

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Parabolicidade de Variedades Riemannianas Sob a  
Perspectiva da Teoria do Potencial**

Dissertação de Mestrado

Luíza De Pizzol

Porto Alegre, 01 de abril de 2024.

Dissertação submetida por Luíza De Pizzol <sup>1</sup> como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dra. Miriam Telichevesky (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Dra. Adriana Neumann de Oliveira (PPGMat-UFRGS)

Dra. Lisandra De Oliveira Sauer (UFPEl)

Dra. Patrícia Lisandra Guidolin (PPGMat-UFRGS)

Data da Apresentação: 01/04/2024.

---

<sup>1</sup>Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

# Agradecimentos

Agradecimentos na maioria das vezes são clichês, mas quem vive esse momento sabe que tem coisas que a gente simplesmente não pode deixar de agradecer. Assim, dedico algumas palavras para as pessoas que eu acredito terem contribuído para que o meu mestrado se tornasse realidade.

Aos professores que participaram da minha trajetória acadêmica e me trouxeram até aqui: Espero que um dia eu possa tocar a vida de alguém da mesma forma que vocês tocaram a minha. Carrego comigo diversos nomes e rostos de professores que tiveram grande significado pra mim ao longo da vida acadêmica e tenho certeza que foi a forma singela com que me incentivaram que permitiu que eu concluísse um mestrado.

À minha banca examinadora: É uma honra ter um trabalho composto apenas por mulheres. Me sinto realizada em estar dando a minha contribuição para que cada dia mais mulheres tenham a oportunidade de serem pesquisadoras. Lugar de mulher é, sim, fazendo ciência.

À minha orientadora, Miriam, obrigada pelo encontro e por ter acreditado e confiado em mim. No fim, descobrimos que temos mais coisas em comum do que imaginávamos. Te encontrar nessa caminhada com certeza foi decisivo. Você me inspira como profissional e, mais ainda, como ser humano.

Aos amigos que fiz no PPGMat: Muito obrigada! Conhecer pessoas incríveis e viver coisas mais incríveis ainda ao lado dessas pessoas não tem preço. As lembranças que construímos juntos farão para sempre parte de uma memória feliz. Também agradeço as minhas amigas de longa data, Débora e Vitória, por me ensinarem que as relações verdadeiras perduram independente do tempo e da distância. Os momentos difíceis da vida ficam mais leves sabendo que temos um lugar de acolhimento nos esperando.

Aos meus familiares: Obrigada por confiarem no meu potencial e me fornecerem o suporte e as oportunidades necessárias para que eu pudesse seguir estudando. Mãe, queria que tu estivesse aqui. Parece injusto viver todas essas coisas sem poder compartilhar elas contigo. Obrigada por ter me incentivado tanto a seguir meu sonho mesmo em meio ao caos que estavam as nossas vidas. Para mim é mais uma prova do quanto tu desejava que eu alcançasse esse objetivo.

Por fim, agradeço a UFRGS e a CAPES pelo fomento e incentivo a pesquisa, sem os quais não poderia ter cursado o mestrado. Seguirei defendendo uma educação pública,

gratuita, democrática e de qualidade.

Os meses de mestrado foram repletos de mudanças, externas e internas. Eu não reconheço mais a Luíza que iniciou essa jornada. Além da vida acadêmica, vivenciei grandes perdas pessoais, ao mesmo tempo em que conquistei coisas que não me julgava capaz de alcançar. Finalizar o mestrado é mais do que a realização de um sonho, pois realizei junto a ele coisas que eu não imaginava sonhar. A vida é muito mais bonita com as coisas que construí até aqui e eu espero enfeitá-la ainda mais.

*“Nunca esquecerá o nome dos seus sonhos.”*

# Resumo

Este trabalho aborda a parabolicidade e a não parabolicidade de variedades riemannianas. O objetivo central é demonstrar um teorema que traz equivalências da não parabolicidade. Para isso, utilizamos como ferramenta conceitos de EDP generalizados em variedades riemannianas e, em especial, a teoria do potencial. Mostramos o exemplo das variedades rotacionalmente simétricas, onde são facilmente aplicáveis as equivalências do teorema e apresentamos comentários relacionando a teoria apresentada com a teoria de Probabilidade.

**Palavras-chave:** Parabolicidade. Teoria do potencial. Variedades riemannianas. Funções harmônicas. Variedades rotacionalmente simétricas.

# Abstract

This work addresses the parabolicity and non-parabolicity of Riemannian manifolds. The main objective is to demonstrate a theorem that establishes equivalences of non-parabolicity. For this purpose, we use generalized PDE concepts on Riemannian manifolds and, especially the potential theory. We highlight the example of rotationally symmetric manifolds, where the equivalences of the theorem are easily applicable, and we present comments relating the presented to Probability theory.

**Keywords:** Parabolicity. Potential theory. Riemannian manifolds. Harmonic functions. Rotationally symmetric manifolds.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceitos de geometria riemanniana</b>	<b>3</b>
1.1 Variedades riemannianas . . . . .	3
1.2 A medida volume nas variedades riemannianas . . . . .	6
1.3 Gradiente, divergente e laplaciano nas variedades riemannianas . . . . .	7
<b>2 Conceitos de EDP em variedades riemannianas</b>	<b>11</b>
2.1 Funções harmônicas e o problema de Dirichlet . . . . .	11
2.2 Princípio do Máximo em variedades . . . . .	12
2.3 Solução fundamental . . . . .	21
2.4 Função de Green . . . . .	23
2.5 Capacidade . . . . .	25
2.6 Conjuntos massivos . . . . .	29
2.7 Potencial superharmônico . . . . .	31
2.8 Exterior de um compacto . . . . .	35
<b>3 Um pouco sobre o núcleo do calor e o movimento Browniano em variedades riemannianas</b>	<b>39</b>
3.1 O núcleo do calor em variedades riemannianas . . . . .	39
3.2 Relação do núcleo do calor com o movimento Browniano . . . . .	40
3.3 Mais comentários sobre o núcleo do calor . . . . .	41
<b>4 Não parabolicidade de variedades riemannianas</b>	<b>46</b>
4.1 Condições para não parabolicidade . . . . .	46
4.2 Corolários do Teorema 4.1.2 . . . . .	50
<b>5 Aplicação da teoria do potencial</b>	<b>52</b>
5.1 Variedades rotacionalmente simétricas . . . . .	52
5.2 Verificação da parabolicidade via teoremas de comparação . . . . .	60
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Introdução

Esta dissertação tem por objetivo explorar resultados que classificam as variedades riemannianas em parabólicas e não parabólicas sob a perspectiva da teoria do potencial. Para isso, é crucial a compreensão de conceitos preliminares da teoria do potencial, os quais estão intimamente ligados às propriedades das soluções de Equações Diferenciais Parciais.

Enquanto a Geometria busca descrever características intrínsecas dos espaços ambientes abstratos, a teoria de EDP permite entender e modelar alguns fenômenos que ocorrem nesses ambientes. Assim, a conexão entre as áreas traz resultados ricos, possibilitando a análise de soluções de equações em variedades riemannianas.

A maioria das obras de EDP tratam sobre resultados no espaço ambiente  $\mathbb{R}^n$ . Como ferramentas de EDP foram necessárias para elaboração desse texto, trazemos as generalizações para as variedades riemannianas. Isso é possível pois muitas noções de EDP usam operadores como o divergente e o laplaciano, os quais podem ser definidos intrinsecamente nos espaços ambientes em que estamos trabalhando.

A parabolicidade de variedades riemannianas também pode ser estudada através da Probabilidade. Ao longo do texto fazemos comentários relacionando a teoria apresentada com a teoria de Probabilidade. O conceito central de parabolicidade está conectado à recorrência do movimento Browniano. No entanto, compreender essa ligação requer conhecimentos de vários conceitos de Probabilidade, e abordar todas as conexões tornaria o texto extenso demais.

Outra possível abordagem para determinar a parabolicidade é através da curvatura das variedades. Como o objetivo do trabalho não é tratar sobre esse tema, apresentamos no final do texto algumas implicações que envolvem Teoremas de Comparação, sem nos deter a eles.

O artigo de GRIGOR'YAN (1999) [8] e a obra de LI (2012) [9] foram usados como base para construção de toda a dissertação, principalmente nos capítulos referentes ao núcleo do calor, ao teorema principal desse trabalho e às variedades rotacionalmente simétricas (3, 4 e 5, respectivamente). No primeiro capítulo apresentamos os conceitos preliminares de Geometria Riemanniana que são fundamentais para compreensão do texto. Utilizamos como referência a obra de CARMO (2008) [4].

Na sequência, no Capítulo 2, abordamos definições comuns de Equações Diferenciais

Parciais, usualmente conhecidas em espaços euclidianos e adaptando-as para o contexto das variedades riemannianas. No Capítulo 3 definimos o núcleo do calor em variedades riemannianas, que é um resultado com implicações na parabolicidade ou não parabolicidade de uma variedade riemanniana.

No Capítulo 4 apresentamos o Teorema 4.1.2, que é o resultado principal do trabalho. O teorema estabelece diversas condições equivalentes para determinar se uma variedade é não parabólica, como a existência de funções superharmônicas positivas, a finitude da função de Green, a capacidade e a existência de subconjuntos massivos, além do comportamento do movimento Browniano. Assim, revelando as ligações entre geometria, análise e teoria do potencial.

Por fim, no Capítulo 5, discutimos as variedades rotacionalmente simétricas, um exemplo onde as classificações de parabolicidade são facilmente aplicáveis. Nesse capítulo também descrevemos condições de parabolicidade que envolvem Teoremas de Comparação e curvatura de variedades riemannianas.

# Capítulo 1

## Conceitos de geometria riemanniana

Neste capítulo serão expostos alguns conceitos preliminares de Geometria Riemanniana, além de fixadas notações que serão utilizadas ao longo do texto. Serão omitidas algumas definições mais conhecidas que podem ser consultadas em CARMO (2008) [4]. Nesses casos, será considerado que o leitor possui conhecimento prévio na área.

### 1.1 Variedades riemannianas

**Definição 1.1.1** (Variedade diferenciável). Uma *variedade diferenciável de dimensão  $n$*  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações biunívocas  $\psi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  tais que

- i)  $\bigcup_{\alpha} \psi_\alpha(U_\alpha) = M$ .
- ii) Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $W := \psi_\alpha(U_\alpha) \cap \psi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$  e  $\psi_\alpha^{-1}(W), \psi_\beta^{-1}(W) \in \mathbb{R}^n$  abertos, as aplicações  $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$  são diferenciáveis.
- iii) A família de aplicações biunívocas  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$  é máxima com relação as condições i) e ii).

A aplicação  $\psi_\alpha$  com  $p \in \psi_\alpha(U_\alpha)$  é uma *parametrização* de  $M$  em  $p$ , e  $\psi_\alpha(U_\alpha)$  é uma *vizinhança coordenada* em  $p$ . O par  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$  é uma *estrutura diferenciável*. Em outras palavras,  $M$  é variedade diferenciável se é localmente um aberto do  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.1.2.** Sejam  $M^n$  e  $N^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : M \rightarrow N$  é *diferenciável* em  $p \in M$  se dada uma parametrização  $\sigma : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$  em  $\varphi(p)$  existe uma parametrização  $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  em  $p$  tal que  $\varphi(\psi(U)) \subset \sigma(V)$  e a aplicação

$$\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em  $\psi^{-1}(p)$ .

É possível então definir uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  em  $p \in M$  como sendo aquela tal que existe  $\psi : U \rightarrow M$  parametrização em  $p$  e a composta  $f \circ \psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\psi^{-1}(p)$ .

Uma curva parametrizada diferenciável é uma função  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , que permite calcular a composta  $(f \circ \alpha)(t)$  e, em particular,  $(f \circ \alpha)'(0)$ . Faz sentido então calcular

$$(f \circ \alpha_1)'(0) = (f \circ \alpha_2)'(0),$$

em que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são duas curvas tais que  $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$ . Assim,  $v$  é um *vetor tangente a  $M$  em  $p$*  se for uma classe de equivalência pela relação acima. Defina então

$$\begin{aligned} df_p : TpM &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) \end{aligned}$$

Defina o *espaço tangente a  $M$  em  $p$* , dado por

$$TpM := \{v; v \text{ é vetor tangente a } M \text{ em } p\}.$$

Um *campo diferenciável de vetores* é uma aplicação  $X : M \rightarrow TM$ , em que  $TM = \{(p, v); p \in M, v \in TpM\}$ .  $TM$  é dito um *fibrado tangente*. O conjunto de todos os campos diferenciáveis de vetores é denotado por  $\mathcal{X}(M)$ . Assim, fixada uma parametrização, ficam determinados os *campos coordenados*, que denotaremos por  $\partial_{x_i}$ , com  $i = 1, \dots, n$ .

Em relação à topologia das variedades riemannianas, vamos supor como válidos os seguintes axiomas:

**Axioma 1.1.3** (Axioma de Hausdorff). *Dados dois pontos distintos de  $M$  existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam.*

**Axioma 1.1.4** (Axioma da base enumerável).  *$M$  pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas. Nesse caso, dizemos que  $M$  tem base enumerável.*

Mais comentários sobre os axiomas podem ser consultados em CARMO (2008) [4].

Denote por  $g_{ij} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  a *métrica riemanniana*, que é a aplicação que para  $p \in M$  associa um produto interno em  $TpM$ , e represente uma *conexão riemanniana de Levi-Civita* em  $M$  por  $\nabla$ , que é a noção de derivada de campos de vetores, e possui a propriedade de ser simétrica e compatível com a métrica. Deste modo, o par  $M = (M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é uma variedade riemanniana de dimensão  $n$  munida de uma métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e conexão  $\nabla$ .

Dado um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , existe uma correspondência chamada *derivada covariante* que associa um outro campo de vetores ao longo de  $\alpha$ , dada por  $\frac{DV}{dt}$ .

**Definição 1.1.5.** Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma *geodésica* em  $t_0 \in I$  se  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) (t_0) = 0$ . Se  $\gamma$  é geodésica para todo  $t \in I$ , então dizemos que  $\gamma$  é *geodésica*. Se  $[a, b] \subset I$  e  $\gamma$  é geodésica, o *segmento de geodésica* ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$  é a restrição de  $\gamma$  a  $[a, b]$ .

A *distância* entre dois pontos  $p, q \in M$  é definida pelo ínfimo do comprimento da curva  $\alpha$  diferenciável por partes que liga  $p$  a  $q$ , ou seja,

$$d(p, q) = \inf \{ l(\alpha); \alpha : [0, T] \rightarrow M \text{ é curva diferenciável por partes com } \alpha(0) = p, \alpha(T) = q \},$$

em que  $l$  é o comprimento de curva dado por

$$l(\alpha) = \int_0^T \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt.$$

Uma geodésica  $\gamma$  é *minimizante* se  $l(\gamma) \leq l(\alpha)$ , para qualquer curva diferenciável  $\alpha$  ligando  $\gamma(0)$  a  $\gamma(T)$ .

Com a definição de geodésica, é possível definir uma *aplicação exponencial*  $\exp : \mathcal{U} \subset TM \rightarrow M$ , dada por

$$\exp(p, v) = \gamma(1, p, v) = \gamma \left( |v|, p, \frac{v}{|v|} \right),$$

com  $(p, v) \in \mathcal{U} = \{(p, v); p \in M, v \in TpM\}$ , em que  $\gamma$  é a única geodésica que no instante  $t$  passa por  $p$  com velocidade  $v$ . Temos que  $\exp_p$  é diferenciável e  $\exp_p(0) = p$ .

Indique por  $B_\varepsilon(0)$  a bola centrada na origem  $0$  do  $TpM$  e de raio  $\varepsilon$ , tal que  $\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset TpM \rightarrow M$  é um difeomorfismo. A *bola normal* ou *bola geodésica* de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$  é definida por  $B_\varepsilon(p) := \exp_p(B_\varepsilon(0))$ . Sua fronteira é ortogonal as geodésicas que partem de  $p$  e é representada pela *esfera normal*  $S_\varepsilon(p) := \partial B_\varepsilon(p)$ .

**Definição 1.1.6.** Quando  $\exp_p$  está definida em todo  $v \in TpM$ , para algum ponto  $p \in M$ ,  $M$  é dita *geodesicamente completa*. Em outras palavras, as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

O lugar dos pontos em que  $\exp_p$  deixa de ser injetiva é chamado de *Cut Locus*.

**Definição 1.1.7.**  $M$  é variedade diferenciável *orientável* se  $M$  admite uma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$  tal que para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\psi_\alpha(U_\alpha) \cap \psi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , a diferencial da mudança de coordenadas  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$  tem determinante positivo. Caso contrário,  $M$  é *não-orientável*.

A escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a definição é chamada *orientação* de  $M$ .

## 1.2 A medida volume nas variedades riemannianas

Seja  $M$  uma variedade riemanniana orientada e  $\psi : U \rightarrow M$  parametrização local de  $p \in M$ , considere  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset TpM$  uma base ortonormal positiva. Escreva os campos coordenados como  $\partial_{x_i} = \sum_k a_{ik} u_k$  e observe que os coeficientes da métrica são dados por

$$g_{ij} = \langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle = \left\langle \sum_k a_{ik} u_k, \sum_l a_{jl} u_l \right\rangle = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \langle u_k, u_l \rangle = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \cdot \delta_{kl} = \sum_k a_{ik} a_{jk}, \quad (1.1)$$

em que  $\delta_{kl}$  é *delta de Kronecker*, ou seja,

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Como em (1.1) temos que  $g_{ij} = \sum_k a_{ik} a_{jk} = \sum_k a_{ik} a^{kj}$ , segue que

$$g = \det(g_{ij}) = \left( \det(a_{ij}) \right)^2 \Rightarrow \sqrt{g} = |\det(a_{ij})| = \det(a_{ij}),$$

já que a base ortonormal é positiva, ou seja,  $\det(a_{ij}) > 0$ .

Por outro lado, o volume em  $TpM$  do paralelogramo gerado por  $\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}\}$  pode ser cálculo com ferramentas de Álgebra Linear e vale

$$\text{vol}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) = \det(a_{ij}) = \sqrt{g}.$$

Ainda, considere  $\sigma : V \rightarrow M$  outra parametrização local de  $p \in M$  com a mesma orientação de  $\psi$ . Sejam  $\partial_{y_1}, \partial_{y_2}, \dots, \partial_{y_n}$  campos coordenados e  $h_{ij} = \langle \partial_{y_i}, \partial_{y_j} \rangle$  coeficientes da métrica. Segue que

$$\sqrt{g} = \text{vol}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) = J \cdot \text{vol}(\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_n}) = J \cdot \sqrt{h}, \quad (1.2)$$

com  $J = \det \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \det \left( D(\sigma^{-1} \circ \psi) \right) > 0$ .

Seja  $R \subset M$  aberto conexo e suponha, inicialmente, que  $R \subset \psi(U)$ , para  $\psi$  parametrização positiva. Suponha também que  $\psi^{-1}(R)$  tem fronteira com medida nula (em particular, de Lebesgue, em  $\mathbb{R}^n$ ), ou seja, o comportamento da fronteira não interfere.

