

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE METODOLÓGICA DE SIMULAÇÕES DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS  
SOBRE SEÇÕES DE PERFIS AERODINÂMICOS

por

Paulo Arthur Beck

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia Mecânica

Porto Alegre, outubro de 2010.

ANÁLISE METODOLÓGICA DE SIMULAÇÕES DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS  
SOBRE SEÇÕES DE PERFIS AERODINÂMICOS

por

Paulo Arthur Beck  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Adriane Prisco Petry

Co-orientador: Prof. Dr. Horacio Antonio Vielmo

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Sergio Luiz Frey ..... PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch..... PPGEC / UFRGS

Prof. Dr. João Luiz F. Azevedo ..... DCTA / IAE

Prof. Dr. Horácio A Vielmo  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 18 de outubro de 2010.

Dedicado às minhas filhas, Luiza e Julia, minhas fontes de vida, motivação e inspiração.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha orientadora, Prof. Dr. Adriane Prisco Petry e ao meu co-orientador, Prof. Dr. Horacio Antonio Vielmo, pela confiança em mim depositada e pela oportunidade de crescimento intelectual e pessoal. Gratidão deve ser expressa também a todos os professores do PROMEC dos quais fui aluno e que com a sua diversidade e pluralidade de ideias tornaram a minha formação mais rica e instigante. Aos meus colegas de mestrado devo também gratidão, pelo apoio e pela ajuda em todos os momentos, bons ou ruins. Ao secretário do PROMEC Paulo, meu especial agradecimento pela paciência e sempre presente vontade de ajudar. Aos meus amigos, expresso a minha gratidão pela lealdade incondicional e suporte irrestrito. Por último e de forma mais importante, agradeço à minha esposa por toda a dedicação e paciência, senão privações, durante o desenrolar do meu curso de mestrado.

## RESUMO

Este trabalho apresenta o resultado da aplicação do Método dos Volumes Finitos, adotado pelo software comercial Star-CCM+ na simulação para o regime permanente de escoamentos turbulentos incompressíveis e compressíveis sobre seções de aerofólios. Para o caso incompressível modelam-se seções do aerofólio NACA 0012 com ângulo de ataque zero. Para o caso compressível, uma seção do aerofólio supercrítico OAT15A em pequeno ângulo de ataque é modelada. Os domínios computacionais são discretizados por malhas não estruturadas de células poliédricas ou por malhas estruturadas de geração hiperbólica para diferentes topologias e parâmetros construtivos determinados pela estimativa de grandezas do fenômeno físico, como a altura da primeira camada de células quadrilaterais junto à parede. A qualidade e adequação dessas malhas para as simulações são verificadas por estudo de dependência quanto ao nível de refinamento e também quanto à posição do contorno onde o escoamento é livre no caso de escoamento compressível. Na metodologia de verificação, o índice de convergência de malha GCI e a ordem observada de convergência do método (dos Volumes Finitos) são obtidos para três níveis de refinamento com o propósito de selecionar uma malha de trabalho que concilie precisão e esforço computacional com os recursos disponíveis. As simulações são conduzidas para dois modelos de turbulência – o modelo Spalart-Allmaras e o modelo  $k-\omega$ /SST. Os resultados obtidos pela aplicação desses modelos são interpretados sob o ponto de vista fenomenológico e comparados com os resultados experimentais disponíveis em literatura.

Palavras-chave: Método dos Volumes Finitos, Star-CCM+, NACA 0012, OAT15A, Modelos de Turbulência.

## **ABSTRACT**

The Finite Volumes Method adopted by the commercial software Star-CCM+ is applied to the simulation of the steady state regime of incompressible and compressible turbulent flows over selected airfoil's sections. The physical model used with the incompressible flow case is a NACA 0012 airfoil section at zero angle of attack. The ONERA's OAT15A supercritical airfoil section at small angle of attack applies to the compressible flow case. The computational domains are discretized by structured and unstructured meshes for different topologies and far field configurations. The structured meshes are of the quadrilateral type with hyperbolic node distribution whilst the unstructured meshes use polyhedral cells. The grids are generated by applying a methodology where estimates of the flow variables are used as input for the grid's constructive parameters like the near wall cell thickness. Grid dependency studies are carried out in order to verify the grid's quality and suitability to represent the physical phenomena. The grid's asymptotic convergence index GCI and its observed order of convergence are evaluated for three refinement levels and far field position for the compressible flow cases. The objective is to select the most suitable grid taking into account the accuracy requirements and the computational resources available. The one-equation Spalart-Allmaras turbulence model and the two-equation  $k-\omega$ /SST turbulence models are used. The numerical results are discussed from the physical point of view and compared with the experimental ones available in literature.

Keywords: Finite Volumes Method, Star-CCM+, NACA 0012, OAT15A, Turbulence models.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>MODELOS FÍSICOS.....</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO .....</b>	<b>10</b>
4.1	Formulação das equações de conservação.....	10
4.2	Formulação do modelo de turbulência Spalart-Allmaras .....	12
4.3	Formulação do modelo de turbulência $k-\omega$ /SST.....	15
4.4	Formulação das condições de contorno .....	20
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA NUMÉRICA .....</b>	<b>23</b>
5.1	O Método dos Volumes Finitos .....	23
5.2	Algoritmo acoplado (escoamentos compressíveis) .....	30
5.3	Algoritmo segregado (escoamentos incompressíveis) .....	33
<b>6</b>	<b>METODOLOGIA DE VERIFICAÇÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>40</b>
<b>7</b>	<b>METODOLOGIA PARA GERAÇÃO DE MALHA .....</b>	<b>44</b>
7.1	Malha não estruturada de células poliédricas .....	44
7.2	Malha estruturada de células quadrilaterais e geração hiperbólica.....	53
<b>8</b>	<b>ESTUDO DE DEPENDÊNCIA DE MALHA .....</b>	<b>63</b>
8.1	NACA 0012 .....	63
8.2	OAT15A .....	78
<b>9</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>90</b>
9.1	NACA 0012 .....	90
9.2	OAT15A .....	100
<b>10</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>118</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>120</b>
	<b>APÊNDICE A – GERAÇÃO DA CAMADA LIMITE .....</b>	<b>125</b>
	<b>APÊNDICE B – SUPRESSÃO DE TURBULÊNCIA .....</b>	<b>129</b>
	<b>ANEXO A.....</b>	<b>130</b>
A.1	Coordenadas do aerofólio OAT15A .....	130
A.2	Localização dos sensores de pressão .....	132
A.3	Coefficientes de pressão – Caso 11.....	133
A.4	Coefficientes de pressão – Caso 14.....	134
A.5	Perfil de velocidade para $x/c = 27\%$ - Caso 14 .....	135

A.6	Camada limite para $x/c = 60\%$ - Caso 11.....	136
A.7	Camada limite para $x/c = 95\%$ - Caso 11.....	137
<b>ANEXO B</b>	.....	<b>138</b>
B.1	Coordenadas do aerofólio NACA 0012.....	138

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Perfil do aerofólio NACA 0012.....	6
Figura 3.2	Coefficiente de arrasto $c_d$ versus número de Reynolds $Re_c$ .....	7
Figura 3.3	Perfil do aerofólio OAT15A .....	8
Figura 5.1	Decomposição do fluxo difusivo para uma face interior .....	27
Figura 5.2	Decomposição de fluxo difusivo em face de contorno .....	28
Figura 7.1.1	Primeira região de triangularização, “LE-TE” .....	45
Figura 7.1.2	Segunda e terceira regiões de triangularização, “TE-LE/BS” e “TE” .....	45
Figura 7.1.3	Região do domínio computacional próxima às paredes do modelo .....	46
Figura 7.1.4	Domínio computacional e condições de contorno, NACA 0012, Tab. (B.1) ...	49
Figura 7.1.5	Malha “C” da Tab. (7.4) .....	50
Figura 7.1.5a	Detalhe das células da camada limite junto ao bordo de ataque.....	51
Figura 7.1.5b	Detalhe das células da camada limite no bordo de fuga .....	51
Figura 7.1.5c	Volumes gerados nos contornos do domínio computacional .....	52
Figura 7.1.5d	Indicador de razão de variação dos volumes, malha “C” .....	53
Figura 7.2.1	Topologia “O-Mesh” (sem escala) e condições de contorno.....	54
Figura 7.2.2	Diagrama de pontos para geração de malha hiperbólica .....	55
Figura 7.2.3	Malha hiperbólica de topologia “O”, $FF = 50$ .....	60
Figura 7.2.4	Distribuição de nós nas paredes do aerofólio .....	61
Figura 7.2.5	Agrupamento de nós no bordo de ataque.....	61
Figura 7.2.6	Discretização do bordo de fuga.....	62
Figura 7.2.7	Indicador de razão de crescimento dos volumes, Caso 11 OAT15A .....	62
Figura 8.1.1	Condições de contorno, Caso B3-6, NACA 0012 .....	65
Figura 8.1.2	Condições de contorno, Caso C12, NACA 0012.....	65
Figura 8.1.3	Condições de contorno, Caso O200, NACA 0012 .....	66
Figura 8.1.4	Malha não estruturada poliédrica “F”, caso B3-6, NACA 0012.....	68
Figura 8.1.5	Bordo de ataque, malha “F”, caso B3-6, NACA 0012 .....	69
Figura 8.1.6	Bordo de fuga, malha “F”, caso B3-6, NACA 0012.....	69
Figura 8.1.7	Razão de variação de volume para malha “F” do caso B3-6.....	70
Figura 8.1.8	Malha “F” do caso C12, NACA 0012 .....	72
Figura 8.1.9	Bordo de ataque, malha “F”, caso C12, NACA 0012.....	72
Figura 8.1.10	Bordo de fuga, malha “F”, caso C12, NACA 0012.....	73
Figura 8.1.11	Razão de variação de volume, malha “F”, caso C12, NACA 0012.....	73

Figura 8.1.12	Malha estruturada aplicada ao caso O200, NACA 0012 .....	76
Figura 8.1.13	Camada limite junto ao bordo de ataque, caso O200, NACA 0012 .....	76
Figura 8.1.14	Camada limite junto ao bordo de fuga, caso O200, NACA 0012.....	77
Figura 8.1.15	Razão de variação de volume, caso O200, NACA 0012 .....	77
Figura 8.2.1	Células com face comum entre o bordo de fuga, extradorso e intradorso.....	80
Figura 9.1.1	Histórico de convergência, caso B3-6, $x_t / c = 5\%$ , NACA 0012.....	91
Figura 9.1.2	Histórico de convergência, caso C12, $x_t / c = 5\%$ , NACA 0012 .....	92
Figura 9.1.3	Histórico de convergência, caso C12, $x_t / c = 43\%$ , NACA 0012 .....	92
Figura 9.1.4	Histórico de convergência, caso O200, $x_t / c = 5\%$ , NACA 0012 .....	93
Figura 9.1.5	Histórico de convergência, caso O200, $x_t / c = 43\%$ , NACA 0012 .....	93
Figura 9.1.6	Histórico de convergência $c_d$ , casos B3-6, C12 e O200, $x_t / c = 5\%$ .....	94
Figura 9.1.7	Histórico de convergência $c_d$ , casos B3-6, C12 e O200, $x_t / c = 43\%$ .....	95
Figura 9.1.8	$y^+$ caso B3-6, $x_t / c = 5\%$ .....	95
Figura 9.1.9	$y^+$ caso C12, $x_t / c = 5\%$ .....	96
Figura 9.1.10	$y^+$ caso O200, $x_t / c = 5\%$ .....	96
Figura 9.1.11	$y^+$ caso C12, $x_t / c = 43\%$ .....	97
Figura 9.1.12	$y^+$ caso O200, $x_t / c = 43\%$ .....	97
Figura 9.1.13	Coeficientes de pressão, casos B3-6, C12, O200, $x_t / c = 5\%, 43\%$ .....	98
Figura 9.2.1	Histórico de convergência, modelo SA .....	103
Figura 9.2.2	Histórico de convergência, modelo $k-\omega$ /SST.....	103
Figura 9.2.3	Histórico de convergência, coeficiente de arrasto, modelo SA .....	104
Figura 9.2.4	Histórico de convergência, coeficiente de arrasto, $k-\omega$ /SST .....	104
Figura 9.2.5	Histórico de convergência, coeficiente de sustentação, modelo SA.....	105
Figura 9.2.6	Histórico de convergência, coeficiente de sustentação, modelo $k-\omega$ /SST.....	105
Figura 9.2.7	$y^+$ ao longo das paredes, modelo SA .....	106
Figura 9.2.8	$y^+$ ao longo das paredes, modelo $k-\omega$ /SST .....	106
Figura 9.2.9	Coeficientes de pressão, Caso 11, modelo SA.....	108
Figura 9.2.10	Coeficientes de pressão, Caso 11, modelo $k-\omega$ /SST.....	108
Figura 9.2.11	Coeficientes de pressão, Caso 14, modelo SA.....	109
Figura 9.2.12	Coeficientes de pressão, Caso 14, modelo $k-\omega$ /SST.....	109

Figura 9.2.13	Perfil de velocidade, $x/c = 27\%$ , Caso 14, modelo SA .....	110
Figura 9.2.14	Perfil de velocidade, $x/c = 27\%$ , Caso 14, modelo $k-\omega/SST$ .....	110
Figura 9.2.15	Perfil da camada limite, $x/c = 60\%$ , Caso 11, modelo SA.....	112
Figura 9.2.16	Perfil da camada limite, $x/c = 60\%$ , Caso 11, modelo $k-\omega/SST$ .....	112
Figura 9.2.17	Perfil da camada limite, $x/c = 95\%$ , Caso 11, modelo SA.....	113
Figura 9.2.18	Perfil da camada limite, $x/c = 95\%$ , Caso 11, modelo $k-\omega/SST$ .....	113
Figura 9.2.19	Campo de velocidades no extradorso, $x/c = 40\%$ , modelo SA .....	114
Figura 9.2.20	Campo de velocidades no extradorso, $x/c = 40\%$ , modelo $k-\omega/SST$ .....	114
Figura 9.2.21	Linhas de corrente próximas ao bordo de fuga, modelo SA.....	115
Figura 9.2.22	Linhas de corrente próximas ao bordo de fuga, modelo $k-\omega/SST$ .....	115
Figura 9.2.23	Número de Mach, modelo SA .....	116
Figura 9.2.24	Número de Mach, modelo $k-\omega/SST$ .....	116

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Características das simulações aplicadas ao modelo NACA 0012.....	7
Tabela 3.2	Medições de interesse no estudo A-11.....	8
Tabela 7.1.1	Valores de referência e condições de contorno, modelo NACA 0012 .....	47
Tabela 7.1.2	Proporções $ \mathbf{ds} $ em percentual da dimensão base BS.....	48
Tabela 7.1.3	Parâmetros construtivos caso B3-6, seção NACA 0012, $c = 0.6$ m .....	48
Tabela 7.1.4	Características da malha poliédrica, seção NACA 0012, caso B3-6 .....	50
Tabela 7.2.1	Valores de referência e condições de contorno, Caso 11.....	56
Tabela 7.2.2	Parâmetros construtivos de malha estruturada, Caso 11.....	58
Tabela 8.1.1	Valores de referência e propriedades do ar, modelo NACA 0012 .....	63
Tabela 8.1.2	Condições iniciais e de contorno das malhas, modelo NACA 0012 .....	64
Tabela 8.1.3	Resultados quanto ao esforço computacional, caso B3-6, NACA 0012.....	67
Tabela 8.1.4	Coefficiente de arrasto $c_d$ , $x_t / c = 5\%$ , caso B3-6, NACA 0012.....	67
Tabela 8.1.5	Parâmetros construtivos, caso C12, modelo NACA 0012, $c = 0.8$ m.....	70
Tabela 8.1.6	Características da malha poliédrica, caso C12, NACA 0012 .....	71
Tabela 8.1.7	Resultados quanto ao esforço computacional, caso C12, NACA 0012.....	71
Tabela 8.1.8	Coefficiente de arrasto $c_d$ , caso C12, NACA 0012 .....	71
Tabela 8.1.9	Características construtivas da malha “F”, caso O200, NACA 0012 .....	74
Tabela 8.1.10	Esforço computacional, malhas refinadas, caso O200, NACA 0012 .....	75
Tabela 8.1.11	Coefficiente de arrasto $c_d$ , caso O200, NACA 0012.....	75
Tabela 8.2.1	Valores de referência e propriedades do ar.....	79
Tabela 8.2.2	Condições iniciais do estudo de dependência de malha .....	79
Tabela 8.2.3	Condições de contorno no estudo de dependência de malha.....	80
Tabela 8.2.4	Características das malhas para estudo de dependência, $r_{ref} = 1.5$ .....	81
Tabela 8.2.5	Resultados obtidos pela simulação das malhas # 1 a 9 .....	82
Tabela 8.2.6	Efeito da discretização para cada posição do contorno .....	83
Tabela 8.2.7	Ordem observada de convergência do método de discretização .....	84
Tabela 8.2.8	Diferenças percentuais entre valores extrapolados (discretização) .....	85
Tabela 8.2.9	Efeito da variação da posição de contorno .....	86
Tabela 8.2.10	Diferenças percentuais entre valores extrapolados (contorno) .....	87
Tabela 8.2.11	Verificação da ordem de convergência devida ao contorno .....	88
Tabela 8.2.12	Ordem observada de convergência devida à posição do contorno .....	89

Tabela 8.2.13	Banda de erro centrada nos valores extrapolados .....	89
Tabela 9.1.1	Parâmetros de configuração do solucionador algébrico, NACA 0012 .....	90
Tabela 9.1.2	Resultados consolidados dos casos aplicados aos modelos NACA 0012.....	99
Tabela 9.2.1	Condições iniciais, modelos SA e $k-\omega$ /SST.....	101
Tabela 9.2.2	Condições de contorno, modelos SA e $k-\omega$ /SST .....	101
Tabela 9.2.3	Parâmetros de configuração do solucionador, modelos SA e $k-\omega$ /SST.....	101
Tabela 9.2.4	Resultados comparados, OAT15A.....	117
Tabela A.1	Coordenadas do aerofólio OAT15A, corda $c = 0.15$ m.....	130
Tabela A.2	Coordenadas dos sensores, adimensionalizadas pela corda $c$ .....	132
Tabela A.3	Coefficientes de pressão, Caso 11 .....	133
Tabela A.4	Coefficientes de pressão, Caso 14 .....	134
Tabela A.5	Perfil de velocidade para $x/c = 27\%$ , Caso 14 .....	135
Tabela A.6	Camada limite para $x/c = 60\%$ , Caso 11 .....	136
Tabela A.7	Camada limite para $x/c = 95\%$ , Caso 11 .....	137
Tabela B.1	Coordenadas da seção NACA 0012 adimensionalizadas pela corda $c$ .....	138

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AGARD	Advisory Group for Aerospace Research and Development
AIAA	American Institute of Aeronautics and Astronautics
CFD	Computational Fluid Dynamics
DCTA	Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial
ENS	Equações de Navier-Stokes
IAE	Instituto de Aeronáutica e Espaço
MVF	Método dos Volumes Finitos
NACA	National Advisory Committee on Aeronautics
NASA	National Aeronautics and Space Administration
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
PROMECC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
SA	Modelo de turbulência Spalart-Allmaras
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>a</b>	Vetor cartesiano normal à área de face
$a_1$	Constante no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\arg_1$	Argumento de função no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\arg_2$	Argumento de função no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$A$	Área, $m^2$
<b>A</b>	Matriz de coeficientes
<b>A</b>	Matriz jacobiana de fluxos invíscidos
$b$	Envergadura, m
<b>b</b>	Vetor de resíduos
$c$	Corda geométrica do aerofólio, m
$c_{cel-0}$	Velocidade do som calculada para temperatura $T_{cel-0}^r$ , m/s
$c_d$	Coefficiente de arrasto por unidade de comprimento da envergadura
$c_l$	Coefficiente de sustentação por unidade de comprimento da envergadura
$c_p$	Coefficiente de pressão $\left[ \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \right]$
$c_\infty$	Velocidade do som do escoamento livre, m/s $\left[ \sqrt{\gamma RT_\infty} \right]$
$C_{b1}$	Coefficiente no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$C_{b2}$	Coefficiente no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$C_f$	Coefficiente de atrito
$C_L$	Coefficiente de sustentação
$C_p$	Calor específico à pressão constante, J/kg · K
$C_{prod}$	Coefficiente no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$C_{v1}$	Coefficiente no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$C_{v2}$	Coefficiente no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$C_{w1}$	Coefficiente no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$C_{w2}$	Coefficiente no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$C_{w3}$	Coefficiente no modelo de turbulência Spalart-Allmaras

$C_D$	Coeficiente de arrasto
$CD_{k\omega}$	Coeficiente calculado no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$CFL$	Número de Courant-Friedrichs-Lewy $\left[ U \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]$
$\tilde{d}$	Distância à parede mais próxima no modelo de turbulência Spalart-Allmaras, m
$\mathbf{D}_i$	Matriz diagonal de coeficientes
$D_f$	Força de arrasto, N
$D_f$	Fluxo difusivo de um escalar $\phi$ na face de uma célula
$D_\omega$	Termo de derivadas cruzadas no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$E$	Energia total específica, J/kg
$\mathbf{f}$	Vetor cartesiano resultante das forças de campo
$\mathbf{f}_f$	Vetor contendo fluxos invíscidos
$f_\beta$	Função no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$f_{t2}$	Função no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$f_{v1}$	Função no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$f_{v2}$	Função no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$f_{v3}$	Função no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$f_w$	Função no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$f_{1,2 \text{ ou } 3}$	Solução para a malha 1, 2 ou 3 (da mais refinada a menos refinada)
$\mathbf{F}$	Vetor de termos não viscosos nas ENS
$F_s$	Fator de segurança
$F_1$	Função no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$F_2$	Função no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$FF$	Distância das paredes da seção ao contorno, adimensionalizada pela corda $c$
$g$	Função no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$g$	Função no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\mathbf{g}_f$	Vetor contendo fluxos viscosos
$\mathbf{G}$	Vetor de termos viscosos das ENS
$G_k$	Termo de produção no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST

$G_{\bar{\nu}}$	Termo de produção no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$G_{\omega}$	Termo de produção no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$GCI$	Índice de Convergência de Malha, %
$h$	Entalpia específica, J/kg
$h_{1,2,\dots,n}$	Altura da célula 1,2,...n, m
$H$	Entalpia total específica, J/kg
$\mathbf{H}$	Vetor contendo o vetor cartesiano resultante $\mathbf{f}$ de forças de campo
$I$	Intensidade de turbulência
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$k$	Energia cinética turbulenta, J/kg
$k_i$	Energia cinética turbulenta inicial $\left[ \frac{3}{2} (IU_i)^2 \right]$ , J/kg
$k_{efet}$	Condutividade térmica efetiva, $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$
$k_{term}$	Condutividade térmica, $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$
$k_{\infty}$	Energia cinética turbulenta do escoamento livre, J/kg
$L$	Comprimento, m
$\dot{m}_f$	Vazão de massa por unidade de área, kg/s
$\mathbf{M}$	Matriz modal que diagonaliza $\mathbf{\Gamma}^{-1}$
$M_{t0}$	Constante no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$M_{\infty}$	Número de Mach do escoamento livre $\left[ \frac{U_{\infty}}{c_{\infty}} \right]$
$N_{CL}$	Número de camadas de células quadrilaterais dentro da camada limite
$N_{\Gamma_i}$	Número de avanços na marcha construtiva da malha hiperbólica
$p$	Pressão, Pa
$p$	Ordem teórica de convergência do método de discretização espacial
$p_{cel-0}^r$	Pressão extrapolada de uma célula adjacente, Pa
$p_f$	Pressão na fronteira, Pa
$p_{i,rel}$	Pressão inicial na fronteira relativa à pressão de referência $p_0$ , Pa
$p_{obs}$	Ordem observada do erro do método de discretização espacial
$p_0$	Pressão de referência, Pa

$p_\infty$	Pressão do escoamento livre, Pa
$p_{\infty,rel}$	Pressão do escoamento livre relativa à pressão de referência $p_0$ , Pa
$Pr_t$	Número de Prandtl turbulento $\left[ \frac{\nu_t}{\alpha_{term}} \right]$
$\dot{\mathbf{q}}''$	Vetor fluxo de calor
$q_\infty$	Pressão dinâmica do escoamento livre, Pa $\left[ \frac{1}{2} \rho_0 U_\infty^2 \right]$
$\mathbf{Q}$	Vetor contendo variáveis primitivas nas ENS
$Q_r$	Indicador de qualidade de refinamento
$r$	Identidade no modelo de turbulência Spalart-Allmaras $\left[ \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 \tilde{d}^2} \right]$
$r_h$	Razão de crescimento entre alturas de duas células adjacentes
$r_{FF}$	Razão de refinamento devida à posição do contorno onde o escoamento é livre
$r_{ref}$	Razão de refinamento entre malhas
$r_{efet}$	Razão efetiva de refinamento entre malhas
$R$	Constante universal de um gás, J/kg · K
$Re_c$	Número de Reynolds com relação à corda geométrica $\left[ \frac{\rho_0 U_\infty c}{\mu_0} \right]$
$Re_k$	Constante no modelo de turbulência $k$ - $\omega$ /SST
$Re_L$	Número de Reynolds com relação a um comprimento $L$ $\left[ \frac{\rho_0 U_\infty L}{\mu_0} \right]$
$Re_y$	Número de Reynolds com relação à distância à parede $y$ $\left[ \frac{\sqrt{k} y}{\nu} \right]$
$Re_T$	Número de Reynolds turbulento $\left[ \frac{k}{\omega \nu} \right]$
$Re_\beta$	Constante no modelo de turbulência $k$ - $\omega$ /SST
$Re_\omega$	Constante no modelo de turbulência $k$ - $\omega$ /SST
$\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1$	Vetor cartesiano entre a face de uma célula e seu centroide
$S$	Deformação escalar no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$S$	Magnitude do tensor taxa de deformação

$\mathbf{S}$	Tensor taxa de deformação $\left[ \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right]$
$\tilde{S}$	Parâmetro de deformação no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$\mathbf{S}_{j,k}$	Matriz não diagonal de coeficientes
$S_k$	Termo fonte prescrito no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$S_{ref}$	Área de referência, $m^2$
$S_{\tilde{\nu}}$	Termo fonte prescrito no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$S_{\phi}$	Termo fonte de um escalar $\phi$
$S_{\omega}$	Termo fonte prescrito no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$t$	Tempo, s
$T$	Temperatura, K
$T$	Escala de tempo no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST, s
$\mathbf{T}$	Tensor de tensões totais
$T_{cel-0}^r$	Temperatura extrapolada de uma célula adjacente, K
$T_{i,est}$	Temperatura estática inicial, K
$\mathbf{T}_l$	Tensor de tensões laminares
$\mathbf{T}_t$	Tensor de tensões de Reynolds
$T_f$	Temperatura na fronteira, K
$T_{\infty}$	Temperatura do escoamento livre, K
$T_0$	Temperatura de referência, K
$u^*$	Velocidade de fricção $\left[ \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right]$ , m/s
$u^+$	Velocidade de referência $\left[  \mathbf{v}  / u^* \right]$
$U$	Velocidade local, m/s
$U_e$	Velocidade externa à camada limite, m/s
$U_i$	Velocidade inicial, m/s
$U_r$	Velocidade de referência, m/s
$U_{\infty}$	Velocidade do escoamento livre, m/s
$\mathbf{v}$	Vetor cartesiano de velocidade

$v_{cel-0,n}^r$	Magnitude da componente normal da velocidade na fronteira da célula-0, m/s
$\mathbf{v}_f$	Vetor velocidade na fronteira
$v_{f,n}$	Magnitude da componente normal do vetor velocidade na fronteira, m/s
$\mathbf{v}_\infty$	Componente tangencial do vetor velocidade do escoamento livre
$v_{\infty,n}$	Magnitude da componente normal do vetor velocidade do escoamento livre, m/s
$V$	Volume, m <sup>3</sup>
$\mathbf{x}$	Vetor de incógnitas
$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_f$	Vetores cartesianos de posição
$\mathbf{W}$	Vetor de grandezas conservadas nas equações de conservação
$y$	Distância à parede mais próxima, m
$y^+$	Distância à parede adimensionalizada $\left[ \frac{u^* y}{\nu} \right]$
$y_N$	Espessura da célula mais externa da camada limite, m
$y_1$	Espessura (altura) da primeira célula da camada limite, m
$\alpha$	Ângulo de ataque, graus
$\alpha^*$	Coefficiente no modelo de turbulência $k-\omega/SST$
$\alpha_{lim}$	Razão escalar entre os valores de gradiente limitado e não limitado
$\alpha_{GCI}$	Razão entre índices $GCI$ obtidos entre dois níveis de refinamento de malha
$\alpha_{term}$	Difusividade térmica, m <sup>2</sup> /s
$\alpha_0$	Constante no modelo de turbulência $k-\omega/SST$
$\alpha_1$	Coefficiente no modelo de turbulência $k-\omega/SST$
$\alpha_1^*$	Coefficiente no modelo de turbulência $k-\omega/SST$
$\alpha_2^*$	Coefficiente no modelo de turbulência $k-\omega/SST$
$\beta$	Coefficiente calculado no modelo de turbulência $k-\omega/SST$
$\beta^*$	Coefficiente no modelo de turbulência $k-\omega/SST$
$\beta_{comp}$	Coefficiente calculado no modelo de turbulência $k-\omega/SST$
$\beta_{comp}^*$	Coefficiente no modelo de turbulência $k-\omega/SST$
$\beta_1$	Coefficiente no modelo de turbulência $k-\omega/SST$

$\beta_1^*$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\beta_2$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\beta_2^*$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\gamma$	Razão entre calores específicos a pressão constante e volume constante [1.4]
$\gamma, \gamma_1, \gamma_2$	Coeficientes ponderados no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\gamma'$	Função do fator de intermitência no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\gamma_{efet}$	Fator de intermitência no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\gamma_1$	Coeficiente calculado no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\gamma_2$	Coeficiente calculado no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\Gamma$	Coeficiente de difusão do escalar $\phi$
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz de pré-condicionamento
$\Gamma_i$	Curva base
$\delta_{CL,t}$	Espessura da camada limite turbulenta, m
$\varepsilon$	Dissipação da energia cinética turbulenta, J/kg · s
$\varepsilon$	Fator de ponderação
$\varepsilon_{12}$	Erro relativo entre duas soluções $f_1$ e $f_2$ $[(f_2 - f_1) / f_2]$
$\varepsilon_\infty$	Dissipação da energia cinética turbulenta do escoamento livre, J/kg · s
$\zeta^*$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\theta$	Parâmetro na matriz de pré-condicionamento $\mathbf{\Gamma}$
$\kappa$	Constante de von Karman [0.41]
$\mathbf{\Lambda}$	Matriz diagonal de autovalores
$\nu$	Viscosidade cinemática, m <sup>2</sup> /s
$\tilde{\nu}$	Difusividade turbulenta modificada, modelo de turbulência Spalart-Allmaras, m <sup>2</sup> /s
$\nu_t$	Difusividade turbulenta, m <sup>2</sup> /s
$\mu$	Viscosidade dinâmica, Pa · s
$\mu_{efet}$	Viscosidade efetiva, Pa · s $[\mu + \mu_t]$
$\mu_t$	Viscosidade turbulenta, Pa · s
$\mu_0$	Viscosidade dinâmica para a temperatura de referência $T_0$ , Pa · s

$\rho$	Densidade, kg/m <sup>3</sup>
$\rho_0$	Densidade calculada para a temperatura de referência $T_0$ , kg/m <sup>3</sup>
$\rho_{,T}$	Derivada da densidade com respeito à temperatura à pressão constante
$\sigma$	Número de Von Neumann $\left[ \frac{\mu \Delta t}{(\Delta x)^2} \right]$
$\sigma_k$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\sigma_{k1}$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\sigma_{k2}$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\sigma_{\tilde{\nu}}$	Coeficiente no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$\sigma_{\omega}$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\sigma_{\omega1}$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\sigma_{\omega2}$	Coeficiente no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\tau_w$	Magnitude da tensão na parede $[\rho u^{*2}]$ , N/m <sup>2</sup>
$\Upsilon_{\tilde{\nu}}$	Termo dissipativo no modelo de turbulência Spalart-Allmaras
$\phi, \phi_1, \phi_2$	Coeficientes ponderados no modelo de turbulência $k-\omega$ /SST
$\phi$	Quantidade escalar transportada
$\omega$	Taxa de dissipação específica no modelo $k-\omega$ $\left[ \frac{\varepsilon}{k} \right]$ , 1/s
$\omega_i$	Taxa de dissipação específica inicial $\left[ \frac{\rho_0 k_i}{(\mu_i / \mu_0) \mu_0} \right]$ , 1/s
$\omega$	Coeficiente de sub-relaxação
$\omega_{\infty}$	Taxa de dissipação específica do escoamento livre $[k_{\infty} / \varepsilon_{\infty}]$ , 1/s
$\mathcal{X}$	Identidade no modelo de turbulência Spalart-Allmaras $\left[ \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \right]$
$\mathbf{\Omega}$	Tensor vorticidade $\left[ \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \right]$

Nota: Símbolos em negrito representam grandezas vetoriais.

# 1 INTRODUÇÃO

A gênese desta dissertação é contextualizada na importância da correta aplicação de formulações e metodologias numéricas na simulação de modelos físicos cujos fenômenos de transporte envolvidos requerem modelagens complexas e abrangente compreensão dos aspectos físicos envolvidos.

Neste trabalho, o fenômeno objeto de estudo é o escoamento turbulento em regime permanente sobre seções de aerofólio mediante emprego de malhas estruturadas e não estruturadas. O modelo físico selecionado para o caso incompressível é uma seção do aerofólio NACA 0012. Ao caso compressível é aplicada uma malha estruturada sendo o modelo físico uma seção do aerofólio OAT15A. Essas escolhas são fruto de revisão bibliográfica (apresentada no Capítulo 2) motivada na busca de modelos relevantes em aerodinâmica aplicada que conciliem disponibilidade de dados experimentais com resultados numéricos cuidadosos.

Com a motivação e o objeto de estudo prescritos, os objetivos desta dissertação são:

- i. Entender o fenômeno físico e aplicar a corretamente a formulação RANS das equações de transporte do fenômeno;
- ii. Compreender a metodologia numérica e aplicá-la corretamente à formulação;
- iii. Adotar metodologias para geração de malha cujos parâmetros construtivos tenham fundamentação no fenômeno transportado e na metodologia numérica;
- iv. Aplicar uma metodologia de verificação às malhas e validá-las quanto à proximidade da região de convergência assintótica, selecionando uma malha de trabalho.
- v. Para a malha de trabalho, comparar os resultados experimentais com aqueles numericamente obtidos pela utilização dos modelos de turbulência Spalart-Allmaras e  $k-\omega$ /SST, identificando dependências desses resultados com os aspectos ligados à formulação, à metodologia numérica e de geração de malha;
- vi. Analisar a validade da metodologia de verificação, comparando os resultados previstos nessa metodologia com os efetivamente obtidos de forma numérica ou experimental.

O texto desta dissertação está estruturado e alinha-se com os objetivos acima descritos. No Capítulo 3, os modelos físicos são descritos e suas relevâncias em estudos aerodinâmicos esclarecidas. No Capítulo 4, o modelo matemático e a formulação dos modelos de turbulência são apresentados. A metodologia numérica, i.e., a implementação do software Star-CCM+ para o Método dos Volumes Finitos, é apresentada no Capítulo 5. A metodologia de

verificação é apresentada no Capítulo 6, juntamente com uma discussão sobre a natureza dos erros e incertezas que afetam as simulações numéricas. Os aspectos de geração e construção de malha são objeto do Capítulo 7. No Capítulo 8, o estudo de dependência de malha é apresentado e exhaustivamente discutido sob os pontos de vista de refinamento, posição do contorno e convergência assintótica de resultados. O Capítulo 9 é dedicado à apresentação e à comparação qualitativa e quantitativa dos resultados obtidos entre os modelos de turbulência e os resultados experimentais. No Capítulo 10, são apresentadas conclusões, indicações e sugestões sobre possíveis trajetórias de continuidade para este trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A predição dos indicadores de mérito aerodinâmico – os coeficientes de sustentação, arrasto e pressão – têm fundamental importância no projeto de corpos aerodinâmicos e asas em especial. Nesse contexto a mecânica dos fluidos computacional mostra-se uma alternativa atraente, senão a única muitas vezes, na obtenção ou estimativa desses indicadores.

Essas estimativas estão sujeitas a erros e incertezas que devem ser validadas e verificadas para que tenham credibilidade. Institutos como o AIAA (“American Institute of Aeronautics and Astronautics”), AGARD (“Advisory Group for Aerospace Research and Development”) e departamentos da NASA (como o Ames Research Center) mantêm publicações e bancos de dados com o objetivo de dispor à comunidade científica informações que permitam estabelecer paralelos entre resultados e referências para validação de códigos aplicados à mecânica dos fluidos computacional.

O modelo físico selecionado para o caso de escoamento incompressível é uma seção do aerofólio NACA 0012. Essa escolha foi feita com base na ubiquidade de resultados experimentais para esse aerofólio na literatura, onde se destaca o trabalho de McCroskey [1987]. Nesse trabalho, resultados obtidos em quarenta diferentes túneis de vento para uma única configuração bidimensional bem conhecida, são examinados de forma crítica e correlacionados. De particular interesse neste trabalho são os resultados classificados como “Group 1” por McCroskey, obtidos cuidadosamente com eliminação de importantes erros de instalação e de efeitos de parede. Do “Group 1”, os resultados obtidos por Gregory e O’Reilly [1970] para transição a 5% da corda são aqui utilizados como referência para validação dos valores numéricos. Os resultados são verificados pela metodologia proposta por Roache [1994] e comparados com os gerados por uma expressão analítica representando uma curva de ajuste proposta por McCroskey [1987]. Outro trabalho de interesse é o de Zingg [1992] que extensamente verifica seus resultados e os compara com aqueles obtidos por Gregory e O’Reilly [1970] para transição a 43% da corda. Essas conclusões são aplicadas na interpretação dos fenômenos físicos envolvidos no contexto deste trabalho. A escolha da malha não estruturada e com células poliédricas utilizada como exemplo na metodologia de geração de malhas é uma extensão do trabalho de Beck et al. [2009].

Para o caso de escoamento compressível, o modelo físico selecionado é o aerofólio OAT15A. Esse aerofólio, concebido dentro de um programa de desenvolvimento conjunto entre a ONERA e a Aerospatiale, é supercrítico e destinado à utilização em aeronaves

comerciais de transporte. Na escolha desse modelo físico, foi determinante o interesse nas características aerodinâmicas desse aerofólio e a disponibilidade de dados experimentais para validação de códigos CFD publicados no estudo A-11 do relatório AGARD-AR-303 [Rodde e Archambaud, 1994]. Nesse estudo, o objetivo foi o de quantificar o efeito do número de Reynolds em indicadores de mérito aerodinâmico e obter medições da camada limite e de grandezas do escoamento relacionadas ao estado turbulento. Os experimentos foram criteriosamente conduzidos no túnel de vento ONERA/CERT T2 e os resultados classificados em quinze casos, de acordo com o número de Reynolds com relação à corda  $Re_c$  e o ângulo de ataque  $\alpha$ . Nesses experimentos, o modelo utilizado tinha uma seção longitudinal retangular de corda  $c = 0.15$  m e envergadura  $b = 0.39$  m. A transição ao escoamento turbulento foi induzida por um arame de tropeço de Carborundum de diâmetro  $4.5E-5$  m, localizado a 7% da corda e posicionado no dorso e intradorso, abrangendo toda a envergadura do modelo. Os dados, ajustados para compensar os efeitos de parede no túnel de vento segundo a metodologia proposta por Archambaud e Mignosi [1988] e Archambaud et al. [1993], foram considerados apropriados para comparação com resultados numéricos de simulações “free-air” (onde as paredes do túnel de vento e o suporte do modelo físico não são reproduzidos no modelo numérico). Entre as características aerodinâmicas de interesse nesse aerofólio destaca-se a interação entre onda de choque e a camada limite turbulenta, sujeita a desacelerações e separação em decorrência dessa interação que é sensível ao estado do escoamento turbulento [Bigarella e Azevedo, 2007]. A separação poderá induzir instabilidades nas asas de uma aeronave causando vibrações estruturais cuja consequência é a limitação do envelope de voo e restrições à manobrabilidade [Thiery e Coustols, 2006]. Assim como no caso do aerofólio NACA 0012, os resultados são verificados pela metodologia proposta por Roache [1994]. A malha, estruturada, é gerada hiperbolicamente de acordo com a metodologia descrita por Lal et al. [2001] e defendida por Thompson [1984] que relata melhores resultados com distribuição hiperbólica de nós dentro e fora da camada limite. A topologia de tipo “O” é justificada pela natureza do fenômeno físico, cujas equações diferenciais parciais regentes possuem como soluções isossuperfícies que podem ser empregadas como superfícies coordenadas [Maliska, 2004]. Rivers et al. [2008] sustenta que com essa topologia obtêm-se resultados numéricos melhor aproximados dos resultados experimentais.

Os modelos de turbulência seletivamente utilizados neste trabalho, Spalart-Allmaras (“SA”) e  $k-\omega$ /SST, são notoriamente empregados na indústria aeronáutica como afirma Pope

[2000]. Os relatos de resultados obtidos pelos participantes das oficinas de predição de arrasto promovidas pela AIAA, em especial na terceira edição desse evento que foi examinada de forma crítica por Vassberg et al. [2007], corroboram essa afirmativa. Spalart e Allmaras [1992] em artigo seminal apresentam os casos de validação de seu modelo em condições de escoamento semelhantes aos utilizados neste trabalho. Bigarella e Azevedo [2007] investigaram e compararam os resultados obtidos com esses modelos para um escoamento compressível e subsônico sobre a seção de aerofólio OAT15A nas mesmas condições deste trabalho (i.e., mesmos ângulo de ataque e números de Mach e Reynolds) tornando possível uma comparação direta de resultados.

### 3 MODELOS FÍSICOS

O modelo físico selecionado para o caso de escoamento incompressível é uma seção do aerofólio NACA 0012. A seção desse aerofólio, representada pela Fig. 3.1, tem suas coordenadas definidas como proporções da corda geométrica  $c$  a partir de 120 pontos com origem no bordo de ataque e de acordo com a Tab. (B.1). Trata-se de um aerofólio de perfil simétrico cuja espessura máxima é 12% da corda e está localizada a 30% dessa a partir da origem, o ponto de estagnação no bordo de ataque. A espessura do bordo de fuga corresponde a 0.25% da corda. Os aerofólios NACA têm importância na medida em que são experimentalmente bem documentados, os efeitos do camber e da distribuição da espessura foram sistematicamente investigados [Abbot e Von Doenhoff, 1959] e ainda influenciam o projeto de aerofólios modernos empregados em asas fixas ou rotativas de aeronaves e pás de geradores eólicos.

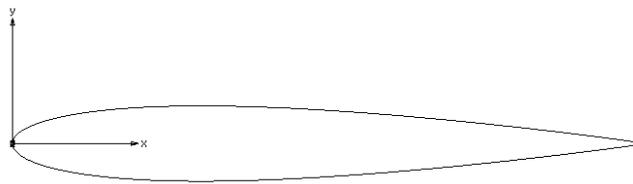


Figura 3.1 – Perfil do aerofólio NACA 0012.

Neste trabalho, os resultados experimentais utilizados para validar os resultados numéricos são aqueles compilados e ajustados por McCroskey [1987], reunidos como “Group 1, with trip” e “Group 2, with trip”, Fig. 3.2. Nessa figura é representada a variação do coeficiente de arrasto por unidade de comprimento da envergadura  $c_d$  com o número de Reynolds tomado em relação à corda,  $Re_c$ . Nesses experimentos, o ângulo de ataque  $\alpha$  é zero. Os dados foram obtidos por Gregory e O’Reilly [1970] e Abbot e Von Doenhoff [1959], entre outros pesquisadores citados na tabela “Table 1” do artigo de McCroskey. Um arame de tropeço situado a 5% da corda foi empregado na geração dos dados sob “Group 1, with trip” e a 43% para os dados sob “Group 2, with trip”. Os dados sob “Group 1..” foram ajustados com uma precisão de  $\pm 0.0002$  pela curva representada pela Eq. (3.1). Os dados do “Group 2..” foram ajustados pela Eq. (3.2) com uma precisão  $\pm 0.0005$ .

