UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

POTENCIALIDADES DO JOGO WAR PARA ENSINAR PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

THIAGO WERRES KURYLENKO

Porto Alegre
2024

THIAGO WERRES KURYLENKO

POTENCIALIDADES DO JOGO WAR PARA ENSINAR PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lisiane Priscila Roldão Selau

Porto Alegre
2024

CIP - Catalogação na Publicação

Kurylenko, Thiago Werres
Potencialidades do Jogo War para Ensinar Probabilidade no Ensino Médio / Thiago Werres Kurylenko. -- 2024.
53 f.
Orientadora: Lisiane Priscila Roldão Selau.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. Educação. 2. Jogo de tabuleiro. 3. Probabilidade. I. Selau, Lisiane Priscila Roldão, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

POTENCIALIDADES DO JOGO WAR PARA ENSINAR PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Thiago Werres Kurylenko

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fernando Henrique Fogaça Carneiro
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Profa. Dra. Luciana Neves Nunes
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a toda a minha família. Começando com minha mãe, Josiane, que me incentivou e me inspirou durante toda a graduação, ela é minha ídola. Ao meu pai, Ricardo, que sempre me ajudou, a qualquer hora, sempre que precisasse, como no meu primeiro semestre de graduação, com uma demonstração do Teorema de Pitágoras. Também é um outro exemplo para mim. Ao meu irmão Rafael, que me aturou, mas também me incomodou. Ele me ajudou com inúmeras cadeiras e continua me ajudando a lidar com a vida em geral. Certamente uma das pessoas mais inteligentes que eu conheço e um espelho para mim. Também gostaria de agradecer à minha família materna, meus avós que sempre me apoiaram e sei que sempre que precisar posso contar com eles, meus tios e minha prima que são de grande inspiração. À minha família paterna, meus avós, que se orgulham de mim, meu tio, tias e primos, que sempre é tão bom compartilhar momentos com eles.

Também um agradecimento em especial à minha orientadora Lisiane, que é um exemplo de professora. Ela foi minha professora na cadeira de Ensino e Aprendizagem de Estatística, em 2023/2, com uma didática impecável. Além disso, ela sempre esteve disponível a me ajudar, não importando o que eu precisava.

Também um especial agradecimento às minhas outras famílias, como meus amigos próximos: Caetano, Dylan, Guilherme, Guilherme, Ícaro, Leandro, Leonardo, Lucas, Lucas, Mateus, Pedro, Rodrigo, Victor e Vinícius. É muito bom ter amigos incríveis com quem eu possa contar.

E também à minha família matemática: Gislaine, minha amiga de todas as horas, não seria possível fazer a graduação sem nossa amizade. Sempre me ajudou com qualquer matéria a qualquer momento da semana. João, nossas conversas sobre a vida e rolês aleatórios foram incríveis, é muito divertido compartilhar momentos contigo. Lucas, sempre bom te vencer em jogos *online*, me lembro de diversas vezes que você apareceu em chamadas só para me ajudar. Pedro, é muito bacana conversar contigo sobre a vida, sempre damos boas risadas. Isaías, muito obrigado por sempre estar disponível para me ajudar com Álgebra, és um grande amigo.

Muito obrigado a todas as outras pessoas que de certa forma trilharam o meu caminho. Não teria conseguido realizar a graduação sem vocês.

RESUMO

Este trabalho tem como finalidade desenvolver uma pesquisa em torno do jogo *War*, explorando suas potencialidades em sala de aula para um público alvo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública, cujo objetivo geral é realizar uma pesquisa sobre como um professor pode abordar a probabilidade no Ensino Médio a partir do jogo *War*. Para tanto, a pergunta que motivou tal trabalho é: "como o jogo *War* pode vir a contribuir com a aprendizagem dos estudantes acerca de probabilidade?" e, para respondê-la, foi elaborada uma prática envolvendo os estudantes que fazem parte desse público. Quanto aos objetivos específicos, são eles: desenvolver no estudante a compreensão do que é a probabilidade, além de que consigam citar exemplos cotidianos, e que eles consigam calcular as probabilidades de sucesso e de fracasso em suas jogadas. Sobre as considerações finais, o jogo é de certa importância na educação, pois cria um ambiente lúdico e permite que o estudante desenvolva suas habilidades lógico-matemáticas, com relação ao conteúdo em que o professor deseja ensinar.

Palavras-chave: Educação. Jogo de tabuleiro. Probabilidade.

ABSTRACT

This work aims to develop research around the game War, exploring its potential in the classroom for a target audience of 3rd year high school students from a public school, whose general objective is to carry out research on how a teacher can approach probability in high school using the game War. To this end, the question that motivated this work is: “how can the game War contribute to students’ learning about probability?” and, to answer it, a practice was developed involving students who are part of this public. As for the specific objectives, they are: to develop the student's understanding of what probability is, in addition to being able to cite everyday examples, and for them to be able to calculate the probabilities of success and failure in their moves. Regarding final considerations, the game is of certain importance in education, as it creates a playful environment and allows the student to develop their logical-mathematical skills, in relation to the content the teacher wants to teach.

Keywords: Education. Board game. Probability.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. Introdução

A probabilidade está presente de diversas maneiras no dia a dia, quando, por exemplo, abrimos o celular pela manhã e vemos as chances de chover. Desse modo, ela certamente também aparece na realidade dos estudantes, os quais desde pequeno jogam uma moeda ao alto na esperança de vencerem num jogo de cara ou coroa. Além do mais, as “chances” também fazem parte dos jogos de tabuleiro, os quais, juntos a outras experiências, fazem menção à probabilidade.

Quanto aos jogos, eles estão presentes no cotidiano das pessoas, ainda mais dos jovens que possuem instalados diversos jogos em seus celulares ou no próprio videogame. Já os jogos de tabuleiro, por sua vez, são importantes para o desenvolvimento do indivíduo como pessoa, visto que une a diversão com a interação, que muito se foi perdida com a pandemia da Covid-19. Desse modo, a exploração de jogos no ensino também é importante, visto que esse age como um facilitador do aprendizado. Ademais, no ensino de Matemática, esse pode incentivar os alunos a jogarem melhor e criarem estratégias, o que contribui para o aprimoramento de suas habilidades e do seu raciocínio lógico-matemático.

O jogo War, em especial, é um jogo de entretenimento, o que, como será mencionado neste trabalho, é mais interessante ao estudante, dado que esse prenderá sua atenção. Para tanto, ensinar a probabilidade utilizando o jogo War, pode vir a ser benéfico para aula, pois você “ganha” o aluno de modo que ele demonstra interesse pelo conteúdo a fim de melhorar suas habilidades no jogo. A probabilidade, então, pode ser explorada a partir do uso de dados no jogo, o que proporciona um leque de possibilidades para o estudante aprender a partir de suas jogadas, enquanto seu aprendizado é unido à ludicidade do jogo de entretenimento.

1.1 Motivação

Durante a graduação no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), em várias situações os docentes traziam alternativas diferentes para as aulas de Matemática. Sendo assim, há a motivação de, como futuro professor, pensar diferente em contraponto às aulas ditas tradicionais, além de buscar sempre a inovação em prol dos estudantes.

Uma das principais tendências estudadas ao longo das disciplinas de Educação Matemática e Docência I, II e III, ofertadas pela UFRGS, é o uso de jogos na educação matemática. Os jogos em si trazem o lúdico aos estudantes, podendo assim explorar suas habilidades matemáticas ao máximo. Além disso, existe uma variedade de jogos que podem vir a ser utilizados como base numa aula de matemática, de modo que traga o conhecimento matemático que o professor deseja passar.

Minha motivação para este trabalho, como pesquisador e jogador, foi explorar a capacidade dos jogos no ensino de algum conteúdo matemático e, após, analisar as suas potencialidades. Para isso, foi selecionado o jogo *War* para esta pesquisa, pois se trata de um jogo o qual marcou horas da minha infância durante minhas interações com familiares e amigos. Sendo assim, acredita-se que seja um jogo o qual proporciona divertimento a todas as idades e, mais que isso, possa abordar vários conteúdos matemáticos, tais como análise combinatória, geometria euclidiana plana, teoria de grafos, probabilidade, entre outros. Dessa forma, nessa pesquisa, optou-se por trabalhar com probabilidade, pois em diversas situações do jogo nos deparamos com escolhas sobre quais territórios pretendemos conquistar, de maneira que há a presença da probabilidade de sucesso em tal ação, assim como a de fracasso. Assim, a principal motivação é verificar como podemos utilizar o jogo *War* para abordar a probabilidade no ensino básico, em especial no Ensino Médio, nível escolar em que essa temática é trabalhada de forma mais abrangente e com os cálculos necessários para o decorrer do jogo.

1.2 Objetivos

Neste trabalho, pretendo desenvolver uma pesquisa a respeito de como um professor pode abordar a probabilidade no Ensino Médio a partir do jogo *War*. Assim, os objetivos específicos da prática, que será realizada, é que os estudantes compreendam o que é a probabilidade, assim como sejam capazes, ao final da prática, de interpretar as probabilidades de sucesso e fracasso em suas jogadas e, da mesma forma, entender em que situações podemos utilizá-la para analisar situações cotidianas. Para isso, pretendo investigar o comportamento dos estudantes quando abordado o respectivo conteúdo, partindo de uma situação lúdica, como é o jogo de entretenimento *War*.

Ademais, ao final das atividades, deseja-se ter resposta para pergunta norteadora de tal pesquisa: como o jogo *War* pode vir a contribuir com a aprendizagem dos estudantes acerca de probabilidade? Desse modo, a pesquisa será tomada de maneira a ter como base o jogo *War* à medida que expandir para o conteúdo matemático de probabilidade.

1.3 Justificativa

Um dos aspectos comentados durante a graduação é quais conteúdos devem ser ensinados no Ensino Básico. Uma das principais questões, entre as muitas a serem debatidas, é o que servirá para a vida/cotidiano/futuro do estudante. Sendo assim, a probabilidade está diretamente presente na realidade deles, visto que é uma noção construída, pelos estudantes, desde criança quando, por exemplo, utilizam a palavra “chance” de algum acontecimento, como de um time esportivo ganhar ou de chover no final de semana. Quanto aos futuros pesquisadores, os estudantes, deve haver o contato o quanto antes, para que haja o estímulo para que eles continuem avançando em prol da ciência. Ademais, junto ao lúdico do jogo *War*, esse contato será agradável, pois os estudantes aprenderão sobre o conteúdo enquanto se divertem.

A Teoria da Probabilidade vem sendo muito útil para avanços no campo da tecnologia, ora para programação, ora para consulta de dados probabilísticos como a previsão do tempo, por exemplo. Como as pessoas estão cada vez mais presentes no mundo virtual, sempre com “celulares na mão”, sim, é um tema o qual vale ser debatido nas escolas, o que, junto ao lúdico do jogo, *War*, pode permitir que os estudantes compreendam o que está acontecendo no mundo tecnológico. Dessa forma, o letramento digital é importante de ser feito na escola, assim como todos os artifícios a que estão ligados, como, por exemplo, a probabilidade. Além do mais, vale ressaltar que esse crescimento, no uso de aparelhos eletrônicos, foi muito rápido, portanto, essas inserções devem acompanhar essa ascensão das tecnologias digitais de maneira a preparar os estudantes.