Defina o *volume de  $R$*  por

$$\text{vol}(R) = \int_{\psi^{-1}(R)} \sqrt{g} dx_1 \cdots dx_n. \quad (1.3)$$

Observe que

$$\psi^{-1}(R) = \psi^{-1}\left((\sigma \circ \sigma^{-1})(R)\right) = (\psi^{-1} \circ \sigma)\left(\sigma^{-1}(R)\right) \quad (1.4)$$

e como  $D(\psi^{-1} \circ \sigma) = \left(D(\sigma^{-1} \circ \psi)\right)^{-1}$ , temos que

$$J = \det d(\psi^{-1} \circ \sigma) = \det \left(d(\sigma^{-1} \circ \psi)\right)^{-1} = J^{-1} = \frac{1}{J}. \quad (1.5)$$

Então a definição de volume independe da escolha da parametrização local:

$$\begin{aligned} \int_{\psi^{-1}(R)} \sqrt{g} dx_1 \cdots dx_n &\stackrel{(1.2)}{=} \int_{\psi^{-1}(R)} J \cdot \sqrt{h} dx_1 \cdots dx_n \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \int_{\sigma^{-1}(R)} J \cdot \sqrt{h} \left| \det \left( D(\psi^{-1} \circ \sigma) \right) \right| dy_1 \cdots dy_n \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \int_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{h} dy_1 \cdots dy_n. \end{aligned}$$

Caso  $R$  não esteja totalmente contido numa vizinhança coordenada, utilizamos a partição da unidade para definir  $\text{vol}(R)$ . Com isso e com ferramentas da teoria da Medida, conseguimos definir o volume de qualquer compacto, dando origem à medida volume  $d\mu$ . Com essa medida, as integrais que aparecerão no texto tem o significado da igualdade abaixo:

$$\int_{\Omega \subset \psi(U)} f d\mu = \int_{\psi^{-1}(\Omega)} (f \circ \psi) \sqrt{g} dx_1 \cdots dx_n, \quad (1.6)$$

para qualquer função  $f$  que fizer sentido no contexto em que estamos trabalhando. Desta forma, caso o leitor não esteja familiarizado com integração em variedades riemannianas, pode usar a integração no  $\mathbb{R}^n$  através da igualdade (1.6).

No caso em que  $R$  é um domínio suave na variedade  $M$ , o seu bordo  $\partial R$  é uma subvariedade de dimensão  $n - 1$  que herda a orientação de  $M$  (ver CARMO (1971) [3]). Também o bordo  $\partial R$  herda uma medida volume, que denotaremos por  $d\mu'$  e é compatível com a medida  $d\mu$  via inclusão  $\partial R \subset M$ .

### 1.3 Gradiente, divergente e laplaciano nas variedades riemannianas

**Definição 1.3.1.** Seja  $M$  uma variedade riemanniana e uma função  $f \in \mathcal{D}(M)$ , em que  $\mathcal{D}(M)$  denota o espaço das funções diferenciáveis de  $M$  em  $\mathbb{R}$ . O *gradiente* de  $f$  em  $p \in M$  é o vetor  $\nabla f(p) \in TpM$ , dado por

$$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = df_p(v), \quad \forall v \in TpM. \quad (1.7)$$

Se  $p$  é ponto de máximo ou mínimo local de  $f$  em  $M$ , temos que  $\nabla f(p) = 0$ .

**Lema 1.3.2.** *O gradiente de uma função em coordenadas locais é dado por*

$$\nabla f(p) = \sum_{i,j} g^{ij}(p) (\partial_{x_j} f)(p) \partial_{x_i}. \quad (1.8)$$

*Demonstração.* Fixada uma parametrização  $\psi : U \rightarrow M$ , vamos escrever o gradiente na base  $\partial_{x_j}$ . Precisamos determinar os coeficientes  $a_i$  tais que

$$\nabla f(p) = \sum_i a_i \partial_{x_i}.$$

Com  $j$  fixado, temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(p), \partial_{x_j} \rangle &= \sum_i a_i \langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle \\ \Rightarrow df_p(\partial_{x_j}) &= \sum_i a_i \cdot g_{ij} && [g_{ij} \text{ é simétrica}] \\ \Rightarrow \partial_{x_j}(f) &= \sum_i g_{ij} \cdot a_i \\ \Rightarrow \sum_j g^{ij} \partial_{x_j}(f) &= a_i. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla f(p) = \sum_{i,j} g^{ij}(p) (\partial_{x_j} f)(p) \partial_{x_i}.$$

□

**Definição 1.3.3.** Dado  $X \in \mathcal{X}(M)$ , o *divergente* em  $p \in M$  é o traço da transformação linear

$$v \in T_p M \mapsto (\nabla_v X)(p), \quad (1.9)$$

ou seja, é a função suave  $\text{div } X : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$(\text{div } X)(p) = \text{tr}\{v \in T_p M \mapsto (\nabla_v X)(p)\}. \quad (1.10)$$

**Lema 1.3.4.** *Escreva  $X = \sum_i X^i \partial_{x_i} \in \mathcal{X}(M)$ . Então o divergente em coordenadas locais é dado por*

$$(\text{div } X)(p) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \partial_{x_i}(X^i \sqrt{g}). \quad (1.11)$$

*Demonstração.* Fixada uma parametrização  $\psi : U \rightarrow M$ , vamos calcular o divergente na base coordenada  $\partial_{x_j}$ . Como o divergente é a função dada pelo traço da transformação linear (1.9) e como o traço é dado pela soma dos elementos da diagonal principal da matriz

dessa transformação linear, o que precisamos calcular é

$$\operatorname{div} X = \sum_j (j\text{-ésima componente de } \nabla_{\partial_{x_j}} X).$$

Para isso, precisamos encontrar a  $j$ -ésima componente de  $\nabla_{\partial_{x_j}} X$ . Observe que

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_{x_j}} X &= \sum_i \nabla_{\partial_{x_j}} (X^i \partial_{x_i}) \\ &= \sum_i \partial_{x_j} (X^i) \partial_{x_i} + \sum_i X^i \nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i} \\ &= \sum_i \partial_{x_j} (X^i) \partial_{x_i} + \sum_{i,k} X^i \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k}, \end{aligned}$$

em que  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel da métrica, dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left( \partial_{x_i} (g_{jm}) + \partial_{x_j} (g_{im}) - \partial_{x_m} (g_{ij}) \right) g^{km}. \quad (1.12)$$

Logo, a  $j$ -ésima componente de  $\nabla_{\partial_{x_j}} X$  é

$$\partial_{x_j} (X^j) \partial_{x_j} + \sum_i X^i \Gamma_{ij}^j \partial_{x_j}. \quad (1.13)$$

Então, como  $\operatorname{div} X = \sum_j (j\text{-ésima componente de } \nabla_{\partial_{x_j}} X)$ , temos que

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} X)(p) &\stackrel{(1.13)}{=} \sum_j \left[ \partial_{x_j} (X^j) + \sum_i X^i \Gamma_{ij}^j \right] \\ &= \sum_j \partial_{x_j} (X^j) + \sum_{i,j} X^i \Gamma_{ij}^j \\ &\stackrel{(1.12)}{=} \sum_j \partial_{x_j} (X^j) + \sum_{i,j} X^i \left( \frac{1}{2} \sum_m \left( \partial_{x_i} (g_{jm}) + \partial_{x_j} (g_{im}) - \partial_{x_m} (g_{ij}) \right) g^{jm} \right) \\ &= \sum_j \partial_{x_j} (X^j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,m} X^i \left( \partial_{x_i} (g_{jm}) + \partial_{x_j} (g_{im}) - \partial_{x_m} (g_{ij}) \right) g^{jm} \\ &= \sum_j \partial_{x_j} (X^j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,m} \left( X^i \partial_{x_i} (g_{jm}) g^{mj} + X^i \partial_{x_j} (g_{im}) g^{mj} - X^i \partial_{x_m} (g_{ij}) g^{jm} \right) \\ &= \sum_j \partial_{x_j} X^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,m} X^i \partial_{x_i} (g_{jm}) g^{mj}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Note que  $\sum_{j,m} \partial_{x_i} (g_{jm}) g^{mj} = \operatorname{tr} \left( (\partial_{x_i} g_{jm}) (g_{jm})^{-1} \right)$ . Por outro lado, segue de Álgebra Linear que

$$\partial_{x_i} (\ln g) = \operatorname{tr} \left( (\partial_{x_i} g_{jm}) (g_{jm})^{-1} \right) = \sum_{j,m} \partial_{x_i} (g_{jm}) g^{mj}. \quad (1.15)$$

Desta forma, substituindo (1.15) em (1.14), segue que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} X)(p) &= \sum_j \partial_{x_j} X^j + \frac{1}{2} \sum_i X^i \partial_{x_i} (\ln g) \\
&= \sum_j \partial_{x_j} X^j + \sum_i X^i \partial_{x_i} (\ln g^{\frac{1}{2}}) \\
&= \sum_j \partial_{x_j} X^j + \sum_i X^i \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{x_i} \sqrt{g} \right) \\
&= \sum_i \left( \partial_{x_i} X^i + \frac{X^i}{\sqrt{g}} \partial_{x_i} \sqrt{g} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \left( \sqrt{g} \partial_{x_i} X^i + X^i \partial_{x_i} \sqrt{g} \right) \\
\Rightarrow (\operatorname{div} X)(p) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \partial_{x_i} (X^i \sqrt{g}).
\end{aligned}$$

□

**Definição 1.3.5.** Dado  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável ( $C^\infty$ ) o *laplaciano* de  $f$  é uma função dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \quad (1.16)$$

**Lema 1.3.6.** O *laplaciano* de uma função diferenciável em coordenadas locais é dado por

$$\Delta f = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{x_i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \partial_{x_j} (f) \right). \quad (1.17)$$

*Demonstração.* Basta substituir (1.8) e (1.11) em (1.16). □

# Capítulo 2

## Conceitos de EDP em variedades riemannianas

Neste capítulo abordamos alguns conceitos de Equações Diferenciais Parciais aplicados no contexto das variedades riemannianas. Entre eles, a definição de função harmônica, que está ligada a equação de Laplace e permite enunciar o Princípio do Máximo. Esses conceitos estão conectados com a teoria do potencial, que define capacidade, massividade e potencial superharmônico de um conjunto. Para escrita desse capítulo foram usadas como referências as obras de GILBARG e TRUDINGER (1977) [7], LI (2012) [9] e GRIGOR'YAN (1999) [8].

### 2.1 Funções harmônicas e o problema de Dirichlet

Dado  $\Omega$  aberto em uma variedade riemanniana  $M$ , uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $u \in C^\infty(\Omega)$ , é *harmônica* se

$$\Delta u = 0.$$

Seja  $\Omega$  um pré-compacto aberto em  $M$  tal que  $\partial\Omega$  é suave. Dada qualquer função contínua  $f \in C^0(\partial\Omega)$ , resolver o problema de Dirichlet consiste em encontrar uma função  $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = f. \end{cases} \quad (2.1)$$

**Definição 2.1.1.** Seja  $\Omega \subset M$  aberto conexo. Uma função  $s \in C^0(\overline{\Omega})$  é *superharmônica* se para todo  $V \subset\subset \Omega$  e para toda  $u \in C^2(V) \cap C^0(\overline{V})$  harmônica em  $V$ , valer que se  $s \geq u$  em  $\partial V$ , então  $s \geq u$  em  $V$ .

Se  $s \in C^2(\Omega)$ , é equivalente dizer que  $s$  é superharmônica se

$$\Delta s \leq 0.$$

**Definição 2.1.2.**  $s$  é subharmônica se  $-s$  é superharmônica.

Assim, uma função  $v = -s \in C^2(\Omega)$  é subharmônica se

$$\Delta v \geq 0.$$

Ao longo do texto optamos por demonstrar prioritariamente resultados para funções superharmônicas, mas que podem ser adaptados para funções subharmônicas, bastando trocar o conceito de ínfimo por supremo, de mínimo por máximo e o sinal de menor ou igual por maior ou igual.

**Proposição 2.1.3.** *O ínfimo de uma família de funções superharmônicas é superharmônico.*

*Demonstração.* Seja  $s_\alpha$  uma família de funções superharmônicas em  $\Omega \subset M$ . Defina  $s := \inf_{\alpha \in \Lambda} s_\alpha$ .

Dado  $V \subset\subset \Omega$ , seja  $u : V \subset\subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica tal que  $s \geq u$  em  $\partial V$  e, assim,  $s_\alpha \geq u$  em  $\partial V$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda$ .

Como cada  $s_\alpha$  é superharmônica, temos que  $s_\alpha \geq u$  em  $V$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda$ , e portanto,

$$s \geq u \text{ em } V.$$

□

**Corolário 2.1.4.** *Se  $s_1$  e  $s_2$  são superharmônicas, então  $s = \min\{s_1, s_2\}$  é superharmônica.*

No decorrer do texto utilizaremos o Corolário 2.1.4 sem referenciá-lo.

## 2.2 Princípio do Máximo em variedades

Considere  $\Omega \subset M$  compacto com bordo. O Princípio do Máximo afirma que dada uma função  $v$  subharmônica em  $\Omega$ , o seu valor máximo é atingido em  $\partial\Omega$ . Analogamente, dada uma função  $s$  superharmônica em  $\Omega$ , o seu valor mínimo é atingido em  $\partial\Omega$ .

Note que as funções superharmônicas usam o conceito de valor mínimo, ou seja, refere-se ao Princípio do Mínimo. Mas, usualmente, o Princípio do Máximo tem os mesmos resultados para funções subharmônicas ou superharmônicas, desde que feitas as devidas adaptações. Por uma questão de notação, será usado o Princípio do Máximo mesmo quando fizermos referência ao valor mínimo.

**Teorema 2.2.1** (Princípio Fraco do Máximo). *Se  $s \in C^2(\Omega)$  é superharmônica, então*

$$\inf_{\Omega} s = \inf_{\partial\Omega} s.$$

Para demonstrar o Princípio Fraco do Máximo, é necessário o seguinte lema:

**Lema 2.2.2.** *Se  $s \in C^2(\Omega)$  é tal que  $\Delta s < 0$  em  $\Omega$ , então  $s$  não assume mínimo em ponto interior.*

*Demonstração do Lema 2.2.2.* Por absurdo, suponha que existe  $x_0 \in \text{int } \Omega$  tal que

$$s(x_0) = \inf_{\Omega} s,$$

ou seja, o ponto de mínimo ocorre em um ponto interior.

Considere  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um conjunto de campos de vetores ortonormais em uma vizinhança de  $x_0$ . Note que

$$\Delta s = \sum_i \langle \nabla_{E_i} \nabla s, E_i \rangle = \sum_i E_i \left( \langle \nabla s, E_i \rangle - \langle \nabla s, \nabla_{E_i} E_i \rangle \right) = \sum_i \left( E_i \left( E_i(s) \right) - \langle \nabla s, \nabla_{E_i} E_i \rangle \right).$$

Como  $x_0$  é ponto de mínimo, temos que  $\nabla s(x_0) = 0$  e  $E_i \left( E_i(s) \right)(x_0) = (s \circ \alpha_i)''(0) \geq 0$ , em que  $\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$  é curva diferenciável tal que  $\alpha_i(0) = x_0$  e  $\alpha_i'(0) = E_i(x_0)$ .

Logo,

$$\Delta s(x_0) \geq 0,$$

o que é um absurdo, pois por hipótese  $\Delta s < 0$ .

Portanto,  $s$  não assume mínimo em ponto interior.  $\square$

O Lema de Zorn e a propriedade de Lindelöf serão utilizados na demonstração do Teorema 2.2.1:

**Lema 2.2.3** (Lema de Zorn). *Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto não vazio e parcialmente ordenado. Se toda cadeia de  $\mathcal{U}$  tem um limite superior, então  $\mathcal{U}$  tem um elemento maximal.*

**Teorema 2.2.4** (Propriedade de Lindelöf). *Dado um espaço topológico  $(S, \sigma)$  e um subconjunto  $\mathcal{U}$  aberto e não vazio. Se existe uma base enumerável para a topologia  $\sigma$  de  $S$ , então toda cobertura aberta de  $\mathcal{U}$  admite uma subcobertura enumerável. Em particular,  $S$  é um espaço de Lindelöf.*

Comentários e demonstrações do Lema 2.2.3 e do Teorema 2.2.4 podem ser encontrados em FANTI e IZAR (2020) [5].

Note que topologia das variedades provém das parametrizações e é válido o Axioma 1.1.4. Assim, é possível tomar uma quantidade enumerável de parametrizações na base da topologia, de modo que a variedade admita uma base enumerável.

*Demonstração do Teorema 2.2.1.* Seja  $x_0 \in \overline{\Omega}$  tal que  $s(x_0) = \inf_{\Omega} s$ . Temos dois casos:  $x_0 \in \partial\Omega$  ou  $x_0 \in \text{int } \Omega$ .

Caso  $x_0 \in \partial\Omega$ , temos que  $\inf_{\Omega} s = \inf_{\partial\Omega} s$ , pois  $\partial\Omega \subset \overline{\Omega} = \Omega$ , por ser compacto.

Suponha agora que  $x_0 \in \text{int } \Omega$ . Seja  $\mathcal{U} = \{U \subset \Omega \text{ aberto; } x_0 \in U, \inf_{\partial U} s = s(x_0)\}$ . É possível mostrar que  $\Omega \in \mathcal{U}$  através do Lema de Zorn (Lema 2.2.3), ou seja, precisamos verificar que  $\mathcal{U}$  é (i) não vazio, (ii) é parcialmente ordenado e toda cadeia tem cota superior e (iii)  $\Omega$  é o elemento maximal.

i)  $\mathcal{U} \neq \emptyset$ .

Seja  $B = B_\delta(x_0) \subset \Omega$  bola normal, com  $\delta > 0$ . Essa caracterização é necessária para garantir a injetividade da aplicação  $\exp_{x_0}$ , para que a função distância esteja bem definida.

Seja  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = -(d(x, x_0))^2$ . Afirmamos, sem demonstração, que  $f$  é diferenciável em  $B$  e  $\Delta f(x_0) = -2n < 0$ , em que  $n$  é a dimensão da variedade  $M$ .

Como  $f$  é diferenciável, existe um aberto  $A \subseteq B$ , com  $x_0 \in A$ , de modo que  $\Delta f < 0$  em  $A$ .

Como  $\Delta s \leq 0$  e  $\Delta f < 0$  em  $A$ , para todo  $\varepsilon > 0$  temos que  $\Delta(s + \varepsilon f) < 0$  em  $A$ . Pelo Lema 2.2.2, temos que

$$\inf_{\partial A} (s + \varepsilon f) = \inf_A (s + \varepsilon f).$$

Ao tomar  $\varepsilon \rightarrow 0$ , segue que

$$\inf_{\partial A} s = \inf_A s = s(x_0).$$

Logo,  $A \in \mathcal{U}$  e, portanto,  $\mathcal{U} \neq \emptyset$ .

ii)  $\mathcal{U}$  é parcialmente ordenado e toda cadeia tem cota superior, ou seja,  $\mathcal{U}$  possui elemento maximal em relação à ordem parcial da inclusão.

Seja  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  cadeia totalmente ordenada em  $\mathcal{U}$ . Pela propriedade de Lindelöf (Teorema 2.2.4), existe  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  subcadeia enumerável totalmente ordenada tal que  $U_i \subset U_{i+1}$  e  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ .

Seja  $V := \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ , que é aberto e contém  $x_0$ . É preciso mostrar que  $V \in \mathcal{U}$ , ou seja,

$$\inf_{\partial V} s = s(x_0).$$

Para isso, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $x_i \in \partial U_i$  tal que  $s(x_i) = s(x_0)$ . Ou seja, existe um ponto de mínimo para cada  $U_i$ .

