UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS DA SAÚDE

DEPARTAMENTO DE BIOQUÍMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

UMA ANALÍTICA WITTGENSTEINIANA: FRENTE AOS ESTRUTURALISMOS NA EDUCAÇÃO (MATEMÁTICA) ESCOLAR

Francielle da Silva Marques

Porto Alegre

2021

FRANCIELLE DA SILVA MARQUES

UMA ANALÍTICA WITTGENSTEINIANA: frente aos estruturalismos na educação (matemática) escolar

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Samuel Edmundo Lopez Bello
Banca examinadora:

Profa. Dra. Suelen Assunção Santos – PPGEC/ UFRGS
Profa. Dra. Patricia Moura Pinho – UNIPAMPA
Profe. Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior – UNIFESSPA

Porto Alegre

2021

CIP - Catalogação na Publicação

Marques, Francielle da Silva
Uma Analítica Wittgensteiniana: frente aos estruturalismos na educação (matemática) escolar / Francielle da Silva Marques. -- 2021.
108 f.
Orientador: Samuel Edmundo Lopez Bello.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Ciências Básicas da Saúde, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, Porto Alegre, BR-RS, 2021.

1. Educação. 2. Matemática. 3. Wittgenstein. 4. Estruturalismo. 5. Linguagem. I. Bello, Samuel Edmundo Lopez, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

SUMÁRIO

1 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A forma como essa dissertação de mestrado está organizada foi dada pela orientação recebida do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências (PPGEC). A composição consiste na organização de três artigos científicos (ao menos um artigo deve ser encaminhado para publicação), nos quais deve ser mobilizado o tema de pesquisa: Uma analítica wittgensteiniana frente aos estruturalismos na educação (matemática) escolar contemporânea, proveniente dos estudos realizados ao longo do curso de mestrado acadêmico. Tendo sido produzidos de maneira integrada às pesquisas do grupo Praktiké da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), os três artigos assumem como premissa que diferentes perspectivas filosóficas mobilizam determinados tipos de educação escolar.

O fio condutor que une os três artigos como uma dissertação é que são sempre apresentadas práticas vistas ao modo de pensar estruturalista, que posteriormente é problematizado a partir da perspectiva de L. Wittgenstein nas Investigações filosóficas. No primeiro artigo será revisitado o modo de pensar estruturalista. No segundo artigo será apresentada uma prática pedagógica de matemática envolvendo números naturais e suas operações. O terceiro capítulo evidencia uma prática pedagógica de matemática envolvendo frações e suas operações, essa última problematização ocorre com a noção de práticas matemáticas escolares pela perspectiva wittgensteiniana aqui trabalhada. Cada um desses capítulos possui seus próprios: resumo, abstract, introdução, conclusões e referências bibliográficas. Seguem-se considerações finais sobre a dissertação e alguns anexos.

4 UMA ANALÍTICA WITTGENSTEINIANA: AS FRAÇÕES NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ESCOLAR PELO ESTRUTURALISMO COGNITIVO PIAGETIANO

Francielle da Silva Marques

Samuel Edmundo Lopez Bello

Resumo

Integrado às pesquisas do grupo *Praktiké* da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), o presente artigo pretende oferecer alternativas para a mobilização de conhecimento matemático escolar na contemporaneidade. Após uma breve introdução, será considerada a mobilização do conhecimento matemático escolar pelo pensamento estruturalista piagetiano, onde será apresentada uma prática pedagógica de matemática utilizando o material manipulativo Fracsoma 235. Esta posteriormente será problematizada a partir do modo de pensar de L. Wittgenstein na obra *Investigações Filosóficas*. Esta perspectiva será articulada utilizando a noção de práticas matemáticas escolares, salientando seu caráter normativo. Seguem-se as considerações sobre a pesquisa e as referências bibliográficas.

Palavras-chave: educação; matemática; Wittgenstein; linguagem; Fracsoma 235.

Abstract

Integrated with the research of the Praktiké group at the Federal University of Rio Grande do Sul (UFRGS) this article aims to offer alternatives for the mobilization of school mathematical knowledge in contemporary times. After a brief introduction, the mobilization of school mathematical knowledge by Piagetian structuralist thinking will be considered, where a pedagogical practice of mathematics using the manipulative material Fracsoma 235 will be presented. This will later be problematized from the perspective of L. Wittgenstein in the book *Philosophical Investigations*. This understanding will be articulated using the notion of school mathematical practices, emphasizing its normative character. Following are considerations about the research and the bibliographic references.

Keywords: education; mathematics; Wittgenstein; language; Fracsoma 235

4.1 Introdução

As primeiras perspectivas filosóficas que mobilizaram conhecimentos escolares e, mais especificamente, conhecimentos escolares matemáticos, no Brasil, foram as perspectivas acríticas. De acordo com estas, as frações seriam uma razão, uma maneira de dividir um número natural em partes, mesmo que o resultado obtido não seja um número natural. O estruturalismo cognitivo piagetiano propôs investigar como o ser humano aprende, tendo servido como base para a perspectiva pedagógica conhecida como construtivismo piagetiano. Este entendimento defende que o conhecimento escolar deve estar ajustado aos estágios de desenvolvimento cognitivo dos alunos, tendo se popularizado como perspectiva para trabalhar conjuntos numéricos no ensino básico.

Este artigo irá propor em sua próxima seção uma prática pensada por intermédio do construtivismo piagetiano, utilizando o material manipulativo Fracsoma 235 para trabalhar a noção de frações nas séries iniciais do Ensino Fundamental. A terceira seção contém o objetivo central deste artigo que é tratar a noção de prática a partir do entendimento de L. Wittgenstein nas *Investigações Filosóficas* e *Observações Filosóficas*. Esta perspectiva terapêutica oferece reflexões sobre as práticas matemáticas escolares, e mais especificamente sobre o uso de material manipulativo para a mobilização de conceitos.

4.2 O Estruturalismo Cognitivo Piagetiano e as Frações

Para o estruturalismo cognitivo piagetiano, a atividade de manipulação é indispensável para a construção de conhecimentos. A partir dessa premissa, esta seção propõe uma sequência didática de matemática para o Ensino Fundamental envolvendo Fracsoma 235, uma das opções de material manipulativo para o trabalho com frações. A perspectiva utilizada nesta seção refuta o inatismo, afirmando que o conhecimento, e mais especificamente o conceito de frações, não é inato ao sujeito, é construído. Esse processo de construção se dá em estágios de complexidade crescente e de maneira contínua, assim, todo um nível deve estar consolidado, sem nenhuma dificuldade, para que se possa construir sobre ele o próximo.

Nas perspectivas estruturalistas, uma das propriedades da estrutura[11] é a autorregulação, nesta as transformações próprias de uma estrutura não conduzem para fora de suas fronteiras e não resultam em elementos exteriores. No entanto, a estrutura pode se encaixar como subestrutura em uma outra estrutura mais ampla,

[11] Para Piaget (1979) as três propriedades da estrutura são a totalidade, as transformações e a autorregulação.

mas com a subestrutura mantendo suas propriedades anteriores. Nos conjuntos numéricos, essa propriedade se reflete quando no conjunto dos números naturais não há operação inversa para a adição. Mas pode-se estender ao conjunto dos números inteiros, onde a subtração é a operação inversa da adição e o conjunto dos números naturais se encaixa como subconjunto, mantendo suas propriedades anteriores. Já no conjunto dos números inteiros não há operação inversa para a multiplicação, então estende-se desse para os números racionais, onde os números inteiros são um subconjunto e a divisão é a operação inversa da multiplicação.

O conceito de frações e suas operações seria construído sobre o de números naturais e suas operações. Dados os estágios de complexidade crescente, em momento algum surge a necessidade de retorno ao estágio anterior, pois este já estaria consolidado quando se inicia a construção do próximo. Como consequência, para se trabalhar as frações e suas operações não é necessário se retomar conceitos dos números naturais, pois estes já estariam consolidados, apenas passariam por ressignificações enquanto se apreende as frações. Da mesma maneira, após construídas as frações e suas operações nas séries iniciais do Ensino Fundamental, não haveria a necessidade de retorno a este tópico em séries posteriores, ele seria simplesmente ressignificado quando se faz a passagem dos números inteiros aos números racionais.