Apesar da tecnologia ser defendida como um dos pontos importantes para o estudo da probabilidade e de existir a possibilidade de se jogar *online*, é importante ressaltar que muito se perdeu do convívio e da interação humana com a pandemia da Covid-19. Por isso também é defendida a ideia de um jogo de tabuleiro para se estudar probabilidade, visto que há a interação social entre os estudantes, de maneira a se manter a saúde mental e o contato humano com outras pessoas. Desse jeito, é notável que o jogo *War* possa vir a contribuir para esses aspectos, resgatando o que se foi perdido com a pandemia da Covid-19.

2. Considerações Teóricas

No desenvolvimento deste trabalho, serão tratados os temas: Jogos e Probabilidade. Desse modo, é fundamental entender a história da probabilidade para melhor compreensão, por parte do leitor, sobre a que esse trabalho se refere. Prosseguindo, haverá uma breve síntese de algumas das etapas históricas da Probabilidade como ramo da Matemática. Podemos perceber que ela está presente há muito tempo na história da evolução do ser humano, como será contado. Após isso, se comenta a respeito da importância dos jogos no processo de ensino da Matemática, prosseguindo para o jogo *War*, em específico, que é o objeto de análise e estudo deste trabalho. Por último, para finalizar esse tópico, haverá uma primeira caracterização ao leitor de como calcular as probabilidades presentes no jogo *War* e, para aquelas que não são o foco dessa pesquisa, será deixado um *link* indicando um possível método de cálculo dessas.

2.1 História da Probabilidade

Lopes e Meirelles (2005) afirmam que a teoria da probabilidade surgiu como ciência empírica muito antes do século XV, quando passou pelo rigor matemático, datando-se descobertas de jogos com utensílios formados por ossos já em 3500 a.C. no Egito. Dessa maneira, podemos perceber que a probabilidade está presente no cotidiano do ser humano já faz um certo período de tempo, corroborando-se que os estudos nesse campo são importantes para a vida dos estudantes.

Dito isso, faz sentido citar a história da Probabilidade para situar o leitor de sua importância no desenvolvimento da sociedade. Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022) apontam que foi Girolamo Cardano (1501-1576) que estudava as estratégias em jogos de azar, pois ele jogava apostando dinheiro. Para tanto, ele analisou situações que ocorreram durante seus jogos. Assim, um de seus objetos de estudo na Teoria da Probabilidade foi o dado, já que tal utensílio estava presente em muitos jogos de azar da época. Além do mais, os autores citam ainda em seu artigo muitos contribuintes para História da Probabilidade, como Pacioli (1445-1517) que estudou uma situação de um jogo em que ganha quem obtiver 6 pontos primeiro, na qual esse é interrompido quando está 5 pontos contra 3 pontos para o jogador A, e que a solução seria dividir o prêmio na proporção 5:3. Esse ocorrido também chamou a atenção de Niccolo Fontana (1499-1557), conhecido como Tartaglia, que propôs que não haveria forma satisfatória de resolução do problema de Pacioli (Vasconcelos; Vasconcelos; Chaquiam, 2022).

Calabria e Cavalari (2013) também citam a obra de Galileo Galilei (1564-1642) sobre jogos de azar: *Sopra le scoperta dei dadi* (Sobre o jogo de dados), o qual é importante para probabilidade pois, segundo elas, abrange dois sentidos: “primeiro como uma forma de compreender as constantes frequências no processo de chances e, segundo, como um método de determinar situações presumíveis de fé” (Calabria; Cavalari, 2013, p.10). Sendo assim, Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022) voltam a citar matemáticos importantes no estudo da probabilidade, tais quais os franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), que realizaram avanços no campo no início do século XVII. Os franceses citados trocavam cartas sobre problemas matemáticos envolvendo a probabilidade nos jogos de azar, em especial para o problema apresentado a Pascal por Antoine Gombauld, o cavaleiro de Méré, em 1654, como contam Calabria e Cavalari (2013). O holandês Christian Huygens (1629-1695) também é citado como o autor da primeira obra impressa sobre o assunto.

Seguindo, foi a vez do suíço Jakob Bernoulli (1654-1705) entrar em ascensão com sua concepção sobre probabilidade, que consentiu identificar através da experiência “uma nova maneira de estimar as chances de realização de um evento: o método experimental. Tal enfoque supõe que a probabilidade é um dado objetivo ligado ao evento e à experiência” (Queiroz; Coutinho, 2007, p. 68). Abraham De Moivre (1667-1754) então, a partir dos estudos de Bernoulli, segundo Warsi (2020, p. 193) achou “um modo simples de fazer aproximações de probabilidades binomiais por meio da distribuição normal, criando assim uma curva normal de sino para a distribuição binomial num gráfico”.

No artigo de Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022), Thomas Bayes (1702-1761) e seu teorema, Teorema de Bayes, cujo fim é para o cálculo de probabilidades condicionais e Joseph Lagrange são ditos importantes também, assim como os já mencionados De Moivre e Bernoulli. Mas foi Laplace quem introduziu a Probabilidade Clássica, a qual diz respeito ao cálculo de probabilidade sobre espaços amostrais equiprováveis, ou seja, no caso em que $\boldsymbol{\Omega}$ (espaço amostral) é enumerável[1] e finito[2], e A um evento qualquer com cardinalidade[3] n(A), $P(A) = \frac{n(A)}{n(\boldsymbol{\Omega})}$. Foi no século XX, então, que é apontado, por Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022), o matemático Andrei N. Kolmogorov (1903-1987), responsável pela axiomatização da Teoria das Probabilidades, na Rússia.

Após esse breve resumo da História da probabilidade, podemos perceber a importância dela no desenvolvimento do mundo como sociedade. Assim, a tendência é que a probabilidade continue sendo estudada pelos matemáticos, pois ainda há muito campo e avanços para serem feitos. Além disso, no tópico seguinte, será falado sobre as correntes que se originaram a partir dos estudos da Probabilidade, como os vistos até aqui. Desse modo, haverá uma introdução de duas das principais correntes, as quais após serão retomadas na prática deste trabalho.

2.2 Probabilidade Frequentista

A primeira corrente aqui abordada será a da Probabilidade Frequentista. Essa, por sua vez, tem como base o cálculo de probabilidade a partir da razão entre o número de repetições do evento e o número de simulações do experimento. Todavia, para que se obtenha uma margem de erro menor ou então “pequena”, há a necessidade de se repetir “várias” vezes o experimento. Em contrapartida, a Probabilidade Clássica define o cálculo da Probabilidade como sendo a razão entre o número de pontos favoráveis de tal evento e a quantidade total de casos que possam vir a acontecer em tal experimento, desde que haja equiprobabilidade entre os todos os possíveis pontos amostrais, mas isso será retomado no próximo tópico. Sendo assim, é justamente essa dualidade que é buscada no artigo de Lopes e Ferreira (2004), ou seja, situações que possam ser solucionadas a partir da Probabilidade Frequentista e, após, corroboradas pelo cálculo de probabilidades no conceito de Probabilidade Clássica. Lopes e Ferreira (2004), em seu artigo, relatam:

> Pudemos observar que, do ponto de vista das escolhas didáticas do professor,pode-se diminuir sua resistência ao ensino pela adoção de um enfoque frequentista para introdução ao conceito de probabilidade e quando

[1] Um conjunto é dito enumerável quando possui o mesmo número de elementos de um subconjunto dos números naturais.
[2] Um conjunto é dito finito quando possui um número finito de elementos.
[3] Número de elementos de um conjunto.

> a introdução ao conceito é feita por meio de problemas que envolvam situações de não equiprobabilidade (Lopes; Ferreira, 2004, p.17).

Desse modo, a Probabilidade Frequentista pode vir a ser importante até para um primeiro contato dos estudantes com a Probabilidade, de maneira a facilitar em seus estudos. Ademais, também é dito que essa é útil em contextos onde há ausência de equiprobabilidade, onde é mais trabalhoso de calcular a probabilidade pelo modo como é definido na Probabilidade Clássica a qual será enfoque do próximo tópico.

2.3 Probabilidade Clássica

Após vista a corrente da Probabilidade Frequentista, existe a corrente da Probabilidade Clássica, a qual também é chamada de Probabilidade Laplaciana (Lopes; Ferreira, 2004). Essa, como mencionado anteriormente, tem como base o cálculo de probabilidades pela razão entre os pontos favoráveis de um experimento aleatório e a quantidade de pontos possíveis, desde que esses sejam todos equiprováveis em um espaço amostral finito. A Probabilidade Clássica é a principal corrente estudada nas escolas e muitas vezes a única, de modo a haver uma perda da noção inicial de probabilidade no estudante. Além disso, dependendo pode haver uma falta ênfase no conceito de equiprobabilidade, o que pode acarretar no equívoco quando os estudantes se depararem com cálculos ou atividades envolvendo isso. Desse modo, é importante que haja uma construção do conceito de probabilidade até a sua formalização, permitindo assim aos estudantes uma compreensão maior a respeito dessa. Após essa feita, a base matemática dos estudantes será mais estável e permitirá um melhor entendimento quanto a essa corrente.

Lopes e Ferreira (2004) exploram em seu artigo a dualidade das correntes Frequentista e Laplaciana, mas não deixam de enfatizar o quão importante é a validação do cálculo de probabilidade pela corrente Laplaciana. Os autores também afirmam que: “A probabilidade pode ser aplicada à realidade tão diretamente quanto a aritmética elementar não sendo preciso teorias físicas nem técnicas matemáticas complicadas” (Lopes; Ferreira, 2004, p. 5), o que nos permite implicar que o próprio cálculo de probabilidades pode ser feito sem nenhuma teoria avançada. Isto é um debate comum por parte dos docentes: quão útil o conteúdo “x” é para a realidade do estudante. Quanto ao meio de ensinar, é válido que esse seja a partir de situações nas quais os estudantes se identifiquem. Os jogos por sua vez, trazem o lúdico para sala de aula, o que pode ser uma importante ferramenta para que aqueles sejam aptos para compreender o conteúdo que o docente queira ensinar, como será abordado a seguir.

