

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Diferenciabilidade em todo ponto de soluções de
viscosidade do ∞ -laplaciano**

Dissertação de Mestrado

André Rickes

Porto Alegre, 16 de agosto de 2024.

Dissertação submetida por André Rickes¹ como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Diego Marcon Farias (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Dr. Disson Soares dos Prazeres (PROMat-UFS)

Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPGMat-UFRGS)

Dra. Patrícia Lisandra Guidolin (PPGMat-UFRGS)

Data da Apresentação: 16/08/2024.

¹Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Agradecimentos

Apesar de já ter dito isto diversas vezes, os últimos dois anos foram os que mais me enriqueceram intelectualmente e emocionalmente. Tanta coisa aconteceu nesse período de mestrado que não consigo enumerar todos os desafios que passei, todas as mudanças que encarei e todos os André's que saíram delas. Sinto que a única coisa que se mostrou constante em minha vida foi o apoio imensurável que recebo das pessoas à minha volta, e a elas sou muito grato.

A começar pela minha mãe, Nara Regina, que sempre me apoiou e me deu o maior incentivo para seguir meus sonhos. Não importa o quão longe eu esteja, sei que sempre estarás olhando por mim. Sempre vou me lembrar das vezes que me falastes que umas das melhores felicidades que eu poderia te dar era continuar seguindo os meus sonhos, e essa recordação nunca vai parar de tirar um sorriso do meu rosto. Agradeço ao meu pai, Sérgio André, por todo apoio e incentivo aos estudos. Tenho plena consciência de que tudo o que mais queres para mim é que eu continue fazendo o que me faz feliz, e que fazes o possível para que eu continue nesse caminho.

Agradeço ao meu irmão, Samuel, por não medir esforços em garantir o meu bem-estar e o meu conforto, e por ser um grande exemplo pra mim. Agradeço às minhas irmãs, meus tios e ao restante da minha família por me desejarem todo o sucesso e nada além de coisas boas para mim. Em especial, agradeço à minha prima, Sabrina, por todas as conversas sobre nossas vidas acadêmicas.

Agradeço ao meu orientador, Diego, pelos dois anos de muitos aprendizados. Obrigado por me cativar já nas minhas primeiras aulas na UFRGS, e por me introduzir ao mundo da pesquisa em equações diferenciais. Admiro demais a sua forma de ensinar. Agradeço também ao meu orientador durante os meus anos na UFPEL, Maurício, por todo o incentivo na carreira de pesquisador em Matemática, e por, tal como o Diego, me assegurar de que tenho o potencial de ser cada vez mais. É um privilégio ouvir isso de professores como vocês dois.

Agradeço aos membros da banca examinadora, pelo carinho depositado em minha dissertação, pela disponibilidade em avaliar este trabalho e pelas importantes correções e sugestões realizadas.

Agradeço ao pessoal da salinha do PPG pela companhia durante esse período tão turbulento. Foi ao conversar e passar tanto tempo junto a todos vocês que tive certeza de que

estava no lugar certo. Com vocês, me senti acolhido, conectado a um grupo de pessoas com tanto amor pela Matemática quanto eu, e tenham certeza de que, independentemente de onde eu for, levarei um pedacinho de cada um de vocês comigo. Em especial, agradeço imensamente à Luíza e à Vitória pelo companheirismo durante esse período. É por perceber o quanto posso impactar na vida de vocês, e o quanto posso ser impactado em retorno, que me sinto completo. Obrigado por todos os rolês, todas as sessões de terapia na salinha, todos os choros e, principalmente, por nunca saírem do meu lado, independente do que aconteça.

Agradeço ao meu amigo Pedro, por me reencontrar nas minhas primeiras semanas na UFRGS e não hesitar em me incluir em seu grupo de amigos. Obrigado pelos momentos que passamos juntos e por ser essa pessoa tão camarada. E aos de sempre, Josiane e Leandro, obrigado por estarem ao meu lado, me ajudarem em todos os momentos que precisei e por me assegurarem de que nunca estou sozinho.

Por fim, serei eternamente grato aos professores e servidores da UFRGS e da UFPEL, por garantirem o ensino gratuito e de muita qualidade a todos seus estudantes.

No momento em que escrevo esses parágrafos de agradecimentos, em julho de 2024, me encontro prestes a realizar a mudança mais desafiadora da minha vida, em busca do doutorado e, principalmente, de me tornar alguém melhor. Sei que esse período será muito importante para a minha formação, e mal posso esperar para encontrar o André de daqui a cinco anos.

Vou longe, sabendo que tenho o apoio de todas as pessoas que citei acima. Isso faz toda a diferença.

*If you're on fire,
You should just keep burning.*

— LANA DEL REY

Resumo

Nesta dissertação, provamos o resultado de regularidade que afirma que soluções de viscosidade da equação homogênea $-\Delta_\infty u = 0$ em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis em todo ponto de Ω , onde Δ_∞ é o operador ∞ -laplaciano, uma extensão natural do operador p -laplaciano e definido por

$$\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} = \langle \nabla^2 u \nabla u, \nabla u \rangle.$$

Para isso, definimos as soluções de viscosidade de $-\Delta_\infty u = 0$ e apresentamos as equivalências entre uma função ser ∞ -harmônica, satisfazer comparação com cones e ser solução do problema de extensão de Lipschitz em Ω , além de propriedades dessas funções. Ademais, é feita uma análise dos *blow-ups* de funções ∞ -harmônicas, onde é mostrado que esses são lineares e que todos os *blow-ups* em um mesmo ponto são iguais, implicando no resultado de regularidade desejado.

Utilizamos como referência diversos materiais que estabelecem resultados de existência, unicidade e regularidade para funções ∞ -harmônicas, os quais utilizam propriedades previamente estabelecidas em outros artigos e são devidamente citados ao longo do texto. Referenciamos também os artigos precursores no estudo do ∞ -laplaciano e elaboramos essa dissertação de modo que contenha o enunciado e prova de todos os resultados utilizados relativos a funções ∞ -harmônicas.

Abstract

In the present dissertation, we prove the regularity result asserting that viscosity solutions of the homogeneous equation $-\Delta_\infty u = 0$ in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ are differentiable at every point of Ω , where Δ_∞ is the ∞ -Laplacian operator, a natural extension of the p -Laplacian operator, and defined by

$$\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} = \langle \nabla^2 u \nabla u, \nabla u \rangle.$$

For that purpose, we define the viscosity solutions of $-\Delta_\infty u = 0$ and present the equivalences between a function being ∞ -harmonic, satisfying comparison with cones and being a solution to the Lipschitz extension problem in Ω , besides other properties of those functions. Furthermore, we analyze the blow ups of ∞ -harmonic functions, demonstrating that they are linear and that all the blow-up limits at the same point are equal, thereby implying the desired regularity result.

We use as reference numerous articles establishing results on existence, uniqueness, and regularity for ∞ -harmonic functions, which in turn rely on properties established in other papers and are properly cited throughout the text. We also reference the pioneering articles in the study of the ∞ -Laplacian and we develop this dissertation to state and prove every result used regarding ∞ -harmonic functions.

Notação

Conjuntos de \mathbb{R}^n

- (i) Nesta dissertação, trabalhamos com conjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e, em geral, denotamos $x = (x_1, \dots, x_n)$ um elemento genérico de Ω . Além disso, denotamos por $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a norma euclidiana em \mathbb{R}^n , definida por

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- (ii) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $(x, y) = \{x + t(y - x) : t \in (0, 1)\}$ e $[x, y] = \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$ os segmentos aberto e fechado que ligam x e y , respectivamente.
- (iii) Para cada $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos a bola centrada em x_0 de raio r como o conjunto

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}.$$

Também definimos a esfera centrada em x_0 de raio r como o conjunto

$$S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}.$$

- (iv) Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos a fronteira de Ω , denotada por $\partial\Omega$, como o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que, para todo $r > 0$, vale

$$B_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset$$

- (v) Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, definimos a distância de x a Ω por

$$\text{dist}(x, \Omega) = \inf_y \|\Omega\| \|x - y\|.$$

- (vi) Se o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, denotamos por $\Omega \subset\subset \Omega$ para dizer que Ω está compactamente contido em Ω , ou seja, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, $\overline{\Omega}$ é compacto em \mathbb{R}^n e $\overline{\Omega} \subset \Omega$.

(vii) Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio se for um conjunto aberto e conexo em \mathbb{R}^n .

Espaços de funções

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos

(i) $C(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é contínua em } \Omega\}$, munido da norma $\|\cdot\|_{C(\Omega)} : C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Se, além disso, Ω for aberto, definimos

(ii) $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável em } \Omega\}$.

(iii) $C^{1,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C^1(\Omega) : \|u\|_{C(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\|u_{x_i}\|_{C(\Omega)} + \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x=y}} \frac{|u_{x_i}(x) - u_{x_i}(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \right) < \infty \right\}$.

(iv) $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^1(\Omega) : u \in C^{1,\alpha}(\Omega), \text{ para todo } \Omega' \subset\subset \Omega\}$.

(v) $C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é infinitamente continuamente diferenciável em } \Omega\}$.

(vi) $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é Lebesgue-mensurável em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$, para cada $p \in (1, +\infty)$, munido da norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(vii) $L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é Lebesgue-mensurável em } \Omega \text{ e } \text{ess sup}_x |u(x)| < \infty \right\}$, munido da norma $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_x |u(x)|.$$

(viii) $AML(\Omega)$ como o conjunto das funções absolutamente minimizantes Lipschitz em Ω , como na Definição 2.1.8.

Diferenciação

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u \in C^1(\Omega)$, definimos

(i) o vetor gradiente de u em $x \in \Omega$ como

$$\nabla u(x) = (u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x)).$$

E, para $u \in C^2(\Omega)$, definimos

(ii) a matriz hessiana de u em $x \in \Omega$ como

$$\nabla^2 u(x) = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1}(x) & \cdots & u_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1}(x) & \cdots & u_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

(iii) o operador p -laplaciano como o operador Δ_p dado por

$$\Delta_p u(x) = \operatorname{div} \left(\|\nabla u(x)\|^{p-2} \nabla u(x) \right),$$

para $1 < p < \infty$. No caso especial em que $p = 2$, chamamos o operador 2-laplaciano apenas de laplaciano, e o denotamos por Δ .

(iv) o operador ∞ -laplaciano como o operador Δ_∞ dado por

$$\Delta_\infty u(x) = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}(x) u_{x_j}(x) u_{x_i x_j}(x).$$

Sumário

Introdução	1
1 Resultados preliminares	3
1.1 Semicontinuidade e continuidade uniforme	3
1.2 Convergência uniforme de sequência de funções	6
1.2.1 Diferenciabilidade	8
1.3 Equações diferenciais parciais elípticas quasilineares	10
1.4 Desigualdade de Young	12
2 Problema de extensão de Lipschitz	14
2.1 Funções Lipschitz contínuas	14
2.2 Comparação com cones	22
2.3 Existência de soluções do problema de extensão de Lipschitz	31
2.4 Unicidade de soluções do problema de extensão de Lipschitz	37
3 O ∞-laplaciano	43
3.1 Motivação para a definição do operador	43
3.1.1 Ideia variacional	44
3.2 Soluções de viscosidade	45
3.3 Cálculo envolvendo funções ∞ -harmônicas	55
3.4 <i>Blow-up</i> de funções ∞ -harmônicas	61
4 Diferenciabilidade em todo ponto de funções ∞-harmônicas	70
4.1 Diferenciabilidade através de unicidade de <i>blow-ups</i>	70
Conclusão	91
Referências Bibliográficas	92

Introdução

Na teoria do cálculo de variações, um importante problema é o de minimizar o funcional $I_p : C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_p(u) = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

sendo minimizantes desse funcional soluções fracas de $-\Delta_p u = 0$, onde Δ_p é o operador p -laplaciano. O foco desta dissertação é explorar o caso limite dessa equação, para $p = \infty$, primeiramente apresentado por Gunnar Aronsson em 1967 [4]. Em seu artigo, o autor relaciona soluções de $-\Delta_\infty u = 0$, onde Δ_∞ é chamado de operador ∞ -laplaciano e definido por

$$\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j},$$

com minimizantes do funcional $I_\infty : C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\infty(u) = \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_x \|\nabla u(x)\|,$$

sendo esse um limite natural para o funcional I_p quando $p \rightarrow \infty$ através de subsequências.

Além disso, Aronsson relaciona funções ∞ -harmônicas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com funções absolutamente minimizantes da seminorma de Lipschitz nesse domínio, sendo essas soluções canônicas do problema de estender uma função Lipschitz em $\partial\Omega$ para todo o domínio Ω preservando sua constante de Lipschitz. Segundo Aronsson, Crandall e Juutinen em seu artigo de 2004 [5], esse problema aparece em aplicações em diversas áreas, como na cartografia, mais especificamente em modelos de interpolação de elevação digital, nos quais se conhece dados de elevação de um terreno apenas em certas curvas de nível, e é necessário utilizar interpolação para se obter um modelo tridimensional da elevação desse terreno [1].

Outra aplicação das soluções do ∞ -laplaciano bastante encontrada na literatura está na descrição do comportamento de partículas em jogos estocásticos de cabo de guerra (*tug-of-war*) em grafos [19].

Existem materiais que realizam uma revisão geral a respeito do operador ∞ -laplaciano, como [2] e [6], e um de nossos objetivos é fazer uma síntese dos principais resultados acerca

de funções ∞ -harmônicas, incluindo existência e unicidade, desigualdades de valor médio e de Harnack, e, principalmente, resultados sobre a sua regularidade. Esse último tópico mostra-se um tema enigmático em recentes trabalhos encontrados na literatura, de modo que a maior regularidade encontrada até o momento é a de diferenciabilidade em todos os pontos do domínio para funções ∞ -harmônicas em conjuntos abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ quaisquer [12]. Apesar de já sabermos que, para funções ∞ -harmônicas em um subconjunto aberto Ω do plano, vale a regularidade $C^1(\Omega)$ [21] e $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$ [11], ainda não existem artigos que mostrem essa regularidade em espaços de dimensão $n \geq 3$.

Apresentados os resultados fundamentais de funções ∞ -harmônicas, o objetivo final desta dissertação é provar o seguinte resultado de Evans e Smart:

Teorema de Evans-Smart [12]. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u \in C(\overline{\Omega})$ uma solução de viscosidade de*

$$-\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Então, u é diferenciável em cada ponto $x \in \Omega$.

Para isso, estruturamos o restante deste trabalho da seguinte forma.

No primeiro capítulo, apresentamos alguns resultados preliminares necessários no decorrer deste trabalho, relativos à continuidade uniforme e semicontinuidade de funções, convergência uniforme de sequências de funções e, por fim, resultados sobre soluções de problemas de Dirichlet envolvendo operadores quasilineares elípticos de segunda ordem.

No Capítulo 2, falamos principalmente do problema de extensão de Lipschitz, o qual, como mencionado anteriormente, serve como motivação para o estudo acerca de funções ∞ -harmônicas. Definimos a solução canônica para esse problema, que consiste em uma extensão que é absolutamente minimizante Lipschitz em seu domínio, e estudamos sua existência, unicidade e algumas de suas propriedades, incluindo a propriedade geométrica de comparação com cones.

No Capítulo 3, motivamos e apresentamos a definição do operador ∞ -laplaciano e suas soluções de viscosidade, além de um exemplo clássico de função ∞ -harmônica em \mathbb{R}^2 . Além disso, estudamos o *blow-up* de funções ∞ -harmônicas em domínios quaisquer, e mostramos o importante resultado que afirma que todo *blow-up* de uma solução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ é uma função afim.

No Capítulo 4, mostramos a unicidade de *blow-ups* de funções ∞ -harmônicas, nos possibilitando provar o resultado final desta dissertação, que afirma que funções ∞ -harmônicas são diferenciáveis em todo ponto de seus domínios.

Por fim, apresentamos as conclusões deste trabalho, com alguns comentários adicionais a respeito de resultados de maior regularidade para funções ∞ -harmônicas no plano.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados preliminares a respeito de semicontinuidade e continuidade uniforme de funções, convergência uniforme de sequências de funções, além de alguns resultados necessários no decorrer do trabalho, tendo sido utilizada como principal referência [15].

Também estudamos alguns resultados a respeito de existência, unicidade e regularidade de soluções de problemas de Dirichlet envolvendo operadores uniformemente elípticos quasilineares [13].

1.1 Semicontinuidade e continuidade uniforme

Iniciamos lembrando da definição de função semicontínua em um ponto.

Definição 1.1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto de \mathbb{R}^n . Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente em $x_0 \in \Omega$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in \Omega, \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Analogamente, dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente em $x_0 \in \Omega$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in \Omega, \|x - x_0\| < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x).$$

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente (inferiormente) em todo ponto $x_0 \in \Omega$, dizemos que f é semicontínua superiormente (inferiormente) em Ω .

Notemos que, se f é semicontínua superiormente em $x_0 \in \Omega$, então

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0), \tag{1.1}$$

onde, por definição

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\delta > 0} \sup_{x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}} f(x).$$

De fato, se tivéssemos que $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) > f(x_0)$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria um ponto $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus \{x_0\}$ tal que $f(x_n) + \frac{\varepsilon}{2} > f(x_0)$, onde

$$\varepsilon = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0),$$

contradizendo a Definição 1.1.1.

De mesma forma, se f é semicontínua inferiormente em $x_0 \in \Omega$, então

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0). \quad (1.2)$$

Em seguida, apresentamos uma condição suficiente para que o limite pontual de funções contínuas seja uma função pontualmente semicontínua.

Proposição 1.1.2. *Sejam $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ uma sequência de funções e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f_k(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in \Omega$. Supondo que $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente em \mathbb{R} , para cada $x \in \Omega$, então f é semicontínua superiormente em Ω .*

Demonstração. Dados $x_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$, como $f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$ e $f_k(x_0) \rightarrow f(x_0)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{k_0}(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$. E, sendo f_{k_0} contínua em Ω , existe $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(x_0)$ implica em

$$f_{k_0}(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Por fim, sendo a sequência $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ decrescente, para cada $x \in B_\delta(x_0)$, segue que

$$f(x) \leq f_{k_0}(x) < f(x_0) + \varepsilon, \text{ para todo } x \in B_\delta(x_0).$$

Logo, f é semicontínua superiormente em x_0 , e como a escolha de $x_0 \in \Omega$ foi arbitrária, segue que f é semicontínua superiormente em Ω . \square

Analogamente, é possível mostrar que se, para cada $x \in \Omega$, $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em \mathbb{R} , então f é semicontínua inferiormente em Ω .

Definimos, agora, a continuidade uniforme de funções, um conceito importante presente em nossas discussões futuras.

Definição 1.1.3. Dizemos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em Ω se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo $x, y \in \Omega$ com $\|x - y\| < \delta$, tivermos

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Para encerrar essa seção, analisamos a continuidade uniforme de uma função bastante importante para os Capítulos 3 e 4.

Proposição 1.1.4. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua em Ω . Então, fixado $x \in \Omega$, a função $g : (0, \text{dist}(x, \partial\Omega)) \rightarrow [0, +\infty)$ definida por*

$$g(r) = \max_{w \in S_r(x)} f(w)$$

é uniformemente contínua em $(0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$.

Demonstração. Tomando $\varepsilon > 0$, fixemos $r_0 \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$. Como u é uniformemente contínua em Ω , existe $\delta > 0$ tal que $y, z \in \Omega$ com

$$\|y - z\| < \delta \text{ implica em } |f(y) - f(z)| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Dado $r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta)$, vamos mostrar que, para $|r - r_0| < \delta$, vale

$$|g(r) - g(r_0)| = \left| \max_{w \in S_r(x)} f(w) - \max_{w \in S_{r_0}(x)} f(w) \right| < \varepsilon.$$

Para isso, seja $w_0 \in S_{r_0}(x)$ tal que $f(w_0) = \max_{w \in S_{r_0}(x)} f(w)$. Logo, temos $f(w) \leq f(w_0)$, qualquer que seja $w \in S_{r_0}(x)$.

Dessa forma, dado $y \in S_r(x)$, como $|r - r_0| < \delta$, existe $w \in S_{r_0}(x)$ tal que

$$\|y - w\| = |r - r_0| < \delta,$$

e, por (1.3), temos que $|f(y) - f(w)| < \varepsilon$, ou, ainda, $f(y) < \varepsilon + f(w) \leq \varepsilon + f(w_0)$. Como a escolha de $y \in S_r(x)$ foi arbitrária, segue que

$$\max_{w \in S_r(x)} f(w) < \varepsilon + f(w_0).$$

Por fim, basta notarmos que existe $z \in S_r(x)$ com $\|z - w_0\| = |r - r_0| < \delta$, e, por (1.3), segue que $|f(z) - f(w_0)| < \varepsilon$ e, ainda, $f(w_0) - \varepsilon < f(z)$, donde segue que

$$f(w_0) - \varepsilon < \max_{w \in S_r(x)} f(w).$$

Portanto, concluímos que

$$\left| \max_{w \in S_r(x)} f(w) - f(w_0) \right| < \varepsilon,$$

como queríamos mostrar. E como a escolha de $r_0 \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$ foi arbitrária, segue que g é uniformemente contínua em $(0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$. \square

1.2 Convergência uniforme de sequência de funções

Ao falarmos de convergência de seqüências de funções, um importante tipo de convergência é a uniforme, como definida a seguir.

Definição 1.2.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, funções $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f_k converge uniformemente para f em Ω se para cada $\varepsilon > 0$, existir $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K$ implica em

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Esse tipo de convergência para seqüências de funções se mostra fundamental para estudos de Análise, pois o limite uniforme preserva diversas propriedades advindas da seqüência, por exemplo, a continuidade.

Proposição 1.2.2. Se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ é uma seqüência de funções tal que f_k converge uniformemente para f em Ω , então $f \in C(\Omega)$.

Demonstração. Ver [15], página 298. □

Outra propriedade interessante proveniente da convergência uniforme de seqüências de funções é a disposição dos pontos de máximo de funções suficientemente próximas da função limite, como enunciado a seguir.

Proposição 1.2.3. Para Ω compacto, seja $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ uma seqüência de funções que converge uniformemente para $f \in C(\Omega)$. Se $x_0 \in \Omega$ é o único ponto de Ω satisfazendo $f(x_0) = \max_z f(z)$, então existe uma subsequência $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f_{k_j}(x_{k_j}) = \max_z f_{k_j}(z) \text{ e } x_{k_j} \rightarrow x_0 \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $x_k \in \Omega$ tal que

$$f_k(x_k) = \max_z f_k(z), \tag{1.4}$$

Sendo Ω um conjunto compacto de \mathbb{R}^n , existe uma subsequência $\{x_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge para um ponto $y_0 \in \Omega$. De (1.4), segue, para todo $j \in \mathbb{N}$, que

$$f_{k_j}(x) - f_{k_j}(x_{k_j}) \leq 0 \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, como $f_{k_j} \rightarrow f$ uniformemente em Ω , existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq j_1$ implica em

$$|f_{k_j}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para todo } x \in \Omega;$$

e, sendo $f \in C(\Omega)$, existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq j_2$ implica em

$$|f(x_{k_j}) - f(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto, para $j \geq \max\{j_1, j_2\}$, temos, se $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |f_{k_j}(x) - f_{k_j}(x_{k_j}) - (f(x) - f(y_0))| &\leq |f_{k_j}(x) - f(x)| + |f_{k_j}(x_{k_j}) - f(y_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_{k_j}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})| + |f(x_{k_j}) - f(y_0)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_k f_{k_j}(x) - f_{k_j}(x_{k_j}) = f(x) - f(x_0)$, e, por (1.5),

$$f(x) \leq f(y_0), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Ou seja, y_0 é ponto máximo de f em Ω e, como esse ponto é único, segue que $y_0 = x_0$, sendo a sequência $\{x_{k_j}\}_j$ a procurada. \square

Por fim, apresentamos um importante critério para verificarmos a existência de subsequências que convergem uniformemente em conjuntos fechados.

Teorema 1.2.4 (Arzelà-Ascoli). *Seja $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega})$ uma sequência de funções limitada em $C(\overline{\Omega})$, isto é, tal que existe $C > 0$ com*

$$\|f_k\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_x |f_k(x)| \leq C, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Suponhamos que $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência de funções equicontínuas, isto é, tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $x, y \in \overline{\Omega}$ com $\|x - y\| \leq \delta$ implica em

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Então, existe uma subsequência $\{f_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente para uma função $f \in C(\overline{\Omega})$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Ver [20], página 394. \square

Exemplo 1.2.5. Seja $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega})$ uma sequência de funções satisfazendo $\sup_x |f_k(x)| \leq M$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para algum $M > 0$. Suponhamos que existe $L > 0$ tal que

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq L \|x - y\|, \text{ quaisquer que sejam } x, y \in \overline{\Omega} \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Como vemos na seção 2.1, essa condição equivale a dizer que cada função f_k é Lipschitz em $\overline{\Omega}$, e como sua constante de Lipschitz L independe de k , dizemos que a sequência

$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente Lipschitz. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ de modo que $x, y \in \bar{\Omega}$ com $\|x - y\| < \delta$ implica em

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq L \|x - y\| < L\delta = \varepsilon.$$

Logo, é possível aplicar o Teorema de Arzelà-Ascoli para essa sequência de funções, e concluímos que existe uma subsequência $\{f_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente em $\bar{\Omega}$ para uma função $f \in C(\bar{\Omega})$.

Da mesma forma, se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ é uma sequência limitada de funções tal que existe $C > 0$ com

$$\|\nabla f_k(x)\| \leq C, \text{ para quaisquer } x \in \bar{\Omega} \text{ e } k \in \mathbb{N},$$

então, dados $k \in \mathbb{N}$ e $x, y \in \bar{\Omega}$, seja (x, y) o segmento que une x a y . No caso em que $(x, y) \subset \Omega$, segue do Teorema do Valor Médio que existe $z \in (x, y)$ tal que

$$|f_k(x) - f_k(y)| = |\langle \nabla f_k(z), x - y \rangle| \leq \|\nabla f_k(z)\| \|x - y\| \leq C \|x - y\|,$$

Se $(x, y) \not\subset \Omega$, basta tomarmos um caminho poligonal que une x a y e está contido em Ω , e chegamos na mesma estimativa. Portanto, para essa sequência, também é possível aplicar o Teorema de Arzelà-Ascoli, o que garante a existência de uma subsequência de $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente em $\bar{\Omega}$.

1.2.1 Diferenciabilidade

Tendo em vista que o principal resultado dessa dissertação se trata de mostrar a diferenciabilidade pontual de funções ∞ -harmônicas, apresentamos a seguir a definição de uma função ser diferenciável em um ponto.

Definição 1.2.6. Dizemos que a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $x \in \Omega$ se existir uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x + h) = f(x) + L(h) + r(h), \text{ para todo } h \in \mathbb{R}^n \text{ com } x + h \in \Omega,$$

onde $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

A seguir, apresentamos uma condição equivalente para uma função ser diferenciável em um ponto em x [17], sendo essa a propriedade utilizada para mostrar que uma função ∞ -harmônica é diferenciável em todo ponto de seu domínio.

Proposição 1.2.7. *Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x \in \Omega$. Então f é diferenciável no*

ponto x se, e somente se, existir uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t} = L(y) \quad (1.7)$$

é uniforme em $y \in S_1(0)$.

Demonstração. Supondo que f é diferenciável em x , então, pela Definição 1.2.6, existe uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + h) = f(x) + L(h) + r(h), \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^n \text{ com } x + h \in \Omega,$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0. \quad (1.8)$$

Logo, por (1.8) e usando que $r(h) = f(x + h) - f(x) - L(h)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $h \in \mathbb{R}^n$ com $x + h \in \Omega$ e $\|h\| < \delta$ implica em

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} \right| < \varepsilon.$$

Em particular, dados $y \in S_1(0)$ e $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \delta$, temos

$$\left| \frac{f(x + ty) - f(x) - L(ty)}{t} \right| < \varepsilon$$

e, lembrando que L é linear, temos

$$\left| \frac{f(x + ty) - f(x)}{t} - L(y) \right| < \varepsilon.$$

Portanto, vale o limite (1.7), e como a escolha de $y \in S_1(0)$ foi arbitrária e $\delta > 0$ independe da escolha de y , temos que o limite (1.7) é uniforme em y .

Reciprocamente, supondo que existe a transformação $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e que o limite (1.7) existe e é uniforme em $y \in S_1(0)$, então, por definição, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|t| < \delta$ implica em

$$\left| \frac{f(x + ty) - f(x)}{t} - L(y) \right| < \varepsilon, \quad \text{para cada } y \in S_1(0), \quad (1.9)$$

ou, equivalentemente,

$$\left| \frac{f(x + ty) - f(x) - L(ty)}{t} \right| < \varepsilon, \quad \text{para cada } y \in S_1(0). \quad (1.10)$$

Denotando $r(h) = f(x + h) - f(x) - L(h)$, vamos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

De fato, se $h \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$, então $h = \|h\| y$, para algum $y \in S_1(0)$. Como $\|h\| < \delta$, a Eq. (1.10) implica

$$\left| \frac{f(x + \|h\| y) - f(x) - L(\|h\| y)}{\|h\|} \right| < \varepsilon.$$

Assim,

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} \right| < \varepsilon. \quad (1.11)$$

Como a escolha de $h \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$ foi arbitrária, concluímos que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $h \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$ implica em (1.11), ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0,$$

como queríamos mostrar. Portanto, f é diferenciável em x , e sua derivada é igual a L . \square

1.3 Equações diferenciais parciais elípticas quasilineares

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos e resultados a respeito de operadores quasilineares elípticos de segunda ordem [10], [13].

Definição 1.3.1. Seja $U \subset \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dizemos que Q é um operador quasilinear de segunda ordem se for da forma

$$Qu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} + b(x, u, \nabla u),$$

onde $a_{i,j}, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ são suaves.

O operador quasilinear de segunda ordem Q é dito elíptico em U se existirem funções $\lambda, \Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$0 < \lambda(x, z, p) \|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, z, p) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x, z, p) \|\xi\|^2,$$

quaisquer que sejam $(x, z, p) \in U$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Ainda, se $\frac{\Lambda}{\lambda}$ for limitado em U , então Q é dito uniformemente elíptico em U .

Exemplo 1.3.2. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos o operador Q_ε definido por

$$Q_\varepsilon u = \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i} u_{x_j} + \varepsilon \delta_{ij}) u_{x_i x_j} = \Delta u + \varepsilon \Delta u,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Nesse caso, temos que $a^{ij}(x, u, \nabla u) = u_{x_i} u_{x_j} + \varepsilon \delta_{ij}$ ou, de forma mais geral,

$$a^{ij}(x, z, p) = p_i p_j + \varepsilon \delta_{ij}.$$

Assim, dado $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, vale

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, z, p) \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^n (p_i p_j + \varepsilon \delta_{ij}) \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \xi_i \xi_j + \varepsilon \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_i = \left(\sum_{i=1}^n p_i \xi_i \right)^2 + \varepsilon \|\xi\|^2,$$

dessa forma,

$$0 < \varepsilon \|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, z, p) \xi_i \xi_j = (\langle p, \xi \rangle)^2 + \varepsilon \|\xi\|^2 \leq \|p\|^2 \|\xi\|^2 + \varepsilon \|\xi\|^2.$$

Logo, tomando $\lambda(x, z, p) = \varepsilon$ e $\Lambda(x, z, p) = \|p\|^2 + \varepsilon$, concluímos que Q_ε é uniformemente elíptico em $\Omega \times \mathbb{R} \times K$, onde K é um conjunto limitado de \mathbb{R}^n .

