UM CONVITE ÀS AÇÕES PARCIAIS

Leonardo Duarte Silva[1]
[1] *Universidade Federal do Rio Grande do Sul, dsleonardo@ufrgs.br*

RESUMO: Neste trabalho, é realizado uma introdução às ações parciais de álgebras de Hopf. Inicialmente, retomamos o conceito de uma ação global do ponto de vista de sua relação com simetrias de um objeto, com o intuito de motivar a definição de ação parcial de grupo. Após, definimos ações parciais de álgebras de Hopf e mostramos a dificuldade de obter um exemplo para tal, quando comparada com uma ação global. Após, apresentamos um método de como obter exemplos de ações parciais. Por fim, apresentamos um exemplo e concluímos que o método apresentado é aplicável para alguns exemplos de álgebras de Hopf. Indicamos através de referências as ações parciais obtidas com o uso desse método.

Palavras-chave: Simetrias; Ações de grupos; Ações parciais; Álgebras de Hopf.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de simetrias de objetos em matemática é uma questão de interesse há muito tempo. Em particular, é muito comum estudarmos as simetrias de figuras regulares (planas) através de rotações e reflexões do espaço (euclidiano), e também as simetrias do próprio espaço. Simetrias de funções também são familiares: perceba como a função cosseno é par e a função seno é ímpar. Estes exemplos ilustram como simetrias são comuns na matemática.

O conceito de grupo está intimamente relacionado com o conceito de simetria. De fato, um grupo sempre pode ser "encarnado" como simetrias de algum objeto (em geral um conjunto, mas que eventualmente pode ter mais estrutura). Nesse sentido, uma ação (global) de um grupo em algum objeto/conjunto é uma aplicação que para cada elemento do grupo associa uma simetria desse, de tal forma que a operação do grupo e a composição das simetrias concordem. Dito de outra forma, uma ação (global) de um grupo (multiplicativo) G em um conjunto X é um homomorfismo de grupos $\alpha : G \longrightarrow Bij(X)$, onde consideramos $Bij(X)$ um grupo com a operação de composição de funções. Dito isto, temos que uma ação (global) é um conceito muito simples, que pode ser aplicado e visualizado em muitos contextos. Porém, como é usual, quando o objeto X é "interessante", ou seja, possui alguma estrutura adicional, é que o conceito de ação se torna uma ferramenta interessante. Em particular, é de especial interesse quando o objeto/conjunto X tem uma estrutura linear, isto é, consideramos X um espaço vetorial.

Na direção de estudar ações de forma mais geral, é interessante considerar uma ação definida de forma diferente, mas que no caso de ações de grupos é equivalente: a ação (global) de um grupo G em um conjunto X, como um homomorfismo de grupos, é equivalente a uma aplicação $\beta : G \times X \longrightarrow X$, onde $g \cdot x := \beta(g,x)$, satisfazendo $1_G \cdot x = x$ e $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$, para todos $g,h \in G$ e $x \in X$. Por exemplo, considerando $X := \mathbb{R}^2$ e $G := SO(2,\mathbb{R}) = \left\{ A_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \ ; \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$, então G é o grupo de rotações do espaço euclidiano bidimensional. Assim, G age em X de forma usual: se $A_\theta \in G$ e $v \in X$, então $A_\theta \cdot v = A_\theta v$, isto é, A_θ rotaciona o vetor v (do espaço euclidiano bidimensional) por um ângulo θ. Outra simetria do $\mathbb{R}^2$ são as translações. Neste caso, considerando $G := (\mathbb{R}^2, +)$, temos que G age em $X := \mathbb{R}^2$ também de forma usual: se $u \in G$ e $v \in X$, então $u \cdot v = u + v$.