2.4 Jogos

É possível afirmar que jogos na educação matemática são uma tendência que vem cada vez mais ganhando espaço na sala de aula. Um dos principais motivos para tal situação é a presença do lúdico na educação, a qual pode vir a facilitar o desenvolvimento do estudante, assim como suas habilidades, em especial de matemática. Mattos (2009, p. 69) defende esse ponto de vista ao dizer: “[...] o jogo é hoje uma realidade na Educação, pois possibilita o aprendizado, desenvolve várias habilidades necessárias à formação do educando”. Além do mais, Grando (2015) distingue duas formas de abordar uma aula com uso de jogos: a criação de um jogo ou a busca por um jogo já existente que tenha como fim o ensino de matemática e a busca por um conteúdo matemático dentro de um jogo de entretenimento, permitindo o indivíduo melhorar o seu desempenho dentro do jogo. O *War* se caracteriza por ser um jogo de estratégia, e de entretenimento, dentro da distinção de jogos feita por Grando (2015). Com isso, ela ainda afirma que esses jogos são de maior interesse dos estudantes, visto que há uma forte ligação entre a aprendizagem matemática e o jogar bem, pois esse é necessário para ganhar (Grando, 2015).

Sendo assim, Grando (2015), em seu artigo, *Recursos didáticos na educação matemática: jogos e materiais manipulativos*, ainda sintetiza os momentos que o jogo deve presenciar numa sala de aula: familiarização com o jogo, reconhecimento das regras, o “jogo pelo jogo”, intervenção pedagógica verbal, registro do jogo, intervenção escrita e jogar com “competência”. Cada momento é importante, pois permite o estudante refletir sobre seu aprendizado na montagem de estratégias (Grando, 2015).

Para tanto, na sequência, haverá uma discussão sobre o jogo *War* e suas regras. Desse modo, como vimos, é importante entender a importância dos jogos na educação matemática, de modo que o próprio *War* possa vir a ser um objeto de estudo.

2.5 Jogo *War*

Quanto ao jogo e suas regras, o *War* tem como objetivo cumprir certas metas, as quais são selecionadas aleatoriamente, via sorteio, de forma prévia ao jogo. Essas podem sofrer certas alterações de acordo com a edição em que será jogado, mas a maioria gira em torno dos continentes que você tem que conquistar, derrotar um exército em específico ou do número de países a serem conquistados. Outrossim, os ataques só podem vir de território que fazem fronteiras e de no máximo três tropas por vez, assim como a defesa só pode se defender com no máximo três tropas também, apesar de haver a possibilidade de se possuir mais do que esse número indicado em cada território. Desse jeito, pode haver confrontos da forma, 1x1, 1x2, 1x3, 2x1, 2x2, 2x3, 3x1, 3x2 e 3x3[4], onde o primeiro número indica a quantidade de tropas atacantes e o segundo número indica a quantidade de tropas defensoras, respectivamente. Esses são decididos nos dados[5], de forma que o maior número obtido no ataque se compara com o maior obtido na defesa e, caso ocorra,, o empate nos dados é favorável ao defensor.

Sendo assim, você poderá perder em cada ataque que sofrer ou realizar, no máximo, três tropas. Todavia, se a defesa se defender com um número “x” de tropas, entre 1 e 3, poderá eliminar no máximo esse número “x” de tropas atacantes, da mesma forma se o ataque utilizar um número “y”, só poderá derrotar “y” tropas defensoras. Ademais, o atacante deverá sempre manter uma tropa em seu território, de modo a certificar-se de que ao fim de sua rodada de ataques, mantenha-o em sua posse. Após sua rodada de ataque, é a vez do próximo jogador. Além disso, cada jogador recebe tropas de maneira proporcional ao número de territórios que possui. Outra regra também consta que o jogador receberá tropas adicionais por continentes conquistados, caso o haja. Apesar de que essas “extras” só poderão ser

[4] Notações que serão usadas para descrever a quantidade de tropas atacantes e defensoras em um ataque.
[5] No jogo *War* os dados são não viciados.

posicionadas em países do continente em questão. Para tanto, já vimos vários conteúdos matemáticos que o jogo aborda, mas, como o de escolha foi a probabilidade, tal estudo será focado em calcular as probabilidades dos eventos dos ataques e, consequentemente, de defesa também. Na Figura 1, há um exemplo de ataque por parte das tropas azuis e de defesa, pelas brancas. Nesse, houve um ataque do tipo 3x1 e cada exército perdeu 1 tropa, tanto o azul quanto o branco.

Figura 1 - Exemplo de ataque do tipo 3x1

Fonte: Fotografia capturada pelo autor do jogo War (Grow, 2024).

Este jogo possui várias edições, nas quais as regras podem sofrer pequenas alterações. No jogo *War* II, Souza (2020) descreve o jogo quanto a essas regras adicionais como os bombardeiros aéreos. Para esses, o pesquisador aponta que o defensor é o primeiro a jogar o dado de defesa antiaérea e, em sequência, o atacante procede com os ataques aéreos com os aviões que não foram atingidos.

Souza (2020) também aponta as 9 possibilidades de ataque contra defesa (as mesmas acima), assim como as possibilidades de ganho do ataque Ganhar (+0), Ganhar (+1), Ganhar (+2) ou Ganhar (+3)[6]. Consequentemente, as possibilidades de defesa também serão as mesmas, mas claro que essas dependem do tipo de ataque, ou seja, da quantidade de tropas envolvidas de ambos os lados, e portanto, a probabilidade também se altera em cada caso (Souza, 2020).

[6] Notações usadas por Souza (2020) em sua dissertação.

2.6 Probabilidade no jogo *War*

Para os estudantes será proposto que eles calculem as probabilidades dos eventos quando houver um ataque, ou seja, do atacante perder um número "x" de peças, da defesa perder um número "y" de peças ou ambos atacante e defensor perderem quantidades de peças. Assim, haverá liberdade para os estudantes quanto aos cálculos realizados, de acordo com a maneira que eles acharem mais conveniente, mas vale exemplificar para o leitor uma maneira do cálculo ser realizado. Também vale lembrar que o espaço amostral será o número total de maneiras diferentes de serem obtidas nos dados de cada caso pela defesa e ataque.

Para o caso de ataques 1x1, há duas possibilidades de eventos: ou o ataque vence, o qual será denotado por “A”, ou a defesa vence, evento que será denotado por “D”. Desse modo, o número de maneiras de se calcular a vitória do ataque é: $\frac{n(A)}{n(T)}$. O número total se calcula pela quantidade de maneiras diferentes de se obter no dado de ataque: é $n(T) = 6$. O número de vitórias do atacante será dado pela probabilidade de se vencer quando a defesa obtém um certo número multiplicado pelo total de maneiras, pois $P(A) = \frac{n(A)}{n(T)} \Leftrightarrow P(A) \cdot n(T) = n(A)$. Desse jeito, como esse será calculado considerando cada possibilidade de dado da defesa é apresentado no Quadro 1, para quando o defensor obtiver 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Por exemplo, no caso em que a defesa obtém 2, o ataque possui 4 possibilidades de vitória entre as seis possíveis de ocorrência, ou seja, o ataque ganha se obtiver 3, 4, 5 ou 6.

Quadro 1 - Tabela de possibilidades do dado de defesa (1x1)

Número que a defesa pode obter	**Possibilidades de ganho do ataque**
Defesa obtém “1”	$n_1(A) = \left(\frac{5}{6}\right) \cdot 6 = 5$
Defesa obtém “2”	$n_2(A) = \left(\frac{4}{6}\right) \cdot 6 = 4$
Defesa obtém “3”	$n_3(A) = \left(\frac{3}{6}\right) \cdot 6 = 3$
Defesa obtém “4”	$n_4(A) = \left(\frac{2}{6}\right) \cdot 6 = 2$
Defesa obtém “5”	$n_5(A) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot 6 = 1$

Defesa obtém “6”	$n_6(A) = \left(\frac{0}{6}\right) \cdot 6 = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, o número de maneiras do ataque vencer será, pelo Princípio Aditivo, a soma dos n_i, $1 \leq i \leq 6$, ou seja, $n(A) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15$.

Para o cálculo da probabilidade de vitória do atacante, dado que calculamos o número de maneiras desse vencer, será a razão entre esse e a cardinalidade do espaço amostral, que é o número de maneiras de ocorrer vitórias do ataque e da defesa, ou ainda, o número de maneiras distintas de jogar os dois dados (nesse caso), pelo Princípio Multiplicativo, $n(\mathbf{\Omega}) = 6 \cdot 6 = 36$, e, assim, $P(A) = \frac{15}{36}$.

A probabilidade de a defesa vencer, nesse caso, vai ser o evento complementar[7] a esse: $P(D) = 1 - \frac{15}{36} = 1 - \frac{15}{36} = \frac{21}{36}$. Considerando a simetria, existem 6 possibilidades de empate entre os dados, a metade das outras 30 são para o ataque e a outra metade para a defesa. Como em caso de empate o defensor ganha, então $n(D) = 15 + 6 = 21$.

A partir de agora, para facilitar nos cálculos, usaremos probabilidade de um evento complementar. O segundo caso em questão é o 2x1, que, como já foi comentado, é equivalente a dizer dois atacantes contra um defensor. Neste, o número total de maneiras distintas de números para se obter no lançamento de dois dados de ataques, pelo Princípio Multiplicativo, é: $n(T) = 6 \cdot 6 = 36$. Também, vale lembrar que, como a defesa se defende com apenas um dado, o atacante valer-se-á apenas do maior número atingido entre os dois dados lançados. Para tanto, foi montado o Quadro 2 para que seja de maior facilidade de visualização para o leitor:

Quadro 02 - Tabela de possibilidades do dado de defesa (2x1)

Número que a defesa pode obter	**Possibilidades de ganho do ataque**
Defesa obtém “1”	$n_1(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)\right) \cdot 36 = 35$
Defesa obtém “2”	$n_2(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right)\right) \cdot 36 = 32$
Defesa obtém “3”	$n_3(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6}\right)\right) \cdot 36 = 27$

[7] A probabilidade do evento A pode ser dada por P(A) = 1 - P(A’), onde A’ é o seu evento complementar.