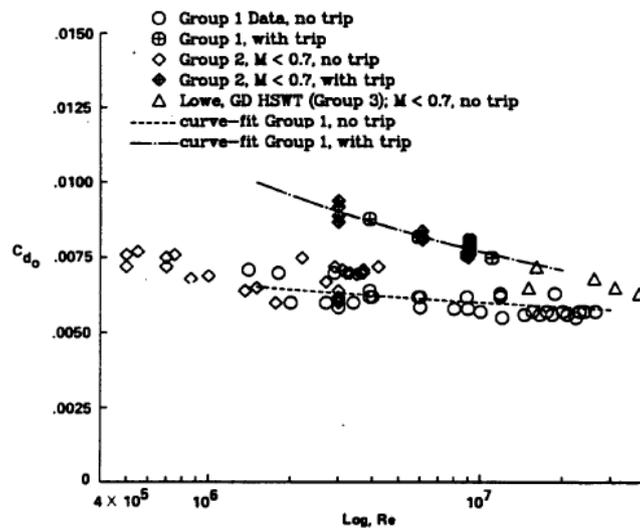


Figura 3.2 – Coeficiente de arrasto  $c_d$  versus número de Reynolds  $Re_c$ , McCroskey [1987].

$$c_d = 0.0017 + 0.91 / (\log Re_c)^{2.58} \quad (3.1)$$

$$c_d = 0.0044 + 0.018 Re_c^{-0.15} \quad (3.2)$$

Os resultados numéricos obtidos por Zingg [1992] com malhas estruturadas de geração hiperbólica correspondem aqueles sob “Group 2, with trip” e aproximados pela Eq. (3.2). Esses são aqui utilizados a título de validação e comparação com os obtidos por este autor com malhas não estruturadas de células poliédricas. A Tab. (3.1) sumariza as características das simulações aplicadas ao modelo NACA 0012 e as referências para comparação de resultados. As equações (3.1) e (3.2) são utilizadas para validação dos resultados gerados pelo Star-CCM+.

Tabela 3.1 – Características das simulações aplicadas ao modelo NACA 0012.

#	Caso	Tipo	Topologia	$y_{\max} / c$ (contorno)	$Re_c$	$M_\infty$	$x_t / c$ %	Referências para comparação
1	B3-6	Poliédrica	Bloco	3 ~ 6	3.00E6	0.223	5	McCroskey [1987]
2	C12	Poliédrica	C-Mesh	12	2.88E6	0.160	5	McCroskey [1987]
3	O200	Estruturada	O-Mesh	200	2.88E6	0.160	5	McCroskey [1987]
4	C12	Poliédrica	C-Mesh	12	2.88E6	0.160	43	McCroskey [1987], Zingg [1992]
5	O200	Estruturada	O-Mesh	200	2.88E6	0.160	43	McCroskey [1987], Zingg [1992]

Na Tab. (3.1),  $y_{\max} / c$  é a distância adimensionalizada pela corda das paredes da seção ao contorno onde o escoamento é livre.  $Re_c$  o número de Reynolds com relação à corda geométrica  $c$ ,  $M_\infty$  é o número de Mach do escoamento livre e  $x_t / c$  % a posição em  $x$  do início da transição adimensionalizada pela corda, em percentual.

A seção de aerofólio OAT15A, utilizada neste trabalho para o caso de escoamento compressível com domínio computacional discretizado por malha estruturada é representada pela Fig. (3.3). Esse aerofólio tem suas coordenadas definidas como proporções da corda geométrica  $c$  a partir de 300 pontos com origem no bordo de ataque, Tab. (A.1). A espessura máxima do aerofólio e a espessura do bordo de fuga são 12.3% e 0.5% da corda geométrica respectivamente. O coeficiente de sustentação  $c_l$  de projeto é 0.65, obtido para número de Mach de escoamento livre  $M_\infty = 0.73$ .

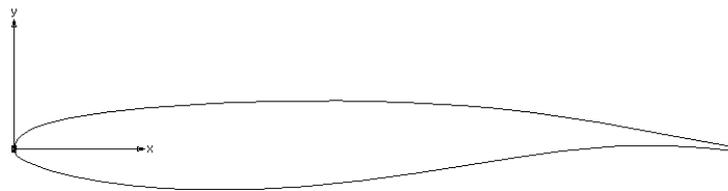


Figura 3.3 – Perfil do aerofólio OAT15A.

Os resultados experimentais utilizados para comparação com os resultados numéricos são aqueles dos Casos 11 e 14 do Estudo A-11 [Rodde e Archambaud, 1994]. Desses casos, as medições de interesse neste trabalho são apresentados na Tab. (3.2):

Tabela 3.2 – Medições de interesse no Estudo A-11, modelo OAT15A.

Caso	$T_\infty$ [K]	$p_\infty$	$M_\infty$	$Re_c$	$\alpha$	$c_d$	$c_l$	$c_p$	Camada Limite $U / U_e$	Velocidade $U / U_\infty$
11	300	101325	0.724	3.03E6	1.15 °	Sim	Sim	Sim	$x/c = 60\%, 95\%$	Não
14	300	101325	0.727	3.06E6	1.15 °	Não	Sim	Sim	Não	$x/c = 27\%$

Na Tab. (3.2),  $T_\infty$  é a temperatura do escoamento livre,  $p_\infty$  é a pressão do escoamento livre,  $\alpha$  o ângulo de ataque e  $c_l$  o coeficiente de sustentação. O coeficiente de arrasto  $c_d$  é obtido por medições na esteira do escoamento a  $0.5c$  do bordo de fuga. O coeficiente de pressão  $c_p$  é obtido por sensores de pressão, 56 pontos de medição distribuídos na direção do escoamento e sobre a linha central do modelo - 37 pontos no dorso e 19 no intradorso, Tab. (A.2). Na

medição da camada limite para uma determinada posição  $x$  adimensionalizada pela corda,  $x/c$ , a velocidade local  $U$  é adimensionalizada pela velocidade fora da camada limite  $U_e$  e obtida para uma altura adimensionalizada do Tubo de Pitot a partir da parede,  $y/c$ . Na medição de velocidade em uma posição  $x/c$  e altura  $y/c$ , a velocidade local  $U$  é adimensionalizada pela velocidade do escoamento livre  $U_\infty$ .

## 4 MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático corresponde às equações de Navier-Stokes para conservação de massa e momentum. Para escoamentos compressíveis, as equações de conservação de energia, de estado e da entalpia total são também requeridas. Como os escoamentos são turbulentos, a hipótese de Reynolds é aplicada para decompor os campos de velocidade e pressão em suas componentes média e flutuante, originando um problema de fechamento resolvido pela adoção de modelos de turbulência. Neste trabalho dois desses modelos são seletivamente aplicados – Spalart-Allmaras (“SA”) e  $k-\omega$ /SST. A formulação das equações de conservação, dos modelos de turbulência e das condições de contorno é a seguir apresentada.

### 4.1 Formulação das equações de conservação

As equações de conservação para massa, momentum e energia em forma integral e cartesiana aplicadas a um volume de controle arbitrário  $V$  e área de superfície infinitesimal  $da$  são representadas pela Eq. (4.1.1):

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{W} dV + \oint [\mathbf{F} - \mathbf{G}] \cdot d\mathbf{a} = \int_V \mathbf{H} dV \quad (4.1.1)$$

Na Eq. (4.1.1) são definidos:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I} \\ \rho \mathbf{v} H \end{bmatrix} \quad \text{onde } \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} uu & uv & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{q}}'' \end{bmatrix} \quad \text{e } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor  $\mathbf{W}$  contém as grandezas conservadas. O vetor  $\mathbf{F}$  contém os termos não viscosos e o vetor  $\mathbf{G}$  os termos viscosos das equações de Navier-Stokes.  $\mathbf{H}$  é o vetor que contém a resultante  $\mathbf{f}$  de forças de campo.

Nas definições acima,  $\rho$  é a densidade,  $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  é vetor velocidade onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes escalares instantâneas nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade,  $E$  é a energia total específica. O tensor de tensões totais é representado por  $\mathbf{T}$  e  $\dot{\mathbf{q}}''$  é o vetor fluxo de calor. A energia total específica  $E$  é relacionada com a entalpia total específica  $H$  através da Eq. (4.1.2)

$$E = H - \frac{p}{\rho} \quad (4.1.2)$$

Na Eq. (4.1.2),  $p = \bar{p} + p'$  é a pressão instantânea (média mais flutuação) exercida sobre o fluido. A entalpia total específica  $H$  é obtida através da Eq. (4.1.3):

$$H = h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \quad (4.1.3)$$

Na Eq. (4.1.3),  $h = C_p T$  é a entalpia específica onde  $C_p$  é o calor específico à pressão constante e  $T$  a temperatura. O tensor de tensões totais  $\mathbf{T}$  é expresso pela Eq. (4.1.4):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_l + \mathbf{T}_t \quad (4.1.4)$$

Nessa equação,  $\mathbf{T}_l$  é o tensor de tensões laminares obtido pela Eq. (4.1.5):

$$\mathbf{T}_l = \mu[\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}] \quad (4.1.5)$$

Na Eq. (4.1.5),  $\mu$  é a viscosidade molecular e o sobrescrito “T” indica a operação de transposição matricial. As componentes escalares do vetor velocidade  $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  são decompostas em suas quantidades médias e instantâneas (sinalizadas pela barra e pela apóstrofe respectivamente) pela hipótese de Reynolds, i.e.,  $u = \bar{u} + u'$ ,  $v = \bar{v} + v'$  e  $w = \bar{w} + w'$ . O tensor de tensões de Reynolds  $\mathbf{T}_t$  é definido pela Eq. (4.1.6):

$$\mathbf{T}_t \equiv -\overline{\rho \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

Para os modelos de turbulência adotados neste trabalho (Spalart-Allmaras e  $k-\omega$ /SST), a aproximação de Boussinesq é utilizada para modelar o tensor de tensões de Reynolds  $\mathbf{T}_t$  pela Eq. (4.1.7):

$$\mathbf{T}_t = 2\mu_t \mathbf{S} - \frac{2}{3}(\mu_t \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho k)\mathbf{I} \quad (4.1.7)$$

Na Eq. (4.1.7),  $\mu_t$  é a viscosidade turbulenta,  $k$  é a energia cinética turbulenta e  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$  é o tensor taxa de deformação. Com auxílio da Eq. (4.1.5) e Eq. (4.1.7), a Eq. (4.1.4) é reescrita como a Eq. (4.1.8):

$$\mathbf{T} = \mu_{efet} [\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}] \quad (4.1.8)$$

Na Eq. (4.1.8),  $\mu_{efet} = \mu + \mu_t$  é a soma das viscosidades molecular e turbulenta. O vetor fluxo de calor  $\dot{\mathbf{q}}''$  é obtido pela Eq. (4.1.9):

$$\dot{\mathbf{q}}'' = -k_{efet} \nabla T \quad (4.1.9)$$

Nessa equação,  $k_{efet}$  é a condutividade térmica efetiva associada ao escoamento turbulento e definida pela Eq. (4.1.10):

$$k_{efet} = k_{term} + \frac{\mu_t C_P}{Pr_t} \quad (4.1.10)$$

Na equação acima,  $k_{term}$  é a condutividade térmica e  $Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_{term}}$  o número de Prandtl turbulento onde  $\nu_t$  é a difusividade turbulenta e  $\alpha_{term}$  a difusividade térmica.

## 4.2 Formulação do modelo de turbulência Spalart-Allmaras

O modelo SA resolve uma única equação de transporte para determinar a difusividade turbulenta  $\nu_t$ , Eq. (4.2.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \tilde{\nu} dV + \int_A \rho \tilde{\nu} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \\ \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \int_A (\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \cdot d\mathbf{a} + \int_V [C_{b2} \rho (\nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu}) + G_{\tilde{\nu}} - Y_{\tilde{\nu}} + S_{\tilde{\nu}}] dV \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Na formulação original dos autores Spalart e Allmaras [1992], toda a camada limite (incluindo a sub-região viscosa) é resolvida sem uso de funções de parede, podendo o modelo

ser aplicado a malhas refinadas onde não há separação severa, como nos modelos físicos submetidos aos casos descritos na Tab. (3.1).

Na Eq. (4.2.1), a variável transportada  $\tilde{\nu}$  é a difusividade turbulenta modificada (igual a  $\nu_t$  em todo domínio exceto na região viscosa) e  $S_{\tilde{\nu}}$  um termo fonte prescrito. Os termos no lado direito da equação representam a difusão, a produção e a dissipação. O primeiro termo dentro da segunda integral no lado direito é difusivo e não conservativo e se discretizado como um termo fonte explícito causará problemas de convergência. Seguindo recomendação dos autores do modelo, esse termo é combinado com o termo difusivo conservativo (a primeira integral no lado direito da equação) na forma da Eq. (4.2.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \int_A (\mu + \rho\tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \cdot d\mathbf{a} + \int_V C_{b2} \rho (\nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu}) dV &\approx \\ \frac{1+C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \int_A (\mu + \rho\tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \cdot d\mathbf{a} - \frac{C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \int_V (\mu + \rho\tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}^2 dV &\end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Na Eq. (4.2.2),  $\sigma_{\tilde{\nu}}$  e  $C_{b2}$  são coeficientes do modelo. O termo de produção  $G_{\tilde{\nu}}$  é modelado pela Eq. (4.2.3):

$$G_{\tilde{\nu}} = (1 - f_{i2}) C_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu} \quad (4.2.3)$$

Na Eq. (4.2.3),  $C_{b1}$  é um coeficiente do modelo e  $f_{i2}$  é uma função cujo valor é obtido pela Eq. (4.2.4), onde  $\mathcal{X} \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$  é a razão entre a difusividade turbulenta modificada e a viscosidade cinemática.

$$f_{i2} = 1 - \frac{\mathcal{X}}{1 + \mathcal{X} f_{v1}} \quad (4.2.4)$$

O parâmetro de deformação  $\tilde{S}$  é obtido pela Eq. (4.2.5):

$$\tilde{S} = f_{v3} S + \frac{\nu}{\kappa^2 \tilde{d}^2} f_{v2} \quad (4.2.5)$$

Na Eq. (4.2.5),  $S$  é a deformação escalar,  $\kappa$  é a constante de Von Karman,  $\tilde{d}$  é à distância à parede mais próxima,  $f_{v3} = 1$  e  $f_{v2}$  uma função de amortecimento, Eq. (4.2.6):

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (4.2.6)$$

A função de amortecimento  $f_{v1}$  na Eq. (4.2.6) é calculada pela Eq. (4.2.7), onde  $C_{v1}$  é uma constante do modelo:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad (4.2.7)$$

Para obter a deformação escalar  $S$ , utiliza-se a magnitude do tensor vorticidade  $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)$ , Eq. (4.2.8):

$$S = |\mathbf{\Omega}| = \sqrt{2\mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega}^T} \quad (4.2.8)$$

Uma alternativa à utilização da Eq. (4.2.8) foi proposta por Dacles-Mariani et al. [1995] onde as magnitudes dos tensores vorticidade  $\mathbf{\Omega}$  e taxa de deformação  $\mathbf{S}$  são combinadas através da Eq. (4.2.9):

$$S = |\mathbf{\Omega}| + C_{prod} \min[0, |\mathbf{S}| - |\mathbf{\Omega}|] \quad (4.2.9)$$

Na Eq. (4.2.9),  $|\mathbf{S}| = \sqrt{2\mathbf{S} : \mathbf{S}^T} = \sqrt{2\mathbf{S} : \mathbf{S}}$  e  $C_{prod} = 2$  sendo essa a formulação aqui adotada. O termo dissipativo na Eq. (4.2.1) é modelado pela Eq. (4.2.10):

$$\Upsilon_{\bar{v}} = C_{w1} \rho f_w \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{d}}\right)^2 \quad (4.2.10)$$

Os termos da equação anterior são obtidos pelas seguintes equações:

$$f_w = g \left( \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad (4.2.11)$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r) \quad (4.2.12)$$

$$r \equiv \frac{\tilde{v}}{\tilde{S}\kappa^2\tilde{d}^2} \quad (4.2.13)$$

A viscosidade turbulenta  $\mu_t$  é obtida pela Eq. (4.2.14):

$$\mu_t = \rho\nu f_{v1} \quad (4.2.14)$$

Os coeficientes do modelo SA são os que seguem:

$$\begin{aligned} C_{b1} &= 0.1335, C_{b2} = 0.622, \sigma_{\tilde{v}} = \frac{2}{3} \\ C_{v1} &= 7.1, C_{v2} = 5, C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma_{\tilde{v}}} \\ C_{w2} &= 0.3, C_{w3} = 2.0 \end{aligned}$$

Junto à parede, o modelo SA assume a seguinte formulação para a velocidade de fricção  $u^*$ , Eq. (4.2.15):

$$u^* = \tilde{v} / (\kappa\tilde{d}) \quad (4.2.15)$$

### 4.3 Formulação do modelo de turbulência $k-\omega$ /SST

O modelo  $k-\omega$  original é um modelo a duas equações de transporte, resolvidas para a energia cinética turbulenta  $k$  e para a taxa de dissipação específica  $\omega \sim \varepsilon / k$ . Introduzido por Wilcox [1988], esse modelo é reconhecidamente superior (relativamente ao modelo de turbulência  $k-\varepsilon$ ) na solução de camadas limite submetidas a gradientes de pressão adversos. Entretanto, a solução da camada limite com uso do modelo  $k-\omega$  é muito sensível ao valor de  $\omega$  no contorno onde o escoamento é livre e revisões foram sugeridas por Menter [1994] e por Wilcox em 1998. Menter adicionou ao modelo original um termo não conservativo de difusão cruzada contendo o produto escalar  $\nabla k \cdot \nabla \omega$  e uma função empírica, responsável por efetuar a transição de comportamento do modelo como  $k-\varepsilon$  no contorno para  $k-\omega$  junto à parede. Menter também modificou a equação constitutiva linear do modelo  $k-\omega$ , batizando sua variante desse modelo como  $k-\omega$ /SST (onde SST é o acrônimo para “Shear-Stress

Transport’’). A formulação aqui adotada segue a proposição de Menter, utilizada de maneira abrangente na indústria aeronáutica [Pope, 2000].

No modelo  $k$ - $\omega$ /SST, as equações de transporte para  $k$  e  $\omega$  são as equações (4.3.1) e (4.3.2) respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho k dV + \int_A \rho k \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \\ \int_A (\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k \cdot d\mathbf{a} + \int_V [\gamma_{efet} G_k - \gamma' \rho \beta^* f_\beta (\omega k - \omega_0 k_0) + S_k] dV \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \omega dV + \int_A \rho \omega \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \\ \int_A (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega \cdot d\mathbf{a} + \int_V [G_\omega - \rho \beta f_\beta (\omega^2 - \omega_0^2) + D_\omega + S_\omega] dV \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Nessas equações,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\omega$  e  $\beta^*$  são coeficientes do modelo,  $S_k$  e  $S_\omega$  são termos fonte prescritos,  $k_0$  e  $\omega_0$  são respectivamente a energia cinética turbulenta e a taxa de dissipação específica do escoamento que se contrapõem ao decaimento da turbulência. Na Eq. (4.3.1),  $\gamma_{efet}$  é um fator de intermitência obtido através do modelo de transição  $\gamma - \text{Re}_\theta$  ou a unidade caso esse não seja adotado. Define-se  $\gamma' = \min[\max(\gamma_{efet}, 0.1), 1]$  e devido à prescrição da posição da transição nos modelos físicos, foi adotada a supressão de turbulência (ver Apêndice B) nas paredes do modelo numérico à montante da posição da transição resultando em  $\gamma_{efet} = \gamma' = 1$ . A função  $f_\beta$  na Eq. (4.3.1) é utilizada para modelagem de turbulência em jatos planos e axisimétricos e assume o valor unitário para os demais casos. Portanto, nesta formulação  $f_\beta = 1$ . O termo de produção  $G_k$  é obtido pela Eq. (4.3.3):

$$G_k = \mu_t S^2 - \frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{2}{3} \mu_t (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \quad (4.3.3)$$

Na Eq. (4.3.3), é definida a magnitude do tensor taxa de deformação  $S = |\mathbf{S}| = \sqrt{2\mathbf{S}:\mathbf{S}^T} = \sqrt{2\mathbf{S}:\mathbf{S}}$  onde  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$ . A produção de  $\omega$  é obtida pela Eq. (4.3.4):

$$G_\omega = \rho\gamma \left\{ \left[ S^2 - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] - \frac{2}{3}\omega \nabla \cdot \mathbf{v} \right\} \quad (4.3.4)$$

Na Eq. (4.3.4)  $\gamma$  é um coeficiente ponderado do modelo obtido pela Eq. (4.3.9) e  $S$  definido como na Eq. (4.3.3). O termo de derivadas cruzadas  $D_\omega$  na Eq. (4.3.2) é obtido pela Eq. (4.3.5):

$$D_\omega = 2(1 - F_1)\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega \quad (4.3.5)$$

Na equação anterior,  $\sigma_\omega$  é um coeficiente do modelo e  $F_1$  obtido pela Eq. (4.3.10). A viscosidade turbulenta  $\mu_t$  é obtida pela Eq. (4.3.6):

$$\mu_t = \rho k T \quad (4.3.6)$$

A escala de tempo  $T$  na Eq. (4.3.6) é obtida pela Eq. (4.3.7) devida a Durbin [1996]:

$$T = \min \left[ \frac{1}{\max(\omega / \alpha^*, (SF_2) / a_1)}, \frac{0.6}{\sqrt{3}S} \right] \quad (4.3.7)$$

Na Eq. (4.3.7),  $\alpha^*$  é um coeficiente do modelo,  $S$  definido como na Eq. (4.3.3) e  $a_1 = 0.31$ . O valor da função  $F_2$  é obtido pela Eq. (4.3.8):

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad (4.3.8)$$

Na Eq. (4.3.8),  $\arg_2 = \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{y\omega} \right)$  e  $y$  é a distância à parede mais próxima.

Os coeficientes ponderados  $\phi$  são obtidos pela Eq. (4.3.9):

$$\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2 \quad (4.3.9)$$

Na equação anterior,  $F_1$  é obtido pela Eq. (4.3.10).

