no Ensino Médio Normal/Magistério**. 2019. 117 f. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2019. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/198560>. Acesso em: 24 maio 2020.

CALIGARIS, Marta Graciela *et al.* Designing tools for Analytic Geometry: the Quadrics. **New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences**, São Nicolas - Argentina, v. 4, n. 3, p. 219–228, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.18844/prosoc.v4i3.2643>. Acesso em: 18 jul. 2021.

CASTRO FILHO, José Aires de; FREIRE, Raquel Santiago; MAIA, Dennys Leite. Estudo de Caso como método de pesquisa em Informática na Educação. *In*: JAQUES, Patricia *et al.* (org.). **Metodologia de Pesquisa em Informática na Educação**. Ceará: UFC, 2020. Disponível em: <https://metodologia.ceie-br.org/livro-3/>. Acesso em: 5 set. 2021.

CECÍLIO, Waléria Adriana Gonzalez; TEDESCO, Daniel Guimarães. Aprendizagem Baseada em Projetos: relato de experiência na disciplina de Geometria Analítica. **Revista Docência do Ensino Superior**, Curitiba - PR, v. 9, p. 1–20, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/rdes/article/view/2600>. Acesso em: 5 set. 2020.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin; FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Mércles Thadeu. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo -SP, v. 9, n. 2, p. 181–203, 2007. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/901>. Acesso em: 18 jul. 2021.

CORRÊA, Madeline Odete Silva; MORETTI, Mércles Thadeu. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. *In*: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu (org.). **As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática**. Ijuí: Unijuí, 2014. p. 39–65.

CORREIA, Juliana Mauri. **Superfícies Quádricas. Transformação das Coordenadas**. 2010. 89 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática Universitária - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91150>. Acesso em: 16 set. 2021.

COUTO, Rosilângela Maria de Lucena Scanoni. **Mediações Didáticas da Tutoria Online da Geometria Analítica: uma análise à luz da orquestração instrumental e das representações semióticas**. 2015. 173 f. Dissertação de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE, 2015. Disponível em: <https://attena.ufpe.br/handle/123456789/18808>. Acesso em: 23 abr. 2022.

DALLEMOLE, Joseide Justin; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; RUIZ, Lorenzo Moreno. Registros de representação semiótica e geometria analítica: Uma experiência com futuros professores. **RELIME - Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa**, [s. l.], v. 17, n. 2, p. 131–163, 2014. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362014000200002&lng=es&nrm=iso&tlng=pt. Acesso em: 28 set. 2021.

DAMM, Regina Flemming. Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. *In*: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas - SP: Papyrus, 2003. p. 35–48.

D'AMORE, Bruno. A especificidade da Matemática e da Didática da Matemática. *In*: BARUFI, Maria Cristina Bonomi (org.). **Epistemologia e Didática da Matemática**. São Paulo - SP: Escrituras, 2005. p. 45–66.

DRIGO, Márcia Ogécia. **Comunicação e cognição: semiose na mente humana**. 1. ed. Porto Alegre: Sulina, 2007. Disponível em: <https://pesquisa.bvsalud.org/portal/resource/pt/lil-756941>. Acesso em: 19 abr. 2022.

DRIJVERS, Paul; TROUCHE, Luc. From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. **Research on technology and the teaching and learning of mathematics**, Netherlands, v. 2, p. 363–392, 2008. Disponível em: <https://x.gd/cpzEO>. Acesso em: 18 jul. 2020.

DUVAL, Raymond. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis - SC, v. 13, n. 2, p. 1–27, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p1>. Acesso em: 19 out. 2021.

DUVAL, Raymond. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis - SC, v. 7, n. 1, p. 97–117, 2012a. Disponível em:

<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p97>. Acesso em: 21 set. 2021.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis - SC, v. 6, n. 2, p. 96–112, 2011a. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96>. Acesso em: 22 ago. 2021.

DUVAL, Raymond. Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre? **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis - SC, v. 8, n. 1, p. 1–45, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p1>. Acesso em: 21 set. 2021.

DUVAL, Raymond. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030! Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis - SC, v. 10, n. 1, p. 1–23, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n1p1>. Acesso em: 30 ago. 2021.

DUVAL, Raymond. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? Tradução: Luciana de Costa Oliveira; Méricles Thadeu Moretti. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa - PR, v. 7, n. 2, p. 305–330, 2012c. Disponível em: <http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa>. Acesso em: 11 mar. 2022.

DUVAL, Raymond. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis - SC, v. 11, n. 2, p. 1–78, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p1/33628>. Acesso em: 29 ago. 2021.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis - SC, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012b. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 18 jul. 2020.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas - SP: Papyrus, 2003. p. 11–33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. 1. ed. São Paulo - SP: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. **AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém - PA, v. 6, n. 12, p. 126–143, 2010. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/1708>. Acesso em: 18 jul. 2020.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar - os registros de representação semiótica**. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011b.

ECO, Umberto. As Formas do Conteúdo. **Perspectiva**, São Paulo - SP, v. 1, p. 155–159, 1974. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/discurso/article/view/37772>. Acesso em: 18 jul. 2021.

FAUSTINO, Ana Carolina; SANTINO, Fernando Schindwein; LOPES, Beatriz Gouvea. Cenários para investigação na formação inicial de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. **Anais do XIII SESEMAT**, Pioneiros - MS, v. 1, p. 83–92, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/8330>. Acesso em: 18 jul. 2021.

FERNANDES, Filipe Santos; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática: éticas e políticas na inserção de novos sujeitos, cenários e conhecimentos. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 14, n. 34, p. 1–16, 2021. Disponível em: <https://trilhasdahistoria.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/12785>. Acesso em: 24 set. 2021.

FERRAZ, Ademir. **Esboço do gráfico de função: um estudo semiótico**. 2008. 165 f. Tese de Doutorado em Educação - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4020>. Acesso em: 19 abr. 2022.

FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Mérciles Thadeu. O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. **28ª Reunião da ANPED**, Florianópolis - SC, v. 1, p. 1–13, 2005. Disponível em: http://ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/funcionamento.pdf. Acesso em: 24 ago. 2021.

FONDA, Carlo. A practical Guide to Your First 3D Print. *In*: CANESSA, Enrique; FONDA, Carlo; ZENNARO, Marco (org.). **Low-Cost 3D Printing for Science, Education and Sustainable Development**. ICTP: ICTP—The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, 2013. p. 25–60. Disponível em: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=bd3869ba16fd0690d1348e25e67db9ac7c18dbe8#page=13>. Acesso em: 20 abr. 2022.

FORTES, Patrícia Rodrigues; CAMARGO, Mariza; SILVEIRA, Sidnei Renato. Superfícies quádricas construídas com o software GeoGebra e a técnica de papietagem. *In*: PROCEEDING SERIES OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS. Campo Grande - MS: SBMAC, 2021. v. 8, p. 1–7. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/3696>. Acesso em: 23 abr. 2022.

FREITAS, José Luiz Magalhães de; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão - PR, v. 2, n. 3, p. 10–34, 2013. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/325035438>. Acesso em: 27 jan. 2021.

GAMBARATO, Renira Rampazzo. Signo, significação, representação. **Contemporânea**, Bauru-SP, v. 4, p. 204–214, 2005. Disponível em: http://www.contemporanea.uerj.br/pdf/ed_04/contemporanea_n04_18_ReniraRam.pdf. Acesso em: 18 jul. 2020.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface - Comunicação, Saúde, Educação**, Belo Horizonte - MG, v. 1, n. 1, p. 109–122, 1997. Disponível em: <http://www.scielo.br/j/icse/a/CMZhfqQZbFHBdTjg9fFWpkd/?lang=pt&format=html>. Acesso em: 26 set. 2021.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J.L. (org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte - MG: Autêntica, 2004.

GASPAR, Antonio Simões. **As Cônicas, Quádricas e suas Aplicações**. 2014. 75 f. Dissertação de Mestrado em Matemática - Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/16921>. Acesso em: 18 jul. 2021.

GOMES, Alex Sandro; GOMES, Claudia Roberta Araújo. Classificação dos tipos de pesquisa em Informática na Educação. In: JAQUES, Patricia *et al.* (org.). **Metodologia de Pesquisa Científica em Informática na Educação: Concepção de Pesquisa**. Recife - PE: SBC, 2020a. Disponível em: <https://metodologia.ceie-br.org/livro-1/>. Acesso em: 18 jul. 2023.

GOMES, Alex Sandro; GOMES, Claudia Roberta Araújo. Estrutura do Método científico: Por uma epistemologia da Informática na Educação. In: JAQUES, Patrícia *et al.* (org.). **Metodologia de Pesquisa Científica em Informática na Educação - Concepção de Pesquisa**. Recife - PE: SBC, 2020b. Disponível em: <https://metodologia.ceie-br.org/livro-1/>. Acesso em: 26 set. 2021.

GÓMEZ, Wladimir Serrano. El significado de objetos en el aula de matemáticas. **Revista de Pedagogia**, Caracas - Venezuela, v. XXVI, n. 75, p. 131–164, 2005. Disponível em: http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922005000100006&lng=es&nrm=iso. Acesso em: 18 jul. 2020.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica Uma Nova Abordagem Para O Aprendizado Da Geometria. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Belo Horizonte - MG, v. 1, p. 1–13, 1996. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf. Acesso em: 18 jul. 2021.

GRAVINA, Maria Alice *et al.* **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática**. Porto Alegre - RS: Evangraf, 2012. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/tri/sead/publicacoes/publicacoes-sead/serie-para-educacao-a-distancia/especializacao/matematica-midias-digitais-e-didatica-tripe-para-formacao-do-professor-de-matematica-2012>. Acesso em: 20 abr. 2022.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 262 f. Tese de Doutorado em Informática na Educação - Universidade Federal

do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2001. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/2545>. Acesso em: 29 set. 2021.

GRAVINA, Maria Alice; DIAS, Mariângela Torres. Álgebra E Geometria: Números Comandando Pontos. **Revista do Professor de Matemática**, Porto Alegre - RS, v. 80, n. 1, p. 34–41, 2013. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/80/9.html>. Acesso em: 18 jul. 2021.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria Costi. A aprendizagem Da Matemática Em Ambientes Informatizados. **Informática na educação: teoria & prática**, Porto Alegre - RS, v. 2, n. 1, p. 73–88, 1999. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/20962/000243348.pdf?sequence=1>. Acesso em: 18 jul. 2021.

GUIMARÃES, Núbia Lúcia Cardoso *et al.* O papel da cooperação nos processos coletivos para resolução de problemas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo - SP, v. 23, n. 1, p. 473–498, 2021. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/50007>. Acesso em: 18 jul. 2022.

GUIMARÃES, Núbia *et al.* Scratch e o Pensamento Computacional no Ensino da Matemática. **Anais do XXVIII Ciclo De Palestras Sobre Novas Tecnologias Na Educação**, Porto Alegre - RS, v. 1, p. 139–148, 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/cinted/eventos/ciclo/xxviii/anais>. Acesso em: 18 jul. 2022.

GUIMARÃES, Núbia; BEHAR, Patricia Alejandra. Aprendizagem matemática na perspectiva dos modelos de ensino híbrido. *In*: FINOCHIETTO, Jorge *et al.* (org.). **Libro de Actas 10º Congreso Internacional sobre Aplicación de Tecnologías de la Información y Comunicaciones Avanzadas**. Córdoba - Argentina: UAH, 2019a. p. 465–468. Disponível em: <https://atica.web.uah.es/documentos/LibroActasATICA2019.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2021.

GUIMARÃES, Núbia; BEHAR, Patricia Alejandra; NOTARE, Marcia. Competências docentes em matemática por meio do ensino híbrido: um olhar para a recomendação pedagógica. **Anais dos Workshops do Congresso Brasileiro de Informática na Educação**, Brasília - DF, v. 1, p. 1487–1491, 2019b. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/rbie/index.php/wcbie/article/viewFile/9124/6666>. Acesso em: 18 jul. 2021.

GUIMARÃES, Núbia Lúcia Cardoso; NOTARE, Márcia Rodrigues. A variável visual seção plana e o GeoGebra 3D na atividade cognitiva de conversão entre representações semióticas das superfícies quádricas. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 20, n. 1, p. 31–40, 2022. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/126507>. Acesso em: 19 jun. 2024.

HASPEKIAN, Mariam. Teachers' Instrumental Geneses When Integrating Spreadsheet Software. *In*: CLARK-WILSON, A.; ROBUTTI, O.; SINCLAIR, N. (org.). **The Mathematics Teacher in the Digital Era**. Paris: Springer, Dordrecht, 2014. p. 241–275. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-4638-1_11. Acesso em: 10 ago. 2021.

HEBENSTREINT, J. **Simulation e Pédagogue, une reconte du troislème typa**. Gil Sur Yvene: École Supérieure d'Électricité, 1987.

HEDLER, Larissa Weyh Monzon. **Desenvolvimento do pensamento geométrico espacial GeoGebra, Impressora 3D e Abstração Reflexionante processo de abstração reflexionante**. 2020. 252 f. Tese de Doutorado em Informática na Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2020. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/219414>. Acesso em: 18 jul. 2022.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOU, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação (Bauru)**, Bauru-SP, v. 22, n. 2, p. 465–487, 2016. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132016000200465&lng=pt&tlng=pt. Acesso em: 18 jul. 2021.

HENRIQUES, Afonso; FARIAS, Elisângela Silva; FUNATO, Rosane Leite. Exposição do laboratório de visualização matemática da UESC e o papel da impressora 3D na produção de recursos didáticos. *In*: NAVARRO, Eloisa Rosotti; SOUSA, Maria do Carmo (org.). **Educação Matemática em Pesquisa: Perspectivas e Tendências**. São Paulo - SP: Editora Científica Digital, 2021. v. 2, p. 477–493. Disponível em: <http://www.editoracientifica.com.br/articles/code/201202535>. Acesso em: 26 ago. 2021.

IORDAN, Anca-Elena. Interactive Software Designed for the Study of the Paraboloid. **Annals of Faculty Engineering Hunedoara-International Journal of Engineering**, Hunedoara - Romênia, v. 63, n. 4, p. 63–68, 2015. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/312039815>. Acesso em: 18 jul. 2021.

JORGE, Ana Maria Guimarães. O que é Semiótica Peirceana?. *In*: INTERCOM-2000-GT DE SEMIÓTICA. Taubaté-SP: Unitau, 2000. p. 1–17. Disponível em: <http://www.portcom.intercom.org.br/pdfs/32f0c60b767caf02b3e08832f3c26c27.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2021.

JUPRI, AI; DRIJVERS, Paul; ILEUVCL-PANHUIZCN, Marja van den. An instrumentation theory view on students' use of an Applet for Algebraic substitution. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, Netherlands, v. 23, n. 2, p. 63–80, 2016. Disponível em: <https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/334842>. Acesso em: 18 jul. 2020.

KIRNER, Claudio; KIRNER, Tereza Gonçalves. Evolução e Tendências da Realidade Virtual e da Realidade Aumentada. *In*: RIBEIRO, Marcos Wagner S.; ZORZAL, Ezequiel Roberto (org.). **Realidade Virtual e Aumentada: Aplicações e Tendências**. Uberlândia - MG: SBC, 2011. p. 10–25. Disponível em: <https://x.gd/1GxEf>. Acesso em: 18 jul. 2021.

KNILL, Oliver; SLAVKOVSKY, Elizabeth. Thinking like Archimedes with a 3D printer. **Cornell University**, Cambridge, v. 1, p. 1–16, 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1301.5027v2>. Acesso em: 20 abr. 2022.