Defesa obtém “4”	$n_4(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}\right)\right) \cdot 36 = 20$
Defesa obtém “5”	$n_5(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)\right) \cdot 36 = 11$
Defesa obtém “6”	$n_6(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{6}{6} \cdot \frac{6}{6}\right)\right) \cdot 36 = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso em que o defensor obteve 3, por exemplo, a fim de que o ataque vença, precisa-se que seja obtido pelo menos um dado com número maior do que 3, ou seja, que não ocorra ambos os dados menores ou iguais a 3. Desse modo, $P(A')$ é justamente essa não ocorrência, e logo podemos efetuar o cálculo utilizando $1 - P(A')$. Assim, o número de casos, pelo Princípio Aditivo, será dado por: $n(A) = 35 + 32 + 27 + 20 + 11 + 0 = 125$. Já os números de possibilidades distintas totais de lançamentos dos dados de ataque e do de defesa é, pelo Princípio Multiplicativo: $n(\mathbf{\Omega}) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Dessa maneira, a probabilidade de o ataque ganhar, dado por $P(A)$, e da defesa ganhar, dada por $P(D)$, são: $P(A) = \frac{125}{216}$ e $P(D) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

De forma semelhante, mas não análoga, podemos calcular a probabilidade de um ataque do tipo 3x1. Assim como no caso anterior, utilizaremos o Princípio Multiplicativo para calcular o total de maneiras distintas de lançamentos de dados de ataque: $n(T) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Do mesmo modo, nos valemos do Quadro 03, indicando as possibilidades de lançamento do dado defensor, novamente utilizando a probabilidade de um evento complementar:

Quadro 3 - Tabela de possibilidades do dado de defesa (3x1)

Número que a defesa pode obter	**Possibilidades de ganho do ataque**
Defesa obtém “1”	$n_1(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)\right) \cdot 216 = 215$
Defesa obtém “2”	$n_2(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right)\right) \cdot 216 = 208$
Defesa obtém “3”	$n_3(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6}\right)\right) \cdot 216 = 189$
Defesa obtém “4”	$n_4(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}\right)\right) \cdot 216 = 152$
Defesa obtém “5”	$n_5(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)\right) \cdot 216 = 91$

Defesa obtém “6”	$n_6(A) = (1 - P(A')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{6}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{6}{6}\right)\right) \cdot 216 = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Sendo assim, pelo Princípio Aditivo, o número de maneiras do ataque ganhar se dará por: $n(A) = 215 + 208 + 189 + 152 + 91 + 0 = 855$. Como, pelo Princípio Multiplicativo, podemos calcular o total de eventos do espaço amostral, ou seja, o total de maneiras diferentes de se lançar os quatro dados, $n(\mathbf{\Omega}) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$, logo $P(A) = \frac{855}{1296}$. Do mesmo modo anterior, como neste caso, a defesa ganhar é o evento complementar do ataque ganhar, então: $P(D) = 1 - \frac{855}{1296} = \frac{441}{1296}$.

O próximo caso seria 1x2, ou seja, agora é a defesa quem se defende com dois dados e o ataque ataca com apenas um dado.

Dessa maneira, ao invés de calcularmos a probabilidade de o ataque ganhar, utilizando a probabilidade do evento complementar, e, após, calcular a probabilidade do ataque perder, que é o mesmo que a defesa ganhar, nesse caso, pelo mesmo método, faremos que a defesa e o ataque “troquem” de posições. Assim, calculamos, a partir do Quadro 4, a probabilidade da defesa ganhar, dado que o ataque obteve tais números, variando de 1 a 6. Entretanto, antes disso, calculamos o número total de lançamentos distintos de dados defensores: $n(T) = 6 \cdot 6 = 36$.

Quadro 4 - Tabela de possibilidades do dado de ataque (1x2)

Número que o ataque pode obter	**Possibilidades de ganho da defesa**
Ataque obtém “1”	$n_1(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{0}{6} \cdot \frac{0}{6}\right)\right) \cdot 36 = 36$
Ataque obtém “2”	$n_2(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)\right) \cdot 36 = 35$
Ataque obtém “3”	$n_3(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right)\right) \cdot 36 = 32$
Ataque obtém “4”	$n_4(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6}\right)\right) \cdot 36 = 27$
Ataque obtém “5”	$n_4(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}\right)\right) \cdot 36 = 20$
Ataque obtém “6”	$n_4(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)\right) \cdot 36 = 11$

Fonte: Elaborado pelo autor.

O número de elementos do espaço amostral é: $n(\mathbf{\Omega}) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ e do número de maneiras da defesa ganhar é $n(D) = 36 + 35 + 32 + 27 + 20 + 11 = 161$. Portanto, $P(D) = \frac{n(D)}{n(\mathbf{\Omega})} = \frac{161}{216}$ e, consequentemente, $P(A) = 1 - P(D) = 1 - \frac{161}{216} = \frac{55}{216}$.

O caso seguinte será 1x3. Para tanto, teremos o que foi feito no caso 1x2, mas adaptando para três dados defensivos. Assim, $n(T) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ representam o total de maneiras distintas de se lançar os três dados defensivos. O Quadro 5 representa quando a defesa ganha nos possíveis resultados do dado atacante:

Quadro 5 - Tabela de possibilidades do dado de ataque (1x3)

Número que o ataque pode obter	**Possibilidades de ganho da defesa**
Ataque obtém “1”	$n_1(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{0}{6} \cdot \frac{0}{6} \cdot \frac{0}{6}\right)\right) \cdot 216 = 216$
Ataque obtém “2”	$n_2(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)\right) \cdot 216 = 215$
Ataque obtém “3”	$n_3(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right)\right) \cdot 216 = 208$
Ataque obtém “4”	$n_4(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6}\right)\right) \cdot 216 = 189$
Ataque obtém “5”	$n_4(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}\right)\right) \cdot 216 = 152$
Ataque obtém “6”	$n_4(D) = (1 - P(D')) \cdot n(T) = \left(1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)\right) \cdot 216 = 91$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Desse jeito, $n(D) = 215 + 215 + 208 + 189 + 152 + 91 = 1071$. Da mesma forma anterior, calculando, pelo Princípio Multiplicativo, $n(\mathbf{\Omega}) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$, e, por conseguinte, $P(D) = \frac{1071}{1296}$ e $P(A) = 1 - \frac{1071}{1296} = \frac{225}{1296}$.

Neste trabalho não apresentaremos os cálculos para os casos 3x2, 2x3 e 3x3, pois segue de forma análoga ao próximo caso, 2x2. A fim de situar o leitor, esse será feito listando-se as possibilidades de lançamentos dos dados. No quadro abaixo, cada jogada, tanto ofensiva, quanto defensiva, será representada por um par ordenado da forma (d_1, d_2), onde "d_1" representa o número obtido pelo lançamento do primeiro dado e "d_2" o segundo. Sendo assim, o Quadro 6 indica o caso 2x2, levando em consideração as possíveis jogadas defensivas em que o ataque ganha as duas tropas, lembrando que o maior número obtido pelo dado de ataque se compara com o maior número obtido pelo dado de defesa.

Quadro 6 - Tabela das possibilidades de duas vitórias para o ataque (2x2)

Possibilidade de Obtenção dos Dados de Ataque	**Casos de Possíveis Dados de Defesa em que o Ataque Ganha com as Duas Tropas**	**Número de Casos**
Ataque obtém $(6, 6)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(4, 5)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$; $(5, 5)$	25 casos
Ataque obtém $(6, 5)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(4, 5)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$	24 casos
Ataque obtém $(6, 4)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$	21 casos
Ataque obtém $(6, 3)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$	16 casos
Ataque obtém $(6, 2)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(3, 1)$; $(4, 1)$; $(5, 1)$	9 casos
Ataque obtém $(6, 1)$	-	0 casos
Ataque obtém $(5, 6)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(4, 5)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$	24 casos
Ataque obtém $(5, 5)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$	16 casos
Ataque obtém $(5, 4)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$	15 casos
Ataque obtém $(5, 3)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$	12 casos
Ataque obtém $(5, 2)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(2, 1)$; $(3, 1)$; $(4, 1)$	7 casos
Ataque obtém $(5, 1)$	-	0 casos

Ataque obtém $(4, 6)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$	21 casos
Ataque obtém $(4, 5)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$	15 casos
Ataque obtém $(4, 4)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$	9 casos
Ataque obtém $(4, 3)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$	8 casos
Ataque obtém $(4, 2)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 1)$	5 casos
Ataque obtém $(4, 1)$	-	0 casos
Ataque obtém $(3, 6)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$	16 casos
Ataque obtém $(3, 5)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$	12 casos
Ataque obtém $(3, 4)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$	8 casos
Ataque obtém $(3, 3)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$	4 casos
Ataque obtém $(3, 2)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 1)$	3 casos
Ataque obtém $(3, 1)$	-	0 casos
Ataque obtém $(2, 6)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(3, 1)$; $(4, 1)$; $(5, 1)$	9 casos
Ataque obtém $(2, 5)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(2, 1)$; $(3, 1)$; $(4, 1)$	7 casos
Ataque obtém $(2, 4)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 1)$	5 casos
Ataque obtém $(2, 3)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 1)$	3 casos
Ataque obtém $(2, 2)$	$(1, 1)$	1 caso
Ataque obtém $(2, 1)$	-	0 casos
Ataque obtém $(1, 6)$	-	0 casos
Ataque obtém $(1, 5)$	-	0 casos
Ataque obtém $(1, 4)$	-	0 casos
Ataque obtém $(1, 3)$	-	0 casos
Ataque obtém $(1, 2)$	-	0 casos
Ataque obtém $(1, 1)$	-	0 casos

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, $n(\mathbf{\Omega}) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$, pois há quatro lançamentos, e pelo Princípio Aditivo, utilizando a notação “AA” para a ocorrência do ataque ganhar com as duas tropas, $n(AA)$ é igual a soma do número de casos em que o ataque vence em ambos os dados, situados na coluna à direita do Quadro 06. Portanto, $P(AA) = \frac{n(AA)}{n(\mathbf{\Omega})} = \frac{295}{1296}$. Do mesmo modo pode-se listar as possibilidades de acontecer da defesa ganhar as duas, o que denotaremos por "DD". Para isso, considere o Quadro 7 abaixo:

Quadro 7 - Tabela das possibilidades de duas vitórias para a defesa (2x2)

Possibilidade de Obtenção dos Dados de Defesa	**Casos de Possíveis Dados de Ataque em que a Defesa Ganha com as Duas Tropas**	**Número de Casos**
Defesa obtém $(6, 6)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$;$(1, 6)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$;$(2, 6)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$;$(3, 6)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(4, 5)$;$(4, 6)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$; $(5, 5)$;$(5, 6)$; $(6, 1)$; $(6, 2)$; $(6, 3)$; $(6, 4)$; $(6, 5)$;$(6, 6)$	36 casos
Defesa obtém $(6, 5)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$;$(1, 6)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$;$(2, 6)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$;$(3, 6)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(4, 5)$;$(4, 6)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$; $(5, 5)$;$(5, 6)$; $(6, 1)$; $(6, 2)$; $(6, 3)$; $(6, 4)$; $(6, 5)$	35 casos
Defesa obtém $(6, 4)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$;$(1, 6)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$;$(2, 6)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$;$(3, 6)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(4, 5)$;$(4, 6)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$; $(6, 1)$; $(6, 2)$; $(6, 3)$; $(6, 4)$	32 casos
Defesa obtém $(6, 3)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$;$(1, 6)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$;$(2, 6)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$;$(3, 6)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(6, 1)$; $(6, 2)$; $(6, 3)$	27 casos
Defesa obtém $(6, 2)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$;$(1, 6)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$;$(2, 6)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(6, 1)$; $(6, 2)$	20 casos
Defesa obtém $(6, 1)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$;$(1, 6)$; $(2, 1)$; $(3, 1)$; $(4, 1)$; $(5, 1)$; $(6, 1)$	11 casos
Defesa obtém $(5, 6)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$;$(1, 6)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$;$(2, 6)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$;$(3, 6)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(4, 5)$;$(4, 6)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$; $(5, 5)$;$(5, 6)$; $(6, 1)$; $(6, 2)$; $(6, 3)$; $(6, 4)$; $(6, 5)$	35 casos
Defesa obtém $(5, 5)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(4, 5)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$; $(5, 5)$	25 casos
Defesa obtém $(5, 4)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(4, 5)$; $(5, 1)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$	24 casos
Defesa obtém $(5, 3)$	$(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 1)$; $(4, 2)$; $(4, 3)$;	21 casos

