

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

CAIO CÉSAR ROSTIROLLA

ENSAIOS EM MACROECONOMETRIA

Porto Alegre
2024

CAIO CÉSAR ROSTIROLLA

ENSAIOS EM MACROECONOMETRIA

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal

2024

CIP - Catalogação na Publicação

Rostirolla, Caio César
Ensaio em Macroeconometria / Caio César
Rostirolla. -- 2024.
133 f.
Orientador: Marcelo Savino Portugal.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. Macroeconomia Aplicada. 2. Séries Temporais. 3. Políticas Fiscal e Monetária. 4. Curva de Juros. 5. Previsão. I. Savino Portugal, Marcelo, orient. II. Título.

CAIO CÉSAR ROSTIROLLA

ENSAIOS EM MACROECONOMETRIA

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em: 21 de Agosto de 2024

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal - Orientador
UFRGS

Prof. Dr. João Frois Caldeira
UFSC

Prof. Dr. Andreza Aparecida Palma
UFSCAR

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann
UFRGS

AGRADECIMENTOS

Esta Tese é dedicada à minha família, principalmente aos meus pais, Everton e Lóris, minha irmã, Rhana, e à minha companheira, amor da minha vida, Fernanda. Sem eles, eu não chegaria até aqui.

Dedico também aos meus Avós, Otto, Siria, Lurdes e Adelir, que iluminaram o meu caminho durante esse longo tempo de formação. Também aos meus tios e primos, que me apoiaram com muito carinho ou de alguma outra maneira; vocês sempre estiveram ao meu lado.

Ao meu Orientador, Marcelo Portugal, por quem nutro profundo respeito e apreço. Trabalhar com você foi um privilégio. Aos meus professores dos tempos de Graduação e Mestrado: Cristiano, Felipe, André, Cláudio e Régis. A escola de vocês foi fundamental para esta etapa.

Por fim, àquelas pessoas que fizeram parte deste caminho, por todos os ensinamentos e contribuições para o meu desenvolvimento, direta ou indiretamente.

ENSAIOS EM MACROECONOMETRIA

RESUMO

Esta tese é composta por três artigos independentes em macroeconomia aplicada. No capítulo 1, permitimos que um modelo DSGE de pequena economia aberta considere que os regimes dos coeficientes de reação das autoridades monetária e fiscal são endógenos, em que a alternância entre regimes depende de um fator latente estimado que representa o estado dos regimes cruza um limite. A endogeneidade dos regimes decorre das regras de movimento de cada fator latente, que são determinadas pelos choques estruturais da economia e pelos fatores defasados. As estimativas para a economia brasileira indicam que há forte presença de endogeneidade nos regimes monetário e fiscal; em especial, calculamos que os choques estruturais de política monetária apresentam peso relevante na determinação dos regimes futuros de políticas fiscal e monetária e que os choques idiossincráticos do fator fiscal influenciam o estado do regime monetário um passo à frente, mas não o contrário. No Capítulo 2, estudamos a introdução de Parâmetros Variáveis no Tempo nos modelos de curva de juros Nelson-Siegel Dinâmico à luz da GAS (*Generalized Autoregressive Score*) e como podemos usá-los para imunizar carteiras com exposições de prazos mais longos. Com base em dados de contratos do mercado de juros futuros brasileiro (DI-Futuro), estimamos diferentes especificações com atenção especial para o tratamento econométrico dos parâmetros de decaimento e volatilidade estocástica comum. Propomos o uso do Filtro Kalman combinado com a metodologia GAS para lidar com a não linearidade. Em seguida, testamos como as especificações estimadas performam em um contexto de imunização de uma carteira de ativos de crédito prefixado de longo prazo, usando instrumentos derivativos de curto prazo. Nossas estimativas apontam que a consideração de dinâmica no fator de decaimento combinada com a volatilidade estocástica melhora a performance de hedge. No Capítulo 3, estudamos alternativas de robustez para lidar com *outliers* na classe de modelos MF-VAR e realizamos um exercício de previsão em tempo real para o crescimento do PIB brasileiro durante o período da pandemia do COVID-19. Consideramos, no exercício de previsão do MF-VAR, três estratégias: (i) fixação dos parâmetros estimados até o final de 2019 para construção de previsões em 2020; (ii) adaptação da heterocedasticidade de forma *ad-hoc*; (iii) consideração de volatilidade estocástica juntamente à modelagem de caudas pesadas nos termos de erro e de *outliers* potenciais. O exercício empírico revelou que os modelos estudados são promissores em lidar com as observações extremas, de modo que superaram a pesquisa FOCUS na previsão do 1T/2020 e do 4T/2020. Em termos de previsão, encontramos que as estratégias (i) e (ii) são recomendáveis para a previsão de curtíssimo prazo, principalmente a primeira, mas não prospectivamente. Considerando a estratégia com caudas pesadas, esta apresentou intervalos de confiança mais estreitos, mas um desempenho preditivo de curto prazo relativamente mais fraco.

Palavras-Chave: Mudança de Regime Endógena. DSGE. Parâmetros Variantes no Tempo. Score Driven. Nelson Siegel. MF-VAR. Correção para Outliers. Inferência Bayesiana.

ESSAYS IN MACROECONOMETRICS

ABSTRACT

This thesis is composed of three independent articles in applied macroeconomics. In chapter 1 of this Thesis, we allow a DSGE model of a small open economy to consider that the regimes of the reaction coefficients of the monetary and fiscal authorities are endogenous, where the regimes changes depends on whether an estimated latent factor, that represents the state of the regimes, crosses a threshold. Endogeneity arises from the rules of movement of each latent factor, which are determined by the structural shocks of the economy and lagged factors. Estimates for the Brazilian economy indicate that there is a strong presence of endogeneity in the monetary and fiscal regimes; In particular, we calculate that structural monetary policy shocks have a relevant weight in determining future fiscal and monetary policy regimes and that idiosyncratic fiscal factor shocks influence the state of the monetary regime one step forward but not vice versa. In Chapter 2, we study the introduction of time-varying parameters in Dynamic Nelson-Siegel yield curve models from a GAS (*Generalized Autoregressive Score*) perspective, and how we can use them to immunize fixed-income portfolios with long-term exposures. Using contract data from the Brazilian futures interest market (DI-Futuro), we estimate different specifications with special attention to the econometric treatment of decay parameters and common stochastic volatility. We propose the use of the Kalman Filter combined with the GAS methodology to deal with nonlinearity. Next, we test how the estimated specifications perform in the context of immunizing a long-term fixed-income portfolio using short-term derivative instruments. Our estimates indicate that considering dynamics in the decay parameter combined with stochastic volatility improves hedge performance. In Chapter 3, we study robustness alternatives to deal with outliers in the MF-VAR class of models and carry out a real-time forecasting exercise for Brazilian GDP growth during the period of the COVID-19 pandemic. We considered three solutions in the MF-VAR forecasting exercise: (i) fixing the estimated parameters until the end of 2019 to build forecasts in 2020; (ii) adaptation of heteroscedasticity in a *ad-hoc* way; (iii) consideration of stochastic volatility along with modeling of heavy tails in terms of error and potential outliers. The empirical exercise showed that the models studied are promising in dealing with extreme observations, such that they surpassed the FOCUS survey in forecasting 1Q/2020 and 4Q/2020. In terms of forecasting, we found that strategies (i) and (ii) are recommended for very short-term forecasting, especially the first, but not prospectively. Considering the strategy with heavy tails, it presented narrower confidence intervals, but relatively weaker short-term predictive performance.

Key-Words: Endogenous Regime Change; DSGE; Time Varying Parameters; Score Driven; Nelson Siegel; Mixed Frequency Vector Autorregression; Outlier-Correction; Bayesian Inference.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	REFERÊNCIAS	14
2	A INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE OS REGIMES FISCAL E MONETÁRIO NO BRASIL: UMA ABORDAGEM DSGE COM MUDANÇA DE REGIME ENDÓGENA	19
2.1	INTRODUÇÃO	20
2.2	UM MODELO SIMPLES PARA ECONOMIA ABERTA	23
2.2.1	Descrição do Modelo	23
2.3	MÉTODOS ECONOMETRÍCOS	28
2.3.1	Dados	28
2.3.2	Mecanismo de Mudança de Regime Endógena	29
2.3.3	Estimação	32
2.4	RESULTADOS	36
2.4.1	Parâmetros Estimados	36
2.4.2	Plausibilidade das Estimativas - Fatores de Regimes w_t	44
2.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	46
2.6	REFERÊNCIAS	47
2.7	APÊNDICE	53
2.7.1	APÊNDICE A - DERIVAÇÃO DO MODELO BÁSICO	53
2.7.2	APÊNDICE B - ALGORITMO DE SOLUÇÃO	59
2.7.3	APÊNDICE C - FILTRO DE KALMAN COM MUDANÇA DE REGIME ENDÓGENA	60
2.7.4	REFERÊNCIAS	63
3	SCORE-DRIVEN NELSON-SIEGEL: ESTIMAÇÃO E IMUNIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE CARTEIRAS DE RENDA FIXA	65
3.1	INTRODUÇÃO	66
3.2	SCORE-DRIVEN NELSON-SIEGEL	70
3.2.1	Modelo Dinâmico de Nelson-Siegel para a Estrutura a Termo das Taxas de Juros	71
3.2.2	Modelos GAS sob a forma de Espaço de Estados	73
3.2.3	GAS-Kalman Filter - Modelo Nelson-Siegel com Três Fatores (NS3F)	76
3.2.4	GAS-Kalman Filter - Modelo NS4F	78
3.2.5	Volatilidade Estocástica	81
3.3	DADOS	84
3.4	RESULTADOS	86
3.4.1	Estimativas dos Modelos Nelson-Siegel	87
3.5	EXERCÍCIO EMPÍRICO: IMUNIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE ATIVOS DE LONGO PRAZO	90
3.5.1	Construção de uma Carteira de Crédito Sintética	91
3.5.2	Otimização do Hedge de carteira	93
3.5.3	Resultados de Hedge	96

3.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
3.7	REFERÊNCIAS	99
4	PREVISÕES EM TEMPO REAL PARA O CRESCIMENTO DO PIB DURANTE A PANDEMIA: APLICAÇÃO PARA O BRASIL SOB A ÓTICA MF-VAR	103
4.1	INTRODUÇÃO	104
4.2	MODELO DE VETORES AUTORREGRESSIVOS COM DADOS MISTOS (MF-VAR)	109
4.2.1	MF-VAR padrão - Especificação e Estimação	109
4.2.2	Ilustração Empírica: Estimação do MF-VAR padrão por MLE	116
4.3	EXTENSÕES MF-VAR	128
4.3.1	Estimação Bayesiana	128
4.3.2	Correção de Lenza e Primiceri (2020)	131
4.3.3	(SVO-t): Volatilidade Estocástica com Outliers Transitórios e Caudas Pesadas nos Resíduos	133
4.4	PREVISÃO EM TEMPO REAL DURANTE A PANDEMIA	136
4.4.1	Desenho de Previsão	136
4.4.2	Resultados	138
4.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	148
4.6	REFERÊNCIAS	150
4.7	APÊNDICE	155
4.7.1	APÊNDICE A	155
4.7.2	APÊNDICE B	156
5	CONCLUSÃO	159
5.1	REFERÊNCIAS	164

1 INTRODUÇÃO

Esta tese é composta por três ensaios em macroeconomia aplicada, área também conhecida como macroeconometria, e possuem em comum a ênfase na aplicação de metodologias que permitem a inclusão de dinâmica em alguns parâmetros. Ao incluir variabilidade em alguns parâmetros, são adicionadas não linearidades à modelagem estatística dos problemas, de modo que são exigidas técnicas econométricas de estimação mais sofisticadas. Nos três ensaios, são empregados os métodos de espaço de estados e técnicas de inferência Bayesiana Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Assim, em um sentido mais amplo, esta tese pode ser vista como um avanço na agenda de pesquisa empírica de aplicações de modelos não lineares de espaço de estado no estudo da macroeconomia brasileira.

A tese está organizada por níveis de contribuição. O primeiro ensaio é uma grande novidade na literatura, em que estudamos a presença de endogeneidade nas mudanças de regime monetário e fiscal. No segundo artigo, exploramos a metodologia score-driven (GAS) como uma estratégia para estimar modelos de estrutura a termo da taxa de juros (Nelson Siegel Dinâmico) em um ambiente de fatores dinâmicos, variabilidade no parâmetro de decaimento e volatilidade estocástica. Por fim, no terceiro artigo, investigamos a capacidade de aprimoramento das previsões em tempo real do PIB brasileiro em cenários de choques extremos, como a pandemia, avaliando como métodos de correção para *outliers* podem melhorar o desempenho dos modelos MF-VAR.

Especificamente, nosso foco reside em explorar três problemas empíricos:

1. **Estimação dos elementos endógenos que explicam as razões para as mudanças de regime dos parâmetros de reação das políticas monetária e fiscal;**
2. **Imunização de exposições de longo prazo usando estimativas de modelos de curva de juros Nelson Siegel Dinâmico com a metodologia Kalman-GAS, considerando a presença de fatores dinâmicos, variabilidade no decaimento e volatilidade estocástica comum;**
3. **Estimação e previsão em tempo real de modelos MF-VAR modificados para lidar com observações extremas, considerando uma aplicação ao caso do PIB brasileiro durante a pandemia.**

Como primeira contribuição principal, o primeiro ensaio constitui uma interseção de dois ramos da literatura macroeconômica: interações entre políticas monetária e fiscal em modelos DSGE de economia aberta e mudanças endógenas de regime. Nosso objetivo é indicar quais fatores determinam mudanças iminentes nos regimes de política monetária e fiscal da economia brasileira desde 2000 até 2021.

Talvez um dos principais avanços da literatura macroeconômica dos últimos trinta anos seja a introdução completa da conjectura de que as autoridades fiscal e monetária reagem ao estado da economia real e interagem entre si (Leeper (1991)). Recentemente, trabalhos empíricos têm explorado tais interações dinâmicas entre as regras de política monetária e fiscal através de modelos DSGE com Mudança de Regime Markoviana (MS-DSGE) (Favero e Monacelli (2005); Davig e Leeper (2011); Bianchi (2012); Bianchi e Ilut (2017)). A maioria desses trabalhos, no entanto, assume que os regimes de política mudam, exogenamente, e que a probabilidade de transitar de um regime para o outro é constante no tempo. Dessa maneira, esses modelos de mudança exógena são incapazes de responder, objetivamente, por que ocorrem mudanças de regime e como as mudanças em um regime de política afetam as do outro.

Para tanto, consideramos o modelo básico para uma pequena economia aberta desenvolvido por Lubik e Schorfheide (2007) e incorporamos um bloco fiscal e elementos de mudança de regime endógena nas funções de reação fiscal e monetária, em que as mudanças nos regimes dos coeficientes das políticas podem interagir umas com as outras e serem influenciadas pelas ações de políticas defasadas e pelos choques estruturais do modelo. Até onde sabemos, este é o primeiro artigo que explora as interações entre as políticas monetária e fiscal com base em uma estrutura de mudança de regime endógena em um modelo DSGE para pequena economia aberta.

O modelo é estimado por meio de técnicas bayesianas usando o filtro de Chang, Choi e Park (2017), adaptado para múltiplos fatores, em que as mudanças de regime das políticas monetária e fiscal são desencadeadas sempre que um fator latente autorregressivo que representa o estado dos regimes cruza um limiar (veja também Qiu (2019) e Chang, Maih e Tan (2021)).

Nosso segundo ensaio é motivado pelos desenvolvimentos recentes na modelagem da curva de juros, na qual propomos contribuir com a aplicação de uma nova metodologia de estimação, denotada pela combinação do Filtro de Kalman e de modelos Autorregressivos Generalizados (GAS).

Desde Diebold e Li (2006), a literatura empírica de curva de juros caminhou para diferentes generalizações do modelo de fatores dinâmicos e investigou principalmente a inclusão de não linearidades e como elas impactam as estimativas desses modelos. Inicialmente, Koopman, Mallee e Wel (2010) propuseram a inclusão de dinâmica em λ e na volatilidade, usando técnicas não lineares como o Filtro de Kalman Estendido. Uma segunda iniciativa surgiu com Hautsch e Yang (2012) e Caldeira, Laurini e Portugal (2010), em que os autores propuseram o uso técnicas bayesianas para lidar com as não linearidades, sendo a principal inovação desses trabalhos a consideração de volatilidade estocástica para a matriz de covariância dos fatores dinâmicos. A terceira generalização dessa literatura

foi a inclusão de covariáveis macroeconômicas no modelo (Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006)). Em especial, Laurini e Caldeira (2016) consideraram tanto a inclusão de dinâmica no fator de decaimento como a modelagem da volatilidade estocástica da equação de transição dos fatores dinâmicos e dos fatores macroeconômicos.

Em resumo, uma grande quantidade de artigos dessa literatura considerou λ ou a volatilidade como parâmetros Variáveis no Tempo (TVP), ou ainda inclui variáveis macroeconômicas no modelo (veja, por exemplo, Caldeira, Cordeiro, Ruiz e AP Santos (2023)). Contudo, os trabalhos geralmente se concentram na análise de maturidades de 1 a 10 anos, de forma que poucos artigos se concentraram em investigar como generalizações nos modelos Nelson-Siegel melhoram a previsão da parte ultra-longa da curva de juros. Entre eles, Christensen, Diebold e Rudebusch (2009) propuseram um modelo de 5 fatores dinâmicos e com condições de não arbitragem para modelagem de maturidades até 30 anos. Dubecq e Gourieroux (2011) investigaram alguns fatos estilizados da curva de juros americana até 28 anos e sugeriram algumas generalizações sobre os fatores dinâmicos, com o argumento de que um modelo Nelson-Siegel com três fatores não é suficiente para modelar maturidades superiores a 10 anos. Christensen, Lopez e Mussche (2022), testaram três generalizações (entre elas, parâmetros constantes, volatilidade estocástica e 5 fatores dinâmicos) para extrapolar a curva de juros de algumas economias avançadas, e encontraram que as três especificações apresentaram bom desempenho, com baixos erros médios de extrapolação. Mais recentemente, Quaedvlieg e Schotman (2022) mostraram que a introdução de dinâmica em λ e nas variâncias melhoram a capacidade preditiva em relação às especificações com parâmetros constantes ou com cinco fatores dinâmicos.

O presente artigo conjuga dois elementos dessa literatura empírica: a introdução de parâmetros variáveis no tempo nos modelos de curva de juros Nelson-Siegel e a imunização de exposições de longo prazo usando esses modelos. Sob a óptica de hedge, o modelo de Nelson-Siegel é particularmente adequado para esse problema, uma vez que sua formulação oferece parâmetros de risco adicionais além da técnica de hedge via *duration*, isto é, permite controlar choques paralelos e não paralelos, e sua parcimônia permite identificar a variação temporal da estrutura de covariância das taxas de juros. Além disso, no modelo Nelson-Siegel, a estrutura de fatores é totalmente controlada pelo fator λ , uma vez que define a taxa de decaimento do polinômio exponencial, isto é, valores diferentes do fator de decaimento fornecem séries temporais diferentes para os fatores dinâmicos e, portanto, previsões distintas para os trechos curto e longo da estrutura a termo. Assim, considerar a sua variação é importante sob o contexto de imunização, dado que considerar o mesmo constante pode impactar diretamente a capacidade preditiva do modelo e assim, a performance de hedge.

Neste trabalho nos concentramos em estimar os parâmetros de decaimento e volatilidade estocástica e propomos uma versão intuitiva de modelar a variação temporal dos parâmetros

dinâmicos do modelo e que diferem este artigo da literatura aplicada ao mercado brasileiro. A inclusão de dinâmica em λ_t e de volatilidade estocástica torna o modelo não linear, de modo que o Filtro de Kalman não pode ser aplicado da maneira usual. Koopman, Mallee e Wel (2010) propuseram a formulação do Filtro de Kalman Estendido para lidar com essa situação. Aqui, usamos a metodologia econométrica GAS (*Generalized Autoregressive Score*)¹ combinada com Filtro de Kalman, de modo que impomos uma regra de movimento para os parâmetros a partir da função *score* da verossimilhança condicional, seguindo as técnicas introduzidas por Creal, Koopman e Lucas (2013) e Harvey (2013).

Apresentamos as derivações analíticas do modelo de Nelson-Siegel sob a metodologia GAS em formato de espaço de estados, na qual pode-se denominar *Score-Driven Nelson-Siegel*. A vantagem dessa metodologia é que a função de verossimilhança do modelo de estado de espaço com parâmetros variáveis no tempo é disponível em forma fechada, o que facilita a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança e reduz, substancialmente, o custo computacional em relação a outras técnicas econométricas.

A aplicação empírica do modelo Nelson-Siegel com parâmetros variáveis no tempo para fins de hedge de exposições de longo prazo a dados do mercado brasileiro também é uma inovação deste trabalho. Destacamos que em outros artigos da literatura brasileira, como Almeida e Lund (2014) e Meirelles e Fernandes (2018), são aplicadas técnicas de imunização paramétrica para prazos que possuem instrumentos com vencimentos aproximados e, além disso, essas aplicações se abstraem de oscilações no fator de decaimento e nas variâncias. No presente estudo, simulamos uma carteira de crédito prefixada que cresce mensalmente com *duration* aproximada maior que 20 anos. Visando à imunização com derivativos de taxa de juros, sabemos que o mercado brasileiro de DI-Futuro não apresenta liquidez para essas maturidades. Assim, estimamos diferentes variações e extensões do modelo dinâmico de Nelson-Siegel utilizando taxas referenciais do mercado de juros nominais brasileiro e usamos os resultados de interesse para replicar o excesso de retornos *target* com instrumentos derivativos de maturidade entre 1 até 12 anos ponderados de modo que minimizem a variância da carteira, no espírito de Litterman e Scheinkman (1991).

Por fim, o terceiro artigo tem como objetivo realizar um exercício de previsão em tempo real para o crescimento do PIB brasileiro durante o período da pandemia do COVID-19 considerando alternativas de robustez para lidar com outliers.

A recente pandemia da COVID-19 desencadeou restrições de mobilidade duradouras no mundo em 2020 e posteriormente. Como consequência, a atividade econômica entrou em colapso em muitos setores e provocou variações extremas nas séries temporais, criando um enorme desafio para a modelagem e previsão macroeconômica². Como devemos lidar com

¹ Veja <https://www.gasmodel.com/>.

² Os métodos econométricos tradicionais de séries temporais são majoritariamente lineares e assumem distribuição Gaussiana, de forma que procuram encontrar padrões médios em dados passados. Se os

essas observações extremas ao estimar modelos de séries temporais após 2020? Devemos tratar os dados do período pandêmico como observações convencionais ou tratá-los de forma diferente? Responder a estas questões será essencial durante muitos anos, uma vez que estes dados irão “contaminar” qualquer modelagem futura da atividade econômica.

Essas preocupações levaram diversos pesquisadores a desenvolver novas estruturas de modelagem macroeconômica para lidar com eventos extremos, como a pandemia do COVID-19³. Um ingrediente comum entre as estratégias de correção propostas pela literatura é que as relações macroeconômicas que existiam no passado são consideradas ainda válidas, de maneira que as estratégias geralmente visam reduzir o peso das observações anormais, permitindo que a variância dos resíduos reaja rapidamente às observações da COVID-19.

Para tanto, é construída uma base de dados *vintage* de dados trimestrais e mensais da economia brasileira e se aplicam algumas versões do modelo vetor autorregressivo com dados em frequências mistas (MF-VAR). Inspirados nos trabalhos de Mariano e Murasawa (2003) e Mariano e Murasawa (2009), consideramos um modelo MF-VAR na forma de espaço de estados, tratando a taxa de crescimento do PIB real observada trimestralmente como séries mensais com valores faltantes iguais a zero. Em termos gerais, a equação de transição é dada por um VAR em frequência mensal e as equações de medida relacionam as séries observadas às variáveis mensais no vetor de estados. Para fins de ilustração, introduzimos a estimação do modelo MF-VAR padrão por meio do algoritmo EM e então testamos a capacidade do modelo em melhorar as previsões de curto prazo com dados da economia brasileira até 2019.

Em seguida, com base na literatura empírica, realizamos um exercício de previsão em tempo real para os quatro trimestres de 2020 considerando três soluções para tratar as observações extremas: (i) fixação dos parâmetros estimados até 2019 para a construção de previsões em 2020 (Schorfheide e Song (2023)); (ii) adaptação da heterocedasticidade de forma *ad-hoc*, explicitando a variação transitória da volatilidade dos choques em torno do período mais agudo da pandemia (Lenza e Primiceri (2020)); (iii) consideração de volatilidade estocástica juntamente com modelagem de caudas pesadas nos termos de erro e potenciais outliers (Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022)). Para lidar com a alta dimensionalidade do espaço de parâmetros, os modelos MF-VAR estudados seguem a literatura empírica de forma que são equipados com uma priori Minnesota e estimados usando métodos Bayesianos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*).

Nosso exercício de previsão em tempo real aplicado para a economia brasileira também é um diferencial deste trabalho. Construímos uma base de dados *vintage* para dados

dados atuais forem muito diferentes, usar tais padrões e extrapolá-los linearmente pode ser altamente questionável, pois a inferência sobre os coeficientes provavelmente estará distorcida.

³ Ho (2023) organiza um resumo sobre as principais estratégias de previsão após o período da pandemia.

trimestrais e mensais da economia brasileira e então comparamos as previsões MF-VAR com a mediana da pesquisa FOCUS/BCB. A pesquisa FOCUS/BCB é um *benchmark* amplamente utilizado em comparações de previsões, e tem duas características importantes: primeiro, tal como as previsões MF-VAR, as previsões do FOCUS foram feitas em tempo real à medida que a pandemia avançava. Em segundo lugar, os participantes do FOCUS tiveram a oportunidade de fazer ajustes anedóticos sobre suas projeções em tempo real, tendo em conta a evolução da pandemia, ajustes que não podem ser reproduzidos em uma avaliação de modelagem ex-post e comparados com outras classes de modelos. Para manter o exercício simples, nos concentramos em comparações pontuais e visuais de realizações ex-post de 2020, além de avaliações das densidades de previsão geradas em diferentes origens.

1.1 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Caio; LUND, Bruno. Immunization of fixed-income portfolios using an exponential parametric model. **Brazilian Review of Econometrics**, Brazil, v. 34, n. 2, p. 155–201, 2014. Available at:

www.researchgate.net/publication/305304461_Immunization_of_Fixed-Income_Portfolios_Using_an_Exponential_Parametric_Model. Accessed at: 2024-02-01.

BIANCHI, Francesco. Evolving monetary/fiscal policy mix in the United States. **American Economic Review**, American Economic Association, United States of America (USA), v. 102, n. 3, p. 167–172, 2012. Available at:

www.jstor.org/stable/23245523. Accessed at: 2024-02-02.

BIANCHI, Francesco; ILUT, Cosmin. Monetary/fiscal policy mix and agents' beliefs. **Review of economic Dynamics**, Elsevier, United States of America (USA), v. 26, p. 113–139, 2017. Available at:

www.nber.org/system/files/working_papers/w20194/w20194.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

CALDEIRA, João; CORDEIRO, Werley; RUIZ, Esther; AP SANTOS, Andre.

Forecasting the yield curve: the role of additional and time-varying decay parameters, conditional heteroscedasticity, and macro-economic factors. **Journal of Time Series Analysis**, Wiley Online Library, United Kingdom (UK), 2023. Available at:

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/jtsa.12769>. Accessed at: 2024-10-01.

CALDEIRA, Joao F; LAURINI, Márcio P; PORTUGAL, Marcelo S. Bayesian inference applied to dynamic Nelson-Siegel model with stochastic volatility. **Brazilian Review of Econometrics**, v. 30, n. 1, p. 123–161, 2010. Available at:

www.researchgate.net/publication/277046970_Bayesian_Inference_Applied_to_Dynamic_Nelson-Siegel_Model_with_Stochastic_Volatility. Accessed at: 2024-02-01.

CARRIERO, Andrea; CLARK, Todd E; MARCELLINO, Massimiliano; MERTENS, Elmar. Addressing COVID-19 outliers in BVARs with stochastic volatility. **Review of Economics and Statistics**, MIT Press, United States of America (USA), p. 1–38, 2022. Available at: https://doi.org/10.1162/rest_a_01213. Accessed at: 2024-02-01.

CHANG, Yoosoon; CHOI, Yongok; PARK, Joon Y. A new approach to model regime switching. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 196, n. 1, p. 127–143, 2017. Available at: www.researchgate.net/publication/309024882_A_new_approach_to_model_regime_switching. Accessed at: 2024-02-01.

CHANG, Yoosoon; MAIH, Junior; TAN, Fei. Origins of Monetary Policy Dhifts: A New Approach to Regime Switching in DSGE Models. **Journal of economic dynamics and control**, Elsevier, Netherlands, v. 133, p. 104235, 2021. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165188921001706>. Accessed at: 2024-02-01.

CHRISTENSEN, Jens HE; DIEBOLD, Francis X; RUDEBUSCH, Glenn D. **An arbitrage-free generalized Nelson–Siegel term structure model**. v. 12. United Kingdom (UK): Oxford University Press Oxford, 2009. P. c33–c64. Available at: <https://doi.org/10.1111/j.1368-423X.2008.00267.x>. Accessed at: 2024-02-01.

CHRISTENSEN, Jens HE; LOPEZ, Jose A; MUSSCHE, Paul L. Extrapolating long-maturity bond yields for financial risk measurement. **Management Science**, INFORMS, United States of America (USA), v. 68, n. 11, p. 8286–8300, 2022. Available at: www.jstor.org/stable/43907515. Accessed at: 2024-02-01.

CREAL, Drew; KOOPMAN, Siem Jan; LUCAS, André. Generalized autoregressive score models with applications. **Journal of Applied Econometrics**, Wiley Online Library, United States of America (USA), v. 28, n. 5, p. 777–795, 2013. Available at: [https://www.jstor.org/stable/43907515](http://www.jstor.org/stable/43907515). Accessed at: 2024-02-01.

DAVIG, Troy; LEEPER, Eric M. Monetary–fiscal policy interactions and fiscal stimulus. **European Economic Review**, Elsevier, Netherlands, v. 55, n. 2, p. 211–227, 2011. Available at: www.researchgate.net/publication/222677631_Monetary-Fiscal_Policy_Interactions_and_Fiscal_Stimulus. Accessed at: 2024-02-01.

DIEBOLD, Francis X; LI, Canlin. Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 130, n. 2, p. 337–364, 2006. Available at:

<https://www.sas.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper49/Diebold-Li.pdf>. Accessed at: 2024-02-01.

DIEBOLD, Francis X; RUDEBUSCH, Glenn D; ARUOBA, S Boragan. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 131, n. 1-2, p. 309–338, 2006. Available at: www.sas.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper55/DRAfinal.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

DUBECQ, Simon; GOURIEROUX, Christian. **An Analysis of the Ultra Long-Term Yields**. In: PARIS, 2011 Finance Meeting EUROFIDAI-AFFI. France: [s.n.], 2011. Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1943535. Accessed at: 2024-02-01.

FAVERO, Carlo A; MONACELLI, Tommaso. **Fiscal policy rules and regime (in) stability**: evidence from the US. IGIER Working Paper, Italy, 2005. Available at: www.researchgate.net/publication/5112170_Fiscal_Policy_Rules_and_Regime_InStability_Evidence_from_the_US. Accessed at: 2024-02-01.

HARVEY, Andrew C. **Dynamic models for volatility and heavy tails: with applications to financial and economic time series**. [S.l.]: Cambridge University Press, United Kingdom (UK), 2013. v. 52. Available at: <https://doi.org/10.1017/CB09781139540933>. Accessed at: 2024-02-01.

HAUTSCH, Nikolaus; YANG, Fuyu. Bayesian inference in a stochastic volatility Nelson–Siegel model. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, Netherlands, v. 56, n. 11, p. 3774–3792, 2012. Available at: www.econstor.eu/bitstream/10419/39283/1/623834839.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

HO, Paul. Forecasting in the absence of precedent. **Journal of Economic Surveys**, Wiley Online Library, United States of America (USA), v. 37, n. 3, p. 1033–1058, 2023. Available at: www.richmondfed.org/publications/research/working_papers/2021/wp_21-10. Accessed at: 2024-02-01.

KOOPMAN, Siem Jan; MALLEE, Max IP; WEL, Michel Van der. Analyzing the term structure of interest rates using the dynamic Nelson–Siegel model with time-varying parameters. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, United States of America (USA), v. 28, n. 3, p. 329–343, 2010. Available at: www.econstor.eu/bitstream/10419/86192/1/07-095.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

LAURINI, Márcio P; CALDEIRA, Joao F. A macro-finance term structure model with multivariate stochastic volatility. **International Review of Economics & Finance**, Elsevier, Netherlands, v. 44, p. 68–90, 2016. Available at:

www.researchgate.net/publication/254420860_Some_Comments_on_a_Macro-Finance_Model_with_Stochastic_Volatility. Accessed at: 2024-02-01.

LEEPER, Eric M. Equilibria under 'active' and 'passive' monetary and fiscal policies. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, Netherlands, v. 27, n. 1, p. 129–147, 1991. Available at: www.researchgate.net/publication/4907434_Equilibria_Under_'Active'_and_'Passive'_Monetary_Policies. Accessed at: 2024-02-01.

LENZA, Michele; PRIMICERI, Giorgio E. **How to Estimate a VAR after March 2020**. United States of America (USA), 2020. Available at: <https://www.nber.org/papers/w27771>. Accessed at: 2024-02-01.

LITTERMAN, Robert B; SCHEINKMAN, Jose. Common factors affecting bond returns. **The journal of fixed income**, Institutional Investor Journals Umbrella, United States of America (USA), v. 1, n. 1, p. 54–61, 1991. Available at: www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=1556070. Accessed at: 2024-02-01.

LUBIK, Thomas A; SCHORFHEIDE, Frank. Do central banks respond to exchange rate movements? A structural investigation. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, Netherlands, v. 54, n. 4, p. 1069–1087, 2007. Available at: www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0304393206002108. Accessed at: 2024-02-01.

MARIANO, Roberto S; MURASAWA, Yasutomo. A coincident index, common factors, and monthly real GDP. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, Wiley Online Library, United Kingdom, v. 72, n. 1, p. 27–46, 2009. Available at: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1468-0084.2009.00567.x>. Accessed at: 2024-02-01.

MARIANO, Roberto S.; MURASAWA, Yasutomo. A new coincident index of business cycles based on monthly and quarterly series. **Journal of applied Econometrics**, Wiley Online Library, United States of America (USA), v. 18, n. 4, p. 427–443, 2003. Available at: www.researchgate.net/publication/5139710_A_New_Coincident_Index_of_Business_Cycles_Based_on_Monthly_and_Quarterly_Series. Accessed at: 2024-02-01.

MEIRELLES, Sofia Kusiak; FERNANDES, Marcelo. Estratégias de Imunização de Carteiras de Renda Fixa no Brasil. **Brazilian Review of Finance**, v. 16, n. 2, p. 179–219, 2018. Available at: www.researchgate.net/publication/336205501_Estrategias_de_Imunizacao_de_Carteiras_de_Renda_Fixa_no_Brasil. Accessed at: 2024-02-01.

QIU, Shi. **Essays on Regime Switching Models with Endogenous Feedback**. 2019. Tese (Doutorado em Economia), Indiana University, United States of America (USA).

Available at:

<https://www.proquest.com/openview/1870eb53a9e64af5c7163b95a42f1933/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>. Accessed at: 2024-02-01.

QUAEDVLIEG, Rogier; SCHOTMAN, Peter. Hedging long-term liabilities. **Journal of Financial Econometrics**, Oxford University Press, United Kingdom (UK), v. 20, n. 3, p. 505–538, 2022. Available at: www.erim.eur.nl/people/rogier-quaedvlieg/.

Accessed at: 2024-02-01.

SCHORFHEIDE, Frank; SONG, Dongho. Real-time forecasting with a (standard) mixed-frequency VAR during a pandemic. **International Journal of Central Banking**, United States of America (USA), Forthcoming, 2023. Available at:

www.nber.org/system/files/working_papers/w29535/w29535.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

2 A INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE OS REGIMES FISCAL E MONETÁRIO NO BRASIL: UMA ABORDAGEM DSGE COM MUDANÇA DE REGIME ENDÓGENA

RESUMO

Neste artigo estima-se um modelo DSGE de pequena economia aberta, que considera regimes endógenos para os coeficientes de reação das autoridades monetária e fiscal, em que a alternância entre regimes depende de um fator latente autorregressivo que representa o estado dos regimes ao cruzar um limite estimado. A endogeneidade decorre da estrutura de probabilidades de transição variável no tempo, na qual a regra de movimento de cada fator latente é determinada pelos choques estruturais da economia e pelos fatores defasados. As estimativas indicam que há forte presença de endogeneidade nos regimes monetário e fiscal; em especial, calculamos que os choques estruturais de política monetária apresentam peso relevante na determinação dos regimes futuros de políticas fiscal e monetária, e que o fator fiscal influencia o estado do regime monetário um passo à frente, mas não o contrário, isto é, o banco central verifica o estado da política fiscal no ‘retrovisor’ para determinar a estratégia monetária futura, enquanto a autoridade fiscal quase independe do regime monetário passado. Além disso, encontramos evidências de descoordenação contemporânea entre as autoridades. As funções impulso-respostas dos fatores de política aos choques idiossincráticos de política monetária e fiscal revelam comovimentos negativos em curto prazo e, em longo prazo, o principal canal de propagação são as respostas do fator de política monetária aos fatores de política fiscal do passado. Tais evidências suportam as discussões recentes de que a política monetária brasileira se ajusta à fiscal, tal que demandam a reconsideração de como as mudanças na função de reação de política monetária são modeladas em economias abertas emergentes com fundamentos fiscais frágeis.

Palavras-Chave: Interações entre Políticas Fiscal e Monetária. DSGE para Pequena Economia Aberta. Mudança de Regime Endógena. Probabilidades de Transição Variáveis no Tempo.

2.1 INTRODUÇÃO

Talvez um dos principais avanços da literatura macroeconômica dos últimos trinta anos seja a introdução completa da conjectura de que as autoridades fiscal e monetária reagem ao estado da economia real e interagem entre si (Leeper (1991))¹. Recentemente, trabalhos empíricos têm explorado tais interações dinâmicas entre as regras de política monetária e fiscal por meio de modelos DSGE com Mudança de Regime Markoviana (MS-DSGE) (Favero e Monacelli (2005); Davig e Leeper (2011); Bianchi (2012); Bianchi e Ilut (2017)). A maioria desses trabalhos, no entanto, assume que os regimes de política mudam exogenamente e que a probabilidade de transitar de um regime para o outro é constante no tempo. Dessa maneira, esses modelos de mudança exógena são incapazes de responder, de forma objetiva, por que ocorrem mudanças de regime e como as mudanças em um regime de política afetam as do outro.

No Brasil, a análise dos regimes das políticas fiscal e monetária surgiu desde as contribuições seminais de Tanner e Ramos (2003) e Blanchard (2004). A safra mais recente de modelos estimados para a análise dos regimes das políticas monetária e fiscal da economia brasileira foi aprimorada e muitas das restrições presentes na primeira geração dessas análises foram relaxadas. Usando uma abordagem DSGE, Nunes e Portugal (2009) investigaram qual política era dominante para diferentes períodos amostrais. Nesse caso, os resultados encontrados pelos autores sugeriram que, durante 2000 e 2002, a economia brasileira operou em ambas as políticas monetária e fiscal ativas. Por outro lado, identificou-se o período entre 2003 e 2008 como de dominância monetária. Na mesma perspectiva, Ornellas e Portugal (2011) encontraram resultados de que a economia brasileira operou em um regime de baixa dominância fiscal entre os anos 2001 e 2009. Ambos os trabalhos, contudo, não modelaram as probabilidades de transitar de um regime para outro.

Mais recentemente, alguns trabalhos exploraram esse tema ao introduzir mudanças de regime-markoviana em modelos DSGE, mas analisaram as políticas monetária e fiscal separadamente. Do lado monetário, Gonçalves, Portugal e Aragón (2016) e Paranhos e Portugal (2017) mostraram que, na maior parte das duas últimas décadas, a economia brasileira operou em regime de política monetária que atribui mais peso à inflação. No entanto, os autores não incluíram um bloco fiscal em seus modelos de economia aberta. Do lado fiscal, Teixeira (2019) considerou a interação entre as duas políticas em um exercício simulado, constatando que a economia brasileira esteve sob dominância fiscal em 2002 e 2003 e em 2012-2016. Ainda assim, o trabalho se limita por explorar apenas as mudanças nos coeficientes das funções de reação da política fiscal. Em suma, nenhum

¹ As análises teóricas da interação entre regras de política geralmente se concentram em como os regimes monetário e fiscal podem cumprir, conjuntamente, as tarefas de determinação do nível de preços e estabilização da dívida. Em especial, uma política monetária ativa e uma política fiscal passiva configuram um ambiente ideal para execução de um regime de metas de inflação.

dos trabalhos mencionados considerara o fato de que os regimes das políticas monetária e fiscal respondem a choques da economia e podem influenciar um ao outro.

De fato, há uma crescente agenda de pesquisa que suporta a possibilidade de que as mudanças de regime podem ser influenciadas pelas flutuações macroeconômicas, isto é, apresentam uma estrutura de mudança de regimes endógena. Essa literatura se fundamenta no trabalho seminal de Kim, Piger e Startz (2008), e combina a abordagem de probabilidades de Transição Variáveis no Tempo (TVTP) com variáveis explicativas para enfatizar os efeitos da transição de regimes sobre a formação de expectativas nos mais variados contextos. Entre eles, crescimento econômico (Filardo (1994)), regimes de política monetária (Davig e Leeper (2008)), crises financeiras (Coe (2002); Benigno, Foerster, Otrok e Rebucci (2020)), probabilidade de default soberano (Mendoza e Yue (2012)), regimes políticos (Rothert (2009)), restrições ocasionalmente obrigatórias (Castro (2020); Bi e Traum (2014), Amaral (2021)), e *sudden stops* (Calvo (1998)). Em tais modelos, a racionalidade do mecanismo endógeno é modelada como uma função das probabilidades de mudanças futuras nos regimes e, portanto, como uma função do estado atual da economia (Liu, Waggoner e Zha (2007)). No entanto, até recentemente, a literatura internacional não havia evoluído na solução de modelos de expectativas racionais não lineares, deixando a análise MS-DSGE, nesse contexto, limitada (veja Maih (2015); Foerster (2016); Barthélemy e Marx (2017); Maih e Waggoner (2018)).

O presente artigo constitui uma interseção de dois ramos da literatura: interações entre políticas monetária e fiscal em modelos DSGE de economia aberta e mudanças endógenas de regime. Nosso objetivo é indicar quais fatores determinam mudanças iminentes nos regimes de política monetária e fiscal da economia brasileira desde 2000 até 2021. Para tanto, consideramos o modelo básico para uma pequena economia aberta desenvolvido por Lubik e Schorfheide (2007) e incorporamos um bloco fiscal e elementos de mudança de regime endógena nas funções de reação fiscal e monetária, em que as mudanças nos regimes dos coeficientes das políticas podem interagir umas com as outras e serem influenciadas pelas ações de políticas defasadas e pelos choques estruturais do modelo. Até onde sabemos, este é o primeiro artigo que explora as interações entre as políticas monetária e fiscal com base em uma estrutura de mudança de regime endógena em um modelo DSGE para pequena economia aberta.

O modelo é estimado por meio de técnicas bayesianas usando o filtro de Chang, Choi e Park (2017), adaptado para múltiplos fatores, em que as mudanças de regime das políticas monetária e fiscal são desencadeadas sempre que um fator latente autorregressivo que representa o estado dos regimes cruza um limiar (veja também Qiu (2019) e Chang, Maih e Tan (2021))². Nesse caso, o regime de política monetária é denotado *Hawk* se o fator

² A metodologia usada no presente trabalho é semelhante ao proposto por Diebold, Lee e Weinbach ((Working paper). 1993) e Filardo (1994), na medida em que se permite que as probabilidades de transição

do regime monetário estiver acima do limite estimado e, caso contrário, é denotado *Dove*. Com um regime *Hawk*, a autoridade monetária apresenta um coeficiente de resposta contra a inflação mais elevada. Da mesma forma, consideramos a noção de “fiscal-*Hawk*”, em que o regime de política fiscal é *Hawk* se o fator do regime fiscal estiver acima do *threshold* de regime fiscal. Nesse regime, a autoridade fiscal aumenta o esforço para estabilizar o nível de dívida/PIB. Dessa maneira, há quatro regimes de interação monetária-fiscal possíveis, no espírito de Leeper (1991)³: (i) a política fiscal era caracterizada como *Dove* e a política monetária como *Hawk* (FD/MH); (ii) o contrário (FH/MD); e as combinações (iii) (FD/MD) e (iv) (FH/MH).

Entre nossos resultados empíricos, destacamos três que oferecem novos *insights* sobre as interações das políticas monetária e fiscal no Brasil. Primeiro, mostramos evidências de uma forte interação dinâmica entre os fatores monetário e fiscal estimados, em especial, mensuramos como uma mudança no regime monetário pode levar a uma mudança no regime fiscal e vice-versa por meio dos coeficientes autorregressivos de cada fator. Nossas estimativas mostram que o fator fiscal influencia o estado do regime monetário um passo à frente, mas não o contrário, isto é, que o banco central olha o estado da política fiscal no ‘retrovisor’ para determinar a estratégia monetária futura, enquanto a autoridade fiscal quase independe do regime monetário passado. Tal efeito é particularmente relevante, uma vez que os bancos centrais levam em consideração a orientação da política fiscal ao fazer suas escolhas de política.

Em segundo lugar, identificamos um peso relevante dos choques estruturais de política monetária na determinação dos regimes futuros de política monetária e fiscal. Em outras palavras, encontramos que um choque monetário exógeno possui considerável poder explicativo sobre o regime monetário um passo à frente (chamado de efeito feedback-próprio), assim como na determinação do regime fiscal um passo à frente (chamado de efeito feedback-cruzado). Por outro lado, encontramos que um choque exógeno de política fiscal apresenta baixa capacidade preditiva sobre os regimes monetário e fiscal futuros, menos que a metade do efeito produzido pelo choque monetário.

variem no tempo (TVTPs) como funções de variáveis explicativas exógenas. No entanto, neste trabalho, seguimos uma estratégia diferente, em que as probabilidades de transição são uma função dos choques estruturais do modelo. Assim, o mecanismo de endogeneidade reside sobre os impactos cumulativos dos choques estruturais sobre cada fator limiar latente estimado que determina os respectivos regimes futuros de política monetária e fiscal. Essa metodologia nos permite quantificar a importância de cada choque estrutural sobre cada fator latente de política. No caso especial em que há ausência de endogeneidade estimada, o modelo se reduz a um com probabilidades de transição exógenas.

³ Leeper (1991) caracteriza a política monetária como sendo ativa (AM) ou passiva (PM) conforme satisfaça ou não o princípio de Taylor. Uma política fiscal que ajusta o déficit para garantir a sustentabilidade fiscal é rotulada como passiva (PF), enquanto uma política fiscal mais frouxa é caracterizada como uma política ativa (AF). Assim, quando a autoridade monetária é ativa e a autoridade fiscal é passiva (AM/PF), tem-se um regime de dominância monetária, tal que é possível controlar o nível de preços. No caso contrário, em que a política fiscal é ativa e a política monetária é passiva, tem-se um regime de dominância fiscal (MP/AF). Nos casos remanescentes, AM/AF produz instabilidades (trajetória explosiva para a dívida) e PM/PF (ambas passivas) resulta em um equilíbrio indeterminado.

Em terceiro, quando analisamos as inovações dos fatores de política e isolamos os efeitos dos choques estruturais, encontramos evidências de descoordenação contemporânea entre as autoridades. Esse resultado é sustentado quando conduzimos uma análise de resposta ao impulso. As respostas dos dois fatores de política aos choques de política monetária e fiscal mostram claros comovimentos negativos no curto prazo. No longo prazo, encontramos que o principal canal de propagação do choque são as respostas do fator de política monetária aos fatores de política fiscal do passado. Quando esse canal é suprimido, observamos uma interação de longo prazo significativamente mais fraca entre os fatores de política. Tais evidências suportam as discussões recentes de que a política monetária brasileira se ajusta à fiscal, tal que demandam a reconsideração de como as mudanças na função de reação de política monetária são modeladas em economias abertas emergentes com fundamentos fiscais frágeis.

O artigo está organizado da seguinte forma. A próxima seção apresenta o modelo DSGE para uma pequena economia aberta. A seção 3 apresenta a metodologia econométrica. A Seção 4 apresenta os resultados. Por fim, a seção 5 traz as considerações finais.

2.2 UM MODELO SIMPLES PARA ECONOMIA ABERTA

O modelo simples para economia aberta, baseado no DSGE, é uma extensão da estrutura proposta por Lubik e Schorfheide (2007) e Gali e Monacelli (2005), adaptada para pequenas economias. Aplicado ao contexto brasileiro, ele incorpora um bloco fiscal que considera a restrição orçamentária do governo e uma regra fiscal, destacando interações entre política fiscal e monetária em regimes distintos. O modelo é composto por uma curva IS, curva de Phillips, regra de Taylor e equação para a taxa de câmbio, com variáveis medidas como desvios de seus estados estacionários. Métodos como o Filtro de Kalman e solução Gensys são usados para sua estimativa. A abordagem considera a interação entre política fiscal e monetária em diferentes regimes, incorporando dados específicos da economia brasileira. O modelo é composto por equações clássicas, como a curva IS e a curva de Phillips, integrando variáveis fiscais e condições de equilíbrio log-linearizadas.

2.2.1 Descrição do Modelo

O modelo básico é uma versão modificada do modelo DSGE para pequena economia aberta, introduzido por Lubik e Schorfheide (2007), que é uma variante de Gali e Monacelli (2005). Versões semelhantes desse modelo foram aplicadas ao caso brasileiro por Paranhos e Portugal (2017), que incorporaram elementos de mudança de regime na função de reação de política monetária. Outras aplicações MS-DSGE dessa especificação são Chen e MacDonald (2012) e Alstadheim, Bjørnland e Maih (2021). Esses trabalhos prévios, no entanto, abstraem-se de um bloco fiscal em seus modelos. Nesse sentido, no presente

trabalho, introduzimos um bloco fiscal e estimamos o modelo considerando mudanças nos regimes de ambas autoridades fiscal e monetária usando dados brasileiros. O bloco fiscal usado neste artigo, em que a restrição orçamentária do governo e a regra fiscal atuam como os dois ingredientes principais, é análogo ao de Bhattarai, Lee e Park (2014), mas considera o caso de economia aberta.

De maneira geral, o modelo básico é formado por uma curva IS, uma curva de Phillips, uma equação para a taxa de câmbio, uma regra de Taylor e uma função de reação de política fiscal. Como usual da literatura, o modelo pressupõe a interação entre uma pequena economia doméstica e um contínuo de outras pequenas economias abertas que representam o resto do mundo. Nenhuma das pequenas economias individuais pode, portanto, provocar qualquer influência sobre a economia mundial.

Neste modelo o crescimento da produção per capita resulta do crescimento da tecnologia, portanto, para obter estacionariedade, todas as variáveis \hat{x}_t são mensuradas como desvios percentuais dos seus respectivos valores de estado estacionário (o valor log linear $\frac{(x_t-x)}{x}$), com exceção do conjunto de variáveis fiscais, na qual as consideramos os desvios em nível dos seus respectivos valores de estado estacionário, $\hat{x}_t = (x_t - x)$, pelo fato de serem mensuradas como proporções do PIB. Como usual, Δ representa o operador de primeira diferença, tal que $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$. Apresentamos em seguida as principais condições de equilíbrio na forma log-linearizada do modelo⁴. A derivação completa do modelo é apresentada no Apêndice.

EQUAÇÃO IS. A função de consumo de Euler, derivada do problema de otimização de famílias, leva à seguinte curva IS:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t = E_t \hat{y}_{t+1} - (\mu + \lambda) \left(\hat{R}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1} - \rho_z \hat{z}_t \right) + \alpha (\mu + \lambda) E_t \Delta \hat{q}_{t+1} + \frac{\lambda}{\mu} E_t \Delta \hat{y}_{t+1}^* \\ - \frac{1}{(1-g)} E_t \Delta \hat{g}_{t+1} - \frac{1}{(1-g^*)} \frac{\lambda}{\mu} E_t \Delta \hat{g}_{t+1}^* \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que o parâmetro α denota a proporção das importações na economia doméstica e controla o grau de abertura, $0 < \alpha < 1$. O parâmetro μ é a elasticidade intertemporal de substituição e $\lambda = \alpha(2 - \alpha)(1 - \mu)$. As variáveis endógenas são: o produto \hat{y}_t , a taxa de inflação $\hat{\pi}_t$ e a taxa de juros nominal, \hat{R}_t ; enquanto as exógenas são: o produto mundial, \hat{y}_t^* , \hat{z}_t é um choque tecnológico, \hat{q}_t são os termos de troca e \hat{g}_t e \hat{g}_t^* são os gastos públicos doméstico e externo, respectivamente. Na ausência das variáveis fiscais, (\hat{g} e \hat{g}^*), a equação acima é idêntica à equação IS dada por Lubik e Schorfheide (2007).

⁴ Seguindo Del Negro e Schorfheide (2008), assumimos $\varphi = 0$, $\eta = 1$ e $1/\sigma = \mu$ para obter uma versão compatível com Lubik e Schorfheide (2007).

CURVA DE PHILLIPS. A curva de Phillips com variáveis fiscais é obtida a partir do problema de escolha ótima de preços pelas firmas domésticas, representada pela seguinte relação:

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \alpha \beta E_t \Delta \hat{q}_{t+1} - \alpha \Delta \hat{q}_t + \frac{\kappa}{(\mu + \lambda)} (\hat{y}_t - \bar{y}_t) \quad (2.2)$$

em que β é o fator de desconto intertemporal e $\kappa = (1 - \theta)(1 - \theta\beta)/\theta$ representa o grau de rigidez de preços na economia. À medida que $\kappa \rightarrow 1$, a rigidez nominal desaparece. Assume-se que a determinação de preços segue uma regra de ajustamento a la Calvo (1983), onde uma fração $(1 - \theta)$ de firmas otimizam a escolha de preços enquanto a parcela θ de firmas remanescentes atualizam seus preços pela inflação de estado estacionário. Além disso, o termo \bar{y}_t pode ser derivado como o produto potencial na ausência de rigidez nominal, na qual é dado por⁵

$$\bar{y}_t = -\frac{\lambda}{\mu} \left[\hat{y}_t^* - \frac{1}{(1 - g^*)} \hat{g}_t^* \right] - \frac{1}{(1 - g)} \hat{g}_t + \frac{\tau}{(1 - \tau)} \hat{\tau}_t \quad (2.3)$$

EQUAÇÃO DE TAXA DE CÂMBIO. A derivação da equação da taxa de câmbio é obtida a partir da log-linearização da equação de inflação em torno de um estado estacionário que satisfaça a condição de paridade do poder de compra, tal que:

$$\Delta \hat{e}_t = \hat{\pi}_t - (1 - \alpha) \Delta \hat{q}_t - \hat{\pi}_t^* \quad (2.4)$$

em que \hat{e}_t é a taxa de câmbio nominal e $\hat{\pi}_t^*$ é um choque inflacionário externo na qual é tratado como não observável. Adicionalmente, seguindo Lubik e Schorfheide (2007), acrescentamos uma regra de movimento para a taxa de crescimento dos termos de troca, $\Delta \hat{q}_t = \rho_q \Delta \hat{q}_{t-1} + \epsilon_t^{\Delta q}$.

REGRA DE TAYLOR. Com o conhecimento prévio da natureza prospectiva da política monetária implícito na adoção do Regime de Metas para a Inflação, assumimos que o Banco Central do Brasil (BCB) implementa a política monetária de acordo com uma regra de juros. Assim, incorporamos o comportamento da autoridade monetária ao assumir uma regra de Taylor que enfatiza os desvios da inflação ($\hat{\pi}_t$), do produto (\hat{y}_t) e da taxa de câmbio nominal ($\Delta \hat{e}_t$):

$$\hat{R}_t = \rho_m \hat{R}_{t-1} + (1 - \rho_m) [\psi_\pi \hat{\pi}_t + \psi_y \hat{y}_t + \psi_{\Delta e} \Delta \hat{e}_t] + \epsilon_t^m \quad \epsilon_t^m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_R^2) \quad (2.5)$$

em que os desvios não antecipados do componente sistemático da regra de política monetária são capturados pelo choque idiossincrático ϵ_t^m . O parâmetro ρ_m representa o grau de inércia da regra de juros, $0 < \rho_m < 1$, e os parâmetros $\psi_\pi, \psi_y, \psi_{\Delta e} \geq 0$ representam as

⁵ Essa derivação implica que é possível derivar um hiato do produto do modelo que é dependente dos regimes estudados.

elasticidades de reação da política monetária. Como será explorado nas seções seguintes, mostramos que o banco central assume diferentes valores para ψ_π , ψ_y , $\psi_{\Delta e}$ em diferentes períodos da amostra e que a determinação da transição de um regime para o outro é correlacionada com os choques estruturais exógenos do modelo.

REGRA FISCAL. A derivação da forma log-linear da função de restrição orçamentária resulta em uma regra de movimento que responde aos desvios defasados da dívida pública para a sua tendência de longo prazo, tal que

$$\widehat{b}_t = \beta^{-1}\widehat{b}_{t-1} + \beta^{-1}b\left(\widehat{R}_{t-1} - \widehat{\pi}_t - \widehat{y}_t + E_t\widehat{y}_{t+1} - \widehat{z}_t - \alpha\Delta\widehat{q}_t\right) + \widehat{g}_t - mc\widehat{\tau}_t - \tau mc\widehat{m}c_t \quad (2.6)$$

em que o custo marginal no estado estacionário é igual a $mc = (\frac{\epsilon-1}{\epsilon})$, enquanto o desvio do custo marginal do seu estado estacionário é dado por $(\widehat{m}c_t) = (\mu + \lambda)^{-1}(\widehat{y}_t - \bar{y}_t)$. Em relação à equação acima, a regra de movimento da dívida pública também responde ao hiato do produto, à despesa do governo e a outras variáveis macroeconômicas.

A regra fiscal usada é análoga à regra monetária descrita anteriormente, em que seguimos a especificação de Bhattarai, Lee e Park (2014) e a autoridade fiscal ajusta as receitas ($\widehat{\tau}_t$) de acordo com as oscilações do desvio da dívida pública e da despesa pública e pelas flutuações do ciclo econômico:

$$\widehat{\tau}_t = \rho_f\widehat{\tau}_{t-1} + (1 - \rho_\tau)\left[\psi_b(\widehat{b}_t - \widehat{\bar{b}}_t) + \psi_y(\widehat{y}_t - \bar{y}_t) + \psi_g\widehat{g}_t\right] + \epsilon_t^f \quad \epsilon_t^f \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\tau^2) \quad (2.7)$$

em que o choque ϵ_t^f representa o componente não sistemático da política fiscal, ρ_τ é o grau de inércia e os parâmetros $\psi_b, \psi_y, \psi_g \geq 0$ representam as elasticidades de reação da política fiscal com relação às variações no hiato da dívida ($\widehat{b}_t - \widehat{\bar{b}}_t$, onde $\widehat{\bar{b}}_t$ é a tendência de longo prazo da dívida), no hiato do produto e da despesa pública, respectivamente. A log-linearização do modelo também deriva uma relação entre as receitas totais e o imposto distorcivo $\tau_t = \tau(\widehat{\tau}_t^D(\mu + \lambda)^{-1}(\widehat{y}_t - \bar{y}_t))$. Além disso, assim como a regra de juros, mostraremos que a autoridade fiscal assume diferentes valores para ψ_b, ψ_y, ψ_g em diferentes períodos da amostra e que a determinação da transição de um regime para o outro é correlacionada com os choques estruturais exógenos do modelo.