Os coeficientes do modelo  $k$ - $\omega$ /SST de subscrito 1 são:

$$\beta_1 = 0.0750, \sigma_{k1} = 0.5, \sigma_{\omega1} = 0.5$$

$$\kappa = 0.41, \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \sigma_{\omega1} \frac{\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$$

Os coeficientes do modelo  $k-\omega$ /SST de subscrito 2 são:

$$\beta_2 = 0.0828, \sigma_{k2} = 1.0, \sigma_{\omega2} = 0.856$$

$$\kappa = 0.41, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \sigma_{\omega2} \frac{\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$$

Para ambos subscritos 1 e 2,

$$\sigma_k = 0.5, \sigma_\omega = 0.5, \alpha^* = 1, \beta^* = 0.09$$

A função  $F_1$  é definida pela Eq. (4.3.10)

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (4.3.10)$$

Na Eq. (4.3.10),

$$\arg_1 = \min\left(\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}, \frac{2k}{y^2 CD_{kw}}\right), \max\left(\frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega, 10^{-20}\right)\right).$$

Para solução das equações de transporte junto à parede, o modelo  $k-\omega$ /SST poderá utilizar equações de amortecimento para os coeficientes  $\beta_1^*$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha^*$ , equações (4.3.11) a (4.3.13) respectivamente. Nessa situação, esses coeficientes são substituídos pelos obtidos pelas equações que seguem, onde é definido o número de Reynolds turbulento como

$$\text{Re}_T = \frac{k}{\omega\nu} :$$

$$\beta_1^* = \beta^* \frac{4/15 + (\text{Re}_T / \text{Re}_\beta)^4}{1 + (\text{Re}_T / \text{Re}_\beta)^4} \quad (4.3.11)$$

$$\alpha_1 = \alpha_1 \frac{\alpha_0 + \text{Re}_T / \text{Re}_\omega}{1 + \text{Re}_T / \text{Re}_\omega} \frac{1}{\alpha_1^*} \quad (4.3.12)$$

$$\alpha^* = \frac{\beta_1 / 3 + \text{Re}_T / \text{Re}_k}{1 + \text{Re}_T / \text{Re}_k} \quad (4.3.13)$$

As constantes nas equações anteriores são:

$$\text{Re}_\beta = 8, \text{Re}_k = 6, \text{Re}_\omega = 2.95, \alpha_0 = \frac{1}{9}$$

Junto à parede, a velocidade de fricção  $u^*$  é obtida pela Eq. (4.3.14):

$$u^* = \sqrt{g\nu u / y + (1-g)\beta^{*1/2}k} \quad (4.3.14)$$

O termo de produção, Eq. (4.3.4), passa a ser obtido pela Eq. (4.3.15):

$$G_k = \mu_t S^2 \quad (4.3.15)$$

O termo de dissipação é calculado pela Eq. (4.3.16):

$$\omega = \frac{6\nu}{\beta y^2} \quad (4.3.16)$$

Nas equações anteriores,  $g = \exp(-\frac{\text{Re}_y}{11})$  onde  $\text{Re}_y = \frac{\sqrt{k}y}{\nu}$  é o número de Reynolds em relação a distancia à parede  $y$ .

Para escoamentos compressíveis, o coeficiente  $\beta^*$  é substituído pelo coeficiente  $\beta_{comp}^*$ , Eq. (4.3.17):

$$\beta_{comp}^* = \beta^* [1 + \xi^* F(M_\infty)] \quad (4.3.17)$$

Na Eq. (4.3.17),  $\beta^*$  é obtido pela Eq. (4.3.11),  $\xi^* = 1.5$  e  $F(M_\infty) = \max[M_\infty^2 - M_{t0}^2]$  onde  $M_{t0}^2 = \frac{1}{4}$ . O coeficiente  $\beta$ , calculado pela Eq. (4.3.9), é substituído por  $\beta_{comp}$ , Eq. (4.3.18):

$$\beta_{comp} = \beta - \beta^* \xi^* F(M_\infty) \quad (4.3.18)$$

#### 4.4 Formulação das condições de contorno

As condições de contorno aplicadas aos modelos físicos deste trabalho são velocidade prescrita de ingresso, plano de simetria, paredes sem deslizamento, pressão de saída e escoamento livre no contorno.

Na fronteira do tipo velocidade prescrita de ingresso, o vetor velocidade é diretamente especificado (magnitude e direção). A pressão nas faces é obtida por extrapolação da pressão na célula adjacente à fronteira utilizando gradientes reconstruídos (cuja formulação é descrita na metodologia numérica). A temperatura (estática) é especificada.

Na condição de fronteira do tipo plano de simetria, a tensão de parede nas faces que definem a fronteira é zero e a velocidade é extrapolada da componente paralela dessa na célula adjacente com utilização de gradientes reconstruídos. A pressão e a temperatura são extrapoladas da célula adjacente utilizando gradientes reconstruídos. O fluxo de calor na face que define o plano de simetria é zero.

Em paredes sem deslizamento, a velocidade é zero. Para escoamentos invíscidos, a temperatura na parede é obtida por extrapolação da célula adjacente. Para escoamentos viscosos, o fluxo de calor ou a temperatura devem ser prescritos, sendo a temperatura calculada a partir da relação apropriada para escoamentos laminares ou turbulentos.

Na condição de contorno em que o escoamento de saída é sujeito à pressão, a velocidade é calculada a partir do interior do domínio com utilização de gradientes reconstruídos. A pressão em escoamentos subsônicos deixando o domínio pela fronteira de pressão,  $p_f$ , é prescrita. Caso haja recirculação nessa fronteira,  $p_f$  é obtida pela Eq. (4.4.1):

$$p_f = p_{prescrita} - \frac{1}{2} \rho_f |\mathbf{v}_n|^2 \quad (4.4.1)$$

Na Eq. (4.4.1),  $\mathbf{v}_n$  é a componente normal do vetor velocidade. A temperatura é prescrita (se estática) ou obtida por extrapolação da célula adjacente utilizando gradientes reconstruídos.

A condição de contorno de escoamento livre representa a fronteira de uma bolha de fluido envolvendo um objeto voando através do espaço. Para um escoamento subsônico ingressando no domínio, a componente tangencial  $\mathbf{v}_\infty$  do vetor velocidade do escoamento livre (cuja magnitude é  $U_\infty$ ) é combinada com a componente normal do vetor velocidade na fronteira de acordo com a Eq. (4.4.2):

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_\infty + (v_{f,n} - v_{\infty,n}) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{a}|} \quad (4.4.2)$$

Na equação anterior,  $v_{\infty,n}$  é a magnitude da componente normal à fronteira do vetor velocidade do escoamento livre e  $v_{f,n}$  é a magnitude da componente normal da velocidade na fronteira, obtida pela Eq. (4.4.3):

$$v_{f,n} = \frac{1}{2}(v_{cel-0,n}^r + v_{\infty,n}) + \frac{c_{cel-0} - c_\infty}{\gamma - 1} \quad (4.4.3)$$

Nessa equação,  $\gamma = 1.4$ ,  $v_{cel-0,n}^r$  é a magnitude da componente normal da velocidade na fronteira extrapolada da célula adjacente,  $c_\infty$  é a velocidade do som para a temperatura do escoamento livre e  $c_{cel-0}$  é a velocidade do som obtida pela Eq. (4.4.4) para a temperatura extrapolada  $T_{cel-0}^r$  na fronteira da célula adjacente:

$$c_{cel-0} = \sqrt{\gamma R T_{cel-0}^r} \quad (4.4.4)$$

Para um escoamento subsônico deixando o domínio, a componente tangencial da velocidade na fronteira é extrapolada da célula adjacente utilizando o gradiente reconstruído  $\mathbf{v}_{cel-0,n}^r$  e combinada com a velocidade normal na fronteira pela Eq. (4.4.5):

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{cel-0}^r + (\mathbf{v}_{f,n} - \mathbf{v}_{cel-0,n}^r) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \quad (4.4.5)$$

Na Eq. (4.4.5),  $\mathbf{v}_{cel-0}^r$  é o vetor velocidade extrapolado na fronteira da célula adjacente.

A temperatura na fronteira  $T_f$  é obtida pela Eq. (4.4.6):

$$T_f = \frac{c_f^2}{\gamma R} \quad (4.4.6)$$

Na Eq. (4.4.6),  $c_f = \frac{1}{2}(c_\infty + c_{cel-0}) + \frac{1}{4}(\gamma - 1)(v_{cel-0,n}^r - v_{\infty,n})$ .

A pressão  $p_f$  para um escoamento subsônico ingressando no domínio é obtida pela relação isentrópica expressa pela Eq. (4.4.7):

$$p_f = p_\infty \left( \frac{T_f}{T_\infty} \right)^{C_p/R} \quad (4.4.7)$$

Para um escoamento subsônico deixando o domínio, a pressão e temperatura são obtidas da célula adjacente à fronteira, Eq. (4.4.8):

$$p_f = p_{cel-0}^r \left( \frac{T_f}{T_{cel-0}^r} \right)^{C_p/R} \quad (4.4.8)$$

## 5 METODOLOGIA NUMÉRICA

### 5.1 O Método dos Volumes Finitos

A metodologia numérica adotada neste trabalho é o Método dos Volumes Finitos (MVF), implementado pelo programa comercial Star-CCM+ em sua versão 4.06.011 [CD-adapco, 2009].

A estratégia de solução no MVF consiste em dividir o domínio em um número finito de volumes de controle que corresponderão às células da malha. A cada volume de controle são então aplicadas às formas discretizadas das equações de conservação com o objetivo de se obter um sistema de equações algébricas lineares onde o número de incógnitas corresponderá ao número de células da malha. Esse sistema é então resolvido iterativamente por um solucionador algébrico.

No MVF, o transporte de uma quantidade escalar  $\phi$  no meio contínuo é expresso pela Eq. (5.1):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \oint_A \rho \phi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \oint_A \Gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{a} + \int_V S_\phi dV \quad (5.1)$$

Na Eq. (5.1), os termos são, da esquerda para a direita, o termo transiente, o termo advectivo, o termo difusivo e o termo fonte volumétrico.  $\Gamma$  representa o coeficiente de difusão e  $S_\phi$  termo fonte do escalar  $\phi$ . A forma discreta da equação anterior para a célula-0, aplicada a um volume de controle centrado nessa célula é expressa pela Eq. (5.2):

$$\frac{d}{dt} (\rho \phi V)_0 + \sum_f [\rho \phi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})]_f = \sum_f (\Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{a})_f + (S_\phi V)_0 \quad (5.2)$$

Na Eq. (5.2) e seguintes, o subscrito “ $f$ ” refere-se a cada face da célula-0 e os somatórios são calculados para todas essas faces. O termo transiente da Eq. (5.2) é discretizado por um esquema de primeira ordem de acordo com a Eq. (5.3), onde  $n+1$  representa o tempo corrente,  $n$  o tempo anterior e  $\Delta t$  o intervalo da marcha no tempo:

$$\frac{d}{dt} (\rho \phi V)_0 = \frac{(\rho_0 \phi_0)^{n+1} - (\rho_0 \phi_0)^n}{\Delta t} V_0 \quad (5.3)$$

O termo fonte volumétrico na Eq. (5.1) já se apresenta discretizado na Eq. (5.2), ou seja:

$$\int_V S_\phi dV = (S_\phi V)_0 \quad (5.4)$$

O termo advectivo em uma face  $f$  é discretizado pela Eq. (5.5):

$$[\phi \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})]_f = (\dot{m}\phi)_f = \dot{m}_f \phi_f \quad (5.5)$$

O valor do fluxo convectivo na face  $f$  para o escalar  $\phi$  é obtido por um esquema *upwind* de segunda ordem, Eq. (5.6):

$$(\dot{m}\phi)_f = \begin{cases} \dot{m}_f \phi_{f,0} & \text{para } \dot{m}_f \geq 0 \\ \dot{m}_f \phi_{f,1} & \text{para } \dot{m}_f < 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Na Eq. (5.6),  $\dot{m}_f$  é a vazão (de massa) e os valores do escalar  $\phi$  na face  $f$  comum às células 0 e 1,  $\phi_{f,0}$  e  $\phi_{f,1}$  respectivamente, obtidos por interpolação linear a partir das seguintes equações:

$$\phi_{f,0} = \phi_0 + \mathbf{s}_0 \cdot (\nabla \phi)_{r,0} \quad (5.7)$$

$$\phi_{f,1} = \phi_1 + \mathbf{s}_1 \cdot (\nabla \phi)_{r,1} \quad (5.8)$$

Nas equações anteriores, definem-se  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1$ , onde  $\mathbf{s}_0$  e  $\mathbf{s}_1$  são vetores entre o vetor posição  $\mathbf{x}$  dos centroides das células 0 e 1 e o centro de uma face “ $f$ ” comum a essas células.  $(\nabla \phi)_{r,0}$  e  $(\nabla \phi)_{r,1}$  são gradientes limitados reconstruídos para as células 0 e 1 respectivamente. A reconstrução de gradientes de pressão utiliza o método dos mínimos quadrados, Eq. (5.9):

$$(\nabla \phi)_r^u = \left[ \sum_f \frac{\mathbf{ds} \otimes \mathbf{ds}}{\mathbf{ds} \cdot \mathbf{ds}} \right]^{-1} \left[ \sum_f \frac{(\phi_0 - \phi_n) \mathbf{ds}}{\mathbf{ds} \cdot \mathbf{ds}} \right] \quad (5.9)$$

Na Eq. (5.9), o somatório é calculado para todas as faces  $f$  comuns entre a célula-0 e uma célula- $n$  vizinha. O sobrescrito “ $u$ ” indica que esse gradiente é inicial (não limitado ou “unlimited”) e o sobrescrito “ $r$ ” indica que esse é reconstruído. O vetor que representa a distância entre o centroide da célula-0 e o de uma célula- $n$  vizinha é expresso por  $\mathbf{ds} = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0$  onde  $\mathbf{x}_n$  e  $\mathbf{x}_0$  representam o vetor posição dos centroides dessas células.  $\phi_0$  e  $\phi_n$  são os valores do escalar  $\phi$  nessas células.

Para reconstruir outros gradientes que não o de pressão, a forma discreta do Teorema da Divergência de Gauss é empregada e expressa pela Eq. (5.10):

$$(\nabla\phi)_r^u = \frac{1}{V_0} \sum_f \phi_f \mathbf{a}_f \quad (5.10)$$

Na Eq. (5.10),  $V_0$  é o volume da célula-0. O valor do escalar na face  $f$ ,  $\phi_f$ , é aproximado pela média aritmética do valor do escalar no centroide de duas células adjacentes, Eq. (5.11):

$$\phi_f = \frac{\phi_0 + \phi_1}{2} \quad (5.11)$$

A limitação do gradiente é implementada de tal forma que seu valor reconstruído não exceda os valores máximos e mínimos do escalar nos centroides das células vizinhas, incluindo o valor na própria célula-0. Define-se nesse contexto uma razão escalar  $\alpha_{\text{lim}}$  entre os valores de gradiente reconstruídos limitado  $(\nabla\phi)_{r,0}$  e não limitado  $(\nabla\phi)_{r,0}^u$  para a célula-0 de tal forma que a Eq. (5.12) seja satisfeita:

$$(\nabla\phi)_{r,0} = \alpha_{\text{lim}} (\nabla\phi)_{r,0}^u \quad (5.12)$$

Na Eq. (5.12), para cada célula-0, são definidas as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned} \phi_0^{\text{max}} &= \max(\phi_0, \phi_{\text{viz}}) \\ \phi_0^{\text{min}} &= \min(\phi_0, \phi_{\text{viz}}) \\ \Delta_{\text{max}} &= \phi_0^{\text{max}} - \phi_0 \\ \Delta_{\text{min}} &= \phi_0^{\text{min}} - \phi_0 \end{aligned}$$

O escalar  $\phi_{viz}$  é o valor para cada célula vizinha à célula-0. Os sobrescritos e subscritos “max” e “min” indicam valores máximos e mínimos do escalar  $\phi$ . Para cada face  $f$  da célula-0 definem-se:

$$\Delta_f = \phi_{f,0} - \phi_0 = \mathbf{s}_0 \cdot (\nabla \phi)_{r,0}^u$$

$$r_f = \begin{cases} \frac{\Delta_f}{\Delta_{\max}} & \text{para } \Delta_f > 0 \\ \frac{\Delta_f}{\Delta_{\min}} & \text{para } \Delta_f \leq 0 \end{cases}$$

O limitador  $\alpha_{\text{lim},f}$  é calculado para cada face  $f$  da célula pela Eq. (5.13), conforme descrito no manual Star-CCM+ User Guide [CD-adapco, 2009]:

$$\alpha_{\text{lim},f} = \frac{2r_f + 1}{r_f(2r_f + 1) + 1} \quad (5.13)$$

O valor do limitador  $\alpha_{\text{lim}}$  na Eq. (5.12) é obtido pela Eq. (5.14):

$$\alpha_{\text{lim}} = \min(\alpha_{\text{lim},f}) \quad (5.14)$$

O valor do fluxo convectivo nas faces de fronteira é obtido pela Eq. (5.15):

$$(\dot{m}\phi)_f = \begin{cases} \dot{m}_f \phi_{f,0} & \text{para } \dot{m}_f > 0 \\ \dot{m}_f \phi_f & \text{para } \dot{m}_f < 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Na Eq. (5.15),  $\phi_{f,0}$  é o valor do escalar interpolado para a face  $f$  a partir de seu valor no centroide da célula-0 usando o gradiente reconstruído limitado, Eq. (5.7). O valor do escalar  $\phi_f$  é prescrito pela condição de contorno.

O termo difusivo  $D_f$  é obtido pela Eq. (5.16):

$$D_f = \sum_f (\Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{a})_f \quad (5.16)$$

Na equação anterior,  $\Gamma$ ,  $\nabla\phi$  e “ $\mathbf{a}$ ” representam o coeficiente de difusão na face, o gradiente de um escalar  $\phi$  e o vetor área de face respectivamente. Para obter uma expressão de segunda ordem em precisão para um gradiente em uma face interior e que implicitamente envolva  $\phi_0$  e  $\phi_1$ , a decomposição representada na Fig. (5.1) é observada:

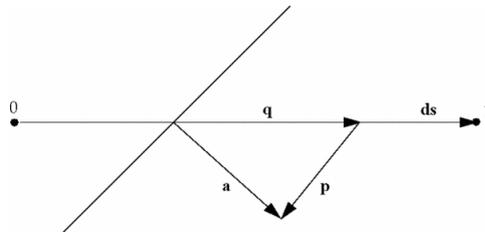


Figura 5.1 – Decomposição de fluxo difusivo para uma face interior.

Observando a decomposição de fluxo na Fig. (5.1), o gradiente do escalar  $\phi$  na face  $f$  é obtido pela Eq. (5.17):

$$\nabla\phi_f = (\phi_1 - \phi_0)\bar{\alpha} + \overline{\nabla\phi} - (\overline{\nabla\phi} \cdot \mathbf{ds})\bar{\alpha} \quad (5.17)$$

Na Eq. (5.17), definem-se:

$$\bar{\alpha} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{ds}} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{ds} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \quad (5.19)$$

$$\overline{\nabla\phi} = \frac{(\nabla\phi_0 + \nabla\phi_1)}{2} \quad (5.20)$$

Com auxílio das equações anteriores, o fluxo difusivo em uma face interior é obtido pela Eq. (5.21):

$$D_f = \Gamma_f \nabla\phi_f \cdot \mathbf{a} = \Gamma_f [(\phi_1 - \phi_0)\bar{\alpha} \cdot \mathbf{a} + \overline{\nabla\phi} \cdot \mathbf{a} - (\overline{\nabla\phi} \cdot \mathbf{ds})\bar{\alpha} \cdot \mathbf{a}] \quad (5.21)$$

Na equação anterior,  $\Gamma_f$  é a média harmônica dos coeficientes de difusão dos valores escalares  $\phi_f$  na face comum às células 0 e 1. O segundo e o terceiro termos na Eq. (5.21) representam a contribuição da difusão cruzada e são essenciais em manter a precisão em malhas não ortogonais.

Nas regiões de contorno, uma decomposição de fluxo difusivo semelhante àquela representada na Fig. (5.1) é empregada, de acordo com a Fig. (5.2), a seguir:

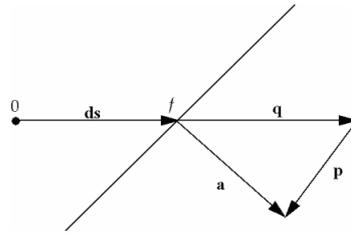


Figura 5.2 – Decomposição de fluxo difusivo em face de contorno

O termo difusivo para essa face é obtido pela Eq. (5.22):

$$D_f = \Gamma_f \nabla \phi_f \cdot \mathbf{a} = \Gamma_f [(\phi_f - \phi_0) \bar{\alpha} \cdot \mathbf{a} + \nabla \phi_0 \cdot \mathbf{a} - (\nabla \phi_0 \cdot \mathbf{ds}) \bar{\alpha} \cdot \mathbf{a}] \quad (5.22)$$

Na Eq. (5.22), define-se  $\bar{\alpha}$  como na Eq. (5.18) e  $\mathbf{ds} = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0$ . Assim como na Eq. (5.21), o segundo e o terceiro termos representam a contribuição da difusão cruzada e também são essenciais em manter a precisão em malhas não ortogonais.

A abordagem de discretização adotada resulta nos coeficientes de um sistema de equações lineares, resolvido de forma implícita e iterativa. Esse sistema algébrico para a variável transportada  $\phi$  na iteração  $k+1$  é escrito implicitamente de acordo com a Eq. (5.23):

$$a_p \phi_p^{k+1} + \sum_n a_n \phi_n^{k+1} = b \quad (5.23)$$

Na Eq. (5.23), o somatório é obtido para toda vizinhança  $n$  da célula  $p$ . O lado direito da Eq. (5.23) representa a contribuição explícita (i.e., da  $k$ -ésima iteração) para a equação discretizada. Os coeficientes  $a_p$  e  $a_n$  são obtidos diretamente dos termos discretizados.

Introduzindo-se um coeficiente de sub-relaxação  $\omega$  na Eq. (5.23), obtém-se a Eq. (5.24):

$$\frac{a_p}{\omega} \phi_p^{k+1} + \sum_n a_n \phi_n^{k+1} = b + \frac{a_p}{\omega} (1 - \omega) \phi_p^k \quad (5.24)$$

A Eq. (5.24) é reescrita para que o lado direito da mesma represente o resíduo entre duas iterações. Definindo  $\Delta\phi_p = \phi_p^{k+1} - \phi_p^k$ , o sistema a ser resolvido é expresso pela Eq. (5.25):

$$\frac{a_p}{\omega} \Delta\phi_p + \sum_n a_n \Delta\phi_n = b - a_p \phi_p^k - \sum_n a_n \phi_n^k \quad (5.25)$$

O lado direito da Eq. (5.25) é denominado de resíduo e representa a forma discretizada da Eq. (5.1) na  $k$ -ésima iteração, sendo o sistema de equações lineares obtido através da Eq. (5.25) e representado pela Eq. (5.26):

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (5.26)$$

Na equação anterior, a matriz  $\mathbf{A}$  contém os coeficientes das equações algébricas para cada célula da malha ( $a_p$  e  $a_n$ ), o vetor coluna  $\mathbf{x}$  contém a solução para as incógnitas ( $\Delta\phi$  na Eq. (5.25)) e o vetor coluna  $\mathbf{b}$  os resíduos de iteração.