	$(5,1)$; $(5,2)$; $(5,3)$	
Defesa obtém $(5,2)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(2,5)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(5,1)$; $(5,2)$	16 casos
Defesa obtém $(5,1)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$; $(2,1)$; $(3,1)$; $(4,1)$; $(5,1)$	9 casos
Defesa obtém $(4,6)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$;$(1,6)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(2,5)$;$(2,6)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(3,3)$; $(3,4)$; $(3,5)$;$(3,6)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(4,3)$; $(4,4)$; $(4,5)$;$(4,6)$; $(5,1)$; $(5,2)$; $(5,3)$; $(5,4)$; $(6,1)$; $(6,2)$; $(6,3)$; $(6,4)$	32 casos
Defesa obtém $(4,5)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(2,5)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(3,3)$; $(3,4)$; $(3,5)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(4,3)$; $(4,4)$; $(4,5)$; $(5,1)$; $(5,2)$; $(5,3)$; $(5,4)$	24 casos
Defesa obtém $(4,4)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(3,3)$; $(3,4)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(4,3)$; $(4,4)$	16 casos
Defesa obtém $(4,3)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(3,3)$; $(3,4)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(4,3)$	15 casos
Defesa obtém $(4,2)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(4,1)$; $(4,2)$	12 casos
Defesa obtém $(4,1)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(2,1)$; $(3,1)$; $(4,1)$	7 casos
Defesa obtém $(3,6)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$;$(1,6)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(2,5)$;$(2,6)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(3,3)$; $(3,4)$; $(3,5)$;$(3,6)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(4,3)$; $(5,1)$; $(5,2)$; $(5,3)$; $(6,1)$; $(6,2)$; $(6,3)$	27 casos
Defesa obtém $(3,5)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(2,5)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(3,3)$; $(3,4)$; $(3,5)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(4,3)$; $(5,1)$; $(5,2)$; $(5,3)$	21 casos
Defesa obtém $(3,4)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(3,3)$; $(3,4)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(4,3)$	15 casos
Defesa obtém $(3,3)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(3,3)$	9 casos
Defesa obtém $(3,2)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(3,1)$; $(3,2)$	8 casos
Defesa obtém $(3,1)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,1)$; $(3,1)$	5 casos
Defesa obtém $(2,6)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$;$(1,6)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(2,5)$;$(2,6)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(5,1)$; $(5,2)$; $(6,1)$; $(6,2)$	20 casos
Defesa obtém $(2,5)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(2,5)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(5,1)$; $(5,2)$	16 casos
Defesa obtém $(2,4)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(2,4)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(4,1)$; $(4,2)$	12 casos
Defesa obtém $(2,3)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(3,1)$; $(3,2)$	8 casos
Defesa obtém $(2,2)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(2,1)$; $(2,2)$	4 casos

Defesa obtém $(2,1)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(2,1)$	3 casos
Defesa obtém $(1,6)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$;$(1,6)$; $(2,1)$; $(3,1)$; $(4,1)$; $(5,1)$; $(6,1)$	11 casos
Defesa obtém $(1,5)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$; $(2,1)$; $(3,1)$; $(4,1)$; $(5,1)$	9 casos
Defesa obtém $(1,4)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(2,1)$; $(3,1)$; $(4,1)$	7 casos
Defesa obtém $(1,3)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,1)$; $(3,1)$	5 casos
Defesa obtém $(1,2)$	$(1,1)$; $(1,2)$; $(2,1)$	3 casos
Defesa obtém $(1,1)$	$(1,1)$	1 caso

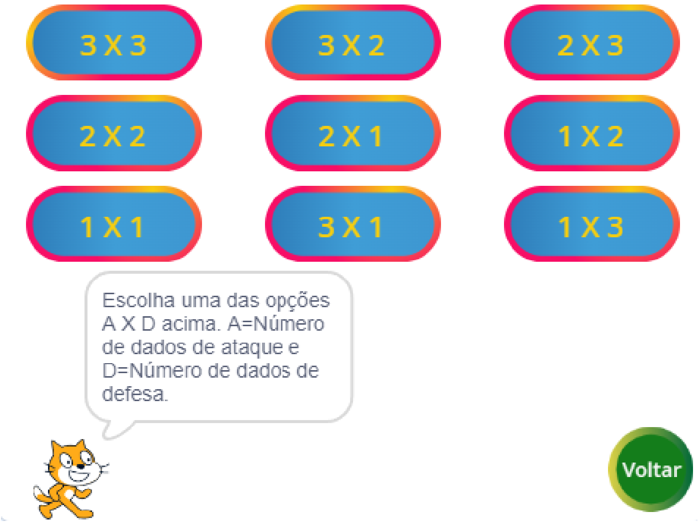
Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, pelo Princípio Aditivo, o número de possibilidades de acontecer “DD” é dado por $n(DD) = 581$ e, consequentemente, $P(DD) = \frac{581}{1296}$. Como a outra possibilidade de ocorrência é um ganho para o ataque e outro para a defesa, a qual será denotada por “AD”, dado que $n(\mathbf{\Omega}) = n(AA) + n(DD) + n(AD)$, então $1296 = 295 + 581 + n(AD)$, e assim, $n(AD) = 420$ e $P(AD) = \frac{420}{1296}$.

Para os casos 3x2, 2x3 e 3x3, como foi dito, segue-se de maneira análoga listando-se as possibilidades, como fez a usuária GislainePP em seu projeto[8], utilizando o *software Scratch*[9], cuja *interface* está ilustrada na Figura 02. Para os cálculos de probabilidade, basta dividir o número de casos de cada possibilidade, dentro de algum dos casos e, assim, será obtido a probabilidade de cada caso. Para os casos 3x2 e 2x3, pelo Princípio Multiplicativo, $n(\mathbf{\Omega}) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$, enquanto para o caso 3x3, $n(\mathbf{\Omega}) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 46656$. Já a Figura 03 representa as probabilidades do caso 3x3 dados as listagens dos casos “AAA”, “DDD”, “AAD” e “ADD”, onde cada letra na sigla significa se a quantidade de combates que o ataque ganhou, representada por “A”, ou a quantidade de combates que a defesa ganhou, representada por “D”.

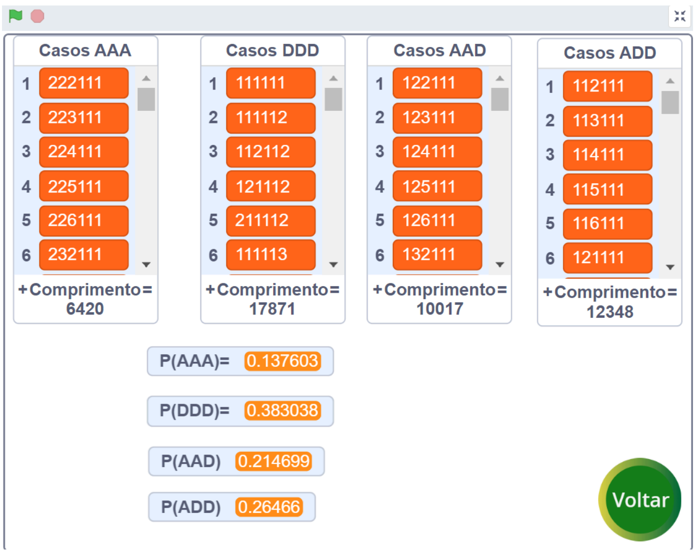
[8] Disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/1020177307. Acesso em: 19 maio de 2024.
[9] Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 19 maio de 2024.

Figura 2 - *Interface* do projeto de GislainePP



Fonte: Prato (2024)

Figura 3 - Probabilidades no caso 3x3



Fonte: Prato (2024)

3. Abordagem Metodológica

Quanto à metodologia, uma prática foi realizada em uma escola estadual na Zona Sul de Porto Alegre. A minha escolha, de tal instituição, se deu devido a recomendações de conhecidos, mas foi apenas durante a aplicação dessa prática que tive o primeiro contato com essa turma e esse ambiente escolar.

Os dados foram produzidos a partir de observações de respostas dos estudantes em relação às perguntas surgidas em sala de aula, assim como participação da turma nas atividades, por meio de um diário de campo. Dessa forma, os resultados serão destinados a uma pesquisa qualitativa sobre o tema e julgados se as práticas foram produtivas, como poderia melhorar a prática, entre outras questões que podem ser levantadas.

A pesquisa qualitativa é importante, uma vez que esta possibilita que o pesquisador realize uma análise sobre os dados (Borba; Araújo, 2019). Desse modo, não apenas dados quantitativos serão utilizados, mas será analisado todo o processo desta pesquisa, observando as respostas dos estudantes, o desenvolvimento da prática, entre outros, a fim de cumprir os objetivos desta pesquisa.

Uma prática foi realizada, composta de seis períodos de 45 minutos, divididos em dois encontros, de três períodos cada, no horário de aula da escola. Além do mais, dentre um total esperado de 11 alunos na turma, em que a prática foi realizada, embora apenas 5 concordaram em participar da pesquisa, sendo 4 do sexo masculino e 1 do sexo feminino. A prática foi majoritariamente em torno do jogo *War*, sendo que a atividade foi desenvolvida a partir do lúdico desse jogo de entretenimento. A seguir mostra-se uma imagem (Figura 04) de um jogo casual de *War*.

Figura 4 - Tabuleiro e peças do jogo *War*

Fonte: https://tecontohistoria.blogspot.com/2012/08/war-o-jogo-da-estrategia.html.

Essa prática foi realizada em uma escola (Carta de Anuência da Instituição no Apêndice A) da rede pública, cujo público-alvo, da prática, foram estudantes da 3ª série do Ensino Médio. Sendo assim, os estudantes (Termo de Assentimento no Apêndice C) estarão sujeitos a uma série de atividades que, como foi falado anteriormente, serão em torno do jogo no qual esse trabalho diz respeito. Assim, com a autorização dos estudantes e responsáveis (Termos de Consentimento Livre e Esclarecido no Apêndice B), podemos começar a prática.

3.1 Planejamento para o primeiro encontro

O primeiro encontro foi determinado para a explicação das regras de tal jogo e para que os estudantes se disponibilizassem a jogá-lo, assim como dar início às explicações envolvendo probabilidade. Para tanto, foram destinados uma hora e quinze minutos para a exploração do jogo e uma hora para explicação e debates a respeito de probabilidade. Desse jeito, tive o importante papel de mediador no primeiro momento, esteve disponível para eventuais dúvidas no andamento das partidas para esclarecer as regras.