LAFUENTE, Luis Antonio Mopi. **Semiose: o interpretante e a inferência de Charles Sanders Peirce**. 2016. 152 f. Dissertação de Mestrado em Filosofia - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/11562/1/Arquivototal.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2021.

LAZZARIN, Luís Fernando. **Bases epistemológicas da pesquisa em educação**. Santa Maria - RS: UFSM, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15808/Bases_epistemologicas_Educao_Especial.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 27 set. 2021.

LEVY, Pierre. **As Tecnologias da Inteligência**. Rio de Janeiro - RJ: Editora 34, 1996.

LIEBAN, D. E. Palmitos & Da Vinci: do concreto ao digital. Inspirações para movimentos articulados e parametrização de curvas com o GeoGebra. **Oficinas - VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**, Campinas - SP, 2012. Disponível em: http://bienaldematematica.org.br/sites/bienaldematematica.org.br/files/Oficinas_1.pdf. Acesso em: 1 set. 2021.

LIMA, Gerlúcio Silva de. **As formas geométricas nas obras de Gaudí: as superfícies quádricas, as superfícies regradas e a catenária**. 2019. 88 f. Dissertação de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza - CE, 2019. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=4851&id2=171053407. Acesso em: 18 jul. 2021.

LONDERO, Nandyne. **Explorando Recursos do GeoGebra Book no estudo de quádricas a partir de diferentes representações**. 2017. 156 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria - RS, 2017. Disponível em: <http://repositorio.ufsm.br/handle/1/13480>. Acesso em: 25 nov. 2020.

LONDERO, Nandyne; FERREIRA, Inês Farias. Representações semióticas mobilizadas no conteúdo das superfícies quádricas em algumas publicações desde a década de 40. **Anais do VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática**, Canoas-RS, 2017. Disponível em: <https://x.gd/vIOVP>. Acesso em: 18 jul. 2021.

LOPES, Érika Maria Chioca. **Integração de mídias na disciplina de geometria analítica em um curso de graduação em matemática**. 2019. Tese de Doutorado em Educação - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/24833>. Acesso em: 18 jul. 2021.

LOPES, Érika Maria Chioca *et al.* Manipulação e visualização de superfícies quádricas por meio de modelos impressos em 3D e modelos digitais. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre - RS, v. 19, n. 1, p. 392–401, 2021. Disponível em: <https://orcid.org/0000-0001-8489-3974>. Acesso em: 18 jul. 2022.

LOPES, Érika Maria Chioca; SOUZA JUNIOR, Arlindo José. Ensinar e aprender Geometria Analítica com Tecnologias Digitais por meio de um trabalho colaborativo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo - SP, v. 10, n. 2, p. 66–79, 2019. Disponível em: <https://revistaposhmg.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2332>. Acesso em: 23 abr. 2022.

LUCENA, Rosilângela; GITIRANA, Verônica. Configurações didáticas da tutoria online: a escolha de recursos para mediação didática do tutor. **Anais do VI SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Pirenópolis - GO, v. 1, p. 1–12, 2015. Disponível em: <https://grupoddm.pro.br/wp-content/uploads/2020/05/PEREIRA-GITIRANA.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2021.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E.D. **A Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MAGGIO, Deise Pedroso. **Entrecruzamento teórico-metodológico entre registros de representação e teoria da objetivação**. 2018. 127 f. Tese de Doutorado em Educação nas Ciências - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí - RS, 2018. Disponível em: <http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/6061>. Acesso em: 14 out. 2021.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisa**. 5. ed. São Paulo - SP: Atlas, 2002.

MARIN, Douglas; MARCO, Fabiana Fiorezi de. **Metodologia da Pesquisa na formação do professor de Matemática**. Uberlândia - MG: UFU, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25237/1/Livro_Metodologia_da_Pesquisa.pdf. Acesso em: 18 jul. 2021.

MARTINS, Joel; BICUDO, Maria Aparecida Viggiane. **A pesquisa qualitativa em Psicologia: fundamentos e recursos básicos**. São Paulo: EDUC-Moraes, 1989.

MASCHIETTO, Michela; TROUCHE, Luc. Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: The productive notion of mathematics laboratories. **ZDM Mathematics Education**, Modena - Italy, v. 42, n. 1, p. 33–47, 2010. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-009-0215-3>. Acesso em: 18 jul. 2021.

MATOS, Dayane Torres; FERNANDES, Thamires de Souza. As cúpulas do Palácio do Congresso Nacional. **Caderno de Graduação - Ciências Exatas e Tecnológicas**, Aracaju, v. 5, n. 2, p. 91–106, 2019. Disponível em: <https://periodicos.set.edu.br/cadernoexatas/article/view/6687>. Acesso em: 22 abr. 2022.

MEDEIROS, Margarete Farias. **Geometria dinâmica e gênese instrumental: Processo de Abstração Reflexionante**. 2020. 358 f. Tese de Doutorado em Informática na Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre - RS, 2020. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/219243>. Acesso em: 18 jul. 2021.

MEDEIROS, Margarete Farias; BASSO, Marcus. A tecnologia digital como estruturadora do pensamento geométrico. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo - SP, v. 22, n. 1, 2020. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/44122>. Acesso em: 25 jul. 2021.

MEDEIROS, Margarete; BASSO, Marcus. Abstração Refletida sobre o Processo de Gênese Instrumental em Geometria Dinâmica: Restrições, Desafios, Novas Possibilidades de Aprendizagem. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre - RS, v. 17, n. 3, p. 437–446, 2019. Disponível em: <https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/99527>. Acesso em: 17 maio 2020.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. A turbulenta origem da pesquisa qualitativa no Brasil. In: BICUDO, M.A.V.; COSTA, A.P. (org.). **Leituras em Pesquisa Qualitativa**. São Paulo: Livraria da Física, 2019. p. 99–118.

MINEIRO, Renato Mendes. **Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional**. 2011. 174 f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo - SP, 2011. Disponível em: <https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/3642/1/RENATO%20MENDES%20MINEIRO.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2021.

MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In*: BACICH, Lilian; MORAN, José (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 1–25.

MOREIRA, Marco Antonio. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências-V7**, Porto Alegre - RS, v. 7, n. 1, p. 7–29, 2002. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141212/000375268.pdf?sequen>. Acesso em: 19 jul. 2021.

MORENO-ARMELLA, Luis; HEGEDUS, Stephen J.; KAPUT, James J. From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, v. 68, n. 2, p. 99–111, 2008. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s10649-008-9116-6>. Acesso em: 19 jul. 2021.

MORETTI, Mércles Thadeu. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. *In*: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas - SP: Papirus, 2003. p. 149–160.

MORETTI, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Fink. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597–616, 2015. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/26177/>. Acesso em: 25 jul. 2021.

MORETTI, Mércles Thadeu; FERRAZ, Ademir Gomes; FERREIRA, Verônica Gitirana Gomes. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **Quadrante**, Portugal, v. XVII, n. 2, p. 97–122, 2008. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22829>. Acesso em: 10 mar. 2022.

MORETTI, Mericles Thadeu; LUIZ, Learcino dos Santos. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo - SP, v. 12, n. 3, p. 529–547, 2010. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4748>. Acesso em: 10 mar. 2022.

MOTA, Janine Freitas; LAUDARES, João Bosco. Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais para o desenvolvimento da visualização, com o Winplot. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**, Recife, v. 1, p. 1–12, 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/856/972. Acesso em: 19 jul. 2021.

MOTA, Janine Freitas; LAUDARES, João Bosco. Um Estudo de Planos, Cilindros e Quádricas, na Perspectiva da Habilidade de Visualização, com o Software Winplot. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro - SP, v. 27, n. 46, p. 497–512, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300011>. Acesso em: 15 set. 2021.

MUNARI, Alberto. **Jean Piaget**. Recife: Massangana, 2010. Disponível em: <http://piape.prograd.ufsc.br/files/2020/07/Jean-Piaget.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2021.

NÉ, Adriano Luiz dos Santos. **A análise da linguagem matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no ensino superior**. 2013. 157 f. Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/101091>. Acesso em: 19 jul. 2021.

NEVES, Liliane Xavier. **Intersemioses em vídeos produzidos por licenciandos em Matemática da UAB**. 2020. Tese de Doutorado em Educação Matemática - Unesp, Rio Claro - SP, 2020. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/191601>. Acesso em: 23 abr. 2022.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Argumentação e Prova Matemática com Geometria Dinâmica. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre - RS, v. 16, n. 1, 2018. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/86021>. Acesso em: 19 maio 2020.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Gênese Instrumental do GeoGebra na Formação de Professores. **Zetetiké - Revista de Educação Matemática**, Campinas - SP, v. 25, n. 2, p. 324–344, 2017a. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8647864>. Acesso em: 4 ago. 2021.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Gênese Instrumental Pessoal e Conceitos Matemáticos em Processo de Criação com o GeoGebra. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre - RS, v. 15, n. 2, p. 1–10, 2017b. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/79238>. Acesso em: 19 jun. 2020.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre - RS, v. 14, n. 2, 2016. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/70683>. Acesso em: 19 jun. 2020.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o Caminho do Fazer ao Compreender. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre - RS, v. 10, n. 3, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.22456/1679-1916.36459>. Acesso em: 19 jul. 2021.

NÖTH, Winfried. **Panorama da Semiótica - de Platão a Peirce**. 4. ed. São Paulo: Annablume, 1995.

NOVAIS, Alex Júnior. **Identificação de cônicas e quádricas utilizando o software GeoGebra**. 2019. 123 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede

Nacional - Universidade Federal do Triangulo Mineiro, Uberaba - MG, 2019. Disponível em: <http://bdtd.uftm.edu.br/handle/tede/936>. Acesso em: 5 set. 2020.

OLIVEIRA, José Adriano dos Santos. **Sobre Secções Cônicas**. 2015. 146 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/13007>. Acesso em: 19 jul. 2021.

OLIVEIRA, Andressa Cordeiro de. **Um estudo sobre a aprendizagem matemática no periódico BOLEMA nos anos de 2013 a 2017**. 2019. 106 f. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, 2019. Disponível em: <https://pos.uel.br/pecem/teses-dissertacoes/um-estudo-sobre-a-aprendizagem-matematica-no-periodico-bolema-nos-anos-de-2013-a-2017/>. Acesso em: 19 jul. 2021.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vigotski – aprendizado e desenvolvimento: Um processo sócio histórico**. São Paulo: Scipione, 1997.

OYAFUCO, Keide Tukamoto. **Classificação de Cônicas e Quádricas**. 2015. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/127749>. Acesso em: 19 jul. 2021.

PALMA, Angie Solís. Gráficas de Superfícies Cuádricas y trazas empleando GeoGebra. **Revista Digital: Matemática, Educación e Internet**, Costa Rica, v. 16, n. 1, p. 1–35, 2016. Disponível em: <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2479>. Acesso em: 5 set. 2020.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PAPERT, Seymour. **Logo: computadores e educação**. Campinas - SP: Brasiliense, 1985.

PARZYSZ, Bernard. Knowing vs seeing. problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational Studies in Mathematics**, Paris - França, v. 19, p. 79–92, 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00428386>. Acesso em: 19 jul. 2021.

PARZYSZ, Bernard. Representation of space and students’ conceptions at high school level. **Educational Studies in Mathematics**, Paris - França, v. 22, n. 6, p. 575–593, 1991. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00312716>. Acesso em: 18 ago. 2021.

PEREIRA, José Wilson. **Configurações didáticas de ambientes virtuais de aprendizagem na educação à distância**. 2017. 124 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/25566>. Acesso em: 19 jul. 2021.

PEREIRA, Lidiane *et al.* Uma Ferramenta de Apoio ao Ensino de Cálculo com Realidade Aumentada. **Anais do XXVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE 2017)**, Juiz de Fora - MG, v. 1, n. 1, p. 595, 2017. Disponível em: <https://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/7588>. Acesso em: 16 set. 2021.

PERES, Eduardo dos Santos. **Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica**. 2014. 95 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, 2014. Disponível em: <http://www.repositorio-bc.unirio.br:8080/xmlui/handle/unirio/11923?show=full>. Acesso em: 19 jul. 2021.

PERRENOUD, Phelippe. **Desenvolver competências ou ensinar saberes? A escola que prepara para a vida**. Porto Alegre: Penso, 2013.

PIAGET, Jean. **A tomada de consciência**. São Paulo: Melhoramentos, Editora da Universidade de São Paulo, 1977.

PIAGET, Jean. **Fazer e Compreender**. São Paulo: Melhoramentos, Editora da Universidade de São Paulo, 1978.

QUAGLIATO, Carlos Augusto Vicente. **Cônicas e Quádricas: Medidas de Superfícies e Volumes**. 2019. 95 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Paulista - Unesp, Bauru - SP, 2019. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/181252>. Acesso em: 19 jul. 2021.

RABARDEL, Pierre. **Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains**. Paris - França: HAL, 1995a.

RABARDEL, Pierre. **Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos**. Paris - França: Universidad Industrial de Santander, 2011.

RABARDEL, Pierre. **People and technology: a cognitive approach to contemporary instruments**. Paris - França: Université Paris, 2002.

RABARDEL, Pierre. Qu'est-ce qu'un instrument? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. **Outils pour le calcul et le traçage de courbes**, Paris - França, v. 1, p. 61–65, 1995b. Disponível em: https://edunum.unige.ch/articles/rabardel_1995_quest-ce_quun_instrument.pdf. Acesso em: 19 jul. 2021.

RADFORD, Luis. A teoria da objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática. In: MORETTI, Vanessa Dias; CEDRO, Wellington Lima (org.). **Educação Matemática e a Teoria Histórico-Cultural: Um olhar sobre as pesquisas**. Campinas - SP: Mercado de Letras, 2017. p. 229–262.

RAMOS, Guilherme Sada. **Quádricas: Um Estudo Das Equações Do Segundo Grau Em Três Variáveis**. 2015. 93 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/169337>. Acesso em: 19 jul. 2021.

RIBEIRO, Ricardo Silva *et al.* Desafios da EJA no ensino remoto emergencial: Uma experiência com o ensino de Estatística usando o WhatsApp e PBL. In: SIMÕES, Jr., Rubilar; FERRARI, Greicimara Vogt; ORTOLAN, Fernando Lóris (org.). **Projeto EJA/EPT no IFRS: ações e reflexões**. 1. ed. Banto Gonçalves - RS: IFRS, 2023. p. 109–124.

RIBEIRO, Luis Otoni Meireles; GUTERRES, Lisandra Xavier; SILVEIRA, Denise Nascimento. O Uso Da Realidade Aumentada Com Dispositivos Móveis Na Educação Matemática Como Potência Na Geometria Espacial. **PLURAIIS - Revista Multidisciplinar**, Salvador - BA, v. 5, n. 2, p. 40–57, 2020. Disponível em: <https://www.revistas.uneb.br/index.php/plurais/article/view/8922/6184>. Acesso em: 16 ago. 2021.

RICHIT, Andriceli. **Formação de professores de matemática da educação superior e as tecnologias digitais: aspectos do conhecimento revelados no contexto de uma comunidade de prática online**. 2015. 286 f. Tese de Doutorado em Educação Matemática - Unesp, Rio Claro, 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/136660>. Acesso em: 23 abr. 2022.

RICHIT, Adriana. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática**. 2005. 169 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Universidade Estadual Paulista, São Paulo - SP, 2005. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91153>. Acesso em: 18 abr. 2022.