Às vezes ocorre que o grupo G também tem mais estrutura que apenas um grupo; além de X ter uma estrutura linear, o grupo G também pode ser munido dessa estrutura: á álgebra de grupo $\mathbb{R}G$. Logo, é natural termos uma generalização do conceito de ação de um grupo para contextos mais gerais, como ação de uma álgebra A: uma aplicação $\beta : A \times X \longrightarrow X$, onde $a \cdot x := \beta(a,x)$, satisfazendo $1_A \cdot x = x$ e $a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x$, para todos $a,b \in A$ e $x \in X$. Por exemplo, a álgebra de matrizes quadradas de ordem 2, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, age (globalmente) em $\mathbb{R}^2$ como transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$: $A \cdot v = Av$, para cada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^2$. Note que esta ação de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^2$ não lida apenas com as bijeções do espaço euclidiano bidimensional $\mathbb{R}^2$, porém também não lida com qualquer função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, mas tão somente aquelas que mantém uma certa simetria no espaço: as transformações lineares.

Ações parciais são, grosso modo, simetrias locais dos objetos/conjuntos estudados. Este conceito, introduzido por Exel (1994), utiliza simetrias locais “encarnadas” pelo grupo $\mathbb{S}^1$ para descrever um espaço (de operadores, no caso). Para uma melhor visualização do que seria uma simetria local, vejamos um exemplo (em $\mathbb{R}^2$). Considerando um círculo unitário centrado na origem, temos como exemplos de simetrias (globais) desse objeto as rotações (de $\mathbb{R}^2$ centradas na origem, por qualquer ângulo) e as reflexões (por qualquer reta que passe na origem). Considerando agora dois círculos unitários, centrados em $(-2,0)$ e $(2,0)$, as rotações já não são mais simetrias (globais). Tampouco as reflexões por retas quaisquer, apenas as reflexões pelos eixos. Porém, pensando apenas “localmente”, podemos rotacionar e refletir cada um dos círculos, de forma independente. Este é o “espírito” de uma simetria local, uma simetria de uma “parte” do objeto/conjunto, e não uma simetria de todo o objeto/conjunto. Naturalmente, assim como as simetrias/ações (globais), também as simetrias locais/ações parciais foram estendidas e generalizadas para vários contextos.

Uma destas generalizações, tema de pesquisa atualmente, são as ações parciais de *álgebras de Hopf* em álgebras. Grosseiramente, uma álgebra de Hopf H é, em certo sentido, uma generalização natural de uma álgebra de grupo $\mathbb{R}G$. Esta álgebra, além de uma estrutura linear e multiplicativa em que todos elementos possuem "inversos" (não multiplicativo, mas convolutivo - que no caso de grupos significam a mesma coisa), possui ainda uma estrutura *comultiplicativa*: uma *comultiplicação* $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$ e uma *counidade* $\varepsilon : H \longrightarrow \mathbb{R}$. Essa nova estrutura, chamada de coálgebra, é uma "espécie de estrutura diagonal" (na verdade, é uma estrutura dual à estrutura de álgebra): chamando de S a operação que a cada elemento associa seu inverso (convolutivo), temos:

- no caso de grupo, a comultiplicação/"diagonal" cumpre que
$$g \overset{\Delta}{\mapsto} (g,g) \overset{S\times Id_G, Id_G\times S}{\mapsto} 1_G$$
e a unidade cumpre que
$$(g,1_G) \overset{m}{\mapsto} g \ \text{ e } (1_G, g) \overset{m}{\mapsto} g;$$
- no caso de uma álgebra de Hopf, a comultiplicação cumpre que
$$h \overset{\Delta}{\mapsto} h_1 \otimes h_2 \overset{S\times Id_G, Id_G\times S}{\mapsto} \varepsilon(h)1_H$$
e a counidade cumpre que
$$\varepsilon(h_1)h_2 = \varepsilon(h_2)h_1 = h.$$

Um primeiro exemplo de uma álgebra de Hopf é exatamente $\mathbb{R}G$.