Já no segundo momento, foi destinado um tempo para que os estudantes explorassem o uso dos dados e analisassem as ocorrências de cada lançamento, dando início, assim, à introdução da Probabilidade Frequentista, que diz que o cálculo da probabilidade deve ser realizado a partir de experimentos e análises em cima desses para se determinar as chances de tal evento ocorrer, algo que foi explicado em aula, assim como que o cálculo de probabilidade é a partir da razão entre a frequência de um certo evento e as repetições do experimento. A ideia por trás desse momento, o qual teve como finalidade investigar as ocorrências dos lançamentos de dados e analisar esses a partir da ideia de que a frequência determina a probabilidade, é proporcionar aos estudantes um primeiro contato com a probabilidade a partir de suas próprias análises. No Quadro 8 está a proposta de uma atividade para avaliar seus entendimentos sobre a Probabilidade Frequentista, assim como servir de introdução para a Probabilidade Clássica.

Quadro 8 - Atividade sobre Probabilidade Frequentista

Atividade:

1) Quantas vezes você lançou o dado? ___________________

2) Quantas vezes o dado caiu com cada face apontada para cima?

   a) Face 1:
   b) Face 2:
   c) Face 3:
   d) Face 4:
   e) Face 5:
   f) Face 6:

3) Qual a probabilidade frequentista de cada face cair voltada para cima?

   a) Face 1:
   b) Face 2:
   c) Face 3:
   d) Face 4:
   e) Face 5:
   f) Face 6:

4) Você acha que se jogasse mais vezes o dado, haveria uma mudança de valores nas probabilidades? Explique.

____
____
____
____

5) Qual era o valor esperado de probabilidade por você, antes dos lançamentos, para cada face? Explique.

____
____
____

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 Planejamento para o segundo encontro

Para o segundo encontro, foi apresentada a Probabilidade Clássica, baseada em um espaço amostral equiprovável e definida formalmente. Desse jeito, a introdução da Probabilidade Clássica para os estudantes se deu a partir de uma breve aula expositiva no quadro, onde foram apresentados os teoremas e definições mais introdutórios e necessários para cálculos relacionados ao jogo. O quadro a seguir (Quadro 9) esclarece ao leitor o que foi escrito no quadro. Após isso, houve uma rodada de perguntas direcionadas aos estudantes sobre alguns tipos de exemplos no dia a dia em que aparecem o uso da probabilidade ou que esses poderiam ser utilizados.

Quadro 9 - Planejamento de quadro para aula expositiva sobre Probabilidade Clássica

Probabilidade:

Noção intuitiva:
- Qual a chance de chover?
- Qual a chance de eu ganhar na loteria?
- Qual a chance de cair cara num jogo de cara ou coroa?

Definições:
- Espaço Amostral ($\boldsymbol{\Omega}$): é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório;
- Evento (A): é todo subconjunto do espaço amostral.

$$0 \leq n(A) \leq n(\boldsymbol{\Omega})$$

Princípio Aditivo:
- Dados A e B eventos excludentes, a probabilidade de ocorrer A ou B é dada por $P(A) + P(B)$.

Princípio Multiplicativo:
- Dados A e B eventos independentes e simultâneos, a probabilidade de ocorrer A e B é dada por $P(A) \cdot P(B)$.

Probabilidade:
- Espaço amostral equiprovável;
- Razão entre os pontos favoráveis e os pontos possíveis.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\boldsymbol{\Omega})}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Probabilidade do Evento Complementar: • Dados os eventos A e $\overline{A}$, sendo $\overline{A}$ o evento complementar de A, então: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o próximo passo, dado que os estudantes compreenderam como o jogo *War* funciona, perguntas já preparadas acerca de situações de jogo foram realizadas, tais como se estivesse uma tropa na posição A e quisesse atacar a posição B, qual a probabilidade de se realizar tal proeza. Nessa etapa, a qual durou uma hora e quinze minutos, foi trazido alguns elementos da probabilidade, como perguntas relacionadas a definições e teoremas, fazendo relações com o que se foi estudado no último encontro. Além do mais, após isso, houve um tempo de uma hora e quinze minutos, destinado aos estudantes para que eles joguem o jogo novamente, mas utilizando a probabilidade como estratégia para vencer o jogo e não apenas a intuição. Dessa maneira, pedi aos estudantes que, após isso, analisassem as suas estratégias, junto ao professor, para medir a produtividade do conhecimento sobre probabilidade.

Uma das formas de avaliação foi dada a partir de um formulário, como ilustra o Quadro 10, entregue aos estudantes de maneira que eles respondam se a prática foi produtiva, se fariam alguma alteração e, principalmente, a fim de responder a pergunta norteadora, se notaram alguma melhora em suas habilidades no jogo *War* em comparativo com anteriormente ao primeiro jogo da prática. Assim sendo, essa será uma forma direta de avaliação partindo de respostas do público-alvo.

Quadro 10 - Formulário de avaliação das atividades

Formulário de Avaliação das Atividades 1) Você gostou da prática? Qual a sua atividade preferida? Justifique. ____ ____ ____ ____ 2) Você percebeu a presença da probabilidade no jogo e como ela pode ser usada como estratégia para vencer? Disserte. ____ ____ ____ ____

3) Você consegue citar exemplos do uso da probabilidade no cotidiano? Cite.

____
____
____
____

4) Você acredita que o jogo *War* contribui para o seu aprendizado acerca da probabilidade?

____
____
____
____

5) Você acredita que adotou uma estratégia mais ofensiva ou mais defensiva? Justifique.

____
____
____
____

6) Você notou alguma diferença em sua evolução como jogador de *War* antes e após as simulações de situações de jogo? Os cálculos de probabilidade contribuíram para essa evolução?

____
____
____
____

Fonte: Elaborado pelo autor.

4. Relato dos encontros e análise de dados

Neste capítulo, serão apresentados os relatos de como se deram os encontros. Sendo assim, haverá tanto uma parte narrativa de como os encontros se deram, como também uma análise do que ocorreu, relacionando essa prática com os referenciais teóricos abordados nesta pesquisa.

4.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro foi realizado dia 10 de julho de 2024, em uma quarta-feira chuvosa. Neste encontro, compareceram 7 estudantes, mas focarei em analisar os relatos e comentários apenas dos 5 que concordaram em participar da pesquisa. Foi designada para cada estudante uma letra, de A a E, com a finalidade de analisar suas respostas, preservando as suas identidades.

A escola não havia mencionado sobre como ocorreria a prática, nem que seria com o outro professor, apenas que seria uma “atividade diferente” no período de Matemática, o qual se estende das 13:30h até às 15:45h. Dessa maneira, seria destinado uma hora e quinze minutos para que os estudantes jogassem o jogo apenas para familiarização, como é citado como um dos momentos por Grando (2000, 2004), e o restante, uma hora, para explicação sobre a Probabilidade Frequentista, aplicação da atividade envolvendo o lançamento do dado e introdução expositiva sobre a Probabilidade Clássica.

Devido ao atraso de alguns estudantes, os quais foram chegando gradualmente após o horário de início, tivemos que iniciar às 13:45h, onde começou a explicação das regras. Mesmo assim, os estudantes continuaram chegando. Por isso tive que reiniciar a explicação. Após, os estudantes foram divididos e, com a finalidade de completar dois jogos em tabuleiros de quatro jogadores cada, participei de um jogo com os estudantes, mas eventualmente passava no outro grupo para sanar dúvidas, não abandonando o papel de mediador. Desse jeito, um dos jogos chegou ao final quando um dos estudantes terminou o seu objetivo de conquistar vinte e quatro territórios. No outro jogo, desenvolvido no tabuleiro formado apenas pelos estudantes como jogadores, não houve um vencedor, mas um acordo de que venceria quem chegou mais próximo de completar o objetivo. Ainda houve a criação de uma regra, pelos próprios estudantes, a qual foi nomeada como “União Dinâmica” ou “Pacto”, no qual os jogadores se uniram por um número definido de jogadas para não atacarem um ao outro, embora tenham ocorrido “quebras” no “Pacto”.

O jogo em si começou por volta das 14:10h e se desenrolou até às 15:15h, quando houve um vencedor e um acordo de vencedor. A Figura 5 e a Figura 6 mostram a distribuição das peças, em alguns territórios, em ambos os tabuleiros no desenrolar do jogo.

Figura 5 - Tabuleiro 1

Fonte: Acervo do autor.

Figura 6 - Tabuleiro 2

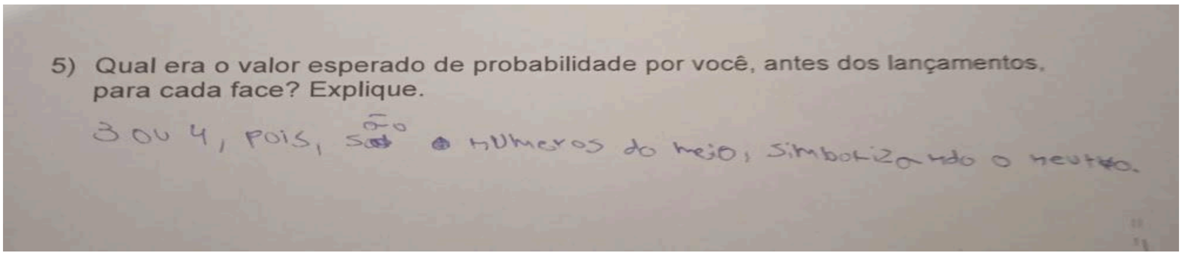
Fonte: Acervo do autor.

Até às 15:20h, os estudantes me ajudaram a guardar as peças e os dados. Em seguida, distribuí a próxima atividade em papel e iniciei a explicação de Probabilidade Frequentista. Pedi aos estudantes que lançassem o dado de seis faces, o mesmo que foi usado no jogo, dez vezes e que anotassem quantas vezes obtiveram cada face. Os resultados foram bem variados, dado que a Probabilidade Frequentista abre margem para grandes variações quando há relativamente poucas realizações do experimento. Assim, na atividade 3 apresentada anteriormente no Quadro 8, os alunos tinham que anotar a Probabilidade Frequentista de cada face, baseados em seus lançamentos. Para tanto, dois estudantes apontaram as respectivas Probabilidades Frequentistas corretamente, sendo eles o Estudante A e o Estudante C, baseados em seus experimentos. Já os Estudantes B e D se confundiram na divisão entre o número de ocorrências do evento e repetições do experimento fizeram a divisão por 6, ao invés de por 10, confundindo o número de faces do dado com o de repetições do experimento. O Estudante E também se equivocou, mas com os conceitos: anotou todas as probabilidades como $\frac{1}{6}$, representando a Probabilidade Clássica que, segundo Lopes e Ferreira (2004), é calculada sobre um espaço amostral equiprovável, neste caso as 6 faces de um dado não viciado. Nessa última situação, é provável que o Estudante E já tivesse conhecimento da corrente Clássica da Probabilidade, visto que nesse momento, foi apenas destinado a jogar o *War* e introduzir a Probabilidade Frequentista, enquanto não houve uma introdução da Probabilidade Clássica. Desse modo, a corrente Frequentista de Probabilidade foi novidade, de maneira que não houve uma exploração prévia da Probabilidade Frequentista em relação a Probabilidade Clássica em seus estudos. Talvez o Estudante E tenha se apegado firmemente a um único jeito de calcular probabilidades, apresentando certa resistência, como apontam Lopes e Ferreira (2004).