Os gastos do governo, por sua vez, seguem o seguinte processo⁶:

$$\widehat{g}_t = (1 - \rho_g)\bar{g} - \rho_g\widehat{g}_{t-1} + \epsilon_t^g \quad \epsilon_t^g \sim \mathcal{N}(0, \sigma_g^2) \quad (2.9)$$

⁶ Se assumirmos $\rho_g = 1$ e $\psi_g = 1$, a regra fiscal pode ser reescrita como a equação de superávit em termo reais como em Carvalho e Valli (2011):

$$s_t = \phi_s s_{t-1}(1 - \phi_s)\left[\bar{s} + \psi_b(\widehat{b}_t - \widehat{\bar{b}}_t) + \psi_y(\widehat{y}_t - \bar{y}_t)\right] + \epsilon_t^s \quad (2.8)$$

na qual a regra acima assume implicitamente que os gastos do governo no estado estacionário são iguais a zero e impostos são cobrados para pagar o serviço do estoque de dívida existente.

CHOQUES EXÓGENOS. Finalmente, o sistema de equações é guiado por um conjunto de choques exógenos AR(1):

$$\begin{aligned}\widehat{z}_t &= \rho_z \widehat{z}_{t-1} + \epsilon_t^z, & \epsilon_t^z &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2), \\ \widehat{q}_t &= \rho_q \widehat{q}_{t-1} + \epsilon_t^q, & \epsilon_t^q &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_q^2), \\ \widehat{y}_t^* &= \rho_{y^*} \widehat{y}_{t-1}^* + \epsilon_t^{y^*}, & \epsilon_t^{y^*} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{y^*}^2), \\ \widehat{\pi}_t^* &= \rho_{\pi^*} \widehat{\pi}_{t-1}^* + \epsilon_t^{\pi^*}, & \epsilon_t^{\pi^*} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\pi^*}^2), \\ \widehat{g}_t^* &= \rho_{g^*} \widehat{g}_{t-1}^* + \epsilon_t^{g^*}, & \epsilon_t^{g^*} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_{g^*}^2), \\ \widehat{b}_t &= \rho_b \widehat{b}_{t-1} + \epsilon_t^b, & \epsilon_t^b &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2),\end{aligned}$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES, SOLUÇÃO E ESTIMAÇÃO. O modelo básico consiste em quatorze variáveis de estado, incluindo dois termos expectacionais,

$$X_t = \left[\widehat{y}_t, \widehat{\pi}_t, \widehat{R}_t, \Delta \widehat{e}_t, \Delta \widehat{q}_t, \widehat{z}_t, \widehat{y}_t^*, \widehat{\pi}_t^*, \widehat{g}_t, \widehat{g}_t^*, \widehat{\tau}_t, \widehat{b}_t, E_t \widehat{y}_{t+1}, E_t \widehat{\pi}_{t+1} \right]',$$

nove choques exógenos v_t que são independentes e normalmente distribuídos,

$$\epsilon_t = \left[\epsilon_t^m, \epsilon_t^q, \epsilon_t^z, \epsilon_t^{y^*}, \epsilon_t^{\pi^*}, \epsilon_t^g, \epsilon_t^{g^*}, \epsilon_t^{\tilde{b}}, \epsilon_t^f \right]',$$

e dois erros de expectativa racional, definidos como o desvio das variáveis de seu valor esperado do último período, $\eta_t^x = \widehat{x}_t - E_{t-1}(\widehat{x}_t)$,

$$\eta_t = \left[\eta_t^y, \eta_t^\pi \right]'$$

Assim, o modelo DSGE descrito até o momento forma um sistema linear de expectativas racionais. A equação de transição deste sistema pode ser representada como

$$A(\Theta)X_t = B(\Theta)X_{t-1} + C(\Theta)\epsilon_t + D(\Theta)\eta_t \quad (2.10)$$

em que as matrizes A , B , C e D são funções de um vetor de parâmetros estruturais Θ , $\Theta = \{\psi_\pi, \psi_y, \psi_{\Delta e}, \rho_m, \psi_b, \psi_{\bar{y}}, \psi_g, \rho_q, g, g^*, b, \tau^D, \tau, R, \alpha, \mu, \kappa, \rho_z, \rho_q, \rho_{y^*}, \rho_{\pi^*}, \rho_b, \rho_f, \rho_g, \sigma_R, \sigma_z, \sigma_q, \sigma_{y^*}, \sigma_{\pi^*}, \sigma_b, \sigma_\tau, \sigma_g, \sigma_{g^*}\}$. Sob expectativas racionais e ausência de mudanças de regime, o modelo pode ser resolvido usando o algoritmo de solução **gensys** (Sims (2002)). Nesse caso, a solução do modelo pode ser expressa na forma de um modelo VAR de primeira ordem de modo que, ao ser combinada com a equação de medida, resulta no seguinte modelo DSGE na forma de espaço de estado:

$$\begin{aligned}Y_t &= HX_t \\ X_t &= \Omega(\Theta)X_{t-1} + \Delta(\Theta)v_t\end{aligned} \quad (2.11)$$

em que Y_t apresenta o vetor de observáveis e as matrizes $\Omega(\Theta)$ e $\Delta(\Theta)$ são funções dos parâmetros estruturais Θ . Assumindo que os choques em η_t são i.i.d. com distribuição normal, o modelo pode ser estimado usando métodos bayesianos em que o Filtro de Kalman pode ser aplicado para obter a função de verossimilhança $p(Y_{1:T}|\Theta)$, $Y_{1:T} = [y_1, \dots, y_T]$.

2.3 MÉTODOS ECONOMÉTRICOS

2.3.1 Dados

Para alcance dos objetivos estabelecidos, construímos uma base de dados trimestrais que abrange o período entre o 3ºT/2000 e o 4ºT/2021, totalizando 86 observações. Como observáveis, o modelo completo inclui 8 variáveis: a taxa de crescimento do PIB em termos reais (ΔY_t), a taxa de inflação (Π_t), a taxa nominal de juros (R_t), a taxa de câmbio nominal (ΔEX_t), os termos de troca (ΔTOT_t), a despesa do governo ($\frac{G_t}{Y_t}$), a receita do governo ($\frac{T_t}{Y_t}$) e o desvio da dívida pública ($\frac{(B_t - \tilde{B}_t)}{Y_t}$).

Mais precisamente, usamos a primeira diferença do logaritmo do PIB real trimestral ajustado sazonalmente, multiplicada por 100; a diferença do logaritmo do índice de inflação ao consumidor com ajuste sazonal, medida pelo IPCA, multiplicada 400; a diferença do logaritmo da taxa de câmbio nominal (R\$/US\$) multiplicada por 100 (tomando como referência a PTAX de venda de final de período); os termos de troca são calculados a partir da primeira diferença da razão entre os logaritmos dos índices de preços de exportação e importação com ajuste sazonal, multiplicada por 100; a taxa de juros nominal SELIC; a despesa líquida do Governo Central como proporção do PIB, o desvio da Dívida Líquida do Governo Central da sua tendência de longo prazo como % do PIB⁷ e as Receitas Primárias do Governo Central como % do PIB. Todas as séries estão disponíveis no sistema de gerenciamento de séries temporais do Banco Central do Brasil. No caso das séries que foram ajustadas sazonalmente, aplicamos o algoritmo X-13-ARIMA-SEATS usando o pacote `seasonal` no R.

Sendo assim, as variáveis observáveis estão ligadas às variáveis do modelo por meio da seguinte equação de medida:

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_t \\ \Pi_t \\ R_t \\ \Delta EX_t \\ \Delta TOT_t \\ (G_t/Y_t) \\ ((B_t - \tilde{B}_t)/Y_t) \\ (T_t/Y_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^{(Q)} \\ \pi^{(A)} \\ \pi^{(A)} + r^{(A)} + 4\gamma^{(Q)} \\ 0 \\ 0 \\ 100 \cdot g \\ 100 \cdot \tilde{b} \\ 100 \cdot \tau \end{pmatrix} + 100 \begin{pmatrix} \ln(z_t y_t / y_{t-1}) \\ 4 \ln(\pi_t / \pi) \\ 4 \ln(R_t / R) \\ \Delta e_t \\ \Delta q_t \\ \hat{g}_t \\ (\hat{b}_t - \tilde{b}_t) \\ \hat{\tau}_t \end{pmatrix}$$

⁷ Tratamos a tendência da dívida (em % PIB), estimada por meio do filtro HP ($\lambda = 1.600$) como meta para a dívida.

em que $\gamma^{(Q)}$ é a taxa de crescimento tecnológico trimestral, $r^{(A)}$ é taxa de juros real neutra anualizada, e $\pi^{(A)}$ é a meta de inflação anualizada. Os elementos da tripla $(\gamma^{(Q)}, \pi^{(A)}, r^{(A)})$ estão conectados com os estados estacionários do modelo através de $\gamma = 1 + \gamma^{(Q)}/100$, $\beta = (1 + r^{(A)}/400)^{-1}$, e $\pi = 1 + \pi^{(A)}/400$.

2.3.2 Mecanismo de Mudança de Regime Endógena

Neste trabalho permitimos que os coeficientes de resposta das regras fiscal e monetária alternem entre dois regimes de política⁸, isto é,

$$\psi_x(s_t) = \psi_{x,0}(1 - s_t) + \psi_{x,1}s_t, \quad 0 \leq \psi_{x,0} < \psi_{x,1} \quad (2.12)$$

em que $\psi_x(s_t)$, $x = \{\pi, y, \Delta e, b, \tilde{y}, g\}$, segue um processo de mudança de regime que depende de um processo $s_t^{(i)} = \mathbf{1}\{w_{i,t} \geq \tau_i^w\}$, $i = m, f$, e $w_{i,t}$ é o fator latente de políticas e τ_i^w um limiar. Como resultado, o modelo transita entre o regime-*Dove* e o regime-*Hawk* (menos ativo e mais ativo, respectivamente), dependendo se os fatores variáveis no tempo em $w_t = (w_{m,t}, w_{f,t})'$ assumem valores acima ou abaixo dos respectivos níveis limiares τ_m^w e τ_f^w . O fator latente autorregressivo, por sua vez, segue um processo estacionário tal que,

$$w_t = Aw_{t-1} + v_t^w, \quad v_t^w \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (2.13)$$

onde $v_t^w = (v_{m,t}^w, v_{f,t}^w)$ e a matriz de coeficientes autorregressivos A é especificada como

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{mm} & \alpha_{mf} \\ \alpha_{fm} & \alpha_{ff} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

em que os coeficiente da matriz A controlam a persistência de cada elemento em w_t ⁹. Além disso, a matriz de coeficientes A também representa um importante *canal de interação dinâmica*, na qual captura diretamente os efeitos dos diretos e cruzados dos fatores de política defasados sobre os fatores de política atuais. Por exemplo, enquanto $\alpha_{mm} \neq 0$ ($\alpha_{ff} \neq 0$) mostra a persistência do regime de política monetária (fiscal), $\alpha_{mf} \neq 0$ ($\alpha_{fm} \neq 0$) é interpretado como o efeito do regime de política fiscal (monetária) passado sobre o regime de política monetária (fiscal) contemporâneo.

Outro aspecto importante diz respeito à estrutura de correlação da matriz P . Por meio dessa matriz, podemos testar a presença de endogeneidade nas mudanças de regimes dentro do modelo. Semelhantemente ao proposto por Diebold, Lee e Weinbach ((Working paper). 1993) e Filardo (1994), se permite que as probabilidades de transição variem no

⁸ Um aspecto não considerado é a mudança nos regimes de σ_R e σ_τ , na qual deixaremos para trabalhos futuros.

⁹ à medida que α assume valores positivos (negativos) em direção a 1, o modelo sofrerá, em média, mudanças de regime menos (mais) frequentes.

tempo. No entanto, ao invés de assumir que as probabilidades de transição sejam funções de variáveis explicativas estritamente exógenas, assume-se que as mesmas são uma função de choques estruturais contemporâneos alocados em $\epsilon_t = (\epsilon_t^m, \epsilon_t^f, \epsilon_t^q, \epsilon_t^z, \epsilon_t^{y^*}, \epsilon_t^{\pi^*}, \epsilon_t^g, \epsilon_t^{g^*}, \epsilon_t^{\bar{b}})'$, na qual podem conjuntamente influenciar o regime um passo à frente (w_{t+1}) por meio da sua correlação com os choques $v_{t+1}^w = (v_{m,t+1}^w, v_{f,t+1}^w)'$. Assim, temos que

$$\begin{bmatrix} \epsilon_t \\ v_{t+1}^w \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0_{n \times l} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{\epsilon\epsilon} & P_{\epsilon v} \\ P_{v\epsilon} & P_{vv} \end{bmatrix} \right), \quad P = \begin{bmatrix} P_{\epsilon\epsilon} & P_{\epsilon v} \\ P_{v\epsilon} & P_{vv} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Assim, os elementos em P também apresentam dois tipos de canais de *feedback* dinâmico: um efeito *feedback*-próprio e um efeito *feedback*-cruzado. Primeiro, o efeito *feedback*-próprio é definido para cada regra de política como a correlação entre os choques não sistemáticos do modelo alocados em ϵ_t e a própria inovação do fator de política no próximo período v_{t+1}^w . O efeito *feedback*-próprio monetário é medido por ρ_{v_m, ϵ_m} , enquanto o *feedback*-próprio fiscal é medido por ρ_{v_f, ϵ_f} . Testar se esses efeitos diretos são estatisticamente diferentes de zero é, assim, uma das principais perguntas que esse trabalho visa responder.

O efeito *feedback*-cruzado, por sua vez, ocorre entre as regras de política, seja sob a óptica do efeito do choque estrutural de política monetária defasado sobre o fator de política fiscal atual ($\rho_{\epsilon_m, v_f} \neq 0$), ou através da ótica do choque estrutural de política fiscal defasada sobre o fator de política monetária atual ($\rho_{\epsilon_f, v_m} \neq 0$). Especificamente, o *feedback*-cruzado da política monetária para a política fiscal medido por ρ_{ϵ_m, v_f} , por exemplo, quantifica quanto e em que direção o choque monetário contemporâneo ϵ_t^m influencia no próximo período uma inovação exógena do fator de regimes de política fiscal $v_{f,t+1}^w$. Esse efeito nos permite, assim, analisar se e como uma mudança no regime monetário pode levar a uma mudança no regime fiscal.

Para finalizar a explicação da estrutura endógena, ao projetar v_{t+1}^w em ϵ_t ($v_{t+1}^w = \frac{\text{cov}(v_{t+1}^w, \epsilon_t)}{\text{var}(\epsilon)} \epsilon_t + \varepsilon_{t+1}^w = \rho \epsilon_t + \varepsilon_{t+1}^w$) usando as equações (2.13-2.15), podemos reescrever as equações de movimento dos fatores como:

$$w_{m,t+1} = \alpha_{mm} w_{m,t} + \alpha_{mf} w_{f,t} + \sum \rho_{v_i \epsilon_j} \cdot \epsilon_{j,t} + \varepsilon_{m,t+1}^w \quad (2.16)$$

$$w_{f,t+1} = \alpha_{ff} w_{f,t} + \alpha_{fm} w_{m,t} + \sum \rho_{v_i \epsilon_j} \cdot \epsilon_{j,t} + \varepsilon_{f,t+1}^w \quad (2.17)$$

PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO. O tipo de impacto endógeno estudado não é apenas sustentado devido à forma autorregressiva de w_t , mas também pelo fato de que a estrutura empregada torna as probabilidades de transição variantes no tempo funções de ϵ_t . Para ilustrar essa ideia, podemos eliminar o efeito dos choques de política ϵ_{t-1} sobre as inovações

v_t^w para obter o processo ortogonal

$$\varepsilon_t = v_t^w - P_{v\epsilon} P_{\epsilon\epsilon}^{-1} \epsilon_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, P_{vv \cdot \epsilon}) \quad (2.18)$$

em que o termo ε_t é a parte exógena dos fatores w_t^w que não é explicada pelo modelo. Então, podemos usar a distribuição condicional de v_t^w dado ϵ_t para calcular as probabilidades de transição, conforme Chang, Choi e Park (2017). Por exemplo, a probabilidade de permanecer em um regime MH/FD entre $t - 1$ e t pode ser obtida como

$$P(S_t = (1, 0)' | S_{t-1} = (1, 0)', \mathcal{F}_{t-1}) = \Phi(\tau^w)^{-1} \int_{-\infty}^{\tau^w} \Phi_{u|v}(\tau^w - P_{v\epsilon} P_{\epsilon\epsilon}^{-1} \epsilon_{t-1} - Aw_{t-1}) \phi(w_{t-1}) dw_{t-1} \quad (2.19)$$

em que $\Phi_{u|v}$ é a função de distribuição condicional de v_t dado ϵ_{t-1} , $\tau^w = (\tau_m^w, \tau_f^w)'$ é o vetor de limiares e \mathcal{F}_{t-1} é o conjunto informacional disponível em $t - 1$. O termo $P_{v\epsilon} P_{\epsilon\epsilon}^{-1} \epsilon_{t-1}$ na probabilidade de transição acima, se assumirmos $P_{\epsilon\epsilon} = I$, pode ser escrito como segue

$$P_{v\epsilon} P_{\epsilon\epsilon}^{-1} \epsilon_{t-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{\rho_{v_m, \epsilon_m}}_{self-feedback} & \epsilon_{t-1}^m + \underbrace{\rho_{v_m, \epsilon_f}}_{cross-feedback} & \epsilon_{t-1}^f + \sum \underbrace{\rho_{v_m, \epsilon_j}}_{cross-feedback} & \epsilon_{j,t-1} \\ \underbrace{\rho_{v_f, \epsilon_m}}_{cross-feedback} & \epsilon_{t-1}^m + \underbrace{\rho_{v_f, \epsilon_f}}_{self-feedback} & \epsilon_{t-1}^f + \sum \underbrace{\rho_{v_f, \epsilon_j}}_{cross-feedback} & \epsilon_{j,t-1} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

em que $j = \{q, z, y^*, \pi^*, g, g^*, b\}$. Assim, se cada elemento em $P_{v\epsilon} > 0$, então um choque positivo em qualquer regra de política ($\epsilon_{t-1}^m > 0$ ou $\epsilon_{t-1}^f > 0$) aumenta ambos fatores de política monetária e fiscal, o que, por sua vez, reduz a probabilidade de permanecer no regime FD/MD no próximo período.

Por fim, as interações políticas do modelo também podem ser mensuradas pela interação política contemporânea decorrente da correlação entre as duas inovações em v_t^w após expurgado os efeitos de ϵ_{t-1} , como em (2.18). Especificamente, podemos obter $\rho_{vv \cdot \epsilon} \equiv P_{vv \cdot \epsilon}^{(2,1)}$ em que $P_{vv \cdot \epsilon} = P_{vv} - P_{v\epsilon} P_{\epsilon\epsilon}^{-1} P_{\epsilon v}$, de forma que é possível testar a hipótese nula de não existência de interação contemporânea entre as autoridades se $\rho_{vv \cdot \epsilon} \neq 0$.

MÉTODO DE SOLUÇÃO. A existência de uma mudança de regime requer um tratamento adequado sobre o processo de formação de expectativas implícito na representação do sistema de expectativas racionais não lineares acima. Para tanto, obtemos a solução do modelo usando a abordagem de perturbação de Maih e Waggoner (2018). Na prática, essa metodologia de solução se mostra altamente atrativa pelo fato de possuir o pacote RISE Toolbox para Matlab¹⁰ de fácil acesso e ser bastante intuitivo. O software calcula a solução de perturbação, bem como a forma de espaço de estado do modelo que é usada para o cálculo de verossimilhança. Além disso, o pacote permite introduzir as formas funcionais

¹⁰ Disponível em: https://github.com/jmaih/RISE_toolbox.

especificadas para as TVTPs derivadas ou para variáveis exógenas específicas. Por exemplo, é possível considerar o caso em que $w_{m,t} = \pi_{t-1}$, onde w_t se torna observável e o modelo se reduz à formulação de Davig e Leeper (2008), quando a autoridade monetária responde sistematicamente de forma ativa quando a inflação passada excede um determinado limite especificado. Em geral, conforme exposto por Maih e Waggoner (2018), as equações estado-espço do modelo constituem um sistema de expectativas racionais que pode ser representado como

$$E[f_{s_t}(x_{t+1}), x_t, x_{t-1}, \epsilon_t | \mathcal{F}] = 0 \quad (2.21)$$

em que $s_t = 1, \dots, h$, é o regime em t , f_{s_t} é um vetor de funções não lineares, x_t é um vetor de variáveis do modelo, e ϵ_t um vetor de choques estruturais. Assim, o sistema acima precisa que ser resolvido antes que o modelo possa ser levado aos dados¹¹ (conforme Apêndice).

2.3.3 Estimação

FILTRO DE KALMAN COM MUDANÇA DE REGIME ENDÓGENA. Para colocar em perspectiva de estado de espaço, seja y_t um vetor $l \times 1$ de variáveis observadas, x_t um vetor $m \times 1$ de estados não observado, e z_t um vetor $k \times 1$ de variáveis explicativas pré-determinadas. Consideremos as seguintes equações de transição e de medida dependentes dos regimes

$$\begin{aligned} y_t &= D_{s_t} + Z_{s_t}x_t + F_{s_t}z_t + \Omega_{s_t}^{1/2}u_t, & u_t &\sim \mathcal{N}(0_{l \times 1}, I_l) \\ x_t &= C_{s_t} + G_{s_t}x_{t-1} + E_{s_t}z_t + M_{s_t}\Sigma_{s_t}^{1/2}\epsilon_t, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0_{n \times 1}, I_n) \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que a primeira equação conecta as variáveis observadas com as variáveis de estado sujeito a um vetor $l \times 1$ de erros $\Omega_{s_t}^{1/2}u_t$, e a segunda equação descreve o comportamento das variáveis de estado determinadas por um vetor $n \times 1$ de erros exógenos $\Sigma_{s_t}^{1/2}\epsilon_t$, e (u_t, ϵ_t) , que são mutualmente e serialmente não correlacionados para todo t . Ainda, as matrizes de coeficientes $(D_{s_t}, Z_{s_t}, F_{s_t}, C_{s_t}, G_{s_t}, E_{s_t}, M_{s_t})$ e as matrizes de covariâncias são construídas para depender dos regimes através da variável indicadora $s_t = \mathbf{1}\{w_t \geq \tau_w\}$.

Visando tornar a leitura do artigo um pouco menos árida, deixamos os detalhes da estimação, incluindo o algoritmo de filtragem, para o Apêndice. De forma resumida, o procedimento consiste em simular com métodos Bayesianos uma amostra da distribuição a posteriori dos parâmetros estruturais, pois a mesma não pode ser obtida em forma fechada. Esta distribuição é obtida através da combinação da distribuição a priori com a função de verossimilhança do modelo. A função de verossimilhança, por sua vez, é obtida através de aplicação do Filtro de Kalman à representação estado-espço do modelo. A única diferença em relação ao procedimento padrão para construção da função de verossimilhança decorre

¹¹ Para esse fim, uma série de esforços teóricos e empíricos conseguiram solucionar os modelos de as expectativas racionais com mudança de regime usando métodos numéricas. Maih (2015); Foerster (2016); Barthélemy e Marx (2017); Maih e Waggoner (2018).

da existência de dois regimes monetários e fiscais no período amostral. Isto gera uma mudança na representação estado-espço. Embora o sistema de equações acima seja linear em x_t e sua dinâmica seja determinada por inovações Gaussianas, a presença de s_t adiciona não linearidades relevantes que invalidam a avaliação das integrais por meio do Filtro de Kalman.

Lidamos com essa quebra seguindo a abordagem proposta por Chang, Choi e Park (2017). Esta consiste em: i) um procedimento de marginalização, em que as variáveis de estado podem ser integradas analiticamente explorando a linearidade condicional em s_t sobre o histórico de regimes mais recentes, para o qual o Filtro de Kalman pode ser aplicado de forma usual; e ii) uma etapa de colapso, na qual aproxima-se um número exponencialmente crescente de distribuições filtradas do histórico de regimes por duas misturas gaussianas em cada período. Essa redução efetivamente quebra a dependência histórica da função de verossimilhança. Em essência, o filtro amplia o filtro de Kim (1994) para modelos de espaço de estado de com mudança de regime exógena para um ambiente de mudança de regime endógena do tipo limiar com múltiplos fatores (veja Qiu (2019) e Chang, Maih e Tan (2021)).

MARKOV CHAIN MONTE CARLO. Estimamos o modelo através de métodos Bayesianos. No paradigma bayesiano, a verossimilhança obtida do modelo de espaço de estados é completada com uma distribuição a priori $p(\Theta)$ resumindo as visões iniciais do pesquisador sobre os parâmetros do modelo. Essas informações prévias são atualizadas com as informações da amostra por meio do teorema de Bayes:

$$p(\Theta|Y_{1:T}) \propto p(Y_{1:T}|\Theta)p(\Theta) \quad (2.23)$$

em que a distribuição posterior $p(\Theta|Y_{1:T})$ que caracteriza as crenças dos parâmetros Θ do modelo DSGE condicional aos dados da amostra $Y_{1:T}$ é calculada. Entretanto, como mencionado, no caso de modelos MS-DSGE, as distribuições a posteriori não possuem fórmulas fechadas devido à não linearidade dos parâmetros do modelo, sendo necessário utilizar técnicas de integração de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) para obtê-las. Além disso, a alta dimensionalidade existente nesta classe de modelos produz irregularidades na forma de $p(\Theta|Y_{1:T})$ (por exemplo, não elíptica e multimodal) que precisam ser tratadas. Para tanto, o presente trabalho faz uso do algoritmo *tailored randomized block Metropolis-Hastings* (TaRB-MH) proposto por Chib e Ramamurthy (2010), que é adequado para tratar ambos problemas simultaneamente. Neste método, os parâmetros em Θ são divididos inicialmente em vários sub-blocos. Em seguida, cada um desses sub-blocos é mostrado em sequência, assinalando um valor de uma densidade proposta personalizada construída para aquele bloco específico. Essa densidade proposta é então aceita ou rejeitada usualmente conforme a etapa do Metropolis-Hastings.

DISTRIBUIÇÕES A PRIORI. A estimação do modelo por métodos Bayesianos requer a especificação da distribuição a priori para os parâmetros estruturais. No caso de parâmetros cujos domínios encontram-se no intervalo $[0, 1]$, utilizamos a distribuição Beta (B), enquanto a distribuição Gama (G) foi selecionada para aqueles parâmetros que se situam entre $[0, \infty)$, e a distribuição Gama Inversa (IG) para os coeficientes de desvios-padrão.

Seguindo Lubik e Schorfheide (2007), o modelo foi parametrizado em termos do estado estacionário da taxa de juros real, R , que se conecta com o fator de desconto intertemporal β através de $\beta = e^{-R/400}$. Assim, usamos o valor de 5.50 como priori para R , na qual é condizente com um fator de desconto da ordem de 0.9890 e desvio padrão próximo de 1.00, conforme Castro, Solange, Gouvea, Santos e Souza-Sobrinho (2015). Para o parâmetro α , interpretado como o grau de abertura da economia, foi escolhido como priori o valor de 0.17, que corresponde à razão entre o volume da corrente de comércio exterior (importações somadas às exportações anuais) e o PIB brasileiro no período amostral. No caso dos parâmetros de elasticidade intertemporal de substituição (μ) e do coeficiente da curva de Phillips (κ), tomamos como prioris um valor de 0.50, em linha com Carvalho e Valli (2011), mas permitimos que os desvios padrão sejam mais amplos, de 0.25 e 0.20, respectivamente.

Em relação aos parâmetros da regra de política monetária, utilizamos distribuições idênticas e relativamente difusas para os dois regimes, de modo que as diferenças observadas após a estimação possam ser atribuídas à informação contida nos dados. Para o parâmetro ρ_m referente à suavização da taxa de juros, atribuímos uma distribuição Beta com média 0.6 e desvio padrão de 0.15. Atribuímos aos parâmetros ψ_π , ψ_y e $\psi_{\Delta e}$, distribuições Gama com médias 2.0, 0.25 e 0.1 (com desvios padrão 0.5, 0.1 e 0.01), respectivamente.

Para a regra fiscal, as prioris de ψ_b , ψ_g e $\psi_{\bar{y}}$ foram escolhidas também por trabalhos existentes. Nesse caso, seguimos Carvalho e Valli (2011) e Teixeira (2019), atribuindo respectivamente os valores de 0.05, 0.50 e 0.50, no entanto, com desvios padrão um tanto relaxados na ordem de 0.05, 0.05 e 0.05, respectivamente. Os parâmetros inerciais ρ_b , ρ_f e ρ_g , contudo, foram escolhidos com médias iguais a 1.00 e desvios padrões amplos.

Para os parâmetros relacionados aos choques, também consideramos distribuições relativamente mais difusas. Para os coeficientes autorregressivos restantes, utilizamos distribuição Beta com média 0.50 e desvio padrão de 0.25, enquanto para os parâmetros relacionados à variância dos choques exógenos, a distribuição atribuída é a Gama Inversa (IG) com média igual a 1.0 e desvio padrão de 0.75. Quanto às informações de estado estacionário, os valores médios amostrais são usados como prioris para g , τ e b , enquanto para as demais fixamos em 0. A relação gastos do governo em relação ao PIB no estado estacionário (g) calculada foi igual a 0.1673, a arrecadação federal sobre o PIB (τ) igual a 0.1742 e para a relação dívida/PIB obtemos um valor de 0.2878.

Por fim, com relação aos parâmetros associados aos fatores de regimes, as prioris para os

coeficientes da matriz A centraram-se em um valor bastante persistente que, juntamente às médias *a priori* de τ_m^w e τ_f^w , implicam em probabilidades de transição simétricas (0.85, 0.85) de mudanças de markov exógenas. Por outro lado, as prioris difusas em $P_{ve}P_{ee}^{-1}\epsilon_{t-1}$, $(\rho_{\epsilon_m v_m}, \rho_{\epsilon_q v_m}, \rho_{\epsilon_z v_m}, \rho_{\epsilon_y^* v_m}, \rho_{\epsilon_{\pi^*} v_m}, \rho_{\epsilon_b v_m}, \rho_{\epsilon_f v_m}, \rho_{\epsilon_g v_m}, \rho_{\epsilon_{g^*} v_R}, \rho_{\epsilon_m v_f}, \rho_{\epsilon_q v_f}, \rho_{\epsilon_z v_f}, \rho_{\epsilon_y^* v_f}, \rho_{\epsilon_{\pi^*} v_f}, \rho_{\epsilon_b v_f}, \rho_{\epsilon_f v_f}, \rho_{\epsilon_g v_f}, \rho_{\epsilon_{g^*} v_f})$ são centradas em zero para refletir uma visão agnóstica sobre o sinal e o grau de endogeneidade na mudança de regime. Os detalhes completos são apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Distribuições *a Priori*

Parâmetro	Densidade	Média	Desvio-Padrão
ψ_{π} , resposta da taxa de juros sobre a inflação	$\mathbb{G}(0, \infty)$	2.00	0.50
ψ_y , resposta da taxa de juros sobre o produto	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.25	0.10
$\psi_{\Delta e}$, resposta da taxa de juros sobre a taxa de câmbio	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.05	0.01
ψ_b , resposta da regra fiscal sobre a dívida	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.05	0.05
$\psi_{\bar{y}}$, resposta da regra fiscal sobre o hiato do produto	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.50	0.05
ψ_g , resposta da regra fiscal sobre a despesa	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.50	0.05
α , coeficiente de abertura comercial	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.17	0.03
μ , coeficiente de elasticidade intertemporal de substituição	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.25
κ , inclinação da curva de Phillips	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.50	0.20
ρ_m , persistência do choque monetário	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.60	0.15
ρ_f , persistência do choque fiscal	$\mathbb{B}(0, 1)$	1.00	0.50
ρ_z , persistência do choque tecnológico	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.25
ρ_q , persistência do choque dos termos de troca	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.25
ρ_{π^*} , persistência do choque de inflação externa	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.25
ρ_{y^*} , persistência do choque de crescimento global	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.25
ρ_b , persistência do choque de dívida	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.25
ρ_g , persistência do choque de despesa	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.25
ρ_{g^*} , persistência do choque de despesa externa	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.25
$r^A = R$, estado estacionário da taxa real de juros	$\mathbb{G}(0, \infty)$	5.50	1.00
$\pi^A = \pi$, estado estacionário da taxa de inflação	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.60	0.15
γ^A , estado estacionário da taxa de crescimento tecnológico	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.20	0.15
g , estado estacionário da despesa pública	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.20	0.15
g^* , estado estacionário da despesa pública	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.17	0.00
τ , estado estacionário da receita de tributos	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.17	0.00
τ^D , estado estacionário da receita de tributos distorcivos	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.20	0.00
b , estado estacionário da dívida pública	$\mathbb{G}(0, \infty)$	0.29	0.00
σ_m , desvio padrão do choque monetário	$\mathbb{IG}(0, \infty)$	1.00	0.75
σ_z , desvio padrão do choque tecnológico	$\mathbb{IG}(0, \infty)$	1.00	0.75
σ_{π^*} , desvio padrão do choque de inflação externa	$\mathbb{IG}(0, \infty)$	1.00	0.75
σ_{y^*} , desvio padrão do choque no produto global	$\mathbb{IG}(0, \infty)$	1.00	0.75
σ_q , desvio padrão do choque dos termos de troca	$\mathbb{IG}(0, \infty)$	1.00	0.75
σ_b , desvio padrão do choque de dívida	$\mathbb{IG}(0, \infty)$	1.00	0.75
σ_f , desvio padrão do choque de receita tributária	$\mathbb{IG}(0, \infty)$	1.00	0.75
σ_g , desvio padrão do choque de despesa	$\mathbb{IG}(0, \infty)$	1.00	0.75
σ_{g^*} , desvio padrão do choque de despesa externa	$\mathbb{IG}(0, \infty)$	1.00	0.75
α_{ii} , persistência do fator latente	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.15
τ_i^w , parâmetro de nível limiar	$\mathbb{N}(-\infty, \infty)$	0.50	0.15
$\rho_{\epsilon_j v_i}$, endogeneidade entre choques j e i alocados em P	$\mathbb{B}(0, 1)$	0.50	0.15

Nota: Usamos as seguintes abreviações: distribuição Gamma (G), distribuição Normal (N), distribuição Beta (B) e distribuição Gama-Invertida (IG).

Fonte: Elaboração Própria.

2.4 RESULTADOS

Nesta seção, descrevemos os métodos utilizados para análise econométrica, assentados em uma base de dados trimestrais de 2000 a 2021, com 86 observações. O modelo inclui oito variáveis, como crescimento do PIB real, inflação, taxa de juros e despesa pública, ajustadas sazonalmente e transformadas logaritmicamente. Adicionalmente, incorporamos um mecanismo de mudança de regime endógena, permitindo alternância entre regimes de política econômica, condicionada por fatores latentes e choques estruturais. Essas transições são modeladas por matrizes autorregressivas e probabilidades variantes no tempo, viabilizando análises de interações dinâmicas entre políticas fiscal e monetária.

2.4.1 Parâmetros Estimados

Estamos particularmente interessados em diferenças nas regras de política monetária e fiscal associadas a cada regime e nos coeficientes que informam sobre o grau de endogeneidade das mudanças nos respectivos regimes. Assim, concentraremos a análise em tais valores estimados e deixaremos as demais especificações para fins de comparação.

Tabela 2.2: Parâmetros Estimados - Regras de Política Fiscal e Monetária

Parâmetro	Sem Mudança	Mudança Exógena		Mudança Endógena	
	-	Regime 0	Regime 1	Regime 0	Regime 1
ψ_π	2.4608 [2.1582, 3.3203]	1.3444 [0.9678, 1.7112]	3.1129 [3.0072, 4.5543]	1.6859 [1.0108, 2.3396]	2.4283 [2.2333, 3.4907]
ψ_y	0.4923 [0.2176, 0.6532]	0.7219 [0.4541, 0.8270]	0.6429 [0.6671, 1.7112]	1.1859 [0.2517, 0.9457]	0.7559 [0.4517, 1.6457]
$\psi_{\Delta e}$	0.0545 [0.0033, 0.0748]	0.0473 [0.0034, 0.0876]	0.0494 [0.0318, 0.1112]	0.0516 [0.0038, 0.0959]	0.0706 [0.0048, 0.1052]
ρ_m	0.8162 [0.7139, 1.0879]	0.8090 [0.7560, 0.8631]	0.8449 [0.7678, 1.0112]	0.8053 [0.7495, 0.8659]	0.89623 [0.8495, 0.9659]
σ_R	0.4355 [0.3043, 0.5529]	0.4051 [0.3191, 0.4896]	-	0.5572 [0.3757, 0.7545]	-
ψ_b	0.1909 [0.0176, 0.5814]	0.1463 [0.0678, 0.4112]	0.2317 [0.1475, 0.5946]	0.17281 [0.0108, 0.4396]	0.3859 [0.2333, 0.7907]
$\psi_{\bar{y}}$	2.4491 [2.1442, 4.3871]	0.1526 [-0.0546, 0.6271]	4.2351 [1.6271, 6.2546]	0.1932 [0.0517, 0.7457]	4.0683 [3.2517, 5.6457]
ψ_g	0.3296 [0.1128, 0.6243]	-0.5473 [-0.4234, 0.0876]	0.9429 [0.8038, 1.1959]	-0.5798 [-0.7546, 0.0271]	1.0125 [0.7517, 1.1457]
ρ_f	0.9470 [0.8101, 0.9987]	0.3090 [0.0560, 0.7631]	0.8429 [0.6546, 0.9271]	0.3505 [0.0495, 0.7659]	0.8878 [0.7517, 0.9457]
σ_τ	1.1312 [0.7129, 1.3112]	1.4051 [1.3191, 1.4896]	-	1.2505 [1.1757, 1.4545]	-

Nota: As estimativas são baseadas em um total de 11.000 amostragens replicadas da distribuição posteriori usando o algoritmo TaRB-MH na qual descartamos as primeiras 1.000 replicações como fase de *burn-in*. As 10.000 replicações restantes formam a base para realizar a inferência a posteriori.

Fonte: Elaboração Própria.

Podemos observar na Tabela 2.2 que os parâmetros estimados para as regras de política monetária e fiscal refletem as principais características esperadas para cada regime. Na regra de política monetária, destacamos a resposta da taxa de juros ao desvio da taxa de inflação sob o regime-*Hawk* ($\psi_{1,\pi}$) nas diferentes especificações, refletindo o foco da

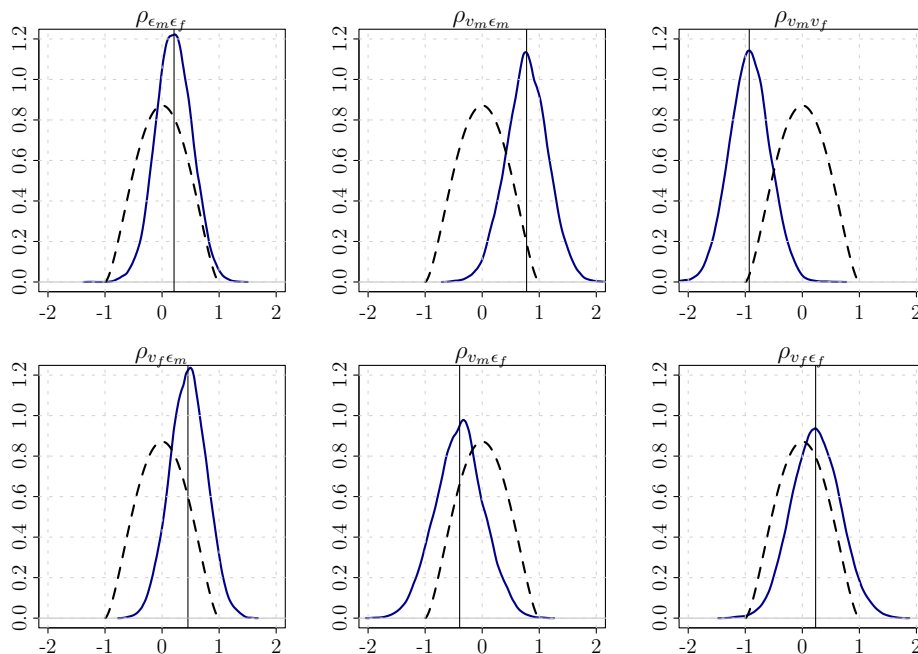
política monetária do Banco Central do Brasil conduzida ao longo do período amostral. No modelo de mudança endógena, o coeficiente de resposta a inflação no regime encontrado foi de 2.42, semelhante a outros autores, como 2.43, Castro, Solange, Gouvea, Santos e Souza-Sobrinho (2015), e acima de 3.00 nas várias especificações estimadas por Paranhos e Portugal (2017) para um modelo semelhante. No regime monetário-Dove, o coeficiente encontrado também foi maior que 1, $\psi_{0,\pi} = 1.69$. Além disso, de acordo com as estimativas da Tabela 2.2, o Banco Central do Brasil reage em menor grau à atividade econômica, com um coeficiente de resposta à variabilidade do produto da ordem de 0.76 no regime-*Hawk*. Porém, diferentemente dos trabalhos anteriores, encontramos um coeficiente de reação relevante no regime-*Dove*, igual a 1.19. Ao mesmo tempo, a resposta da autoridade monetária sobre as variações da taxa de câmbio é próxima de zero, em linha com o resultado encontrado por Furlani, Portugal e Laurini (2010). As estimativas também indicam um grau relativamente alto de inércia da taxa de juros, da ordem de 0.80-0.89 nos respectivos regimes.

No caso dos parâmetros estimados para a regra fiscal, a Tabela 2.2 mostra que o regime fiscal-*Hawk* é caracterizado por um aumento sistemático de receita na medida em que o PIB fica acima do produto potencial ($\psi_{1,\bar{y}} = 4.07$) e na medida em que a despesa aumenta ($\psi_{1,g} = 1.01$), como esperado. No regime fiscal-*Dove*, as estimativas mostram que as receitas tributárias e os gastos do governo se movem em direções opostas ($\psi_{0,g} = -0.58$), isto é, diante de uma elevação das despesas, não há um esforço de compensação pelo lado da receita. Isso também é corroborado pelo baixo coeficiente em resposta ao ciclo econômico nesse regime ($\psi_{0,\bar{y}} = 0.19$). Em suma, essas estimativas descrevem adequadamente o comportamento da política fiscal brasileira executada após a crise financeira global em 2009: vários cortes/desonerações de impostos e aumento dos gastos do governo como parte dos pacotes de estímulos do Governo Federal, um *policy setup* que levou ao descontrole da dívida e perda do grau de investimento. Essas estimativas também descrevem que a autoridade fiscal reage à dívida de forma relativamente fraca e moderadamente ($\psi_{0,b} = 0.17$ e $\psi_{1,b} = 0.38$), isto é, sob o regime fiscal-*Dove*, a autoridade se concentra na atividade real e dá menos atenção à estabilização da dívida, enquanto o regime fiscal-*Hawk* é caracterizado por uma resposta 'mais forte' à dívida, com mais atenção à estabilização do nível de endividamento. Os coeficientes de suavização estimados da regra de política fiscal ($\rho_{0,f} = 0.35$, $\rho_{1,f} = 0.89$) implicam diferentes comportamentos de suavização dependendo do regime de política fiscal vigente. Quando a política fiscal dá menos atenção ao endividamento, ocorre um forte ajuste em relação à regra a cada trimestre. Entretanto, quando a política fiscal atua claramente como estabilizadora da dívida, apenas cerca de 11% do ajuste ocorre em relação à regra.

A Tabela 2.3 mostra as estimativas posteriores dos parâmetros de mudança de regime endógena, enquanto, na Figura 2.1, apresentam-se os resultados das distribuições a

posteriori para alguns parâmetros selecionados. Concentraremos a análise nos coeficientes endógenos que envolvem as políticas fiscal e monetária. Na Figura 2.1, as densidades *a priori* e posteriores destacam a relevância de contabilizar os efeitos endógenos dos choques macroeconômicos sobre os regime de política monetária e fiscal. Apesar de usarmos prioris difusas, os dados revelaram-se informativos ao deslocar as densidades posteriores em áreas mais estreitas do espaço de parâmetros que fornecem graus de endogeneidade bem estimados na mudança de regime. Os mais notáveis foram os coeficientes $\rho_{v_m \epsilon_m}$, $\rho_{v_m v_f}$ e $\rho_{v_f \epsilon_m}$, na qual se localizaram quase inteiramente fora dos territórios iniciais. Menos evidente é a distribuição posterior de $\rho_{v_f \epsilon_f}$ que se concentrou um pouco mais no território inicial.

Figura 2.1: *Prioris e posteriors dos principais parâmetros de correlação.*



Nota: A linha vertical indica a média a posteriori.

Fonte: Elaboração própria.

Com relação aos parâmetros da Tabela 2.3, destacamos três resultados principais. Primeiro, analisando os coeficientes da matriz A , observamos que os fatores respondem fortemente ao seus pares autorregressivos ($\alpha_{mm} = 0.8034$ e $\alpha_{ff} = 0.8415$). O fator de política monetária $w_{m,t}$ responde moderadamente ao fator de política fiscal defasado $w_{f,t-1}$ ($\alpha_{mf} = 0.49$), enquanto o fator de política fiscal $w_{f,t}$ responde fracamente ao fator de política monetária defasado $w_{m,t-1}$ ($\alpha_{fm} = 0.0828$). Intuitivamente, esses resultados indicam que o banco central olha o estado da política fiscal no ‘retrovisor’ para determinar a estratégia monetária futura, enquanto a autoridade fiscal quase independe do regime monetário

Tabela 2.3: Parâmetros Estimados - Endogeneidade nos Regimes

Parâmetros	Estimativa	Interv. Posterior [5%, 95%]	Parâmetros	Estimativa	Interv. Posterior [5%, 95%]
τ_m^w	2.6215	[1.9751, 3.4694]	τ_f^w	4.3816	[3.8751, 4.7694]
α_{mm}	0.8034	[0.5049, 0.9672]	α_{ff}	0.8415	[0.6745, 0.9689]
α_{mf}	0.4921	[0.2673, 0.8673]	α_{fm}	0.0828	[0.0091, 0.6673]
$\rho_{\epsilon_m \epsilon_f}$	0.2098	[0.1376, 0.6941]	$\rho_{v_f \epsilon_m}$	0.4536	[0.1761, 1.0494]
$\rho_{v_m \epsilon_m}$	0.7782	[0.5753, 1.4478]	$\rho_{v_m \epsilon_f}$	-0.3954	[-0.8154, -0.0986]
$\rho_{v_m v_f}$	-0.9301	[-1.4690, 0.0359]	$\rho_{v_f \epsilon_f}$	0.2333	[0.0467, 0.5796]
$\rho_{\epsilon_q v_m}$	0.1376	[0.0435, 0.3987]	$\rho_{\epsilon_q v_f}$	0.0954	[0.0563, 0.3288]
$\rho_{\epsilon_z v_m}$	0.1749	[0.0498, 0.3789]	$\rho_{\epsilon_z v_f}$	0.0401	[0.0032, 0.2469]
$\rho_{\epsilon_{y^*} v_m}$	0.033	[0.0239, 0.1973]	$\rho_{\epsilon_{y^*} v_f}$	0.0826	[0.0059, 0.1547]
$\rho_{\epsilon_{\pi^*} v_m}$	0.2171	[0.0275, 0.4694]	$\rho_{\epsilon_{\pi^*} v_f}$	0.1251	[0.0751, 0.4694]
$\rho_{\epsilon_b v_m}$	0.0891	[0.0124, 0.3169]	$\rho_{\epsilon_b v_f}$	-0.2586	[-0.4554, -0.1654]
$\rho_{\epsilon_g v_m}$	-0.4293	[-0.6692, -0.1796]	$\rho_{\epsilon_g v_f}$	0.6281	[0.4125, 0.9694]
$\rho_{\epsilon_{g^*} v_m}$	0.0634	[0.0075, 0.2257]	$\rho_{\epsilon_{g^*} v_f}$	0.0113	[0.0051, 0.1419]
-	-	-	$\rho_{vv \cdot \epsilon}$	-0.3139	[-0.6751, -0.0694]

Nota: Esta tabela traz os limiares estimados, os coeficientes autorregressivos da matriz A e os coeficiente da matriz de correlação P que são relevantes para a dinâmica dos fatores e para a determinação dos regimes fiscal e monetário. Observa-se que o modelo de mudança de regime estudado é equivalente ao modelo com mudança exógena se todos os canais endógenos forem iguais a zero ($P_{v\epsilon} = 0$).

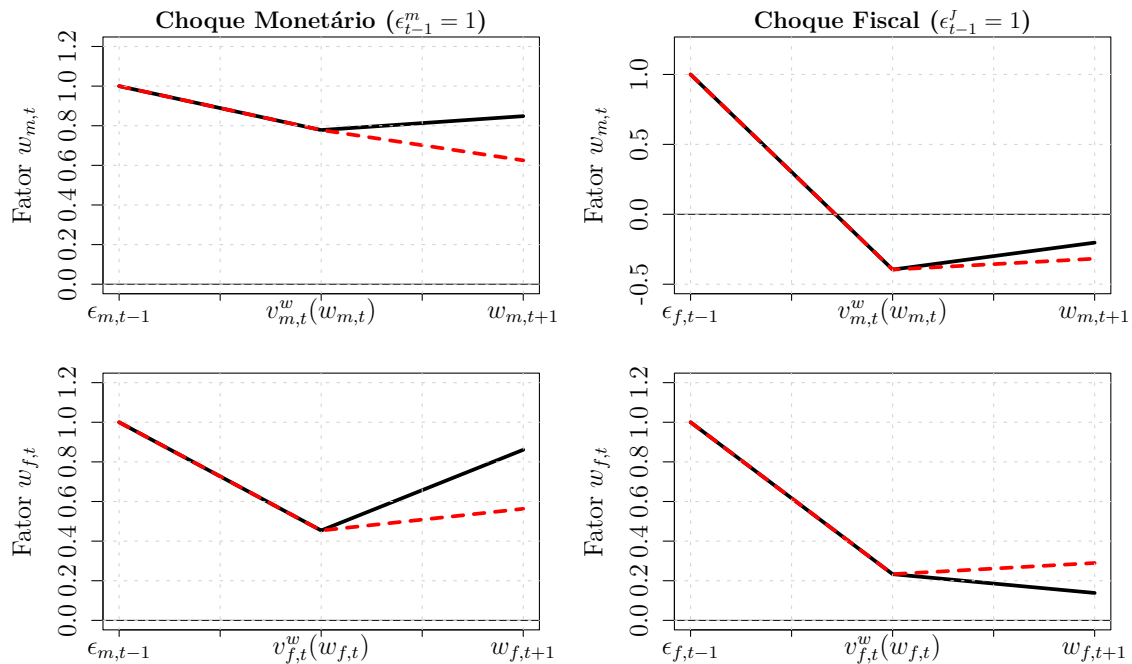
Fonte: Elaboração Própria.

passado. Esse resultado é corroborado quando olhamos as respostas contrafactuais das IRFs (funções de resposta ao impulso) dos fatores em w_t na Figura 2.2, onde quantificamos através das equações 2.16 e 2.17 os efeitos dos canais de interação dinâmica da matriz A na propagação dos choques de curto prazo. Como pode ser visto, se $\alpha_{mf} = 0$ ou $\alpha_{fm} = 0$, as respostas de ambos fatores se diferenciam do cenário básico no caso de um choque monetário. No caso do choque fiscal, no entanto, os fatores não são substancialmente influenciados.

Em segundo lugar, considerando os efeitos de curto prazo dos choques estruturais de política monetária e fiscal sobre os fatores de política apresentados na Figura 2.2, nossos resultados atribuem um papel mais importante ao choque estrutural de política monetária na condução da interação de curto prazo por meio dos efeitos de *feedback*-próprio e *feedback*-cruzado. As estimativas a posteriori mostram que um choque monetário defasado de política monetária ($\epsilon_{t-1}^m = 1$) produz influência significativa nos regimes de política monetária e fiscal futuros. Especificamente, encontramos coeficientes de correlação $\rho_{v_m, \epsilon_m} = 0.78$ e $\rho_{v_f, \epsilon_m} = 0.45$, isto é, o efeito *feedback*-próprio na regra de política monetária significa que um choque monetário em $t - 1$ tem um efeito imediato da ordem de 0.80 sobre o fator de política monetária em $t + 1$, o que implica que a probabilidade de vigorar um regime monetário-*Hawk* no próximo período torna-se mais provável.

Já o efeito *feedback*-cruzado de choques defasados de política monetária sobre o fator de política fiscal futura ($w_{f,t+1}$) indica um impacto da ordem de 0.40 sobre o fator fiscal, a metade do efeito sobre o fator monetário. Ainda que apresente menor magnitude, isso

Figura 2.2: *Choques de Política sobre os Fatores de Regime: Sensibilidade a α_{mf} e α_{fm} .*



Nota: Consideramos nas IRFs um choque unitário positivo sobre $w_{m,t}$ e $w_{f,t}$ e as respostas contrafactuais a partir do zeramento de parâmetros endógenos em A. Os painéis consideram o cenário básico (modelo completo) nas linhas escuras *vs.* o cenário contrafactual nas linhas vermelhas tracejadas. Nos painéis superiores consideramos o caso em que $\alpha_{mf} = 0$, enquanto os painéis inferiores consideram o caso em que $\alpha_{fm} = 0$.

Fonte: Elaboração própria.

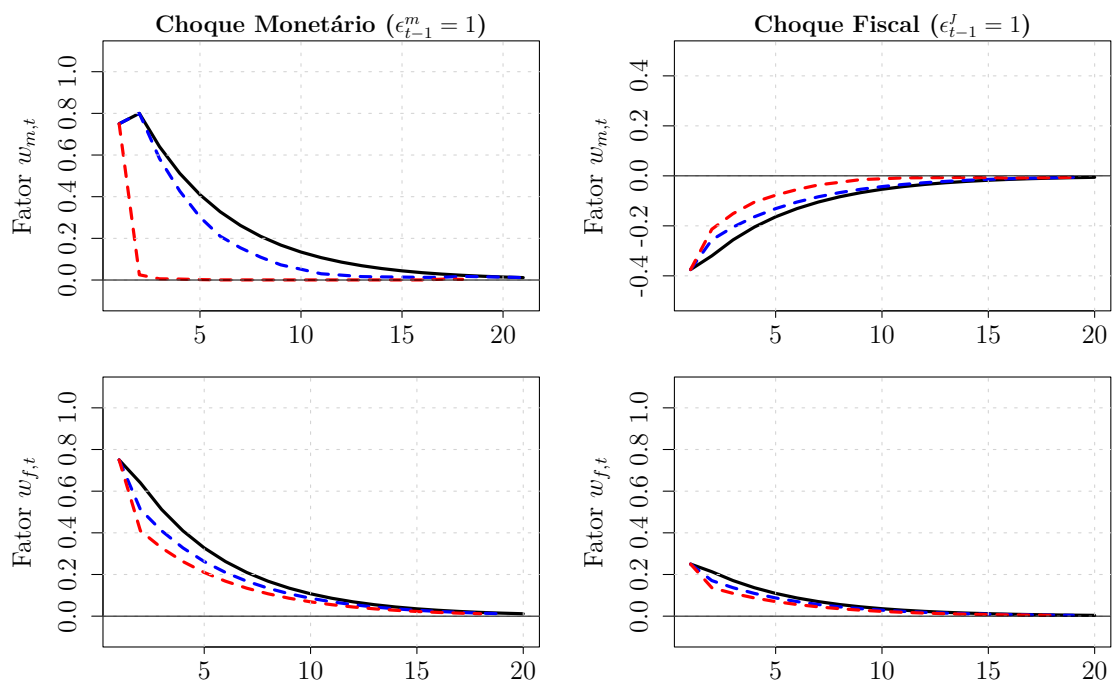
significa que um choque monetário positivo que aumenta a taxa de juros e induz a uma forte resposta do banco central à inflação futura pode levar a autoridade fiscal ajustar as receitas para garantir a solvência fiscal. Em outras palavras, as estimativas também mostram que a autoridade fiscal tende dar a um pouco mais de atenção à estabilização da dívida quando um choque positivo da política monetária se materializa, isto é, apresenta efeitos estados-dependentes em relação à política monetária.

Por outro lado, as estimativas apontam que um choque de política fiscal produz um efeito fraco sobre o fator fiscal ($\rho_{v_f, \epsilon_f} = 0.23$) e um efeito negativo sobre o fator monetário ($\rho_{v_m, \epsilon_f} = -0.39$). Intuitivamente, um valor negativo para ρ_{v_m, ϵ_f} indica que aumentos não sistemáticos de receita (ou de contenção de gastos) são capazes de impactar a probabilidade de um regime monetário-*Dove* vigorar no futuro. As IRFs mostram que um choque fiscal produz um efeito da ordem de -0.35 sobre o fator monetário futuro, enquanto o efeito de um choque estrutural fiscal sobre o fator fiscal futuro é da ordem de 0.22. O *feedback*-cruzado do choque de política fiscal para o regime de política monetária no próximo período pode refletir o fato de que o banco central prevê rotineiramente o instrumento e as metas da autoridade fiscal. Por exemplo, um choque expansionista da política fiscal, independentemente de sua natureza, exógena ou endógena, induz diretamente a impactos

nominais e reais na economia, e a autoridade de política monetária pode sistematicamente ajustar sua regra de política monetária com base na perturbação da política fiscal. Em suma, observamos que a autoridade monetária ajusta fortemente seu regime de política por meio dos efeitos próprios e cruzados, enquanto a autoridade fiscal atualiza seu regime de política principalmente por meio do efeito *feedback*-cruzado.

Para capturar o efeito do canal de interação dinâmica para prazos mais longos, apresentamos IRFs dos fatores w_t em até 20 trimestres na Figura 2.3. As IRFs do modelo base mostram que a resposta a um choque de política monetária é cerca de 4 vezes o tamanho da resposta do choque fiscal, reafirmando as evidências mostradas na Tabela 2.3. Novamente, os valores de α_{mf} se mostram relevantes. Se zeramos α_{mf} , ou seja, quando a política monetária não responde ao fator fiscal defasado, o fator monetário se reduz rapidamente enquanto o fator fiscal permanece elevado, e, conseqüentemente, desaparece a interação entre políticas.

Figura 2.3: *Choques de Política sobre os Fatores: Sensibilidade de longo prazo a α_{mf} e α_{fm} .*



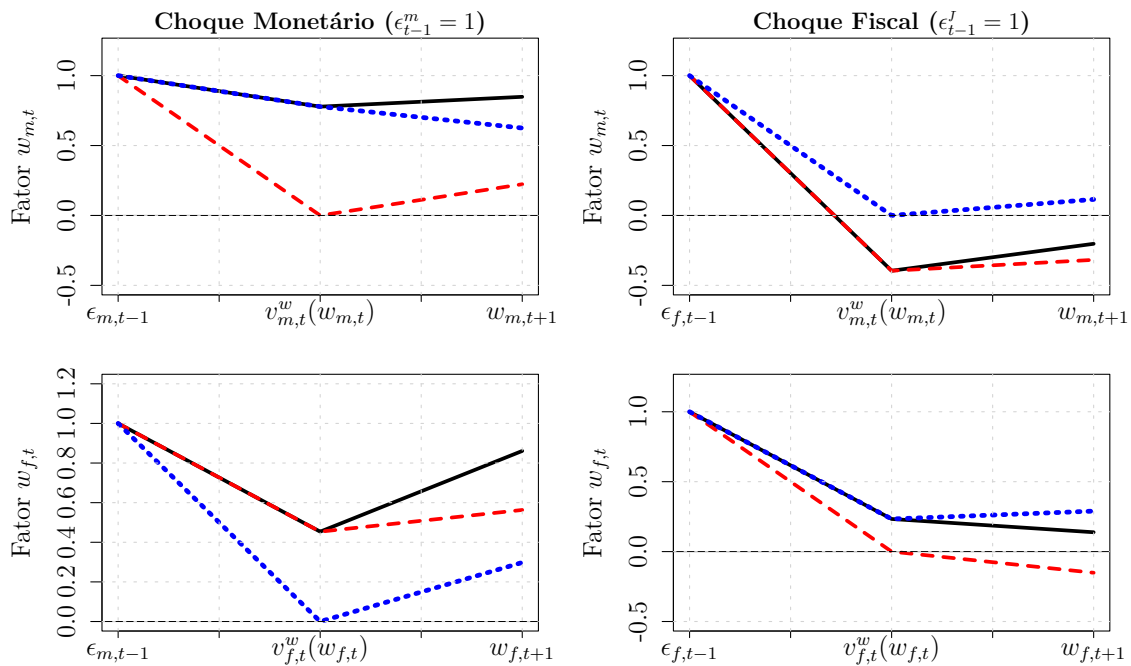
Nota: Consideramos nas IRFs um choque unitário positivo sobre $w_{m,t}$ e $w_{f,t}$ e as respostas contrafactuais a partir do zeramento de parâmetros endógenos em A. Os painéis consideram o cenário básico (modelo completo) nas linhas escuras *vs.* os cenários contrafactuais nas linhas vermelhas tracejadas ($\alpha_{mf} = 0$) e nas linhas azuis pontilhadas ($\alpha_{fm} = 0$).