Pela compacidade de  $\Omega$ , existe uma subsequência  $x_{i_k} \rightarrow x \in \Omega$ . Logo,  $s(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(x_{i_k}) = s(x_0)$ . Além disso,  $x \in \bar{V}$ .

É preciso mostrar que  $x \in \partial V$ . Para isso, suponha o contrário, ou seja, que  $x \in \text{int } V$ . Então existe  $B_\delta(x) \subset V$  e, assim,  $B_\delta(x) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \Rightarrow B_\delta(x) \subset U_{i_0}$  e, portanto,  $B_\delta(x) \subset U_i$ , para todo  $i \geq i_0$ .

Logo,  $d(x, x_i) > \delta$ , para todo  $i \geq i_0$ , contradizendo  $x_{i_k} \rightarrow x$  e, assim, segue que  $x \in \partial V$ .

Portanto,  $V \in \mathcal{U}$  e, pelo Lema de Zorn, toda cadeia totalmente ordenada em  $\mathcal{U}$  possui elemento maximal.

iii)  $\Omega \in \mathcal{U}$ .

Seja  $W \in \mathcal{U}$  elemento maximal. Então  $s(x_0) = \inf_{\partial W} s$ .

Suponha por absurdo que  $\Omega \neq W$ . Pela compacidade, existe  $y_0 \in \partial W$  tal que  $y_0 \notin \partial \Omega$  e

$$s(y_0) = \inf_{\partial W} s = s(x_0).$$

Seja  $z_0 \in \partial W \setminus \partial \Omega$  com  $z_0 \neq y_0$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(z_0) \subset \Omega \setminus \{y_0\}$  é bola normal. Nesse caso,  $y_0 \in \partial(W \cup B_\delta(z_0))$  e, assim,  $W \cup B_\delta(z_0) \in \mathcal{U}$ , com  $W \neq W \cup B_\delta(z_0)$ , contrariando a maximalidade de  $W$ .

Logo,  $\Omega$  é o elemento maximal de  $\mathcal{U}$  e, portanto,  $s(x_0) = \inf_{\Omega} s = \inf_{\partial \Omega} s$ .

□

**Teorema 2.2.5** (Princípio Forte do Máximo). *Se  $s \in C^2(\Omega)$  é superharmônica e se assume valor mínimo num ponto interior, então  $s$  é constante.*

Para demonstrar o Princípio Forte do Máximo é necessário o seguinte lema:

**Lema 2.2.6** (Lema de Hopf). *Seja  $\Omega$  domínio compacto e conexo da variedade riemanniana orientável  $M$  e seja  $s \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  tal que  $\Delta s \leq 0$ . Se  $x_0 \in \partial \Omega$  e ainda valer que*

i)  $s(x) > s(x_0), \forall x \in \Omega$  ( $x_0$  é mínimo local);

ii)  $\partial \Omega$  satisfaz a condição da bola interior em  $x_0$ , isto é, existe  $R > 0$  e uma bola  $B_R(y_0) \subset \Omega$  tal que  $\partial B_R(y_0) \cap \partial \Omega = \{x_0\}$ ;

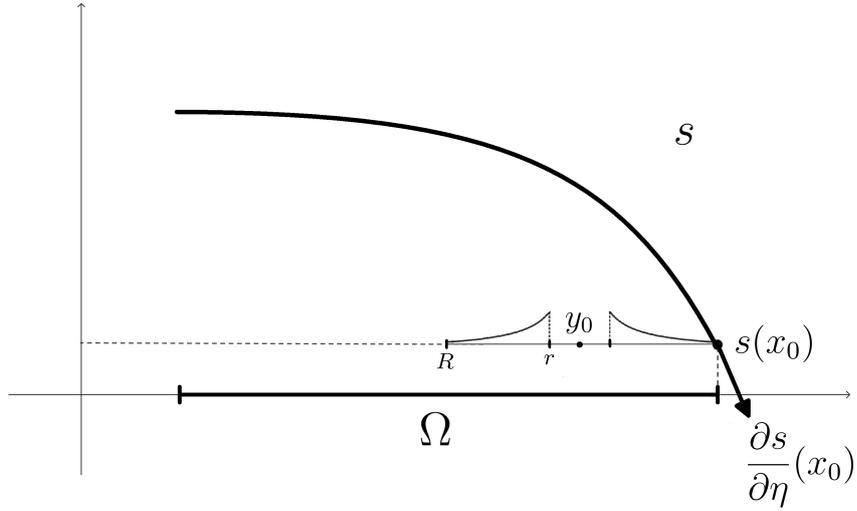
iii) Existe  $\frac{\partial s}{\partial \eta}(x_0)$ , em que  $\eta$  é o vetor normal unitário exterior a  $\Omega$ .

Então  $\frac{\partial s}{\partial \eta}(x_0) < 0$ .

*Demonstração Lema de Hopf.* Por hipótese, existe  $R > 0$  e uma bola  $B_R(y_0) \subset \Omega$  tal que  $\partial B_R(y_0) \cap \partial \Omega = \{x_0\}$ . Seja  $0 < r < R$  e  $A$  o anel (Figura 2.1 e Figura 2.2)

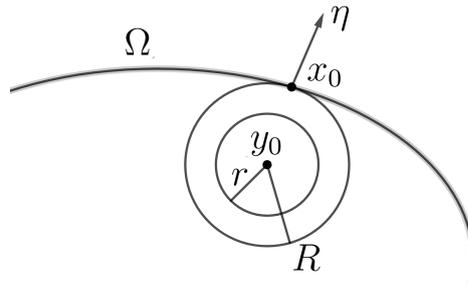
$$A = B_R(y_0) \setminus \overline{B_r(y_0)} = \{x \in \Omega; r < d(x, y_0) < R\}.$$

Figura 2.1: Lema de Hopf.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 2.2: Condição da bola interior.



Fonte: Elaborado pela autora.

Defina  $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = e^{-\alpha d(x, y_0)^2} - e^{-\alpha R^2},$$

em que  $\alpha \in \mathbb{R}$  é uma constante positiva adequada que será definida de modo que  $\Delta f > 0$ .

Note que

i)  $f(x) = 0$  para  $x \in \partial B_R(y_0)$ .

De fato, se  $x \in \partial B_R(y_0)$ , temos que  $d(x, y_0) = R$  e, assim,  $f(x) = e^{-\alpha R^2} - e^{-\alpha R^2} = 0$ .

ii)  $f(x) > 0$  para  $x \in A$ .

De fato, se  $x \in A$ , temos que  $d(x, y_0) < R$ , pela definição de  $A$ . Assim,

$$\begin{aligned} d(x, y_0)^2 &< R^2 \\ \Rightarrow \alpha d(x, y_0)^2 &< \alpha R^2 \\ \Rightarrow -\alpha d(x, y_0)^2 &> -\alpha R^2 \\ \Rightarrow e^{-\alpha d(x, y_0)^2} &> e^{-\alpha R^2}. \end{aligned}$$

Logo,  $f(x) > 0$ , já que a primeira parcela da subtração é sempre maior que a segunda parcela.

iii)  $f$  é radialmente simétrica com relação à  $y_0$ .

Ao tomar  $x_1, x_2 \in \Omega$ , se  $d(x_1, y_0) = d(x_2, y_0)$ , então

$$f(x_1) = e^{-\alpha d(x_1, y_0)^2} - e^{-\alpha R^2} = e^{-\alpha d(x_2, y_0)^2} - e^{-\alpha R^2} = f(x_2).$$

iv)  $\Delta f > 0$  em  $A$  se  $\alpha$  é suficientemente grande.

Pela Definição 1.16 temos que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Escreva  $f$  como a composta  $h \circ d$ , em que  $h(d) = e^{-\alpha d^2} - e^{-\alpha R^2}$ , com  $d = d(\cdot, y_0)$ . Temos que

$$\nabla f = (h' \circ d)\nabla d.$$

Então

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}((h' \circ d)\nabla d) = (h'' \circ d)\langle \nabla d, \nabla d \rangle + (h' \circ d)\Delta d.$$

Note que  $\langle \nabla d, \nabla d \rangle = 1$  e  $\Delta d$  é limitada em  $\Omega \setminus B_r(y_0)$ , por compacidade. Seja  $L$  uma constante tal que  $\Delta d > L$ . Então

$$\Delta f > h'' \circ d + h' \circ d \cdot L. \quad (2.2)$$

Além disso,

$$h' \circ d = h'(d) = -2\alpha d e^{-\alpha d^2} \quad (2.3)$$

e

$$h'' \circ d = h''(d) = -2\alpha e^{-\alpha d^2} - 2\alpha d(-2\alpha d)e^{-\alpha d^2} = -2\alpha e^{-\alpha d^2} + 4\alpha^2 d^2 e^{-\alpha d^2}. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.2), temos que

$$\begin{aligned} \Delta f &> h'' \circ d + h' \circ d \cdot L \\ &= (-2\alpha e^{-\alpha d^2} + 4\alpha^2 d^2 e^{-\alpha d^2}) + (-2L\alpha d e^{-\alpha d^2}) \\ &= -2\alpha e^{-\alpha d^2} (1 - 2\alpha d^2 + dL) \\ &> -2\alpha e^{-\alpha d^2} (1 - 2\alpha r^2 + RL). \end{aligned} \quad [r < d(x, y_0) < R \text{ em } A]$$

Logo, para  $\alpha$  suficientemente grande, ou seja, para  $\alpha > \frac{1 + RL}{2r^2}$ , segue que  $\Delta f > 0$ .

Seja agora  $w(x) = s(x) - s(x_0) - \varepsilon f(x)$ .

**Afirmação:** Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $w(x) = s(x) - s(x_0) - \varepsilon f(x) > 0$  em  $A$ .

- $w(x) > 0$  em  $\partial B_r(y_0)$ .

Note que  $s(x) - s(x_0) > 0$  em  $\partial B_r(y_0)$ , pois  $s(x) > s(x_0)$  para todo  $x \in \Omega$ .

Pela continuidade da  $s$  e pela compacidade de  $\partial B_r(y_0)$ , existe  $x_1 \in \partial B_r(y_0)$  tal que

$$\gamma := \min_{x \in \partial B_r(y_0)} (s(x) - s(x_0)) = s(x_1) - s(x_0) > 0.$$

Assim,

$$s(x) - s(x_0) \geq \gamma > 0 \Rightarrow s(x) - s(x_0) - \varepsilon f(x) \geq \gamma - \varepsilon f(x) > 0,$$

para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, já que  $\gamma > 0$ .

Logo,  $w(x) > 0$  em  $\partial B_r(y_0)$ .

- $w(x) > 0$  em  $\partial B_R(y_0)$ .

De fato, se  $x \in \partial B_R(y_0)$ , temos que  $f(x) = 0$ , como visto no item i). Então

$$w(x) = s(x) - s(x_0) - \varepsilon \cdot 0 = s(x) - s(x_0) > 0.$$

- $\Delta w \leq 0$  em  $A$ .

Pela linearidade de  $\Delta$ , temos que

$$\Delta w(x) = \Delta(s(x) - s(x_0) - \varepsilon f(x)) = \Delta s(x) - \Delta s(x_0) - \varepsilon \Delta f(x) \leq 0.$$

Pelo Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1), como  $\Delta w \leq 0$ , temos que

$$\inf_A w = \inf_{\partial A} w > 0 \Rightarrow w(x) > 0, \forall x \in A.$$

Assim, fica demonstrada a afirmação.

Agora, como  $w(x) > 0$ , temos que

$$s(x) - s(x_0) - \varepsilon f(x) > 0 \Rightarrow s(x) - s(x_0) > \varepsilon f(x), \forall x \in A. \quad (2.5)$$

Note que  $\frac{\partial s}{\partial \eta}(x_0) = (s \circ \gamma)'(R)$ , em que  $\gamma$  é geodésica tal que  $|\gamma'| = 1$ ,  $\gamma(0) = y_0$  e

$\gamma(R) = x_0$ . Assim,

$$\frac{\partial s}{\partial \eta}(x_0) = \frac{d}{dt}(s \circ \gamma)(t) \Big|_{t=R} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(s \circ \gamma)(R+h) - (s \circ \gamma)(R)}{h}. \quad (2.6)$$

Por (2.5) e para  $h < 0$ , temos que

$$\frac{(s \circ \gamma)(R+h) - (s \circ \gamma)(R)}{h} < \frac{\varepsilon(f \circ \gamma)(R+h)}{h}. \quad (2.7)$$

Pela definição de  $f$  temos que

$$(f \circ \gamma)(R+h) = e^{-\alpha d(\gamma(R+h), y_0)^2} - e^{-\alpha R^2} = e^{-\alpha(R+h)^2} - e^{-\alpha R^2}.$$

Assim, ao tomar o limite de  $h$  tendendo a  $0^-$  em (2.7) temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varepsilon(f \circ \gamma)(R+h)}{h} = -2\varepsilon\alpha R e^{-\alpha R^2} < 0. \quad (2.8)$$

Logo, em (2.6), temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(s \circ \gamma)(R+h) - (s \circ \gamma)(R)}{h} \stackrel{(2.7)}{<} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varepsilon(f \circ \gamma)(R+h)}{h} \stackrel{(2.8)}{<} 0.$$

Portanto,  $\frac{\partial s}{\partial \eta}(x_0) < 0$ , como queríamos. □

*Demonstração Princípio Forte do Máximo.* Seja  $x_0$  ponto interior de  $\Omega$  tal que

$$s(x_0) = \inf_{\Omega} s = m.$$

Seja  $A = \{x \in \Omega; s(x) = m\}$ . Precisamos mostrar que se  $A \neq \emptyset$ , então  $A = \Omega$ .

Temos que:

i)  $A \neq \emptyset$ .

Note que  $x_0 \in A$ , ou seja,  $A \neq \emptyset$ .

ii)  $A$  é fechado.

De fato, temos que  $A = s^{-1}(m)$ , ou seja,  $A$  é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma aplicação contínua e, portanto, é fechado.

iii)  $A$  é aberto.

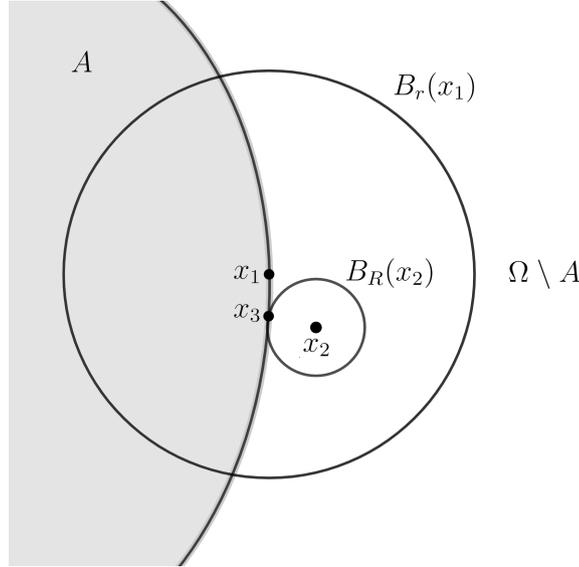
Suponha por absurdo que  $A$  não é aberto. Então existe  $x_1 \in A \subset \Omega$  tal que  $x_1 \notin \text{int } A$ , isto é,  $x_1 \in \partial A$ .

Como  $x_1 \in \Omega$ , temos que existe  $r > 0$  tal que  $B_r(x_1) \subset \Omega$ .

Então  $B_r(x_1) \cap A \neq \emptyset$  e  $B_r(x_1) \cap (\Omega \setminus A) \neq \emptyset$ .

Tome agora  $\frac{r}{2} < r$ . Como  $B_{\frac{r}{2}}(x_1) \cap (\Omega \setminus A) \neq \emptyset$ , temos que existe  $x_2 \in B_{\frac{r}{2}}(x_1) \cap (\Omega \setminus A)$ .

Figura 2.3: Princípio Forte do Máximo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Seja  $B_R(x_2)$  a maior bola centrada em  $x_2$  e contida em  $\Omega \setminus A$ , com  $R \leq \frac{r}{2}$ .

Note que  $B_R(x_2) \subset B_r(x_1)$ , já que  $d(x_1, x_2) < \frac{r}{2}$ .

Então existe  $x_3 \in \partial A \cap \partial B_R(x_2)$  (Figura 2.3). Note que

- $x_3 \in \partial A \subset A \Rightarrow s(x_3) = m$ .
- $\Omega \setminus A$  satisfaz a condição da bola interior em  $x_3$ .
- $s(x) > m$  em  $\Omega \setminus A$ , pela definição de  $A$ .

Pela Lema de Hopf (Lema 2.2.6), temos que

$$\frac{\partial s}{\partial \eta}(x_3) < 0,$$

em que  $\eta$  é vetor normal unitário exterior a  $\Omega \setminus A$  em  $x_3$ .

Mas isso é um absurdo, pois contradiz o fato de que  $\nabla s(x_3) = 0$ , já que  $x_3$  é ponto de mínimo interior.

Logo,  $A$  é aberto.

Portanto, por i), ii) e iii) e como  $\Omega$  é conexo, segue que  $\Omega = A$ , ou seja,  $s$  é constante.

□

A seguir daremos algumas propriedades de funções que serão utilizadas ao longo do texto.

- Primeira identidade de Green

$$\int_B u \Delta \varphi d\mu(x) = \int_{\partial B} u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\mu'(x) - \int_B \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle d\mu(x). \quad (2.9)$$

- Segunda identidade de Green

$$\int_B (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) d\mu(x) = \int_{\partial B} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\mu'(x). \quad (2.10)$$

Em ambos os casos,  $u$  é uma função qualquer,  $B$  é uma bola no domínio em questão,  $\eta$  é o vetor normal unitário exterior a bola  $B$  e  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , em que  $C_c^\infty(\Omega)$  é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis que possuem suporte compacto. O suporte de uma função é dado por:

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}, \quad (2.11)$$

ou seja, fora desse domínio compacto a função é nula.

Além disso, o *fluxo* de uma função  $u$  em um domínio  $\Omega$  é dado por

$$\text{flux}_{\partial\Omega} u := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \eta} u d\mu', \quad (2.12)$$

em que  $\eta$  é o vetor normal unitário exterior a  $\Omega$ .

## 2.3 Solução fundamental

Para apresentar a solução fundamental de uma EDP é preciso introduzir o conceito de *distribuição*. Esse conceito é estudado na teoria das distribuições, que é uma extensão da teoria das funções. Essa extensão é necessária para definir a noção de derivada e integral em funções que não são suficientemente diferenciáveis, de onde surge a noção de derivada fraca. Mais comentários sobre a teoria das distribuições podem ser encontradas em MARQUES (2018) [10].

A seguir, temos uma motivação para derivada fraca, o que embora não possa ser generalizado imediatamente para distribuições, dá uma ideia de por que a definição de solução fundamental é razoável. Seja uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\Omega$  domínio de  $M$ , ou seja, aberto e conexo. Dizemos que  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  se  $u$  é localmente integrável, ou seja,

$$\int_K |u|^1 < \infty, \text{ para todo } K \subset\subset \Omega. \quad (2.13)$$

Temos que  $u$  define um funcional linear  $l_u : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$l_u(\varphi) = \int_{\Omega} u\varphi d\mu(x), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.14)$$

De fato,  $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ,

$$|l_u(\varphi)| = \left| \int_{\Omega} u\varphi d\mu(x) \right| \leq \int_{\Omega} |u\varphi| d\mu(x) = \int_K |u| \cdot |\varphi| d\mu(x) \leq \max |\varphi| \int_K |u| d\mu(x) < \infty,$$

ou seja,  $l_u$  é limitado e, assim, a propriedade de  $u$  ser uma função localmente integrável permite definir um funcional linear através dela.