Outro exemplo de uma álgebra de Hopf é a chamada *álgebra de Sweedler* $\mathbb{H}_4$: uma álgebra de dimensão 4, com base $\{1, g, x, gx\}$, onde 1 é a unidade, $g^2 = 1, x^2 = 0$ e $xg = -gx$. A estrutura comultiplicativa de $\mathbb{H}_4$ é dada por

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1,\ \Delta(g) = g \otimes g,\ \Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x,\ \Delta(gx) = gx \otimes g + 1 \otimes gx$$

$$\varepsilon(1) = \varepsilon(g) = 1, \quad \varepsilon(x) = \varepsilon(gx) = 0$$

$$S(1) = 1, \quad S(g) = g, \quad S(x) = -gx, \quad S(gx) = x.$$

Como uma álgebra de Hopf H possui além de uma estrutura de álgebra também uma estrutura de coálgebra, uma ação de H em uma álgebra A é uma simetria que concorda com ambas estruturas. Assim, temos que uma *ação (global) de H em uma álgebra A* é uma aplicação linear $\triangleright : H \otimes A \longrightarrow A$, tal que:

(i) $1_H \triangleright a = a$;

(ii) $h \triangleright (k \triangleright a) = hk \triangleright a$;

(iii) $h \triangleright ab = (h_1 \triangleright a)(h_2 \triangleright b)$;

(iv) $h \triangleright 1_A = \varepsilon(h)1_A$.

Note que estes itens significam que a estrutura de álgebra de A concorda com ambas estruturas de H: os dois primeiros itens com a estrutura de álgebra, enquanto os últimos dois com a estrutura de coálgebra.

Agora, uma ação parcial é uma simetria local, no sentido que a operação de álgebra concorda em uma parte do objeto, mas não necessariamente no todo. Precisamente, uma *ação parcial de H em uma álgebra A* é uma aplicação linear $\cdot : H \otimes A \longrightarrow A$, tal que:

(i) $1_H \cdot a = a$;

(ii) $h \cdot (k \cdot a) = (h_1 \cdot 1_A)(h_2 k \cdot a)$;

(iii) $h \cdot ab = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$;

(iv) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$.

Note que a estrutura de coálgebra de H concorda (globalmente) com a estrutura de álgebra de A (itens (iii) e (iv)), enquanto que a estrutura de álgebra de H concorda apenas parcialmente com a estrutura de álgebra de A (itens (i) e (ii)). Existe também o conceito de simetria local em que a estrutura de coálgebra concorda com uma parte do objeto em que está atuando, e este conceito se chama *coação parcial* - se concordar com todo objeto, temos uma coação global. Mas abordar este conceito não é nosso objetivo aqui.

Entretanto, encontrar simetrias (locais ou globais) em objetos (conjuntos, espaços, álgebras, etc) não é uma tarefa fácil.

Uma maneira de construir ações parciais de uma álgebra de Hopf H em uma álgebra A, é através de *escalares*. Considere $\lambda : H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que $\lambda(1_H) = 1$ e $\lambda(h)\lambda(k) = \lambda(h_1)\lambda(h_2 k)$. Então H age parcialmente em A via $h \cdot a := \lambda(h) a$. De fato, este funcional caracteriza tais ações parciais, e portanto iremos nos referir a λ como uma ação parcial (via escalares) de H. Assim, uma maneira de obter exemplos de ações parciais de uma álgebra de Hopf H é determinar tais funcionais lineares.

Em particular, as ações parciais λ de uma álgebra de grupo $\mathbb{R}G$ estão determinadas por seus subgrupos: $\lambda = \chi_N$ (função característica) é uma ação parcial se e somente se N é um subgrupo de G. Também conhecidas são as ações parciais λ da álgebra de Sweedler $\mathbb{H}_4$: $\lambda = \varepsilon$ (e neste caso a ação é global) ou $\lambda = \lambda_\alpha$, onde $\lambda_\alpha(1) = 1, \lambda_\alpha(g) = 0$ e $\lambda_\alpha(x) = \lambda_\alpha(gx) = \alpha$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ fixado.

Estes exemplos podem ser encontrados em (ALVES *et al.*, 2010). Para determinar este funcional λ_α, é preciso resolver um sistema não-linear de 4 incógnitas e 16 equações. Nisto é que reside a dificuldade de obter as ações parciais λ de uma álgebra de Hopf H qualquer. Se $dim(H) = n$, determinar uma ação parcial λ é equivalente a resolver um sistema não-linear de n incógnitas e n^2 equações. Este trabalho pretende formalizar um método desenvolvido que permite resolver este sistema através de sistemas relativamente menores e/ou, de certa forma, mais simples.

2. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste trabalho, desenvolvemos um método para calcular as ações parciais λ para uma álgebra de Hopf H. É comum considerar álgebras de Hopf sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado e de característica zero. Em geral, pode-se pensar que $\Bbbk = \mathbb{C}$. Entretanto, há casos onde é possível considerar ainda $\Bbbk = \mathbb{R}$. Para um melhor entendimento dos resultados aqui apresentados, recomenda-se a leitura de (MARTINI *et al.*, 2022) ou (SILVA, 2020).

Antes do método de fato, vejamos alguns fatos, definições e resultados que sistematizam e validam o método que será apresentado.

Primeiro, dada uma álgebra de Hopf H, existe um grupo $G(H) \subseteq H$, este grupo é chamado de *grupo de grouplikes de* H. Além disso, $G(H)$ é *linearmente independente*, e portanto podemos estendê-lo a uma base de H. Por fim, recorde que ações parciais λ de $\Bbbk G$ estão em correspondência com subgrupos de N de G ($\lambda = \chi_N$).

Vamos, agora, iniciar a discussão necessária para apresentar ao final o método.

Definição. Seja B uma base de H considere a aplicação linear $\Lambda : H \longrightarrow \Bbbk[X_b \mid b \in B]$, dada por $\Lambda(b) = X_b$. Chamamos de *Sistema Parcial Associado à B* (SPA-B) o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \Lambda(1_H) = 1_{\Bbbk} \\ \Lambda(a)\Lambda(b) = \Lambda(a_1)\Lambda(a_2 b) \end{cases} \qquad a, b \in B. \tag{1}$$

Assim, $\lambda : H \longrightarrow \Bbbk$ é uma ação parcial de H se e somente se $(\lambda(b))_{b\in B}$ é uma solução do SPA-B (1). Em particular, SPA-B sempre possui pelo menos uma solução: a ação global dada por ε, precisamente $(\varepsilon(b))_{b\in B}$.

Agora, estendemos $G(H)$ a uma base $B := G(H) \sqcup B'$ de H, onde $\sqcup$ denota a união disjunta. Então, SPA-B (1) é reescrito como

$$\begin{cases} \Lambda(1_H) = 1_{\Bbbk} \\ \Lambda(g)\Lambda(v) = \Lambda(g)\Lambda(gv) \\ \Lambda(u)\Lambda(v) = \Lambda(u_1)\Lambda(u_2 v) \end{cases} \qquad g \in G(H), u \in B', v \in B. \tag{2}$$

Por um lado, se $\lambda : H \longrightarrow \Bbbk$ uma ação parcial, então $\lambda|_{\Bbbk G(H)} = \chi_N$, para algum subgrupo N de $G(H)$. Além disso, é fato que $\lambda(v) = \lambda(gv)$ para cada $g \in N, v \in B$.

Assim, $(\lambda(b))_{b\in B}$ é uma solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \Lambda(g) = 1_{\Bbbk} \\ \Lambda(h) = 0 \\ \Lambda(u) = \Lambda(gu) \\ \Lambda(u)\Lambda(v) = \Lambda(u_1)\Lambda(u_2 v) \end{cases} \qquad g \in N, h \in G(H) \setminus N, u \in B', v \in B. \tag{3}$$

Por outro lado, seja N um subgrupo de $G(H)$ e considere um sistema como em (3). Se existe uma solução $(\alpha_b)_{b\in B}$ para este último sistema, então ele também é uma solução para SPA-B (2).

Fixe um subgrupo N de $G(H)$. Para $x, y \in B'$, defina a relação

$$x \sim_N y \quad \text{se e só se} \quad \exists\, g \in N \text{ tal que } y = gx.$$

Note que esta é uma relação de equivalência em B'. Dado $x \in B'$, denotamos por $[x] = \{y \in B' \mid y \sim_N x\}$ a *classe de equivalência de* x. Em particular, para qualquer $x \in B'$, $[x] = \{x\} \sqcup [x]^{\perp}$, onde $[x]^{\perp} = \{y \in B' \mid y \sim_N x, y \neq x\}$.