A solução da Eq. (5.26) é obtida no Star-CCM+ pelo método algébrico de multi-malha. Nesse método iterativo, o algoritmo de Gauss-Seidel ou opcionalmente o de Jacobi é aplicado em uma malha menos refinada, obtida por combinações aritméticas dos coeficientes da malha original. Esse método explora a vantagem de que algoritmos como o de Gauss-Seidel é quatro vezes mais rápido em malhas com a metade do número de células. Esse processo é executado em três etapas pelo método algébrico multi-malha:

- i. Agrupamento de células para compor uma malha menos refinada;
- ii. Transferência dos resíduos da malha mais refinada para a menos refinada e;
- iii. Transferência da correção da malha menos refinada para a mais refinada.

Neste trabalho, dois algoritmos são empregados na solução da forma discreta da Eq. (5.1). Seguindo a recomendação do Manual do Usuário do Star-CCM+ [CD-adapco, 2009], deve-se adotar o algoritmo acoplado para escoamentos compressíveis e o algoritmo segregado para escoamentos incompressíveis ou quase incompressíveis. O algoritmo segregado requer menos memória as custas de um aumento no número de iterações com o refinamento da

malha. O algoritmo acoplado oferece soluções de maior precisão para escoamentos compressíveis, em particular na situação onde há formação de ondas de choque.

## 5.2 Algoritmo acoplado (escoamentos compressíveis)

No algoritmo acoplado, as equações discretizadas de conservação para massa, momentum e energia são resolvidas simultaneamente pelo emprego de um esquema de marcha no tempo onde a forma transiente das equações governantes é convergida para o regime permanente. Por questões de eficiência computacional, uma matriz de pré-condicionamento  $\Gamma$  [Weiss e Smith, 1995] é incorporada na Eq. (4.1.1), obtendo-se a forma pré-condicionada da mesma, Eq. (5.27):

$$\Gamma \frac{d}{dt} \left[ \int_V \mathbf{Q} dV + \oint [\mathbf{F} - \mathbf{G}] \cdot d\mathbf{a} \right] = \int_V \mathbf{H} dV \quad (5.27)$$

Na Eq. (5.27) define-se:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \theta & 0 & \rho_{,T} \\ \theta \mathbf{v} & \rho \mathbf{I} & \rho_{,T} \mathbf{v} \\ \theta H - \delta & \rho \mathbf{v} & \rho_{,T} H + \rho C_p \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q} = [p \quad \mathbf{v} \quad T]^T.$$

Na matriz de pré-condicionamento  $\Gamma$ ,  $\rho_{,T}$  é a derivada da densidade com respeito à temperatura à pressão constante e  $\delta = 0$  ou  $1$ . Para um gás ideal,  $\rho_{,T} = -p/RT$  e  $\delta = 1$ , tornando-se a matriz  $\Gamma$  um membro da família de pré-condicionadores de Turkel [1987]. O parâmetro  $\theta$  é obtido pela Eq. (5.28):

$$\theta = (1/U_r^2) - (\rho_{,T} / \rho C_p) \quad (5.28)$$

Na Eq. (5.28),  $U_r$  é uma velocidade de referência escolhida de tal forma que os autovalores do sistema permaneçam bem condicionados com respeito às escalas de tempo difusiva e advectiva [Weiss e Smith, 1995]. O limite inferior da velocidade de referência  $U_r$  é tal que essa seja sempre maior que as velocidades locais de advecção e dissipação. Outra limitação imposta à  $U_r$  considera diferenças locais de pressão onde em regiões de estagnação

a amplificação de perturbações na pressão é suprimida, visando aumentar a estabilidade numérica nessas regiões. Essas restrições ao valor assumido por  $U_r$  são expressas pela Eq. (5.29):

$$U_r = \max(|\mathbf{v}|, \nu / \Delta x, \varepsilon \sqrt{\delta p / \rho}, U_{r,\min}) \quad (5.29)$$

Na Eq. (5.29),  $\Delta x$  é uma escala característica da distância entre centroides de células onde ocorre a dissipação e  $\delta p$  a diferença de pressão entre células adjacentes. A velocidade de referência  $U_r$  é limitada de tal forma que não exceda a velocidade local do som. No contexto da Eq. (5.29),  $\varepsilon$  é um parâmetro de escala cujo valor atribuído é  $10^{-3}$  para assegurar estabilidade numérica.

A forma discretizada da Eq. (5.27) para a célula-0, obtida pela aplicação de um volume de controle centrado nessa célula, é expressa pela Eq. (5.30):

$$V_0 \Gamma_0 \frac{\partial \mathbf{Q}_0}{\partial t} + \sum_f (\mathbf{f}_f + \mathbf{g}_f) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{h} V_0 \quad (5.30)$$

Na Eq. (5.30), o somatório é sobre o número total de faces  $f$  da célula-0.  $\mathbf{f}_f$  e  $\mathbf{g}_f$  são os fluxos invíscidos e viscosos respectivamente, através de uma face  $f$ .  $V_0$  é o volume da célula-0 e  $\Gamma_0$  a matriz de pré-condicionamento calculada para célula-0.

Os fluxos invíscidos na Eq. (5.30) são obtidos de acordo com metodologia proposta por Weiss et al. [1999] e Weiss e Smith [1995]. Nessa metodologia,  $\mathbf{f}_f$  é decomposto conforme a Eq. (5.31):

$$\mathbf{f}_f = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1) - \frac{1}{2} \Gamma |\mathbf{A}| \Delta \mathbf{Q} \quad (5.31)$$

Na Eq. (5.31), os subscritos “0” e “1” referem-se às células em ambos os lados da face  $f$ .  $\Delta \mathbf{Q}$  é obtido pela Eq. (5.32):

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^r - \mathbf{Q}_0^r \quad (5.32)$$

Na equação anterior,  $\mathbf{Q}_0^r$  e  $\mathbf{Q}_1^r$  são vetores contendo a solução interpolada das células 0 e 1 utilizando gradientes reconstruídos (sobrescrito “r”). A matriz de fluxos invíscidos  $|\mathbf{A}|$  é obtida pela Eq. (5.33):

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{M}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{M}^{-1} \quad (5.33)$$

Na Eq. (5.33),  $\mathbf{\Lambda}$  é uma matriz diagonal de autovalores e  $\mathbf{M}$  a matriz modal que diagonaliza  $\mathbf{\Gamma}^{-1} (\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{Q})$ .

Para escoamentos turbulentos, a discretização dos fluxos viscosos nas paredes onde a condição de não-deslizamento é imposta assume que somente a componente paralela à parede é de interesse. Uma relação linear entre a tensão de parede e a componente paralela da diferença entre a velocidade da parede e a da célula é obtida pela Eq. (5.34):

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{a})_f = -\gamma(\mathbf{v}^t - \mathbf{v}_f^t) \quad (5.34)$$

Utilizando a definição da magnitude da tensão de parede ( $\tau_w = \rho u^{*2}$ ) e a definição de velocidade de referência ( $u^+ = |\mathbf{v}_p| / u^*$ ), o coeficiente de proporcionalidade  $\gamma$  é obtido pela Eq. (5.35):

$$\gamma = |\mathbf{a}| \frac{\rho u^*}{u^+} \quad (5.35)$$

O valor de  $u^*$  é obtido de acordo com o modelo de turbulência – Eq. (4.2.15) no modelo SA ou Eq. (4.3.14) no modelo  $k-\omega$ /SST.

Neste trabalho, a discretização no tempo das equações governantes é implícita, na forma da Eq. (5.36):

$$\left[ \mathbf{D}_i + \sum_j^{N \text{ faces}} \mathbf{S}_{j,k} \right] \Delta \mathbf{Q} = -\mathbf{R}_i^n \quad (5.36)$$

Na Eq. (5.36), define-se  $\Delta \mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n$ . A matriz diagonal de coeficientes  $\mathbf{D}_i$  é obtida pela Eq. (5.37):

$$\mathbf{D}_i = \frac{V}{\Delta t} \Gamma + \sum_j^{N \text{ faces}} \mathbf{S}_{j,k} \quad (5.37)$$

A matriz não diagonal de coeficientes  $\mathbf{S}_{j,k}$  é obtida pela Eq. (5.38):

$$\mathbf{S}_{j,k} = \left( \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \mathbf{Q}_k} - \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial \mathbf{Q}_k} \right) \quad (5.38)$$

O vetor de resíduos  $\mathbf{R}_i^n$  é obtido pela Eq. (5.39):

$$\mathbf{R}_i^n = \sum_j^{N \text{ faces}} (\mathbf{F}_j - \mathbf{G}_j)^n \quad (5.39)$$

Nessas equações, o passo de tempo local  $\Delta t$  é obtido pela Eq. (5.40) considerando-se o número de Courant-Friedrichs-Lewy  $CFL = U \frac{\Delta t}{\Delta x}$  (onde  $U$  é a velocidade característica do fenômeno transportado,  $\Delta t$  o passo de tempo e  $\Delta x$  a distância entre centroides de células adjacentes) e a condição de estabilidade de Von Neumann:

$$\Delta t = \min \left( \frac{CFL \cdot V}{\lambda_{\max}}, \frac{\sigma \Delta x^2}{\nu} \right) \quad (5.40)$$

Na Eq. (5.40),  $\lambda_{\max}$  é o máximo autovalor (de dimensão  $\frac{L^3}{T}$ ) do sistema,  $V$  o volume da célula,  $\sigma$  o número de Von Neumann (onde  $\sigma \approx 1$ ).

### 5.3 Algoritmo segregado (escoamentos incompressíveis)

Na metodologia de solução segregada, as equações para conservação de momentum e pressão são resolvidas de forma independente entre si, sendo o acoplamento de pressão-velocidade obtido por um arranjo do tipo Rhie-e-Chow combinado com o algoritmo SIMPLE devido a Patankar e Spalding, [1972]. O acoplamento entre as equações para conservação de momentum e a equação da continuidade é obtido por predição-correção. A formulação

segregada foi fundamentada em escoamentos incompressíveis (i.e., de densidade constante) e não é adequada em situações onde há formação de ondas de choque.

A forma integral da Equação de Navier-Stokes, Eq. (4.1.1), particularizada para as equações de continuidade e momento, é expressa pelas equações (5.41) e (5.42) respectivamente:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \oint_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (5.41)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \oint_A \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = - \oint_A p \mathbf{I} \cdot d\mathbf{a} + \oint_A \mathbf{T} \cdot d\mathbf{a} + \int_V \mathbf{f} dV \quad (5.42)$$

Os termos no lado esquerdo da Eq. (5.42) são o termo transiente e o termo de fluxo convectivo. No lado direito estão os termos para o gradiente de pressão, fluxo viscoso e forças de campo (cujas resultante é  $\mathbf{f}$ ).  $\mathbf{T}$  é o tensor de tensões totais expresso pela Eq. (5.1.8) e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

Para um volume de controle centrado na célula-0 e desprezando-se as forças de campo, obtém-se a na Eq. (5.42) em sua forma discreta, Eq. (5.43):

$$\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v} V)_0 + \sum_f [\mathbf{v} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}]_f = - \sum_f (p \mathbf{I} \cdot \mathbf{a})_f + \sum_f \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} \quad (5.43)$$

Na Eq. (5.43), o somatório calculado para todas as faces  $f$  de uma célula-0.

Para avaliar o tensor de tensões totais  $\mathbf{T}$  em faces interiores (i.e., que não definam o contorno), o tensor gradiente de velocidades  $\nabla \mathbf{v}_f$  deve ser escrito em termos de velocidades com o propósito de linearização. O tensor gradiente de velocidade é obtido pela Eq. (5.44):

$$\nabla \mathbf{v}_f = \Delta \mathbf{v} \otimes \bar{\alpha} + \overline{\nabla \mathbf{v}_f} - (\overline{\nabla \mathbf{v}_f} \cdot d\mathbf{s}) \otimes \bar{\alpha} \quad (5.44)$$

Na Eq. (5.44),  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$  e  $\overline{\nabla \mathbf{v}_f} = (\nabla \mathbf{v}_0 + \nabla \mathbf{v}_1) / 2$ , onde  $\nabla \mathbf{v}_0$  e  $\nabla \mathbf{v}_1$  são gradientes de velocidade explicitamente calculados nas faces  $f$  das células 0 e 1 respectivamente.  $\bar{\alpha}$  é obtido pela Eq. (5.18).

Nas faces  $f$  das células que definem a fronteira, é atribuído zero ao termo  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{a})_f$  para paredes com deslizamento. Em paredes de escoamento laminar sem deslizamento, o tensor gradiente de velocidades é obtido pela Eq. (5.45):

$$\nabla \mathbf{v}_f = \Delta \mathbf{v} \otimes \bar{\alpha} + \nabla \mathbf{v}_0 - (\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{ds}) \otimes \bar{\alpha} \quad (5.45)$$

Na Eq. (5.45),  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0$  onde  $\mathbf{v}_f$  é a velocidade tangencial prescrita da parede. Dessa forma, o tensor de tensões totais na face  $f$  é obtido pela Eq. (5.46):

$$\mathbf{T}_f = \mu [\Delta \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I}]_f \quad (5.46)$$

Para paredes sem deslizamento em escoamentos turbulentos, a componente da velocidade tangencial à parede é assumida como sendo de interesse. Parte-se então da hipótese de que exista uma relação linear entre a tensão de parede e a diferença entre as velocidades tangenciais à parede e da célula, de acordo com a Eq. (5.34).

A equação da continuidade em sua forma discreta é expressa pela Eq. (5.47):

$$\sum_f \dot{m}_f = \sum_f (\dot{m}_f^* + \dot{m}_f') = 0 \quad (5.47)$$

Na equação acima, o somatório é sobre todas as faces. A vazão não corrigida  $\dot{m}_f^*$  é calculada após a solução das equações de momentum discretizadas. A correção de vazão  $\dot{m}_f'$  é requerida para que a equação da continuidade seja satisfeita.

A vazão não corrigida  $\dot{m}_f^*$  é obtida em termos de grandezas das células 0 e 1, de acordo com a Eq. (5.48):

$$\dot{m}_f^* = \rho_f [\mathbf{a} \cdot (\frac{\mathbf{v}_0^* + \mathbf{v}_1^*}{2})] - \Upsilon_f \quad (5.48)$$

Na equação acima,  $\mathbf{v}_0^*$  e  $\mathbf{v}_1^*$  são velocidades nas células 0 e 1 após a solução das equações discretizadas de conservação de momentum. A dissipação de massa  $\Upsilon_f$  na face  $f$  é obtida por um arranjo do tipo Rhie-e-Chow, Eq. (5.49):

$$\Upsilon_f = Q_f(p_1^* - p_0^* - \overline{\nabla p_f^*} \cdot \mathbf{ds}) \quad (5.49)$$

Na Eq. (5.49),  $Q_f$  é definido pela Eq. (5.50):

$$Q_f = \rho_f \left( \frac{V_0}{\bar{a}_0} + \frac{V_1}{\bar{a}_1} \right) \bar{\alpha} \cdot \mathbf{a} \quad (5.50)$$

$V_0$  e  $V_1$  representam os volumes das células 0 e 1 respectivamente.  $\bar{a}_0$  e  $\bar{a}_1$  representam a média dos coeficientes de todas as componentes de momentum para as células 0 e 1 respectivamente.  $p_0^*$  e  $p_1^*$  são as pressões na iteração anterior e  $\overline{\nabla p_f^*}$  é a média volumétrica dos gradientes de pressão  $\nabla p_0^*$  e  $\nabla p_1^*$ .

Na situação onde o escoamento é compressível, é introduzida uma correção de densidade  $\rho'$  de tal forma que a vazão  $\dot{m}_f$  seja obtida pela Eq. (5.51):

$$\dot{m}_f = (\rho + \rho')_f (v_{fn}^* - v_{fn}') |\mathbf{a}| = (\rho_f v_{fn}^* + \rho_f' v_{fn}^* + \rho_f v_{fn}' + \rho_f' v_{fn}') |\mathbf{a}| \quad (5.51)$$

Na Eq. (5.51), o subscrito “fn” denota a componente normal da velocidade do escoamento relativamente à face “f”. O penúltimo termo da Eq. (5.51) é definido pela Eq. (5.52):

$$\rho_f v_{fn}' |\mathbf{a}| \equiv -Q_f (p_1' - p_0') \quad (5.52)$$

Na equação acima,  $p_1'$  e  $p_0'$  são correções de pressão. O lado esquerdo da identidade expressa pela Eq. (5.52) é obtido pela Eq. (5.53):

$$\rho_f v_{fn}' |\mathbf{a}| = \frac{\dot{m}_f^*}{\rho_f} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p_{upwind}' \quad (5.53)$$

Na Eq. (5.53),  $p_{upwind}'$  é obtido pela Eq. (5.54):

$$p_{upwind}' = \begin{cases} p_0' & \text{para } \dot{m}_f^* > 0 \\ p_1' & \text{para } \dot{m}_f^* < 0 \end{cases} \quad (5.54)$$

O termo de segunda ordem  $\rho_f' v_{fn}'$  é negligenciado, permitindo a combinação das equações anteriores para obter uma expressão para a correção de vazão, Eq. (5.55):

$$\dot{m}_f' = Q_f(p_0' - p_1') + \frac{\dot{m}_f^*}{\rho_f} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p_{upwind}' \quad (5.55)$$

As equações (5.47) e (5.55) são combinadas para obter-se uma forma discreta para a equação de correção de pressão expressa em forma de coeficientes, Eq. (5.56):

$$a_p p_p' + \sum_n a_n p_n' = r \quad (5.56)$$

Na equação acima,  $r$  é o resíduo de vazão na célula, obtido pela Eq. (5.57):

$$r = -\sum_f \dot{m}_f^* \quad (5.57)$$

Na situação onde a velocidade  $\mathbf{v}_f^*$  é prescrita como condição de contorno, as correções de vazão são zeradas e  $\dot{m}_f^*$  é calculada pela Eq. (5.58):

$$\dot{m}_f^* = \rho_f (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_f^*) \quad (5.58)$$

Ainda nessa situação, a correção de pressão, Eq. (5.59), é obtida pela aplicação da condição de Neumann:

$$p_f' = p_0' \quad (5.59)$$

Para as condições de contorno onde há prescrição de pressão, a vazão não corrigida é obtida pela Eq. (5.60):

$$\dot{m}_f^* = \rho_f (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a}) - \Upsilon_f \quad (5.60)$$

Na Eq. (5.60),  $\mathbf{v}_f$  é a velocidade na fronteira e a dissipação  $\Upsilon_f$  obtida pela Eq. (5.61):

$$\Upsilon_f = Q_f(p_f^* - p_0^* - \overline{\nabla p_0^*} \cdot \mathbf{ds}) \quad (5.61)$$

Na equação anterior, define-se:

$$Q_f = \frac{\rho_f V_0}{a_0} (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{a}) \quad (5.62)$$

Com a mesma argumentação aplicada na obtenção da Eq. (5.55), a correção de vazão é obtida pela Eq. (5.63):

$$\dot{m}'_f = -Q_f(p_0' - p_f') + \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p'_{upwind} \quad (5.63)$$

Para um escoamento subsônico deixando o domínio computacional,  $p'_f = 0$  e  $p'_{upwind} = p'_0$ . Dessa forma, a Eq. (5.63) torna-se a Eq. (5.64):

$$\dot{m}'_f = [Q_f + \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T] p'_0 \quad (5.64)$$

Para um escoamento subsônico ingressando no domínio computacional,  $p'_{upwind} = 0$ . Isso simplifica a Eq. (5.63), mas ainda é necessária a eliminação do termo  $p'_f$  dessa equação.

Nota-se que:

$$\dot{m}'_f = \frac{\partial \dot{m}'_f}{\partial p_f} p'_f = - \frac{\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{v}_f|^2} p'_f \quad (5.65)$$

A Eq. (5.65) é combinada com a Eq. (5.63) para obter uma nova expressão para as correções de vazão e pressão, equações (5.66) e (5.67) respectivamente:

$$\dot{m}'_f = \frac{\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a} Q_f}{\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a} - Q_f |\mathbf{v}_f|^2} \quad (5.66)$$

$$p'_f = \frac{|\mathbf{v}_f|^2 Q_f}{Q_f |\mathbf{v}_f|^2 - \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{a}} p'_0 \quad (5.67)$$

O controle da solução é obtido pelo algoritmo SIMPLE (“Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations”), devido a Patankar e Spalding [1972]. Esse algoritmo é sumarizado como segue:

- i. Estabelecer as condições de contorno;
- ii. Calcular os gradientes reconstruídos para velocidade e pressão;
- iii. Calcular os gradientes de pressão e velocidade;
- iv. Solucionar as equações discretizadas de momentum para obter um campo intermediário de velocidades  $\mathbf{v}^*$ ;
- v. Calcular as vazões não corrigidas  $\dot{m}_f^*$  nas faces das células;
- vi. Solucionar a equação de correção de pressão para obter a correção de pressão  $p'$  para as células;
- vii. Atualizar o campo de pressões onde  $p^{n+1} = p^n + \omega p'$  e  $\omega$  é um fator de sub-relaxação para pressão;
- viii. Atualizar a correção de pressão  $p'_b$  nos contornos;
- ix. Corrigir as vazões onde  $\dot{m}_f^{n+1} = \dot{m}_f^* + \dot{m}'_f$ ;
- x. Corrigir o campo de velocidades onde  $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{V \nabla p'}{a_p^v}$ .  $\nabla p'$  é o gradiente de pressão corrigida,  $a_p^v$  é um vetor contendo os coeficientes centrais do sistema linear formado pelas equações discretizadas que representam a equação da velocidade e  $V$  é o volume da célula.
- xi. Atualizar a densidade devido a mudanças na pressão.

## 6 METODOLOGIA DE VERIFICAÇÃO DOS RESULTADOS

As simulações são sujeitas a incertezas e erros, fazendo-se necessária à aplicação de uma metodologia de validação e verificação para estabelecer-se a credibilidade dos resultados. Roache [1998] define a verificação como um exercício puramente matemático cujo objetivo é demonstrar que as equações governantes estão sendo corretamente resolvidas, enquanto validação é uma atividade científica ou de engenharia cujo propósito é determinar se as equações sendo resolvidas efetivamente representam o fenômeno simulado.

