

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Uma estimativa ABP para equações do tipo integro-diferencial totalmente
não lineares

Dissertação de Mestrado

Adir Matos de Souza Júnior

Porto Alegre, 22 de Agosto de 2024

Dissertação submetida por Adir Matos de Souza Júnior*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marcon Farias (PPGMat – UFRGS)

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira (PPGMat – UFRGS)

Prof. Dra. Patricia Kruse Klaser (PPGMat – UFSM)

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha esposa Priscila: meu amor, minha melhor amiga, auxiliadora em todos os meus projetos, bênção de Deus em minha vida.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me amparado e por ter me dado forças e capacidade para seguir em frente e concluir o meu Mestrado.

A minha esposa Priscila por todo o apoio, carinho, amor e compreensão, enquanto me dedicava à elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, Adir e Elisete, pelo amor, pelo incentivo, pelos ensinamentos e por toda a educação que me deram; sem eles, minha esposa e Deus (em primeiro lugar), nada disso seria possível.

A toda a minha família, em especial a minhas irmãs Denise, Elisandra e Simone, pelo carinho e apoio.

A minha sogra, Eliane, pelas palavras de apoio.

À universidade por ter viabilizado um ensino gratuito e de qualidade.

Ao meu orientador, Leonardo Prange Bonorino, pelos ensinamentos matemáticos, pelas reuniões, pela presteza, paciência e confiança.

À professora Patrícia Kruse Klaser por seus ensinamentos e por ter me apresentado ao professor Leonardo Prange Bonorino.

À banca examinadora por toda a disponibilidade e atenção.

Aos colegas pela parceria.

E ao CNPq pelo apoio financeiro.

Epígrafes

“Mas de onde vem a sabedoria? E em que lugar estará o entendimento? (...) ‘Deus lhe entende o caminho, e Ele é quem sabe o seu lugar. (...) E disse ao ser humano: ‘Eis que o temor do Senhor é a sabedoria, e afastar-se do mal é o entendimento.’”

Jó 28: 20, 23 e 28

“Porque o SENHOR dá a sabedoria, e da sua boca vem o conhecimento e a inteligência.”

Provérbios 2: 6

“Além do mais, meu filho, leve em conta o seguinte: não há limite para fazer livros, e o muito estudar é enfado da carne. De tudo o que se ouviu, a conclusão é esta: tema a Deus e guarde os seus mandamentos, porque isto é o dever de cada pessoa.”

Eclesiastes 12: 12-13

Resumo

Neste trabalho, estudamos a estimativa ABP não local, obtida em [5], para soluções no sentido da viscosidade de certas equações, do tipo integro-diferencial, totalmente não lineares. Mais especificamente, a estimativa se refere a subsoluções $M^+u(x) \geq -f(x)$ em $B_1 := B_1(0)$, onde M^+ é um operador extremal do tipo Pucci, definido em relação a uma família \mathcal{L}_0 de operadores integro-diferenciais lineares, e f é uma função contínua.

Abstract

In this work, we study a non-local ABP estimate, obtained in [5], for viscosity solutions of certain fully nonlinear integro-differential equations. More specifically, the estimate refers to subsolutions $M^+u(x) \geq -f(x)$ in $B_1 := B_1(0)$, where M^+ is an extremal operator of Pucci type with respect to a family \mathcal{L}_0 of linear integro-differential operators, and f is a continuous function.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1. CAPÍTULO 1 - DEFINIÇÕES	6
1.1 Funções de classe C^k	6
1.2 Funções semicontínuas	6
1.3 Funções $C^{1,1}$ em um ponto	7
1.4 Operadores integro-diferenciais lineares	7
1.5 Operadores extremais do tipo Pucci	8
1.6 Soluções no sentido de viscosidade	8
1.7 Funções côncavas	10
1.8 Planos, envelope côncavo em B_3 e conjunto de contato	10
1.9 Supergradientes e superdiferencial	12
1.10 Isometrias em \mathbb{R}^n e simetria em relação a um ponto	13
2. CAPÍTULO 2 – RESULTADOS PRELIMINARES	14
3. CAPÍTULO 3 - ENVELOPE CÔNCAVO EM B_3	27
3.1 Funções côncavas	27
3.2 Conceito de plano	28
3.3 Conceito de envelope côncavo em B_3	29
4. CAPÍTULO 4 - UMA ESTIMATIVA ABP NÃO LOCAL	41
CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
REFERÊNCIAS	68

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais parciais (EDP's) elípticas possuem grande relevância, uma vez que aparecem em vários problemas da Física, Química, Engenharias, Economia e Estatística. Existem EDP's que têm uma estrutura *divergente*, para as quais podemos definir o conceito de *solução fraca* (veja [8]). Já para outras que não têm esta estrutura, define-se o conceito de *solução no sentido de viscosidade*.

Além disso, uma EDP pode ser “*local*” ou “*não local*”. Como exemplos de operadores locais, podemos citar o Laplaciano, o p -Laplaciano e o operador curvatura média. Por outro lado, como operador não local, podemos mencionar o p -Laplaciano fracionário, $(-\Delta_p)^s$.

Neste trabalho, descrevemos de forma detalhada a estimativa ABP (Aleksandrov–Bakel'man–Pucci) obtida por Caffarelli e Silvestre em [5] para soluções no sentido da viscosidade de equações não locais, do tipo integro-diferencial. Os operadores integro-diferenciais lineares L com os quais trabalhamos têm a forma

$$Lu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy, \quad (i)$$

onde $K > 0$ é um *núcleo* satisfazendo $K(y) = K(-y)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{|y|^2 + 1} K(y)dy < +\infty. \quad (ii)$$

Operadores como esses – conforme observado em [11] – aparecem em vários contextos, tais como *Análise, Teoria da Probabilidade, Mecânica dos Fluidos, Física Matemática e Ciências Aplicadas*. Podemos destacar como um ramo de aplicação importante os *processos estocásticos*.

Um processo estocástico (em \mathbb{R}^n) $(X_t)_{t \in T}$ é uma família de variáveis aleatórias em \mathbb{R}^n , definidas sobre um mesmo espaço de probabilidade, indexadas por um parâmetro $t \in T$, onde $T \subset \mathbb{R}$ ($T \neq \emptyset$) é denominado espaço de parâmetros (ou índices) do processo. Usualmente consideramos $T = \mathbb{N}$, \mathbb{Z} ou $\{1, 2, \dots, k\}$ (parâmetro discreto), ou então $T = [0, +\infty)$, $[a, b]$ ou \mathbb{R} (parâmetro contínuo). O índice t é frequentemente pensado como *tempo*. Uma subclasse importante de processos estocásticos são os denominados *processos de Lévy*.

Um processo estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ em \mathbb{R}^n é dito um *processo de Lévy* se ele satisfaz as seguintes condições:

- $X_0 = 0$ quase certamente;
- (incrementos estacionários) $\forall s < t$, $X_t - X_s$ é igual em distribuição a X_{t-s} ;
- (incrementos independentes) $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k$, as variáveis aleatórias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ são mutuamente independentes;
- (continuidade estocástica) $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall t \geq 0$, $\lim_{s \rightarrow t} P(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0$.

A caracterização dos processos de Lévy passa pelo estudo das assim chamadas *distribuições infinitamente divisíveis*. Para maiores detalhes técnicos, veja [11] e [12]. Um processo de Lévy em \mathbb{R}^n é também denominado um processo de Lévy n -dimensional. O *gerador* de um tal processo é dado por um operador integro-diferencial com a seguinte forma geral ([5]):

$$Lu(x) = \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij} u + \sum_i b_i \partial_i u + \int_{\mathbb{R}^n} \left(u(x+y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot y \chi_{B_1(0)}(y) \right) dv(y).$$

Consideramos, neste trabalho, os operadores L que contêm apenas a terceira parcela acima (“*jump part*”). Assim, L assume a forma

$$Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(u(x+y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot y \chi_{B_1(0)}(y) \right) dv(y),$$

em que ν é uma medida satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{|y|^2 + 1} dv(y) < +\infty.$$

Mais especificamente, nós vamos focar em operadores nos quais a medida ν é dada por um núcleo *simétrico* K . Então L pode ser escrito como

$$Lu(x) = \text{P. V.} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x)) K(y) dy.$$

De fato, devido à *simetria* de K ($K(y) = K(-y)$), e considerando a integral no sentido de *valor principal*, podemos eliminar o termo $-\nabla u(x) \cdot y \chi_{B_1(0)}(y)$, conforme é provado em [7], Lema 3.2, onde se mostra que

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \text{P. V.} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x-y) - u(x)) K(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) K(y) dy. \end{aligned}$$

Tomando um núcleo K igual à metade do núcleo acima, obtemos $Lu(x)$ na forma da expressão (i) (página 1). Como já dissemos, o núcleo deve ser uma função positiva, simétrica e precisa satisfazer a condição (ii). No Capítulo 2, provamos que se u é limitada e $C^{1,1}$ em x , então $Lu(x)$ está bem definido.

Embora não haja uma definição precisa (ou única) de “*operador integro-diferencial*”, costuma-se empregar este termo – de forma genérica – para se referir a

operadores que envolvem integrais e derivadas, bem como àqueles operadores que envolvem integrais e alguma *diferença* que faz o papel de *diferencial* (este é o caso que estamos considerando). Como vimos acima, esta diferença normalmente aparece multiplicada por um núcleo, que, sob condições apropriadas, permite a integrabilidade do integrando.

Nosso interesse, neste trabalho, é estudar certas equações integro-diferenciais *não lineares* (ditas *totalmente não lineares*). Conforme observado em [5], em problemas de controle estocástico, aparecem operadores não lineares tais como (veja também [13])

$$Iu(x) = \sup_{\alpha} L_{\alpha}u(x), \quad (\text{iii})$$

$$Iu(x) = \inf_{\beta} \sup_{\alpha} L_{\alpha\beta}u(x), \quad (\text{iv})$$

$$Iu(x) = \sup_{\alpha} \inf_{\beta} L_{\alpha\beta}u(x), \quad (\text{v})$$

onde $\{L_{\alpha}\}$ e $\{L_{\alpha\beta}\}$ são famílias não vazias de operadores integro-diferenciais lineares. Operadores como (iii), (iv) e (v) satisfazem desigualdades da forma

$$\inf_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}v(x) \leq I(u+v)(x) - Iu(x) \leq \sup_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}v(x). \quad (\text{vi})$$

Tais desigualdades correspondem à *condição de elipticidade* para equações elípticas totalmente não lineares. De agora em diante, quando nos referirmos a operadores não lineares I , vamos considerar os operadores que cumprem a condição (vi) acima, para alguma família não vazia $\{L_{\alpha\beta}\}$.

No Capítulo 1, definimos o conceito de solução no sentido de viscosidade para equações não lineares da forma $Iu = f$ em Ω , onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e f é uma função contínua. É interessante observar que, sob hipóteses apropriadas (veja [5]), pode-se estabelecer um *princípio de comparação* para subsoluções e supersoluções (confira também [9], [1] e [2]). O princípio da comparação e a estimativa ABP, a qual é o foco deste trabalho, são ingredientes importantes na obtenção dos resultados de regularidade de equações integro-diferenciais totalmente não lineares. Note-se que a estimativa ABP está provada em [4], por Caffarelli e Cabré, para as equações totalmente não lineares elípticas no caso local.

A estimativa ABP clássica fornece uma cota superior para o supremo da parte negativa de supersoluções u (no sentido de viscosidade) da equação $M^{-}(D^2u, \lambda, \Lambda) = f(x)$ em Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto), em que f é contínua em Ω , $0 < \lambda \leq \Lambda$ são constantes e M^{-} é o operador minimal de Pucci definido em [4]. O Teorema ABP estabelece que, se u é uma supersolução (da equação anterior) em B_r , onde B_r é uma bola aberta de raio r em \mathbb{R}^n , f é limitada e contínua em B_r , u é contínua em \bar{B}_r e $u \geq 0$ no bordo de B_r , então

$$\sup_{B_r} u^{-} \leq Cr \left(\int_{B_r \cap \{u = \Gamma_u\}} (f^{+})^n \right)^{1/n}. \quad (\text{vii})$$

Para esta estimativa, a função u é definida como sendo igual a 0 fora de B_r (logo $-u^-$ é contínua em B_{2r}), Γ_u é o envelope convexo de $-u^-$ em B_{2r} , $\{u = \Gamma_u\}$ é o conjunto de contato (entre u e Γ_u), e $C > 0$ é uma constante universal.

No presente trabalho, lidamos com operadores integro-diferenciais elípticos de ordem σ , com $0 < \sigma < 2$. Tais operadores são provenientes de uma família que denotamos por \mathcal{L}_0 e que é definida no Capítulo 1 (Definição 1.6). Ao longo do texto (especialmente no Capítulo 4), desenvolvemos uma espécie de paralelismo com a teoria de EDP's elípticas, a qual corresponde ao caso limite $\sigma = 2$. Assim, por exemplo, definimos no Capítulo 1 os operadores extremais do tipo Pucci, $M_{\mathcal{L}}^+$ e $M_{\mathcal{L}}^-$, com respeito a uma família não vazia \mathcal{L} de operadores integro-diferenciais lineares. Depois, destacamos uma família especial \mathcal{L}_0 de operadores, tais que o núcleo K satisfaz

$$(2 - \sigma) \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \leq K(y) \leq (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}}, \quad (\text{viii})$$

com $0 < \sigma < 2$ e $0 < \lambda < \Lambda$ constantes. Denotamos por M^+ e M^- , respectivamente, os operadores de Pucci $M_{\mathcal{L}_0}^+$ e $M_{\mathcal{L}_0}^-$.

A estimativa ABP que descrevemos no Capítulo 4 se refere a subsoluções $M^+u(x) \geq -f(x)$ em $B_1 := B_1(0)$. O Teorema 4.1 fornece uma decomposição do tipo Calderón–Zygmund (com “subcubos” que cobrem o conjunto de contato Σ) e algumas estimativas com as quais provamos o Teorema 4.2 (estimativa ABP). Em termos mais precisos, temos:

Teorema 4.1 Existem constantes universais $C^* > 0$, $\hat{C} > 0$ e $\mu > 0$, que dependem apenas de n , Λ e λ (mas não de σ), para as quais vale o resultado:

Se u é limitada, $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$, $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1$, $M^+u(x) \geq -f(x)$ em B_1 no sentido de viscosidade, e f é contínua, então existe uma família finita de cubos abertos Q_j ($j = 1, \dots, m$), com diâmetros d_j , satisfazendo o seguinte:

- (i) $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ para $i \neq j$.
- (ii) $\Sigma \subset \bigcup_{j=1}^m \bar{Q}_j$.
- (iii) $\Sigma \cap \bar{Q}_j \neq \emptyset$ para todo Q_j .
- (iv) $d_j \leq \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}$, onde $\rho_0 = 1/(8\sqrt{n})$.
- (v) $|\nabla\Gamma(\bar{Q}_j)| \leq C^* \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right)^n |Q_j|$.
- (vi) $\left| \left\{ y \in 17\sqrt{n} Q_j : u(y) \geq \Gamma(y) - \hat{C} \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right) d_j^2 \right\} \right| \geq \mu |Q_j|$.

O símbolo Γ denota o envelope côncavo de u em $B_3 := B_3(0)$ e $\Sigma = \{u = \Gamma\} \cap B_1$ é o conjunto de contato.

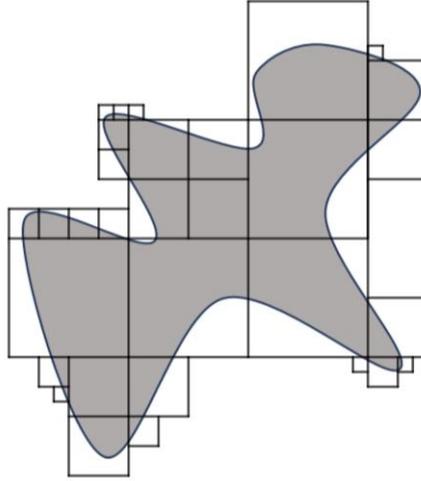


Figura (i): Família de cubos cobrindo Σ

Como referência para a decomposição de Calderón-Zygmund, veja [14].

Teorema 4.2 Seja u limitada, semicontínua superiormente, tal que $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ e $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1$. Suponha que $M^+u(x) \geq -f(x)$ em B_1 no sentido de viscosidade, com f contínua. Seja $\{Q_j\}_{j=1}^m$ a família de cubos construída no Teorema 4.1. Então valem:

$$|\nabla\Gamma(\Sigma)| \leq C^* \sum_{j=1}^m \left(\max_{Q_j} f^+ \right)^n |Q_j|, \quad (\text{ix})$$

e

$$\sup u \leq C^{**} \left(\sum_{j=1}^m \left(\max_{Q_j} f^+ \right)^n |Q_j| \right)^{1/n}, \quad (\text{x})$$

onde $C^* > 0$ é a mesma constante universal do Teorema 4.1 e $C^{**} = (6^n C^* / \omega_n)^{1/n}$ (ω_n é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n).

A Estimativa (x) acima corresponde à versão não local da estimativa ABP.

De forma resumida, o presente trabalho está assim estruturado: no Capítulo 1, fixamos as definições que servem de base para a compreensão de todo o restante; no Capítulo 2, estabelecemos os resultados preliminares, alguns dos quais asseguram que determinados conceitos do Capítulo 1 estão bem definidos; no Capítulo 3, estudamos o *envelope côncavo* e provamos algumas de suas propriedades; por fim, no Capítulo 4, demonstramos alguns lemas importantes, que permitem provar os Teoremas 4.1 e 4.2.

1. CAPÍTULO 1 - DEFINIÇÕES

Neste capítulo, registramos as definições mais importantes para a leitura do trabalho. Algumas delas são retomadas em capítulos futuros (como, por exemplo, a de *envelope côncavo*). Não pretendemos aqui esmiuçar as propriedades de cada um dos conceitos. Em vez disso, quando julgamos conveniente, citamos referências nas quais o leitor pode aprofundar o assunto. Assim, por exemplo, as *funções de classe C^k* constituem um conceito clássico em *Análise*, que pode ser revisado em [10].

1.1 Funções de classe C^k

Definição 1.1 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Dizemos que uma função real $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^0 , e escrevemos $f \in C^0$, quando ela é contínua (em cada ponto $x \in \Omega$). Dizemos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k ($k \in \mathbb{N}$), e escrevemos $f \in C^k$, se ela possui derivadas parciais até ordem k (em todos os pontos de Ω) e essas derivadas parciais são todas contínuas. Finalmente, dizemos que f é de classe C^∞ , e escrevemos $f \in C^\infty$, se $f \in C^k$ para todo inteiro $k \geq 0$.

Observação 1.1 Utiliza-se a notação $f \in C^k(\Omega)$ para explicitar o domínio ou o conjunto sobre o qual a função f é de classe C^k (no sentido da definição acima). Quando tal conjunto está subentendido, é costume escrever simplesmente $f \in C^k$.

Observação 1.2 Tem-se $C^0(\Omega) \supset C^1(\Omega) \supset C^2(\Omega) \supset \dots \supset C^k(\Omega) \supset \dots \supset C^\infty(\Omega)$, e todas estas inclusões são estritas.

1.2 Funções semicontínuas

Definição 1.2 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \Omega$. Dizemos que f é semicontínua superiormente (respectivamente, semicontínua inferiormente) no ponto x_0 se, para todo número real $h > f(x_0)$ (respectivamente, para todo número real $h < f(x_0)$), existe uma vizinhança N de x_0 tal que, para cada $x \in N$, tem-se $h > f(x)$ (respectivamente, $h < f(x)$).

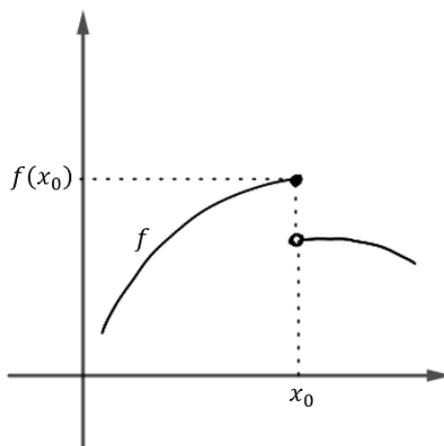


Figura 1.1: Uma função semicontínua superiormente em x_0 .

Definição 1.3 Dizemos que f é semicontínua superiormente em $X \subset \Omega$ (respectivamente, semicontínua inferiormente em X) se ela é semicontínua superiormente (respectivamente, semicontínua inferiormente) em cada ponto $x \in X$.

Para maiores detalhes sobre *funções semicontínuas*, veja [3].

1.3 Funções $C^{1,1}$ em um ponto

Definição 1.4 Dizemos que uma função φ é $C^{1,1}$ em um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, e escrevemos $\varphi \in C^{1,1}(x)$, se existem um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, uma constante $M > 0$ e um número $\varepsilon > 0$, tais que

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x) - v \cdot y| \leq M|y|^2, \text{ para } |y| < \varepsilon.$$

Observação 1.3 Mostramos no Capítulo 2 que se φ é 2 vezes diferenciável no ponto $x \in \mathbb{R}^n$, então $\varphi \in C^{1,1}(x)$. Particularmente, se φ é de classe C^2 , então $\varphi \in C^{1,1}(x)$. Como exemplo de função $C^{1,1}(0)$ que não é C^2 , podemos citar a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\varphi(x) := \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0; \\ 2x^2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1.4 Operadores integro-diferenciais lineares

Conforme esclarecemos na Introdução, neste trabalho, toda vez que nos referirmos a um operador integro-diferencial linear L , vamos considerar a definição abaixo.

Definição 1.5 Um operador integro-diferencial linear L é um operador da forma

$$Lu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy, \quad (1.1)$$

onde o núcleo K é uma função positiva, tal que $K(y) = K(-y)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{|y|^2 + 1} K(y)dy < +\infty. \quad (1.2)$$

Para simplificar a notação, vamos escrever

$$\delta(u, x, y) := u(x+y) + u(x-y) - 2u(x). \quad (1.3)$$

Assim, a expressão (1.1) pode ser reescrita como

$$Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x, y)K(y)dy. \quad (1.4)$$

Conforme provamos no Capítulo 2, o valor de $Lu(x)$ está bem definido, desde que u seja limitada em \mathbb{R}^n e $C^{1,1}$ no ponto x (e, naturalmente, K satisfaça as condições acima).

Uma classe importante de operadores integro-diferenciais lineares é a classe \mathcal{L}_0 que definimos a seguir.