Passa-se de um estágio a outro através de desequilibrações, que são necessidades, chamamentos dos objetos ou respostas a processos de formação. Quando o sujeito consegue uma estrutura que dê conta dessa nova informação, o que ocorre é a equilibração. Como o conceito de frações é considerado uma construção mental, não pode ser ensinado, o professor é apenas um facilitador. A construção é feita pelo aluno, que deve experimentar ativamente e permanecer ativo em todo o processo. Esse entendimento não considera as características individuais de cada aluno, como sua comunidade, língua ou costumes. O estudante é considerado um sujeito epistemológico, sujeito do conhecimento. Em uma sala de aula, todos os alunos pertencem ao mesmo nível operatório, comportam-se de acordo com um núcleo cognitivo comum. Dessa maneira, todos chegarão sempre às mesmas conclusões ao interagir com o material manipulativo, implicando que a construção segue o mesmo modelo para todos.

O estruturalismo cognitivo piagetiano se afasta do empirismo, mas apenas quando deixa de admitir que os conhecimentos provêm totalmente do meio. O sujeito necessita dos objetos para extrair propriedades, o conhecimento é construído através de ações sobre os objetos. Por exemplo, na matemática, a adição corresponderia ao ato de juntar objetos em um mesmo conjunto, a subtração ao ato de remover objetos de um conjunto, então conhecer o mundo seria operar sobre a realidade, interagir com o meio. Essa interação produz abstrações, que ocorreriam em duas principais categorias: as abstrações empíricas e as reflexivas. As que ocorrem primeiro são de menor complexidade: as abstrações empíricas; estas identificam qualidades, baseando-se apenas em aspectos do universo que são possíveis de serem percebidos através dos sentidos. Após concluído o nível das abstrações empíricas, ocorrem as de maior complexidade: as abstrações reflexivas; onde são realizadas ações como reunir, coordenar, corresponder, passando a determinar quantidades, números. As qualidades dos elementos são deixadas de lado, cada um deles passa a ser uma unidade, constituinte de um conjunto que não é mais entendido por propriedades individuais dos elementos, mas por propriedades que caracterizam o todo.

A sequência didática utilizando o Fracsoma 235 que segue foi mobilizada pela perspectiva filosófica construtivista piagetiana. Para se construir novos conhecimentos devem-se causar desequilíbrios, inicialmente pelo material empírico, que promoverá as abstrações empíricas. Os alunos devem trabalhar em pequenos grupos, de maneira que todos tenham a oportunidade de manusear o material. Araújo (2013) propõe que se inicie com o trabalho com os alunos com a história de como se descobriu o material, que posteriormente tornou-se o Fracsoma 235:

> Nas primeiras décadas do Século XX, um grande número de expedições de museus norte-americanos e do Instituto Francês de Arqueologia Oriental do Cairo visitou os sítios do Egito Antigo, fontes aparentemente inesgotáveis de relíquias históricas. De todas as descobertas, a do túmulo de Tutankamon, feita por Howard Carter em 1992, foi sem dúvida a mais importante, na época pensou-se que se tratava de uma espécie de quebra cabeça da nobreza. O jogo de peças estava incompleto [...] (p. 3)

Antes da entrega do material aos alunos, o professor retira algumas peças. Ao entregar aos alunos pergunta-se quantas e quais peças estão faltando. A ideia é que os alunos separem as peças por cor e tamanho. Caso surjam dificuldades, o professor pode atuar dando sugestões de como separar as peças e, posteriormente, a de enfileirar as peças iguais, chegando a uma distribuição como a da figura 1, sendo possível identificar quais peças estão faltando:

Figura 1: Fracsoma 235

Fonte: Araújo, 2013, p. 5.

A ideia da distribuição da figura 1 é que se desenvolvam relações quantificantes, que os elementos de mesma cor e tamanho passem a ser considerados equivalentes entre si, motivo pelo qual participam de uma mesma classe. Após isso solicita-se que o aluno: “Represente com uma fração uma peça de cada fileira”. Apenas para facilitar a nomenclatura durante o artigo, nomearemos as peças com base em sua cor[12], seguida do número de ordem em que essa cor aparece quando as peças são colocadas como na figura 1, mas não é necessário trabalhar essa nomenclatura com os alunos. A partir dessa, temos a resposta: branco (1), vermelho1 $\left(\frac{1}{2}\right)$, amarelo1 $\left(\frac{1}{3}\right)$, vermelho2 $\left(\frac{1}{4}\right)$, azul1 $\left(\frac{1}{5}\right)$, laranja1 $\left(\frac{1}{6}\right)$, vermelho3 $\left(\frac{1}{8}\right)$, amarelo2 $\left(\frac{1}{9}\right)$, roxo1 $\left(\frac{1}{10}\right)$, laranja2 $\left(\frac{1}{12}\right)$, verde $\left(\frac{1}{15}\right)$, vermelho4 $\left(\frac{1}{16}\right)$, laranja3 $\left(\frac{1}{18}\right)$, roxo2 $\left(\frac{1}{20}\right)$, laranja4 $\left(\frac{1}{24}\right)$, azul2 $\left(\frac{1}{25}\right)$, amarelo3 $\left(\frac{1}{27}\right)$, preto $\left(\frac{1}{30}\right)$.

O professor deve salientar que o número que fica no lugar de cima da fração é chamado de numerador e o número de baixo é chamado de denominador. A próxima etapa da sequência trata da equivalência de frações, fazendo o seguinte questionamento aos alunos: “Poderíamos representar um mesmo comprimento com frações diferentes? Por exemplo, há peças em outra fileira que representem a mesma

[12] Nomenclatura inspirada na sequência didática disponível em: http://mdmat.mat.ufrgs.br/PEAD/livros/fracsoma/introducao.html

quantidade do que esta peça? (mostrar vermelho1)”. Pode-se aos poucos ir oferecendo os questionamentos adicionais relativos às cores do jogo: “Quais são as cores primárias?”; “E as cores secundárias?”; “O que acontece se misturarmos as cores vermelho e amarelo?”; “E as cores vermelho e azul?”; “Por que você acha que o nome do material é Fracsoma 235?”.

O professor atua fazendo questionamentos conforme a situação, de maneira que os alunos concluam que as cores primárias são três: vermelho, amarelo e azul e que o nome do material é Fracsoma 235, porque aqui estão representadas as primeiras frações cujos denominadores são múltiplos de 2, 3 e 5. Os alunos vão deduzir que se pode buscar peças em todas as categorias que possuam vermelho na composição de sua cor para representar a mesma quantidade do que uma peça vermelho1. Após isso o professor solicita que se: “Escreva a igualdade que exprime todas as peças do jogo que representam a mesma quantidade do que esta peça (mostrar vermelho1)”:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{8}{16}=\frac{9}{18}=\frac{10}{20}=\frac{12}{24}=\frac{15}{30}$$

O professor deve salientar que nem todas as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ estão presentes no jogo, apenas as de menor numerador e denominador, cujos denominadores são múltiplos de 2, 3 e 5. Mas que para se obter todas as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ basta multiplicar-se o numerador e o denominador por um mesmo número:

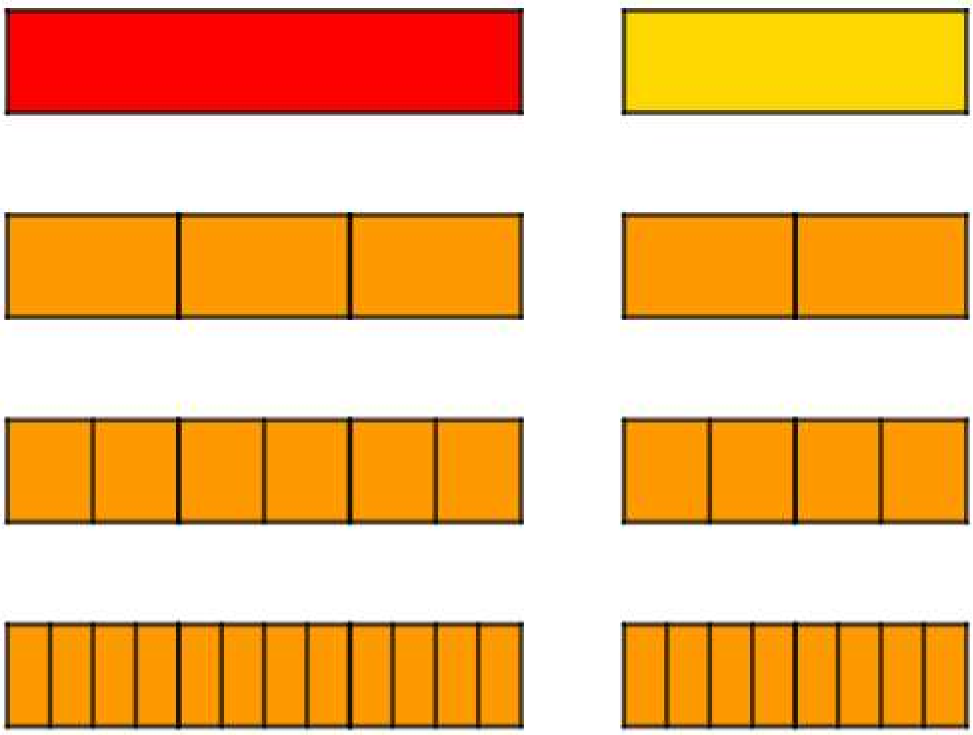
$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}=\frac{8}{16}=\frac{9}{18}=\frac{10}{20}=\frac{11}{22}=\frac{12}{24}=\frac{13}{26}=\frac{14}{28}=\frac{15}{30}=\cdots$$