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, observamos considerável descoordenação contemporânea entre as duas autoridades políticas ($\rho_{v_m, v_f} = -0.93$). Expurgando os efeitos de ϵ_{t-1} , obtemos uma correlação contemporânea significativa entre as inovações do fator de política residual, isto é, $\rho_{vv \cdot \epsilon} = -0.31$. Um choque exógeno negativo (*Dove*) do fator fiscal pode, assim, aumentar

em 0.31 o fator monetário futuro, aumentando a probabilidade da política monetária transitar para um regime-*Hawk*. Ao comparar as IRFs do modelo base com casos contrafactuais de efeitos cruzados na Figura 2.4, observamos que as respostas iniciais dos fatores $w_{m,t}$ e $w_{f,t}$ dependem criticamente de a autoridade fiscal ajustar ou não seu regime de política em resposta aos distúrbios da política monetária e fiscal (casos em que $\rho_{v_f \epsilon_m} = 0$ e $\rho_{v_m \epsilon_f} = 0$). Quando a inovação do fator fiscal não recebe o *feedback* da perturbação da política monetária, $\rho_{v_f \epsilon_m} = 0$, o fator fiscal quase não responde a um choque de política monetária, mesmo enquanto o fator monetário aumenta como no modelo base, implicando uma interação inicial de políticas mais fraca. Similarmente, se a autoridade fiscal não reagir à sua própria perturbação, $\rho_{v_m \epsilon_f} = 0$, a interação inicial da política também é reduzida marginalmente abaixo de zero diante de um choque de política fiscal. No caso do fator monetário, quando $\rho_{v_m \epsilon_m} = 0$, observamos que, ainda assim, o efeito é próximo do cenário base, uma vez que o coeficiente autorregressivo α_{mf} apresenta valor elevado. Quando $\rho_{v_m \epsilon_f} = 0$, a ausência da transmissão quase elimina o efeito de um choque de melhora nas contas públicas sobre a probabilidade de o regime monetário migrar para um estado *Dove*.

Figura 2.4: *Choques de Política sobre os Fatores: Sensibilidade dos efeitos feedback.*

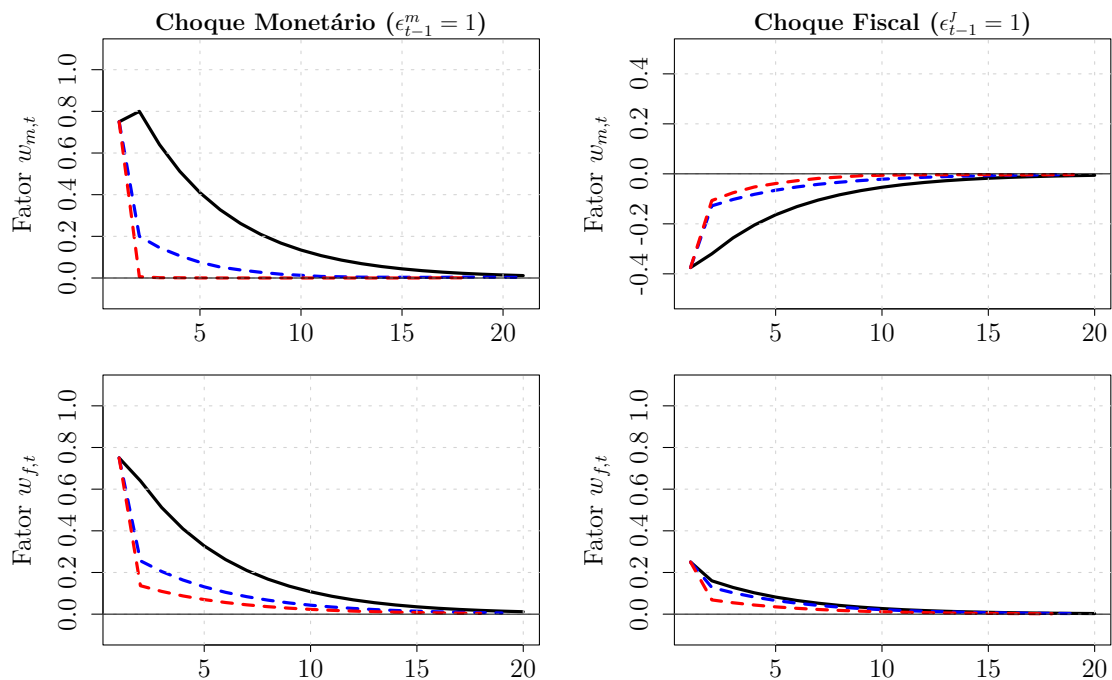


Nota: Consideramos nas IRFs um choque unitário positivo sobre $w_{m,t}$ e $w_{f,t}$ e as respostas contrafactuais a partir do zeramento de parâmetros endógenos em P. Os painéis da coluna esquerda consideram o cenário básico (modelo completo) nas linhas escuras *vs.* os cenários contrafactuais nas linhas vermelhas tracejadas ($\rho_{v_m \epsilon_m} = 0$) e nas linhas azuis pontilhadas ($\rho_{v_f \epsilon_m} = 0$), enquanto os painéis da coluna direita consideram os cenários contrafactuais nas linhas vermelhas tracejadas ($\rho_{v_f \epsilon_f} = 0$) e nas linhas azuis pontilhadas ($\rho_{v_m \epsilon_f} = 0$).

Fonte: Elaboração própria.

Em horizontes mais longos, os canais de *feedback* para o choque exógeno do fator de política fiscal parecem ser relativamente mais importantes do que aqueles para o choque exógeno do fator monetário. A Figura 2.5 mostra as IRFs dos fatores w_t sob o modelo base e sob os cenários contrafactuais. Como pode ser visto no painel inferior esquerdo, se a autoridade fiscal não ajustar sua orientação de política em resposta a um choque monetário, seu fator de política não reage a um choque de política monetária e as magnitudes das respostas são insignificantes em todos os horizontes. Nesse caso, o fator monetário responde inicialmente a um choque de política monetária, mas reduz a zero após alguns trimestres após o choque, conforme mostrado. Portanto, na ausência do *feedback*-cruzado ao fator fiscal de um choque monetário, o choque de política monetária não é capaz de gerar mudanças persistentes no fator de política monetária. Da mesma forma, se a autoridade fiscal não considerar um choque de política fiscal passado, ou seja, quando fechamos o canal de *feedback*-próprio fiscal, a interação entre duas autoridades de política é insignificante e apenas de curta duração, conforme mostrado pelas linhas tracejadas vermelhas na coluna da direita da Figura 2.5.

Figura 2.5: *Choques de Política sobre os Fatores: Sensibilidade de longo prazo dos efeitos feedback.*



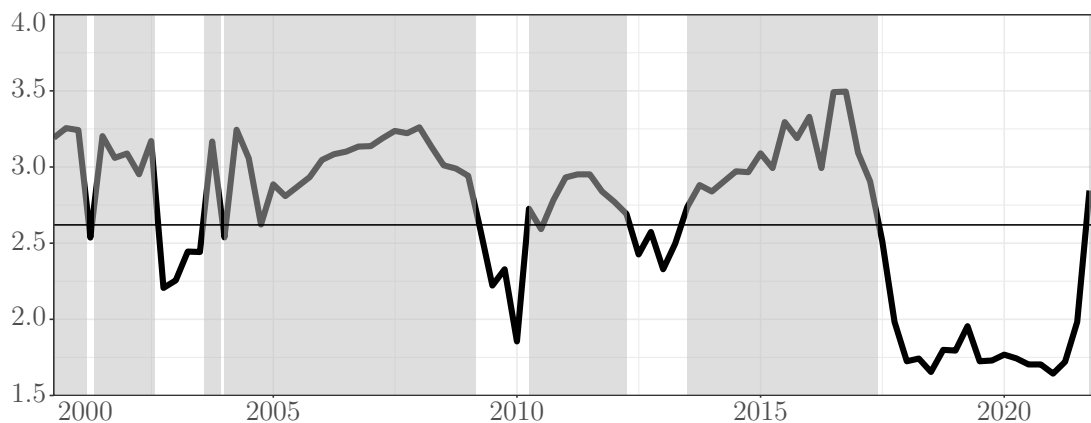
Nota: Consideramos nas IRFs um choque unitário positivo sobre $w_{m,t}$ e $w_{f,t}$ e as respostas contrafactuais a partir do zeração de parâmetros endógenos em P. Os painéis da coluna esquerda consideram o cenário básico (modelo completo) nas linhas escuras *vs.* os cenários contrafactuais nas linhas vermelhas tracejadas ($\rho_{v_m \epsilon_m} = 0$) e nas linhas azuis pontilhadas ($\rho_{v_f \epsilon_f} = 0$), enquanto os painéis da coluna direita consideram os cenários contrafactuais nas linhas vermelhas tracejadas ($\rho_{v_f \epsilon_f} = 0$) e nas linhas azuis pontilhadas ($\rho_{v_m \epsilon_m} = 0$).

Fonte: Elaboração própria.

2.4.2 Plausibilidade das Estimativas - Fatores de Regimes w_t

As Figuras 2.6 e 2.7 apresentam as trajetórias para os fatores monetário e fiscal estimados, $w_{m,t}$ e $w_{f,t}$. Conforme a metodologia empregada, a política monetária é *Dove* quando $w_{m,t} < \tau_m^w$ e *Hawk* caso o contrário. Analogamente, a política fiscal é *Dove* se $w_{f,t} < \tau_f^w$ e *Hawk* caso o contrário. Sendo assim, se as áreas hachuradas dos painéis de $w_{m,t}$ e $w_{f,t}$ nas Figuras 2.6 e 2.7 estão sobrepostas ou não, podemos identificar as diferentes combinações regimes possíveis, conforme apresentado na Figura 2.8.

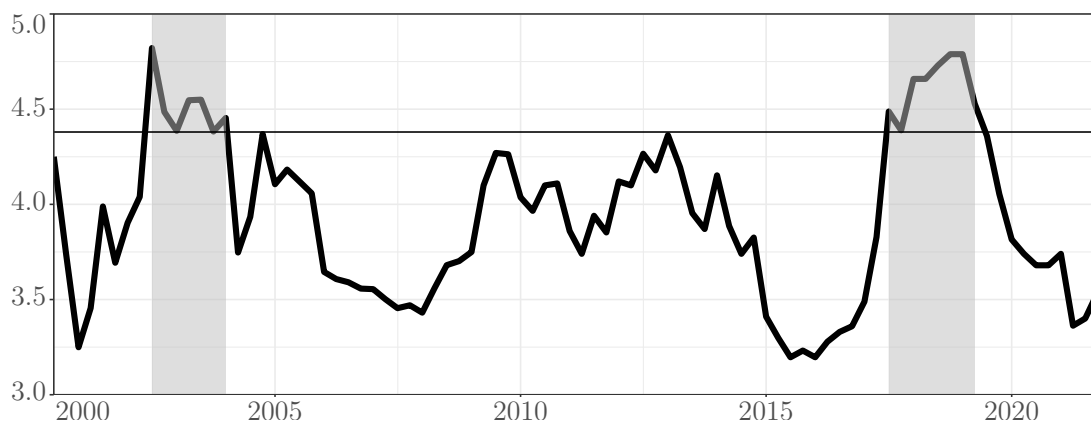
Figura 2.6: Fator $w_{m,t}$ estimado ao longo do período amostral.



Nota: Áreas hachuradas referem-se ao regime Monetário-*Hawk*.

Fonte: Elaboração própria.

Figura 2.7: Fator $w_{f,t}$ estimado ao longo do período amostral.



Nota: Áreas hachuradas referem-se ao regime Fiscal-*Hawk*.

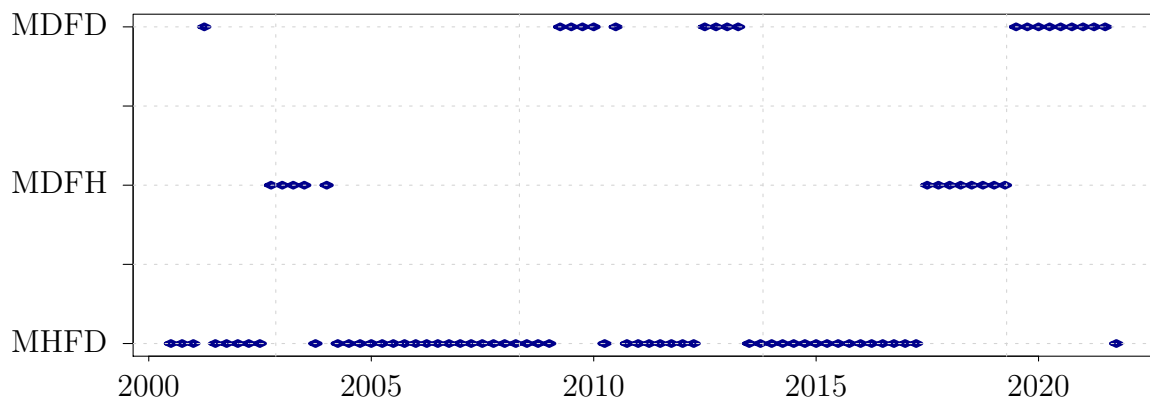
Fonte: Elaboração própria.

Como pode ser visto, os regimes estimados parecem bastante consistentes com os relatos narrativos dos históricos monetário e fiscal brasileiros. Com relação ao fator monetário, as áreas hachuradas da Figura 2.6 mostram que o regime-*Hawk* foi predominante durante o período amostral, enquanto o regime-*Dove* foi detectado principalmente em cinco períodos – em 2001; ao longo de 2003 e 2004; em 2009 em decorrência da crise americana;

entre 2012 e o final de 2013 na gestão Tombini do banco central e no final de 2017 até 2021. Essas estimativas diferem substancialmente dos trabalhos prévios de Gonçalves, Portugal e Aragón (2016) e Paranhos e Portugal (2017), na qual os respectivos trabalhos não indentificaram a presença do regime monetário-*Dove* durante a gestão Tombini na presidência do banco central, notadamente caracterizada por uma resposta menos reativa ao hiato da inflação entre 2012 e 2014.

Para os regimes de política fiscal, as áreas hachuradas da Figura 2.7 apontam que o regime fiscal-*Hawk* ocorreu em apenas dois momentos, de maneira que o regime fiscal-*Dove* foi predominante no período amostral. Em geral, são identificados dois episódios na qual a autoridade fiscal operou sob o regime-*Hawk*: em 2003, quando foram estabelecidas as metas de primário no início do Governo Lula e foi exigido um esforço do Governo Federal após a hiperdesvalorização cambial e desancoragem das expectativas em 2002; e em 2017, quando foi estabelecida a Regra do Teto de Gastos sob o Governo Temer.

Figura 2.8: *Regimes identificados ao longo do tempo.*



Nota: Os três regimes identificados pelo modelo referem-se a política monetária *Dove* e política fiscal *Hawk* (MD/FH) e política monetária *Hawk* e política fiscal *Dove* (MH/FD).

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, a Figura 2.8 apresenta as datações identificadas pelo modelo na qual os diferentes *mixes* de política operaram durante o período amostral. No início dos anos 2000, o regime MH/FD deu lugar a um regime MD/FH, conforme o esforço do governo com as contas públicas ganhou alguma tração somado ao *boom* de *commodities*. No entanto, o esforço não se manteve por muito tempo, implicando a um retorno ao regime MH/FD até a crise financeira global. Como esperado, em situações de recessão extrema, ambas autoridades ajustaram as políticas de maneira estimulativa permitindo que a economia operasse em um regime MD/FD por um curto período, até que os estímulos governamentais por meio do globo produzissem efeitos inflacionários, deslocando a economia para um regime MH/FD novamente. Nos anos seguintes, ainda sob persistência inflacionária, a

mudança para um regime monetário *Dove* sob a gestão Tombini e a continuidade dos esforços fiscais sob o Governo Dilma colocaram a economia novamente em um regime MD/FD por alguns trimestres. Com um ambiente de atividade econômica aquecida, inflação de serviços elevada e choques persistentes de oferta, o banco central iniciou um novo ciclo de aperto monetário em 2014, deslocando o *mix* de políticas novamente para o regime MH/FD. Após a crise econômica doméstica, vislumbrando uma trajetória de níveis baixos de juros internacionais e com a implementação do Teto de Gastos pela gestão Temer, a gestão Goldfajn deu início a um relaxamento monetário, o que permitiu que a economia retornasse a operar sob um regime MD/FH nos últimos anos, movimento que continuou no início da gestão Campos Neto até a pandemia. Em 2020, ambas autoridades se deslocaram para um regime *Dove* por um tempo, até meados de 2021 quando as taxas de juros precisaram subir rapidamente frente ao fenômeno inflacionário que já se espalhava. A política fiscal, por outro lado, seguiu em estado *Dove*.

2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, propomos estimar um modelo MS-DSGE e avaliar a interação entre os regimes monetário e fiscal da economia brasileira usando uma metodologia recentemente desenvolvida. Foi apresentada uma aplicação de um modelo DSGE para uma pequena economia aberta com mudança de regime endógena, cuja estimação envolveu técnicas bayesianas. A estratégia econométrica adotada considera que as mudanças de regime das políticas monetária e fiscal são determinadas endogenamente, alternando entre regimes sempre que um fator latente autorregressivo que representa o estado dos regimes cruza um limite estimado. A endogeneidade decorre da estrutura de probabilidades de transição variáveis no tempo, na qual a regra de movimento de cada fator latente é determinada pelos choques estruturais da economia e pelos fatores defasados.

As estimativas indicam que há forte presença de endogeneidade nos regimes monetário e fiscal; em especial, calculamos que os choques estruturais de política monetária apresentam peso relevante na determinação dos regimes futuros de políticas fiscal e monetária e que os choques idiossincráticos do fator fiscal influenciam o estado do regime monetário um passo à frente mas não o contrário. Tais evidências suportam as discussões recentes de que a política monetária brasileira se ajusta à fiscal, tal que demandam a reconsideração de como as mudanças na função de reação de política monetária são modeladas em economias abertas emergentes com fundamentos fiscais frágeis.

Uma limitação do presente trabalho é a baixa exploração de demais fatores na determinação dos regimes, em especial, há ausência de um elemento que represente explicitamente as expectativas dos agentes e como isso poderia determinar a probabilidade de migrar de um regime para outro. Como trabalho futuro, é possível considerar este e outros elementos,

como a interação com a política monetária internacional e risco-país. Outra sugestão é a aplicação da metodologia de mudança de regime endógena sob outros contextos DSGE, como a alternância nos regimes dos coeficientes de incerteza e da curva de juros. A comparação das interações monetária e fiscal com o caso de economia avançada também é uma sugestão de trabalho empírico que poderia ser incluída.

2.6 REFERÊNCIAS

ALSTADHEIM, Ragna; BJØRNLAND, Hilde C; MAIH, Junior. Do central banks respond to exchange rate movements? A Markov-switching structural investigation of commodity exporters and importers. **Energy Economics**, United Kingdom (UK), v. 96, p. 105138, 2021.

<https://doi.org/10.1016/j.eneco.2021.105138>. Accessed at: 2024-03-01.

AMARAL, Eduardo Gonçalves Costa. **Essays in Monetary Policy with Risky Assets**. 2021. Tese (Doutorado em Economia), PUC-Rio, Brasil – National Bureau of Economic Research. Available at: <https://doi.org/10.17771/PUCRio.acad.56830>. Accessed at: 2024-02-01.

BARTHÉLEMY, Jean; MARX, Magali. Solving endogenous regime switching models. **Journal of economic dynamics and control**, Elsevier, Netherlands, v. 77, p. 1–25, 2017. Available at:

www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165188917300192?viaIihub. Accessed at: 2024-03-01.

BENIGNO, Gianluca; FOERSTER, Andrew; OTROK, Christopher; REBUCCI, Alessandro. **Estimating macroeconomic models of financial crises: An endogenous regime-switching approach**. [S.l.], 2020. (NBER Working Paper, United States of America (USA)). Available at:

www.nber.org/system/files/working_papers/w26935/w26935.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

BHATTARAI, Saroj; LEE, Jae Won; PARK, Woong Yong. Inflation dynamics: The role of public debt and policy regimes. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, Netherlands, v. 67, p. 93–108, 2014. Available at:

www.ideas.repec.org/a/eee/moneco/v67y2014icp93-108.html. Accessed at: 2024-02-01.

BI, Huixin; TRAUM, Nora. Estimating fiscal limits: The case of greece. **Journal of applied Econometrics**, Wiley Online Library, United States of America (USA), v. 29, n. 7, p. 1053–1072, 2014. Available at:

www.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/jae.2401. Accessed at: 2024-02-01.

- BIANCHI, Francesco. Evolving monetary/fiscal policy mix in the United States. **American Economic Review**, American Economic Association, United States of America (USA), v. 102, n. 3, p. 167–172, 2012. Available at: www.jstor.org/stable/23245523. Accessed at: 2024-02-02.
- BIANCHI, Francesco; ILUT, Cosmin. Monetary/fiscal policy mix and agents' beliefs. **Review of economic Dynamics**, Elsevier, United States of America (USA), v. 26, p. 113–139, 2017. Available at: www.nber.org/system/files/working_papers/w20194/w20194.pdf. Accessed at: 2024-02-01.
- BLANCHARD, Olivier J. **Fiscal dominance and inflation targeting: lessons from Brazil**. [S.l.]: National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA, 2004. Available at: www.nber.org/papers/w10389. Accessed at: 2024-02-02.
- CALVO, Guillermo A. Capital flows and capital-market crises: the simple economics of sudden stops. **Journal of applied Economics**, Taylor & Francis, USA, v. 1, n. 1, p. 35–54, 1998. Available at: www.researchgate.net/publication/4928094_Capital_Flows_and_Capital-Market_Crises_The_Simple_Economics_of_Sudden_Stops. Accessed at: 2024-02-01.
- CALVO, Guillermo A. Staggered prices in a utility-maximizing framework. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, Netherlands, v. 12, n. 3, p. 383–398, 1983. Available at: www.scirp.org/reference/referencespapers//?referenceid=752452. Accessed at: 2024-02-01.
- CARVALHO, Fabia A de; VALLI, Marcos. **Fiscal policy in Brazil through the lens of an estimated DSGE model**. [S.l.], 2011. (Working Paper). Available at: https://www.researchgate.net/publication/254391399_Fiscal_Policy_in_Brazil_through_the_Lens_of_an_Estimated_DSGE_Model. Accessed at: 2024-02-01.
- CASTRO, Eduardo. **RegGae: a toolkit for macroprudential policy with DSGEs**. [S.l.], 2020. Available at: www.bcb.gov.br/pec/wps/ingl/wps526.pdf. Accessed at: 2024-02-01.
- CASTRO, Marcos R.; SOLANGE, N.; GOUVEA, André Minella; SANTOS, Rafael C.; SOUZA-SOBRINHO, Nelson F. **Samba**: Stochastic analytical model with a bayesian approach. Sociedade Brasileira de Econometria, 2015. Available at: www.bcb.gov.br/pec/wps/ingl/wps239.pdf. Accessed at: 2024-02-01.
- CHANG, Yoosoon; CHOI, Yongok; PARK, Joon Y. A new approach to model regime switching. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 196, n. 1, p. 127–143, 2017. Available at: www.researchgate.net/publication/309024882_A_new_approach_to_model_regime_switching. Accessed at: 2024-02-01.

CHANG, Yoosoon; MAIH, Junior; TAN, Fei. Origins of Monetary Policy Shifts: A New Approach to Regime Switching in DSGE Models. **Journal of economic dynamics and control**, Elsevier, Netherlands, v. 133, p. 104235, 2021. Available at:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165188921001706>.

Accessed at: 2024-02-01.

CHEN, Xiaoshan; MACDONALD, Ronald. Realized and Optimal Monetary Policy Rules in an Estimated Markov-Switching DSGE Model of the United Kingdom. **Journal of Money, Credit and Banking**, Wiley Online Library, United States of America (USA), v. 44, n. 6, p. 1091–1116, 2012. Available at: www.econbiz.de/Record/realized-and-optimal-monetary-policy-rules-in-an-estimated-markov-switching-dsge-model-of-the-united-kingdom-chen-xiaoshan/10009693666.

Accessed at: 2024-02-01.

CHIB, Siddhartha; RAMAMURTHY, Srikanth. Tailored randomized block MCMC methods with application to DSGE models. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 155, n. 1, p. 19–38, 2010. Available at:

www.researchgate.net/publication/46494851_Tailored_randomized_block_MCMC_methods_with_application_to_DSGE_models. Accessed at: 2024-02-01.

COE, Patrick J. Financial crisis and the Great Depression: a regime switching approach. **Journal of Money, Credit and Banking**, JSTOR, United States of America (USA), p. 76–93, 2002. Available at: www.researchgate.net/publication/5168231_Financial_Crisis_and_the_Great_Depression_A_Regime-Switching_Approach.

Accessed at: 2024-02-01.

DAVIG, Troy; LEEPER, Eric M. Endogenous Monetary Policy Regime Change. In: NBER INTERNATIONAL SEMINAR ON MACROECONOMICS 2006, p. 345–391. University of Chicago press. Available at:

www.kansascityfed.org/documents/5350/pdf-RWP06-11.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

DAVIG, Troy; LEEPER, Eric M. Monetary–fiscal policy interactions and fiscal stimulus. **European Economic Review**, Elsevier, Netherlands, v. 55, n. 2, p. 211–227, 2011.

Available at: www.researchgate.net/publication/222677631_Monetary-Fiscal_Policy_Interactions_and_Fiscal_Stimulus. Accessed at: 2024-02-01.

DEL NEGRO, Marco; SCHORFHEIDE, Frank. Inflation dynamics in a small open-economy model under inflation targeting: some evidence from Chile. **FRB of New York Staff Report**, n. 329, 2008. Available at:

www.newyorkfed.org/medialibrary/media/research/staff_reports/sr329.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

DIEBOLD, Francis X; LEE, Joon-Haeng; WEINBACH, Gretchen C. **Regime switching with time-varying transition probabilities**, (Working paper). 1993. Available at: www.researchgate.net/publication/5052311_Regime_switching_with_time-varying_transition_probabilities. Accessed at: 2024-02-01.

FAVERO, Carlo A; MONACELLI, Tommaso. **Fiscal policy rules and regime (in) stability: evidence from the US**. IGIER Working Paper, Italy, 2005. Available at: www.researchgate.net/publication/5112170_Fiscal_Policy_Rules_and_Regime_InStability_Evidence_from_the_US. Accessed at: 2024-02-01.

FILARDO, Andrew J. Business-cycle phases and their transitional dynamics. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, United States of America (USA), v. 12, n. 3, p. 299–308, 1994. Available at: www.jstor.org/stable/1392086. Accessed at: 2024-02-01.

FOERSTER, Andrew T. Monetary policy regime switches and macroeconomic dynamics. **International Economic Review**, Wiley Online Library, United States of America (USA), v. 57, n. 1, p. 211–230, 2016. Available at: www.researchgate.net/publication/272301089_Monetary_Policy_Regime_Switches_and_Macroeconomic_Dynamics. Accessed at: 2024-02-01.

FURLANI, Luiz Gustavo Cassilatti; PORTUGAL, Marcelo Savino; LAURINI, Márcio Poletti. Exchange rate movements and monetary policy in Brazil: Econometric and simulation evidence. **Economic Modelling**, Elsevier, Netherlands, v. 27, n. 1, p. 284–295, 2010. Available at: www.academia.edu/51985498/Exchange_rate_movements_and_monetary_policy_in_Brazil_Econometric_and_simulation_evidence?uc-sb-sw=80425216. Accessed at: 2024-02-01.

GALI, Jordi; MONACELLI, Tommaso. Monetary policy and exchange rate volatility in a small open economy. **The Review of Economic Studies**, Wiley-Blackwell, United Kingdom, v. 72, n. 3, p. 707–734, 2005. Available at: www.researchgate.net/publication/4995632_Monetary_Policy_and_Exchange_Rate_Volatility_in_a_Small_Open_Economy. Accessed at: 2024-02-01.

GONÇALVES, Caio César Soares; PORTUGAL, Marcelo Savino; ARAGÓN, Edilean Kleber da Silva Bejarano. Assessing Brazilian macroeconomic dynamics using a Markov-switching DSGE model. **EconomiA**, Elsevier, Brazil, v. 17, n. 1, p. 23–42, 2016. Available at: www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1517758016300212. Accessed at: 2024-02-01.

KIM, Chang-Jin. Dynamic linear models with Markov-switching. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 60, n. 1-2, p. 1–22, 1994. Available at: www.researchgate.net/profile/Chang-Jin-Kim/publication/223036114_Dynamic_

Linear_Model_with_Markov_Switching/links/5acc76524585151e80ab98be/Dynamic-Linear-Model-with-Markov-Switching.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

KIM, Chang-Jin; PIGER, Jeremy; STARTZ, Richard. Estimation of Markov regime-switching regression models with endogenous switching. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 143, n. 2, p. 263–273, 2008. Available at: www.researchgate.net/publication/4855214_Estimation_of_Markov_Regime-Switching_Regression_Models_with_Endogenous_Switching. Accessed at: 2024-02-01.

LEEPER, Eric M. Equilibria under ‘active’ and ‘passive’ monetary and fiscal policies. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, Netherlands, v. 27, n. 1, p. 129–147, 1991. Available at: www.researchgate.net/publication/4907434_Equilibria_Under_'Active'_and_'Passive'_Monetary_Policies. Accessed at: 2024-02-01.

LIU, Zheng; WAGGONER, Daniel F; ZHA, Tao A. **Asymmetric expectation effects of regime shifts and the great moderation**. FRB Atlanta Working Paper, 2007. (Working Paper). Available at: www.atlantafed.org/research/publications/wp/2007/23. Accessed at: 2024-02-01.

LUBIK, Thomas A; SCHORFHEIDE, Frank. Do central banks respond to exchange rate movements? A structural investigation. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, Netherlands, v. 54, n. 4, p. 1069–1087, 2007. Available at: www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0304393206002108. Accessed at: 2024-02-01.

MAIH, Junior. **Efficient perturbation methods for solving regime-switching DSGE models**. Norges Bank Working Paper 1, 2015. (Working Paper). Available at: www.norges-bank.no/en/news-events/news-publications/Papers/Working-Papers/2015/12015/. Accessed at: 2024-02-01.

MAIH, Junior; WAGGONER, Daniel. Perturbation methods for dsge models with time-varying coefficients and transition matrices. **Mimeograph, Norges Bank**, Norway, v. 13, p. 14, 2018. Available at: www.scirp.org/reference/referencespapers//?referenceid=752452. Accessed at: 2024-02-01.

MENDOZA, Enrique G; YUE, Vivian Z. A general equilibrium model of sovereign default and business cycles. **The Quarterly Journal of Economics**, Oxford University Press, United States of America (USA), v. 127, n. 2, p. 889–946, 2012. Available at: www.sas.upenn.edu/~egme/pp/QJEfinal.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

NUNES, André Francisco Nunes de; PORTUGAL, Marcelo Savino. Políticas fiscal e monetária ativas e passivas: uma análise para o Brasil pós-metas de inflação, 2009. Encontro Nacional de Economia ANPEC (37.: 2009, 08-11 dez.: Foz do Iguaçu, PR). Available at:

<https://www.anpec.org.br/encontro2009/inscricao.on/arquivos/354-e7928f5f43bf5c15ad9f98b18917a45f.pdf>. Accessed at: 2024-02-01.

ORNELLAS, Raphael; PORTUGAL, Marcelo S. Fiscal and monetary interaction in Brazil. In: MEETING OF THE BRAZILIAN ECONOMETRIC SOCIETY. Available at: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ocs/index.php/sbe/EBE11/paper/view/2829/1289>. Accessed at: 2024-02-01.

PARANHOS, Lívia Silva; PORTUGAL, Marcelo Savino. **Optimal Monetary Policy Shifts in Brazil: Lessons From a Markov-switching DSGE Structure**. 2017. Dissertação (Mestrado em Economia), Federal University of Rio Grande do Sul, Brazil. Available at: www.bibliotecadigital.ufrgs.br/handle/10183/178167. Accessed at: 2024-02-01.

QIU, Shi. **Essays on Regime Switching Models with Endogenous Feedback**. 2019. Tese (Doutorado em Economia), Indiana University, United States of America (USA). Available at: <https://www.proquest.com/openview/1870eb53a9e64af5c7163b95a42f1933/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>. Accessed at: 2024-02-01.

ROTHERT, Jacek. Endogenous Regime Switching. **mimeo**, 2009. Available at: https://www.eief.it/files/2010/01/0203-jacek-rothert_jm-paper.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

SIMS, Christopher A. Solving linear rational expectations models. **Computational economics**, Springer Nature BV, United States of America (USA), v. 20, n. 1-2, p. 1, 2002. Available at: https://www.researchgate.net/publication/225254353_Solving_Linear_Rational_Expectation_Model. Accessed at: 2024-02-01.

TANNER, Evan; RAMOS, Alberto M. Fiscal sustainability and monetary versus fiscal dominance: Evidence from Brazil, 1991–2000. **Applied Economics**, Taylor & Francis, United Kingdom, v. 35, n. 7, p. 859–873, 2003. Available at: www.imf.org/en/Publications/WP/Issues/2016/12/30/Fiscal-Sustainability-and-Monetary-Versus-Fiscal-Dominance-Evidence-From-Brazil-1991-2000-15565. Accessed at: 2024-02-01.

TEIXEIRA, Otavio de Almeida Janny. **On the brink of fiscal dominance**. 2019. Dissertação (Mestrado em Economia), FGV, São Paulo, 2019. Available at: <https://hdl.handle.net/10438/28578>. Accessed at: 2024-02-01.

2.7 APÊNDICE

2.7.1 APÊNDICE A - DERIVAÇÃO DO MODELO BÁSICO

CONSUMIDOR REPRESENTATIVO. O consumidor representativo maximiza utilidade esperada sujeito a uma sequência intertemporal de restrições orçamentárias. A função de utilidade correspondente, U_t , é definida por,

$$U_t = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{(C_t/Z_t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \chi \frac{(G_t/Z_t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{(N_t)^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right] \quad (2.24)$$

em que E_0 é o operador de expectativas, condicional a informação disponível no período inicial, $\beta \in (0, 1)$ é o fator subjetivo de desconto intertemporal, σ é o parâmetro inverso da elasticidade de substituição intertemporal, φ é coeficiente inverso da elasticidade (Frisch) da oferta de trabalho, χ denota o peso relativo no consumo de bens públicos e Z_t é um processo tecnológico. As preferências dependem de variáveis agregadas: consumo privado, C_t , gastos do governo, G_t , e horas trabalhadas, N_t . A função utilidade é estritamente côncava e estritamente crescente em relação aos dois primeiros argumentos, C_t/Z_t e G_t/Z_t , e estritamente decrescente em N_t . Os consumidores representativos maximizam a utilidade esperada acima sujeito à restrição orçamentária apresentada abaixo,

$$P_t C_t + B_t + E_t \left[Q_{t+1|t} D_{t+1} + EX_t Q_{t+1|t}^* D_{t+1}^* \right] \leq (1 - \tau_t^D) W_t N_t + D_t + EX_t D_t^* + R_{t-1} B_{t-1} \quad (2.25)$$

em que P_t é o nível de preços nominal, D_{t+1} é um título que paga uma unidade monetária em moeda doméstica no período $t + 1$, $Q_{t+1|t}$ é o preço do título em moeda doméstica no período $t + 1$, EX_t é a taxa de câmbio nominal, τ_t^D é o imposto distorcivo, R_t é a taxa de juros nominal doméstica, B_t é o título público de posse das famílias e W_t denota o salário nominal. As variáveis denotadas por “*” representam as variáveis do setor externo.

Redefinimos o consumo e os salários nominais como $c_t = C_t/Z_t$ e $w_t = W_t/(P_t Z_t)$ e então tomamos as condições de primeira ordem da função de utilidade sujeito à restrição orçamentária, o que resulta nas seguintes relações

$$N_t^\varphi = c_t^{-\sigma} w_t (1 - \tau_t^D) \quad (2.26)$$

$$c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[R_t c_{t+1}^{-\sigma} (z_{t+1} \pi_{t+1})^{-1} \right] \quad (2.27)$$

$$0 = E_t \left[(R_t - R_t^* e_{t+1}) \frac{c_{t+1}^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}} (z_{t+1} \pi_{t+1})^{-1} \right] \quad (2.28)$$

em que $z_t = Z_t/Z_{t-1}$ é a taxa de crescimento da tecnologia, $\pi_t = P_t/P_{t-1}$ é a taxa de inflação e $e_t = EX_t/EX_{t-1}$ é a taxa de câmbio.

TERMOS DE TROCA E TAXA DE CÂMBIO REAL. Denotamos o preço dos bens produzidos domesticamente e internacionalmente como $P_{H,t}$ e $P_{F,t}$, respectivamente. Dessa forma, os termos de troca são definidos como o preço dos bens comercializados internacionalmente em termos de uma unidade dos bens produzidos domesticamente, $q_t = P_{H,t}/P_{F,t}$. Adicionalmente, assumimos que a Lei do Preço Único (LPU) se mantém para os bens produzidos no exterior, tal que $P_{F,t} = EX_t P_{F,t}^*$, em que $P_{F,t}^*$ é o preço internacional, em termos da moeda estrangeira. O pressuposto de pequena economia aberta também implica que a participação dos bens domésticos no consumo global é próxima de zero. Logo, $P_{F,t}^*$ é igual ao índice de preços internacional, P_t^* , o que resulta em $q_t = P_{H,t}/(EX_t P_t^*)$ ¹². Sendo assim, uma eventual redução nos termos de troca pode também ser atribuída a um decréscimo de competitividade dos bens domésticos no mercado internacional, atribuída ao aumento dos preços domésticos. Isto posto, a taxa de câmbio real pode ser definida como $S_t = EX_t P_t^*/P_t$, em que P_t é o índice de preços ao consumidor, de forma que temos a seguinte relação

$$P_{H,t}/P_t = q_t S_t \quad (2.29)$$

FIRMAS VAREJISTAS IMPORTADORAS. Firms varejistas importam produtos adquiridos a preços determinados no mercado internacional e compram produtos domésticos (nas quantidades $C_{F,t}$ e $C_{H,t}$, respectivamente) e transformam os mesmos em produtos e os vendem no mercado doméstico. O problema de otimização das firmas varejistas é dado pela maximização do o valor presente dos lucros esperados

$$\max_{C_t, C_{H,t}, C_{F,t}} \left[P_t C_t - P_{H,t} C_{H,t} - P_{F,t} C_{F,t} \right] \quad (2.30)$$

$$\text{s.t. } C_t = \left[(1 - \alpha)^{1/\eta} C_{H,t}^{\frac{\eta-1}{\eta}} + \alpha^{1/\eta} C_{F,t}^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}$$

em que $\alpha \in [0, 1]$ representa o grau de abertura da economia e $\eta > 0$ é a elasticidade de substituição entre bens domésticos e internacionais. As condições de primeira ordem do problema de otimização acima implicam que

$$C_{H,t} = (1 - \alpha) \left(\frac{P_{H,t}}{P_t} \right)^{-\eta} C_t \quad \text{e} \quad C_{F,t} = \alpha \left(\frac{P_{F,t}}{P_t} \right)^{-\eta} C_t \quad (2.31)$$

enquanto o índice agregado de preços da economia é dado por

$$P_t = \left[(1 - \alpha) P_{H,t}^{1-\eta} + \alpha P_{F,t}^{1-\eta} \right]^{\frac{1}{\eta}} \quad (2.32)$$

¹² This implies that either an exchange rate depreciation or foreign inflation can reduce the TOT, making imports more expensive

tal que se dividirmos a equação acima por P_t e rearranjarmos os termos, temos a seguinte relação entre os termos de troca e a taxa de câmbio real

$$S_t = \left[(1 - \alpha)q_t^{1-\eta} + \alpha \right]^{\frac{1}{\eta-1}} \quad (2.33)$$

Por fim, assume-se que há mais um conjunto de firmas que operam em um mercado perfeitamente competitivo e que compram bens intermediários domésticos, transformam em produtos e os vendem para as firmas varejistas nas forma de consumo agregado ($C_{H,t}$ e $C_{F,t}$). Essas firmas maximizam o valor presente do seu lucro esperado como

$$\begin{aligned} \max_{Y_t, Y_t(i)} & \left[P_{H,t}Y_t - \int_0^1 P_{H,t}Y_t(i)di \right] \\ \text{s.t.} \quad Y_t & = \left[\int_0^1 Y_t(i)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} di \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que a quantidade agregada do bem doméstico Y_t corresponde a um bem diferenciado produzido por um contínuo de bens intermediários. As condições de primeira ordem juntamente à condição de lucro zero resulta

$$Y_t(i) = \left(\frac{P_{H,t}}{P_{H,t}} \right)^{-\epsilon} Y_t \quad \text{and} \quad P_{H,t} = \left[\int_0^1 P_{H,t}(i)^{1-\epsilon} di \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad (2.35)$$

BENS INTERMEDIÁRIOS. Há um contínuo de produtores domésticos operando em concorrência monopolística, indexados por $i \in [0, 1]$. As firmas reavaliam seus preços de forma infrequente, como no modelo de Calvo (1983). Para cada firma, isto ocorre com probabilidade $(1 - \theta)$ a cada período e de forma independente dos reajustes das demais firmas. Portanto, em cada período, uma fração $(1 - \theta)$ de firmas reajustam seus preços de maneira ótima, enquanto a fração restante (θ) segue uma regra de indexação. Supõe-se que as firmas que não conseguem reotimizar os preços em cada período aumentam o preço $P_{H,t}(i)$ conforme a sua taxa de inflação de estado estacionário π_H .

Nesse contínuo, i -ésima firma produz um bem diferenciado $Y_t(i)$ usando a seguinte função de produção

$$Y_t(i) = Z_t N_t(i) \quad (2.36)$$

em que o termo Z_t é comum a todas as firmas e sua taxa de crescimento $z_t = Z_t/Z_{t-1}$ segue um processo AR(1):

$$\ln(z_t) - \gamma = \rho_z(\ln(z_{t-1}) - \gamma) + \epsilon_t^z \quad (2.37)$$

em que γ é a taxa de crescimento da produtividade no estado estacionário. Dessa maneira,

a condição de otimização para a firma i é dada por:

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{P}_{H,t}(i)} \quad & E_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Q_{t,t+k} Y_{t+k}(i) \left(\tilde{P}_{H,t}(i) \pi_H^k - MC_{t+k}^n \right) \right] \\ \text{s.t.} \quad & Y_{t+k} \leq \left(\frac{\tilde{P}_{H,t}(i) \pi_H^k}{P_{H,t}} \right)^{-\epsilon} Y_{t+k} \end{aligned} \quad (2.38)$$

em que $MC_{t+k}^n = W_{t+k}/Z_{t+k}$ é o custo marginal em termos nominais e $\tilde{P}_{H,t}(i)$ é o preço nominal otimizado pelas firmas. A condição de primeira ordem combinada com o pressuposto de estado estacionário da inflação igual a zero resulta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} \left(\tilde{P}_{H,t} - \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} MC_{t+k}^n \right) \right] = 0 \quad (2.39)$$

que, após um pouco de álgebra e loglinearizando em torno do estado estacionário de inflação zero, pode-se chegar à seguinte relação da Curva de Phillips para os preços domésticos:

$$\hat{\pi}_{H,t} = \beta E_t[\hat{\pi}_{H,t+1}] + \kappa \widehat{m\bar{c}}_t \quad (2.40)$$

em que $\kappa \equiv (1 - \beta\theta)(1 - \theta)/\theta$. Dessa maneira, usando a relação dos termos de troca e da inflação doméstica com a inflação agregada $\pi_t = \pi_{H,t} + \alpha \Delta q_t$ e o fato que $\widehat{m\bar{c}}_t = (\mu + \lambda)^{-1}(\hat{y}_t - \bar{y}_t)$ pode se encontrar a seguinte Curva de Phillips agregada

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \alpha E_t \Delta q_{t+1} - \alpha \Delta q_t + \frac{\kappa}{(\mu + \lambda)} (\hat{y}_t - \bar{y}_t) \quad (2.41)$$

EQUILÍBRIO GERAL E A FUNÇÃO DE PRODUÇÃO AGREGADA. O equilíbrio no mercado de bens e serviços doméstico requer igualdade entre a produção doméstica e a soma de consumo doméstico e exportações:

$$y_t = c_{H,t} + c_{H,t}^* + g_{H,t} y_t + g_{H,t}^* y_t^* \quad (2.42)$$

em que $y_t = Y_t/Z_t$, $g_{H,t} = G_{H,t}/Y_t$ e $g_{H,t}^* = (G_{H,t}/Y_t)(Y_t/Z_t) = G_{H,t}/Z_t$. No entanto, é razoável supor que a demanda do governo estrangeiro pelos bens produzidos internamente seja insignificante. Consequentemente, supomos $g_{H,t}^* = 0$, tal que,

$$y_t = c_{H,t} + c_{H,t}^* + g_{H,t} y_t \quad (2.43)$$

tal que podemos escrever a função de produção como

$$y_t = (1 - \alpha) \left(\frac{P_{H,t}}{P_t} \right)^{-\eta} c_t + (\alpha \nu) \left(\frac{P_{H,t}/EX_t}{P_t^*} \right)^{-\eta} c_t^* + g_{H,t} y_t \quad (2.44)$$

em que o tamanho relativo da economia doméstica (em comparação com a economia mundial) é dado por v e definimos a participação da economia doméstica na economia mundial como $\alpha^* = v\alpha$, que é uma fração muito pequena. Além disso, assim como em Gali e Monacelli (2008), o consumo do governo é alocado em sua totalidade a bens domésticos, tal que $g_{H,t} = g_t$, de modo que

$$y_t = (1 - \alpha)(S_t q_t)^{-\eta} c_t + (\alpha v)(q_t)^{-\eta} c_t^* + g_t y_t \quad (2.45)$$

A função de produção agregada para a economia doméstica é obtida integrando o continuum de bens individuais, como segue;

$$y_t = N_t \left[\int_0^1 \left(\frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t}} \right)^\epsilon di \right]^{-1} = N_t \delta_t^{-1}, \quad \text{onde} \quad \delta_t = \int_0^1 \left(\frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t}} \right)^{-\epsilon} di \quad (2.46)$$

na qual δ_t é uma medida de dispersão de preços relativos, na qual é igual a uma unidade em um ambiente de preços flexíveis.

RESTO DO MUNDO. Assumimos mercados financeiros internacionais completos e perfeita mobilidade de capital que garantem a condição de paridade descoberta da taxa de juros descoberta (UIP). Portanto, o retorno nominal esperado dos títulos domésticos livres de risco deve ser indiferente aos retornos esperados dos títulos estrangeiros em moeda nacional. Isso implica $E_t Q_{t+1} = E_t(Q_{t+1}^* EX_{t+1})$, na qual é equivalente a

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^\sigma \pi_{t+1} = \left(\frac{c_{t+1}^*}{c_t^*} \right)^\sigma \pi_{t+1}^* e_{t+1} \quad (2.47)$$

Depois de substituir os termos e rearranjando, temos que

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t^*} \right)^\sigma \frac{P_{t+1}}{EX_{t+1} P_{t+1}^*} = \left(\frac{c_t}{c_t^*} \right)^\sigma \frac{P_t}{EX_t P_t^*} \quad (2.48)$$

A equação acima relaciona o crescimento do consumo interno com o do exterior. Para analisar as implicações do nível de consumo no país e no exterior, assumo que no período inicial, ($t = 0$), a taxa de juros real é igual a 1 (i.e. $S_0 = 1$). Adicionalmente, tomando $v = C_0/C_0^*$, temos que:

$$c_t = v c_t^* S_t^{1/\sigma} \quad (2.49)$$

agora, a equação de equilíbrio pode ser reescrita como

$$y_t = v c_t^* q_t^{-\eta} \left[(1 - \alpha) S_t^{1/\sigma - \eta} + \alpha \right] + g_t y_t \quad (2.50)$$

ou equivalentemente

$$y_t = \frac{1}{(1 - g_t)} v c_t^* q_t^{-\eta} [(1 - \alpha) S_t^{1/\sigma - \eta} + \alpha] \quad (2.51)$$

Todos os títulos contingentes do estado estão em oferta líquida zero e, portanto, obtenho a restrição de recursos globais, que essencialmente diz que o que é produzido internamente e no exterior deve ser igual à soma do consumo e dos gastos do governo no total, em todo o mundo.

$$c_t + g_t y_t + \frac{EX_t P_t^*}{Z_t^*} (c_t^* + g_t^* y_t^*) = \frac{P_{H,t}}{P_t} y_t + \frac{EX_t^* P_t^*}{P_t} y_t^* \quad (2.52)$$

rearranjando as equações com a equação acima temos o resultado

$$(c_t + g_t y_t) + S_t (c_t^* + g_t^* y_t^*) = q_t S_t y_t + S_t y_t^* \quad (2.53)$$

No mercado mundial, a participação da economia doméstica é insignificante e, portanto, a relação acima pode ser reduzida a

$$c_t^* = y_t^* (1 - g_t^*) \quad (2.54)$$

GOVERNO. O governo no modelo atua como autoridade monetária e fiscal. Ela emite títulos nominalmente sem risco B_t , recebe receitas fiscais no valor de T_t e consome despesas no valor de G_t . Portanto, a restrição orçamentária do governo período a período é dada por

$$\frac{B_t}{P_{H,t}} = R_{t-1} \frac{B_{t-1}}{P_{H,t}} + G_t - T_t \quad (2.55)$$

Como estou lidando com uma economia em crescimento, as variáveis nominais são deflacionadas pelo nível de preços e pelo nível de produção de acordo com Bhattarai et al. (2012). Assim, com as variáveis sem tendência, obtemos

$$\frac{B_t}{P_{H,t} Y_t} = R_{t-1} \frac{B_{t-1}}{P_{H,t} Y_t} + G_t Y_t - T_t Y_t \quad (2.56)$$

Conforme a equação acima, o governo impõe impostos distorcivos sobre a renda do trabalho de tal forma que;

$$T_t = \tau_t^D (W_t N_t) / P_{H,t} \quad (2.57)$$

Assim, as variáveis fiscais são definidas como

$$b_t = \frac{B_t}{P_{H,t} Y_t}, \quad g_t = \frac{G_t}{Y_t}, \quad \tau_t = \frac{T_t}{Y_t} \quad (2.58)$$

Então obtemos a relação entre a alíquota de imposto distorcido e a razão do imposto total

como $\tau_t = \tau_t^D m c_t \delta_t$, tal que a restrição orçamentária pode ser reescrita como

$$b_t = \frac{R_{t-1} b_{t-1} y_{t-1}}{\pi_{H,t} z_t y_t} + g_t - \tau_t^D m c_t \delta_t \quad (2.59)$$

Finalmente, o gasto exógeno do governo no tempo é dado por,

$$g_t = (1 - \rho_g) \bar{g} - \rho_g g_{t-1} + \sigma_g^2 \varepsilon_t^g, \quad \varepsilon_t^g \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.60)$$

2.7.2 APÊNDICE B - ALGORITMO DE SOLUÇÃO

O modelo descrito acima pode ser representado sob a forma geral da abordagem MS-DSGE

$$E_t \sum_{r_{t+1}}^h p_{r_t, r_{t+1}} d_{r_t}(\mathcal{X}_{t+1}(r_{t+1}), \mathcal{X}_t(r_t), \mathcal{X}_{t-1}, \varepsilon_t) = 0, \quad (2.61)$$

em que E_t é o operador de expectativa condicional em toda informação disponível até o período t , $d_{r_t} : \mathbb{R}^{n_v} \mapsto \mathbb{R}_d^n$ é um vetor $n_d \times 1$ de funções não lineares de seus argumentos v , $r_t = 1, 2, \dots, h$ é o regime em t , \mathcal{X}_t é um vetor $n_x \times 1$ de variáveis endógenas, ε_t é um vetor $n_\varepsilon \times 1$ de choques com $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, I_{n_\varepsilon})$, $n_v = 3u_x + n_\varepsilon$ e $p_{r_t, r_{t+1}}$ é a probabilidade de transitar do regime r_t no período corrente para o regime $r_{t+1} = 1, 2, \dots, h$ no período seguinte, tal que $\sum_{r_{t+1}}^h p_{r_t, r_{t+1}} = 1$. Essa probabilidade pode depender do conjunto informacional \mathcal{I}_t em t . Neste trabalho, se assume que as probabilidades são completamente exógenas e não dependem de \mathcal{I}_t .

Estamos interessados em soluções da forma

$$\mathcal{X}_t(r_t) = \mathcal{T}^{r_t}(\mathcal{W}_t) \quad (2.62)$$

em que \mathcal{W}_t é um vetor $n_w \times 1$ de variáveis de estado, $n_w = n_x + n_\varepsilon + 1$.

De maneira geral, não existe solução analítica para a equação acima mesmo em casos em que d_{r_t} é linear. A técnica de solução por perturbação desenvolvida por Maih e Waggoner (2018) permite que as regras de decisão em (2.62) sejam aproximadas. O vetor de estados resultante é dado por

$$\mathcal{W}_t = \left[\mathcal{X}'_{t+1} \quad \sigma \quad \varepsilon'_t \right]' \quad (2.63)$$

em que σ é um parâmetro de perturbação.

A solução do modelo é dada sob a forma

$$\mathcal{T}^{r_t}(\mathcal{W}) \simeq \mathcal{T}^{r_t}(\bar{\mathcal{W}}_{r_t}) + \mathcal{T}_{\mathcal{W}}^{r_t}(\mathcal{W}_t - \bar{\mathcal{W}}_{r_t}) \quad (2.64)$$

em que $\bar{\mathcal{W}}_{r_t}$ representa os estados estacionários das variáveis de estado no regime r_t .

Essa solução é calculada usando o algoritmo de Newton proposto por Maih e Waggoner (2018), que amplia o trabalho de Farmer, Waggoner e Zha (2011). Em particular, o algoritmo é mais geral e eficiente, pois resolve um sistema menor do que Farmer, Waggoner e Zha (2011), evitando o cálculo de erros de expectativas.

Esse tipo de solução deixa claro que a estrutura adotada pelo modelo permite que o estado da economia esteja em regimes diferentes em momentos diferentes, com cada regime sendo regido por certas regras específicas ao regime. Nesse caso, o conceito de estabilidade tradicional para modelos de expectativas racionais lineares de parâmetros constantes, como as condições de Blanchard-Kahn, não podem ser usados. Em vez disso, seguindo o exemplo de Farmer, Waggoner e Zha (2011), entre outros, o procedimento usa o conceito de estabilidade quadrática média (MSS) para caracterizar soluções estáveis.

2.7.3 APÊNDICE C - FILTRO DE KALMAN COM MUDANÇA DE REGIME ENDÓGENA

Nesta seção apresentamos a forma generalizada para o filtro aplicado. O procedimento de duas etapas inicia com a necessidade de um aumento apropriado do modelo de espaço de estados. Para isso, aumentamos o vetor $d_t = \varepsilon_t$ e o vetor de estados x_t como $\xi_t = [x_t' \ d_t']'$. Conseqüentemente, a forma de espaço de estados do modelo é reescrita como

$$y_t = \underbrace{D(s_t) + F(s_t)z_t}_{\tilde{D}(s_t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} Z(s_t) & 0_{l \times n} \end{pmatrix}}_{\tilde{Z}(s_t)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_t \\ d_t \end{pmatrix}}_{\xi_t} + \Sigma_u^{1/2} u_t$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_t \\ d_t \end{pmatrix}}_{\xi_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} G(s_t) & 0_{m \times n} \\ 0_{m \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}}_{\tilde{G}(s_t)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ d_{t-1} \end{pmatrix}}_{\xi_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} M(s_t) \Sigma_\varepsilon^{1/2} \\ I_n \end{pmatrix}}_{\tilde{M}(s_t)} \varepsilon_t$$

em que a dependência de $\tilde{D}(s_t)$ em z_t é suprimida para facilitar.

O algoritmo principal de filtragem, que é baseado no sistema de espaço de estado aumentado, data um período atrás para extrair os fatores de regime de política em cada recursão. No entanto, com um custo de computação exponencialmente crescente, pode-se melhorar a aproximação rastreando até mesmo o histórico do regime prévio além do período atual e do último período e, no final, recuperar a função de verossimilhança exata.

Para fins de denotação, seja $\mathcal{F} = \sigma(\{z_s, y_s\}_{s \leq t})$. Defina as probabilidades filtradas do regime- j no período t , juntamente às do regime- i em $t - 1$, como $p_{t|t-1}^{(i,j)} = P(s_{t-1} = i, s_t = j | \mathcal{F}_{t-1})$. Também defina a probabilidade marginal filtrada do regime- j no período t como $p_{t|t}^{(j)} = P(s_t = j | \mathcal{F}_t)$. Também defina as quatro previsões condicionadas e suas covariâncias

como

$$\begin{aligned}\xi_{t|t-1}^{(i,j)} &\equiv \mathbb{E}[\xi_t | s_{t-1} = i, s_t = j, \mathcal{F}_{t-1}] \\ P_{t|t-1}^{(i,j)} &\equiv \mathbb{E}[(\xi_t - \xi_{t|t-1})' | s_{t-1} = i, s_t = j, \mathcal{F}_{t-1}]\end{aligned}$$

em que $\xi_{t|t-1} = \mathbb{E}[\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}]$. Assim, o filtro possui as seguintes etapas.