O processo de verificação divide-se em duas atividades: a verificação do código de programação e a verificação dos resultados [Eça et al., 2005]. Na verificação do código busca-se constatar se o mesmo resolve corretamente as equações programadas enquanto na verificação dos resultados o objetivo é estimar o erro relativamente a uma solução exata, geralmente desconhecida. O erro é definido como uma deficiência reconhecível e mensurável que não é atribuível à falta de conhecimento sobre o fenômeno simulado [AIAA, 1998].

Neste trabalho é utilizado o software comercial Star-CCM+ em sua versão 4.06.11 e nenhum esforço de validação ou verificação desse código é aplicado. Como genericamente discute Roache [1998], o uso de softwares comerciais não implica em precisão numérica para todas as classes de problemas mas a documentação [CD-adapco, 2009] e os casos validados nessa apresentados servem como referência na comparação de resultados em diferentes problemas de engenharia e aplicações de interesse.

Eça e Hoekstra [2009] dividem os erros mensuráveis em três componentes: o erro de arredondamento, o erro de iteração e o erro de discretização.

O erro de arredondamento é relacionado ao número de casas decimais utilizadas no processamento e à metodologia numérica aplicada, sendo o limite inferior desse erro limitado pelo refinamento de malha.

O erro de iteração é a diferença entre uma solução numérica intermediária e outra convergida para precisão de máquina. Esse erro surge devido às fontes de não linearidade (como os termos convectivos) no sistema de equações diferenciais parciais de Navier-Stokes.

Os erros de discretização ocorrem pela representação das equações governantes do escoamento como expressões algébricas em um domínio espacial e temporal discretos. Neste trabalho, a avaliação desses erros é feita pelo estudo de dependência de malha, conduzido de acordo com a metodologia de verificação proposta por Roache [1994]. Esse método, derivado

da extrapolação de Richardson generalizada [Roache e Knupp, 1993], provê uma abordagem assintótica objetiva para quantificação da incerteza quanto à convergência de malha.

Na extrapolação de Richardson generalizada, uma solução discreta  $f_{exata}$  é expressa pela Eq. (6.1), onde  $p_{obs}$  é a ordem teórica de convergência do método de discretização espacial,  $r_{ref} = h_2 / h_1$  é a razão de refinamento ( $h_n$  é o espaçamento entre dois nós consecutivos) e  $f_1, f_2$  soluções (os subscritos “1” e “2” correspondem às malhas mais refinada e menos refinada respectivamente):

$$f_{exata} \cong f_1 + \frac{f_1 - f_2}{r_{ref}^{p_{obs}} - 1} \quad (6.1)$$

A condição necessária para aplicação da Eq. (6.1) é que  $r_{ref}$  seja igualmente aplicado em todos os eixos coordenados e que a ordem de convergência observada  $p_{obs}$  seja uniforme no espaço e no tempo. Neste trabalho, onde o MVF é utilizado, a teoria prevê  $p_{obs} = 2$  já que esse método é de segunda ordem.

Roache [1994] propôs a utilização do índice de convergência de malha, conhecido como GCI (“Grid Convergence Index”). Esse índice fornece uma banda percentual da diferença entre o valor computado e o valor assintótico e indica a variação na solução a obter com um maior refinamento. Consequentemente, pequenos valores desse índice indicam que a solução está na região assintótica. O GCI calculado a partir da malha mais refinada,  $GCI_{12}$ , é definido pela Eq. (6.2):

$$GCI_{12} = \frac{F_s |\varepsilon_{12}|}{(r_{ref}^{p_{obs}} - 1)} \quad (6.2)$$

Na Eq. (6.2),  $\varepsilon_{12} = (f_2 - f_1) / f_2$  é o erro relativo entre duas soluções. Para comparação de resultados envolvendo duas malhas, o fator de segurança  $F_s = 3$  é adotado enquanto que para três malhas  $F_s = 1.25$ . O índice GCI neste trabalho é aplicado aos resultados integrados dos coeficientes de sustentação e arrasto.

A ordem observada de convergência para uma razão de refinamento  $r_{ref}$  constante é obtida segundo De Vahl Davis [1983] pela Eq. (6.3):

$$p_{obs} = \ln\left(\frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1}\right) / \ln(r_{ref}) \quad (6.3)$$

Na equação acima, o subscrito “1” refere-se à malha mais refinada. Para verificar se as soluções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  encontram-se na região de convergência assintótica, a razão entre os índices GCI obtidos entre dois níveis consecutivos de refinamento de malha  $\alpha_{GCI}$  é calculada pela Eq. (6.4):

$$\alpha_{GCI} = \frac{GCI_{23}}{GCI_{12}} \quad (6.4)$$

Valores de  $\alpha_{GCI}$  próximos de um (ou  $\alpha_{GCI} \approx r_{ref}^{p_{obs}}$ ) indicam que a solução está na região de convergência assintótica e que  $p_{obs}$  é a ordem observada de convergência do método de discretização espacial. A Eq. (6.4) requer que  $r_{ref}$  seja constante para um conjunto de três malhas e não é geralmente aplicável para o caso de malhas não estruturadas. Nessa situação, utiliza-se a Eq. (6.5) que é transcendental em  $p_{obs}$ :

$$\frac{\varepsilon_{23}}{r_{23}^{p_{obs}}} = r_{12}^{p_{obs}} \left[ \frac{\varepsilon_{12}}{r_{12}^{p_{obs}} - 1} \right] \quad (6.5)$$

Na Eq. (6.5),  $\varepsilon_{12} = (f_2 - f_1) / f_2$  e  $\varepsilon_{23} = (f_3 - f_2) / f_3$ . A solução dessa equação é obtida por substituição direta entre iterações ou por método numérico (e.g. Newton-Raphson).

Para malhas não estruturadas, utiliza-se na Eq. (6.5) a razão efetiva de refinamento entre malhas  $r_{efet}$  no lugar de  $r_{ref}$ . Obtém-se essa razão pela Eq. (6.6):

$$r_{efet} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^{1/D} \quad (6.6)$$

Na Eq. (6.6),  $D$  é o número de dimensões do modelo,  $N_1$  e  $N_2$  representam o número de células das malhas mais refinada e menos refinada respectivamente.

Um aspecto importante na utilização da metodologia de verificação é determinar se um par de malhas representa uma sequência de refinamentos válida para um estudo de

dependência de malha. No caso de malhas estruturadas, valores de  $\alpha_{GCI}$  obtidos pela Eq. (6.4) próximos à unidade confirmam ou não essa hipótese. Para malhas não estruturadas, onde a razão de refinamento entre pares de malhas não é em geral constante, a determinação da ordem observada de convergência do método de discretização espacial através da Eq. (6.5) pode resultar em valores menores que zero ou até mesmo negativos inviabilizando, portanto o cálculo de  $\alpha_{GCI}$ . Ollivier-Gooch [2009] abordou esse problema e estabeleceu três critérios para geração de malhas que se atendidos fornecerão uma expectativa de razoável certeza quanto à adequação dessas para um estudo de convergência. O primeiro critério define o indicador de qualidade de refinamento,  $Q_r$ , obtido pela Eq. (6.7):

$$Q_r \equiv \frac{L_1}{L_2} \sqrt[D]{\frac{N_1}{N_2}} \quad (6.7)$$

Na Eq. (6.7),  $L_1$  e  $L_2$  são uma dimensão característica da célula tomada como referência para o refinamento,  $N_1$  e  $N_2$  o número de células e  $D$  o número de dimensões do modelo. Os subscritos “1” e “2” referem-se às malhas mais refinada e menos refinada respectivamente. Esse critério estabelece que idealmente  $\frac{3}{4} \leq Q_r \leq \frac{4}{3}$  para qualquer dimensão tomada como referência. O segundo critério estabelece que a razão entre os alongamentos das células nas regiões anisotrópicas das malhas seja aproximadamente a unidade. O terceiro critério estabelece que a orientação das células entre malhas seja comparável com a mudança na orientação entre células adjacentes na mesma malha.

Nos estudos de dependência de malha apresentados neste trabalho, a metodologia de verificação é aplicada quanto ao refinamento da malha e à posição do contorno onde o escoamento é livre (“farfield”). Nesses estudos, são utilizados três níveis de refinamento de malha para que seja possível calcular o índice GCI com um fator de segurança menos conservativo, i.e.,  $F_s = 1.25$ .

## 7 METODOLOGIA PARA GERAÇÃO DE MALHA

### 7.1 Malha não-estruturada de volumes poliédricos

Como afirma CD-adapco [2009], as malhas poliédricas provêm uma solução equilibrada sob o ponto de vista de esforço computacional para geração de malhas aplicadas a geometrias complexas. Relativamente às malhas tetraédricas, as malhas poliédricas requerem a mesma preparação de superfície (triangularização) e geram cinco vezes menos células que uma malha tetraédrica para uma mesma superfície inicial. O modelo proprietário de geração de malhas poliédricas utilizado pelo Star-CCM+ constrói células poliédricas de perfil arbitrário com em média 14 faces.

A primeira etapa na geração de uma malha não-estruturada é a preparação de superfícies. Entende-se por preparação de superfície no contexto deste trabalho a triangularização do domínio computacional tomando-se como superfície de partida as paredes do aerofólio. Para que seja possível aplicar com sucesso a metodologia de verificação, uma fração de uma dimensão característica da superfície inicial deverá ser definida como base para as arestas dos triângulos que definirão a geometria do modelo. Essa dimensão base é aqui definida como “BS” (de “Base Size”), sendo a dimensão característica adotada a corda geométrica do aerofólio.

Para aerofólios, o número de células nos bordos de ataque e de fuga são críticos na determinação dos coeficientes, em especial o de arrasto, sensível ao gradiente de velocidade nessas regiões. O bordo de fuga, por ter uma dimensão finita, requer uma triangularização que gere um número mínimo de células em geral não menor do que oito [Vassberg et al., 2007]. Dessa forma, definem-se três regiões de triangularização na superfície do aerofólio cujas arestas dos triângulos devem ser proporções da dimensão base BS e respeitar um tamanho mínimo (para que se garanta um número de células mínimo na região) e um tamanho objetivo (para controlar a variação de volume entre células adjacentes).

A primeira região de triangularização é aqui denominada “LE-TE” e representada pela Fig. (7.1.1), onde as setas vermelhas representam o desenvolvimento dessa região que se inicia no ponto de estagnação do bordo de ataque do aerofólio e estende-se em direção ao bordo de fuga definindo o dorso e intradorso segundo a geometria. O tamanho  $|\mathbf{ds} = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$  (onde  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_n$  representam o vetor posição dos centroides das arestas dos triângulos que

definem a curvatura do aerofólio) cresce com uma razão prescrita (e.g. 1.3) até aproximadamente atingir o tamanho objetivo.

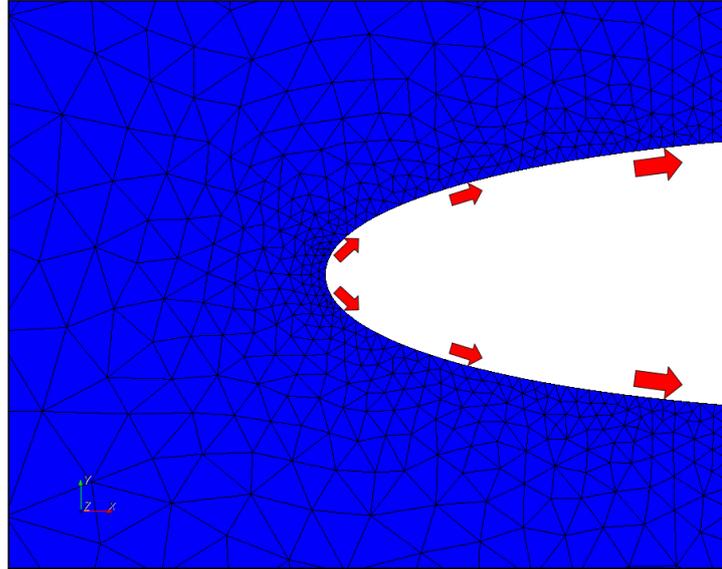


Figura 7.1.1 - Primeira região de triangularização, “LE-TE”.

A Fig. (7.1.2) representa a segunda e terceira regiões, “TE-LE” e “TE” respectivamente. “TE-LE” estende-se das arestas que definem o bordo de fuga em direção ao bordo de ataque segundo a geometria. A terceira região é o próprio bordo de fuga, denominado “TE” e indicado pelas setas de cor preta na figura.

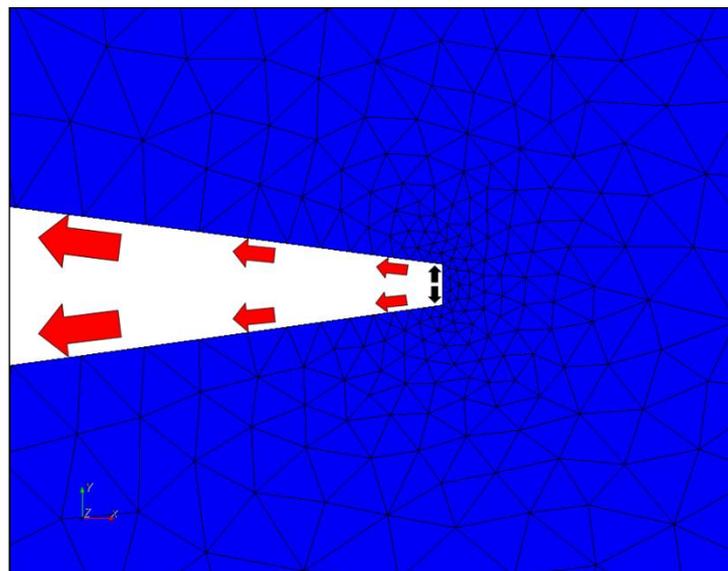


Figura 7.1.2 – Segunda e terceira regiões de triangularização, “TE-LE/BS” e “TE”.

A Fig. (7.1.3) representa a região do domínio computacional próxima às paredes do modelo. As regiões mais escuras junto às paredes e aos bordos de ataque e de fuga indicam maior densidade de triângulos.

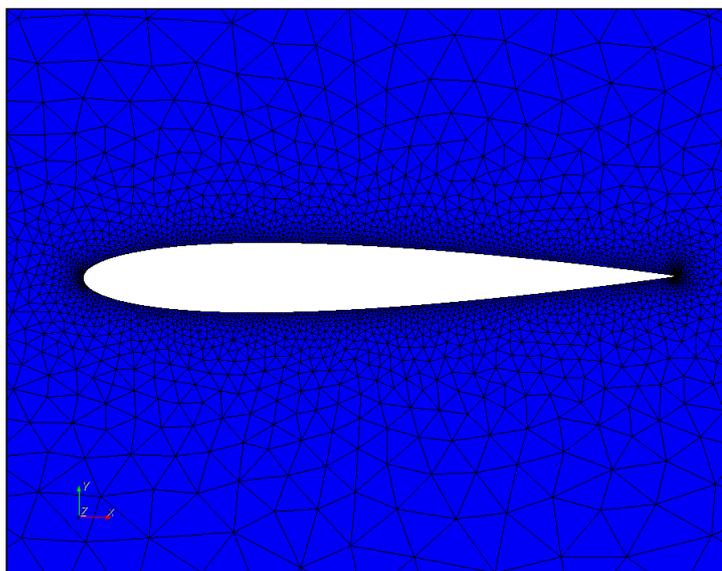


Figura 7.1.3 – Região do domínio computacional próxima às paredes do modelo.

A segunda etapa na metodologia de geração de malhas poliédricas requer a configuração dos parâmetros de geração das células dentro da camada limite junto às paredes do modelo e contornos.

Os parâmetros de geração dos poliedros são a densidade de poliedros e o fator de crescimento dos mesmos. O primeiro parâmetro governa a quantidade de poliedros a gerar. O segundo parâmetro governa o crescimento no tamanho das células, i.e., como varia a densidade de poliedros. Deve-se observar que junto às superfícies do modelo os poliedros são gerados de acordo com as arestas dos triângulos onde os parâmetros mencionados não têm efeito. Ambos os parâmetros têm por valor padrão a unidade.

As malhas não estruturadas são geradas a partir de superfícies triangularizadas de acordo com parâmetros geométricos associados a uma fração de uma dimensão característica do aerofólio como por exemplo corda ou espessura máxima do mesmo.

A aplicação da metodologia de geração de malha não estruturada de células poliédricas é a seguir exemplificada para uma seção bidimensional (2D) de aerofólio NACA 0012 de corda  $c = 0.6$  m de acordo com a Tab. (B.1), cujas características simuladas são

correspondentes à malha B3-6 da Tab. (3.1). Os valores de referência e condições de contorno são prescritos de acordo com a Tab. (7.1.1) a seguir:

Tabela 7.1.1 – Valores de referência e condições de contorno, modelo NACA 0012

Valores de referência						
$p_0$ [Pa]	$T_0$ [K]	$\rho_0$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\mu_0$ [Pa.s]			
101325	288	1.225	1.8551E-5			

Condições de contorno						
$\alpha$	$p_\infty$ [Pa]	$T_\infty$ [K]	$c_\infty$ [m/s]	$M_\infty$	$U_\infty$ [m/s]	$Re_c$
0°	101325	288	340.1148	0.223	75.7184	3.00E6

Os modelos de turbulência requerem a discretização da região do escoamento junto às paredes por uma região de células quadrilaterais com a altura da primeira camada  $h_1$  prescrita para um valor  $y^+$  adequado à escolha do modelo de turbulência. Para  $y^+ = 0.1$  e as condições de contorno descritas na Tab. (7.1.1), obtemos  $h_1$  com auxílio da Eq. (A.9):

$$h_1 = 5.1988 C y^+ c Re_c^{-9/10} = 5.1988 \cdot 1.7391 \cdot 0.1 \cdot 0.6 \cdot (3E6)^{-9/10} = 8.0346E-7 \text{ m}$$

A espessura da camada limite é obtida pela Eq. (A.10):

$$\delta_{CL,t} = \frac{0.37L}{Re_L^{1/5}} = \frac{0.37c}{Re_c^{1/5}} = \frac{0.37 \cdot 0.6}{(3E6)^{1/5}} = 1.1244E-2 \text{ m}$$

O número de camadas de células dentro da camada limite,  $N_{CL}$ , é obtido de forma iterativa pela Eq. (A.13) onde a razão de crescimento da altura das células segue a recomendação de Vassberg et al. [2007], i.e.,  $r_h \leq 1.25$ . Esse número deverá ser suficientemente grande para resolver a camada limite, em especial nas regiões distantes da parede. Zingg [1992] associa os erros na estimativa de arrasto à resolução inadequada da camada limite nessas regiões. Ainda, esse número de camadas deverá variar entre níveis de refinamento de acordo com uma razão  $r_{ref}$  aproximadamente constante para que seja possível aplicar com sucesso a metodologia de verificação proposta por Roache [1994] e os critérios

de Ollivier-Gooch [2009]. Resolvendo iterativamente a Eq. (A.13) para  $N_{CL} = 37$  obtém-se  $r_h = 1.2463 \leq 1.25$ :

$$N_{CL} = \frac{\ln \left[ \frac{\delta_{CL,t}}{h_1} (r_h - 1) + 1 \right]}{\ln r_h} = 37 = \frac{\ln \left[ \frac{1.1244E-2}{8.0346E-7} (r_h - 1) + 1 \right]}{\ln r_h}$$

Com os parâmetros construtivos da região correspondente à camada limite definidos, resta à escolha da dimensão base BS. Neste exemplo, a dimensão base adotada para a malha mais refinada é 40% da corda, i.e.,  $BS = 0.24$  m. Para as malhas menos refinadas, BS é multiplicada pela razão de refinamento  $r_{ref}$  proposta por Vassberg et al. [2007] que aproximadamente triplica o número de células entre níveis de refinamento para modelos tridimensionais. Neste trabalho, onde o modelo é uma seção bidimensional de aerofólio,  $r_{ref} = \sqrt[3]{3} \cong 1.44$ . A Tab. (7.1.2) a seguir apresenta as proporções em percentual da dimensão base utilizadas para atender simultaneamente a metodologia de verificação proposta por Roache [1994], as práticas sugeridas por Vassberg et al. [2007] e o critério de qualidade de refinamento  $Q_r$  de Ollivier-Gooch [2009].

Tabela 7.1.2 - Proporções  $|\mathbf{ds}|$  em percentual da dimensão base BS

Superfície	$ \mathbf{ds} $ mín. %	$ \mathbf{ds} $ objetivo %
TE	0.0700	0.0700
TE-LE	0.0700	0.6667
LE-TE	0.3333	0.6667

A Tab. (7.1.3) a seguir consolida os parâmetros construtivos obtidos para três níveis de refinamento de malha de acordo com a Tab. (7.1.2) para  $y^+ = 0.1$  e  $h_1 = 8.0346E-7$  m,  $\delta_{CL,t} = 1.1244E-2$  m,  $r_{ref} \cong 1.44$  e  $BS = 0.24$  m (40% da corda) para a malha mais refinada.

Tabela 7.1.3 – Parâmetros construtivos caso B3-6, seção NACA 0012,  $c = 0.6$  m.

Malha	$N_{CL}$	$r_h$	TE	$ \mathbf{ds} $ LE mín (m)	$ \mathbf{ds} $ TE mín (m)	$ \mathbf{ds} $ Objetivo (m)	Base Size (m)
C	37	1.2463	5	1.6641E-03	3.4945E-04	3.3281E-03	0.4992
M	53	1.1561	7	1.1538E-03	2.4230E-04	2.3076E-03	0.3461
F	76	1.1000	10	8.0000E-04	1.6800E-04	1.6000E-03	0.2400

Na Tab. (7.1.3), a malha “F” é a mais refinada.  $N_{CL}$  indica o número de camadas de células dentro da camada limite,  $r_h$  é a razão de crescimento entre duas camadas consecutivas de células nessa região, obtida pela Eq. (A.13), e “TE” é o número de células uniformemente distribuídas no bordo de fuga. Os espaçamentos mínimos nos bordos de ataque e fuga, onde o agrupamento de nós recomendado por Vassberg et al. [2007] para a malha intermediária é 0.1% da corda, estão sob as colunas “| $\mathbf{ds}$ | LE mín” e “| $\mathbf{ds}$ | TE mín” respectivamente ( $\mathbf{ds}$  é definido como na Eq. (5.9)). O espaçamento objetivo encontra-se sob a coluna “| $\mathbf{ds}$ | Objetivo” e corresponde àquele entre os nós próximos à região de maior espessura da seção do aerofólio (a 30% da corda para a seção NACA 0012). A dimensão base para a malha mais refinada é escolhida de forma a gerar um número suficientemente grande de células para atender os critérios de convergência assintótica [Roache, 1998] e de qualidade de refinamento  $Q_r$  [Ollivier-Gooch, 2009].