Definição 1.6 Vamos denotar por \mathcal{L}_0 a classe dos operadores integro-diferenciais lineares L da forma (1.4), tais que

$$(2 - \sigma) \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \leq K(y) \leq (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}}, \quad (1.5)$$

onde $0 < \sigma < 2$ e $0 < \lambda < \Lambda$ são constantes.

1.5 Operadores extremais do tipo Pucci

Definição 1.7 Seja \mathcal{L} uma coleção não vazia de operadores integro-diferenciais lineares, conforme a Definição 1.5. Os operadores maximal e minimal de Pucci com respeito a \mathcal{L} são definidos, respectivamente, como:

$$M_{\mathcal{L}}^+ v(x) := \sup_{L \in \mathcal{L}} Lv(x), \quad (1.6)$$

$$M_{\mathcal{L}}^- v(x) := \inf_{L \in \mathcal{L}} Lv(x). \quad (1.7)$$

Observação 1.4 Mostramos no Capítulo 2 que, para a classe \mathcal{L}_0 da Definição 1.6, valem as seguintes relações:

$$M_{\mathcal{L}_0}^+ v(x) = (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda \delta(v, x, y)^+ - \lambda \delta(v, x, y)^-}{|y|^{n+\sigma}} dy, \quad (1.8)$$

$$M_{\mathcal{L}_0}^- v(x) = (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda \delta(v, x, y)^+ - \Lambda \delta(v, x, y)^-}{|y|^{n+\sigma}} dy, \quad (1.9)$$

onde δ^+ e δ^- representam, respectivamente, as partes positiva e negativa de δ .

1.6 Soluções no sentido de viscosidade

Definição 1.8 Dizemos que uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ toca a função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por cima (respectivamente, por baixo) no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ se $\varphi(x) = u(x)$ e, para alguma vizinhança N de x , tem-se $\varphi(y) \geq u(y)$ (respectivamente, $\varphi(y) \leq u(y)$), $\forall y \in N$. Nesse caso, dizemos que φ toca u por cima (respectivamente, por baixo) no ponto x dentro de N (ou em N).

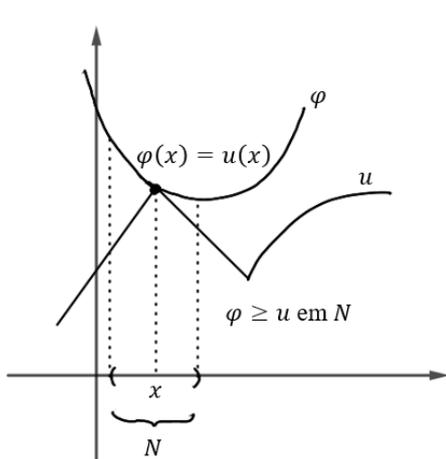


Figura 1.2: φ toca u por cima em x .

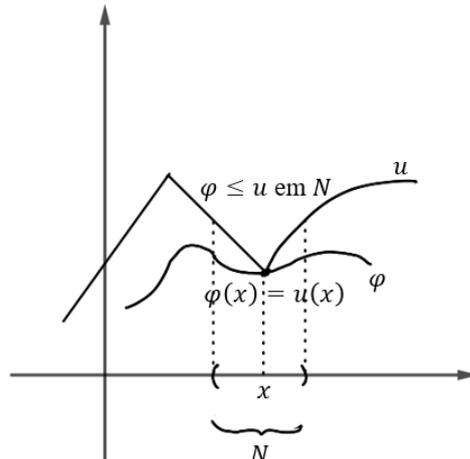


Figura 1.3: φ toca u por baixo em x .

Definição 1.9 (*Subsolução/supersolução*) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , f uma função contínua e I um operador não linear (veja a Introdução). Uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, semicontínua superiormente (respectivamente, semicontínua inferiormente) em $\bar{\Omega}$, é dita uma *subsolução* (respectivamente, uma *supersolução*) para $Iu = f$ em Ω , e escrevemos $Iu \geq f$ (respectivamente, $Iu \leq f$), se o seguinte ocorre:

Para todo ponto $x \in \Omega$, toda vizinhança N de x em Ω e toda função φ de classe C^2 em \bar{N} que toca u por cima no ponto x dentro de N (respectivamente, que toca u por baixo no ponto x dentro de N), se nós definirmos (Figura 1.4)

$$v := \begin{cases} \varphi & \text{em } N \\ u & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus N, \end{cases}$$

então $Iv(x) \geq f(x)$ (respectivamente, $Iv(x) \leq f(x)$) no sentido usual da desigualdade.

Também dizemos que $Iu \geq f$ no sentido de viscosidade (respectivamente, $Iu \leq f$ no sentido de viscosidade) em Ω para significar que u é subsolução (respectivamente, supersolução) para $Iu = f$ em Ω , conforme definido acima.

Dizemos que u é solução se é, ao mesmo tempo, subsolução e supersolução.

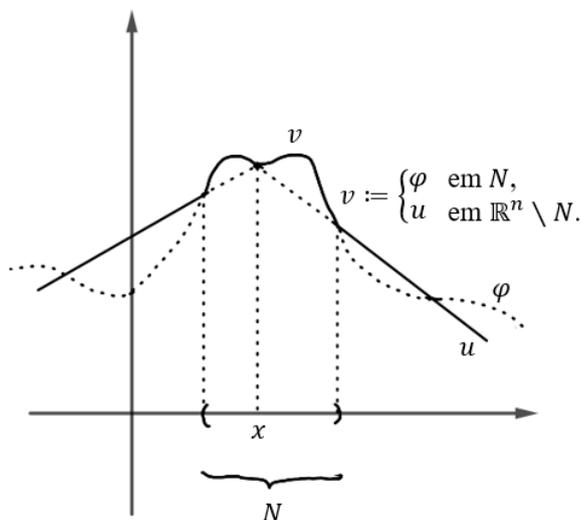


Figura 1.4: A função v em linha contínua.

1.7 Funções côncavas

Intuitivamente, uma função f é côncava sobre um conjunto convexo C quando o seu gráfico fica acima de qualquer corda que une dois de seus pontos, $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$, quaisquer que sejam $x, y \in C$.

Definição 1.10 Dizemos que $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (C convexo) é uma *função côncava* se, para quaisquer $x, y \in C$ e para todo $t \in [0, 1]$, tem-se

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y). \quad (1.10)$$

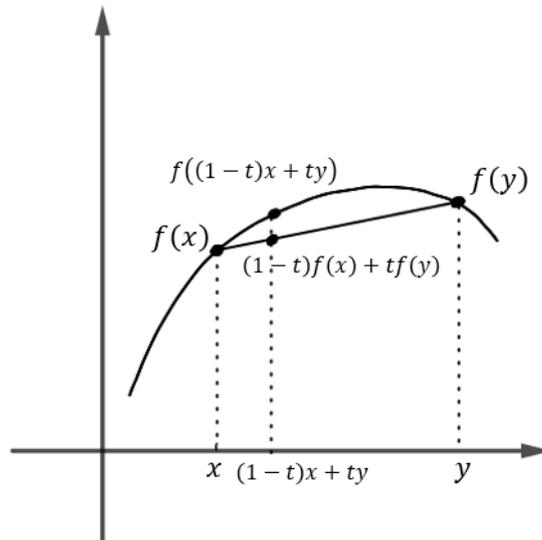


Figura 1.5: Uma função côncava.

1.8 Planos, envelope côncavo em B_3 e conjunto de contato

No Capítulo 3, estudamos em detalhes a noção de *envelope côncavo*. Porém, para fins de organização, colocamos sua definição já no Capítulo 1 (junto com as demais). Imagine que o gráfico de uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja um “objeto sólido”. Imagine também que você deseja “embrulhar” esse gráfico por cima, utilizando um “invólucro maleável”, como um “papel de presente” ou uma “lona”. Embrulhe o gráfico a partir do seu ponto mais alto e *estique* o invólucro até o chão, mantendo-o bem ajustado ao topo do gráfico. O resultado obtido é o envelope côncavo da função.

Se nós considerarmos uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos imaginar o seu envelope côncavo como um “elástico” que se ajusta ao seu topo e é esticado até dois pontos da reta real.

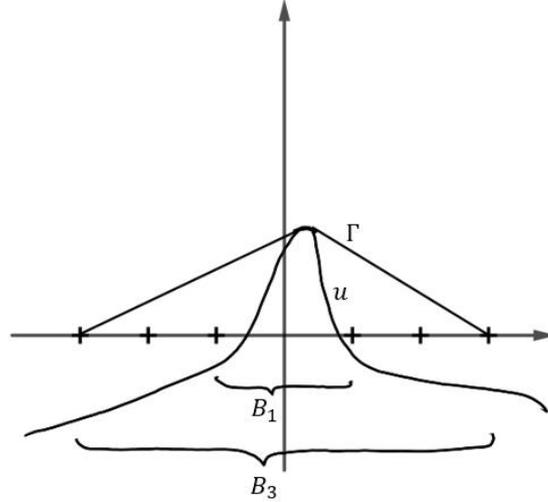


Figura 1.6: Γ é o envelope côncavo de u em B_3 .

Para definir matematicamente o envelope côncavo de u (em B_3), utilizamos a noção de *plano*. Passemos às definições.

Definição 1.11 Uma função $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita um *plano* se é da forma

$$p(x) = a \cdot x + \beta \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

com $a \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$ fixados.

Definição 1.12 Seja u uma função limitada que não é positiva fora da bola $B_1 := B_1(0)$, isto é, $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$. O *envelope côncavo* Γ de u em $B_3 := B_3(0)$ é definido como:

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \inf\{p(x) : p \text{ é plano, } p \geq u^+ \text{ em } B_3\} & \text{em } B_3, \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_3. \end{cases}$$

Em sentido coloquial, a função Γ é o ínfimo das funções côncavas em B_3 que estão acima de u^+ e que se anulam no bordo de B_3 . No Capítulo 3, nós provamos que, em cada ponto $x \in B_3$, o ínfimo acima é “atingido” por algum plano $p \geq u^+$ em B_3 .

Definição 1.13 O conjunto de contato entre u e seu envelope Γ , que vamos denotar por Σ , é formado pelos pontos $x \in B_3$ para os quais $u(x) = \Gamma(x)$. Isto é,

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = \Gamma(x)\} \cap B_3.$$

É comum empregar a notação $\{u = \Gamma\}$ para o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $u(x) = \Gamma(x)$. Assim, $\Sigma = \{u = \Gamma\} \cap B_3$. Provamos, no Capítulo 3, que se u é positiva em algum ponto da bola B_1 , então $\Sigma \subset B_1$, isto é, $\{u = \Gamma\} \cap B_3 = \{u = \Gamma\} \cap B_1$.

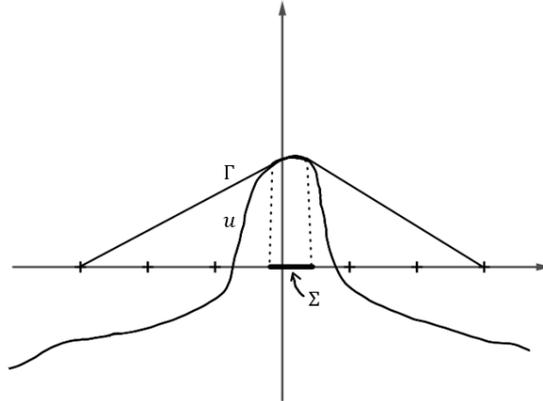


Figura 1.7: O conjunto de contato Σ .

1.9 Supergradientes e superdiferencial

Em [6], são definidos os conceitos de *subgradiente* e *subdiferencial*. De forma análoga, apresentamos a seguir as definições de *supergradiente* e *superdiferencial*.

Definição 1.14 Seja $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava definida sobre o conjunto convexo C . Dizemos que o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é um *supergradiente* de f em $x \in C$ se

$$v \cdot (y - x) + f(x) \geq f(y), \quad \forall y \in C. \quad (1.11)$$

Note que um supergradiente v (em x) é o gradiente de um plano que “toca” f no ponto x e que está “acima” de f no conjunto C . Uma função f pode ter mais de um supergradiente no mesmo ponto x . Isto motiva a definição de *superdiferencial* a seguir.

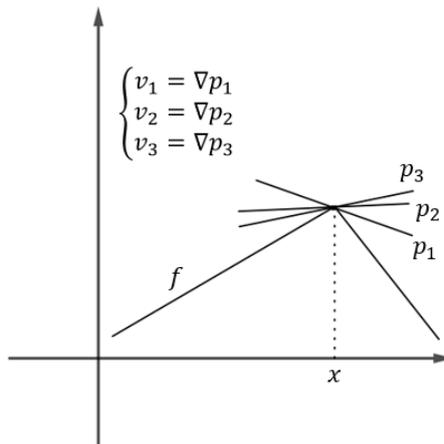


Figura 1.8: Alguns planos tocando f por cima em x .

Note que, na Figura 1.8 acima, os vetores v_1 , v_2 e v_3 , gradientes dos planos p_1 , p_2 e p_3 , respectivamente, são exemplos de supergradientes de f em x .

Definição 1.15 Definimos o *superdiferencial* de f em x como sendo o conjunto dos supergradientes de f em x , denotado por $\partial f(x)$. Isto é,

$$\partial f(x) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ é supergradiente de } f \text{ em } x\}. \quad (1.12)$$

Observação 1.5 Se f é diferenciável em x , então $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$, onde $\nabla f(x)$ é o vetor gradiente de f em x .

Definição 1.16 Seja $A \subset C$. Definimos

$$\nabla f(A) := \bigcup_{x \in A} \partial f(x). \quad (1.13)$$

Observação 1.6 Quando estivermos trabalhando com uma função côncava (não necessariamente diferenciável) f de C em \mathbb{R} (C convexo), vamos empregar o símbolo $\nabla f(x)$ para denotar um elemento qualquer do superdiferencial $\partial f(x)$ ($x \in C$). Ou seja, $\nabla f(x)$ denota um supergradiente de f em x (que coincide com o vetor gradiente de f em x , no caso em que f é diferenciável).

1.10 Isometrias em \mathbb{R}^n e simetria em relação a um ponto

Nas demonstrações do Capítulo 4, aparecem algumas ideias geométricas interessantes. A noção de isometria é utilizada em alguns argumentos, especialmente porque a medida de Lebesgue de um conjunto (em \mathbb{R}^n) é invariante por isometrias. Na prova do Lema 4.4, por exemplo, aparece uma isometria particular interessante, a saber: a simetria em relação a um ponto. Definimos estes conceitos a seguir.

Definição 1.17 Uma isometria F em \mathbb{R}^n é uma bijeção $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$|F(x) - F(y)| = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ou seja, uma isometria em \mathbb{R}^n é uma bijeção que preserva as distâncias entre pontos.

Definição 1.18 Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que A e B são isométricos se existe uma isometria $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F(A) = B$.

Definição 1.19 Seja $y \in \mathbb{R}^n$ fixado. A simetria em relação a y é a aplicação $S_y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$S_y(x) := 2y - x \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Segue da definição acima que $y = (x + S_y(x))/2$, isto é, y é o ponto médio do segmento que une x a $S_y(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, verifica-se facilmente que S_y é uma isometria.

2. CAPÍTULO 2 – RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, provamos algumas proposições que dão sentido a certas definições introduzidas no Capítulo 1. Também provamos alguns resultados básicos que são aplicados nos capítulos subsequentes.

Proposição 2.1 Suponha que φ é limitada em \mathbb{R}^n e $\varphi \in C^{1,1}(x)$. Defina

$$J := \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)|K(y)dy, \quad (2.1)$$

e suponha que o núcleo K ($K > 0$ e simétrico) satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} K(y)dy < +\infty. \quad (2.2)$$

Então $J < +\infty$.

Demonstração:

Como $\varphi \in C^{1,1}(x)$, existem um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e constantes $M > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, tais que

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x) - v \cdot y| \leq M|y|^2, \text{ para } |y| < \varepsilon_0.$$

Note que

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)|K(y)dy \\ &= \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)|K(y)dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)|K(y)dy = J_1 + J_2, \end{aligned}$$

onde

$$J_1 := \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)|K(y)dy,$$

e

$$J_2 := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)|K(y)dy.$$

Estimativa de J_1 :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)|K(y)dy \\
&= \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x+y) - \varphi(x) + \varphi(x-y) - \varphi(x)|K(y)dy \\
&= \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x+y) - \varphi(x) - v \cdot y + v \cdot y + \varphi(x-y) - \varphi(x)|K(y)dy \\
&\leq \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x+y) - \varphi(x) - v \cdot y|K(y)dy \\
&\quad + \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x-y) - \varphi(x) - v \cdot (-y)|K(y)dy \\
&\leq \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} M|y|^2K(y)dy + \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} M|-y|^2K(y)dy,
\end{aligned}$$

pois, para $|y| = |-y| < \varepsilon_0$, tem-se $|\varphi(x+y) - \varphi(x) - v \cdot y| \leq M|y|^2$ e $|\varphi(x-y) - \varphi(x) - v \cdot (-y)| \leq M|-y|^2$. Logo,

$$J_1 \leq 2M \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} |y|^2K(y)dy \leq 2M \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} \frac{1 + \varepsilon_0^2}{1 + |y|^2} |y|^2K(y)dy,$$

pois $\frac{1 + \varepsilon_0^2}{1 + |y|^2} \geq 1$, se $|y| < \varepsilon_0$. Então,

$$J_1 \leq 2M(1 + \varepsilon_0^2) \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} K(y)dy \leq 2M(1 + \varepsilon_0^2) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} K(y)dy < +\infty,$$

onde usamos (2.2). Portanto, $J_1 < +\infty$.

Estimativa de J_2 :

Como φ é limitada, existe uma constante $D > 0$ tal que

$$|\varphi(y)| \leq D, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $|\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)| \leq |\varphi(x+y)| + |\varphi(x-y)| + 2|\varphi(x)| \leq 4D$.

Portanto,

$$J_2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_0}(0)} |\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)|K(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_0}(0)} 4D \cdot K(y)dy.$$

Note que, para $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_0}(0)$, tem-se $\frac{|y|^2}{1 + |y|^2} \geq \frac{\varepsilon_0^2}{1 + \varepsilon_0^2}$. De fato:

$$|y| \geq \varepsilon_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{|y|} \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{|y|^2} \leq \frac{1}{\varepsilon_0^2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{|y|^2} \leq 1 + \frac{1}{\varepsilon_0^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1 + |y|^2}{|y|^2} \leq \frac{1 + \varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} \Rightarrow \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} \geq \frac{\varepsilon_0^2}{1 + \varepsilon_0^2}.$$

Logo,

$$J_2 \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_0}(0)} 4D \cdot K(y) dy = 4D \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_0}(0)} 1 \cdot K(y) dy$$

$$\leq 4D \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_0}(0)} \left(\frac{1 + \varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} \right) \cdot \left(\frac{|y|^2}{1 + |y|^2} \right) \cdot K(y) dy,$$

pois, pelo que mostramos acima, $1 \leq \left(\frac{1 + \varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} \right) \cdot \left(\frac{|y|^2}{1 + |y|^2} \right)$. Assim,

$$J_2 \leq 4D \frac{1 + \varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon_0}(0)} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} K(y) dy \leq 4D \frac{1 + \varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} K(y) dy < +\infty,$$

onde, novamente, usamos (2.2). Portanto, $J_2 < +\infty$.

Como $J_1 < +\infty$ e $J_2 < +\infty$, então $J = J_1 + J_2 < +\infty$. ■

Corolário 2.1 Se u é limitada em \mathbb{R}^n , $u \in C^{1,1}(x)$ e o núcleo K ($K > 0$ e simétrico) satisfaz a condição (2.2), então o valor

$$Lu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x, y)K(y) dy$$

está bem definido.

Proposição 2.2 Sejam $D > 0$, $0 < \sigma < 2$ constantes. Se o núcleo K satisfaz a condição

$$0 < K(y) \leq \frac{D}{|y|^{n+\sigma}}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (2.3)$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} K(y) dy < +\infty.$$

Demonstração:

Primeiro note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} K(y) dy = \int_{B_1} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} K(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} K(y) dy = J_1 + J_2,$$

onde $J_1 := \int_{B_1} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} K(y) dy$, $J_2 := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} K(y) dy$ e B_1 é a bola unitária centrada na origem.

Estimativa de J_1 :

$$J_1 = \int_{B_1} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} K(y) dy \leq \int_{B_1} \frac{|y|^2}{1} K(y) dy \leq \int_{B_1} |y|^2 \frac{D}{|y|^{n+\sigma}} dy = D \int_{B_1} |y|^{2-n-\sigma} dy.$$

Fazendo $\rho = |y|$, obtemos:

$$J_1 \leq D \int_{B_1} |y|^{2-n-\sigma} dy = D \int_{|z|=1} \int_0^1 \rho^{2-n-\sigma} \cdot \rho^{n-1} d\rho dS(z) = Dn\omega_n \int_0^1 \rho^{1-\sigma} d\rho,$$

onde $n\omega_n$ é a área da esfera unitária. Agora note que

$$\int_0^1 \rho^{1-\sigma} d\rho = \frac{\rho^{2-\sigma}}{2-\sigma} \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{1^{2-\sigma}}{2-\sigma} = \frac{1}{2-\sigma},$$

pois, como $0 < \sigma < 2$, tem-se $1 - \sigma \neq -1$ e $2 - \sigma \neq 0$. Dessa forma, concluímos que

$$J_1 \leq Dn\omega_n \int_0^1 \rho^{1-\sigma} d\rho = \frac{Dn\omega_n}{2-\sigma} < +\infty.$$

Estimativa de J_2 :

$$J_2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} K(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{|y|^2}{|y|^2} K(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} K(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{D}{|y|^{n+\sigma}} dy.$$

Fazendo, novamente, $\rho = |y|$, obtemos:

$$J_2 \leq D \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1}{|y|^{n+\sigma}} dy = D \int_{|z|=1} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{n+\sigma}} \cdot \rho^{n-1} d\rho dS(z) = Dn\omega_n \int_1^{+\infty} \rho^{-1-\sigma} d\rho.$$

Por fim, sendo $\sigma > 0$, veja que

$$\int_1^{+\infty} \rho^{-1-\sigma} d\rho = \frac{\rho^{-\sigma}}{-\sigma} \Big|_{\rho=1}^{\rho=+\infty} = 0 - \left(\frac{1^{-\sigma}}{-\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma}.$$

Logo,

$$J_2 \leq Dn\omega_n \int_1^{+\infty} \rho^{-1-\sigma} d\rho = \frac{Dn\omega_n}{\sigma} < +\infty.$$

Portanto, $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} K(y) dy = J_1 + J_2 < +\infty$. ■

As Proposições 2.1 e 2.2 nos permitem obter, imediatamente, os seguintes corolários:

Corolário 2.2 Se u é limitada, $u \in C^{1,1}(x)$ e o núcleo K satisfaz a condição

$$(2 - \sigma) \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \leq K(y) \leq (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}}, \quad (2.4)$$

onde $0 < \sigma < 2$ e $0 < \lambda < \Lambda$ são constantes, então o valor

$$Lu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x, y)K(y)dy$$

está bem definido.