A partir de agora, consideramos apenas operadores Q quasilineares uniformemente elípticos cujos os coeficientes a^{ij} dependem somente das variáveis x e p , definidos em um conjunto $U \subset \Omega \times \mathbb{R}^n$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, e tais que $b \equiv 0$. Enunciamos os seguintes resultados a respeito de soluções de problemas de Dirichlet envolvendo o operador Q , encontrados em [13].

Teorema 1.3.3. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ possua fronteira de classe C^3 e que os coeficientes $a^{ij} \in C^2(\bar{U})$ satisfazem*

$$\|\nabla_x a^{ij}(x, p)\| \leq A_0, \quad \|p\| \|\nabla_p a_{i,j}(x, p)\| \leq A_1, \quad \text{para todo } (x, p) \in U,$$

para certas constantes $A_0, A_1 > 0$. Então, para cada $f \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ e $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, existe uma única solução $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, \nabla u) u_{x_i x_j} = f & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.12)$$

Demonstração. Ver [13], página 76. □

Garantida a existência de soluções de (1.12), tratamos de investigar sua unicidade, sendo essa consequência do princípio da comparação para operadores quasilineares.

Teorema 1.3.4 (Princípio da comparação). *Suponhamos que os coeficientes a^{ij} sejam de classe $C^1(U)$. Se $u, v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazem $Q(u) \geq Q(v)$ em Ω e $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω .*

Demonstração. Ver [13], página 52. □

Corolário 1.3.5 (Princípio fraco do máximo). *Suponhamos que Q está nas hipóteses do Teorema 1.3.4. Se $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaz $Q(u) \geq 0$ em Ω , então*

$$\max_{\bar{\Omega}} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x).$$

Demonstração. Basta tomarmos a função constante $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $v(x) = \max_{z \in \partial\Omega} u(z)$ no Teorema 1.3.4. □

Por fim, apresentamos resultados a respeito da regularidade de ordem mais alta de soluções clássicas de (1.12).

Teorema 1.3.6. *Seja $\alpha \in (0, 1)$ e suponhamos que $a^{ij} \in C(\bar{U})$. Seja $u \in C^2(\bar{\Omega})$ solução de (1.12), onde $f \in C(\bar{\Omega})$ e $\varphi \in C(\bar{\Omega})$. Para qualquer $m \in \mathbb{N}$, se $\partial\Omega$ é de classe $C^{m+2\alpha}$, $a_{i,j} \in C^{m,\alpha}(\bar{U})$, $f \in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ e se $\varphi \in C^{m+2,\alpha}(\bar{\Omega})$, então*

$$u \in C^{m+2,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Além disso, se $\partial\Omega$ é de classe C^k , $a^{ij} \in C^k(U)$, $f \in C^k(\bar{\Omega})$ e $\varphi \in C^k(\bar{\Omega})$, então

$$u \in C^k(\bar{\Omega}).$$

Demonstração. Ver [13], página 54. □

1.4 Desigualdade de Young

Para finalizar esse capítulo, mostramos a Desigualdade de Young, uma ferramenta importante para os cálculos do Capítulo 4.

Teorema 1.4.1. *Dado $p \in (1, +\infty)$, seja $q \in (1, +\infty)$ o expoente conjugado de p , isto é, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, dados quaisquer $x, y > 0$, vale que*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{1.13}$$

Demonstração. Notando que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ dada por $f(x) = e^x$ é convexa, isto é, satisfaz

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \text{ para quaisquer } \lambda > 0 \text{ e } x, y \in \mathbb{R},$$

então

$$xy = e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln(x^{\frac{p}{p}}) + \ln(y^{\frac{q}{q}})} = e^{\frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q)} \leq \frac{1}{p} e^{\ln(x^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(y^q)} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

como queríamos mostrar. □

Capítulo 2

Problema de extensão de Lipschitz

Neste capítulo, introduzimos o problema de estender uma função $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitz no conjunto $\partial\Omega$, a uma função u definida em $\bar{\Omega}$, preservando sua constante de Lipschitz [4], [14], [18]. Vemos também que soluções desse problema estão intimamente relacionadas com funções que satisfazem a propriedade geométrica de comparação com cones em Ω .

Para isso, apresentamos alguns resultados encontrados em [5] e [6].

2.1 Funções Lipschitz contínuas

Começamos definindo funções Lipschitz em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sendo essas as funções centrais nas discussões do presente capítulo.

Definição 2.1.1. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz (ou Lipschitz contínua) em Ω se existir uma constante $L \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|, \text{ para quaisquer } x, y \in \Omega. \quad (2.1)$$

Nesse caso, dizemos que L é uma constante de Lipschitz para f em Ω .

Notemos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz em Ω se, e somente se,

$$L = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} : x, y \in \Omega, x \neq y \right\} < \infty,$$

e, nesse caso, dizemos que L é a constante de Lipschitz para f em Ω , denotada por $L = \text{Lip}_f(\Omega)$. Ou seja, a constante de Lipschitz para f em Ω é a menor das constantes L para as quais vale (2.1).

Ainda, segue de (2.1) que toda função Lipschitz em Ω é uniformemente contínua em Ω .

A seguir, provamos alguns lemas auxiliares a respeito de funções Lipschitz contínuas, os quais utilizamos adiante.

Lema 2.1.2. *Seja $f \in C(\overline{\Omega})$ uma função Lipschitz em Ω . Então f é Lipschitz em $\overline{\Omega}$ e $\text{Lip}_f(\overline{\Omega}) = \text{Lip}_f(\Omega)$.*

Demonstração. Dados $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$, existem $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Sendo $x \neq y$, podemos considerar $x_n \neq y_n$ para cada $n \geq N$, com $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Dessa forma, como $x_n, y_n \in \Omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{\|x_n - y_n\|} \leq \text{Lip}_f(\Omega), \text{ para todo } n \geq N.$$

Logo,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} = \lim_n \frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{\|x_n - y_n\|} \leq \text{Lip}_f(\Omega),$$

onde foi utilizada a continuidade de f em $\overline{\Omega}$. Como a escolha de $x, y \in \overline{\Omega}$ foi arbitrária, segue que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} \leq \text{Lip}_f(\Omega), \text{ para quaisquer } x, y \in \overline{\Omega} \text{ com } x \neq y.$$

Logo, segue que f é Lipschitz em $\overline{\Omega}$ e $\text{Lip}_f(\overline{\Omega}) \leq \text{Lip}_f(\Omega)$.

Reciprocamente, como $\Omega \subset \overline{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned} \text{Lip}_f(\overline{\Omega}) &= \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} : x, y \in \overline{\Omega}, x \neq y \right\} \\ &\geq \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} : x, y \in \Omega, x \neq y \right\} \\ &= \text{Lip}_f(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que $\text{Lip}_f(\Omega) = \text{Lip}_f(\overline{\Omega})$. □

A seguir, provamos que o supremo e o ínfimo de funções Lipschitz em Ω são também Lipschitz nesse conjunto, desde que essas funções sejam finitas.

Lema 2.1.3. *Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $f_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz em Ω . Supondo que $L > 0$ é uma constante de Lipschitz para cada f_λ em Ω , então, se $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$v(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$$

for finita, temos que v é Lipschitz em Ω . Além disso, L é uma constante de Lipschitz para v em Ω .

Demonstração. Basta notarmos que, dados $x, y \in \Omega$, temos

$$|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq L \|x - y\|, \text{ para cada } \lambda \in \Lambda$$

e, em particular,

$$f_\lambda(x) \leq f_\lambda(y) + L \|x - y\|, \text{ para cada } \lambda \in \Lambda.$$

Tomando o supremo sobre $\lambda \in \Lambda$, concluímos que

$$v(x) - v(y) \leq L \|x - y\|.$$

Analogamente,

$$|f_\lambda(y) - f_\lambda(x)| \leq L \|x - y\|, \text{ se } \lambda \in \Lambda;$$

que implica em

$$v(y) - v(x) \leq L \|x - y\|.$$

Portanto, $|v(x) - v(y)| \leq L \|x - y\|$, para quaisquer $x, y \in \Omega$, como queríamos mostrar. \square

Observamos que um resultado análogo vale para o ínfimo de uma família de funções uniformemente Lipschitz em Ω .

Notemos agora que uma função f , Lipschitz em um intervalo $[x, y] \subset \Omega$, não pode possuir constante de Lipschitz igual a

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|},$$

a não ser que f seja afim no segmento $[x, y]$. Esse resultado é mostrado a seguir para o caso $n = 1$, e pode ser facilmente traduzido para o caso $n > 2$ ao ser considerado a função auxiliar $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(x + t(y - x))$.

Lema 2.1.4. *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz em $[a, b]$. Supondo que*

$$\text{Lip}_g([a, b]) = \frac{|g(b) - g(a)|}{|b - a|}, \quad (2.2)$$

então g é uma função afim em $[a, b]$. Em particular,

$$g(a + t(b - a)) = g(a) + t(g(b) - g(a)), \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Demonstração. Suponhamos que exista $t_1 \in (0, 1)$ tal que

$$g(a + t_1(b - a)) < g(a) + t_1(g(b) - g(a)).$$

Então

$$g(b) - g(a + t_1(b - a)) > g(b) - g(a) - t_1(g(b) - g(a)) = (1 - t_1)(g(b) - g(a)),$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{|g(b) - g(a + t_1(b - a))|}{|b - a - t_1(b - a)|} &\geq \frac{g(b) - g(a + t_1(b - a))}{|b - a - t_1(b - a)|} > \frac{(1 - t_1)(g(b) - g(a))}{|(b - a)(1 - t_1)|} \\ &= \frac{g(b) - g(a)}{|b - a|}. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$g(a) - g(a + t_1(b - a)) > g(a) - g(a) - t_1(g(b) - g(a)) = -t_1(g(b) - g(a))$$

e concluimos que

$$\frac{|g(a) - g(a + t_1(b - a))|}{|-t_1(b - a)|} \geq \frac{g(a) - g(a + t_1(b - a))}{|-t_1(b - a)|} > \frac{-t_1(g(b) - g(a))}{|t_1(b - a)|} = -\frac{g(b) - g(a)}{|b - a|}.$$

Logo, se $g(b) > g(a)$, então $g(b) - g(a) > 0$ e

$$\frac{|g(b) - g(a + t_1(b - a))|}{|b - a - t_1(b - a)|} > \frac{g(b) - g(a)}{|b - a|} = \frac{|g(b) - g(a)|}{|b - a|},$$

contradizendo (2.2). E, se $g(b) < g(a)$, então $g(b) - g(a) < 0$ e

$$\frac{|g(a) - g(a + t_1(b - a))|}{|-t_1(b - a)|} > -\frac{g(b) - g(a)}{|b - a|} = \frac{|g(b) - g(a)|}{|b - a|},$$

o que também contradiz (2.2).

Analogamente, supondo que $g(a + t_1(b - a)) > g(a) + t_1(g(b) - g(a))$ para algum $t_1 \in (0, 1)$, é possível chegarmos em uma contradição, e está mostrado o resultado. \square

Apresentamos a seguir o problema que motiva a discussão sobre funções ∞ -harmônicas em um domínio Ω [18]. Dada $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz em $\partial\Omega$, buscamos estender f a uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ com a menor constante de Lipschitz possível. Notamos que, como $\partial\Omega \subset \bar{\Omega}$ e $u = f$ em $\partial\Omega$, então,

$$\text{Lip}_u(\bar{\Omega}) \geq \text{Lip}_u(\partial\Omega) = \text{Lip}_f(\partial\Omega).$$

Logo, o maior esforço que poderíamos fazer ao definir u em $\overline{\Omega}$ é o de não aumentar sua constante de Lipschitz, isto é, garantir que $\text{Lip}_u(\overline{\Omega}) = \text{Lip}_f(\partial\Omega)$.

Visto isso, suponha que exista $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz em $\overline{\Omega}$ com constante de Lipschitz $\text{Lip}_f(\partial\Omega)$ e tal que $u = f$ em $\partial\Omega$. Dados $y, z \in \partial\Omega$ e $x \in \overline{\Omega}$, temos $u(z) = f(z)$ e $u(y) = f(y)$. Além disso, sendo $\text{Lip}_f(\partial\Omega)$ a constante de Lipschitz para u em $\overline{\Omega}$, então

$$\begin{cases} |u(x) - u(z)| \leq \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| \\ |u(x) - u(y)| \leq \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - y\|. \end{cases}$$

Em particular, temos

$$\begin{cases} u(x) - u(z) \leq \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| \\ -u(x) + u(y) \leq \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - y\|, \end{cases}$$

que implica em

$$\begin{cases} u(x) \leq f(z) + \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| \\ u(x) \geq f(y) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - y\|. \end{cases} \quad (2.3)$$

Como (2.3) são válidas para quaisquer $y, z \in \partial\Omega$, então, se $x \in \Omega$, temos

$$\sup_y \left(f(y) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - y\| \right) \leq u(x) \leq \inf_z \left(f(z) + \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| \right). \quad (2.4)$$

A Eq. (2.4) motiva a seguinte definição.

Definição 2.1.5. Se f é uma função Lipschitz em $\partial\Omega$, definimos as extensões de McShane-Whitney de f como $MW(f)$, $MW(f) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$MW(f)(x) = \sup_z \left(f(z) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| \right)$$

e

$$MW(f)(x) = \inf_z \left(f(z) + \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| \right).$$

Vamos mostrar que as extensões de McShane-Whitney solucionam nosso problema, além de fornecerem cotas para possíveis outras extensões de f que possuem constante de Lipschitz igual a $\text{Lip}_f(\partial\Omega)$ em $\overline{\Omega}$.

Teorema 2.1.6 (Problema de Extensão de Lipschitz (PEL)). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz em $\partial\Omega$. Então existe uma função u Lipschitz em $\overline{\Omega}$ tal que $u = f$ em $\partial\Omega$ e $\text{Lip}_u(\overline{\Omega}) = \text{Lip}_f(\partial\Omega)$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $MW(f)$ é solução do PEL (podemos provar analogamente que MW também o é).

Primeiramente, para cada $z \in \partial\Omega$, a função $x \mapsto f(z) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\|$ é Lipschitz em $\bar{\Omega}$ com constante de Lipschitz $\text{Lip}_f(\partial\Omega)$, pois, dados $x, y \in \bar{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned} & \left| f(z) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| - \left(f(z) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|y - z\| \right) \right| \\ &= \left| \text{Lip}_f(\partial\Omega) \left(\|x - z\| - \|y - z\| \right) \right| \\ &\leq \text{Lip}_f(\partial\Omega) \left| \|x - z\| - \|y - z\| \right| \\ &= \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - y\|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Logo, pelo Lema 2.1.3, temos que $MW(f)$ é Lipschitz em $\bar{\Omega}$, sendo $\text{Lip}_f(\partial\Omega)$ uma constante de Lipschitz para $MW(f)$ em $\bar{\Omega}$.

Resta mostrar que $MW(f) = f$ em $\partial\Omega$ e, para isso, basta notarmos que, se $x \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned} MW(f)(x) &= \sup_{z \in \partial\Omega} \left(f(z) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| \right) \\ &\geq f(x) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - x\| \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por outro lado, como f é Lipschitz em $\partial\Omega$, então

$$f(z) - f(x) \leq \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|z - x\|, \quad \text{para todo } z \in \partial\Omega,$$

isto é,

$$f(z) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| \leq f(x), \quad \text{para todo } z \in \partial\Omega.$$

Dessa forma,

$$MW(f)(x) = \sup_{z \in \partial\Omega} \left(f(z) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x - z\| \right) \leq f(x),$$

donde segue que $MW(f) = f$ em $\partial\Omega$. Portanto, por (2.5), concluímos que

$$\text{Lip}_{MW(f)}(\bar{\Omega}) = \text{Lip}_f(\partial\Omega).$$

Ou seja, $MW(f)$ é solução do problema da extensão de Lipschitz. De maneira análoga, podemos mostrar que $MW(f)$ também é solução desse problema, e ainda, se u é outra solução do PEL, pelo argumento realizado anterior ao teorema, temos que

$$MW(f)(x) \leq u(x) \leq MW(f)(x), \quad \text{qualquer que seja } x \in \bar{\Omega},$$

concluindo a demonstração. □

Apesar do PEL sempre possuir solução, ela pode não ser única, como mostramos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.7. Sejam $\Omega = (-1, 0) \cup (0, 1) \subset \mathbb{R}$ e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{-1, 0\} \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Temos que $\text{Lip}_f(\partial\Omega) = 1$ e $MW(f)$, $MW^-(f) : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$\begin{aligned} MW(f)(x) &= \sup_z (f(z) - |x - z|) \\ &= \sup\{-|x + 1|, -|x|, 1 - |x - 1|\} \\ &= \begin{cases} -|x + 1|, & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ 1 - |x - 1|, & x \in [-\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x - 1, & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ x, & x \in [-\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

e

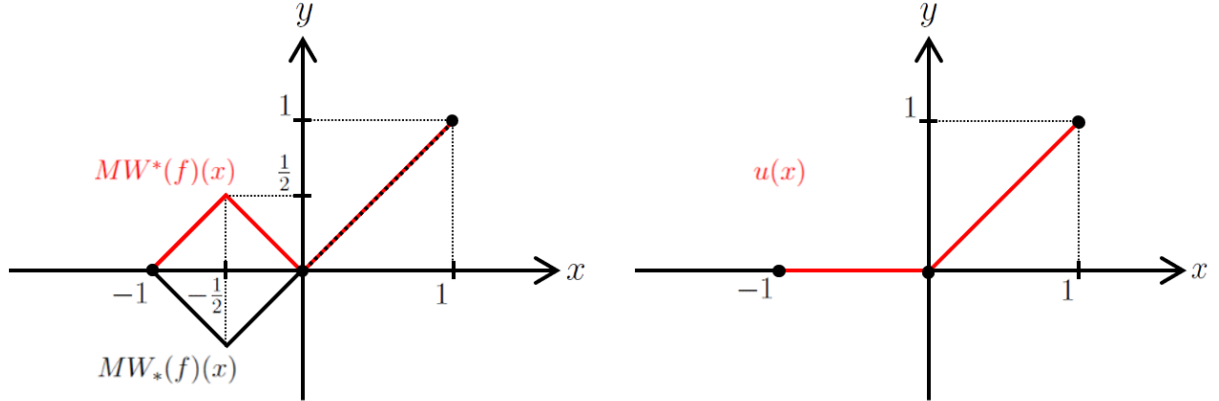
$$\begin{aligned} MW^-(f)(x) &= \inf_z (f(z) + |x - z|) \\ &= \inf\{|x + 1|, |x|, 1 + |x - 1|\} \\ &= \begin{cases} |x + 1|, & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ |x|, & x \in [-\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ |x|, & x \in [-\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Notamos que essas não são as únicas soluções do PEL. Por exemplo, $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

também é solução do problema, e, na realidade, poderíamos criar infinitas soluções para esse caso.

Figura 2.1: Gráfico das funções MW , MW^* e u



Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse exemplo mostra que pode acontecer de não valer a unicidade da solução do PEL. Contudo, das soluções apresentadas acima, apenas u faz com que a seminorma de Lipschitz relativo a Ω seja local, no seguinte sentido:

$$\text{Se } \Omega \subset\subset \Omega, \text{ então } \text{Lip}_u(\partial\Omega) = \text{Lip}_u(\Omega).$$

Para mostrar esse fato, tomemos $\Omega \subset \Omega$. Se $\Omega \subset (-1, 0)$, então $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$ e, portanto, $\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega) = 0$; se $\Omega \subset (0, 1)$, então $u(x) = x$ para $x \in \overline{\Omega}$, logo, vale que $\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega) = 1$; por fim, pode acontecer de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, com $\Omega_1 \subset (-1, 0)$ e $\Omega_2 \subset (0, 1)$. Nesse caso,

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_1 \\ x, & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Dessa forma, $u(x) = x$ em $\partial\Omega_2$ e, portanto, $\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega) = 1$.

Contudo, o operador de Lipschitz em Ω não é local em relação às soluções MW e MW^* . De fato, dado o intervalo $\Omega = (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}) \subset\subset \Omega$, temos que $MW^*(f)(x) = -\frac{1}{4}$, para todo $x \in \partial\Omega = \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\}$, de modo que $\text{Lip}_{MW^*(f)}(\partial\Omega) = 0$, enquanto $\text{Lip}_{MW^*(f)}(\Omega) = 1$. Ou seja, apesar de $\text{Lip}_{MW^*(f)}(\Omega) = \text{Lip}_{MW^*(f)}(\partial\Omega)$, temos que $\text{Lip}_{MW^*(f)}(\Omega) \neq \text{Lip}_{MW^*(f)}(\partial\Omega)$, e o mesmo vale para $MW(f)$.

Dessa forma, precisamos de uma definição mais forte para garantir a unicidade de solução para o PEL, mantendo a localidade da seminorma de Lipschitz. Para isso, exigimos que a solução do PEL seja absolutamente minimizante Lipschitz em Ω , como definido a seguir.

Definição 2.1.8. Dizemos que uma função $u \in C(\Omega)$ é absolutamente minimizante Lipschitz (AML) em Ω , denotado por $u \in AML(\Omega)$, se, para todo subconjunto $\Omega \subset\subset \Omega$, valer

$$\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega).$$

Notemos que, se $u \in AML(\Omega)$ for Lipschitz em $\bar{\Omega}$, então $\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega)$. Dessa forma, se v é Lipschitz em $\bar{\Omega}$ for tal que $v = u$ em $\partial\Omega$, então

$$\text{Lip}_v(\Omega) = \text{Lip}_v(\bar{\Omega}) \geq \text{Lip}_v(\partial\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega) = \text{Lip}_u(\Omega),$$

isto é, u é minimizante da seminorma de Lipschitz em Ω ,

$$I(u) = \text{Lip}_u(\Omega),$$

definido para toda função u Lipschitz em Ω . Além disso, como esse caráter minimizante vale em qualquer subdomínio $\Omega' \subset\subset \Omega$, adicionamos o advérbio “absolutamente” à definição.

A existência e unicidade de uma função $u \in AML(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $u = f$ em $\partial\Omega$ está provada adiante, na Seção 2.3, e, no restante deste trabalho, nos referimos a essas como as soluções do PEL, como definido a seguir.

Definição 2.1.9. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz em $\partial\Omega$, dizemos que $u \in C(\bar{\Omega})$ é solução do problema de extensão de Lipschitz associado a f se u for absolutamente minimizante Lipschitz em Ω e $u = f$ em $\partial\Omega$.

No Exemplo 2.1.7, a função u é a solução canônica do PEL associado a $\Omega = (-1, 0) \cup (0, 1)$ e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{-1, 0\} \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

2.2 Comparação com cones

Mostramos nesta seção que a definição de uma função ser $AML(\Omega)$ é equivalente a exigir que essa função satisfaça comparação com cones em Ω , uma propriedade geométrica que se mostra mais conveniente para nossos usos futuros [2], [6].

De agora em diante, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto não-vazio.

Definição 2.2.1. Definimos um cone com vértice em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ como uma função $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$C(x) = a \|x - x_0\| + b, \tag{2.6}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Nesse caso, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a semirreta

$$\{x_0 + t(x - x_0) : t \geq 0\}$$

é chamada de raio de C através de x .

Notemos que, se $n = 2$, então o gráfico de C possui a forma de um cone de uma folha em \mathbb{R}^3 , com vértice no ponto $(x_0, b) \in \mathbb{R}^3$. Porém, em obras sobre o operador ∞ -laplaciano, nota-se que um cone é definido como uma função, e não como uma figura geométrica, devendo-se ter esse cuidado. Portanto, ao falarmos de cones nessa dissertação, devemos sempre ter em mente uma função como em (2.6).

Lema 2.2.2. *Seja $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o cone dado por*

$$C(x) = a \|x - x_0\| + b.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

- i) Dados $w, y \in \mathbb{R}^n$ dois pontos distintos de um mesmo raio de C , então $\text{Lip}_C([w, y]) = |a|$;*
- ii) Se Ω é um conjunto aberto não vazio, então $\text{Lip}_C(\Omega) = |a|$;*
- iii) Se Ω é um conjunto aberto, não vazio, limitado e tal que $x_0 \notin \Omega$, então $\text{Lip}_C(\partial\Omega) = |a|$.*

Demonstração. Para mostrar o item i), tomamos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ quaisquer. Temos que

$$\frac{|C(x_1) - C(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|} = \frac{|a \|x_1 - x_0\| - a \|x_2 - x_0\||}{\|x_1 - x_2\|} \leq |a| \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|x_1 - x_2\|} = |a|,$$

ou seja, $|a|$ é uma constante de Lipschitz para C em \mathbb{R}^n .

Agora, sendo $w, y \in \mathbb{R}^n$ dois pontos de um mesmo raio de C , digamos, que passa por x , podemos escrever $w = x_0 + t_1(x - x_0)$ e $y = x_0 + t_2(x - x_0)$, $t_1, t_2 \geq 0$ com $t_1 \neq t_2$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{|C(w) - C(y)|}{\|w - y\|} &= \frac{|a \|w - x_0\| - a \|y - x_0\||}{\|w - y\|} = \frac{|a \|t_1(x - x_0)\| - a \|t_2(x - x_0)\||}{\|t_1(x - x_0) - t_2(x - x_0)\|} \\ &= \frac{|a| |t_1 - t_2| \|x - x_0\|}{\|(t_1 - t_2)(x - x_0)\|} = |a|. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{Lip}_C([w, y]) = |a|$.

Os itens ii) e iii) seguem diretamente ao notarmos que os conjuntos em questão possuem pelo menos dois elementos distintos de um mesmo raio de C , e basta que façamos uma demonstração semelhante à do item i). \square

Definimos agora a propriedade de comparação com cones para funções contínuas em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sendo essa uma importante propriedade presente no restante desse capítulo.

Definição 2.2.3. Dizemos que $u \in C(\Omega)$ satisfaz comparação com cones por cima em Ω se para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ e todo cone C cujo vértice não pertence a Ω' e tal que $u \leq C$ em $\partial\Omega'$, valer $u \leq C$ em Ω' .

Analogamente, definimos a comparação com cones por baixo em Ω . Dizemos que u satisfaz comparação com cones em Ω quando satisfaz comparação com cones por cima e por baixo em Ω .

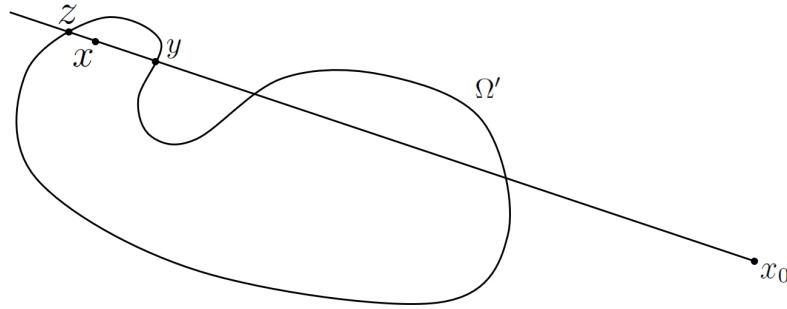
Exemplo 2.2.4. Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa em Ω , isto é, tal que

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y), \text{ para quaisquer } x, y \in \Omega \text{ e } \lambda \in [0, 1].$$

Vamos mostrar que u satisfaz comparação com cones por cima em \mathbb{R}^n . Para isso, dados $\Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um cone com vértice em $x_0 \notin \Omega'$ tal que $u \leq C$ em $\partial\Omega'$, vamos mostrar que $u \leq C$ em Ω' .

De fato, dado $x \in \Omega'$, existe um raio R de C começando em x_0 e interceptando x , e como Ω' é aberto, temos que R intercepta $\partial\Omega'$ em dois pontos, digamos y e z , de modo que o segmento $(y, z) \subset \Omega'$.

Figura 2.2: Ilustração dos pontos contidos em um mesmo raio de C .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, $x \in (y, z)$, e podemos escrever

$$x = ty + (1 - t)z, \text{ para algum } t \in (0, 1).$$

Usando que u é convexa em $\Omega' \subset \Omega$ e que $u \leq C$ em $\{y, z\} \subset \partial\Omega'$, concluímos que

$$u(x) = u(ty + (1 - t)z) \leq tu(y) + (1 - t)u(z) \leq tC(y) + (1 - t)C(z)$$

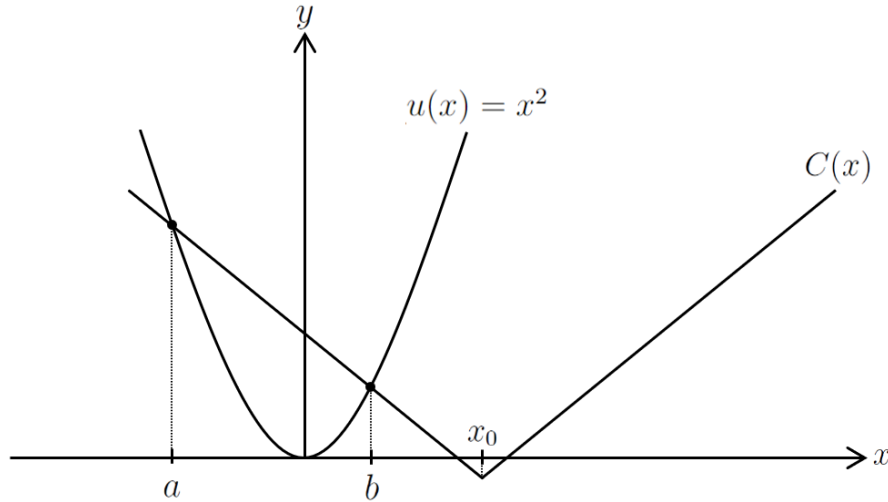
e, como x_0, x, y e z estão em uma mesma reta, vale que

$$\begin{aligned} \|t(y - x_0)\| + \|(1 - t)(z - x_0)\| &= \|t(y - x_0) + (1 - t)(z - x_0)\| \\ &= \|ty + (1 - t)z - x_0\| \\ &= \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Portanto, $u(x) \leq tC(y) + (1-t)C(z) = C(x)$, e como a escolha de $x \in \Omega$ foi arbitrária, segue que $u \leq C$ em Ω , logo, u satisfaz comparação com cones por cima em \mathbb{R}^n .

Em particular, a função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x) = x^2$ é convexa em \mathbb{R} , logo, dados um intervalo (a, b) e um cone $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com vértice em $x_0 \notin (a, b)$ e tal que $C(a) \geq u(a)$ e $C(b) \geq u(b)$, vale que $C(x) \geq u(x)$ para $x \in [a, b]$.