Supondo  $u \in C^1(\Omega)$  e fixado um campo diferenciável de vetores  $X$ , temos que  $X(u) = \langle \nabla u, X \rangle$  está bem definido e é contínuo. Então  $X(u) \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  define funcionais lineares, ou seja, dada  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , vale que

$$\begin{aligned} l_{\langle \nabla u, X \rangle}(\varphi) &= \int_{\Omega} \varphi \langle \nabla u, X \rangle d\mu(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi u \langle X, \eta \rangle d\mu'(x) - \int_{\Omega} u X(\varphi) d\mu(x) \\ &\stackrel{\varphi=0}{=} - \int_{\Omega} u X(\varphi) d\mu(x) = -l_u(X(\varphi)), \end{aligned}$$

em que  $\eta$  é vetor normal unitário exterior a  $\partial\Omega$ .

Isso motiva a definição de derivada fraca como um funcional linear. Como estamos interessados em utilizar o operador  $\Delta$ , podemos defini-lo no contexto de derivada fraca de maneira análoga por

$$\Delta u(\varphi) = \int_{\Omega} u \Delta \varphi d\mu(x), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.15)$$

Uma *distribuição* é um operador linear contínuo de  $C_c^\infty(\Omega)$  em  $\mathbb{R}$  com uma topologia adequada. Nesse texto, a única distribuição que vamos utilizar e não é proveniente de uma função é a *delta de Dirac*  $\delta_x$ . Assim, fixado  $x \in M$ , temos que

$$\begin{aligned} \delta_x : C_c^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Temos que  $\Delta u = \delta_x$  no sentido das distribuições se

$$\Delta u(\varphi) = \int_{\Omega} u \Delta \varphi d\mu(x) = \delta_x(\varphi) = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.16)$$

Neste caso,  $u$  é chamado *solução fundamental* do laplaciano. Mais comentários sobre soluções fundamentais são feitos no Capítulo 3.

## 2.4 Função de Green

Através da solução fundamental do problema de Dirichlet para o laplaciano é possível definir uma *função de Green*. Para isso, seja  $\Omega \subset M$  um domínio compacto. A função de Green  $G_\Omega(x, y)$  é dada por

$$\begin{cases} \Delta G_\Omega(x, y) = -\delta_x(y), & \text{em } \Omega, \\ G_\Omega(x, y) = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

Mais detalhes sobre a construção da função de Green podem ser consultados em LI (2012) [9].

Note que

$$\int_\Omega \Delta G_\Omega(x, y) dy = - \int_\Omega \delta_x(y) dy := \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \Omega, \\ -1, & \text{se } x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

Além disso, de (2.16) segue que

$$\Delta G_\Omega(x, y)(\varphi) = \int_\Omega G_\Omega(x, y) \Delta \varphi(y) dy = -\varphi(x), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.19)$$

Observe que  $G_\Omega$  é harmônica quando  $x \neq y$ , pois por (2.18), temos que  $\delta_x(y) = 0$ ,  $\forall x \neq y$ , ou seja,

$$\Delta G_\Omega(x, y) = 0, \quad \forall x \neq y.$$

Pela Definição 2.1.1, temos que  $G_\Omega$  é superharmônica no sentido das distribuições, ou seja, dada  $\psi$  distribuição, temos que  $\psi$  é superharmônica se

$$\Delta \psi(\varphi) \leq 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0. \quad (2.20)$$

Neste caso,

$$\Delta(G_\Omega(x, \cdot))(\varphi) = -\varphi(x) \leq 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty, \varphi \geq 0. \quad (2.21)$$

Uma maneira de construir a função de Green de  $M$  é através de uma exaustão de  $M$  por compactos.

**Definição 2.4.1.** Uma sequência  $\{\mathcal{E}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de conjuntos de  $M$  é uma exaustão compacta de  $M$  se

- i) Cada  $\mathcal{E}_k$  é uma região pré-compacta com bordo suave.
- ii)  $\mathcal{E}_k \subset \subset \mathcal{E}_{k+1}$ , ou seja,  $\mathcal{E}_k \subset \text{int } \mathcal{E}_{k+1}$ .
- iii)  $M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_k$ .

Assim, primeiro é construída uma função de Green  $G_{\mathcal{E}_k}(x, y)$  em cada  $\mathcal{E}_k$ , que provém do problema de Dirichlet em  $\mathcal{E}_k$  e é contínua até  $\partial\mathcal{E}_k$  e se anula em  $\partial\mathcal{E}_k$ .

Note que

$$\Delta(G_{\mathcal{E}_{k+1}}|_{\mathcal{E}_k} - G_{\mathcal{E}_k}) = \Delta(G_{\mathcal{E}_{k+1}}|_{\mathcal{E}_k}) - \Delta(G_{\mathcal{E}_k}) = -\delta_x + \delta_x = 0,$$

então  $G_{\mathcal{E}_{k+1}}|_{\mathcal{E}_k} - G_{\mathcal{E}_k}$  é harmônica em  $\mathcal{E}_k$ . Além disso,  $G_{\mathcal{E}_k}(x, \cdot) = 0$  em  $\partial\mathcal{E}_k$  e  $G_{\mathcal{E}_{k+1}}(x, \cdot) \geq 0$  em  $\partial\mathcal{E}_k$ .

Portanto, pelo Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1), segue que  $G_{\mathcal{E}_{k+1}} \geq G_{\mathcal{E}_k}$ , para todo  $x \neq y$ . Logo, a sequência  $\{G_{\mathcal{E}_k}\}$  é crescente e seu limite é a função de Green global, ou seja,

$$G(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_{\mathcal{E}_k}(x, y). \quad (2.22)$$

Temos que  $G(x, y)$  é a menor solução fundamental para o laplaciano que é positiva. Se não existir tal solução fundamental,  $G \equiv \infty$ . Se ela existir, então  $G \neq \infty$  e é solução de  $\Delta_y G(x, y) = -\delta_x(y)$ .

*Exemplo.* Para  $\mathbb{R}^2$ , temos que  $G(x, y) \equiv \infty$ . Para  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ , temos que

$$G(x, y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}}.$$

São propriedades da função de Green:

1. Ou  $G(x, y) < \infty, \forall x \neq y$ , ou  $G(x, y) = \infty, \forall x, y$ .
2.  $G(x, x) = \infty$ .
3. Positiva:  $G(x, y) > 0$ .
4. Simétrica:  $G(x, y) = G(y, x)$ . Dessa forma, tanto faz fixar  $x$  ou  $y$  e variar a segunda variável.
5. Para  $x$  fixado,  $G(x, \cdot)$  é harmônica longe de  $x$ . Admitindo que  $\infty$  é um valor que  $G$  assume, então  $G(x, \cdot)$  é superharmônica em  $M$  (está sempre acima das harmônicas).
6. Como consequência da minimalidade temos

$$\inf_{x, y \in M} G(x, y) = 0.$$

7. Se  $\Omega$  é pré-compacto com  $\partial\Omega$  suave, então

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\eta} G(x, y) d\mu'(y) = \begin{cases} 0, & x \notin \bar{\Omega}, \\ -1, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.23)$$

em que  $\eta$  é vetor normal exterior a  $\Omega$ , que é equivalente ao fato de  $G$  ser solução fundamental. De fato, a igualdade é válida pois

a) Caso  $x \notin \Omega$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\eta} G(x, y) d\mu'(y) &\stackrel{(2.9)}{=} \int_{\Omega} \Delta G(x, y) d\mu(y) + \int_{\Omega} \langle \nabla 1, \nabla G(x, y) \rangle d\mu(y) \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \int_{\Omega} -\delta_x(y) d\mu(y) + \int_{\Omega} \langle \vec{0}, \nabla G(x, y) \rangle d\mu(y) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

b) Caso  $x \in \Omega$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\eta} G(x, y) d\mu'(y) &\stackrel{(2.9)}{=} \int_{\Omega} \Delta G(x, y) d\mu(y) + \int_{\Omega} \langle \nabla 1, \nabla G(x, y) \rangle d\mu(y) \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \int_{\Omega} -\delta_x(y) d\mu(y) + \int_{\Omega} \langle \vec{0}, \nabla G(x, y) \rangle d\mu(y) = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

*Observação.* 1. Note que o fluxo da função de Green, definido no final da Seção 2.2 por (2.12), é dado pela integral em (2.23). Ou seja,

$$\text{flux}_{\partial\Omega} G(x, y) := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\eta} G(x, y) d\mu'(y). \quad (2.24)$$

2. O item (7) implica que dada qualquer função harmônica  $u$  e um conjunto aberto pré-compacto  $\Omega$ , vale que

$$\text{flux}_{\partial\Omega} u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}(x) d\mu'(x) = 0, \quad (2.25)$$

pois

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}(x) d\mu'(x) &\stackrel{(2.9)}{=} \int_{\Omega} \Delta u(x) d\mu(x) + \int_{\Omega} \langle \nabla 1, \nabla u(x) \rangle d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} 0 d\mu(x) + \int_{\Omega} \langle \vec{0}, \nabla u(x) \rangle d\mu(x) = 0. \end{aligned}$$

## 2.5 Capacidade

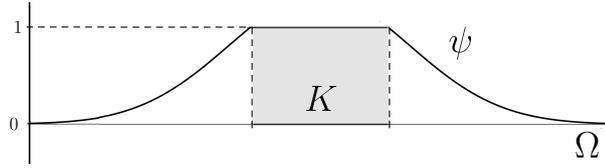
Sejam  $\Omega \subset M$  aberto e  $K \subset \Omega$  compacto. O par  $(K, \Omega)$  é chamado de *capacitor* e a *capacidade*  $\text{cap}(K, \Omega)$  é definida por

$$\text{cap}(K, \Omega) := \inf_{\psi \in \mathcal{L}(K, \Omega)} \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 d\mu, \quad (2.26)$$

em que  $\mathcal{L}(K, \Omega)$  é o conjunto das funções  $\psi$  localmente Lipschitz em  $M$  com suporte compacto em  $\bar{\Omega}$ , tal que  $0 \leq \psi \leq 1$  e  $\psi|_K = 1$  (Figura 2.4).

No caso de  $K \subset \Omega$  ser um aberto pré-compacto, defina  $\text{cap}(K, \Omega) := \text{cap}(\bar{K}, \Omega)$ ,

Figura 2.4: Comportamento da função  $\psi$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

em que valem as mesmas propriedades citadas acima. No caso em que  $\Omega = M$ , denote  $\text{cap}(K, \Omega) = \text{cap}(K)$ . Além disso, para qualquer  $\{\mathcal{E}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  exaustão por compactos de  $\Omega$ , temos que

$$\text{cap}(K, \Omega) := \lim_{k \rightarrow \infty} \text{cap}(K, \mathcal{E}_k). \quad (2.27)$$

Note que a capacidade  $\text{cap}(K, \Omega)$  é intrínseca a  $\Omega \setminus \bar{K}$  uma vez que  $\nabla \psi = 0$  em  $\bar{K}$ . Note ainda que a medida que  $\Omega$  expande ou  $K$  reduz, o conjunto  $\mathcal{L}(K, \Omega)$  aumenta, pois é um conjunto de funções. Então a capacidade  $\text{cap}(K, \Omega)$  diminui, pois é definida como o ínfimo de um conjunto de funções, e aumentando a quantidade de funções do conjunto, o seu ínfimo diminui.

O ínfimo em (2.26) é atingido quando  $\psi = u$ , que é solução do problema de Dirichlet em  $\Omega \setminus K$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \setminus K, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{\partial K} = 1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Neste caso,  $u$  é chamada *potencial de capacidade* ou *potencial de equilíbrio* para o capacitor  $(K, \Omega)$  e daí

$$\text{cap}(K, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mu. \quad (2.29)$$

Segue das identidades de Green que

$$\text{cap}(K, \Omega) = -\text{flux}_{\partial K} u, \quad (2.30)$$

pois

$$\begin{aligned} \text{cap}(K, \Omega) &= \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 d\mu = \int_{\Omega \setminus K} \langle \nabla u, \nabla u \rangle d\mu \\ &\stackrel{(2.9)}{=} - \int_{\Omega \setminus K} u \Delta u d\mu + \int_{\partial(\Omega \setminus K)} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu' \quad [\nu \text{ é vetor normal exterior a } \Omega \setminus K] \\ &\stackrel{\Delta u=0}{=} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu' - \int_{\partial K} u \frac{\partial u}{\partial \eta} d\mu' \quad [\eta \text{ é vetor normal exterior a } K, \text{ isto é, } \eta = -\nu] \\ &\stackrel{(2.28)}{=} \int_{\partial\Omega} 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu' - \int_{\partial K} 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} d\mu' \\ &= - \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\mu', \end{aligned} \quad (2.31)$$

que por sua vez

$$- \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\mu' \stackrel{(2.12)}{=} - \text{flux}_{\partial K} u.$$

Por outro lado, de (2.25) temos que  $\text{flux}_{\partial\Omega \setminus K} u = 0$ , então

$$\text{flux}_{\partial\Omega \setminus K} u = \text{flux}_{\partial\Omega} u - \text{flux}_{\partial K} u = 0 \Rightarrow \text{flux}_{\partial K} u = \text{flux}_{\partial\Omega} u.$$

**Proposição 2.5.1.** *Seja  $U \subset M$  aberto pré-compacto e  $x \in U$ . Então*

$$\inf_{\partial U} G(x, \cdot) \leq \frac{1}{\text{cap}(U)} \leq \sup_{\partial U} G(x, \cdot).$$

Além disso, se  $\Omega \subset M$  é pré-compacto com fronteira suave e  $\bar{U} \subset \Omega$ , então

$$\inf_{\partial U} G_{\Omega}(x, \cdot) \leq \frac{1}{\text{cap}(\bar{U}, \Omega)} \leq \sup_{\partial U} G_{\Omega}(x, \cdot).$$

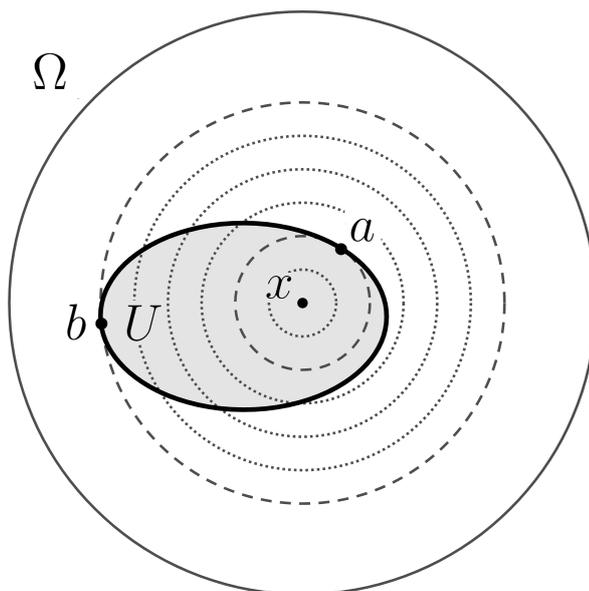
*Demonstração.* Seja  $\Omega$  limitado com fronteira suave e defina (Figura 2.5)

$$a = \max_{\partial U} G_{\Omega}(x, \cdot) \text{ e } b = \min_{\partial U} G_{\Omega}(x, \cdot).$$

Para cada  $c \in \mathbb{R}$ , denote

$$F_c = \{y \in \Omega; G_{\Omega}(x, y) \geq c\}.$$

Figura 2.5: Curvas de nível de  $\Omega$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

**Afirmção:**  $F_a \subset \bar{U} \subset F_b$ .

A prova da afirmação decorre do Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1).

- Como  $\overline{\Omega \setminus U}$  é compacto (pois é um conjunto limitado menos um aberto), temos que

$$\begin{aligned} \sup_{\partial(\Omega \setminus U)} G_\Omega(x, \cdot) &= \max\{\sup_{\partial\Omega} G_\Omega(x, \cdot), \sup_{\partial U} G_\Omega(x, \cdot)\} \\ &\stackrel{(2.17)}{=} \sup_{\partial U} G_\Omega(x, \cdot) = a. \end{aligned}$$

Então, pelo Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1), temos que  $G_\Omega(x, y) < a$ ,  $\forall y \in \Omega \setminus U$ , e, assim,

$$\text{int}(\Omega \setminus U) \subset F_a^C \Rightarrow F_a \subset \overline{U}.$$

- Como  $G_\Omega(x, \cdot)$  é superharmônica em  $\overline{U}$ , o Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1) é válido. Então

$$G_\Omega(x, y) \geq b, \forall y \in \overline{U} \Rightarrow \overline{U} \subset F_b.$$

Logo, está provada a afirmação e, portanto,

$$\text{cap}(F_a, \Omega) \geq \text{cap}(\overline{U}, \Omega) \geq \text{cap}(F_b, \Omega).$$

Defina  $u_c(y) := \frac{1}{c} G_\Omega(x, \cdot)$ . Observe que  $u_c$  satisfaz

- i)  $\Delta u_c = 0$ , em  $\Omega \setminus F_c$ , pois se  $x \in \text{int} F_c$ , então  $x \notin \Omega \setminus F_c$  e, assim,  $\Delta G_\Omega(x, \cdot) = 0$  em  $\Omega \setminus F_c$ .
- ii)  $u_c = 1$ , em  $\partial F_c$ , pois  $G_\Omega(x, \cdot) = c$  em  $\partial F_c$ .
- iii)  $u_c = 0$ , em  $\partial\Omega$ , pois  $G_\Omega(x, \cdot) = 0$  em  $\partial\Omega$ .

Logo,  $u_c$  é potencial de capacidade de  $(F_c, \Omega)$ .

Além disso, por (2.23), temos que  $\text{flux}_{\partial F_c} G_\Omega(x, \cdot) = -1$  e, assim,

$$\begin{aligned} \text{flux}_{\partial F_c} u_c &= \int_{\partial F_c} \frac{\partial}{\partial \eta} u_c(y) d\mu'(y) && [\eta \text{ é vetor normal exterior a } F_c] \\ &= \int_{\partial F_c} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{c} G_\Omega(x, \cdot) \right) d\mu'(y) \\ &= \frac{1}{c} \int_{\partial F_c} \frac{\partial}{\partial \eta} G_\Omega(x, \cdot) d\mu'(y) \\ &= \frac{1}{c} \text{flux}_{\partial F_c} G_\Omega(x, \cdot) = -\frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Por outro lado, de (2.30), temos que  $\text{cap}(F_c, \Omega) = -\text{flux}_{\partial F_c} u_c$ .

Portanto,  $\text{flux}_{\partial F_c} u_c = -\frac{1}{c} = -\text{cap}(F_c, \Omega)$  e, assim,

$$\begin{aligned} \text{cap}(F_a, \Omega) &\geq \text{cap}(\overline{U}, \Omega) \geq \text{cap}(F_b, \Omega) \\ \Rightarrow \frac{1}{a} &\geq \text{cap}(\overline{U}, \Omega) \geq \frac{1}{b} \\ \Rightarrow a &\leq \frac{1}{\text{cap}(\overline{U}, \Omega)} \leq b. \end{aligned}$$

Para provar o caso geral, é preciso tomar  $\{\mathcal{E}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma exaustão de  $\Omega$  por compactos. Como  $G_{\mathcal{E}_k}(x, y) \leq G_{\mathcal{E}_{k+1}}(x, y)$ ,  $\forall y \in \mathcal{E}_{k+1}$  e por (2.22), temos a desigualdade desejada.  $\square$

## 2.6 Conjuntos massivos

Nessa seção será apresentado o conceito de massividade de um conjunto e para isso serão dadas as definições de função superharmônica/subharmônica admissível. Considere  $\Omega \subset M$  aberto.