Corolário 2.3 Se φ é limitada e $\varphi \in C^{1,1}(x)$, então $|\delta(\varphi, x, y)|/|y|^{n+\sigma}$ é integrável sobre \mathbb{R}^n .

Vimos até aqui que o conceito de função $C^{1,1}$ em um ponto é muito importante para os resultados que estamos desenvolvendo. A seguir, vamos mostrar que toda função 2 vezes diferenciável no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é uma função $C^{1,1}$ em x .

Proposição 2.3 Se $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω aberto) é 2 vezes diferenciável no ponto x , então $\varphi \in C^{1,1}(x)$. Em particular, se φ é de classe C^2 , então $\varphi \in C^{1,1}(x)$.

Demonstração:

Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, com $x+y \in \Omega$, definimos:

$$r(y) := \varphi(x+y) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x) \cdot y - \frac{1}{2}H\varphi(x)\langle y, y \rangle. \quad (2.5)$$

Pela Fórmula de Taylor infinitesimal, como φ é 2 vezes diferenciável em x , tem-se

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{r(y)}{|y|^2} = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|r(y)|}{|y|^2}. \quad (2.6)$$

Note ainda que, como a Hessiana $H\varphi(x)$ é uma forma quadrática,

$$|H\varphi(x)\langle y, y \rangle| \leq \|H\varphi(x)\| |y| |y| = \|H\varphi(x)\| |y|^2. \quad (2.7)$$

Para $y \neq 0$, podemos escrever:

$$\frac{\varphi(x+y) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x) \cdot y}{|y|^2} = \frac{r(y)}{|y|^2} + \frac{1}{2|y|^2} H\varphi(x)\langle y, y \rangle$$

↓

$$\begin{aligned}
\frac{|\varphi(x+y) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x) \cdot y|}{|y|^2} &\leq \frac{|r(y)|}{|y|^2} + \frac{1}{2|y|^2} |H\varphi(x)\langle y, y \rangle| \\
&\leq \frac{|r(y)|}{|y|^2} + \frac{1}{2|y|^2} \|H\varphi(x)\| |y|^2 \\
&\quad \downarrow \\
\frac{|\varphi(x+y) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x) \cdot y|}{|y|^2} &\leq \frac{|r(y)|}{|y|^2} + \frac{1}{2} \|H\varphi(x)\|. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Como $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|r(y)|}{|y|^2} = 0$, existe um número $\varepsilon > 0$, tal que

$$\frac{|r(y)|}{|y|^2} \leq 1, \quad \text{se } 0 < |y| < \varepsilon.$$

Tomando $v := \nabla\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ e $M := 1 + \frac{1}{2} \|H\varphi(x)\| > 0$, a estimativa (2.8) nos dá:

$$\begin{aligned}
\frac{|\varphi(x+y) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x) \cdot y|}{|y|^2} &\leq \frac{|r(y)|}{|y|^2} + \frac{1}{2} \|H\varphi(x)\| \\
&\leq 1 + \frac{1}{2} \|H\varphi(x)\| = M, \quad \text{se } 0 < |y| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x) - v \cdot y| \leq M|y|^2, \quad \text{para } |y| < \varepsilon \text{ (inclusive quando } y = 0 \text{)}.$$

Assim, $\varphi \in C^{1,1}(x)$. ■

Vamos agora deduzir as fórmulas para $M_{\mathcal{L}_0^+} v(x)$ e $M_{\mathcal{L}_0^-} v(x)$ registradas na Seção 1.5 do Capítulo 1 (Observação 1.4).

Proposição 2.4 Seja \mathcal{L}_0 a classe dos operadores integro-diferenciais lineares L da forma

$$Lu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x, y) K(y) dy, \tag{2.9}$$

onde o núcleo K satisfaz

$$(2 - \sigma) \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} \leq K(y) \leq (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}}, \tag{2.10}$$

com $0 < \sigma < 2$ e $0 < \lambda < \Lambda$ constantes. Lembre que $\delta(u, x, y) := u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)$. Sejam v uma função e $x \in \mathbb{R}^n$, tais que $Lv(x)$ está bem definido (no sentido clássico) para todo $L \in \mathcal{L}_0$ (isto é, para todo núcleo K satisfazendo (2.10)). Então, tem-se:

$$M_{\mathcal{L}_0}^+ v(x) = (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda \delta(v, x, y)^+ - \lambda \delta(v, x, y)^-}{|y|^{n+\sigma}} dy, \quad (2.11)$$

$$M_{\mathcal{L}_0}^- v(x) = (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda \delta(v, x, y)^+ - \Lambda \delta(v, x, y)^-}{|y|^{n+\sigma}} dy, \quad (2.12)$$

onde δ^+ e δ^- são, respectivamente, as partes positiva e negativa de δ . Em particular, para toda função v limitada em \mathbb{R}^n e $C^{1,1}(x)$ (ver Corolário 2.2), valem as fórmulas (2.11) e (2.12).

Demonstração:

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\delta(v, x, y) \geq 0$. E seja $B \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\delta(v, x, y) < 0$. Veja que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{R}^n$.

A parte positiva de δ , que denotamos por δ^+ , é definida como:

$$\delta(v, x, y)^+ := \begin{cases} \delta(v, x, y), & \text{se } y \in A \text{ (ou seja, se } \delta(v, x, y) \geq 0). \\ 0, & \text{se } y \in B \text{ (ou seja, se } \delta(v, x, y) < 0). \end{cases}$$

E a parte negativa de δ , que denotamos por δ^- , é definida como:

$$\delta(v, x, y)^- := \begin{cases} -\delta(v, x, y), & \text{se } y \in B \text{ (ou seja, se } \delta(v, x, y) < 0). \\ 0, & \text{se } y \in A \text{ (ou seja, se } \delta(v, x, y) \geq 0). \end{cases}$$

Então $\delta = \delta^+ - \delta^-$. Além disso, δ^+ e δ^- são funções não negativas.

Defina:

$$K_1(y) := \begin{cases} (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}}, & \text{se } y \in A. \\ (2 - \sigma) \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}}, & \text{se } y \in B. \end{cases}$$

Note que K_1 satisfaz a condição (2.10) e, portanto, o valor

$$L_1 v(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v, x, y) K_1(y) dy$$

está bem definido. Observe que o operador L_1 , assim determinado, pertence à classe \mathcal{L}_0 .

Defina também:

$$K_2(y) := \begin{cases} (2 - \sigma) \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}}, & \text{se } y \in A. \\ (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}}, & \text{se } y \in B. \end{cases}$$

De forma análoga, o valor

$$L_2 v(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v, x, y) K_2(y) dy$$

está bem definido e o operador L_2 , assim determinado, pertence à classe \mathcal{L}_0 .

Escrevendo momentaneamente δ em vez de $\delta(v, x, y)$, vamos mostrar que, para todo $L \in \mathcal{L}_0$, vale: $L_2 v(x) \leq Lv(x) \leq L_1 v(x)$. De fato, dado $L \in \mathcal{L}_0$, temos

$$\begin{aligned} Lv(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta K(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\delta^+ - \delta^-) K(y) dy \\ &= \int_A (\delta^+ - \delta^-) K(y) dy + \int_B (\delta^+ - \delta^-) K(y) dy \\ &= \int_A \delta^+ K(y) dy - \int_B \delta^- K(y) dy \\ &\leq \int_A \delta^+ \cdot (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy - \int_B \delta^- \cdot (2 - \sigma) \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &= \int_A \delta^+ K_1(y) dy - \int_B \delta^- K_1(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta^+ K_1(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \delta^- K_1(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\delta^+ - \delta^-) K_1(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta K_1(y) dy = L_1 v(x). \end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned} Lv(x) &= \int_A \delta^+ K(y) dy - \int_B \delta^- K(y) dy \\ &\geq \int_A \delta^+ \cdot (2 - \sigma) \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy - \int_B \delta^- \cdot (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &= \int_A \delta^+ K_2(y) dy - \int_B \delta^- K_2(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta^+ K_2(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \delta^- K_2(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\delta^+ - \delta^-) K_2(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta K_2(y) dy = L_2 v(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$L_2 v(x) \leq Lv(x) \leq L_1 v(x), \quad \forall L \in \mathcal{L}_0.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{L}_0}^+ v(x) &= \sup_{L \in \mathcal{L}_0} Lv(x) = L_1 v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta K_1(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\delta^+ - \delta^-) K_1(y) dy \\
&= \int_A (\delta^+ - \delta^-) K_1(y) dy + \int_B (\delta^+ - \delta^-) K_1(y) dy \\
&= \int_A \delta^+ K_1(y) dy - \int_B \delta^- K_1(y) dy \\
&= (2 - \sigma) \int_A \delta^+ \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy - (2 - \sigma) \int_B \delta^- \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= (2 - \sigma) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \delta^+ \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy - \int_{\mathbb{R}^n} \delta^- \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \right] \\
&= (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(v, x, y)^+ \Lambda - \delta(v, x, y)^- \lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy.
\end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{L}_0}^- v(x) &= \inf_{L \in \mathcal{L}_0} Lv(x) = L_2 v(x) = \int_A \delta^+ K_2(y) dy - \int_B \delta^- K_2(y) dy \\
&= (2 - \sigma) \int_A \delta^+ \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy - (2 - \sigma) \int_B \delta^- \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\
&= (2 - \sigma) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \delta^+ \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy - \int_{\mathbb{R}^n} \delta^- \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \right] \\
&= (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(v, x, y)^+ \lambda - \delta(v, x, y)^- \Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy. \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposição 2.5 Sejam $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Suponhamos que exista uma função φ de classe C^2 que toca u por cima no ponto $x_0 \in \Omega$. Suponhamos também que $M^+ u(x) \geq -f(x)$ em Ω no sentido de viscosidade, onde f é uma função contínua e $M^+ := M_{\mathcal{L}_0}^+$. Então $M^+ u(x_0)$ está definido classicamente e

$$M^+ u(x_0) = (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda \delta^+ - \lambda \delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy. \quad (2.13)$$

Além disso, $M^+ u(x_0) \geq -f(x_0)$ no sentido usual da desigualdade.

Demonstração:

Como φ toca u por cima no ponto $x_0 \in \Omega$, existe uma vizinhança N do ponto x_0 em Ω ($x_0 \in N \subset \Omega$) tal que $\varphi(x_0) = u(x_0)$ e $\varphi(x) \geq u(x)$ para todo $x \in N$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset N$ (ε suficientemente pequeno). Para cada $r \in (0, \varepsilon)$, defina

$$v_r := \begin{cases} \varphi & \text{em } B_r(x_0), \\ u & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_r(x_0). \end{cases}$$

Como φ é de classe C^2 , a Proposição 2.3 assegura que $v_r \in C^{1,1}(x_0)$, para todo $r \in (0, \varepsilon)$. Além disso, pelo Corolário 2.3, temos que $|\delta(v_r, x_0, y)|/|y|^{n+\sigma}$ é integrável. Consequentemente, $\delta(u, x_0, y)^+/|y|^{n+\sigma}$ também é integrável, pois

$$0 \leq \frac{\delta(u, x_0, y)^+}{|y|^{n+\sigma}} \leq \frac{\delta(v_r, x_0, y)^+}{|y|^{n+\sigma}} \leq \frac{|\delta(v_r, x_0, y)|}{|y|^{n+\sigma}},$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Agora note que, como φ é de classe C^2 , φ toca u por cima no ponto $x_0 \in \Omega$, e $M^+u(x) \geq -f(x)$ em Ω no sentido de viscosidade (ver definição de subsolução – Página 9 – Definição 1.9), então $M^+v_r(x_0) \geq -f(x_0)$ no sentido usual da desigualdade. Logo, a partir da Proposição 2.4, obtemos:

$$\begin{aligned} (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v_r, x_0, y)^- \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ \leq (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v_r, x_0, y)^+ \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy + f(x_0). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como φ toca u por cima em x_0 , $\delta(v_r, x_0, y)$ decresce à medida que r decresce. Mais precisamente, se $r_1 < r_2$ então $\delta(v_{r_1}, x_0, y) \leq \delta(v_{r_2}, x_0, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$. De fato:

- $y \in B_{r_1}(0) \Rightarrow \delta(v_{r_1}, x_0, y) = v_{r_1}(x_0 + y) + v_{r_1}(x_0 - y) - 2v_{r_1}(x_0) = \varphi(x_0 + y) + \varphi(x_0 - y) - 2\varphi(x_0) = v_{r_2}(x_0 + y) + v_{r_2}(x_0 - y) - 2v_{r_2}(x_0) = \delta(v_{r_2}, x_0, y)$, e
- $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_1}(0) \Rightarrow \delta(v_{r_1}, x_0, y) = v_{r_1}(x_0 + y) + v_{r_1}(x_0 - y) - 2v_{r_1}(x_0) = u(x_0 + y) + u(x_0 - y) - 2\varphi(x_0) \leq v_{r_2}(x_0 + y) + v_{r_2}(x_0 - y) - 2\varphi(x_0) = v_{r_2}(x_0 + y) + v_{r_2}(x_0 - y) - 2v_{r_2}(x_0) = \delta(v_{r_2}, x_0, y)$,

sempre que $r_1 < r_2$. Agora fixamos $r_0 \in (0, \varepsilon)$. Então, para todo $r < r_0$, tem-se

$$\begin{aligned} (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v_r, x_0, y)^- \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ \leq (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v_r, x_0, y)^+ \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy + f(x_0) \quad (2.15) \\ \leq (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v_{r_0}, x_0, y)^+ \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy + f(x_0). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\delta(v_r, x_0, y)^-$ cresce à medida que r decresce, e converge para $\delta(u, x_0, y)^-$ quando $r \rightarrow 0$.

Para verificar a primeira parte da afirmação, basta notar que, se $r_1 < r_2$, então:

- $0 \leq \delta(v_{r_1}, x_0, y) \leq \delta(v_{r_2}, x_0, y) \Rightarrow \delta(v_{r_1}, x_0, y)^- = \delta(v_{r_2}, x_0, y)^- = 0$,
- $\delta(v_{r_1}, x_0, y) \leq 0 \leq \delta(v_{r_2}, x_0, y) \Rightarrow \delta(v_{r_1}, x_0, y)^- \geq 0 = \delta(v_{r_2}, x_0, y)^-$, e
- $\delta(v_{r_1}, x_0, y) \leq \delta(v_{r_2}, x_0, y) \leq 0 \Rightarrow \delta(v_{r_1}, x_0, y)^- \geq \delta(v_{r_2}, x_0, y)^- \geq 0$.

Logo, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, temos que $\delta(v_{r_1}, x_0, y)^- \geq \delta(v_{r_2}, x_0, y)^- \geq 0$, se $r_1 < r_2$.

Agora, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v_r, x_0, y)^- \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ = (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x_0, y)^- \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Mas, pela Estimativa (2.15), as integrais que aparecem à esquerda em (2.16) estão uniformemente limitadas, e portanto:

$$\begin{aligned} (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x_0, y)^- \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ \leq (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(v_{r_0}, x_0, y)^+ \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy + f(x_0) \\ < +\infty. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, mostramos que $\delta(u, x_0, y)^+ / |y|^{n+\sigma}$ e $\delta(u, x_0, y)^- / |y|^{n+\sigma}$ são ambas integráveis. Agora, seja $L \in \mathcal{L}_0$, com núcleo K satisfazendo (2.10). Note que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x_0, y)^+ K(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x_0, y)^+ (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ = (2 - \sigma) \Lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(u, x_0, y)^+}{|y|^{n+\sigma}} dy < +\infty. \end{aligned} \quad (2.18)$$

E também:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x_0, y)^- K(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x_0, y)^- (2 - \sigma) \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ = (2 - \sigma) \Lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(u, x_0, y)^-}{|y|^{n+\sigma}} dy < +\infty. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Portanto, $Lu(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x_0, y)K(y)dy$ está bem definido, qualquer que seja o operador $L \in \mathcal{L}_0$. Pela Proposição 2.4, temos que $M^+u(x_0)$ está definido classicamente e $M^+u(x_0) = (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda\delta^+ - \lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy$.

Note ainda que, se fizermos $r_0 \rightarrow 0$ em (2.17), o Teorema da Convergência Monótona nos dá que:

$$\begin{aligned} (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x_0, y)^- \frac{\lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ \leq (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x_0, y)^+ \frac{\Lambda}{|y|^{n+\sigma}} dy + f(x_0). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Logo, $M^+u(x_0) \geq -f(x_0)$ no sentido usual da desigualdade. ■

A seguir, vamos provar uma propriedade de funções semicontínuas superiormente, que, apesar de sua simplicidade, é fundamental.

Proposição 2.6 Seja $v : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e semicontínua superiormente em um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Então, existe um ponto $x_0 \in K$ tal que

$$v(x_0) = \sup_{x \in K} v(x).$$

Demonstração:

Como v é limitada em K , tem-se $\sup_{x \in K} v(x) < \infty$. Defina $M := \sup_{x \in K} v(x)$.

Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sequência em K tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} v(x_k) = M$. Como K é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , existem uma subsequência $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ ($k_1 < k_2 < \dots$) e um ponto $x_0 \in K$ tais que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = x_0$.

Afirmamos que $v(x_0) = M$.

De fato, como M é o supremo de v , tem-se $v(x_0) \leq M$. Suponhamos, por absurdo, que $v(x_0) < M$. Nesse caso, defina $h := (v(x_0) + M)/2 \in \mathbb{R}$. Note que h é a média aritmética entre $v(x_0)$ e M , donde $v(x_0) < h < M$.

Como v é semicontínua superiormente em K , existe uma bola $B_r(x_0) \subset K$ tal que

$$v(x) < h < M, \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

Porém, como $x_{k_j} \rightarrow x_0$, existe um inteiro positivo k_{j_0} tal que

$$k_j \geq k_{j_0} \implies x_{k_j} \in B_r(x_0).$$

Portanto, $v(x_{k_j}) < h < M$ para todo $k_j \geq k_{j_0}$. Daí vem que:

$$M = \lim_{k \rightarrow \infty} v(x_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} v(x_{k_j}) \leq h < M,$$

e obtemos uma contradição. Logo, devemos ter $v(x_0) = M$. ■

3. CAPÍTULO 3 - ENVELOPE CÔNCAVO EM B_3

O objetivo deste capítulo é estudar as propriedades do envelope côncavo. Antes, vamos retomar a definição de função côncava e provar que o ínfimo de uma família de funções côncavas (uniformemente limitadas por baixo) é ainda uma função côncava. Depois, introduzimos o conceito de plano e provamos algumas de suas propriedades. Finalmente, definimos o envelope côncavo em B_3 de uma função limitada $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ e demonstramos as proposições a ele relacionadas. Note que os conceitos e resultados que desenvolvemos para B_1 e B_3 poderiam ser adaptados para bolas de raios r e $3r$, realizando uma mudança de escala.

3.1 Funções côncavas

Definição 3.1 Dizemos que $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (C convexo) é uma *função côncava* se, para quaisquer $x, y \in C$ e para todo $t \in [0, 1]$, tem-se

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y). \quad (3.1)$$

Proposição 3.1 Seja \mathcal{F} uma família não vazia de funções côncavas $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, uniformemente limitadas por baixo por uma constante $c \in \mathbb{R}$; isto é, para toda função $f \in \mathcal{F}$ e todo $x \in C$, $f(x) \geq c$. Seja $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) := \inf_{f \in \mathcal{F}} f(x), \quad (3.2)$$

para cada $x \in C$. Então, g é côncava.

Ou seja, o ínfimo de uma família de funções côncavas (nas condições acima) ainda é uma função côncava.

Demonstração:

Sejam $x, y \in C$ e seja $t \in [0, 1]$. Devemos mostrar que

$$g((1-t)x + ty) \geq (1-t)g(x) + tg(y).$$

Escolha uma função qualquer $f \in \mathcal{F}$, e note que:

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y) \geq (1-t) \inf_{f^* \in \mathcal{F}} f^*(x) + t \inf_{f^* \in \mathcal{F}} f^*(y).$$

A primeira desigualdade é válida porque f é côncava, e a segunda decorre de $f(x) \geq \inf_{f^* \in \mathcal{F}} f^*(x)$, $f(y) \geq \inf_{f^* \in \mathcal{F}} f^*(y)$, $t \geq 0$ e $1-t \geq 0$.

Daí vem que:

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)g(x) + tg(y), \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Tomando o ínfimo do lado esquerdo da igualdade acima (para todas as funções $f \in \mathcal{F}$), obtemos:

$$g((1-t)x + ty) \geq (1-t)g(x) + tg(y),$$

com o que provamos que g é côncava. ■

3.2 Conceito de plano

Definição 3.2 Uma função $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita um *plano* se é da forma

$$p(x) = a \cdot x + \beta \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad (3.3)$$

com $a \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$ fixados.

Observação 3.1 Todo plano é de classe C^∞ .

Proposição 3.2 Seja $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um plano. Então

$$p((1-t)x + ty) = (1-t)p(x) + tp(y), \quad (3.4)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Suponha que $p(z) = a \cdot z + \beta$ ($z \in \mathbb{R}^n$), onde $a \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$ são fixados. Assim, temos que

$$\begin{aligned} p((1-t)x + ty) &= a \cdot ((1-t)x + ty) + \beta = a \cdot ((1-t)x + ty) + (1-t)\beta + t\beta \\ &= a \cdot (1-t)x + a \cdot ty + (1-t)\beta + t\beta \\ &= (1-t)(a \cdot x) + (1-t)\beta + t(a \cdot y) + t\beta \\ &= (1-t)(a \cdot x + \beta) + t(a \cdot y + \beta) = (1-t)p(x) + tp(y), \end{aligned}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\forall t \in \mathbb{R}$. ■

Corolário 3.1 Todo plano é uma função côncava.

De fato, se p é um plano, então, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, 1]$, a igualdade (3.4) é válida.