O professor deve salientar que, da mesma maneira, é possível achar frações equivalentes a outras com menor numerador e denominador, ou seja, simplificar frações, dividindo o numerador e o denominador por um mesmo número, como no exemplo:

$$\frac{10}{30}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

A próxima etapa busca realizar adições e subtrações de frações, trabalhando com a ideia anteriormente construída de frações equivalentes. Solicita-se aos alunos: "*Junte* $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ utilizando o Fracsoma 235". Diante de dúvidas, o professor pode atuar como mediador, sugerindo que o aluno *troque* as peças vermelhas e amarelas por outras de mesma cor e tamanho, de modo que todas as peças obtidas pertençam à mesma fileira. A resposta obtida deverá ser alguma das representações laranja da figura 2:

Figura 2: Adição de Frações



Fonte: produzida pelos autores em software de desenho.

Agora questiona-se aos alunos: "Você acha que todas as peças ficaram laranjas por algum motivo específico?". A resposta obtida deve ter a ver com o fato da mistura das cores vermelho e amarelo resultarem em laranja. Depois solicita-se aos alunos que: "Represente a operação utilizando frações". Será apresentada alguma das seguintes representações:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$

$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

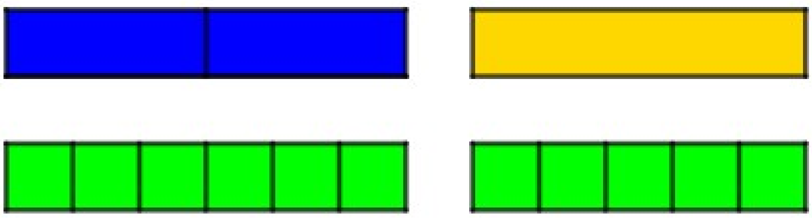
$\frac{6}{12}+\frac{4}{12}=\frac{10}{12}$

$\frac{9}{18}+\frac{6}{18}=\frac{15}{18}$

$\frac{12}{24}+\frac{8}{24}=\frac{20}{24}$

O professor salienta que todas estas operações estão corretas, mas que quando se abandona o material manipulativo e se faz os cálculos utilizando o algoritmo, a opção mais fácil se torna utilizar frações equivalentes cujo denominador é o menor múltiplo comum entre os denominadores das duas parcelas da soma. Na próxima etapa da sequência solicita-se aos alunos: “Represente e resolva a operação $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ utilizando Fracsoma 235”; a resposta obtida deverá ser semelhante à figura 3 (sendo aceita também a resposta onde se troca pelas peças pretas ao invés de verdes):

Figura 3: Subtração de Frações



Fonte: construída pelos autores em software de Geometria.

Agora, solicita-se que: “Represente a operação realizada acima utilizando frações”. A resposta obtida deverá ser (ou a operação utilizando frações de denominadores 30):

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$$

Seguindo nas subtrações, o professor solicita que se: "Resolva a operação $\frac{2}{5} - \frac{1}{9}$ ". Caso os alunos ainda optem pelo uso do material, após algumas tentativas eles não irão encontrar peças que sejam capazes de resolver este problema. Neste momento, o professor pode salientar que de fato o material não irá oferecer uma solução para essa operação mostrando que o menor múltiplo comum de 5 e 9 é 45 como na figura 4:

Figura 4: Mínimo Múltiplo Comum entre 5 e 9:

$$\begin{array}{r|l} 5,\ 9 & 3 \\ 5,\ 3 & 3 \\ 5,\ 1 & 5 \\ 1,\ 1 & 45 \end{array}$$

Fonte: feita pelos autores em software de desenho.

Então é necessário que se encontre frações equivalentes cujo denominador seja 45:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{9} = \frac{18}{45} - \frac{5}{45} = \frac{13}{45}$$

O professor salienta que esse procedimento pode ser repetido para se resolver adições e subtrações de frações com quaisquer denominadores.

Ao esforçar-se para provar que o desenvolvimento das crianças respeita determinados estágios, o estruturalismo cognitivo piagetiano não considera o papel das palavras e reduz o papel das ações a abstrações. Não leva em conta que o material manipulativo possui suas próprias regras, suas próprias aplicações e suas próprias práticas. A próxima seção busca salientar a ausência de essências, indicando que não existe nenhum aspecto transcendental que possa ser encontrado que transponha os significados do Fracsoma 235 para as frações e suas operações. É salientada a importância do conjunto de práticas, especificamente as matemáticas escolares, onde os sujeitos se encontram imersos, como o aspecto que determina que tipo de conhecimento será mobilizado na situação. Procura-se problematizar a ideia de que o conhecimento é construído sempre em estágios de complexidade crescente. Defende-se que o conhecimento não se inicia pelas abstrações empíricas provocadas pelo material manipulativo, e prossegue construindo cada nível sobre um anterior já consolidado. Salienta-se que é necessário se retornar às etapas entendidas como mais básicas e existe a possibilidade de não dominar completamente um estágio e ainda assim seguir compreendendo.

4.3 A noção de prática pela perspectiva wittgensteiniana

A perspectiva wittgensteiniana aqui abordada nega que a linguagem é uma maneira neutra e fixa de se representar a realidade, não são aceitas propostas sistemáticas com pretensões gerais. Para se construir o conhecimento não são necessários objetos empíricos, uma expressão não deixa de ter significado por não se referir a um objeto, não é possível se fazer uma correspondência biunívoca entre palavras e ações. A significação de palavras ou ações depende dos usos regulares que são feitos destas em determinadas práticas, não sendo possível estabelecer condições necessárias e suficientes para quaisquer usos. Os usos que são feitos exigem que sejam dominadas técnicas específicas, há repetições, normatividades, regularidades. Não existe a linguagem, mas sim um conjunto complexo e entrelaçado de jogos de linguagem:

> Os jogos de linguagem já foram definidos por Wittgenstein como 'sistemas completos de comunicação humana', ou 'espécies de usos de palavras e frases'. Já na opinião de intérpretes eles foram adequadamente considerados como 'atividades discursivas', 'sistemas de regras ou convenções' ou ainda 'atividades envolvendo o emprego dos signos, das quais são constituídas as regras que determinam os significados dos jogos'. (COSTA, 1982, p. 17).

A perspectiva aqui trabalhada não busca encontrar essências, não acredita que exista um aspecto comum a todos os jogos de linguagem. Wittgenstein (1999) se restringe a chamar "[...] de 'jogos de linguagem' o conjunto da linguagem e das atividades com as quais ela está interligada." (p. 30). O autor utiliza a analogia da linguagem a jogos, para salientar o caráter regrado da linguagem, o que é fundamental para que se trate a noção de práticas através de uma perspectiva normativa da linguagem. A significação de uma palavra é o papel que ela desempenha em jogos de linguagem específicos. Os jogos de linguagem são autônomos, determinam suas próprias exigências, apenas dentro das práticas onde ocorrem é possível conhecer suas regras de significação.

Os jogos de linguagem podem ser explicados a partir de exemplos de usos. Wittgenstein (1999) indica: “Uma causa principal das doenças filosóficas – dieta unilateral: alimentamos nosso pensamento apenas com uma espécie de exemplos.” (p. 150). De acordo com Miguel; Vilela; Moura (2010) ver de outros modos a descrição dos diversos usos e aplicações efetivas e possíveis, nas mais diversas práticas, é conhecido como terapia gramatical filosófica. Esta maneira de ver o mundo não é uma análise científica, tampouco análise de discurso, adota-se a expressão *atitude terapêutica*, que serve como um alerta aos maus usos da linguagem:

> [...] essa atitude, ao mesmo tempo em que reconhece, valoriza e legitima o caráter subjetivo e irrefutável – nos sentidos lógico e político – das crenças, também reconhece o seu caráter não objetivo ou consensual, isto é, a impossibilidade de se atribuir a elas o estatuto de ‘conhecimentos’ ou ‘saberes’. (MIGUEL, 2015, p. 640).