**Definição 2.6.1.** A função  $s : M \rightarrow [0, \infty)$  é uma *função superharmônica admissível para  $\Omega$*  se

- i)  $s$  é superharmônica;
- ii)  $s$  é limitada em  $M$ ;
- iii)  $s \equiv 1$  em  $M \setminus \Omega$ ;
- iv)  $\inf_{\Omega} s = 0$ .

$\Omega$  é dito *massivo* se existe  $s$  superharmônica admissível para  $\Omega$ . Observe que sempre é possível supor, sem perda de generalidade, que  $0 \leq s \leq 1$ . Caso contrário, basta tomar  $\min\{s, 1\}$ , e seguem valendo as mesmas propriedades de função superharmônica admissível.

De modo equivalente,  $\Omega$  é massivo se existe função subharmônica admissível, ou seja,

**Definição 2.6.2.** A função  $b : M \rightarrow [0, \infty)$  é uma *função subharmônica admissível para  $\Omega$*  se

- i)  $b$  é subharmônica;
- ii)  $b$  é limitada em  $M$ ;
- iii)  $b \equiv 0$  em  $M \setminus \Omega$ ;
- iv)  $\sup_{\Omega} b > 0$  (ou, sem perda de generalidade,  $\sup_{\Omega} b = 1$ ).

Ainda,  $\Omega$  é  $D$ -massivo se existe uma função  $s$  superharmônica (ou, equivalentemente, subharmônica) admissível com integral de Dirichlet finita, ou seja,

$$\int_M |\nabla s|^2 d\mu < \infty.$$

Portanto, se  $\Omega$  é  $D$ -massivo, ele é também massivo.

*Observação.* 1. Pelo Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1) nenhum subconjunto próprio aberto limitado de  $M$  pode ser massivo. De fato, pelo Teorema, uma função subharmônica  $b \equiv 0$  na fronteira de um conjunto compacto deve ser negativa no interior desse conjunto. No caso dos conjuntos massivos ocorre o contrário, uma função subharmônica  $b \equiv 0$  na fronteira de um conjunto deve ter parte positiva no interior desse conjunto.

2.  $M$  é massivo pois a função constante  $s \equiv 1$  é superharmônica admissível para  $M$ .

3.  $\emptyset$  nunca é massivo, pois não possui nenhuma função.

**Proposição 2.6.3.**  *$D$ -massividade (e, também, massividade) é preservada aumentando o conjunto ou retirando dele um compacto, nesse caso, desde que  $\Omega \subsetneq M$ .*

*Demonstração.* Seja  $\Omega \neq M$  massivo (o mesmo vale para  $D$ -massivo).

Se  $\Omega \subset \Omega'$ , então qualquer função superharmônica admissível para  $\Omega$  é também admissível para  $\Omega'$ . Logo, a massividade é preservado aumentando o conjunto.

Agora seja  $\Omega$  massivo e  $K \subset \Omega$  compacto. Mostraremos que  $\Omega \setminus K$  é massivo.

Tome  $s$  função superharmônica admissível para  $\Omega$  e, sem perda de generalidade, suponha  $0 \leq s \leq 1$ .

Note que  $s$  não é constante, pois por definição  $\inf_{\Omega} s = 0$  e  $s \equiv 1$  em  $M \setminus \Omega$  e, nesse caso,  $\Omega \subsetneq M$ .

Seja

$$c := \inf_K s = \min_K s < 1. \quad (2.32)$$

Como  $K$  é compacto, temos que  $c > 0$  pois, caso contrário,  $s$  teria ponto de mínimo interior em  $K$  e, pelo Princípio Forte do Máximo (Teorema 2.2.5),  $s$  seria constante.

Então

$$s|_K \geq \inf_K s = c \Rightarrow \frac{s}{c} \geq 1 \text{ em } K. \quad (2.33)$$

Defina  $\bar{s} : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\bar{s}(x) = \min \left\{ \frac{s}{c}, 1 \right\}.$$

É preciso verificar que  $\bar{s}$  é superharmônica admissível para  $\Omega \setminus K$ , ou seja, que valem os seguintes itens:

i)  $\bar{s}$  é superharmônica.

De fato, pois é o mínimo entre uma função superharmônica e 1.

ii)  $\bar{s}$  é limitada em  $M$ .

De fato, pois é o mínimo entre uma função limitada e 1.

iii)  $\bar{s} \equiv 1$  em  $M \setminus (\Omega \setminus K) = (M \setminus \Omega) \cup K$ .

Em  $K$ , como  $\frac{s}{c} \geq 1$  por (2.33), segue que  $\bar{s}(x) = \min \left\{ \frac{s}{c}, 1 \right\} = 1$ .

Em  $M \setminus \Omega$ , temos que  $s \equiv 1$ , pois é função superharmônica admissível. Como  $c < 1$  por (2.32), segue que  $\frac{s}{c} = \frac{1}{c} > 1$  em  $M \setminus \Omega$  e, assim,

$$\bar{s}(x) = \min \left\{ \frac{1}{c}, 1 \right\} = 1.$$

Então  $\bar{s} \equiv 1$  em  $(M \setminus \Omega) \cup K$ .

iv)  $\inf_{\Omega \setminus K} \bar{s} = 0$ .

Note que  $\inf_{\Omega} s = 0 \Rightarrow \inf_{\Omega} \frac{s}{c} = 0$ .

Como  $\frac{s}{c} \geq 1$  em  $K$ , segue que o ínfimo de  $\frac{s}{c}$  ocorre fora de  $K$ , ou seja,  $\inf_{\Omega \setminus K} \frac{s}{c} = 0$ .

Assim,  $\inf_{\Omega \setminus K} \bar{s} = \inf_{\Omega \setminus K} \left( \min \left\{ \frac{s}{c}, 1 \right\} \right) = \inf_{\Omega \setminus K} \frac{s}{c} = 0$ .

Logo,  $\bar{s}$  é função superharmônica admissível para  $\Omega \setminus K$  e então  $\Omega \setminus K$  é massivo. Portanto, a massividade é preservada quando retiramos um conjunto compacto de um conjunto massivo.  $\square$

## 2.7 Potencial superharmônico

Os conceitos apresentados na seção anterior permitem definir o potencial superharmônico ou subharmônico de um aberto de  $M$ . Para isso, seja  $\Omega \subset M$  aberto.

**Definição 2.7.1.** O *potencial superharmônico* de  $\Omega$  é a função  $s_{\Omega}$  definida como o ínfimo de toda as funções  $s : M \rightarrow \mathbb{R}$  superharmônicas admissíveis para  $\Omega$ , em que o ínfimo será constante 1 quando  $\Omega$  não for massivo. Ou seja,

$$\begin{cases} s_{\Omega} = \inf \{s(x); s \text{ é superharmônica admissível para } \Omega\}, & \text{se } \Omega \text{ é massivo,} \\ s_{\Omega} \equiv 1, & \text{se } \Omega \text{ não é massivo.} \end{cases}$$

**Definição 2.7.2.** O *potencial subharmônico* de  $\Omega$  é a função  $b_\Omega$  dada pelo supremo de todas as funções  $b : M \rightarrow \mathbb{R}$  subharmônicas admissíveis para  $\Omega$ , com  $b \leq 1$ , em que o supremo será constante 0 quando  $\Omega$  não for massivo. Ou seja,

$$\begin{cases} b_\Omega = \sup\{b(x); b \text{ é subharmônica admissível para } \Omega, b \leq 1\}, & \text{se } \Omega \text{ é massivo,} \\ b_\Omega \equiv 0, & \text{se } \Omega \text{ não é massivo.} \end{cases}$$

Note que a medida que  $\Omega$  expande,  $b_\Omega$  aumenta e  $s_\Omega$  diminui. Vale ainda que se  $\Omega$  é massivo, então  $b_\Omega \not\equiv 0$  e  $s_\Omega \not\equiv 1$ , pois nesse caso  $\Omega$  possui função superharmônica/subharmônica admissível.

**Proposição 2.7.3.** *Sejam  $b_\Omega$  potencial subharmônico e  $s_\Omega$  potencial superharmônico de  $\Omega$ , como definidos acima. Então  $b_\Omega + s_\Omega \equiv 1$  em  $M$ .*

*Demonstração.* Tome  $s_\Omega = 1 - b_\Omega$ . É necessário verificar que  $1 - b_\Omega$  é potencial superharmônico de  $\Omega$ , ou seja, é o ínfimo de todas as funções superharmônicas admissíveis para  $\Omega$ . Note que

- i)  $1 - b_\Omega$  é superharmônica, já que  $b_\Omega$  é subharmônica e, portanto,  $-b_\Omega$  é superharmônica.
- ii)  $1 - b_\Omega$  é limitada em  $M$ , pois  $b_\Omega$  é limitada em  $M$ .
- iii)  $1 - b_\Omega \equiv 1$  em  $M \setminus \Omega$ , pois  $b_\Omega \equiv 0$  em  $M \setminus \Omega$ .
- iv)  $\inf_\Omega s_\Omega = \inf_\Omega (1 - b_\Omega) = \inf_\Omega 1 + \inf_\Omega (-b_\Omega) = \inf_\Omega 1 - \sup_\Omega b_\Omega = 1 - 1 = 0$ .

Logo,  $s_\Omega = 1 - b_\Omega$  é superharmônica admissível para  $\Omega$ . Resta verificar que é a menor possível. Para isso, tome  $s$  superharmônica admissível qualquer para  $\Omega$ .

Note que se  $s$  é superharmônica admissível, então  $b = 1 - s$  é subharmônica admissível qualquer para  $\Omega$ . Como  $b_\Omega$  é a maior subharmônica admissível para  $\Omega$ , segue que  $b \leq b_\Omega$ . Logo,

$$-b_\Omega \leq -b \Rightarrow 1 - b_\Omega \leq 1 - b \Rightarrow s_\Omega \leq s$$

e, assim,  $s_\Omega = 1 - b_\Omega$  é a menor função superharmônica admissível para  $\Omega$ , ou seja, é o potencial superharmônico de  $\Omega$ .

Portanto,  $b_\Omega + s_\Omega \equiv 1$  em  $M$ . □

É possível construir as funções  $b_\Omega$  e  $s_\Omega$  pelo limite de soluções de certos problemas de Dirichlet numa exaustão de  $\Omega$ . Para isso, considere  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \dots$  uma exaustão de  $M$  por compactos, ou seja,  $M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_k$  e  $\partial \mathcal{E}_k$  suave,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , de modo que  $\partial \mathcal{E}_k$  e  $\partial \Omega$  se

interseccionam transversalmente. Considere o problema de Dirichlet em  $\Omega \cap \mathcal{E}_k$ :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega \cap \mathcal{E}_k, \\ u = 1, & \Omega \cap \partial \mathcal{E}_k, \\ u = 0, & \partial \Omega \cap \mathcal{E}_k. \end{cases} \quad (2.34)$$

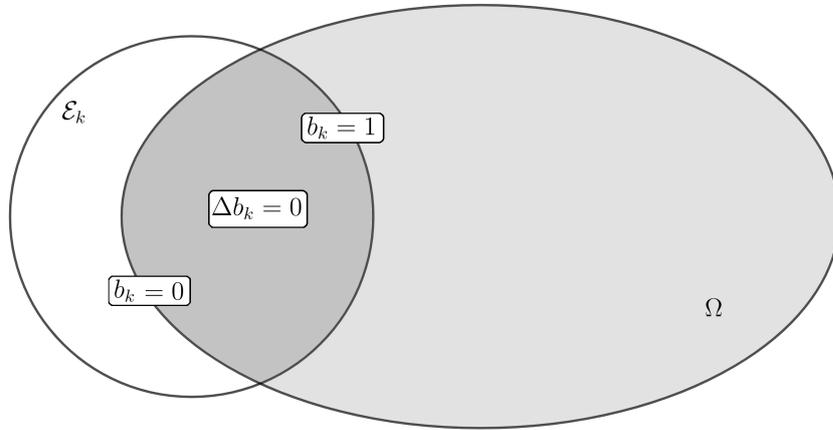
Embora o domínio não possua fronteira suave e o dado de fronteira não seja contínuo, a teoria de EDP garante que existe  $b_k$  solução do problema de Dirichlet (2.34). Para mais comentários sobre a existência de soluções, consulte GILBARG e TRUDINGER (1977) [7]. Portanto, usando uma exaustão por compactos, podemos construir a solução para  $\Omega$  conforme as proposições abaixo.

**Proposição 2.7.4.** *Se  $\partial \Omega \neq \emptyset$  e  $\partial \Omega$  é suave, então*

$$b_\Omega = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} b_k, & \text{em } \Omega, \\ 0, & \text{em } M \setminus \Omega, \end{cases}$$

em que  $b_k$  é a solução de (2.34).

Figura 2.6: Comportamento da função  $b_k$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

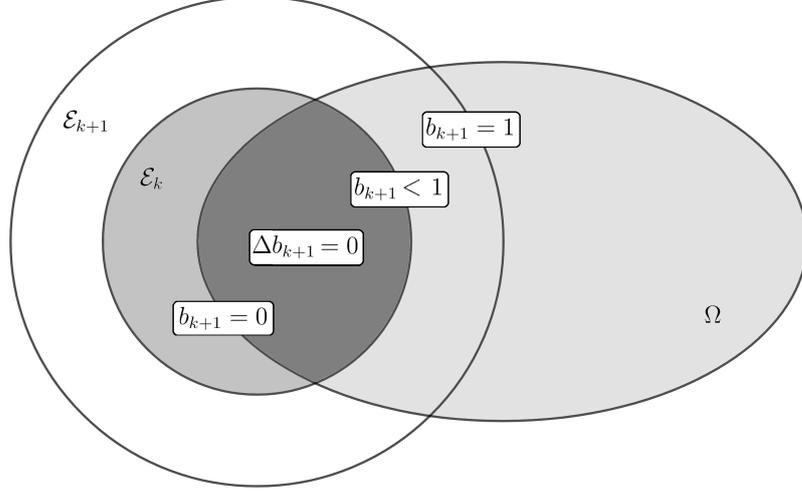
*Demonstração.* Como  $b_k$  é solução do problema (2.34), temos que cada  $b_k$  é harmônica em  $\mathcal{E}_k$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$  (Figura 2.6).

Em  $\Omega \cap \mathcal{E}_k$ , temos que  $b_{k+1} - b_k$  é uma função harmônica, pois é a diferença de duas funções harmônicas. Note que  $b_{k+1} - b_k \leq 0$  em  $\partial(\Omega \cap \mathcal{E}_k)$ , pois pelo problema de Dirichlet 2.34, temos que (Figura 2.7)

- $b_k = b_{k+1} = 0, \partial \Omega \cap \mathcal{E}_k$ .
- $b_k = 1, \Omega \cap \partial \mathcal{E}_k$ .

- $b_{k+1} \leq 1$ ,  $\Omega \cap \partial\mathcal{E}_k$ , pelo Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1).

Figura 2.7: Comportamento da função  $b_{k+1}$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

Então  $b_{k+1} - b_k \leq 0$  em  $\Omega \cap \mathcal{E}_k$  (pelo Princípio Fraco do Máximo) e, assim,  $\{b_k\}$  é uma sequência decrescente e limitada inferiormente ( $b_{k+1} \leq b_k$ ). Logo, está bem definida em  $M$  a função

$$b_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k. \quad (2.35)$$

Note que  $b_\infty$  é função harmônica em  $\Omega$ , pois o limite de funções harmônicas é harmônico. Em particular, é subharmônica,  $0 \leq b_\infty \leq 1$ . Além disso,  $b_\infty = 0$  em  $M \setminus \Omega$ , por construção.

**Afirmção:**  $b_\Omega = b_\infty$ , para  $b_\Omega$  potencial subharmônico de  $\Omega$  conforme Definição 2.7.2. Para mostrar isso, é suficiente mostrar que  $b_\infty$  é a maior subharmônica admissível para  $\Omega$ .

Considere  $b$  uma função subharmônica admissível qualquer para  $\Omega$ .

Note que  $b \leq b_k$  em  $\partial(\Omega \cap \mathcal{E}_k)$  e, assim,  $b \leq b_k$  em  $\Omega \cap \mathcal{E}_k$ , já que  $b_k$  é função subharmônica admissível para  $\mathcal{E}_k$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Ao tomar o limite de  $k \rightarrow \infty$ , temos que  $b \leq b_\infty$ .

Logo,  $b_\Omega = b_\infty$ .

□

**Proposição 2.7.5.** Quando  $\Omega \subsetneq M$  vale que

$$b_\Omega(x) = \sup\{b_{\Omega'}(x); \partial\Omega' \neq \emptyset, \partial\Omega' \text{ é suave e } \overline{\Omega'} \subset \Omega\}. \quad (2.36)$$

*Demonstração.* Note que para qualquer aberto  $\Omega'$  tal que  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ , temos que existe  $\Omega''$  aberto com fronteira suave tal que  $\Omega' \subset \Omega''$  e  $\overline{\Omega''} \subset \Omega$ , de modo que  $b_{\Omega'} \leq b_{\Omega''}$ , em que  $b_{\Omega''}$  é função subharmônica admissível para  $\Omega''$ .

Assim, é suficiente mostrar que (2.36) é válida sem a necessidade de exigir que  $\partial\Omega'$  seja suave, já que sempre é possível tomar um subconjunto com fronteira suave.

Seja  $b$  uma função subharmônica admissível qualquer para  $\Omega$ . Tome  $\varepsilon \in (0, \sup b)$  e considere o conjunto  $\Omega_\varepsilon := \{b > \varepsilon\}$ .

Note que  $(b - \varepsilon)_+$  é uma função subharmônica admissível para  $\Omega_\varepsilon$ , pois

- i)  $(b - \varepsilon)_+$  é subharmônica, já que  $b$  é subharmônica e  $\varepsilon$  é constante.
- ii)  $(b - \varepsilon)_+$  é limitada em  $\Omega_\varepsilon$ .
- iii)  $(b - \varepsilon)_+ \equiv 0$  em  $M \setminus \Omega_\varepsilon$ . De fato, note que  $b - \varepsilon < 0$  em  $M \setminus \Omega_\varepsilon$ , pois como  $b$  é subharmônica admissível para  $\Omega_\varepsilon$ , fora desse conjunto ela é constante 0 e, ao subtrair  $\varepsilon$  que é uma constante positiva, obtemos uma parcela negativa. Assim, ao tomar  $(b - \varepsilon)_+$ , segue que  $(b - \varepsilon)_+ \equiv 0$  em  $M \setminus \Omega_\varepsilon$ .
- iv)  $\sup_{\Omega_\varepsilon} (b - \varepsilon)_+ > 0$ , já que  $\sup_{\Omega_\varepsilon} b > 0$ , por  $b$  ser subharmônica admissível e  $\sup_{\Omega_\varepsilon} (-\varepsilon) = \inf_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon > 0$ , pois  $\varepsilon > 0$ .

Então  $(b - \varepsilon)_+ \leq b_{\Omega_\varepsilon}$ , já que  $b_{\Omega_\varepsilon}$  é potencial subharmônico de  $\Omega_\varepsilon$ .