RICHIT, Andriceli; SILVA, Rodrigo Sychocki da. Superfícies quádricas e TIC's: concepção, aplicação e análise de uma proposta didática à luz da teoria da representação semiótica de Duval. **#Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, Canoas - RS, v. 3, n. 2, p. 1–23, 2014. Disponível em: https://dev7b.ifrs.edu.br/site_periodicos/periodicos/index.php/tear/article/view/1865. Acesso em: 7 set. 2021.

SALAZAR, Jesus Victória Flores. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço**. 2009. 317 f. Tese de Doutorado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2009. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11397>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SALCEDO, Efraín Alberto Hoyos *et al.* Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED**, Bogotá - Colômbia, n. 49, p. 123–142, 2021. Disponível em: <https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/9574>. Acesso em: 23 abr. 2022.

SANTAELLA, L. Contribuições do pragmatismo de Peirce para o avanço do conhecimento. **Revista de Filosofia, Curitiba**, Curitiba, v. 18, n. 18, p. 75–86, 2004. Disponível em: <http://en.scientificcommons.org/20058945>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SANTAELLA, Lúcia. **Matrizes da linguagem e pensamento: sonora, visual, verbal, aplicações na hipermídia**. São Paulo: Iluminuras, 2001.

SANTAELLA, Lúcia. **Teoria geral dos signos: como as linguagens significam as coisas**. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

SANTOS, Adecio da Silva. **Cônicas e Quádricas para o ensino médio**. 2017. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Piauí, Teresina - PI, 2017. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3154&id2=150230553. Acesso em: 19 jul. 2021.

SANTOS, Adriana Tiago Castro dos; BIANCHINI, Bárbara Lutaif. Um panorama das pesquisas brasileiras sobre o ensino da geometria analítica. **Libro de Actas do VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**, Florianópolis - SC, v. 1, p. 222–230, 2017. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/20778/>. Acesso em: 23 abr. 2022.

SCHAUN, Thaise Thurow. **As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada**. 2019. 89 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Universidade Federal de Pelotas, Pelotas - RS, 2019. Disponível em: <https://guaiaca.ufpel.edu.br/handle/prefix/6573>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SCHAUN, Thaise Thurow; ALVES, Rozane da Silveira. Um panorama sobre pesquisas em realidade aumentada em matemática. **Anais do 24º Seminário Internacional de Educação, Tecnologia e Sociedade: Ensino Híbrido**, Porto Alegre - RS, v. 1, p. 1–12, 2019. Disponível em: <http://seer.faccat.br/index.php/redin/article/view/1561>. Acesso em: 23 abr. 2022.

SILVA, Daniela Mendes Vieira da. Aprendizagem mediada por signos e a construção de conceitos em uma perspectiva vigotskiana. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro - RJ, p. 2–4, 2017. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/22/jogos-didaticos-e-o-ensino-de-quimica-elementos-comuns-para-a-formacao-da-cidadania>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Rodrigo Sychocki da *et al.* “Em busca do astronauta perdido”: um experimento na formação inicial de professores de matemática envolvendo Geometria Analítica & História em Quadrinhos. **Revista Thema**, Pelotas - RS, v. 15, n. 2, p. 485–497, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.15536/thema.15.2018.485-497.925>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Sérgio Florentino da. **Ensino e aprendizagem de superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do geogebra**. 2018. 555 f. Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6740295. Acesso em: 28 nov. 2020.

SILVA, Madeline Odete. **Esboço de curvas: Uma análise sob a perspectiva dos Registros de Representação Semiótica**. 2008. 143 f. Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/92026>. Acesso em: 19 jul. 2023.

SILVA, Edilaine Cláudia Lima da. **Estudo de cônicas e quádricas: construções com o uso do Geogebra**. 2018. 144 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Presidente Prudente, 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/157068>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Ronald Gama. **Reconhecimento de quádricas via diagonalização de matrizes**. 2016. 54 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE, 2016. Disponível em: <https://ri.ufs.br/handle/riufs/6491>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Cintia Rosa da. **Signos peirceanos e registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e seu ensino?** 2013. 191 f. Tese de Doutorado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2013. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10982>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Anita Raquel da *et al.* Um Mapeamento Sistemático da Literatura na área de Informática na Educação. **Anais do XXVII Ciclo de Palestras sobre Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre - RS, v. 1, p. 136–144, 2019. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/cinted/eventos/ciclo/xxvii/anais/>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Danielle Apolinário da; COSTA, Claudilene Gomes da. A Utilização Dos Softwares Geogebra, Winplot E K3Dsurf No Estudo Das Superfícies Quádricas. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Paraíba, v. 6, n. 16, p. 104–116, 2019. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/907>. Acesso em: 16 set. 2021.

SILVA FILHO, Jorge Paulino da; MORETTI, Mércles Thadeu. Percepções de um estudo de caso com um aluno com discalculia do desenvolvimento – uma abordagem baseada nas funções discursivas de Raymond Duval. *In*: MORETTI, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck (org.). **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval**. 1. ed. Florianópolis - SC: REVEMAT/UFSC, 2020. p. 258–279. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/209074>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Sérgio Florentino da; MORETTI, Mércles Thadeu. A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo - SP, v. 20, n. 2, p. 283–308, 2018a. Disponível em: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p283-308>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Sérgio Florentino Da; MORETTI, Mércles Thadeu. A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas. **Anais do XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**, Cuiabá - MT, 2019. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Sérgio Florentino; MORETTI, Mércles Thadeu. Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas mediado pelo GeoGebra: articulações entre a abordagem de interpretação global e a teoria das situações didáticas. *In*: MORETTI, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck (org.). **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval**. Florianópolis - SC: REVEMAT, 2020. p. 104–128. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/209074>. Acesso em: 19 jul. 2021.

SILVA, Sérgio Florentino da; MORETTI, Mércles Thadeu. Registros em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo - SP, v. 20, n. 1, p. 294–314, 2018b. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34940>. Acesso em: 28 set. 2021.

SIQUEIRA, Anderson Gonçalves. **Das cônicas aos cilindros e quádricas: a transição do plano para o espaço tridimensional**. 2018. 202 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018. Disponível em:

https://www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20190117160910.pdf. Acesso em: 19 jul. 2021.

SOMMERFELD, Guilherme Freire Franco. **Cônicas, quádricas e suas aplicações**. 2013. 36 f. Monografia da Pós-Graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-98VH9U/1/monografia_guilhermefreire.pdf. Acesso em: 19 jul. 2021.

SOUZA, Murany de Fátima Botelho. **Softwares livres de matemática, um novo paradigma computacional e educacional**. 2014. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3983>. Acesso em: 23 abr. 2022.

SOUZA JUNIOR, Arlindo José de; LOPES, Érika Maria Chioca. Um mapeamento de pesquisas brasileiras sobre o trabalho educativo com as tecnologias digitais de informação e comunicação no processo de ensinar e aprender geometria analítica. **VIDYA**, Santa Maria - RS, v. 37, n. 2, p. 479–497, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufrn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1994>. Acesso em: 7 set. 2021.

SOUZA, Jerson Sandro Santos de; SOUZA, Leandro De Oliveira. Como apreendemos os objetos matemáticos: uma análise à luz de três teorias. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis - SC, v. 15, p. 1–24, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e69951>. Acesso em: 19 jul. 2021.

STEINBRING, Heinz. What Makes a Sign a Mathematical Sign? – An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. **Educational Studies in Mathematics** 2006 61:1, Cambridge, v. 61, n. 1, p. 133–162, 2006. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-5892-z>. Acesso em: 19 abr. 2022.

STORMOWSKI, Vandoir. **Formação de professores de matemática para o uso de tecnologia: uma experiência com o GeoGebra na modalidade EAD**. 2015. 211 f. Tese de Doutorado em Informática na Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre - RS, 2015. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/135354/000988268.pdf?sequence=1>. Acesso em: 23 ago. 2022.

TEZANI, Thaís Cristina Rodrigues. O jogo e os processos de aprendizagem e desenvolvimento: aspectos cognitivos e afetivos. **Educação em Revista**, Marília, v. 7, n. 1–2, p. 1–16, 2006. Disponível em: <https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/educacaoemrevista/article/view/603>. Acesso em: 25 jul. 2021.

TROUCHE, Luc. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. **Recherches en didactique des mathématiques**, Montpellier - França, v. 25, n. 1, p. 91–142, 2005a. Disponível em: <https://revue-rdm.com/2005/construction-et-conduite-des-instruments-dans-les-apprentissages-mathematiques-necessite-des-orchestrations/>. Acesso em: 19 jul. 2021.

TROUCHE, Luc. Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. **Actes de l'Université d'été de Saint-Flour : «Le calcul sous toutes ses formes»**, Saint-Flour, p. 265–290, 2005b. Disponível em: <https://hal.science/hal-01559831/document>. Acesso em: 19 jul. 2021.

TROUCHE, Luc. Instrumentalization in Mathematics Education. **Encyclopedia of Mathematics Education**, Cham, p. 1–13, 2018. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-77487-9_100013-1. Acesso em: 19 jul. 2021.

TROUCHE, Luc. Instrumentation in Mathematics Education. *In: ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS EDUCATION*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2014. p. 307–313. Disponível em: https://link.springer.com/10.1007/978-94-007-4978-8_80. Acesso em: 19 jul. 2021.

TROUCHE, Luc. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, Netherlands, v. 9, n. 3, p. 281–307, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>. Acesso em: 15 ago. 2021.

ULLMANN, S. **Semántica. Introducción a la ciencia del significado**. 2. ed. Madrid: Aguilar, 1967.

VALENTE, José Armando. **Computadores e Conhecimento: repensando a educação**. 2. ed. Campinas - SP: UNICAMP/NIED, 1993. Disponível em: <https://www.nied.unicamp.br/wp-content/uploads/other-files/livro-computadores-e-conhecimento.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2021.

VARGAS, Andressa Franco; LEIVAS, José Carlos Pinto. Superfícies Quádricas E O Ensino De Geometria Analítica: Interseções Na Pesquisa. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá - MT, v. 7, n. 3, p. 37–55, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.26571/reamec.v7i3.9053>. Acesso em: 24 nov. 2020.

VERILLON, Pierre; RABARDEL, Pierre. Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. **European Journal of Psychology of Education**, Paris - França, v. 10, n. 1, p. 77–101, 1995. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/BF03172796>. Acesso em: 25 jul. 2021.

VIER, Marcos Roberto. **O Estudo das Cônicas e Quádricas com o auxílio dos softwares GeoGebra e R**. 2019. 87 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande - PB, 2019. Disponível em: <https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3926>. Acesso em: 19 jul. 2021.

ZABALA, Antoni; ARNAU, Laia. **Como aprender e ensinar competências**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

APÊNDICE A — Pontuação dos estudos

CITAÇÃO	TÍTULO	SQ ¹	TD ²	PEA ³	TRRS ⁴	TGF ⁵	PONTUAÇÃO
Alves et al. (2019)	Atividades Investigativas com Apoio de Tecnologias Digitais: Contribuições para o estudo de Quádricas	1	1	1	1	0	4
Fortes, Camargo e Silveira (2021)	Superfícies quádricas construídas com o software GeoGebra e a técnica de papietagem	1	1	1	0	1	4
Londero (2017)	Explorando recurso do GeoGebra Book no estudo de quádricas a partir de diferentes representações	1	1	1	1	0	4
Richit e Silva (2014)	Superfícies quádricas e TIC's: concepção, aplicação e análise de uma proposta didática à luz da teoria da representação semiótica de Duval	1	1	1	1	0	4
Silva, S. (2018)	Ensino e aprendizagem de superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do GeoGebra	1	1	1	1	0	4
Silva e Moretti (2018a)	A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas	1	1	1	1	0	4
Silva e Moretti (2018b)	Registros em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros	1	1	1	1	0	4
Silva e Moretti (2019)	A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas	1	1	1	1	0	4
Silva e Moretti (2020)	Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas mediado pelo GeoGebra: articulações entre a abordagem de interpretação global e a teoria das situações didáticas	1	1	1	1	0	4
Alves (2016)	Uma abordagem do estudo de cônicas e quádricas com o auxílio do software GeoGebra	1	1	1	0	0	3
Bavaresco et al. (2018)	Modelagem tridimensional de objetos conceituais de matemática	1	1	1	0	0	3
Couto (2015)	Mediações Didáticas da Tutoria Online da Geometria Analítica: uma análise à luz da orquestração instrumental e das representações semióticas	0	1	1	1	0	3
Silva, E. (2018)	Estudo de cônicas e quádricas: construções com o uso do GeoGebra	1	1	1	0	0	3
Henriques, Farias e Funato (2019)	Produção de materiais didáticos de Geopoes e seus códigos para a impressora 3d	1	1	1	0	0	3
Londero e Ferreira (2017)	Representações semióticas mobilizadas no conteúdo de superfícies quádricas em algumas publicações desde a década de 40	1	0	1	1	0	3
Lopes (2019)	Integração de mídias na disciplina de geometria analítica em um curso de graduação em matemática	1	1	1	0	0	3
Lopes et al. (2021)	Manipulação e visualização de superfícies quádricas por meio de modelos impressos em 3D e modelos digitais	1	1	1	0	0	3
Mineiro (2011)	Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional	1	1	1	0	0	3
Mota e Laudares (2011)	Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando seções transversais para o desenvolvimento da visualização, com o Winplot (CO)	1	1	1	0	0	3

Mota e Laudares (2013)	Um estudo de planos, cilindros e quádricas, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot	1	1	1	0	0	3
Neves (2020)	Intersemioses em vídeos produzidos por licenciandos em Matemática da UAB	0	1	1	1	0	3
Novais (2019)	Identificação de cônicas e quádricas utilizando o software GeoGebra	1	1	1	0	0	3
Salcedo et al. (2021)	Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas	1	1	1	0	0	3
Schaun (2019)	As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada	1	1	1	0	0	3
Silva e Costa (2019)	A utilização dos softwares GeoGebra, Winplot e k3dsurf no estudo das superfícies quádricas	1	1	1	0	0	3
Siqueira (2018)	Das cônicas aos cilindros e quádricas: a transição do plano para o espaço tridimensional	1	1	1	0	0	3
Amaral (2019)	Cônicas e quádricas: uma abordagem didática para a ampliação do ensino médio e aprimoramento de cursos técnicos	1	0	1	0	0	2
(Assis, 2010)	Diálogo Didático Matemático na EAD: Uma perspectiva para o ensino e aprendizagem em fóruns no Moodle	0	1	1	0	0	2
Borba, Almeida e Chiari (2015)	Tecnologias Digitais e a relação entre teoria e prática: uma análise da produção em trinta anos de BOLEMA	0	1	1	0	0	2
Caligaris (2017)	Designing tools for Analytic Geometry: the Quadrics	1	1	0	0	0	2
Correia (2010)	Superfícies Quádricas. Transformação das Coordenadas.	1	0	1	0	0	2
Iordan (2015)	Interactive software designed for the study of the paraboloid	1	1	0	0	0	2
Lopes e Souza Junior (2019)	Ensinar e aprender Geometria Analítica com Tecnologias Digitais por meio de um trabalho colaborativo	0	1	1	0	0	2
Lucena e Gitirana (2015)	Configurações didáticas da tutoria online: a escolha de recursos para mediação didática do tutor	0	1	1	0	0	2
Palma (2016)	Gráficas de Superfícies Cuádricas y trazas empleando GeoGebra	1	0	1	0	0	2
Pereira (2017)	Configurações didáticas de ambientes virtuais de aprendizagem na educação à distância	0	1	1	0	0	2
Pereira et al. (2017)	Uma ferramenta de apoio ao ensino de cálculo com realidade aumentada	0	1	1	0	0	2
Richit (2015)	Formação de professores de matemática da educação superior e as tecnologias digitais: Aspectos do conhecimento revelados no contexto de uma comunidade de prática online	0	1	1	0	0	2
Silva et al. (2018)	“Em busca do astronauta perdido”: um experimento na formação inicial de professores de matemática envolvendo Geometria Analítica & História em Quadrinhos	0	1	1	0	0	2
Vier (2019)	O estudo das Cônicas e Quádricas com o auxílio dos softwares GeoGebra e R	1	1	0	0	0	2
Cecílio e Tedesco (2019)	Aprendizagem Baseada em Projetos: relato de experiência na disciplina de Geometria analítica	0	0	1	0	0	1
Gaspar (2014)	As cônicas, quádricas e suas aplicações	1	0	0	0	0	1

Lima (2019)	As formas geométricas nas obras de Gaudi: as superfícies quádricas, as superfícies regradas e a catenária	1	0	0	0	0	1
Matos e Fernandes (2019)	As Cúpulas Do Palácio Do Congresso Nacional	1	0	0	0	0	1
Oliveira (2015)	Sobre seções cônicas	1	0	0	0	0	1
Oyafuco (2015)	Classificação de Cônicas e Quádricas	1	0	0	0	0	1
Peres (2014)	Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica	1	0	0	0	0	1
Quagliato (2019)	Cônicas e quádricas: medidas de superfícies e volumes	1	0	0	0	0	1
Ramos (2015)	Quádricas: Um Estudo das Equações do Segundo Grau em Três Variáveis	1	0	0	0	0	1
Santos (2017)	Cônicas e Quádricas para o Ensino Médio	1	0	0	0	0	1
Silva (2016)	Reconhecimento de quádricas via diagonalização de matrizes	1	0	0	0	0	1
Sommerfeld (2013)	Cônicas, quádricas e suas aplicações	1	0	0	0	0	1
Souza (2014)	Softwares livres de matemática, um novo paradigma computacional e educacional	0	1	0	0	0	1

Superfícies Quádricas; ² Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação; ³ Processos de Ensino e de Aprendizagem; ⁴ Teoria dos Registros de Representação Semiótica; ⁵ Teoria da Gênese Instrumental.