Corolário 3.2 Seja $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um plano. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$p(x) = \frac{p(x+y) + p(x-y)}{2}. \quad (3.5)$$

Ou, equivalentemente,

$$p(x+y) + p(x-y) - 2p(x) = 0. \quad (3.6)$$

Demonstração:

Primeiro note que $(x+y) + (x-y) = 2x$. Ou seja,

$$x = \frac{(x+y) + (x-y)}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)(x+y) + \frac{1}{2}(x-y). \quad (3.7)$$

Usando (3.7) e (3.4), segue que

$$p(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)p(x+y) + \frac{1}{2}p(x-y). \quad \blacksquare$$

Observação 3.2 Também podemos provar o corolário acima (Corolário 3.2) usando diretamente a definição de plano. De fato, pela Definição 3.2, temos que $p(x+y) + p(x-y) = [a \cdot (x+y) + \beta] + [a \cdot (x-y) + \beta] = 2[a \cdot x + \beta] = 2p(x)$.

3.3 Conceito de envelope côncavo em B_3

Definição 3.3 Seja u uma função limitada que é não-positiva fora da bola $B_1 := B_1(0)$, isto é, $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$. O *envelope côncavo* Γ de u em $B_3 := B_3(0)$ é definido como:

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \inf\{p(x) : p \text{ é plano, } p \geq u^+ \text{ em } B_3\} & \text{em } B_3, \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_3. \end{cases}$$

Proposição 3.3 O envelope côncavo Γ definido acima é uma função côncava em B_3 .

Demonstração:

Note que, como u é limitada, existe uma constante $D > 0$ tal que $u^+ < D$ em B_3 . Defina o plano $p_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $p_0(x) := D$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Então $p_0 \geq u^+$ em B_3 , de modo que a família de planos

$$\mathcal{F} := \{p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid p \text{ é plano e } p \geq u^+ \text{ em } B_3\}$$

é não vazia (pois $p_0 \in \mathcal{F}$). Observe, portanto, que \mathcal{F} é uma família não vazia de funções côncavas (ver Corolário 3.1) uniformemente limitadas por baixo em B_3 ($p \geq u^+ \geq 0$ em B_3 , $\forall p \in \mathcal{F}$). Assim, pela Proposição 3.1, segue que Γ é uma função côncava em B_3 . ■

A Proposição 3.4 abaixo mostra que, em cada ponto $x \in B_3$, o ínfimo da Definição 3.3 é “realizado” (ou “atingido”) para algum plano $p \geq u^+$ em B_3 . Isto implica que o superdiferencial $\partial\Gamma(x)$ é não vazio (veja Definição 1.15). Realmente, como $p(x) = \Gamma(x)$ e $p \geq u^+$ em B_3 , então, dado $y \in B_3$, tem-se $p(y) \geq \inf\{p^*(y) : p^* \text{ é plano, } p^* \geq u^+ \text{ em } B_3\} = \Gamma(y)$, de modo que $p \geq \Gamma$ em B_3 . Assim, se $p(z) = \nabla p \cdot z + \beta$ ($z \in \mathbb{R}^n$), onde β é uma constante real e ∇p é o vetor gradiente de p , então, para todo $y \in B_3$, tem-se $\Gamma(y) \leq p(y) = \nabla p \cdot y + \beta = \nabla p \cdot (y-x) + \nabla p \cdot x + \beta = \nabla p \cdot (y-x) + p(x) = \nabla p \cdot (y-x) + \Gamma(x)$, de modo que ∇p é um supergradiente de Γ em x .

Proposição 3.4 Seja Γ o envelope côncavo definido acima (Definição 3.3). Então, para todo ponto $x \in B_3$, existe um plano $p \geq u^+$ em B_3 , tal que $p(x) = \Gamma(x)$.

Demonstração:

Fixamos $x \in B_3$. Pela Definição 3.3, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um plano $p_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $p_k \geq u^+$ em B_3 , tal que

$$\Gamma(x) \leq p_k(x) < \Gamma(x) + \frac{1}{k}. \quad (3.8)$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k(x) = \Gamma(x). \quad (3.9)$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, como p_k é um plano, existem um vetor $a_k \in \mathbb{R}^n$ e um número real $\beta_k \in \mathbb{R}$, tais que

$$p_k(y) = a_k \cdot y + \beta_k \quad (y \in \mathbb{R}^n). \quad (3.10)$$

Vamos mostrar que a sequência de vetores $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ obtida acima é limitada em \mathbb{R}^n . Mais precisamente, mostraremos que

$$|a_k| < \frac{\Gamma(x) + 1}{3 - |x|}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Com efeito, dado $k \in \mathbb{N}$, se tivermos $a_k = 0$, então a relação (3.11) é imediatamente satisfeita. Logo, vamos considerar que $a_k \neq 0$.

A função real $\alpha \mapsto \left| x - \frac{a_k}{\alpha} \right|$ ($\alpha > 0$) é contínua em $(0, +\infty)$ e satisfaz as seguintes condições:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| x - \frac{a_k}{\alpha} \right| = +\infty, \quad (3.12)$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left| x - \frac{a_k}{\alpha} \right| = |x| < 3. \quad (3.13)$$

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um número real $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\left| x - \frac{a_k}{\alpha_0} \right| = 3. \quad (3.14)$$

Defina $z := x - \frac{a_k}{\alpha_0}$. Note que $z \in S_3(0)$ (a esfera de centro na origem e raio 3), pois $|z| = \left| x - \frac{a_k}{\alpha_0} \right| = 3$. Além disso, temos imediatamente que

$$x - z = \frac{a_k}{\alpha_0}. \quad (3.15)$$

Agora note que, como $p_k \geq u^+ \geq 0$ em B_3 e p_k é de classe C^∞ (pois p_k é um plano), segue que $p_k \geq 0$ em $\overline{B_3} = B_3 \cup S_3(0)$. Portanto, $p_k(z) \geq 0$. Usando (3.8), obtemos:

$$p_k(x) - p_k(z) < \Gamma(x) + \frac{1}{k}. \quad (3.16)$$

E, conseqüentemente,

$$a_k \cdot (x - z) < \Gamma(x) + \frac{1}{k}. \quad (3.17)$$

Portanto, usando (3.17) e (3.15), vem:

$$\begin{aligned} a_k \cdot \frac{a_k}{\alpha_0} = a_k \cdot (x - z) &< \Gamma(x) + \frac{1}{k} \\ \Downarrow \\ \frac{|a_k|^2}{\alpha_0} &< \Gamma(x) + \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Mas, pela desigualdade triangular, temos que $\frac{|a_k|}{\alpha_0} + |x| \geq \left| x - \frac{a_k}{\alpha_0} \right| = |z| = 3$ e, portanto,

$$\frac{|a_k|}{\alpha_0} \geq 3 - |x|. \quad (3.19)$$

Usando (3.18) e (3.19),

$$(3 - |x|)|a_k| \leq \frac{|a_k|^2}{\alpha_0} < \Gamma(x) + \frac{1}{k} \leq \Gamma(x) + 1.$$

Daí vem que $|a_k| < \frac{\Gamma(x)+1}{3-|x|}$, o que prova (3.11).

Como $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em \mathbb{R}^n , ela possui uma subsequência convergente (Bolzano–Weierstrass). Seja $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ uma tal subsequência, e seja a o seu limite; isto é,

$$a := \lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.20)$$

Como $\beta_k = p_k(x) - a_k \cdot x$, tem-se $|\beta_k| \leq |p_k(x)| + |a_k \cdot x| \leq |p_k(x)| + |a_k||x| \leq \Gamma(x) + \frac{1}{k} + \frac{\Gamma(x)+1}{3-|x|}|x| \leq \Gamma(x) + 1 + \frac{\Gamma(x)+1}{3-|x|}|x|$.

Logo, $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em \mathbb{R} , e $(\beta_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ também o é. Assim, (β_{k_j}) possui uma subsequência convergente, digamos $(\beta_{k_{j_m}})_{m \in \mathbb{N}}$. Defina:

$$\beta := \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_{k_{j_m}} \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

Escrevendo $\tilde{a}_m := a_{k_{j_m}}$ e $\tilde{\beta}_m := \beta_{k_{j_m}}$, temos que $a = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{a}_m$ e $\beta = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_m$.

Defina, para cada $m \in \mathbb{N}$, o plano $\tilde{p}_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\tilde{p}_m(y) := p_{k_{j_m}}(y) = \tilde{a}_m \cdot y + \tilde{\beta}_m \quad (y \in \mathbb{R}^n). \quad (3.22)$$

Então, por (3.9), temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{p}_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} p_{k_{j_m}}(x) = \Gamma(x). \quad (3.23)$$

Finalmente, defina o plano $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$p(y) := a \cdot y + \beta \quad (y \in \mathbb{R}^n). \quad (3.24)$$

Note que:

$$\Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{p}_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\tilde{a}_m \cdot x + \tilde{\beta}_m) = a \cdot x + \beta = p(x) \quad (3.25)$$

Como $\tilde{p}_m \geq u^+$ em B_3 , para todo $m \in \mathbb{N}$, usando (3.22) e fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos que $p \geq u^+$ em B_3 , o que conclui a demonstração! ■

Corolário 3.3 O envelope côncavo da Definição 3.3 pode ser escrito como:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \min\{p(x) : p \text{ é plano, } p \geq u^+ \text{ em } B_3\} & \text{em } B_3, \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_3. \end{cases}$$

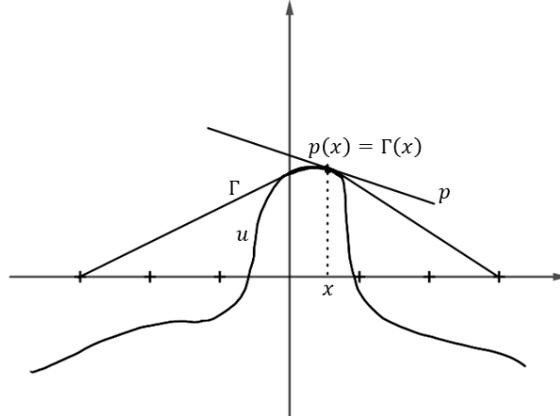


Figura 3.1: Plano p tocando Γ por cima no ponto x em B_3 .

Definição 3.4 Seja u limitada, com $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$. Seja Γ o envelope côncavo de u em B_3 (Definição 3.3 e Corolário 3.3). Definimos o conjunto de contato Σ entre u e Γ em B_3 da seguinte maneira:

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = \Gamma(x)\} \cap B_3. \quad (3.26)$$

Para simplificar a notação, escrevemos:

$$\{u = \Gamma\} := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = \Gamma(x)\}. \quad (3.27)$$

Desse modo, a expressão (3.26) pode ser reescrita como:

$$\Sigma := \{u = \Gamma\} \cap B_3. \quad (3.28)$$

Proposição 3.5 Se $u(x_0) > 0$ para algum ponto $x_0 \in B_1$, então $\Gamma > 0$ em B_3 e $\Sigma = \{u = \Gamma\} \cap B_1$, isto é, $\{u = \Gamma\} \cap B_3 = \{u = \Gamma\} \cap B_1$.

Demonstração:

Dado $x \in B_3$, se $x = x_0$, então $\Gamma(x) = \Gamma(x_0) \geq u^+(x_0) = u(x_0) > 0$. Se $x \neq x_0$, podemos escolher um ponto $x_1 \in B_3$, com $x_1 \neq x$, de modo que x pertença ao segmento que une x_0 a x_1 . Nesse caso, temos que $x = (1 - t)x_0 + tx_1$ para algum $t \in (0, 1)$. Pela concavidade de Γ em B_3 , obtemos:

$$\Gamma(x) = \Gamma((1 - t)x_0 + tx_1) \geq (1 - t)\Gamma(x_0) + t\Gamma(x_1) > 0,$$

pois t , $1 - t$ e $\Gamma(x_0)$ são positivos e $\Gamma(x_1) \geq 0$ (já que $\Gamma \geq u^+ \geq 0$ em B_3). Portanto, $\Gamma > 0$ em B_3 .

Para provar que $\{u = \Gamma\} \cap B_3 = \{u = \Gamma\} \cap B_1$, basta mostrar que $\{u = \Gamma\} \cap B_3 \subset \{u = \Gamma\} \cap B_1$. De fato, seja $x \in \{u = \Gamma\} \cap B_3$, isto é, $x \in \{u = \Gamma\}$ e $x \in B_3$; como $u(x) = \Gamma(x) > 0$ e $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$, segue que $x \in B_1$ e, assim, $x \in \{u = \Gamma\} \cap B_1$.

■

Proposição 3.6 Se $u \leq 0$ em \mathbb{R}^n , então $\Gamma = 0$ em \mathbb{R}^n .

Demonstração:

Se $u \leq 0$ em \mathbb{R}^n , então $u^+ = 0$ em \mathbb{R}^n (isto é, u^+ é – ela própria – um plano). Daí segue o resultado. ■

Proposição 3.7 Seja u uma função limitada, semicontínua superiormente, tal que $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ e $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1$. Então, existe um ponto $x_1 \in B_1$ tal que $\sup u = u(x_1) = \Gamma(x_1) = \sup \Gamma$.

Demonstração:

Como u é limitada e semicontínua superiormente no compacto $\overline{B_1} := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$, pela Proposição 2.6 temos que u atinge o seu valor máximo em algum ponto $x_1 \in \overline{B_1}$. Ou seja, existe um ponto $x_1 \in \overline{B_1}$ tal que $u(x_1) = \sup_{x \in \overline{B_1}} u(x)$. Como $u \leq 0$ fora da bola

B_1 e $u(x_1) = \sup_{x \in \overline{B_1}} u(x) \geq u(x_0) > 0$, segue que $x_1 \in B_1$. Assim, $u(x_1) \geq u(x)$ para

todo $x \in B_1$ e, também, $u(x_1) > 0 \geq u(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$. Portanto $u(x_1) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x)$.

Agora vamos mostrar que $\Gamma(x_1) = u(x_1)$. De fato, defina o plano $p_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$p_1(z) = u(x_1), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Então $p_1 \geq u^+$ em B_3 , pois, para todo $z \in B_3$, temos:

- $u(z) \leq 0 \Rightarrow u^+(z) = 0 < u(x_1) = p_1(z)$; e
- $u(z) > 0 \Rightarrow u^+(z) = u(z) \leq \sup u = u(x_1) = p_1(z)$.

Além disso, se p é um plano qualquer tal que $p \geq u^+$ em B_3 , então, em particular, $p(x_1) \geq u^+(x_1) = u(x_1) = p_1(x_1)$. Logo,

$$p_1(x_1) = \min\{p(x_1) : p \text{ é plano, } p \geq u^+ \text{ em } B_3\} = \Gamma(x_1).$$

Isto prova que $\Gamma(x_1) = u(x_1) = \sup u$. Finalmente, resta mostrar que $\Gamma(x_1) = \sup \Gamma$. De fato, para todo $x \in B_3$, tem-se

$$\Gamma(x) = \min\{p(x) : p \text{ é plano, } p \geq u^+ \text{ em } B_3\} \leq p_1(x) = u(x_1) = \Gamma(x_1).$$

E, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_3$, $\Gamma(x) = 0 < u(x_1) = \Gamma(x_1)$. Portanto, $\Gamma(x_1) = \sup \Gamma$, o que conclui a demonstração. ■

Proposição 3.8 Seja u uma função satisfazendo as mesmas hipóteses da proposição anterior (Proposição 3.7). Então, $\nabla \Gamma(B_3) = \nabla \Gamma(\Sigma)$.

Demonstração:

Como $B_3 \supset B_1 \supset \Sigma$, temos imediatamente que $\nabla \Gamma(B_3) \supset \nabla \Gamma(\Sigma)$. Agora vamos mostrar a inclusão contrária.

Fixamos $x \in B_3$. Seja $a \in \partial \Gamma(x)$. Devemos mostrar que $a \in \nabla \Gamma(\Sigma)$. Pela definição de supergradiente, o plano $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $p(z) = a \cdot (z - x) + \Gamma(x)$ satisfaz:

- $p(x) = \Gamma(x)$; e
- $p(z) \geq \Gamma(z) \geq u^+(z)$ para todo $z \in B_3$.

Note também que, como $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1$, então $p > 0$ em B_3 (pois $p \geq \Gamma$ e $\Gamma > 0$ em B_3 , pela Proposição 3.5).

Vamos considerar dois casos: (1) $x \in \Sigma$, ou (2) $x \notin \Sigma$.

Caso (1): $x \in \Sigma$.

Este caso é trivial, pois se $x \in \Sigma$, então $a \in \nabla\Gamma(\Sigma)$, e não há mais nada a mostrar.

Caso (2): $x \notin \Sigma$.

Neste caso, como $x \notin \Sigma$, temos que $p(x) = \Gamma(x) > u^+(x)$.

Afirmção: Existe $z_0 \in B_1$ tal que $p(z_0) = u^+(z_0) = u(z_0)$.

A prova da afirmação acima será dividida em dois subcasos.

• **p é constante:**

Logo, para todo $z \in \mathbb{R}^n$, tem-se $p(z) = p(x) = \Gamma(x) > u^+(x) \geq 0$.

Defina $C := p(x) > 0$, de modo que $p \equiv C > 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $p(z) > u^+(z)$ para todo $z \in B_3$. Então, $p(z) > u(z)$ para todo $z \in B_3$ e, conseqüentemente, $u(z) - p(z) < 0$ para todo $z \in \overline{B_3}$ (note que, se $z \in S_3(0)$, então $u(z) \leq 0$ e $p(z) = C > 0$, donde $u(z) - p(z) < 0$).

Como u é semicontínua superiormente e p é constante, temos que $u - p$ também é semicontínua superiormente. Logo, pela Proposição 2.6, existe um ponto $z_0 \in \overline{B_3}$ tal que

$$u(z_0) - p(z_0) = \sup_{z \in \overline{B_3}} (u(z) - p(z)) = \max_{z \in \overline{B_3}} (u(z) - p(z)) < 0.$$

Defina $C_1 := -(u(z_0) - p(z_0)) > 0$. Ou seja, $\max_{\overline{B_3}} (u - p) = u(z_0) - p(z_0) = -C_1$.

Daí, $u - p \leq -C_1$, donde $u \leq p - C_1 = C - C_1$ (em $\overline{B_3}$). Como $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1 \subset \overline{B_3}$, tem-se $C - C_1 \geq u(x_0) > 0$. Logo, para $y \in \overline{B_3}$, temos: se $u(y) > 0$, então $u^+(y) = u(y) \leq C - C_1 = p - C_1$; por outro lado, se $u(y) \leq 0$, então $u^+(y) = 0 < C - C_1 = p - C_1$. Portanto, $p - C_1 \geq u^+$ em $\overline{B_3}$ e, conseqüentemente, $p - C_1 \geq \Gamma$ em B_3 (pois $p - C_1$ também é um plano). Então:

$$\Gamma(x) = p(x) > p(x) - C_1 \geq \Gamma(x).$$

Absurdo! Logo, existe $z_0 \in B_3$ tal que $p(z_0) = u^+(z_0)$. Como $p \equiv C > 0$, tem-se $u^+(z_0) = p(z_0) = C > 0$ e, portanto, $u(z_0) > 0$. Daí, $p(z_0) = u(z_0)$, donde segue que $z_0 \in \Sigma \subset B_1$ (ou seja, z_0 é um ponto de contato). Com isso, fica demonstrada a afirmação quando p é constante.

• **p não é constante:**

Suponhamos, por absurdo, que não existe $z \in B_1$ tal que $p(z) = u^+(z) = u(z)$. Logo, $p(z) > u^+(z) \geq u(z)$ para todo $z \in B_1$. Assim, fazendo uma construção análoga à do subcaso anterior, vemos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$p(z) \geq u(z) + C_1, \quad \forall z \in \overline{B_1}.$$

Existe, também, uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$p(z) \geq C_2 > 0, \quad \forall z \in \overline{B_1},$$

pois p é contínua, $\overline{B_1}$ é compacto e p é positiva em $\overline{B_1}$. Seja $C_3 := \min\{C_1, C_2\} > 0$. Assim, dado $z \in \overline{B_1}$, temos que:

- $u(z) < 0 \Rightarrow u^+(z) = 0 \Rightarrow u^+(z) + C_3 = C_3 \leq C_2 \Rightarrow p(z) \geq u^+(z) + C_3$; e
- $u(z) \geq 0 \Rightarrow u^+(z) = u(z) \Rightarrow u^+(z) + C_3 = u(z) + C_3 \leq u(z) + C_1 \Rightarrow p(z) \geq u^+(z) + C_3$.

Portanto,

$$p(z) \geq u^+(z) + C_3, \quad \forall z \in \overline{B_1}.$$

Seja $C_4 := \min_{w \in \overline{B_3}} p(w) \geq 0$. Seja $w_0 \in \overline{B_3}$ tal que $p(w_0) = C_4$.

Observe que $w_0 \in S_3(0)$. Realmente, lembre que $p(z) = a \cdot z + \beta$ ($\forall z \in \mathbb{R}^n$), onde $\beta := \Gamma(x) - a \cdot x$; então, se w_0 fosse um ponto no *interior* da bola $\overline{B_3}$, existiria $t > 0$ (t suficientemente pequeno) tal que $w_0 - ta \in B_3$ (como p não é constante, $a \neq 0$ e $w_0 - ta \neq w_0$), e

$$p(w_0 - ta) = a \cdot (w_0 - ta) + \beta = (a \cdot w_0 + \beta) - t|a|^2 = p(w_0) - t|a|^2 < p(w_0).$$

Absurdo! Então realmente temos que $w_0 \in S_3(0)$.

Se $C_4 > 0$, então

$$p - \min\{C_3, C_4\} \geq 0 \text{ em } \overline{B_3}.$$

Daí, o plano \tilde{p} definido por $\tilde{p} := p - \min\{C_3, C_4\}$ satisfaz

$$\tilde{p}(z) = p(z) - \min\{C_3, C_4\} \geq p(z) - C_3 \geq u^+(z), \quad \forall z \in \overline{B_1}.$$

E também:

$$\tilde{p}(w_0) = p(w_0) - \min\{C_3, C_4\} \geq p(w_0) - C_4 = 0.$$

Portanto, $\tilde{p} \geq 0$ em $\overline{B_3}$ e $\tilde{p} \geq u^+ = 0$ em $\overline{B_3} \setminus \overline{B_1}$. Além disso, $\tilde{p} = p - \min\{C_3, C_4\} \geq p - C_3 \geq u^+$ em $\overline{B_1}$. Logo, $\tilde{p} \geq u^+$ em $\overline{B_3}$. Lembrando que $p(x) = \Gamma(x)$, temos que:

$$\Gamma(x) \leq \tilde{p}(x) = p(x) - \min\{C_3, C_4\} = \Gamma(x) - \min\{C_3, C_4\} < \Gamma(x).$$

Absurdo! Logo, devemos ter $C_4 = p(w_0) = 0$.