Figura 2.3: Gráficos de $u(x) = x^2$ e do cone $C(x)$ no intervalo (a, b) .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ainda, todo cone $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $C(x) = a\|x - x_0\| + b$, com $a \geq 0$, satisfaz comparação com cones por cima em \mathbb{R}^n . Contudo, em geral, funções convexas não satisfazem comparação com cones por baixo em \mathbb{R}^n . De fato, como vemos na Figura 2.3, apesar de $C(a) \leq u(a)$ e $C(b) \leq u(b)$, não vale que $C(x) \leq u(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Por fim, por argumentos análogos aos feitos acima, mostramos que toda função côncava em \mathbb{R}^n satisfaz comparação com cones por baixo em \mathbb{R}^n , mas, em geral, não satisfaz comparação com cones por cima em \mathbb{R}^n .

A seguir, apresentamos uma propriedade analítica equivalente à comparação com cones em um aberto Ω .

Lema 2.2.5. *A função $u \in C(\Omega)$ satisfaz comparação com cones por cima em Ω se, e somente se, para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, $b \in \mathbb{R}$ e $x_0 \notin \Omega'$, valer*

$$u(x) - b\|x - x_0\| \leq \max_w \{u(w) - b\|w - x_0\|\}, \text{ para todo } x \in \Omega'.$$

Analogamente, $u \in C(\Omega)$ satisfaz comparação com cones por baixo em Ω se, e somente se, para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, $b \in \mathbb{R}$ e $x_0 \notin \Omega'$, valer

$$u(x) - b\|x - x_0\| \geq \min_w \{u(w) - b\|w - x_0\|\}, \text{ para todo } x \in \Omega'.$$

Demonstração. Vamos mostrar apenas a primeira equivalência, sendo a prova da segunda equivalência análoga ao que fazemos a seguir.

(\implies) Dados $\Omega' \subset\subset \Omega$, $b \in \mathbb{R}$ e $x_0 \notin \Omega$, temos que, se $x \in \partial\Omega$,

$$u(x) - b\|x - x_0\| \leq \max_w \partial\Omega (u(w) - b\|w - x_0\|),$$

ou, ainda,

$$u(x) \leq \max_w \partial\Omega (u(w) - b\|w - x_0\|) + b\|x - x_0\| =: C(x). \quad (2.7)$$

Como $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um cone com vértice em $x_0 \notin \Omega$ e u satisfaz comparação com cones por cima, temos que (2.7) é válida também para todo $x \in \Omega$, como queríamos mostrar.

(\impliedby) Dados $\Omega' \subset\subset \Omega$, $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um cone dado por $C(x) = a + b\|x - x_0\|$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $x_0 \notin \Omega$ tal que $u \leq C$ em $\partial\Omega$. Notemos que, se $x \in \Omega$, vale, por hipótese,

$$u(x) - b\|x - x_0\| \leq \max_w \partial\Omega (u(w) - b\|w - x_0\|)$$

e, subtraindo a em ambos os lados, obtemos

$$u(x) - C(x) \leq \max_w \partial\Omega (u(w) - C(w)) \leq 0,$$

pois $u \leq C$ em $\partial\Omega$. Dessa forma, concluímos que $u \leq C$ em Ω . \square

Vamos mostrar que as definições de função $AML(\Omega)$ e função que satisfaz comparação com cones em Ω são equivalentes. Para isso, vamos mostrar, primeiramente, os seguintes resultados [5], [16].

Teorema 2.2.6 (Desigualdade de Harnack). *Seja $u \in C(\Omega)$ uma função que satisfaz comparação com cones por cima em Ω , com $u \leq 0$ em Ω .*

Se $z \in \Omega$ e $R < \frac{\text{dist}(z, \partial\Omega)}{4}$, então

$$\sup_{B_R(z)} u \leq \frac{1}{3} \inf_{B_R(z)} u.$$

Demonstração. Dados $y \in \Omega$ e $r < \text{dist}(y, \partial\Omega)$, vamos mostrar, primeiramente, que

$$u(x) \leq u(y) + \max_w \partial S_r(y) \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) \|x - y\|, \quad \text{para todo } x \in \overline{B_r(y)}. \quad (2.8)$$

De fato, dado $x \in S_r(y)$, temos que

$$u(x) - u(y) \leq \max_w \partial S_r(y) (u(w) - u(y)) = \max_w \partial S_r(y) (u(w) - u(y)) \frac{\|x - y\|}{r}.$$

E, diretamente, temos $u(x) = u(y) + \max_w \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) \|y - x\|$. Logo, (2.8) é válida se $x \in \partial(B_r(y) \setminus \{y\})$, e como u satisfaz comparação com cones por cima, segue que (2.8) é válida para todo $x \in B_r(y)$.

Agora, dados $x, y \in B_R(z)$, temos que $x \in B_{3R}(y)$ e $3R < \text{dist}(y, \partial\Omega)$, logo, por (2.8) e usando que $u \leq 0$ em Ω , concluímos que

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(y) + \max_w \left(\frac{u(w) - u(y)}{3R} \right) \|x - y\| \\ &\leq u(y) + \left(\frac{0 - u(y)}{3R} \right) \|x - y\| \\ &= \left(1 - \frac{\|x - y\|}{3R} \right) u(y). \end{aligned}$$

Como $x, y \in B_R(z)$, temos que $\|x - y\| \leq 2R$, e, como $u(y) \leq 0$,

$$u(x) \leq \left(1 - \frac{\|x - y\|}{3R} \right) u(y) \leq \left(1 - \frac{2R}{3R} \right) u(y) = \frac{1}{3} u(y), \quad \text{para quaisquer } x, y \in B_R(z).$$

Para cada $y \in B_R(z)$ vale $u(x) \leq \frac{1}{3} u(y)$, se $x \in B_R(z)$, logo,

$$\sup_{B_R(z)} u \leq \frac{1}{3} u(y), \quad \text{para todo } y \in B_R(z)$$

e, portanto,

$$\sup_{B_R(z)} u \leq \frac{1}{3} \inf_{B_R(z)} u,$$

concluindo a prova da desigualdade de Harnack. \square

A desigualdade de Harnack nos dá um controle da variação da função u em bolas suficientemente distantes de $\partial\Omega$, nas quais conclui-se que a variação de u não pode ser muito grande.

Agora, apresentamos o primeiro resultado de regularidade para funções que satisfazem comparação com cones em Ω .

Teorema 2.2.7. *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz comparação com cones por cima em Ω , então u é localmente Lipschitz e, portanto, é diferenciável em quase todo ponto de Ω .*

Demonstração. Tomemos $z \in \Omega$, $R < \frac{\text{dist}(z, \partial\Omega)}{4}$ e suponhamos, primeiramente, que $u \leq 0$ em $B_{4R}(z)$. Dados $x, y \in B_R(z)$, como $x \in B_{3R}(y) \subset B_{4R}(z)$, então (2.8) e a desigualdade de Harnack implicam em

$$u(x) - u(y) \leq \max_w \left(\frac{u(w) - u(y)}{3R} \right) \|x - y\| \leq \frac{0 - u(y)}{3R} \|x - y\|$$

$$\leq - \inf_{B_R(z)} u \frac{\|x - y\|}{3R} \leq - \sup_{B_R(z)} u \frac{\|x - y\|}{R}.$$

Trocando x e y de posição, concluímos que, para quaisquer $x, y \in B_R(z)$,

$$|u(x) - u(y)| \leq - \sup_{B_R(z)} u \frac{\|x - y\|}{R},$$

ou seja, u é Lipschitz em $B_R(z)$.

Agora, se u não é não-positiva em $B_{4R}(z)$, basta tomarmos

$$v = u - \sup_{B_{4R}(z)} u \leq 0,$$

pois v continua satisfazendo comparação com cones por cima, e obtemos, para $x, y \in B_R(z)$,

$$|u(x) - u(y)| = |v(x) - v(y)| \leq - \sup_{B_R(z)} v \frac{\|x - y\|}{R} = \left(\sup_{B_{4R}(z)} u - \sup_{B_R(z)} u \right) \frac{\|x - y\|}{R}. \quad (2.9)$$

Portanto, concluímos que u é Lipschitz em $B_r(z)$, e como a escolha de $z \in \Omega$ foi arbitrária, segue que u é localmente Lipschitz em Ω . \square

Observa-se que não seria necessário utilizar a desigualdade de Harnack na prova do Teorema 2.2.7, contudo, essa ferramenta nos permitiu obter uma constante de Lipschitz local para u consistindo apenas de cotas superiores para u , como vemos na Eq. (2.9).

Lema 2.2.8. *Sejam $u \in C(\Omega)$ uma função que satisfaz comparação com cones por cima em Ω e $\Omega \subset\subset \Omega$. Dado $x \in \Omega$, temos que*

$$\text{Lip}_u(\partial\Omega \cup \{x\}) = \text{Lip}_u(\partial\Omega). \quad (2.10)$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.7, sabemos que u é Lipschitz em $\overline{\Omega}$ e, portanto, em $\partial\Omega$. Notamos que, como $\partial\Omega \subset \partial\Omega \cup \{x\}$, então $\text{Lip}_u(\partial\Omega) \leq \text{Lip}_u(\partial\Omega \cup \{x\})$. Reciprocamente, se $y, z \in \partial\Omega$, temos

$$\frac{|u(y) - u(z)|}{\|y - z\|} \leq \text{Lip}_u(\partial\Omega).$$

Resta mostrar que, para cada $y \in \partial\Omega$, vale

$$|u(x) - u(y)| \leq \text{Lip}_u(\partial\Omega) \|x - y\|$$

ou, equivalentemente,

$$u(y) - \text{Lip}_u(\partial\Omega) \|x - y\| \leq u(x) \leq u(y) + \text{Lip}_u(\partial\Omega) \|x - y\|.$$

Para isso, basta notarmos que, trivialmente, $C(x) := u(y) - \text{Lip}_u(\partial\Omega) \|x - y\| \leq u(x)$ se $x \in \partial\Omega$. Mas, como C é um cone com vértice em $y \notin \Omega$ e u satisfaz comparação com cones por cima em Ω , então $u(y) - \text{Lip}_u(\partial\Omega) \|x - y\| \leq u(x)$ para $x \in \Omega$, como queríamos mostrar.

Portanto,

$$\text{Lip}_u(\partial\Omega \cup \{x\}) = \sup \left\{ \frac{|f(y) - f(z)|}{\|y - z\|} : y, z \in \partial\Omega \cup \{x\}, y \neq z \right\} \leq \text{Lip}_u(\partial\Omega),$$

donde concluímos que $\text{Lip}_u(\partial\Omega \cup \{x\}) = \text{Lip}_u(\partial\Omega)$. \square

Finalmente, podemos demonstrar o principal resultado dessa seção, que afirma que funções AML satisfazem comparação com cones, valendo também a recíproca dessa afirmação. Sendo assim, as duas definições são equivalentes, apesar de parecerem bastante distintas à primeira vista.

Teorema 2.2.9. *Uma função $u \in C(\Omega)$ é absolutamente minimizante Lipschitz em Ω se, e somente se, satisfaz comparação com cones em Ω .*

Demonstração. (\Leftarrow) Tomando $\Omega \subset\subset \Omega$, vamos mostrar que $\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega)$. Notamos que, pelo Teorema 2.2.7, $u \in C(\overline{\Omega})$ é Lipschitz em $\overline{\Omega}$ e, pelo Lema 2.1.2, $\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\overline{\Omega})$.

Agora, como $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$, temos que

$$\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\overline{\Omega}) \geq \text{Lip}_u(\partial\Omega). \quad (2.11)$$

Para mostrar a desigualdade inversa, tomemos $x, y \in \Omega$. Utilizando o Lema 2.2.8 duas vezes, notando que $\partial\Omega \cup \{x\} = \partial(\Omega \setminus \{x\})$, obtemos

$$\text{Lip}_u(\partial\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega \cup \{x\}) = \text{Lip}_u(\partial\Omega \cup \{x, y\}).$$

Como $x, y \in \partial\Omega \cup \{x, y\}$, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq \text{Lip}_u(\partial\Omega \cup \{x, y\}) \|x - y\| = \text{Lip}_u(\partial\Omega) \|x - y\|.$$

Sendo a escolha de $x, y \in \Omega$ arbitrária, temos $\text{Lip}_u(\Omega) \leq \text{Lip}_u(\partial\Omega)$, e por (2.11),

$$\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega).$$

(\Rightarrow) Dados $u \in AML(\Omega)$, $\Omega \subset\subset \Omega$, $a \in \mathbb{R}$ e $z \notin \Omega$, queremos mostrar que

$$u(x) - a \|x - z\| \leq \max_{w \in \partial\Omega} (u(w) - a \|w - z\|), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Tomando

$$\Omega = \left\{ x \in \Omega : u(x) - a \|x - z\| > \max_w \partial\Omega (u(w) - a \|w - z\|) \right\},$$

vamos mostrar que Ω é vazio. Supondo que $\Omega \neq \emptyset$, considere o cone

$$C(x) = a \|x - z\| + \max_w \partial\Omega (u(w) - a \|w - z\|).$$

Então $\Omega = \Omega \cap (u - C)^{-1}((0, +\infty))$ é aberto, afinal $(u - C) \in C(\Omega)$. Vamos mostrar que $u = C$ em $\partial\Omega$.

Para isso, notemos que, se $x \in \partial\Omega$, então $u(x) - a \|x - z\| \leq \max_w \partial\Omega (u(w) - a \|w - z\|)$, ou seja, $(u - C)(x) \leq 0$.

- Supondo que exista $x \in \partial\Omega$ com $(u - C)(x) > 0$, então $x \notin \partial\Omega$, e como $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$, vale que $x \in \Omega$, donde $x \in \Omega$ pela definição de Ω , contradizendo o fato de Ω ser aberto.
- E, se existisse $x \in \partial\Omega$ com $(u - C)(x) < 0$, então, como $u - C \in C(\Omega)$, existiria uma vizinhança V_x de x na qual $(u - C) < 0$. Logo, $V_x \cap \Omega = \emptyset$, contradizendo o fato de $x \in \partial\Omega$.

Portanto, $u = C$ em $\partial\Omega$. Agora, como, por hipótese, $u \in AML(\Omega)$, temos

$$\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega) = \text{Lip}_C(\partial\Omega) \stackrel{2.2.2}{=} |a|. \quad (2.12)$$

Tomemos $x_0 \in \Omega$, o qual supomos que existe. Sendo Ω aberto, o raio de C através de x_0 ,

$$\{z + t(x_0 - z), t \geq 0\}$$

contém um segmento I em Ω , contendo x_0 , que intercepta $\partial\Omega$ nas suas extremidades. Denotamos $\partial I = \{z + t_1(x_0 - z), z + t_2(x_0 - z)\} \subset \partial\Omega$.

Notemos que

$$t \mapsto C(z + t(x_0 - z)) = \max_w \partial\Omega (u(w) - a \|w - z\|) + a \|x_0 - z\| t$$

é linear e possui constante de Lipschitz $|a| \|x_0 - z\|$ em I . Além disso, $t \mapsto u(z + t(x_0 - z))$ também possui $|a| \|x_0 - z\|$ como constante de Lipschitz, pois, por (2.12),

$$\begin{aligned} |a| &= \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|} : x, y \in \Omega, x \neq y \right\} \\ &\geq \sup \left\{ \frac{|u(z + t(x_0 - z)) - u(z + s(x_0 - z))|}{\|(z + t(x_0 - z)) - (z + s(x_0 - z))\|} : t, s \in [0, 1], t \neq s \right\} \\ &= \sup \frac{1}{\|x_0 - z\|} \left\{ \frac{|u(z + t(x_0 - z)) - u(z + s(x_0 - z))|}{|t - s|} : t, s \in [0, 1], t \neq s \right\}, \end{aligned}$$

logo,

$$|a| \|x_0 - z\| \geq \sup \left\{ \frac{|u(z + t(x_0 - z)) - u(z + s(x_0 - z))|}{|t - s|} : t, s \in [0, 1], t \neq s \right\};$$

e, sendo $u = C$ em $\partial\Omega$, então $u = C$ em ∂I e

$$\begin{aligned} \frac{u(z + t_1(x_0 - z)) - u(z + t_2(x_0 - z))}{|t_1 - t_2|} &= \frac{C(z + t_1(x_0 - z)) - C(z + t_2(x_0 - z))}{|t_1 - t_2|} \\ &= \frac{|a| \|x_0 - z\| |t_1 - t_2|}{|t_1 - t_2|} \\ &= |a| \|x_0 - z\|. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 2.1.4, u é afim em I , e como $C = u$ em ∂I , segue que

$$u(z + t(x_0 - z)) = C(z + t(x_0 - z))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $z + t(x_0 - z) \in I$. Em particular, $u(x_0) = C(x_0)$, contradizendo o fato de $x_0 \in \Omega$. Logo, $\Omega = \emptyset$, e concluímos que u satisfaz comparação com cones por cima em Ω .

Analogamente, podemos mostrar que u satisfaz comparação com cones por baixo em Ω , e portanto, concluímos que u satisfaz comparação com cones em Ω . \square

Observação. Pela segunda parte da prova do Teorema 2.2.9, concluímos que, se $u \in C(\Omega)$ não satisfaz comparação com cones por cima em Ω , então existe $\Omega' \subset\subset \Omega$ aberto não vazio e um cone C com vértice $x_0 \notin \Omega'$ tais que $u = C$ em $\partial\Omega'$ e $u > C$ em Ω' .

2.3 Existência de soluções do problema de extensão de Lipschitz

Devido seu caráter analítico de uso maleável, passamos a tratar de funções que satisfazem comparação com cones em um domínio Ω como as soluções canônicas do problema de extensão de Lipschitz. O nosso objetivo nesta seção é mostrar que, dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com $0 \in \partial\Omega$ (para facilitar a notação), $f \in C(\partial\Omega)$ tal que existem $A^\pm, B^\pm \in \mathbb{R}$ com $A^+ \geq A^-$ e

$$A^- \|x\| + B^- \leq f(x) \leq A^+ \|x\| + B^+, \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega, \quad (2.13)$$

então existe solução do problema de extensão de Lipschitz para f em Ω .

Notemos que, se f é Lipschitz em $\partial\Omega$, então $f \in C(\partial\Omega)$ e

$$|f(x) - f(0)| \leq \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x\|$$

ou, ainda,

$$f(0) - \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x\| \leq f(x) \leq f(0) + \text{Lip}_f(\partial\Omega) \|x\|,$$

isto é, vale (2.13) para $A^\pm = \pm \text{Lip}_f(\partial\Omega)$ e $B^\pm = f(0)$.

A estratégia que aplicamos para mostrar esse resultado é a de usar um método semelhante ao de Perron, e seguirá os passos de [5]. Mas antes, precisamos mostrar alguns resultados preliminares [5].

Lema 2.3.1. *Seja $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset C(\Omega)$ uma família de funções que satisfazem comparação com cones por cima em Ω . Definindo $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$h(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x), \quad (2.14)$$

e supondo que h é finito e localmente limitado por cima em Ω , temos que $h \in C(\Omega)$ e h satisfaz comparação com cones por cima em Ω .

Analogamente, se $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset C(\Omega)$ é uma família de funções que satisfazem comparação com cones por baixo em Ω , e se $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$g(x) = \inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x),$$

for finito e localmente limitado por baixo em Ω , temos que $g \in C(\Omega)$ e g satisfaz comparação com cones por baixo em Ω .

Demonstração. Primeiramente, tomamos $\lambda_0 \in \Lambda$ e notamos que, se $g_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$g_\lambda(x) = \max \{f_\lambda(x), f_{\lambda_0}(x)\}, \quad \text{qualquer que seja } \lambda \in \Lambda, \quad (2.15)$$

então podemos substituir f_λ por g_λ em (2.14). Vamos mostrar que cada g_λ satisfaz comparação com cones por cima em Ω .

De fato, sejam $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $C : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ um cone cujo vértice não pertence a Ω' e tal que $g_\lambda(x) = \max \{f_\lambda(x), f_{\lambda_0}(x)\} \leq C(x)$, para todo $x \in \partial\Omega'$. Então $f_\lambda \leq C$ e $f_{\lambda_0} \leq C$ em $\partial\Omega'$, e como ambos f_λ e f_{λ_0} satisfazem comparação com cones por cima em Ω , temos que $f_\lambda \leq C$ e $f_{\lambda_0} \leq C$ em Ω' . Daí, $g_\lambda \leq C$ em Ω' , como queríamos mostrar.

Dessa forma, podemos supor sem perda de generalidade que cada função f_λ é localmente limitada por cima (por h) e por baixo (por f_{λ_0}). Logo, usando (2.9), temos que $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é localmente equicontínuo, afinal, dado $z \in \Omega$ e $R > 0$ tal que $B_{4R}(z) \subset \Omega$, temos que h e f_{λ_0} são limitadas em $B_{4R}(z)$ e, se $\lambda \in \Lambda$, vale

$$|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \stackrel{(2.9)}{\leq} \left(\sup_{B_{4R}(z)} h - \sup_{B_R(z)} f_{\lambda_0} \right) \frac{\|x - y\|}{R} \leq \left(\sup_{B_{4R}(z)} h - \sup_{B_R(z)} f_{\lambda_0} \right) \frac{\|x - y\|}{R}$$

e, em particular,

$$f_\lambda(x) \leq f_\lambda(y) + \left(\sup_{B_{4R}(z)} h - \sup_{B_R(z)} f_{\lambda_0} \right) \frac{\|x - y\|}{R},$$

para $x, y \in B_R(z)$. Tomando o supremo sobre $\lambda \in \Lambda$ e trocando a ordem de x e y , concluímos que

$$|h(x) - h(y)| \leq \left(\sup_{B_{4R}(z)} h - \sup_{B_R(z)} f_{\lambda_0} \right) \frac{\|x - y\|}{R}, \text{ para quaisquer } x, y \in B_r(z),$$

ou seja, h é contínua em Ω .

Agora, tomemos $\Omega \subset\subset \Omega$, $a \in \mathbb{R}$ e $x_0 \notin \Omega$. Dado $\lambda \in \Lambda$, temos, pelo fato de f_λ satisfazer comparação com cones por cima em Ω e pela definição de h ,

$$f_\lambda(x) - a \|x - x_0\| \leq \max_w (f_\lambda(w) - a \|w - x_0\|) \leq \max_w (h(w) - a \|w - x_0\|), \quad (2.16)$$

para todo $x \in \Omega$. Tomando o supremo sobre $\lambda \in \Lambda$ no lado esquerdo, concluímos que h satisfaz comparação com cones por cima pelo Lema 2.2.5. \square

Dessa forma, o supremo de funções f_λ que satisfazem comparação com cones por cima em Ω também satisfaz essa propriedade, desde que esse supremo seja finito e localmente limitado. Nota-se que foi necessário utilizar a constante de Lipschitz local de cada função f_λ para mostrar esse resultado.

Lema 2.3.2. *Definimos $\underline{h}, \bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\underline{h}(x) = \sup \left\{ \underline{C}(x) : \underline{C}(x) = a \|x - z\| + b, \ a < A^-, \ z \in \partial\Omega \text{ e } \underline{C} \leq f \text{ em } \partial\Omega \right\},$$

$$\bar{h}(x) = \inf \left\{ \bar{C}(x) : \bar{C}(x) = a \|x - z\| + b, \ a > A^+, \ z \in \partial\Omega \text{ e } \bar{C} \geq f \text{ em } \partial\Omega \right\}.$$

Então, as funções \underline{h} e \bar{h} estão bem definidas, são contínuas em $\bar{\Omega}$ e satisfazem

$$A^- \|x\| + B^- \leq \underline{h}(x) \leq \bar{h}(x) \leq A^+ \|x\| + B^+, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.17)$$

e

$$\bar{h} = \underline{h} = f \text{ em } \partial\Omega. \quad (2.18)$$

Além disso, \underline{h} satisfaz comparação com cones por cima em Ω e \bar{h} satisfaz comparação com cones por baixo em Ω .

Demonstração. Para mostrar que \bar{h} está bem definida, precisamos mostrar que existem funções com as propriedades de \bar{C} como aparecem na definição. Fixados $z \in \partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ de modo que $f(x) < f(z) + \varepsilon$, para todo $x \in B_\delta(z) \cap \partial\Omega$ (que existe, pois

f é contínua em $\partial\Omega$), tomemos $a > \max\{A^+, 0\}$ tal que

$$f(z) + \varepsilon + a\delta > \max_{x-z} \delta (A^+ \|x\| + B^+) \quad (2.19)$$

e, no caso em que $z \neq 0$,

$$f(z) + \varepsilon + a \|z\| > B^+. \quad (2.20)$$

Essa escolha de a é possível, bastando tomar

$$a > \max \left\{ 0, A^+, \frac{1}{\delta} \left(\max_{x-z} \delta (A^+ \|x\| + B^+) - f(z) - \varepsilon \right), \frac{1}{\|z\|} (B^+ - f(z) - \varepsilon) \right\}.$$

Dessa forma, vamos mostrar que

$$\overline{C}(x) = f(z) + \varepsilon + a \|x - z\| \geq A^+ \|x\| + B^+ = C^+(x) \text{ em } \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z), \quad (2.21)$$

donde segue que $\overline{C} \geq f$ em $\partial\Omega$, visto que, se $x \in B_\delta(z) \cap \partial\Omega$, vale que $f(x) < f(z) + \varepsilon$ e

$$\overline{C}(x) = f(z) + \varepsilon + a \|x - z\| \geq f(x) + 0.$$

Para mostrar (2.21), notamos que $a > A^+$ implica que o conjunto

$$\begin{aligned} \Omega &:= \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\delta(z)} : \overline{C}(x) < C^+(x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\delta(z)} : f(z) + \varepsilon + a \|x - z\| < A^+ \|x\| + B^+\} \end{aligned}$$

é aberto e limitado. De fato, $\Omega = (C^+ - \overline{C})^{-1}((0, +\infty))$, com $C^+ - \overline{C} \in C(\Omega)$, logo, Ω é aberto, e, dado $x \in \Omega$, então

$$f(z) + \varepsilon + a \|x\| - a \|z\| \leq f(z) + \varepsilon + a \|x - z\| < A^+ \|x\| + B^+,$$

que implica em

$$\|x\| \leq \frac{1}{a - A^+} (B^+ - f(z) - \varepsilon + a \|z\|).$$

Vamos mostrar que Ω é vazio.

Para isso, notemos, primeiramente, que $\overline{B_\delta(z)} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, por (2.19). Logo, $\overline{C} = C^+$ em $\partial\Omega$, e como $0, z \notin \Omega$ (por causa de (2.20)), segue que $\overline{C} \equiv C^+$ em Ω , pois \overline{C} e C^+ satisfazem comparação com cones por cima em Ω . Logo, Ω é vazio.

Portanto, \overline{h} é bem definido. Além disso, pela definição de \overline{C} , vale que $\overline{C}(z) = f(z) + \varepsilon$, e como a escolha de $\varepsilon > 0$ foi arbitrária, segue que

$$\overline{h}(z) = \inf \left\{ \overline{C}(z) : \overline{C}(x) = a \|x - z\| + b, \ a > A^+, \ z \in \partial\Omega, \ \overline{C} \geq f \text{ em } \partial\Omega \right\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \bar{C}(z) \\ &= f(z) + \varepsilon, \text{ qualquer que seja } \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

logo, segue que $\bar{h}(z) = f(z)$, então (2.18) vale para \bar{h} .

Além disso, para $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\bar{C}(x) = (A^+ + \varepsilon)\|x\| + B^+$, que satisfaz as condições na definição de \bar{h} (lembrando que $0 \in \partial\Omega$), logo,

$$\bar{h}(x) \leq (A^+ + \varepsilon)\|x\| + B^+, \text{ para quaisquer } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \varepsilon > 0,$$

que implica $\bar{h} \leq C^+$ em \mathbb{R}^n , como em (2.17). Analogamente, mostramos que \underline{h} é bem definido e $\underline{h}(x) \geq A^-\|x\| + B^-$ em \mathbb{R}^n .

Para mostrar que $\underline{h} \leq \bar{h}$, tomamos quaisquer dois cones $\underline{C}(x) = \underline{a}\|x - \underline{z}\| + \underline{b}$ e $\bar{C}(x) = \bar{a}\|x - \bar{z}\| + \bar{b}$ satisfazendo as condições nas definições de \underline{h} e \bar{h} , respectivamente. Como $\underline{C} \leq f \leq \bar{C}$ em $\partial\Omega$, $\underline{z}, \bar{z} \in \partial\Omega$ e $\bar{a} > A^+ \geq A^- > \underline{a}$, o conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{C}(x) > \bar{C}(x)\}$$

é limitado, satisfaz $\bar{z}, \underline{z} \notin \Omega$ e $\underline{C} = \bar{C}$ em Ω . Argumentando como feito acima para Ω , concluímos que Ω é vazio, e, portanto, $\underline{C} \leq \bar{C}$ em \mathbb{R}^n . Dessa forma, segue que $\underline{h} \leq \bar{h}$ em \mathbb{R}^n , e está provado (2.17).

Em particular, \underline{h} e \bar{h} são finitos e localmente limitados em Ω , e, portanto, segue do Lema 2.3.1 que segue que \underline{h} e \bar{h} são contínuos em Ω , e, ainda, \underline{h} (respectivamente, \bar{h}) satisfaz comparação com cones por cima (respectivamente, por baixo).

Resta mostrar que \underline{h} e \bar{h} são contínuos em $\partial\Omega$. Como \bar{h} é semicontínua superiormente em \mathbb{R}^n , como o ínfimo de funções contínuas e pela Proposição 1.1.2, e \underline{h} é semicontínua inferiormente em \mathbb{R}^n , obtemos, usando (2.18) e $\underline{h} \leq \bar{h}$, que, se $x \in \partial\Omega$,

$$f(x) = \underline{h}(x) \stackrel{(1.2)}{\leq} \liminf_y \underline{h}(y) \leq \liminf_y \bar{h}(y) \leq \limsup_y \bar{h}(y) \stackrel{(1.1)}{\leq} f(x). \quad (2.22)$$

Logo, \bar{h} é contínua em $\partial\Omega$, e podemos mostrar, de maneira análoga, que \underline{h} é contínua em $\partial\Omega$, com $\underline{h} = \bar{h} = f$ em $\partial\Omega$. \square

As funções \underline{h} e \bar{h} serão limitantes da solução do PEL que mostraremos que existe. Resta apenas mostrar mais um lema auxiliar, dado a seguir.

Lema 2.3.3. *Seja $u \in C(\Omega)$ uma função que satisfaz comparação com cones por cima em Ω , mas que não satisfaz comparação com cones por baixo em Ω . Então existe um conjunto não vazio $\Omega' \subset\subset \Omega$ e um cone $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com vértice fora de Ω e tal que $u = C$ em*

$\partial\Omega$, $u < C$ em Ω , e tal que a função $\hat{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} \hat{u} = u & \text{em } \Omega \setminus \Omega \\ \hat{u} = C & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.23)$$

satisfaz comparação com cones por cima em Ω . Além disso, se u é Lipschitz em Ω , então \hat{u} também o é, e $\text{Lip}_{\hat{u}}(\Omega) \leq \text{Lip}_u(\Omega)$.