APÊNDICE B — TCLE e parecer consubstanciado ao CEP

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPP
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Senhor(a):

Você está sendo convidado(a) a participar do projeto de pesquisa intitulado: “GÊNESE INSTRUMENTAL NA INTERAÇÃO COM REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA APRENDIZAGEM DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS”. Este projeto está vinculado ao doutoramento da professora Núbia Lúcia Cardoso Guimarães no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e ao Edital IFRS N° 75/2019 – Fluxo Contínuo – Projetos de Pesquisa e/ou Inovação Desenvolvidos por Servidores do IFRS em Cursos de Pós-Graduação Lato Sensu, Programas de Pós-Graduação Stricto Sensu ou Pós-Doutorado do IFRS Campus Canoas. Sua participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade a contribuição para o sucesso da pesquisa, cujos objetivos são estritamente acadêmicos. Nessa pesquisa, pretendemos compreender a dinâmica da relação entre o participante e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, durante o seu processo de construção de conhecimento. A pesquisa será realizada no IFRS Campus Canoas, através de um Curso de Extensão que está vinculado ao Edital IFRS n° 57/2020 – Registro de ações de extensão – Fluxo Contínuo 2021/2022, podendo ser gravada e/ou filmada após sua autorização. Serão dez encontros, duas vezes por semana e a coleta de dados será utilizada observação, entrevista, questionário, produção escrita, protocolo de construção no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra 3D e gravações. Serão observados o seu comportamento e a sua produção, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Esclarecemos de que o uso das informações, fotos ou vídeos do participante serão utilizados apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas por codinomes. É esperado que a vivência das situações de ensino e aprendizagem propostas oportunize reflexões acerca da prática docente, podendo oferecer respostas para as inquietações dos professores referentes aos obstáculos de aprendizagem dos seus alunos. Os aportes teóricos e as escolhas metodológicas desse estudo foram escolhidas para apoiar o ensino e a aprendizagem de matemática por meio das tecnologias digitais, voltado para a promoção de autonomia intelectual, podendo trazer contribuições para qualquer nível de ensino. Sua colaboração se iniciará a partir da entrega desse documento assinado pelo participante e pela coordenação do projeto acima descrito. Informo ainda de que pode se retirar desta pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Foi-me apresentado o curso e explicado de que forma ocorreria a minha participação. Eu fui informado que a pesquisa apresenta risco mínimo para mim como, por exemplo, a possibilidade de me sentir constrangido ao responder questionário/entrevista. Nesse caso, o presente termo me garante o direito de não responder. Além disso, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida, poderei realizar o contato imediato com um dos pesquisadores responsáveis pelo estudo, que fornecerá os esclarecimentos necessários. Além disso, posso consultar a Coordenadoria de Assistência Estudantil do IFRS Campus Canoas, que é composta por uma equipe multidisciplinar formada por psicólogo, pedagogos e assistente social. Estou ciente e me

foram assegurados os seguintes direitos de retirar o consentimento, a qualquer momento, podendo deixar de participar do estudo, sem que isso me traga prejuízo de qualquer ordem; de que não serei identificado(a) e que será mantido caráter confidencial das informações relacionadas à minha privacidade; de que terei acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar meu interesse em continuar participando da pesquisa; de que não haverá nenhum tipo de despesa ou ônus financeiro relacionada com a participação nesse estudo; de que posso me recusar a responder qualquer pergunta que julgar constrangedora ou inadequada; de que não está previsto nenhum tipo de procedimento invasivo ou coleta de material biológico; de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012 e 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde.

Eu _____, portador do documento de identidade ou CPF _____, aceito participar da pesquisa intitulada: “GÊNESE INSTRUMENTAL DA INTERAÇÃO COM REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA APRENDIZAGEM DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS”. Fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, bem como sobre a metodologia que será adotada, sobre os riscos e benefícios envolvidos. Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Canoas, ____ de ____ de _____.

Assinatura do(a) participante

Assinatura do (a) pesquisador(a)

Autorização para uso de imagem/voz

Autorizo o uso de minha imagem e/ou voz para fins específicos de divulgação dos resultados da pesquisa, sendo seu uso restrito à escrita de artigos e da Tese de Doutorado, tendo o nome do participante trocado por pseudônimos e as imagens em que o rosto não apareça ou seja camuflado. Fui informado que serão tomadas todas as medidas possíveis para preservar o anonimato e a minha privacidade.

Canoas, ____ de ____ de _____.

Assinatura do(a) participante

Assinatura do (a) pesquisador(a)

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, poderei consultar:

CEP/IFRS

E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br

Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000

Telefone: (54) 3449-3340

Pesquisador(a) principal: Núbia Lúcia Cardoso Guimarães

Telefone para contato: 980885117

E-mail para contato: nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO RIO
GRANDE DO SUL



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: GÊNESE INSTRUMENTAL NA INTERAÇÃO COM REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DAS SUPERFÍCIES

Pesquisador: Núbia Guimarães

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 58827722.0.0000.8024

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO RIO

Patrocinador Principal: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO RIO
GRANDE DO SUL
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 5.438.175

Apresentação do Projeto:

A Geometria ainda tem sido pauta de discussões na Educação Matemática, devido a um abandono no seu ensino cujos reflexos se perpetuaram. O cenário é ainda pior no caso da Geometria Analítica, em especial no estudo das superfícies quádras. A necessária articulação entre conceitos geométricos e algébricos permeia todos os níveis de ensino e a prática cotidiana. Além de dar suporte a estudos no Ensino Superior e posterior, há produções envolvendo essas superfícies em diversas áreas do conhecimento. O acesso a uma quádras só é possível através de representações (equação ou gráfico), que carregam informações parciais sobre ela. A articulação entre essas representações enriquece o conhecimento sobre o objeto de estudo. Muitas pesquisas têm sido realizadas sobre a utilização de ambientes de matemática dinâmica e suas contribuições para a aprendizagem. Também há estudos que relatam dificuldades com a integração das tecnologias às práticas docentes, com causas que podem estar relacionados à abordagem pedagógica e à gestão dos impactos dessa inserção. Para investigar o processo de ensino e aprendizagem dessas superfícies por meio das tecnologias, o referencial teórico desse estudo está embasado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na Teoria da Gênese Instrumental. Essas teorias apresentam aspectos particulares, mas com ponto comum no 'Fazer e Compreender' de Piaget. É nessa perspectiva que estão alicerçadas as atividades com o uso do

Endereço: Rua General Osório, 348 - 3º andar- sala 303

Bairro: CENTRO **CEP:** 95.700-086

UF: RS **Município:** BENTO GONCALVES

Telefone: (54)3449-3340

E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO RIO
GRANDE DO SUL**



Continuação do Parecer: 5.438.175

GeoGebra 3D. A presente pesquisa tem por objetivo investigar a apropriação das ferramentas do GeoGebra 3D e a mobilização ou construção de esquemas pelos participantes no estudo das quádras.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo geral:

“Compreender a dinâmica da relação entre a apropriação das ferramentas e a mobilização de esquemas, por meio da análise dos elementos que potencializam ou limitam o processo de construção dos conhecimentos sobre quádras.”

Propostas - SiPES/SIGProj - Página 7 de 20

Objetivos específicos:

- Identificar as condições necessárias, a partir dos aportes teóricos, para a apreensão conceitual de conhecimentos sobre quádras, por meio do processo de GI da interação com suas representações semióticas.
- Investigar a contribuição das representações semióticas estáticas e dinâmicas das quádras para a constituição de representações mentais que mais se aproximem do objeto real.
- Analisar a construção ou mobilização dos esquemas constituídos pelos participantes, durante as SEAI que subsidiaram a coordenação dos diferentes RRS.
- Analisar os obstáculos e saltos cognitivos que ocorrem durante o processo de GI para identificar as potencialidades e limitações das ferramentas utilizadas.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

A pesquisa apresenta risco mínimo para o participante como, por exemplo, a possibilidade de se sentir constrangido ao responder questionário ou entrevista. Nesse caso, o TCLE garante o direito de não responder e, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida, o participante poderá realizar o contato imediato com um dos pesquisadores responsáveis pelo estudo. Além disso, a Coordenadoria de Assistência Estudantil do IFRS Campus Canoas, que é composta por uma equipe multidisciplinar formada por psicólogo, pedagogos e assistente social, poderá apoiar participantes e pesquisadores na comunicação para que ocorram os esclarecimentos necessários.

Benefícios:

O conjunto das oficinas, pelo meio do qual será realizada a coleta de dados para a presente

Endereço: Rua General Osório, 348 - 3º andar- sala 303
 Bairro: CENTRO CEP: 95.700-086
 UF: RS Município: BENTO GONCALVES
 Telefone: (54)3449-3340 E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO RIO
GRANDE DO SUL**



Continuação do Parecer: 5.438.175

investigação, oferece uma proposta de estudo das superfícies quádras. Ao mesmo tempo, oportuniza a vivência de situações de aprendizagem baseadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, na Teoria da Gênese Instrumental de Rabardel e no Fazer e Compreender de Piaget. Os aspectos teóricos, voltados para a compreensão integral em matemática, são associados à vivência de práticas apoiadas em metodologia de concepção construtivista e na inserção tecnológica. Assim, entendemos que as reflexões que poderão emergir das experiências vivenciadas pelos participantes perpassam todos os níveis de ensino, contribuindo tanto para a formação inicial quanto continuada de professores de matemática.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

15 participantes: alunos do curso de Licenciatura em Matemática e estudantes do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do IFRS Campus Canoas e egressos desses e de cursos similares, desta ou de outras IES.

Datas das oficinas em que ocorrerá a coleta de dados: 28/09 a 30/09

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

O TCLE está adequado segundo modelo e legislação vigente.

Recomendações:

Ressalta-se que cabe ao pesquisador responsável encaminhar os relatórios parciais e final da pesquisa, por meio da Plataforma Brasil, via notificação do tipo "relatório" para que sejam devidamente apreciadas no CEP, conforme Norma Operacional CNS nº 001/13, item XI.2.d.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Não foram observados óbices éticos.

O projeto está aprovado e, após a finalização da última etapa, conforme cronograma cadastrado na Plataforma Brasil, o pesquisador possui o prazo de 60 dias para envio do relatório final via Plataforma.

Considerações Finais a critério do CEP:

Não foram observados óbices éticos.

O projeto está aprovado e, após a finalização da última etapa, conforme cronograma cadastrado na Plataforma Brasil, o pesquisador possui o prazo de 60 dias para envio do relatório final via

Endereço: Rua General Osório, 348 - 3º andar- sala 303
 Bairro: CENTRO CEP: 95.700-086
 UF: RS Município: BENTO GONCALVES
 Telefone: (54)3449-3340 E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO RIO
GRANDE DO SUL**



Continuação do Parecer: 5.438.175

Plataforma.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1927713.pdf	18/05/2022 14:18:21		Aceito
Outros	Autorizacao_Institucional.pdf	12/05/2022 14:45:19	Núbia Guimarães	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_Pesquisa_Sigproj.pdf	12/05/2022 14:38:46	Núbia Guimarães	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_MAIORES.pdf	12/05/2022 14:36:33	Núbia Guimarães	Aceito
Folha de Rosto	folhaDeRosto_assinado.pdf	12/05/2022 14:15:35	Núbia Guimarães	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

BENTO GONCALVES, 30 de Maio de 2022

Assinado por:
CINTIA MUSSI ALVIM STOCCHERO
(Coordenador(a))

Endereço: Rua General Osório, 348 - 3º andar- sala 303
 Bairro: CENTRO CEP: 95.700-086
 UF: RS Município: BENTO GONCALVES
 Telefone: (54)3449-3340 E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br

APÊNDICE C — Questionários



SEAI 1

Situação de Ensino e Aprendizagem 1

E-mail *

E-mail válido

Este formulário está coletando e-mails. [Alterar configurações](#)

Nome *

Texto de resposta curta

Deixe aqui o link para o seu arquivo do Google Docs. *

Texto de resposta longa

O que você aprendeu sobre as quádricas? Conte um pouco sobre o seu processo de aprendizagem durante esse encontro. *

Texto de resposta longa

Você aprendeu algo novo sobre as ferramentas do GeoGebra? Na sua opinião, as ferramentas do GeoGebra limitaram ou potencializaram a realização da atividade? Conte um pouco sobre os momentos que você experimentou essas restrições ou contribuições. *

Texto de resposta longa

Você sentiu alguma dificuldade na realização da atividade? Relacionada ao conteúdo ou às ferramentas do GeoGebra? Conte um pouco sobre esses obstáculos, se foram conceituais ou tecnológicos e como fez para superá-los. *

Texto de resposta longa

O que você faria diferente? *

Texto de resposta longa

Ficou com dúvidas? Quais? *

Texto de resposta longa

Sugestões serão bem vindas! *

Texto de resposta longa

Outros comentários? *

Texto de resposta longa

APÊNDICE D — SEAI 1

SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA

SEAI 1

Orientações

1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: 'SEAI 1 - Nome do participante'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, realize as atividades propostas, seguindo orientações em cada atividade.