Como $p(z) = a \cdot z + \beta$ ($\forall z \in \mathbb{R}^n$) e $p(w_0) = 0$, tem-se $a \cdot w_0 + \beta = 0$, donde $\beta = -a \cdot w_0$. Daí, $p(z) = a \cdot z - a \cdot w_0 = a \cdot (z - w_0)$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$, e $p \geq 0$ em $\overline{B_3}$.

Afirmamos então que, para algum $\alpha > 0$, tem-se $a = -\alpha w_0$.

Primeiro mostremos que a e w_0 não podem ser ortogonais, isto é, $a \cdot w_0 \neq 0$. Com efeito, se fosse verdade que $a \cdot w_0 = 0$, então seguiria que

$$p(0) = a \cdot (0 - w_0) = -a \cdot w_0 = 0.$$

Ou seja, teríamos um ponto de mínimo para o plano p em $\overline{B_3}$ no interior de $\overline{B_3}$. Absurdo, pois já vimos que isso não pode ocorrer! Logo, a e w_0 não são ortogonais.

Agora mostremos que a e w_0 são linearmente dependentes (LD). De fato, suponha que a e w_0 não são LD. Denote por $\text{proj}_a(w_0)$ a *projeção* do vetor w_0 na direção de a . Noutras palavras, temos que

$$\text{proj}_a(w_0) = \frac{w_0 \cdot a}{a \cdot a} a = \frac{w_0 \cdot a}{|a|^2} a.$$

Note que $\text{proj}_a(w_0) \neq 0$, pois a e w_0 não são ortogonais. Além disso, podemos escrever

$$w_0 = \text{proj}_a(w_0) + v,$$

onde $v := w_0 - \text{proj}_a(w_0) \neq 0$, pois estamos supondo que a e w_0 não são LD. Agora, pelo Teorema de Pitágoras,

$$|\text{proj}_a(w_0)|^2 = |w_0|^2 - |v|^2 < |w_0|^2 = 3^2.$$

Assim, $|\text{proj}_a(w_0)| < 3$ e temos que $\text{proj}_a(w_0) \in B_3$. Note, agora, que

$$p(\text{proj}_a(w_0)) = p(w_0 - v) = a \cdot (w_0 - v - w_0) = -a \cdot v = 0,$$

pois a e v são ortogonais. Logo, $\text{proj}_a(w_0)$ é um ponto de mínimo do plano p e $\text{proj}_a(w_0)$ está no interior de $\overline{B_3}$. Absurdo! Portanto, a e w_0 são LD.

Seja, pois, $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $a = -\alpha w_0$. Note que $\alpha \neq 0$, pois a e w_0 são ambos não nulos. Logo, também podemos escrever $w_0 = (-1/\alpha)a$. Então:

$$0 = p(w_0) < p(0) = a \cdot (0 - w_0) = -a \cdot w_0 = -a \cdot (-1/\alpha)a = (1/\alpha)|a|^2,$$

donde segue que $1/\alpha > 0$, isto é, $\alpha > 0$. Assim $a = -\alpha w_0$, com $\alpha > 0$.

Resumindo, temos que $p(z) = -\alpha w_0 \cdot (z - w_0)$ ($\forall z \in \mathbb{R}^n$), e $p(z) \geq u^+(z) + C_3$ para todo $z \in \overline{B_1}$.

Seja $\alpha' \in \mathbb{R}$ tal que $(p(-\frac{w_0}{3}) - C_3)/12 < \alpha' < p(-\frac{w_0}{3})/12 = -\frac{\alpha w_0}{12} \cdot (-\frac{4w_0}{3}) = \alpha$ (lembre que $w_0 \cdot w_0 = |w_0|^2 = 3^2 = 9$). Como $p - C_3 \geq u^+ \geq 0$, então $0 < \alpha' < \alpha$. Observe também que:

$$0 \leq \frac{p(-\frac{w_0}{3}) - C_3}{12} = \frac{12\alpha - C_3}{12} = \alpha - \frac{C_3}{12}.$$

Logo $0 \leq 3\alpha - C_3/4 < 3\alpha' < 3\alpha$.

Defina o plano $p_{\alpha'} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$p_{\alpha'}(z) = -\alpha' w_0 \cdot (z - w_0), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Agora seja $z \in \overline{B_1}$. Então, podemos escrever:

$$z = \text{proj}_{w_0}(z) + v_z = \beta w_0 + v_z,$$

onde $v_z \cdot w_0 = 0$ e $|\beta| \leq 1/3$. Então

$$p(z) = -\alpha w_0 \cdot (z - w_0) = -\alpha w_0 \cdot ((\beta - 1)w_0 + v_z) = 9\alpha(1 - \beta).$$

De forma análoga, temos que $p_{\alpha'}(z) = 9\alpha'(1 - \beta)$, onde $\frac{2}{3} \leq 1 - \beta \leq \frac{4}{3}$, pois $|\beta| \leq \frac{1}{3}$. Daí, $p_{\alpha'}(z) < p(z)$ e $p_{\alpha'}(z) = 3(1 - \beta)3\alpha' > 3(1 - \beta)(3\alpha - C_3/4) = p(z) - \frac{3}{4}(1 - \beta)C_3 \geq p(z) - \frac{3}{4}C_3 = p(z) - C_3$.

Ou seja, $0 \leq u^+(z) \leq p(z) - C_3 \leq p_{\alpha'}(z) < p(z)$, para todo $z \in \overline{B_1}$. Então, como $p_{\alpha'} \geq 0$ em $\overline{B_3}$ (pois w_0 é ponto de mínimo de $p_{\alpha'}$ em $\overline{B_3}$), segue que $p_{\alpha'} \geq u^+$ em $\overline{B_3}$.

Portanto, $\Gamma(z) \leq p_{\alpha'}(z) < p(z)$ para todo $z \in B_3$. Em particular, como $x \in B_3$, tem-se

$$\Gamma(x) \leq p_{\alpha'}(x) < p(x) = \Gamma(x).$$

Absurdo! Concluimos, assim, a afirmação!

Logo, existe $z_0 \in B_1$ tal que $p(z_0) = u^+(z_0) = u(z_0) \leq \Gamma(z_0)$. Como $\Gamma \leq p$ em B_3 , então $\Gamma(z_0) = p(z_0) = u(z_0)$. Daí, segue que $a = \nabla p(z_0)$ é um supergradiente de Γ em z_0 , e $z_0 \in \Sigma$. Logo, $a \in \partial\Gamma(z_0) \subset \nabla\Gamma(\Sigma)$. ■

Proposição 3.9 Seja u uma função tal como na Proposição 3.7. Então, o conjunto de contato Σ é fechado, isto é, $\bar{\Sigma} = \Sigma$.

Demonstração:

Seja $x_0 \in \bar{\Sigma}$; isto é, existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em Σ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$. Vamos mostrar que $x_0 \in \Sigma$. Como Γ é contínua e $x_k \rightarrow x_0$, então $u(x_k) = \Gamma(x_k) \rightarrow \Gamma(x_0)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Então, como u é semicontínua superiormente, existe uma bola $B_r(x_0)$ tal que, para todo $x \in B_r(x_0)$, tem-se $u(x) < u(x_0) + \varepsilon$. E como $x_k \rightarrow x_0$, existe um número natural $k_r \in \mathbb{N}$ tal que: $k \geq k_r \Rightarrow x_k \in B_r(x_0)$. Assim, para todo $k \geq k_r$, tem-se $u(x_k) < u(x_0) + \varepsilon$. Logo, passando ao limite, concluímos que

$$\Gamma(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(x_k) \leq u(x_0) + \varepsilon.$$

Como $\Gamma(x_0) \leq u(x_0) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, segue que $\Gamma(x_0) \leq u(x_0)$. Por outro lado, $u(x_0) \leq u^+(x_0) \leq \Gamma(x_0)$. Daí, $u(x_0) = \Gamma(x_0)$ e $x_0 \in \Sigma$. Assim, Σ é fechado. ■

A proposição abaixo estabelece que todos os vetores v que pertencem a uma bola $B_{M/6}(0)$ são supergradientes de Γ em B_3 , em que $M := \sup \Gamma$. Note que, quanto maior for o supremo de Γ , maior será a quantidade de supergradientes de Γ em B_3 .

Proposição 3.10 Seja u uma função tal como na Proposição 3.7, seja Γ o seu envelope côncavo em B_3 , e defina $M := \sup \Gamma$. Suponha que $v \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $|v| < M/6$. Então, existe um ponto $z_0 \in B_3$ e existe um plano $p_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico toca o gráfico de Γ por cima em $(z_0, \Gamma(z_0))$, tal que $\nabla p_0(z_0) = v$. Noutras palavras, existe $z_0 \in B_3$ tal que o plano $p_0(x) := v \cdot (x - z_0) + \Gamma(z_0)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$) satisfaz

$$\begin{cases} p_0(z_0) = \Gamma(z_0); \\ p_0 \geq \Gamma \text{ em } B_3. \end{cases}$$

Demonstração:

Se $v = 0 \in \mathbb{R}^n$, basta tomar o plano constante $p_0 \equiv M = \sup \Gamma$ e o ponto $z_0 \in B_1 \subset B_3$ tal que $\Gamma(z_0) = \sup \Gamma = M$ (veja a Proposição 3.7). Assim, vamos supor que $v \neq 0$.

Dado $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 < |v| < M/6$, defina o plano $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$p(x) = v \cdot \left(x + \frac{3v}{|v|} \right) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Note que $p > 0$ em B_3 . Com efeito, se $z \in B_3$, podemos escrever:

$$z = \text{proj}_v(z) + w,$$

onde $v \cdot w = 0$ e $\text{proj}_v(z) = t \frac{v}{|v|}$, com $|t| < 3$. Logo,

$$p(z) = p\left(t \frac{v}{|v|} + w\right) = v \cdot \left(t \frac{v}{|v|} + w + \frac{3v}{|v|}\right) = (t+3)|v| > 0.$$

Assim, dado $z \in B_3$, temos:

$$\begin{aligned} 0 < p(z) &= |p(z)| = \left| v \cdot \left(z + \frac{3v}{|v|} \right) \right| \leq |v \cdot z| + |3|v|| \leq |v||z| + 3|v| < 3|v| + 3|v| \\ &= 6|v| < 6 \frac{M}{6} = M. \end{aligned}$$

Logo, $p(\bar{z}) < \Gamma(\bar{z})$ para algum $\bar{z} \in B_3$. Seja

$$\beta_0 := \sup_{z \in \overline{B_3}} (\Gamma(z) - p(z)) \geq \Gamma(\bar{z}) - p(\bar{z}) > 0.$$

Como Γ e p são funções contínuas, existe um ponto $z_0 \in \overline{B_3}$ tal que

$$\Gamma(z_0) - p(z_0) = \beta_0.$$

Além disso, pela definição de β_0 , temos que

$$\Gamma(z) - p(z) \leq \beta_0, \quad \forall z \in \overline{B_3}.$$

Agora defina o plano $p_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$p_0(x) = p(x) + \beta_0 \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Assim, $\Gamma(z) \leq p_0(z)$ para todo $z \in \overline{B_3}$, e $\Gamma(z_0) = p_0(z_0)$.

Note que $z_0 \notin S_3(0)$, pois, para todo $z \in S_3(0)$, tem-se $\Gamma(z) = 0 < \beta_0 \leq p(z) + \beta_0 = p_0(z)$ ($p \geq 0$ em $\overline{B_3}$). Logo, $z_0 \in B_3$.

Resumindo: $\Gamma \leq p_0$ em $\overline{B_3} \supset B_3$, $\Gamma(z_0) = p_0(z_0)$, $z_0 \in B_3$, e $\nabla p_0 = \nabla p = v$, o que conclui a demonstração. ■

4. CAPÍTULO 4 - UMA ESTIMATIVA ABP NÃO LOCAL

Os resultados provados neste capítulo permitem estabelecer um paralelismo com a teoria clássica de EDP's elípticas (veja [4]). Os Lemas 4.1 a 4.7 servem de base para a demonstração dos Teoremas 4.1 e 4.2, que são os principais resultados deste trabalho. Em especial, o Teorema 4.2 fornece uma estimativa ABP não local (Estimativa (4.40), página 65) para subsoluções $M^+u \geq -f$ em $B_1(0)$.

Começamos com um lema bastante simples, cujo objetivo é apenas auxiliar a demonstração do Lema 4.2.

Lema 4.1 Sejam B_1 e B_3 , respectivamente, as bolas do \mathbb{R}^n com centro na origem e raios 1 e 3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Logo:

(a) Se $x \in B_1$ e $x + y \notin B_3$, então $x - y \notin B_1$; e também:

(b) Se $x \in B_1$ e $x - y \notin B_3$, então $x + y \notin B_1$.

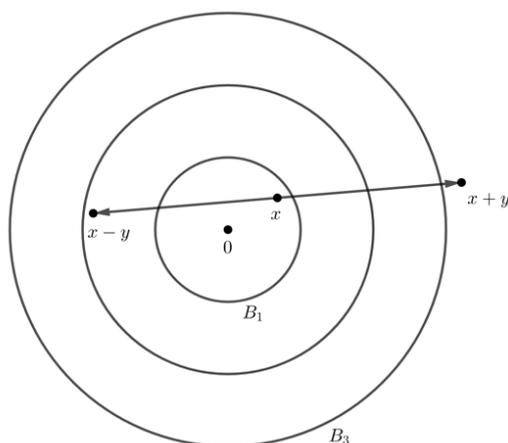


Figura 4.1: Ilustração do item (a).

Demonstração:

Vamos provar (a).

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $x \in B_1$ e $x + y \notin B_3$. Logo, $|x| < 1$, $|x + y| \geq 3$ e, pela desigualdade triangular, $|x + y| \leq |x| + |y|$. Portanto,

$$|y| \geq |x + y| - |x| \geq 3 - 1 = 2.$$

Ainda pela desigualdade triangular, tem-se

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|.$$

Logo,

$$|x - y| \geq |y| - |x| \geq 2 - 1 = 1.$$

Portanto, $x - y \notin B_1$.

Para provar (b), podemos aplicar (a), trocando y por $-y$. ■

Lema 4.2 Seja u limitada, com $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ e $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1$. Seja Γ o seu envelope côncavo em B_3 . Suponha que $M^+u(x) \geq -f(x)$ em B_1 no sentido de viscosidade, onde f é uma função contínua e $M^+ := M_{L_0}^+$ (ver Definição 1.6 e Observação 1.4 – Página 8).

Então $f(x) > 0$ para todo ponto $x \in \{u = \Gamma\} \cap B_1$. Mais detalhadamente, dado $x \in \{u = \Gamma\} \cap B_1$, tem-se $\delta(u, x, y) \leq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $\delta(u, x, y)^+ = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $\delta(u, x, y) < 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{1+|x|}(0)$ e

$$f(x) \geq (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda \delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy > 0.$$

Demonstração:

Fixe $x \in \{u = \Gamma\} \cap B_1$. Então $u(x) = \Gamma(x) = p(x)$, para algum plano $p \geq u^+ \geq u$ em B_3 (Proposição 3.4 e Corolário 3.3). Note, então, que o plano p toca u por cima no ponto x (e p é uma função de classe C^∞). Pela Proposição 2.5, $M^+u(x)$ está definido classicamente e

$$M^+u(x) = (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Lambda \delta^+ - \lambda \delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy. \quad (4.1)$$

Ainda pela Proposição 2.5, temos que $M^+u(x) \geq -f(x)$ no sentido usual da desigualdade.

Vamos mostrar que $\delta(u, x, y) \leq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. De fato, se $x + y$ e $x - y$ pertencem ambos à bola B_3 , segue que $\delta(u, x, y) = u(x + y) + u(x - y) - 2u(x) = u(x + y) + u(x - y) - 2p(x) \leq p(x + y) + p(x - y) - 2p(x)$, pois $u(x) = p(x)$ e $p \geq u$ em B_3 ; logo, $\delta(u, x, y) \leq p(x + y) + p(x - y) - 2p(x) = 0$, pois p é um plano (ver Corolário 3.2). Por outro lado, se $x + y \notin B_3$ ou $x - y \notin B_3$, então, pelo Lema 4.1, ambos não estão em B_1 (ou seja, $x + y \notin B_1$ e $x - y \notin B_1$); logo, $u(x + y) \leq 0$ e $u(x - y) \leq 0$ (porque $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$), donde vem que $\delta(u, x, y) = u(x + y) + u(x - y) - 2u(x) = u(x + y) + u(x - y) - 2\Gamma(x) \leq 0$.

Agora afirmamos que $\delta(u, x, y) < 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{1+|x|}(0)$ (isto é, sempre que $|y| \geq 1 + |x|$). De fato, se $|y| \geq 1 + |x|$, então $|x + y| \geq |y| - |x| \geq 1$ e $|x - y| \geq |y| - |x| \geq 1$, ou seja, $x + y$ e $x - y$ não pertencem à bola B_1 . Como $u \leq 0$ fora da bola B_1 , tem-se $u(x + y) + u(x - y) \leq 0$. Agora note que, por hipótese, $u(x_0) > 0$ para algum ponto $x_0 \in B_1$ e, conseqüentemente, $\Gamma > 0$ em B_3 (pela Proposição 3.5). Então, $u(x) = \Gamma(x) > 0$ e $\delta(u, x, y) = u(x + y) + u(x - y) - 2u(x) < 0$, como afirmamos acima.

Até aqui nós mostramos que $\delta < 0$ em um conjunto de medida positiva, pois, como vimos, $\delta < 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_{1+|x|}(0)$. Portanto, $\delta^- > 0$ em um conjunto de medida positiva. Por outro lado, como $\delta \leq 0$ em \mathbb{R}^n , temos que $\delta^+ = 0$ em \mathbb{R}^n . Logo,

$$\begin{aligned} -f(x) \leq M^+u(x) &= (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-\lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &\Downarrow \\ f(x) &\geq (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy > 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Fixemos a notação a ser empregada no Lema 4.3. Para cada u limitada, com $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$, seja $\Gamma = \Gamma(u)$ o seu envelope côncavo em B_3 (Definição 3.3), e seja $M^+ := M_{\mathcal{L}_0}^+$ (tal como no Lema 4.2 acima).

Definimos ainda $\rho_0 := 1/(8\sqrt{n})$ e, para todo inteiro k , com $k \geq 0$, $r_k := \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}/2^k = \rho_0 2^{-\frac{1}{2-\sigma}-k}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, consideramos a seguinte família de anéis (para $k = 0, 1, 2, \dots$):

$$R_k(x) := B_{r_k}(x) \setminus B_{r_{k+1}}(x).$$

Seja ω_n o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n , e denotemos por $|A|$ a medida de Lebesgue do subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$.

Note que se x é um ponto de contato, então $u(y) \leq u(x) + \nabla\Gamma(x) \cdot (y - x)$ para todo $y \in B_3$, onde $\nabla\Gamma(x) \in \partial\Gamma(x)$. Isso fornece uma estimativa superior para $u(y)$. A fim de obter algum controle inferior para $u(y)$, o próximo lema estabelece que, dado um parabolóide $Q(y) := u(x) + \nabla\Gamma(x) \cdot (y - x) - M|y - x|^2$ ($y \in \mathbb{R}^n$) que toca por baixo o plano $p(y) := u(x) + \nabla\Gamma(x) \cdot (y - x)$ ($y \in \mathbb{R}^n$), o conjunto dos pontos que estão abaixo de $Q(y)$ tem medida controlada. Quanto maior for M ($M > 0$), menor é a medida do conjunto de tais pontos. Ou seja, a maior parte dos pontos fica entre o parabolóide e o plano, se M for grande.

Lema 4.3 Seja $C_0 > \frac{1}{\omega_n(1-\frac{1}{2^n})\frac{\lambda}{192n}}$. Para toda u limitada, com $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ e $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1$, para toda função contínua f tal que $M^+u(x) \geq -f(x)$ em B_1 no sentido de viscosidade, para todo $x \in \{u = \Gamma\} \cap B_1$ e para todo $M > 0$, existe um inteiro $k \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} |R_k(x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : u(y) < u(x) + (y - x) \cdot \nabla\Gamma(x) - Mr_k^2\}| \\ \leq C_0 \frac{f(x)}{M} |R_k(x)|, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $\nabla\Gamma(x)$ representa um elemento qualquer do superdiferencial de Γ em x , que coincide com o seu gradiente, e também com o gradiente de u , quando estas funções forem diferenciáveis.

Demonstração:

Apresentamos uma prova por absurdo. Suponhamos que, para alguma contante $C_0 > \frac{1}{\omega_n(1-\frac{1}{2^n})\frac{\lambda}{192n}}$, a afirmação proposta é falsa. Ou seja:

Existe u limitada, com $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ e $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1$, existe f contínua satisfazendo $M^+u(x) \geq -f(x)$ em B_1 no sentido de viscosidade, existe algum ponto $x \in \{u = \Gamma\} \cap B_1$ e existe $M > 0$, tais que

$$\begin{aligned} |R_k(x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : u(y) < u(x) + (y-x) \cdot \nabla \Gamma(x) - Mr_k^2\}| \\ > C_0 \frac{f(x)}{M} |R_k(x)|, \end{aligned} \quad (4.3)$$

para todo inteiro $k \geq 0$.

Então, como $x \in \{u = \Gamma\} \cap B_1$, segue imediatamente do Lema 4.2 que $\delta(u, x, y) \leq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $\delta^+ = 0$ em \mathbb{R}^n , $\delta < 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_{1+|x|}(0)$ e

$$f(x) \geq (2 - \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda \delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy > 0. \quad (4.4)$$

Para cada inteiro $k \geq 0$, definimos

$$A_k := \{y \in \mathbb{R}^n : u(y) < u(x) + (y-x) \cdot \nabla \Gamma(x) - Mr_k^2\}. \quad (4.5)$$

Seja $A_k - x$ a translação do conjunto A_k pelo vetor $(-x) \in \mathbb{R}^n$. Ou seja,

$$A_k - x := \{z \in \mathbb{R}^n : z = y - x, \text{ para algum } y \in A_k\} \quad (4.6)$$

Logo,

$$A_k - x = \{z \in \mathbb{R}^n : u(x+z) < u(x) + z \cdot \nabla \Gamma(x) - Mr_k^2\}. \quad (4.7)$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq \int_{B_{r_0}(0)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R_k(0)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy. \quad (4.8)$$

Por outro lado, para cada inteiro $k \geq 0$, temos que

$$\int_{R_k(0)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq \int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy. \quad (4.9)$$

Agora, vamos obter uma estimativa para $\delta(u, x, y)^-$, com a qual podemos estimar a integral que aparece à direita na expressão (4.9).