Demonstração. Como u não satisfaz comparação com cones por baixo em Ω , existe um aberto não-vazio $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ e um cone $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com vértice fora de Ω satisfazendo $u = C$ em $\partial\Omega$ e $u < C$ em Ω . Definindo \hat{u} como no enunciado, vamos mostrar que \hat{u} satisfaz comparação com cones por cima em Ω . Supondo que isso é falso, então existe $\tilde{\tilde{\Omega}} \subset\subset \Omega$ não-vazio e um cone $\tilde{C} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com vértice fora de $\tilde{\tilde{\Omega}}$, tal que $\hat{u} = \tilde{C}$ em $\partial\tilde{\tilde{\Omega}}$ e $\hat{u} > \tilde{C}$ em $\tilde{\tilde{\Omega}}$.

Como u satisfaz comparação com cones por cima em Ω , temos que $u \leq \hat{u} = \tilde{C}$ em $\partial\tilde{\tilde{\Omega}}$ implica que $u \leq \tilde{C}$ em $\tilde{\tilde{\Omega}}$. Daí, segue que $\hat{u} \neq u$ em $\tilde{\tilde{\Omega}}$, donde segue que $\hat{u} = C$ em $\tilde{\tilde{\Omega}}$ e, portanto, $\tilde{\tilde{\Omega}} \subset \Omega$. Dessa forma, em $\partial\tilde{\tilde{\Omega}}$, $\tilde{C} = \hat{u} = C$ e, pela comparação com cones, segue que $\tilde{C} \equiv C \equiv \hat{u}$ em $\tilde{\tilde{\Omega}}$. Logo, $\tilde{\tilde{\Omega}} = \emptyset$, onde chegamos em uma contradição. Logo, \hat{u} satisfaz comparação com cones por cima em Ω .

Agora, supondo que u é Lipschitz em Ω , como

$$\text{Lip}_{\hat{u}}(\Omega) = \text{Lip}_C(\Omega) = \text{Lip}_C(\partial\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega) \leq \text{Lip}_u(\Omega),$$

podemos ver que $\text{Lip}_{\hat{u}}(\Omega) = \max \{ \text{Lip}_{\hat{u}}(\Omega), \text{Lip}_{\hat{u}}(\Omega \setminus \Omega) \} \leq \text{Lip}_u(\Omega)$, afinal $\hat{u} = u$ em $\Omega \setminus \Omega$. \square

Notemos que a função \hat{u} é semelhante ao levantamento harmônico de u em Ω , definido para funções subharmônicas u em Ω . Dessa forma, notando que o método de Perron para mostrar existência de funções harmônicas em Ω consiste em tomar o supremo sobre funções subharmônicas em Ω limitadas em $\partial\Omega$, aplicamos a seguir um método semelhante.

Teorema 2.3.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in C(\partial\Omega)$ e suponhamos sem perda de generalidade que $0 \in \partial\Omega$. Sejam $A^\pm, B^\pm \in \mathbb{R}$ com $A^+ \geq A^-$ e*

$$A^- \|x\| + B^- \leq f(x) \leq A^+ \|x\| + B^+, \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega. \quad (2.24)$$

Então, existe uma função $u \in C(\bar{\Omega}) \cap AML(\Omega)$ tal que $u = f$ em $\partial\Omega$ satisfazendo

$$A^- \|x\| + B^- \leq u(x) \leq A^+ \|x\| + B^+, \quad \text{para qualquer } x \in \bar{\Omega}. \quad (2.25)$$

Demonstração. Definimos $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u(x) = \sup \left\{ v(x) : \underline{h} \leq v \leq \bar{h} \text{ e } v \text{ satisfaz comparação com cones por cima em } \Omega \right\}. \quad (2.26)$$

Pelo Lema 2.3.2, o conjunto da direita inclui \underline{h} , logo, u está bem definida e satisfaz comparação com cones por cima, pelo Lema 2.3.1. Por (2.18), $u \in C(\bar{\Omega})$ e $u = f$ em $\partial\Omega$. Logo, ou u satisfaz comparação com cones, e daí $u \in AML(\Omega)$ e está demonstrado o teorema, ou u não satisfaz comparação com cones por baixo em Ω . Nesse caso, o Lema 2.3.3 afirma que existe um conjunto não-vazio $\Omega' \subset\subset \Omega$, um cone $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u = C$ em $\partial\Omega'$, $u < C$ em Ω' e tal que a função \hat{u} satisfaz comparação com cones por cima em Ω , onde

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus \Omega' \\ C(x), & x \in \Omega'. \end{cases}$$

Claramente, $\underline{h} \leq u \leq \hat{u}$ em Ω . Vamos mostrar que também vale que $\hat{u} \leq \bar{h}$ em Ω , contradizendo a definição de u , pois, dessa forma, $u < \hat{u}$ em Ω e

$$\hat{u} \in \left\{ v(x) : \underline{h} \leq v \leq \bar{h} \text{ e } v \text{ satisfaz comparação com cones por cima em } \Omega \right\}.$$

Para isso, assuma que é falso que $\hat{u} \leq \bar{h}$ em Ω . Sendo $\Omega' = \{x \in \Omega : \hat{u}(x) > \bar{h}(x)\}$, temos que $\Omega' \subset \Omega$, pois $\hat{u} = u \leq \bar{h}$ em $\Omega \setminus \Omega'$. Dessa forma, $\Omega' = \{x \in \Omega : C(x) > \bar{h}(x)\}$, e vale que $\bar{h} = C$ em $\partial\Omega'$. Como \bar{h} satisfaz comparação com cones por baixo, $\bar{h} \geq C$ em Ω' , isto é, Ω' é vazio, uma contradição.

Portanto, a função u definida por (2.26) é tal que $u \in AML(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $u = f$ em $\partial\Omega$ e satisfaz as desigualdades (2.24), devido à Eq. (2.17). \square

2.4 Unicidade de soluções do problema de extensão de Lipschitz

Para encerrar o capítulo de introdução ao problema de extensão de Lipschitz, mostramos a unicidade de suas soluções. E, para isso, seguimos os passos de [3], começando com alguns resultados intermediários necessários adiante.

Para cada $\varepsilon > 0$, definimos o conjunto

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}. \quad (2.27)$$

Dados $u \in C(\Omega)$ e $x \in \Omega_\varepsilon$, usamos a notação

$$S_\varepsilon^+(u, x) = \max_{z \in B_\varepsilon(x)} \frac{u(z) - u(x)}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad S_\varepsilon^-(u, x) = \max_{z \in B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(z)}{\varepsilon} \quad (2.28)$$

e

$$u^\varepsilon(x) = \max_{z \in B_\varepsilon(x)} u(z) \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(x) = \min_{z \in B_\varepsilon(x)} u(z). \quad (2.29)$$

Lema 2.4.1. *Suponhamos que $u, v \in C(\Omega)$ sejam limitados em Ω e satisfazem, para algum $\varepsilon > 0$,*

$$S_\varepsilon^-(u, x) - S_\varepsilon^+(u, x) \leq 0 \leq S_\varepsilon^-(v, x) - S_\varepsilon^+(v, x), \quad \text{para todo } x \in \Omega_\varepsilon. \quad (2.30)$$

Então

$$\sup_{\Omega} (u - v) = \sup_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} (u - v).$$

Demonstração. Por contradição, suponhamos que

$$\sup_{\Omega} (u - v) > \sup_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} (u - v). \quad (2.31)$$

Ou seja, o supremo de $u - v$ em Ω é atingido em $\Omega_\varepsilon \subset \subset \Omega$ e não é atingido em $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Logo, sendo $u - v \in C(\Omega)$, o conjunto $\Omega = \{x \in \Omega : (u - v)(x) = \sup_{\Omega} (u - v)\}$ é não-vazio, fechado e contido em Ω_ε . Definindo $\Omega := \{x \in \Omega : u(x) = \sup_{\Omega} u\}$, que é não vazio, pois $u \in C(\Omega)$ e Ω é fechado, tomemos $x_0 \in \partial\Omega$. Como $u - v$ atinge seu valor máximo em x_0 , pois $x_0 \in \overline{\Omega} = \Omega \subset \Omega$, temos que

$$u(x) - v(x) \leq u(x_0) - v(x_0), \quad \text{para todo } x \in B_\varepsilon(x_0)$$

ou, equivalentemente,

$$v(x_0) - v(x) \leq u(x_0) - u(x), \quad \text{para todo } x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Dividindo ambos os lados por ε e tomando o máximo entre todos os $x \in B_\varepsilon(x_0)$, concluímos que

$$S_\varepsilon^-(v, x_0) \leq S_\varepsilon^-(u, x_0). \quad (2.32)$$

Se $S_\varepsilon^+(u, x_0) = 0$, da primeira desigualdade de (2.30), temos que $S_\varepsilon^-(u, x_0) = 0$, visto que $S_\varepsilon^-(u, x_0) \geq \frac{u(x_0) - u(x_0)}{\varepsilon} = 0$. De (2.32), deduzimos que $S_\varepsilon^-(v, x_0) = 0$. Da segunda desigualdade de (2.30), temos $S_\varepsilon^+(v, x_0) = 0$.

Ou seja, u e v são constantes em $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$, donde segue que $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset \Omega$, contradizendo a escolha de $x_0 \in \partial\Omega$.

E, se $S_\varepsilon^+(u, x_0) > 0$, tomemos $z \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ tal que $S_\varepsilon^+(u, x_0) = \frac{u(z) - u(x_0)}{\varepsilon}$. Como $S_\varepsilon^+(u, x_0) > 0$, então $u(z) > u(x_0)$, e como $x_0 \in \Omega$, vemos que $z \notin \Omega$, pois, se pertencesse,

teríamos $u(z) > u(x_0) = \sup_{\Omega} u$, um absurdo. Logo, sendo $z \notin \Omega$, deduzimos que

$$u(z) - v(z) < u(x_0) - v(x_0)$$

ou, ainda,

$$\varepsilon S_{\varepsilon}^{+}(u, x_0) = u(z) - u(x_0) < v(z) - v(x_0) \leq \varepsilon S_{\varepsilon}^{+}(v, x_0). \quad (2.33)$$

De (2.32) e (2.33), obtemos

$$S_{\varepsilon}^{-}(v, x_0) - S_{\varepsilon}^{+}(v, x_0) < S_{\varepsilon}^{-}(u, x_0) - S_{\varepsilon}^{+}(u, x_0),$$

o que contradiz (2.30). Portanto, concluímos que

$$\sup_{\Omega} (u - v) = \sup_{\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon}} (u - v),$$

como queríamos mostrar. □

Mostramos a seguir que, se u satisfaz comparação com cones por cima e se v satisfaz comparação com cones por baixo em Ω , então u^{ε} e v^{ε} satisfazem às hipóteses do Lema 2.4.1, para cada $\varepsilon > 0$.

Lema 2.4.2. *Se u satisfaz comparação com cones por cima em Ω , então, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, vale*

$$S_{\varepsilon}^{-}(u^{\varepsilon}, x) - S_{\varepsilon}^{+}(u^{\varepsilon}, x) \leq 0, \text{ para todo } x \in \Omega_{2\varepsilon}, \quad (2.34)$$

e, se v satisfaz comparação com cones por baixo em Ω , então, para cada $\varepsilon > 0$,

$$S_{\varepsilon}^{-}(v_{\varepsilon}, x) - S_{\varepsilon}^{+}(v_{\varepsilon}, x) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega_{2\varepsilon}. \quad (2.35)$$

Demonstração. Para provar (2.34), fixemos um ponto $x_0 \in \Omega_{2\varepsilon}$. Tomando $y_0 \in \overline{B_{\varepsilon}(x_0)}$ e $z_0 \in \overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}$ tais que $u(y_0) = u^{\varepsilon}(x_0)$ e $u(z_0) = u^{2\varepsilon}(x_0)$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(S_{\varepsilon}^{-}(u^{\varepsilon}, x_0) - S_{\varepsilon}^{+}(u^{\varepsilon}, x_0) \right) &= u^{\varepsilon}(x_0) + (-u^{\varepsilon})^{\varepsilon}(x_0) - (u^{\varepsilon})^{\varepsilon}(x_0) + u^{\varepsilon}(x_0) \\ &= 2u^{\varepsilon}(x_0) - (u^{\varepsilon})_{\varepsilon}(x_0) - (u^{\varepsilon})^{\varepsilon}(x_0). \end{aligned}$$

Notemos que $(u^{\varepsilon})^{\varepsilon}(x_0) = \max_{z \in \overline{B_{\varepsilon}(x_0)}} u^{\varepsilon}(z) = \max_{z \in \overline{B_{\varepsilon}(x_0)}} \max_{y \in \overline{B_{\varepsilon}(z)}} u(y)$. Para simplificar essa expressão, tomamos $z \in \overline{B_{\varepsilon}(x_0)}$ e $y \in \overline{B_{\varepsilon}(z)}$. Logo,

$$\|y - x_0\| \leq \|y - z\| + \|z - x_0\| \leq 2\varepsilon,$$

ou seja, $y \in B_{2\varepsilon}(x_0)$. Daí,

$$(u^\varepsilon)^\varepsilon(x_0) = \max_z \max_{y \in \overline{B_\varepsilon(z)}} u(y) \leq \max_y \max_{z \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}} u(y) = u^{2\varepsilon}(x_0).$$

Reciprocamente, dado $y \in \overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}$, então $y \in \overline{B_\varepsilon(z)}$, para um certo $z \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ (por exemplo, z sendo o ponto médio do segmento de reta que une x_0 e y). Logo,

$$u^{2\varepsilon}(x_0) \leq \max_z \max_{y \in \overline{B_\varepsilon(z)}} u(y) = (u^\varepsilon)^\varepsilon(x_0),$$

e obtemos que $u^{2\varepsilon}(x_0) = (u^\varepsilon)^\varepsilon(x_0)$. Além disso, notando que

$$(u^\varepsilon)_\varepsilon(x_0) = \min_z \max_{y \in \overline{B_\varepsilon(z)}} u(y) = \min_z \max_{y \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}} u(y)$$

e que $\max_y \max_{z \in \overline{B_\varepsilon(z)}} u(y) \geq u(x_0)$ se $z \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}$, concluímos que $(u^\varepsilon)_\varepsilon(x_0) \geq u(x_0)$.

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(S_\varepsilon^-(u^\varepsilon, x_0) - S_\varepsilon^+(u^\varepsilon, x_0) \right) &= 2u^\varepsilon(x_0) - (u^\varepsilon)_\varepsilon(x_0) - (u^\varepsilon)^\varepsilon(x_0) \\ &\leq 2u^\varepsilon(x_0) - u(x_0) - u^{2\varepsilon}(x_0) \\ &= 2u(y_0) - u(x_0) - u(z_0). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Sendo $u(z_0) = u^{2\varepsilon}(x_0)$, podemos ver que, dado $w \in S_{2\varepsilon}(x_0)$, então

$$\frac{u(w) - u(x_0)}{\|w - x_0\|} = \frac{u(w) - u(x_0)}{2\varepsilon} \leq \max_w \max_{S_{2\varepsilon}(x_0)} \frac{u(w) - u(x_0)}{2\varepsilon} \leq \frac{u(z_0) - u(x_0)}{2\varepsilon}$$

Logo,

$$u(w) \leq u(x_0) + \frac{u(z_0) - u(x_0)}{2\varepsilon} \|w - x_0\|, \quad \text{para todo } w \in \partial(B_{2\varepsilon}(x_0) \setminus \{x_0\}). \quad (2.37)$$

Como u satisfaz comparação com cones por cima em Ω , temos que (2.37) é válida para $w \in B_{2\varepsilon} \setminus \{x_0\}$, logo, é válida para todo $w \in \overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}$. Em particular, para $w = y_0 \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}$, obtemos

$$u(y_0) \leq u(x_0) + \frac{u(z_0) - u(x_0)}{2\varepsilon} \|y_0 - x_0\| \leq u(x_0) + \frac{u(z_0) - u(x_0)}{2},$$

ou seja,

$$2u(y_0) - u(x_0) - u(z_0) \leq 0.$$

Logo, por (2.36), concluímos que

$$\varepsilon \left(S_\varepsilon^-(u^\varepsilon, x_0) - S_\varepsilon^+(u^\varepsilon, x_0) \right) = 2u(y_0) - u(x_0) - u(z_0) \leq 0.$$

Para mostrar (2.35), basta notarmos que $-v$ satisfaz comparação com cones por cima em Ω , e, por (2.34), obtemos que, dado $x \in \Omega_{2\varepsilon}$, então

$$S_\varepsilon^-((-v)^\varepsilon, x) - S_\varepsilon^+((-v)^\varepsilon, x) \leq 0,$$

e como $(-v)^\varepsilon = -v_\varepsilon$, concluímos que $S_\varepsilon^+(v_\varepsilon, x) - S_\varepsilon^-(v_\varepsilon, x) \leq 0$, ou seja,

$$S_\varepsilon^-(v_\varepsilon, x) - S_\varepsilon^+(v_\varepsilon, x) \geq 0$$

para todo $x \in \Omega_{2\varepsilon}$. □

Dessa forma, a partir dos dois lemas auxiliares mostrados acima, podemos provar o seguinte princípio de comparação.

Teorema 2.4.3. *Sejam Ω limitado, $u \in C(\overline{\Omega})$ uma função que satisfaz comparação com cones por cima em Ω e $v \in C(\overline{\Omega})$ uma função que satisfaz comparação com cones por baixo em Ω . Se $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω .*

Demonstração. Pelos Lemas 2.4.1 e 2.4.2, temos que

$$\sup_{\Omega_\varepsilon} (u^\varepsilon - v_\varepsilon) = \sup_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}} (u^\varepsilon - v_\varepsilon),$$

para cada $\varepsilon > 0$. Basta fazermos $\varepsilon \rightarrow 0^+$, e vamos justificar que

$$\max_{\overline{\Omega}} (u - v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\Omega_\varepsilon} (u^\varepsilon - v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}} (u^\varepsilon - v_\varepsilon) = \max_{\partial\Omega} (u - v).$$

De fato, basta notarmos que, sendo u uniformemente contínuo em Ω (pois $u \in C(\overline{\Omega})$ e Ω é limitado), então, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, dados $x \in \Omega_\varepsilon$ e $y \in B_\varepsilon(x)$, vale

$$|u(x) - u(y)| < \delta,$$

ou, de outra forma,

$$u(x) - \delta < u(y) < u(x) + \delta.$$

Logo, $u(x) - \delta \leq \max_{y \in B_\varepsilon(x)} u(y) \leq u(x) + \delta$, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$. Analogamente, mostramos que, se $x \in \Omega_\varepsilon$, então $-v(x) - \delta \leq \max_{y \in B_\varepsilon(x)} -v(y) \leq -v(x) + \delta$, logo,

$$u(x) - v(x) - 2\delta \leq u^\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x) \leq u(x) - v(x) + 2\delta, \text{ para todo } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Tomando o supremo sobre todo $x \in \Omega_\varepsilon$, obtemos que

$$\sup_{\Omega_\varepsilon}(u - v) - 2\delta \leq \sup_{\Omega_\varepsilon}(u^\varepsilon - v_\varepsilon) \leq \sup_{\Omega_\varepsilon}(u - v) + 2\delta$$

ou, equivalentemente,

$$\left| \sup_{\Omega_\varepsilon}(u^\varepsilon - v_\varepsilon) - \sup_{\Omega_\varepsilon}(u - v) \right| < 2\delta.$$

Logo,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\Omega_\varepsilon}(u^\varepsilon - v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\Omega_\varepsilon}(u - v) = \sup_{\Omega}(u - v) = \max_{\overline{\Omega}}(u - v).$$

Da mesma forma, mostramos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}}(u^\varepsilon - v_\varepsilon) = \max_{\partial\Omega}(u - v)$. \square

Corolário 2.4.4. *Sejam $u, v \in C(\overline{\Omega})$ funções que satisfazem comparação com cones em Ω e tais que $u = v = f$ em $\partial\Omega$, onde $f \in \partial\Omega$. Então $u = v$ em Ω .*

Demonstração. Basta notarmos que vale, em particular, que u satisfaz comparação com cones por baixo e v satisfaz comparação com cones por cima em Ω . Ainda, $u \leq v$ em $\partial\Omega$, pois $u = v = f$, por hipótese, e portanto, pelo Teorema 2.4.3, vale que $u \leq v$ em Ω .

Por um raciocínio análogo, podemos mostrar que $v \leq u$ em Ω . Logo, $u = v$ em Ω . \square

Portanto, mostramos que o Problema de Extensão de Lipschitz está bem posto e possui única solução. Ou seja, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz em $\partial\Omega$, então existe uma única função $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitz em $\overline{\Omega}$ tal que $u = f$ em $\partial\Omega$, $\text{Lip}_u(\overline{\Omega}) = \text{Lip}_f(\partial\Omega)$ e que satisfaça $\text{Lip}_u(\Omega) = \text{Lip}_u(\partial\Omega)$, qualquer que seja $\Omega \subset\subset \Omega$.

Capítulo 3

O ∞ -laplaciano

Nesta seção, estudamos majoritariamente o operador ∞ -laplaciano, e como soluções de problemas de Dirichlet envolvendo esse operador estão diretamente relacionadas a soluções do problema de extensão de Lipschitz discutido no capítulo anterior.

3.1 Motivação para a definição do operador

Primeiramente, vejamos uma ideia heurística para o surgimento do nome desse operador [8], [16]. A estratégia é considerar o caso limite do operador p -laplaciano, sendo esse uma importante ferramenta no estudo de equações diferenciais.

Definição 3.1.1. Dado $p \in (1, +\infty)$, definimos o operador p -laplaciano como o operador Δ_p dado por

$$\Delta_p u := \operatorname{div} \left(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \right).$$

Se $\Delta_p u = 0$ em Ω , dizemos que u é p -harmônica em Ω .

Fixado $p \in (1, +\infty)$, notemos que

$$\begin{aligned} \Delta_p u &= \sum_{i=1}^n \left[\|\nabla u\|^{p-2} u_{x_i} \right]_{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left((p-2) \|\nabla u\|^{p-4} \left(\sum_{j=1}^n u_{x_j} u_{x_i x_j} \right) u_{x_i} + \|\nabla u\|^{p-2} u_{x_i x_i} \right) \\ &= (p-2) \|\nabla u\|^{p-4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{x_j} u_{x_j x_i} u_{x_i} + \|\nabla u\|^{p-2} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \\ &= \|\nabla u\|^{p-4} \left[(p-2) \sum_{i,j=1}^n u_{x_j} u_{x_j x_i} u_{x_i} + \|\nabla u\|^2 \Delta u \right]. \end{aligned}$$

Logo, para cada $p \in (2, +\infty)$, se $u_p \in C^2(\Omega)$ é uma função p -harmônica em Ω , então

$$\|\nabla u_p\|^{p-4} \left[(p-2) \sum_{i,j=1}^n (u_p)_{x_j} (u_p)_{x_j x_i} (u_p)_{x_i} + \|\nabla u_p\|^2 \Delta u_p \right] = 0 \text{ em } \Omega. \quad (3.1)$$

Formalmente, ao dividirmos (3.1) por $\|\nabla u\|^{p-4} (p-2)$ e fazermos $p \rightarrow +\infty$, supondo que $u_{p_j} \rightarrow u$ uniformemente em Ω , para uma dada sequência $\{p_j\} \subset (2, +\infty)$ tal que $p_j \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow \infty$, obtemos que

$$\sum_{i,j=1}^n (u)_{x_j} (u)_{x_j x_i} (u)_{x_i} = 0 \text{ em } \Omega.$$

Essa discussão motiva a seguinte definição.

Definição 3.1.2. Definimos o operador ∞ -laplaciano como o operador Δ_∞ dado por

$$\Delta_\infty u(x) = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}(x) u_{x_j}(x) u_{x_i x_j}(x) = \langle \nabla^2 u(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle. \quad (3.2)$$

Se $\Delta_\infty u = 0$ em Ω , dizemos que u é ∞ -harmônica em Ω .

3.1.1 Ideia variacional

Segundo a teoria variacional, fixados $p > 2$ finito e $g \in C(\partial\Omega)$, existe uma única função $u_p \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solução fraca do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_p u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e essa função é minimizante do funcional $I_p : \mathcal{A}_p \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_p(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^p dx,$$

onde $\mathcal{A}_p = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : u = g \text{ em } \partial\Omega\}$ é o conjunto de funções admissíveis para esse problema. Ou seja, a função u_p é tal que

$$I_p(v) \geq I_p(u_p), \text{ para toda } v \in \mathcal{A}_p.$$

Tendo isso em mente, neste capítulo, mostramos que soluções de viscosidade de

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

minimizam o funcional $I(u) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)},$$

onde $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : u = g\}$. Para isso, provamos um resultado mais geral que afirma que funções ∞ -harmônicas são absolutamente minimizantes Lipschitz em Ω , que, pelas discussões provenientes da Definição 2.1.8, é equivalente a dizer que se $v \in C(\bar{\Omega})$ é Lipschitz em Ω e se $v = u$ em $\partial\Omega$, então

$$\text{Lip}_u(\Omega) \leq \text{Lip}_v(\Omega),$$

ou seja, u minimiza a seminorma de Lipschitz em Ω .

3.2 Soluções de viscosidade

A seguir, apresentamos a definição de solução de viscosidade a ser utilizada nesse trabalho, além de alguns resultados acerca dessas soluções [6] e, também, um dos exemplos mais clássicos de funções ∞ -harmônica encontrado na literatura [5].

Definição 3.2.1. (i) Dizemos que uma função $u \in C(\Omega)$ é uma solução de viscosidade de

$$-\Delta u \leq 0$$

em Ω , ou uma subsolução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ em Ω , se para todo ponto $\hat{x} \in \Omega$ máximo de $u - \varphi$, onde φ é de classe C^2 em uma vizinhança de \hat{x} , tivermos $-\Delta \varphi(\hat{x}) \leq 0$. Também podemos dizer que u é ∞ -subharmônica;

(ii) Dizemos que uma função $u \in C(\Omega)$ é uma solução de viscosidade de

$$-\Delta u \geq 0$$

em Ω , ou uma supersolução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ em Ω , se para todo ponto $\hat{x} \in \Omega$ mínimo de $u - \varphi$, onde φ é de classe C^2 em uma vizinhança de \hat{x} , tivermos $-\Delta \varphi(\hat{x}) \geq 0$. Nesse caso, podemos dizer que u é ∞ -superharmônica;

(iii) Dizemos que a função $u \in C(\Omega)$ é uma solução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ em Ω , ou ∞ -harmônica em Ω , se for simultaneamente subsolução e supersolução de viscosidade em Ω .

Notemos que u é ∞ -subharmônica se, e só se, $-u$ é ∞ -superharmônica em Ω . A motivação para a definição de subsolução (analogamente, supersolução) de viscosidade é a seguinte [9]: assumindo que $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz $-\Delta u(x) \leq 0$, para todo $x \in \Omega$,

tomemos $\hat{x} \in \Omega$ tal que $u - \varphi$ atinge seu valor máximo em \hat{x} , onde φ é de classe C^2 em uma vizinhança $\Omega \subset \Omega$ de \hat{x} . Então, sendo $u - \varphi \in C^2(\Omega)$, sabemos que

$$\nabla(u - \varphi)(\hat{x}) = 0, \quad \nabla^2(u - \varphi)(\hat{x}) \leq 0,$$

onde $\nabla^2(u - \varphi)(\hat{x}) \leq 0$ significa dizer que $\langle \nabla^2(u - \varphi)(\hat{x})\xi, \xi \rangle \leq 0$, qualquer que seja $\xi \in \mathbb{R}^n$. Em particular, para $\xi = \nabla\varphi(\hat{x})$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle \nabla^2(u - \varphi)(\hat{x})\nabla\varphi(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}) \rangle \\ &= \langle \nabla^2 u(\hat{x})\nabla\varphi(\hat{x}) - \nabla^2\varphi(\hat{x})\nabla\varphi(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}) \rangle \\ &= \langle \nabla^2 u(\hat{x})\nabla u(\hat{x}), \nabla u(\hat{x}) \rangle - \langle \nabla^2\varphi(\hat{x})\nabla\varphi(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}) \rangle \\ &\geq - \langle \nabla^2\varphi(\hat{x})\nabla\varphi(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}) \rangle. \end{aligned}$$

Ou seja, $-\Delta \varphi(\hat{x}) \leq 0$, e concluímos que u é uma subsolução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ em Ω .

A seguir, mostramos que a definição de viscosidade para o ∞ -laplaciano está coerente com a ideia de solução clássica.

Teorema 3.2.2. *Seja $u \in C^2(\Omega)$. Então u é solução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ em Ω se, e somente se,*

$$-\Delta u(x) = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}(x)u_{x_j}(x)u_{x_i x_j}(x) = 0, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Demonstração. (\Leftarrow) Sendo $u \in C^2(\Omega)$, o cálculo efetuado na motivação acima é rigoroso concluímos que u é uma subsolução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ em Ω .

Analogamente, podemos mostrar que u é uma supersolução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ em Ω . Logo, concluímos que u é ∞ -harmônica.

(\Rightarrow) Suponhamos que u é solução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ em Ω . Então, em particular, u é ∞ -subharmônica, e considerando $\varphi = u$ na definição de u ser ∞ -subharmônica, obtemos que $u - \varphi \equiv 0$. Dessa forma, todo ponto $x \in \Omega$ é um máximo local de $u - \varphi \equiv 0$, logo, $-\Delta u(x) \leq 0$.

Da mesma forma, como u é ∞ -superharmônica, temos que, dado $x \in \Omega$, então $-\Delta u(x) \geq 0$. Portanto, $\Delta u(x) = 0$ em Ω . \square

Para amadurecermos a ideia de solução de viscosidade, apresentamos a seguir um dos exemplos mais clássicos de função ∞ -harmônica no sentido de viscosidade.

Exemplo 3.2.3. Seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x, y) = x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}$, vamos mostrar que u é ∞ -harmônica em \mathbb{R}^2 [5].

Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, se $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$, então u é de classe C^2 em uma vizinhança de

(x_0, y_0) . Como

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= \frac{4}{3}x_0^{\frac{1}{3}}, & u_y(x_0, y_0) &= -\frac{4}{3}y_0^{\frac{1}{3}}, \\ u_{xx}(x_0, y_0) &= \frac{4}{9}x_0^{-\frac{2}{3}}, & u_{xy}(x_0, y_0) &= 0, & u_{yy}(x_0, y_0) &= -\frac{4}{9}y_0^{-\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \Delta u(x_0, y_0) &= u_{xx}(x_0, y_0)u_x(x_0, y_0)^2 + 2u_{xy}(x_0, y_0)u_x(x_0, y_0)u_y(x_0, y_0) \\ &\quad + u_{yy}(x_0, y_0)u_y(x_0, y_0)^2 \\ &= \frac{4}{9}x_0^{-\frac{2}{3}}\frac{16}{9}x_0^{\frac{2}{3}} + 0 - \frac{4}{9}y_0^{-\frac{2}{3}}\frac{16}{9}y_0^{\frac{2}{3}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, se $x_0 = 0$, tomamos $\varphi \in C^2(V)$, onde V é uma vizinhança de $(0, y_0)$, tal que $u - \varphi$ atinge seu valor máximo local em $(0, y_0)$. Como $u - \varphi \in C^1(V)$, segue que

$$\nabla(u - \varphi)(0, y_0) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla u(0, y_0) = \nabla \varphi(0, y_0).$$

Ainda, para x em uma vizinhança $V_0 \subset \mathbb{R}$ do ponto 0, temos

$$u(x, y_0) - \varphi(x, y_0) \leq u(0, y_0) - \varphi(0, y_0)$$

isto é,

$$x^{\frac{4}{3}} - y_0^{\frac{4}{3}} - \varphi(x, y_0) \leq -y_0^{\frac{4}{3}} - \varphi(0, y_0),$$

donde segue que $x^{\frac{4}{3}} \leq \varphi(x, y_0) - \varphi(0, y_0)$. Sendo $\varphi \in C^2(V)$, então $x \mapsto \varphi(x, y_0)$ é de classe C^2 em V_0 , logo, pela fórmula de Taylor, dado $x \in V_0$, vale

$$\varphi(x, y_0) = \varphi(0, y_0) + \varphi_x(0, y_0)x + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(0, y_0)x^2 + o(x^3)$$

e, também,

$$x^{\frac{4}{3}} \leq \varphi(x, y_0) - \varphi(0, y_0) = \varphi_x(0, y_0)x + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(0, y_0)x^2 + o(x^3).$$

Como $\varphi_x(0, y_0) = u_x(0, y_0) = 0$, concluímos que

$$x^{\frac{4}{3}} \leq \frac{1}{2}\varphi_{xx}(0, y_0)x^2 + o(x^3), \text{ se } x \in V_0$$

e, dividindo ambos os lados por x^2 , obtemos

$$x^{-\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{2}\varphi_{xx}(0, y_0) + o(x), \text{ se } x \in V_0 \setminus \{0\}.$$

Contudo, fazendo $x \rightarrow 0$, concluímos que $\varphi_{xx}(0, y_0) = +\infty$, contradizendo o fato de $\varphi \in C^2(V)$. Logo, não existe função $\varphi \in C^2(V)$ tal que $u - \varphi$ possui máximo em $(0, y_0)$, e está satisfeita a definição de subsolução de viscosidade para esse caso.

Por fim, se $x_0 \neq 0$ e $y_0 = 0$, tomamos $\varphi \in C^2(V)$, onde V é uma vizinhança de $(x_0, 0)$, tal que $u - \varphi$ atinge seu valor máximo local em $(x_0, 0)$, então $\nabla(u - \varphi)(x_0, 0) = 0$, isto é,

$$\nabla\varphi(x_0, 0) = \nabla u(x_0, 0) = \left(\frac{4}{3}x_0^{\frac{1}{3}}, 0\right).$$

Ainda, para todo x em uma vizinhança $V_{x_0} \subset \mathbb{R}$ de x_0 que não contém 0, vale que $(u - \varphi)(x, 0) \leq (u - \varphi)(x_0, 0)$, isto é,

$$x^{\frac{4}{3}} - \varphi(x, 0) \leq x_0^{\frac{4}{3}} - \varphi(x_0, 0).$$

Ou seja, a função $x \mapsto x^{\frac{4}{3}} - \varphi(x, 0)$ possui um máximo local no ponto x_0 , e como essa função é de classe C^2 em V_{x_0} , temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{4}{3}} - \varphi(x, 0) \right]_{x=x_0} &= \frac{4}{3}x_0^{\frac{1}{3}} - \varphi_x(x_0, 0) = 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[x^{\frac{4}{3}} - \varphi(x, 0) \right]_{x=x_0} &= \frac{4}{9}x_0^{-\frac{2}{3}} - \varphi_{xx}(x_0, 0) \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, lembrando que $\varphi_y(x_0, 0) = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x_0, 0) &= \left(\varphi_{xx}\varphi_x^2 + 2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y + \varphi_y^2\varphi_{yy} \right) (x_0, 0) \\ &\geq \frac{4}{9}x_0^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{4}{3}x_0^{\frac{1}{3}} \right)^2 + 0 + 0 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Logo, u é subsolução de viscosidade de $\Delta u = 0$, isto é, u é ∞ -subharmônica em \mathbb{R}^2 .

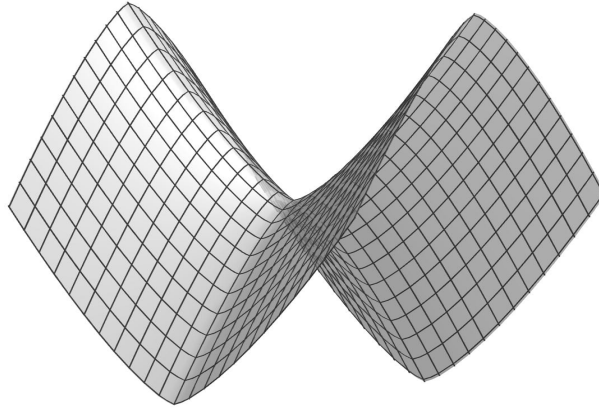
Analogamente, mostramos que $-u$ é ∞ -subharmônica em \mathbb{R}^2 , logo, u é ∞ -harmônica em \mathbb{R}^2 .

Vamos mostrar, agora, que u é de classe $C^{1, \frac{1}{3}}(\mathbb{R}^2)$. De fato, como

$$\nabla u(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{3}x_0^{\frac{1}{3}}, -\frac{4}{3}y_0^{\frac{1}{3}} \right),$$

temos que $(x, y) \mapsto \nabla u(x, y)$ é contínua em \mathbb{R}^2 , ou seja, $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Agora, fixado $x_0 > 0$,

Figura 3.1: Gráfico da função $u(x, y) = x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

definimos $g : [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}} - x_0^{\frac{1}{3}} - (x - x_0)^{\frac{1}{3}}.$$

Dessa forma, como

$$g(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(x - x_0)^{-\frac{2}{3}} \leq 0,$$

para $x \in (x_0, +\infty)$, e como $g(x_0) = 0$, concluímos que $g(x) \leq 0$ para $x \in [x_0, +\infty)$, ou seja,

$$x^{\frac{1}{3}} - x_0^{\frac{1}{3}} \leq (x - x_0)^{\frac{1}{3}}, \text{ para todo } x \in [x_0, +\infty),$$

ou, equivalentemente,

$$\left| x^{\frac{1}{3}} - x_0^{\frac{1}{3}} \right| \leq |x - x_0|^{\frac{1}{3}}, \text{ para todo } x \in [x_0, +\infty).$$

Da mesma forma, se definirmos $h : (-\infty, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = x^{\frac{1}{3}} - x_0^{\frac{1}{3}} - (x - x_0)^{\frac{1}{3}},$$

podemos mostrar que $h(x) \geq 0$, para todo $x \in (-\infty, x_0]$ e, portanto,

$$\left| x^{\frac{1}{3}} - x_0^{\frac{1}{3}} \right| \leq |x - x_0|^{\frac{1}{3}}, \text{ para todo } x \in (-\infty, x_0].$$

Portanto, mostramos que

$$\left| x^{\frac{1}{3}} - x_0^{\frac{1}{3}} \right| \leq |x - x_0|^{\frac{1}{3}}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Agora, se $x_0 < 0$, notamos que $-x_0 > 0$ e, dado $x \in \mathbb{R}$, basta usarmos (3.3) para $-x$

no lugar de x , obtendo

$$\left|(-x)^{\frac{1}{3}} - (-x_0)^{\frac{1}{3}}\right| \leq |(-x) - (-x_0)|^{\frac{1}{3}}$$

ou, da mesma forma,

$$\left|x^{\frac{1}{3}} - x_0^{\frac{1}{3}}\right| \leq |x - x_0|^{\frac{1}{3}}.$$

Por fim, se $x_0 = 0$, é óbvio que $|x^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}}| = |x - 0|^{\frac{1}{3}}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e concluímos que

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2 \\ x=y}} \frac{|u_x(z_1) - u_x(z_2)|}{\|z_1 - z_2\|^{\frac{1}{3}}} \leq 1 < \infty,$$

e podemos mostrar a mesma relação para u_y . Logo, $u \in C^{1, \frac{1}{3}}(\mathbb{R}^2)$.

A seguir, mostramos o importante resultado afirmando que funções ∞ -harmônicas satisfazem comparação com cones em Ω , e que a recíproca também é válida [6]. Dessa forma, soluções de viscosidade do operador ∞ -laplaciano são soluções do PEL discutido anteriormente.

Teorema 3.2.4. *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz comparação com cones por cima em Ω , então u é ∞ -subharmônica em Ω .*

Analogamente, se $u \in C(\Omega)$ satisfaz comparação com cones por baixo em Ω , então u é ∞ -superharmônica em Ω .

Demonstração. Supondo que u satisfaz comparação com cones por cima em Ω , segue da Eq. (2.8) que

$$u(x) \leq u(y) + \max_{w \in S_r(y)} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) \|x - y\|, \text{ para todo } x \in B_r(y),$$

Reestruturando essa inequação, temos, para $x \in B_r(y)$,

$$u(x) \leq \left(1 - \frac{\|x - y\|}{r} \right) u(y) + \max_{w \in S_r(y)} u(w) \frac{\|x - y\|}{r}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) + \left(\frac{r}{r - \|x - y\|} - 1 \right) u(x) &= \frac{r}{r - \|x - y\|} u(x) - u(y) \\ &\leq \frac{\|x - y\|}{r - \|x - y\|} \max_{w \in S_r(y)} u(w). \end{aligned}$$

Agora, basta notarmos que

$$\frac{r}{r - \|x - y\|} - 1 = \frac{\|x - y\|}{r - \|x - y\|}$$

para chegarmos em

$$u(x) - u(y) \leq \max_{w \in S_r(y)} (u(w) - u(x)) \frac{\|x - y\|}{r - \|x - y\|}. \quad (3.4)$$

Supondo que u é duas vezes diferenciável em x e denotando $p := \nabla u(x)$ e $X := \nabla^2 u(x)$, temos, pela fórmula de Taylor, que

$$u(z) = u(x) + \langle p, z - x \rangle + \frac{1}{2} \langle X(z - x), z - x \rangle + h(z - x), \quad (3.5)$$

para todo z em uma vizinhança de x , onde $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{h(y)}{\|y\|^2} = 0. \quad (3.6)$$

Note que, de (3.6), segue que

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{h(y)}{\|y\|} = 0.$$

Vamos mostrar que

$$\Delta \quad u(x) = \langle \nabla^2 u(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle = \langle Xp, p \rangle \geq 0. \quad (3.7)$$

Tomando $z = y = x - \lambda p$ nas equações (3.4) e (3.5), com $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, expandindo $u(x) - u(y)$ como na equação (3.5) e denotando

$$u(w_{r,\lambda}) = \max_{w \in S_r(y)} u(w),$$

temos

$$u(x) - u(x - \lambda p) \stackrel{(3.4)}{\leq} (u(w_{r,\lambda}) - u(x)) \frac{\|\lambda p\|}{r - \|\lambda p\|}$$

e, por (3.5), concluímos que

$$-\langle p, -\lambda p \rangle - \frac{1}{2} \langle X(-\lambda p), -\lambda p \rangle - h(-\lambda p) \leq (u(w_{r,\lambda}) - u(x)) \frac{\|\lambda p\|}{r - \|\lambda p\|},$$

ou, de outra forma,

$$\lambda \|p\|^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \langle Xp, p \rangle - h(-\lambda p) \leq (u(w_{r,\lambda}) - u(x)) \frac{\|\lambda p\|}{r - \|\lambda p\|},$$

onde, ao dividirmos por λ em ambos os lados, chegamos em

$$\|p\|^2 - \frac{1}{2}\lambda\langle Xp, p \rangle - \frac{h(-\lambda p)}{\lambda} \leq (u(w_{r,\lambda}) - u(x)) \frac{\|p\|}{r - \lambda\|p\|}. \quad (3.8)$$

Agora, expandindo $u(w_{r,\lambda}) - u(x)$ como em (3.5) e aplicando em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \|p\|^2 - \frac{1}{2}\lambda\langle Xp, p \rangle - \frac{h(-\lambda p)}{\lambda} \\ \leq \left(\langle p, w_{r,\lambda} - x \rangle + \frac{1}{2}\langle X(w_{r,\lambda} - x), w_{r,\lambda} - x \rangle + h(w_{r,\lambda} - x) \right) \frac{\|p\|}{r - \lambda\|p\|}. \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &\leq \left(\langle p, w_r - x \rangle + \frac{1}{2}\langle X(w_r - x), w_r - x \rangle + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} h(w_{r,\lambda} - x) \right) \frac{\|p\|}{r} \\ &= \left(\left\langle p, \frac{w_r - x}{r} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle X\left(\frac{w_r - x}{r}\right), w_r - x \right\rangle \right) \|p\| + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|p\|}{r} h(w_{r,\lambda} - x) \\ &\leq \left(\|p\| \left\| \frac{w_r - x}{r} \right\| + \frac{1}{2}\left\langle X\left(\frac{w_r - x}{r}\right), w_r - x \right\rangle \right) \|p\| + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|p\|}{r} h(w_{r,\lambda} - x) \\ &= \|p\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle X\left(\frac{w_r - x}{r}\right), w_r - x \right\rangle \|p\| + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|p\|}{r} h(w_{r,\lambda} - x), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde w_r é tal que $w_{r,\lambda_j} \rightarrow w_r$ quando $\lambda_j \rightarrow 0^+$, e, portanto, $w_r \in S_r(x)$, pois $y \rightarrow x$ quando $\lambda \rightarrow 0^+$. Dessa forma,

$$\left\| \frac{w_r - x}{r} \right\| = 1.$$

Fazendo $r \rightarrow 0^+$ em (3.9) e notando que $\|w_r - x\| = r$, ou seja, $w_r \rightarrow x$ quando $r \rightarrow 0^+$, temos

$$\|p\| \leq \left\langle p, \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{w_r - x}{r} \right\rangle = \|p\| \cdot 1 \cdot \cos \alpha,$$

onde α é o ângulo formado por p e $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{w_r - x}{r}$, e, portanto, $\alpha = 0$. Logo (aqui, supomos que $p \neq 0$; Se tivéssemos $p = 0$, a prova de que $\langle Xp, p \rangle \geq 0$ seria trivial),

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{w_r - x}{r} = \frac{p}{\|p\|}.$$

Por fim, basta notarmos que, como

$$\|p\|^2 \leq \|p\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle X\left(\frac{w_r - x}{r}\right), w_r - x \right\rangle \|p\| + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|p\|}{r} h(w_{r,\lambda} - x), \quad \text{para todo } r > 0,$$

basta dividirmos ambos os lados por r fazermos $r \rightarrow 0^+$ para obter

$$0 \leq \frac{1}{2}\left\langle X\left(\frac{p}{\|p\|}\right), \frac{p}{\|p\|} \right\rangle \|p\|$$

isto é, $0 \leq \langle Xp, p \rangle = \Delta u(x)$. Agora, se u não é duas vezes diferenciável, sejam $\hat{x} \in \Omega$ e φ de classe C^2 em uma vizinhança de \hat{x} tal que $u - \varphi$ possui um máximo local em \hat{x} . Então

$$\varphi(\hat{x}) - \varphi(y) \leq u(\hat{x}) - u(y) \quad \text{e} \quad u(w) - u(\hat{x}) \leq \varphi(w) - \varphi(\hat{x}),$$

para y, w próximos de \hat{x} . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{x}) - \varphi(y) &\leq u(\hat{x}) - u(y) \\ &\stackrel{(3.4)}{\leq} \max_w (u(w) - u(\hat{x})) \frac{\|\hat{x} - y\|}{r - \|\hat{x} - y\|} \\ &\leq \max_w (\varphi(w) - \varphi(\hat{x})) \frac{\|\hat{x} - y\|}{r - \|\hat{x} - y\|}, \end{aligned}$$

para $r > 0$ suficientemente pequeno. Ou seja, obtemos a versão da Eq. (3.4) para φ , que é de classe C^2 em uma vizinhança de \hat{x} . Portanto, pelo que foi mostrado até agora, $\Delta \varphi(\hat{x}) \geq 0$.

Dessa forma, mostramos que u é uma solução de viscosidade de $\Delta u \geq 0$, como queríamos mostrar. E, para o caso em que $u \in C(\Omega)$ satisfaz comparação com cones por baixo em Ω , basta notarmos que $-u$ satisfaz comparação com cones por cima em Ω , donde segue que $-u$ é ∞ -subharmônica. \square

Por fim, provamos a afirmação recíproca.

Teorema 3.2.5. *Seja $u \in C(\Omega)$ uma função ∞ -subharmônica. Então u satisfaz comparação com cones por cima.*

Analogamente, se $u \in C(\Omega)$ é ∞ -superharmônica, então u satisfaz comparação com cones por baixo.

Demonstração. Supondo que $\Delta u \geq 0$ em Ω , seja $G : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Notamos que, para $x \neq 0$,

$$[G(\|x\|)]_{x_i} = G(\|x\|) [\|x\|]_{x_i} = G(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|};$$

$$[G(\|x\|)]_{x_j x_i} = \left[G(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|} \right]_{x_j} = G(\|x\|) \frac{x_i x_j}{\|x\|^2} + G(\|x\|) \left[\frac{\delta_{ij}}{\|x\|} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^3} \right],$$

Dessa forma, para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \Delta G(\|x\|) &= \sum_{i,j=1}^n [G(\|x\|)]_{x_j x_i} [G(\|x\|)]_{x_i} [G(\|x\|)]_{x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left[G(\|x\|) \frac{x_i x_j}{\|x\|^2} + G(\|x\|) \left[\frac{\delta_{ij}}{\|x\|} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^3} \right] \right] G(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|} G(\|x\|) \frac{x_j}{\|x\|} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left[G(\|x\|) G(\|x\|)^2 \frac{x_i^2 x_j^2}{\|x\|^4} + G(\|x\|)^3 \frac{\delta_{ij} x_i x_j}{\|x\|^3} - G(\|x\|)^3 \frac{x_i^2 x_j^2}{\|x\|^5} \right]. \end{aligned}$$

Notando que,

$$\sum_{i,j=1}^n x_i^2 x_j^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 x_j^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|x\|^2 = \|x\|^4$$

e, como $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$,

$$\sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n 1 \cdot x_i x_i = \|x\|^2,$$

concluimos que, para todo $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \Delta G(\|x\|) &= G(\|x\|)G(\|x\|)^2 \frac{\|x\|^4}{\|x\|^4} + G(\|x\|)^3 \frac{\|x\|^2}{\|x\|^3} - G(\|x\|)^3 \frac{\|x\|^4}{\|x\|^5} \\ &= G(\|x\|)G(\|x\|)^2. \end{aligned}$$

Em particular, se $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for dada por $G(t) = at - \gamma t^2$, para $a \in \mathbb{R}$ qualquer e $\gamma > 0$ suficientemente pequeno, temos que $G(t) = a - 2\gamma t$ e $G'(t) = -2\gamma$, para $t \in \mathbb{R}$, e

$$\Delta G(\|x - z\|) = G(\|x - z\|)G(\|x - z\|)^2 = -2\gamma(a - 2\gamma\|x - z\|)^2 < 0,$$

se $x \in \Omega$ com $x \neq z$. Mas como, por hipótese, $\Delta u \geq 0$ em Ω , então $u - G$ não pode ter um máximo local em $\Omega \subset \subset \Omega \setminus \{z\}$. De fato, se $u - G$ tivesse um máximo local no ponto $\hat{x} \in \Omega$, então $\Delta G(\hat{x}) \geq 0$ pela definição de u ser ∞ -subharmônica, afinal, como $x \mapsto G(\|x - z\|)$ é de classe C^2 em uma vizinhança de \hat{x} contida em Ω , então pode ser tomada como função teste.

Logo, se $z \notin \Omega \subset \subset \Omega$ e $x \in \Omega$, temos que

$$u(x) - \left(a\|x - z\| - \gamma\|x - z\|^2 \right) \leq \max_w \left(u(w) - \left(a\|w - z\| - \gamma\|w - z\|^2 \right) \right).$$

Fazendo $\gamma \rightarrow 0^+$, obtemos que

$$u(x) - a\|x - z\| \leq \max_w \left(u(w) - a\|w - z\| \right),$$

ou seja, u satisfaz comparação com cones por cima.

Agora, se $u \in C(\Omega)$ é ∞ -superharmônica em Ω , então $-u$ é ∞ -subharmônica e, portanto, satisfaz comparação com cones por cima em Ω , donde segue que u satisfaz comparação com cones por baixo em Ω . \square

Dessa forma, provamos que se $u \in C(\Omega)$, então u é ∞ -harmônica se, e somente se, satisfaz comparação com cones. Sendo assim, todos os resultados a respeito de funções absolutamente minimizante Lipschitz em Ω vistos no capítulo anterior são válidos para funções ∞ -harmônicas em Ω , e obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in C(\partial\Omega)$. Então, existe uma única função $u \in C(\bar{\Omega})$ solução de viscosidade do problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ainda, u é localmente Lipschitz em Ω . Em particular, u é diferenciável em quase todo ponto de Ω .

3.3 Cálculo envolvendo funções ∞ -harmônicas

O objetivo do restante deste trabalho é o de melhorar a regularidade de funções ∞ -harmônicas, mostrando-se a diferenciabilidade em todo ponto do domínio para essas funções. Nesta seção, exploramos algumas relações importantes para a análise de *blow-ups* de soluções do ∞ -laplaciano [2], [8].

Para isso, daqui em diante consideramos $u \in C(\Omega)$ como uma função ∞ -harmônica em Ω , ou, equivalentemente, uma função que satisfaz comparação com cones em Ω .

Definição 3.3.1. Para cada $y \in \Omega$ e cada $r > 0$, $r < \text{dist}(y, \partial\Omega)$, definimos os quocientes

$$L_r^+(u, y) = \max_{z \in S_r(y)} \frac{u(z) - u(y)}{r} \quad \text{e} \quad L_r^-(u, y) = \min_{z \in S_r(y)} \frac{u(z) - u(y)}{r}. \quad (3.10)$$

Além disso, denotamos, para cada $y \in \Omega$,

$$L_0^+(u, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} L_r^+(u, y) \quad \text{e} \quad L_0^-(u, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} L_r^-(u, y). \quad (3.11)$$

A ideia da definição dessas quantidades é a de estimar a norma do gradiente de u no ponto y . Como, para cada $y \in \Omega$ e $r \in (0, \text{dist}(y, \partial\Omega))$, u é contínua em $S_r(y)$, e como $S_r(y)$ é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , segue que $L_r^+(u, y)$ e $L_r^-(u, y)$ são grandezas finitas. E como u é uniformemente contínua em $B_R(y) \subset\subset \Omega$, para qualquer $R \in (0, \text{dist}(y, \partial\Omega))$, então, pela Proposição 1.1.4, $r \mapsto L_r^+(u, y)$, $r \mapsto L_r^-(u, y)$ são uniformemente contínuas no intervalo $(0, R)$.

Para mostrar que $L_0^+(u, y)$ e $L_0^-(u, y)$ estão bem definidas (isto é, que são finitas), mostramos o seguinte resultado.

Lema 3.3.2. *Para cada $y \in \Omega$ fixado, a função*

$$r \mapsto L_r^+(u, y)$$

é crescente e não-negativa.

Analogamente, a função

$$r \mapsto L_r^-(u, y)$$

é decrescente e não-positiva.

Demonstração. Primeiramente, notemos que, fixado $r \in (0, \text{dist}(y, \partial\Omega))$, temos, para cada $x \in S_r(y)$,

$$\frac{u(x) - u(y)}{r} \leq \max_{z \in S_r(y)} \frac{u(z) - u(y)}{r} = L_r^+(u, y),$$

ou seja,

$$u(x) \leq u(y) + L_r^+(u, y)r = u(y) + L_r^+(u, y) \|x - y\|. \quad (3.12)$$

Como (3.12) vale para $x = y$, então, vale para todo $x \in S_r(y) \cup \{y\} = \partial(B_r(y) \setminus \{y\})$. Como o último termo de (3.12) é um cone com vértice em $y \notin B_r(y) \setminus \{y\}$ e u satisfaz comparação com cones por cima em Ω , segue que (3.12) é válida para cada $x \in \overline{B_r(y)}$. Ou, ainda, dado $\tau \in (0, r]$, vale, para $x \in S_\tau(y)$,

$$u(x) \leq u(y) + L_r^+(u, y) \|x - y\|$$

isto é,

$$\frac{u(x) - u(y)}{\tau} = \frac{u(x) - u(y)}{\|x - y\|} \leq L_r^+(u, y).$$

Portanto,

$$L_\tau^+(u, y) = \max_{x \in S_\tau(y)} \frac{u(x) - u(y)}{\tau} \leq L_r^+(u, y),$$

provando que $r \mapsto L_r^+(u, y)$ é crescente.

Agora, para mostrarmos que $L_r^+(u, y)$ é não-negativa, sendo $r \mapsto L_r^+(u, y)$ crescente, basta mostrarmos que $L_0^+(u, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} L_r^+(u, y) \geq 0$.

Para isso, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmção. Se $M \in \mathbb{R}$ é tal que $L_0^+(u, y) < M$, então $-M \leq L_0^+(u, y)$.

Mostrada essa afirmação, se supormos que $L_0^+(u, y) < 0$, então $0 \leq L_0^+(u, y)$, o que é uma contradição. Logo, concluímos que $L_0^+(u, y) \geq 0$, como queríamos mostrar.

Prova da Afirmção. Dado $M \in \mathbb{R}$ com $L_0^+(u, y) < M$, sendo $r \mapsto L_r^+(u, y)$ contínua, existe $r_0 > 0$ tal que, se $r < r_0$, então $L_r^+(u, y) \leq L_{r_0}^+(u, y) < M$, donde segue que

$$\frac{u(x) - u(y)}{r} < M, \text{ para todo } x \in S_r(y).$$

Portanto, temos que

$$u(x) < u(y) + M \|x - y\|, \text{ para todo } x \in S_r(y). \quad (3.13)$$

Como (3.13) é válida para quaisquer $x \in S_r(y)$ e $r < r_0$, então, se $x \in B_{r_0}(y)$,

$$u(x) < u(y) + M \|x - y\|. \quad (3.14)$$

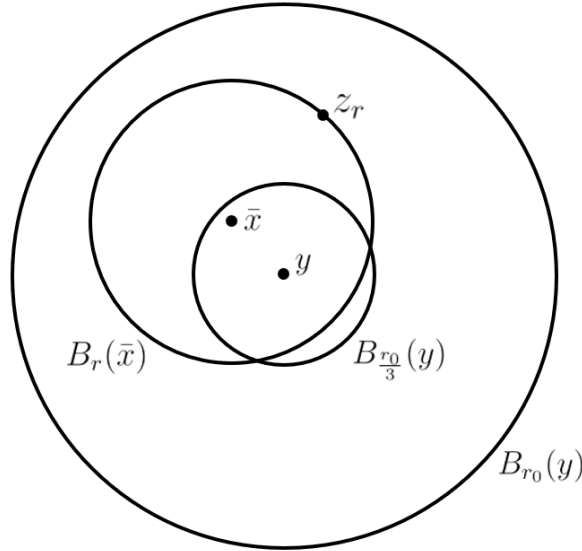
Agora, fixemos $\bar{x} \in B_{r_0}(y)$ com $\|\bar{x} - y\| \leq \frac{r_0}{3}$. Para $r > 0$ com $\|\bar{x} - y\| < r < \frac{2r_0}{3}$ (de modo que $B_r(\bar{x}) \subset\subset B_{r_0}(y)$), temos

$$\frac{u(y) - u(\bar{x})}{\|\bar{x} - y\|} \leq \max_{z \in S_{\bar{x}-y}(\bar{x})} \frac{u(z) - u(\bar{x})}{\|\bar{x} - y\|} \leq \max_{z \in S_r(\bar{x})} \frac{u(z) - u(\bar{x})}{r},$$

onde foi utilizada a primeira parte desse Lema, já demonstrado. Logo,

$$u(y) \leq u(\bar{x}) + \max_{z \in S_r(\bar{x})} \frac{u(z) - u(\bar{x})}{r} \|\bar{x} - y\|. \quad (3.15)$$

Figura 3.2: Relação entre os pontos das bolas $B_{r_0}(y)$ e $B_r(\bar{x})$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, para cada $r \in (\|\bar{x} - y\|, \frac{2r_0}{3})$, seja $z_r \in S_r(\bar{x})$ tal que $u(z_r) = \max_{z \in S_r(\bar{x})} u(z)$. Utilizando (3.14) com $x = z_r$, concluímos que

$$u(y) \stackrel{(3.15)}{\leq} u(\bar{x}) + \frac{u(z_r) - u(\bar{x})}{r} \|\bar{x} - y\| \stackrel{(3.14)}{\leq} u(\bar{x}) + \frac{u(y) + M \|z_r - y\| - u(\bar{x})}{r} \|\bar{x} - y\|.$$

Utilizando que $\|z_r - y\| \leq \|z_r - \bar{x}\| + \|\bar{x} - y\| = r + \|\bar{x} - y\|$ e reorganizando os termos

da inequação resultante,

$$-M \frac{\|\bar{x} - y\| + r}{r} \|\bar{x} - y\| \leq (u(\bar{x}) - u(y)) \left(1 - \frac{\|\bar{x} - y\|}{r}\right)$$

e, portanto,

$$M \frac{\|\bar{x} - y\| + r}{r - \|\bar{x} - y\|} \|\bar{x} - y\| \leq u(\bar{x}) - u(y).$$

Essa desigualdade é válida para qualquer $\bar{x} \in B_{\frac{r_0}{3}}(y)$. Em particular, para cada $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < \frac{r_0}{3}$, temos

$$-M \frac{\varepsilon + r}{r - \varepsilon} \varepsilon \leq u(\bar{x}) - u(y), \quad \text{para todo } \bar{x} \in S_\varepsilon(y), \quad (3.16)$$

logo,

$$-M \frac{\varepsilon + r}{r - \varepsilon} \leq \max_{z \in S_\varepsilon(y)} \frac{u(z) - u(y)}{\varepsilon} = L_\varepsilon^+(u, y).$$

Basta fazermos $\varepsilon \rightarrow 0^+$ para concluirmos que $-M \leq L_0^+(u, y)$, provando a afirmação.

As propriedades da função $r \mapsto L_r^-(u, y)$ provamos analogamente. \square

Exemplo 3.3.3. Definindo $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $u(x, y) = x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}$, temos que, para cada $r > 0$,

$$L_r^+(u, 0) = \max_{(x,y) \in S_r(0)} \frac{x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}}{r} = \frac{r^{\frac{4}{3}}}{r} = r^{\frac{1}{3}},$$

e, analogamente, $L_r^-(u, 0) = -r^{\frac{1}{3}}$. Logo, fazendo $r \rightarrow 0^+$, obtemos que

$$L_0^+(u, 0) = L_0^-(u, 0) = 0.$$

A seguir, mostramos que, se u for diferenciável em y , então $L_r^+(u, y)$ serve como uma estimativa para a norma do gradiente de u no ponto y quanto $r \rightarrow 0^+$.