1. Espaços de dimensões 0, 1, 2 e 3

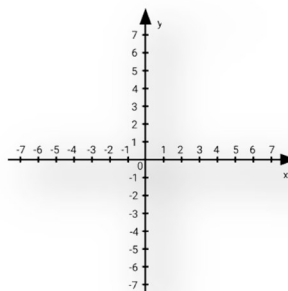
Observe essas imagens para responder às questões a seguir:



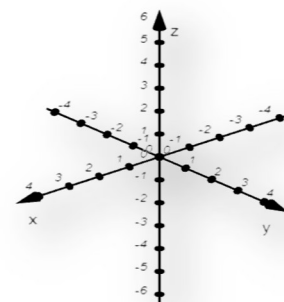
(a)



(b)



(c)



(d)

- A. Como são denominados esses espaços?
- B. Como se chamam os eixos coordenados nesses espaços?
- C. Como se chamam os planos coordenados no espaço tridimensional?
- D. Em quantas partes o espaço bidimensional fica dividido pelos eixos coordenados?
- E. Em quantas partes o espaço tridimensional fica dividido pelos planos coordenados?
- F. Quantas são as coordenadas dos pontos nesses espaços?

2. Pontos no \mathbb{IR}^2 e no \mathbb{IR}^3

Para essa atividade, crie um arquivo público do GeoGebra com o nome SEAI 1.2 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Parte 1:

Na janela de visualização 2D:

- A. Coloque alguns pontos, não pertencentes aos eixos coordenados, sobre o primeiro quadrante do \mathbb{R}^2 e observe as suas coordenadas. Faça o mesmo para os demais quadrantes do \mathbb{R}^2 . Como são as coordenadas dos pontos em cada quadrante?
- B. Coloque alguns pontos sobre o eixo dos x e observe as suas coordenadas. Faça o mesmo para o eixo dos y . Como são as coordenadas dos pontos sobre o eixo dos x ? E dos y ?

Parte 2: Na janela de visualização 3D:

- C. Como são as coordenadas dos pontos em cada octante? Utilizando a janela de álgebra, insira alguns pontos não pertencentes aos eixos coordenados sobre cada octante do \mathbb{R}^3 .
- D. Coloque alguns pontos sobre o eixo dos x e observe as suas coordenadas. Faça o mesmo para os eixos dos y e dos z . Como são as coordenadas dos pontos sobre os eixos dos x , dos y e dos z ?
- E. Coloque alguns pontos sobre o plano xoy e observe as suas coordenadas. Faça o mesmo para os planos xoz e yoz . Como são as coordenadas dos pontos sobre os planos coordenados xoy , xoz e yoz ?

3. Planos no \mathbb{R}^3

Antes de começar, crie um arquivo público do GeoGebra 3D com o nome SEAI 1.3 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Parte 1: Vamos analisar como fica a equação geral de um plano qualquer. Considere que a equação de um plano está na forma geral quando todos os termos estão no lado esquerdo da sua equação, com o lado direito igual a zero.

- A. Colocar três pontos quaisquer, não pertencentes aos eixos coordenados, na janela de visualização do GeoGebra 3D.

Obter um plano que passa por esses três pontos e observar a sua equação. Repetir esse procedimento outras vezes.

- B. Após repetir esse procedimento algumas vezes, observando as equações dos planos obtidos, escreva a equação geral (genérica) para um plano qualquer.

Parte 2: Agora, vamos analisar como fica a equação do plano no caso de um (ou mais) coeficientes das variáveis ser(em) nulo(s). Antes de continuar, oculte todos elementos gráficos da atividade anterior.

- C. Insira a equação de um plano qualquer, com todos os coeficientes das variáveis e termo independente diferentes de zero.

Observe a posição desse plano no sistema cartesiano. Esse plano é paralelo a algum eixo ou plano coordenado?

Em quais valores de x , y e z esse plano intercepta os eixos coordenados?

D. Insira novamente a equação do plano da atividade 3C, porém com o termo independente igual a zero.

Observe a sua posição no sistema cartesiano. Esse plano é paralelo a algum eixo ou plano coordenado?

Em quais valores de x , y e z esse plano intercepta os eixos coordenados?

E. Insira novamente a equação do plano da atividade 3C, porém anulando o coeficiente da variável z .

Observe a posição do plano obtido no sistema cartesiano. Esse plano é paralelo a algum eixo ou plano coordenado?

Em quais valores de x , y e z esse plano intercepta os eixos coordenados?

F. E se o coeficiente da variável y fosse nulo? E da variável x ? Esse plano seria paralelo a algum eixo ou plano coordenado?

Em quais valores de x , y e z esse plano interceptaria os eixos coordenados?

G. E se dois dos coeficientes das variáveis fossem nulos na equação desse plano? Esse plano seria paralelo a algum eixo ou plano coordenado?

Em quais valores de x , y e z esse plano interceptaria os eixos coordenados?

H. E se o termo independente fosse nulo na equação desse plano? Esse plano seria paralelo a algum eixo ou plano coordenado?

Em quais valores de x , y e z esse plano interceptaria os eixos coordenados?

Parte 3: Agora vamos descobrir as equações dos planos coordenados. Antes, oculte todos os elementos gráficos obtidos na atividade anterior.

I. Quais são as equações dos planos coordenados?

Insira as equações desses planos na janela de álgebra e confirme a sua resposta.

J. Como é possível escrever de forma genérica (usando constantes no lugar dos números) as equações de planos paralelos aos planos coordenados?

Insira essas equações na janela de álgebra e confirme a sua resposta.

4. Retas no \mathbb{R}^2

Antes de começar, crie um arquivo público do GeoGebra com o nome SEAI 1.4 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Parte 1: Vamos descobrir a forma da equação geral de uma reta qualquer. Considere que a equação da reta está na forma geral quando todos os termos estão na esquerda da sua equação, com o lado direito igual a zero. Na janela de visualização 2D:

A. Inserir dois pontos não pertencentes aos eixos coordenados.

Obter uma reta que passa por esses dois pontos.

Observar a sua equação na janela de álgebra. Repetir esse procedimento outras vezes.

B. Com base nas equações obtidas na atividade anterior, como é possível escrever uma equação geral (genérica) para a reta.

Parte 2: Agora, vamos analisar como fica a equação da reta no caso de um ou mais coeficientes das variáveis ser(em) nulo(s). Antes, oculte todos os elementos gráficos da atividade anterior e, na janela de visualização 2D:

C. Escreva a equação de uma reta qualquer, com todos os coeficientes das variáveis e termo independente diferentes de zero, na janela de álgebra.

Observe a sua posição no sistema cartesiano. Essa reta é paralela a algum eixo coordenado? Em quais valores de x e y essa reta intercepta os eixos coordenados?

D. Escreva novamente a equação da reta da atividade 4C, anulando o termo independente. Observe a sua posição no sistema cartesiano. Essa reta é paralela a algum eixo coordenado? Em quais valores de x e y essa reta intercepta os eixos coordenados?

E. Escreva novamente a equação da reta da atividade 4C, anulando o coeficiente da variável y ?

Observe a sua posição no sistema cartesiano. Essa reta é paralela a algum eixo coordenado? Em quais valores de x e y essa reta intercepta os eixos coordenados?

F. Escreva novamente a equação da reta da atividade 4C, anulando o coeficiente da variável x ?

Observe a sua posição no sistema cartesiano. Essa reta é paralela a algum eixo coordenado? Em quais valores de x e y essa reta intercepta os eixos coordenados?

G. E se dois termos na equação da reta fossem nulos?

Parte 3: Oculte todos elementos gráficos da atividade anterior e responda as questões a seguir usando a janela de visualização 2D.

H. Quais são as equações dos eixos coordenados? Insira essas equações na janela de álgebra e confira sua resposta observando a janela de visualização 2D.

I. Como é possível escrever de forma genérica as equações de eixos paralelos aos eixos coordenados? Insira essas equações na janela de álgebra e confira sua resposta observando a janela de visualização 2D.

5. Retas no \mathbb{R}^3

Antes de começar, crie um arquivo público do GeoGebra com o nome SEAI 1.5 - Seu Nome coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Parte 1: Agora vamos ver como fica a equação de uma reta no espaço. Para realizar essas atividades, abra a janela de visualização 3D do GeoGebra.

A. Insira dois pontos na janela de visualização 2D.

Obtenha a reta que passa por esses pontos na mesma janela.

Observe a sua equação na janela de álgebra.

B. Oculte a reta da atividade 5A.

Obtenha a reta que passa por esses pontos na janela de visualização 3D.

Observe a equação obtida na janela de álgebra.

Essa equação é a mesma da reta da atividade 5A?

C. Mostre a reta da atividade 5A na janela de visualização 2D novamente.

Compare os gráficos das retas obtidas nas atividades 5A e 5B nas duas janelas de visualização. Qual a relação entre os gráficos dessas retas?

D. Em que plano do \mathbb{R}^3 essa reta está contida?

E. Quais as coordenadas no \mathbb{R}^3 dos pontos que você usou para obter essa reta?

Parte 2: Oculte todos elementos gráficos anteriormente obtidos.

F. Clique na janela de visualização 3D e insira os pontos da atividade 5E na janela de álgebra.

Obtenha, na janela de visualização 3D, a reta que passa por eles.

G. Torne visível novamente as retas obtidas nas atividades 5A e 5B.

Qual a relação entre esses gráficos e o gráfico da reta na atividade 5F?

H. Observe as equações obtidas nas atividades 5A (ou 5B) e 5F.

Qual a relação entre essas equações? (Se necessário, selecione o texto invisível na tabela abaixo.)

Transforme a equação da atividade 5F na equação da atividade 5A (ou 5B).

--

Parte 3: Oculte todos elementos gráficos obtidos nas atividades anteriores.

I. Clique na janela de visualização 2D e digite a equação da reta da atividade 5A na janela de álgebra. Observe o gráfico obtido.

J. Clique na janela de visualização 3D e digite a equação da reta da atividade 5A na janela de álgebra. Observe o gráfico obtido.

K. O que essa equação representa no \mathbb{R}^2 ? E no \mathbb{R}^3 ?

L. Como você explicaria o fato de a mesma equação representar objetos matemáticos distintos no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 ?

M. Obtenha a interseção do plano da atividade 5J com o plano xoy e verifique a sua resposta na atividade 5L.

Parte 4: A equação dada na forma implícita é denominada equação geral da reta.

N. Insira na janela de álgebra um plano qualquer paralelo ao plano xoy .

Obtenha a sua interseção com o plano obtido na atividade 5J.

O. Faça $k = 1$ e observe a equação da reta.

Transforme essa equação da forma vetorial para a geral.

Compare as equações obtidas nas atividades 5H e 5O.

Essas equações representam a mesma reta? Por que?

P. Se achar necessário, para responder essa questão, repita o procedimento da atividade anterior para mais alguns valores de k .

Como podemos escrever a equação geral dessa reta no \mathbb{R}^2 ? E no \mathbb{R}^3 ?

Parte 5: A equação dada na forma explícita é denominada equação reduzida da reta.

Q. Escreva a equação reduzida da reta da atividade 5P no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 .

R. Como ficaria a equação reduzida de uma reta qualquer no \mathbb{R}^2 ?

S. Como ficariam as equações reduzidas de retas quaisquer no \mathbb{R}^3 , contidas nos planos coordenados xoy , yoZ e xoz ?

T. Como ficariam as equações reduzidas de retas no \mathbb{R}^3 , contidas em planos paralelos aos planos coordenados xoy , yoZ e xoz ?

6. Parábola no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3

Antes de começar, crie um arquivo público do GeoGebra com o nome SEAI 1.6 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Parte 1: Para realizar essas atividades, utilize as janelas de álgebra e de visualização 2D do GeoGebra.

A. Inserir o ponto $(2,0)$ e a reta $x = -2$.

Obter a parábola de foco $(2,0)$ e diretriz $x = -2$.

Observe a concavidade dessa parábola.

Observe também a sua equação e a escreva na forma canônica.

B. Escolha um ponto para foco e uma reta para diretriz e obtenha uma parábola com concavidade voltada para o semieixo negativo do eixo dos x .

Observe sua equação e a escreva na forma canônica.

C. Compare as equações e gráficos das parábolas nas atividades 6A e 6B. O que define se a concavidade está voltada para o semieixo positivo ou negativo do eixo dos x na equação da parábola?

D. Como ficariam as equações das parábolas com concavidades voltadas para os semieixos positivo e negativo do eixo dos y ? Dê exemplos.

E. Observe a distância entre o foco e a diretriz nos gráficos das parábolas das atividades 6A e 6D. Observe também a medida da corda focal de cada parábola. Qual a relação dessas medidas com as equações das parábolas?

Parte 2: Oculte todos os elementos gráficos da atividade anterior e exiba a janela de visualização 3D.

F. Clique na janela 2D e insira a equação da parábola da atividade 6A na janela de álgebra. Observe o gráfico obtido na janela 3D.

G. Clique na janela 3D e insira novamente a equação da atividade 6A na janela de álgebra. Observe o gráfico obtido na janela 3D.

H. Como você explicaria o fato de a mesma equação representar diferentes objetos matemáticos no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 ?

I. Obtenha a interseção da superfície obtida na atividade 6G com o plano xoy e verifique a sua resposta na atividade 6H.

Parte 3:

J. Como ficariam as equações da parábola da atividade 6A no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , considerando que ela está contida no plano coordenado xoy ?

K. Como ficariam as equações no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 de uma parábola contida nos planos coordenados xoz e yoZ ?

L. Considerando p a distância do foco à diretriz, escreva equações de parábolas quaisquer no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , contidas em planos paralelos aos planos coordenados xoy , xoz e yoZ ?

7. Elipse no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3

Antes de começar, crie um arquivo público do GeoGebra com o nome SEAI 1.7 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Parte 1: Na janela de visualização 2D:

A. Insira os pontos $(-3,0)$, $(3,0)$ e $(0,4)$.

Obtenha a elipse de focos $(-3,0)$ e $(3,0)$ e que passa pelo ponto $(0,4)$.

Observe a sua equação na janela de álgebra e escreva-a na forma canônica.

B. Faça o mesmo para a elipse de focos $(0,-4)$ e $(0,4)$ e que passa pelo ponto $(-3,0)$.

C. Qual a diferença entre os gráficos das elipses nas atividades 7A e 7B?

De que forma essa diferença aparece nas suas equações?

D. Como são denominados os eixos da elipse?

Considerando a e b como sendo as medidas dos eixos, como podemos escrever a equação de uma elipse qualquer com centro na origem?

Parte 2: Agora, oculte todos os elementos gráficos da atividade anterior e exiba a janela de visualização 3D:

E. Clique na janela 2D e insira a equação da elipse da atividade 7A na janela de álgebra. Observe o gráfico obtido na janela 3D.

F. Clique na janela 3D e insira novamente a equação da atividade 7A na janela de álgebra. Observe o gráfico obtido na janela 3D.

G. Como você explicaria o fato de a mesma equação representar diferentes objetos matemáticos no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 ?

H. Obtenha a interseção da superfície obtida na atividade 7F com o plano xoy e verifique a sua resposta na atividade 7G.

Parte 3:

M. Como ficariam as equações da elipse da atividade 7A no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , considerando que ela está contida no plano coordenado xoy ?

N. E como ficariam as equações no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 de uma elipse contida nos planos coordenados xoz e yoz ?

O. Considere a e b , respectivamente, as medidas dos eixos maior e menor da elipse. Escreva equações no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 de elipses quaisquer contidas em planos paralelos aos planos coordenados xoy , xoz e yoz ?

8. Hipérbole no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3

Antes de começar, crie um arquivo público do GeoGebra com o nome SEAI 1.8 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Parte 1: Na janela de visualização 2D:

A. Insira os pontos $(-5,0)$, $(5,0)$ e $(3,0)$.

Obtenha a hipérbole de focos $(-5,0)$ e $(5,0)$ e que passa pelo ponto $(3,0)$.

Observe a sua equação na janela de álgebra e escreva-a na forma canônica.