ALGORITMO 1. (Endogenous-Switching Kalman Filter)

1. INICIALIZAÇÃO. Para $i = 0, 1$, inicialize a vetor de médias condicionais e a matriz de covariâncias de ξ_0 , $(\xi_{0|0}^i, P_{0|0}^i)$, Usando a distribuição invariante sob o regime- i , faça $p_{0|0}^0 = \Phi(\tau\sqrt{1-\alpha^2})$ e $p_{0|0}^1 = 1 - p_{0|0}^0$ de acordo com a distribuição invariante de w_t , ou seja, $N(0, 1/(1-\alpha^2))$.
 2. RECURSÃO. Para $t = 1, \dots, T$, o filtro utiliza dois conjuntos de triplas $\{\xi_{t-1|t-1}^i, P_{t-1|t-1}^i, p_{t-1|t-1}^i\}_{i=0}^1$, e processa o filtro de Kalman em uma etapa para calcular as integrais requeridas condicionado em quatro combinações possíveis de regimes no período corrente e um passo à frente, e retorna dois conjuntos de triplas atualizadas $\{\xi_{t|t}^j, P_{t|t}^j, p_{t|t}^j\}_{j=0}^1$
- (a) PREVISÃO

$$\begin{aligned}\xi_{t|t-1}^{(i,j)} &= \tilde{C}_j + \tilde{G}_j \xi_{t-1|t-1}^i \\ P_{t|t-1}^{(i,j)} &= \tilde{G}_j P_{t-1|t-1}^i \tilde{G}_j' + \tilde{M}_j \tilde{M}_j' \\ p_{t|t-1}^{(i,j)} &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(s_t = j | s_{t-1} = i, \lambda_{t-1}) p_{t-1|t-1}^{(i)} p(\lambda_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) d\lambda_{t-1}\end{aligned}$$

Para calcular $p_{t|t-1}^{(0,0)}$:

- desde que $\lambda_{t-1} = \rho' \varepsilon_{t-1}$ é latente, se aproxima $p(\lambda_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1})$ por

$$p_N(\lambda_{t-1} | \rho' \xi_{d,t-1|t-1}^{(0)}, \rho' P_{d,t-1|t-1} \rho)$$

- probabilidade de transição variável no tempo

$$\frac{\int_{-\infty}^{\tau\sqrt{1-\alpha^2}} \Phi_\rho(\tau - \alpha x / \sqrt{1-\alpha^2} - \rho' \varepsilon_{i,t}) p_N(x | 0, 1) dx}{\Phi(\tau\sqrt{1-\alpha^2})}$$

- (b) VEROSSIMILHANÇA. Aplique a etapa de previsão do filtro de Kalman para obter

$$\begin{aligned}y_{t|t-1}^{(i,j)} &= \tilde{D}_j + \tilde{D}_j \xi_{t|t-1}^{(i,j)} \\ F_{t|t-1}^{(i,j)} &= \tilde{D}_j + \tilde{Z}_j \xi_{t|t-1}^{(i,j)}\end{aligned}$$

Assim, a contribuição de verossimilhança em t pode ser calculada como

$$p(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 p_N(y_t|y_{t|t-1}^{(i,j)}, F_{t|t-1}^{(i,j)}) p_{t|t-1}^{(i,j)}$$

(c) UPDATE. Primeiro, use a fórmula de Bayes para obter

$$p_{t|t}^{(i,j)} = \frac{p_N(y_t|y_{t|t-1}^{(i,j)}, F_{t|t-1}^{(i,j)}) p_{t|t-1}^{(i,j)}}{p(y_t|\mathcal{F}_{t-1})} \quad (2.65)$$

e calcule $p_{t|t}^j = \sum_{i=0}^1 p_{t|t}^{(i,j)}$. Então, aplique a etapa de atualização do Filtro de Kalman para obter

$$\begin{aligned} \xi_{t|t}^{(i,j)} &= \xi_{t|t-1}^{(i,j)} + P_{t|t-1}^{(i,j)} \tilde{Z}'_j (F_{t|t-1}^{(i,j)})^{-1} (y_t - y_{t|t-1}^{(i,j)}) \\ P_{t|t}^{(i,j)} &= P_{t|t-1}^{(i,j)} - P_{t|t-1}^{(i,j)} \tilde{Z}'_j (F_{t|t-1}^{(i,j)})^{-1} \tilde{Z}_j P_{t|t-1}^{(i,j)} \end{aligned}$$

Em seguida, faça o processo de colapsar $(\xi_{t|t}^{(i,j)}, P_{t|t}^{(i,j)})$ em $(\xi_{t|t}^{(j)}, P_{t|t}^{(j)})$ e $(\xi_{t|t}^{(j)}, P_{t|t}^{(j)})$ em $(\xi_{t|t}, P_{t|t})$:

$$\xi_{t|t}^{(i,j)} = \frac{\sum_{j=0}^1 p_{t|t}^{(i,j)} \xi_{t|t}^{(i,j)}}{p_{t|t}^j} \quad \text{e} \quad \xi_{t|t} = \sum_{j=0}^1 p_{t|t}^j \xi_{t|t}^{(j)} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} P_{t|t}^{(i,j)} &= \frac{\sum_{j=0}^1 p_{t|t}^{(i,j)} \{P_{t|t}^{(i,j)} + (\xi_{t|t}^j - \xi_{t|t}^{(i,j)})(\xi_{t|t}^j - \xi_{t|t}^{(i,j)})'\}}{p_{t|t}^j} \\ P_{t|t}^{(j)} &= \sum_{i=0}^1 p_{t|t}^{(i,j)} \{P_{t|t}^{(i,j)} + (\xi_{t|t}^j - \xi_{t|t}^{(i,j)})(\xi_{t|t}^j - \xi_{t|t}^{(i,j)})'\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

3. AGREGAÇÃO. A função de verossimilhança pode ser escrita como

$$\log p(Y_{1:T}) = \sum_{t=1}^T \log p(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) \quad (2.68)$$

4. EXTRAÇÃO DO FACTOR DE REGIMES. Após a obtenção das estimativas dos parâmetros, o filtro pode ser modificado para extrair facilmente o fator de regimes latente w_t . Na etapa de previsão,

$$\begin{aligned} p(w_t, s_{t-1}, \mu_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) &= p(w_t|s_{t-1}, \mu_{t-1}, \mathcal{F}_{t-1}) p(\mu_{t-1}|s_{t-1}, \mathcal{F}_{t-1}) p(s_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= p(w_t|s_{t-1}, \mu_{t-1}) p(\mu_{t-1}|s_{t-1}, \mathcal{F}_{t-1}) p(s_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

desde que $p(\mu_{t-1}|s_{t-1}, \mathcal{F}_{t-1})$ e $p(s_t|\mathcal{F}_{t-1})$ são ambos obtidos anteriormente, pode-se calcular $p(w_t, s_{t-1}, \mu_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})$ e encontrar $p(w_t, s_{t-1}, \mu_{t-1})$. Conforme derivado por Chang, Choi e Park (2017):

- para $i = 0$:

$$p(w_t | s_{t-1} = 0, \mu_{t-1}) = \frac{\Phi\left(\sqrt{\frac{1-\rho'\rho+\alpha^2\rho'\rho}{1-\rho'\rho}}\left(\tau - \frac{\alpha(w_t-\mu_{t-1})}{1-\rho'\rho+\alpha^2\rho'\rho}\right)\right)}{\Phi(\tau\sqrt{1-\alpha^2})} \mathcal{N}\left(\mu_{t-1}, \frac{1-\rho'\rho+\alpha^2\rho'\rho}{1-\alpha^2}\right) \quad (2.70)$$

- para $j = 0$:

$$p(w_t | s_{t-1} = 1, \mu_{t-1}) = \frac{1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{1-\rho'\rho+\alpha^2\rho'\rho}{1-\rho'\rho}}\left(\tau - \frac{\alpha(w_t-\mu_{t-1})}{1-\rho'\rho+\alpha^2\rho'\rho}\right)\right)}{1 - \Phi(\tau\sqrt{1-\alpha^2})} \mathcal{N}\left(\mu_{t-1}, \frac{1-\rho'\rho+\alpha^2\rho'\rho}{1-\alpha^2}\right) \quad (2.71)$$

Podemos, assim, obter na etapa de atualização

$$p(w_t, s_{t-1}, \mu_{t-1} | \mathcal{F}_t) = \frac{p(y_t | w_t, s_{t-1}, \mu_{t-1}, \mathcal{F}_{\sqcup-\infty})p(w_t, s_{t-1}, \mu_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1})}{p(y_t | \mathcal{F}_{t-1})} \quad (2.72)$$

Para $j = 1\{w_t \geq \tau\}$, $p(y_t | w_t, s_{t-1}, \mu_{t-1}, \mathcal{F}_{\sqcup-\infty}) = p(y_t | s_t = j, s_{t-1}, \mathcal{F}_{t-1})$, que pode ser obtido na etapa de avaliação da função de verossimilhança juntamente com $p(y_t | \mathcal{F}_{t-1})$. Ao obter $p(w_t, s_{t-1}, \mu_{t-1} | \mathcal{F}_t)$, temos

$$p(w_t | \mathcal{F}_t) = \sum_{s_{t-1}=0}^1 \int_{\mathbb{R}} p(w_t, s_{t-1}, \mu_{t-1} | \mathcal{F}_t) d\mu_{t-1} \quad (2.73)$$

Finalmente, w_t pode ser extraído como

$$E(w_t | \mathcal{F}_t) = \int_{\mathbb{N}} w_t p(w_t | \mathcal{F}_t) dw_t \quad (2.74)$$

em que tanto $p(w_t | \mathcal{F}_t)$ como $E(w_t | \mathcal{F}_t)$ podem ser calculados via integração numérica.

2.7.4 REFERÊNCIAS

CALVO, Guillermo A. Staggered prices in a utility-maximizing framework. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, Netherlands, v. 12, n. 3, p. 383–398, 1983. Available at: www.scirp.org/reference/referencespapers//?referenceid=752452. Accessed at: 2024-02-01.

CHANG, Yoosoon; CHOI, Yongok; PARK, Joon Y. A new approach to model regime switching. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 196, n. 1, p. 127–143, 2017. Available at: www.researchgate.net/publication/309024882_A_new_approach_to_model_regime_switching. Accessed at: 2024-02-01.

FARMER, Roger EA; WAGGONER, Daniel F; ZHA, Tao. Minimal state variable solutions to Markov-switching rational expectations models. **Journal of economic dynamics and control**, Elsevier, Netherlands, v. 35, n. 12, p. 2150–2166, 2011. Available

at: www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165188911001552.

Accessed at: 2024-02-01.

MAIH, Junior; WAGGONER, Daniel. Perturbation methods for dsge models with time-varying coefficients and transition matrices. **Mimeograph, Norges Bank**, Norway, v. 13, p. 14, 2018. Available at:

www.scirp.org/reference/referencespapers//?referenceid=752452. Accessed at: 2024-02-01.

3 SCORE-DRIVEN NELSON-SIEGEL: ESTIMAÇÃO E IMUNIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE CARTEIRAS DE RENDA FIXA

RESUMO

Este artigo contribui para a literatura empírica que considera a introdução de parâmetros variáveis no tempo nos modelos de curva de juros da família Nelson-Siegel e sua aplicação para a imunização de carteiras de renda fixa. Usando dados de contratos do mercado de juros futuros brasileiro (DI-Futuro), estimamos diferentes especificações do modelo Nelson-Siegel Dinâmico (DNS), com atenção especial para o tratamento econométrico dos parâmetros de decaimento e volatilidade estocástica comum. Uma vez que o modelo é não linear, propomos o uso do Filtro Kalman combinado com a metodologia GAS (*Generalized Autoregressive Score*) para estimar os parâmetros dinâmicos de interesse. A grande vantagem dessa metodologia é que a função de verossimilhança do modelo de estado de espaço com parâmetros variáveis no tempo é disponível em forma fechada, o que facilita a estimação por máxima verossimilhança. Outra característica inovadora deste trabalho é a aplicação empírica dos modelos Nelson-Siegel com parâmetros variáveis no tempo para hedge de exposições de longo prazo com dados do mercado brasileiro. Apresentamos como as diferentes especificações estimadas performam em um contexto de imunização de uma carteira de ativos de crédito prefixado de longo prazo, usando instrumentos derivativos de curto prazo. Nossas estimativas apontam que a consideração de dinâmica no fator de decaimento combinada com a volatilidade estocástica melhoram, significativamente, a *performance* de hedge. Esses resultados são de grande interesse para instituições financeiras do mercado brasileiro, que não encontram liquidez para imunizar maturidades longas e precisam adotar outras estratégias de hedge que elevam os custos das transações.

Palavras-Chave: Score-Driven Nelson-Siegel; Curva de Juros; Parâmetros Variantes no Tempo; Imunização de Carteira de Renda Fixa.

3.1 INTRODUÇÃO

A oscilação das taxas de juros traz consigo mudanças nos preços dos ativos e passivos, gerando perdas e ganhos inesperados. Dessa forma, as instituições financeiras devem imunizar¹ suas carteiras para se proteger contra o risco de taxa de juros. No entanto, em instituições financeiras como fundos de pensão, seguradoras, bancos públicos e privados e outras instituições atuantes no mercado de concessão de crédito, os ativos e passivos são muitas vezes de longo prazo, de 20 a 50 anos, enquanto os prazos dos instrumentos de hedge disponíveis no mercado são relativamente muito mais curtos. Além disso, o volume a ser rotineiramente protegido por essas instituições torna não trivial a contratação de instrumentos com essas características no mercado, levando os agentes a buscarem mecanismos alternativos de troca de indexadores para adequarem suas exposições, conseqüentemente elevando os custos das transações.

Como a prática de hedge busca a minimização dos erros de predição dos retornos de um grande conjunto de maturidades, a imposição de uma estrutura de fatores de risco sobre a curva de juros a la Litterman e Scheinkman (1991), para reduzir a dimensionalidade do problema, pode se mostrar uma solução atrativa para esse tipo de problema. Assim, uma linha de atuação candidata envolve a utilização de modelos paramétricos de estrutura a termo das taxas de juros, como os da família Nelson e Siegel (1987)². Nesse tipo de formulação, em cada momento, a estrutura temporal das taxas de juros adere a uma forma funcional particular, que se expressa como uma função do tempo e a um número limitado de parâmetros.

Nessa linha de pesquisa, a especificação Nelson-Siegel recebeu atenção considerável com o trabalho de Diebold e Li (2006), em que os autores propuseram uma releitura com uma versão dinâmica do modelo seminal (nomeando modelo Nelson-Siegel Dinâmico (DNS)), na qual a curva de juros é descrita por um modelo de apenas três fatores variáveis no tempo. Os três fatores são o nível, a inclinação e a curvatura, em que o decaimento é governado por um parâmetro estático λ . Uma extensão desse modelo é a especificação de Svensson (1994), usada internacionalmente por bancos centrais para a mensuração de curvas de referência e marcação a mercado. Por exemplo, no Brasil, diariamente são divulgados pela Anbima os parâmetros do modelo de Nelson-Siegel-Svensson para a curva de juros indexada à inflação (IPCA), para a curva de juros de títulos públicos prefixados e para a curva de juros de títulos de crédito privado.

Desde Diebold e Li (2006), a literatura empírica de curva de juros caminhou para

¹ O termo “imunização” descreve as etapas tomadas por um gestor para construir e gerir uma carteira de tal forma que esta carteira atinja um objetivo predeterminado. Uma dessas etapas requer a modelagem sobre como os preços dos contratos com diferentes maturidades reagem a choques de diferentes fatores de risco.

² Nelson e Siegel (1987) propuseram um modelo estatístico seminal na qual apresenta boa performance empírica aos dados.

diferentes generalizações do modelo de fatores dinâmicos e investigou principalmente a inclusão de não linearidades e como elas impactam as estimativas desses modelos. Inicialmente, Koopman, Mallee e Wel (2010) propuseram a inclusão de dinâmica em λ e na volatilidade, usando técnicas não lineares como o Filtro de Kalman Estendido. Uma segunda iniciativa surgiu com Hautsch e Yang (2012) e Caldeira, Laurini e Portugal (2010), em que os autores propuseram o uso técnicas bayesianas para lidar com as não linearidades, sendo a principal inovação desses trabalhos a consideração de volatilidade estocástica para a matriz de covariância dos fatores dinâmicos. A terceira generalização dessa literatura foi a inclusão de covariáveis macroeconômicas no modelo (Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006)). Em especial, Laurini e Caldeira (2016), consideraram tanto a inclusão de dinâmica no fator de decaimento como a modelagem da volatilidade estocástica da equação de transição dos fatores dinâmicos e dos fatores macroeconômicos.

Em resumo, uma grande quantidade de artigos dessa literatura considerou λ ou a volatilidade como Parâmetros Variáveis no Tempo (TVP), ou ainda incluíram variáveis macroeconômicas no modelo (textcitecaldeira2023forecasting). Contudo, os trabalhos geralmente se concentram na análise de maturidades de 1 a 10 anos, de forma que poucos artigos se concentraram em investigar como generalizações nos modelos Nelson-Siegel melhoram a predição da parte "ultra-longa da curva de juros. Entre eles, Christensen, Diebold e Rudebusch (2009) propuseram um modelo de 5 fatores dinâmicos e com condições de não arbitragem para modelagem de maturidades até 30 anos. Dubecq e Gourieroux (2011) investigaram alguns fatos estilizados da curva de juros americana até 28 anos e sugeriram algumas generalizações sobre os fatores dinâmicos, com o argumento de que um modelo Nelson-Siegel com três fatores não é suficiente para modelar maturidades superiores a 10 anos. Christensen, Lopez e Mussche (2022) testaram três generalizações (entre elas, parâmetros constantes, volatilidade estocástica e 5 fatores dinâmicos) para extrapolar a curva de juros de algumas economias avançadas, e encontraram que as três especificações apresentaram bom desempenho, com baixos erros médios de extrapolação. Mais recentemente, Quaedvlieg e Schotman (2022) mostraram que a introdução de dinâmica em λ e nas variâncias melhoram a capacidade preditiva em relação às especificações com parâmetros constantes ou com cinco fatores dinâmicos.

O presente artigo conjuga dois elementos desta literatura empírica: a introdução de parâmetros variáveis no tempo nos modelos de curva de juros Nelson-Siegel e a imunização de exposições de longo prazo usando esses modelos. Sob a óptica de hedge, o modelo de Nelson-Siegel é particularmente adequado para esse problema, uma vez que sua formulação oferece parâmetros de risco adicionais além da técnica de hedge via *duration*, isto é, permite controlar choques paralelos e não paralelos, e sua parcimônia permite identificar a variação temporal da estrutura de covariância das taxas de juros. Além disso, no modelo Nelson-Siegel, a estrutura de fatores é totalmente controlada pelo fator λ , uma

vez que define a taxa de decaimento do polinômio exponencial, isto é, valores diferentes do fator de decaimento fornecem séries temporais diferentes para os fatores dinâmicos e, portanto, previsões distintas para os trechos curto e longo da estrutura a termo. Assim, considerar a sua variação é importante sob o contexto de imunização, dado que considerar o mesmo constante pode impactar diretamente a capacidade preditiva do modelo e, assim, a *performance* de hedge.

Apesar da relevância do fator λ , este tem recebido baixa atenção, e muitas vezes nem sequer é estimado, mas definido um valor *ad hoc*. Por exemplo, Diebold e Li (2006) fixam λ em 0,0609 impondo um ponto máximo de curvatura da estrutura a termo em 30 meses. Na literatura brasileira, Almeida, Gomes, Leite, Simonsen e Vicente (2009) definem um λ fixo de 3,58 para curva brasileira (impondo um ponto máximo de 6,8 meses) em um modelo de quatro fatores com dados diários entre novembro de 2004 e dezembro de 2006. Por sua vez, Caldeira, Laurini e Portugal (2010) encontraram valores em torno 0,5 e 2,75 para λ entre janeiro de 2006 e fevereiro de 2009 para um modelo de três fatores com volatilidade estocástica e amostra mensal. Meirelles e Fernandes (2018) minimizaram o erro quadrático médio com regressões móveis e documentaram um λ ótimo variando entre 0,532 e 1,532. Essas estimativas mostram que os trabalhos se diferem, principalmente, na capacidade de predição de maturidades curtas e longas da curva de juros, uma vez que valores pequenos de λ provocam uma redução suave nos coeficientes exponenciais e servem para ajustar bem a curva em prazos longos, enquanto valores elevados de λ resultam em uma redução dos coeficientes exponenciais mais acentuada e servem para ajustar a curva em prazos mais curtos³.

Neste trabalho nos concentramos em estimar os parâmetros de decaimento e volatilidade estocástica e propomos uma versão intuitiva de modelar a variação temporal dos parâmetros dinâmicos do modelo e que diferem este artigo da literatura aplicada ao mercado brasileiro. A inclusão de dinâmica em λ_t e de volatilidade estocástica torna o modelo não linear, de modo que o Filtro de Kalman não pode ser aplicado da maneira usual. Koopman, Mallee e Wel (2010) propuseram a formulação do Filtro de Kalman Estendido para lidar com essa situação. Nesse sentido, usamos a metodologia econométrica GAS (*Generalized Autoregressive Score*)⁴ combinada com Filtro de Kalman, de modo que impomos uma regra de movimento para os parâmetros a partir da função *score* da verossimilhança condicional, seguindo as técnicas introduzidas por Creal, Koopman e Lucas (2013) e Harvey (2013).

Apresentamos as derivações analíticas do modelo de Nelson-Siegel com base na metodologia GAS em formato de espaço de estados, na qual pode-se denominar *Score-Driven Nelson-Siegel*. A grande vantagem dessa metodologia é que a função de verossimilhança

³ Mais recentemente, Lima (2022) argumenta que o fator λ pode ser interpretado como uma medida de incerteza, e mostra que o mesmo exibiu um comportamento anticíclico aderente com a narrativa brasileira durante o período 2004-2020.

⁴ Veja <https://www.gasmodel.com/>.

do modelo de estado de espaço com parâmetros variáveis no tempo é disponível em forma fechada, o que facilita a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança e reduz substancialmente o custo computacional em relação a outras técnicas econométricas.

Conhecemos, apenas, três artigos aplicados ao mercado brasileiro que modelaram a variação temporal em λ usando técnicas de espaço de estados. Considerando a formulação de Svensson, Laurini e Hotta (2010) estimaram valores de decaimento entre 2004 e 2006. Caldeira, Laurini e Portugal (2010) também estimaram valores para o período 2007 a 2009 e também encontraram considerável variabilidade. Franciscangelo (2015) aplicou o Filtro de Kalman Estendido para o período 2012-2015. Segundo essas três referências, o fator de decaimento λ_t atingiu níveis superiores a 2,00 em 2006 e 2008 e esteve situado no intervalo 0,30-0,90 entre 2012 e 2015.

Com relação à literatura internacional, Koopman, Mallee e Wel (2010) consideraram variação temporal em λ por meio do Filtro de Kalman Estendido, enquanto Creal, Koopman e Lucas (2008) consideraram a abordagem GAS. Recentemente, Quaedvlieg e Schotman (2022) também consideraram dinâmica em λ usando uma especificação *dynamic conditional score* (DCS) e investigaram a capacidade de hedge de diferentes formulações Nelson-Siegel para imunização de passivos de prazos alongados, problema semelhante ao tratado neste trabalho. Contudo, os autores mostram que mesmo esses modelos mais sofisticados são incapazes de superar um simples *duration hedging* usando as últimas maturidades líquidas. Outros artigos que documentaram variabilidade relevante em λ foram Cordeiro (2019) e Caldeira, Cordeiro, Ruiz e AP Santos (2023).

Outra distinção metodológica deste trabalho é que permitimos uma estrutura de volatilidade estocástica com dinâmica GAS para controlar a presença de heterocedasticidade condicional observada nas taxas de juros. Koopman, Mallee e Wel (2010) consideraram sob a forma de espaço de estados uma especificação em que o componente principal da variância dos resíduos da equação de Nelson-Siegel seguem um processo GARCH. Essa mesma estratégia foi usada por Quaedvlieg e Schotman (2022) e Caldeira, Cordeiro, Ruiz e AP Santos (2023), enquanto Laurini e Hotta (2010), Caldeira, Laurini e Portugal (2010), Hautsch e Ou (2012), Hautsch e Yang (2012) e optaram pela estimação da volatilidade estocástica com técnicas bayesianas. Usando a abordagem GAS, Koopman, Lucas e Zamojski (2017) mostraram que a inclusão de volatilidade estocástica multivariada combinadas com distribuição t -Student melhoram consideravelmente o ajuste dos modelos. Seguimos a abordagem GAS para modelagem da volatilidade comum dos títulos, enquanto que a estrutura de fatores latentes é assumida homocedástica. Assim como os parâmetros da curva de juros, os fatores de log-volatilidade também apresentam estrutura de *scores* analítica e as funções de verossimilhança são disponíveis em forma fechada.

A aplicação empírica do modelo Nelson-Siegel com parâmetros variáveis no tempo para

fins de hedge de exposições de longo prazo a dados do mercado brasileiro também é uma inovação deste trabalho. Destacamos que em outros artigos da literatura brasileira, como Almeida e Lund (2014) e Meirelles e Fernandes (2018), são aplicadas técnicas de imunização paramétrica para prazos que possuem instrumentos com vencimentos aproximados e, além disso, essas aplicações se abstraem de oscilações no fator de decaimento e nas variâncias. No presente estudo, simulamos uma carteira de crédito prefixada que cresce mensalmente com *duration* aproximada maior que 20 anos. Visando à imunização com derivativos de taxa de juros, sabemos que o mercado brasileiro de DI-Futuro não apresenta liquidez para essas maturidades. Assim, estimamos diferentes variações e extensões do modelo dinâmico de Nelson-Siegel, utilizando taxas referenciais do mercado de juros nominais brasileiro e usamos os resultados de interesse para replicar o excesso de retornos *target* com instrumentos derivativos de maturidade entre 1 até 12 anos ponderados de modo que minimizem a variância da carteira, no espírito de Litterman e Scheinkman (1991).

Nossos principais resultados mostram considerável variabilidade em λ e que o parâmetro apresenta um comportamento anticíclico de incerteza de política monetária. Como a variação temporal em λ e a variância dos termos de erro estão interligadas, pois a matriz de covariância influencia diretamente as atualizações de λ , observamos que a consideração de heterocedasticidade nos termos de erro reduz a amplitude de oscilação de λ e há considerável ganho de qualidade preditiva, o que é bastante relevante quando tratamos de um problema de hedge. O exercício empírico de hedge mostra, passo a passo, como construir um carteira para imunização, em que os erros diários de Marcação a Mercado (MtM) são reduzidos significativamente quando comparamos os modelos com λ constante e com homocedasticidade dos termos de erro (como o modelo DNS tradicional).

O artigo está organizado como segue. Na próxima seção, introduzimos o modelo de Nelson-Siegel com dinâmica GAS. Em seguida, apresentamos o tratamento dos dados e os resultados do modelo, como a estimação dos parâmetros variáveis no tempo λ_t e os fatores dinâmicos. A quinta seção apresenta o exercício de imunização e a sexta seção as considerações finais.

3.2 SCORE-DRIVEN NELSON-SIEGEL

Nesta seção apresentamos o modelo de Nelson-Siegel para estimação da estrutura a termo das taxas de juros e formulamos os parâmetros variáveis no tempo com dinâmica do tipo GAS, dando origem ao nome *Score-Driven Nelson-Siegel*.

3.2.1 Modelo Dinâmico de Nelson-Siegel para a Estrutura a Termo das Taxas de Juros

Nelson e Siegel (1987) originalmente derivaram a seguinte especificação para descrever a dinâmica de curvas *forward*:

$$f(\tau) = \alpha_1 + \alpha_2 \exp(-\lambda\tau) + \alpha_3(\lambda\tau) \exp(-\lambda\tau) \quad (3.1)$$

de modo que, se usarmos a seguinte relação entre as taxas *forward* e as taxas à vista (*spot*), é possível calcular a curva *spot* pelo modelo NS:

$$y(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

Em um dado período no tempo, t , a curva de juros, denotada por $y_t(\tau)$, representa a taxa de juros como uma função de maturidades τ . O modelo exponencial proposto por Nelson e Siegel (1987), e reinterpretado por Diebold e Li (2006) considera uma estrutura paramétrica para a evolução da estrutura a termo das taxas de juros no tempo, na qual os coeficientes podem ser interpretados como fatores de nível, inclinação e curvatura:

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) + \epsilon_t \quad (3.3)$$

Na equação acima, o formato da curva de juros é determinado pelos três fatores ($\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$) e pelas cargas fatoriais associados a eles. O fator λ_t , tratado como constante em Diebold e Li (2006), determina a taxa de decaimento do polinômio exponencial, de modo que valores pequenos (grandes) de λ_t são associados com um decaimento suave (rápido), e fornece melhor aderência para maturidades mais longas (curta). O peso do primeiro componente é igual a 1 (constante) para todas maturidades, logo $\beta_{1,t}$ é interpretado como o fator de nível da curva de juros, na qual influencia igualmente as taxas de curto prazo e longo prazo, característica importante para fins de hedge. A carga do segundo componente, $\left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right)$, começa igual a 1 e converge a zero monotonicamente e rapidamente, de modo que $\beta_{2,t}$ é interpretado como o fator de inclinação da curva de juros, ou fator de curto prazo, dado que esse fator apresenta forte influência sobre as taxas de juros de prazo mais curto. A carga do terceiro componente, $\left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right)$, é uma função côncava, na qual assume valor igual a zero para maturidade zero, aumenta com as maturidades, e então converge monotonicamente a zero em maturidades mais longas. Assim, $\beta_{3,t}$ é interpretado como o fator de curvatura, ou fator de médio prazo, dado que apresenta forte influência sobre as taxas do miolo da curva.

Em cada período t , existem taxas de juros $y_t(\tau)$ para diversas maturidades τ . Assim, a equação acima pode ser estimada para cada período no tempo t , obtendo séries temporais para o vetor de fatores β_t . Como exemplo, Diebold e Li (2006) e Almeida e Lund (2014)

usaram um procedimento em duas etapas para estimar o modelo. Na primeira etapa, as séries temporais são obtidas por regressões OLS/NLS móveis a cada t , e então as três séries de $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ são modeladas em uma segunda etapa como um modelo VAR (1).

Uma abordagem alternativa é representar o modelo na forma de estado-espço e estimar todos os fatores simultaneamente por meio do Filtro de Kalman. O sistema, composto por uma equação de medida e uma equação de transição, é dado por:

$$\begin{aligned} y_t(\tau) &= \Lambda(\lambda_t)\beta_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\epsilon) \\ \beta_t &= (I - \Phi)\mu + \Phi\beta_{t-1} + \eta_t \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que a equação de medida define o vetor $y_t(\tau)$ de taxas de juros com dimensão $(T \times N)$ como a soma dos fatores dinâmicos β_t multiplicados pelas cargas fatoriais $\Lambda(\lambda_t)$ e um vetor ϵ_t de erros gaussianos que são independentes entre as maturidades. O vetor β_t (3×1) representa os fatores dinâmicos, e Φ é a matriz de coeficientes do VAR que determina a dinâmica dos estados no tempo. Com relação a $\Lambda(\lambda_t)$, é uma matriz $(N \times 3)$ não linear dos pesos/loadings, na qual varia no tempo somente se o fator de decaimento λ_t é variável.

Para estimar o modelo sob a forma linear com o Filtro de Kalman, por exemplo, precisamos considerar que a matriz de pesos seja constante no tempo para cada maturidade, implicando em $\lambda_t = \lambda$. Contudo, λ é um parâmetro crucial para a construção de uma carteira de hedge, pois rege a exposição aos diferentes fatores ao longo das maturidades. Logo, considerar λ_t como variável no tempo pode trazer e ganhos de performance de hedge e acurácia preditiva. A dificuldade, no entanto, é que a inclusão de variabilidade em λ torna o modelo não linear e outras abordagens precisam ser aplicadas, como técnicas bayesianas (Hautsch e Yang (2012) e Caldeira, Laurini e Portugal (2010)) ou Filtro de Kalman Estendido (Koopman, Mallee e Wel (2010); Caldeira, Cordeiro, Ruiz e AP Santos (2023)).

Recentemente, alguns trabalhos que consideraram dinâmica do tipo GAS sobre os parâmetros do modelo Nelson-Siegel surgiram como uma alternativa (Creal, Koopman e Lucas (2008); Mesters, Schwaab e Koopman (2014); Koopman, Lucas e Zamojski (2017); Quaedly e Schotman (2022); Vleuten (2023)). Apesar disso, essa metodologia ainda não foi testada com dados do mercado brasileiro⁵.

Diante disso, seguiremos a abordagem GAS para estimação dos fatores variáveis no tempo β_t e do fator de decaimento λ_t . Adicionalmente, consideramos volatilidade estocástica para controlar a heterocedasticidade condicional. Na próxima seção, introduziremos alguns conceitos de estados de espaço sob a ótica GAS, em linha com Creal, Koopman e

⁵ Santos, Ribeiro e Sanfins (2019) aplicaram o modelo GAS para estimação dos fatores de nível da curva de juros. No entanto, os autores adotaram uma estratégia empírica mais simplificada do que a exposta no presente trabalho.

Lucas (2013) e Harvey (2013). As duas seções seguintes derivam a formulação Nelson-Siegel considerando dinâmica do tipo GAS com apenas os três fatores β_t variando no tempo (λ fixo), na qual chamamos de NS3F, e com os quatro fatores variantes no tempo (β_t, λ_t) , na qual chamamos de NS4F. Por fim, apresentamos, em uma terceira seção, a inclusão de volatilidade estocástica comum na matriz de erros Σ_ϵ também seguindo dinâmica GAS. Esse último caso resultará nas generalizações denominadas NS3F-SV e NS4F-SV.

3.2.2 Modelos GAS sob a forma de Espaço de Estados

Nesta subseção introduzimos os aspectos técnicos dos modelos GAS sob a óptica de estados de espaço. Seguimos a notação de Harvey (1990).

Consideremos um modelo de séries temporais possui as seguintes equações de medida e transição sob a representação de espaço de estados:

$$\begin{aligned} y_t &= Z_t \alpha_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, H_t), \\ \alpha_t &= T_t \alpha_{t-1} + \eta_t & \eta_t &\sim \mathcal{N}(0, Q_t), \quad t = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que y_t é um vetor de dimensão $N \times 1$ de variáveis observáveis, como as taxas de juros para diferentes maturidades, ϵ_t é um vetor de dimensão $N \times 1$ de erros de mensuração, α_t é um vetor $m \times 1$ de variáveis de estado e η_t é um vetor $m \times 1$ de erros de transição. Os dois termos de erros ϵ_t e η_t são assumidos com distribuição Gaussiana e não correlacionados para todos períodos de tempo, isto é, $\mathbb{E}(\epsilon_t \eta_s') = 0 \forall t, s$ e apresentam matrizes de covariância H_t e Q_t , respectivamente. O valor inicial do vetor de estados também é assumido com distribuição Gaussiana, $\alpha_0 \sim \mathcal{N}(\alpha_0, P_0)$ e não correlacionado $\forall t$ com ϵ_t e η_t .

Seguindo Harvey (1990), geralmente se assume que as matrizes Z_t , H_t , T_t e Q_t são não estocásticas. Como resultado, o sistema (3.5) é linear com relação ao vetor de estados. Condicionado ao conjunto informacional $Y_{t-1} = \{y_{t-1}, \dots, y_1\}$ e um vetor de parâmetros θ , o vetor de estados e o vetor de observações são gaussianos; i.e., $y_t | Y_{t-1}; \theta \sim \mathcal{N}(Z_t a_t, F_t)$ e $\alpha_t | Y_{t-1}; \theta \sim \mathcal{N}(a_t, P_t)$, e a função log-verossimilhança em t é:

$$l_t = \log p(y_t | Y_{t-1}; \theta) \propto -\frac{1}{2} \left(\log |F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t \right) \quad (3.6)$$

de modo que erro de predição v_t , sua matriz de covariância F_t , a média condicional do vetor de estados a_t , e a matriz P_t de Erros Quadraticos Médios (MSE), são recursivamente

estimados pelo Filtro de Kalman. As etapas de atualização são dadas por:

$$\begin{aligned}
 v_t &= y_t - Z_t a_t \\
 a_{t|t} &= a_t + P_t Z_t' F_t^{-1} v_t \\
 F_t &= Z_t P_t Z_t' + H_t \\
 P_{t|t} &= P_t - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

e as etapas de predição são:

$$\begin{aligned}
 a_{t+1} &= T_{t+1} a_{t|t} \\
 P_{t+1} &= T_{t+1} P_{t|t} T_{t+1}' + Q_{t+1}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

para $t = 1, \dots, n$. Especificamente, temos que $a_t = \mathbb{E}(\alpha_t | Y_{t-1}, \theta)$ é denominado filtro preditivo com matriz MSE $P_t = \mathbb{E}[(a_t - \alpha_t)(a_t - \alpha_t)' | Y_{t-1}, \theta]$ enquanto $a_{t|t} = \mathbb{E}(\alpha_t | Y_t, \theta)$ é denominado filtro em tempo real com matriz MSE $P_{t|t} = \mathbb{E}[(a_{t|t} - \alpha_t)(a_{t|t} - \alpha_t)' | Y_{t-1}, \theta]$. O modelo de estado espaço em (3.5) é definido na forma contemporânea como em Harvey (1990). Optamos pela notação de Harvey (1990) para que as matrizes do sistema apresentem a mesma estrutura temporal do vetor de parâmetros variáveis no tempo.

Nos modelos da família GAS, assume-se que as variações no sistema de matrizes no tempo são endógenas e dependem de observações passadas. Logo, embora estocástico, o sistema de matrizes é pré-determinado, o que significa que, condicional em observações passadas, as matrizes do sistema podem ser consideradas fixas. Como resultado, o modelo ainda é considerado condicionalmente Gaussiano como em Harvey (1990).

Essa configuração apresenta três características atrativas. Primeiro, tanto o vetor de estados como o vetor de observações é condicionalmente gaussiano. Segundo, a função de verossimilhança pode ser escrita sob a forma da decomposição dos erros de predição (Equação 3.6) e calculada por meio do Filtro de Kalman em (3.7). Em terceiro, embora o modelo não seja linear nas observações, o Filtro de Kalman resulta nas estimativas ótimas do vetor de estados conforme Harvey (1990). O principal desafio analítico aqui é representado pela atualização conjunta das matrizes do sistema e do vetor de estado. Para resolver este problema, derivamos um conjunto diferente de recursões que funcionam em paralelo com o Filtro de Kalman.

No modelo GAS, os elementos variáveis no tempo do sistema de matrizes em (3.5) são colecionados em um vetor f_t , denominado vetor TVP. Como em Creal, Koopman e Lucas (2008), Creal, Koopman e Lucas (2013) e Harvey (2013), a seguinte regra de movimento é definida para o vetor TVP:

$$f_{t+1} = c + A f_t + B s_t, \quad s_t = \mathcal{S}_t \nabla_t, \quad t = 1, \dots, n, \tag{3.9}$$

com

$$\nabla_t = \frac{\partial l_t}{\partial f_t}, \quad \mathcal{S}_t = \mathcal{I}_{t|t-1}^{-k} = -\mathbb{E}_t \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial f_t \partial f_t'} \right)^{-1}$$

em que ∇_t é a função *score* (gradiente) da função log-verossimilhança l_t com relação ao vetor TVP f_t , a matriz de escala, \mathcal{S}_t , é definida como a inversa da matriz de informação de Fischer $\mathcal{I}_{t|t-1}^k$, $k = \{0, 1/2, 1\}$. Nesse caso, s_t possui média condicional igual a zero e variância condicional igual à inversa da matriz de informação. Os parâmetros em B determinam a sensibilidade dos fatores TVP em relação ao *score* da verossimilhança condicional, e assim em relação à informação contida no erro de predição. O sistema de matrizes pode conter tanto elementos variáveis no tempo como constantes. Os parâmetros constantes são colecionados no vetor θ_m . Logo, em cada período t , o sistema de matrizes depende de f_t e θ_m , denotando $Z_t = Z(f_t, \theta_m)$, $T_t = T(f_t, \theta_m)$, $H_t = H(f_t, \theta_m)$, e $Q_t = Q(f_t, \theta_m)$. O vetor de *scores* s_t é calculado condicional nas informações até o período t , logo o vetor f_t é inteiramente determinado por observações passadas e pelo vetor de parâmetros estáticos $\theta_f = \{c, A, B\}$. Desde que o sistema de matrizes é puramente *observation-driven*, i.e., inteiramente determinado por observações passadas e pelo vetor $\theta = (\theta_f', \theta_m')'$, o modelo é definido como condicionalmente Gaussiano e a função log-verossimilhança (3.6) pode ser avaliada, recursivamente, por meio do Filtro de Kalman.

O gradiente ∇_t e a matriz de informação de Fisher \mathcal{I}_t podem ser calculados analiticamente. Dadas as expressões (3.5)-(3.9), Monache, Petrella e Venditti (2021) derivam as seguintes expressões gerais para ∇_t e \mathcal{I}_t :

$$\begin{aligned} \nabla_t &= \frac{1}{2} \left[\check{F}_t (F_t \otimes F_t)^{-1} \text{vec}(v_t v_t' - F_t) - 2\check{V}_t' F_t^{-1} v_t \right] \\ \mathcal{I}_t &= \frac{1}{2} \left[\check{F}_t' (F_t \otimes F_t)^{-1} \check{F}_t + 2\check{V}_t' F_t^{-1} \check{V}_t \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que $\check{V}_t = \partial v_t / \partial f_t'$ e $\check{F}_t = \partial \text{vec}(F_t) / \partial f_t'$ mensuram a sensibilidade do erro de predição v_t e sua variância F_t com relação a f_t , respectivamente.

Todos os elementos na matriz de informação de Fischer em \mathcal{I}_t são calculados usando informações até $t - 1$. Por outro lado, o gradiente ∇_t contém informações contemporâneas do vetor de observações y_t via vetor de erros v_t . Os termos \check{V}_t e \check{F}_t são fundamentais para o gradiente ∇_t . Eles mensuram a sensibilidade dos primeiro e segundo momentos do vetor de estados em relação a f_t , respectivamente. Juntamente à variância do erro de predição (F_t) e com a curvatura da verossimilhança condicional (proporcional a \mathcal{I}_t), eles determinam o impacto que novas informações, resumidas em v_t , têm sobre o vetor TVP. v_t e F_t são calculados recursivamente por meio do Filtro de Kalman em (3.7), enquanto as contrapartidas Jacobianas \check{V}_t e \check{F}_t , podem ser obtidas recursivamente através da filtragem a seguir.

As contrapartidas Jacobianas do Filtro de Kalman resultam no seguinte conjunto de expressões:

$$\begin{aligned}\check{V}_t &= -[(a'_t \otimes I_N)\check{Z}_t + (a_{t-1|t-1} \otimes Z_t)\check{T}_t] \\ \check{F}_t &= 2N_N(Z_t P_t \otimes I_N)\check{Z}_t + 2(Z_t \otimes Z_t)N_m(T_t P_{t-1|t-1} \otimes I_m)\check{T}_t + \check{H}_t + (Z_t \otimes Z_t)\check{Q}_t\end{aligned}\quad (3.11)$$

em que $\check{Z}_t = \partial \text{vec}(Z_t) / \partial f'_t$, $\check{H}_t = \partial \text{vec}(H_t) / \partial f'_t$, $\check{T}_t = \partial \text{vec}(T_t) / \partial f'_t$ e $\check{Q}_t = \partial \text{vec}(Q_t) / \partial f'_t$ são os Jacobianos do sistema de matrizes com relação a f_t , e N_m é uma matriz simetrizadora (i.e., para qualquer matriz S de dimensão $n \times n$, temos que $N_n \text{vec}(S) = \text{vec}[\frac{1}{2}(S + S')]$).

Estabelecendo a formulação para ∇_t , \mathcal{I}_t , \check{V}_t e \check{F}_t conjuntamente, podemos calcular o *score* $s_t = \mathcal{S}_t \nabla_t$ e estimar o vetor f_t recursivamente usando o filtro (3.9).

O Filtro de Kalman combinado com a filtragem GAS (Kalman-GAS) pode ser descrito conforme o algoritmo descrito abaixo:

1. Inicializar $a_{0|0}$, a_1 , $P_{0|0}$, P_1 , f_1 , e Z_1 , T_1 , H_1 , Q_1 .
2. Para $t = 1, \dots, n$:
 - (a) Calcular \check{Z}_t , \check{T}_t , \check{H}_t , \check{Q}_t
 - (b) Calcular v_t , F_t , \check{V}_t , \check{F}_t , l_t
 - (c) Calcular $a_{t|t}$, $P_{t|t}$, ∇_t , \mathcal{I}_t , s_t
 - (d) Calcular f_{t+1}
 - (e) Calcular Z_{t+1} , T_{t+1} , H_{t+1} , Q_{t+1}
 - (f) Calcular a_{t+1} , P_{t+1}

Finalmente, o vetor de parâmetros θ pode ser estimado por máxima verossimilhança (ML), isto é, $\hat{\theta} = \arg \max \sum_{t=1}^n l_t(\theta)$. Dado o algoritmo acima, a avaliação da função log-verossimilhança é direta e a maximização pode ser obtida numericamente através de algoritmos de otimização como o algoritmo Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS).

3.2.3 GAS-Kalman Filter - Modelo Nelson-Siegel com Três Fatores (NS3F)

O Modelo Nelson-Siegel com Três Fatores (NS3F) sob a forma de espaço de estados com os fatores seguindo dinâmica GAS pode ser descrito como segue. Inicialmente, consideramos o fator TVP $f_t = \beta_t$, $\beta_t = (\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t})'$ e consideramos densidade gaussiana para $y_t - \Lambda(\lambda_t)f_{t-1} \sim N(0, \Sigma_\epsilon)$, em que f_t segue uma equação de movimento do tipo GAS(1,1):

$$f_t = \omega + A f_{t-1} + B s_t \quad \text{com} \quad s_t = \nabla_t S_t \quad (3.12)$$

em que ω é um vetor de médias condicionais e A e B matrizes de elasticidade. Conforme definido em (3.10), o vetor de *scores* s_t e a matriz de informação de Fischer $\mathcal{I}_{t|t-1}$ podem ser derivados como segue. No modelo NS3F da equação (3.3), a função log-verossimilhança

é dada por:

$$\log p(y_t|\beta_t) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |F_t| - \frac{1}{2} (y_t - \Lambda(\lambda)\beta_t)' F_t^{-1} (y_t - \Lambda(\lambda)\beta_t), \quad (3.13)$$

e possui um vetor de *score* denotado por

$$\begin{aligned} \nabla(y_t|\beta_t) &= \frac{\partial}{\partial \beta_t} \log p(y_t|\beta_t) = Z' F^{-1} v_t \\ &= \Lambda(\lambda)' F^{-1} (y_t - \Lambda(\lambda)\beta_t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

A matriz S_t , que é igual à inversa de informação de Fisher, é definida como

$$\begin{aligned} S_t = \mathcal{I}_{t|t-1}^{-k} &= -\mathbb{E}[\mathcal{H}(y_t|\theta_t)|\theta_{t|t-1}]^{-1} = [Z' F^{-1} Z]^{-1} \\ &= [\Lambda(\lambda)' F^{-1} \Lambda(\lambda)]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que $\mathcal{H}(y_t|\theta_t)$ denota a matriz Hessiana definida por

$$\mathcal{H}(y_t|\theta_t) = \frac{\partial^2}{\partial \beta_t \partial \beta_t'} \log p(y_t|\beta_t) = -\Lambda(\lambda)' F^{-1} \Lambda(\lambda) \quad (3.16)$$

Agora redefiniremos a matriz S_t como uma função preditora da matriz de informação de Fischer. Essa matriz de penalização é definida como

$$S_t = [\rho_\beta I_{t|t-1}]^{-1} = [\rho_\beta [\Lambda(\lambda)' F^{-1} \Lambda(\lambda)]]^{-1} \quad (3.17)$$

em que ρ_b denota um coeficiente de penalidade. Consideramos a inclusão desse coeficiente para fins de invertibilidade e tratamento computacional. Essa matriz apresenta posto cheio na medida em que λ não se aproxima de zero (resultando convergência da segunda carga fatorial de Λ para a primeira carga) ou assume valor elevado (resultando convergência da terceira carga fatorial de Λ para a segunda carga).

No modelo NS3F, as etapas de atualização do Filtro de Kalman-GAS são idênticas ao Filtro de Kalman usual. Com base em (3.5-3.7), essas etapas são dadas por:

$$\begin{aligned} \beta_{t|t} &= \beta_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z' (Z P_{t|t-1} Z' + H_t)^{-1} v_t \\ &= \beta_{t|t-1} + P_{t|t-1} \Lambda(\lambda)' (\Lambda(\lambda) P_{t|t-1} \Lambda(\lambda)' + \Sigma_\epsilon)^{-1} (y_t - \Lambda(\lambda)\beta_{t|t-1}) \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z' (Z P_{t|t-1} Z' + H_t)^{-1} Z P_{t|t-1} \\ &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} \Lambda(\lambda)' (\Lambda(\lambda) P_{t|t-1} \Lambda(\lambda)' + \Sigma_\epsilon)^{-1} \Lambda(\lambda) P_{t|t-1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

As principais alterações são feitas sobre as etapas de predição, de modo que agora o vetor

de estados e sua matriz de variância são dadas como:

$$\begin{aligned}
\beta_{t+1|t} &= \mathbb{E}[\beta_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}[\omega + \Phi\beta_t + S_t \nabla(y_t | \beta_t) | \mathcal{F}_t] \\
&= \omega + \Phi\beta_{t|t} + S_t \nabla(y_t | \beta_{t|t})
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[\beta_{t+1} | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{V}[\omega + \Phi\beta_t + S_t \nabla(y_t | \beta_t) | \mathcal{F}_t] \\
&= \Phi P_{t|t} \Phi' + S_t \mathbb{V}[\Lambda(\lambda)' F^{-1} (y_t - \Lambda(\lambda)\beta_t) | \mathcal{F}_t] S_t' \\
&= \Phi P_{t|t} \Phi' + S_t \mathbb{V}[\Lambda(\lambda)' F^{-1} \Lambda(\lambda) \beta_t | \mathcal{F}_t] S_t' \\
&= \Phi P_{t|t} \Phi' + S_t \Lambda(\lambda)' F^{-1} \Lambda(\lambda) P_{t|t} \Lambda(\lambda)' F^{-1} \Lambda(\lambda) S_t'
\end{aligned} \tag{3.20}$$

em que $\mathbb{E}[\cdot]$ e $\mathbb{V}[\cdot]$ denotam os operadores de expectativa e variância respectivamente, e \mathcal{F}_t é o conjunto informacional no período t . Sendo assim, o *score* avaliado sob o estado atualizado em t contribui para a predição em $t + 1$.

3.2.4 GAS-Kalman Filter - Modelo NS4F

Nesta etapa ampliamos a aplicação do Filtro de Kalman Estendido de Koopman, Mallee e Wel (2010) na formulação do modelo Nelson-Siegel Dinâmico com Quatro Fatores (NS4F), que permite variabilidade em λ . Contudo, nesta tese, adotamos uma dinâmica GAS sobre os quatro fatores variáveis no tempo. Definimos o vetor TVP como $f_t^+ = (\beta_t', \log \lambda_t)$ de dimensão 4×1 . Agora a regra de movimento GAS(1, 1) é dada como

$$f_t^+ = \omega + A f_{t-1}^+ + B s_t \tag{3.21}$$

Quando incluímos um quarto fator, $\log \lambda_t$, como variável no tempo no modelo de Nelson-Siegel, o modelo se torna não linear no vetor de estados. Assim, a nova equação de observação é não linear em β_t como:

$$y_t = Z(\theta_t) + \epsilon_t = \Lambda(\lambda_t)\beta_t + \epsilon_t \tag{3.22}$$

O Filtro de Kalman se aplica apenas a modelos que são lineares no vetor de estados. Desta forma, como em Koopman, Mallee e Wel (2010) e Caldeira, Cordeiro, Ruiz e AP Santos (2023), linearizamos localmente a função $Z(\theta_t) = \Lambda(\lambda_t)\beta_t$ em $f = \theta = \theta_{t|t-1}$. As equações de atualização resultantes são idênticas como no Filtro de Kalman Estendido. O modelo linearizado se torna:

$$y_t = Z_t(\theta_{t|t-1}) + \check{Z}_t \cdot (\theta_t - \theta_{t|t-1}) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\epsilon^+), \quad \check{Z}_t = \left. \frac{\partial Z_t(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_{t|t-1}} \tag{3.23}$$

em que

$$\check{Z}_t = \frac{\partial Z_t(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_t|_{t-1}} = \left[\frac{\partial Z_t}{\partial \beta_{1,t}} \Big|_{\beta_{1,t}=\beta_{1,t}|_{t-1}} \quad \frac{\partial Z_t}{\partial \beta_{2,t}} \Big|_{\beta_{2,t}=\beta_{2,t}|_{t-1}} \quad \frac{\partial Z_t}{\partial \beta_{3,t}} \Big|_{\beta_{3,t}=\beta_{3,t}|_{t-1}} \quad \frac{\partial Z_t}{\partial \lambda_t} \Big|_{\lambda_t=\lambda_t|_{t-1}} \right] \quad (3.24)$$

em que, para a quarta coluna, fizemos uso da regra da cadeia tal que $\frac{\partial Z(x_t)}{\partial \log(\lambda_t)} = \frac{\partial Z(x_t)}{\partial \lambda_t} \cdot \lambda_t$ e encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z(x_t)}{\partial \lambda_t} &= \frac{\beta_{2,t} \cdot \exp(-\tau \cdot \lambda_t)(\tau \lambda_t - \exp(\tau \lambda_t) + 1)}{\tau \lambda_t^2} \\ &+ \frac{\beta_{3,t} \cdot \exp(-\tau \lambda_t)(\tau^2 \lambda_t^2 + \tau \lambda - \exp(\tau \lambda) + 1)}{\tau \lambda_t^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

resultando na matriz jacobiana \check{Z}_t

$$\check{Z}_t = \left[\iota_{N \times 1} \quad \Lambda_2(\lambda_t) \quad \Lambda_3(\lambda_t) \quad \frac{\partial Z_t}{\partial \lambda_t} \cdot \lambda_t \right] \quad (3.26)$$

com $\iota_{N \times 1}$ sendo um vetor de 1s com dimensão $N \times 1$.

Agora, derivamos as equações para S_t e ∇_t . No modelo NS4F, a função log-verossimilhança de y_t é dada por

$$\log p(y_t|\theta_t) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |F_t| - \frac{1}{2} (y_t - \Lambda(\lambda_t)\beta_t)' F_t^{-1} (y_t - \Lambda(\lambda_t)\beta_t), \quad (3.27)$$

com vetor de *scores* definidos como

$$\nabla(y_t|\theta_t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_t} \log p(y_t|\theta_t) \\ \frac{\partial}{\partial \log(\lambda_t)} \log p(y_t|\theta_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda(\lambda_t)\beta_t)' F_t^{-1} (y_t - \Lambda(\lambda_t)\beta_t) \\ (y_t - \Lambda(\lambda_t)\beta_t)' \check{\Lambda}(\lambda_t)\beta_t \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

em que $\check{\Lambda}(\lambda) = \frac{\partial \Lambda(\lambda)}{\partial \log(\lambda)}$.

A matriz Hessiana $\mathcal{H}(y_t|\theta_t)$ de $\log p(y_t|\theta_t)$ é dada por

$$\mathcal{H}(y_t|\theta_t) = \frac{\partial^2}{\partial \theta_t \partial \theta_t'} \log p(y_t|\theta_t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \beta_t \partial \beta_t'} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial \beta_t \partial \log(\lambda_t)'} \log p(y_t|\theta_t) \\ \frac{\partial^2}{\partial \log(\lambda_t) \partial \beta_t'} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial (\log \lambda_t)^2} \log p(y_t|\theta_t) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \beta_t \partial \beta_t'} \log p(y_t|\theta_t) &= -\Lambda(\lambda_t)' F_t^{-1} \Lambda(\lambda_t), \\ \frac{\partial^2}{\partial \beta_t \partial \log(\lambda_t)'} \log p(y_t|\theta_t) &= (y_t - \Lambda(\lambda_t)\beta_t)' F_t^{-1} \check{\Lambda}(\lambda_t) - (\check{\Lambda}(\lambda_t)\beta_t)' F_t^{-1} \Lambda(\lambda_t) \\ \frac{\partial^2}{\partial (\log \lambda_t)^2} \log p(y_t|\theta_t) &= (y_t - \Lambda(\lambda_t)\beta_t)' F_t^{-1} \check{\Lambda}(\lambda_t)\beta_t - (\check{\Lambda}(\lambda_t)\beta_t)' F_t^{-1} \check{\Lambda}(\lambda_t)\beta_t \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\text{e } \check{\Lambda}(\lambda) = \frac{\partial \Lambda(\lambda)}{\partial \log(\lambda)} \text{ e } \tilde{\Lambda}(\lambda) = \frac{\partial^2 \Lambda(\lambda)}{\partial (\log \lambda)^2}.$$

Novamente, denotamos a matriz S_t como uma função da matriz de informação de Fischer. A matriz de informação de Fischer no modelo NS4F é derivada como:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{t|t-1}^{-1} &= -\mathbb{E}[\mathcal{H}(y_t|\theta_t)|\theta_{t|t-1}]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \Lambda(\lambda_{t|t-1})' F_t^{-1} \Lambda(\lambda_{t|t-1}) & \Lambda(\lambda_{t|t-1}) F_t^{-1} (\check{\Lambda}(\lambda_{t|t-1}) \beta_{t|t-1})' \\ \beta_{t|t-1}' (\check{\Lambda}(\lambda_{t|t-1}))' F_t^{-1} \Lambda(\lambda_{t|t-1}) & \beta_{t|t-1}' (\check{\Lambda}(\lambda_{t|t-1}))' F_t^{-1} \check{\Lambda}(\lambda_{t|t-1}) \beta_{t|t-1} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que $\mathcal{H}(y_t|\theta_t)$ denota a matriz Hessiana e $\check{\Lambda}$ é a derivada de $\Lambda(\lambda_t)$ em relação a $\log \lambda_t$. A matriz resultante S_t é dada por

$$S_t = \begin{bmatrix} \rho_\beta \Lambda(\lambda_{t|t-1})' F_t^{-1} \Lambda(\lambda_{t|t-1}) & 0 \\ 0 & \rho_\lambda \beta_{t|t-1}' (\check{\Lambda}(\lambda_{t|t-1}))' F_t^{-1} \check{\Lambda}(\lambda_{t|t-1}) \beta_{t|t-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.32)$$

em que ρ_λ representa um coeficiente escalar que penaliza apenas o fator $\log \lambda_t$.

Com o Filtro de Kalman Estendido, as etapas de atualização são definidas como:

$$\begin{aligned} \theta_{t|t} &= \theta_{t|t-1} + P_{t|t-1} \check{Z}'_t (\check{Z}'_t P_{t|t-1} \check{Z}'_t + \Sigma_\epsilon^+)^{-1} (y_t - Z(\theta_{t|t-1})) \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} \check{Z}'_t (\check{Z}'_t P_{t|t-1} \check{Z}'_t + \Sigma_\epsilon^+)^{-1} \check{Z}'_t P_{t|t-1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Enquanto que as etapas de predição são alteradas conforme a equação de estados muda. As equações de predição para θ e sua variância estimada são definidas agora como:

$$\begin{aligned} \theta_{t+1|t} &= \mathbb{E}[\theta_{t+1}|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[\omega + \Phi \theta_t + S_t \nabla(y_t|\theta_t)|\mathcal{F}_t] \\ &= \omega + \Phi \theta_{t|t} + S_t \nabla(y_t|\theta_{t|t}) P_{t+1|t} \\ \mathbb{V}[\theta_{t+1}|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{V}[\omega + \Phi \theta_t + S_t \nabla(y_t|\theta_t)|\mathcal{F}_t] \\ &= \Phi P_{t|t} \Phi' + S_t \mathbb{V}[\nabla(y_t|\theta_t)|\mathcal{F}_t] S_t' \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para as expressões $\mathbb{E}[\nabla(y_t|\theta_t)|\mathcal{F}_t]$ e $\mathbb{V}[\nabla(y_t|\theta_t)|\mathcal{F}_t]$, não é trivial encontrar solução analítica pelo fato de que os elementos em $\nabla(y_t|\theta_t)$ são não lineares em θ_t . Assim, linearizamos localmente a função $\nabla(y_t|\theta_t)$ em $\theta_t = \theta_{t|t}$. Isso resulta em:

$$\nabla(y_t|\theta_t) = \nabla(y_t|\theta_{t|t}) + \nabla^2(y_t|\theta_{t|t})(\theta_t - \theta_{t|t}) \quad (3.35)$$

em que $\nabla^2(y_t|\theta_{t|t}) = \left. \frac{\partial \nabla(y_t|\theta_t)}{\partial \theta_t'} \right|_{\theta_t = \theta_{t|t}}$ e, conseqüentemente, em:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\nabla(y_t|\theta_t)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\nabla(y_t|\theta_{t|t}) + \nabla^2(y_t|\theta_{t|t})(\theta_t - \theta_{t|t})|\mathcal{F}_t] = \nabla(y_t|\theta_{t|t}) \\ \mathbb{V}[\nabla(y_t|\theta_t)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{V}[\nabla(y_t|\theta_{t|t}) + \nabla^2(y_t|\theta_{t|t})(\theta_t - \theta_{t|t})|\mathcal{F}_t] = \nabla^2(y_t|\theta_{t|t})(\nabla^2(y_t|\theta_{t|t}))' \end{aligned} \quad (3.36)$$

resultando nas seguintes equações de predição

$$\begin{aligned}\theta_{t+1|t} &= \omega + \Phi\theta_{t|t} + S_t\nabla(y_t|\theta_{t|t}) \\ P_{t+1|t} &= \Phi P_{t|t}\Phi' + S_t\nabla^2(y_t|\theta_{t|t})P_{t|t}\nabla^2(y_t|\theta_{t|t})'S_t'\end{aligned}\tag{3.37}$$

3.2.5 Volatilidade Estocástica

Muitas extensões do modelo de Diebold e Li (2006) para modelagem da volatilidade são consideradas e tratadas na literatura. Cada ampliação ou generalização tipicamente relaxa uma ou duas premissas do modelo seminal. Uma delas diz respeito à variância dos termos de erros da equação de medida. Por exemplo, Koopman, Mallee e Wel (2010) introduzem uma especificação GARCH(1,1) de heterocasticidade condicional para mensuração dinâmica da variância dos termos de erro. Mesters, Schwaab e Koopman (2014) permitem que os termos de erro sigam uma distribuição com caudas pesadas com volatilidade estocástica. Caldeira, Laurini e Portugal (2010), por outro lado, consideram volatilidade estocástica para os termos de erro da equação de transição dos fatores dinâmicos de nível, inclinação e curvatura.