Denote por $\widetilde{N}$ um *conjunto transversal da relação* $\sim_N$ *em* B', isto é, $\widetilde{N}$ é um subconjunto de B' que consiste de exatamente um representante de cada classe de equivalência. Então, temos uma partição de B' dada por $B' = \widetilde{N} \sqcup N^{\perp}$, onde $N^{\perp} = B' \setminus \widetilde{N}$. Observe que $N^{\perp} = \cup_{x\in\widetilde{N}}[x]^{\perp}$.

Considere agora o seguinte sistema de equações::

$$\begin{cases} \Lambda(g) = 1_{\Bbbk} \\ \Lambda(h) = 0 \\ \Lambda(u) = \Lambda(gu) \end{cases} \qquad g \in N, h \in G(H) \setminus N, u \in B'. \tag{4}$$

Então, $(\alpha_b)_{b\in B}$ é uma solução de (4) se e somente se $\alpha_g = 1_{\Bbbk}$, $\alpha_h = 0$, $\alpha_y = \alpha_x$, e $\alpha_x \in \Bbbk$ é um parâmetro livre, para cada $g \in N$, $h \in G(H) \setminus N$, $x \in \widetilde{N}$ e $y \in [x]$. Neste caso, dizemos que (4) é um *Sistema Parcial Associado à B com Condição Inicial N* (SPACI-N). Note que $(\alpha_b)_{b\in B}$, como descrito, é uma solução para este sistema.

Finalmente, denote por $P_{t,s} = \{x \in H \mid \Delta(x) = x \otimes t + s \otimes x, \text{ onde } t, s \in G(H)\}$, e considere os seguintes conjuntos:

$$B_{t,s} = \{x \in P_{t,s}(H) \mid t \in N, s \in G(H) \setminus N\}$$

e

$$\widetilde{B} = \widetilde{N} \setminus \left(\cup_{t,s\in G(H)} B_{t,s}\right).$$

Com estas notações, o sistema

$$\left\{ \Lambda(u)\Lambda(v) = \Lambda(u_1)\Lambda(u_2 v) \right. \qquad u \in \widetilde{B}, v \in B, \tag{5}$$

é dito ser o *N-reduzido SPA-B*.

Teorema. Seja $B = G(H) \sqcup B'$ uma base de H e $\lambda : H \longrightarrow \Bbbk$ uma aplicação linear. Então, λ é uma ação parcial de H se e somente se $N = \{g \in G(H) \mid \lambda(g) = 1_{\Bbbk}\}$ é um subgrupo de $G(H)$ e $(\lambda(b))_{b \in B}$ é ambos: SPACI-N e também uma solução do N-reduzido SPA-B.

Proposição. Sejam $B = G(H) \sqcup B'$ uma base de H, $g, t \in G(H)$, $x \in P_{g,t}(H) \cap B'$ e $(\alpha_b)_{b \in B}$ um SPACI-N. Se $(\alpha_b)_{b \in B}$ é também uma solução do N-reduzido SPA-B, então:

a) Se $\alpha_g = \alpha_t$, então $\alpha_x = 0$;
b) Se $\alpha_t = 1_{\Bbbk}$ e $\alpha_x = 0$, então $\alpha_{xu} = 0$ para cada $u \in H$ tal que $xu \in B'$;
c) Se $\alpha_g = 1_{\Bbbk}$, $\alpha_t = 0$ e $xt^{-1} \in B'$, então $\alpha_{xt^{-1}} = -\alpha_x$;
d) Se $\alpha_g = 0$, $\alpha_t = 1_{\Bbbk}$ e $xg^{-1} \in B'$, então $\alpha_{xt^{-1}} = -\alpha_x$.

Dada uma ação parcial $\lambda : H \longrightarrow \Bbbk$, nós dizemos que λ tem *condição inicial* N se $N = \{g \in G(H) \mid \lambda(g) = 1_{\Bbbk}\}$.