B. Faça o mesmo para a hipérbole de focos $(0,-5)$ e $(0,5)$ e que passa pelo ponto $(0,-4)$.

C. Qual a diferença entre os gráficos das hipérbolas nas atividades 8A e 8B?

De que forma essa diferença aparece nas suas equações? Por que?

D. Como são denominados os eixos das hipérbolas?

Considerando as possibilidades para a posição dos eixos das hipérbolas no sistema cartesiano, como podemos escrever a equação de uma hipérbole qualquer com centro na origem?

Parte 2: Oculte todos os elementos gráficos da atividade anterior e exiba a janela de visualização 3D:

E. Clique na janela 2D e insira a equação da hipérbole da atividade 8A na janela de álgebra. Observe o gráfico obtido na janela 3D.

F. Clique na janela 3D e insira novamente a equação da atividade 8A na janela de álgebra. Observe o gráfico obtido na janela 3D.

G. Como você explicaria o fato de a mesma equação representar diferentes objetos matemáticos no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 ?

H. Obtenha a interseção da superfície obtida na atividade 8F com o plano coordenado xoy e verifique a sua resposta na atividade 8G.

Parte 3:

P. Como ficariam as equações da hipérbole da atividade 8A no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , considerando que ela está contida no plano coordenado xoy ?

Q. E como ficariam as equações no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 de uma hipérbole contida nos planos coordenados xoz e yoZ ?

R. Considere a e b , respectivamente, as medidas dos eixos real e imaginário da hipérbole. Escreva equações de hipérbolas quaisquer no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , contidas em planos paralelos aos planos coordenados xoy , xoz e yoZ ?

Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).

Obrigada pela participação!

APÊNDICE E — SEAI 2

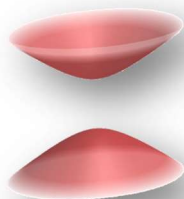
SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA

SEAI 2

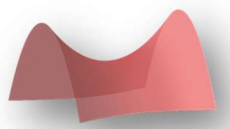
Orientações

1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: 'SEAI 2 - Nome do participante'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, siga as orientações em cada atividade, respondendo ou anexando fotos da sua solução nos retângulos.

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS



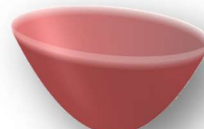
(a)



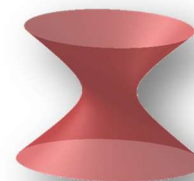
(b)



(c)



(d)



(e)

As superfícies quádricas são algebricamente representadas pela equação geral do segundo grau em três variáveis reais x , y e z dada por:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

em que A , B , C , D , E , F , G , H , I e J são constantes reais, com pelo menos A , B , C , D , E ou F diferente de zero.

Essa equação pode representar uma quádrica na posição padrão, transladada ou rotacionada. Uma quádrica está na posição padrão quando tem centro (ou vértice) na origem do sistema cartesiano e seus eixos estão sobre os eixos coordenados. Dizemos que uma quádrica está transladada, quando seu centro (ou vértice) não coincide com a origem do sistema cartesiano. E, dizemos que uma quádrica está numa posição rotacionada, quando seus eixos não forem paralelos aos eixos coordenados. É sempre possível, por meio dos movimentos de translação ou rotação, escrever a equação de qualquer quádrica na forma padrão. Esse estudo tratará apenas de superfícies quádricas na posição padrão.

Essa equação pode representar uma quádrlica degenerada (o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um plano, um par de planos paralelos ou um par de planos concorrentes) ou não degenerada (o elipsoide, o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas, o paraboloides elíptico, o paraboloides hiperbólico, o cilindro quádrlico e o cone quádrlico).

Chamamos de seção plana o resultado da intersecção de uma quádrlica por um plano coordenado ou paralelo a este, que pode ser uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola) ou cônica degenerada (conjunto vazio, um ponto, uma reta, um par de retas paralelas ou um par de retas concorrentes).

Considerando que as denominações escolhidas para as quádrlicas tem relação com as suas seções planas, ao identificar esses cortes por planos coordenados ou paralelos a estes, é possível diferenciar as quádrlicas quanto ao tipo. Utilizando diferentes artefatos, nas atividades seguintes vamos identificar os tipos de quádrlica a partir da identificação de suas seções planas.

Atividade 1: Observando as seções planas de cada quádrlica nas figuras acima, identifique o elipsoide, o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas, o paraboloides elíptico e o paraboloides hiperbólico. Justifique a sua resposta em termos das seções planas dessas superfícies obtidas por cortes com planos horizontais ou verticais.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Atividade 2: Observando as seções planas de cada quádrlica através dos modelos impressos em 3D, identifique o elipsoide, o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas, o paraboloides elíptico e o paraboloides hiperbólico. Justifique a sua resposta em termos das seções planas dessas superfícies.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Atividade 3: Abra o arquivo do GeoGebra 3D ([SEAI 2.3](#)) e, observando as seções planas de cada quádrlica, identifique o elipsoide, o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas, o paraboloides elíptico e o paraboloides hiperbólico. Justifique a sua resposta em termos das seções planas dessas superfícies.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Atividade 4: Abra o arquivo do GeoGebra 3D ([SEAI 2.4](#)) e, com o uso dos óculos 3D, observe as seções planas de cada quádrlica. Identifique o elipsoide, o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas, o paraboloides elíptico e o paraboloides hiperbólico, justificando a sua resposta em termos das seções planas dessas superfícies.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Atividade 5: Para realizar essa atividade, abra os arquivos do GeoGebra 3D abaixo e observe as seções planas de cada quádrlica. Identifique o elipsoide, o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas, o paraboloides elíptico e o paraboloides hiperbólico, justificando a sua resposta em termos das seções planas dessas superfícies.

- a) [SEAI 2.5a](#) b) [SEAI 2.5b](#) c) [SEAI 2.5c](#) d) [SEAI 2.5d](#) e) [SEAI 2.5e](#)

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Atividade 6: Para realizar essa atividade, abra o arquivo do GeoGebra 3D: [SEAI 2.6](#). Nesse arquivo há uma janela de álgebra, onde é possível inserir a equação de um plano coordenado

ou paralelo a este para obtenção da seção plana. Inserindo equações de planos, observe as seções planas obtidas e identifique o elipsoide, o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas, o paraboloides elíptico e o paraboloides hiperbólico. Justifique suas respostas com base nas seções planas, comparando com as suas respostas anteriores.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).

Obrigada pela participação!

APÊNDICE F — SEAI 3

SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA

SEAI 3

Orientações

1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: '*SEAI 3 - Seu Nome*'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, siga as orientações em cada atividade, respondendo ou anexando fotos da sua solução nos retângulos.

Nessa SEAI, vamos analisar algébrica e graficamente as seções planas das superfícies quádricas de equações abaixo, com o objetivo de identificá-las e de relacionar seus gráficos e suas equações.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z \quad (2)$$

Atividade 1: Nessa atividade, vamos analisar a equação (1), buscando identificar a superfície quádrica a partir da análise algébrica das suas seções planas.

a) Antes de iniciar a atividade, você teria uma ideia de que superfície essa equação representa?

b) Seguindo e completando o caminho proposto no quadro abaixo, vamos obter algebricamente as seções planas da superfície de equação (1), obtidas dos cortes por planos paralelos ao plano xOz .

Os planos paralelos ao plano xOz tem equação na forma _____.

Para obter algebricamente as intersecções destes planos com a superfície dada, é necessário resolver o sistema composto pelas equações dos planos e da superfície:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, fazemos $y = k$ na equação (1), ficando:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{k^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{9}$$

- Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for positivo, teremos _____ (parábolas, elipses ou hipérbolas) com eixo _____ (de simetria, maior ou real) paralelo ao eixo dos _____ (x, y, z). Para que valores de k isso ocorre? _____

- Quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for negativo, teremos _____ (parábolas, elipses ou hipérbolas) com eixo _____ (de simetria, maior ou real) paralelo ao eixo dos _____ (x, y, z). Para que valores de k isso ocorre? _____

- E, qual é a seção plana obtida quando o valor de $1 - \frac{k^2}{9}$ for nulo? Para que valores de k isso ocorre?

c) Utilizando o mesmo caminho proposto no item a, obtenha algebricamente as seções planas obtidas de cortes da superfície por planos paralelos ao plano yoz .

d) Repetindo o mesmo procedimento utilizado dos itens anteriores, obtenha algebricamente as seções planas obtidas de cortes da superfície por planos paralelos ao plano xoy .

e) Com base nas seções planas obtidas nos itens b, c e d, que superfície você acha que a equação (1) representa?

Atividade 2: Nessa atividade, vamos analisar graficamente a superfície da equação (1), buscando verificar as respostas obtidas na atividade 1. Para isso, crie um arquivo público no GeoGebra 3D com o nome SEAI 3.2 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

a) Inserindo a equação (1) na janela de álgebra do GeoGebra 3D, obtenha a representação gráfica dessa superfície.

A sua resposta no item e da atividade 1 estava correta? Se não, como você explica essa diferença?

b) Insira a equação de planos paralelos a xoz na janela de álgebra do GeoGebra 3D.

Observando a representação gráfica das seções planas obtidas pela intersecção desses planos com a superfície, complete:

As seções planas obtidas pela intersecção da superfície de equação (1) por planos paralelos a XOZ são:

- hipérbolas com eixo real paralelo ao eixo dos X para que valores de k ?

- hipérbolas com eixo real paralelo ao eixo dos Z para que valores de k ?

Para quais valores de k ocorre essa mudança no eixo real das hipérbolas?

Qual a seção plana obtida para esses valores de k ?

Agora, compare as suas respostas, obtidas pela análise gráfica, com as encontradas algebricamente no item b da atividade 1.

As respostas coincidiram? Se não, como você explicaria a diferença nos resultados?

c) Utilizando o mesmo procedimento do item anterior, descreva as seções planas que podem ser obtidas por cortes da superfície (1) com planos paralelos ao plano YOZ .

As suas respostas coincidem com as encontradas no item c da atividade 1? Justifique a sua resposta.

d) Repita novamente o procedimento, descrevendo as seções planas que podem ser obtidas por cortes da superfície (1) por planos paralelos ao plano XOY .

Verifique se suas respostas coincidem com as encontradas no item d da atividade 1. Justifique a sua resposta.

Atividade 3: Nessa atividade, vamos identificar a superfície quádrlica representada pela equação (2), relacionando suas representações algébricas e gráficas dessa superfície.

a) Antes de iniciar a atividade, você teria uma ideia de que superfície essa equação representa?

b) Agora, usando o procedimento sugerido na atividade 1, encontre as seções planas da

superfície de equação (2).

c) E, usando o caminho sugerido na atividade 2, encontre as seções planas da superfície de equação (2). Para isso, crie um arquivo público no GeoGebra 3D de nome SEAI 3.3 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

d) Agora, verifique se suas respostas nos itens a, b e c coincidem. Justifique a sua resposta.

**Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).
Obrigada pela participação!**

APÊNDICE G — SEAI 4

SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA

SEAI 4

Orientações

1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: 'SEAI 4 - Seu Nome'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, siga as orientações em cada atividade, respondendo ou anexando fotos da sua solução nos retângulos.

Atividade 1: Para essa atividade, crie um arquivo público do GeoGebra 3D com o nome SEAI 4.1 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Considere as quádricas de equações abaixo para responder as questões que seguem:

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad \text{e} \quad (2) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{2} = 1$$

a) Analisando as equações das superfícies (1) e (2), você saberia dizer a que quádrica elas referem-se?

b) Agora, insira essas equações no arquivo do GeoGebra 3D criado e verifique a sua resposta ao item anterior. A sua resposta estava correta? Se não, por que?

c) Insira as equações dos planos coordenados xoy , yoz e xoz no GeoGebra 3D e observe as seções planas obtidas por cortes dessas superfícies com os planos coordenados. Considerando a posição dos eixos maior, médio e menor no sistema cartesiano, qual a diferença visual entre essas quádricas?

d) Qual a relação entre essas diferenças gráficas e as suas respectivas equações?

e) Existem outra(s) possibilidade(s) para a equação dessa quádrlica, considerando que os coeficientes nos termos quadráticos sejam todos diferentes? Se sim, quantas e quais? Exemplifique.

f) Como denominar essas superfícies de modo que seja possível diferenciá-las quanto à posição no sistema cartesiano?

Atividade 2: Um esferoide é a forma geométrica gerada pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos. Para responder as questões a seguir, abra o arquivo do GeoGebra 3D: [SEAI 4.2](#).

a) Observe as seções planas obtidas por cortes dessa superfície com os planos coordenados. Qual a característica visual do esferoide que o diferencia do elipsoide em α e β ?

b) Dê um exemplo de equação para um esferoide. De forma geral, como poderíamos escrever a equação de um esferoide qualquer? E de um elipsoide em α e β ?

c) Existem outros casos possíveis para os esferoides? Se sim, quantos e quais? Exemplifique.

d) Como denominar essas superfícies de modo que seja possível diferenciá-las quanto à posição no sistema cartesiano?

Atividade 3: Para essa atividade, crie um arquivo público do GeoGebra com o nome SEAI 4.3 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Superfície de revolução é a superfície gerada pela rotação ou revolução de uma curva em torno de uma reta.

a) Supondo que uma circunferência tem centro na origem do sistema coordenado e que um dos seus diâmetros esteja sobre o eixo dos z , que superfície de revolução é gerada pela sua rotação em torno desse eixo? No GeoGebra 3D, obtenha o gráfico dessa superfície por meio da rotação dessa circunferência em torno do eixo dos z .

b) Observe as seções planas obtidas por cortes dessa superfície com os planos coordenados. Qual a característica visual dessa superfície que a diferencia do elipsoide em α e β e do esferoide?

c) Qual a característica na equação dessa superfície que a diferencia das equações do elipsoide em α e β e do esferoide? Dê um exemplo. Agora escreva a equação de uma esfera qualquer.

d) Como denominar essas superfícies de modo que seja possível diferenciá-las?

Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).

Obrigada pela participação!

APÊNDICE H — SEAI 5

SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA

SEAI 5

Orientações

1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: 'SEAI 5 - Seu Nome'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, siga as orientações em cada atividade, respondendo ou anexando fotos da sua solução nos retângulos.

Para responder às questões a seguir, considerar as quádricas de equações:

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1 \quad \text{e} \quad (2) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = z$$

Atividade 1: Para essa atividade, crie um arquivo público do GeoGebra 3D com o nome SEAI 5.1 - Seu Nome e coloque o link no espaço a seguir.

Link: _____

a) Qual superfície quádrica é representada pela equação (1)? Explique baseando sua argumentação na análise das seções planas.

b) Obter o seu gráfico no GeoGebra 3D. O gráfico obtido corresponde ao que você esperava? Se não, por que?

c) Quais as características visuais da superfície que tem o coeficiente da variável x negativo e os demais positivos em equações da forma da equação (1), considerando que o termo no lado direito dessa equação não se altera? Obter o gráfico no GeoGebra 3D e verificar suas respostas.

d) E se o coeficiente da variável y for negativo e os demais positivos, com o lado direito na equação igual a 1? Obter o gráfico e verificar suas respostas.

e) Como podemos denominar os possíveis casos para essa quádrlica, diferenciando-os em relação à posição no sistema cartesiano? Vamos considerar o eixo sobre o qual as seções planas elípticas têm centro.

Atividade 2: Para essa atividade, crie um arquivo público do GeoGebra 3D com o nome SEAI 5.2 - Seu Nome e coloque o link no espaço a seguir.