Proposição 3.3.4. *Se a função u é diferenciável em $y \in \Omega$, então*

$$L_0^+(u, y) = \|\nabla u(y)\|.$$

Em particular, $\sup_y L_0^+(u, y) = \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Demonstração. Suponhamos que $\nabla u(y) \neq 0$ e denotamos

$$\nu = \frac{\nabla u(y)}{\|\nabla u(y)\|}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\nabla u(y)\| &= \langle \nabla u(y), \nu \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(y + h\nu) - u(y)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \max_{z \in S_{|h|}(y)} \frac{u(z) - u(y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} L_{|h|}^+(u, y) = L_0^+(u, y).\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\nabla u(y) = 0$, temos, pelo Lema 3.3.2, que

$$L_0^+(u, y) \geq 0 = \|\nabla u(y)\|.$$

Agora, seja $J \in \mathbb{N}$ o menor número natural de modo que $B_{\frac{1}{j}}(y) \subset\subset \Omega$. Para cada $j \geq J$, tomamos $x_j \in S_1(0)$ de modo que

$$L_{\frac{1}{j}}^+(u, y) = \max_{z \in S_{\frac{1}{j}}(y)} \frac{u(z) - u(y)}{\frac{1}{j}} = \max_{x \in S_1(0)} j \left(u\left(y + \frac{1}{j}x\right) - u(y) \right) = j \left(u\left(y + \frac{1}{j}x_j\right) - u(y) \right).$$

Como $x_j \in S_1(0)$ para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência de $\{x_j\}$, que denotaremos por $\{x_j\}$ para simplificar a notação, tal que $x_j \rightarrow \bar{x}$, para algum $\bar{x} \in S_1(0)$. Logo,

$$L_{\frac{1}{j}}^+(u, y) = j \left(u\left(y + \frac{1}{j}x_j\right) - u(y) \right) \leq j \left| u\left(y + \frac{1}{j}x_j\right) - u\left(y + \frac{1}{j}\bar{x}\right) \right| + j \left| u\left(y + \frac{1}{j}\bar{x}\right) - u(y) \right|.$$

Como supomos que u satisfaz comparação com cones em Ω , então u é localmente Lipschitz em Ω . Logo, u é Lipschitz em $\overline{B_{\frac{1}{j}}(y)}$ e, portanto, se $j \geq J$,

$$\begin{aligned}L_{\frac{1}{j}}^+(u, y) &\leq j \left| u\left(y + \frac{1}{j}x_j\right) - u\left(y + \frac{1}{j}\bar{x}\right) \right| + j \left| u\left(y + \frac{1}{j}\bar{x}\right) - u(y) \right| \\ &\leq j \operatorname{Lip}_u\left(\overline{B_{\frac{1}{j}}(y)}\right) \frac{1}{j} \|x_j - \bar{x}\| + j \left| u\left(y + \frac{1}{j}\bar{x}\right) - u(y) \right|.\end{aligned}$$

Fazendo $j \rightarrow +\infty$, obtemos que $\|x_j - \bar{x}\| \rightarrow 0$ e

$$L_0^+(u, y) \leq 0 + |\nabla u(y) \cdot \bar{x}| \leq \|\nabla u(y)\| \|\bar{x}\| = \|\nabla u(y)\|.$$

Logo, concluímos que $L_0^+(u, y) = \|\nabla u(y)\|$. □

Proposição 3.3.5. *A função $x \mapsto L_0^+(u, x)$ é semicontínua superiormente em Ω .*

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que, dado $r > 0$, a função $x \mapsto L_r^+(u, x)$ é contínua em Ω_r , onde $\Omega_r := \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) < r\}$ é o domínio de definição de $x \mapsto L_r^+(u, x)$.

De fato, dados $x, y \in \Omega_r$, existe $\varepsilon_0 > 0$ com $S_{r+\varepsilon_0}(x) \cup S_{r+\varepsilon_0}(y) \subset\subset \Omega$, pela definição de Ω_r . Logo,

$$\left| L_r^+(u, x) - L_r^+(u, y) \right| = \left| \max_{z \in S_r(x)} \frac{u(z) - u(x)}{r} - \max_{w \in S_r(y)} \frac{u(w) - u(y)}{r} \right|$$

$$\leq \frac{1}{r} \left| \max_{z \in S_r(x)} u(z) - \max_{w \in S_r(y)} u(w) \right| + \frac{1}{r} |u(x) - u(y)|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como u é uniformemente contínua em $\overline{B_{r+\varepsilon_0}(x)}$, existe $\delta > 0$ tal que $w, z \in S_{r+\varepsilon_0}(x)$ com $\|w - z\| < \delta$ implica em $|u(w) - u(z)| < \varepsilon$.

Em particular, se $y \in \Omega_r$ for tal que $\|x - y\| < \min\{\delta, \varepsilon_0\}$, então $S_r(y) \subset \overline{B_{r+\varepsilon_0}(x)}$ e, para cada $w \in S_r(y)$, existe $z \in S_r(x)$ tal que $\|w - z\| < \delta$, e, portanto, $|u(w) - u(z)| < \varepsilon$. Aplicando um raciocínio semelhante ao utilizado na prova da Proposição 1.1.4, concluímos que

$$\left| \max_{z \in S_r(x)} u(z) - \max_{w \in S_r(y)} u(w) \right| < \varepsilon.$$

Concluímos que

$$\left| L_r^+(u, x) - L_r^+(u, y) \right| < \frac{1}{r}\varepsilon + \frac{1}{r}\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{r} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Portanto, para cada $r > 0$, a função $x \mapsto L_r^+(u, x)$ é contínua em seu domínio. E como a função $r \mapsto L_r^+(u, x)$ é crescente para cada $x \in \Omega$, então pela Proposição 1.1.2, temos que $x \mapsto L_0^+(u, x)$ é semicontínua superiormente. \square

Por fim, mostramos a seguir que $L_0^+(u, y) = -L_0^-(u, y)$ para cada $y \in \Omega$, donde segue que, pela Proposição 3.3.4, $-L_r^-(u, y)$ também serve como estimativa para $\|\nabla u(y)\|$ quando $r \rightarrow 0^+$, contanto que u seja diferenciável em y .

Lema 3.3.6. *Para cada $y \in \Omega$, vale que $L_0^+(u, y) = -L_0^-(u, y)$.*

Demonstração. Tomando $M \in \mathbb{R}$ tal que $M > L_0^+(u, y)$, temos, por (3.16), que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

$$-M \frac{\varepsilon + r}{r - \varepsilon} \varepsilon \leq u(\bar{x}) - u(y), \quad \text{para todo } \bar{x} \in S_\varepsilon(y),$$

Logo,

$$-M \frac{\varepsilon + r}{r - \varepsilon} \leq \min_{z \in S_\varepsilon(y)} \frac{u(z) - u(y)}{\varepsilon} = L_\varepsilon^-(u, y).$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, concluímos que, se $M > L_0^+(u, y)$, então $-M \leq L_0^-(u, y)$. Em particular, como $L_0^+(u, y) + \delta > L_0^+(u, y)$, qualquer que seja $\delta > 0$, então

$$-(L_0^+(u, y) + \delta) \leq L_0^-(u, y), \quad \text{para todo } \delta > 0$$

e, fazendo $\delta \rightarrow 0^+$, obtemos

$$-L_0^+(u, y) \leq L_0^-(u, y). \tag{3.17}$$

Agora, como $-u \in C(\overline{\Omega})$ também satisfaz comparação com cones em Ω , então (3.17) também é válida para $-u$, ou seja, $-L_0^+(-u, y) \leq L_0^-(-u, y)$, donde segue que

$$-\lim_{r \rightarrow 0^+} \max_{z \in S_r(y)} \frac{-u(z) + u(y)}{r} \leq \lim_{r \rightarrow 0^+} \min_{z \in S_r(y)} \frac{-u(z) + u(y)}{r},$$

ou, de forma equivalente,

$$-\lim_{r \rightarrow 0^+} - \min_{z \in S_r(y)} \frac{u(z) - u(y)}{r} \leq \lim_{r \rightarrow 0^+} - \max_{z \in S_r(y)} \frac{u(z) - u(y)}{r}.$$

Daí, segue que $L_0^-(u, y) \leq -L_0^+(u, y)$, e, de (3.17), concluímos que $L_0^+(u, y) = -L_0^-(u, y)$. \square

3.4 *Blow-up* de funções ∞ -harmônicas

Para encerrar esse capítulo, discutimos o *blow-up* de funções ∞ -harmônicas em Ω , que consiste na análise pontual do comportamento dessas funções com o propósito de identificarmos possíveis singularidades, ou, no nosso caso, discutirmos a diferenciabilidade pontual em Ω de soluções de viscosidade do ∞ -laplaciano [7].

Nesta seção, continuamos considerando $u \in C(\Omega)$ uma função ∞ -harmônica em Ω .

Definição 3.4.1. Dados $x \in \Omega$ e $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos tal que $r_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, definimos o *blow-up* de u em x como a função $u_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u_x(y) = \lim_k \frac{u(r_k y + x) - u(x)}{r_k}. \quad (3.18)$$

Começamos justificando que, ao definirmos, para cada $x \in \Omega$ e $k \in \mathbb{N}$, $\Omega_{x,k} = \{y \in \mathbb{R}^n : r_k y + x \in \Omega\}$ e $u_{x,k} : \Omega_{x,k} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u_{x,k}(y) = \frac{u(r_k y + x) - u(x)}{r_k},$$

temos que $\{u_{x,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é localmente uniformemente Lipschitz em seu domínio. De fato, dados $B_R(w) \subset\subset \Omega_{x,k}$ e $y, z \in B_R(w)$, temos que

$$\begin{aligned} |u_{x,k}(y) - u_{x,k}(z)| &= \frac{|u(r_k y + x) - u(r_k z + x)|}{r_k} \\ &\leq \frac{1}{r_k} \text{Lip}_u(B_{r_k R}(r_k w + x)) \|r_k y - r_k z\| \\ &= \text{Lip}_u(B_{r_k R}(r_k w + x)) \|y - z\|. \end{aligned}$$

Por fim, se $k \geq K$, onde K é suficientemente grande, temos $B_{r_k R}(r_k w + x) \subset B_{r_0}(x) \subset\subset \Omega$,

para algum $r_0 > 0$. Portanto, fazendo $k \rightarrow \infty$, concluímos que

$$|u_x(y) - u_x(z)| \leq \text{Lip}_u(B_{r_0}(x)) \|y - z\|.$$

Ou seja, u_x é Lipschitz em \mathbb{R}^n , e, portanto, é diferenciável em quase todo ponto de Ω .

Ainda, sendo $\{u_{x,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções Lipschitz com mesma constante de Lipschitz, segue do Exemplo 1.2.5 que podemos aplicar o Teorema de Arzelà-Ascoli à sequência $\{u_{x,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, e concluímos que existe uma subsequência $\{u_{x,k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente para u_x em compactos de \mathbb{R}^n .

Em particular, como cada u_{x,k_j} é ∞ -harmônica em Ω_{x,k_j} , vamos mostrar que u_x é ∞ -harmônica em compactos de \mathbb{R}^n . De fato, tomemos $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto, $y_0 \in K$ e $\varphi \in C^2(V_{y_0})$, onde $V_{y_0} \subset K$ é uma vizinhança de y_0 , tal que $u_x - \varphi$ possui um máximo local em y_0 .

Como $u_{x,k_j} \rightarrow u_x$ uniformemente em compactos de \mathbb{R}^n , segue da Proposição 1.2.3 (para simplificar a notação, denotamos por $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ a subsequência de $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$) que, para cada $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe $y_j \in V_{y_0}$ tal que $u_{x,k_j} - \varphi$ possui máximo local em y_j , e vale que $y_j \rightarrow y_0$ quando $j \rightarrow +\infty$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, sendo u_{x,k_j} ∞ -subharmônica em K , e como $u_{x,k_j} - \varphi$ possui máximo local em y_j , temos que

$$-\Delta \varphi(y_j) \leq 0.$$

Fazendo $j \rightarrow +\infty$ e usando que $\varphi \in C^2(V_{y_0})$ e que $y_j \rightarrow y_0$, concluímos que

$$-\Delta \varphi(y_0) \leq 0.$$

Exemplo 3.4.2. Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, para $x \neq 0$, e $u(0) = 0$. Dados $y \in \mathbb{R}$ e $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos, calculamos o *blow-up* de u na origem:

$$u_0(y) = \lim_k \frac{u(r_k y) - u(0)}{r_k} = \lim_k \frac{(r_k y)^2 \sin(\frac{1}{r_k y})}{r_k} = \lim_k y^2 r_k \sin\left(\frac{1}{r_k y}\right) = 0,$$

onde esse último limite é calculado através do Teorema do Confronto, notando que, se $k \in \mathbb{N}$, então

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{r_k y}\right) \leq 1$$

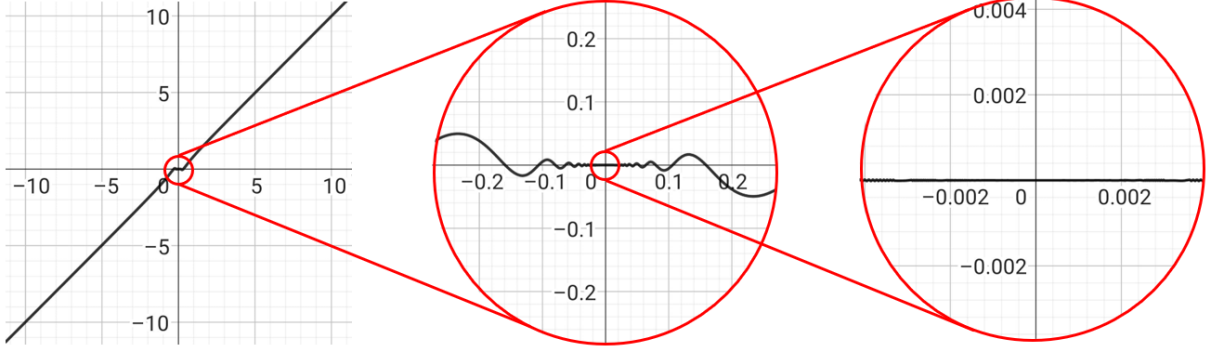
ou, ainda,

$$-y^2 r_k \leq y^2 r_k \sin\left(\frac{1}{r_k y}\right) \leq y^2 r_k,$$

e, também, $\lim_k -y^2 r_k = \lim_k y^2 r_k = 0$.

Ou seja, apesar de u possuir uma descontinuidade na origem, seu comportamento ao redor desse ponto é aproximadamente constante e igual a zero.

Figura 3.3: Ideia geométrica do *blow-up* de $u(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ na origem.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vejamos agora um resultado quantitativo a respeito de $L_r^+(u_x, y)$ e $-L_r^-(u_x, y)$.

Proposição 3.4.3. Fixado $x \in \Omega$, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, vale que

$$\max \left\{ L_r^+(u_x, y), -L_r^-(u_x, y) \right\} \leq L_0^+(u, x). \quad (3.19)$$

Além disso, para cada $r > 0$, vale que $L_r^+(u_x, 0) = -L_r^-(u_x, 0) = L_0^+(u, x)$ e, em particular,

$$L_0^+(u_x, 0) = -L_0^-(u_x, 0) = L_0^+(u, x). \quad (3.20)$$

Demonstração. Fixado $y \in \mathbb{R}^n$, para cada $r > 0$, seja o ponto $z_r \in S_r(y)$ que satisfaz $u_x(z_r) = \max_{z \in S_r(y)} u_x(z)$, logo,

$$\begin{aligned} L_r^+(u_x, y) &= \max_{z \in S_r(y)} \frac{u_x(z) - u_x(y)}{r} = \frac{u_x(z_r) - u_x(y)}{r} \\ &= \frac{u(r_k z_r + x) - u(x)}{r_k} - \frac{u(r_k y + x) - u(x)}{r_k} \\ &= \lim_k \frac{u(r_k z_r + x) - u(r_k y + x)}{r_k r}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pela monotonicidade de $r \mapsto L_r^+(u_x, y)$, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}^n$, temos, para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $R \in (r_k r, \text{dist}(r_k y + x, \partial\Omega))$, que $\|(r_k z_r + x) - (r_k y + x)\| = r_k \|z_r - y\| = r_k r$ e

$$\begin{aligned} \frac{u(r_k z_r + x) - u(r_k y + x)}{r_k r} &\leq \max_{w \in S_{r_k r}(r_k y + x)} \frac{u(w) - u(r_k y + x)}{r_k r} \\ &= L_{r_k r}^+(u, r_k y + x) \\ &\leq L_R^+(u, r_k y + x). \end{aligned}$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ na estimativa acima, concluímos, por (3.21), que

$$\begin{aligned} L_r^+(u_x, y) &= \lim_k \frac{u(r_k z_r + x) - u(r_k y + x)}{r_k r} \leq \lim_k L_R^+(u, r_k y + x) \\ &= L_R^+(u, x), \text{ para todo } R \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega)), \end{aligned}$$

onde foi utilizada a continuidade de $y \mapsto L_R^+(u, y)$ na última equação, verificada na prova da Proposição 3.3.5. Fazendo $R \rightarrow 0^+$, concluímos que $L_r^+(u_x, y) \leq L_0^+(u, x)$.

Analogamente, para cada $r \in (0, \text{dist}(y, \partial\Omega))$, seja $w_r \in S_r(y)$ o ponto que satisfaz $u_x(w_r) = \min_{z \in S_r(y)} u_x(z)$, logo,

$$L_r^-(u_x, y) = \frac{u_x(w_r) - u_x(y)}{r} = \lim_k \frac{u(r_k w_r + x) - u(r_k y + x)}{r_k r}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $R \in (r_k r, \text{dist}(r_k y + x, \partial\Omega))$, temos

$$\frac{u(r_k w_r + x) - u(r_k y + x)}{r_k r} \geq L_{r_k r}^-(u, r_k y + x) \geq L_R^-(u, r_k y + x).$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ na estimativa acima, concluímos que

$$L_r^-(u_x, y) \geq \lim_k L_R^-(u, r_k y + x) = L_R^-(u, x), \text{ para todo } R \in (0, \text{dist}(0, \partial\Omega)).$$

Agora, fazendo $R \rightarrow 0^+$, concluímos que $-L_r^-(u_x, y) \leq -L_0^-(u, x) = L_0^+(u, x)$, provando (3.19).

Agora, para mostrar (3.20), basta notarmos que, como u_x é localmente uniformemente contínua em \mathbb{R}^n e $u_x(0) = 0$, segue, para cada $r > 0$, que

$$\begin{aligned} L_r^+(u_x, 0) &= \max_{z \in S_r(0)} \frac{u_x(z) - u_x(0)}{r} = \max_{z \in S_r(0)} \lim_k \frac{u(r_k z + x) - u(x)}{r r_k} \\ &= \lim_k \max_{z \in S_r(0)} \frac{u(r_k z + x) - u(x)}{r r_k} \\ &= \lim_k \max_{w \in S_{r r_k}(x)} \frac{u(w) - u(x)}{r r_k} = \lim_k L_{r r_k}^+(u, x) = L_0^+(u, x). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo u_x por $(-u)_x$ em (3.22) e notando que $(-u)_x = -u_x$, concluímos que $-L_r^-(u_x, 0) = -L_0^-(u, x)$ e, pelo Lema 3.3.6, vale, para cada $r > 0$, que

$$L_r^+(u_x, 0) = L_0^+(u, x) = -L_0^-(u, x) = -L_r^-(u_x, 0).$$

Em particular, fazendo $r \rightarrow 0^+$, temos $L_0^+(u_x, 0) = -L_0^-(u, x) = L_0^+(u, x)$. \square

Por fim, vejamos um resultado de análise real necessário para demonstrar o teorema futuro.

Lema 3.4.4. *Supondo que $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz em \mathbb{R}^n com $\text{Lip}_v(\mathbb{R}^n) = 1$ e que existe $n \in S_1(0)$ tal que $v(tn) = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então $v(x) = \langle x, n \rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $H = \{n\}^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, n \rangle = 0\}$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever $x = p + q$, onde $p \in H$ e $q = tn$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Notando que $n \in S_1(0)$, temos

$$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle + \langle q, n \rangle = \langle p, n \rangle + t\langle n, n \rangle = 0 + t,$$

e podemos escrever $x = p + \langle x, n \rangle n$.

Agora, dado $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} (v(x) - v(sn))^2 &= (v(x) - v(\langle x, n \rangle n) + v(\langle x, n \rangle n) - v(sn))^2 \\ &= 2[v(x) - v(\langle x, n \rangle n)][v(\langle x, n \rangle n) - v(sn)] + (v(x) - v(\langle x, n \rangle n))^2 \\ &\quad + (v(\langle x, n \rangle n) - v(sn))^2 \\ &\geq 2[v(x) - \langle x, n \rangle][\langle x, n \rangle - s] + 0 + (\langle x, n \rangle - s)^2, \end{aligned}$$

onde foi usado que $v(tn) = t$, para $t \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, como $\text{Lip}_v(\mathbb{R}^n) = 1$, então

$$|v(x) - v(sn)|^2 \leq \|x - sn\|^2 = \|p + \langle x, n \rangle n - sn\|^2 = \|p\|^2 + |\langle x, n \rangle - s|^2,$$

afinal p e n são ortogonais e n é unitário. Logo,

$$2[v(x) - \langle x, n \rangle][\langle x, n \rangle - s] \leq \|p\|^2, \quad (3.23)$$

e como a escolha de $s \in \mathbb{R}$ foi arbitrária, segue que, se $s < \langle x, n \rangle$,

$$2(v(x) - \langle x, n \rangle) \leq \frac{\|p\|^2}{\langle x, n \rangle - s}$$

e, fazendo $s \rightarrow -\infty$, concluímos que $v(x) \leq \langle x, n \rangle$.

Da mesma forma, utilizando (3.23) com $s > \langle x, n \rangle$, concluímos que $v(x) \geq \langle x, n \rangle$, e como a escolha de $x \in \mathbb{R}^n$ foi arbitrária, segue o resultado. \square

A seguir, mostramos um dos principais resultados a respeito do *blow-up* de funções ∞ -harmônicas em Ω [7], o qual torna possível o estudo da diferenciabilidade em todo ponto de Ω dessas funções.

Teorema 3.4.5. *Seja $u \in C(\Omega)$ uma função que satisfaz comparação com cones em Ω . Então, para cada $x \in \Omega$, a função u_x é afim em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $L_0^+(u, x)$ é a constante de Lipschitz de

u_x em \mathbb{R}^n . De fato, dados $y, z \in \mathbb{R}^n$ com $y \neq z$, pela Proposição 3.4.3, vale

$$\frac{u_x(y) - u_x(z)}{\|y - z\|} \leq \max_w \frac{u_x(w) - u_x(z)}{\|y - z\|} = L_{y-z}^+(u_x, z) \stackrel{3.4.3}{\leq} L_0^+(u, x).$$

E, trocando a ordem de y e z , concluímos que

$$\frac{|u_x(y) - u_x(z)|}{\|y - z\|} \leq L_0^+(u, x).$$

Ou seja, $L_0^+(u, x)$ é uma constante de Lipschitz para u_x em \mathbb{R}^n . Para mostrarmos que é a menor constante de Lipschitz, notamos que, pela Proposição 3.4.3,

$$L_0^+(u, x) = L_0^+(u_x, 0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} L_r^+(u_x, 0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u_x(z_r^+) - u_x(0)}{r}, \quad (3.24)$$

onde $z_r^+ \in S_r(0)$ é tal que $u_x(z_r^+) = \max_{z \in S_r(0)} u_x(z)$. Dessa forma, por (3.24), para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < r < \delta$ implica em

$$\left| \frac{u_x(z_r^+) - u_x(0)}{r} - L_0^+(u, x) \right| < \varepsilon$$

e, portanto,

$$L_0^+(u, x) - \varepsilon < \frac{u_x(z_r^+) - u_x(0)}{\|z_r^+ - 0\|},$$

ou seja, $L_0^+(u, x) - \varepsilon$ não é uma constante de Lipschitz para u_x em \mathbb{R}^n . Portanto,

$$\text{Lip}_{u_x}(\mathbb{R}^n) = L_0^+(u, x), \quad (3.25)$$

como queríamos mostrar.

Agora, para cada $r > 0$, tomamos $z_r^+, z_r^- \in S_r(0)$ tais que

$$L_r^+(u_x, 0) = \frac{u_x(z_r^+) - u_x(0)}{r} = \frac{u_x(z_r^+)}{r} \quad \text{e} \quad L_r^-(u_x, 0) = \frac{u_x(z_r^-)}{r}, \quad (3.26)$$

onde foi utilizado que $u_x(0) = 0$. Pela Proposição 3.4.3, concluímos que, para cada $r > 0$, $L_r^+(u_x, 0) = -L_r^-(u_x, 0) = L_0^+(u, x)$ e, por (3.26),

$$L_0^+(u, x) = \frac{L_r^+(u_x, 0) - L_r^-(u_x, 0)}{2} = \frac{u_x(z_r^+) - u_x(z_r^-)}{2r}. \quad (3.27)$$

Fixado $r > 0$, definimos $g_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_r(t) = u_x(z_r^- + t(z_r^+ - z_r^-)) - u_x(z_r^-).$$

Temos que g_r é Lipschitz em $[0, 1]$, pois, como $\text{Lip}_{u_x}(\mathbb{R}^n) = L_0^+(u, x)$, então

$$\begin{aligned}
L &:= \sup \left\{ \frac{|g_r(t) - g_r(s)|}{|t - s|} : t, s \in [0, 1], t \neq s \right\} \\
&= \sup \left\{ \frac{|u_x(z_r^- + t(z_r^+ - z_r^-)) - u_x(z_r^- + s(z_r^+ - z_r^-))|}{|t - s|} : t, s \in [0, 1], t \neq s \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \frac{L_0^+(u, x) |t - s| \|z_r^+ - z_r^-\|}{|t - s|} : t, s \in [0, 1], t \neq s \right\} \\
&= L_0^+(u, x) \|z_r^+ - z_r^-\| \\
&\leq L_0^+(u, x) 2r.
\end{aligned}$$

E como,

$$L \geq |g_r(1) - g_r(0)| = |u_x(z_r^+) - u_x(z_r^-)| \stackrel{(3.27)}{=} 2rL_0^+(u, x).$$

concluimos que

$$\underbrace{L}_{(i)} = \underbrace{L_0^+(u, x) \|z_r^+ - z_r^-\|}_{(ii)} = \underbrace{2rL_0^+(u, x)}_{(iii)} = \underbrace{|g_r(1) - g_r(0)|}_{(iv)}.$$

Notemos, de (i) = (ii), que $\text{Lip}_{g_r}([0, 1]) = L_0^+(u, x) \|z_r^+ - z_r^-\|$. E, de (ii) = (iii), segue que $\|z_r^+ - z_r^-\| = 2r$, e como $z_r^+, z_r^- \in S_r(0)$, segue que

$$z_r^+ = -z_r^-.$$

Logo, para cada $r > 0$, temos que z_r^+ e z_r^- são únicos, pois, dado qualquer $w_r^- \in S_r(0)$ com $L_r^-(u_x, 0) = \frac{u_x(w_r^-)}{r}$, vale que $\|z_r^+ - w_r^-\| = 2r$, isto é, $w_r^- = -z_r^+$.

Por fim, de (i) = (iii) = (iv), segue que $2rL_0^+(u, x) = |g_r(1) - g_r(0)|$ é a constante de Lipschitz de g_r em $[0, 1]$. Portanto, pelo Lema 2.1.4, vale que, se $t \in [0, 1]$, então

$$g_r(t) = (g_r(1) - g_r(0))t + g_r(0) = (u_x(z_r^+) - u_x(z_r^-))t \stackrel{(3.27)}{=} 2rL_0^+(u, x)t,$$

ou seja, $u_x(z_r^- + t(z_r^+ - z_r^-)) - u_x(z_r^-) = 2trL_0^+(u, x)$ e, portanto,

$$u_x(z_r^- + t(z_r^+ - z_r^-)) = u_x(z_r^-) + 2trL_0^+(u, x). \quad (3.28)$$

Isto é, u_x é linear no segmento $[z_r^-, z_r^+]$. Ainda, como 0 é o ponto médio do segmento $[z_r^-, z_r^+]$, temos

$$0 = u_x(0) = u_x(z_r^- + \frac{1}{2}(z_r^+ - z_r^-)) = u_x(z_r^-) + rL_0^+(u, x),$$

ou seja, $u_x(z_r^-) = -rL_0^+(u, x)$, donde segue que

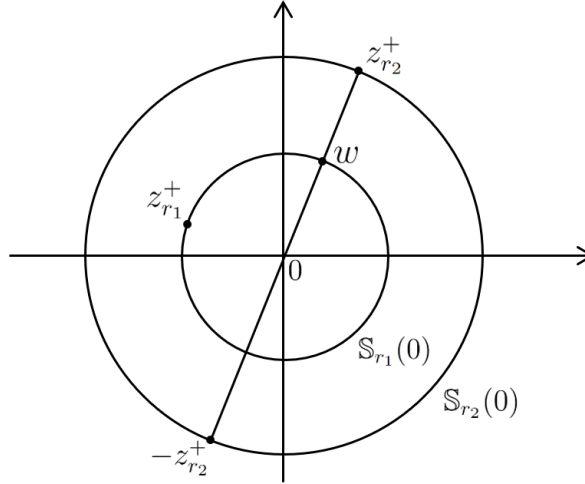
$$u_x(z_r^- + t(z_r^+ - z_r^-)) = (2t - 1)rL_0^+(u, x), \text{ para todo } t \in [0, 1]. \quad (3.29)$$

Ou seja, mostramos que, para cada $r > 0$, existe um ponto $z_r^+ \in S_r(0)$ tal que u_x é linear no segmento que liga $-z_r^+$ a z_r^+ , e tal que a constante de Lipschitz de u_x nesse segmento é a mesma de todo o domínio \mathbb{R}^n . Logo, variando $r > 0$, vamos mostrar que todos os pontos z_r^+ pertencem a uma mesma reta que passa pela origem.