Assim, baseado no ***Teorema 2***, podemos resumir o método para calcular uma ação parcial λ de H.

O Método: Seja H uma álgebra de Hopf. Para obter uma ação parcial λ de H, seguimos os seguintes passos:

Passo 1. Considere $G(H)$ e estenda este conjunto a uma base B de H;
Passo 2. Considere N um subgrupo de $G(H)$;
Passo 3. Obtenha as soluções de $(\alpha_b)_{b \in B}$ do sistema (4);
Passo 4. Investigue o N-reduzido SPA-B;
Passo 5. **Conclusão:** Se $(\alpha_b)_{b \in B}$ é solução do N-reduzido SPA-B, então a aplicação linear$\lambda : H \longrightarrow \Bbbk$ dada por $\lambda(b) = \alpha_b$, para cada $b \in B$, é uma ação parcial de H; Do contrário, não há ação parcial de H com condição inicial N.

Por fim, segue um exemplo de todas as ações parciais λ da seguinte álgebra de Hopf de dimensão 16. Considere

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \ & \Bbbk\langle\, g, h, x, y \mid g^2 = h^2 = (gh)^2 = 1, x^2 = y^2 = 0, \\ & \qquad xg = -gx, xh = hx, yg = -gy, hy = -hy, yx = -xy \,\rangle \end{aligned}$$

onde $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(h) = h \otimes h$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$ e $\Delta(y) = y \otimes 1 + g \otimes y$.

Então, as ações parciais λ de $\mathcal{H}$ estão descritas na tabela abaixo, onde $\alpha, \beta \in \Bbbk$ são elementos quaisquer.

Tabela 1. Ações parciais λ de $\mathcal{H}$ *.

ação \ base	x	gx	hx	ghx	y	gy	hy	ghy	xy	gxy	hxy	ghxy
$\lambda_G = \varepsilon$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\{1,g\}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\{1,h\}}$	α	α	α	α	0	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda_{\{1,gh\}}$	0	0	0	0	α	α	α	α	0	0	0	0
$\lambda_{\{1\}}$	α	α	0	0	β	β	0	0	0	0	0	0

Fonte: do autor.
*O subescrito em λ indica a condição inicial $N \subseteq G(\mathcal{H})$, isto é, $\lambda_N(h) = \chi_N(h)$, para todo $h \in G(\mathcal{H})$.

3. CONCLUSÕES

O método foi muito eficaz para álgebras de Hopf pontuadas - a álgebra de Sweedler é uma álgebra de Hopf pontuada e muitas destas são, de certa forma, similares a álgebra de Sweedler. A eficiência do método para este tipo de álgebras de Hopf consiste no fato que o sistema N-reduzido (5) geralmente apresenta dois comportamentos, que dependem apenas do quanto a condição inicial N é um subgrupo "grande" em $G(H)$ e em B: em um dos casos, o sistema N-reduzido é um sistema relativamente pequeno quando comparado ao sistema inicial SPA-B; em outro caso, o sistema não é tão menor quanto SPA-B, porém também não é tão complexo, e neste caso, a Proposição 2 auxilia muito em sua resolução.

Em particular, em (SILVA, 2020) e (MARTINI *et al.*, 2022) estão apresentadas explicitamente todas as ações parciais de álgebras de Hopf não-semissimples e pontuadas de dimensões 8 e 16, obtidas através do método apresentado.

REFERÊNCIAS

Alves, M., Batista, E. "Enveloping Actions for Partial Hopf Actions". Em: **Communications in Algebra** 38 (8) (2010), pp. 2872–2902. DOI: 10.1080/00927870903095582.

Exel, R., "Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequences". Em: **Journal of Map Analysis** 122 (3) (1994),, pp. 361–401. DOI: 10.1006/jfan.1994.1073.

Martini, G., Paques, A. Silva, L. D., "Partial actions of a Hopf algebra on its base field and the corresponding partial smash product algebra". Em: **Journal of Algebra and Its Applications** (2022). DOI: 10.1142/S0219498823501402.

Silva, L. D. "Deformações de Álgebras de Hopf via Ações Parciais". Tese de doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.