Analisando as respostas da pergunta 4 do Quadro 8, que diz respeito a mudanças na probabilidade do lançamento dos dados, 3 dos 5 estudantes responderam que acreditavam que haveria mudança, fazendo menção às perguntas anteriores, assim como ao jogo, já que uma das respostas diz respeito à pessoa que lança o dado. Nessa pergunta, ficou claro que os estudantes compreenderam bem a ideia de Probabilidade Frequentista, visto que pode haver grandes alterações, especialmente quando há poucas repetições do experimento. Os Estudante A, e os Estudantes B e D, apesar de terem cometido alguns erros nos cálculos, demonstraram certa coerência na pergunta anterior com relação aos seus experimentos. Enquanto isso, os outros dois estudantes, C e E, responderam que a Probabilidade é sempre $\frac{1}{6}$, então a forma de você lançar os dados não influenciaria na probabilidade. Desse modo, foi possível perceber que o Estudante E foi bem coerente em suas respostas, mas se apegou fortemente, como já havíamos mencionado, na corrente da Probabilidade Clássica. O Estudante C, por sua vez, também se concentrou no cálculo a partir da mesma corrente que o Estudante E, mas, como havia se equivocado nos cálculos da pergunta anterior, há a possibilidade dele não ter se dado conta que esta pode vir a sofrer alterações, seguindo a corrente Frequentista.

Já na última pergunta, sobre o valor esperado de probabilidade para cada uma das seis faces. Houve respostas bem diversas, por exemplo não se esperar valor específico, conhecer as probabilidades de cada face e, ainda, se esperar a mesma probabilidade calculada anteriormente. O Estudante B distribuiu os valores que obteria em seus lançamentos para cada face como ele esperava, sendo 3 para face um, 2 para face dois, 1 para face três, 0 para face quatro, 1 para face cinco e 3 para face seis. Por fim, o Estudante A anotou (Figura 7) que esperava que as faces 3 e 4 fossem mais frequentes, simbolizando o neutro.

Figura 7 - Resposta do Estudante A


5) Qual era o valor esperado de probabilidade por você, antes dos lançamentos, para cada face? Explique.

3 ou 4, pois, são números do meio, simbolizando o neutro.

Fonte: Dados da pesquisa.

O que faz bastante menção à mediana dos valores, já que, para ele, os valores centrais simbolizariam o neutro.

4.2 Segundo encontro

O segundo ocorreu no dia 17 de julho de 2024, novamente em uma quarta-feira, esse uma semana após o primeiro encontro. Nesse encontro, compareceram 8 estudantes e, dentre eles, todos os que haviam concordado em participar da pesquisa estavam presentes.

O horário de início seria 13:30h, mas, devido ao atraso dos estudantes, comecei a escrever no quadro às 13:40h e dei início à explicação às 13:45h. O previsto seria que fosse gasto em torno de trinta minutos para explicar o conteúdo de Probabilidade Clássica e fazer uma comparação com a Probabilidade Frequentista; contudo, vieram muitas perguntas por parte dos estudantes a respeito de jogos de cara ou coroa, loteria e dados quando se iniciou a explicação, de modo que levou mais tempo que o esperado. Dessa forma, sanei as dúvidas e, aquelas que exigiam mais cálculos, expliquei que as respostas ficariam mais claras após a explicação completa do conteúdo. Muitos estudantes interagiram comigo, mas outros estavam realizando exercícios de Probabilidade, de maneira que, mesmo não estando atentos por completo, ainda assim trouxeram perguntas interessantes para debate.

Após isso, houve o momento de calcular as probabilidades, somente dos casos 1x1 e 2x1 devido ao curto tempo. Mesmo restringindo as probabilidades de situações de jogos a dois casos, os estudantes tiveram dificuldade, por isso tive que ajudá-los, indo ao quadro para explicar o caso 1x1. Após, os estudantes pareceram compreender a explicação desse caso. Quanto ao caso 2x1, que seria mais complicado, mostrei uma ideia de resolução para eles e deixei que calculassem. Nessa segunda parte, alguns estudantes pareciam estar com dúvidas e ter um entendimento parcial a respeito do cálculo, mas aparentavam terem entendido a ideia de resolução. Por fim, anotei as probabilidades de cada possibilidade em ataques no quadro, a fim de que os estudantes as olhassem e analisassem suas jogadas.

Em seguida, a turma foi distribuída em dois grupos de quatro jogadores, de modo que não houve a necessidade de eu jogar dessa vez e, assim, pude me concentrar na mediação do processo. Isso facilitou a tomada de notas no diário de campo, pois, no encontro passado, tive que cumprir o papel de jogador também. Quanto ao jogo, uma das duas mesas de jogadores ficou bem desequilibrada, já que, na escolha de territórios, os jogadores “deixaram” um deles tomar quase por completo o continente da América do Norte, de jeito que ele ganharia tropas extras quase no começo da partida. Mesmo assim, nessa mesa, não houve vencedor, por causa do tempo. Na outra mesa também não houve vencedor, mas o jogo foi disputado, visto que, no final, os jogadores queriam fazer um acordo de que seria o vencedor aquele que mais se aproximou de seu objetivo. Mesmo assim, não houve um vencedor “explícito”. Já no fim, ao lançar seus dados, um dos jogadores afirmou que o jogo era “*mais emocionante do que Futebol*” e, após o término da atividade, relatou que futebol era sua paixão, fazendo menção ao quanto ele se divertiu no jogo e, por conseguinte, que é defendido por Mattos (2009), como o jogo proporcionou um melhor aprendizado.

Uma discussão interessante que surgiu foi a seguinte: se houvesse apenas uma tropa defensora, seria mais vantajoso atacar com uma ou duas peças. A resposta partiu de um dos estudantes, percebendo a importância das probabilidades, que respondeu "*olha para o quadro*" enquanto apontava para onde elas estavam anotadas.

Por último, pedi que os estudantes preenchessem o Formulário de Avaliação das Atividades, que consta no Quadro 10, mas como esses estavam apressados para o intervalo, realizaram-no com respostas sucintas.

A primeira pergunta fazia referência aos gostos pessoais pela prática, ou seja, se o aluno havia achado a experiência interessante ou não. Todos os 5 estudantes que concordaram em participar da pesquisa responderam que gostaram. Os Estudantes A e B opinaram que gostaram do jogo *War*. Enquanto isso, o Estudante C disse que acha a Matemática uma área de seu interesse e que gosta de aulas relacionadas à matéria. O Estudante D disse que gostou de todas as atividades, o que inclui a parte mais teórica das probabilidades, assim como ela aplicada ao jogo e o próprio jogo. Com essa resposta, podemos ver que todas as etapas aplicadas do jogo à educação são importantes, como defende Grando (2000, 2004), de modo que o estudante aproveite o jogo e também desenvolva os conhecimentos pretendidos. Além disso, o jogo de entretenimento pode ser mais interessante ao estudante, como é o caso do jogo *War*, pois o estudante se identifica com o jogo, e há a vontade de jogar bem e ganhar (Grando, 2015). Por fim, o Estudante E foi sucinto e disse que achou divertido.

Quanto ao uso da Probabilidade no jogo, apenas 3 estudantes relataram que a usaram, sendo que o Estudante E ainda falou que usou bastante a probabilidade do caso 3x1. Os Estudantes B e C não a viram presente no jogo como estratégia para vencer, o que acabou sendo uma etapa ausente em relação às das quais citadas por Grando (2015). Um dos motivos para essa ausência pode ser o curto tempo para fazer uma melhor ligação entre o jogo e a probabilidade. A próxima pergunta, constatada no formulário, dizia respeito a exemplos de probabilidade no cotidiano. Nas respostas, os Estudantes B, C e D disseram que não conseguiam citar exemplos, mesmo quando, no início da aula expositiva, foi dado exemplos de chuva, loteria, jogos de cara ou coroa e os próprios dados que foram utilizados ao longo da prática. Já os estudantes A e E responderam que sim, e o estudante E ainda apontou o exemplo da chuva. A próxima pergunta era sobre o fato de o jogo ter ajudado no aprendizado deles sobre probabilidade. O Estudante A disse que ajudou um pouco, já o Estudante C, respondeu que não pode afirmar isso, já que não a utilizou. Os Estudantes B, D e E responderam afirmativo nessa pergunta, e acreditam que o jogo ajudou no entendimento deles acerca da probabilidade.

Na pergunta 5 do questionário, os Estudantes A e B relataram que adotaram uma estratégia equilibrada/neutra; o Estudante C adotou uma estratégia defensiva; o Estudante E; ofensiva; e o Estudante D jogou tanto defensivamente quanto ofensivamente. Isso demonstra que, apesar de alguns não terem utilizado a Probabilidade como estratégia, todos adotaram alguma estratégia mostrando como o uso de um jogo de entretenimento pode ser atrativo para o estudante e ajudar no seu aprendizado (Grando, 2015). A última pergunta tinha o intuito de saber, por parte dos jogadores, sobre sua evolução a partir do conhecimento das probabilidades presentes no jogo. O Estudante A disse que o conhecimento acerca das probabilidades contribuiu muito para sua evolução como jogador. O Estudante E também afirmou que aprendeu mais sobre esse tópico a partir do jogo e o Estudante D afirmou que, por essa razão, estava quase ganhando o jogo. Os Estudantes B e C acreditam que não foi um diferencial conhecer as probabilidades do jogo. O conhecimento das probabilidades, como foi citado anteriormente, talvez não fosse a estratégia adotada pelos jogadores para vencer a partida, mas certamente foi uma possibilidade e, segundo o Estudante D, uma estratégia vencedora, pois ele estava quase alcançando o seu objetivo.

5. Considerações Finais

Neste último tópico, serão abordadas algumas considerações finais sobre o trabalho, assim como a retomada da pergunta diretriz. Também haverá comentários a respeito dos objetivos, se esses foram atingidos e que mudanças poderiam ser feitas caso a prática fosse realizada novamente.

Quanto aos objetivos da pesquisa ao final da prática - compreensão dos estudantes sobre o que é a probabilidade, que eles saibam interpretar as probabilidades de sucesso e fracasso em suas jogadas e percebê-la em situações cotidianas - acreditamos que foram atingidos, mas de maneira diferente da que era esperada no início da pesquisa. Primeiramente, fazendo referência ao primeiro objetivo, é possível inferir que todos os cinco estudantes, anteriormente à pesquisa, possuíam certo conhecimento acerca de probabilidade, visto que responderam algumas perguntas com base em seus saberes sobre o tema. Ainda que alguns estivessem mais desenvolvidos que outros, penso que a prática foi importante para todos terem o contato com as duas correntes probabilísticas mencionadas. Além do mais, no início da aula expositiva, no segundo encontro, foi retomada uma noção intuitiva de probabilidade, o que despertou bastante interesse por parte dos estudantes, visto que muitas perguntas foram direcionadas para mim. Quanto ao segundo objetivo, esse foi prejudicado pelo tempo destinado à prática, visto que houve a necessidade de se passar mais rápido pela parte do cálculo das probabilidades do jogo. Desse jeito, os estudantes compreenderam a essência dos cálculos, mas não se pode garantir que eles conseguiriam realizar os cálculos propostos (1x1 e 2x1) sem auxílio. Referente aos exemplos de uso da probabilidade no cotidiano, apesar de alguns não terem conseguido citar quando perguntados pelo formulário, durante a aula expositiva, todos compreenderam e perguntaram sobre probabilidades em loterias ou em chances de chover.