Seja $y \in R_k(0) \cap (A_k - x)$. Logo, $r_{k+1} \leq |y| < r_k$ e, por (4.7),

$$u(x + y) < u(x) + y \cdot \nabla \Gamma(x) - Mr_k^2. \quad (4.10)$$

Por outro lado, como Γ é côncava em B_3 (Proposição 3.3), e como $\nabla \Gamma(x)$ é um supergradiente de Γ em x , tem-se $\Gamma(x - y) \leq \Gamma(x) + (-y) \cdot \nabla \Gamma(x)$. Daí,

$$u(x - y) \leq \Gamma(x - y) \leq \Gamma(x) + (-y) \cdot \nabla \Gamma(x) = u(x) - y \cdot \nabla \Gamma(x).$$

Então,

$$u(x - y) \leq u(x) - y \cdot \nabla \Gamma(x). \quad (4.11)$$

Somando (4.10) e (4.11), obtemos:

$$\begin{aligned} u(x + y) + u(x - y) &\leq 2u(x) - Mr_k^2 \\ &\Downarrow \\ u(x + y) + u(x - y) - 2u(x) &\leq -Mr_k^2 \\ &\Downarrow \\ \delta(u, x, y) &\leq -Mr_k^2 \\ &\Downarrow \\ -\delta(u, x, y) &\geq Mr_k^2 \\ &\Downarrow \\ \delta^- &\geq Mr_k^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Mostramos, assim, que $\delta(u, x, y)^- \geq Mr_k^2$ para todo $y \in R_k(0) \cap (A_k - x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy &\geq \int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{Mr_k^2}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &\geq \int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{Mr_k^2}{r_k^{n+\sigma}} dy, \end{aligned} \quad (4.13)$$

pois $|y| < r_k$ em $R_k(0) \cap (A_k - x)$. Consequentemente,

$$\int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq \int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} Mr_k^{2-n-\sigma} dy = Mr_k^{2-n-\sigma} \int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} 1 dy,$$

e, portanto,

$$\int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq Mr_k^{2-n-\sigma} |R_k(0) \cap (A_k - x)| = Mr_k^{2-n-\sigma} |R_k(x) \cap A_k|,$$

já que a Medida de Lebesgue é invariante por translação. Mas, por (4.3), temos que $|R_k(x) \cap A_k| > C_0 \frac{f(x)}{M} |R_k(x)|$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy &\geq M r_k^{2-n-\sigma} C_0 \frac{f(x)}{M} |R_k(x)| = C_0 f(x) r_k^{2-n-\sigma} |R_k(x)| \\ &= C_0 f(x) r_k^{2-n-\sigma} (\omega_n r_k^n - \omega_n r_{k+1}^n), \end{aligned}$$

e, como $r_{k+1} = r_k/2$, segue que

$$\int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq C_0 f(x) r_k^{2-n-\sigma} \omega_n \left(r_k^n - \frac{r_k^n}{2^n} \right) = C_0 \omega_n f(x) \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) r_k^{2-\sigma}.$$

Definindo $c := C_0 \omega_n \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) > 0$, vem:

$$\int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq c f(x) r_k^{2-\sigma}, \quad (4.14)$$

para todo inteiro $k \geq 0$. Agora, combinando (4.8), (4.9) e (4.14), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R_k(0)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R_k(0) \cap (A_k - x)} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \geq \sum_{k=0}^{\infty} c f(x) r_k^{2-\sigma} \\ &= c f(x) \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{2-\sigma} = c f(x) \frac{r_0^{2-\sigma}}{1 - \frac{1}{2^{2-\sigma}}} = c f(x) r_0^{2-\sigma} \frac{2^{2-\sigma}}{2^{2-\sigma} - 1} \\ &= c f(x) (\rho_0 2^{-1/(2-\sigma)})^{2-\sigma} \frac{2^{2-\sigma}}{2^{2-\sigma} - 1} = c f(x) \rho_0^{2-\sigma} 2^{-1} \frac{2^{2-\sigma}}{2^{2-\sigma} - 1}. \quad (4.15) \end{aligned}$$

E agora, usando (4.15) em (4.4),

$$\begin{aligned} f(x) &\geq (2 - \sigma) \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^-}{|y|^{n+\sigma}} dy \\ &\geq (2 - \sigma) \lambda c f(x) \rho_0^{2-\sigma} 2^{-1} \frac{2^{2-\sigma}}{2^{2-\sigma} - 1} \\ &= \lambda c f(x) \rho_0^{2-\sigma} 2^{1-\sigma} \frac{2 - \sigma}{2^{2-\sigma} - 1}. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Como $f(x) > 0$, podemos dividir ambos os membros de (4.16) por $f(x)$. Fazendo isso e definindo $\beta := 2 - \sigma > 0$, vem:

$$1 \geq \lambda c \rho_0^\beta 2^{1-\sigma} \frac{\beta}{2^\beta - 1}. \quad (4.17)$$

Observe que a função exponencial $\beta \mapsto 2^\beta$ é *convexa*. Portanto, fixando o ponto $(0, 2^0)$, e fazendo o ponto $(\beta, 2^\beta)$ variar, concluímos que as inclinações

$$\frac{2^\beta - 2^0}{\beta - 0} = \frac{2^\beta - 1}{\beta}$$

crecem à medida que β cresce. Logo, à medida que σ decresce ($\sigma \rightarrow 0^+$), temos que β cresce ($\beta \rightarrow 2^-$) e, conseqüentemente, $\frac{\beta}{2^\beta - 1}$ decresce. Assim,

$$\frac{\beta}{2^\beta - 1} \geq \frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{3}.$$

Logo, por (4.17), temos

$$1 \geq \lambda c \rho_0^\beta 2^{1-\sigma} \frac{2}{3} \geq \lambda c \rho_0^2 2^{-1} \frac{2}{3}, \quad (4.18)$$

pois $\rho_0 := 1/(8\sqrt{n}) < 1$. Finalmente, vem:

$$\begin{aligned} c &\leq \frac{1}{\lambda \rho_0^2 2^{-1} \frac{2}{3}} \\ &\Downarrow \\ C_0 \omega_n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) &\leq \frac{1}{\lambda \frac{1}{64n} \frac{1}{3}} \\ &\Downarrow \\ C_0 &\leq \frac{1}{\omega_n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{\lambda}{192n}}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

o que nos dá uma **contradição!** ■

Observação 4.1 Note que C_0 (Lema 4.3) é uma constante universal, que depende apenas de n e λ , mas não de σ (nem da função u ou de qualquer outro parâmetro).

Observação 4.2 A escolha particular do valor de ρ_0 ($\rho_0 = 1/(8\sqrt{n})$) é conveniente para as demonstrações de certas estimativas que servem de base para a desigualdade de Harnack.

Observação 4.3 Na demonstração do Lema 4.4 abaixo, vamos utilizar a noção de simetria em relação a um ponto. Assim, no que segue, vamos recordar alguns conceitos básicos sobre isometrias e, em especial, vamos provar uma proposição sobre simetria em relação a um ponto (Proposição 4.1). Se preferir, o leitor pode passar diretamente ao enunciado do Lema 4.4. Lembremos que uma *isometria* F em \mathbb{R}^n é uma bijeção $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $|F(x) - F(y)| = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Noutras palavras, uma isometria (em \mathbb{R}^n) é uma bijeção (de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n) que “preserva as distâncias” entre pontos. Se A e B são subconjuntos de \mathbb{R}^n , dizemos que A e B são isométricos quando existe uma isometria F que transforma A em B , ou seja, tal que

$F(A) = B$. Finalmente, observe que a medida de Lebesgue é invariante por isometrias; ou seja, se A e B são isométricos, então $|A| = |B|$.

Definição 4.1 Seja $y \in \mathbb{R}^n$ um ponto fixado. Denominamos simetria em relação a y a aplicação $S_y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$S_y(z) := 2y - z \quad (z \in \mathbb{R}^n) \quad (4.20)$$

Note que, para cada $z \in \mathbb{R}^n$, se escrevermos $z' := S_y(z) = 2y - z$, segue de imediato que $y = (z + z')/2$; ou seja, y é o ponto médio do segmento que une z a $z' = S_y(z)$.

Observação 4.4 É de verificação imediata que, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, S_y é uma isometria.

Proposição 4.1 Seja $r > 0$, e sejam $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ tais que $y_2 = S_y(y_1)$, isto é, $y = (y_1 + y_2)/2$. Então $S_y(B_r(y_1)) = B_r(y_2)$, ou seja, a simetria S_y transforma $B_r(y_1)$ em $B_r(y_2)$. Em particular, $B_r(y_1)$ e $B_r(y_2)$ são isométricas.

Demonstração:

Primeiro vamos mostrar que $S_y(B_r(y_1)) \subset B_r(y_2)$.

Dado $z_2 \in S_y(B_r(y_1))$, devemos provar que $z_2 \in B_r(y_2)$. Com efeito, temos que $z_2 = S_y(z_1) = 2y - z_1$, para algum $z_1 \in B_r(y_1)$. Como $z_1 \in B_r(y_1)$, tem-se $|z_1 - y_1| < r$, e, portanto, $|z_2 - y_2| = |S_y(z_2) - S_y(y_2)| = |z_1 - y_1| < r$. Assim, $z_2 \in B_r(y_2)$.

Agora devemos mostrar que $B_r(y_2) \subset S_y(B_r(y_1))$.

Seja $z' \in B_r(y_2)$. Queremos encontrar $z \in B_r(y_1)$ tal que $S_y(z) = z'$.

Defina $z := 2y - z'$. Primeiro note que $S_y(z) = z'$. Para ver que $z \in B_r(y_1)$, observe que $|z - y_1| = |S_y(z) - S_y(y_1)| = |z' - y_2| < r$. Assim, $z' \in S_y(B_r(y_1))$. ■

Lema 4.4 Seja Γ uma função côncava em $B_r(x)$. Seja $h > 0$. Suponha que, para algum número positivo $\varepsilon \leq \frac{1}{4} \frac{1}{2^n(2^n-1)}$, tem-se

$$\left| \{y \in \mathbb{R}^n : \Gamma(y) < \Gamma(x) + (y - x) \cdot \nabla \Gamma(x) - h\} \cap (B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)) \right| \leq \varepsilon |B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)|. \quad (4.21)$$

Então $\Gamma(y) \geq \Gamma(x) + (y - x) \cdot \nabla \Gamma(x) - h$, para todo $y \in B_{r/2}(x)$.

Demonstração:

Fixe $y \in B_{r/2}(x)$. A seguir, mostramos como obter $y_1, y_2 \in B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)$ tais que

- $y = (y_1 + y_2)/2$ (isto é, y_1 e y_2 são simétricos em relação a y), e

- $|y_1 - x| = |y_2 - x| = \frac{3}{4}r$ (ou seja, $y_1, y_2 \in S_{3r/4}(x)$).

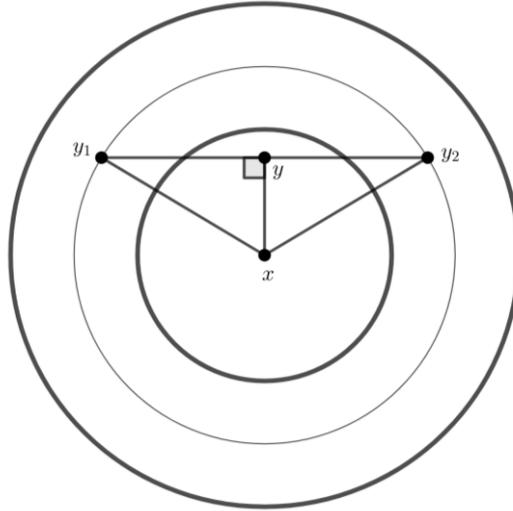


Figura 4.2: Os pontos y_1 e y_2

Se $y = x$, basta escolher um ponto y_1 sobre a esfera $S_{3r/4}(x)$ e, em seguida, tomar $y_2 := S_y(y_1) = 2y - y_1 = 2x - y_1$. Suponhamos, então, que $y \neq x$. Nesse caso, escolhamos um vetor unitário $w \in \mathbb{R}^n$ ($|w| = 1$), tal que w é ortogonal a $y - x$. Então, podemos definir $y_1 := y + \sqrt{(3r/4)^2 - |y - x|^2} w$. Subtraindo x de ambos os membros da igualdade, vem que $y_1 - x = (y - x) + \sqrt{(3r/4)^2 - |y - x|^2} w$. E como $(y - x)$ é ortogonal a $\sqrt{(3r/4)^2 - |y - x|^2} w$, o Teorema de Pitágoras (em \mathbb{R}^n) nos dá que

$$\begin{aligned} |y_1 - x|^2 &= |y - x|^2 + \left| \sqrt{(3r/4)^2 - |y - x|^2} w \right|^2 \\ &= |y - x|^2 + \left(\sqrt{(3r/4)^2 - |y - x|^2} \right)^2 |w|^2 = (3r/4)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|y_1 - x| = \frac{3}{4}r$. Agora basta definir $y_2 := S_y(y_1) = 2y - y_1 = 2y - [y + \sqrt{(3r/4)^2 - |y - x|^2} w] = y + \sqrt{(3r/4)^2 - |y - x|^2} (-w)$. Como $(-w)$ também é um vetor unitário ortogonal a $y - x$, raciocínio análogo mostra que $|y_2 - x| = \frac{3}{4}r$. Dessa forma, demonstramos a existência dos pontos y_1 e y_2 com as propriedades exigidas.

Agora, consideremos as bolas $B_{r/4}(y_1)$ e $B_{r/4}(y_2)$ (veja a Figura 4.3 a seguir).

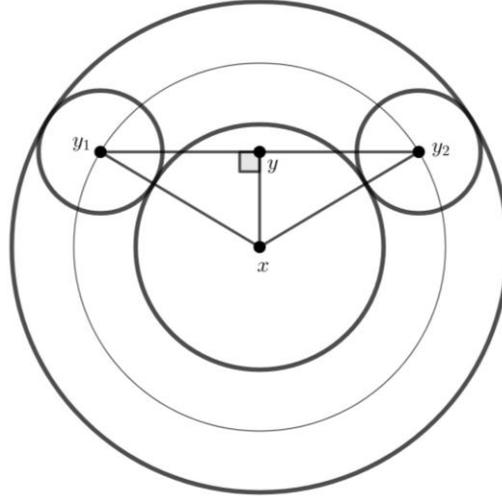


Figura 4.3: As bolas $B_{r/4}(y_1)$ e $B_{r/4}(y_2)$

Como y_1 e y_2 são simétricos em relação a y (por construção), segue da Proposição 4.1 que as bolas $B_{r/4}(y_1)$ e $B_{r/4}(y_2)$ são simétricas em relação a y . Além disso, ambas estão contidas no anel $B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)$. De fato, vamos mostrar que, se $\hat{y} \in S_{3r/4}(x)$, então $B_{r/4}(\hat{y}) \subset B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)$.

Dado $z \in B_{r/4}(\hat{y})$, tem-se $|z - \hat{y}| < r/4$; logo, $|z - x| \leq |z - \hat{y}| + |\hat{y} - x| < (r/4) + (3r/4) = r$, isto é, $z \in B_r(x)$. Por outro lado, $|\hat{y} - x| \leq |\hat{y} - z| + |z - x| = |z - \hat{y}| + |z - x|$, donde $|z - x| \geq |\hat{y} - x| - |z - \hat{y}| \geq (3r/4) - (r/4) = r/2$; assim, $z \notin B_{r/2}(x)$. Dessa forma, concluímos que $z \in B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)$ e, consequentemente, $B_{r/4}(\hat{y}) \subset B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)$.

Agora recordemos que, por hipótese, existe um número positivo ε , com $\varepsilon \leq \frac{1}{4} \frac{1}{2^n(2^n-1)}$, tal que vale a relação (4.21). A fim de simplificar a notação, defina:

$$A_h := \{\hat{y} \in \mathbb{R}^n : \Gamma(\hat{y}) < \Gamma(x) + (\hat{y} - x) \cdot \nabla \Gamma(x) - h\}.$$

Afirmção 1: Para todo $\hat{y} \in S_{3r/4}(x)$, tem-se $|B_{r/4}(\hat{y}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)| \geq \frac{3}{4} |B_{r/4}(\hat{y})|$ e $|B_{r/4}(\hat{y}) \cap A_h| \leq \frac{1}{4} |B_{r/4}(\hat{y})|$.

De fato, observe primeiro que

$$\frac{|B_{r/4}(\hat{y})|}{|B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)|} = \frac{\omega_n \left(\frac{r}{4}\right)^n}{\omega_n r^n - \omega_n \left(\frac{r}{2}\right)^n} = \frac{\frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{4^n} \frac{2^n}{2^n - 1} = \frac{1}{2^n(2^n - 1)}.$$

Agora veja que

$$\begin{aligned} |B_{r/4}(\hat{y}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)| &= |B_{r/4}(\hat{y})| - |B_{r/4}(\hat{y}) \cap A_h| \\ &\geq |B_{r/4}(\hat{y})| - \left| (B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)) \cap A_h \right|, \end{aligned}$$

pois $B_{r/4}(\hat{y}) \subset B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)$. Mas, pela relação (4.21), tem-se

$$\left| \left(B_r(x) \setminus B_{r/2}(x) \right) \cap A_h \right| \leq \varepsilon |B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)|.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |B_{r/4}(\hat{y}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)| &\geq |B_{r/4}(\hat{y})| - \varepsilon |B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)| \\ &\geq \frac{1}{2^n(2^n - 1)} |B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)| - \frac{1}{4} \frac{1}{2^n(2^n - 1)} |B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)| \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{2^n(2^n - 1)} |B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)| = \frac{3}{4} |B_{r/4}(\hat{y})|. \end{aligned}$$

Ou seja, $|B_{r/4}(\hat{y}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)| \geq \frac{3}{4} |B_{r/4}(\hat{y})|$. Daí, $|B_{r/4}(\hat{y}) \cap A_h| \leq \frac{1}{4} |B_{r/4}(\hat{y})|$. Concluimos, assim, a Afirmação 1.

Afirmação 2: Existe $z_1 \in B_{r/4}(y_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)$ tal que $S_y(z_1) \in (\mathbb{R}^n \setminus A_h)$.

Façamos a prova por absurdo. Suponha que, para todo $z_1 \in B_{r/4}(y_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)$, vale $S_y(z_1) \in A_h$. Logo, $S_y(B_{r/4}(y_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)) \subset B_{r/4}(y_2) \cap A_h$. Desse modo, como S_y é uma isometria (Observação 4.4), e como a medida de Lebesgue é invariante por isometrias, segue que

$$\begin{aligned} |B_{r/4}(y_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)| &= |S_y(B_{r/4}(y_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h))| \\ &\leq |B_{r/4}(y_2) \cap A_h|. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Agora, utilizando o resultado da Afirmação 1 na Estimativa (4.22), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} |B_{r/4}(y_1)| &\leq |B_{r/4}(y_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)| \leq |B_{r/4}(y_2) \cap A_h| \\ &\leq \frac{1}{4} |B_{r/4}(y_2)|. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como $|B_{r/4}(y_1)| = |B_{r/4}(y_2)|$, chegamos a: $\frac{3}{4} \leq \frac{1}{4}$. Absurdo! Concluimos, assim, a Afirmação 2.

Agora fixe um ponto z_1 tal como na Afirmação 2. Ou seja, $z_1 \in B_{r/4}(y_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_h)$ e $S_y(z_1) = 2y - z_1 \in (\mathbb{R}^n \setminus A_h)$. Defina $z_2 := S_y(z_1) \in B_{r/4}(y_2)$. Logo, os pontos z_1 e z_2 , assim obtidos, são tais que:

- $z_1 \in B_{r/4}(y_1)$, $z_2 \in B_{r/4}(y_2)$;
- $y = \frac{z_1 + z_2}{2}$;
- $\Gamma(z_1) \geq \Gamma(x) + (z_1 - x) \cdot \nabla \Gamma(x) - h$; e
- $\Gamma(z_2) \geq \Gamma(x) + (z_2 - x) \cdot \nabla \Gamma(x) - h$.

Finalmente, pela concavidade de Γ , tem-se

$$\begin{aligned}\Gamma(y) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2\right) = \Gamma\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)z_1 + \frac{1}{2}z_2\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)\Gamma(z_1) + \frac{1}{2}\Gamma(z_2) \\ &= \frac{\Gamma(z_1) + \Gamma(z_2)}{2} \geq \Gamma(x) + \left(\frac{z_1 + z_2}{2} - x\right) \cdot \nabla\Gamma(x) - h \\ &= \Gamma(x) + (y - x) \cdot \nabla\Gamma(x) - h. \blacksquare\end{aligned}$$

Lema 4.5 Para todo $\varepsilon_0 > 0$, existe uma constante C tal que, para toda função u , toda função f e todo ponto de contato x nas mesmas hipóteses do Lema 4.3, existe um número $r \in (0, \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}]$ tal que

$$\frac{|\{y \in B_r(x) \setminus B_{r/2}(x) : u(y) < u(x) + (y - x) \cdot \nabla\Gamma(x) - Cf(x)r^2\}|}{|B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)|} \leq \varepsilon_0. \quad (4.24)$$

Além disso, existe uma constante universal \tilde{C} tal que, para toda função u , toda função f e todo ponto de contato x nas hipóteses do Lema 4.3, existe $r \in (0, \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}]$ tal que

$$|\nabla\Gamma(B_{r/4}(x))| \leq \tilde{C}f(x)^n |B_{r/4}(x)|. \quad (4.25)$$

Lembre que $\rho_0 = 1/(8\sqrt{n})$.

Demonstração:

Seja $\varepsilon_0 > 0$ um número positivo dado.

De acordo com o Lema 4.3, para toda constante $M > 0$ (e também para toda u , toda f e todo ponto de contato x nas hipóteses do Lema), existe um inteiro $k \geq 0$, tal que

$$\begin{aligned}|\{y \in R_k(x) : u(y) < u(x) + (y - x) \cdot \nabla\Gamma(x) - Mr_k^2\}| \\ \leq C_0 \frac{f(x)}{M} |R_k(x)|,\end{aligned} \quad (4.26)$$

onde C_0 é uma constante universal (que depende apenas de n e λ).