Os diferentes modos de praticar a linguagem rastreiam práticas culturais que mobilizam elementos em diferentes contextos da atividade humana. Nessa perspectiva, a imagem de um código de barras pode significar as grades de uma prisão ou os corredores de um labirinto, entre várias outras. A prática não vem acompanhada de seu par binário, tradicionalmente estruturalista. A prática não é oposta à teoria, não há distinção entre o pensamento teórico e a prática empírica:

> O caráter normativo da linguagem, implica o caráter normativo do pensamento, ‘Tal raciocínio também nos ajudaria a problematizar a concepção do conhecimento matemático como ‘puro’ *versus* ‘aplicado’ e/ ou ‘teórico’ *versus* ‘prático’, bem como a própria questão da aprendizagem associada a eles.’ (RÉGNIER; BELLO; KUZNETSOVA, 2018, p. 59, [grifos dos autores]).

Seres humanos estão imersos em aspectos que significam suas ações: “[...] nossos JOGOS DE LINGUAGEM estão ‘interligados’ com atividades não linguísticas, devendo ser compreendidos dentro desse CONTEXTO.” (GLOCK, 1998, p. 174). Práticas são a base para os jogos de linguagem, englobam costumes, hábitos, instituições, bem como toda a formação cultural e social, além de atividades comunitárias. Práticas carregam consigo elementos que delimitam o que faz sentido falar e de que maneira tem sentido agir. Todas essas características ditam padrões de comportamento, que por serem social e historicamente construídos, são estáveis, regulares e específicos.

O uso e a significação de uma palavra divergem, entre outros motivos, pelo fato de que uma palavra sempre está acompanhada dos gestos, expressões do falante, ações, escritas, entre outros. Práticas também podem ser entendidas como encenações daquilo que é dito e feito:

> Dado, porém, que para Wittgenstein, o mundo do pensamento (ou da 'representação) não preexiste e nem subsiste fora ou independentemente dos jogos de linguagem, pensar só pode ser também uma encenação corporal da linguagem, isto é, a participação corporal em jogos de linguagem, na medida em que só podemos pensar com o nosso corpo. É nesse sentido que, para ele, *representação* pode ser vista como sinônimo de 'apresentação num meio determinado de apresentação', de um modo análogo a um jogo de encenação corporal da linguagem num determinado cenário, palco, pano de fundo ou *forma de vida*. (MIGUEL, 2015, p. 623, [grifos do autor]).

A linguagem é uma prática humana e não se deve buscar entendê-la fora do contexto das atividades humanas não linguísticas: "Particularmente, podemos pensar na *performance* como objeto de estudo pertinente nesta perspectiva de linguagem." (VILELA, 2010, p. 518). Por exemplo, é parte de uma das significações da palavra "cadeira" que seja possível sentar-se em uma cadeira.

> É importante lembrar que as palavras gregas *praxis* [prática] e *pragma* [ação] se referem ao mesmo verbo grego *prasso*, que significava: 'executar', 'realizar', 'agir', 'atuar' e 'representar'. Deste modo, a linguagem tratada como *praxis* sugere que praticar um jogo de linguagem se assemelha, de maneira análoga, a atuação em uma peça de teatro; isto é, participar diretamente de uma representação corporal cênica. (VILELA, 2010, p. 55).

Ações pressupõem práticas, como as palavras, estão pautadas por regras de organização específicas, pertencentes a determinadas atividades, que podem ser científicas, escolares, cotidianas, entre outras. As práticas e suas regras se desenvolvem a partir de seus usos e de suas linguagens: "[...] práticas são regradas, ou seja, obedecem a certas regularidades definidas por um conjunto de relações voltadas para elas." (MOURA, 2018, p. 22). Falar uma língua é encenar uma prática cultural, praticar corporalmente uma gramática constituída de regras, em situações determinadas e conhecidas, mesmo que não se tenha noção da origem das suas regras.

Por exemplo, joga-se xadrez sabendo a gramática dos seus jogos de linguagem e agindo propositalmente de acordo com suas regras, mas aprende-se a falar sua língua sem que tenha noção da origem de suas regras. Pode-se aprender a tocar um instrumento lendo partituras ou apenas ouvindo, no entanto, em qualquer um desses casos não são ignoradas as regras que estão sendo seguidas. Seguir regras é diferente de agir de acordo com regras, seguir regras pressupõe uma regularidade de comportamento, seguir regras não é somente a causa da ação, é parte da razão para se realizar a ação.

Uma pessoa que age deve pretender seguir a regra, não que se sinta a necessidade de consultar um manual, tabela, tampouco que precise pensar na formulação da regra. Mas diante do questionamento de outros, a pessoa é capaz de explicar a regra que seguiu; não é possível ignorar completamente as regras que se segue. Glock (1998) salienta que existe a certeza de que seremos queimaremos se pusermos a mão no fogo, no entanto, essa certeza não é empírica:

> Nossas atividades são moldadas pela experiência coletiva de uma comunidade unida pela ciência e por processos de formação educacional. Fundam-se, em última instância, em nossas reações primitivas às regularidades do mundo. A crença de que me queimarei tem a mesma natureza do *medo* de me queimar, que é causado pela experiência de ter sido queimado. (p. 208, [grifo do autor]).

Uma regra pode ser considerada como algo que guia uma atividade. No entanto, como nenhuma característica, de maneira isolada, é necessária e suficiente para que se possa garantir que se está seguindo uma regra, Wittgenstein (1999) salienta que se pode estar sendo guiado sem que se siga nenhuma regra, já que ser guiado apresenta vários usos. O autor salienta que se somos carregados violentamente para onde não desejamos ir, não estamos seguindo regra alguma, já se um atalho no campo nos guia, provavelmente estamos.

Nessa perspectiva são considerados os critérios e os sintomas. Os critérios pelos quais se orientam palavras e ações são fixados pela gramática, são convenções, determinam as significações. Especificar os critérios é dizer quais são as regras para o uso de palavras e ações em práticas específicas. Os sintomas evidenciam o que não é critério:

> [...] Se a ciência médica chama de angina uma inflamação causada por um bacilo e nós perguntamos em um caso particular ‘porque você diz que este homem teve angina?’ então a resposta ‘Eu encontrei tal e tal bacilo em seu sangue’ dá-nos o critério definitório de angina. Se, por outro lado, a resposta fosse ‘Sua garganta está inflamada’, isto deve dar-nos um sintoma de angina. Eu chamo de ‘sintoma’ um fenômeno do qual a experiência nos ensina que tem coincidido de um modo ou de outro, com o fenômeno que é o nosso critério definitório. (WITTGENSTEIN, 1975 apud COSTA, 1982).

Fora do território essencial, critérios e sintomas não funcionam como nos pares binários estruturalistas. As duas noções não existem como entidades isoladas, elas relacionam-se de diversas maneiras, imersas em determinadas práticas, criando relações bastante complexas entre si. São noções fluidas, sem uma fronteira nítida que possa separá-las:

> A oscilação entre critérios e sintomas na gramática origina a aparência de que haveria apenas sintomas. Dizemos, por exemplo: ‘A experiência ensina que chove quando o barômetro desce, mas ensina também que chove quando temos determinadas impressões de umidade e de frio, ou esta e aquela impressão visual’. Indica-se, como argumento em favor disso, que essas impressões sensíveis podem nos enganar. Mas aí não se considera que o fato de que elas justamente nos fazem crer que na chuva repousa numa definição. (WITTGENSTEIN, 1999, p. 117).

Um critério é apenas uma possibilidade, não vale para todas as situações. Nessa perspectiva não há como se definir critérios de maneira transcendental, o que define ou não um critério são as práticas onde ocorrem essas ações:

> Assim, se uma pessoa encontra-se na sala de espera de um consultório dentário, franze a testa e geme de dor, este contexto complementar adicionado ao fato de que ela põe a mão no queixo pode tornar seu gesto um critério capaz de fornecer evidência conclusiva para que possamos afirmar que ela tem dor de dentes. Por outro lado, se a mesma pessoa pusesse a mão no queixo ao escutar uma música em uma sala de concertos, isso seria simples e, no caso, irrelevante sintoma. (COSTA, 1982, p. 31 – 32).