Nosso principal objetivo nesta seção é especificar a dinâmica das volatilidades variantes no tempo, determinadas por um único fator comum. Contudo, diferentemente dos trabalhos mencionados nesta tese, modelamos a log-volatilidade como um processo GAS.

Semelhantemente como Mesters, Schwaab e Koopman (2014) e Koopman, Lucas e Zamojski (2017), definimos a formulação geral conforme as equações com volatilidade comum variável no tempo como:

$$y_t = \Lambda(\lambda)f_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t)\tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left(1 \quad \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \quad \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \\ \Sigma_t &= \text{diag}(h_{t,1}, \dots, h_{t,N}), \quad h_{i,t} = w_i^2 \exp(h_t)\end{aligned}$$

em que w_i^2 é parâmetro específico de cada maturidade para o processo fatorial h_t , que segue dinâmica GAS(1,1). Definimos $\log(h_t) = (\log(h_{1,t}), \dots, \log(h_{N,t}))'$ de modo a garantir que os parâmetros relacionados com a volatilidade h_t são positivos. Agora, considerando a formulação com três fatores dinâmicos e volatilidade estocástica comum, na qual nomeamos essa versão de NSF3-SV, a equação de estados pode ser definida como

$$\begin{bmatrix} f_{t+1} \\ \log(h_{t+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,t+1} \\ \beta_{2,t+1} \\ \beta_{3,t+1} \\ \log(h_{t+1}) \end{bmatrix} = \omega + A \begin{bmatrix} f_t \\ \log(h_t) \end{bmatrix} + B_s t\tag{3.39}$$

O mesmo pode ser aplicado para a formulação NS4F, denominada NSF4-SV:

$$\begin{bmatrix} f_{t+1} \\ \log(\lambda_{t+1}) \\ \log(h_{t+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,t+1} \\ \beta_{2,t+1} \\ \beta_{3,t+1} \\ \log(\lambda_{t+1}) \\ \log(h_{t+1}) \end{bmatrix} = \omega + A \begin{bmatrix} f_t \\ \log(\lambda_t) \\ \log(h_t) \end{bmatrix} + Bs_t \quad (3.40)$$

Para o processo de estimação, consideramos as matrizes A e B de parâmetros estáticos da equação de transição como bloco-diagonais. Consequentemente, não capturamos efeitos transbordamento dos fatores de volatilidade para a equação de nível, ou vice-versa.

O vetor de *scores* e a matriz de informação de Fischer para esse caso são derivados como segue. As equações para ∇_t , nas especificações NS3F-SV e NSF4-SV, são dadas, respectivamente, por

$$\nabla(y_t|\theta_t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_t} \log p(y_t|\theta_t) \\ \frac{\partial}{\partial \log(h_t)} \log p(y_t|\theta_t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla(y_t|\theta_t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_t} \log p(y_t|\theta_t) \\ \frac{\partial}{\partial \log(\lambda_t)} \log p(y_t|\theta_t) \\ \frac{\partial}{\partial \log(h_t)} \log p(y_t|\theta_t) \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

em que

$$\begin{aligned} \nabla_h &= \frac{\partial}{\partial \log(h_t)} \log p(y_t|\theta_t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |F_t|}{\partial \log(h_t)} - \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_t' F_t^{-1} \epsilon_t}{\partial \log(h_t)} \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_t' F_t^{-1} \epsilon_t - N) \\ &= \frac{1}{2} [h_t (F_t \otimes F_t)^{-1} \text{vec}(v_t v_t' - F_t)] \\ &= \left[\frac{h_{1,t} (\epsilon_{1,t}^2 - \sigma_t^2)}{2\sigma_t^2}, \dots, \frac{h_{N,t} (\epsilon_{N,t}^2 - \sigma_t^2)}{2\sigma_t^2} \right]' \end{aligned} \quad (3.42)$$

em que $\frac{\partial F}{\partial \log(h_t)} = h_t$ (usando a regra da cadeia) e usamos $F_t = Z' P Z + H = \sigma_t^2$.

A matriz Hessiana $\mathcal{H}(y_t|\theta_t)$ de $\log p(y_t|\theta_t)$ na parametrização NS3F-SV é dada por

$$\mathcal{H}(y_t|\theta_t) = \frac{\partial^2}{\partial \theta_t \partial \theta_t'} \log p(y_t|\theta_t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \beta_t \partial \beta_t'} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial \beta_t \partial \log(h_t)} \log p(y_t|\theta_t) \\ \frac{\partial^2}{\partial \log(h_t) \partial \beta_t'} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial \log(h_t)^2} \log p(y_t|\theta_t) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

enquanto na parametrização NS4F-SV, a matriz Hessiana é derivada como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(y_t|\theta_t) &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_t\partial\theta_t'} \log p(y_t|\theta_t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\beta_t\partial\beta_t'} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_t\partial\log(\lambda_t)'} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial\beta_t\partial\log(h_t)'} \log p(y_t|\theta_t) \\ \frac{\partial^2}{\partial\log(\lambda_t)\partial\beta_t'} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial(\log\lambda_t)^2} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial\log(\lambda_t)\partial\log(h_t)'} \log p(y_t|\theta_t) \\ \frac{\partial^2}{\partial\log(h_t)\partial\beta_t'} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial\log(h_t)\log\lambda_t'} \log p(y_t|\theta_t) & \frac{\partial^2}{\partial\log(h_t)\log(h_t)'} \log p(y_t|\theta_t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\beta_t\partial\log(h_t)'} \log p(y_t|\theta_t) &= -(\Lambda(\lambda_t)\beta_t)' F_t^{-1} (y_t - \Lambda(\lambda_t)\beta_t) \\ \frac{\partial^2}{\partial\log(\lambda_t)\partial\log(h_t)'} \log p(y_t|\theta_t) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial\log(h_t)\partial\log(h_t)'} \log p(y_t|\theta_t) &= -\frac{1}{2} [\text{vec}(I_N - \epsilon_t\epsilon_t' F_t^{-1})' \otimes \check{F}_t'] (F_t^{-1} \otimes F_t^{-1}) \check{F}_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \check{F}_t' (F_t^{-1} \otimes F_t^{-1} \epsilon_t\epsilon_t' F_t^{-1}) \check{F}_t \\ &= -\frac{1}{2} [(I_N - \epsilon_t' F_t^{-1} \epsilon_t) h_t] h_t (\sigma_t^{-4}) + \frac{1}{2} h_t' [(\sigma_t^{-4}) \epsilon_t' F_t^{-1} \epsilon_t] h_t \end{aligned} \quad (3.45)$$

Novamente, denotamos a matriz S_t como uma função da matriz de informação de Fischer. Agora, a matriz de informação é ampliada com a segunda derivada de $\log(h_t)$, $\mathcal{I}_{hh} = -\mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial\log(h_t)\log(h_t)'} \log p(y_t|\theta_t)]$ e incluímos um parâmetros de penalidade ρ_h . Da equação (3.10), podemos derivar o último elemento da diagonal de \mathcal{I}_t :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t &= \frac{1}{2} [\check{F}_t' (F_t \otimes F_t)^{-1} \check{F}_t + 2\check{V}_t' F_t^{-1} \check{V}_t] \\ &= \frac{1}{2} h_t (\sigma_t^2 \otimes \sigma_t^2)^{-1} h_t \\ &= \text{diag}\left(\frac{2\sigma_t^4}{h_{1,t}^2}, \dots, \frac{2\sigma_t^4}{h_{N,t}^2}\right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dado ∇_h e \mathcal{I}_t , a função $s_t = S_t \nabla_t$ e o filtro GAS para $\log(h_t)$ podem ser simplificados para a seguinte expressão:

$$\log(h_{t+1}) = \omega_h + A(\epsilon_t\epsilon_t' - \sigma_t\sigma_t') h_t^{-1} \quad (3.47)$$

Diferentemente da configuração EWMA proposta por Koop e Korobilis (2013), em que os parâmetros relacionados à variância são simplesmente uma soma ponderada do erro de previsão um passo à frente e de seus valores passados, o filtro GAS atualiza automaticamente $\log(h_t)$ com base na razão da diferença entre a variância estimada do

erro de previsão um passo à frente (ϵ_t) e a variância do modelo σ_t^2 para o valor passado de h_t , de modo que o procedimento de atualização não considera apenas as informações de primeira ordem do vetor de estado $\beta_{t|t-1}$ no erro de previsão ϵ_t , mas também as informações de segunda ordem $P_{t|t-1}$ em σ_t^2 também são exploradas para corrigir o procedimento de atualização de h_t .

3.3 DADOS

Nesta seção, descrevemos as informações usadas na estimação dos modelos. Para a avaliação empírica da curva de juros e mensuração da marcação a mercado dos contratos negociados para hedge, usamos os preços diários de ajuste dos contratos futuros do mercado de derivativos de taxa de juros DI1 negociados na B3 entre 02/01/2015 e 31/12/2023 ($T = 2.227$ observações).

A base de dados utilizada consiste em um painel de séries temporais diárias dos preços de ajuste dos contratos futuros de DI. O contrato futuro de depósito interbancário (DI-futuro) com vencimento τ é um contrato futuro cujo ativo básico é a taxa de juros DI⁶ acurada diariamente, capitalizada entre o período de negociação t e τ . A informação trazida pelas taxas negociadas diariamente no mercado refletem a expectativa do CDI médio do período 0 até o vencimento. O valor do contrato é definido pelo seu valor no vencimento, R\$ 100.000,00, descontado de acordo com a taxa de juros acumulada, negociada diariamente no mercado. O Preço Unitário (PU) do contrato é definido como:

$$PU_{DI} = \frac{100.000}{(1 + y_i)^{\frac{DU}{252}}} \quad (3.48)$$

em que y denota a taxa do contrato futuro DI no dia de negociação. O termo DU representa o número de dias úteis até o vencimento do contrato.

O contrato futuro DI1 é caracterizado pelo pagamento diário de ajustes marginais, isto é, é creditado ou debitado diariamente via B3 o diferencial de posição contra o dia imediatamente anterior. Todo dia o fluxo de caixa é a diferença entre o preço unitário de ajuste do dia atual e o preço unitário de ajuste do dia anterior, indexado pela taxa DI do dia anterior. Em geral, existem cerca de 20 vencimentos com contratos disponíveis todos os dias, mas nem todos possuem liquidez. Aproximadamente 12 vencimentos possuem contratos com maior liquidez “em tela”. Existem contratos com vencimentos mensais em até 9 meses e, após esse prazo, para os meses do início de cada trimestre (janeiro, abril, julho e outubro) em até 5 anos, aproximadamente. As maturidades mais longas possuem contratos autorizados apenas para o vencimento do mês de janeiro de cada ano. A data

⁶ A taxa DI é a taxa média diária dos depósitos interfinanceiros (empréstimos/empréstimos) brasileiros, calculada pela Câmara de Custódia e Liquidações (CETIP) para todos os dias úteis. A taxa DI, divulgada diariamente, é expressa em termos compostos anualmente, com base em 252 dias úteis.

de vencimento de todos os contratos é o primeiro dia útil do mês.

Separamos as informações utilizadas em dois conjuntos de dados. No caso das informações de painel de taxas com maturidades fixas usadas na estimação do modelo de Nelson-Siegel, usaremos as taxas interpoladas via *flat-forward* pela B3 (que são baseadas nos preços de ajuste do mercado DI-Futuro), usadas como taxas de referência para os contratos de SWAP DI x Pré, e então interpolamos via *cubic splines* para 24 maturidades fixas⁷. Esse painel de 24 maturidades irá compor o vetor de observações $y_t(\tau)$. Já no caso da marcação relativa ao mercado da carteira de crédito, usaremos as curvas interpoladas no passo anterior para maturidades de 1 dia útil até 11.000 dias úteis.

A Tabela (3.1) traz algumas estatísticas descritivas da curva de taxas de juros SWAP DI x Pré. Considerando algumas maturidades selecionadas, relatamos média, desvio padrão, mínimo, máximo e as três últimas colunas contêm autocorrelações amostrais em deslocamentos de 21, 252 e 504 dias úteis.

⁷ A amostra foi composta pelas taxas de mercado diárias para os vencimentos de 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, 210, 231, 252, 273, 294, 504, 756, 1080, 1260, 1512, 1764, 2016, 2520, 2772 e 3024 dias úteis.

Tabela 3.1: Estatísticas descritivas dos contratos SWAP DI x Pré para maturidades selecionadas (Em %)

$252 \cdot \tau$	Média	Variância	Mínimo	Máximo	$\hat{\rho}(21)$	$\hat{\rho}(252)$	$\hat{\rho}(504)$
63	9,236	4,251	1,879	14,677	0,992	0,483	-0,164
126	9,280	4,216	1,870	15,075	0,991	0,477	-0,169
189	9,318	4,162	1,871	15,472	0,990	0,470	-0,173
252	9,341	4,087	1,967	15,801	0,989	0,463	-0,177
378	9,386	3,882	2,230	16,279	0,986	0,452	-0,179
504	9,447	3,657	2,545	16,547	0,983	0,445	-0,176
756	9,634	3,254	3,312	16,810	0,977	0,434	-0,160
1.080	9,856	2,982	3,965	16,888	0,972	0,426	-0,146
1.260	10,730	2,801	4,566	16,921	0,968	0,418	-0,138
1.512	10,241	2,659	5,037	16,878	0,965	0,410	-0,134
1.764	10,364	2,556	5,345	16,826	0,962	0,401	-0,132
2.016	10,479	2,480	5,687	16,800	0,959	0,392	-0,131
2.520	10,665	2,369	6,213	16,799	0,956	0,374	-0,125
2.772	10,737	2,326	6,393	16,807	0,955	0,366	-0,124
3.024	10,795	2,296	6,486	16,826	0,953	0,358	-0,122
3.780	10,921	2,224	6,691	16,935	0,951	0,343	-0,112
5.040	11,027	2,156	6,781	17,001	0,948	0,330	-0,105
6.300	11,092	2,118	6,835	17,000	0,946	0,319	-0,110
7.560	11,135	2,094	6,869	17,000	0,944	0,311	-0,113
8.820	11,166	2,077	6,897	17,000	0,943	0,305	-0,116
10.080	11,190	2,065	6,914	17,000	0,942	0,301	-0,118

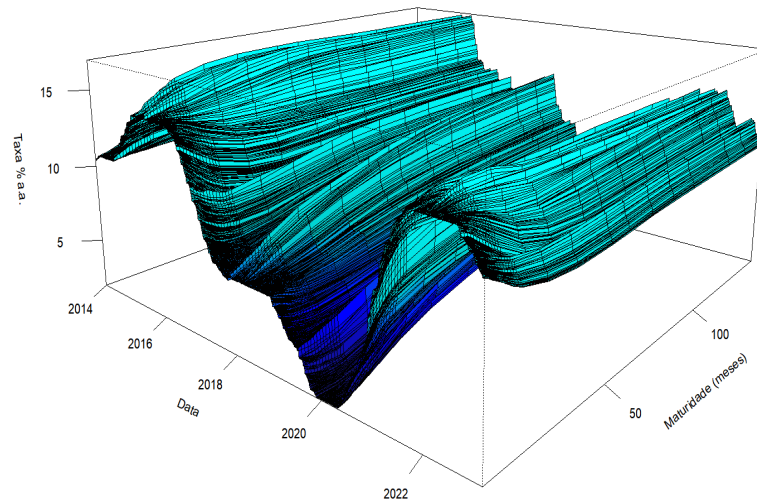
Nota: A tabela apresenta estatísticas descritivas para dados diários dos contratos de SWAP DI x Pré entre janeiro de 2015 até dezembro de 2023. Fonte: Elaboração Própria.

Na Figura (3.1) apresentamos um gráfico tridimensional do conjunto de dados e ilustramos como os níveis de juros a termo variam substancialmente ao longo da amostra. Embora as séries variem fortemente ao longo do tempo para cada um dos prazos, é aparente um forte padrão comum nas 24 séries ao longo do tempo. Fica claro na Figura (3.1) que não somente o nível da estrutura a termo flutua ao longo do tempo, mas também a sua inclinação e curvatura.

3.4 RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos a partir das análises realizadas. O foco está na avaliação comparativa entre diferentes especificações dos modelos considerados, bem como na interpretação dos fatores latentes estimados. Além disso, discutimos aspectos relevantes que emergem das estimativas, fornecendo subsídios para uma melhor compreensão do comportamento da curva de juros nos contextos analisados.

Figura 3.1: Evolução da estrutura a termo das taxas de juros - 2014:03-2023:12



Nota: Este gráfico detalha a evolução da estrutura a termo das taxas de juros (baseada em futuros de DI) para o horizonte temporal de 2014:03-2023:12. A amostra foi composta pelas taxas de mercado diárias para os vencimentos de 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, 210, 231, 252, 273, 294, 504, 756, 1080, 1260, 1512, 1764, 2016, 2520, 2772 e 3024 dias úteis.

Fonte: Elaboração própria.

3.4.1 Estimativas dos Modelos Nelson-Siegel

Apresentamos os principais resultados dos modelos Nelson-Siegel na Tabela (3.2). Para comparar as estimativas dos modelos de Nelson-Siegel com as especificações NS3F, NS4F, NS3F-SV e NS4F-SV, também estimamos uma versão *benchmark* considerando λ fixo e apenas com os fatores β_t variáveis no tempo, como proposto originalmente por Diebold e Li (2006). Para comparação do ajuste do modelo, a Tabela 3.3 traz as estatísticas dos erros de medida RMSE por variável de resposta. Pelas estatísticas RMSE, se constata que o modelo NS4F-SV se ajusta melhor em relação às demais especificações. Assim, parece ficar claro que tratar o fator λ e a matriz de covariância Σ_ϵ como fixos, apesar de facilitar os procedimentos de estimação do modelo, implica em perda na qualidade do ajuste. Essa conclusão também é válida se considerarmos somente a inclusão de λ_t no modelo NS4F comparado à especificação simplificada com parâmetros constantes (NS3F cons).

Tabela 3.2: Parâmetros estimados: Nelson-Siegel

Param	NS3F cons	NS3F	NS4F	NS3F-SV	NS4F-SV
λ	0.587	0.843	-	0.913	-
ω_1	0.390	0.185	0.1895	0.191	0.184
ω_2	0.108	0.081	0.085	0.974	0.958
ω_3	-0.018	-0.025	0.038	-0.025	-0.028
ω_4	-	-	-0.407	-	-0.579
A_{11}	0.973	0.985	0.987	0.9783	0.989
A_{12}	0.097	0.147	0.088	0.117	0.107
A_{13}	0.019	0.031	0.025	0.032	0.028
A_{14}	-	-	-0.670	-	-0.242
A_{21}	0.381	0.487	0.675	0.556	0.654
A_{22}	-0.091	-0.121	-0.105	-0.112	-0.081
A_{23}	0.947	0.931	0.944	0.952	0.931
A_{24}	-	-	-0.055	-	-0.744
A_{31}	0.094	0.087	0.093	0.084	0.080
A_{32}	-0.041	-0.053	-0.045	-0.055	-0.048
A_{33}	-0.057	-0.067	-0.051	-0.052	-0.049
A_{34}	-	-	0.087	-	0.073
A_{41}	-	-	0.015	-	0.018
A_{42}	-	-	-0.055	-	-0.072
A_{43}	-	-	0.074	-	0.058
A_{44}	-	-	0.587	-	0.583
ρ_β	-	0.638	0.555	0.341	0.741
ρ_λ	-	-	30.583	-	32.444

Fonte: Elaboração Própria.

Tabela 3.3: RMSE dos modelos Estimados

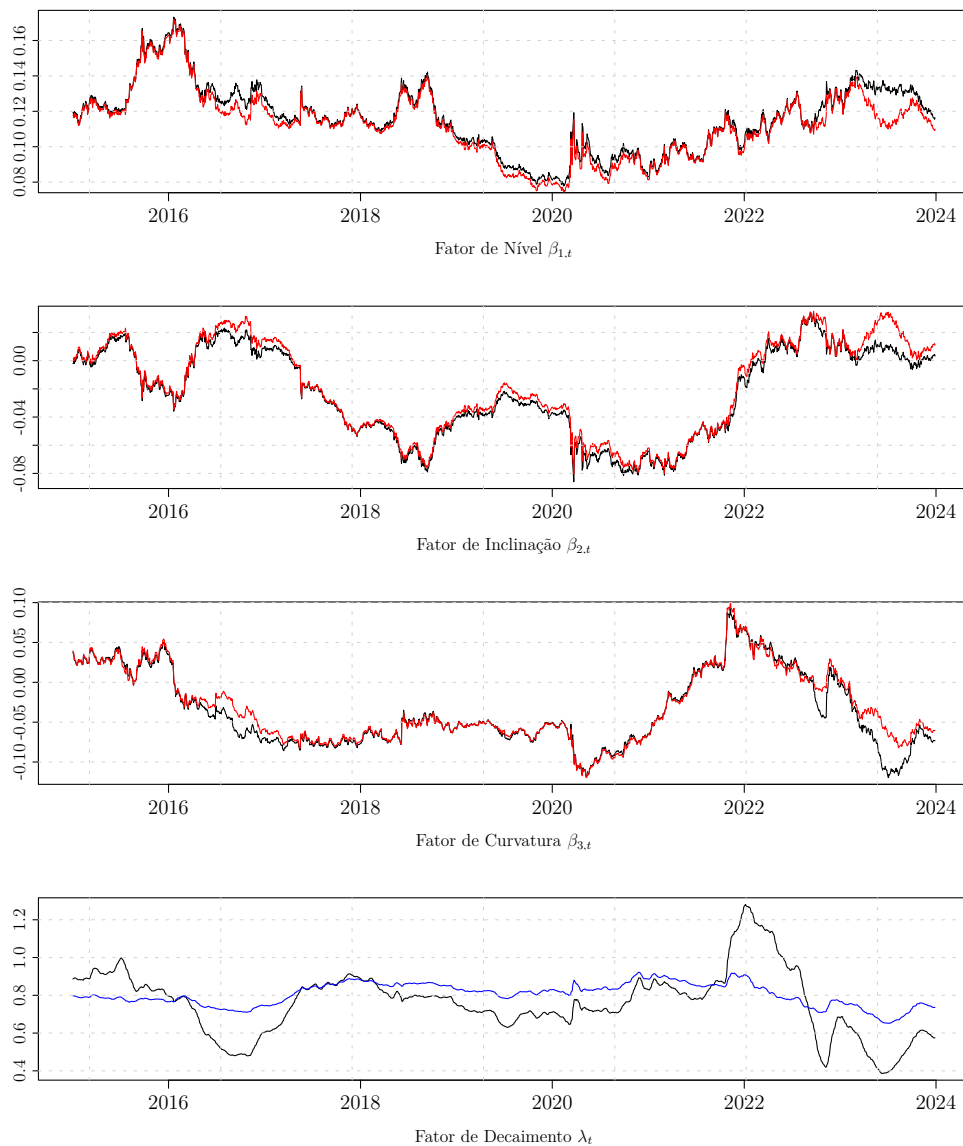
Prazo mês	NS3F cons	NS3F	NS4F	NS3F-SV	NS4F-SV
1	0.298	0.15	0.145	0.077	0.081
2	0.279	0.11	0.094	0.034	0.034
3	0.362	0.131	0.07	0.048	0.046
4	0.378	0.144	0.068	0.066	0.065
5	0.324	0.134	0.097	0.058	0.058
6	0.313	0.143	0.119	0.068	0.071
7	0.244	0.119	0.132	0.049	0.052
8	0.162	0.098	0.139	0.046	0.043
9	0.127	0.104	0.143	0.076	0.072
10	0.143	0.108	0.121	0.085	0.082
11	0.173	0.099	0.098	0.064	0.063
12	0.191	0.097	0.072	0.063	0.063
13	0.230	0.089	0.056	0.035	0.035
14	0.274	0.107	0.085	0.036	0.032
24	0.310	0.138	0.120	0.062	0.058
36	0.334	0.161	0.146	0.083	0.080
48	0.260	0.121	0.108	0.059	0.058
60	0.283	0.129	0.112	0.062	0.061
72	0.284	0.131	0.115	0.059	0.058
84	0.283	0.130	0.114	0.058	0.057
96	0.283	0.131	0.115	0.060	0.058
120	0.278	0.131	0.118	0.060	0.059
132	0.272	0.130	0.121	0.060	0.059
144	0.269	0.130	0.122	0.060	0.059
Mediana	0.279	0.13	0.115	0.06	0.059

Fonte: Elaboração Própria.

A Figura 3.2 apresenta as estimativas dos fatores, $(\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t})$ e λ_t , que é tratado como um quarto fator latente. A evolução de $\beta_{1,t}$ reflete a interpretação de nível desse parâmetro, apresentando a dinâmica da média da curva de juros ao longo do tempo. A evolução dos demais fatores também capturam de maneira adequada a evolução dos componentes de inclinação e da curvatura da estrutura a termo observada nas taxas de juros. Em especial, λ_t assume valores entre 0,4 e 1,5 em diferentes momentos, sugerindo um comportamento anticíclico de política monetária: em momentos de menor incerteza no

cenário de juros, a série apresenta quedas, como no período de 2017 (Teto de Gastos), e em momentos de maior incerteza, como no período a partir de 2021, com a forte surpresa inflacionária e consequente ciclo de alta de juros conduzido pelo COPOM, a série apresenta grandes picos.

Figura 3.2: Filtradas para os Fatores Dinâmicos dos Modelos Score-Driven Nelson-Siegel

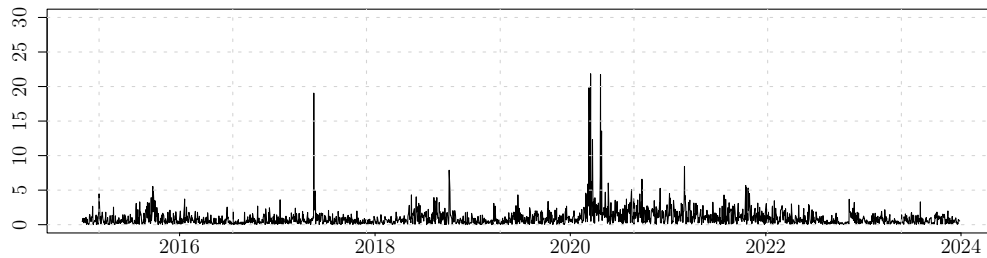


Nota: As séries em preto referem-se à especificação NS4F, enquanto as séries em vermelho e azul se referem à especificação NS4F-SV.

Fonte: Elaboração própria.

O componente de volatilidade estocástica, apresentado na Figura 3.3, mostra a capacidade do modelo em capturar a heterocedasticidade condicional existente nas taxas de juros, identificando os momentos de mudanças e ciclos de stress, por exemplo, ocorridas em 2017 (Joesley-Day), em 2018 (greve dos caminhoneiros), no primeiro trimestre de 2020

Figura 3.3: Comum de Volatilidade Estocástica (desvios padrão multiplicados por 1.000)



Fonte: Elaboração própria.

(pandemia), e a surpresa inflacionária em 2021, períodos caracterizados por mudanças nos rumos da política monetária e fiscal do país. Nota-se também que, ao incluir o fator de volatilidade, a dinâmica exibida pelo fator λ_t muda significativamente.

Na análise realizada utilizando o ajuste da curva de juros, podemos concluir que as extensões do modelo estimadas com dinâmica GAS contribuem significativamente para melhorar a capacidade de ajuste do modelo de Nelson-Siegel na formulação proposta por Diebold e Li (2006). A generalização que trata o fator λ_t como variante no tempo e com volatilidade estocástica comum (NS4F-SV) foi a que apresentou os ganhos mais significantes, encorajando seu uso em aplicações para renda fixa.

3.5 EXERCÍCIO EMPÍRICO: IMUNIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE ATIVOS DE LONGO PRAZO

A imunização de uma carteira com instrumentos de renda fixa tem como objetivo minimizar a volatilidade do resultado de uma carteira, ou seja, reduzir os prejuízos ou lucros financeiros oriundos das oscilações das taxas de juros.

Suponhamos que, no período t , uma instituição financeira brasileira possui um ativo total de crédito prefixado com fluxos de caixa a receber de maturidade no futuro distante $T_0 = t + \tau_0$. Se existem instrumentos de renda fixa de longo prazo disponíveis, a instituição poderia imunizar essa exposição comprando derivativos (vendendo PU) de taxa de juros com maturidade τ_0 . A compra de taxa DI-Futuro gera uma exposição passiva no CDI, uma vez que a instituição está ativa no CDI através da carteira bancária de crédito. No entanto, no mercado brasileiro, tipicamente não existem instrumentos líquidos para prazos como $\tau_0 > 20$ anos, enquanto que para prazos médios com $10 < \tau_0 < 15$ anos, o mercado é insuficientemente líquido. Sendo assim, a instituição financeira precisa imunizar sua carteira usando instrumentos com maturidades curtas $\tau_i < \tau_0$.

A técnica de hedge mais comum com instrumentos de renda fixa no Brasil é a de

Hedge via *Duration*. Essa técnica consiste em construir um carteira com *duration* igual à maturidade da exposição. Por exemplo, para um carteira de n derivativos com maturidades τ_i , a *duration* de um carteira com pesos w_i é dada por $D = \sum_i w_i \tau_i$, uma média ponderada das maturidades dos instrumentos. Considerando o caso de uma exposição mais longa que os instrumentos disponíveis no mercado, o hedge via *duration* envolve inevitavelmente alavancagem, isto é, alguns pesos precisam ser negativos (precisa-se vender taxa de juros). A popularidade da técnica de *duration* deriva da propriedade de mensuração da variação relativa do valor da carteira com relação a choques paralelos na curva das taxas de juros. Assim, as técnicas de *Duration hedging* se aplicam a variações em curtos intervalos. Para intervalos longos, a não linearidade, por meio da convexidade da relação preço-*yield*, introduz outros fatores de risco, como aqueles apresentados na formulação de Nelson-Siegel.

3.5.1 Construção de uma Carteira de Crédito Sintética

A carteira de crédito bancário será iniciada no dia 3 de janeiro de 2018 com 30 operações de crédito ativas escolhidas de forma aleatória (distribuição uniforme), com valores futuros compreendidos entre R\$ 1 mil e R\$ 10 milhões e vencimento entre 1.764 e 10.080 dias úteis. A escolha dos prazos visa estar aderente à realidade bancária de carteiras de crédito, em que a concessão de crédito bancário tem um prazo superior.

Todas as operações serão prefixadas, seguindo a precificação da curva de juros negociada no dia de início da operação. No primeiro dia útil de cada mês observado, a carteira de crédito receberá novas 30 operações simuladas, nos mesmos moldes da carteira inicial.

Quanto às operações de compra e venda de derivativos para hedge, assumimos não haver restrições de liquidez e usamos todos os contratos disponíveis no dia de cada recalibragem mensal. A dinâmica de rebalanceamento da carteira também ocorrerá no primeiro dia útil de cada mês, ou seja, o rebalanceamento será executado conforme a nova exposição gerada no mês. Assim, a carteira de contratos futuros, selecionada conforme os parâmetros estimados até o primeiro dia útil, seguirá o mesmo até o próximo mês. Essa dinâmica põe a prova a performance de hedge, dado que os valores MtM da carteira e da carteira ativa oscilam durante esse período. Estabelecemos que o conjunto de instrumentos líquidos para hedge consistirá nos contratos disponíveis com maturidade superior a 252 dias úteis a cada data de renovação de exposição. Como mencionado anteriormente, a marcação a mercado seguirá a curva de juros SWAP DI x Pré fornecida pela B3, interpolada por *cubic splines* para 1 até 11.000 dias úteis.

Na Tabela (3.4) apresentamos algumas informações relevantes da carteira simulada a ser imunizada: a *duration* (prazo médio ponderado pelo volume), a marcação a mercado total da carteira de ativos de crédito, o incremento em valor futuro para a carteira em cada mês e o seu respectivo Delta EVE no cenário de alta (medida de risco de variação

das taxas de juros).

Tabela 3.4: Carteira de Crédito Simulada

Referência	Duration Carteira	MtM Carteira (R\$)	Valor Futuro Adicional (R\$)	Delta EVE Adicional (R\$)
jan/18	25,4	1.606.078	34.557.693	914.551
fev/18	26,1	3.049.588	22.221.892	1.045.259
mar/18	26,4	4.922.364	33.815.633	1.081.722
abr/18	21,2	6.505.109	19.500.287	1.099.333
mai/18	23,6	7.657.324	21.103.889	1.024.947
jun/18	19,9	7.940.623	31.203.690	669.206
jul/18	23,6	7.828.185	42.268.446	673.982
ago/18	23,7	9.559.316	33.015.008	724.276
set/18	23,1	10.885.290	50.921.994	529.584
out/18	25,1	10.280.534	35.386.349	632.856
nov/18	23,8	14.151.054	28.019.962	996.623
dez/18	20,8	21.154.876	17.591.006	1.059.101
jan/19	23,2	23.814.972	20.549.964	1.217.899
fev/19	24,9	28.029.502	15.499.070	1.375.970
mar/19	25,1	31.793.238	19.871.213	1.264.659
abr/19	24,7	31.552.550	21.584.261	1.325.014
mai/19	23,2	34.262.692	17.310.984	1.286.280
jun/19	22,3	35.679.576	14.911.449	1.520.729
jul/19	21,2	43.618.765	13.612.499	1.992.250
ago/19	22,6	55.410.825	14.228.876	2.026.571
set/19	23,8	57.643.630	12.922.493	1.900.792
out/19	22,2	57.055.574	9.524.465	2.150.220
nov/19	22,3	65.214.207	8.866.039	2.502.191
dez/20	22,7	74.082.082	7.920.247	2.159.402
jan/20	21,8	67.202.151	8.613.927	2.044.489
fev/20	21,9	66.727.335	12.464.579	2.041.442
mar/20	21,0	68.447.788	8.806.426	2.039.703
abr/20	21,0	68.234.007	8.824.703	1.449.894
mai/20	21,7	53.695.835	11.970.016	1.444.197
jun/20	20,8	55.542.953	11.562.022	1.631.959
jul/20	21,8	62.903.699	10.541.131	1.814.881
ago/20	22,3	70.105.703	7.494.657	2.021.032
set/20	20,5	76.862.909	9.246.934	1.694.282
out/20	22,0	67.711.413	20.525.746	1.400.461
nov/21	23,9	59.988.575	16.299.765	1.381.919
dez/21	22,4	59.622.839	16.044.168	1.452.941
jan/21	22,8	63.216.974	10.947.406	1.846.935
fev/21	21,5	75.776.836	12.677.008	1.703.750
mar/21	20,7	69.715.425	9.203.812	1.363.475
abr/21	19,2	58.107.226	17.687.705	1.154.445
mai/21	20,4	51.225.400	15.083.129	1.147.206
jun/21	19,2	51.611.452	17.403.410	1.159.684
jul/21	20,3	52.081.313	23.382.594	1.129.774
ago/21	22,4	50.772.127	27.629.777	980.182
set/21	22,9	45.577.864	43.130.283	783.610
out/21	23,2	38.475.722	44.893.242	705.347
nov/22	21,3	35.162.254	40.298.847	545.384
dez/22	19,9	29.245.986	23.496.531	692.802
jan/22	21,1	35.010.179	21.509.384	751.246
fev/22	19,9	37.188.588	44.210.647	686.361
mar/22	20,9	34.904.989	44.253.614	668.575
abr/22	20,7	34.118.048	30.678.308	729.621
mai/22	21,5	36.094.823	40.771.215	598.941
jun/22	22,5	31.229.550	41.835.465	563.702
jul/22	21,1	29.879.854	53.610.996	518.272
ago/22	20,5	28.325.375	61.008.676	536.059
set/22	21,1	29.408.289	34.569.031	633.090
out/22	20,9	33.368.284	22.160.436	678.218
nov/22	19,7	35.119.921	24.991.686	669.352
dez/22	19,2	34.444.666	55.201.943	529.718

Nota: Aqui usamos o conceito de $Duration_t = \frac{\sum_{t=1}^n \tau_t \cdot \frac{F_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+i)^t}}$. Delta EVE é uma medida de risco

de taxa de juros usada por instituições financeiras no mundo todo, que mensura a pior perda em termos de valor presente diante de um choque de 4% na curva de juros (no caso de ativos com taxas prefixadas é o choque de alta).

Fonte: Elaboração Própria.

3.5.2 Otimização do Hedge de carteira

O exercício empírico consiste em selecionar a quantidade ótima de instrumentos derivativos de juros DI1 (DI-Futuro) com maturidade inferior à *duration* dos ativos de longo prazo, uma combinação que reproduzirá um diferencial de Marcação a Mercado (MtM) mais próximo de zero no longo prazo. No entanto, uma etapa importante desse processo é a seleção da carteira de instrumentos, uma vez que eles serão instrumentos líquidos com maturidade mais curta que a exposição a ser imunizada, uma *duration* que não possui instrumentos líquidos disponíveis no mercado de juros futuros.

Como estamos interessados na redução do risco de um carteira, a literatura recomenda olhar para os retornos da carteira, como sugerido em Litterman e Scheinkman (1991). Assim, para a etapa de otimização da carteira, transformaremos a estrutura do modelo para a ótica do excesso de retornos ao invés das taxas. Nesse caso, os excessos de retornos apresentam a mesma estrutura de fatores que as taxas.

Para obter o excesso de retornos, primeiro precisamos obter o logaritmo de preços como

$$\log(P_t(\tau)) = p_t(\tau) = \log(e^{-\tau y_t(\tau)}) = -\tau y_t(\tau) \quad (3.49)$$

e definir os retornos como

$$r_{t+1,i} = (p_{t+1,\tau_i} - p_{t,\tau_i})/p_{t,\tau_i} \quad (3.50)$$

em que, para horizontes curtos (1 dia, por exemplo), podemos aproximar os retornos acima como

$$r_{t+1,i} \approx \log \frac{p_{t+1,\tau_i}}{p_{t,\tau_i}} = -\tau_i \Delta y_{t+1,\tau_i} \quad (3.51)$$

em que Δ é o operador de primeira diferença, $\Delta y_{t+1,\tau_i} = y_{t+1,\tau_i} - y_{t,\tau_i}$ é a variação do *yield* de maturidade τ_i .

Os excessos de retornos de um instrumento de maturidade τ_i no período $t + 1$ em relação à taxa livre de risco é definida como

$$\begin{aligned} r_{t+1}(\tau) &= \log(\exp(-\tau_i \cdot y_{t+1,\tau_i}) - \log(\exp(-\tau_i \cdot y_{t,\tau_i}) - \log(\exp(-\tau_1 \cdot y_{t,\tau_1}))) \\ &= -\tau_i \cdot (y_{t+1,\tau_i} - y_{t,\tau_i}) - \frac{y_t(1)}{252} \end{aligned} \quad (3.52)$$

de modo que os retornos acima podem ser calculados como a diferença do logaritmo dos preços multiplicados por 100, e a taxa *risk-free* $y_t(1)/252$, é o CDI de 1 dia.

Com base nos dados de mercado, sabe-se que a volatilidade dos retornos aumentam quase linearmente com a maturidade. A definição $p_t(\tau) = -\tau y_t(\tau)$ também sugere que os retornos são proporcionais à maturidade se os *yields* se movem paralelamente. Assim

ponderamos os retornos pela maturidade, i.e., definimos o excesso de retornos ponderados pela maturidade como $\rho_t(\tau) = r_t(\tau)/\tau$.

Para o restante dessa seção, assumimos que os fatores β_t e λ_t são conhecidos. Trabalhar com fatores conhecidos é comum nos processos de imunização que usam o modelo de Nelson-Siegel ou quando os fatores são obtidos através de técnicas de componentes principais (PCA) baseadas no histórico dos retornos. Um exemplo é o trabalho seminal de Litterman e Scheinkman (1991) que aplicam técnicas de hedge usando um modelo de três fatores estimados por PCA.

A construção de carteira de derivativos DI-Futuro para imunização é descrita como segue. Uma vez conhecidos os fatores TVP em f_t , o vetor β_t e $\log \lambda_t$, estimados para dados da curva de juros SWAP DI x Pré, consideramos a seguinte reformulação do modelo de fatores:

$$\begin{bmatrix} \rho_{0t} \\ \rho_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{0t} \\ b_t \end{bmatrix} f_t + \begin{bmatrix} \epsilon_{0t} \\ \epsilon_t \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

em que a matriz b_t de dimensão $(n \times k)$ contém os loadings para as maturidades líquidas elegíveis para hedge, que usam valores estimados de λ_t dos modelos NS3F e NS4F, e b_0 é o vetor $(1 \times k)$ de cargas fatoriais calculadas a cada período t para a maturidade *target* (duration da carteira a ser imunizado), $b_{0,t} = \Lambda_{t,0}(\lambda_t)/\tau_0$. b_t também é uma matriz de *loadings* obtida por meio dos valores estimados de λ_t e depende da maturidade dos derivativos a serem selecionados a cada renovação de exposição.

Estabelecemos que o conjunto de instrumentos líquidos para hedge consistirá nos contratos disponíveis com maturidade superior a 252 dias úteis a cada renovação de exposição. As linhas da matriz b_t são denotadas como $b_{t,i}$, e são definidas como $b_{t,i} = \Lambda_{t,i}(\lambda_t)/\tau$ para compatibilizar com a ponderação dos excessos de retornos. Os vetores ρ_{0t} e ρ_t seguem o mesmo racional descrito para b_{0t} e b_t . No caso de ρ_{0t} , calculamos com base em informações das curvas de referência SWAP DI x Pré, usada por instituições financeiras para marcação a mercado. Os resíduos ϵ_t e ϵ_{0t} colecionam os respectivos termos de erro de predição e possuem matriz de covariância $\sigma^2 I$, no caso das especificações com volatilidade constante.

Assim, como o excesso de retornos dos ativos longos ρ_0 é exposto ao mesmos fatores de risco que os instrumentos negociados no mercado, ρ_t , se montarmos uma carteira que mantém um carteira w com a mesma exposição MtM *target* B_0 ⁸, i.e. $w' B = B_0$,

⁸ Podemos definir o vetor de *Duration Geneneralizada* da exposição *target* como

$$B_0 = \sum_{h=1}^H \frac{p_{t,\tau_h} c_h}{\sum_{h=1}^H p_{t,\tau_h} c_h} \tau_h b_h,$$

em que c_h são fluxos de pagamentos a serem recebidos em τ_h prazos e b_h são os loadings para os respectivos prazos, $h = 1, \dots, H$.

conseguiríamos imunizar todos os fatores de risco.

No entanto, podemos relaxar a restrição de que a carteira de hedge apresenta a mesma *Duration* Generalizada que o ativo *target*. Para definir o conjunto de pesos w , consideramos o conceito de construção de hedge de Litterman e Scheinkman (1991). Na prática, consideramos, para cada especificação Nelson-Siegel apresentada nas seções anteriores, a construção de um carteira de excesso de retornos de instrumentos líquidos que apresentam melhor replicação dos excessos de retornos *target* através de um problema de minimização de erros de hedge.

O problema de otimização é semelhante ao exposto em Quaedvlieg e Schotman (2022) e é descrito como segue. Inicialmente, como usamos os excessos de retornos ponderados pela maturidade, podemos definir os retornos preditivos como

$$\hat{r}_{0t} = w' r_t \quad \text{com pesos} \quad w_i = g_i \tau_0 / \tau_i \quad (3.54)$$

em que, nesse caso, o vetor de pesos g_i de dimensão $n \times 1$ determina os pesos ótimos da carteira de hedge para cada instrumento derivativo. Como Diebold e Li (2006), a carteira w acima apresenta a mesma *Duration* Generalizada B_0 do ativo *target* (i.e. um hedge perfeito pode ser construído se encontrarmos pesos w_i que resultem $\sum_i w_i B_i = B_0$). No entanto, relaxamos essa hipótese e escolhemos w (ou equivalentemente g) como o vetor que minimiza os quadrados dos resíduos dos erros de hedge, isto é,

$$\min_w \mathbb{E}[(r_{0t} - w' r_t)^2] = \tau_0^2 \min_g \mathbb{E}[(\rho_{0t} - g' \rho_t)^2] \quad (3.55)$$

em que o vetor de erros de hedge é dado por

$$\hat{\epsilon}_{0t} = \rho_{0t} - g' \rho_t = \epsilon_{0t} - g' \epsilon_t + (b_0 - g' b) f_t \quad (3.56)$$

e possui três componentes: (i) o termo de erro não imunizado ϵ_{0t} ; (ii) ruído idiossincrático no corte transversal de retornos $g' \epsilon_t$, e (iii) um viés que depende do desempenho da carteira de hedge na imunização à exposição aos fatores de risco.

Dado o vetor TVP estimado f_t , podemos encontrar $\Omega = \mathbb{E}[f_t f_t']$, tal que os quadrados dos resíduos de hedge tem expectativa

$$\mathbb{E}[\hat{\epsilon}_{0t}^2] = \sigma^2(1 + g' g) + (b_0 - g' b) \Omega (b_0 - g' b)' \quad (3.57)$$

em que a minimização da equação acima com relação a g_t retorna o preditor ótimo

$$g = (b \Omega b' + \sigma^2 I)^{-1} b \Omega b_0' \quad (3.58)$$

em que calculamos os pesos ao longo do tempo usando as estimativas dos modelos DNS. Quando λ e σ^2 variam ao longo do tempo, a carteira de hedge também se torna variável no tempo, mesmo que os fatores β_t permaneçam estáveis. Portanto, podemos usar estimativas \hat{b} , $\hat{\Omega} = \hat{\mathbb{E}}[f_t f_t'] = \frac{1}{T} \sum_t \hat{f}_t \hat{f}_t' - \hat{\sigma}^2 (b' b)^{-1}$ e $\hat{\sigma}^2$ estimadas de NS3F, NS4F, NS3F-SV e NS4F-SV para encontrar em cada caso um vetor g de pesos ótimos de hedge.

3.5.3 Resultados de Hedge

Nesta etapa apresentamos os resultados da performance de hedge usando as estimativas dos modelos apresentados na seção anterior. Com as estimativas de β_t , λ_t e da variância σ_t^2 , é possível usar as equações (3.53-3.58) sobre os excessos de retornos para encontrar os carteiras ótimos que replicam as exposições da carteira de crédito sintética ao longo do tempo. Calculamos os carteiras otimizados para cada uma das especificações NS3F, NS4F, NS3F-SV e NS4F-SV a cada período de tempo e avaliamos os erros diários de hedge produzidos por cada modelo. Conforme a Tabela (3.5), os modelos que consideram λ_t e volatilidade variante no tempo apresentam melhor desempenho em termos de RMSE.

Tabela 3.5: Performance de Hedge

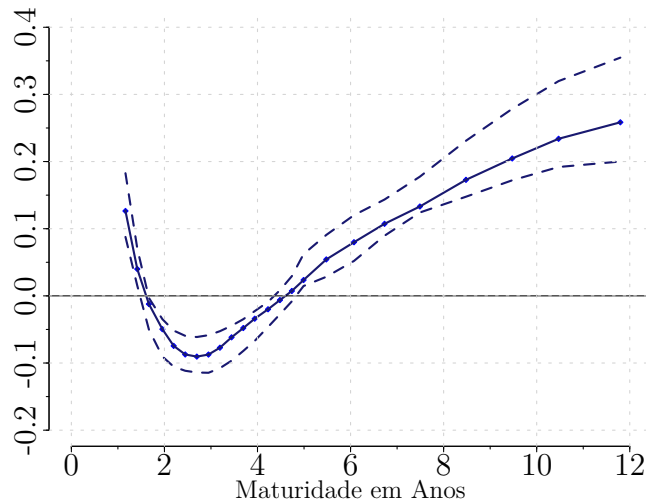
	<i>benchmark</i>	NS3F	NS3F-SV	NS4F	NS4F-SV
Viés	-0.06	-0.05	-0.03	-0.03	-0.01
StDev	1.53	1.49	1.35	1.24	1.18
RMSE	1.53	1.49	1.35	1.24	1.18

Nota: As medidas acima são obtidas a partir da diferença dos valores preditos de excesso de retornos da carteira sintética e os valores observados de $\rho_{0,t}$ diariamente.

Fonte: Elaboração Própria.

Na Figura 3.4, apresentam-se alguns resultados gerais da composição dos carteiras derivados da especificação NS4F-SV. Os carteiras ótimos construídos a cada período t apresentam maior ponderação na parte longa, e em menor grau na parte curta. Para controlar para outros fatores de risco, alguns contratos situados na região intermediária da curva de juros assumem peso igual a zero ou são negativos.

Figura 3.4: Carteira Ótima obtida com a especificação NS4F-SV



Nota: A figura apresenta a mediana dos pesos ótimos calculados para as respectivas medianas das maturidades dos contratos futuros usados. As linhas pontilhadas são os percentis 5% e 95% da distribuição dos pesos.

Fonte: Elaboração própria.

3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo implementamos extensões para o modelo de estrutura a termo da família Nelson-Siegel. Usando dados de contratos do mercado de juros futuros negociados na B3, estimamos o modelo Nelson-Siegel com fatores dinâmicos e volatilidade comum variando no tempo. Seguimos a estrutura proposta por Koopman, Mallee e Wel (2010), e modelamos o fator de decaimento λ como variável no tempo. Também consideramos um componente comum de volatilidade estocástica para os erros de medida.

Uma vez que o modelo é não linear, nós propomos o uso do Filtro Kalman-GAS para estimar os fatores dinâmicos de interesse. Apresentamos as derivações analíticas do modelo de Nelson-Siegel com a metodologia GAS em formato de espaço de estados, na qual pode-se denominar Score-Driven Nelson-Siegel. A grande vantagem dessa metodologia é que função de verossimilhança do modelo de estado de espaço com parâmetros variáveis no tempo é disponível em forma fechada, o que facilita a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança e reduz substancialmente o custo computacional em relação a outras técnicas econométricas.

Os resultados de nossas estimações fornecem evidências para melhora de poder preditivo com a modelagem de λ_t e da volatilidade dos termos de erro como variáveis no tempo seguindo dinâmica GAS. Destacamos que uso dessa metodologia para a curva de juros brasileira e sua aplicação de hedge é uma novidade.

Demonstramos a aplicação do modelo Dinâmico de Nelson-Siegel com volatilidade

estocástica para um exercício empírico de hedge. Mostramos que o tratamento de λ e da volatilidade como fatores variantes no tempo é capaz de melhorar a qualidade preditiva de maturidades que não possuem instrumentos líquidos disponíveis para imunização. Usando os resultados de diferentes especificações Nelson-Siegel estimadas com o Filtro Kalman-GAS, conseguimos encontrar carteiras otimizadas e imunizar satisfatoriamente uma carteira de crédito prefixada sintética com duration de 20 anos aproximadamente.

Os resultados apresentados neste trabalho são de grande interesse para o mercado financeiro pois indicam potencial de ganhos de eficiência em operações de hedge de longo prazo. Atualmente, não existem instrumentos líquidos disponíveis para imunização de carteiras prefixados na taxa CDI, e isso leva as instituições a usarem operações de swap com outros indexadores, o que eleva o custo final de uma operação.

Como aplicações futuras, pode-se usar o presente estudo como base para uma série de aplicações, como a imunização título ‘verdes’ com prazos alongados lançados recentemente por instituições financeiras governamentais, para passivos longos de fundos de pensão e para hedge com títulos indexados à inflação. Metodologicamente, alguns desafios na modelagem podem ser refinados e aplicados para o mercado brasileiro. O primeiro deles é considerar a ampliação dos fatores de volatilidade. Como em Koopman, Lucas e Zamojski (2017), pode-se estimar os fatores de volatilidade estocástica para cada uma das maturidades do vetor de observáveis, mas isso aumentaria significativamente a dimensionalidade do sistema de matrizes. Outra inovação é considerar a volatilidade estocástica na matriz de covariância do vetor de transição, assim como em Caldeira, Laurini e Portugal (2010) e Laurini e Caldeira (2016). O segundo refinamento, em linha com as boas práticas literatura de curva de juros, é testar a aplicação da metodologia para a especificação de Svensson e para aquelas especificações que consideram fatores macroeconômicos. Por fim, as propriedades analíticas do Filtro Kalman-GAS permitem que outras distribuições de probabilidade sejam consideradas, como em Mesters, Schwaab e Koopman (2014) e Koopman, Lucas e Zamojski (2017), algo ainda não considerado na modelagem da curva de juros brasileira.

Também é importante notar que os resultados obtidos para os modelos Nelson-Siegel são válidos para o ajuste dentro da amostra, e uma análise para resultados fora da amostra poderia obter resultados distintos, favorecendo especificações mais parcimoniosas, mas enfatizamos que o foco do presente trabalho foi verificar qual estrutura é mais adequada para o comportamento observado nesta curva de juros e não diretamente realizar previsões fora da amostra. Assim, um exercício de previsão fora da amostra, comparando o Filtro Kalman-GAS com demais metodologias da literatura, é um trabalho futuro a ser considerado.

3.7 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Caio; GOMES, Romeu; LEITE, André; SIMONSEN, Axel; VICENTE, José. Does curvature enhance forecasting? **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, World Scientific, Singapore, v. 12, n. 08, p. 1171–1196, 2009. Available at: <https://doi.org/10.1142/S0219024909005622>. Accessed at: 2024-02-01.

ALMEIDA, Caio; LUND, Bruno. Immunization of fixed-income portfolios using an exponential parametric model. **Brazilian Review of Econometrics**, Brazil, v. 34, n. 2, p. 155–201, 2014. Available at: www.researchgate.net/publication/305304461_Immunization_of_Fixed-Income_Portfolios_Using_an_Exponential_Parametric_Model. Accessed at: 2024-02-01.

CALDEIRA, João; CORDEIRO, Werley; RUIZ, Esther; AP SANTOS, Andre. Forecasting the yield curve: the role of additional and time-varying decay parameters, conditional heteroscedasticity, and macro-economic factors. **Journal of Time Series Analysis**, Wiley Online Library, United Kingdom (UK), 2023. Available at: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/jtsa.12769>. Accessed at: 2024-10-01.

CALDEIRA, Joao F; LAURINI, Márcio P; PORTUGAL, Marcelo S. Bayesian inference applied to dynamic Nelson-Siegel model with stochastic volatility. **Brazilian Review of Econometrics**, v. 30, n. 1, p. 123–161, 2010. Available at: www.researchgate.net/publication/277046970_Bayesian_Inference_Applied_to_Dynamic_Nelson-Siegel_Model_with_Stochastic_Volatility. Accessed at: 2024-02-01.

CHRISTENSEN, Jens HE; DIEBOLD, Francis X; RUDEBUSCH, Glenn D. **An arbitrage-free generalized Nelson–Siegel term structure model**. v. 12. United Kingdom (UK): Oxford University Press Oxford, 2009. P. c33–c64. Available at: <https://doi.org/10.1111/j.1368-423X.2008.00267.x>. Accessed at: 2024-02-01.

CHRISTENSEN, Jens HE; LOPEZ, Jose A; MUSSCHE, Paul L. Extrapolating long-maturity bond yields for financial risk measurement. **Management Science**, INFORMS, United States of America (USA), v. 68, n. 11, p. 8286–8300, 2022. Available at: www.jstor.org/stable/43907515. Accessed at: 2024-02-01.

CORDEIRO, Werley da Costa. **Classe de modelos Nelson-Siegel com parâmetros variando no tempo: ajuste e previsão da estrutura a termo da taxa de juros**, 2019. Dissertação (Mestrado em Economia), Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Sócio Econômico, Programa de Pós-Graduação em Economia, Florianópolis.

CREAL, Drew; KOOPMAN, Siem Jan; LUCAS, André. Generalized autoregressive score models with applications. **Journal of Applied Econometrics**, Wiley Online Library, United States of America (USA), v. 28, n. 5, p. 777–795, 2013. Available at: <https://www.jstor.org/stable/43907515>. Accessed at: 2024-02-01.

CREAL, Drew; KOOPMAN, Siem Jan; LUCAS, André. **A general framework for observation driven time-varying parameter models**. (Working Paper). Tinbergen Institute Discussion paper, Netherlands, 2008. Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1297183. Accessed at: 2024-02-01.

DIEBOLD, Francis X; LI, Canlin. Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 130, n. 2, p. 337–364, 2006. Available at: <https://www.sas.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper49/Diebold-Li.pdf>. Accessed at: 2024-02-01.

DIEBOLD, Francis X; RUDEBUSCH, Glenn D; ARUOBA, S Boragan. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 131, n. 1-2, p. 309–338, 2006. Available at: www.sas.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper55/DRAfinal.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

DUBECQ, Simon; GOURIEROUX, Christian. **An Analysis of the Ultra Long-Term Yields**. In: PARIS, 2011 Finance Meeting EUROFIDAI-AFFI. France: [s.n.], 2011. Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1943535. Accessed at: 2024-02-01.

FRANCISCANGELO, João Gabriel Costa. **Vantagens e desvantagens do modelo dinâmico de Nelson-Siegel: aplicação ao mercado brasileiro**. 2015. Tese (Doutorado). Dissertação (Mestrado em Economia), EESP FGV, São Paulo. Accessed at: 2024-02-01.

HARVEY, Andrew C. **Dynamic models for volatility and heavy tails: with applications to financial and economic time series**. [S.l.]: Cambridge University Press, United Kingdom (UK), 2013. v. 52. Available at: <https://doi.org/10.1017/CB09781139540933>. Accessed at: 2024-02-01.

HARVEY, Andrew C. Forecasting, structural time series models and the Kalman filter. Cambridge university press, 1990. Available at: <https://www.cambridge.org/core/books/forecasting-structural-time-series-models-and-the-kalman-filter/CE5E112570A56960601760E786A5E631>. Accessed at: 2024-02-01.

HAUTSCH, Nikolaus; OU, Yangguoyi. Analyzing interest rate risk: Stochastic volatility in the term structure of government bond yields. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, Netherlands, v. 36, n. 11, p. 2988–3007, 2012. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2012.06.020>. Accessed at: 2024-02-01.

HAUTSCH, Nikolaus; YANG, Fuyu. Bayesian inference in a stochastic volatility Nelson–Siegel model. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, Netherlands, v. 56, n. 11, p. 3774–3792, 2012. Available at: www.econstor.eu/bitstream/10419/39283/1/623834839.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

KOOP, Gary; KOROBILIS, Dimitris. Large time-varying parameter VARs. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 177, n. 2, p. 185–198, 2013. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2013.04.007>. Accessed at: 2024-10-01.

KOOPMAN, Siem Jan; LUCAS, Andre; ZAMOJSKI, Marcin. **Dynamic term structure models with score-driven time-varying parameters: estimation and forecasting**. Poland, 2017. Available at: https://static.nbp.pl/publikacje/materialy-i-studia/258_en.pdf. Accessed at: 2024-10-01.

KOOPMAN, Siem Jan; MALLEE, Max IP; WEL, Michel Van der. Analyzing the term structure of interest rates using the dynamic Nelson–Siegel model with time-varying parameters. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, United States of America (USA), v. 28, n. 3, p. 329–343, 2010. Available at: www.econstor.eu/bitstream/10419/86192/1/07-095.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

LAURINI, Márcio P; CALDEIRA, Joao F. A macro-finance term structure model with multivariate stochastic volatility. **International Review of Economics & Finance**, Elsevier, Netherlands, v. 44, p. 68–90, 2016. Available at: www.researchgate.net/publication/254420860_Some_Comments_on_a_Macro-Finance_Model_with_Stochastic_Volatility. Accessed at: 2024-02-01.

LAURINI, Márcio Poletti; HOTTA, Luiz Koodi. Bayesian extensions to diebold-li term structure model. **International Review of Financial Analysis**, Elsevier, United States of America (USA), v. 19, n. 5, p. 342–350, 2010. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2010.08.010>. Accessed at: 2024-02-01.

LITTERMAN, Robert B; SCHEINKMAN, Jose. Common factors affecting bond returns. **The journal of fixed income**, Institutional Investor Journals Umbrella, United States of America (USA), v. 1, n. 1, p. 54–61, 1991. Available at: www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=1556070. Accessed at: 2024-02-01.