Defina $C := C_0/\varepsilon_0$ e $M := Cf(x)$. Então, para toda u , toda f e todo ponto de contato x nas hipóteses do Lema 4.3, existe um inteiro $k \geq 0$, tal que

$$\begin{aligned}|\{y \in R_k(x) : u(y) < u(x) + (y - x) \cdot \nabla\Gamma(x) - Cf(x)r_k^2\}| \\ \leq C_0 \frac{f(x)}{Cf(x)} |R_k(x)|.\end{aligned} \quad (4.27)$$

Definindo $r := r_k \in (0, \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}]$, obtemos:

$$\frac{|\{y \in B_r(x) \setminus B_{r/2}(x) : u(y) < u(x) + (y-x) \cdot \nabla \Gamma(x) - C f(x) r^2\}|}{|B_r(x) \setminus B_{r/2}(x)|} \leq \varepsilon_0. \quad (4.28)$$

Com isso, provamos a relação (4.24). Agora vamos demonstrar (4.25).

Seja $\varepsilon := \frac{1}{4} \frac{1}{2^{n(2^n-1)}}$. Seja C_ε a constante correspondente, para a qual vale a relação (4.24).

Afirmção 1: Sejam u , f e x conforme o enunciado do Lema 4.3. Seja $r \in (0, \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}]$ tal que vale (4.24), com $C = C_\varepsilon$. Dado um supergradiente de Γ em x , $\nabla \Gamma(x)$, então, para todo $y \in B_{r/4}(x)$ e para todo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $|v| = 1$, tem-se

$$(\nabla \Gamma(x) - \nabla \Gamma(y)) \cdot v < 8C_\varepsilon f(x)r, \quad (4.29)$$

onde $\nabla \Gamma(y)$ é um supergradiente qualquer de Γ em y .

Para provar esta afirmação, considere $t > 0$ tal que $y + tv \in S_{3r/8}(x)$. A seguir, defina $w := y + tv$.

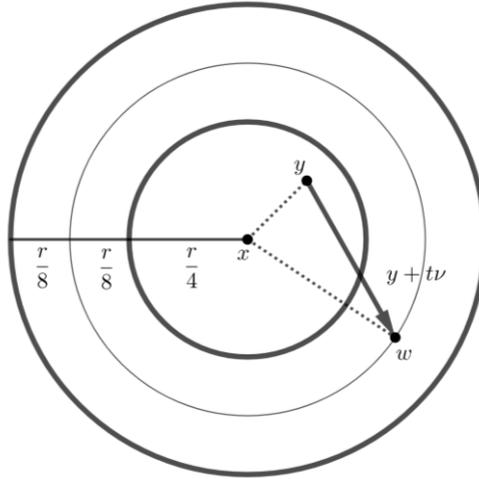


Figura 4.4: O ponto $w = y + tv$

Como $|w - x| = 3r/8$, temos que $t = |tv| = |(y + tv) - y| = |w - y| > (3r/8) - (r/4) = r/8$.

Seja $h := C_\varepsilon f(x)r^2 > 0$. Como $\varepsilon = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{n(2^n-1)}}$ e vale (4.24), podemos aplicar imediatamente o Lema 4.4. Logo, temos que $\Gamma(w) \geq \Gamma(x) + \nabla \Gamma(x) \cdot (w - x) - h$, pois $w \in S_{3r/8}(x) \subset B_{r/2}(x)$. Portanto,

$$\Gamma(w) - \Gamma(y) + \Gamma(y) - \Gamma(x) \geq \nabla \Gamma(x) \cdot (w - x) - h. \quad (4.30)$$

Note que, pela definição de supergradiente,

$$\Gamma(w) - \Gamma(y) \leq \nabla\Gamma(y) \cdot (w - y). \quad (4.31)$$

De (4.30) e (4.31), temos

$$\begin{aligned} \nabla\Gamma(y) \cdot (w - y) + \Gamma(y) - \Gamma(x) &\geq \nabla\Gamma(x) \cdot (w - x) - h \\ &\Downarrow \\ \Gamma(y) - \Gamma(x) &\geq \nabla\Gamma(x) \cdot (w - y) + \nabla\Gamma(x) \cdot (y - x) - \nabla\Gamma(y) \cdot (w - y) - h \\ &\Downarrow \\ \Gamma(y) - \Gamma(x) - \nabla\Gamma(x) \cdot (y - x) + h &\geq (\nabla\Gamma(x) - \nabla\Gamma(y)) \cdot (w - y). \end{aligned}$$

Novamente, pela definição de supergradiente, $\Gamma(y) - \Gamma(x) - \nabla\Gamma(x) \cdot (y - x) \leq 0$. E lembrando que $w - y = tv$ ($t > r/8$), obtemos:

$$h \geq \Gamma(y) - \Gamma(x) - \nabla\Gamma(x) \cdot (y - x) + h \geq t(\nabla\Gamma(x) - \nabla\Gamma(y)) \cdot v.$$

Assim,

$$(\nabla\Gamma(x) - \nabla\Gamma(y)) \cdot v \leq \frac{h}{t} < \frac{8}{r}h = \frac{8}{r}C_\varepsilon f(x)r^2 = 8C_\varepsilon f(x)r,$$

como queríamos!

Agora defina $\tilde{C} := 32^n C_\varepsilon^n$. Provemos que, para esta constante \tilde{C} , vale (4.25).

Sejam u e f funções e x um ponto de contato, satisfazendo as hipóteses do Lema 4.3. Seja $r \in (0, \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}]$ tal que vale (4.24), com $C = C_\varepsilon$.

Fixe $y \in B_{r/4}(x)$. Tomando $v := \frac{\nabla\Gamma(x) - \nabla\Gamma(y)}{|\nabla\Gamma(x) - \nabla\Gamma(y)|}$ (note que $|v| = 1$), podemos aplicar a afirmação acima, de modo que:

$$\begin{aligned} (\nabla\Gamma(x) - \nabla\Gamma(y)) \cdot v &< 8C_\varepsilon f(x)r \\ &\Downarrow \\ |\nabla\Gamma(x) - \nabla\Gamma(y)| &< 8C_\varepsilon f(x)r \\ &\Downarrow \\ \nabla\Gamma(y) &\in B_{8C_\varepsilon f(x)r}(\nabla\Gamma(x)). \end{aligned}$$

Assim, para todo $y \in B_{r/4}(x)$, tem-se $\nabla\Gamma(y) \in B_{8C_\varepsilon f(x)r}(\nabla\Gamma(x))$, qualquer que seja $\nabla\Gamma(y) \in \partial\Gamma(y)$. Então,

$$\nabla\Gamma(B_{r/4}(x)) \subset B_{8C_\varepsilon f(x)r}(\nabla\Gamma(x)).$$

Como consequência, temos que

$$\begin{aligned} \left| \nabla\Gamma(B_{r/4}(x)) \right| &\leq |B_{8C_\varepsilon f(x)r}(\nabla\Gamma(x))| = \omega_n (8C_\varepsilon f(x)r)^n = \omega_n 8^n C_\varepsilon^n f(x)^n r^n \\ &= 32^n C_\varepsilon^n f(x)^n \left[\omega_n \left(\frac{r}{4} \right)^n \right] = \tilde{C} f(x)^n |B_{r/4}(x)|. \end{aligned}$$

Note que $\tilde{C} := 32^n C_\varepsilon^n$ não depende u , f ou x (a constante ε foi definida apenas em função de n). Fica, portanto, demonstrada a relação (4.25). ■

Lema 4.6 Sejam u e f funções tais como no Lema 4.3. Seja $M > 0$. Seja Σ o conjunto de contato $\{u = \Gamma\} \cap B_1$. Para cada $x \in \Sigma$, seja $k(x) \geq 0$ o número inteiro cuja existência é garantida no Lema 4.3. Ainda, para cada $x \in \Sigma$, considere $r_{k(x)} \in (0, \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}]$, obtido conforme o Lema 4.3, e defina $r(x) := r_{k(x)}/4$. Considere a cobertura aberta de Σ , $\{B_{r(x)}(x)\}_{x \in \Sigma}$ (note que $0 < r(x) < 1$). Então, existe $X \subset \Sigma$, com $X = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots\}$ (ou $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$) enumerável, tal que:

(a) $\bigcup_{x_j \in X} B_{r(x_j)}(x_j) \supset \Sigma$; e

(b) Para cada $x \in \Sigma$, existe apenas uma quantidade finita de elementos de X , $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k} \in X$, para os quais

$$x \in B_{r(x_{j_i})}(x_{j_i}), \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Note que a condição (b) acima pode ser reformulada nos seguintes termos:

Cada ponto $x \in \Sigma$ pertence a apenas uma quantidade finita de bolas da cobertura $\{B_{r(x_j)}(x_j)\}_{x_j \in X}$.

Demonstração:

Primeiro, definimos $s_0 := \sup_{x \in \Sigma} r(x) \leq 1$. Note que $s_0 > 0$, pois cada $r(x)$ é positivo.

Sejam $x_1 \in \Sigma$ com $r(x_1) > s_0/2$, $B_1 := B_{r(x_1)}(x_1)$ e $\mathcal{F}_1 := \left\{ B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \mid B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \not\subset B_1 \right\}$. Temos duas possibilidades: $\mathcal{F}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{F}_1 \neq \emptyset$. Se $\mathcal{F}_1 = \emptyset$, então $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_1$, $\forall x \in \Sigma$. Daí, $\Sigma \subset \bigcup_{x \in \Sigma} B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_{r(x_1)}(x_1)$. Ou seja, uma bola cobre todo o Σ .

Se $\mathcal{F}_1 \neq \emptyset$, defina $s_1 := \sup \left\{ r(x) \mid B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_1 \right\} \leq s_0$.

Sejam $x_2 \in \Sigma$, tal que $B_{\frac{r(x_2)}{5}}(x_2) \in \mathcal{F}_1$ e $r(x_2) > s_1/2$, $B_2 := B_{r(x_2)}(x_2)$ e $\mathcal{F}_2 := \left\{ B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_1 \mid B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \not\subset B_2 \right\} \subset \mathcal{F}_1$. Temos que: $\mathcal{F}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{F}_2 \neq \emptyset$. Suponhamos $\mathcal{F}_2 = \emptyset$. Então, se $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_1$, tem-se $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_2$. Portanto:

- $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_1$ ou
- $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \not\subset B_1 \implies B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_1 \implies B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_2$.

Assim, $\Sigma \subset \bigcup_{x \in \Sigma} B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_1 \cup B_2 = B_{r(x_1)}(x_1) \cup B_{r(x_2)}(x_2)$. Ou seja, duas bolas cobrem todo o Σ . Se $\mathcal{F}_2 \neq \emptyset$, defina $s_2 := \sup \left\{ r(x) \mid B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_2 \right\} \leq s_1$ ($s_2 \leq s_1$, porque $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$).

Podemos definir $x_k, B_k, \mathcal{F}_k, s_k$ ($k \in \mathbb{N}$) de forma indutiva, como a seguir.

Sejam $x_k \in \Sigma$, tal que $B_{\frac{r(x_k)}{5}}(x_k) \in \mathcal{F}_{k-1}$ e $r(x_k) > s_{k-1}/2$, $B_k := B_{r(x_k)}(x_k)$ e $\mathcal{F}_k := \left\{ B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_{k-1} \mid B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \not\subset B_k \right\} \subset \mathcal{F}_{k-1}$. Temos que: $\mathcal{F}_k = \emptyset$ ou $\mathcal{F}_k \neq \emptyset$.

Suponhamos $\mathcal{F}_k = \emptyset$. Então, se $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_{k-1}$, tem-se $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_k$. Portanto:

- $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{k-1}$ ou
- $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \not\subset B_i, i = 1, \dots, k-1 \implies B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \dots \cap \mathcal{F}_{k-1} \implies B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_k$.

Assim, $\Sigma \subset \bigcup_{x \in \Sigma} B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$. Ou seja, k bolas cobrem todo o Σ .

Neste caso, o resultado do lema está provado, bastando tomar $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Se $\mathcal{F}_k \neq \emptyset$, defina $s_k := \sup \left\{ r(x) \mid B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_k \right\} \leq s_{k-1}$ ($s_k \leq s_{k-1}$, porque $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k-1}$).

Dessa forma, supondo $\mathcal{F}_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos uma coleção infinita enumerável de bolas $\{B_1, \dots, B_j, \dots\}$ construída conforme as regras acima. Neste caso, valem as seguintes afirmações:

Afirmção 1: $\lim_{k \rightarrow \infty} r(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$.

Para provar a Afirmação 1, começamos observando que $B_{\frac{r(x_i)}{5}}(x_i) \cap B_{\frac{r(x_j)}{5}}(x_j) = \emptyset$ se

$i \neq j$. De fato, sem perda de generalidade, suponhamos que $i < j$. Note que $B_{\frac{r(x_j)}{5}}(x_j) \in \mathcal{F}_{j-1} \subset \mathcal{F}_i$ (pois $j-1 \geq i$). Logo, $B_{\frac{r(x_j)}{5}}(x_j) \not\subset B_i = B_{r(x_i)}(x_i)$.

Suponhamos, por absurdo, que $B_{\frac{r(x_j)}{5}}(x_j) \cap B_{\frac{r(x_i)}{5}}(x_i) \neq \emptyset$. Existe, pois, um elemento

$z \in B_{\frac{r(x_j)}{5}}(x_j) \cap B_{\frac{r(x_i)}{5}}(x_i)$.

Se $w \in B_{\frac{r(x_j)}{5}}(x_j)$, então

$$|w - x_i| \leq |w - x_j| + |x_j - z| + |z - x_i| < \frac{r(x_j)}{5} + \frac{r(x_j)}{5} + \frac{r(x_i)}{5}.$$

Porém, como $r(x_j) \leq s_{j-1}$, temos:

$$|w - x_i| < \frac{2}{5}s_{j-1} + \frac{r(x_i)}{5}.$$

E como $r(x_i) > s_{i-1}/2 \geq s_{j-1}/2$, vem:

$$|w - x_i| < \frac{2}{5}(2r(x_i)) + \frac{r(x_i)}{5} = r(x_i).$$

Daí, $w \in B_{r(x_i)}(x_i)$. Portanto $B_{\frac{r(x_j)}{5}}(x_j) \subset B_{r(x_i)}(x_i)$, o que é absurdo!

Logo, $B_{\frac{r(x_i)}{5}}(x_i) \cap B_{\frac{r(x_j)}{5}}(x_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Note também que $B_{\frac{r(x_k)}{5}}(x_k) \subset B_2(0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pois $x_k \in \Sigma \subset B_1(0)$ e $r(x_k)/5 < r(x_k) < 1$. Então:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| B_{\frac{r(x_k)}{5}}(x_k) \right| = \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\frac{r(x_k)}{5}}(x_k) \right| \leq |B_2(0)| < +\infty.$$

Logo $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_n [r(x_k)/5]^n < +\infty$ e, portanto, $(r(x_k))^n \rightarrow 0$.

Ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} r(x_k) = 0$. E como $s_k < 2r(x_{k+1})$, segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$, o que completa a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2: $\Sigma \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$.

De fato, seja $x \in \Sigma$. Suponhamos, por absurdo, que $x \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Então $x \notin B_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \not\subset B_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ (pois o centro x não está em nenhuma das bolas B_k). Assim, pela definição das famílias \mathcal{F}_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), temos que $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_1, B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_2, B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_3, \dots$

Ou seja, $B_{\frac{r(x)}{5}}(x) \in \mathcal{F}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, pela definição de s_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), concluímos que $r(x) \leq s_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $r(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$. Absurdo! Daí, $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ e, consequentemente, $\Sigma \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$.

Afirmação 3: Dado $x \in \Sigma$, existe apenas uma quantidade finita de bolas B_k que contêm o ponto x .

De fato, seja $x \in \Sigma$. Suponhamos, por absurdo, que existe uma quantidade infinita de pontos $\{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}, \dots\}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$, para os quais

$$x \in B_{r(x_{k_m})}(x_{k_m}) = B_{k_m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Em particular, temos que $x \in B_{r(x_{k_1})}(x_{k_1})$. Além disso, como $r(x_{k_m}) \rightarrow 0$ (veja a Afirmação 1), existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ ($m_0 > 1$) tal que $2r(x_{k_{m_0}}) < r(x_{k_1}) - |x - x_{k_1}|$. Assim, $B_{r(x_{k_{m_0}})}(x_{k_{m_0}}) \subset B_{r(x_{k_1})}(x_{k_1})$, pois se $z \in B_{r(x_{k_{m_0}})}(x_{k_{m_0}})$, então

$$|z - x_{k_{m_0}}| < r(x_{k_{m_0}}) < \frac{r(x_{k_1}) - |x - x_{k_1}|}{2},$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} |z - x_{k_1}| &\leq |z - x_{k_{m_0}}| + |x_{k_{m_0}} - x| + |x - x_{k_1}| \\ &< \frac{r(x_{k_1}) - |x - x_{k_1}|}{2} + r(x_{k_{m_0}}) + |x - x_{k_1}| \\ &< \frac{r(x_{k_1}) - |x - x_{k_1}|}{2} + \frac{r(x_{k_1}) - |x - x_{k_1}|}{2} + |x - x_{k_1}| = r(x_{k_1}). \end{aligned}$$

Portanto, $z \in B_{r(x_{k_1})}(x_{k_1})$, provando que $B_{r(x_{k_{m_0}})}(x_{k_{m_0}}) \subset B_{r(x_{k_1})}(x_{k_1})$. Temos, assim, um absurdo, pois

$$\frac{B_{r(x_{k_{m_0}})}(x_{k_{m_0}})}{5} \not\subset B_{k_1} = B_{r(x_{k_1})}(x_{k_1}).$$

A relação acima decorre do fato de que $B_{r(x_{k_{m_0}})}(x_{k_{m_0}}) \not\subset B_k$ para todo $k < k_{m_0}$. E esta última afirmação, por sua vez, decorre das definições de x_k, \mathcal{F}_k ($k \in \mathbb{N}$) e do fato de que $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \dots \supset \mathcal{F}_{k-1} \supset \mathcal{F}_k \supset \dots$. Concluimos, pois, a prova da Afirmação 3, bem como a demonstração do Lema. ■

Lema 4.7 Seja $\{B_{r(x)}(x)\}_{x \in \Sigma}$ a cobertura aberta de Σ definida no Lema 4.6. Seja $\{B_{r(x_j)}(x_j)\}_{x_j \in X} \subset \{B_{r(x)}(x)\}_{x \in \Sigma}$ a subcobertura de Σ construída no Lema 4.6. Para simplificar a notação, definimos $B_j := B_{r(x_j)}(x_j)$ e $\tilde{B}_j := \frac{B_{r(x_j)}(x_j)}{5}$. Então

$$\left| \bigcup_{x \in \Sigma} B_{r(x)}(x) \right| \geq \left| \bigcup_j B_j \right| \geq \left| \bigcup_j \tilde{B}_j \right| \geq C(\sup u)^n,$$

onde $C > 0$ não depende da subsolução u do problema $M^+u = -f$ em B_1 .

Demonstração:

Pela Proposição 3.7, $\sup u = \sup \Gamma$. Defina $M := \sup \Gamma$. Então, pela Proposição 3.10, dado $v \in \mathbb{R}^n$ com $|v| < M/6$, existe um ponto $z_0 \in B_3$ tal que o plano p_0 definido por $p_0(x) := v \cdot (x - z_0) + \Gamma(z_0)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$) satisfaz

$$\begin{cases} p_0(z_0) = \Gamma(z_0); \\ p_0 \geq \Gamma \text{ em } B_3. \end{cases}$$

As condições acima implicam que $v = \nabla p_0(z_0)$ é um supergradiente de Γ em z_0 . Como $z_0 \in B_3$, temos que $v \in \nabla\Gamma(B_3)$. Noutras palavras, mostramos que:

$$v \in B_{\frac{M}{6}}(0) \implies v \in \nabla\Gamma(B_3).$$

Isto é,

$$B_{\frac{M}{6}}(0) \subset \nabla\Gamma(B_3).$$

Então,

$$|\nabla\Gamma(B_3)| \geq \left| B_{\frac{M}{6}}(0) \right| = \left(\frac{M}{6} \right)^n \omega_n,$$

onde ω_n representa o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n . Assim,

$$(\sup u)^n = (\sup \Gamma)^n = M^n \leq C_1 |\nabla\Gamma(B_3)|,$$

onde $C_1 = 6^n / \omega_n > 0$ depende apenas de n .

Pela Proposição 3.8, $\nabla\Gamma(B_3) = \nabla\Gamma(\Sigma)$. Mas, pelo Lema 4.6, $\Sigma \subset \bigcup_j B_j$. Logo,

$$\begin{aligned} \nabla\Gamma(B_3) = \nabla\Gamma(\Sigma) &\subset \bigcup_j \nabla\Gamma(B_j) \\ &\Downarrow \\ |\nabla\Gamma(B_3)| &\leq \left| \bigcup_j \nabla\Gamma(B_j) \right| \leq \sum_j |\nabla\Gamma(B_j)|. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Lembre que $B_j := B_{r(x_j)}(x_j)$ e $r(x_j) := r_{k(x_j)}/4$ (veja o enunciado do Lema 4.6). Então, pelo Lema 4.5 [Estimativa (4.25)], tem-se

$$|\nabla\Gamma(B_j)| \leq \tilde{C} f(x_j)^n |B_j|,$$

para todo j . Porém, como f é contínua (veja o enunciado do Lema 4.3), $\Sigma \subset B_1$ é limitado e fechado (Proposição 3.9), e $f > 0$ em Σ (Lema 4.2), segue que

$$0 < \sup_{\Sigma} f < \infty.$$

Logo,

$$|\nabla\Gamma(B_j)| \leq C_2 |B_j|, \quad \forall j, \quad (4.33)$$

onde $C_2 = \tilde{C} \left(\sup_{\Sigma} f \right)^n > 0$. Usando (4.33) e (4.32), obtemos:

$$|\nabla\Gamma(B_3)| \leq \sum_j C_2 |B_j| = C_2 \sum_j |B_j|. \quad (4.34)$$

Como $(\sup \Gamma)^n \leq C_1 |\nabla\Gamma(B_3)|$, tem-se

$$(\sup \Gamma)^n \leq C_3 \sum_j |B_j|. \quad (4.35)$$

onde $C_3 = C_1 C_2 > 0$.