Wittgenstein (1999) salienta que seguir uma regra é análogo a seguir uma ordem. No entanto, o autor pontua que um comando pode ser dado apenas uma vez, mas não há como uma pessoa seguir uma regra privadamente e somente uma vez, seguir regras pressupõe regularidade. Quando há um comando existe alguém que comanda, enquanto quando se segue regras não existe a necessidade de que algo ou alguém dite a regra. Existe liberdade para seguir ou não um comando, já quando se segue regras é porque independente do comportamento, atividades, ou manifestações linguísticas individuais, somos treinados para seguir as regras das práticas onde estamos imersos. Só se pode dizer que seguir regras se parece com seguir comandos porque se está imerso em uma determinada forma de vida, onde ordens possuem inteligibilidade e aplicação.

A linguagem é investigada como constituída pelo conhecimento humano, é uma maneira de ver o mundo, acarreta condições de sentido, critérios de inteligibilidade, expressa o que é importante em uma forma de vida, dá ideias de quais são algumas das características culturais da comunidade onde é praticada. As formas de vida fazem parte da linguagem, pois são condições necessárias à comunicação humana: “No caso dos contextos de fenômenos, essas entidades podem ser toda sorte de fatos e eventos empíricos, processos, práticas, atividades, etc., o que nos faz concluir que o mundo é uma espécie de extensão de nossa linguagem.” (COSTA, 1982, p. 49). A constituição dos eventos é socialmente reconhecível, porque está relacionada às necessidades e disposições, é comum aos que participam de uma comunidade.

Costa (1982) salienta que as formas de vida designam a ambiguidade dos eventos em suas duas dimensões: a gramatical e a antropológica. A dimensão gramatical é constituída pelas entidades que podem ser descritas como componentes potenciais das regras de uma gramática, do ponto de vista linguístico, comunicacional. Os mecanismos gramaticais dependem das necessidades humanas e de circunstâncias externas, são independentes da vontade individual. A dimensão antropológica é capaz de abranger conjuntos de eventos relacionados, cuja existência é reconhecida coletivamente pela comunidade. A concordância na aplicação das regras gramaticais baseia-se em formas de reação comum. Somos treinados para seguir regras e reagimos de um determinado modo: “[...] O modo de agir comum a todos os homens é o sistema de referência, por meio do qual interpretamos uma linguagem desconhecida.” (WITTGENSTEIN, 1999, p. 93):

> Atentemo-nos para o fato de que, para Wittgenstein, são as *maneiras comuns de agir* – isto é, de encenar corporalmente a linguagem, sendo as expressões verbais também vistas como formas de ação ou encenação – que devem ser vistas como sistemas culturais de referência para a *interpretação*, entendida como *tradução*, *decodificação* ou *esclarecimento* dos significados, mas não como desejo de *explicação*, isto é, como desejo de inferir, desvelar ou ressignificar significados supostamente ocultos numa forma de agir. (MIGUEL, 2015, p. 622, [grifos do autor]).

Quando seguimos uma regra gramaticalmente não a estamos interpretando, simplesmente a estamos seguindo. Seguir uma regra é diferente de interpretá-la, interpretar uma regra significa expressá-la de outras maneiras, substituir uma forma de expressão por outra, mudar de sistema de referência. Interpretações não são significações: “Não se pode, portanto, confundir interpretação com significação, nem todo processo de produção de significados envolve uma interpretação.” (MOURA, 2010, p. 153). Não é possível substituir uma explicação por outra proveniente de outras práticas conservando seu sentido, bem como não há primazia entre diferentes tipos de explicação. Nenhuma prática contém em si a instância de referência para a produção de significações.

Práticas não são individuais, são coletivas, precisam ser passíveis de “[...] *identificação pública.*” (COSTA, 1982, p. 42, [grifos do autor]). Ocorrências internas não são necessárias, nem suficientes para se dizer ou agir, interno e externo estão interligados. Não é possível se analisar a intenção que se tem com a palavra ou ação, apenas o propósito, papel ou função dessas nas práticas em que foram empregadas. Linguagens e seus aspectos não linguísticos são arbitrários, são compartilhados pelos participantes de uma sociedade. Não há um estágio preparatório para se participar de práticas, aprende-se por intermédio de pessoas, aprende-se praticando com praticantes competentes, que auxiliam delimitando usos de palavras e ações: “O caso é que, para Wittgenstein, uma regra não pode existir se não há um contexto, pessoas e uma prática que torne justificável obedecê-las ou transgredi-las.” (JUNIOR, 2009, p. 63).

Antunes (2018) exemplifica o caráter coletivo das regras com o casamento, no qual as práticas se sobrepõem aos participantes de maneira individual. É necessário seguir as regras do casamento pelo tempo que durar o matrimônio: “As pessoas que estão casadas assumem essa constituição de institucionalização dessa prática já cristalizada nas suas formas de vida, confirmando que não são os sujeitos que definem as práticas, mas eles que derivam delas.” (p. 34). Em práticas matemáticas escolares, os alunos aprendem praticando junto com praticantes competentes: professoras e professores de matemática. Estes dão exemplos do que fazer, guiados pelas regras próprias das práticas matemáticas escolares. O que se aprende não é a matemática como um todo, mas o que dizer e fazer em práticas matemáticas escolares.

Bello (2010) salienta a noção de práticas como um vínculo entre palavras e ações, constituído através das significações atribuídas aos modos de dizer e agir, de acordo com regras de significação, prescrições, normas com objetivos específicos, finalidades e propósitos. Bello; Ogliari (2018) trazem como exemplo uma pesquisa na qual se questionou cozinheiras escolares sobre a maneira que controlam as quantidades de ingredientes no preparo das refeições. As trabalhadoras executam sua prática seguindo determinados modelos: calculando quantidades de ingredientes para que se obtenham certos sabores, texturas, bem como porções para determinado número de pessoas. Elas poderiam inventar outras receitas, no entanto, essas se encaixam em um outro conjunto de práticas regradas, que resultaria em outros sabores e texturas. Esse exemplo ilustra como seguir regras é arbitrário, pois pode-se trocar as regras que se utiliza para fazer as refeições, no entanto, essa arbitrariedade é limitada, pois os outros sabores e texturas devem agradar ao paladar humano, bem como ao senso estético.

Nessa perspectiva não existe precisão, as fronteiras que demarcam o uso de um termo são delimitadas apenas pela prática na qual os usuários estão imersos. Por exemplo, as cozinheiras descrevem à sua maneira as regras que seguem: “As mulheres envolvidas nessa prática utilizam, em seus afazeres, expressões como ‘no olho’, ‘uma volta na panela e uma tira de óleo’ e ‘colher de sopa rasa (sal)’ [...]” (BELLO; OGLIARI, 2018, p. 216). Os autores salientam que essas regras não podem ser traduzidas para os conceitos matemáticos de proporção, pois as palavras possuem significações diferentes, já que foram utilizadas em outras práticas: “A produção simbólica que guia sua performance na prática da cozinha está pautada não apenas pelas regras e entendimentos contidos pelos procedimentos, mas fortemente pelo componente teleoafetivo em questão.” (BELLO; OGLIARI, 2018, p. 217).

Antunes (2018); Bello; Ogliari (2018), Régnier; Bello; Kuznetosova (2018) salientam pesquisas de T. Schatzki, que problematizam a noção de prática através de uma perspectiva wittgensteiniana. De acordo com o autor, práticas são nexos organizados de atividades, conjuntos de palavras e ações, executadas diretamente com o corpo, que possuem foco no contexto local e temporal. Como exemplos pode-se dar as práticas educativas, políticas, agrícolas, de negociação, bancárias, recreativas. As significações são atribuídas a modos de dizer e agir fazendo uso de regras, prescrições e normas, que envolvem princípios que respondem a determinadas finalidades, propósitos e disposições.

Para T. Schatzki, as práticas estabelecem uma ordem social porque ajudam a moldar a inteligibilidade que governa as ações de seus participantes. Não há uma separação entre o participante e a prática na qual ele se encontra imerso, as palavras e ações e os conhecimentos mobilizados para tais não são apenas uma parte, mas toda a prática. Palavras e ações são organizadas por entendimentos, regras e estruturas teleoafetivas. O entendimento é uma capacidade na qual se baseiam as práticas, este possui um tom performativo, que é utilizado na execução de atividades. Antunes (2018) exemplifica que dançar tango é uma prática, não uma habilidade de um indivíduo em específico, quem não é socializado nessa prática, não sabe dançar tango porque lhe falta entendimento. As regras determinam sinais de regularidade, aquilo que é socialmente aceito. A estrutura teleoafetiva é um conjunto ordenado de ferramentas que engloba as emoções, uma ligação de fins, meios e disposições apropriados, é o que governa o que faz sentido dizer e fazer, ou seja, o que é legítimo em uma determinada prática.