De fato, suponhamos que existem $r_1 < r_2$ tais que $z_{r_1}^+ \notin [-z_{r_2}^+, z_{r_2}^+]$. Denotamos

$$S_{r_1}(0) \cap [0, z_{r_2}^+] = \{w\}.$$

Figura 3.4: Ilustração dos pontos de $S_{r_1}(0)$ e $S_{r_2}(0)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Escrevendo $w = z_{r_2}^- + \left(\frac{1}{2} + \frac{r_1}{2r_2}\right)(z_{r_2}^+ - z_{r_2}^-)$, concluímos, por (3.29) com $r = r_2$ e $t = \frac{1}{2} + \frac{r_1}{2r_2} \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} u_x \left(z_{r_2}^- + \left(\frac{1}{2} + \frac{r_1}{2r_2} \right) (z_{r_2}^+ - z_{r_2}^-) \right) &= \left(2 \left(\frac{1}{2} + \frac{r_1}{2r_2} \right) - 1 \right) r_2 L_0^+(u, x) \\ &= r_1 L_0^+(u, x) \\ &= u_x(z_{r_1}^+), \end{aligned}$$

onde a última equação segue de (3.29) com $r = r_1$ e $t = 1$. Ou seja, $u_x(w) = u_x(z_{r_1}^+)$, o que contradiz o fato de $z_{r_1}^+$ ser o único ponto de $S_{r_1}(0)$ tal que $L_{r_1}^+(u_x, 0) = \frac{u_x(z_{r_1}^+)}{r_1}$.

Portanto, vale que todos os pontos z_r^+ pertencem a uma mesma reta que passa pela origem, e ainda, u_x é linear nessa reta. Logo, pelo Lema 3.4.4, segue que u_x é linear em \mathbb{R}^n , como queríamos mostrar. \square

Observação. Se escrevermos

$$u_x(y) = \lim_k \frac{u(r_k y + x) - u(x)}{r_k} = \langle a, y \rangle,$$

onde $a \in \mathbb{R}^n$, já mostramos que esse limite é localmente uniforme. Vamos mostrar que $\|a\| = L_0^+(u, x)$.

Basta notar que, pela prova do Teorema 3.4.5, $L_0^+(u, x)$ é a constante de Lipschitz de u_x em \mathbb{R}^n . E ainda, $\|a\|$ é a constante de Lipschitz de $y \mapsto \langle a, y \rangle$ em \mathbb{R}^n , visto que, pelo Teorema de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{|\langle a, x \rangle - \langle a, y \rangle|}{\|x - y\|} = \frac{|\langle a, x - y \rangle|}{\|x - y\|} \leq \frac{\|a\| \|x - y\|}{\|x - y\|} = \|a\|.$$

Logo, como a constante de Lipschitz de uma função é única, segue que $\|a\| = L_0^+(u, x)$.

Notemos ainda que $a \in \mathbb{R}^n$ depende do ponto $x \in \Omega$ e, a princípio, depende também da escolha da sequência $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. A nossa estratégia para mostrar que uma função ∞ -harmônica é diferenciável em todo ponto $x \in \Omega$ será mostrar que, na verdade, o vetor $a \in \mathbb{R}^n$ não depende de $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

A linearidade de todos os *blow-ups* de u em um ponto $x \in \Omega$ não é suficiente para mostrar a diferenciabilidade de u nesse ponto, devido ao exemplo de Preiss [7], que mostrou que a função $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\log |\log |x||), & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é Lipschitz próximo da origem e é tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u(r_k y)}{r_k} \tag{3.30}$$

é uma função linear, qualquer que seja a sequência $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números positivos convergindo para 0 que tomemos. Contudo, u não é diferenciável na origem, o que é devido ao fato de conseguirmos escolher sequência $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de modo que (3.30) seja uma reta com qualquer inclinação entre -1 e 1 .

Capítulo 4

Diferenciabilidade em todo ponto de funções ∞ -harmônicas

Neste capítulo, mostramos o resultado final dessa dissertação, o de diferenciabilidade em todo ponto de funções ∞ -harmônicas [12]. Esse é um resultado mais geral do que o obtido no capítulo anterior, que afirma que funções ∞ -harmônicas são diferenciáveis em quase todo ponto de Ω , e é o resultado mais geral a respeito da regularidade de funções ∞ -harmônicas em \mathbb{R}^n encontrado na literatura até a data dessa dissertação.

4.1 Diferenciabilidade através de unicidade de *blow-ups*

Nessa seção, mostramos que, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u \in C(\bar{\Omega})$ uma solução de viscosidade de $-\Delta u = 0$ em Ω , então u é diferenciável em todo ponto $x \in \Omega$. Para isso, observamos que, pelo Teorema 3.4.5, dados $x \in \Omega$ e $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos tal que $r_k \rightarrow 0$, então existem uma subsequência $\{r_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ e um vetor $a \in \mathbb{R}^n$ e tais que

$$u_x(y) = \lim_j \frac{u(r_{k_j}y + x) - u(x)}{r_{k_j}} = \langle a, y \rangle \quad (4.1)$$

localmente uniformemente em \mathbb{R}^n . A princípio, o vetor a depende de x e da sequência $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ escolhidos. Na verdade, como provamos no Teorema 4.1.4, o limite (4.1) é válido para toda sequência $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, donde segue que o limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(ry + x) - u(x)}{r} = \langle a, y \rangle$$

é localmente uniforme, e, em particular, u é diferenciável no ponto x , pela Proposição 1.2.7. Para esse propósito, seguimos os passos de [12].

Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, considere o seguinte problema de Dirichlet

perturbado:

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - \varepsilon \Delta u^\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega, \\ u^\varepsilon = u & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Suponhamos, também, que u é Lipschitz em todo o conjunto $\bar{\Omega}$.

Teorema 4.1.1. (i) *Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma única solução u^ε de (4.2), suave em $\bar{\Omega}$. Além disso, existe $C > 0$ tal que*

$$\max_x |u^\varepsilon(x)| \leq C \quad (4.3)$$

e, para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe $C > 0$ tal que

$$\max_x |\nabla u^\varepsilon(x)| \leq C. \quad (4.4)$$

Ambas as constantes independem de ε , e a constante de (4.4) depende também de $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

(ii) *Além disso,*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \text{ uniformemente em } \bar{\Omega}. \quad (4.5)$$

Demonstração. (i) Primeiramente, notamos que a existência, unicidade e regularidade de solução de (4.2) segue dos resultados acerca da teoria de equações diferenciais parciais quasilineares discutidos na Seção 1.3 e das seguintes estimativas a priori. Além disso, pelo princípio fraco do máximo, Corolário 1.3.5,

$$\max_x |u^\varepsilon(x)| = \max_x |u^\varepsilon(x)| = \max_x |u(x)|,$$

e vale (4.3).

Conforme dito acima, para mostrar (4.4), suponhamos que exista uma solução suave u^ε de (4.2) e denotamos

$$L_\varepsilon v := \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon v_{x_i x_j} - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon v_{x_j} \right) - \varepsilon \Delta v.$$

Notando que, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, vale que $L_\varepsilon u_{x_k}^\varepsilon = 0$, pois, como u^ε é suave e satisfaz $-\Delta u^\varepsilon - \varepsilon \Delta u^\varepsilon = 0$ em Ω , então

$$\sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}^\varepsilon = 0$$

e, derivando em relação a x_k , obtemos

$$\sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i x_k}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon - u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j x_k}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon - u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i x_j x_k}^\varepsilon \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i x_k}^\varepsilon = 0$$

ou seja,

$$L_\varepsilon u_{x_k}^\varepsilon = \sum_{i,j=1}^n \left(-2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j x_k}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon - u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i x_j x_k}^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta u_{x_k}^\varepsilon = 0, \quad (4.6)$$

onde foi utilizado que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i x_k}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon - u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j x_k}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \right) &= - \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_k}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon - \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j x_k}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \\ &= - \sum_{j,i=1}^n u_{x_j x_k}^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j x_i}^\varepsilon - \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j x_k}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \\ &= -2 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon u_{x_j x_k}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Agora, denotando $v^\varepsilon = \frac{1}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (u_{x_k}^\varepsilon)^2$, notamos que, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} v_{x_i}^\varepsilon &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[(u_{x_k}^\varepsilon)^2 \right]_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon, \\ v_{x_i x_j}^\varepsilon &= \sum_{k=1}^n \left[u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon \right]_{x_j} = \sum_{k=1}^n \left(u_{x_k x_j}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon + u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_i x_j}^\varepsilon \right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} L_\varepsilon v^\varepsilon &= \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon v_{x_i x_j}^\varepsilon - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon v_{x_j}^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta v^\varepsilon \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \left(\sum_{k=1}^n \left(u_{x_k x_j}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon + u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_i x_j}^\varepsilon \right) \right) - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \left(\sum_{k=1}^n u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_j}^\varepsilon \right) \right) \\ &\quad - \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(u_{x_k x_i}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon + u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_i x_i}^\varepsilon \right) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_k x_j}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon - \cancel{u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_i x_j}^\varepsilon} - \cancel{2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_j}^\varepsilon} \right) \\ &\quad - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n u_{x_k x_i}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \cancel{u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_i x_i}^\varepsilon} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_k x_j}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (u_{x_k x_i}^\varepsilon)^2 \\ &= - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon \sum_{j=1}^n u_{x_j}^\varepsilon u_{x_k x_j}^\varepsilon \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (u_{x_k x_i}^\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_k x_i}^\varepsilon \right)^2 - \varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(u_{x_k x_i}^\varepsilon \right)^2 \\
&= - \left\| \nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \right\|^2 - \varepsilon \left\| \nabla^2 u^\varepsilon \right\|^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Da mesma forma, denotando $z^\varepsilon = \frac{1}{2} (u^\varepsilon)^2$, temos $z_{x_i}^\varepsilon = u^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon$ e $z_{x_i x_j}^\varepsilon = u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon + u^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon z^\varepsilon &= \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \left(u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon + u^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \right) - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \left(u^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \right) \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon + u^\varepsilon u_{x_i x_i}^\varepsilon \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon - \cancel{u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon} - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon u^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon + \cancel{u^\varepsilon u_{x_i x_i}^\varepsilon} \right) \\
&\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{i,j=1}^n \left(- \left(u_{x_i}^\varepsilon \right)^2 \left(u_{x_j}^\varepsilon \right)^2 - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon u^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^\varepsilon \right)^2 \\
&= - \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^\varepsilon \right)^2 \sum_{j=1}^n \left(u_{x_j}^\varepsilon \right)^2 - \sum_{i,j=1}^n 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon u^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^\varepsilon \right)^2 \\
&= - \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^2 \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^2 - \sum_{i,j=1}^n 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon u^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon - \varepsilon \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^2 \\
&= - \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^4 - \varepsilon \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^2 - \sum_{i,j=1}^n 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon u^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Agora, dada uma função $\zeta : \bar{\Omega} \rightarrow [0, 1]$, suave em $\bar{\Omega}$ e tal que $\zeta \equiv 1$ em Ω e $\zeta \equiv 0$ próximo de $\partial\Omega$, definimos

$$w^\varepsilon := \zeta^2 v^\varepsilon + \alpha z^\varepsilon,$$

onde $\alpha > 1$ é uma constante que escolhemos adiante.

Assumindo que w^ε atinge seu valor máximo em um ponto $x_0 \in \Omega$, como w^ε é suave em Ω , segue que $\nabla w^\varepsilon(x_0) = 0$ e $\nabla^2 w^\varepsilon(x_0) \leq 0$ e, em particular,

$$\left\langle \nabla^2 w^\varepsilon(x_0) e_i, e_i \right\rangle = w_{x_i x_i}^\varepsilon(x_0) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon w^\varepsilon(x_0) &= \sum_{i,j=1}^n \left(-w_{x_i}^\varepsilon(x_0) w_{x_j}^\varepsilon(x_0) w_{x_i x_j}^\varepsilon(x_0) - 2w_{x_i}^\varepsilon(x_0) w_{x_i x_j}^\varepsilon(x_0) w_{x_j}^\varepsilon(x_0) \right) - \varepsilon \Delta w^\varepsilon(x_0) \\
&= -\varepsilon \Delta w^\varepsilon(x_0) \geq 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, notemos que

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon(\zeta^2 v^\varepsilon) &= \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon (\zeta^2 v^\varepsilon)_{x_i x_j} - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon (\zeta^2 v^\varepsilon)_{x_j} \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^n (\zeta^2 v^\varepsilon)_{x_i x_i} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \left[(\zeta^2)_{x_i x_j} v^\varepsilon + (\zeta^2)_{x_i} v_{x_j}^\varepsilon + (\zeta^2)_{x_j} v_{x_i}^\varepsilon + \zeta^2 (v^\varepsilon)_{x_i x_j} \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \left[(\zeta^2)_{x_j} v^\varepsilon + \zeta^2 v_{x_j}^\varepsilon \right] - \varepsilon \sum_{i=1}^n \left[(\zeta^2)_{x_i x_i} v^\varepsilon + 2(\zeta^2)_{x_i} v_{x_i}^\varepsilon + \zeta^2 (v^\varepsilon)_{x_i x_i} \right] \\
& = L_\varepsilon(\zeta^2)v^\varepsilon + \zeta^2 L_\varepsilon(v^\varepsilon) - \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon (\zeta^2)_{x_i} v_{x_j}^\varepsilon - \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon (\zeta^2)_{x_j} v_{x_i}^\varepsilon \\
& \quad - \varepsilon \sum_{i=1}^n 2(\zeta^2)_{x_i} v_{x_i}^\varepsilon \\
& = L_\varepsilon(\zeta^2)v^\varepsilon + \zeta^2 L_\varepsilon(v^\varepsilon) - 2 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon (\zeta^2)_{x_i} v_{x_j}^\varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1}^n 2(\zeta^2)_{x_i} v_{x_i}^\varepsilon \\
& = L_\varepsilon(\zeta^2)v^\varepsilon + \zeta^2 L_\varepsilon(v^\varepsilon) - 4 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \zeta_{x_i} v_{x_j}^\varepsilon - 4\varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} v_{x_i}^\varepsilon \tag{4.9}
\end{aligned}$$

e, utilizando (4.7) e (4.8), concluímos que, no ponto x_0 ,

$$\begin{aligned}
0 & \leq L_\varepsilon w^\varepsilon = L_\varepsilon(\zeta^2 v^\varepsilon) + \alpha L_\varepsilon z^\varepsilon \\
& = L_\varepsilon(\zeta^2)v^\varepsilon + \zeta^2 L_\varepsilon(v^\varepsilon) - 4 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \zeta_{x_i} v_{x_j}^\varepsilon - 4\varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} v_{x_i}^\varepsilon + \alpha L_\varepsilon z^\varepsilon \\
& = - \left(\sum_{i,j=1}^n \left(u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon [2\zeta_{x_j} \zeta_{x_i} + 2\zeta \zeta_{x_i x_j}] + 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon [2\zeta \zeta_{x_j}] \right) + \varepsilon \sum_{i=1}^n [2\zeta_{x_i}^2 + 2\zeta \zeta_{x_i x_i}] \right) v^\varepsilon \\
& \quad - \zeta^2 \left(\|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 + \varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 \right) - 4 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \zeta_{x_i} v_{x_j}^\varepsilon - 4\varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} v_{x_i}^\varepsilon \\
& \quad - \alpha \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^4 + \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|^2 + \sum_{i,j=1}^n 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon u^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \right) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Agora, notando que, como $\zeta : \bar{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ é suave em $\bar{\Omega}$, então existe $C > 0$, dependendo de $\text{dist}(\Omega, \partial\Omega)$, tal que

$$\|\zeta\|_{L(\bar{\Omega})}, \|\nabla \zeta\|_{L(\bar{\Omega})}, \|\nabla^2 \zeta\|_{L(\bar{\Omega})} \leq C,$$

então

$$\begin{aligned}
- \left(\sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon [2\zeta_{x_j} \zeta_{x_i} + 2\zeta \zeta_{x_i x_j}] \right) v^\varepsilon & \leq \left| \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon [2\zeta_{x_j} \zeta_{x_i} + 2\zeta \zeta_{x_i x_j}] \right| \frac{1}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \\
& \leq \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i}^\varepsilon| |u_{x_j}^\varepsilon| |2\zeta_{x_j} \zeta_{x_i} + 2\zeta \zeta_{x_i x_j}| \frac{1}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \\
& \leq \sum_{i,j=1}^n \|\nabla u^\varepsilon\| \|\nabla u^\varepsilon\| C \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \\
& = C \|\nabla u^\varepsilon\|^4,
\end{aligned}$$

onde foi utilizado que

$$|u_{x_i}^\varepsilon| = \sqrt{(u_{x_i}^\varepsilon)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (u_{x_k}^\varepsilon)^2} = \|\nabla u^\varepsilon\|, \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ainda,

$$\begin{aligned} - \left(\sum_{i,j=1}^n 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon [2\zeta \zeta_{x_j}] \right) v^\varepsilon &\leq \left| \sum_{i,j=1}^n 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon 2\zeta \zeta_{x_j} \right| \frac{1}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^n \left(\left| \sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \right| \zeta |\zeta_{x_j}| \right) \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \\ &\leq 2 \sum_{i,j=1}^n \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \zeta C \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \\ &\leq C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \zeta \|\nabla u^\varepsilon\|^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde foi utilizado que, para $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left| \sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \right| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_k}^\varepsilon \right)^2} = \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|,$$

afinal

$$\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1}^\varepsilon & u_{x_1 x_2}^\varepsilon & \cdots & u_{x_1 x_n}^\varepsilon \\ u_{x_2 x_1}^\varepsilon & u_{x_2 x_2}^\varepsilon & \cdots & u_{x_2 x_n}^\varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1}^\varepsilon & u_{x_n x_2}^\varepsilon & \cdots & u_{x_n x_n}^\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x_1}^\varepsilon \\ u_{x_2}^\varepsilon \\ \vdots \\ u_{x_n}^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n u_{x_1 x_i}^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon \\ \sum_{i=1}^n u_{x_2 x_i}^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n u_{x_n x_i}^\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Aplicando a desigualdade de Young em (4.11) com $p = q = 2$, obtemos, finalmente, que

$$\begin{aligned} - \left(\sum_{i,j=1}^n 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon [2\zeta \zeta_{x_j}] \right) v^\varepsilon &\leq C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \zeta \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \zeta \right) (\sqrt{3} C \|\nabla u^\varepsilon\|^2) \\ &\leq \frac{\|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \zeta^2}{6} + C \|\nabla u^\varepsilon\|^4. \end{aligned}$$

Dessa forma, aplicando estimativas semelhantes aos demais termos à direita de (4.10), notando que, para $j \in \{1, \dots, n\}$, $v_{x_j}^\varepsilon = \sum_{k=1}^n u_{x_k}^\varepsilon u_{x_k x_j}^\varepsilon$, o que implica em $|v_{x_j}^\varepsilon| \leq \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|$, e que $|u^\varepsilon| \leq C$ em Ω , concluímos que

$$0 \leq L_\varepsilon w^\varepsilon$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|\nabla u^\varepsilon\|^4 + \frac{1}{6} \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \zeta^2 + C \|\nabla u^\varepsilon\|^4 + C \varepsilon \frac{1}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \\
&\quad - \zeta^2 \left(\|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 + \varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 \right) + 4C \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \zeta C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| + 4C \varepsilon \zeta \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \\
&\quad - \alpha \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^4 + \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \right) + \alpha C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| C \|\nabla u^\varepsilon\| \\
&\leq C \|\nabla u^\varepsilon\|^4 + \frac{1}{6} \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \zeta^2 + C \|\nabla u^\varepsilon\|^4 + C^2 + C \|\nabla u^\varepsilon\|^4 \\
&\quad - \zeta^2 \left(\|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 + \varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 \right) + C \|\nabla u^\varepsilon\|^4 + \frac{1}{6} \zeta^2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \\
&\quad + C^2 + \frac{1}{6} \zeta^2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 - \alpha \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^4 + \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \right) + C \alpha \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \|\nabla u^\varepsilon\| \\
&\leq (C - \alpha) \|\nabla u^\varepsilon\|^4 + C - \zeta^2 \left(\frac{1}{2} \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 + \varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 \right) \\
&\quad - \alpha \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|^2 + C \alpha \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \|\nabla u^\varepsilon\| \\
&\leq C + (C - \alpha) \|\nabla u^\varepsilon\|^4 - \zeta^2 \left(\frac{1}{2} \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 + 0 \right) + 0 + C \alpha \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \|\nabla u^\varepsilon\|.
\end{aligned}$$

Tomando α grande o suficiente ($\alpha > C$), segue que, em x_0 ,

$$\frac{1}{2} \zeta^2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 + (\alpha - C) \|\nabla u^\varepsilon\|^4 \leq C + C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \|\nabla u^\varepsilon\|$$

ou, ainda,

$$\min \left\{ \frac{1}{2}, \alpha - C \right\} \left(\zeta^2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 + \|\nabla u^\varepsilon\|^4 \right) \leq C + C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \|\nabla u^\varepsilon\|.$$

Dividindo ambos os lados por $\min \left\{ \frac{1}{2}, \alpha - C \right\}$ e utilizando a Desigualdade de Young com $p = \frac{4}{3}$ e $q = 4$ para estimar

$$\begin{aligned}
C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \|\nabla u^\varepsilon\| &= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \right) \left(\sqrt[4]{2} \|\nabla u^\varepsilon\| \right) \\
&\leq C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{4} \|\nabla u^\varepsilon\|^4,
\end{aligned}$$

concluimos que

$$\zeta^2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 + \|\nabla u^\varepsilon\|^4 \leq C + C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|^4.$$

Logo,

$$\zeta^2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 + \|\nabla u^\varepsilon\|^4 \leq C + C \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^{\frac{4}{3}}.$$

Multiplicando essa última estimativa por ζ^4 e notando que, pela desigualdade de Young com $p = 3$ e $q = \frac{3}{2}$, vale, no ponto x_0 ,

$$C \zeta^4 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^{\frac{4}{3}} = \left(C \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \zeta^4 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^{\frac{4}{3}} \right) \leq C^3 + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \zeta^6 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \right),$$

concluimos que, em x_0 ,

$$\zeta^6 \left\| \nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \right\|^2 + \zeta^4 \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^4 \leq C + \zeta^6 \left\| \nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \right\|^2,$$

e, portanto, nesse ponto, vale que $\zeta^4 \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^4 \leq C$. Ou seja, concluimos que

$$\zeta(x_0) \left\| \nabla u^\varepsilon(x_0) \right\| \leq C,$$

e sendo x_0 um ponto de máximo de w^ε em Ω , obtemos que, se $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \nabla u^\varepsilon(x) \right\| &= \frac{1}{2} \zeta(x) \left\| \nabla u^\varepsilon(x) \right\| \leq \frac{1}{2} \zeta(x) \left\| \nabla u^\varepsilon(x) \right\| + \frac{1}{2} \alpha (u^\varepsilon(x))^2 = w^\varepsilon(x) \\ &\leq w^\varepsilon(x_0) = \frac{1}{2} \zeta(x_0) \left\| \nabla u^\varepsilon(x_0) \right\| + \frac{1}{2} \alpha (u^\varepsilon(x_0))^2 \leq \frac{1}{2} \cdot C + \frac{1}{2} \alpha \cdot C^2, \end{aligned}$$

onde foi utilizado que u^ε é limitado em Ω . Logo, segue a desigualdade (4.4).

(ii) Por fim, vamos mostrar que $u^\varepsilon \rightarrow u$ uniformemente em $\bar{\Omega}$. Para isso, suponhamos, sem perda de generalidade, que $0 \in \partial\Omega$. Fixado $\alpha \in (0, 1)$, definimos $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$w(x) = \lambda \|x\|^\alpha,$$

onde $\lambda > 0$ é escolhido a seguir.

Sendo u Lipschitz em $\partial\Omega$, pois é Lipschitz em $\bar{\Omega}$, podemos tomar $\lambda > 0$ grande o suficiente, dependendo de $\text{Lip}_u(\partial\Omega)$ e de $\text{diam}(\Omega)$, de modo que, para todo $x \in \partial\Omega$,

$$|u(x) - u(0)| \leq \text{Lip}_u(\partial\Omega) \|x\| = \text{Lip}_u(\partial\Omega) \|x\|^{1-\alpha} \|x\|^\alpha \leq \lambda \|x\|^\alpha = w(x).$$

Em particular, vale que

$$u^\varepsilon(x) = u(x) \leq w(x) + u(0), \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega. \quad (4.12)$$

Agora, como, para $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} w_{x_i}(x) &= [\lambda \|x\|^\alpha]_{x_i} = \lambda \alpha \|x\|^{\alpha-1} \frac{1}{2 \|x\|} 2x_i = \lambda \alpha \|x\|^{\alpha-2} x_i, \\ w_{x_i x_j}(x) &= [\lambda \alpha \|x\|^{\alpha-2} x_i]_{x_j} = \lambda \alpha (\alpha - 2) \|x\|^{\alpha-4} x_i x_j + \lambda \alpha \|x\|^{\alpha-2} \delta_{ij}, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} -\Delta w(x) - \varepsilon \Delta w(x) &= - \sum_{i,j=1}^n w_{x_i} w_{x_j} w_{x_i x_j} - \varepsilon \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i} \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \lambda \alpha \|x\|^{\alpha-2} x_i \lambda \alpha \|x\|^{\alpha-2} x_j \lambda \alpha (\alpha - 2) \|x\|^{\alpha-4} x_i x_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j=1}^n \lambda \alpha \|x\|^{\alpha-2} x_i \lambda \alpha \|x\|^{\alpha-2} x_j \lambda \alpha \|x\|^{\alpha-2} \delta_{ij} \\
& - \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda \left(\alpha(\alpha-2) \|x\|^{\alpha-4} x_i x_i + \alpha \|x\|^{\alpha-2} \delta_{ii} \right) \\
& = - \lambda \alpha^3 (\alpha-2) \|x\|^{3\alpha-8} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 - \lambda \alpha^3 \|x\|^{3\alpha-6} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
& \quad - \varepsilon \lambda \alpha (\alpha-2) \|x\|^{\alpha-4} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \varepsilon \lambda \alpha \|x\|^{\alpha-2} \sum_{i=1}^n 1 \\
& = - \lambda \alpha^3 (\alpha-2) \|x\|^{3\alpha-4} - \lambda \alpha^3 \|x\|^{3\alpha-4} \\
& \quad - \varepsilon \lambda \alpha (\alpha-2) \|x\|^{\alpha-2} - \varepsilon \lambda \alpha n \|x\|^{\alpha-2} \\
& = \lambda \alpha^3 (1-\alpha) \|x\|^{3\alpha-4} - \varepsilon \lambda \alpha (\alpha+n-2) \|x\|^{\alpha-2}.
\end{aligned}$$

Como $3\alpha - 4 < \alpha - 2$, temos que existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in \Omega$ e $\|x\| < \delta$, então

$$-\Delta w(x) - \varepsilon \Delta w(x) = \lambda \alpha^3 (1-\alpha) \|x\|^{3\alpha-4} - \varepsilon \lambda \alpha (\alpha+n-2) \|x\|^{\alpha-2} \geq 0;$$

e, além disso, se $x \in \Omega \setminus B_\delta(0)$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $-\Delta w(x) - \varepsilon \Delta w(x) \geq 0$, para qualquer $x \in \Omega \setminus B_\delta(0)$. De fato, basta que

$$\lambda \alpha^3 (1-\alpha) \delta^{2\alpha-2} - \varepsilon \lambda \alpha (\alpha+n-2) \geq 0$$

ou seja,

$$\varepsilon \leq \frac{\lambda \alpha^3 (1-\alpha) \delta^{2\alpha-2}}{\lambda \alpha (\alpha+n-2)}.$$

Logo, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $-\Delta w - \varepsilon \Delta w \geq 0$ e, pelo princípio do máximo e por (4.12), temos que

$$u^\varepsilon \leq u(0) + w \text{ em } \Omega.$$

Analogamente, mostramos que $-w + u(0) \leq u^\varepsilon$, e, portanto,

$$|u^\varepsilon(x) - u(0)| \leq \lambda \|x\|^\alpha, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

A mesma análise pode ser feita para qualquer ponto $y \in \partial\Omega$. Logo, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência de $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ que converge uniformemente em $\overline{\Omega}$ para uma função \hat{u} .

Afirmação. $\hat{u} \in C(\overline{\Omega})$ é ∞ -harmônica em Ω .

De fato, tomemos $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(V_{x_0})$, onde $V_{x_0} \subset \Omega$ é uma vizinhança de x_0 , tal que $u - \varphi$ possui um máximo local em x_0 .

Pela Proposição 1.2.3, existem uma sequência $\{\varepsilon_j\}_j \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_j \rightarrow 0$ e pontos $x_{\varepsilon_j} \in V_{x_0}$

tal que $u^{\varepsilon_j} - \varphi$ possui máximo local em x_{ε_j} , e vale que $x_{\varepsilon_j} \rightarrow x_0$ quando $j \rightarrow \infty$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sendo u^{ε_j} solução de viscosidade de $-\Delta u^{\varepsilon_j} - \varepsilon_j \Delta u^{\varepsilon_j} = 0$ em Ω (pois é solução clássica) e como $u^{\varepsilon_j} - \varphi$ possui máximo local em x_{ε_j} , temos que

$$-\Delta \varphi(x_{\varepsilon_j}) - \varepsilon_j \Delta \varphi(x_{\varepsilon_j}) \leq 0$$

ou, ainda,

$$-\Delta \varphi(x_{\varepsilon_j}) \leq \varepsilon_j \Delta \varphi(x_{\varepsilon_j}).$$

Fazendo $j \rightarrow \infty$ e usando que φ é suave e que $x_{\varepsilon_j} \rightarrow x_0$, concluímos que

$$-\Delta \varphi(x_0) \leq 0.$$

Logo, concluímos que \hat{u} é ∞ -subharmônica em Ω , e, analogamente mostramos que \hat{u} é ∞ -superharmônica em Ω .

Por fim, como $\hat{u} = u$ em $\partial\Omega$, por unicidade, $\hat{u} = u$, e concluímos que $u^\varepsilon \rightarrow u$ uniformemente em Ω . \square

Agora, tomando $\Omega = B_3(0)$, suponhamos que u é ∞ -harmônica em $B_3(0)$ e Lipschitz em $\overline{B_3(0)}$. Sendo u^ε solução de

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - \varepsilon \Delta u^\varepsilon = 0 & \text{em } B_3(0) \\ u^\varepsilon = u & \text{em } \partial B_3(0), \end{cases} \quad (4.13)$$

sabemos, pelo Teorema 4.1.1, que

$$\max_{x \in B_2(0)} |u^\varepsilon(x)| \leq C, \quad \max_{x \in B_2(0)} \|\nabla u^\varepsilon(x)\| \leq C \quad (4.14)$$

e $u^\varepsilon \rightarrow u$ uniformemente em $\overline{B_3(0)}$.

Suponhamos também que, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, u^ε está próximo de uma função afim em $B_2(0)$, a qual consideramos ser a função $L : B_2(0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $L(x) = x_n$, para facilitar a notação. Logo, suponhamos que

$$\max_{x \in B_2(0)} |u^\varepsilon - x_n| =: \lambda, \quad (4.15)$$

onde λ é pequeno. Essa suposição é plausível, pois ela aparece naturalmente na prova do Teorema 4.1.4, Eq. (4.31).