Agora, ao tomar  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos que  $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega$  e, assim,

$$\sup\{b_{\Omega_\varepsilon}; \varepsilon > 0\} = b_\Omega.$$

Portanto,  $b_\Omega(x) = \sup\{b_{\Omega'}(x); \partial\Omega' \neq \emptyset, \partial\Omega' \text{ é suave e } \overline{\Omega'} \subset \Omega\}$ . □

## 2.8 Exterior de um compacto

Nessa seção serão dadas algumas caracterizações de um aberto  $\Omega \subset M$  que é exterior a um compacto  $F$  em  $M$ . Para isso, nos resultados a seguir, considere  $\Omega$  tal que  $\partial\Omega \neq \emptyset$  é suave,  $s_\Omega$  potencial superharmônico conforme Definição 2.7.1 e  $F := M \setminus \Omega$  compacto. Seja  $\{\mathcal{E}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma exaustão de  $M$  por compactos e tome  $s_k$  solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega \cap \mathcal{E}_k, \\ u = 1, & \partial\Omega \cap \mathcal{E}_k, \\ u = 0, & \partial\mathcal{E}_k \cap \Omega. \end{cases} \quad (2.37)$$

**Proposição 2.8.1.**  $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial s_\Omega}{\partial \nu} d\mu' = \text{cap}(F)$ , em que  $\nu$  é o vetor normal exterior a  $\partial\Omega$  e, portanto, interior a  $\partial F$ .

*Demonstração.* Para  $k \gg 0$ , temos que  $F \subset \mathcal{E}_k$  e então  $s_k$  é potencial de capacidade do capacitor  $(F, \mathcal{E}_k)$ , conforme (2.28). Além disso, observe que a fronteira de  $F$  coincide com a fronteira de  $\Omega$ , exceto pela orientação. Assim,

$$\text{cap}(F, \mathcal{E}_k) \stackrel{(2.31)}{=} - \int_{\partial F} \frac{\partial s_k}{\partial \eta} d\mu' = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial s_k}{\partial \nu} d\mu'.$$

em que  $\nu$  é vetor normal exterior a  $\mathcal{E}_k \setminus F$  e  $\eta$  é vetor normal exterior a  $F$  e interior a  $\mathcal{E}_k \setminus F$ , isto é,  $\eta = -\nu$ .

Note que pelo Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1),  $\{s_k\}$  é crescente e  $s_k \rightarrow s_\Omega$ . Pelas propriedades de função harmônica, temos que as derivadas de  $s_k$  convergem para as derivadas de  $s_\Omega$  localmente.

Por outro lado,  $\left\{ \frac{\partial s_k}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} \right\}$  é decrescente e, pelo Teorema da Convergência Monótona, podemos tomar o limite

$$\text{cap}(F) \stackrel{(2.27)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \text{cap}(F, \mathcal{E}_k) \stackrel{(2.31)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega} \frac{\partial s_k}{\partial \nu} d\mu' = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial s_\Omega}{\partial \nu} d\mu'.$$

□

**Proposição 2.8.2.**  $\int_M |\nabla s_\Omega|^2 d\mu = \text{cap}(F)$ .

*Demonstração.* Para mostrar essa Proposição é utilizado o Lema de Fatou, que é um resultado de Teoria da Medida e pode ser consultado em BARTLE (1995) [2].

Assim, por um lado, note que

$$\int_M |\nabla s_\Omega|^2 d\mu = \int_M \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla s_k|^2 d\mu \stackrel{\text{Lema de Fatou}}{\leq} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |\nabla s_k|^2 d\mu$$

e que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |\nabla s_k|^2 d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{cap}(F, \mathcal{E}_k) \stackrel{(2.27)}{=} \text{cap}(F).$$

Logo,

$$\int_M |\nabla s_\Omega|^2 d\mu \leq \text{cap}(F). \quad (2.38)$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} |\nabla(s_\Omega - s_k)|^2 d\mu &= \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} |\nabla s_\Omega|^2 d\mu - 2 \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} \langle \nabla s_\Omega, \nabla s_k \rangle d\mu + \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} |\nabla s_k|^2 d\mu \\ &\stackrel{(2.31)}{=} \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} |\nabla s_\Omega|^2 d\mu - 2 \underbrace{\int_{\mathcal{E}_k \setminus F} \langle \nabla s_\Omega, \nabla s_k \rangle d\mu}_{\star} + \text{cap}(F, \mathcal{E}_k). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Em  $\star$  temos que

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{E}_k \setminus F} \langle \nabla s_\Omega, \nabla s_k \rangle d\mu &\stackrel{(2.9)}{=} \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} s_k \Delta s_\Omega d\mu - \int_{\partial(\mathcal{E}_k \setminus F)} s_k \frac{\partial s_\Omega}{\partial \nu} d\mu' \\
&\stackrel{\Delta s_\Omega = 0}{=} 0 - \left( \int_{\partial \mathcal{E}_k} s_k \frac{\partial s_\Omega}{\partial \nu} d\mu' + \int_{\partial F} s_k \frac{\partial s_\Omega}{\partial \nu} d\mu' \right) \\
&\stackrel{(2.37)}{=} 0 - \int_{\partial F} 1 \cdot \frac{\partial s_\Omega}{\partial \nu} \\
&\stackrel{(2.31)}{=} -\text{cap}(F). \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (2.40) em (2.39), segue que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} |\nabla s_\Omega|^2 d\mu - 2 \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} \nabla s_\Omega \nabla s_k d\mu + \text{cap}(F, \mathcal{E}_k) \\
&\stackrel{(2.40)}{\Rightarrow} 0 \leq \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} |\nabla s_\Omega|^2 d\mu - 2 \cdot \text{cap}(F) + \text{cap}(F, \mathcal{E}_k) \\
&\Rightarrow 2 \cdot \text{cap}(F) - \text{cap}(F, \mathcal{E}_k) \leq \int_{\mathcal{E}_k \setminus F} |\nabla s_\Omega|^2 d\mu \\
&\stackrel{k \rightarrow \infty}{\Rightarrow} 2 \cdot \text{cap}(F) - \text{cap}(F) \leq \int_{M \setminus F} |\nabla s_\Omega|^2 d\mu \\
&\Rightarrow \text{cap}(F) \leq \int_M |\nabla s_\Omega|^2 d\mu. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Logo, por (2.38) e (2.41), segue que

$$\text{cap}(F) = \int_M |\nabla s_\Omega|^2 d\mu.$$

□

**Corolário 2.8.3.** *Vale que*

1.  $\Omega$  é massivo se, e somente se,  $\Omega$  é  $D$ -massivo.
2.  $\Omega$  é massivo se, e somente se,  $\text{cap}(F) > 0$ .

*Demonstração.* 1. ( $\Rightarrow$ ) Se  $\Omega$  é massivo, pela Proposição 2.8.2 temos que

$$\int_M |\nabla s_\Omega|^2 d\mu = \text{cap}(F) < \infty,$$

pois a capacidade de um compacto é sempre finita.

Logo, por definição de  $D$ -massividade, temos que  $\Omega$  é  $D$ -massivo.

( $\Leftarrow$ ) Se  $\Omega$  é  $D$ -massivo, por definição existe uma função  $s$  superharmônica (ou, equivalentemente, subharmônica) admissível com integral de Dirichlet finita. Portanto, por existir tal função,  $\Omega$  é massivo.

2. Por definição,  $\Omega$  é massivo se, e somente se,  $s_\Omega \neq 1$ . Da Proposição 2.8.2, temos que

$$\text{cap}(F) = \int_M |\nabla s_\Omega|^2 d\mu > 0,$$

pois  $s_\Omega$  não é constante. Logo,  $\text{cap}(F) > 0$ .

□

# Capítulo 3

## Um pouco sobre o núcleo do calor e o movimento Browniano em variedades riemannianas

### 3.1 O núcleo do calor em variedades riemannianas

O núcleo do calor refere-se a distribuição do calor em um espaço ao longo do tempo. Assim, dada uma variedade riemanniana  $M$ , defina o *núcleo do calor* como sendo a função  $p(t, x, y)$  definida em  $(0, \infty) \times M \times M$  que satisfaz a equação do calor nas variáveis  $(t, y)$ , com  $x$  fixo,

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta p = 0 \quad (3.1)$$

e possui condição inicial

$$p(t, x, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta_x, \quad (3.2)$$

em que  $\delta_x$  é a função delta de Dirac.

*Observação.* Uma função definida em  $(0, \infty) \times M \times M$  satisfazendo 3.1 e 3.2 é *solução fundamental* da equação do calor em  $M$ .

*Observação.* Conforme GRIGOR'YAN (1999) [8] é possível expressar a função de Green através do núcleo do calor, que fica definida por

$$\begin{aligned} G : M \times M &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ (x, y) &\mapsto G(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty p(t, x, y) dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

O núcleo do calor possui as seguintes propriedades, para todo  $x, y \in M$  e  $t > 0$ :

1. Será a menor entre todas as soluções fundamentais positivas da equação do calor

em  $M$ , ou seja,  $p(t, x, y) \geq 0$ .

2. É simétrico nas variáveis  $x$  e  $y$ :

$$p(t, x, y) = p(t, y, x).$$

3. Sua integral em  $M$  satisfaz

$$\int_M p(t, x, y) d\mu(y) \leq 1.$$

4. Possui propriedade de semigrupo:

$$p(t, x, y) = \int_M p(s, x, z) p(t - s, z, y) d\mu(z). \quad (3.4)$$

Uma forma de construir o núcleo do calor em uma variedade riemanniana é considerar o limite de uma exaustão compacta em  $M$ , ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{\mathcal{E}_k}(t, x, y) = p(t, x, y),$$

em que  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \dots$  é uma exaustão de  $M$  por compactos.

## 3.2 Relação do núcleo do calor com o movimento Browniano

Na teoria de Probabilidade, o núcleo do calor da origem a probabilidade de transição

$$P_t(x, \Omega) := \int_{\Omega} p(t, x, y) d\mu(y),$$

que mede a probabilidade do movimento Browniano começar no ponto  $x$  e estar em um conjunto  $\Omega \subset M$  no tempo  $t > 0$ . Assim, através do núcleo do calor é possível construir o movimento Browniano em variedades riemannianas, embora não seja um procedimento trivial.

A propriedade de semigrupo do núcleo do calor, definida na seção anterior por (3.4), pode ser reescrita em termos de Probabilidade. Para isso, seja o operador  $P_t$  agindo sobre funções  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$P_t f(x) = \int_M p(t, x, y) f(y) d\mu(y).$$

Então, para todo  $x, y, z \in M$  e  $s, t > 0$ ,

$$\begin{aligned}
P_t f(x) &= \int_M p(t, x, y) f(y) d\mu(y) \\
&\stackrel{(3.4)}{=} \int_M \int_M p(s, x, z) p(t-s, z, y) d\mu(z) f(y) d\mu(y) \\
&= \int_M p(s, x, z) \int_M p(t-s, z, y) f(y) d\mu(y) d\mu(z) \\
&= \int_M p(s, x, z) P_{t-s} f(z) d\mu(z) \\
&= P_s(P_{t-s} f)(x).
\end{aligned}$$

O potencial superharmônico/subharmônico também pode ser visto em termos de Probabilidade. Considerando  $\Omega \subset M$  aberto tal que  $\partial\Omega \neq \emptyset$  é suave e  $F = M \setminus \Omega$  compacto, podemos mostrar que o potencial superharmônico de  $\Omega$  é dado por

$$e_F := \mathbb{P}_x\{\exists t \geq 0; X_t \in F\},$$

em que  $X_t$  é movimento Browniano. Ou seja, é a probabilidade de  $X_t$ , partindo de  $x$ , encontrar o conjunto  $F$  pelo menos uma vez. Por conta disso, o potencial subharmônico de  $\Omega$  é a probabilidade do movimento Browniano  $X_t$ , partindo de  $x$ , nunca encontrar  $F$ .

Observe que isso faz sentido pois quanto mais próximo de  $\partial\Omega$ , maior a chance do movimento Browniano  $X_t$  sair do conjunto e, quanto mais longe de  $\partial\Omega$ , menor a chance de  $X_t$  sair do conjunto.

De modo semelhante, podemos definir

$$h_F := \mathbb{P}_x\{\exists\{t_k\}; t_k \rightarrow \infty, X_{t_k} \in F, \forall k \in \mathbb{N}\},$$

que é a probabilidade do movimento Browniano  $X_t$ , partindo de  $x$ , encontrar o conjunto  $F$  infinitas vezes. Também é possível mostrar que

$$h_F = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t s_\Omega(x).$$

Esses resultados aparecem nas equivalências do Teorema 4.1.2, cujas demonstrações iremos ocultar, mas que podem ser consultadas em GRIGOR'YAN (1999) [8].

### 3.3 Mais comentários sobre o núcleo do calor

Nessa seção iremos apresentar um exemplo que envolve o núcleo do calor em  $\mathbb{R}^n$  e uma aplicação do núcleo do calor nas variedades riemannianas.

*Exemplo.* O núcleo do calor  $p : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \quad (3.5)$$

é de fato solução fundamental da equação no calor em  $\mathbb{R}^n$ .

Precisamos verificar que  $p(t, x, y)$  dado em (3.5) satisfaz (3.1) e (3.2). Para isso, primeiro precisamos verificar que  $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta p$ . Por um lado, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{-\frac{n}{2}(2\pi t)^{\frac{n}{2}-1}(2\pi)}{(2\pi t)^n} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) + \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{|x - y|^2 \cdot 2}{(2t)^2} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \\ &= -\frac{n\pi}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}+1}} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) + \frac{|x - y|^2}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}} \cdot 2t^2} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \\ &= -\frac{n\pi}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}(2\pi t)} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) + \frac{|x - y|^2}{2t^2} \cdot \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \\ &= -\frac{n}{2t} \cdot \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{|x - y|^2}{t^2} \cdot \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \\ &= -\frac{n}{2t} \cdot p(t, x, y) + \frac{1}{2} \cdot \frac{|x - y|^2}{t^2} \cdot p(t, x, y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por outro lado, como  $x$  está fixado, será calculado o laplaciano da função  $p$  na variável  $y$ , ou seja,  $\Delta_y p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p}{\partial y_i^2}$ . Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y_i} &= \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{-2 \sum_{i=1}^n (x - y_i)}{2t} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \\ &= \frac{-\sum_{i=1}^n (x - y_i)}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}} t} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \\ &= \frac{-\sum_{i=1}^n (x - y_i)}{t} \cdot p(t, x, y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= -\frac{t \cdot p(t, x, y)}{t^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x - y_i)}{t} \cdot \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial y} \\
&= -\frac{p(t, x, y)}{t} + \left( \frac{\sum_{i=1}^n (x - y_i)}{t} \right)^2 \cdot p(t, x, y) \\
&= -\frac{p(t, x, y)}{t} + \left( \frac{|x - y|}{t} \right)^2 \cdot p(t, x, y).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Delta_y p &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \stackrel{(3.7)}{=} \sum_{i=1}^n \left( -\frac{p(t, x, y)}{t} + \left( \frac{|x - y_i|}{t} \right)^2 \cdot p(t, x, y) \right) \\
\Rightarrow \Delta_y p &= -\frac{n}{t} \cdot p(t, x, y) + \left( \frac{|x - y|}{t} \right)^2 \cdot p(t, x, y) \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \Delta_y p &= -\frac{n}{2t} \cdot p(t, x, y) + \frac{1}{2} \cdot \frac{|x - y|^2}{t^2} \cdot p(t, x, y).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Como (3.6)=(3.8), segue que  $p(t, x, y)$  é solução da equação do calor, ou seja, satisfaz (3.1).

Agora, resta verificar que  $p(t, x, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta_x$ , ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} p(t, x, y) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

Usando a substituição  $u = \frac{y - x}{\sqrt{2t}}$ , temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} p(t, x, y) \varphi(y) dy &\stackrel{(3.5)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \varphi(y) dy \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-u^2) \varphi(u\sqrt{2t} + x) (2t)^{\frac{n}{2}} du \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-u^2) \varphi(u\sqrt{2t} + x) du \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-u^2) \varphi(x) du \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \varphi(x) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

Logo,  $p(t, x, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta_x$  e satisfaz (3.2).

Portanto,  $p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right)$  é solução fundamental da equação no

calor em  $\mathbb{R}^n$ .

Uma aplicação do núcleo do calor é resolver o problema de Cauchy, o que será mostrado na seguinte proposição:

**Proposição 3.3.1.** *Seja  $p(t, x, y)$  o núcleo do calor em  $M$  e  $f \in C_c^\infty(M)$ . A função  $u : M \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$u(x, t) = \int_M p(t, x, y) f(y) d\mu(y) \quad (3.9)$$

é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{1}{2} \Delta u(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (3.10)$$

em  $M \times (0, \infty)$ .

Além disso, se  $f \geq 0$ , então  $u(x, t)$  é a menor solução não negativa do problema de Cauchy.

*Demonstração.* Seja  $g$  o determinante da matriz  $g_{ij}$  que dá a métrica em  $M$  e  $\partial_{x_i}$  campos coordenados, conforme definições do Capítulo 1.

Note que

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{x_i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \partial_{x_j} \left( \int_M p(t, x, y) f(y) d\mu(y) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{x_i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \int_M \partial_{x_j} (p(t, x, y)) f(y) d\mu(y) \right) \\ &= \int_M \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{x_i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \partial_{x_j} (p(t, x, y)) \right) f(y) d\mu(y). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_M f(y) p(t, x, y) d\mu(y) \\ &= \int_M f(y) \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} d\mu(y) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} \int_M f(y) \frac{1}{2} \Delta p(t, x, y) d\mu(y) \\ &\stackrel{1.3.6}{=} \frac{1}{2} \int_M \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{x_i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \partial_{x_j} (p(t, x, y)) \right) f(y) d\mu(y) \\ &\stackrel{(3.11)}{=} \frac{1}{2} \Delta u. \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta u = 0$  e, assim, resta verificar que  $u(x, 0) = f(x)$ .

Note que  $u$  não está definida em  $t = 0$ , então temos que analisar o limite  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t)$ .

Por (3.2), temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(t, x, y) = \delta_x = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases} \quad (3.12)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M p(t, x, y) f(y) d\mu(y) \\ &= \int_M \lim_{t \rightarrow 0} (p(t, x, y)) f(y) d\mu(y) \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \int_M \delta_x(y) f(y) d\mu(y) = f(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $u$  é solução do problema de Cauchy (3.10). □

Mais detalhes sobre o núcleo do calor em variedades riemannianas podem ser consultados em LI (2012) [9].

# Capítulo 4

## Não parabolicidade de variedades riemannianas

Nesse capítulo será enunciado e provado o Teorema 4.1.2, que é objetivo central desse trabalho. O Teorema foi retirado de GRIGOR'YAN (1999) [8] e apresenta algumas condições que classificam uma variedade riemanniana em não parabólica.

### 4.1 Condições para não parabolicidade

A definição mais conhecida de parabolicidade é:

**Definição 4.1.1.**  $M$  é dita *parabólica* se não existe superharmônica positiva (equivalentemente, limitada) não constante. Caso contrário,  $M$  é dita *não parabólica*.

Como a demonstração das implicações não ocorrem de forma sequencial, optamos por organizar os itens do teorema conforme o conteúdo de cada um deles foi apresentado ao longo do texto. Ou seja, no Capítulo 2 falamos sobre funções superharmônicas, função de Green, capacidade e massividade de um conjunto, que aparecem nos itens 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, enquanto o item 6 trata sobre núcleo do calor, que foi abordado no Capítulo 3.