Apesar de serem válidas apenas em práticas específicas, pode-se dizer que regras são gerais, no sentido de que podem ser aplicadas em um número infinito de situações. Por exemplo, Wittgenstein (2005) salienta que técnicas de medição não se baseiam em nenhum comprimento particular de um objeto a ser medido, para medir: “Tudo de que preciso é: Tenho de poder ter certeza de que posso aplicar o meu padrão.” (p. 62). Então, pode-se medir utilizando um mesmo método em infinitas situações, salientando-se que os métodos de medição são variados e nenhum tem prevalência sobre outros. Utilizar metros, quilômetros, pés, palmos, passos, polegadas, jardas, léguas, bem como outras medidas, envolvem técnicas de medição legítimas, pois seguem regras que são compartilhadas por comunidades, ou seja, pertencem a determinadas práticas.

Certas estratégias são valorizadas em algumas práticas e não são valorizadas em outras. Observe como pode ser tão correto dizer: em práticas matemáticas escolares que “João mede 1,75 metros”; ou em práticas matemáticas de costureiras que “Maria quer sua saia 1 palmo mais curta”. Já não é correto dizer: em práticas matemáticas escolares “Este vírus mede 3 léguas”; ou em práticas matemáticas de costureiras “Encurte a calça 0,003 milímetros”. Deve-se entender que as regras gramaticais podem estar corretas (pois estão adequadas) ou incorretas (pois estão inadequadas) a práticas estabelecidas e a certos propósitos.

Os participantes de práticas expressam-se corporalmente e mentalmente de maneira deliberada, seguindo regras das práticas onde se encontram:

> [...] contar uma coleção de objetos, ordenar uma coleção de objetos e registrar resultados de contagem de objetos através de sinais gráficos que participam de um sistema numérico qualquer é encenar práticas culturais, isto é, praticar corporalmente gramáticas constituídas de regras que orientam a produção de contagens, ordenações e registros significativos e, portanto, passíveis de serem interpretados e eventualmente corrigidos por

> comunidades de praticantes dessas formas de contar, ordenar e registrar quantidades. (MIGUEL; VILELA; MOURA, 2010, p. 13).

A matemática escolar mobilizada pela perspectiva estruturalista cognitivo piagetiana é aquela que possui para cada cálculo um único resultado, obtido pelo mesmo processo por todos os alunos. Essa matemática seria apenas uma etapa em direção à matemática acadêmica: “Não alimentamos imagens da Matemática que calcula por aproximações, que considera variáveis frequentemente não envolvidas nos processos de cálculos rigorosos como gostos e preferências.” (VILELA, 2010, p. 445). Atividades matemáticas são conjuntos variados de saberes que se manifestam em práticas específicas, não somente na forma de práticas matemáticas acadêmicas ou práticas matemáticas escolares. A matemática pode estar presente na escola, no cotidiano, na academia, entre outros. Vilela (2010) salienta que a ocorrência de adjetivos juntamente com a palavra “matemática” em publicações e pesquisas acadêmicas tais como: matemática acadêmica, matemática escolar, matemática popular, matemática do cotidiano; salientam os diferentes usos determinados pelas normas de cada comunidade, ou seja, as distintas práticas matemáticas.

Esse modo de ver, falar e agir que dá visibilidade às mais diversas práticas matemáticas permite entender a atividade matemática escolar como autônoma, não como uma etapa anterior ou posterior a outras atividades matemáticas. As ciências empíricas atribuem propriedades e relações que podem ser verificadas ou falseadas empiricamente:

> As relações causais, em particular, só podem ser demonstradas empiricamente, pela observação e pela indução [...] Tais propriedades e relações são contingentes, e os enunciados correspondentes, tais como ‘g = 9,8 m/s² [...] são passíveis de correção. Mesmo que tais relações sejam *fisicamente* necessárias, as proposições correspondentes poderiam, em princípio, ser refutadas por novos experimentos ou observações. (GLOCK, 1998, p. 318).

Proposições matemáticas nada descrevem, não necessitam de experimentos empíricos, são condições para as descrições empíricas, mas apenas oferecem uma dentre tantas outras possibilidades para descrever fenômenos: “Uma proposição só se torna verdadeira quando a utilizamos como norma em um jogo de linguagem.” (MOURA, 2018, p. 36). Práticas matemáticas escolares podem ocorrer desconectadas do material empírico, pois não são posteriores a práticas empíricas. Práticas matemáticas escolares também podem ocorrer desconectadas de práticas matemáticas acadêmicas, pois as primeiras não são uma etapa anterior às segundas.

A matemática é um corpo de conhecimentos, mas também um conjunto de atividades: “[...] isto é, um conjunto heterogêneo e dinâmico de encenações simbólicas regradas.” (BELLO; OGLIARI, p. 218). Na perspectiva aqui trabalhada, a ideia não é que a matemática evolua como uma ferramenta de descrição da realidade, mas destacar a maneira como se constituem os objetos matemáticos a partir de seus usos. Não é a matemática que garante o que está certo ou errado, significações devem ser analisadas a partir da prática onde foram realizadas.

Enquanto para o estruturalismo cognitivo piagetiano os significados são construídos a partir de condições empíricas, na perspectiva aqui trabalhada, significações são determinadas por práticas performativas e regras específicas. Práticas matemáticas são mantidas principalmente pelas linguagens, ou seja, práticas matemáticas são práticas regradas, funcionam de acordo com suas regras de formação. Isso não quer dizer que fazer matemática é saber aplicar regras, fazer matemática pode ser considerado:

> [...] jogar um jogo que fora instituído histórica e socialmente, um jogo de linguagem constituído e constituinte de regras de uso. Talvez fosse melhor dizer que fazer matemática é saber praticá-la segundo suas regras, conforme cada atividade e grupo humano (da rua, da escola, do mercado). As regras definem como utilizar a linguagem matemática, em diferentes práticas, com sentido e corretamente. (MOURA, 2018, p. 29).

A matemática pode ser considerada como um conjunto de jogos de linguagem, um conjunto de práticas, “[...] um conjunto de regras que governam nossas maneiras de fazer e dizer na composição de práticas.” (RÉGNIER; BELLO; KUZNETSOVA, 2018, p. 56). Práticas matemáticas escolares possuem proposições a priori. As razões para que a matemática escolar ocorra de determinada maneira derivam dos usos escolares que foram e são feitos das matemáticas:

> Assim, ao pensar a matematização numa perspectiva normativa, busca-se reposicionar o caráter performativo dos significados (saberes) matemáticos produzidos pelas práticas escolares, retirando-a de seu estado universal de agramaticalidade, para recolocá-la num jogo simbólico cujas regras não residem nos indivíduos, e, sim, no conjunto de encenações sociais e culturais das quais os sujeitos participam. (BELLO; OGLIARI, 2018, p. 213 – 214).

Enquanto as perspectivas estruturalistas defendem que passar dos números naturais às frações envolve uma permanência de significados, Wittgenstein (2005) não julga suficiente considerar como número tudo aquilo que pode ser comparado a um número racional: “Isto é, aquilo a respeito de que se pode estabelecer se é maior do que, menor do que ou igual a um número racional.” (p. 196). Pelo entendimento estruturalista tanto 1 quanto 2 são números racionais porque podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com a e b números inteiros e $b \neq 0$; diferentemente, A é uma letra, não pode ser comparado aos números racionais. Já $\sqrt{2}$, por não poder ser escrito na forma anteriormente descrita, não é considerado um número racional. Mas é possível entendê-lo por sua expansão forma decimal $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, e assim torna-se possível dizer que $\sqrt{2}$ é um número que está entre 1 e 2, um número irracional, um número real.