Lema 4.1.2. *Existe $C > 0$, independente de λ e de ε , tal que*

$$\|\nabla u^\varepsilon(x)\|^2 \leq u_{x_n}^\varepsilon(x) + C \left(\lambda^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right), \text{ para todo } x \in B_1(0). \quad (4.16)$$

Demonstração. Assim como feito na prova do Teorema 4.1.1, definimos

$$L_\varepsilon v = \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon v_{x_i x_j} - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon v_{x_j} \right) - \varepsilon \Delta v,$$

e já sabemos que $L_\varepsilon u_{x_k}^\varepsilon = 0$, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, e

$$L_\varepsilon \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 \right) = -2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 - 2\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2.$$

Agora, como

$$\begin{aligned} \left[(u^\varepsilon - x_n)^2 \right]_{x_i} &= 2(u^\varepsilon - x_n)(u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in}), \\ \left[(u^\varepsilon - x_n)^2 \right]_{x_i x_j} &= 2(u_{x_j}^\varepsilon - \delta_{jn})(u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in}) + 2(u^\varepsilon - x_n)u_{x_i x_j}^\varepsilon, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \left((u^\varepsilon - x_n)^2 \right) &= \sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \left(2(u_{x_j}^\varepsilon - \delta_{jn})(u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in}) + 2(u^\varepsilon - x_n)u_{x_i x_j}^\varepsilon \right) \right) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \left(2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon 2(u^\varepsilon - x_n)(u_{x_j}^\varepsilon - \delta_{jn}) \right) \\ &\quad - \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(2(u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in})(u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in}) + 2(u^\varepsilon - x_n)u_{x_i x_i}^\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n -u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon 2(u_{x_j}^\varepsilon - \delta_{jn})(u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in}) &= -2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon (u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in}) \sum_{j=1}^n u_{x_j}^\varepsilon (u_{x_j}^\varepsilon - \delta_{jn}) \\ &= -2 \left(\sum_{i=1}^n (u_{x_i}^\varepsilon)^2 - \delta_{in} u_{x_i}^\varepsilon \right)^2 \\ &= -2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\varepsilon \sum_{i=1}^n 2(u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in})(u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in}) &= -2\varepsilon \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^\varepsilon - \delta_{in})^2 = -2 \left\| (u_{x_1}^\varepsilon, \dots, u_{x_{n-1}}^\varepsilon, u_{x_n}^\varepsilon - 1) \right\|^2 \\ &= -2 \|\nabla u^\varepsilon - e_n\|^2, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon \left((u^\varepsilon - x_n)^2 \right) &= -2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 - \sum_{i,j=1}^n \left(u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon 2(u^\varepsilon - x_n) u_{x_i x_j}^\varepsilon \right) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^n \left(2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon 2(u^\varepsilon - x_n) (u_{x_j}^\varepsilon - \delta_{jn}) \right) \\
&\quad - 2\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon - e_n\|^2 - \varepsilon \sum_{i=1}^n 2(u^\varepsilon - x_n) u_{x_i x_i}^\varepsilon \\
&\stackrel{(4.13)}{=} -2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 - \sum_{i,j=1}^n \left(2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon 2(u^\varepsilon - x_n) (u_{x_j}^\varepsilon - \delta_{jn}) \right) \\
&\quad - 2\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon - e_n\|^2 \\
&\leq -2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + \sum_{i,j=1}^n 2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \cdot 2\lambda C + 0 \\
&\leq -2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + C\lambda \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

onde foram utilizadas as estimativas (4.14) e (4.15).

Agora, definindo $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Phi(p) = \left(\|p\|^2 - p_n \right)_+^2 = \left(\sum_{m=1}^n p_m^2 - p_n \right)_+^2$, onde $y_+ = \max\{y, 0\}$, podemos multiplicar a Eq. (4.6) por

$$\Phi_{p_k}(\nabla u^\varepsilon) = \left[2 \left(\sum_{m=1}^n p_m^2 - p_n \right) (2p_k - \delta_{kn}) \right]_{p= \nabla u^\varepsilon} = 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) (2u_{x_k}^\varepsilon - \delta_{kn})$$

e somar para $k = 1, \dots, n$, obtendo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n \left(-2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j x_k}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon - u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i x_j x_k}^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta u_{x_k}^\varepsilon \right] 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \\
\cdot (2u_{x_k}^\varepsilon - \delta_{kn}) = 0
\end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n \left(-2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j x_k}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon - u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i x_j x_k}^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta u_{x_k}^\varepsilon \right] 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) 2u_{x_k}^\varepsilon \\
- \left[\sum_{i,j=1}^n \left(-2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j x_n}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon - u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon u_{x_i x_j x_n}^\varepsilon \right) - \varepsilon \Delta u_{x_n}^\varepsilon \right] 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) = 0. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Se $\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon > 0$ em um ponto de $B_3(0)$, então, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$[\Phi(\nabla u^\varepsilon)]_{x_i} = \left[\left(\sum_{m=1}^n (u_{x_m}^\varepsilon)^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 \right]_{x_i} = 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right)$$

$$[\Phi(\nabla u^\varepsilon)]_{x_i x_j} = 2 \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_j}^\varepsilon - u_{x_n x_j}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right) \\ + 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n [2u_{x_m x_j}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon + 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i x_j}^\varepsilon] - u_{x_n x_i x_j}^\varepsilon \right)$$

e, portanto,

$$L_\varepsilon(\Phi(\nabla u^\varepsilon)) = - \sum_{i,j=1}^n \left(u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon 2 \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_j}^\varepsilon - u_{x_n x_j}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right) \right) \\ - \sum_{i,j=1}^n \left(u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n [2u_{x_m x_j}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon + \cancel{2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i x_j}^\varepsilon}] - \cancel{u_{x_n x_i x_j}^\varepsilon} \right) \right) \\ - \sum_{i,j=1}^n \left(2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n \cancel{2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_j}^\varepsilon} - \cancel{u_{x_n x_j}^\varepsilon} \right) \right) \\ - \varepsilon \sum_{i=1}^n 2 \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right) \\ - \varepsilon \sum_{i=1}^n 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n [2u_{x_m x_i}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon + \cancel{2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i x_i}^\varepsilon}] - \cancel{u_{x_n x_i x_i}^\varepsilon} \right) \\ \stackrel{(4.18)}{=} - 2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right) \sum_{j=1}^n u_{x_j}^\varepsilon \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_j}^\varepsilon - u_{x_n x_j}^\varepsilon \right) \\ - 4 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \sum_{m=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon \sum_{j=1}^n u_{x_j}^\varepsilon u_{x_m x_j}^\varepsilon \right) \\ - 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right)^2 - 4\varepsilon \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n u_{x_m x_i}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon \\ = - 2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_i}^\varepsilon u_{x_n x_i}^\varepsilon \right) \right)^2 \\ - 4 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \sum_{m=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon \right)^2 \\ - 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right)^2 - 4\varepsilon \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \left(u_{x_m x_i}^\varepsilon \right)^2 \\ = - 2 \left(2\Delta u^\varepsilon - \sum_{i,m=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_n x_i}^\varepsilon \right)^2 - 4 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \\ - 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right)^2 - 4\varepsilon \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 \\ \leq - 2 \left(2\Delta u^\varepsilon - \sum_{i,m=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_n x_i}^\varepsilon \right)^2 - 4 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 - 0. \tag{4.19}$$

Dada uma função $\zeta : B_3(0) \rightarrow [0, 1]$, suave em $\overline{B_3(0)}$ e tal que $\zeta \equiv 1$ em $B_1(0)$ e $\zeta \equiv 0$

próximo de $S_2(0)$, temos, por cálculos semelhantes aos feitos em (4.9),

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon(\zeta^2 \Phi(\nabla u^\varepsilon)) &= L_\varepsilon(\zeta^2) \Phi(\nabla u^\varepsilon) + \zeta^2 L_\varepsilon(\Phi(\nabla u^\varepsilon)) - 4 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \zeta \zeta_{x_i} [\Phi(\nabla u^\varepsilon)]_{x_j} \\
&\quad - 4\varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta \zeta_{x_i} [\Phi(\nabla u^\varepsilon)]_{x_i} \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon (2\zeta_{x_j} \zeta_{x_i} + 2\zeta \zeta_{x_i x_j}) - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon 2\zeta \zeta_{x_j} \right) \right) \Phi(\nabla u^\varepsilon) \\
&\quad - \varepsilon \sum_{i=1}^n (2\zeta_{x_i} \zeta_{x_i} + 2\zeta \zeta_{x_i x_i}) \Phi(\nabla u^\varepsilon) + \zeta^2 L_\varepsilon(\Phi(\nabla u^\varepsilon)) \\
&\quad - 4 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \zeta \zeta_{x_i} 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_j}^\varepsilon - u_{x_n x_j}^\varepsilon \right) \\
&\quad - 4\varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta \zeta_{x_i} 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Notemos que, por (4.14),

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^n \left(-u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon (2\zeta_{x_j} \zeta_{x_i} + 2\zeta \zeta_{x_i x_j}) - 2u_{x_i}^\varepsilon u_{x_i x_j}^\varepsilon 2\zeta \zeta_{x_j} \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^n (2\zeta_{x_i} \zeta_{x_i} + 2\zeta \zeta_{x_i x_i}) \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left(C \cdot C (2C + 2C) + 2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| 2\zeta \cdot C \right) + C \\
&= C + C\zeta \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned}
&-4 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon \zeta \zeta_{x_i} 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_j}^\varepsilon - u_{x_n x_j}^\varepsilon \right) \\
&= -8 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \zeta \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} u_{x_i}^\varepsilon \left(\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n 2u_{x_j}^\varepsilon u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_j}^\varepsilon - \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n u_{x_j}^\varepsilon u_{x_n x_j}^\varepsilon \right) \\
&\leq 8 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \zeta \sum_{i=1}^n C \cdot C \left| 2\Delta \quad u^\varepsilon - \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n u_{x_j}^\varepsilon u_{x_n x_j}^\varepsilon \right| \\
&\leq C\zeta \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left| 2\Delta \quad u^\varepsilon - \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n u_{x_j}^\varepsilon u_{x_n x_j}^\varepsilon \right| \tag{4.22}
\end{aligned}$$

e, por fim,

$$\begin{aligned}
&-4\varepsilon \sum_{i=1}^n \zeta \zeta_{x_i} 2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right) \\
&= -8\varepsilon \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \zeta \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i} \left(\sum_{m=1}^n 2u_{x_m}^\varepsilon u_{x_m x_i}^\varepsilon - u_{x_n x_i}^\varepsilon \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 8\varepsilon (C + C) \cdot 1 \sum_{i=1}^n C \left(\sum_{m=1}^n C |u_{x_m x_i}^\varepsilon| + |u_{x_n x_i}^\varepsilon| \right) \\
&\leq C\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Portanto, utilizando as estimativas (4.19), (4.21), (4.22) e (4.23) em (4.20) e o fato de que $(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \leq C$ (Teorema 4.1.1), concluimos que

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon(\zeta^2 \Phi(\nabla u^\varepsilon)) &\leq C \left(1 + \zeta \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \right) \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 \\
&\quad - 2\zeta^2 \left(2\Delta u^\varepsilon - \sum_{i,m=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_n x_i}^\varepsilon \right)^2 - 4\zeta^2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \\
&\quad + C\zeta \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \left| 2\Delta u^\varepsilon - \sum_{j,m=1}^n u_{x_j}^\varepsilon u_{x_n x_j}^\varepsilon \right| + C\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\| \\
&\leq C \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 \\
&\quad + C\zeta \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| C \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \\
&\quad - 2\zeta^2 \left(2\Delta u^\varepsilon - \sum_{i,m=1}^n u_{x_i}^\varepsilon u_{x_n x_i}^\varepsilon \right)^2 - 4\zeta^2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \\
&\quad + C^2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + 2\zeta^2 \left| 2\Delta u^\varepsilon - \sum_{j,m=1}^n u_{x_j}^\varepsilon u_{x_n x_j}^\varepsilon \right|^2 + C\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\| \\
&\leq C \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + 4\zeta^2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) \\
&\quad + C^2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 - 4\zeta^2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right) + C\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\| \\
&\leq C \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + C\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Por fim, definimos $v^\varepsilon : \overline{B_2(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v^\varepsilon = \zeta^2 \Phi(\nabla u^\varepsilon) + \alpha(u^\varepsilon - x_n)^2 + \lambda \|\nabla u^\varepsilon\|^2, \tag{4.25}$$

onde $\alpha > 0$ é escolhido adiante. Vamos mostrar que, para $\alpha > 0$ adequado, temos

$$v^\varepsilon(x) \leq C \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right), \text{ para todo } x \in B_2(0). \tag{4.26}$$

Para isso, primeiramente, suponhamos que v^ε atinge seu valor máximo em um ponto $x_0 \in B_2(0)$. Se $\|\nabla u^\varepsilon(x_0)\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon(x_0) \leq 0$, então $\Phi(\nabla u^\varepsilon(x_0)) = 0$ e, no ponto x_0 ,

$$\begin{aligned}
v^\varepsilon &= \alpha(u^\varepsilon - x_n)^2 + \lambda \|\nabla u^\varepsilon\|^2 = \alpha\lambda^2 + \lambda \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \leq \alpha\lambda + C\lambda \\
&= (\alpha + C)\lambda \leq (\alpha + C) \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

onde foi utilizado que λ é pequeno o suficiente, de modo que $\lambda < 1$ e $\lambda^2 < \lambda$.

Agora, se $\|\nabla u^\varepsilon(x_0)\| - u_{x_n}^\varepsilon(x_0) > 0$, pelas estimativas (4.7), (4.17) e (4.24) segue que, no ponto x_0 , $L_\varepsilon(v^\varepsilon) \geq 0$ e, assim,

$$\begin{aligned}
0 &\leq L_\varepsilon(v^\varepsilon) = L_\varepsilon(\zeta^2 \Phi(\nabla u^\varepsilon)) + \alpha L_\varepsilon((u^\varepsilon - x_n)^2) + \lambda L_\varepsilon(\|\nabla u^\varepsilon\|^2) \\
&\leq C \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + C\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\| + \alpha \left(-2 \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + C\lambda \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \right) \\
&\quad + \lambda \left(-2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 - 2\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 \right) \\
&= (C - 2\alpha) \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + \left(C\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\lambda}} \right) \left(\sqrt{4\varepsilon\lambda} \|\nabla^2 u^\varepsilon\| \right) \\
&\quad + \left(C\alpha\sqrt{\frac{\lambda}{4}} \right) \left(\sqrt{4\lambda} \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\| \right) + \lambda \left(-2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 - 2\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 \right) \\
&\leq (C - 2\alpha) \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + C\frac{\varepsilon}{\lambda} + 2\varepsilon\lambda \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 \\
&\quad + C\alpha^2\lambda + 2\lambda \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 + \lambda \left(-2 \|\nabla^2 u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|^2 - 2\varepsilon \|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2 \right) \\
&= (C - 2\alpha) \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 + C\frac{\varepsilon}{\lambda} + C\alpha^2\lambda.
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha > 0$ grande o suficiente ($\alpha > \frac{1}{2}C$), concluímos que

$$(2\alpha - C) \left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 \leq C\frac{\varepsilon}{\lambda} + C\alpha^2\lambda,$$

isto é,

$$\left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)^2 \leq C \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \lambda \right)$$

no ponto x_0 , e, portanto,

$$\begin{aligned}
v^\varepsilon(x) \leq v^\varepsilon(x_0) &\leq \zeta^2 C \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) + \alpha(u^\varepsilon(x_0) - (x_0)_n)^2 + \lambda \|\nabla u^\varepsilon(x_0)\|^2 \\
&\stackrel{(4.27)}{\leq} 1 \cdot C \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) + (\alpha + C) \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right),
\end{aligned}$$

qualquer que seja $x \in B_2(0)$, como queríamos mostrar.

Se v^ε atinge seu valor máximo apenas em pontos de $S_2(0)$, notamos que $\zeta \equiv 0$ em $S_2(0)$, e, por (4.27), segue a desigualdade (4.26).

Por fim, como $\zeta \equiv 1$ em $B_1(0)$, concluímos que, em $B_1(0)$,

$$\left(\|\nabla u^\varepsilon\|^2 - u_{x_n}^\varepsilon \right)_+^2 \leq \Phi(\nabla u^\varepsilon) \leq \Phi(\nabla u^\varepsilon) + \alpha(u^\varepsilon - x_n)^2 + \lambda \|\nabla u^\varepsilon\|^2 \leq C \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right),$$

ou seja,

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2 \leq u_{x_n}^\varepsilon + C \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \leq u_{x_n}^\varepsilon + C \left(\lambda^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Dessa forma, concluímos a prova do lema. \square

A seguir, mostramos o último resultado auxiliar necessário para nossos propósitos, que garante a existência de um ponto no qual o gradiente de uma função é controlado, de acordo com a limitação da imagem dessa função.

Lema 4.1.3. *Dados $b \in S_1(0)$ e $s > 0$, seja $v : B_s(0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave satisfazendo*

$$\max_{x \in B_s(0)} \frac{|v(x) - \langle b, x \rangle|}{s} \leq \eta,$$

para algum $\eta > 0$. Então, existe $x_0 \in B_s(0)$ tal que

$$\|\nabla v(x_0) - b\| \leq 4\eta.$$

Demonstração. Para o caso $s = 1$, definimos $w : B_s(0) \rightarrow \mathbb{R}$ por $w(x) = \langle b, x \rangle - 2\eta \|x\|^2$. Notemos que

$$(v - w)(0) = v(0) \leq \max_{x \in B_1(0)} |w(x) - \langle b, x \rangle| \leq \eta.$$

Além disso, se $x \in S_1(0)$, então

$$(v - w)(x) = v(x) - \langle b, x \rangle + 2\eta \|x\|^2 \geq -|v(x) - \langle b, x \rangle| + 2\eta \geq \eta.$$

Portanto, $v - w$ atinge seu valor mínimo em um ponto interior $x_0 \in B_1(0)$, e portanto, como v e w são suaves,

$$\|\nabla v(x_0) - b\| = \|\nabla w(x_0) - b\| = \|b - 4\eta x_0 - b\| = 4\eta \|x_0\| \leq 4\eta.$$

Agora, dado $s > 0$ qualquer, considere $w_s : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $w_s(x) = \frac{1}{s}w(sx)$. Como, $\max_{x \in B_s(0)} \frac{|w(x) - b \cdot x|}{s} \leq \eta$, então $\max_{x \in B_s(0)} \left| \frac{w(x)}{s} - b \cdot \frac{x}{s} \right| \leq \eta$ ou, ainda,

$$\max_{z \in B_1(0)} \left| \frac{w(sz)}{s} - b \cdot \frac{sz}{s} \right| \leq \eta$$

e, portanto,

$$\max_{z \in B_1(0)} |w_s(z) - b \cdot z| \leq \eta.$$

Logo, existe $x_0 \in B_1(0)$ tal que

$$\|\nabla w_p(x_0) - b\| \leq 4\eta,$$

e concluímos que $\|\nabla w(sx_0) - b\| \leq 4\eta$. \square

Finalmente, apresentamos a demonstração do resultado final dessa dissertação, que garante que uma função ∞ -harmônica é diferenciável em todo ponto de seu domínio.

Teorema 4.1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u \in C(\overline{\Omega})$ uma solução de viscosidade de*

$$-\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Então, u é diferenciável em cada ponto $x \in \Omega$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x = 0 \in \Omega$ e $u(0) = 0$. Dadas duas sequências $\{r_k\}_{k=1}^+$, $\{s_k\}_{k=1}^+ \subset (0, +\infty)$ com $r_k, s_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$. Pelo Teorema 3.4.5, existem $a, b \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \max_{y \in B_1(0)} \left| \frac{u(r_k y)}{r_k} - \langle a, y \rangle \right| = 0 \quad (4.28)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \max_{y \in B_1(0)} \left| \frac{u(s_k y)}{s_k} - \langle b, y \rangle \right| = 0, \quad (4.29)$$

onde $\|a\| = \|b\| = L_0^+(u, 0)$.

Se $\|a\| = 0$, então $L_0^+(u, 0) = 0$ e, dado $x \in \Omega$ com $x \neq 0$,

$$\frac{u(x) - u(0)}{\|x\|} \leq L_x^+(u, 0) \quad \text{e} \quad -\frac{u(x) - u(0)}{\|x\|} \leq -L_x^-(u, 0).$$

Logo,

$$\frac{|u(x) - u(0)|}{\|x\|} \leq \max \{L_r^+(u, 0), -L_r^-(u, 0)\}, \quad \text{para todo } r > \|x\|.$$

Fazendo $r \rightarrow 0$, concluímos que $\|x\| \rightarrow 0$ e, pelo Lema 3.3.6,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|u(x) - u(0)|}{\|x\|} \leq L_0^+(u, 0) = 0,$$

ou seja, $\nabla u(0)$ existe e $\nabla u(0) = 0$. Portanto, nesse caso, $a = b = \nabla u(0) = 0$.

Logo, suponhamos que $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com $a \neq b$. Sem perda de generalidade, suponhamos que

$$a = e_n = (0, \dots, 0, 1), \quad \|b\| = 1, \quad b \neq e_n,$$

que é possível a menos de uma rotação e/ou dilatação¹, e denotamos, ainda,

$$b = (b_1, \dots, b_n), \quad \theta_b = 1 - |b_n|.$$

Notamos que, como $\|b\| = 1$ e $b \neq e_n$, então $\theta_b > 0$. Sendo C_1 a constante do Teorema 4.1.2, escolha

$$\lambda = \left(\frac{\theta_b}{8C_1} \right)^2. \quad (4.30)$$

De (4.28), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, se $r = r_k$, então

$$\max_y \left| \frac{u(ry)}{r} - \langle e_n, y \rangle \right| = \max_z \left| \frac{u(z)}{r} - \left\langle e_n, \frac{z}{r} \right\rangle \right| = \max_z \frac{|u(z) - z_n|}{r} \leq \frac{\lambda}{4}.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $r = 2$ (se não fosse, bastaria fazermos a análise com a função $v(x) = \frac{2}{r}u(\frac{r}{2}x)$). Logo,

$$\max_z \frac{|u(z) - z_n|}{2} \leq \frac{\lambda}{4},$$

ou seja,

$$\max_z |u(z) - z_n| \leq \frac{\lambda}{2},$$

e, como u^ε converge uniformemente para u em $B_2(0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, se $\varepsilon < \varepsilon_1$, então

$$\max_z |u^\varepsilon(z) - u(z)| < \frac{\lambda}{2},$$

e, portanto,

$$\max_z |u^\varepsilon(z) - z_n| \leq \max_z |u^\varepsilon(z) - u(z)| + \max_z |u(z) - z_n| \leq \lambda. \quad (4.31)$$

Analogamente, por (4.29), existe $j \in \mathbb{N}$ tal que, para $s = s_j < 1$, vale

$$\max_y \left| \frac{u(sy)}{s} - \langle b, y \rangle \right| = \max_z \frac{|u(z) - \langle b, z \rangle|}{s} \leq \frac{\theta_b}{96},$$

e existe $\varepsilon_2 > 0$, tal que, se $\varepsilon < \varepsilon_2$, então

$$\max_z \frac{|u^\varepsilon(z) - \langle b, z \rangle|}{s} \leq \frac{\theta_b}{48}. \quad (4.32)$$

Considere $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda^2\}$. Por (4.32) e pelo Lema 4.1.3, concluímos que existe

¹Se tivéssemos $a \neq e_n$, existiria $A \in SO(n)$ tal que $Ae_n = a$, e faríamos os mesmos raciocínios com a função auxiliar $v(x) = \|a\| u(Ax)$

$x_0 \in B_s(0)$ tal que

$$\|\nabla u^\varepsilon(x_0) - b\| \leq \frac{\theta_b}{12}.$$

Em particular,

$$|u_{x_n}^\varepsilon(x_0) - b_n| \leq \frac{\theta_b}{12} \quad (4.33)$$

e também, como $\|b\| = 1$, segue que

$$\|b\| - \|\nabla u^\varepsilon(x_0)\| \leq \|\nabla u^\varepsilon(x_0) - b\| \leq \frac{\theta_b}{12}$$

ou, ainda,

$$\|\nabla u^\varepsilon(x_0)\| \geq 1 - \frac{\theta_b}{12}. \quad (4.34)$$

Agora, por (4.31), podemos aplicar o Teorema 4.1.2 para concluir que

$$\|\nabla u^\varepsilon(x_0)\|^2 \leq u_{x_n}^\varepsilon(x_0) + C_1 \left(\lambda^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq u_{x_n}^\varepsilon(x_0) + 2C_1 \lambda^{\frac{1}{2}} \stackrel{(4.30)}{=} u_{x_n}^\varepsilon(x_0) + \frac{\theta_b}{4}, \quad (4.35)$$

notando que, como $\varepsilon \leq \lambda^2$, então $\frac{\varepsilon}{\lambda} \leq \lambda$. Portanto,

$$\left(1 - \frac{\theta_b}{12}\right)^2 \stackrel{(4.34)}{\leq} \|\nabla u^\varepsilon(x_0)\|^2 \stackrel{(4.35)}{\leq} u_{x_n}^\varepsilon(x_0) + \frac{\theta_b}{4} \stackrel{(4.33)}{\leq} |b_n| + \frac{\theta_b}{12} + \frac{\theta_b}{4} \quad (4.36)$$

e, com isso,

$$\theta_b = 1 - |b_n| \stackrel{(4.36)}{\leq} 1 + \frac{\theta_b}{3} - \left(1 - \frac{\theta_b}{12}\right)^2 = \frac{\theta_b}{3} + \frac{\theta_b}{6} - \frac{\theta_b^2}{144} \leq \frac{2\theta_b}{3},$$

donde segue que $\theta_b \leq 0$, o que contradiz o fato de que $\theta_b > 0$.

Portanto, mostramos que existe um vetor $a \in \mathbb{R}^n$ tal que, para qualquer sequência $\{r_k\}_{k=1}^+$ de números positivos tal que $r_k \rightarrow 0$, vale

$$\lim_{k \rightarrow +} \frac{u(r_k y) - u(0)}{r_k} = \langle a, y \rangle,$$

ou seja, vale que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r y) - u(0)}{r} = \langle a, y \rangle.$$

Da mesma forma, para $-y \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(-r y) - u(0)}{r} = \langle a, -y \rangle$$

e obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(ry) - u(0)}{r} = \langle a, y \rangle,$$

logo, $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(ry) - u(0)}{r} = \langle a, y \rangle$ localmente uniformemente em $y \in \mathbb{R}^n$. Em particular, esse limite é uniforme em $S_1(0)$, e, pela Proposição 1.2.7, segue que u é diferenciável no ponto 0. □

Conclusão

Nesse trabalho, discutimos resultados a respeito de existência, unicidade e regularidade de soluções de viscosidade da equação homogênea envolvendo o operador ∞ -laplaciano. Dentre os resultados explorados, a propriedade de comparação com cones se mostra uma importante ferramenta analítica que auxilia na demonstração da maioria das propriedades de funções ∞ -harmônicas.

Enquanto a regularidade Lipschitz e, por consequência, a diferenciabilidade em quase todo ponto de soluções de viscosidade de $-\Delta_\infty u = 0$ é um dos resultados mais elementares da teoria, mostramos, no Capítulo 4 que essas funções são, na realidade, diferenciáveis em todo ponto de seu domínio. Esse é o resultado de regularidade mais geral encontrado na literatura até o momento.

Contudo, no caso especial $n = 2$, existem dois resultados que refinam a regularidade para funções ∞ -harmônicas no plano, enunciados a seguir [11], [21].

Teorema 4.1.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ∞ -harmônica em Ω . Então*

$$u \in C^1(\Omega).$$

Teorema 4.1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que, se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de viscosidade de $-\Delta_\infty u = 0$ limitada em Ω , então*

$$u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega).$$

Além disso, dado $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de Ω' , tal que

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \leq C \|u\|_{L^\infty(\Omega')}.$$

Em [11], os autores comentam que a demonstração realizada para mostrar a regularidade $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ poderia ser generalizada para o caso $n \geq 3$, contanto que algumas estimativas fossem provadas, o que, até a data dessa dissertação, não aconteceu.

Além disso, devido ao Exemplo 3.2.3, conjectura-se que a regularidade ótima de uma função ∞ -harmônica qualquer, seja da classe $C^{1,\frac{1}{3}}(\Omega)$, um resultado que ainda há de ser explorado no futuro.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Almansa, F. Cao, Y. Gousseau, and B. Rougé. Interpolation of digital elevation models using AMLE and related methods. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, 40(2):314–325, 2002. 1
- [2] D. J. Araújo and J. M. Urbano. The ∞ -Laplacian: from AMLEs to machine learning. In *34º Colóquio Brasileiro de Matemática – Rio de Janeiro: IMPA, 2023*, volume 9, Rio de Janeiro, 2023. 1, 22, 55
- [3] S. N. Armstrong and C. K. Smart. An easy proof of Jensen’s theorem on the uniqueness of infinity harmonic functions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 37:381–384, 2010. 37
- [4] G. Aronsson. Extension of functions satisfying Lipschitz conditions. *Arkiv för matematik*, 6(6):551–561, 1967. 1, 14
- [5] G. Aronsson, M. Crandall, and P. Juutinen. A tour of the theory of absolutely minimizing functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 41(4):439–505, 2004. 1, 14, 26, 32, 45, 46
- [6] M. G. Crandall. A visit with the ∞ -Laplace equation. *Calculus of variations and nonlinear partial differential equations*, 1927:75–122, 2008. 1, 14, 22, 45, 50
- [7] M. G. Crandall and L. C. Evans. A remark on infinity harmonic functions. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE) [electronic only]*, 2001:123–129, 2001. 61, 65, 69
- [8] M. G. Crandall, L. C. Evans, and R. F. Gariepy. Optimal Lipschitz extensions and the infinity laplacian. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 13(2):123–139, 2001. 43, 55
- [9] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1):1–67, 1992. 45
- [10] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2010. 10

- [11] L. C. Evans and O. Savin. $C^{1,\alpha}$ regularity for infinity harmonic functions in two dimensions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 32:325–347, 2008. 2, 91
- [12] L. C. Evans and C. K. Smart. Everywhere differentiability of infinity harmonic functions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 42(1):289–299, 2011. 2, 70
- [13] Q. Han. *Nonlinear elliptic equations of the second order*, volume 171. American Mathematical Soc., 2016. 3, 10, 11, 12
- [14] J.-B. Hiriart-Urruty. Extension of Lipschitz functions. *American Mathematical Society*, 77(2):539–554, 1980. 14
- [15] E. L. Lima. *Curso de análise: volume 1*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1992. 3, 6
- [16] P. Lindqvist. *Notes on the infinity Laplace equation*. Springer, 2016. 26, 43
- [17] F. Maggi. *Sets of finite perimeter and geometric variational problems: an introduction to Geometric Measure Theory*. Cambridge University Press, 2012. 8
- [18] E. J. McShane. Extension of range of functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40(12):837 – 842, 1934. 14, 17
- [19] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield, and D. Wilson. Tug-of-war and the infinity Laplacian. *Journal of the American Mathematical Society*, 22(1):167–210, 2009. 1
- [20] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1991. 7
- [21] O. Savin. C^1 regularity for infinity harmonic functions in two dimensions. *Archive for rational mechanics and analysis*, 176(3):351–361, 2005. 2, 91