Link: _____

a) Qual é a quádrlica representada por equações na forma da equação (1), no caso de dois sinais serem negativos e apenas um positivo, considerando que o termo no lado direito permanece igual a 1? Explique baseando sua argumentação na análise das seções planas.

b) Obter o gráfico no GeoGebra 3D para verificar sua resposta. Você acertou? Em caso contrário, por que?

c) Considerando o eixo que contém os centros das seções planas elípticas, de quantas formas distintas essa quádrlica pode estar posicionada no sistema cartesiano?

d) De quantas formas podemos escrever essa equação, mantendo dois sinais negativos e um positivo, considerando que o termo no lado direito permanece igual a 1. Obter os gráficos, comparando com a sua resposta na atividade c.

e) Como podemos denominar os possíveis casos para essa quádrlica, diferenciando-os em relação à posição no sistema cartesiano? Vamos considerar o eixo sobre o qual as elipses tem centro.

Atividade 3: Para essa atividade, crie um arquivo público do GeoGebra 3D com o nome SEAI 5.3 - Seu Nome e coloque o link no espaço a seguir.

Link: _____

a) Ainda, em equações da forma da equação (1), o que acontece se todos os coeficientes das variáveis têm sinais positivos, considerando que o termo no lado direito permanece igual a 1? Justifique a sua resposta.

b) E se todos os coeficientes das variáveis têm sinais negativos, considerando que o termo no lado direito permanece igual a 1? Justifique a sua resposta.

c) Inserir as equações dos itens a e b no GeoGebra 3D e verificar as suas respostas. A sua resposta estava correta? Se não, explique o porquê.

Atividade 4: Para essa atividade, crie um arquivo público do GeoGebra 3D com o nome SEAI 5.4 - Seu Nome e coloque o link no espaço a seguir.

Link: _____

a) Qual superfície quádrlica é representada pela equação (2)? Explique baseando sua argumentação na análise das seções planas.

b) Obter o seu gráfico e verificar a sua resposta. Você acertou? Em caso contrário, o que ocorreu?

c) O que mudaria graficamente se o coeficiente do termo que contém a variável z fosse negativo, com os demais permanecendo positivos em equações na forma da equação (2)?

d) Quais as outras possibilidades para o gráfico dessa quádrlica? Explique.

e) Quais as outras possibilidades para a equação dessa quádrlica? Exemplifique, obtendo os seus gráficos e comparando com suas respostas no item d.

f) Como podemos denominar os possíveis casos para essa quádrlica, diferenciando-os em relação à posição no sistema cartesiano? Vamos considerar o semieixo sobre o qual as elipses tem centro.

Atividade 5: Para essa atividade, crie um arquivo público do GeoGebra 3D com o nome SEAI 5.5 - Seu Nome e coloque o link no espaço a seguir.

Link: _____

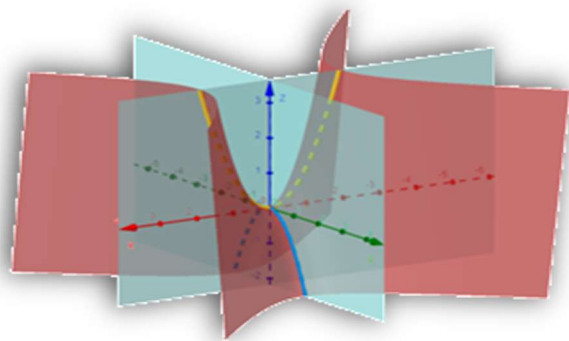
a) Qual é a quádrlica representada por equações na forma da equação (2), no caso do coeficiente do termo que contém a variável x ser positivo e do termo que contém a variável y negativo, com o coeficiente do termo linear z igual a positivo? Explique baseando sua argumentação na análise das seções planas.

b) Obter o seu gráfico e verificar a sua resposta. Você acertou? Em caso contrário, o que ocorreu?

c) Quais são as outras possibilidades para escrever essa equação? Exemplifique.

d) Nos paraboloides hiperbólicos, as duas parábolas com vértice comum, concavidades opostas e o mesmo eixo de simetria são chamadas assento e estribo.

Na figura ao lado, a parábola assento (amarela) é a que tem concavidade voltada para o semieixo positivo do eixo dos z e, a parábola estribo (azul), para o semieixo negativo do eixo dos z .



Inserindo a equação $x^2 - y^2 = z$ no GeoGebra 3D, obtenha as parábolas assento e estribo. De quantas maneiras é possível obter diferentes representações gráficas desta quádrlica, considerando que a concavidade da parábola assento está voltada para o semieixo positivo?

e) Relacionar os resultados encontrados nos itens *c* e *d*. Você encontrou os mesmos resultados? Em caso contrário, por que?

f) Como podemos denominar os possíveis casos para essa quádrlica, diferenciando-os em relação à posição no sistema cartesiano? Vamos considerar a posição da parábola assento no sistema cartesiano.

Atividade 6: Resumindo ...

a) O que diferencia as equações dos hiperboloides e dos paraboloides?

b) O que diferencia as equações do hiperboloide de uma e de duas folhas?

c) O que diferencia as equações dos paraboloides elípticos e hiperbólicos?

d) O que diferencia as equações dos hiperboloides de uma folha em relação à posição no sistema cartesiano?

e) O que diferencia as equações dos hiperboloides de duas folhas em relação à posição no sistema cartesiano?

f) O que diferencia as equações dos paraboloides elípticos em relação à posição no sistema cartesiano?

g) O que diferencia as equações dos paraboloides hiperbólicos em relação à posição no sistema cartesiano?

Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).

Obrigada pela participação!

APÊNDICE I — SEAI 6

SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA

SEAI 6

Orientações

1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: 'SEAI 6 - Seu Nome'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, siga as orientações em cada atividade, respondendo ou anexando fotos da sua solução nos retângulos.

As atividades a seguir consistem em encontrar as equações das superfícies quádricas, escrevendo-as na janela de álgebra, de modo que os gráficos obtidos se sobreponham exatamente aos anteriores.

Atividade 1: Para a realização dessa atividade, abra o arquivo [SEAI 6.1](#).

a) Quais são os nomes das superfícies quádricas representadas por esses gráficos? Justifique com base nas suas seções planas.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

b) Considere que os coeficientes dos termos quadráticos x^2 , y^2 e z^2 são respectivamente iguais a $1/4$, $1/9$ e $1/16$, nas equações com três termos quadráticos. E, os coeficientes dos termos quadráticos x^2 e y^2 (y^2 e z^2 ou x^2 e z^2) são, respectivamente iguais a $1/4$ e $1/9$, nas equações com dois (três) termos quadráticos. Faça a escolha adequada dos termos lineares e quadráticos e dos sinais, escrevendo as equações abaixo.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

c) Insira essas equações na respectiva janela de álgebra, de modo a obter um gráfico idêntico

ao da figura na janela de visualização 3D. As suas escolhas na atividade anterior estavam corretas? Se não, por que?

d) Como você explica a relação entre os sinais e termos lineares e quadráticos em cada superfície representada pela referida equação?

Atividade 2: Agora que você já sabe quais variáveis são lineares ou quadráticas e quais coeficientes são positivos ou negativos na equação de cada quádrlica, vamos ESTIMAR os valores dos coeficientes dos termos quadráticos das equações das superfícies quádrlicas. Para realizar essa atividade, abra o arquivo [SEAI 6.2](#).

a) Estime os valores dos coeficientes dos termos quadráticos e escreva abaixo as equações dessas quádrlicas.

a)
b)
c)
d)
e)

b) Insira essas equações na respectiva janela de álgebra, de modo a obter um gráfico idêntico ao da figura na janela de visualização 3D. As suas escolhas na atividade anterior estavam corretas? Se não, por que?

c) Como você explicaria a sua resposta na atividade anterior, considerando as escolhas para os coeficientes dos termos quadráticos nessas equações?

Atividade 3: Nessa atividade, você poderá utilizar as ferramentas do GeoGebra para obter os valores dos coeficientes das variáveis nas equações das superfícies quádrlicas. Antes disso, realize o ensaio com as cônicas, proposto na atividade que segue.

a) Conhecendo os sinais e termos lineares, quadráticos ou constantes nas equações das cônicas, utilize as ferramentas do GeoGebra para descobrir os valores dos coeficientes das variáveis nessas equações. Para isso, abra o arquivo [SEAI 6.3a](#). Deixe um registro escrito ou digitalizado do procedimento que você utilizou no espaço abaixo.

- a)
- b)
- c)

b) Da mesma forma que com as cônicas, você já sabe como são os sinais e termos lineares, quadráticos ou constantes nas equações das superfícies quádricas. Agora, utilize as ferramentas do GeoGebra para descobrir os valores dos coeficientes das variáveis nessas equações. Para isso, abra o arquivo [SEAI 6.3b](#). Deixe um registro escrito ou digitalizado do procedimento que você utilizou no espaço abaixo.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).

Obrigada pela participação!

APÊNDICE J — SEAI 7

SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA

SEAI 7

Orientações

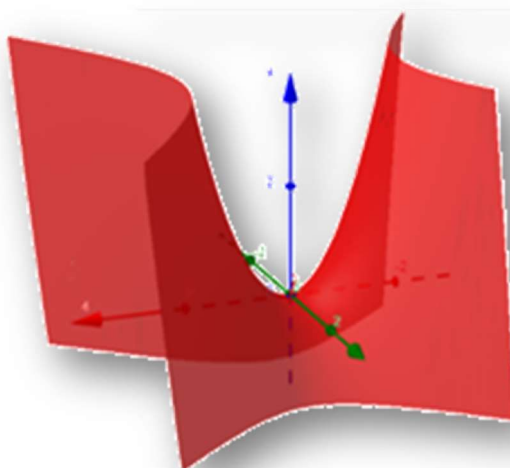
1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: 'SEAI 7 - Seu Nome'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, siga as orientações em cada atividade, respondendo ou anexando fotos da sua solução nos retângulos.

Para essa SEAI, crie um arquivo público do GeoGebra 3D com o nome SEAI 7 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Nessa situação de ensino e aprendizagem vamos explorar todas as seções planas dessa quádrlica. Antes, você saberia dizer que tipos de seções planas têm essa quádrlica? Em especial, qual seção plana é obtida pela sua intersecção com o plano xoy ?

Atividade 1: Observe a representação gráfica da quádrlica e responda as questões a seguir:



a) Qual a denominação dessa superfície quádrlica, considerando a sua posição no sistema cartesiano?

b) Escrever as equações das parábolas assento e estribo dessa quádrlica, considerando que os coeficientes das variáveis são todos iguais a 1.

c) Escrever a equação para essa quádrlica, considerando que os coeficientes das variáveis são todos iguais a 1.

d) Insira essa equação na janela de álgebra. A equação representa essa quádrlica? E as equações das parábolas assento e estribo, estão corretas? Em caso contrário, por que?

Atividade 2

a) Quais planos coordenados ou paralelos a estes possuem parábolas como seções planas dessa quádrlica? Como são as suas equações?

b) Inserindo as equações desses planos na janela de álgebra do GeoGebra 3D, obtenha graficamente essas seções planas parabólicas. Suas respostas estavam corretas? Em caso contrário, por que?

c) Agora obtenha algebricamente essas seções planas parabólicas, descrevendo as diferenças nas características visuais para os distintos valores de $k \in IR$.

d) As seções planas obtidas algebricamente na atividade 2c estão em acordo com as obtidas graficamente na atividade 2b para cada valor de $k \in IR$? Em caso contrário, por que?

Atividade 3

a) Quais planos coordenados ou paralelos a estes possuem hipérboles como seções planas dessa quádrlica? Como são as suas equações?

b) Inserindo as equações desses planos na janela de álgebra do GeoGebra 3D, obtenha graficamente essas seções planas hiperbólicas. Suas respostas estavam corretas? Em caso contrário, por que?

c) Agora obtenha algebricamente essas seções planas hiperbólicas, descrevendo as diferenças nas características visuais para os distintos valores de $k \in \mathbb{R}$.

d) As seções planas obtidas algebricamente na atividade 3c estão em acordo com as obtidas graficamente na atividade 3b para cada valor de $k \in \mathbb{R}$? Em caso contrário, por que?

Atividade 4

a) Qual é o resultado da intersecção dessa superfície pelo plano xoy ? Como é a equação desse plano?

b) Inserindo a equação do plano xoy na janela de álgebra do GeoGebra 3D, obtenha essa seção plana. Sua resposta estava correta? Em caso contrário, por que?

c) Agora obtenha algebricamente a seção plana obtida pela intersecção dessa quádrlica com o plano xoy .

d) A seção plana obtida algebricamente na atividade 4c está em acordo com a obtida graficamente na atividade 4b? Em caso contrário, por que?

Atividade 5

a) Escreva uma equação para o parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ .

b) Insira essa equação na janela de álgebra. A equação está correta? Se não, por que?

c) Considerando a posição do parabolóide hiperbólico com assento em ox_+ no sistema cartesiano, essa denominação representa unicamente essa superfície quádrlica? Se não, por que?

d) Com base nisso, reveja a sua resposta na atividade 1a. A sua resposta estava correta? Em caso contrário, como seria a denominação correta.

Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).

Obrigada pela participação!

APÊNDICE K — SEAI 8

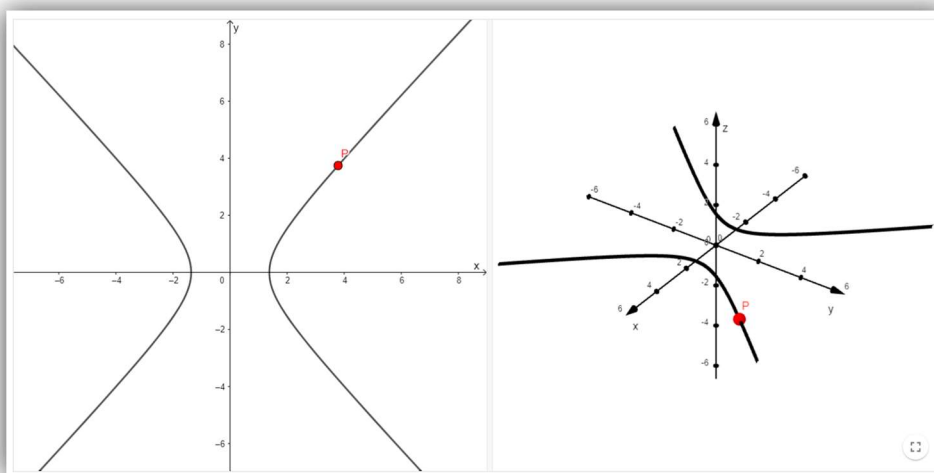
SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA

SEAI 8

Orientações

1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: '*SEAI 8 - Seu Nome*'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, siga as orientações em cada atividade, respondendo ou anexando fotos da sua solução nos retângulos.

Atividade 1: Observe a cônica na janela de visualização 2D, que também está representada na janela 3D.



Seja P um ponto móvel sobre uma hipérbole no plano xoy . Considere uma circunferência que contém P , com centro sobre um eixo coordenado e em plano perpendicular ao plano da hipérbole.

Que superfície(s) quádrlica(s) pode(m) ser obtida(s) ao deslizar o ponto P sobre a hipérbole? Explique.

Nas atividades 2 e 3 você poderá confirmar as suas respostas a essa questão.

Atividade 2

a) Considere a hipérbole da atividade 1 sobre o plano xoy que tem eixo real sobre o eixo dos x e com centro na origem do sistema cartesiano. Supondo que a circunferência que passa pelo ponto P tem centro sobre o eixo dos y , pertencendo a um plano perpendicular a esse eixo. Ao deslizar o ponto P sobre a hipérbole na janela de visualização 2D, que superfície essa circunferência desenha na janela de visualização 3D?

b) Quais planos têm circunferências como seções planas para essa quádrlica? Como são as equações desses planos?

c) Todas as seções planas obtidas por cortes dessa superfície quádrlica por planos paralelos a estes são circunferências? Explique, por meio da forma algébrica, descrevendo as seções planas que podem ser obtidas para os diferentes valores de k .

d) Abra o arquivo “[SEAI 8.2](#)” no GeoGebra e mova o ponto P na janela de visualização 2D, gerando a superfície na janela de visualização 3D.