Agora devemos recordar que, na prova do Lema 4.6, nós mostramos que $\tilde{B}_j \cap \tilde{B}_i = \emptyset$ para $i \neq j$ (veja a prova da Afirmação 1 na demonstração do Lema 4.6). A partir daí e de (4.35), segue que

$$(\sup \Gamma)^n \leq C_3 \sum_j |B_j| = C_3 \sum_j 5^n |\tilde{B}_j| = 5^n C_3 \sum_j |\tilde{B}_j| = 5^n C_3 \left| \bigcup_j \tilde{B}_j \right|.$$

Finalmente, como $\bigcup_j \tilde{B}_j \subset \bigcup_j B_j \subset \bigcup_{x \in \Sigma} B_{r(x)}(x)$ e $\sup \Gamma = \sup u$, concluímos que

$$\left| \bigcup_{x \in \Sigma} B_{r(x)}(x) \right| \geq \left| \bigcup_j B_j \right| \geq \left| \bigcup_j \tilde{B}_j \right| \geq C (\sup u)^n, \quad (4.36)$$

onde $C = 1/(5^n C_3) > 0$ não depende de u . ■

Observação 4.5 Note que, no Lema 4.7, é provado que $B_{M/6}(0) \subset \nabla\Gamma(B_3)$. Logo, pela Proposição 3.8, $B_{M/6}(0) \subset \nabla\Gamma(\Sigma)$. Assim,

$$\left(\frac{M}{6} \right)^n \omega_n = |B_{M/6}(0)| \leq |\nabla\Gamma(\Sigma)|.$$

Como dissemos na introdução do trabalho, o Teorema 4.1 abaixo fornece uma decomposição do tipo Calderón–Zygmund ([14]) na qual os “subcubos” cobrem todo o conjunto de contato Σ . Além disso, ele fornece estimativas para o Teorema 4.2.

Teorema 4.1 Existem constantes universais $C^* > 0$, $\hat{C} > 0$ e $\mu > 0$, que dependem apenas de n , Λ e λ (mas não de σ), para as quais vale o resultado:

Se u é limitada, $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$, $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1$, $M^+u(x) \geq -f(x)$ em B_1 no sentido de viscosidade e f é contínua, então existe uma família finita de cubos abertos Q_j ($j = 1, \dots, m$), com diâmetros d_j , satisfazendo o seguinte:

- (i) $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ para $i \neq j$.
- (ii) $\Sigma \subset \bigcup_{j=1}^m \bar{Q}_j$.
- (iii) $\Sigma \cap \bar{Q}_j \neq \emptyset$ para todo Q_j .
- (iv) $d_j \leq \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}$, onde $\rho_0 = 1/(8\sqrt{n})$.
- (v) $|\nabla \Gamma(\bar{Q}_j)| \leq C^* \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right)^n |Q_j|$.
- (vi) $\left| \left\{ y \in 17\sqrt{n} Q_j : u(y) \geq \Gamma(y) - \hat{C} \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right) d_j^2 \right\} \right| \geq \mu |Q_j|$.

Como sempre, Γ denota o envelope côncavo de u em $B_3 := B_3(0)$ e $\Sigma = \{u = \Gamma\} \cap B_1$ é o conjunto de contato.

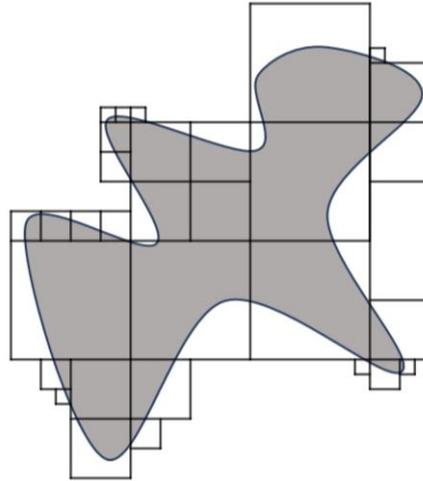


Figura 4.5: Família de cubos cobrindo Σ

Demonstração:

Fixamos u e f nas condições do teorema. Lembremos que $\Sigma \subset B_1$. Seja $l := (\rho_0 2^{-1/(2-\sigma)})/\sqrt{n}$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $kl > 1$, e considere o cubo $(-kl, kl)^n \supset (-1, 1)^n \supset B_1 \supset \Sigma$. Note que o cubo $(-kl, kl)^n$ está dividido em $(2k)^n$ cubos menores cujas arestas têm comprimentos iguais a l . Cada um desses cubos menores possui diâmetro igual a $l\sqrt{n} = \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}$. A seguir, nós descartamos todos aqueles cubos cujos fechos não intersectam Σ .

Observe que, neste ponto, obtemos uma família de cubos satisfazendo os itens (i), (ii), (iii) e (iv) acima. Sempre que um cubo da família não satisfaz (v) e (vi), nós o dividimos em 2^n cubos menores, bastando – para isso – dividir cada uma de suas arestas ao meio; os cubos resultantes dessa decomposição têm diâmetro igual a $1/2$ do diâmetro do cubo que foi dividido; nós então descartamos todos aqueles cubos cujos fechos não intersectam Σ . Os cubos resultantes substituem o cubo da decomposição inicial que não satisfazia (v) e (vi).

Obtemos, assim, uma família de cubos que continua satisfazendo os itens (i), (ii), (iii) e (iv) acima. Agora, nosso problema é provar que, em algum momento, todos os cubos da família irão satisfazer (v) e (vi), de modo que este processo de decomposição deve terminar após um número finito de etapas.

Suponhamos, por absurdo, que o processo descrito acima não termina em um número finito de etapas; ou seja, em cada etapa do processo, há sempre algum cubo que não satisfaz (v) e (vi). Logo, nós obtemos uma sequência infinita de *cubos encaixados* que não satisfazem (v) e (vi). O diâmetro de cada cubo dessa sequência é igual à metade do diâmetro do cubo anterior. Portanto, os fechos de todos esses cubos devem se intersectar em um único ponto x_0 . Como cada um dos fechos desses cubos intersecta o conjunto de contato Σ , temos que existe uma sequência de pontos $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em Σ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x_0$. Como Σ é um conjunto fechado (Proposição 3.9), segue que $x_0 \in \Sigma$, ou seja, $u(x_0) = \Gamma(x_0)$ e $x_0 \in B_1$.

No Lema 4.5, nós provamos que existe uma constante universal \tilde{C} tal que, para toda função u , toda função f e todo ponto de contato x nas hipóteses do Lema 4.3, existe $r \in (0, \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}]$ tal que

$$|\nabla \Gamma(B_{r/4}(x))| \leq \tilde{C} f(x)^n |B_{r/4}(x)|.$$

Então, como $x_0 \in \Sigma$, existe um raio r , com $0 < r \leq \rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}$, tal que

$$|\nabla \Gamma(B_{r/4}(x_0))| \leq \tilde{C} f(x_0)^n |B_{r/4}(x_0)|. \quad (4.37)$$

Seja $\varepsilon := \frac{1}{4} \frac{1}{2^n(2^n-1)} > 0$. Conforme a demonstração do Lema 4.5 (veja a prova da Afirmação 1 e a definição de \tilde{C} na demonstração do Lema 4.5), o mesmo raio r que satisfaz a condição (4.37) acima também satisfaz:

$$\frac{|\{y \in B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0) : u(y) < u(x_0) + (y - x_0) \cdot \nabla \Gamma(x_0) - C f(x_0) r^2\}|}{|B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0)|} \leq \varepsilon, \quad (4.38)$$

para alguma constante $C > 0$, que depende de ε . Note que, como ε foi definido de uma maneira específica em termos de n , então a constante C em (4.38) depende

somente de n e λ (para maiores detalhes, veja a demonstração da relação (4.24) do Lema 4.5 e o enunciado do Lema 4.3).

Cada cubo Q_j da sequência infinita construída acima possui um diâmetro d_j , tal que $d_{j+1} = d_j/2$ ($\forall j \in \mathbb{N}$) e, em particular, $d_j \rightarrow 0$. Note ainda que, na primeira etapa do processo, nós construímos cubos de diâmetros exatamente iguais a $\rho_0 2^{-1/(2-\sigma)} \geq r$. Logo, existe algum cubo Q_j da sequência, com $x_0 \in \bar{Q}_j$, tal que $\frac{r}{8} \leq d_j < \frac{r}{4}$.

Para todo $y \in \bar{Q}_j$, tem-se $|y - x_0| \leq d_j < \frac{r}{4}$; portanto, $\bar{Q}_j \subset B_{r/4}(x_0)$. Além disso, vamos mostrar que $B_r(x_0) \subset 17\sqrt{n} Q_j$, onde $17\sqrt{n} Q_j$ denota o cubo que tem o mesmo centro de Q_j e diâmetro igual a $17\sqrt{n} d_j$.

De fato, seja $y \in B_r(x_0)$. Então $|y - x_0| < r \leq 8d_j$, pois $d_j \geq r/8$. Seja $z_j \in \mathbb{R}^n$ o centro do cubo Q_j .

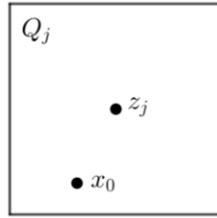


Figura 4.6: O centro de Q_j

Logo $|x_0 - z_j| \leq \frac{d_j}{2}$. Assim, $|y - z_j| \leq |y - x_0| + |x_0 - z_j| < 8d_j + \frac{d_j}{2} = \frac{17}{2}d_j$. Ou seja, $y \in B_{\frac{17}{2}d_j}(z_j)$. Mas a bola $B_{\frac{17}{2}d_j}(z_j)$ está contida no cubo de centro z_j e diâmetro $17\sqrt{n} d_j$, o qual denotamos por $17\sqrt{n} Q_j$. Portanto $y \in 17\sqrt{n} Q_j$, e isso mostra que $B_r(x_0) \subset 17\sqrt{n} Q_j$. Assim, $\bar{Q}_j \subset B_{r/4}(x_0) \subset B_r(x_0) \subset 17\sqrt{n} Q_j$.

Agora note que o $17\sqrt{n} Q_j \subset B_2(0)$. Com efeito, se $y \in 17\sqrt{n} Q_j$, então $|y - x_0| \leq 17\sqrt{n} d_j$. E como $d_j < r/4$, temos que $|y| \leq |y - x_0| + |x_0| < (17\sqrt{n})\frac{r}{4} + 1 \leq (17\sqrt{n})\frac{\rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}}{4} + 1 = \left(\frac{17\sqrt{n}}{4}\right)\left(\frac{1}{8\sqrt{n}}\right)\left(\frac{1}{2^{1/(2-\sigma)}}\right) + 1 < \left(\frac{17\sqrt{n}}{4}\right)\left(\frac{1}{8\sqrt{n}}\right)\left(\frac{1}{2^{1/(2-0)}}\right) + 1 = \left(\frac{17}{32}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 < 1 + 1 = 2$. Ou seja, $y \in B_2(0)$.

Denotando por $\nabla\Gamma(x_0)$ um supergradiente de Γ em x_0 , e lembrando que $\Gamma(x_0) = u(x_0)$, temos que $\Gamma(y) \leq u(x_0) + (y - x_0) \cdot \nabla\Gamma(x_0)$, para todo $y \in B_2(0) \supset 17\sqrt{n} Q_j \supset B_r(x_0)$. Vamos agora mostrar a seguinte inclusão:

$$\begin{aligned} & \{y \in 17\sqrt{n} Q_j : u(y) \geq u(x_0) + (y - x_0) \cdot \nabla\Gamma(x_0) - Cf(x_0)r^2\} \\ & \subset \left\{y \in 17\sqrt{n} Q_j : u(y) \geq \Gamma(y) - \hat{C} \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right) d_j^2 \right\}, \end{aligned}$$

onde $\hat{C} := 64C > 0$ e C é a constante que aparece em (4.38).

De fato, se $y \in 17\sqrt{n} Q_j$ e vale $u(y) \geq u(x_0) + (y - x_0) \cdot \nabla\Gamma(x_0) - Cf(x_0)r^2$, então $u(y) \geq \Gamma(y) - Cf(x_0)r^2 \geq \Gamma(y) - C \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right) r^2$. E como $r/8 \leq d_j$, temos que $r^2 \leq 64d_j^2$. Logo $u(y) \geq \Gamma(y) - C \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right) (64d_j^2) = \Gamma(y) - \hat{C} \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right) d_j^2$, o que prova a inclusão acima.

Consequentemente, usando a relação (4.38) e que $\bar{Q}_j \subset B_{r/4}(x_0)$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ y \in 17\sqrt{n} Q_j : u(y) \geq \Gamma(y) - \hat{C} \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right) d_j^2 \right\} \right| \\ & \geq \left| \{ y \in 17\sqrt{n} Q_j : u(y) \geq u(x_0) + (y - x_0) \cdot \nabla\Gamma(x_0) - Cf(x_0)r^2 \} \right| \\ & \geq \left| \{ y \in B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0) : u(y) \geq u(x_0) + (y - x_0) \cdot \nabla\Gamma(x_0) - Cf(x_0)r^2 \} \right| \\ & \geq (1 - \varepsilon) |B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0)| = \mu |B_{r/4}(x_0)| \geq \mu |Q_j|. \end{aligned}$$

A constante $\mu > 0$ acima pode ser calculada explicitamente. De fato, temos que $|B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0)| = r^n \omega_n - \left(\frac{r}{2}\right)^n \omega_n = \left[1 - \frac{1}{2^n}\right] r^n \omega_n$, e $|B_{r/4}(x_0)| = \left(\frac{r}{4}\right)^n \omega_n = \frac{1}{4^n} r^n \omega_n$. Portanto $|B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0)| / |B_{r/4}(x_0)| = 4^n \left[1 - \frac{1}{2^n}\right]$ e, equivalentemente, $|B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0)| = 4^n \left[1 - \frac{1}{2^n}\right] |B_{r/4}(x_0)|$. Definindo $\mu := (1 - \varepsilon) 4^n \left[1 - \frac{1}{2^n}\right]$, obtemos a relação mostrada acima. Note que μ depende apenas de n (pois definimos ε exclusivamente em termos de n).

Portanto, para o cubo Q_j , o item (vi) é válido. Além disso, como $\bar{Q}_j \subset B_{r/4}(x_0)$, então $\nabla\Gamma(\bar{Q}_j) \subset \nabla\Gamma(B_{r/4}(x_0))$. Daí, usando (4.37), tem-se $|\nabla\Gamma(\bar{Q}_j)| \leq |\nabla\Gamma(B_{r/4}(x_0))| \leq \tilde{C} f(x_0)^n |B_{r/4}(x_0)| \leq \tilde{C} \left(\max_{\bar{Q}_j} f \right)^n |B_{r/4}(x_0)|$. Agora note que o cubo Q_j (de centro z_j e diâmetro d_j) contém a bola $B_{d_j/2\sqrt{n}}(z_j)$ (veja a Figura 4.7).

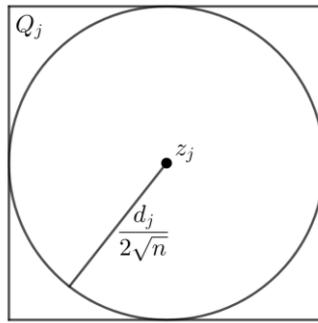


Figura 4.7: $Q_j \supset B_{d_j/2\sqrt{n}}(z_j)$

E, como $r/8 \leq d_j$, tem-se $d_j/2\sqrt{n} \geq r/16\sqrt{n}$. Logo $Q_j \supset B_{d_j/2\sqrt{n}}(z_j) \supset B_{r/16\sqrt{n}}(z_j)$ e, dessa forma, $|Q_j| \geq |B_{r/16\sqrt{n}}(z_j)| = |B_{r/4}(z_j)| \left(\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)^n$. Então, definindo $C_1 := \left(\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)^n$, tem-se $|Q_j| \geq C_1 |B_{r/4}(z_j)| = C_1 |B_{r/4}(x_0)|$. Portanto, $|\nabla\Gamma(\bar{Q}_j)| \leq \tilde{C} \left(\max_{\bar{Q}_j} f\right)^n |B_{r/4}(x_0)| \leq (\tilde{C}/C_1) \left(\max_{\bar{Q}_j} f\right)^n |Q_j| = C^* \left(\max_{\bar{Q}_j} f\right)^n |Q_j|$, onde $C^* := \tilde{C}/C_1$. Assim, o item (v) também é válido para o cubo Q_j . Como Q_j satisfaz (v) e (vi) simultaneamente, chegamos a uma contradição! Então o processo deve terminar em um número finito de etapas. ■

Finalmente, estamos em condições de obter a estimativa ABP não local para equações integro-diferenciais totalmente não lineares (Estimativa (4.40) abaixo).

Teorema 4.2 Seja u limitada, semicontínua superiormente, tal que $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ e $u(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in B_1$. Suponha que $M^+u(x) \geq -f(x)$ em B_1 no sentido de viscosidade, com f contínua. Seja $\{Q_j\}_{j=1}^m$ a família de cubos obtida no Teorema 4.1. Então valem:

$$|\nabla\Gamma(\Sigma)| \leq C^* \sum_{j=1}^m \left(\max_{\bar{Q}_j} f^+\right)^n |Q_j|, \quad (4.39)$$

e

$$\sup u \leq C^{**} \left(\sum_{j=1}^m \left(\max_{\bar{Q}_j} f^+\right)^n |Q_j|\right)^{1/n}, \quad (4.40)$$

onde $C^* > 0$ é a mesma constante universal do Teorema 4.1 e $C^{**} = (6^n C^*/\omega_n)^{1/n}$.

Demonstração:

Pelo Teorema 4.1, somando as medidas $|\nabla\Gamma(\bar{Q}_j)|$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, obtemos

$$\sum_{j=1}^m |\nabla\Gamma(\bar{Q}_j)| \leq C^* \sum_{j=1}^m \left(\max_{\bar{Q}_j} f\right)^n |Q_j|.$$

Como o conjunto de contato Σ está contido na união $\cup_{j=1}^m \bar{Q}_j$, tem-se

$$|\nabla\Gamma(\Sigma)| \leq C^* \sum_{j=1}^m \left(\max_{\bar{Q}_j} f^+\right)^n |Q_j|,$$

o que prova (4.39). Para provar (4.40), lembre que, pela Observação 4.5, tem-se

$$\left(\frac{M}{6}\right)^n \omega_n = |B_{M/6}(0)| \leq |\nabla\Gamma(\Sigma)|,$$

onde $M = \sup \Gamma = \sup u$. Logo,

$$\frac{(\sup u)^n}{6^n} \omega_n \leq |\nabla\Gamma(\Sigma)| \leq C^* \sum_{j=1}^m \left(\max_{\bar{Q}_j} f^+\right)^n |Q_j|$$

↓

$$(\sup u)^n \leq \frac{6^n C^*}{\omega_n} \sum_{j=1}^m \left(\max_{\bar{Q}_j} f^+\right)^n |Q_j|$$

↓

$$\sup u \leq C^{**} \left(\sum_{j=1}^m \left(\max_{\bar{Q}_j} f^+\right)^n |Q_j| \right)^{1/n},$$

onde $C^{**} := (6^n C^* / \omega_n)^{1/n}$. ■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observemos que, pelo Teorema 4.1, os diâmetros d_j dos cubos $\{Q_j\}_{j=1}^m$ são limitados superiormente pela constante $\rho_0 2^{-1/(2-\sigma)}$, e a constante C^* não depende de σ . Porém, note que o conjunto de contato Σ depende de σ ($\Sigma = \Sigma(\sigma)$), pois o operador M^+ depende de σ . Assim, fazendo $\sigma \rightarrow 2$, os diâmetros dos cubos ficam cada vez menores (tendem a zero), e a soma de Riemann que aparece à direita na Estimativa (4.39) (Teorema 4.2) pode convergir a uma integral, com o que obtemos, de forma não rigorosa, a seguinte estimativa:

$$|\nabla\Gamma(\Sigma)| \leq C^* \int_{\Sigma} f^+(x)^n dx.$$

O conjunto Σ que aparece acima, de forma intuitiva, deve ser o limite dos conjuntos de contato $\Sigma(\sigma)$. Vemos, assim, que existe uma relação entre a estimativa ABP que demonstramos no Teorema 4.2 e a estimativa ABP clássica no caso local (citada na introdução deste trabalho).

As estimativas obtidas nos Teoremas 4.1 e 4.2 permitem demonstrar uma versão da desigualdade de Harnack para equações integro-diferenciais. Isso está feito em [5], Seção 11. Na mesma referência, Caffarelli e Silvestre utilizam as estimativas mencionadas para provar o Teorema 10.4, com o qual são demonstrados os resultados de regularidade. Assim, por exemplo, na Seção 13 ([5]), prova-se um resultado de regularidade $C^{1,\alpha}$ para as soluções de uma classe geral de equações integro-diferenciais totalmente não lineares.

REFERÊNCIAS

- [1] Awatif, S. Équations d'Hamilton-Jacobi du premier ordre avec termes intégrodifférentiels. I. Unicité des solutions de viscosité. *Comm. Partial Differential Equations* **16** (1991), no. 6-7, 1057–1074.
- [2] Barles, G.; Imbert, C. Second-order elliptic integro-differential equations: viscosity solutions' theory revisited. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **25** (2008), no. 3, 567–585.
- [3] Bourbaki, N. *General topology*. Chapters 1–4, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [4] Caffarelli, L. A.; Cabré, X. *Fully nonlinear elliptic equations*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 43. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1995.
- [5] Caffarelli, L. A.; Silvestre, L. *Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 62 (2009), 597–638.
- [6] Carl, S.; Le, V. K.; Motreanu, D. *Nonsmooth variational problems and their inequalities: comparison principles and applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Science + Business Media, LLC, 2023.
- [7] Di Nezza, E.; Palatucci, G.; Valdinoci, E. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bulletin des Sciences Mathématiques, **136** (2012), 521–573.
- [8] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 19. American Mathematical Society, 1998.
- [9] Jensen, R. The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **101** (1988), no. 1, 1–27.
- [10] Lima, E. L. *Curso de análise*. Vol 2, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2018.
- [11] Real, X. F.; Oton, X. R. *Integro-differential elliptic equations*, Birkhäuser, 2024.
- [12] Sato, K. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, 1999.
- [13] Soner, H. M. Optimal control with state-space constraint. II. *SIAM J. Control Optim.* **24** (1986), no. 6, 1110–1122.
- [14] Stein, E. M. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.