Os parâmetros construtivos da Tab. (7.1.3) foram aplicados à malha “C” da Tab. (3.1), representada pela Fig. (7.1.4). O domínio computacional tem topologia de um bloco de espessura unitária onde o bordo de ataque da seção do aerofólio é posicionado a 1.8 m do plano vertical e a velocidade de ingresso do escoamento  $U_\infty$  é prescrita. No plano vertical onde o escoamento abandona o domínio computacional, posicionado a 3.6 m do bordo de fuga, a pressão  $P_\infty$  é prescrita. Os planos horizontais, de simetria, estão posicionados a 2.28 m da linha de corda da seção. As paredes da seção são consideradas como sem deslizamento, adiabáticas e impermeáveis.

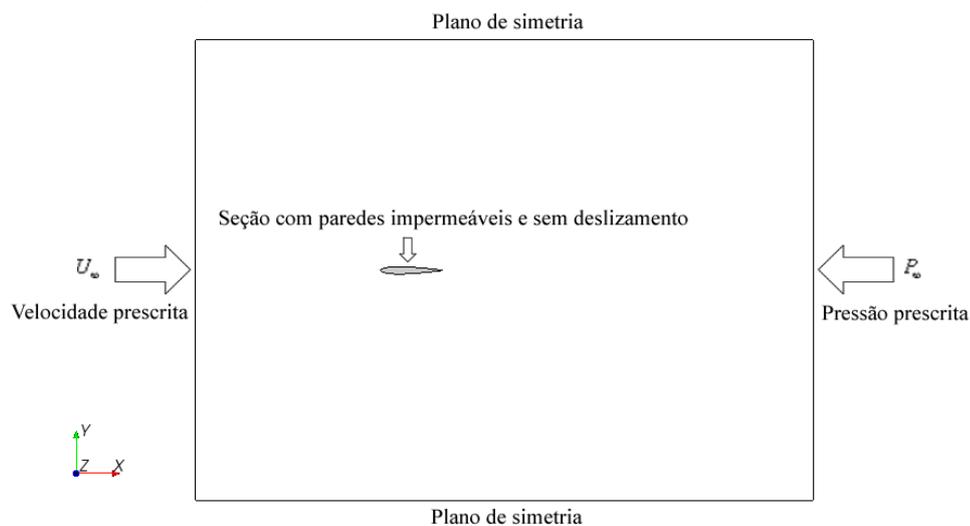


Figura 7.1.4 – Domínio computacional e condições de contorno, NACA 0012, Tab. (B.1).

A aplicação dos parâmetros construtivos descritos na Tab. (7.1.3) ao gerador de malhas poliédricas do Star-CCM+ gerou malhas com as características apresentadas na Tab. (7.1.4). Nessa tabela, a razão de refinamento efetiva  $r_{efet}$  é obtida pela Eq. (6.6) e o indicador de qualidade de refinamento  $Q_r$  pela Eq. (6.7).

Tabela 7.1.4 – Características da malha poliédrica, seção NACA 0012, Caso B3-6

Malha	Células	$r_{efet}$	$Q_r$
C	19612		
M	38788	1.41	1.026
F	78976	1.43	1.011

A Fig. (7.1.5) representa a malha “C” da Tab. (7.1.4). A Fig. (7.1.5a) detalha as células da camada limite junto ao bordo de ataque enquanto a Fig. (7.1.5b) detalha a formação do bordo de fuga. A Fig. (7.1.5c) mostra em detalhe os volumes nos contornos do domínio computacional, uma prática recomendada pela CD-adapco [2009]. Na construção dessas camadas, prescreveu-se a espessura da camada junto aos contornos (5% da dimensão base) e número de camadas (duas).

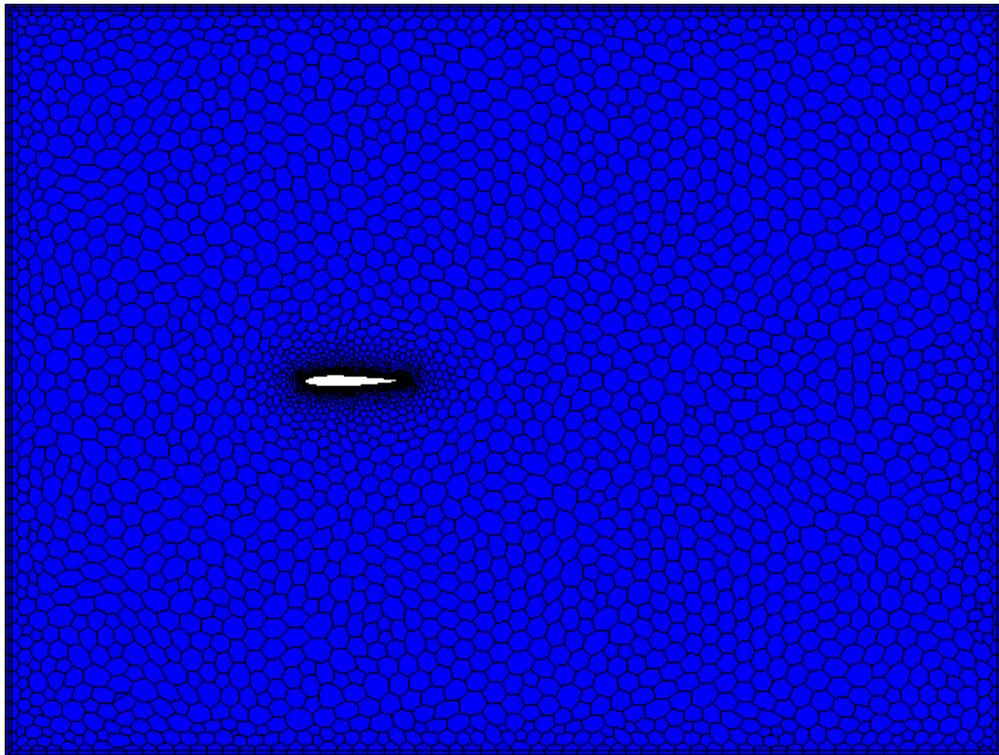


Figura 7.1.5 - Malha “C” da Tab. (7.1.4).

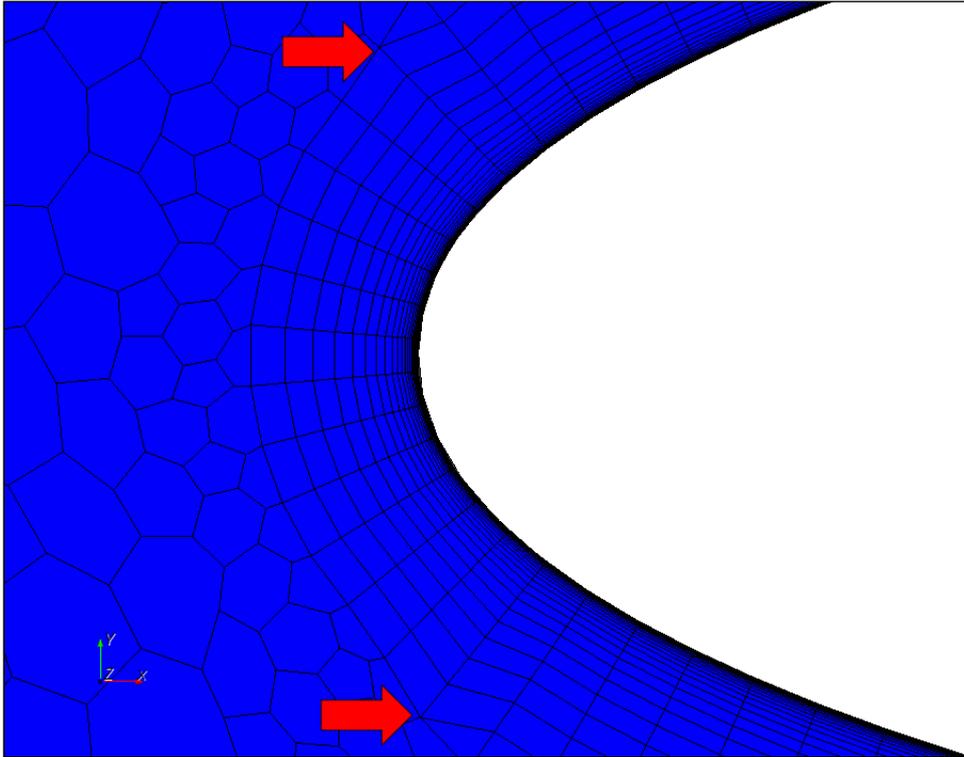


Figura (7.1.5a) - Detalhe das células da camada limite junto ao bordo de ataque.

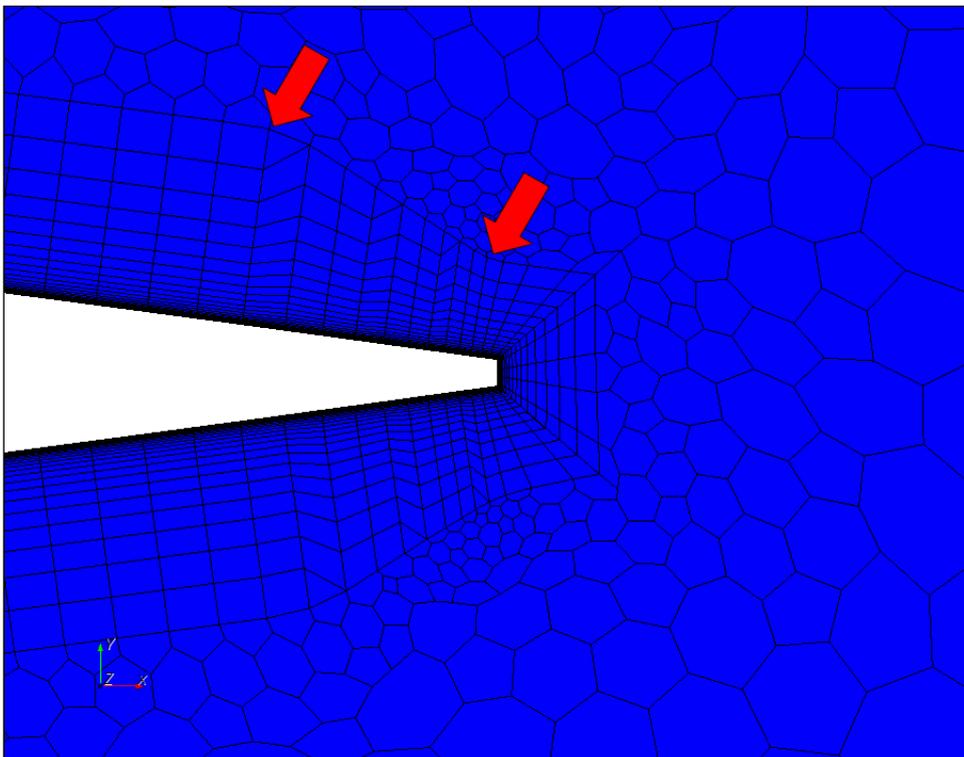


Figura 7.1.5b - Detalhe das células da camada limite no bordo de fuga.

Nas figuras (7.1.5a) e (7.1.5b) as linhas de contorno que definem o limite externo da camada limite, em especial no bordo de fuga, apresentam uma descontinuidade (onde indicado pelas setas). Essa descontinuidade indica a solução provida pelo software de geração de malha para conciliar os parâmetros construtivos com os aspectos de validade e qualidade de malha (e.g. alongamento das células, adequação de  $y^+$  ao modelo de turbulência, razão de crescimento dos volumes e ângulo mínimo entre arestas).

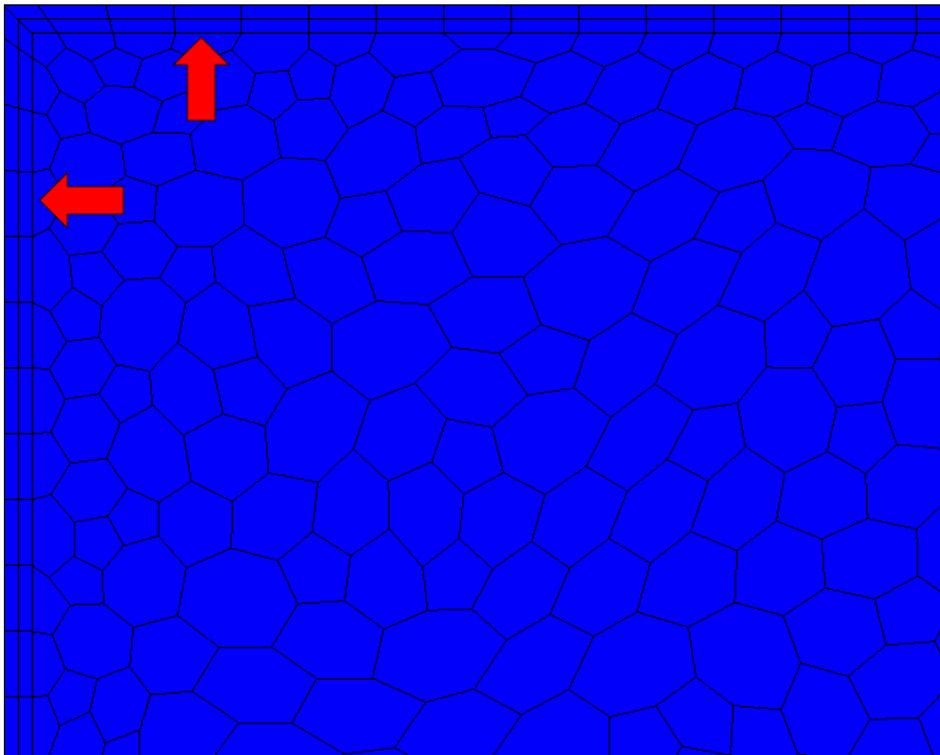


Figura 7.1.5c - Volumes gerados nos contornos do domínio computacional.

A Fig. (7.1.5d) apresenta o indicador de razão de variação dos volumes (“volume change”) nas regiões adjacentes às paredes da seção. Esse indicador provê uma forma de identificar regiões da malha onde ocorrem grandes alterações de volume de uma célula relativamente às células vizinhas. Células cujo valor desse indicador é  $\leq 1E-5$  são consideradas como sendo de má qualidade [CD-adapco, 2009]. Na figura, observa-se a homogeneidade no valor desse indicador e a transição suave entre as células da camada limite e as células poliédricas. O menor valor desse indicador é  $\cong 4E-2$  para a malha # 1, ao menos duas ordens de grandeza maior que o valor mínimo considerado como inaceitável.

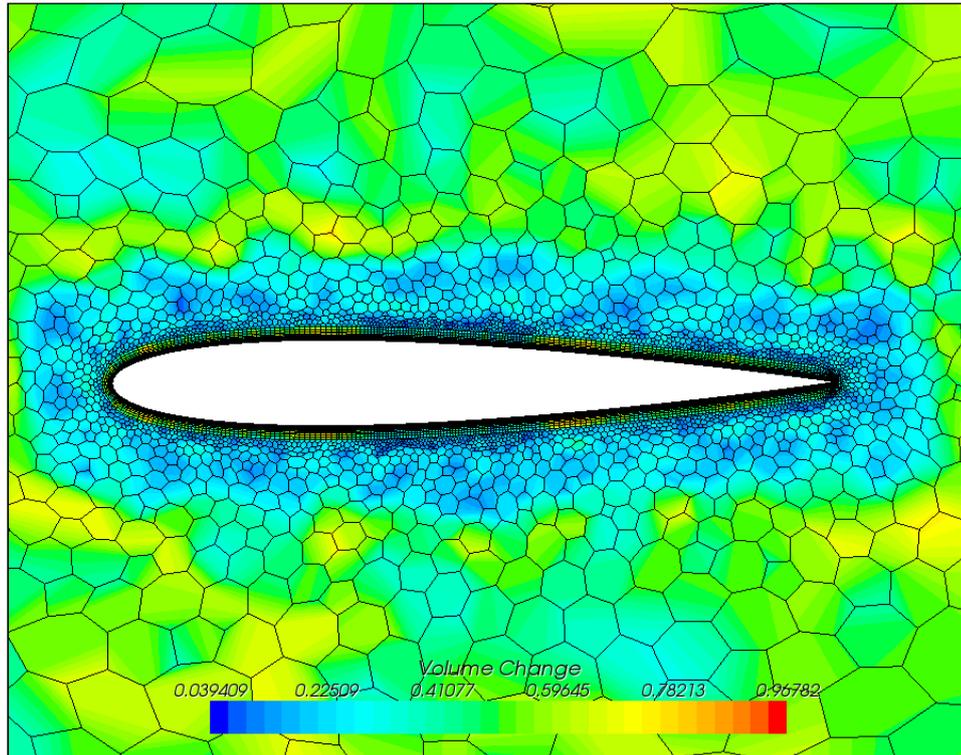


Figura 7.1.5d - Indicador de razão de variação dos volumes, malha “C”.

## 7.2 Malha estruturada de células quadrilaterais e geração hiperbólica

Ao modelo físico OAT15A geometricamente descrito pela Tab. (A.1), foi aplicada a topologia de tipo “O” (“O-Mesh”) com distribuição hiperbólica de nós, Fig. 7.2.1.

Justifica-se a utilização dessa topologia em malhas estruturadas:

- Pela natureza do fenômeno físico, cujas equações diferenciais parciais regentes possuem como soluções isossuperfícies que podem ser empregadas como superfícies coordenadas [Maliska, 2004];
- Thompson [1984] relata melhores resultados obtido com distribuição hiperbólica de nós, dentro e fora da camada limite;
- Rivers et al. [2008] sustentam que com essa topologia obtêm-se resultados numéricos melhor aproximados dos resultados experimentais.

Sob o ponto de vista construtivo, a geração de malhas de mesma distribuição de nós, mas com diferentes posições do contorno onde o escoamento é livre, é facilitada e favorece o emprego da metodologia de verificação no estudo de dependência de malha.



Figura 7.2.1 – Topologia “O-Mesh” (sem escala).

A malha estruturada foi obtida com o emprego do software comercial Pointwise, versão 16.02R3. Essa malha, de células quadrilaterais, é gerada por extrusão normal hiperbólica a partir das paredes impermeáveis e sem deslizamento de uma seção de corda  $c = 0.15$  m do aerofólio OAT15A. Na extrusão hiperbólica, as paredes do aerofólio são aproximadas por um número discreto de pontos formando uma curva base a partir da qual a marcha construtiva avança até que  $N_{\Gamma_i}$  camadas sucessivas sejam obtidas definindo o contorno externo cuja condição é escoamento livre. As faces laterais das células quadrilaterais são as retas ortogonais à curva base e que passam por todos os pontos que a definem. Esse procedimento, descrito por Lal et al. [2001], é a seguir reproduzido.

Considere-se uma curva base  $\Gamma_i$  discretizada pelos pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$  (Fig. 7.2.2). No ponto  $b$ ,  $\mathbf{bm}$  e  $\mathbf{bn}$  são vetores unitários normais aos segmentos  $ab$  e  $bc$  respectivamente. A normal no ponto  $b$  coincide com o vetor raio  $\mathbf{bo}$  cuja direção é a bissetriz do triângulo formado pelos pontos  $m$ ,  $b$  e  $n$ . As coordenadas dos pontos  $m$ ,  $n$  e  $o$  das retas normais são obtidas pelas seguintes equações:

$$(x_m, y_m) = [(x_b l_{ab}^i - y_b + y_a) / l_{ab}^i, (y_b l_{ab}^i + x_b - x_a) / l_{ab}^i] \quad (7.2.1)$$

$$(x_n, y_n) = [(x_b l_{bc}^i + y_b - y_c) / l_{bc}^i, (y_b l_{bc}^i - x_b + x_c) / l_{bc}^i] \quad (7.2.2)$$

$$(x_o, y_o) = [(x_m + x_n) / 2, (y_m + y_n) / 2] \quad (7.2.3)$$

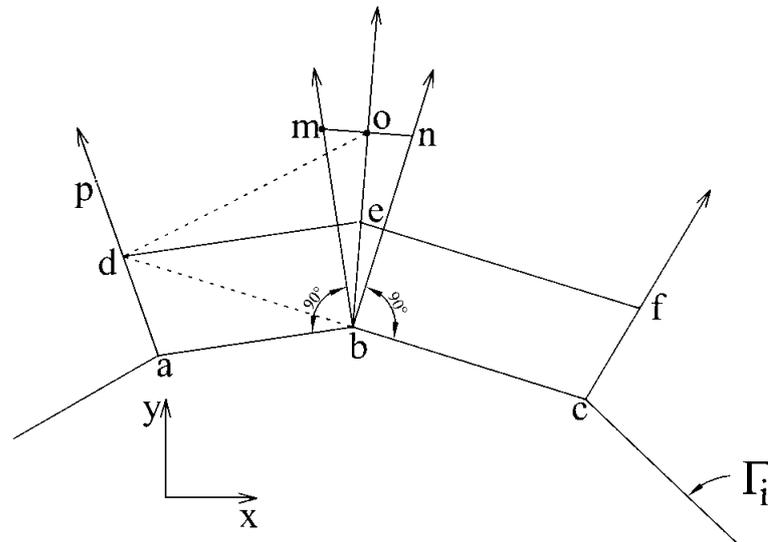


Figura 7.2.2 – Diagrama de pontos para geração de malha hiperbólica. [Lal et al., 2001].

Nas equações (7.2.1) e (7.2.2),  $l_{ab}^i$  e  $l_{bc}^i$  são os comprimentos das arestas  $ab$  e  $bc$  respectivamente sobre a curva base  $\Gamma_i$ .