A superfície obtida confirma as suas respostas nas atividades 2a, 2b e 2c? Em caso contrário, por quê?

Atividade 3:

a) Agora, considere novamente a hipérbole da atividade 1 sobre o plano xoy que tem eixo real em ox e com centro na origem do sistema cartesiano. Supondo que a circunferência que passa pelo ponto P tem centro sobre o eixo dos x , pertencendo a um plano perpendicular a esse eixo. Ao deslizar o ponto P sobre a hipérbole na janela de visualização 2D, que superfície essa circunferência desenha na janela de visualização 3D?

b) Quais planos têm circunferências como seções planas para essa quádrlica? Como são as

equações desses planos?

c) Todas as seções planas obtidas por cortes dessa superfície quádrlica por esses planos são circunferências? Explique.

d) Crie um arquivo público do GeoGebra com o nome SEAI 8.3 - Seu Nome e coloque o link no espaço abaixo.

Link: _____

Agora, obtenha essa superfície no GeoGebra, com construção análoga a da atividade 2.

A superfície obtida confirma a sua resposta na atividade 3a, 3b e 3c? Em caso contrário, por quê?

(Se necessário, observe o protocolo de construção da atividade 2 disponível no arquivo [SEAI 8.3](#)).

Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).

Obrigada pela participação!

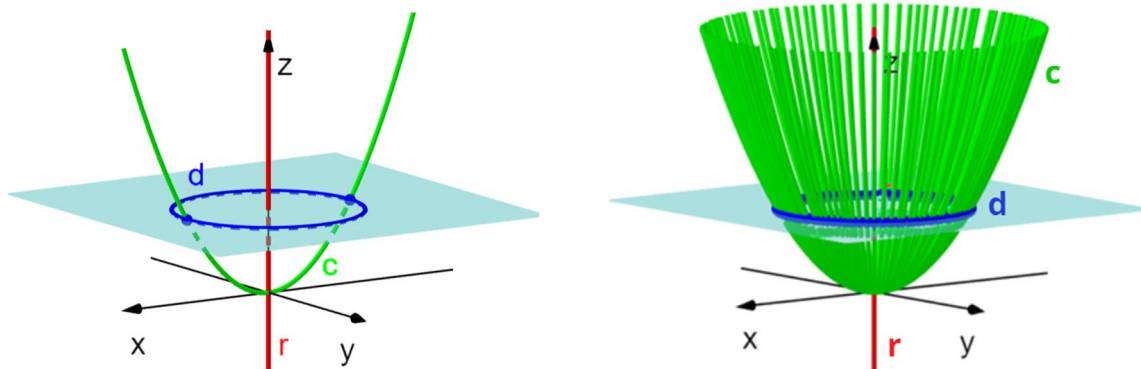
APÊNDICE L — SEAI 9

SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA SEAI 9

Orientações

1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: '*SEAI 9 - Seu Nome*'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, siga as orientações em cada atividade, respondendo ou anexando fotos da sua solução nos retângulos.

Uma superfície de revolução S de geratriz c e eixo de revolução r é a superfície gerada pela rotação da curva c em torno da reta r . A interseção de S com um plano π perpendicular à reta r é a diretriz d , uma circunferência com centro no ponto em que a reta r corta o plano π .



Atividade 1: Observe a construção do hiperboloide de uma folha obtido pela revolução de uma hipérbole em torno do eixo dos z : [SEAI 9.1a](#).

- a) Quais elementos foram utilizados para obter a quádrlica e em que ordem foram inseridos?

- b) Utilize a ferramenta do GeoGebra que permite ordenar os elementos da construção e verifique a sua resposta. A ordem dos elementos na construção estava como você pensou?

- c) Quais elementos foram utilizados para obter a circunferência? E para obter a hipérbole?

d) Qual a função dos pontos P e P' na construção? Como eles foram inseridos na construção?

e) Qual a função do ponto D na construção? Como esse ponto foi obtido?

f) Quem é o eixo imaginário dessa hipérbole? Obtenha o eixo real. Como podemos definir o eixo real?

g) Agora, continue a construção iniciada em [SEAI 9.1b](#), obtendo o hiperboloide de uma folha em z por meio da revolução de uma hipérbole.

Atividade 2

a) O que é necessário mudar na construção da atividade 1 para obter um hiperboloide de uma folha em ox ?

b) Agora, obtenha o hiperboloide de uma folha por meio da rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos x . Para realizar essa atividade, abra o arquivo [SEAI 9.2](#).

c) A sua resposta na atividade 2a estava correta? Se não, porque?

d) Quem é o eixo imaginário dessa hipérbole? Obtenha o eixo real. Como podemos definir o eixo real?

Atividade 3

a) O que é necessário para obter um hiperboloide de duas folhas a partir da rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos y ?

b) Agora, obtenha o hiperboloide de duas folhas por meio da rotação de uma hipérbole em torno do eixo dos y . Para realizar essa atividade, abra o arquivo [SEAI 9.3](#).

c) A sua resposta na atividade 3a estava correta? Se não, porque?

d) Quem é o eixo real dessa hipérbole? Obtenha o eixo imaginário. Como podemos definir o eixo imaginário?

Atividade 4

a) Quais os elementos necessários para a obtenção de um parabolóide elíptico de rotação?

b) Obtenha um parabolóide elíptico pela rotação de uma parábola em torno do semieixo oz_+ . Para realizar essa atividade, abra o arquivo [SEAI 9.4](#).

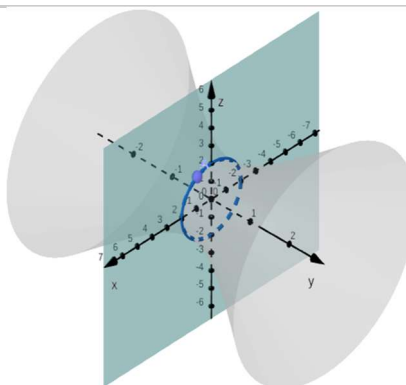
c) A sua resposta na atividade 4a estava correta? Se não, porque?

d) Quem é a diretriz dessa parábola?

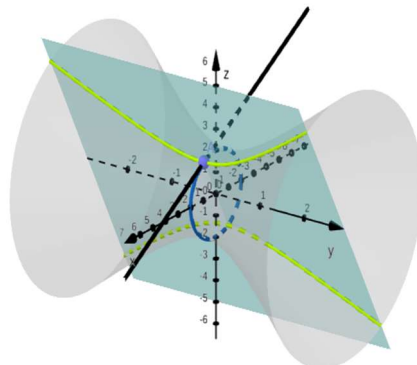
Atividade 5

Nesta atividade, um hiperboloide de uma folha em oy é apresentado no arquivo [SEAI 9.5](#). O desafio é sobrepor essa quádrlica pela rotação de uma hipérbole. Isso pode ser realizado por meio de duas seções planas:

A circunferência resultante da intersecção do hiperboloide com um dos planos coordenados.



A seção plana hiperbólica obtida pela intersecção da quádrlica por um plano que passa pelo centro da circunferência e gira apoiado em um ponto desta e perpendicular ao plano que a contém.



a) Obtenha essa quádrlica como superfície de revolução, sobrepondo a superfície em cinza.

b) Qual é a equação dessa quádrlica?

Atividade 6

a) Qual é a equação da quádrlica no arquivo do GeoGebra [SEAI 9.6](#)?

b) Agora, insira essa equação na janela de álgebra. Sua resposta estava correta?

Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).

Obrigada pela participação!

APÊNDICE M — SEAI 10

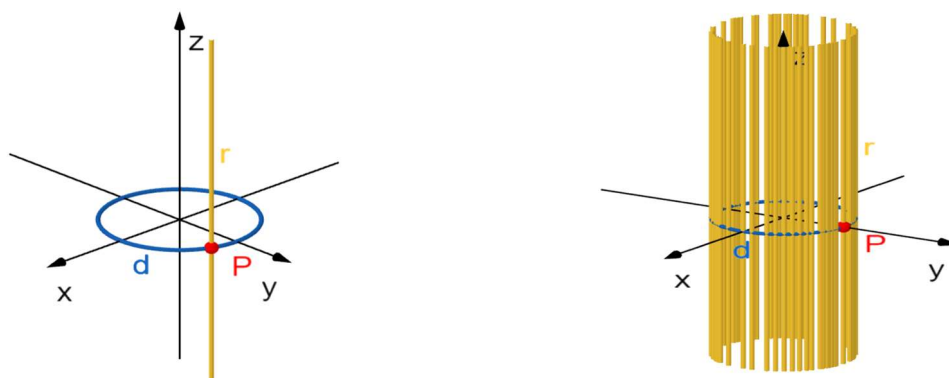
SITUAÇÃO DE ENSINO E APRENDIZAGEM INSTRUMENTADA

SEAI 10

Orientações

1. Salve este arquivo do Google Docs antes de iniciar as atividades, incluindo o seu nome ao final do nome do arquivo. Exemplo: 'SEAI 10 - Seu Nome'.
2. Depois, compartilhe com o email nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br.
3. Agora, siga as orientações em cada atividade, respondendo ou anexando fotos da sua solução nos retângulos.

Uma superfície regrada S é uma superfície gerada por uma reta r (geratriz) que se move ao longo de uma curva c (diretriz). Em outras palavras, uma superfície é dita regrada se pode ser obtida pela união de retas, ou ainda, em cada ponto de uma superfície regrada passa uma reta nela contida.

**Atividade 1**

Usando o arquivo [SEAI 10.1](#), obtenha uma superfície cilíndrica hiperbólica de centro na origem do sistema cartesiano como superfície regrada. Considere que a geratriz é uma reta paralela ao eixo dos z e que a diretriz é uma hipérbole no plano xoy , com eixo real sobre o eixo dos x e coeficientes das variáveis iguais a 1.

Atividade 2

a) Seja P um ponto contido num plano π e r uma reta que passa por P e não está contida em π . Qual é a superfície gerada por essa reta, quando ela se move apoiada num ponto sobre uma circunferência contida em plano paralelo ao plano π ?

b) Abra o arquivo [SEAI 10.2a](#) do GeoGebra. Sua resposta estava correta?

c) Quais os elementos necessários para obter essa superfície regradada? Qual é a dependência entre esses elementos?

d) Utilizando o arquivo [SEAI 10.2b](#), obtenha essa superfície regradada, considerando que a geratriz forma um ângulo de 45° com o eixo dos z .

Atividade 3

a) Considere duas retas concorrentes no ponto P que pertence a uma circunferência contida em plano perpendicular ao das retas. Qual é a superfície que essas retas desenham quando o ponto P move-se sobre a circunferência?

b) Abra o arquivo [SEAI 10.3](#) do GeoGebra e visualize a superfície. Sua resposta estava correta?

c) Qual é a equação dessa circunferência?

d) Qual é o ângulo agudo que essas retas formam com o plano xoy ?

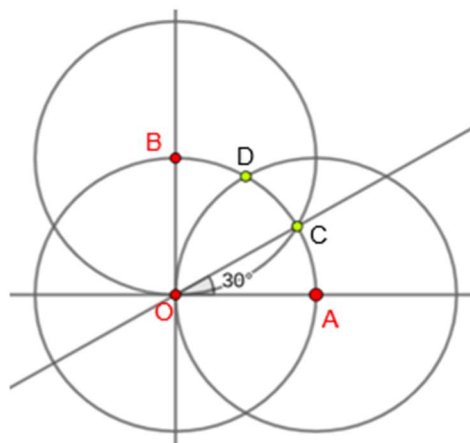
Atividade 4

a) Esta atividade envolve a obtenção de duas retas concorrentes em plano perpendicular ao xoy , formando ângulos de 30° com este. Antes de obter esse ângulo no \mathbb{R}^3 , vamos fazer um ensaio no \mathbb{R}^2 .

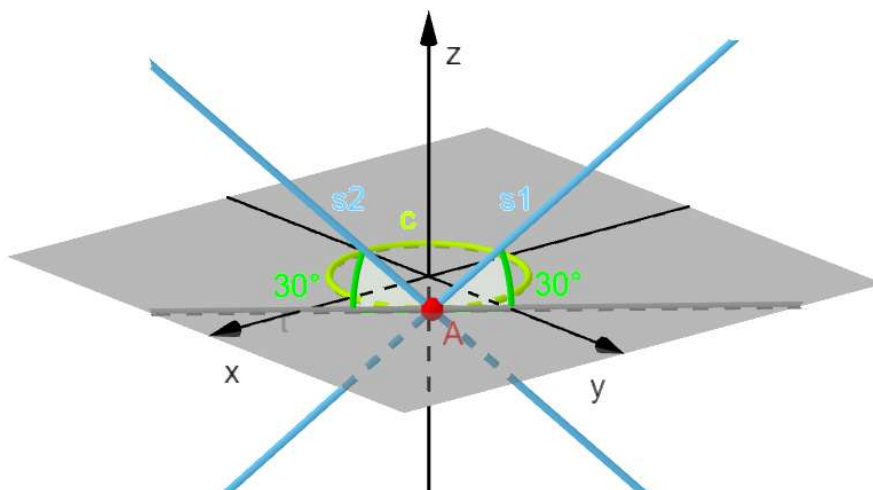
O ângulo de 30° pode ser obtido da divisão de um ângulo reto.

Na figura ao lado, o ângulo reto \widehat{AOB} é dividido em três ângulos iguais: \widehat{AOC} , \widehat{COD} e \widehat{DOB} .

Experimente fazer essa construção no arquivo [SEAI 10.4a](#) do aplicativo Geometria do GeoGebra.



b) Seja c uma circunferência no plano xoy , de raio 2 e centro na origem do sistema cartesiano. Considere ainda, duas retas concorrentes s_1 e s_2 em plano perpendicular ao plano xoy , com intersecção no ponto A que está sobre c , formando ângulos de 30° com esse plano. Usando o arquivo [SEAI 10.4b](#) do GeoGebra 3D, obtenha a quádrlica gerada pelo rastro dessas retas ao mover o ponto P sobre c .



c) Quais são os valores das constantes a , b e c na equação dessa quádrlica? Insira essa equação na janela de álgebra e verifique a sua resposta.

Atividade 5

a) Dada a superfície do arquivo [SEAI 10.5](#), obtenha o hiperboloide de uma folha em x utilizando o conceito de superfície regrada.

b) Qual é a equação desse hiperboloide de uma folha? Para verificar, insira essa equação na janela de álgebra deste arquivo do GeoGebra.

Atividade 6

a) O parabolóide hiperbólico também é uma superfície regrada. Abra o arquivo [SEAI 10.6a](#) do GeoGebra e observe o parabolóide hiperbólico com assento em oz_+ no plano xoz .

b) Quais são as equações das parábolas assento e estribo? Para verificar, insira suas equações na janela de álgebra.

c) Qual é a equação desse parabolóide hiperbólico? Para verificar, insira essa equação na janela de álgebra deste arquivo do GeoGebra.

d) Agora, utilizando o arquivo [SEAI 10.6b](#), obtenha essa quádrlica como superfície regrada. O resultado obtido foi o esperado? Se não, por que?

Agora, copie o link desse arquivo e cole no formulário disponível no [site](#).

Obrigada pela participação!