- MEIRELLES, Sofia Kusiak; FERNANDES, Marcelo. Estratégias de Imunização de Carteiras de Renda Fixa no Brasil. **Brazilian Review of Finance**, v. 16, n. 2, p. 179–219, 2018. Available at: www.researchgate.net/publication/336205501_Estrategias_de_Imunizacao_de_Carteiras_de_Renda_Fixa_no_Brasil. Accessed at: 2024-02-01.
- MESTERS, Geert; SCHWAAB, Bernd; KOOPMAN, Siem Jan. **A dynamic yield curve model with stochastic volatility and non-Gaussian interactions: an empirical study of non-standard monetary policy in the euro area**. (Working Paper). Tinbergen Institute Discussion Paper 14-071/III, Netherlands, 2014. Available at: <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2456624>. Accessed at: 2024-10-01.
- MONACHE, Davide Delle; PETRELLA, Ivan; VENDITTI, Fabrizio. Price dividend ratio and long-run stock returns: A score-driven state space model. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, United States of America (USA), v. 39, n. 4, p. 1054–1065, 2021.
- NELSON, Charles R; SIEGEL, Andrew F. Parsimonious modeling of yield curves. **Journal of Business**, JSTOR, United States of America (USA), p. 473–489, 1987. Available at: <http://dx.doi.org/10.1086/296409>. Accessed at: 2024-10-01.
- QUAEDVLIEG, Rogier; SCHOTMAN, Peter. Hedging long-term liabilities. **Journal of Financial Econometrics**, Oxford University Press, United Kingdom (UK), v. 20, n. 3, p. 505–538, 2022. Available at: www.irim.eur.nl/people/rogier-quaedvlieg/. Accessed at: 2024-02-01.
- SANTOS, Daiane Rodrigues dos; RIBEIRO, Tiago Costa; SANFINS, Marco Aurélio. Estimating the Level of the Brazilian Yield Curve Using the Time-Varying Coefficient Model GAS (2, 2) with Gamma Distribution. **International Journal of Economics and Finance**, Canadian Center of Science e Education, Canada, v. 11, n. 9, p. 1–1, 2019. Available at: <https://doi.org/10.5539/ijef.v11n9p1>. Accessed at: 2024-02-01.
- SVENSSON, Lars EO. **Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994**. [S.l.]: (Working Paper). National bureau of Economic Research, Cambridge, United States of America (USA), 1994. Available at: <https://doi.org/10.3386/w4871>. Accessed at: 2024-02-01.
- VLEUTEN, Pieter van der. **Proximal-Parameter Updates in a Score-Driven Dynamic Nelson-Siegel Framework**. 2023. Tese (Doutorado) – Master’s thesis in Econometrics e Management Science, Erasmus School of Economics, Netherlands. Available at: <https://thesis.eur.nl/pub/70248/Proximal-Parameter-Updates-in-a-Score-Driven-Dynamic-Nelson-Siegel-Framework.pdf>. Accessed at: 2024-10-01.

4 PREVISÕES EM TEMPO REAL PARA O CRESCIMENTO DO PIB DURANTE A PANDEMIA: APLICAÇÃO PARA O BRASIL SOB A ÓTICA MF-VAR

RESUMO

O objetivo deste artigo é realizar um exercício de previsão em tempo real para o crescimento do PIB brasileiro durante o período da pandemia do COVID-19, considerando alternativas para lidar com *outliers*. Para tanto, é construída uma base de dados *vintage* de dados trimestrais e mensais da economia brasileira e se aplica um modelo vetor autorregressivo com dados em frequências mistas (MF-VAR). Consideramos, no exercício de previsão do MF-VAR, três soluções para tratar as observações extremas: (i) fixação dos parâmetros estimados até o final de 2019 para construção de previsões em 2020; (ii) adaptação da heterocedasticidade de forma *ad-hoc*, explicitando no modelo a variação transitória da volatilidade dos choques em torno do período mais agudo da pandemia; (iii) consideração de volatilidade estocástica juntamente à modelagem de caudas pesadas nos termos de erro e de outliers potenciais. Procuramos estudar se as correções aumentam a precisão das previsões durante o período pandêmico comparando os modelos estudados com as projeções do FOCUS/BCB. O exercício empírico mostrou que os modelos estudados foram efetivos em lidar com as observações extremas, de modo que superaram a pesquisa FOCUS na previsão do 1T/2020 e do 4T/2020, mas também ilustraram que ainda há espaço para melhorias na modelagem. Em termos de previsão, encontramos que as estratégias (i) e (ii) são recomendáveis para a previsão de curtíssimo prazo, principalmente a primeira, mas em perspectiva *forward* essas estratégias continuam a apresentar cenários explosivos. Considerando os modelos com volatilidade estocástica, a principal diferença foi na amplitude das densidades preditivas. Enquanto os modelos estimados com a estratégia (ii) resultaram em estimativas amplas e trajetórias incoerentes em alguns casos, a especificação da estratégia (iii) apresentou intervalos de confiança mais estreitos, mas um fraco desempenho preditivo de curto prazo. Apesar disso, essa especificação com caudas pesadas foi relativamente competitiva nas previsões do 3T/2020 e 4T/2020, e apresentou previsões incondicionais bem comportadas para horizontes mais longos.

Palavras-Chave: Previsão em tempo real; Dados em frequências mistas; Filtro de Kalman; Correção para Outliers.

4.1 INTRODUÇÃO

A recente pandemia da COVID-19 desencadeou restrições de mobilidade duradouras no mundo em 2020 e nos anos posteriores. Como consequência, a atividade econômica entrou em colapso em muitos setores e provocou variações extremas nas séries temporais, criando um enorme desafio para a modelagem e previsão macroeconômica¹. Como devemos lidar com essas observações extremas ao estimar modelos de séries temporais após 2020? Devemos tratar os dados do período pandêmico como observações convencionais ou tratá-los de forma diferente? Responder a essas questões será essencial durante muitos anos, uma vez que estes dados irão “contaminar” qualquer modelagem futura da atividade econômica.

Essas preocupações levaram diversos pesquisadores a desenvolver novas estruturas de modelagem macroeconômica para lidar com eventos extremos, como a pandemia do COVID-19². Um ingrediente comum entre as estratégias de correção propostas pela literatura é que as relações macroeconômicas que existiam no passado são consideradas ainda válidas, de maneira que as estratégias geralmente visam reduzir o peso das observações anormais, permitindo que a variância dos resíduos reaja rapidamente às observações da COVID-19.

Entre os principais artigos, Schorfheide e Song (2023) sugeriram a simples exclusão de algumas observações de 2020 na estimação de modelos MF-VAR. Combinando onze séries temporais da economia americana observadas com frequência trimestral e mensal, os autores encontraram uma fraca performance de *nowcasting* em tempo real do MF-VAR padrão (Normal, homocedástico) nos primeiros meses de 2020. Isto levantou a possibilidade de que as observações extremas que ocorreram nos meses de 2020 estivessem contaminando as estimativas dos parâmetros, levando a um fraco desempenho de previsão, mesmo no curtíssimo prazo. No entanto, uma estratégia alternativa funcionou melhor. Previsões baseadas em estimativas utilizando dados até ao final de 2019 sem atualização dos parâmetros em tempo real (ou seja, os parâmetros foram estimados usando dados até 2019 e permaneceram nessas estimativas à medida que novos dados foram divulgados durante os meses de 2020) apresentaram ser mais estáveis e razoáveis.

Um segundo artigo importante nesta discussão foi o de Lenza e Primiceri (2020). Os autores evidenciaram que o modelo VAR padrão produz previsões distorcidas e funções impulso-resposta explosivas, de modo que os modelos projetam uma recessão contínua sem fim a partir de 2020. Diante desse problema, os autores propuseram uma formulação flexível para a heterocedasticidade, que considera a redução dos pesos atribuídos para algumas observações de 2020 no procedimento de estimação. Em suma, essa correção

¹ Os métodos econométricos tradicionais de séries temporais são majoritariamente lineares e assumem distribuição Gaussiana, de forma que procuram encontrar padrões médios em dados passados. Se os dados atuais forem muito diferentes, usar tais padrões e extrapolá-los linearmente pode ser altamente questionável, pois a inferência sobre os coeficientes provavelmente estará distorcida.

² Ho (2023) organiza um resumo sobre as principais estratégias de previsão após o período da pandemia.

ad-hoc proporciona um deslocamento transitório comum da volatilidade dos choques durante os períodos extremos da pandemia. A suposição relativa ao método é que as volatilidades de todos os choques foram deslocadas exatamente pela mesma constante e decaíram exatamente a uma mesma taxa, portanto, é possível estabelecer valores *a priori* e estimar esses parâmetros de escala. Os autores concluem: "*our results show that the ad-hoc strategy of dropping these observations may be acceptable for the purpose of parameter estimation. However, disregarding these recent data is inappropriate for forecasting the future evolution of the economy, because it vastly underestimates uncertainty*". Essa citação resume os resultados encontrados até então na literatura, na qual destacam-se dois pontos: i) que a incorporação de observações extremas de pandemia tem um impacto negativo nas estimativas dos parâmetros; e ii) que pode ser razoável que os *nowcasts* apresentem grandes variações preditivas devido ao grande nível de incerteza que a pandemia causou.

Com isso, outras iniciativas mais complexas e que competem com as duas soluções citadas, foram investigadas. Estas envolvem: a modelagem de observações extremas como alterações aleatórias na volatilidade estocástica (Koop, McIntyre, Mitchell e Poon (2021); Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022); Álvarez e Odendahl (2022)), o uso de métodos não paramétricos (Huber, Koop, Onorante, Pfarrhofer e Schreiner (2023))³; o tratamento de informações *a priori* para rebalancear a importância de observações extremas (Cascaldi-Garcia (2022)); e a consideração de erros com distribuição t-Student (Antolin-Diaz, Drechsel e Petrella (2021); Bobeica e Hartwig (2023)).

Em particular, Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022) mostram que, ao invés de excluir informações da amostra, fazer suposições sobre a volatilidade variável no tempo podem ser importantes para a construção de previsões em períodos atípicos. Os autores revisitaram a modelagem de um modelo VAR com volatilidade estocástica, sob o argumento de que, embora os modelos VAR-SV sejam construídos para se adaptarem à volatilidade variável no tempo, eles exibem elevada persistência, o que implica que grandes choques como a COVID-19 durante dois a três meses aumentariam a estado de volatilidade estimado durante vários períodos. Como solução, Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022) modificaram a especificação de SV para permitir caudas pesadas nos termos de erro juntamente à correção para outliers a la Stock e Watson (2016), de forma a não desencadear um aumento persistente da volatilidade. Os autores mostram que a especificação SV-t aumentada por outliers (denotada por SVO-t) melhora substancialmente o desempenho de previsão.

Uma terceira frente da literatura seguiu abordagens mais orientadas para circunstâncias

³ Huber, Koop, Onorante, Pfarrhofer e Schreiner (2023) propõem uma abordagem alternativa para lidar com *outliers* usando um modelo não paramétrico. Enquanto a abordagem de Lenza e Primiceri (2020) acomoda a correção escalando a matriz de variância-covariância para absorver choques extremos, a abordagem de Huber, Koop, Onorante, Pfarrhofer e Schreiner (2023) permite acomodação por meio de variação dos parâmetros.

específicas da pandemia e para a estimativa de relações estruturais. Por exemplo, Primiceri e Tambalotti (2020), Ng (2021) e Ferroni, Fisher e Melosi (2024) assumem que o período da COVID-19 acrescenta um novo tipo de choque ao sistema dinâmico de equações que modelam a economia. Assumindo que o novo choque da COVID-19 foi a principal fonte de variação desde o início de 2020, Primiceri e Tambalotti (2020) estimam dentro de um SVAR um componente não observável que representa a trajetória dos choques pandêmicos e fazem suposições de trajetórias futuras para este fator latente a partir de indicadores de mobilidade ou número de casos. Então, derivam um conjunto de previsões condicionais para diferentes cenários e investigam a propagação dos choques sobre a economia. Já Ng (2021) utiliza indicadores da pandemia para “limpar” os dados antes da estimativa de modelos de séries temporais. Especificamente, na aplicação de um modelo de fatores dinâmicos, Ng (2021) mostra que, depois de contabilizados os indicadores exógenos relacionados com a COVID-19, as respostas dinâmicas a outros choques parecem semelhantes antes e depois da pandemia. Em um contexto DSGE, Ferroni, Fisher e Melosi (2024) introduzem uma metodologia para estimar uma série temporal para os choques do COVID-19 usando uma abordagem de *event-study* sobre os desvios das previsões de mercado *vs.* as realizações de PIB e inflação. Os autores identificam o choque da pandemia e incorporam isso ao termo expectacional do sistema de equações DSGE. Em resumo, os resultados permitem identificar bem os impactos do choque da pandemia sobre as variáveis, assim como os outros choques são identificados de maneira melhor comportada em comparação com as estimativas usuais.

O presente trabalho tem como foco a previsão empírica de curto prazo do crescimento do PIB brasileiro durante o período da pandemia do COVID-19. Para tanto, é construída uma base de dados *vintage* trimestral e mensal da economia brasileira e se aplicam algumas versões do modelo vetor autorregressivo com dados em frequências mistas (MF-VAR). Inspirados nos trabalhos de Mariano e Murasawa (2003) e Mariano e Murasawa (2009), consideramos um modelo MF-VAR na forma de espaço de estados, tratando a taxa de crescimento do PIB real observada trimestralmente como séries mensais com valores faltantes iguais a zero. Em termos gerais, a equação de transição é dada por um VAR em frequência mensal e as equações de medida relacionam as séries observadas às variáveis mensais no vetor de estados. Para fins de ilustração, introduzimos a estimação do modelo MF-VAR padrão por meio do algoritmo EM e então testamos a capacidade do modelo em melhorar as previsões de curto prazo com dados da economia brasileira até 2019.

Em seguida, com base na literatura empírica, realizamos um exercício de previsão em tempo real para os quatro trimestres de 2020 considerando três soluções para tratar as observações extremas: (i) fixação dos parâmetros estimados até 2019 para a construção de previsões em 2020 (Schorfheide e Song (2023)); (ii) adaptação da heterocedasticidade de forma *ad-hoc*, explicitando a variação transitória da volatilidade dos choques em torno

do período mais agudo da pandemia (Lenza e Primiceri (2020)); (iii) consideração de volatilidade estocástica juntamente à modelagem de caudas pesadas nos termos de erro e potenciais outliers (Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022)). Para lidar com a alta dimensionalidade do espaço de parâmetros, os modelos MF-VAR estudados seguem a literatura empírica de forma que são equipados com uma priori Minnesota e estimados usando métodos Bayesianos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*).

Nosso exercício de previsão em tempo real aplicado para a economia brasileira também é um diferencial deste trabalho. Construímos uma base de dados *vintage* para dados trimestrais e mensais da economia brasileira e então comparamos as previsões MF-VAR com a mediana da pesquisa FOCUS/BCB. A pesquisa FOCUS/BCB é um *benchmark* amplamente utilizado em comparações de previsões, e tem duas características importantes: primeiro, tal como as previsões MF-VAR, as previsões do FOCUS foram feitas em tempo real à medida que a pandemia avançava. Em segundo lugar, os participantes do FOCUS tiveram a oportunidade de fazer ajustes anedóticos sobre suas projeções em tempo real, tendo em conta a evolução da pandemia, ajustes que não podem ser reproduzidos em uma avaliação de modelagem ex-post e comparados com outras classes de modelos. Para manter o exercício simples, nos concentramos em comparações pontuais e visuais de realizações ex-post de 2020, além de avaliar as densidades de previsão geradas em diferentes origens.

Este artigo se conecta com uma crescente literatura brasileira que explora as vantagens de uma estratégia de modelagem que mistura séries temporais amostradas em diversas frequências. Com relação a modelos MF-VAR, destacamos as contribuições de Borges e Portugal (2018) e Alves e Fasolo (2015). Borges e Portugal (2018) compararam as previsões de curto prazo do MF-VAR com o VAR trimestral e analisaram sua performance de previsão usando um conjunto de variáveis macroeconômicas para o Brasil. Os resultados encontrados pelos autores apontam que a utilização das observações mensais dentro do trimestre aumentam os ganhos das previsões de curto prazo, tanto das séries trimestrais como das séries mensais, especialmente para um e dois trimestres a frente. Alves e Fasolo (2015) utilizaram uma abordagem MF-VAR para estimação do PIB mensal e para retroplacação da taxa de desemprego da PNADC. Os autores consideraram o algoritmo bayesiano FFBS e o aplicaram para dados simulados e empíricos brasileiros. Assim como Borges e Portugal (2018), os resultados encontrados pelos autores indicaram que o MF-VAR apresenta performance satisfatória em termos de *nowcasting*, em uma aplicação para o PIB brasileiro.

Uma segunda abordagem popular na literatura brasileira é o uso da especificação MIDAS (*Mixed Data Sampling*). Como exemplo, para previsão, Zuanazzi e Ziegelmann (2014) conduziram um exercício de *nowcasting* do PIB brasileiro e Wink Junior e Pereira (2011) para a previsão de séries de volatilidade realizada de ações da bolsa brasileira, enquanto que, para investigação de relações estruturais, Alves e Palma (2024) examinaram

os efeitos da política fiscal sobre o crescimento econômico sob um modelo MIDAS-VAR.

Por fim, um terceiro conjunto da literatura doméstica adotou estratégias com modelos de fatores dinâmicos para modelagem do PIB mensal como um indicador coincidente. Entre eles, destacamos os trabalhos de Issler e Notini (2016) e Gonçalves (2022). Em especial, Gonçalves (2022) conduziu um exercício de *nowcasting* do PIB explorando informações de pagamentos eletrônicos conjugadas com dados macroeconômicos. Em geral, um resultado comum em todos esses artigos é que a utilização das observações mensais dentro do trimestre aumentam os ganhos das previsões de curto prazo.

Nosso trabalho se diferencia dos trabalhos de previsão aplicados para a economia brasileira em dois aspectos principais. O primeiro é que, até onde conhecemos, este é o primeiro trabalho de modelagem macroeconômica que discute algum tipo de tratamento para os outliers da pandemia do COVID-19. O segundo aspecto é que, considerando a abordagem de frequências distintas, adicionamos complexidades (volatilidade estocástica, modelagem de outliers e caudas pesadas nos resíduos) ainda não estudadas no contexto brasileiro.

Com relação à literatura internacional, nosso artigo se relaciona com os trabalhos de Schorfheide e Song (2023) na modelagem MF-VAR aplicado para o período pandêmico, mas consideramos estruturas de erros com caudas pesadas e detecção de outliers sem fazer escolhas *ad-hoc*. Intuitivamente, grandes choques são mais prováveis de ocorrer sob erros que seguem uma distribuição t-Student, que tem caudas mais pesadas que a gaussiana. Modelar a pandemia como um evento raro ou um aumento persistente da volatilidade macroeconômica é uma escolha importante, uma vez que tem implicações diferentes para as previsões de densidade. Assim, considerando as metodologias apresentadas em Koop, McIntyre, Mitchell e Poon (2021) e Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022), adaptamos o amostrador MCMC descrito em Chan e Hsiao (2014) para considerar volatilidade estocástica e outliers transitórios em um modelo MF-VAR a la Schorfheide e Song (2015) aplicado para a previsão do PIB brasileiro.

Nossas estimativas apresentaram resultados satisfatórios para a previsão do PIB brasileiro em tempo real durante a pandemia. O exercício mostrou que os modelos estudados foram efetivos em lidar com as observações extremas, de modo que superaram a pesquisa FOCUS na previsão do 1T/2020 e do 4T/2020, mas também ilustraram que ainda há espaço para melhorias na modelagem. Isso aparece pelo melhor desempenho do modelo mais simples, que considera a fixação dos parâmetros estimados em 2019 para condução do exercício. Considerando os modelos com volatilidade estocástica, a principal diferença foi na amplitude das densidades preditivas. Enquanto os modelos com volatilidade estocástica e erros gaussianos resultaram em estimativas amplas e trajetórias incoerentes em alguns casos, o modelo SVO-t com caudas pesadas apresentou intervalos de

confiança mais estreitos. Apesar disso, a especificação SVO-t foi competitiva apenas nas previsões do 3T/2020 e 4T/2020, e apresentou previsões incondicionais bem comportadas.

O artigo está organizado como segue: na próxima seção, se apresenta uma revisão do modelo MF-VAR, na qual dividimos em duas subseções. A primeira apresenta o modelo na forma de espaço de estados e na segunda se ilustra a estimação padrão em uma aplicação empírica para a economia brasileira no período pré-COVID. Em seguida, a terceira seção traz as extensões propostas na literatura para o tratamento de outliers, na qual são apresentados na quarta seção os resultados empíricos para um exercício de previsão em tempo real dos quatro trimestres de 2020. Por fim, na quinta seção, apresentam-se as considerações finais.

4.2 MODELO DE VETORES AUTORREGRESSIVOS COM DADOS MISTOS (MF-VAR)

O objetivo desta seção é apresentar o modelo Vetores Autorregressivos com dados mistos (MF-VAR), o qual permite capturar os comovimentos entre séries de frequências mistas. Apresentamos inicialmente o MF-VAR padrão sob a óptica de espaço de estados estimado pelo algoritmo EM (*Expectation-Maximization*), conforme descrito em Mariano e Murasawa (2009). Ilustramos como o modelo MF-VAR pode ser usado para gerar previsões em tempo real com uma aplicação para o PIB brasileiro no período 2004-2019.

4.2.1 MF-VAR padrão - Especificação e Estimação

A técnica de acomodar os valores faltantes mensais na forma de espaços de estados é um das primeiras abordagens que surgiram na literatura de dados em frequências mistas (Harvey e Pierse (1984); Harvey e Chung (2000); Mariano e Murasawa (2003); Mariano e Murasawa (2009)). Nesse caso, a ideia é que as séries são tratadas como se fossem geradas na mesma frequência, mas que algumas são tratadas como dados faltantes. Logo, os métodos de componentes não observados são uma solução, pois uma vez que adaptamos uma estrutura periódica com dados faltantes, a aplicação do Filtro de Kalman ocorre naturalmente, a fim de estimar um vetor de estados que representa a variável não observada de interesse⁴.

Com o objetivo de estimar uma variável trimestral usando dados mensais, precisa-se de alguma regra ou procedimento de agregação que permita transformar a variável trimestral em mensal. Sendo assim, usa-se na construção do MF-VAR a restrição introduzida por Mariano e Murasawa (2003) que transforma as séries trimestrais como a primeira diferença

⁴ A principal atração dos modelos de espaço de estados é que eles abrangem uma classe muito ampla de processos de geração de dados e facilitam a modelagem de observações faltantes, coeficientes variantes no tempo e fatores não observáveis (latentes) que direcionam um sistema dinâmico (veja Kim e Nelson (1999), para uma discussão detalhada).

do logaritmo do PIB na frequência mensal. Formalmente, consideremos Y_t^M e Y_t^Q o PIB real mensal e trimestral em nível, observado somente no terceiro mês de cada trimestre. A equação de movimento trimestral do PIB, pode ser representada como uma média geométrica⁵ das sequências mensais não observadas $y_t^m = Y_t^M - Y_{t-1}^M$. Nesse sentido, consideremos a equação:

$$\begin{aligned} y_t^Q &= Y_t^Q - Y_{t-3}^Q \\ &= Y_t^Q + Y_{t-1}^Q - Y_{t-1}^Q + Y_{t-2}^Q - Y_{t-2}^Q - Y_{t-3}^Q \\ &= y_t + 2y_{t-1} + 3y_{t-2} + 2y_{t-3} + y_{t-4}, \quad t = 6, 9, \dots \end{aligned}$$

Agora, supondo que a variável de interesse é a diferença trimestral dos logaritmos,

$$y_t^q = \log(Y_t^Q) - \log(Y_{t-1}^Q),$$

a aproximação entre as médias aritmética e geométrica resulta em:

$$\frac{1}{3}[Y_t^M + Y_{t-1}^M + Y_{t-2}^M] \approx \sqrt[3]{Y_t^M Y_{t-1}^M Y_{t-2}^M}.$$

Combinando as duas últimas equações, temos a seguinte regra de movimento para o PIB trimestral:

$$y_t^q = \frac{1}{3}(y_t^m + y_{t-1}^m + y_{t-2}^m) + \frac{1}{3}(y_{t-1}^m + y_{t-2}^m + y_{t-3}^m) + \frac{1}{3}(y_{t-2}^m + y_{t-3}^m + y_{t-4}^m),$$

em que, rearranjando, temos

$$y_t^q = \frac{1}{3}(y_t^m + 2y_{t-1}^m + 3y_{t-2}^m + 2y_{t-3}^m + y_{t-4}^m).$$

Tal que, a partir do esquema de agregação acima, é possível recuperar o PIB trimestral estimado a partir dos valores preditos de y_t^m e avaliar o ajuste do modelo.

Como exemplo, suponha a restrição acima e um conjunto de variáveis em frequência mensal: p_t^m (produção industrial), s_t^m (vendas no varejo), π_t^m (inflação), u_t^m (desemprego).

⁵ $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$

Assim, pode-se representar o seguinte modelo VAR(1):

$$\begin{bmatrix} y_t^q \\ p_t^m \\ s_t^m \\ \pi_t^m \\ u_t^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t^m \\ y_{t-1}^m \\ y_{t-2}^m \\ y_{t-3}^m \\ y_{t-4}^m \\ p_t^m \\ s_t^m \\ \pi_t^m \\ u_t^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{y,t} \\ \varepsilon_{p,t} \\ \varepsilon_{s,t} \\ \varepsilon_{\pi,t} \\ \varepsilon_{u,t} \end{bmatrix}$$

A especificação acima é infactível de ser estimada, pois a variável y_t^q não é observada na mesma frequência que as demais. Com isso, a partir daqui se introduz a adaptação do sistema de matrizes, em que as células não observadas são tratadas como observações faltantes. Como ficará mais claro na próxima seção, essa mudança permite a estimação por Máxima Verossimilhança (MLE) do modelo de *espaço de estado linear gaussiano com dados faltantes*, em que as séries de frequência trimestral são consideradas sob frequência mensal.

REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS. Defina $\{y_t^q\}$ uma série de baixa frequência (trimestral) de dimensão N_q que é observada em cada m -ésimo período, e $\{x_t^m\}$ uma série de alta frequência (mensal) com dimensão N_m que é observada em todos os períodos. $\{y_t^m\}$ representa a série latente não observada sob alta frequência que deseja-se estimar, de modo que a restrição seja satisfeita:

$$y_t^q = \omega(L)y_t^m$$

para cada t , em que l é a ordem de defasagem (lag) do polinômio $\omega(L)$, e $\omega(L) = \omega_0 + \omega_1 L + \omega_2 L^2 + \dots + \omega_l L^l$ é o operador de agregação.

Define-se y_t e y_t^* vetores de dimensão $N \times 1$ como:

$$y_t = \begin{pmatrix} y_t^q \\ x_t^m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad y_t^* = \begin{pmatrix} y_t^m \\ x_t^m \end{pmatrix} \quad \forall t, \quad N = N_q + N_m$$

e também assume-se que $\mu = \mathbb{E}(y_t) = 0$ e $\mu^* = \mathbb{E}(y_t^*) = 0$. O modelo VAR que deseja-se estimar é dado por

$$\Phi(L)y_t^* = u_t$$

em que $\Phi(L)$ é um polinômio no operador de defasagem de ordem p , e $u_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, em que Σ é a matriz de variância-covariância de u_t . Além disso, temos que, para todo t , a

seguinte relação deve se manter:

$$y_t = H(L)y_t^*$$

em que

$$H(L) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}I_{N_q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{N_m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}I_{N_q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} L + \begin{pmatrix} I_{N_q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} L^2 + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}I_{N_q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} L^3 + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}I_{N_q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} L^4$$

é um operador que representa a restrição de conexão da variável latente com a variável observada. A representação em forma de espaço de estado é:

$$\begin{aligned} y_t &= Z\alpha_t + \varepsilon_t \\ \alpha_t &= T\alpha_{t-1} + R\eta_t \\ \eta_t &\sim \mathcal{N}(0, Q) \end{aligned}$$

em que a primeira equação é denotada a equação de medida e a segunda equação de transição. η é um vetor dos termos de erro da equação de transição, com Q sendo sua matriz de variância-covariância. Para determinar a dimensão das matrizes, temos dois casos, dependendo da ordem p :

1. $p \leq l + 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_t &= (y_t^{*\top} \cdots y_{t-l}^{*\top})^\top \\ \alpha_t &_{(l+1)N \times 1} \\ T &= \begin{pmatrix} \Phi_1 \cdots \Phi_p & \mathbf{0} \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ T &_{(l+1)N \times (l+1)N} \\ R &= \begin{pmatrix} \Sigma^{1/2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ R &_{(l+1)N \times N} \\ Z &= (H_0 \cdots H_l) \\ Z &_{N \times (l+1)N} \end{aligned}$$

2. $p > l + 1$

$$\begin{aligned} \alpha_t &= (y_t^{*\top} \cdots y_{t-p+1}^{*\top})^\top \\ \alpha_t &_{(l+1)N \times 1} \\ T &= \begin{pmatrix} \Phi_1 \cdots \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ T &_{Np \times Np} \\ R &= \begin{pmatrix} \Sigma^{1/2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ R &_{Np \times N} \\ Z &= \begin{pmatrix} H_0 \cdots H_l & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ Z &_{N \times Np} \end{aligned}$$

Assim, introduzimos dois componentes na especificação do MF-VAR: (i) um comportamento autorregressivo para as variáveis mensais não observáveis, e (ii) uma relação

entre os vetores observados e não observados. O próximo passo consiste em adaptar uma estrutura periódica variante no tempo em razão dos valores não observados na variável de interesse. Como as variáveis trimestrais são observadas no terceiro mês de cada trimestre, a questão é como podemos adequar os valores de y_t^q no vetor de medida no que diz respeito ao primeiro e segundo mês dos trimestres. A ideia geral consiste em tratar esses valores como valores faltantes. Para tanto, se define uma nova especificação na forma de espaço de estado. Como y_t é uma variável com frequência mista, observada apenas a cada m -ésimo período, ela possui dados faltantes. Conseqüentemente, especifica-se a equação de medida como, $\forall t$,

$$y_t^+ = \begin{cases} y_t^q & \text{se } y_t^q \text{ é observável} \\ \varepsilon_t, & \text{se } y_t^q \text{ não é observável} \end{cases}$$

com $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, B)$, na qual todas as realizações são iguais a zero. Essa estrutura resulta em um vetor de medida reescrito como se as observações faltantes de y_t^q seguissem uma distribuição normal, independente dos parâmetros do modelo. Em geral, o modelo é representado pela forma:

$$\begin{aligned} y_t^+ &= Z_t \alpha_t + B_t \varepsilon_t \\ \alpha_t &= T \alpha_{t-1} + R \eta_t \end{aligned}$$

em que $\forall t$,

$$\begin{pmatrix} y_t^+ \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{y,t} \\ Z_x \end{pmatrix} \alpha_t + \begin{pmatrix} B_t \\ 0 \end{pmatrix} \varepsilon_t.$$

A estrutura periódica variante no tempo é definida por:

$$\begin{aligned} Z_{y,t} &= \begin{cases} Z_y & \text{se } y_t^q \text{ é observável} \\ 0 & \text{se } y_t^q \text{ não é observável} \end{cases} \\ B_t &= \begin{cases} 0 & \text{se } y_t^q \text{ é observável} \\ I_{N_q} & \text{se } y_t^q \text{ não é observável} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, para o modelo especificado acima, pode-se aplicar o Filtro de Kalman de maneira usual, dado que y_t^+ é observado.

ALGORITMO DE ESTIMAÇÃO EM. Seja $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p)$, $\phi = \text{vec}(\Phi^\top)$ o vetor de parâmetros autorregressivos do modelo e $\theta = (\phi^\top, \text{vech}(\Sigma)^\top)^\top$ o vetor de parâmetros que desejamos estimar. Considerando para $t \geq 1$, $Y_t^* = (y_1^*, \dots, y_t^*)$, com $Y_0^* = 0$, e para $t \geq 0$, $S_t = (\alpha_0, \dots, \alpha_t)$, pela decomposição do erro da variância, a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis de medida e de estado (Y_T^*, S_T) pode ser definida

como:

$$\begin{aligned} f(Y_t^*, S_t; \theta) &= f(S_T; \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T f(\alpha_t | \alpha_{t-1}; \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T f(y_t^* | \alpha_{t-1}; \theta) \end{aligned}$$

Particularmente, seleciona-se duas submatrizes de Z , com dimensões definidas pelos dois casos que dependem da ordem p do VAR:

$$\begin{cases} F = \begin{bmatrix} I_{lN} & 0_{lN \times N} \end{bmatrix}, & G = \begin{bmatrix} I_{pN} & 0_{pN \times (l+1-p)N} \end{bmatrix}, & \text{se } p \leq l + 1 \\ F = \begin{bmatrix} I_{lN} & 0_{lN \times (p-1)N} \end{bmatrix}, & G = \begin{bmatrix} I_{pN} \end{bmatrix}, & \text{se } p > l + 1 \end{cases}$$

Ao introduzirmos as matrizes F e G , o processo VAR(p) para y_t^* , isto é, $\Phi(L)y_t^* = u_t$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} F\alpha_t &= y_t^* \\ &= \Phi_1 y_{t-1}^* + \cdots + \Phi_p y_{t-p}^* + u_t \\ &= \Phi G \alpha_{t-1} + u_t \\ F\alpha_t - \Phi G \alpha_{t-1} &= u_t \end{aligned}$$

Usando o resultado acima, a função do log da verossimilhança é dada por

$$l(\theta; Y_T^*, S_T) = -\frac{NT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \det(\Sigma) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (F\alpha_t - \Phi G \alpha_{t-1})^\top \Sigma^{-1} (F\alpha_t - \Phi G \alpha_{t-1})$$

em que as funções *score* do gradiente são:

$$l_\phi(\theta; Y_T^*, S_T) = \Sigma^{-1} \sum_{t=1}^T \text{vec}(G \alpha_{t-1} \alpha_t^\top F^\top - G \alpha_{t-1} \alpha_{t-1}^\top G^\top \Phi^\top)$$

$$l_{\Sigma^{-1}}(\theta; Y_T^*, S_T) = \frac{T}{2} \Sigma - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (F \alpha_t \alpha_t^\top F^\top - F \alpha_t \alpha_t^\top G^\top \Phi^\top - \Phi G \alpha_{t-1} \alpha_t^\top F^\top + \Phi G \alpha_{t-1} \alpha_{t-1}^\top G^\top \Phi^\top)$$

A primeira etapa consiste em obter as estimativas do algoritmo EM e realizar a filtragem. Para $\alpha_0 = 0$ (consequentemente, $\alpha_{1|0} = 0$ e $P_{1|0} = RQR^\top$), e $t = 0, 1, \dots, T$, as etapas de

predição e atualização do filtro de Kalman são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\alpha_{t+1|t} &= T\alpha_{t|t} \\
P_{t+1|t} &= TP_{t|t}T^\top + RQR^\top \quad (\text{predição}) \\
e_{t+1|t} &= y_t - Z\alpha_{t+1|t} \\
f_{t+1|t} &= ZP_{t+1|t}Z^\top + B \\
K_t &= P_{t+1|t}Z^\top f_{t+1|t}^{-1} \\
\alpha_{t+1|t+1} &= T\alpha_{t+1|t} + K_t e_{t+1|t} \quad (\text{atualização}) \\
P_{t+1|t+1} &= P_{t+1|t} - K_t Z P_{t+1|t}
\end{aligned}$$

Uma vez obtidos $\alpha_{t+1|t}$ e $P_{t+1|t}$, escolhem-se valores iniciais para o vetor de parâmetros θ , $\theta_0 = (\text{vec}(\Phi_0)^\top, \text{vech}(\Sigma_0)^\top)^\top$. Com $y_0^+ = 0$, a etapa de esperança do algoritmo EM é obtida calculando, para $t = 1, \dots, T$, as estimativas suavizadas,

$$\begin{aligned}
\alpha_{t|T} &= \mathbb{E}(\alpha_t | (y_1^+, \dots, y_t^+)) = \alpha_{t+1|t} + P_{t+1|t} r_t \\
P_{t|T} &= \text{Var}(\alpha_t | (y_1^+, \dots, y_t^+)) = P_{t+1|t} - P_{t+1|t} R_t P_{t+1|t} \\
P_{t+1|T} &= \text{Cov}(\alpha_{t+1}, \alpha_t | (y_1^+, \dots, y_t^+)) = (I_N - P_{t+1|t} R_{t+1}) T (I_N - K_t Z) P_{t+1|t}
\end{aligned}$$

em que para $t = T, T-1, \dots, 1$,

$$\begin{aligned}
r_t &= Z^\top (ZP_{t+1|t}Z^\top + B)^{-1} e_t + (T(I_N - K_t Z))^\top r_{t+1} \\
R_t &= Z^\top (ZP_{t+1|t}Z^\top + B)^{-1} Z + (T(I_N - K_t Z))^\top R_{t+1} (T(I_N - K_t Z))
\end{aligned}$$

com $r_{T+1} = 0$, $R_{T+1} = 0$.

A maximização consiste em tomar a esperança condicional das funções *score* ótimo resultantes da $l(\theta; Y_T^*, S_T)$. Ao igualar as funções *score* a zero e tomar o seu valor esperado, resulta

$$\mathbb{E} \left\{ \Sigma^{-1} \sum_{j=1}^T \text{vec}(G\alpha_{t-1}\alpha_t^\top F^\top - G\alpha_{t-1}\alpha_{t-1}^\top G^\top \Phi^\top) \right\} = 0$$

Assumindo que, para todo $k, j = 0, 1$,

$$M_{t-k, t-j} = \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(\alpha_{t-k}, \alpha_{t-j}^\top | (y_1^+, \dots, y_t^+)) \right\}$$

A esperança condicional pode ser reescrita como

$$GM_{t, t-1} F^\top - GM_{t, t} G^\top \Phi^\top = 0$$

de modo a resolver para a matriz de coeficientes estimados $\widehat{\Phi} = (\widehat{\Phi}_1, \dots, \widehat{\Phi}_p)$:

$$\widehat{\Phi} = (GM_{t,t}G^\top)^{-1}GM_{t,t}F^\top$$

Fazendo o mesmo para a função *score* relativa à matriz de variância-covariância,

$$\Sigma - (FM_{t-1,t-1}F^\top + FM_{t-1,t}G^\top\Phi^\top - \Phi GM_{t,t-1}F^\top + \Phi GM_{t,t}G^\top\Phi^\top) = 0$$

consequentemente,

$$\widehat{\Sigma} = FM_{t-1,t-1}F^\top - FM_{t-1,t}G^\top(GM_{t,t}G^\top)^{-1}GM_{t,t-1}F^\top$$

O algoritmo EM precede como segue a cada etapa do tempo:

1. Escolha um valor inicial $\theta^{(0)}$.
2. (E-step) Calcule $\{\alpha_{t|T}\}$, $\{P_{t|T}\}$, e $\{P_{t,t-1|T}\}$.
3. (M-step) Calcule (ϕ^*, Σ^*) e use como $\theta^{(1)}$.
4. Faça a iteração até convergir.

Mariano e Murasawa (2009) observam que o algoritmo EM diminui a velocidade próximo ao máximo, então é aplicado um método quasi-Newton (BFGS) que usa o próprio algoritmo EM para encontrar um bom valor inicial.

4.2.2 Ilustração Empírica: Estimação do MF-VAR padrão por MLE

Para efeitos de ilustração da modelagem macroeconômica com frequências mistas, nesta etapa estimaremos o modelo MF-VAR homocedástico e gaussiano por máxima verossimilhança considerando o período pré-pandemia.

DADOS. Para estimar o PIB mensal brasileiro, usamos dados mensais e trimestrais de 2004:M1 até 2019:M6. A especificação MF-VAR utilizada inclui: o Produto Interno Bruto real trimestral; a Produção Industrial mensal (PIM/IBGE); o Volume de Vendas Reais no Varejo (PMC/IBGE); a Taxa de Inflação medida pelo IPCA e; a Taxa de Desemprego (PNADC)⁶. As séries temporais foram extraídas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e do Banco Central do Brasil (BACEN) como mostra a Tabela 4.1. As variáveis auxiliares que compõem o conjunto de covariadas mensais foram escolhidas

⁶ Devido à descontinuidade da PME, retropolamos da Taxa de Desemprego da PNADC usando métodos de espaço de estado (Filtro de Kalman) descritos em Bacciotti e Marçal (2020). As variáveis usadas no exercício de retroposição são semelhantes àsquelas utilizadas conforme **bacciotti2020taxa** e Alves e Fasolo (2015): PME, PED e a PNADC.

por serem habitualmente usadas na literatura para construção de indicadores coincidentes e estimação de modelos estruturais macroeconômicos. Obviamente, outras variáveis que possuem boa aderência ao PIB podem ser adicionadas ao sistema, como o volume de serviços (PMS/IBGE) ou o consumo de energia.

Tabela 4.1: Variáveis Macroeconômicas

Série	Fonte
PIB real (PIB)	SCN/IBGE
Produção Industrial (PIM)	PIM/IBGE
Vendas Reais no Varejo (PMC)	PMC/IBGE
Taxa de Inflação (INFL)	IPCA/IBGE
Taxa de Desemprego (PNADC)	PNADC/IBGE e estimação própria

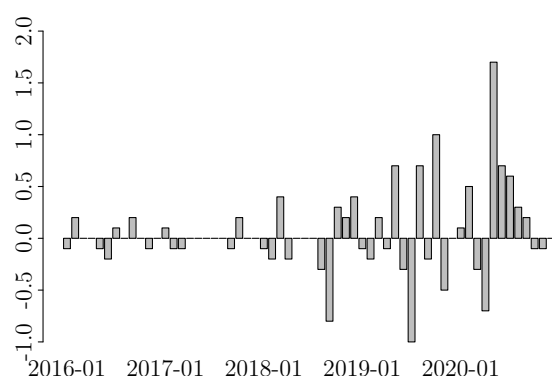
Fonte: Elaboração Própria.

Como será explorado nas seções seguintes, usaremos a modelagem MF-VAR em um contexto de *nowcasting*. Para isso, precisaremos estimar os modelos com as informações conhecidas em cada ponto de estimação, isto é, precisamos construir bases de dados *vintages*.

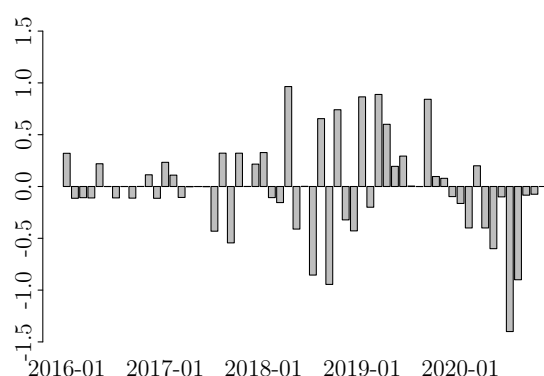
Diante disso, coletamos as séries com ajuste sazonal do IBGE divulgadas em cada mês entre os períodos 2016:T1-2020T4. Assim, a base de dados é composta por $5 \times 12 = 60$ *vintages* para as variáveis mensais e $5 \times 4 = 20$ *vintages* para a série do PIB. No entanto, nem todas as séries apresentam dados de revisões ou revisões disponíveis. As principais variáveis utilizadas e que apresentam histórico considerável disponível são a produção industrial e as vendas no varejo (Figura 3.1). Para a taxa de inflação e para a taxa de desemprego, consideramos a última informação disponível no momento da construção do artigo, o que descaracteriza um pouco o exercício de previsão em tempo real.

Figura 4.1: Revisões acumuladas entre a primeira e a última *vintage* da PIM e da PMC (IBGE).

(a) Revisões acumuladas (p.p.) PIM/IBGE



(b) Revisões acumuladas (p.p.) PMC/IBGE



Fonte: Elaboração própria.

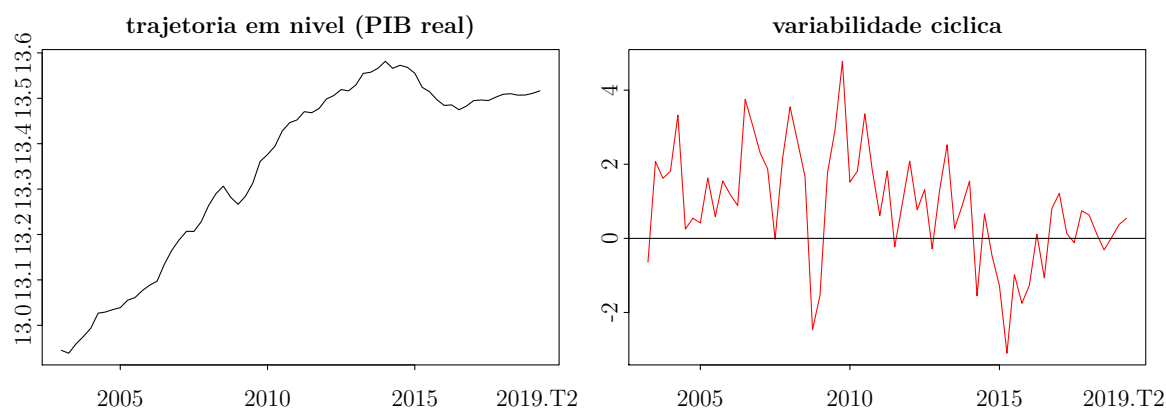
Uma vez coletadas as séries, realizamos a transformação primeira diferença do logaritmo das séries dessazonalizadas, multiplicadas por 100, com exceção da taxa de desemprego. Para a taxa de desemprego, usamos a variação absoluta em p.p. da taxa dessazonalizada como *input*. A Tabela 4.2 mostra as estatísticas descritivas para o período de 2004-2019, considerando a última vintage da amostra. Essa transformação, em primeira diferença, nos permite trabalhar com as séries em forma de taxas de crescimento percentual mês a mês. A Figura 4.2 apresenta as respectivas séries do PIB real trimestral expressas em nível e em taxas de crescimento usadas na modelagem.

Tabela 4.2: Estatística Descritiva

Indicador	Média	Desvio Padrão	Máximo	Mínimo
PIB real	0.87	1.52	4.77	-3.09
Produção Industrial	-0.06	7.46	23.66	-28.3
Vendas reais no Varejo	0.05	5.93	18.36	-22.6
Taxa de Inflação	-0.02	0.51	1.69	-1.8
Taxa de Desemprego	-0.02	0.49	1.19	-1.2

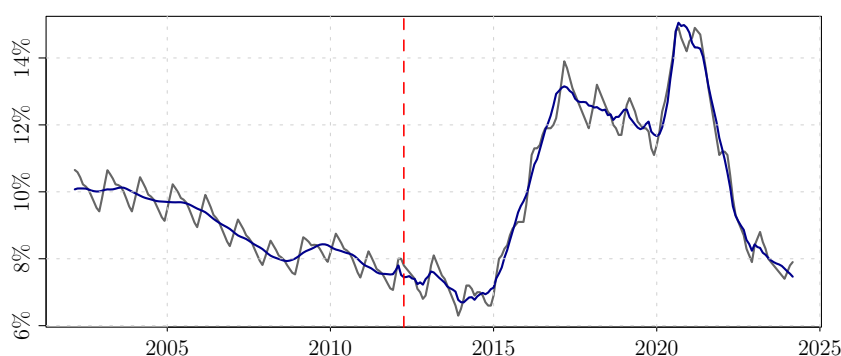
Fonte: Elaboração Própria.

Figura 4.2: Série de tempo PIB real brasileiro (2003.T1 - 2019.T2)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.3: Taxa de Desemprego PNADC Retropolada - Observações Mensais para Trimestre Móvel (2002:M3- 2024:M3)



Nota: A linha vermelha tracejada indica o ponto de corte da retropolagem (período anterior a 2012.M3 foi estimado).

Fonte: Elaboração própria.

CARACTERÍSTICAS DAS SÉRIES. Nesta etapa iremos explorar algumas estatísticas das séries de tempo estudadas (consideraremos a *vintage* de 2019:T2) para entender o comportamento estacionário das séries e como se relacionam, seguindo a recomendação de Issler e Notini (2016). Os autores argumentam que as séries auxiliares precisam satisfazer três critérios com relação ao PIB:

1. possuir mesma ordem de integração;
2. serem altamente correlacionadas;
3. possuir tendências comuns de longo prazo;

Na Tabela 4.3, apresentamos os testes de Dickey e Fuller Aumentado para raiz unitária, aplicado para as séries em nível, a fim de confirmar a ordem de integração das séries (item (i) acima). Os valores críticos encontrados apresentaram valores superiores à estatística τ aos níveis críticos de significância de 1%, 5% e 10% para os modelos com tendência, com *drift* e sem ambos, indicando ausência de estacionariedade, descartando a hipótese de que as séries são $I(0)$. Com exceção da inflação, que apresentou estatística de teste significativa nos modelos com tendência e *drift*. Assim, fazendo o teste sobre a primeira diferença das séries, é possível rejeitar a hipótese nula de não estacionariedade.

Tabela 4.3: Testes de Raíz Unitária

Série	$H_0 : y_{i,t} \text{ é } I(2)$	
	Estatística τ	p -valor
PIB real	-5.59	0.01
Produção Industrial	-18.46	0.01
Vendas reais no Varejo	-16.38	0.01
Taxa de Inflação	-15.67	0.01
Taxa de Desemprego	-10.77	0.01

Fonte: Elaboração Própria.

Já na Tabela 4.4, verificam-se os graus de correlação cruzada entre o PIB trimestral e as covariadas e suas respectivas defasagens em até 4 períodos, a fim de verificar se a correlação é maximizada quando as séries são tomadas contemporaneamente. Como pode ser visto, a correlação entre as séries contemporâneas é maior, apesar de serem de um grau inferior a outros trabalhos (Issler e Notini (2016)). Adicionalmente, na Tabela 4.5, investigamos a existência de tendência comum entre as séries coincidentes e o PIB, por meio do teste de cointegração de Johansen. Os resultados do teste para $r = 0$ em todas as variáveis indicam é possível rejeitar a hipótese nula de ausência de cointegração. Para o caso $r \leq 1$, os valores das estatísticas de teste foram inferiores aos valores críticos, de forma que não é possível rejeitar a hipótese nula de que o número de vetores cointegrados está entre zero e 1.

Tabela 4.4: Análise de Correlação entre lags das variáveis auxiliares e PIB

Série	$t - 4$	$t - 3$	$t - 2$	$t - 1$	t
Produção Industrial	-0.08	0.16	0.02	0.14	0.45
Vendas reais no Varejo	-0.04	0.04	0.17	0.23	0.27
Taxa de Inflação	-0.15	-0.04	0.02	-0.03	0.17
Taxa de Desemprego	-0.093	-0.026	-0.19	-0.28	-0.45

Fonte: Elaboração Própria.

Por fim, conforme a Tabela 4.6, realizamos o procedimento usual de seleção de modelos para escolha da ordem p do processo VAR(p), indicado como $p = 3$ pelos critérios abaixo:

Tabela 4.5: Teste de Cointegração

Hipótese	Estatística	Valor crítico	Conclusão
PIB real e Produção Industrial			
$H_0 : r = 0$ vs $H_1 : r > 0$	46.72	24.60	rejeita H_0
$H_0 : r \leq 1$ vs $H_1 : r > 1$	6.33	12.97	não rejeita H_0
PIB real e Vendas reais			
$H_0 : r = 0$ vs $H_1 : r > 0$	40.23	24.60	rejeita H_0
$H_0 : r \leq 1$ vs $H_1 : r > 1$	6.74	12.97	não rejeita H_0
PIB real e Inflação			
$H_0 : r = 0$ vs $H_1 : r > 0$	47.77	24.60	rejeita H_0
$H_0 : r \leq 1$ vs $H_1 : r > 1$	9.08	12.97	não rejeita H_0
PIB real e Desemprego			
$H_0 : r = 0$ vs $H_1 : r > 0$	24.31*	24.6	rejeita H_0
$H_0 : r \leq 1$ vs $H_1 : r > 1$	7.39	12.97	não rejeita H_0

Fonte: Elaboração Própria.

Tabela 4.6: Escolha de p

Critério	Ordem de defasagem p				
	1	2	3	4	5
AIC	2.92	2.91	2.88	2.88	2.89
HQ	2.92	2.92	2.89	2.89	2.90
SC	2.93	2.93	2.90	2.91	2.92
FPE	18.62	18.47	17.92	17.97	18.01

Fonte: Elaboração Própria.

ESTIMAÇÃO MF-VAR. A Tabela 4.7 exhibe os parâmetros autorregressivos do modelo MF-VAR, juntamente aos intervalos de confiança estimados via *bootstrap* (Stoffer e Wall (1991))⁷. Para inicializar os parâmetros, agregamos as variáveis auxiliares da frequência mensal para trimestral e estimamos um VAR(3), assim obtemos estimativas iniciais para os parâmetros de transição. Já para as variâncias, regredimos o termo de erro \hat{u}_t da regressão anterior em \hat{u}_{t-1} . A Tabela 4.8 exhibe as estimativas da matriz de covariância Σ do modelo MF-VAR.

⁷ Stoffer e Wall (1991) apresentam um algoritmo para gerar intervalos de confiança por meio do método *bootstrap* não paramétrico para modelos de espaço de estados.

Tabela 4.7: Resultados MF-VAR: Coeficientes Φ

Variável	μ	INFL ($t - 1$)	PNADC ($t - 1$)	PMC ($t - 1$)	PIM ($t - 1$)	PIB ($t - 1$)
INFL	0,385 [0,342 ; 0,425]	0,198 [0,146 ; 0,25]	0,208 [0,086 ; 0,322]	0,002 [-0,024 ; 0,029]	-0,006 [-0,025 ; 0,012]	0,008 [-0,029 ; 0,047]
PNADC	0,001 [-0,015 ; 0,018]	0,008 [-0,012 ; 0,029]	0,807 [0,76 ; 0,856]	-0,002 [-0,012 ; 0,008]	0,002 [-0,006 ; 0,01]	-0,004 [-0,019 ; 0,011]
PMC	0,071 [-0,029 ; 0,163]	-0,001 [-0,114 ; 0,116]	-0,069 [-0,352 ; 0,182]	0,651 [0,588 ; 0,707]	0,012 [-0,029 ; 0,053]	0,100 [0,014 ; 0,178]
PIM	0,006 [-0,051 ; 0,062]	-0,003 [-0,07 ; 0,064]	0,019 [-0,138 ; 0,171]	0,002 [-0,033 ; 0,035]	0,957 [0,932 ; 0,983]	-0,006 [-0,051 ; 0,041]
PIB	0,008 [-0,028 ; 0,041]	0,002 [-0,041 ; 0,041]	-0,011 [-0,115 ; 0,086]	0,009 [-0,012 ; 0,031]	-0,002 [-0,018 ; 0,013]	0,943 [0,916 ; 0,972]
Variável		INFL ($t - 2$)	PNADC ($t - 2$)	PMC ($t - 2$)	PIM ($t - 2$)	PIB ($t - 2$)
INFL		0,009 [-0,005 ; 0,024]	0,005 [-0,06 ; 0,07]	0,001 [-0,009 ; 0,011]	-0,006 [-0,02 ; 0,009]	-0,009 [-0,038 ; 0,023]
PNADC		0,000 [-0,005 ; 0,006]	0,026 [-0,001 ; 0,052]	0,000 [-0,004 ; 0,004]	0,001 [-0,005 ; 0,007]	-0,002 [-0,013 ; 0,011]
PMC		0 [-0,032 ; 0,031]	0,000 [-0,134 ; 0,148]	-0,008 [-0,033 ; 0,015]	0,002 [-0,031 ; 0,037]	0,001 [-0,06 ; 0,072]
PIM		-0,001 [-0,019 ; 0,018]	-0,001 [-0,081 ; 0,084]	0,000 [-0,013 ; 0,014]	0,001 [-0,019 ; 0,019]	0,002 [-0,04 ; 0,044]
PIB		0,000 [-0,011 ; 0,012]	0,001 [-0,049 ; 0,051]	0,001 [-0,008 ; 0,01]	-0,001 [-0,012 ; 0,012]	0,031 [0,006 ; 0,057]
Variável		INFL ($t - 3$)	PNADC ($t - 3$)	PMC ($t - 3$)	PIM ($t - 3$)	PIB ($t - 3$)
INFL		0,001 [-0,005 ; 0,007]	0,002 [-0,026 ; 0,03]	0,001 [-0,004 ; 0,006]	-0,001 [-0,011 ; 0,007]	-0,001 [-0,016 ; 0,014]
PNADC		0,000 [-0,002 ; 0,002]	0,001 [-0,012 ; 0,013]	0,000 [-0,002 ; 0,002]	0,000 [-0,004 ; 0,004]	-0,001 [-0,007 ; 0,005]
PMC		0,000 [-0,013 ; 0,014]	-0,006 [-0,071 ; 0,059]	0,000 [-0,011 ; 0,011]	0,003 [-0,017 ; 0,023]	0,000 [-0,035 ; 0,033]
PIM		0,000 [-0,009 ; 0,009]	-0,001 [-0,039 ; 0,041]	0,000 [-0,006 ; 0,006]	0,001 [-0,011 ; 0,012]	0,001 [-0,02 ; 0,022]
PIB		0,000 [-0,005 ; 0,005]	0,001 [-0,022 ; 0,025]	0,000 [-0,004 ; 0,004]	0,000 [-0,008 ; 0,007]	0,001 [-0,011 ; 0,014]

Nota: Intervalos de confiança *bootstrap* de 5% e 95% entre colchetes.

Fonte: Elaboração Própria.

Tabela 4.8: Resultados MF-VAR: Estimativas de Σ

Variável	INFL	PNADC	PMC	PIM	PIB
INFL	0,060 [0,05 ; 0,072]	0,003 [-0,001 ; 0,006]	0,002 [-0,015 ; 0,018]	-0,001 [-0,011 ; 0,009]	0,000 [-0,005 ; 0,007]
PNADC	0,003 [-0,001 ; 0,006]	0,010 [0,008 ; 0,012]	-0,001 [-0,008 ; 0,006]	0,000 [-0,004 ; 0,004]	0,000 [-0,002 ; 0,002]
PMC	0,002 [-0,015 ; 0,018]	-0,001 [-0,008 ; 0,006]	0,304 [0,256 ; 0,367]	0,001 [-0,022 ; 0,024]	0,004 [-0,011 ; 0,018]
PIM	-0,001 [-0,011 ; 0,009]	0,000 [-0,004 ; 0,004]	0,001 [-0,022 ; 0,024]	0,105 [0,09 ; 0,126]	0,000 [-0,008 ; 0,008]
PIB	0,000 [-0,005 ; 0,007]	0,000 [-0,002 ; 0,002]	0,004 [-0,011 ; 0,018]	0,000 [-0,008 ; 0,008]	0,040 [0,034 ; 0,047]

Nota: Intervalos de confiança *bootstrap* de 5% e 95% entre colchetes.

Fonte: Elaboração Própria.

Uma vez construído o indicador coincidente com base no vetor de estados suavizado pelo Filtro de Kalman, com $2004:M1 = 1$, usa-se o algoritmo de Bry e Boschan (p.7-63, 1971) para detectar os pontos de mínimo e máximo local em séries temporais. A Tabela 4.9 compara as datas identificadas para o PIB mensal estimado com as datas determinadas pelo Comitê de Datação de Ciclos Econômicos (CODACE).

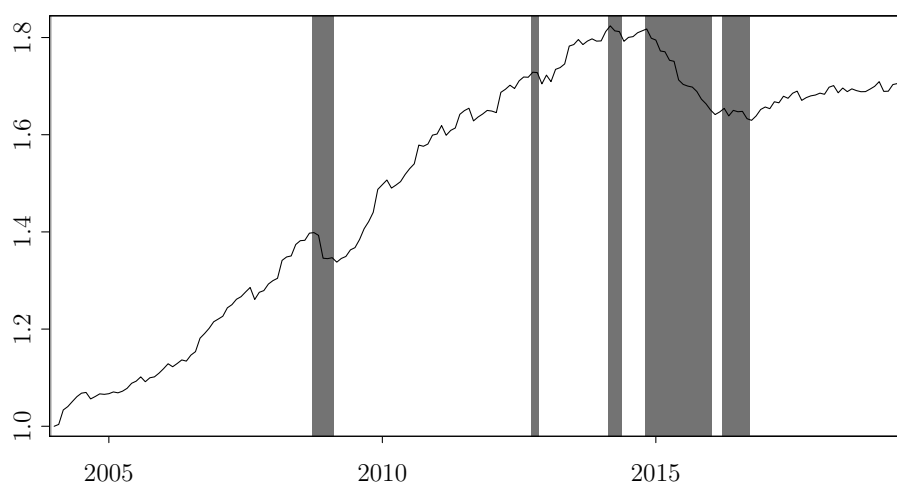
Tabela 4.9: Detecção de Recessão e Expansão

Recessão		Expansão	
MF-VAR	CODACE	MF-VAR	CODACE
2008:M10 - 2009:M3	2008:T4 - 2009:T1	2009:M3 - 2012:M10	2003:T3 - 2008:T3
2012:M10 - 2012:M12	2014:T2 - 2016:T4	2012:M12 - 2014:M3	2009:T2 - 2014:T1
2014:M3 - 2014:M6		2014:M3 - 2014:M6	2017:T1 - 2019:T4
2014:M11 - 2016:M2		2016:M2 - 2016:M4	
2016:M4 - 2016:M10		2016:M10 -	

Fonte: Elaboração Própria.