Quanto às mudanças que seriam realizadas caso a prática fosse feita novamente, essas são em relação ao tempo de prática e à organização dos períodos. Sobre o tempo, foi possível verificar que ficou curto e acabou por prejudicar uma das etapas da prática. Desse modo, mais três ou quatro períodos seriam de extrema ajuda para cumprir com o planejamento todo.

Por último, a pergunta diretriz, “como o jogo *War* pode vir a contribuir com o aprendizado dos estudantes acerca de probabilidade?”, foi respondida: de diversas maneiras, desde o lúdico que o jogo proporciona até as diversas experiências vividas em sala de aula. O aluno se interessa pelo jogo, de modo que ele se identifica e consegue fazer relações com o conteúdo que está sendo trabalhado. O jogo *War*, por sua vez, é um jogo de entretenimento coletivo, o que permite que os estudantes interajam entre si proporcionando um ambiente bem divertido.

Assim, há a potencialidade de introduzir o jogo como ferramenta de ensino em algumas aulas. Como visto neste trabalho, o jogo atua como um facilitador no aprendizado dos estudantes, de modo que se pode trabalhar os mais diversos conteúdos matemáticos com eles. O *War* é um jogo atrativo e permite a interação entre eles, de modo a recuperar o que se foi perdido na pandemia da Covid-19, além de trabalhar o raciocínio lógico-matemático.

Referências

BORBA, Marcelo de C.; ARAÚJO, Jussara de L. **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

CALABRIA, Angelica R.; CAVALARI, Mariana F. **Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades.** *In*: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10. 2013. Campinas, SP. [Anais eletrônicos]. Campinas, SP: UFG, 2013. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/335/o/Um_passeio_hist%C3%B3rico_pelo_in%C3%ADcio_da_teoria_das_probabilidades-Mariana_Feiteiro_Cavalari_e_Ang%C3%A9lica_R._Cal%C3%A1bria.pdf?1409001312. Acesso em: 01 abr.2024.

GRANDO, Regina C. Recursos didáticos na educação matemática: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, São Carlos, SP, v. 5, n. 2, p. 393-416, 2015. Disponível em: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/117/114. Acesso em: 26 jul. 2023.

LOPES, Celi A. E.; FERREIRA, Ana C. **A estatística e a probabilidade no currículo de matemática da escola básica.** VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004. Recife. [Anais eletrônicos] - Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004. Disponível em: https://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/13/MR10. pdf Acesso em: 3 ago. 2024.

LOPES, Celi E.; MEIRELLES, Elaine. **O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística.** UNICAMP, 2005. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf. Acesso em: 29 de jan. 2024.

MATTOS, Robson A. L. **Jogo e Matemática**: uma Relação Possível**.** Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2009. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/11919/1/Dissertacao%20Robson%20Mattos.pdf. Acesso em: 26 jul. 2023.

QUEIROZ, Cileda; COUTINHO, Silva. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** São Paulo, v 2.3, p. 50-67, 2007.

PRATO, Gislaine P. **Probabilidades no jogo WAR**. Projeto Scratch. Disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/1020177307. Acesso em: 19 de maio 2024.

SOUZA, Cláudio Henrique A. de. **Probabilidades do Jogo War II.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em : http://www.bdtd.uerj.br/handle /1/19180. Acesso em: 11 abr. 2024.

VASCONCELOS, V. B. de .; VASCONCELOS, G. B. de; CHAQUIAM, M. Um percurso pela história da probabilidade. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 9, n. 26, p. 31–46, 2022. DOI: 10.30938/bocehm.v9 i26.7990. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/7990. Acesso em: 1 abr. 2024.

WARSI, Karl. **O livro da matemática**. Tradução: Maria da Anunciação Rodrigues. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.

Apêndices

Apêndice A - Carta de Anuência da Instituição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, 25/06/2024.

Prezado(a) Diretor(a),

Da Escola: ___________________________________

O acadêmico Thiago Werres Kurylenko é estudante regularmente matriculado no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do currículo do curso, o aluno está desenvolvendo uma pesquisa sobre o jogo *War* e o conteúdo de Probabilidade, para a conclusão de seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o qual é exigido para que possa adquirir o título de Licenciado em Matemática.

O objetivo do trabalho, estritamente acadêmico, em linhas gerais, consiste na compreensão dos estudantes acerca do conteúdo de probabilidade, na interpretação das chances de sucesso e de fracasso em suas jogadas e na análise de situações cotidianas que envolvam tal conteúdo. Neste sentido, torna-se importante proceder à coleta de dados, incluindo gravações, formulários, registros em caderno de campo, arquivos e anotações para futuras análises e obtenção dos resultados relacionados com a aprendizagem da Matemática. Por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto orientadora responsável, reiteramos nosso compromisso ético com os participantes dessa pesquisa e nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte contato: XXXXXXXXXXX@gmail.com.

Agradecemos a sua atenção.
Cordialmente,

____
Lisiane Priscila Roldão Selau

Professora do Instituto de Matemática e Estatística/IME-UFRGS

____
Diretor(a)

Apêndice B - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
ROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
Convite para participação em pesquisa

Título da pesquisa: Potencialidades do Jogo War para o Ensino da Probabilidade no Ensino Médio
Pesquisador: Thiago Werres Kurylenko
Orientadora: Prof. Dra. Lisiane Priscila Roldão Selau

Prezado(a) Participante,

Gostaríamos de convidá-lo(a) a participar da pesquisa "Potencialidades do Jogo War para o Ensino da Probabilidade no Ensino Médio". A pesquisa está vinculada ao trabalho de conclusão de curso do pesquisador Thiago Werres Kurylenko, o qual é estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Profa. Dra. Lisiane Priscila Roldão Selau, a quem você poderá contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (XX) XXXXXXXXX ou e-mail XXXXXXXXXX@gmail.com.

O objetivo da pesquisa consiste na compreensão dos estudantes acerca do conteúdo de probabilidade, na interpretação das chances de sucesso e de fracasso em suas jogadas e na análise de situações cotidianas que envolvam tal conteúdo.

Para isto, solicitamos a sua especial colaboração na participação da pesquisa, a qual ocorrerá por meio de participação em atividades envolvendo o jogo War, em que seu trabalho, seus diálogos com seus colegas e a professora/pesquisadora e suas produções serão analisadas, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Estima-se que sejam investidas no máximo 8 horas para a realização dos encontros referentes às tarefas propostas.

Sua participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade contribuir para o sucesso do estudo, cujos objetivos são estritamente acadêmicos. Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária, podendo você recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. A sua colaboração iniciará apenas a partir da entrega desse documento por você assinado, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence à pesquisadora responsável.

O uso das informações decorridas de sua participação (produção escrita/gravação em áudio/caderno de campo e anotações) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas por um código alfanumérico, de modo a preservar a sua identidade. No caso de fotos e filmagem obtidas durante sua participação, elas também serão utilizadas exclusivamente em atividades acadêmicas, sem identificação. Todas as informações fornecidas por você serão armazenadas sob responsabilidade da pesquisadora por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Com relação aos riscos da pesquisa, informamos que você poderá sentir desconforto emocional e/ou de possíveis riscos psicossociais (ex.; constrangimento, intimidação, angústia, insatisfação, irritação, mal-estar etc.) característicos de ambientes de aprendizagem. Acrescentamos que como pesquisadores temos limitações para assegurar total confidencialidade e potencial risco de violação à privacidade, tendo em vista o registro de dados/logs na utilização de plataforma em ambiente virtual. Ao mesmo tempo, você receberá todo o apoio da professora/pesquisadora no sentido de minimizar estes riscos, tais como resposta a dúvidas e incentivo e apoio para superar essa adaptação.

Já com relação aos benefícios da pesquisa, você terá a oportunidade de conhecer o jogo War, e realizar atividades matemáticas em um ambiente lúdico, proporcionando contribuições para o desenvolvimento, em conjunto com o jogo, do seu pensamento matemático e da sua criatividade.

Destacamos que o seu consentimento não o impede de buscar indenização por eventuais danos causados pela pesquisa.

Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos pode nos contatar
pelo telefone (XX) XXXXXXXXX e e-mail XXXXXXXXXXX@gmail.com .

Caso tenha dúvidas acerca de procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br

Obrigado pela sua colaboração.

Porto Alegre, _____ de ______________ de _______.

Pesquisador Responsável: Thiago Werres Kurylenko – RG XXXXXXXXXX

Eu, ____, portador(a) do documento de identidade ou CPF ___________________________, concordo em participar voluntariamente da pesquisa intitulada “Potencialidades do Jogo War para o Ensino da Probabilidade no Ensino Médio”, desenvolvida pela pesquisadora Thiago Werres Kurylenko. Fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, bem como sobre a metodologia que será adotada, sobre os riscos e benefícios envolvidos.

Autorização do Uso de Imagem e Voz:
(   ) SIM, autorizo a divulgação de minha imagem e voz, com uso de efeitos para a não identificação da minha pessoa, em atividades acadêmicas.
(   ) NÃO autorizo a divulgação de minha imagem e voz.

Porto Alegre, ______ de ________________ de _________.

__________________________________ __________________________________
Assinatura do(a) Responsável Assinatura do pesquisador

Apêndice C - Termos de Assentimento

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, aluno(a) da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada: Potencialidades do Jogo War para o Ensino da Probabilidade no Ensino Médio**,** desenvolvida pelo pesquisador Thiago Werres Kurylenko**.** Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Lisiane Priscila Roldão Selau, professora acadêmica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação, a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que consiste na compreensão dos estudantes acerca do conteúdo de probabilidade, na interpretação das chances de sucesso e de fracasso em suas jogadas e na análise de situações cotidianas que envolvam tal conteúdo.

A minha colaboração se fará por meio de questionários, bem como da participação nas aulas, em que serei observado(a) e minha produção analisada. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Porém, para que não ocorram constrangimentos, estou ciente de que será mantido o anonimato dos dados. Além disso, estou ciente de que poderei deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, é esperado deste estudo, produzir informações importantes sobre Relações entre a prática pedagógica e a pesquisa em Educação Matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes à educação.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo e-mail XXXXXXXXX@gmail.com

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do aluno: ____

Assinatura do pesquisador: ____

Assinatura da Orientadora da pesquisa: ____