Wittgenstein (2005) refuta a busca por uma definição de número pelo fato de que esses processos só chegam a um fim, quando as comparações chegam a um fim. Como os processos continuam acontecendo indefinidamente, sempre que se acrescenta um novo conjunto numérico, o que se encontra não é de fato uma definição analítica. Não se trata da mesma significação em todas as etapas, mais especificamente sobre o trabalho com as frações, o que existe são aspectos comuns entre o uso que se fazia dos elementos no conjunto dos números naturais e o uso que se faz das frações. Traça-se um fio que indica semelhanças entre cada um dos conjuntos, então não é uma definição analítica que autoriza que $\sqrt{2}$ seja considerado um número enquanto A não o seja, mas sim semelhanças de família. Não há uma essência na palavra número, essa é uma noção determinada por semelhanças de família. A noção de semelhanças de família aparece como alternativa aos universais, fazendo comparação entre diferentes jogos de linguagem, mas salientando que palavras e ações só funcionam dentro das práticas onde foram utilizadas. Bello (2010) salienta que as semelhanças de família podem ser vistas como os traços que impedem que uma proposição que orienta uma ação em determinada prática, passe a valer para todas as outras práticas.

Nessa perspectiva não é possível dizer que uma fração é apenas uma razão, uma divisão. Além disso, a ação de dividir pode ter vários significados. É possível dar diferentes exemplos: uma criança tem onze balas e quer dividi-las com um amigo, como as balas são suas, ela acha que merece mais balas, ficando com sete e dando as outras quatro para seu amigo; ao dividir-se onze maçãs entre duas pessoas, deu-se quatro àquela que estava com fome, duas para a outra e guardou-se as cinco restantes. Em práticas empíricas a veracidade ou o sentido dessas afirmações não é contestado, elas estão de acordo com as práticas onde ocorrem.

No entanto, nenhuma dessas divisões empíricas pode ter seu significado transportado para as práticas matemáticas escolares, elas não podem ser representadas pela fração $\frac{11}{2}$, nem pela operação 11 : 2, tampouco pelo número decimal 5,5. Mas isso não invalida a proposição matemática "$\frac{11}{2} = 11 : 2 = 5{,}5$". Uma fração só possui significação quando se faz um uso específico dela, por exemplo, em práticas matemáticas escolares. Trabalhar com frações em práticas matemáticas escolares inclui procedimentos específicos: representação, equivalência, nomenclatura, adição, subtração, multiplicação, divisão, entre outros; que não são descobertos livremente pelos alunos, são técnicas que devem ser ensinadas, pois são convencionais.

Porto (2003) trata da expansão decimal de divisões, o autor salienta a comparação entre a operação de multiplicação 25 . 25 e a de divisão 1 : 7. Para ambas as operações existem regras que definem os algoritmos: as da multiplicação de números de mais de um algarismo e as da divisão euclidiana. No entanto, apenas a primeira operação possui um resultado expresso como número decimal finito: 25 . 25 = 625; ou seja, executar a operação 25 . 25 é obter 625 como resposta. Sobre a divisão euclidiana 1 : 7, pessoas adequadamente treinadas a executam e certos algarismos reaparecem. A proposta wittgensteiniana para essa divisão é: "Ao nos darmos conta da recorrência do resto na divisão 1 : 7, estabelecemos a regra de que repetir, depois da vírgula, os algarismos '142857' um certo número de casas, deverá resultar na mesma coisa do que executar a divisão 1 : 7 até aquele ponto." (PORTO, 2003, p. 139).

Para Porto (2003) o que se faz não é determinar a expansão completa da divisão 1 : 7: "[...] afirmamos apenas que 'tal operação, executada até uma casa decimal que escolhemos, deverá resultar equivalente à ordem: repita o padrão '142857' até aquela mesma casa decimal." (p. 140). A repetição dos algarismos deixa de ser um fato empírico, uma constatação sobre algo que acontece na maior parte das vezes. Ao aceitarmos o argumento do ciclo resto/ dividendo, colocamos a segunda repetição dos algarismos como critério para se executar a divisão 1 : 7, esse critério é o que decide se a divisão foi feita corretamente: “Depois tomamos a recursão como critério: ‘deve acontecer’ (um ‘deve’ atemporal).” (WITTGENSTEIN, 1976 apud PORTO, 2003).

Observe a seguinte situação: Solicita-se a um aluno que decida qual das duas é a maior fração: $\frac{13}{24}$ ou $\frac{14}{25}$. Pela influência das práticas estruturalistas, pode-se tentar buscar a resposta para esse questionamento no material manipulativo. Utilizando o Fracsoma 235, as quantidades parecem representar o mesmo comprimento: “[...] posso, nesse caso, ter certeza de que o que conto é realmente o número que vejo ou, antes, o número cujo resultado visual vejo?” (WITTGENSTEIN, 2005, p. 214 – 215). A decisão apenas pela imagem visual é bastante complicada.

A insuficiência da atribuição de significações matemáticas escolares utilizando o material manipulativo não se dá somente pelo fato de serem representadas apenas frações de alguns denominadores. Imprecisões na construção do material, seja este construído pelos próprios alunos ou comprado em sua versão comercial, podem inclusive dar a impressão de que $\frac{13}{24}$ é a maior das duas frações (a saber $\frac{13}{24} = 0{,}541\overline{6}$ ou equivalente a $\frac{325}{600}$ e $\frac{14}{25} = 0{,}56$ ou equivalente a $\frac{336}{600}$). Essas imprecisões não se configuram em um efeito a ser eliminado na próxima etapa de complexidade crescente. Decidir qual das frações é a maior não é dado por um processo visual, é um procedimento característico de práticas matemáticas escolares.

Sobre a dinâmica das cores do Fracsoma 235, Wittgenstein (2005) salienta que não existem cores simples, a simplicidade não é um fenômeno psicológico, não há como se fazer menção a cores puras, ao que é efetivamente perceptível. Certamente é possível reconhecer-se outras cores como misturas das cores primárias, no entanto, pode-se perceber também que uma cor é mais vermelha do que a outra. Por exemplo, no Fracsoma 235, a peça que conhecemos neste artigo como laranja2 (correspondente à fração $\frac{1}{12}$, cuja decomposição do denominador em fatores primos é 2.2.3, ou seja, deveria ter duas partes de vermelho e uma de amarelo), deveria ser mais vermelha do que aquela que conhecemos como laranja1 (correspondente à fração $\frac{1}{6}$, cuja decomposição do denominador em fatores primos é 2.3, ou seja, uma parte de vermelho e outra de amarelo). Wittgenstein (2005) salienta que não há como se encontrar uma métrica para as cores. As práticas das cores possuem seus próprios entendimentos, suas próprias regras e suas próprias estratégias.

Salienta-se que a sequência didática utilizando Fracsoma 235 descrita neste artigo é uma proposta para os contatos iniciais dos alunos com frações. Então podemos estar oferecendo a afirmação: “Esta peça (aponta-se para laranja2) deveria ser mais vermelha do que esta outra peça (aponta-se para laranja1)”; a crianças que ainda não dominam por completo as práticas linguísticas das cores. Tentar traduzir as práticas das cores para as práticas matemáticas escolares de frações e suas operações pode funcionar mais como empecilho ao ensino de matemática, do que como um aliado à sua realização. Significações obtidas em práticas empíricas visuais não podem simplesmente ser transpostas para práticas matemáticas escolares de equivalência de frações ou da obtenção da expansão decimal de uma fração por divisão euclidiana. Wittgenstein (2005) vai mais além, salientando que não é possível se fazer experimentos quando uma definição matemática recorrente já foi estabelecida. A definição recorrente é o que possibilita a compreensão sobre casos particulares.

Gottschalk (2018) salienta a diferença entre uma prova matemática (realizada independentemente de relações causais) e um experimento empírico (confirmado por evidências externas). Quando solicitado a um estudante de matemática que encontre as soluções da equação $x^2 = 4$, ele poderia encontrar por tentativa e erro as soluções $x = 2$ e $x = -2$. No entanto, ter chegado a esses resultados não prova que essas são as soluções da equação, a prova é dada através de um método de solução da equação, podendo ser a fórmula de Bháskara. O método geral de solução de uma equação não é somente um artifício para encontrar as soluções da equação, ele é um estabelecimento de relações internas, não externas. A prova é o que atribui sentido às soluções apresentadas. Entender não é algo mental, aproxima-se de dominar técnicas convencionais, adquiridas através de treinamento.

Não faz sentido que se espere que o aluno “construa por si mesmo”, a partir de experimentos empíricos, a noção de fração como uma extensão dos números naturais, pois não há algo que possa ser aprendido que irá permanecer e servir como significado de número. O aluno que estuda conjuntos numéricos precisa estabelecer conexões internas entre os usos de número que ele já possui e os novos usos. Identificar as semelhanças é importante, mas também as diferenças entre os vários conjuntos numéricos e suas operações. Esses processos ocorrem através das aplicações escolares das novas significações, dando aos alunos exemplos de usos já conhecidos e usos dos novos conjuntos numéricos.