**Teorema 4.1.2.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana.  $M$  é não parabólica se valerem as seguintes equivalências:*

1. *Existe uma função superharmônica positiva não constante em  $M$  (equivalentemente, existe função superharmônica limitada não constante em  $M$ ).*
2. *A função de Green  $G(x, y)$  de  $M$  é finita para algum/para todo  $x \neq y$ .*
3. *A capacidade de algum compacto/de todo aberto pré-compacto é positiva.*
4. *Existe um subconjunto próprio massivo  $\Omega$  em  $M$ .*

5. O exterior de qualquer compacto é  $D$ -massivo.

6. Para algum/para todo  $x \in M$ , vale que

$$\int_1^\infty p(t, x, x) dt < \infty.$$

7. Existe uma solução limitada não nula em  $M$  para a equação

$$\Delta u - q(x)u = 0,$$

para alguma/para toda  $q \in C_0^\infty(M)$ , que é não negativa e não identicamente nula.

8. Se  $M$  é superfície de Riemann simplesmente conexa, então  $M$  não ser parabólica equivale a  $M$  ser do tipo conforme hiperbólico, isto é,  $M$  é conformemente equivalente a  $\mathbb{H}^2$ .

9. (a) O movimento Browniano em  $M$  é transiente, isto é, para algum  $U$  aberto e para algum  $x \in M$ , o processo  $X_t$  eventualmente deixa  $U$  com probabilidade positiva

$$\mathbb{P}_x\{\exists T; \forall t > T, X_t \notin U\} > 0.$$

(b) Para todo  $U \subset M$  pré-compacto e todo  $x \in M$ , o processo  $X_t$  eventualmente deixa  $U$  com probabilidade 1, isto é,

$$\mathbb{P}_x\{\exists T; \forall t > T, X_t \notin U\} = 1.$$

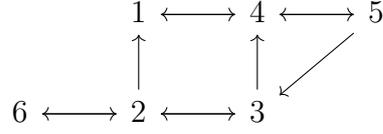
10.  $M$  não satisfaz o princípio da comparação exterior, ou seja, existem  $K \subset M$  compacto e  $u : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica limitada tal que  $u \equiv 0$  em  $\partial K$  e  $u$  assume valores positivos e negativos em  $M \setminus K$ .

*Observação.* Omitiremos as demonstrações das equivalências envolvendo os itens 7, 8, 9 e 10, por não se enquadrarem no assunto da dissertação. Note que isso não interfere na demonstração das demais equivalências do teorema e, por conta disso, podemos ocultar as suas provas. As provas de 7, 8 e 9 que podem ser encontradas em GRIGOR'YAN (1999) [8], enquanto mais comentários sobre o item 10 podem ser consultados em AIOLFI et al (2021) [1].

O item 9 trata de conceitos de Probabilidade. Na teoria de Probabilidade, podemos tratar a parabolicidade de uma variedade riemanniana através da recorrência do movimento Browniano.

Observe ainda que nem todas as implicações que serão mostradas são necessárias, mas optamos por demonstrá-las mesmo assim para que possam ser provadas de forma independente das demais equivalências do teorema.

*Demonstração Teorema 4.1.2.* Serão provadas as seguintes implicações:



1)  $\Rightarrow$  4) Seja  $s > 0$  superharmônica limitada não constante. Tome

$$\inf_M s < c < \sup_M s, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Então  $\{s < c\} =: \Omega$  é subconjunto próprio de  $M$  e a função  $(c - s)_+ := \max\{c - s, 0\}$  é subharmônica positiva em  $\Omega$ . Além disso, é igual a zero fora de  $\Omega$  e é limitada.

Logo,  $(c - s)_+$  é subharmônica admissível para  $\Omega$  e, portanto,  $\Omega$  é massivo.

4)  $\Rightarrow$  1) Seja  $\Omega \subsetneq M$  massivo. Note que aumentando  $\Omega$ , se necessário, podemos supor que  $\partial\Omega$  é suave e  $\bar{\Omega} \subset M$ . Então, como  $\Omega$  é massivo, possui potencial superharmônico  $s_\Omega$ , que é uma função superharmônica limitada e não constante, pois  $\Omega$  é próprio.

2)  $\Rightarrow$  1) Seja  $(x_0, y_0)$  tal que  $G(x_0, y_0) < \infty$  e tome  $c > G(x_0, y_0)$ . Em particular,  $c > 0$ . Defina a função  $s(y) := \min\{G(x, y), c\}$ , que está definida em toda  $M$  e não é constante.

Então,  $s$  é superharmônica limitada positiva não constante.

2)  $\Leftrightarrow$  3) Pela Proposição 2.5.1 temos que se  $U \subset M$  é aberto pré-compacto e  $x \in U$ , então

$$\inf_{\partial U} G(x, \cdot) \leq \frac{1}{\text{cap}(U)} \leq \sup_{\partial U} G(x, \cdot).$$

Assim, a finitude de  $G$  é equivalente a capacidade do pré-compacto  $U$  ser positiva, ou seja,  $\text{cap}(U) > 0$ .

2)  $\Rightarrow$  6) Por (3.3), temos que

$$G(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty p(t, x, y) dt.$$

Como por hipótese  $G(x, y) < \infty$ , para todo  $x \neq y$ , temos que

$$\int_0^\infty p(t, x, y) dt < \infty \Rightarrow \int_T^\infty p(t, x, y) dt < \infty \Rightarrow \int_T^\infty p(t, x, x) dt < \infty$$

Note que a última implicação decorre da desigualdade de Harnack local para o núcleo do calor (ver LI (2012) [9]), que garante que existe  $T > 0$  tal que  $\forall x, y, x', y' \in M$

vale que

$$\frac{p(t, x, y)}{p(t, x', y')} < c \in \mathbb{R}, \forall t \in [T, \infty), \quad (4.1)$$

ou seja,  $p(t, x, x) < p(t, x, y)$ .

Então,

$$\int_1^\infty p(t, x, x) dt = \int_1^T p(t, x, x) dt + \int_T^\infty p(t, x, x) dt < \infty,$$

e, portanto,  $\int_1^\infty p(t, x, x) dt < \infty$ .

6)  $\Rightarrow$  2) Note que por hipótese e pela desigualdade de Harnack, temos que

$$\int_1^\infty p(t, x, x) dt < \infty \stackrel{(4.1)}{\Rightarrow} \int_T^\infty p(t, x, y) dt < \infty, \forall x \neq y.$$

Então,

$$\int_0^\infty p(t, x, y) dt = \int_0^T p(t, x, y) dt + \int_T^\infty p(t, x, y) dt < \infty.$$

Logo,  $\int_0^\infty p(t, x, y) dt < \infty$  e, portanto,

$$G(x, y) \stackrel{(3.3)}{=} \frac{1}{2} \int_0^\infty p(t, x, y) dt < \infty.$$

3)  $\Rightarrow$  4) Seja  $U$  aberto pré-compacto com  $\text{cap}(U) > 0$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $U$  tem fronteira suave e defina  $\Omega := M \setminus \bar{U}$ . Pelo Corolário 2.8.3, temos que  $\Omega$  é massivo.

4)  $\Rightarrow$  5) Note que basta verificar que o exterior de um compacto é massivo.

Seja  $\Omega \subset M$  subconjunto próprio massivo e  $K \subset M$  compacto.

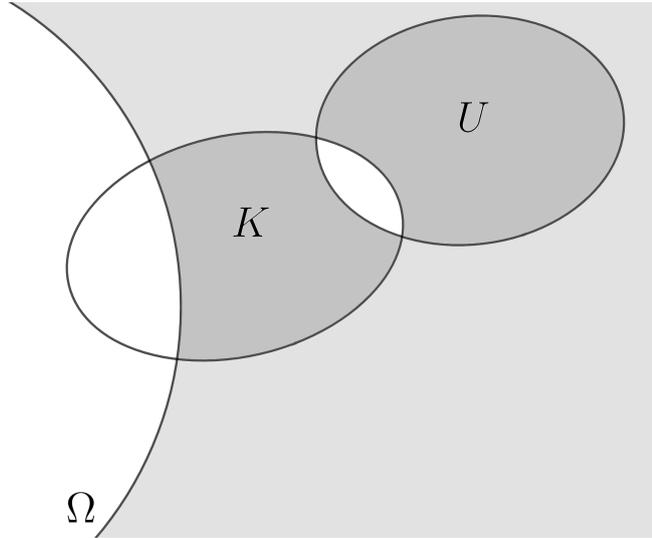
Caso  $K \cap \Omega = \emptyset$ , então  $\Omega \subset M \setminus K$ . Como  $\Omega$  é massivo, segue que  $M \setminus K$  é massivo, pois a massividade é preservada aumentando o conjunto.

Caso  $K \cap \Omega \neq \emptyset$ , tome  $U \subset M$  aberto pré-compacto tal que  $U \cap \Omega = \emptyset$  (Figura 4.1). Note que o exterior de  $U$  é massivo pelo que foi mostrado acima.

Como  $M \setminus K$  e  $M \setminus U$  diferem por um compacto, temos que um é massivo se, e somente se, o outro é massivo, pois pela Proposição 2.6.3, a massividade é preservada ao remover um conjunto compacto.

Logo,  $M \setminus K$  é massivo em ambos os casos.

Figura 4.1: Diagrama dos conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

5)  $\Rightarrow$  4) Por hipótese, o exterior de qualquer compacto é  $D$ -massivo. Como pelo item (i) do Corolário 2.8.3 temos que  $D$ -massividade implica em massividade, segue que existe um subconjunto próprio massivo  $\Omega \subsetneq M$ .

5)  $\Rightarrow$  3) Segue do item (ii) do Corolário 2.8.3.

□

## 4.2 Corolários do Teorema 4.1.2

**Corolário 4.2.1.** *Seja  $\emptyset \neq U \subset M$  aberto pré compacto. São equivalentes:*

1.  $M$  é não parabólica.
2.  $\Omega := M \setminus \bar{U}$  é massivo.
3.  $\text{cap}(U) > 0$ .

*Demonstração.* Note que essas equivalências correspondem aos itens (3), (4) e (5) do Teorema 4.1.2. □

**Corolário 4.2.2.** *Seja  $K$  compacto. Se existe  $s : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  superharmônica tal que  $s(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ , para  $x \in M \setminus K$ , ou seja,  $d(x, p) \rightarrow \infty$  para algum ponto fixo  $p \in M \setminus K$ , então  $M$  é parabólica.*

*Demonstração.* Aumentando  $K$ , se necessário, suponha que  $\partial K$  é suave e defina  $\Omega := M \setminus K$ . Suponha ainda que  $s \geq 0$  em  $\Omega$ .

Ao tomar  $\{\mathcal{E}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  exaustão por compactos de  $\Omega$ , considere  $\{b_k\}$  sequência de soluções do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta b_k = 0, & \mathcal{E}_k \setminus K, \\ b_k = 0, & \partial K, \\ b_k = 1, & \partial \mathcal{E}_k. \end{cases} \quad (4.2)$$

Como pelo Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1)  $\{b_k\}$  é decrescente, temos que  $b_k \rightarrow b_\Omega$  quando  $k \rightarrow \infty$ , em que  $b_\Omega$  é potencial subharmônico de  $\Omega$ , conforme Definição 2.7.2.

Fixe  $c > 0$ . Seja  $k \gg 0$  tal que  $s \geq c \geq 1$  em  $M \setminus \mathcal{E}_k$ . Note que

$$\inf_{\partial \mathcal{E}_k} b_k = 1 \leq \inf_{\partial \mathcal{E}_k} \frac{s}{c} \Rightarrow b_k \leq \frac{s}{c},$$

pelo Princípio Fraco do Máximo (Teorema 2.2.1).

Ao tomar  $k \rightarrow \infty$ , temos que

$$b_\Omega \leq \frac{s}{c}.$$

Como  $c$  é arbitrário (ou seja, podemos tomá-lo tão grande quanto quisermos), segue que

$$b_\Omega \equiv 0.$$

Logo, como  $b_\Omega \equiv 0$ , temos pela Definição 2.7.2 que  $\Omega$ , que é o exterior de um compacto, é não massivo. Portanto, de modo semelhante ao item 5 do Teorema 4.1.2,  $M$  é parabólica.  $\square$

# Capítulo 5

## Aplicação da teoria do potencial

Um exemplo onde usamos a teoria do potencial para classificar as variedades riemannianas em parabólicas e não parabólicas são as *variedades rotacionalmente simétricas*. Nesse capítulo, será definida uma variedade rotacionalmente simétrica e apresentados alguns resultados que classificam as variedades quanto a sua parabolicidade de acordo com sua curvatura.

### 5.1 Variedades rotacionalmente simétricas

As variedades rotacionalmente simétricas também são conhecidas como variedades modelo, pois possuem uma métrica simples e servem de modelo de comparação.

Considere o ponto  $o \in M$  como sendo a origem da variedade  $M$  e seja  $\text{Cut}(o)$  o cut locus de  $o$ . Ao tomar  $\text{Cut}^*(o) := \text{Cut}(o) \cup \{o\}$ , definimos as coordenadas polares de  $M$  com polo  $o$  por  $(\rho, \theta)$ , em que  $\rho := d(x, o) : M \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}$  é o raio polar e  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$  é o ângulo polar, com  $x \in M \setminus \text{Cut}^*(o)$ , de modo que as geodésicas minimizantes partem de  $o$  na direção  $\theta \in T_oM$ .

Com isso, é possível definir uma *variedade modelo* ou *variedade rotacionalmente simétrica* se a métrica riemanniana na esfera geodésica  $S_\rho := \partial B(o, \rho) \setminus \text{Cut}(o)$  é dada por

$$\sigma^2(\rho)d\theta^2, \quad (5.1)$$

em que  $\sigma(\rho)$  é uma função suave positiva em  $\rho$  e  $d\theta^2$  é a métrica euclidiana em  $\mathbb{S}^{n-1}$ . É necessário que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma(\rho) = 0 \text{ e } \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma'(\rho) = 1, \quad (5.2)$$

para assim denotar  $M_\sigma = (0, R_0) \times \mathbb{S}^{n-1}$  como o cone com a origem adicionada.

Desta forma, a métrica de toda esfera geodésica  $\partial B(o, r)$  em  $M_\sigma$  pode ser obtida multiplicando um fator  $\sigma(r)$  pela métrica euclidiana de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Se  $\omega_n$  é a área da esfera

unitária em  $\mathbb{R}^n$ , temos que o elemento de área da esfera geodésica  $\partial B(o, r)$  é

$$S(r) = \omega_n \sigma(r)^{n-1}, \quad (5.3)$$

e o volume da bola  $B(o, r)$  é

$$V(r) = \int_0^r S(\xi) d\xi = \omega_n \int_0^r \sigma(\xi)^{n-1} d\xi. \quad (5.4)$$

Uma variedade  $M$  é dita *variedade com polo* se possuir um ponto  $o$  tal que  $\text{Cut}(o)$  é vazio.

Nas proposições a seguir, considere  $M_\sigma$  variedade rotacionalmente simétrica e denote por  $S : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a função que dá a área da esfera geodésica  $\partial B(o, r)$ .

**Proposição 5.1.1.** *A função  $\rho = d(x, o) : M \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}$ , que dá a distância até o polo  $o$ , satisfaz*

$$\Delta \rho(x) = \frac{S'(\rho(x))}{S(\rho(x))}. \quad (5.5)$$

*Demonstração.* Como  $\rho$  é função distância, temos que  $\Delta \rho = \text{div}(\nabla \rho) = \text{div}(\partial \rho)$ .

Note que o campo de vetores  $\nabla \rho$  da variedade  $M_\sigma$  é dado por

$$\nabla \rho = 1 \cdot \partial_\rho + 0 \cdot \partial_{\theta_1} + \cdots + 0 \cdot \partial_{\theta_{n-1}} = \partial_\rho.$$

Observe também que  $g = \sigma(\rho)^{2(n-1)} \cdot f(\theta)$ , em que  $g$  é o determinante da matriz da métrica e  $f$  é uma função que depende de  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ .

Então, pela Definição 1.11, temos que

$$\begin{aligned} (\text{div } X)(p) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \partial_{x_i}(X^i \sqrt{g}) \\ \Rightarrow \text{div}(\partial_\rho) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_\rho(\sqrt{g} \cdot 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)} \cdot f(\theta)}} \cdot \partial_\rho(\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}} \cdot \sqrt{f(\theta)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}}} \cdot \partial_\rho(\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}}} \cdot \frac{2(n-1)\sigma(\rho)^{2(n-1)-1} \cdot \sigma'(\rho)}{2\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}}} \\ &= \frac{(n-1)\sigma(\rho)^{2(n-1)}\sigma(\rho)^{-1}\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)^{2(n-1)}} \\ &= (n-1) \frac{\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por outro lado, de (5.3) temos que

$$S(\rho) = \omega_n \sigma(\rho)^{n-1} \Rightarrow S'(\rho) = (n-1)\omega_n \sigma(\rho)^{n-1} \sigma'(\rho).$$

Então

$$\frac{S'(\rho)}{S(\rho)} = \frac{(n-1)\omega_n \sigma(\rho)^{n-1} \sigma'(\rho)}{\omega_n \sigma(\rho)^{n-1}} = (n-1) \frac{\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)}. \quad (5.7)$$

Logo, substituindo (5.7) em (5.6), segue que

$$\Delta \rho = \operatorname{div}(\partial_\rho) = \frac{S'(\rho)}{S(\rho)}.$$

□

**Proposição 5.1.2.** *O laplaciano de  $M_\sigma$  em coordenadas polares é dado por*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + (n-1) \frac{\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \Delta_{\partial B_\rho}, \quad (5.8)$$

em que  $\Delta_{\partial B_\rho}$  é o laplaciano em  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 1.3.6, temos que em um sistema de coordenadas vale que

$$\Delta f = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{x_i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \partial_{x_j} (f) \right).$$

Analogamente a proposição anterior (Proposição 5.1.1), o campo de vetores  $\nabla \rho$  da variedade  $M_\sigma$  é dado por  $\nabla \rho = 1 \cdot \partial_\rho + 0 \cdot \partial_{\theta_1} + \dots + 0 \cdot \partial_{\theta_{n-1}} = \partial_\rho$  e  $g = \sigma(\rho)^{2(n-1)} \cdot f(\theta)$ , em que  $g$  é o determinante da matriz da métrica e  $f$  é uma função que depende de  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ .

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)} \cdot f(\theta)}} \cdot \partial_\rho \left( \sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)} \cdot f(\theta)} \cdot 1 \cdot \partial_\rho u \right) + \Delta_{\partial B_\rho} u \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)} \cdot f(\theta)}} \left( \sqrt{f(\theta)} \cdot \partial_\rho \left( \sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}} \right) \cdot \partial_\rho u + \sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}} \cdot \sqrt{f(\theta)} \cdot \partial_\rho^2 u \right) + \Delta_{\partial B_\rho} u \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}}} \left( \partial_\rho \left( \sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}} \right) \cdot \partial_\rho u + \sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}} \cdot \partial_\rho^2 u \right) + \Delta_{\partial B_\rho} u \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}}} \left( \frac{2(n-1)\sigma(\rho)^{2(n-1)-1} \cdot \sigma'(\rho)}{2\sqrt{\sigma(\rho)^{2(n-1)}}} \cdot \partial_\rho u \right) + \partial_\rho^2 u + \Delta_{\partial B_\rho} u \\ &= (n-1) \frac{\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)} \cdot \partial_\rho u + \partial_\rho^2 u + \Delta_{\partial B_\rho} u. \end{aligned}$$

□

Observe que de (5.7) temos que  $\frac{S'(\rho)}{S(\rho)} = (n-1)\frac{\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)}$ . Portanto, é possível escrever o laplaciano em coordenadas polares como

$$\Delta u = \partial_\rho^2 u + \frac{S'(\rho)}{S(\rho)} \partial_\rho u + \Delta_{\partial B_\rho} u. \quad (5.9)$$

**Proposição 5.1.3.** *Vale que*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{S_\sigma(\rho)}{\omega_n \rho^{n-1}} = 1. \quad (5.10)$$

*Demonstração.* Note que

$$\frac{S_\sigma(\rho)}{\omega_n \rho^{n-1}} \stackrel{(5.3)}{=} \frac{\omega_n \sigma(\rho)^{n-1}}{\omega_n \rho^{n-1}} = \left( \frac{\sigma(\rho)}{\rho} \right)^{n-1}.$$

Então,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{S_\sigma(\rho)}{\omega_n \rho^{n-1}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\sigma(\rho)}{\rho} \right)^{n-1} = \left( \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sigma(\rho)}{\rho} \right)^{n-1} = \left( \frac{\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma'(\rho)}{\lim_{\rho \rightarrow 0} 1} \right)^{n-1} \stackrel{(5.2)}{=} \left( \frac{1}{1} \right)^{n-1} = 1.$$

□

**Proposição 5.1.4.** *Suponha que  $M$  tem raio de injetividade infinito. Seja  $u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$u(\rho) := \int_1^\rho \frac{dr}{S(r)}. \quad (5.11)$$

*Seja  $\Gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\Gamma(x) = u(\rho(x))$ . Então vale a igualdade no sentido das distribuições*

$$\Delta \Gamma = \delta_o. \quad (5.12)$$

*Observação.* Note que  $u(\rho)$  é harmônica em  $M \setminus \{o\}$ , pois

$$u'(\rho) = \frac{1}{S(\rho)} \text{ e } u''(\rho) = -\frac{S'(\rho)}{S(\rho)^2}.$$

Substituindo em (5.9), segue que

$$\Delta u = -\frac{S'(\rho)}{S(\rho)^2} + \frac{S'(\rho)}{S(\rho)} \frac{1}{S(\rho)} + \Delta_{\partial B_\rho} u = 0$$

Além disso,  $u$  satisfaz a EDO

$$u''(\rho) + \frac{S'(\rho)}{S(\rho)} u'(\rho) = 0. \quad (5.13)$$

*Demonstração.* De acordo com a Seção 2.3, mostrar que  $\Delta \Gamma = \delta_o$  é equivalente a mostrar

que

$$\int_{M_\sigma} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) dx = \varphi(o), \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Note que como  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , existe  $\Lambda > 0$  tal que

$$|\Delta \varphi| \leq \Lambda. \quad (5.14)$$

Pela Proposição 5.1.3, temos que  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sigma(\rho)^{n-1}}{\rho^{n-1}} = 1$ . Então, pela definição de limite, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\tau > 0$  tal que  $\rho > \tau$  implica em

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sigma(\rho)^{n-1}}{\rho^{n-1}} - 1 \right| < \varepsilon &\Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{\sigma(\rho)^{n-1}}{\rho^{n-1}} < 1 + \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 - \varepsilon} > \frac{\rho^{n-1}}{\sigma(\rho)^{n-1}} > \frac{1}{1 + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n-1}}{\sigma(\rho)^{n-1}} > \frac{1}{1 + \varepsilon} &\Rightarrow \sigma(\rho)^{n-1} < (1 + \varepsilon) \rho^{n-1} \\ &\Rightarrow \sigma(\rho) < (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{n-1}} \rho. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Seja  $K$  o suporte compacto de  $\varphi$ . Ao tomar  $\tau$  como acima, temos que

$$\int_{M_\sigma} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) dx = \underbrace{\int_{B_\tau(o)} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) dx}_{\text{Afirmação A}} + \underbrace{\int_{K \setminus B_\tau(o)} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) dx}_{\text{Afirmação B}}. \quad (5.17)$$

**Afirmção A:**  $\int_{B_\tau(o)} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) dx \rightarrow 0$  quando  $\tau \rightarrow 0$ .

De fato,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_\tau(o)} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) dx \right| &\leq \int_{B_\tau(o)} |\Gamma(x)| |\Delta \varphi(x)| dx \\
&\stackrel{(5.14)}{\leq} \int_{B_\tau(o)} \left| \int_1^{\rho(x)} \frac{dr}{S(r)} \right| \Lambda dx \\
&\stackrel{(5.3)}{=} \Lambda \int_{B_\tau(o)} \left| \int_1^{\rho(x)} \frac{dr}{\omega_n \sigma(r)^{n-1}} \right| dx \\
&= \frac{\Lambda}{\omega_n} \int_{B_\tau(o)} \left| \int_1^{\rho(x)} \frac{r^{n-1} dr}{r^{n-1} \sigma(r)^{n-1}} \right| dx \\
&= \frac{\Lambda}{\omega_n} \int_{B_\tau(o)} \left| \int_1^{\rho(x)} \frac{dr}{r^{n-1} \sigma(r)^{n-1}} \right| dx \\
&\stackrel{(5.15)}{<} \frac{\Lambda}{\omega_n} \int_{B_\tau(o)} \left| \int_1^{\rho(x)} \frac{dr}{r^{n-1} (1-\varepsilon)} \right| dx \\
&< \frac{\Lambda}{\omega_n (1-\varepsilon)} \int_{B_\tau(o)} \left| \int_1^{\rho(x)} \frac{dr}{r^{n-1}} \right| dx \\
&= \frac{\Lambda}{\omega_n (1-\varepsilon)} \int_{B_\tau(o)} \left[ \frac{r^{n-2}}{r-2} \right]_1^{\rho(x)} dx \\
&= \frac{\Lambda}{\omega_n (1-\varepsilon) (2-n)} \int_{B_\tau(o)} \rho(x)^{2-n} dx \\
&\stackrel{(i)}{=} \frac{\Lambda}{\omega_n (1-\varepsilon) (2-n)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\tau \rho(x)^{2-n} \sigma(r)^{n-1} dr d\theta \\
&\stackrel{(5.16)}{=} \frac{\Lambda}{\omega_n (1-\varepsilon) (2-n)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\tau \rho(x)^{2-n} (1+\varepsilon) \rho(x)^{n-1} dr d\theta \\
&= \frac{\Lambda (1+\varepsilon)}{\omega_n (1-\varepsilon) (2-n)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\tau r^{2-n} r^{n-1} dr d\theta \\
&= \frac{\Lambda (1+\varepsilon)}{\omega_n (1-\varepsilon) (2-n)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^\tau d\theta \\
&= \frac{\tau^2}{2} \frac{\Lambda (1+\varepsilon)}{\omega_n (1-\varepsilon) (2-n)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\theta \\
&= \frac{\tau^2}{2} \frac{\Lambda (1+\varepsilon)}{\omega_n (1-\varepsilon) (2-n)} \omega_n \\
&= \frac{\tau^2}{2} \frac{\Lambda (1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon) (2-n)} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Em (i) ocorre uma mudança de variáveis.

Logo, fica provada a Afirmação A.

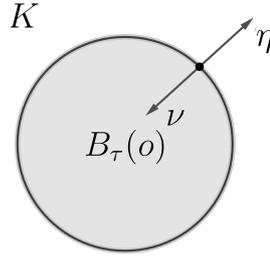
**Afirmação B:**  $\int_{K \setminus B_\tau(o)} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) dx = \varphi(o)$ .

Note que

$$\begin{aligned} \int_{K \setminus B_\tau(o)} \Gamma \Delta \varphi(x) dx &= \int_{K \setminus B_\tau(o)} \varphi \Delta \Gamma dx + \int_{\partial(K \setminus B_\tau(o))} \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds - \int_{\partial(K \setminus B_\tau(o))} \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds \\ &\stackrel{\Delta \Gamma = 0}{=} \int_{\partial(K \setminus B_\tau(o))} \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds - \int_{\partial(K \setminus B_\tau(o))} \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds, \end{aligned}$$

em que  $\nu$  é vetor normal unitário exterior a  $K$ .

Figura 5.1: Vetores normais unitários exterior a  $K \setminus B_\tau(o)$  e interior a  $B_\tau(o)$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

Note que  $\partial(K \setminus B_\tau(o)) = \partial K \cup \partial B_\tau(o)$  e o vetor normal unitário exterior a  $K \setminus B_\tau(o)$  é interior a  $B_\tau(o)$  em  $\partial B_\tau(o)$  (Figura 5.1). Denote  $\eta$  como o vetor normal exterior a  $B_\tau(o)$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{K \setminus B_\tau(o)} \Gamma \Delta \varphi(x) dx &= \left( \int_{\partial K} \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds - \int_{\partial B_\tau(o)} \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds \right) - \left( \int_{\partial K} \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds - \int_{\partial B_\tau(o)} \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds \right) \\ &\stackrel{(ii)}{=} - \int_{\partial B_\tau(o)} \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds + \int_{\partial B_\tau(o)} \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds \\ &\stackrel{(iii)}{=} \int_{\partial B_\tau(o)} \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds. \end{aligned}$$

Em (ii) foi usado o fato de  $K$  ser suporte de  $\varphi$ , ou seja,  $\varphi \equiv 0$  em  $\partial K$ . Em (iii), temos que  $\int_{\partial B_\tau(o)} \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds = 0$ , por um argumento análogo ao usado na Afirmação A.

Logo, basta mostrar que

$$\int_{K \setminus B_\tau(o)} \Gamma \Delta \varphi(x) dx = \int_{\partial B_\tau(o)} \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds = \varphi(o), \quad (5.18)$$

que é equivalente a mostrar que

$$\left| \varphi(o) - \int_{\partial B_\tau(o)} \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds \right| = 0. \quad (5.19)$$

Por definição, temos que  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \langle \nabla \Gamma, \eta \rangle$ . Note que

$$\nabla \Gamma = g_{\rho\rho} \partial_\rho \left( \int_1^\rho \frac{dr}{S(r)} \right) \partial_\rho = \frac{1}{S(\rho)} \partial_\rho = \frac{1}{S(\rho)} \nabla \rho.$$

Então

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \langle \nabla \Gamma, \eta \rangle = \left\langle \frac{1}{S(\rho)} \nabla \rho, \nabla \rho \right\rangle = \frac{1}{S(\rho)} \langle \nabla \rho, \nabla \rho \rangle = \frac{1}{S(\rho)}. \quad (5.20)$$

Assim, substituindo (5.20) em (5.19), temos que

$$\begin{aligned} \left| \varphi(o) - \int_{\partial B_\tau(o)} \varphi(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds \right| &\stackrel{(5.20)}{=} \left| \varphi(o) - \int_{\partial B_\tau(o)} \varphi(x) \frac{1}{S(\tau)} ds \right| \\ &= \left| \int_{\partial B_\tau(o)} \frac{\varphi(o)}{\omega_n \sigma(\tau)^{n-1}} - \int_{\partial B_\tau(o)} \varphi(x) \frac{1}{S(\tau)} ds \right| \\ &= \left| \int_{\partial B_\tau(o)} \frac{\varphi(o)}{\omega_n \sigma(\tau)^{n-1}} - \int_{\partial B_\tau(o)} \varphi(x) \frac{1}{\omega_n \sigma(\tau)^{n-1}} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n \sigma(\tau)^{n-1}} \int_{\partial B_\tau(o)} |\varphi(o) - \varphi(x)| ds \\ &\stackrel{(iv)}{=} \frac{1}{\omega_n \sigma(\tau)^{n-1}} \int_{\partial B_1(o)} \int_0^1 |\varphi(o) - \varphi(\tau x)| \sigma(\tau)^{n-1} dr d\theta \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(o)} |\varphi(o) - \varphi(\tau x)| d\theta \\ &= \frac{\omega_n}{\omega_n} \sup_{\theta \in \partial B_1} |\varphi(o) - \varphi(\tau x)| \\ &\stackrel{\tau \rightarrow 0}{=} \sup_{\theta \in \partial B_1} |\varphi(o) - \varphi(o)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Em (iv) foi feita uma mudança de variáveis.

Logo, fica provada a Afirmação .B

Portanto, voltando a equação (5.17), temos que

$$\int_{M_\sigma} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) dx = 0 + \varphi(o) = \varphi(o), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

e, assim,  $\Delta \Gamma = \delta_o$ . □

**Corolário 5.1.5.**  $M_\sigma$  é parabólica se, e somente se,  $\int_1^\infty \frac{d\rho}{S(\rho)} = \infty$ .

*Demonstração.* Note que  $G(x, o) = \int_{\rho(x)}^\infty \frac{dr}{S(r)}$  é função de Green de  $M_\sigma$  centrada em  $o$  e o item 2 do Teorema 4.1.2 prova a contrapositiva do Corolário. □

## 5.2 Verificação da parabolicidade via teoremas de comparação

Nessa seção serão tratados sobre os Teoremas de Comparação para curvatura seccional e para curvatura de Ricci e como isso influencia na verificação da parabolicidade ou não parabolicidade de uma variedade. Como o objetivo do trabalho não é tratar sobre as curvaturas de uma variedade riemanniana, ocultamos as definições de curvatura, que podem ser encontradas em CARMO (2008) [4]. Além disso, iremos enunciar os Teoremas de Comparação do Laplaciano e da Hessiana sem demonstração. Mais informações sobre os teoremas podem ser encontradas em FONTELES (1998) [6].

Seja  $M$  variedade geodesicamente completa e suponha que  $o \in M$  seja o centro das coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ . Para  $x \in M$  tal que  $x \neq o$  e  $x \notin \text{Cut}(o)$ , denote a *curvatura de Ricci* na direção  $\frac{\partial}{\partial \rho}$  por  $\text{Ric}_o(x)$  e denote a *curvatura seccional* em planos que contém a direção radial por  $K_M(x)$ .

No Capítulo 1 definimos o laplaciano em coordenadas locais. O laplaciano em coordenadas polares é dado por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + m(\rho, \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} + \Delta_{\partial B_\rho},$$

em que  $m$  é uma função que depende da métrica e  $\Delta_{\partial B_\rho}$  é o laplaciano de  $\partial B_\rho$ , com a métrica induzida.

Escreva  $\hat{M} = M_\sigma$  e  $\hat{m}(\rho, \theta) = (n-1) \frac{\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)} = \frac{S'(\rho)}{S(\rho)}$ , em que  $\sigma$  é uma função suave positiva tal que  $\sigma(0) = 0$  e  $\sigma'(0) = 1$ , conforme (5.2), e  $S(r) = \omega_n \sigma(r)^{n-1}$ , conforme (5.3).

**Teorema 5.2.1.** *Para todo  $(\rho, \theta)$ , seja  $R \gg 0$ .*

1.  $\forall \rho \geq R$ , se  $m(\rho, \theta) \leq \frac{S'(\rho)}{S(\rho)}$  e  $\int^\infty \frac{dr}{S(r)} = \infty$ , então  $M$  é parabólica.
2.  $\forall \rho \geq R$ , se  $m(\rho, \theta) \geq \frac{S'(\rho)}{S(\rho)}$  e  $\int^\infty \frac{dr}{S(r)} < \infty$ , então  $M$  é não parabólica.

*Demonstração.* Considere  $u : [R, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(\rho) = \int_R^\rho \frac{dr}{S(r)}$ , conforme (5.11), e

que satisfaz a EDO  $u''(\rho) + \frac{S'(\rho)}{S(\rho)} u'(\rho) = 0$ , conforme (5.13). Note que  $u$  é crescente.

Defina  $w : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $w(x) = u(\rho(x))$ .

1. Se  $m(\rho, \theta) \leq \frac{S'(\rho)}{S(\rho)}$ , temos que em  $M$  vale

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + m(\rho, \theta) \frac{\partial w}{\partial \rho} + 0 \leq u'' + \frac{S'(\rho)}{S(\rho)} u' = 0 \Rightarrow \Delta w \leq 0.$$

Logo,  $w$  é superharmônica ilimitada fora de um compacto, pois  $\int^{\infty} \frac{dr}{S(r)} = \infty$ , por hipótese.

Portanto, pelo Corolário 4.2.2, segue que  $M$  é parabólica.

2. Se  $m(\rho, \theta) \geq \frac{S'(\rho)}{S(\rho)}$ , temos que em  $M$  vale

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + m(\rho, \theta) \frac{\partial w}{\partial \rho} \geq u'' + \frac{S'(\rho)}{S(\rho)} u = 0 \Rightarrow \Delta w \geq 0.$$

Logo,  $w$  é subharmônica limitada fora do compacto  $B_R(o)$  e, então,  $w$  é subharmônica admissível não trivial, que é constante 0 em  $B_R(o)$ .

Assim,  $M \setminus B_R(o)$  é massivo, pois admite subharmônica admissível e, portanto, pelo item 1 do Teorema 4.1.2, segue que  $M$  é não parabólica.

□

**Corolário 5.2.2.** 1. Se  $Ric_o(\rho, \theta) \geq -(n-1) \frac{\sigma''(\rho)}{\sigma(\rho)}$  e  $\int^{\infty} \frac{dr}{S(r)} = \infty$ , então  $M$  é parabólica.

2. Se  $K_M(\rho) \leq -\frac{\sigma''(\rho)}{\sigma(\rho)}$  e  $\int_0^{\infty} \frac{dr}{\sigma^{n-1}(r)} < \infty$ , então  $M$  é não parabólica.

*Demonstração.* 1. Segue do Teorema de Comparação do Laplaciano que

$$m(\rho, \theta) \leq (n-1) \frac{\sigma'(\rho)}{\sigma(\rho)} = \frac{S'(\rho)}{S(\rho)}$$

e daí, de modo análogo ao item 1 do Teorema 5.2.1, temos que  $M$  é parabólica.

2. Segue do Teorema de Comparação da Hessiana que

$$m(\rho, \theta) \geq \frac{S'(\rho)}{S(\rho)}$$

e daí, de modo análogo ao item 2 do Teorema 5.2.1, temos que  $M$  é não parabólica.

□

*Exemplo.* Se  $K_M \leq -1$ , temos que  $\sigma(\rho) = \sinh(\rho)$  funciona na hipótese do Corolário 5.2.2 e  $\int^{\infty} \frac{dr}{\sinh^{n-1}(r)} < \infty$ , então  $M$  é não parabólica.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Aiolfi, L. Bonorino, J. Ripoll, M. Soret, and M. Ville. Equivalences among parabolicity, comparison principle and capacity on complete riemannian manifolds. *arXiv preprint arXiv:2109.07057*, 2021. 47
- [2] R. G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley-Interscience, 1995. 36
- [3] M. P. Do Carmo. *Formas diferenciais e aplicações*. Number 37. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1971. 7
- [4] M. P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2008. 1, 3, 4, 60
- [5] E. d. L. C. Fanti and S. A. Izar. *Topologia geral*. 2, 2020. 13
- [6] J. N. C. Fonteles. O teorema de comparação do hessiano e aplicações sobre variedades completas com curvatura de Ricci não-negativa. 1998. 60
- [7] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. Springer, 1977. 11, 33
- [8] A. Grigor'Yan. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the brownian motion on riemannian manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 36(2):135–249, 1999. 1, 11, 39, 41, 46, 47
- [9] P. Li. *Geometric analysis*, volume 134. Cambridge University Press, 2012. 1, 11, 23, 45, 48
- [10] A. C. Marques. Noções de teoria das distribuições e uma introdução aos espaços de Sobolev (Trabalho de Conclusão de Curso). 2018. 21