Em geral, a datação de recessões e expansão do crescimento do produto apresentaram-se muito próximas, dando-se atenção à oscilação do PIB mensal estimado de um estado para outro durante o período mais longo de recessão marcado pelo CODACE. Isso mostra que o indicador estimado é mais sensível ao algoritmo, por apresentar maior variabilidade antes não capturada sob frequência trimestral. A Figura 4.4 ilustra os períodos marcados e o nível do indicador coincidente, semelhantemente à Figura 4.2.

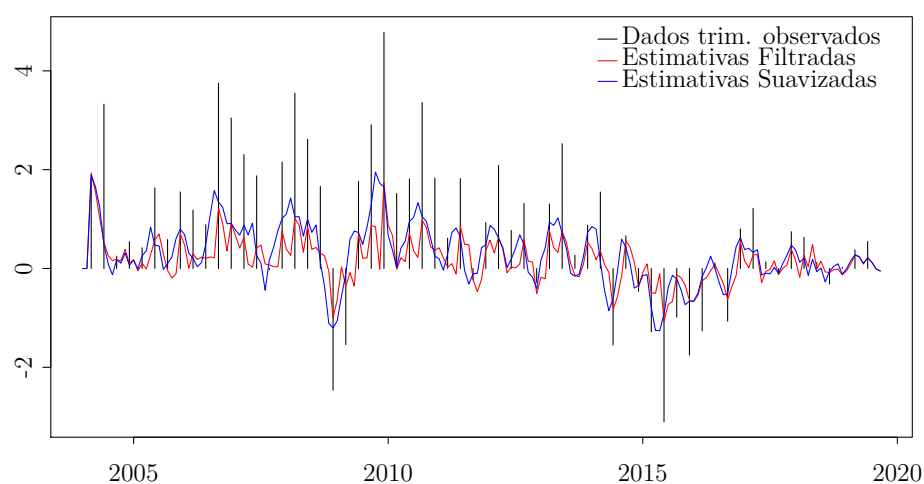
Figura 4.4: Recessões e Expansões - Série do PIB mensal estimado em nível com ajuste sazonal (em logaritmo)



Fonte: Elaboração própria.

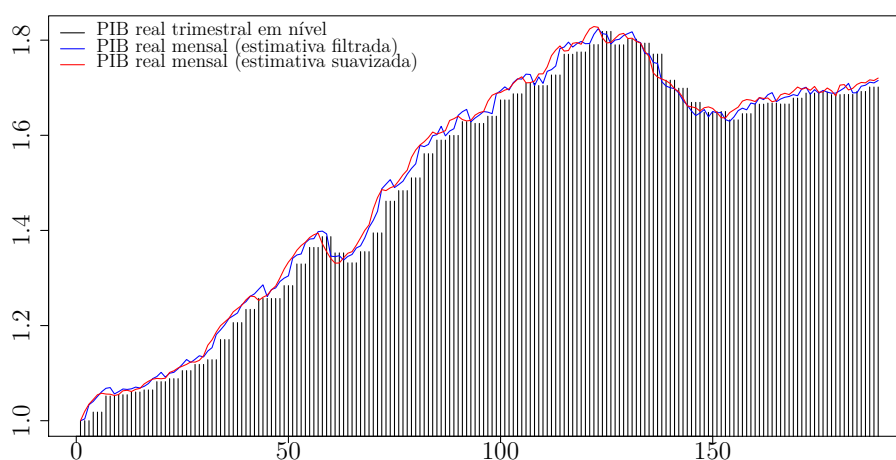
AJUSTE TRIMESTRAL E COMPARAÇÃO COM OUTROS INDICADORES DA ATIVIDADE ECONÔMICA. As Figuras 4.5 e 4.6 abaixo apresentam a trajetória do vetor de estados estimado, em comparação com y_t^+ .

Figura 4.5: 1ª diferença: PIB trimestral (observado) *versus* PIB mensal estimado (estimativas filtradas e suavizadas)



Fonte: Elaboração própria.

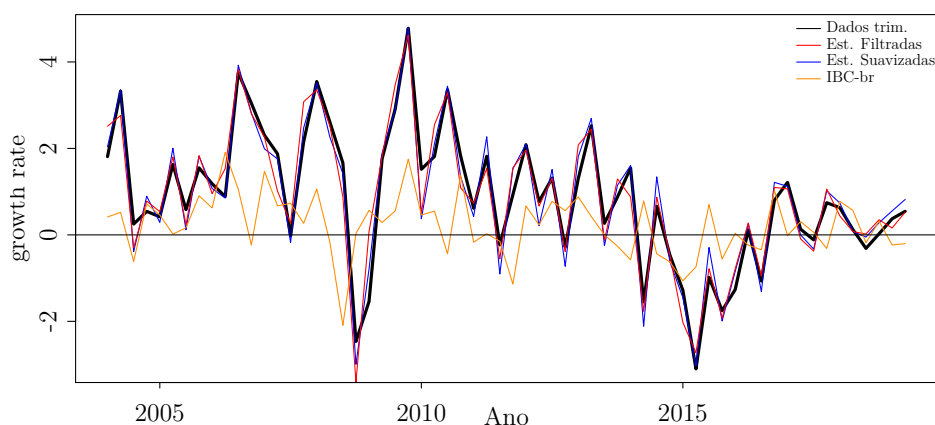
Figura 4.6: Indicador Coincidente - Série do PIB mensal estimado *versus* Série do PIB trimestral (séries em nível com ajuste sazonal e escala logarítmica)



Fonte: Elaboração própria.

O modelo utilizado para a construção do PIB mensal possui uma restrição de que a soma da terceira diferença da taxa instantânea de crescimento do PIB mensal nos meses correspondentes ao trimestre deve ser igual a taxa instantânea de crescimento do PIB trimestral, divulgado pelo IBGE (veja a equação de transição). Deste modo, ao trimestralizar o PIB mensal estimado sob essa restrição, obtemos uma aderência perfeita dentro da amostra. A Figura 4.7 abaixo compara o ajuste dentro da amostra entre o PIB estimado trimestralizado e o IBC-br⁸.

Figura 4.7: PIB trimestral *versus* PIB trimestralizado



Fonte: Elaboração própria.

DESENHO DE PREVISÃO. Devemos ressaltar que a amostra que utilizamos equivale ao

⁸ O IBC-Br é calculado através da agregação de séries mensais dos setores da agricultura, indústria e serviços.

último dado do PIB disponibilizado pelo IBGE em 2T/2019, isto é, após possíveis revisões terem sido feitas. Essa observação nos permite distinguir entre uma análise de previsão em tempo real e uma análise de previsão em falso tempo real. O cenário em tempo real usa o *vintage* atualmente disponível na construção e avaliação das previsões. Já no caso de um exercício de falso tempo real, utiliza-se o último *vintage* disponível, após uma sequência de divulgações e que ainda pode ser revisado. Assim, de acordo com as informações disponíveis, conduziremos um exercício em tempo real, mas, para algumas variáveis, usaremos a última *vintage* disponível, como discutido anteriormente.

Outra distinção que devemos fazer é entre os termos *backcast* e *nowcast*. O termo *nowcast* da atividade econômica se dá para a previsão do PIB do trimestre corrente, usando o máximo de informação disponível, enquanto *backcasting* é a previsão de observações prévias. Por outro lado, uma característica desses problemas de *nowcasting* em algumas economias é a defasagem na publicação das estatísticas oficiais, como mostra o exemplo do PIB brasileiro na Tabela 4.10 abaixo.

Tabela 4.10: Ragged-edge do PIB trimestral

Referência	Publicação
2018T1	30/05/2018
2018T2	31/08/2018
2018T3	30/11/2018
2018T4	28/02/2019
2019T1	30/05/2019
2019T2	29/08/2019

Fonte: IBGE/SCN e Elaboração Própria.

Dado essa estrutura do fluxo informacional, trataremos o termo *nowcasting* como a previsão das próximas leituras a serem divulgadas, considerando a totalidade de informação disponível. Dito isso, avaliaremos a acurácia dessas previsões do PIB real no trimestre corrente, a partir de um exercício de *nowcast* do segundo trimestre de 2016 até o segundo trimestre de 2019, isto é, em cada ponto do tempo é considerada a última *vintage* de dados disponível até aquele momento e então é feita a estimação do PIB mensal. Esse exercício permite avaliar o quão boas são as estimativas do modelo para o PIB no trimestre seguinte, com uma janela de informação móvel.

Nesse exercício se compara a capacidade preditiva do MF-VAR em prever o PIB trimestral h passos à frente. A base de dados é então dividida, sendo o período *in-sample* 2004:T1-2016:T2, e o período que desejamos prever, 2016:T2-2019:T2, totalizando 12 estimativas (12 trimestres).

Devido aos problemas de diferenças de frequências, seguimos a divisão proposta por Zuanazzi e Ziegelmann (2014) para adaptar o exercício de previsão de acordo com o conjunto de informação disponível no instante t . Por exemplo, se desejamos estimar o PIB trimestral a partir do modelo MF-VAR (mensal), temos três tipos de horizontes de previsão:

1. $h=1$ passo à frente: utilizando informações até o último mês do trimestre anterior ao de interesse; nesse caso, o conjunto informacional no momento da construção da previsão terá variáveis com defasagens diferentes. Por exemplo, em 31/03/2019, a produção de previsões para o 2T/19 considerava o PIB do 4T/18 e dados de atividade econômica até jan/2019.
2. $h=2/3$ passo à frente: utilizando informações até o primeiro mês do trimestre de previsão; como exemplo, em 30/04/2019, as informações disponíveis para os dados de atividade econômica eram para a data-base fev/19.
3. $h=1/3$ passo à frente: utilizando informação até o segundo mês do trimestre de previsão; como exemplo, em 31/05/2019, as informações disponíveis para os dados de atividade econômica eram para a data-base mar/19 e conhecíamos o PIB do 1T/19.

Em resumo, ajustam-se as previsões de acordo com o fluxo de informação disponível em cada mês, e estimam-se os vetores de estados para h passos á frente dependendo da posição mensal da filtragem.

Dessa forma, para os três horizontes de tempo h , o primeiro e o último trimestres de previsão foram 2016:T3 e 2019:T2, tendo como amostras, para $h = 1$, por exemplo, os períodos 2004:T1 a 2016:T2 e 2004:T1 a 2019:T1, respectivamente. Para $h = 2/3$, utilizou-se 1 mês dentro do próprio trimestre de previsão, e para $h = 1/3$, utilizaram-se 2 meses dentro do trimestre de previsão⁹.

ACURACIDADE PREDITIVA. Como não podemos avaliar o erro de previsão das estimativas mensais, usamos o esquema de agregação introduzido na equação de medida para transformar vetor de estados mensal em trimestral no modelo MF-VAR. Usando os valores previstos h passos à frente, comparamos os erros de previsão com os erros de previsão de um modelo VAR trimestral padrão, e de um modelo estimado por Componente Principal (PCA). Na Tabela 4.11, são apresentados os RMSE por modelo:

⁹ No caso de $h=2/3$, usamos a informação 2004:T1-2019:T2.M1 para prever 2019:T2, em que 2019:T2.M1 se refere ao mês de abril de 2019. Para $h=1/3$ segue o mesmo raciocínio.

Tabela 4.11: Erros de previsão h passo à frente

	$h = 1$	$h = 2/3$	$h = 1/3$	DM
VAR	0.703			0.078
PCA	0.839			0.08
MF-VAR	0.113	0.077	0.003	

Nota: Valores RMSE calculados para o ajuste trimestral fora da amostra. Valor DM corresponde ao p-valor do teste de Diebold-Mariano.

Fonte: Elaboração Própria.

Como pode ser visto, as previsões resultantes do modelo MF-VAR apresentam erros de previsão menores que qualquer outro comparado. Destaca-se que a capacidade preditiva do modelo melhora à medida que inserimos mais observações mensais e reduzimos o tamanho de h , um resultado que vai de encontro com o esperado. Além disso, pelo teste de Diebold-Mariano se compara se os modelos são melhores estatisticamente entre si em pares.

4.3 EXTENSÕES MF-VAR

Nesta seção revisamos algumas extensões da modelagem MF-VAR voltadas para o tratamento de observações extremas.

4.3.1 Estimação Bayesiana

A estimação bayesiana do MF-VAR tem como referência o trabalho de Schorfheide e Song (2015). No caso brasileiro, Borges e Portugal (2018) replicaram o MF-VAR bayesiano considerando três variáveis trimestrais e seis variáveis mensais. A seleção das variáveis no presente artigo seguiu alguns critérios diferentes, buscamos nos concentrar mais nos indicadores de atividade econômica e que possuem maior correlação com o PIB, além de buscar mais parcimônia.

Novamente, consideremos $y_t = (y_{1,t}, \dots, y_{n,t})'$ seja um vetor $n \times 1$ de n variáveis aleatórias. O modelo VAR(p) escrito para y_t pode ser representado por:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \Phi_c + u_t, \quad u_t \sim iidN(0, \Sigma) \quad (4.1)$$

para $t = 1, \dots, T$. A representação de espaço de estado do modelo MF-VAR mensal com uma equação de medida para y_t pode ser escrita:

$$\begin{aligned} y_t &= M_t Z_t \\ Z_t &= C_t + T_t Z_{t-1} + R_t u_t \end{aligned} \quad (4.2)$$

com o vetor, y_t , e o vetor de estados, Z_t , definidos sob a estrutura de dados faltantes apresentada na subseção 3.2.1.

Desde que o vetor u_t é i.i.d, o modelo VAR acima pode ser usado para construir a função de verossimilhança, na qual retorna a probabilidade de se observar uma sequência de variáveis aleatórias $Y_{1:T} = \{y_1, \dots, y_T\}$, condicional em parâmetros (Φ, Σ) e p observações iniciais:

$$p(Y_{1:T}|\Phi, \Sigma, Y_{1-p:0}) = \prod_{t=1}^T p(Y_t|\Phi, \Sigma, Y_{1-p:t-1}) \quad (4.3)$$

Sucintamente, usamos a seguinte igualdade para a função de verossimilhança: $p(Y|\Phi, \Sigma) \equiv p(Y_{1:T}|\Phi, \Sigma, Y_{1-p:0})$. Sob a regra de Bayes, temos que:

$$p(Y|\Phi, \Sigma) = \frac{p(Y|\Phi, \Sigma)p(\Phi, \Sigma)}{p(Y)} \quad (4.4)$$

em que $p(\Phi, \Sigma)$ é a distribuição *a priori* (uma avaliação subjetiva sobre as probabilidades de (Φ, Σ) antes de Y ser observado), e $p(\Phi, \Sigma|Y)$ é a distribuição *a posteriori* (a avaliação das probabilidades de (Φ, Σ) após Y ser observado). A distribuição *a posteriori* é o principal objeto de interesse em inferência Bayesiana.

GIBBS SAMPLING. Com o modelo fundamentado no espaço de estados, pode-se estimar o conjunto completo de parâmetros e estados latentes dado por $\Theta = \{\Phi, \Sigma, Z_{0:T}\}_{t=1}^T$, em que $Z_{0:T}$ é o vetor de estados latentes do modelo MF-VAR e Φ e Σ são o vetor de parâmetros e a matriz de variância-covariância, respectivamente. Assim como Schorfheide e Song (2015), a inferência dos parâmetros de interesse e variáveis de estado é viabilizada por meio do amostrador de Gibbs, denotado *two-block Gibbs sampler*, implementado por meio do algoritmo de Carter e Kohn (1994). Mais precisamente, o amostrador de Gibbs permite gerar amostras a partir da distribuição *a posteriori* de $(\Phi, \Sigma)|Z_{0:T}$ e de $Z_{0:T}|(\Phi, \Sigma)$. A partir dessas amostragens, é possível simular trajetórias futuras de y_t para caracterizar a distribuição preditiva do modelo.

Conforme mostrado por Schorfheide e Song (2015), a densidade *a posteriori* condicional dos parâmetros VAR e estados latentes do MF-VAR (condicional em uma pré-amostra $Y_{-p+1:0}$ usada para inicialização), é descrita por:

$$\begin{aligned} p(\Phi, \Sigma|Z_{0:T}, Y_{-p+1:T}) &\propto p(Z_{1:T}|z_0, \Phi, \Sigma)p(\Phi, \Sigma|\lambda) \\ p(Z_{0:T}|\Phi, \Sigma, Y_{-p+1:T}) &\propto p(Y_{1:T}|Z_{1:T})p(Z_{1:T}|z_0, \Phi, \Sigma)p(z_0|Y_{-p+1}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que z_0 é a condição inicial do vetor de estados e $Y_{-p+1:T}$ é uma representação do conjunto de dados completo, que pode ser particionada na pré-amostra $Y_{-p+1:0}$ e na amostra $Y_{1:T}$.

Neste caso, o amostrador de Gibbs que itera as duas distribuições *a posteriori*

$$p(\Phi, \Sigma | Z_{0:T}, Y_{-p+1:T}) \quad \text{e} \quad p(Z_{0:T} | \Phi, \Sigma, Y_{-p+1:T}) \quad (4.6)$$

é implementado por meio do algoritmo de Carter e Kohn (1994). Para a primeira densidade, com uma escolha adequada de prioris, a amostragem desta distribuição é reduzida a uma regressão multivariada. A segunda densidade corresponde à estimativas suavizadas dos estados latentes, na qual pode ser obtida pelo simulador de Durbin e Koopman (2012).

A inicialização para o passo do filtro de Kalman do suavizador é obtida da distribuição $p(z_0 | Y_{-p+1:0})$. Essa distribuição, por sua vez, é definida como gaussiana e pode ser filtrada em uma etapa inicial com base na pré-amostra $Y_{-p+1:0}$ e nas prioris para os parâmetros (Φ, Σ) . A distribuição de $Y_{1:T} | Z_{1:T}$ e a densidade $p(Z_{1:T} | z_0, \Phi, \Sigma)$ são obtidos por construção no sistema de equações, e $p(\Phi, \Sigma | \lambda)$ representa a densidade *a priori* dos parâmetros do VAR.

INFORMAÇÃO A PRIORI. Para a distribuição marginal dos parâmetros (Φ, Σ) usamos uma priori Minnesota, na forma de uma distribuição Normal multivariada Wishart Inversa (MNIW). Essa é uma priori conjugada de modo que *a priori* MNIW resulta em uma posteriori que também é MNIW. A priori de Minnesota é implementada sob o método de *data-augmentation*, em que o conjunto de dados observados é aumentado com observações *dummy* (Brave, Butters e Fogarty (2020) para uma exposição intuitiva). Em particular, a priori assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Sigma &\sim IW(\psi, \varphi), \\ \Phi | \Sigma &\sim N(\Gamma, \Sigma \otimes \Omega). \end{aligned} \quad (4.7)$$

em que, seguindo a convenção de um VAR mensal, a matriz Γ é abastecida por valores iguais a 0 e 1, na qual produz efeito de reduzir o sistema em direção a um passeio aleatório ou a um ruído branco. A matriz de covariância Ω da distribuição *a priori* é caracterizada pelo vetor de hiperparâmetros $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)'$, os quais controlam as regularidades estatísticas de séries macroeconômicas.

Os hiperparâmetros são descritos como segue. O hiperfator λ_1 controla a precisão sobre os interceptos do modelo VAR, Φ_c . O hiperfator λ_2 controla o ajuste geral da priori. A priori é parametrizada de modo que quando $\lambda \rightarrow 0$, a priori se torna não informativa (ou "*flat*"), produzindo basicamente estimativas OLS, e quando $\lambda \rightarrow 1$, a priori se torna mais assertiva. O elemento λ_3 , é o fator de decaimento da variância conforme aumenta a defasagem dos coeficientes, implicando que quanto mais longa for a defasagem mais a variância se aproximará de zero. Os demais parâmetros λ_4 e λ_5 governam a persistência e co-persistência do VAR. O primeiro é conhecido como "*sum of coefficients prior*", e

expressa que a soma dos coeficientes autorregressivos para cada variável é igual a 1. O segundo é o parâmetro de ajuste para a co-persistência entre os coeficientes do VAR, e reflete a premissa de que se a soma de todos os coeficientes do modelo VAR é próxima de uma matriz identidade, então os interceptos devem ser pequenos (ou contrariamente, se o VAR é estacionário, então os interceptos não são próximos de zero).

Com relação à priori de Σ , a matriz ψ é diagonal com elementos proporcionais à variância residual de cada n variável, e os graus de liberdade φ são escolhidos tal que a priori para Σ seja centrada em ψ/n , sendo n o número de variáveis do modelo MF-VAR.

No MF-VAR, geralmente são escolhidos os hiperparâmetros que conjuntamente maximizam a densidade marginal dos dados (MDD). Para tornar as coisas mais simples, usaremos os hiperparâmetros estimados por Borges e Portugal (2018) para dados brasileiros:

Tabela 4.12: Hiperparâmetros (Borges e Portugal (2018))

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
0.03	3.4	1.00	3.4	3.24

Fonte: Elaboração Própria.

4.3.2 Correção de Lenza e Primiceri (2020)

Lenza e Primiceri (2020) mostraram que, durante e após o período da pandemia, a estimação de um modelo VAR como na equação (4.1) produz previsões incoerentes e IRFs explosivas que indicam uma recessão contínua sem fim. Diante disso, Lenza e Primiceri (2020) propõem permitir uma quebra comum na volatilidade, que é modelada através de uma variável s_t que determina como a matriz de covariância residual varia durante o período da pandemia. Seguindo sua especificação, que é basicamente uma aplicação de *Mínimos Quadrados Generalizados (GLS)*, a equação de um VAR (p) é modificada como:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \Phi_c + s_t u_t, \quad u_t \sim iidN(0, \Sigma) \quad (4.8)$$

na qual se assume $s_t = 1$ antes do período pandêmico, $t = t_*$. Após isso, s_t segue

$$\begin{aligned} s_{t_*} &= \bar{s}_0, & s_{t_*+1} &= \bar{s}_1, & s_{t_*+2} &= \bar{s}_2, \\ s_{t_*+j} &= 1 + (\bar{s}_2 - 1)\bar{\rho}^{j-2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

No contexto MF-VAR, como a pandemia do COVID-19 se iniciou no primeiro trimestre de 2020, podemos estabelecer o mês de mar/20 como $t^* = 2020:M3$; sendo assim, \bar{s}_0 pode ser estimado para essa data e \bar{s}_1, \bar{s}_2 para os próximos meses. Então, o fator de escala decai a uma taxa $\bar{\rho}$ para todos períodos futuros. Em resumo, esta parametrização flexível permite que este fator de escala assuma três valores diferentes nos primeiros três períodos após o

início da pandemia, e decaía a uma taxa $\bar{\rho}$ depois disso.

Com a nova formulação, a amostragem da distribuição a posteriori do MF-VAR precisa ser modificada, pois o vetor $\nu = (\bar{s}_0^2, \bar{s}_1^2, \bar{s}_2^2, \bar{\rho})'$ precisa ser estimado. Seguimos as adaptações propostas por Schorfheide e Song (2023). Os cálculos bayesianos são implementados com um amostrador Metropolis-*within*-Gibbs que itera sobre as três distribuições condicionais a seguir¹⁰:

$$\begin{aligned} p(\Phi, \Sigma | Z_{0:T}, Y_{-p+1:T}, \nu) &\propto p(Z_{1:T} | z_0, \Phi, \Sigma | Z_{0:T}, \nu) p(\Phi, \Sigma | \lambda) \\ p(Z_{0:T} | \Phi, \Sigma, Y_{-p+1:T}, \nu) &\propto p(Y_{1:T} | Z_{1:T}) p(Z_{1:T} | z_0, \Phi, \Sigma, \nu) \times p(z_0 | Y_{-p+1}) \\ p(\nu | \Phi, \Sigma, Z_{0:T}, Y_{-p+1:T}) &\propto p(Z_{1:T} | z_0, \Phi, \Sigma, \nu) p(\nu) \end{aligned} \quad (4.10)$$

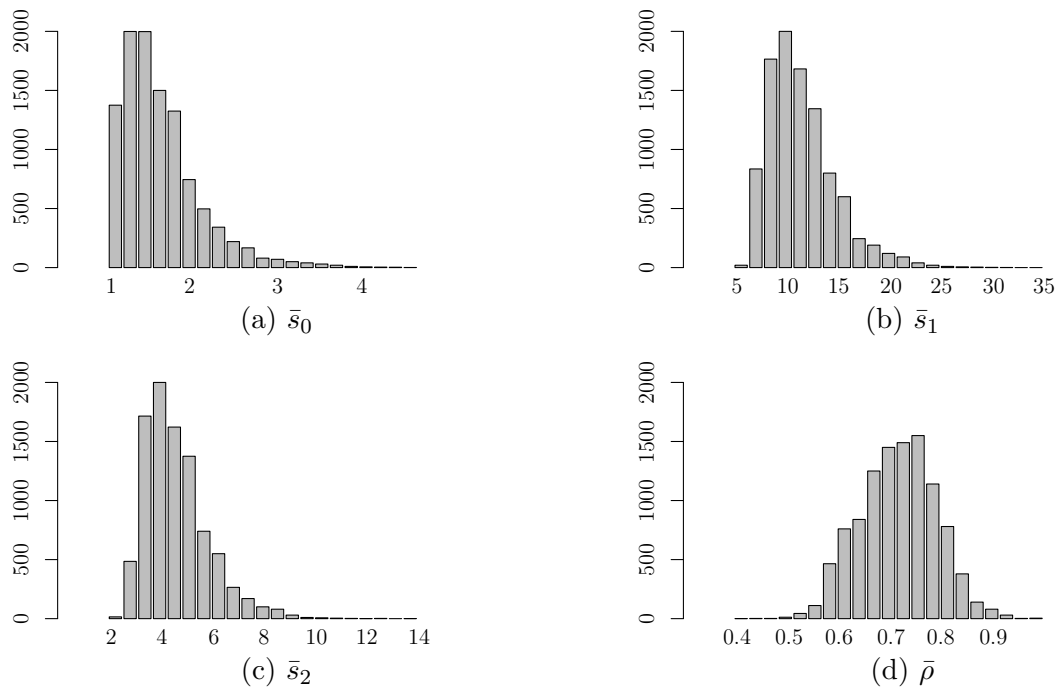
em que a terceira distribuição é a novidade. Veja Schorfheide e Song (2023) para uma exposição completa. Em resumo, o amostrador de Gibbs é modificado para acomodar s_t e amostrar o vetor ν , de modo que inicialmente se altera a função de verossimilhança e a amostragem do vetor de estados, e então se usa uma distribuição de Pareto como priori para o quadrado dos elementos de escala \bar{s}_j e uma distribuição Beta como priori para $\bar{\rho}$. A amostragem posterior de \bar{s}_0 e de \bar{s}_1 resultam em distribuições Gamma Inversa truncadas em 1, enquanto a amostragem posterior de $(\bar{s}_2, \bar{\rho})$ precisa ser calculada diretamente. Para esse caso, o algoritmo adapta uma etapa via *random-walk Metropolis-Hastings*.

Dado que a nossa principal preocupação é estudar o ajustamento das estimativas a choques extremos, como os choques observados em 2020, a verificação das estimativas dos fatores de escala gerados pela especificação de Lenza e Primiceri (2020) pode ser esclarecedora. Principalmente, se a escala for irrelevante, as estimativas posteriores devem sugerir valores iguais a $\bar{s}_0 = \bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 1$; caso contrário, eles devem ser consideráveis.

A estimativas posteriores do vetor ν são apresentadas na Figura 4.8. Os posteriores resultantes para \bar{s}_0 , \bar{s}_1 , \bar{s}_2 atingem medianas em torno de 1.5, 10.0 e 4.0, respectivamente, indicando que, de fato, é relevante para esta amostra aumentar os erros em torno das observações do COVID-19 para explicar o aumento acentuado em volatilidade daquele período. No entanto, a estimativa posteriori do coeficiente de decaimento ($\bar{\rho}$) atinge o pico em torno de 0.75, o que, juntamente com \bar{s}_2 , implica que o fator de escala de volatilidade caiu um terço após junho de 2020 e depois de forma não linear para um.

¹⁰ Lenza e Primiceri (2020) usam um amostrador que calcula (Φ, Σ) analiticamente. Devido à forma de espaço do MF-VAR, isto não é possível. Dessa maneira, seguimos a abordagem proposta por Schorfheide e Song (2023).

Figura 4.8: Distribuição posterior dos parâmetros de escala da correção de Lenza e Primiceri (2020) aplicada ao modelo MF-VAR para o período do COVID-19



Fonte: Elaboração própria.

4.3.3 (SVO-t): Volatilidade Estocástica com Outliers Transitórios e Caudas Pesadas nos Resíduos

Em relação à distribuição dos erros, uma classe de especificações diferentes pode ser obtida se relaxarmos a suposição de que os erros, na i -ésima equação do MF-VAR, $u_{i,t}$, são homocedásticos e substituímos com a seguinte estrutura:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \Phi_c + u_t, \quad u_t \sim iidN(0, \theta_t e^{h_{i,t}}) \quad (4.11)$$

de forma que diferentes suposições sobre $\theta_{i,t}$ e $h_{i,t}$ podem definir uma ampla gama de diferentes distribuições de erros. O modelo de volatilidade estocástica padrão (SV) pode ser obtido se assumirmos $\theta_{i,t} = 1$ e que o vetor de log-volatilidade h_t segue um processo de passeio aleatório:

$$h_{i,t} = h_{i,t-1} + \varepsilon_t^h, \quad \varepsilon_t^h \sim iidN(0, \sigma_h^2) \quad (4.12)$$

Através da variável latente θ_t é possível introduzir a modelagem de outliers potenciais. Aqui, consideramos o tratamento de mistura de distribuições considerado em Stock e Watson (2016) e Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022). Essa estrutura pretende capturar valores discrepantes como mudanças raras, transitórias e grandes na volatilidade. Os outliers entram no modelo em uma matriz diagonal de fatores de escala, denotada por O_t , com elementos diagonais $o_{j,t}$ que são mutuamente i.i.d. para todo j e t . Em

particular, definimos $\theta_t = o_t^2$, em que o_t segue uma distribuição de duas partes: com probabilidade $1 - q$, $o_t = 1$; caso contrário, o_t segue uma distribuição uniforme no intervalo $(2, 10)$. Valores distribuídos em torno de 1 representam observações regulares cuja escala é normalizada para 1; a segunda parte captura valores discrepantes que podem ter desvios padrão duas a dez vezes maiores em relação às observações regulares.

Outra suposição, seguindo Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022), que, por sua vez, usaram o procedimento descrito em Jacquier, Polson e Rossi (2004), é assumir uma distribuição contínua para $\theta_t = q_t^2$, em que q_t^2 segue uma distribuição Gamma Inversa:

$$q_{j,t}^2 \sim \mathcal{IG}(d_j/2, d_j/2) \quad (4.13)$$

então os erros têm uma distribuição t-Student com d_j graus de liberdade, permitindo assim caudas mais pesadas que a Normal. Esta escolha é motivada pelo fato de que uma distribuição t-Student com grau de liberdade d pode ser representada como uma mistura de normais em que a distribuição de mistura é $\mathcal{IG}(d_j/2, d_j/2)$.

Conforme citado, Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022) estenderam a especificação SVO de Stock e Watson (2016) para incluir um estado que captura saltos raros na volatilidade e um segundo estado que captura mudanças transitórias na volatilidade que são mais frequentes, mas com impactos menos extremos. Nesse caso, cada tipo de outlier entra no modelo (especificamente na matriz de covariância Σ_t) através de uma matriz diagonal de fatores de escala, denotada por O_t e Q_t , com elementos diagonais $o_{j,t}$ e $q_{j,t}$, respectivamente, que são i.i.d. $\forall j$ e t .

O modelo MF-VAR-SVO-t (usaremos simplesmente SVO-t no texto) pode ser então reescrito como um conjunto de equações individuais para $i = 1, \dots, N$ variáveis:

$$y_{i,t} = X_{i,t}\beta_i + u_{i,t}, \quad u_{i,t} \sim N(0, o_{i,t}^2 \cdot q_{i,t}^2 \cdot e^{h_{i,t}}) \quad (4.14)$$

Considerando A^{-1} uma matriz triangular inferior e $\Lambda_t^{1/2}$ uma matriz diagonal de volatilidade (em que o vetor de $\log h_t$ compõe a diagonal de Λ_t), o vetor de resíduos e sua matriz de covariância assumem as formas:

$$v_t = A^{-1}\Lambda_t^{-1/2}O_tQ_t\varepsilon_t, \quad \Sigma_t = A^{-1}O_tQ_t\Lambda_tQ_t'O_t'(A^{-1})' \quad (4.15)$$

com $\varepsilon_t \sim N(0, I)$ e em que Σ_t é construída a partir da decomposição de Choleski como em Cogley e Sargent (2005)¹¹. Ainda, da equação acima, o j -ésimo resíduo $q_{j,t} \cdot \varepsilon_{j,t}$, segue uma distribuição t-Student com d_j graus de liberdade, desde que $\varepsilon_{j,t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $d_j/q_{j,t} \sim \chi_{d_j}^2$

¹¹ As estruturas de volatilidade estocástica individual são obtidas a partir da decomposição de Choleski, de forma que o ordenamento das variáveis importa para os resultados. Como trabalho futuro, testes de ordenamento de variáveis serão necessários para avaliar os resultados com maior grau de confiança.

(Jacquier, Polson e Rossi (2004)).

MARKOV CHAIN MONTE CARLO (MCMC). O modelo MF-VAR-SVO-t é obtido com a ampliação de etapas na amostragem, precisa-se adicionar etapas extra para amostragem de $h_{i,t}$, $q_{i,t}$ e d_j e de $o_{i,t}$.

Seguimos Chan e Hsiao (2014) para consideração de volatilidade estocástica e erros t-Student. As etapas para amostragem dos estados de outliers o_t combinam os passos propostos em Koop, McIntyre, Mitchell e Poon (2021) e Carriero, Clark, Marcellino e Mertens (2022). Para a amostragem de h_t , seguimos o usual da literatura e usamos o algoritmo *auxiliary mixture sampler* (Kim, Shephard e Chib (1998)). As *posterior draws* podem ser obtidas pela seguinte sequência de iterações:

1. Amostrar $Z_{0:T}$ de $p(Z_{0:T}|Y_t, A, h_t, q_t^2, o_t^2, \lambda)$ usando o algoritmo de Carter e Kohn (1994).
2. Amostrar $p(\Phi|Y_t, Z_{0:T}, A, h_t, q_t^2, o_t^2, \lambda)$ a partir da distribuição condicional posterior Normal.
3. Amostrar A de $p(A|Y_t, Z_{0:T}, \Phi, h_t, q_t^2, o_t, \lambda)$ a partir da distribuição condicional posterior Normal como Cogley e Sargent (2005);
4. Amostrar a variável auxiliar de mistura s_{mixt} como Kim, Shephard e Chib (1998), $p(s_{mixt}|Y_t, Z_{0:T}, h_t)$
5. Amostrar h_t de $p(h_t|Y_t, Z_{0:T}, \Phi, h_t, A, q_t^2, o_t, \sigma_h^2, s_{mixt})$ usando o *auxiliary mixture sampler* de Kim, Shephard e Chib (1998).
6. Amostrar σ_h^2 de $p(\sigma_h^2|h_t)$
7. Amostrar q_t de $\prod_{t=1}^T p(q_t^2|Y_t, Z_{0:T}, \Phi, h_t, A, d_j)$, com $p(q_t^2|Y_t, Z_{0:T}, \Phi, h_t, A, d_j) \sim \mathcal{IG}\left(\frac{d+1}{2}, \frac{d+e^{-h_t}(y_t-\mu)^2}{2}\right)$
8. Amostrar d_j de $p(d_j|q_t^2)$ (veja Chan e Hsiao (2014) pg. 17)
9. A amostragem dos estados o_t é obtida por uma mistura discreta com T realizações possíveis. Genericamente, consideremos que cada realização possível de $o_{i,t}$ é realizada a partir da definição de uma variável indicadora $\mathcal{S}_{i,t}$ em que se $\mathcal{S}_{i,t} = 1$ implica uma distribuição $N(X_t\beta, o_{i,t}^2 \cdot q_{i,t}^2 \cdot e^{h_{i,t}})$ e se $\mathcal{S}_{i,t} = 0$ implica uma distribuição $N(X_t\beta, q_{i,t}^2 \cdot e^{h_{i,t}})$.

A amostragem de $\mathcal{S}_{i,t}$ segue

$$P(\mathcal{S}_{i,t} = 1|Y_t, Z_{0:T}, \Phi, h_t, A, q_t^2, s_{mixt}) = \frac{p_i \times N(X_t\beta, o_{i,t}^2 \cdot q_{i,t}^2 \cdot e^{h_{i,t}})}{p_i \times N(X_t\beta, o_{i,t}^2 \cdot q_{i,t}^2 \cdot e^{h_{i,t}}) + (1 - p_i) \times N(X_t\beta, q_{i,t}^2 \cdot e^{h_{i,t}})}$$

e

$$P(\mathcal{S}_{i,t} = 0|Y_t, Z_{0:T}, \Phi, h_t, A, q_t^2, s_{mixt}) = 1 - P(\mathcal{S}_{i,t} = 1|Y_t, Z_{0:T}, \Phi, h_t, A, q_t^2, s_{mixt}),$$

com priori $p_i \sim B(\frac{1}{4 \cdot (m)}(10) \cdot (m), (1 - \frac{1}{4 \cdot (m)20 \cdot (m)})$ e $m = 12$.

A posteriori condicional de o_t na forma logarítmica é então:

$$p(o_t | Y_t, Z_{0:T}, \Phi, h_t, A, q_t^2, s_{mixt}) \equiv \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(o_{i,t}^2 q_{i,t}^2 e^{h_{i,t}}) - \frac{1}{2} \frac{(y_t - X_t \beta)^2}{o_{i,t}^2 q_{i,t}^2 e^{h_{i,t}}}$$

10. Por fim, amostrar p_i , com posterior condicional $p(p_i | o_t, \mathcal{S}_{i,t})$.

Para fins de ilustração, no Apêndice, as figuras (4.13), (4.14) e (4.15) apresentam alguns resultados da especificação SVO-t. A principal observação é que essa especificação é capaz de identificar os outliers sem suposições *ad hoc*. Todos os resultados são baseados em 5.000 amostragens MCMC, obtidas de um total de 11.000 amostragens com 1.000 amostragens descartadas como fase *burn-in*.

Em resumo, as especificações nos modelos MF-VAR permitem três tipos de tratamentos: (i) no processo de volatilidade (i.e. homocedástico, correção de Lenza e Primiceri (2020) e volatilidade estocástica) e; (ii) três tipos de distribuições para os resíduos (i.e. Normal, caudas pesadas e outlier). Isso permite uma série de combinações. No entanto, como o foco do artigo é testar extensões para melhorar a capacidade de previsão dos modelos MF-VAR em períodos de choques muito extremos, vamos restringir a análise sobre quatro especificações (Normal com parâmetros estimados até 2019, correção de Lenza e Primiceri (2020), SV e SVO-t), como será apresentado na próxima seção.

4.4 PREVISÃO EM TEMPO REAL DURANTE A PANDEMIA

4.4.1 Desenho de Previsão

Como mostrado anteriormente, o modelo MF-VAR demonstrou boa capacidade preditiva até 2019. Mas surge a questão de saber se o modelo é uma boa ferramenta para produzir previsões que sejam coerentes com períodos de elevada turbulência macroeconômica, como a pandemia. Conforme apontado pela literatura, os modelos VAR convencionais apresentam distorções nas estimativas dos parâmetros, pois são condicionados em padrões históricos das séries temporais do sistema de equações, levando a resultados explosivos. Logo, a questão a ser investigada mais precisamente é se é possível equipar os modelos MF-VAR de forma a produzir boas previsões em tempo real neste ambiente de crise.

Para responder a essa questão, realizaremos um exercício de previsão em tempo real do crescimento do PIB brasileiro para quatro eventos fixos: 1T/2020, ..., 4T/2020. Como nosso objetivo principal é investigar a qualidade das previsões, tomamos como *baseline* o modelo MF-VAR homocedástico Normal com parâmetros estimados até o final de 2019 e o comparamos com as suas várias extensões apresentadas na seção anterior. Desta forma, produzimos até 4 *nowcasts* de cada modelo para cada um desses eventos.

Como exemplo da convenção temporal e a disponibilidade de dados para cada origem de previsão disponível, consideremos as informações apresentadas na Tabela 4.13. Nossa primeira previsão utiliza informações disponíveis no final de março/2020 (denotada "31-Mar-20 Vintage"). Naquele momento, a pandemia já havia impactado a atividade, e conhecíamos somente o PIB do 4T/19 e os indicadores de atividade econômica (inflação, desemprego, vendas no varejo e produção industrial) publicado até a data-base janeiro/20.

Na metade de abril, atualizamos o *nowcasting* conforme são divulgadas as informações da data-base fevereiro/20 pelo IBGE denotando essa previsão como "15-Abr-20 Vintage". Em 30 de abril, conseguimos atualizar a taxa de desemprego de março, produzindo um novo *nowcasting*, "30-Abr-20 Vintage". Por fim, na metade de maio ("15-Mai-20 Vintage"), temos todas as informações necessárias para abastecer o modelo completo e atualizar a previsão para o PIB 1T/20, a ser divulgado somente em 30/05/2020. Um padrão de calendário de informação semelhante a esse se repete a cada trimestre¹².

Tabela 4.13: Disponibilidade de Informações para o MF-VAR na Produção de Previsões para o 1T/2020

31 de Março				
Variável:	Produção Industrial	Vendas Varejo	Taxa Desemprego	Inflação
M1	X	X	X	X
M2	∅	∅	∅	∅
M3	∅	∅	∅	∅
15 de Abril				
Variável:	Produção Industrial	Vendas Varejo	Taxa Desemprego	Inflação
M1	X	X	X	X
M2	X	X	X	X
M3	∅	∅	∅	∅
30 de Abril				
Variável:	Produção Industrial	Vendas Varejo	Taxa Desemprego	Inflação
M1	X	X	X	X
M2	X	X	X	X
M3	∅	∅	∅	X
15 de Maio				
Variável:	Produção Industrial	Vendas Varejo	Taxa Desemprego	Inflação
M1	X	X	X	X
M2	X	X	X	X
M3	X	X	X	X

Fonte: IBGE e Elaboração Própria.

¹² Devido a atrasos na divulgação de algumas pesquisas pelo IBGE durante a pandemia, algumas variáveis não apresentam o mesmo padrão temporal durante todo período amostral.

4.4.2 Resultados

Estimamos as quatro especificações MF-VAR usando $p = 3$ defasagens para as quatro *vintages* de 2020 e produzimos previsões em tempo real para as taxas de crescimento % na margem (trimestre sobre trimestre imediatamente anterior). Todos os modelos usam dados a partir de 2004 e são estimados com métodos Bayesianos. Os hiperparâmetros são os mesmos que Borges e Portugal (2018).

Apresentamos e analisamos os resultados para cada um dos trimestres de 2020. Para cada trimestre, apresentamos uma tabela comparando as medianas da pesquisa FOCUS/BCB com os resultados para quatro especificações:

1. MF-VAR padrão estimado com coeficientes de 2019 (distribuição Normal, homocedástico, denotado "CONST-19");
2. MF-VAR corrigido com *shifts* na volatilidade (baseado em Lenza e Primiceri (2020), denotado "LP");
3. MF-VAR com volatilidade estocástica (distribuição Normal, heterocedástico, denotado "SV");
4. MF-VAR com volatilidade estocástica e aumentado para outliers e caudas pesadas (distribuição *t*-Student, heterocedástico, denotado "SVO-t").

Condicionadas nas estimativas posteriores dos parâmetros, as previsões são geradas executando o Filtro de Kalman até a origem da previsão e então simulando o MF-VAR *forward* para se gerar amostragens a partir da distribuição preditiva. Ilustramos o formato das previsões de densidade produzidas por cada abordagem através de gráficos de previsão. A questão que temos em mente ao interpretar os resultados é com que rapidez e quão bem um modelo descobriu essas observações extremas inesperadas.

NOWCASTING 1T/2020. Esse trimestre é de menos interesse do que os trimestres posteriores de 2020, uma vez que a pandemia teve pouco ou nenhum impacto nos primeiros dois meses do trimestre. O impacto mais relevante neste trimestre foi a partir da metade de mar/20, quando a pandemia do COVID-19 impactou abruptamente a atividade, com a introdução das medidas de distanciamento. De acordo com a *vintage* do PIB publicada em 29-maio-2020 pelo IBGE, a variação trimestral no 1T/20 foi -1,5%. A produção industrial, em março de 2020, caiu 3,8%, as vendas reais no varejo caíram 4,3% e a taxa de desemprego aumentou de 11,7% para 11,9%. Em termos anualizados com ajuste sazonal (SAAR), a taxa de inflação ao consumidor medida pelo IPCA avançou apenas 0,1%.

A Tabela 4.14 resume as previsões pontuais obtidas para o primeiro trimestre de 2020:

Tabela 4.14: Previsões pontuais dos modelos MF-VAR para o 1T/2020

	FOCUS	CONST-19	LP
Vintage:	Mediana	Média	Média
31-Mar	0,63	0,19	0,29
15-Abr	-0,02	-0,03	-0,06
30-Abr	-0,38	0,01	-0,55
15-Mai	-0,71	-1,60	-1,17
Desvio abs. médio	1,78	1,54	1,52
	FOCUS	SV	SVO-t
Vintage:	Mediana	Média	Média
31-Mar	0,63	0,25	0,55
15-Abr	-0,02	-0,01	0,08
30-Abr	-0,38	-0,65	-0,15
15-Mai	-0,71	-1,12	-0,52
Desvio abs. médio	1,78	1,51	1,89
IBGE (29-mai-2020)	-1,5		
IBGE (01-mar-2024)	-1,9		

Nota: As medianas oficiais do FOCUS consideram a variação interanual. Para obter as projeções trimestrais, consideramos as razões sazonais médias desde 2006 publicadas pelas *vintages* do PIB com referência 2019/T4 e então transformamos as projeções interanuais do FOCUS para projeções trimestrais.

Fonte: Elaboração Própria.

Analisando as previsões pontuais, a primeira e a segunda *vintage* projetavam uma variação positiva e próxima de zero, respectivamente. Somente no final de abril, o *nowcast* médio dos modelos foi revisado para uma queda de (-0,34%). Apesar de capturar a mudança de sinal, esse resultado ilustra a dificuldade de se identificar variações repentinas no PIB com antecedência, mesmo após o fechamento do trimestre. Mesmo a mediana da pesquisa FOCUS, os analistas apresentaram dificuldades para apurar as informações com velocidade e fazer ajustes de previsão naquele momento. Na metade de maio, com todas variáveis completas até a data-base mar/20, foi possível produzir *nowcasts* de até -1,6%. Em resumo, os modelos capturaram bem a mudança de tendência e apresentaram um erro de previsão inferior ao FOCUS em alguns casos, situando-se entre as *vintages* do PIB divulgadas em mai/20 (-1,5%) e em 2024 (-1,9%).

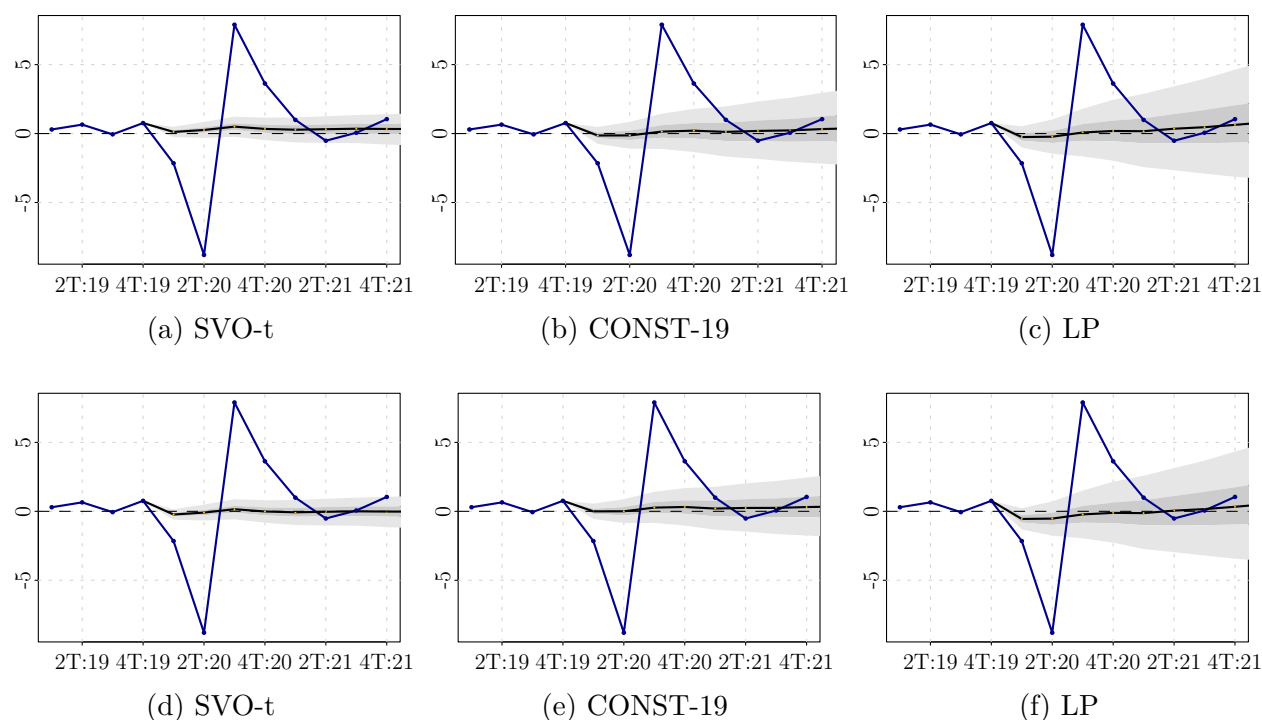
As previsões geradas a partir dos modelos CONST-19, LP, SV e SVO-t diferem um pouco em cada *vintage*. A inclusão da volatilidade estocástica apresentou resultados mistos, com um bom desempenho de previsão dos modelos LP e SV, mas um desempenho ruim do modelo com caudas pesadas. A principal diferença entre as especificações LP e SV é que a segunda obteve menor desvio médio de previsão (1,52 vs. 1,51). Por outro lado, considerando as previsões produzidas em "15-Mai-20", o modelo CONST-19 foi o que produziu a melhor previsão (-1,60%).

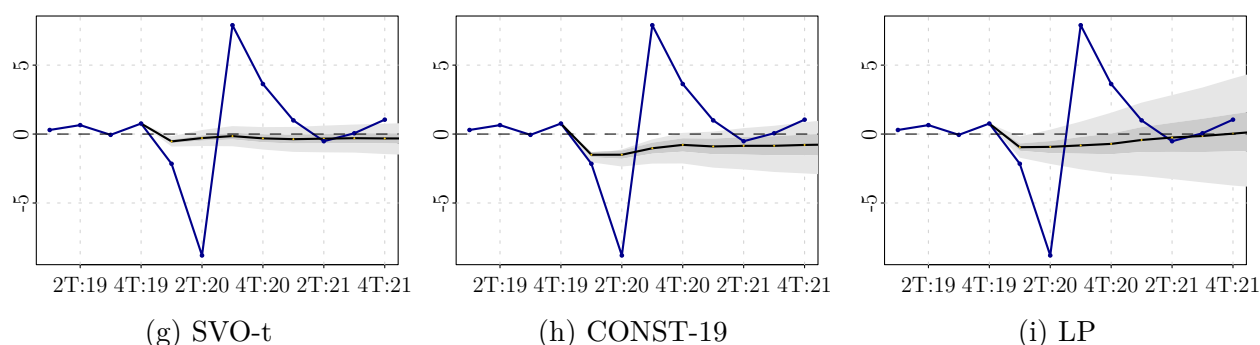
Na Figura 4.9, apresenta-se a evolução das projeções completas das especificações

CONST-19, LP e SVO-t para as três últimas *vintages* de previsão do 1T/2020. Conforme notado por Schorfheide e Song (2023), as projeções geradas pelos MF-VAR indicam uma recessão prolongada. Por exemplo, nos painéis (g)-(i) da Figura ??, seguindo a queda na atividade em março, a perspectiva era de que a atividade econômica passaria por um período recessivo (ainda que não tão forte) de mais de 1 ano, segundo esses modelos.

De maneira geral, na Figura 4.9, evidencia-se o impacto das correções sobre as projeções geradas nos principais modelos. Enquanto o modelo LP apresenta ampliação das densidades preditivas, o modelo SVO-t produziu intervalos de confiança mais estreitos, mas performance inferior. De certa forma, a especificação LP, apesar de ter boa acurácia neste trimestre, seus resultados de densidade são mais impactados pelo *shift* de volatilidade em algum grau, o que é esperado para o momento. Já a especificação CONST-19, aparenta produzir resultados muito satisfatórios para um modelo com parâmetros constantes (e consequentemente com menor custo computacional), em linha com o encontrado por Schorfheide e Song (2023).

Figura 4.9: Comparação entre dados observados e previsões para o 1T2020





Nota: Os dados observados correspondem à *vintage* do 4T/2023 publicada em 01-mar-2024 (em azul), na qual são comparados com as estimativas posteriores para as medianas e bandas de 75% e 90%. As figuras (a)-(c) se referem à "15-Abr-20", as figuras (d)-(f) se referem a "30-Abr-20" e as figuras (g)-(i) se referem a "15-Mai-20".

Fonte: Elaboração própria.

NOWCASTING 2T/2020. O segundo trimestre de 2020 foi o pior para a economia, uma vez que os severos confinamentos produziram quedas recorde na atividade econômica. A produção industrial e as vendas reais no varejo caíram 9,4% e 17,1%, respectivamente, nesse trimestre. A taxa de desemprego subiu 1,5 p.p., para 13,40%. De acordo com a *vintage* do PIB publicada em 01-setembro-2020 pelo IBGE, a variação trimestral no 2T/2020 foi -9,68%, posteriormente revisada para -8,79% (última divulgação (01-mar-2024)).

Tabela 4.15: Previsões pontuais dos modelos MF-VAR para o 2T/2020

	FOCUS	CONST-19	LP
Vintage:	Mediana	Média	Média
15-Jun-20	-12,56	-2,41	-1,95
30-Jun-20	-12,42	-2,73	-2,01
30-Jul-20	-10,65	-5,01	-4,74
15-Ago-20	-10,09	-7,29	-6,69
Desvio abs. médio	2,64	4,43	4,94
	FOCUS	SV	SVO-t
Vintage:	Mediana	Média	Média
15-Jun-20	-12,56	-2,09	-1,45
30-Jun-20	-12,42	-2,39	-1,36
30-Jul-20	-10,65	-4,95	-4,54
15-Ago-20	-10,09	-6,96	-4,69
Desvio abs. médio	2,64	4,49	5,78
IBGE (01-set-2020)	-9,68		
IBGE últ.(01-mar-2024)	-8,79		

Nota: As medianas oficiais do FOCUS consideram a variação interanual. Para obter as projeções trimestrais, consideramos as razões sazonais médias desde 2006 publicadas pelas *vintages* do PIB com referência 2019/T4 e então transformamos as projeções interanuais do FOCUS para projeções trimestrais.

Fonte: Elaboração Própria.

A Tabela 4.15 nos permite avaliar a capacidade preditiva das diferentes abordagens

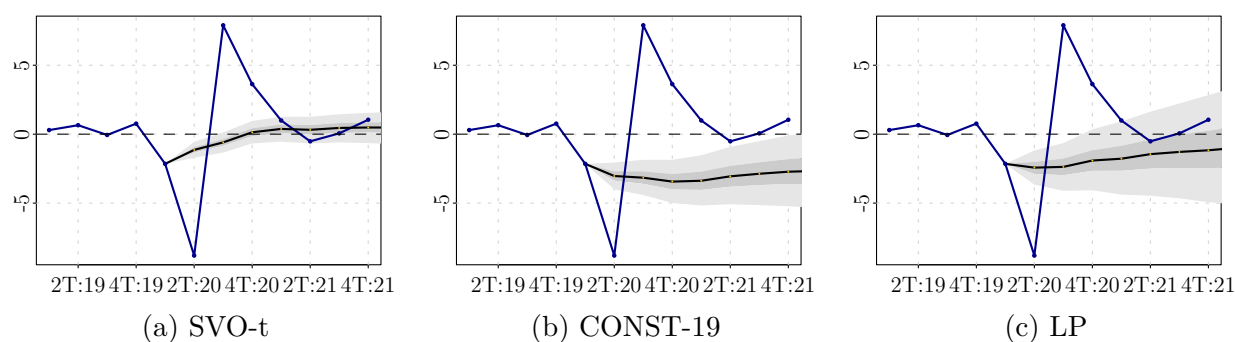
para o *nowcasting* desse trimestre. Há uma pequena diferença na datação das *vintages* produzidas para esse trimestre. Pelo fato de não existir diferença no conjunto informacional entre 15/jul e 30/jul, optamos por atualizar a terceira previsão na referência 30/jul, então a segunda e terceira previsão apresentam um intervalo de um mês de produção.

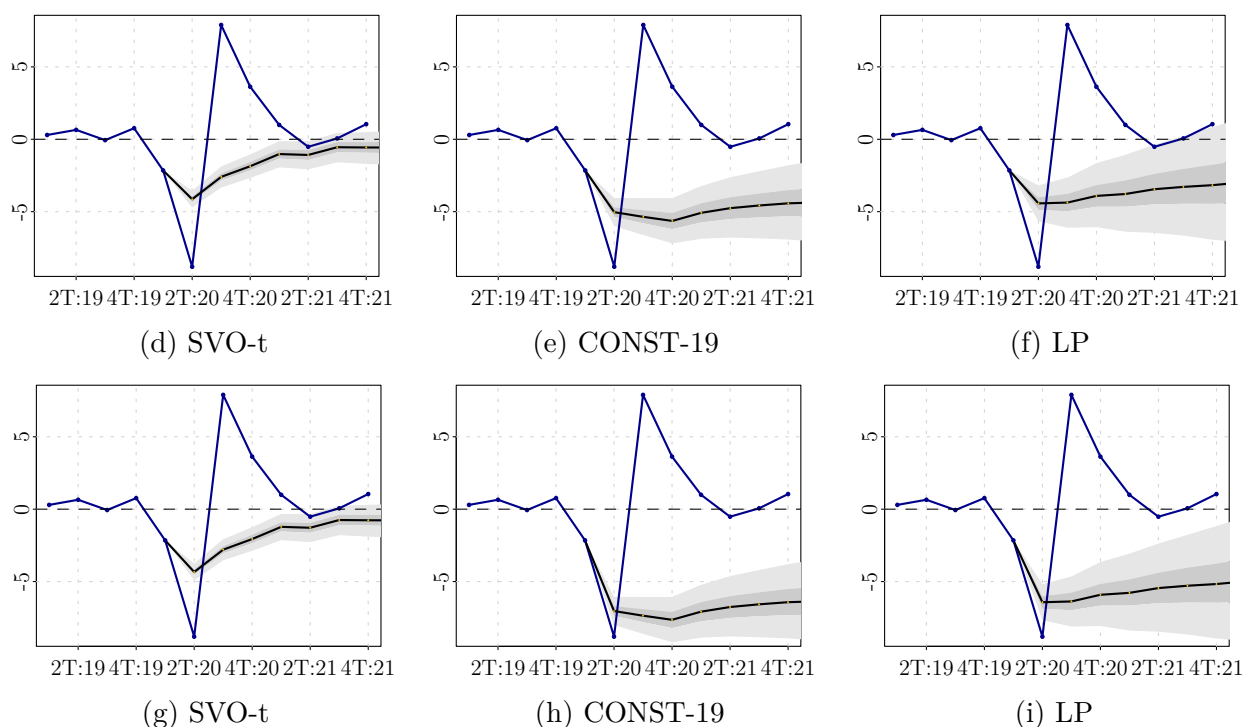
Analisando as previsões pontuais, as duas primeiras *vintages* projetavam um crescimento ainda muito distante do realizado, com exceção do FOCUS. Somente em julho, o *nowcast* médio dos modelos foi revisado para uma queda de -4,81%, e então para -6,40% em agosto.