No construtivismo piagetiano, o professor deve apenas mediar a construção dos conhecimentos, já para a terapia gramatical filosófica, as verdades estão relacionadas às crenças coletivas. O professor possui um papel social, coletivo, pois participa de práticas históricas e políticas. Práticas pedagógicas são atividades que possuem regularidade, normatividade, repetição. Ações e palavras mobilizam produções quando estão imersas nas formas de vida escolares, não são os indivíduos que caracterizam as atividades, mas o oposto:

> Assim, o professor só pode *estar* professor enquanto pertencer a uma prática – escolar -, o cantor só pode *estar* cantor enquanto canta; e a leitora, enquanto lê. Portanto, por intermédio dessas ações, que compreendem finalidades, contextos, intervalos temporais e desempenho, o indivíduo alcança sua subjetivação como ser que deriva de uma prática. (ANTUNES, 2018, p. 34, [grifos do autor]).

Wittgenstein (1999) salienta que não se aprende através de determinado curso, o que se aprende não é o procedimento em si: "'Aprender' significa ser levado a poder fazê-lo." (p. 121). O que se aprende não é um sistema de regras, são juízos corretos e o professor é aquele que indica o caminho certo de tempos em tempos. O estudante é um agente histórico, não um sujeito sem linguagem, cultura, local, tempo e espaço, apenas compreendido por seus aspectos psicológicos. O aluno possui papel social: "Ele pode ser visto expressando o passado e o presente de uma comunidade, dos indivíduos numa prática social que constitui as realidades sociais e por ela é constituído." (VILELA, 2010, p. 517). Miguel; Vilela; Moura (2010) salientam que a educação escolar deve ter como propósito constituir sujeitos que valorizem problematizações nas mais diferentes formas de vida pública, ou seja, nas mais variadas formas de os sujeitos se organizarem publicamente.

A perspectiva aqui trabalhada critica o uso de material manipulativo para se ensinar as noções de frações e suas operações, pelo fato de que o material e as frações e suas operações não pertencem ao mesmo conjunto de práticas. No entanto, aqui não é oferecido um procedimento que dê conta de todos os supostos problemas na educação matemática escolar contemporânea. A ideia é desconstruir a concepção de educação matemática escolar como apropriação individual de conhecimentos matemáticos em estágios. Pretende-se romper com a ideia de práticas matemáticas escolares enquanto problema, fomentando reflexões, em um olhar terapêutico, onde desenvolvem-se possibilidades diversas para ver e lidar com as situações matemáticas escolares, abordando-as e pensando-as de outras maneiras:

> Para isso, porém [...] só se deve permitir conectar *descritivamente* – por analogias ou semelhanças de família – não os efeitos de sentido que a ele se manifestam, voluntária ou involuntariamente, num jogo de linguagem, com os que nele estariam supostamente ocultos, mas sim, os efeitos de sentido que a ele se manifestam no jogo com os que a ele se manifestam em outros jogos de linguagem, evitando conectar tais efeitos mediante relações de causa e efeito e avaliando, sempre localmente, a legitimidade dessas próprias conexões. (MIGUEL, 2015 p. 630).

Na educação matemática, deve-se impor majoritariamente as práticas matemáticas escolares, suas próprias necessidades, características e processos. Não deixando que práticas matemáticas empíricas ou acadêmicas tenham primazia sobre as práticas matemáticas escolares. Não com a intenção de apontar caminhos e verdades para a educação escolar, mas de percorrer usos, olhar para diferentes aplicações, ver de outros modos, desfazer as imagens privilegiadas. Investigando de quais maneiras os alunos praticam nas matemáticas escolares.

4.4 Considerações finais

Ainda muito utilizado para mobilizar conhecimentos na educação matemática contemporânea, o estruturalismo cognitivo piagetiano defende que a noção de frações e suas operações é construída inicialmente através das abstrações empíricas, onde é necessária a manipulação de material. Evoluindo dessas às abstrações reflexivas, onde ocorreriam ações como reunir, coordenar, corresponder, os alunos conectam objetos de um conjunto a símbolos numéricos em um processo comum a todos os seres humanos, independente de suas características ou das práticas onde essas acontecem. Já a perspectiva wittgensteiniana aqui abordada salienta que as práticas do material manipulativo possuem seu próprio entendimento, suas próprias regras, aquilo que é permitido dizer e fazer, aspectos que se mostram diferentes nas práticas matemáticas escolares. Estes dois conjuntos de práticas guardam entre si apenas semelhanças de família, não sendo possível transportar significações de palavras e ações de umas para as outras.

Nessa perspectiva a noção de prática matemática não é um estágio anterior à teoria matemática, pois não há existe diferença entre prática e teoria. Pratica-se palavras e ações e isso é tudo o que há, pois falar e agir já estão de acordo com regras determinadas, não se atribuem diferentes complexidades às práticas matemáticas empíricas, escolares, acadêmicas, entre outras. É importante salientar que não se deve considerar as frações e suas operações como uma etapa consolidada, de modo a construir sobre ela outros conhecimentos, sem retornar a ela em momento algum. Trabalhar com frações e suas operações pode vir independentemente de material e pode ser trabalhado em quaisquer tempos da educação matemática básica. Práticas matemáticas escolares são essencialmente sociais, pois dependem da comunidade que as utiliza com regularidade. As regras pelas quais as práticas matemáticas escolares estão pautadas não dependem de experimentação, já estão dadas pelos usos regulares da matemática escolar. A perspectiva terapêutica estuda como grupos específicos de alunos usam e explicam as regras pertencentes às práticas matemáticas escolares.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, M. A. **Significação de Objetos Matemáticos Analisados em Práticas Curriculares sob as Lentes Wittgensteinianas.** Dissertação de Mestrado da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre (RS), 2018.

ARAÚJO, W. A. O Uso do Frac-soma 235 no Processo de Ensino e Aprendizagem de Frações para o Ensino Fundamental. *In:* **XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, Curitiba (PR), julho, 2013.

BELLO, S. E. L. Jogos de Linguagem, Práticas Discursivas e Produção de Verdade: contribuições para a educação (matemática) contemporânea. *In:* **Zetetiké**, v. 18, número temático, p. 545 – 588, Campinas (SP), 2010.

_____; RÉGNIER, J. Linguagem, Realidade, Subjetividade. *In:* **Educação Matemática:** linguagens, práticas e sujeitos, p. 24 – 41, Porto Alegre (RS), 2018.

_____; RÉGNIER, J.; KUZNETSOVA, E. M. Uma abordagem normativa para a Etnomatemática: bases linguísticas e filosóficas. *In:* **Praktiké**, São Leopoldo (RS), v. 3, p. 20 – 41, 2018.

COSTA, C. F. **Wittgenstein e a Gramática do Significado**. Dissertação de mestrado, IFC, Rio de Janeiro (RJ), 1982.

GLOCK, H. J. **Dicionário de Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

GOTTSCHALK, C. M. C. Educational implications of some os Wittgentein's remarks on mathematics: proposition, inference and proof. *In:* **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 4, n. 2, maio 2018.

JUNIOR, S. A. Uso de Regras da Linguagem: o papel da gramática na filosofia tardia de Ludwig Wittgenstein. *In:* **Revista de Educação, Linguagem e Literatura da UEG**, v. 1, n. 2, outubro de 2009.

MIGUEL, A.; VILELA, D.; MOURA, A. R. L. Desconstruindo a matemática escolar sob uma perspectiva pós-metafísica de educação. *In:* **Zetetiké**, v. 18, número temático, p. 129-206, Campinas (SP), 2010.

PIAGET, J. **O estruturalismo**. Trad. Moacir R. de Amorim. São Paulo: Difel, 1979.

PORTO, A. As dízimas periódicas na filosofia da matemática de Wittgenstein. *In:* **Philósophos**, v. 8, n 2, p. 127 – 157, jul./ dez., 2003.

VILELA, D. S. A Terapia Filosofica de Wittgenstein e a Educação Matemática. *In:* **Educação e Filosofia Uberlândia**, v. 24, n. 48, p. 435-456, Uberlândia (MG), jul./dez., 2010.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas.** São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999.

_____. **Observações Filosóficas**. São Paulo: Edições Loyola, 2005.