Esses resultados deixam ainda mais evidente a dificuldade desses modelos em capturar a futura 'volta em V', conforme a Figura 4.10. A exceção é o modelo SVO-t. Como pode ser visto, a reação das previsões pontuais mais longas e de densidade geradas pelas especificações SVO-t aos dados recebidos em 2T/2020 é melhor comportada que as demais, apesar de a mesma apresentar novamente o pior desvio de previsão para esse trimestre no curtíssimo prazo. No sentido contrário, a mediana do FOCUS também previa uma retração mais severa inicialmente, e depois apresentou um ajuste menos pessimista, de 11,6% e 10,1%, respectivamente.

Contudo, em comparação ao FOCUS, nenhum dos modelos foi capaz de antecipar a forte queda como as medianas de mercado. Enquanto os modelos MF-VAR indicaram valores próximos do realizado somente na *vintage* de 15-ago-2020, o FOCUS antecipava uma queda ao redor de -10% desde o final de abril. Isso ilustra a capacidade de se considerar fatores como informações de alta frequência em tempo real e observações anedóticas na atividade de previsão macroeconômica. Apesar de incorporar, em algum grau, o primeiro fator, os modelos MF-VAR ainda dependem da defasagem em que as informações oficiais são divulgadas.

Figura 4.10: Comparação entre dados observados e previsões para o 2T/2020





Nota: Os dados observados correspondem à *vintage* do 4T/2023, publicada em 01-mar-2024 (em azul). São comparadas as estimativas posteriores para as medianas e bandas de 75% e 90%. As figuras (a)-(c) se referem a "30-Jun-20", as figuras (d)-(f) se referem à "30-Jul-20" e as figuras (g)-(i) se referem a "15-Ago-20".

Fonte: Elaboração própria.

Nesse trimestre, as previsões geradas a partir dos modelos CONST-19, LP, SV e SVO-t diferem um pouco em cada *vintage*. O modelo LP produziu previsões pontuais bastante semelhantes às do modelo SV, o que faz sentido, dado que ambos as correções visam atribuir menores pesos para observações extremas. Em junho, julho e agosto de 2020, as bandas de incerteza das densidades preditivas obtidas com as especificações LP e SV são mais amplas do que aquelas apresentadas pelos modelos SVO-t e CONST-19. De acordo com as comparações de volatilidade fornecidas acima, embora as observações de 2020 alarguem as densidades preditivas das previsões SV e LP, o seu impacto é muito maior no primeiro caso, isto é, o LP gera bandas mais estreitas que o SV. Isso acontece pelo fato de que, apesar de controlar para a volatilidade estocástica, o modelo SV tem suas estimativas influenciadas pelos outliers de abril/20. Já no caso do modelo LP, o fator de decaimento estimado $\bar{\rho}$ é muito grande para que as previsões retornem rapidamente para a média condicional.

Voltando para o desempenho dos modelos, novamente os modelos apresentam uma recessão prolongada para os trimestres à frente e as variações preditivas diferem muito entre as especificações e da mesma forma que observamos em nossa discussão sobre as previsões de trimestres anteriores. Dado que historicamente os choques macroeconômicos tiveram efeitos muito persistentes nas séries temporais incluídas na especificação MF-VAR, o modelo prevê efeitos recessivos duradouros dos choques da COVID-19 até ao final de

2021. As últimas *vintages* chegam a apresentar uma melhora significativa para as previsões um passo à frente, mas o modelo continua a estimar que os efeitos da pandemia serão longamente duradouros.

Por fim, novamente as especificações SV e CONST-19 se destacaram, apresentaram melhores previsões se considerarmos a soma dos desvios (projeção *vs.* realizado) para as quatro *vintages* produzidas para essas especificações. Em particular, as previsões realizadas de agosto de 2020 podem ser interessantes de se avaliar, pois naquele momento se conheciam os resultados do PIB do 1T/20, foram ligeiramente negativos, e muitas das variáveis mensais de abril sinalizavam resultados extremamente ruins, mas algumas das variáveis mensais estavam se recuperando em maio e junho¹³. Face a estes sinais conflitantes, os quatro modelos apresentaram previsões pontuais distantes do observado. Possivelmente, isto é um reflexo preciso da grande incerteza daqueles meses de pandemia e, portanto, pode-se argumentar que estes resultados são justificáveis. No entanto, se observa que, para o segundo trimestre de 2020, o CONST-19 produziu densidades preditivas que atribuíram rapidamente mais peso ao crescimento econômico extremamente negativo dos meses anteriores, como mostra a Figura 4.10 (item h).

NOWCASTING 3T/2020. O terceiro trimestre de 2020 foi o período em que a atividade econômica se recuperou parcialmente após o colapso do segundo trimestre de 2020. De acordo com a *vintage* do PIB publicada em 03-dezembro-2020 pelo IBGE, a variação trimestral no 3T/20 foi 7,75%, revisada posteriormente para uma alta de 7,89%.

Considerando as estimativas finais, a Tabela 4.16 revela um padrão melhor comportado para todos os 4 modelos estudados. Em setembro, os modelos não capturaram a recuperação e ainda previam um crescimento negativo para o terceiro trimestre de 2020, mas, posteriormente, as previsões tornaram-se positivas até ao final de outubro com um *nowcast* médio de 4,35% (quando chegaram as divulgações iniciais das pesquisas do IBGE para o terceiro trimestre de 2020 com crescimento de 16% e 22% nas vendas reais do varejo e produção industrial, respectivamente). Já a especificação SVO-t previu uma convergência mais bem comportada desde a segunda *vintage*, apresentando menor desvio entre os modelos (3,87), mas insuficiente para superar o desvio final do FOCUS (igual a 0,4).

¹³ Após a queda de -19,6% em abril, a produção industrial cresceu 7,96% e 9,83% em maio e junho, e a inflação começou a mostrar sinais de aquecimento. Por outro lado, o desemprego avançava, em ritmo de +0,5 p.p. no trimestre móvel, atingindo o patamar de 13,60% em junho/20.

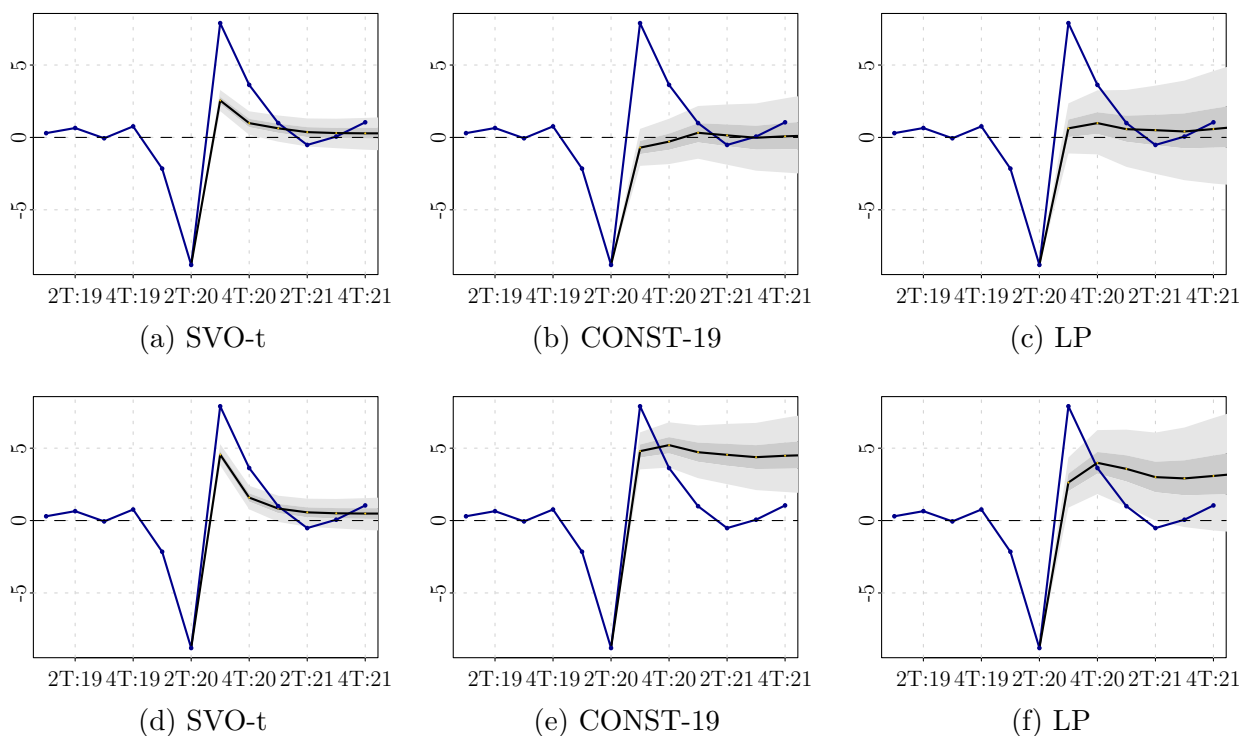
Tabela 4.16: Previsões pontuais dos modelos MF-VAR para o 3T/2020

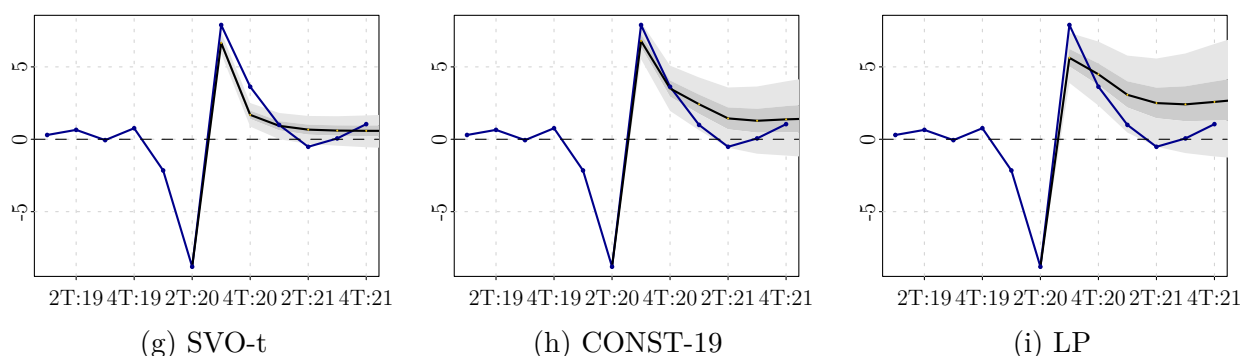
	FOCUS	CONST-19	LP
Vintage:	Mediana	Média	Média
15-Set-20	7,43	-1,77	-0,09
30-Set-20	7,43	-0,32	0,69
15-Out-20	7,56	4,96	3,88
15-Nov-20	8,26	7,55	5,32
Desvio abs. médio	0,40	4,24	5,39
	FOCUS	SV	SVO-t
Vintage:	Mediana	Média	Média
15-Set-20	7,43	-0,19	1,89
30-Set-20	7,43	0,86	2,19
15-Out-20	7,56	3,74	4,85
15-Nov-20	8,26	5,69	7,15
Desvio abs. médio	0,40	5,27	3,87
IBGE (03-dez-2020)	7,75		
IBGE (01-mar-2024)	7,89		

Nota: As medianas oficiais do FOCUS consideram a variação interanual. Para obter as projeções trimestrais, consideramos as razões sazonais médias desde 2006 publicadas pelas *vintages* do PIB com referência 2019/T4 e então transformamos as projeções interanuais do FOCUS para projeções trimestrais.

Fonte: Elaboração Própria.

Figura 4.11: Comparação entre dados observados e previsões para o 3T/2020





Nota: Os dados observados correspondem à *vintage* do 4T/2023 publicada em 01-mar-2024 (em azul). São comparadas as estimativas posteriores para as medianas e bandas de 75% e 90%. As figuras (a)-(c) se referem a "30-Set-20", as figuras (d)-(f) se referem a "15-Out-20" e as figuras (g)-(i) se referem a "15-Nov-20".

Fonte: Elaboração própria.

Nesse padrão comportado, há algumas diferenças entre as diversas abordagens. Consideremos as previsões pontuais na Figura 4.11. Apesar de que a *vintage* de outubro dos modelos CONST-19 e LP apontavam para um longo período de forte expansão, refletindo, dessa vez, a dificuldade dos modelos em capturar os movimentos de inflexão antecipadamente, em contraste, a *vintage* de novembro mostrou bom comportamento não só para as estimativas de prazo mais curto, mas capturou bem a recuperação nos trimestres seguintes. Em especial, os modelos CONST-19 e SVO-t verificaram um crescimento de 7,55% e 7,15% na *vintage* de agosto, de modo que suas previsões pontuais identificaram a recuperação mais rapidamente do que os outros modelos.

NOWCASTING 4T/2020. O último trimestre de 2020 levanta a questão se algum modelo seria capaz de projetar uma estabilidade das taxas de crescimento ou se apresentaria uma performance explosiva. Esse trimestre foi marcado pelo avanço da vacinação e relaxamento das medidas de restrição, o que impulsionou a atividade econômica. De acordo com a *vintage* do PIB publicada em 03-mar-2021 pelo IBGE, a variação trimestral no 4T/2020 foi 3,17%, revisada posteriormente para 3,63%.

A Tabela 4.17 mostra como as nossas previsões evoluíram em cada *vintage*. Utilizando dados até ao final de outubro, todos os nossos modelos previam um crescimento muito positivo para o quarto trimestre de 2020. Analisando as previsões pontuais, enquanto o FOCUS foi aumentando gradualmente suas previsões, os modelos foram convergindo para valores muito próximos do observado. Para esse trimestre, todas as especificações estudadas superaram o FOCUS. Novamente, a especificação CONST-19 apresentou melhor desempenho, atingindo um desvio médio igual a 0,77.

Novamente, as variações preditivas diferiram muito entre as especificações e da mesma forma que observamos em nossa discussão sobre as previsões de trimestres anteriores. Todas

as extensões de volatilidade com erros normais tendem a produzir variâncias preditivas maiores, enquanto a especificação SVO-t ainda marca intervalos de confiança mais estreitos que os demais. Em resumo, essas variâncias preditivas maiores são particularmente notáveis em modelos com volatilidade estocástica, como o caso das especificações LP e SV, mas são menos perceptíveis para o modelo de caudas pesadas.

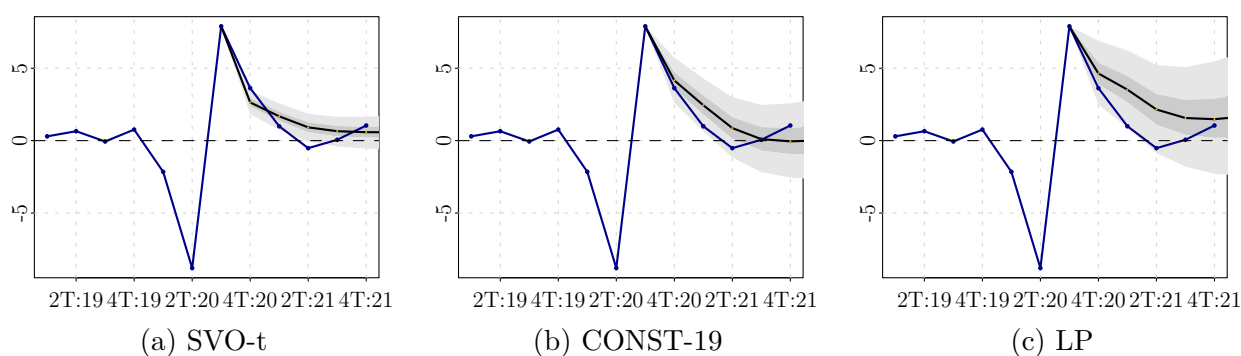
Tabela 4.17: Previsões pontuais dos modelos MF-VAR para o 4T/2020

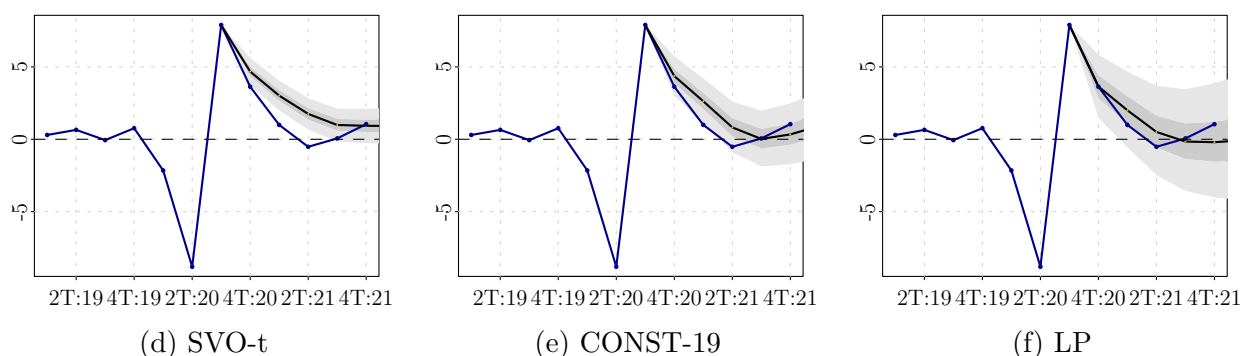
	FOCUS	CONST-19	LP
Vintage:	Mediana	Média	Média
15-Dez-20	1,86	5,89	6,15
15-Jan-21	2,12	4,00	4,75
30-Jan-21	2,28	3,81	4,62
15-Fev-21	2,30	3,93	3,66
Desvio abs. médio	1,49	0,77	1,16
	FOCUS	SV	SVO-t
Vintage:	Mediana	Média	Média
15-Dez-20	1,86	6,01	5,89
15-Jan-21	2,12	4,79	4,05
30-Jan-21	2,28	4,22	3,09
15-Fev-21	2,30	3,91	4,88
Desvio abs. médio	1,49	1,10	1,10
IBGE (03-mar-2021)	3,17		
IBGE (01-mar-2024)	3,63		

Nota: As medianas oficiais do FOCUS consideram a variação interanual. Para obter as projeções trimestrais, consideramos as razões sazonais médias desde 2006 publicadas pelas *vintages* do PIB com referência 2019/T4 e então transformamos as projeções interanuais do FOCUS para projeções trimestrais.

Fonte: Elaboração Própria.

Figura 4.12: Comparação entre dados observados pela *vintage* e previsões para 4T/2020





Nota: Os dados observados correspondem à *vintage* do 4T/2023, publicada em 01-mar-2024 (em azul). São comparadas as estimativas posteriores para as medianas e bandas de 75% e 90%. As figuras (a)-(c) se referem a "30-Jan-21" e as figuras (d)-(f) se referem a "15-Fev-21".

Fonte: Elaboração própria.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É sempre importante antecipar a evolução da atividade econômica, mas, em tempos de pandemia, é ainda mais importante. Neste trabalho estudamos como desenvolver modelos VAR que consideram frequências distintas e são robustos a eventos extremos. Como subproduto da metodologia, apresentamos um indicador coincidente construído por esse modelo baseado na forma espaço de estados, cuja estimação envolveu a utilização da técnica do Filtro de Kalman. O modelo impõe uma regra de ponderação para a taxa de crescimento trimestral em função das taxas mensais não observadas. Essa restrição, juntamente ao tratamento adequado na seleção das variáveis mensais, permitiu obter resultados satisfatórios nas análises até 2019.

Investigamos se é possível produzir previsões de alta qualidade num momento de grande instabilidade econômica, e se várias extensões à especificação do modelo melhoram o seu desempenho de previsão durante a pandemia. Como reconhecido por Lenza e Primiceri (2020) e Schorfheide e Song (2023), para os EUA, e Bobeica e Hartwig (2023), para a Zona do Euro, os *outliers* de 2020 produziram expressivas distorções sobre as previsões geradas por modelos VAR com variância constante. Diante disso, estudamos três técnicas para correção de outliers apresentadas na literatura e aplicamos em um MF-VAR com dados brasileiros. Fazemos isso em um exercício de previsão em tempo real do PIB, usando dados mensais de atividade econômica para prever o PIB trimestral. Apesar de nosso foco na metodologia MF-VAR, as correções apresentadas podem ser aplicadas em diferentes modelos de séries temporais.

Nossas estimativas apresentaram resultados satisfatórios para a previsão do PIB brasileiro em tempo real durante a pandemia. O exercício mostrou que os modelos estudados foram efetivos em lidar com as observações extremas, de modo que superaram

a pesquisa FOCUS na previsão do 1T/2020 e do 4T/2020, mas também ilustraram que ainda há espaço para melhorias na modelagem. Isso aparece no melhor desempenho do modelo mais simples, que considera a fixação dos parâmetros estimados em 2019 para condução do exercício.

Considerando os modelos com volatilidade estocástica, a principal diferença foi na amplitude das densidades preditivas. Enquanto os modelos SV e LP resultaram em estimativas amplas e trajetórias incoerentes em alguns casos, o modelo SVO-t apresentou intervalos de confiança mais estreitos. Apesar disso, a especificação SVO-t foi competitiva apenas nas previsões do 3T/2020 e do 4T/2020, e apresentou previsões incondicionais bem comportadas.

Cabem, ainda, algumas observações sobre a construção do modelo, projetando aperfeiçoar e ultrapassar algumas limitações encontradas em trabalhos futuros. A primeira delas é a forma como as covariadas são inseridas no modelo. É preciso investigar uma maneira mais robusta de selecionar as variáveis, o que sugere espaço para se introduzir métodos de seleção de variáveis nesse arcabouço, alternativo à abordagem do modelo com fatores dinâmicos, que são uma solução consolidada na literatura para esse procedimento. A segunda observação diz respeito aos coeficientes estimados. Dado o contexto, uma evolução natural da especificação MF-VAR seria introduzir dinâmica nos parâmetros autorregressivos variáveis no tempo (Heinrich e Reif (2018)). Um terceiro ponto ainda é sobre o tratamento e a identificação dos choques de 2020 em um contexto de relações estruturais, relevante para bancos centrais, como tratado por Primiceri e Tambalotti (2020) e Ferroni, Fisher e Melosi (2024). Por exemplo, um trabalho futuro é a consideração das correções para outliers em um modelo semi-estrutural de pequeno porte e a investigação sobre a qualidade dos parâmetros estimados por estes modelos.

Por fim, quanto às previsões, fazemos dois apontamentos para trabalhos futuros. O primeiro, naturalmente, é a ampliação da avaliação de previsão para os períodos após 2020. Segundo, existem outras especificações em maiores frequências ou correções sobre as informações *a priori* que poderiam ser adaptadas e potencialmente melhorar a capacidade desses modelos para capturar pontos de inflexão da economia brasileira em momentos de crise com maior antecedência. Por exemplo, em relação ao primeiro caso, por meio do uso de informações de pagamentos eletrônicos (Gonçalves (2022)). Em relação ao segundo caso, uma série de estratégias de robustez podem ser aplicadas sobre a priori de Minnesota, como explorado em Bobeica e Hartwig (2023).

4.6 REFERÊNCIAS

ÁLVAREZ, Luis J; ODENDAHL, Florens. Data outliers and Bayesian VARs in the euro area. **Documentos de Trabajo/Banco de España**, **2239**, Banco de España, 2022.

Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4277743.

Accessed at: 2024-02-01.

ALVES, Renan Santos; PALMA, Andreza A. The effectiveness of fiscal policy in Brazil through the MIDAS Lens. **Journal of Policy Modeling**, Elsevier, Netherlands, v. 46,

n. 1, p. 113–128, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.jpolmod.2023.10.004>. Accessed

at: 2024-02-01.

ALVES, Sergio; FASOLO, Angelo. **Not Just Another Mixed Frequency Paper**. [S.l.],

2015. Available at: <https://www.bcb.gov.br/pec/wps/ingl/wps400.pdf>. Accessed at:

2024-02-01.

ANTOLIN-DIAZ, Juan; DRECHSEL, Thomas; PETRELLA, Ivan. **Advances in nowcasting economic activity**: Secular trends, large shocks and new data. CEPR Discussion Paper No. DP15926, 2021. Available at:

https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3669854. Accessed at:

2024-02-01.

BACCIOTTI, Rafael; MARÇAL, Emerson Fernandes. Taxa de Desemprego no Brasil em quatro décadas: retroposição da PNAD contínua de 1976 a 2016. **Estudos Econômicos (São Paulo)**, SciELO Brasil, v. 50, p. 513–534, 2020. Available at:

<https://doi.org/10.1590/0101-41615035rbe>. Accessed at: 2024-02-01.

BOBEICA, Elena; HARTWIG, Benny. The COVID-19 shock and challenges for inflation modelling. **International journal of forecasting**, Elsevier, Netherlands, v. 39, n. 1,

p. 519–539, 2023. Available at:

www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecb.wp2558~22b223a7c6.en.pdf. Accessed at:

2024-02-01.

BORGES, Bruna Kasprzak; PORTUGAL, Marcelo Savino. **Previsão macroeconômica para o Brasil utilizando o modelo VAR com dados mistos**, 2018. (Working Paper, UFRGS). Available at:

Available at:

<https://www.ufrgs.br/ppge/wp-content/uploads/2021/06/2018-4.pdf>. Accessed

at: 2024-02-01.

BRAVE, Scott A; BUTTERS, R Andrew; FOGARTY, Michael. **An introduction to ALEX**: A mixed-frequency Bayesian VAR forecast for US GDP, 2020. Available at:

[https://www.chicagofed.org/~media/publications/chicago-fed-](https://www.chicagofed.org/~media/publications/chicago-fed-letter/2020/cf1447-appendix-pdf.pdf)

[letter/2020/cf1447-appendix-pdf.pdf](https://www.chicagofed.org/~media/publications/chicago-fed-letter/2020/cf1447-appendix-pdf.pdf). Accessed at: 2024-02-01.

- BRY, Gerhard; BOSCHAN, Charlotte. Programmed selection of cyclical turning points. In: **cyclical analysis of time series: selected procedures and computer programs**. [S.l.]: NBER, United States of America (USA), p.7-63, 1971. Available at: <https://www.nber.org/system/files/chapters/c2148/c2148.pdf>. Accessed at: 2024-02-01.
- CARRIERO, Andrea; CLARK, Todd E; MARCELLINO, Massimiliano; MERTENS, Elmar. Addressing COVID-19 outliers in BVARs with stochastic volatility. **Review of Economics and Statistics**, MIT Press, United States of America (USA), p. 1–38, 2022. Available at: https://doi.org/10.1162/rest_a_01213. Accessed at: 2024-02-01.
- CARTER, Chris K; KOHN, Robert. On Gibbs sampling for state space models. **Biometrika**, Oxford University Press, United Kingdom (UK), v. 81, n. 3, p. 541–553, 1994. Available at: <https://doi.org/10.2307/2337125>. Accessed at: 2024-02-01.
- CASCALDI-GARCIA, Danilo. Pandemic priors. **International Finance Discussion Paper**, United States of America (USA), n. 1352, 2022. Available at: <https://www.federalreserve.gov/econres/ifdp/files/ifdp1352.pdf>. Accessed at: 2024-02-01.
- CHAN, Joshua CC; HSIAO, Cody YL. Estimation of stochastic volatility models with heavy tails and serial dependence. **Bayesian inference in the social sciences**, Wiley Online Library, p. 155–176, 2014. Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2359838. Accessed at: 2024-02-01.
- COGLEY, Timothy; SARGENT, Thomas J. Drifts and volatilities: monetary policies and outcomes in the post WWII US. **Review of Economic dynamics**, Elsevier, United States of America (USA), v. 8, n. 2, p. 262–302, 2005. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.red.2004.10.009>. Accessed at: 2024-02-01.
- DURBIN, James; KOOPMAN, Siem Jan. **Time series analysis by state space methods**. [S.l.]: OUP Oxford, 2012. v. 38. (Working Paper, UFRGS). Available at: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199641178.001.0001>. Accessed at: 2024-02-01.
- FERRONI, Filippo; FISHER, Jonas DM; MELOSI, Leonardo. Unusual shocks in our usual models. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, Netherlands, p. 103598, 2024. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2024.103598>. Accessed at: 2024-02-01.
- GONÇALVES, Raquel Nadal Cesar. **Nowcasting Brazilian GDP with Eletronic Payments Data**, 2022. Banco Central do Brasil Working Paper. Available at: <https://www.bcb.gov.br/pec/wps/ingl/wps564.pdf>. Accessed at: 2024-02-01.

HARVEY, Andrew; CHUNG, Chia-Hui. Estimating the underlying change in unemployment in the UK. **Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)**, Wiley Online Library, United Kingdom, v. 163, n. 3, p. 303–309, 2000. Available at: <https://doi.org/10.1111/1467-985X.00171>. Accessed at: 2024-02-01.

HARVEY, Andrew C; PIERSE, Richard G. Estimating missing observations in economic time series. **Journal of the American statistical Association**, Taylor & Francis, United States of America (USA), v. 79, n. 385, p. 125–131, 1984. Available at: <https://doi.org/10.2307/2288346>. Accessed at: 2024-02-01.

HEINRICH, Markus; REIF, Magnus. **Forecasting using mixed-frequency VARs with time-varying parameters**. [S.l.], 2018. Available at: <https://www.ifo.de/DocDL/wp-2018-273-heinrich-reif-forecastings-var.pdf>. Accessed at: 2024-02-01.

HO, Paul. Forecasting in the absence of precedent. **Journal of Economic Surveys**, Wiley Online Library, United States of America (USA), v. 37, n. 3, p. 1033–1058, 2023. Available at: www.richmondfed.org/publications/research/working_papers/2021/wp_21-10. Accessed at: 2024-02-01.

HUBER, Florian; KOOP, Gary; ONORANTE, Luca; PFARRHOFER, Michael; SCHREINER, Josef. Nowcasting in a pandemic using non-parametric mixed frequency VARs. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 232, n. 1, p. 52–69, 2023. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2020.11.006>. Accessed at: 2024-02-01.

ISSLER, João Victor; NOTINI, Hilton Hostalacio. Estimating Brazilian monthly GDP: A state-space approach. **Revista Brasileira de Economia**, SciELO Brasil, v. 70, n. 1, p. 41–59, 2016. <https://doi.org/10.5935/0034-7140.20160003>. Accessed at: 2024-02-01.

JACQUIER, Eric; POLSON, Nicholas G; ROSSI, Peter E. Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors. **Journal of econometrics**, Elsevier, Netherlands, v. 122, n. 1, p. 185–212, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2003.09.001>. Accessed at: 2024-02-01.

KIM, Chang-Jin; NELSON, Charles R. State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications. **MIT Press Books**, The MIT press, v. 1, 1999.

- KIM, Sangjoon; SHEPHARD, Neil; CHIB, Siddhartha. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. **The review of economic studies**, Wiley-Blackwell, United Kingdom (UK), v. 65, n. 3, p. 361–393, 1998. Available at: <https://www.jstor.org/stable/2566931>. Accessed at: 2024-02-01.
- KOOP, Gary; MCINTYRE, Stuart; MITCHELL, James; POON, Aubrey. Nowcasting ‘true’ monthly US GDP during the pandemic. **National Institute Economic Review**, Cambridge University Press, United Kingdom (UK), v. 256, p. 44–70, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1017/nie.2021.8>. Accessed at: 2024-02-01.
- LENZA, Michele; PRIMICERI, Giorgio E. **How to Estimate a VAR after March 2020**. United States of America (USA), 2020. Available at: <https://www.nber.org/papers/w27771>. Accessed at: 2024-02-01.
- MARIANO, Roberto S; MURASAWA, Yasutomo. A coincident index, common factors, and monthly real GDP. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, Wiley Online Library, United Kingdom, v. 72, n. 1, p. 27–46, 2009. Available at: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1468-0084.2009.00567.x>. Accessed at: 2024-02-01.
- MARIANO, Roberto S.; MURASAWA, Yasutomo. A new coincident index of business cycles based on monthly and quarterly series. **Journal of applied Econometrics**, Wiley Online Library, United States of America (USA), v. 18, n. 4, p. 427–443, 2003. Available at: www.researchgate.net/publication/5139710_A_New_Coincident_Index_of_Business_Cycles_Based_on_Monthly_and_Quarterly_Series. Accessed at: 2024-02-01.
- NG, Serena. **Modeling macroeconomic variations after COVID-19**. [S.l.], 2021. Available at: https://www.nber.org/system/files/working_papers/w29060/w29060.pdf. Accessed at: 2024-02-01.
- PRIMICERI, Giorgio E; TAMBALOTTI, Andrea. Macroeconomic Forecasting in the Time of COVID-19. **Manuscript, Northwestern University**, p. 1–23, 2020. Available at: www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecb.wp2436~df6319728a.en.pdf. Accessed at: 2024-02-01.
- SCHORFHEIDE, Frank.; SONG, Dongho. Real-time forecasting with a mixed-frequency VAR. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, United States of America (USA), v. 33, n. 3, p. 366–380, 2015. Available at: <https://doi.org/10.1080/07350015.2014.954707>. Accessed at: 2024-02-01.

SCHORFHEIDE, Frank; SONG, Dongho. Real-time forecasting with a (standard) mixed-frequency VAR during a pandemic. **International Journal of Central Banking**, United States of America (USA), Forthcoming, 2023. Available at: www.nber.org/system/files/working_papers/w29535/w29535.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

STOCK, James H; WATSON, Mark W. Core inflation and trend inflation. **Review of Economics and Statistics**, The MIT Press, United States of America (USA), v. 98, n. 4, p. 770–784, 2016. Available at: https://doi.org/10.1162/REST_a_00608. Accessed at: 2024-02-01.

STOFFER, David S; WALL, Kent D. Bootstrapping state-space models: Gaussian maximum likelihood estimation and the Kalman filter. **Journal of the American statistical association**, Taylor & Francis, v. 86, n. 416, p. 1024–1033, 1991. Available at: <https://doi.org/10.1080/01621459.1991.10475148>. Accessed at: 2024-02-01.

WINK JUNIOR, Marcos Vinício; PEREIRA, Pedro Luiz Valls. Modeling and Forecasting of Realized Volatility: Evidence from Brazil. **Brazilian Review of Econometrics**, Sociedade Brasileira de Econometria-SBE, v. 31, n. 2, 2011. Available at: <https://periodicos.fgv.br/bre/article/download/4056/5823/14327>. Accessed at: 2024-02-01.

ZUANAZZI, Pedro Tonon; ZIEGELMANN, Flávio Augusto. Previsões para o crescimento do PIB trimestral brasileiro com séries financeiras e econômicas mensais: uma aplicação de MIDAS. **Economia Aplicada**, SciELO Brasil, v. 18, n. 2, p. 295–318, 2014. <https://doi.org/10.1590/1413-8050/ea515>. Accessed at: 2024-02-01.

4.7 APÊNDICE

4.7.1 APÊNDICE A

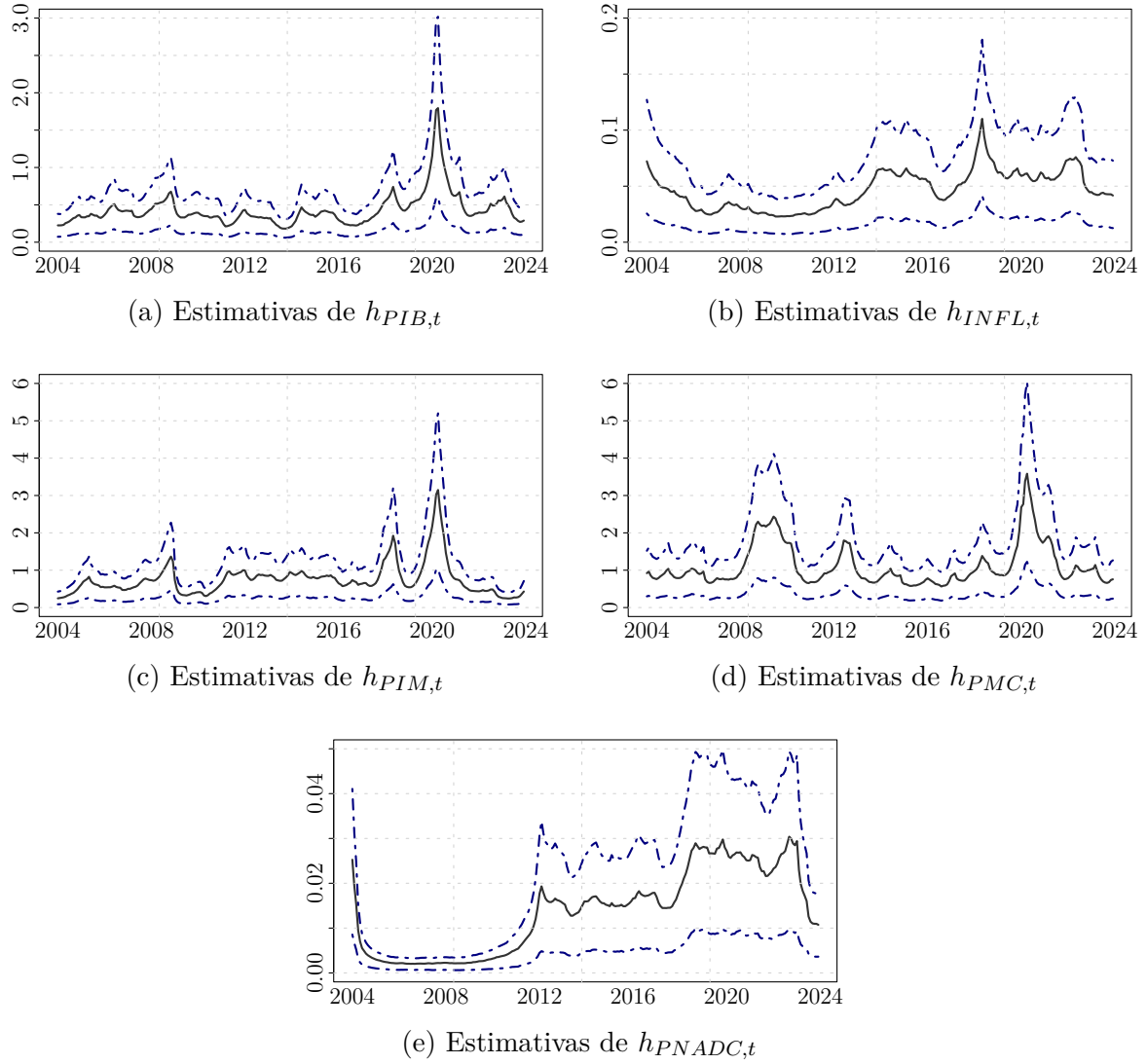
Tabela 4.18: Vintages para as Taxas de Crescimento do PIB real Trimestral (com ajuste sazonal)

Vintage	1T/18	2T/18	3T/18	4T18	1T/19	2T/19	3T/19	4T19	1T/20	2T/20	3T/20	4T20	Média
1T/18	0,4%	0,1%	0,2%	0,4%	0,5%	0,6%	0,7%	0,6%	0,8%	0,5%	1,0%	0,8%	0,6%
2T/18		0,2%	0,2%	0,1%	0,0%	-0,1%	-0,1%	0,1%	0,1%	-0,2%	-0,1%	-0,1%	0,0%
3T/18			0,8%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,4%	0,8%	0,8%	0,9%	0,6%
4T/18				0,2%	0,1%	0,1%	0,1%	0,0%	-0,1%	-0,4%	-0,5%	-0,4%	-0,1%
1T/19					-0,2%	-0,1%	0,0%	0,0%	0,2%	0,5%	1,3%	0,9%	0,3%
2T/19						0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,2%	0,4%	0,4%
3T/19							0,6%	0,7%	0,5%	0,1%	-0,1%	-0,1%	0,3%
4T/19								0,5%	0,4%	0,5%	0,2%	0,4%	0,4%
1T/20									-1,5%	-2,5%	-1,5%	-2,1%	-1,9%
2T/20										-9,7%	-9,6%	-9,2%	-9,5%
3T/20											7,7%	7,6%	7,7%
4T/20												3,2%	3,2%

Fonte: IBGE e Elaboração Própria.

4.7.2 APÊNDICE B

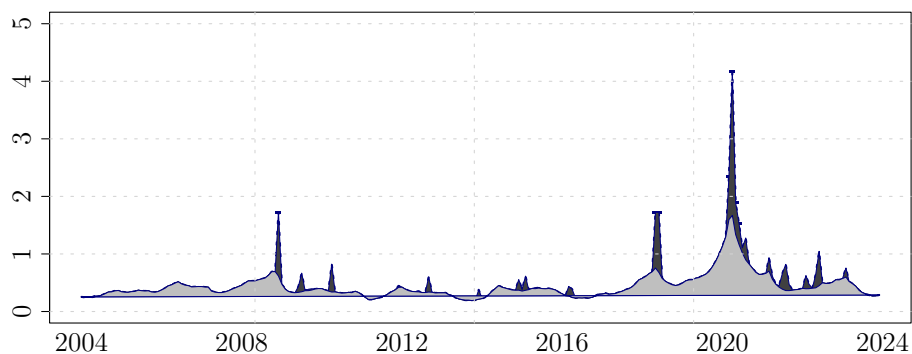
Figura 4.13: Estimativas posteriores dos fatores 'persistentes' de volatilidade estocástica para a especificação SVO-t



Nota: Denotamos a volatilidade persistente como $\tilde{\Sigma}_t = A^{-1}\Lambda_t(A^{-1})'$, enquanto a total é dada por $\Sigma_t = A^{-1}O_tQ_t\Lambda_tO_tQ_t(A^{-1})'$. Período Amostral - 2004:01-2023:12. Linha pontilhadas indicam os intervalos de 16.5% e 83.5%.

Fonte: Elaboração própria.

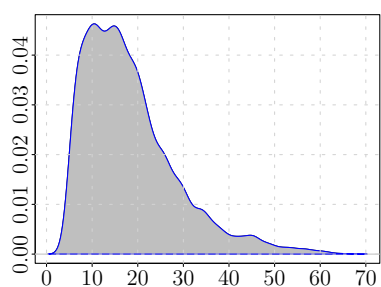
Figura 4.14: Estimativas posteriores do fator 'total' e 'persistente' de volatilidade estocástica para o PIB mensal estimado com a especificação SVO-t



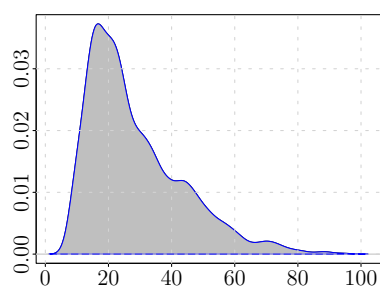
Nota: Estimativas posteriores do fator 'total' (cinza escuro) e 'persistente' (cinza claro) de volatilidade estocástica para o PIB mensal estimado com a especificação SVO-t. Denotamos a volatilidade persistente como $\tilde{\Sigma}_t = A^{-1}\Lambda_t(A^{-1})'$, enquanto a total é dada por $\Sigma_t = A^{-1}O_tQ_t\Lambda_tO_tQ_t(A^{-1})'$. Período Amostral - 2004:01-2023:12. Linha pontilhadas indicam os intervalos de 16.5% e 83.5%. Os pontos em azul escuro são as estimativas posteriores dos outliers detectados pelo modelo.

Fonte: Elaboração própria.

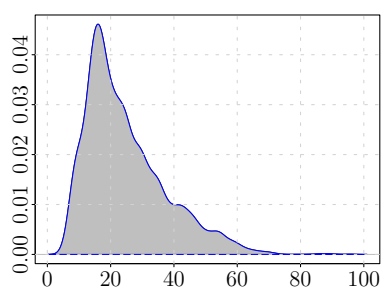
Figura 4.15: Estimativas posteriores dos parâmetros de graus de liberdade d da especificação SVO-t



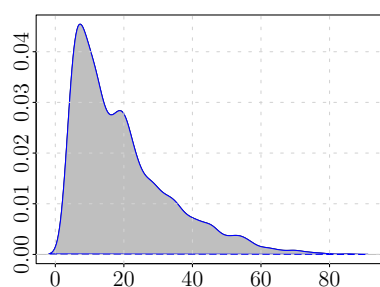
(a) Estimativas de d_{PIB}



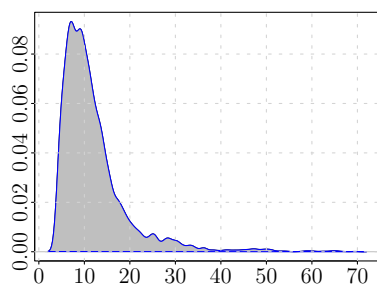
(b) Estimativas de d_{INFL}



(c) Estimativas de d_{PIM}



(d) Estimativas de d_{PMC}



(e) Estimativas de d_{PNADC}

Fonte: Elaboração própria.

5 CONCLUSÃO

Nesta tese propusemos a aplicação empírica de métodos econométricos não lineares sobre três fenômenos macroeconômicos observados. Estudamos a presença de endogeneidade nas mudanças de regime monetário e fiscal, investigamos a capacidade de explicação dos movimentos da curva de juros por meio de fatores dinâmicos e parâmetros variáveis no tempo e investigamos o caso do PIB brasileiro durante a pandemia, em um contexto de dados em tempo real e observações extremas.

Assim, a tese é composta de três ensaios. No primeiro artigo, compreendemos a presença de endogeneidade nas mudanças de regime monetário e fiscal. No segundo artigo, exploramos a metodologia GAS como uma estratégia de estimar os fatores dinâmicos e parâmetros variáveis no tempo em modelos de estrutura a termo da taxa de juros. Por fim, no terceiro artigo, investigamos a capacidade de previsão do PIB brasileiro em um contexto de dados em tempo real e de *outliers*, considerando, principalmente, como os métodos de correções para observações extremas podem aperfeiçoar o desempenho dos modelos MF-VAR.

No primeiro trabalho, propomos estimar um modelo MS-DSGE e avaliar a interação entre os regimes monetário e fiscal da economia brasileira usando uma metodologia recentemente desenvolvida. Foi apresentada uma aplicação de um modelo DSGE para uma pequena economia aberta com mudança de regime endógena, cuja estimação envolveu técnicas bayesianas. A estratégia econométrica adotada considera que as mudanças de regime das políticas monetária e fiscal são determinadas endogenamente, alternando entre regimes sempre que um fator latente autorregressivo que representa o estado dos regimes cruza um limite estimado. A endogeneidade decorre da estrutura de probabilidades de transição variáveis no tempo, na qual a regra de movimento de cada fator latente é determinada pelos choques estruturais da economia e pelos fatores defasados.

As estimativas indicam que há forte presença de endogeneidade nos regimes monetário e fiscal; em especial, calculamos que os choques estruturais de política monetária apresentam peso relevante na determinação dos regimes futuros de políticas fiscal e monetária e que os choques idiossincráticos do fator fiscal influenciam o estado do regime monetário um passo à frente mas não o contrário. Tais evidências suportam as discussões recentes de que a política monetária brasileira se ajusta à fiscal, tal que demandam a reconsideração de como as mudanças na função de reação de política monetária são modeladas em economias abertas emergentes com fundamentos fiscais frágeis.

Uma limitação do presente trabalho refere-se à baixa exploração de demais fatores na determinação dos regimes, em especial, há ausência de um elemento que represente,

explicitamente, as expectativas dos agentes e como isso poderia determinar a probabilidade de migrar de um regime para outro. Como trabalho futuro, é possível considerar esse e mais outros elementos, como a interação com a política monetária internacional e risco-país. Outra sugestão é a aplicação da metodologia de mudança de regime endógena em outros contextos DSGE, como a alternância nos regimes dos coeficientes de incerteza e da curva de juros. A comparação das interações monetária e fiscal com o caso de economia avançada também é uma sugestão de trabalho empírico que poderia ser incluída.

No segundo ensaio implementamos extensões para o modelo de estrutura a termo da família Nelson-Siegel. Usando dados de contratos do mercado de juros futuros negociados na B3, estimamos o modelo Nelson-Siegel com fatores dinâmicos e volatilidade comum variando no tempo. Seguimos a estrutura proposta por Koopman, Mallee e Wel (2010), e modelamos o fator de decaimento λ como variável no tempo. Também consideramos um componente comum de volatilidade estocástica para os erros de medida.

Uma vez que o modelo é não linear, nós propomos o uso do Filtro Kalman-GAS para estimar os fatores dinâmicos de interesse. Apresentamos as derivações analíticas do modelo de Nelson-Siegel com a metodologia GAS em formato de espaço de estados, denominada Score-Driven Nelson-Siegel. A grande vantagem dessa metodologia é que função de verossimilhança do modelo de estado de espaço com parâmetros variáveis no tempo é disponível em forma fechada, o que facilita a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança e reduz, substancialmente, o custo computacional em relação a outras técnicas econométricas.

Os resultados de nossas estimações fornecem evidências para melhora de poder preditivo com a modelagem de λ_t e da volatilidade dos termos de erro como variáveis no tempo seguindo dinâmica GAS. Destacamos que o uso dessa metodologia para a curva de juros brasileira e sua aplicação de hedge é uma novidade.

Demonstramos a aplicação do modelo Dinâmico de Nelson-Siegel com volatilidade estocástica para um exercício empírico de hedge. Mostramos que o tratamento de λ e da volatilidade como fatores variantes no tempo é capaz de melhorar a qualidade preditiva de maturidades que não possuem instrumentos líquidos disponíveis para imunização. Usando os resultados de diferentes especificações Nelson-Siegel estimadas com o Filtro Kalman-GAS, conseguimos encontrar carteiras otimizadas e imunizar satisfatoriamente uma carteira de crédito prefixada sintética com duration de 20 anos aproximadamente.

Os resultados apresentados neste trabalho são de grande interesse para o mercado financeiro, pois indicam potencial de ganhos de eficiência em operações de hedge de longo prazo. Atualmente, não há instrumentos líquidos disponíveis para imunização de carteiras prefixadas na taxa CDI, e isso leva as instituições a usarem operações de swap com outros indexadores, o que eleva o custo final de uma operação.

Como aplicações futuras, pode-se usar o presente estudo como base para uma série de aplicações, como a imunização título "verdes" com prazos alongados lançados recentemente por instituições financeiras governamentais, para passivos longos de fundos de pensão e para hedge com títulos indexados à inflação. Metodologicamente, alguns desafios na modelagem podem ser refinados e aplicados para o mercado brasileiro. O primeiro deles é considerar a ampliação dos fatores de volatilidade. Conforme Koopman, Lucas e Zamojski (2017), pode-se estimar os fatores de volatilidade estocástica para cada uma das maturidades do vetor de observáveis, o que elevaria, significativamente, a dimensionalidade do sistema de matrizes. Outra inovação é considerar a volatilidade estocástica na matriz de covariância do vetor de transição, conforme Caldeira, Laurini e Portugal (2010) e Laurini e Caldeira (2016). O segundo refinamento, em linha com as boas práticas literatura de curva de juros, é testar a aplicação da metodologia para a especificação de Svensson e para aquelas especificações que consideram fatores macroeconômicos. Por fim, as propriedades analíticas do Filtro Kalman-GAS permitem que outras distribuições de probabilidade sejam consideradas, conforme Mesters, Schwaab e Koopman (2014) e Koopman, Lucas e Zamojski (2017); o que, ainda, não é considerado na modelagem da curva de juros brasileira.

Ressalta-se que os resultados obtidos para os modelos Nelson-Siegel são válidos para o ajuste na amostra, e uma análise para resultados fora da amostra poderia obter resultados distintos, favorecendo especificações mais parcimoniosas, mas enfatizamos que o foco do presente trabalho foi verificar qual estrutura é mais adequada para o comportamento observado nessa curva de juros e não diretamente realizar previsões fora da amostra. Assim, um exercício de previsão fora da amostra comparando o Filtro Kalman-GAS com demais metodologias da literatura é um trabalho futuro a ser considerado.

No terceiro ensaio, estudamos como desenvolver modelos VAR que consideram frequências distintas e são robustos a eventos extremos. Como subproduto da metodologia, apresentamos um indicador coincidente construído por esse modelo, baseado na forma espaço de estados, cuja estimação envolveu a utilização da técnica do Filtro de Kalman. O modelo impõe uma regra de ponderação para a taxa de crescimento trimestral em função das taxas mensais não observadas. Essa restrição, juntamente ao tratamento adequado na seleção das variáveis mensais, permitiu obter resultados satisfatórios nas análises até 2019.

Este artigo investigou se é possível produzir previsões de alta qualidade num momento de grande instabilidade econômica, e se várias extensões à especificação do modelo melhoram o seu desempenho de previsão durante a pandemia. Como reconhecido por Lenza e Primiceri (2020) e Schorfheide e Song (2023) para os EUA e Bobeica e Hartwig (2023) para a Zona do Euro, os *outliers* de 2020 produziram expressivas distorções sobre as previsões geradas por modelos VAR com variância constante. Diante disso, estudamos três técnicas para correção de *outliers* apresentadas na literatura e aplicamos em um MF-VAR com dados brasileiros, por meio de um exercício de previsão em tempo real do PIB, usando dados

mensais de atividade econômica para prever o PIB trimestral. Apesar de nosso foco estar na metodologia MF-VAR, as correções apresentadas podem ser aplicadas em diferentes modelos de séries temporais.

Nossas estimativas apresentaram resultados satisfatórios para a previsão do PIB brasileiro em tempo real durante a pandemia. O exercício revelou que os modelos estudados foram efetivos em lidar com as observações extremas, de modo que superaram a pesquisa FOCUS na previsão do 1T/2020 e do 4T/2020, mas também ilustraram que ainda há espaço para melhorias na modelagem. Isso aparece no melhor desempenho do modelo mais simples, que considera a fixação dos parâmetros estimados em 2019 para condução do exercício.

Considerando os modelos com volatilidade estocástica, a principal diferença foi na amplitude das densidades preditivas. Enquanto os modelos SV e LP resultaram em estimativas amplas e trajetórias incoerentes em alguns casos, o modelo SVO-t apresentou intervalos de confiança mais estreitos. Apesar disso, a especificação SVO-t foi competitiva apenas nas previsões do 3T/2020 e do 4T/2020, e apresentou previsões incondicionais bem comportadas.

Cabem, ainda, algumas observações sobre a construção do modelo, projetando aperfeiçoar e ultrapassar algumas limitações encontradas em trabalhos futuros. A primeira delas é a forma como as covariadas são inseridas no modelo. É preciso investigar um maneira mais robusta de selecionar as variáveis, o que sugere espaço para a introdução de métodos de seleção de variáveis nesse arcabouço, alternativo à abordagem do modelo com fatores dinâmicos, que são uma solução consolidada na literatura para esse procedimento. A segunda observação diz respeito aos coeficientes estimados. Dado o contexto, uma evolução natural da especificação MF-VAR seria introduzir dinâmica nos parâmetros autorregressivos variáveis no tempo (por exemplo, Heinrich e Reif (2018)). Um terceiro ponto ainda é sobre o tratamento e a identificação dos choques de 2020 em um contexto de relações estruturais, relevante para bancos centrais, como tratado por Primiceri e Tambalotti (2020) e Ferroni, Fisher e Melosi (2024). Por exemplo, um trabalho futuro é a consideração das correções para outliers em um modelo semiestrutural de pequeno porte e a investigação sobre a qualidade dos parâmetros estimados por estes modelos.

Por fim, quanto às previsões, fazemos dois apontamentos para trabalhos futuros. O primeiro, naturalmente, é a ampliação da avaliação de previsão para os períodos após 2020. Segundo, há outras especificações em maiores frequências ou correções sobre as informações *a priori* que poderiam ser adaptadas e potencialmente melhorar a capacidade desses modelos para capturar pontos de inflexão da economia brasileira em momentos de crise com maior antecedência. Por exemplo, em relação ao primeiro caso, por meio do uso de informações de pagamentos eletrônicos (Gonçalves (2022)). Em relação ao segundo

caso, uma série de estratégias de robustez podem ser aplicadas sobre a priori de Minnesota, como explorado por Bobeica e Hartwig (2023).

5.1 REFERÊNCIAS

BOBEICA, Elena; HARTWIG, Benny. The COVID-19 shock and challenges for inflation modelling. **International journal of forecasting**, Elsevier, Netherlands, v. 39, n. 1, p. 519–539, 2023. Available at:

www.ecb.europa.eu//pub/pdf/scpwps/ecb.wp2558~22b223a7c6.en.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

CALDEIRA, Joao F; LAURINI, Márcio P; PORTUGAL, Marcelo S. Bayesian inference applied to dynamic Nelson-Siegel model with stochastic volatility. **Brazilian Review of Econometrics**, v. 30, n. 1, p. 123–161, 2010. Available at:

www.researchgate.net/publication/277046970_Bayesian_Inference_Applied_to_Dynamic_Nelson-Siegel_Model_with_Stochastic_Volatility. Accessed at: 2024-02-01.

FERRONI, Filippo; FISHER, Jonas DM; MELOSI, Leonardo. Unusual shocks in our usual models. **Journal of Monetary Economics**, Elsevier, Netherlands, p. 103598, 2024. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2024.103598>. Accessed at: 2024-02-01.

GONÇALVES, Raquel Nadal Cesar. **Nowcasting Brazilian GDP with Eletronic Payments Data**, 2022. Banco Central do Brasil Working Paper. Available at: <https://www.bcb.gov.br/pec/wps/ingl/wps564.pdf>. Accessed at: 2024-02-01.

HEINRICH, Markus; REIF, Magnus. **Forecasting using mixed-frequency VARs with time-varying parameters**. [S.l.], 2018. Available at: <https://www.ifo.de/DocDL/wp-2018-273-heinrich-reif-forecastings-var.pdf>. Accessed at: 2024-02-01.

KOOPMAN, Siem Jan; LUCAS, Andre; ZAMOJSKI, Marcin. **Dynamic term structure models with score-driven time-varying parameters: estimation and forecasting**. Poland, 2017. Available at:

https://static.nbp.pl/publikacje/materialy-i-studia/258_en.pdf. Accessed at: 2024-10-01.

KOOPMAN, Siem Jan; MALLEE, Max IP; WEL, Michel Van der. Analyzing the term structure of interest rates using the dynamic Nelson–Siegel model with time-varying parameters. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, United States of America (USA), v. 28, n. 3, p. 329–343, 2010. Available at:

www.econstor.eu/bitstream/10419/86192/1/07-095.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

LAURINI, Márcio P; CALDEIRA, Joao F. A macro-finance term structure model with multivariate stochastic volatility. **International Review of Economics & Finance**, Elsevier, Netherlands, v. 44, p. 68–90, 2016. Available at:

www.researchgate.net/publication/254420860_Some_Comments_on_a_Macro-Finance_Model_with_Stochastic_Volatility. Accessed at: 2024-02-01.

LENZA, Michele; PRIMICERI, Giorgio E. **How to Estimate a VAR after March 2020**. United States of America (USA), 2020. Available at: <https://www.nber.org/papers/w27771>. Accessed at: 2024-02-01.

MESTERS, Geert; SCHWAAB, Bernd; KOOPMAN, Siem Jan. **A dynamic yield curve model with stochastic volatility and non-Gaussian interactions: an empirical study of non-standard monetary policy in the euro area**. (Working Paper). Tinbergen Institute Discussion Paper 14-071/III, Netherlands, 2014. Available at: <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2456624>. Accessed at: 2024-10-01.

PRIMICERI, Giorgio E; TAMBALOTTI, Andrea. Macroeconomic Forecasting in the Time of COVID-19. **Manuscript, Northwestern University**, p. 1–23, 2020. Available at: www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecb.wp2436~df6319728a.en.pdf. Accessed at: 2024-02-01.

SCHORFHEIDE, Frank; SONG, Dongho. Real-time forecasting with a (standard) mixed-frequency VAR during a pandemic. **International Journal of Central Banking**, United States of America (USA), Forthcoming, 2023. Available at: www.nber.org/system/files/working_papers/w29535/w29535.pdf. Accessed at: 2024-02-01.