Para construir uma célula sobre, digamos, a aresta  $ab$ , são necessárias as coordenadas dos pontos “a”, “b”, “d” e “o” e de uma área prescrita,  $A_{abed}$ . Essa área é obtida pela Eq. (7.2.4) com a prescrição de um fator de ponderação  $\varepsilon$  aos comprimentos da aresta  $ab$  nas curvas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_i$ .

$$A_{abed} = [l_{ab}^i \varepsilon + l_{ab}^1 (1 - \varepsilon)] h_i \quad (7.2.4)$$

Na Eq. (7.2.4)  $h_i$  é a distância entre duas curvas adjacentes (i.e., a altura da célula) cujo valor inicial é prescrito e os seguintes obtidos por aplicação de uma razão de crescimento  $r_h$ , i.e.,  $h_{i+1} = r_h h_i$ . O valor de  $\varepsilon$  varia entre 0 e 1 e controla a distribuição do tamanho das células no domínio. O ponto  $e$  é um dos vértices da célula de área  $A_{abed}$  e corresponde ao ponto  $b$  da curva base  $\Gamma_i$ . Enquanto as coordenadas do ponto  $o$  são calculadas com as

equações (7.2.1) a (7.2.3), as coordenadas do ponto  $d$  são obtidas durante a formação da célula na aresta  $ab$  precedente. Das propriedades dos triângulos  $dbe$  e  $dbo$  na Fig. (7.2.2), a razão entre as áreas  $A_{dbe}$  e  $A_{dbo}$  é igual à razão dos comprimentos  $l_{be}$  e  $l_{bo}$ . Assim, as coordenadas do ponto  $e$  são estimadas pela Eq. (7.2.5):

$$(x_e, y_e) = [fx_0 + (1-f)x_b, fy_0 + (1-f)y_b] \quad (7.2.5)$$

Na Eq. (7.2.5),  $f = l_{be} / l_{bo} = A_{dbe} / A_{dbo} = (A_{abed} - A_{abd}) / A_{bod}$ . As coordenadas dos pontos obtidos pela Eq. (7.2.5) são calculadas de forma repetitiva (tipicamente cinco iterações) para evitar distorções no alinhamento das arestas das células pertencentes a uma mesma curva.

A aplicação dessa formulação para geração de malha é a seguir exemplificada, aplicada ao Caso 11 da Tab. (3.2). Os valores de referência e condições de contorno são apresentados na Tab. (7.2.1). As condições de fronteira aplicadas ao modelo físico OAT15A são paredes sem deslizamento e escoamento livre no contorno.

Tabela 7.2.1 – Valores de referência e condições de contorno, Caso 11.

Valores de referência			
$p_0$ [Pa]	$T_0$ [K]	$\rho_0$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\mu_0$ [Pa.s]
101325	300	1.1772	1.4793E-5

Condições de contorno						
Caso	$\alpha$	$T_\infty$ [K]	$c_\infty$ [m/s]	$M_\infty$	$U_\infty$ [m/s]	$Re_c$
11	1.15°	300	347.1282	0.724	251.3208	3E6

Vassberg et al. [2007] recomendam  $y^+ \leq [1 \ 2/3 \ 4/9 \ 8/27]$ , da malha mais grosseira a mais refinada respectivamente. Adotando-se neste exemplo  $y^+ = 4/9 \cong 0.45$ , a altura da primeira camada de células  $h_1$  é obtida pela Eq. (A.9) onde o comprimento  $L$  foi substituído pela corda geométrica  $c$  e o número de Reynolds de acordo com o do Caso 11 da Tab. (3.2):

$$h_1 = 5.1988Cy^+cRe_c^{-9/10} = 5.1988 \cdot 1.7391 \cdot 0.45 \cdot 0.15 \cdot (3E6)^{-9/10} = 8.8379E-7 \text{ m}$$

Deve-se observar que no resultado acima o coeficiente de ajuste  $C = 1.7391$  foi obtido nas simulações conduzidas durante o estudo de dependência de malha e que o valor  $y^+ = 0.45$  foi o limite inferior para que o jacobiano da malha no bordo de fuga não se tornasse zero ou negativo. O coeficiente  $C$  é constante para um mesmo caso (condições iniciais e ângulo de ataque) e não depende da discretização (número de nós) do domínio ou da distância ao contorno onde o escoamento é livre.

Prescrevendo-se à distância adimensionalizada pela corda geométrica  $FF$  das paredes da seção do aerofólio ao contorno (onde o escoamento é livre) e uma razão inicial de crescimento na altura das células  $r_h$ , é possível calcular de forma iterativa um número inteiro de passos na marcha construtiva hiperbólica  $N_{\Gamma_i}$  mediante emprego da Eq. (7.2.6):

$$N_{\Gamma_i} = \frac{\ln \left[ \frac{FF \cdot c - h_1}{r_h h_1} (r_h - 1) + 1 \right]}{\ln r_h} + 1 \quad (7.2.6)$$

A equação anterior é uma modificação da Eq. (A.13). Utilizando  $r_h = 1.2 \leq 1.25$  [Vassberg et al., 2009] como aproximação inicial,  $FF = 50$  e  $h_1 = 8.8379\text{E-}7$  m, obtém-se com o uso da Eq. (7.2.6) uma primeira estimativa para  $N_{\Gamma_i}$ :

$$N_{\Gamma_i} = \frac{\ln \left[ \frac{50 \cdot 0.15 - 2 \cdot 8.8379\text{E-}7}{1.2 \cdot 8.8379\text{E-}7} (1.2 - 1) + 1 \right]}{\ln 1.2} + 1 = 78.677$$

O valor  $N_{\Gamma_i} = 78.677$  é arredondado como  $N_{\Gamma_i} = 78$  para que de forma iterativa determine-se um novo valor para  $r_h$ . Resolvendo a Eq. (7.2.6) para  $N_{\Gamma_i} = 78$ ,  $h_1 = 8.8379\text{E-}7$  m e mantido prescrito  $FF = 50$ , obtemos  $r_h = 1.20205$ .

A espessura da camada limite é estimada pela Eq. (A.10):

$$\delta_{CL,t} = \frac{0.37L}{\text{Re}_L^{1/5}} = \frac{0.37c}{\text{Re}_c^{1/5}} = \frac{0.37 \cdot 0.15}{(3\text{E}6)^{1/5}} = 2.8110\text{E-}3 \text{ m}$$

O número de camadas de células que abrangem a região viscosa é obtido diretamente pela Eq. (A.13):

$$N_{CL} = \frac{\ln \left[ \frac{\delta_{CL,t}}{h_1} (r_h - 1) + 1 \right]}{\ln r_h} = \frac{\ln \left[ \frac{2.8110E-3}{8.8379E-7} (1.20205 - 1) + 1 \right]}{\ln 1.20205} = 35.1421$$

O resultado acima indica que ao menos 35 camadas das 78 requeridas para posicionar o escoamento livre a 50 cordas das paredes da seção do aerofólio correspondem à região viscosa. Diferentemente do caso para malha não estruturada, não há descontinuidade ou transição entre os volumes dentro e fora da região sujeita aos efeitos viscosos, uma vez que a malha é construída com uma razão de crescimento  $r_h$  constante das paredes da seção até o contorno onde o escoamento é livre.

A determinação da quantidade de células na malha inicial (a mais grosseira) é um julgamento de engenharia. Esse se baseia nos requerimentos da metodologia de verificação (devido à escolha do número de malhas para cálculo do índice de convergência GCI e dos valores extrapolados pela metodologia de Richardson), nos recursos computacionais disponíveis e na literatura. No estudo de convergência, são adotadas três malhas para que seja possível o uso do fator de segurança menos conservativo, implicando em  $F_s = 1.25$ . Uma razão de refinamento não inteira entre malhas  $r_{ref} = 1.5$  é um compromisso intermediário entre os recursos computacionais e a metodologia da extrapolação de Richardson, onde as malhas mais grosseiras são obtidas pela remoção de pontos alternados a partir da malha mais refinada (o que resultaria em  $r_{ref} = 2$  e um número excessivamente grande de células nessa malha). Considerando-se ainda uma aproximação inicial cujo número de células utilizado seja intermediário entre as aproximações utilizadas por Bigarella e Azevedo [2007] e Thiery e Coustols [2005] em modelo físico e condições de escoamento similares, obtém-se os parâmetros construtivos descritos na Tab. (7.2.2) para a malha estruturada com geração hiperbólica aplicada ao Caso 11 do modelo físico OAT15A:

Tabela 7.2.2 – Parâmetros construtivos da malha estruturada, Caso 11.

$r_{ref}$	LE-TE	TE-FF	TE	FF	Células	$N_{CL}$	$r_h$	Nós	$ \mathbf{ds} _{LE,3}$	$ \mathbf{ds} _{TE,3}$
1.5	181	81	25	50	384 x 80	36	1.2	31347	2.2500E-4	3.1228E-5

Na Tab. (7.2.2), “LE-TE” é o número de pontos entre o bordo de ataque e o bordo de fuga. “TE-FF” é o número de pontos entre a posição mediana da linha que define o bordo de fuga e a fronteira do escoamento livre. Esse comprimento caracteriza a distância das paredes da seção ao contorno de topologia “O” cujo exterior é região onde o escoamento é livre. Essa linha liga o bordo de fuga à fronteira do domínio na Fig. (7.2.1). “TE” é o número de pontos que discretiza o bordo de fuga e *FF* à distância das paredes da seção ao contorno onde o escoamento é livre, adimensionalizada pela corda. O total de células (direção do escoamento versus direção ortogonal ao escoamento) é indicado sob “Células”. O número de camadas de células dentro da camada limite é indicado sob  $N_{CL}$ . A razão de crescimento entre as alturas das células é indicada sob  $r_h$  e o número total de pontos da malha por “Nós”.

Um aspecto importante é o agrupamento de nós no extradorso e intradorso do aerofólio junto aos bordos de fuga e de ataque (“clustering”). No bordo de ataque da malha intermediária Vassberg et al. [2007] sugerem um espaçamento inicial entre nós  $|\mathbf{ds}|_{LE,2}$  equivalente a 0.1% da corda, ou seja:

$$|\mathbf{ds}|_{LE,2} = 0.001c = 0.001 \cdot 0.15 = 1.5E-4 \text{ m.}$$

Neste exemplo, onde adotamos a malha menos refinada como aproximação inicial, esse valor deverá ser maior por um fator  $r_{ref}$ . Assim, onde os subscritos 2 e 3 indicam a malha intermediária e a malha menos refinada respectivamente. obtém-se:

$$|\mathbf{ds}|_{LE,3} = |\mathbf{ds}|_{LE,2} r_{ref} = 1.5E-4 \cdot 1.5 = 2.2500E-4 \text{ m.}$$

Da Tab. (A.1) é obtida a espessura do bordo de ataque, sendo essa o módulo da diferença entre os valores de  $y$  para os pontos nº 300 e nº 1 ( $y_{300}$  e  $y_1$  respectivamente), onde  $x = c = 0.15$  m. Essa espessura dividida pelo número prescrito de células no bordo de fuga para a malha menos refinada (24, o dobro do mínimo sugerido por Vassberg et al. [2007]) é então calculada e utilizada como o parâmetro de agrupamento inicial no extradorso e intradorso junto ao bordo de fuga,  $|\mathbf{ds}|_{TE,3}$ :

$$|ds|_{TE,3} = \frac{|y_{300} - y_1|}{24} = \frac{|0.0003750 - (-0.0003745)|}{24} = 3.1228E-5 \text{ m.}$$

A expressão “inicial” é aqui empregada no sentido de que a distribuição dos pontos ou vértices das células sobre as curvas primitivas (as paredes do aerofólio) é calculada a partir do número de pontos a distribuir (“LE-TE” e “TE-FF”), dos parâmetros de agrupamento inicial e da escolha de uma função de distribuição. O software Pointwise versão 16.02R3 sugere como padrão de função de distribuição a tangente hiperbólica, adotada neste exemplo. No bordo de fuga a distribuição de nós é linear com espaçamento igual a  $|ds|_{TE,3}$ .

A Fig. (7.2.3) apresenta o resultado final da aplicação dos parâmetros construtivos de acordo com a Tab. (7.2.2) na criação de uma malha hiperbólica de topologia “O” com a posição do contorno localizado a 50 cordas de qualquer ponto nas paredes do aerofólio.

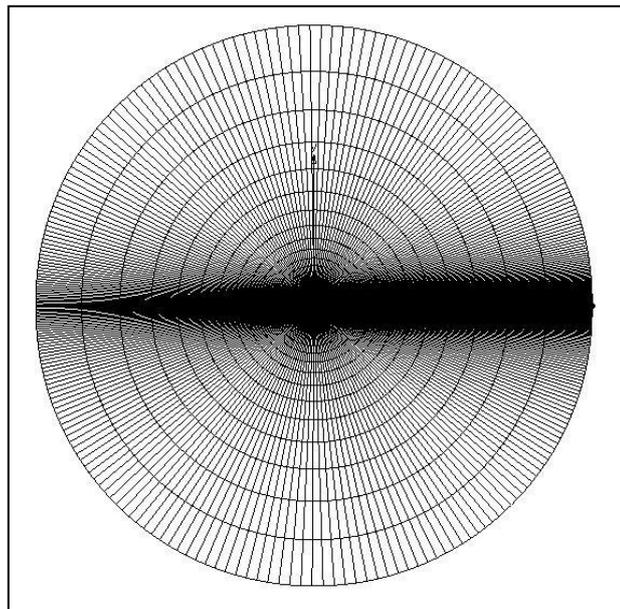


Figura 7.2.3 - Malha hiperbólica de topologia “O”,  $FF = 50$ .

A Fig. (7.2.4) apresenta a distribuição de nós nas paredes do aerofólio. Nessa figura, o caráter hiperbólico da malha pode ser claramente observado na curvatura das linhas onde a ortogonalidade é na medida do possível preservada. Na Fig. (7.2.5), o agrupamento de nós no bordo de ataque é observável, assim como a razão de crescimento das células dentro da camada limite a partir das paredes.

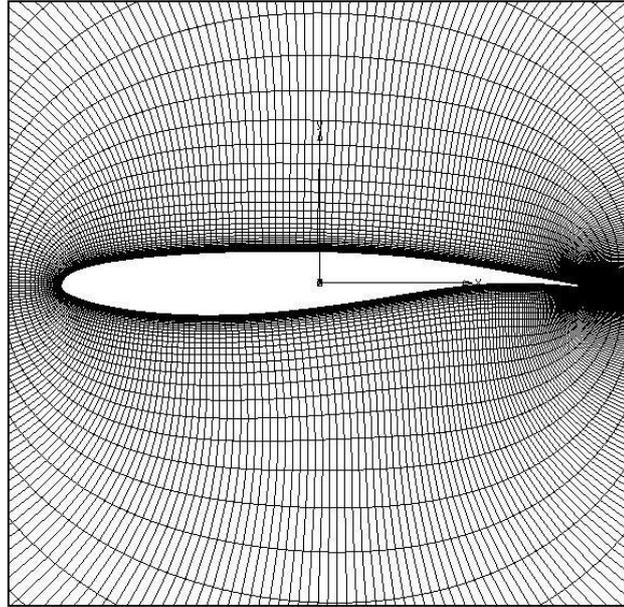


Figura 7.2.4 - Distribuição de nós nas paredes do aerofólio.

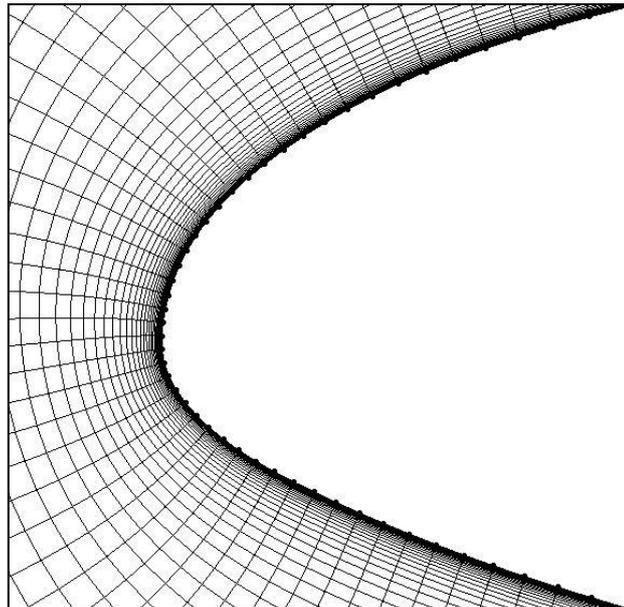


Figura 7.2.5 - Agrupamento de nós no bordo de ataque.

A Fig. (7.2.6) apresenta em detalhe a discretização do bordo de fuga e a solução de continuidade entre as curvas do extradorso, intradorso e bordo de fuga. Em todas as figuras, as regiões escurecidas indicam concentração de linhas ou de nós.

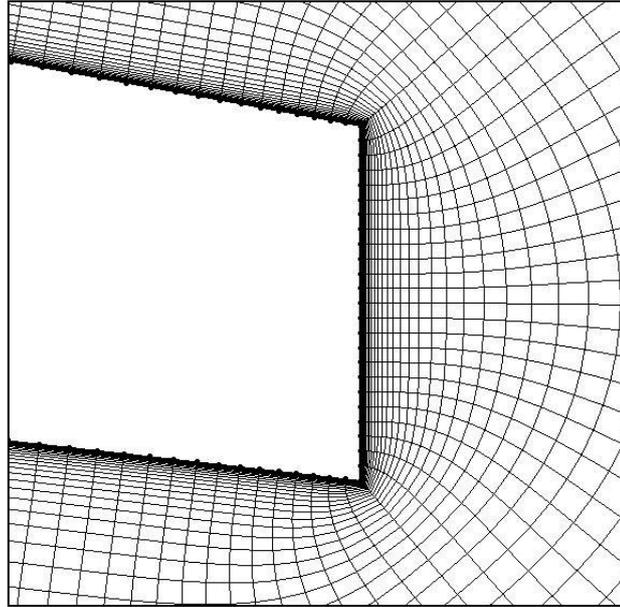


Figura 7.2.6 - Discretização do bordo de fuga.

A Fig. (7.2.7) apresenta o indicador de razão de variação dos volumes nas regiões adjacentes às paredes da seção com melhor resultado se comparado com o obtido para o caso da malha não estruturada, Fig. (7.1.5d). A unidade é o volume perfeito, i.e., um cubo.

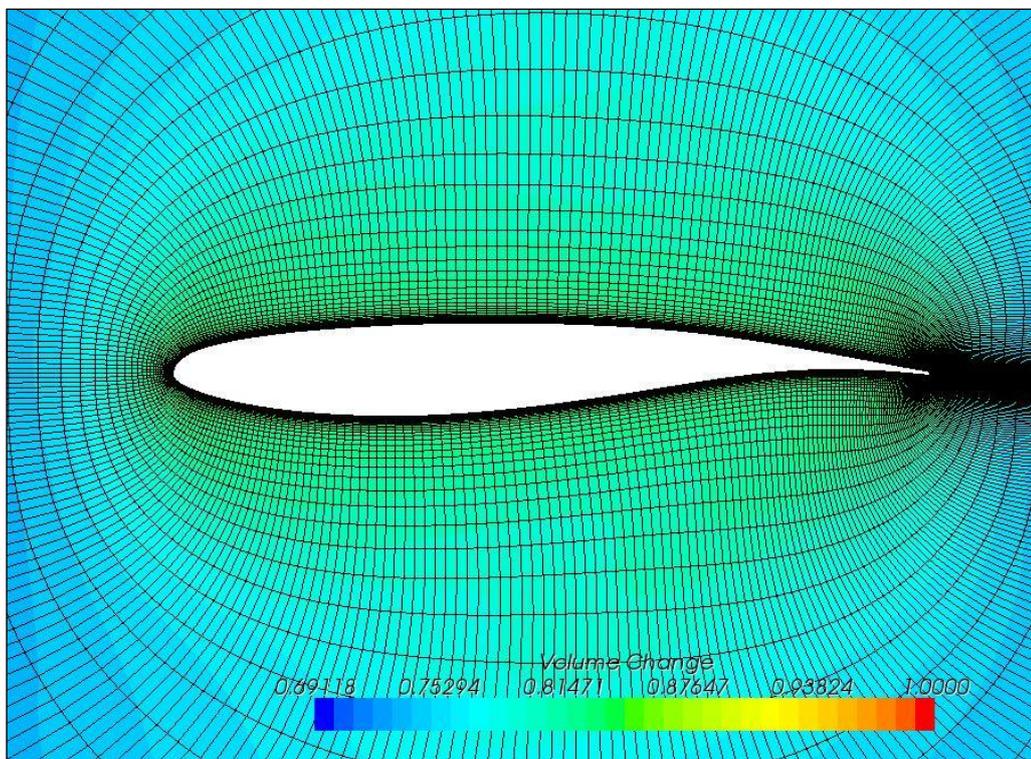


Figura 7.2.7 - Indicador de razão de variação dos volumes, Caso 11 OAT15A.

## 8 ESTUDO DE DEPENDÊNCIA DE MALHA

### 8.1 NACA 0012

No estudo de dependência de malha para escoamentos sobre seções NACA 0012, são aplicadas as metodologias de verificação e de geração de malhas estruturadas e não estruturadas descritas nos capítulos 6 e 7 respectivamente. O objetivo desse estudo é avaliar o comportamento numérico do coeficiente de arrasto de acordo com o nível de refinamento para determinação da malha de trabalho. Para tanto, três níveis de refinamento são utilizados onde prefixos “C”, “M” e “F” referem-se à malha menos refinada, a malha intermediária e à malha mais refinada respectivamente. Em todas as simulações, a posição em  $x$  adimensionalizada pela corda  $x_t / c$  da transição do escoamento ao regime turbulento foi prescrita, de acordo com a Tab. (3.1). Para esse estudo de dependência de malha, os valores de referência e propriedades do ar adotadas são apresentados na Tab. (8.1.1):

Tabela 8.1.1 – Valores de referência e propriedades do ar, modelo NACA 0012.

Valores de referência			<i>Propriedades do ar (constantes)</i>		
$p_0$ [Pa]	$T_0$ [K]	$\rho_0$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\mu_0$ [Pa.s]	$Pr_t$	$C_p$ [J/kg K]
101325	288	1.225	1.8551E-5	0.9	1003.62

A Tab. (8.1.2) apresenta as condições iniciais e de contorno empregadas nas simulações onde o modelo de turbulência  $k-\omega$ /SST é adotado. Nessa tabela,  $p_{rel}$  é a pressão relativa à pressão de referência  $p_0$ .  $T_{est}$  é uma temperatura estática,  $c_\infty$  e  $M_\infty$  são a velocidade do som e o número de Mach do escoamento livre calculados para  $T_{est}$ ,  $Re_c$  é o número de Reynolds relativamente à corda  $c$ ,  $\mu_t / \mu_0$  a razão entre as viscosidades turbulenta e de referência e  $I$  a intensidade de turbulência do escoamento livre.  $U_\infty$  é a velocidade escalar do escoamento livre. As paredes são consideradas impermeáveis, adiabáticas e sem deslizamento. Para  $x/c \leq x_t/c$ , o escoamento é considerado laminar sobre as paredes com o intuito de reproduzir no modelo numérico as condições experimentais onde o escoamento turbulento é induzido por arame de tropeço posicionado em  $x_t$ .

Tabela 8.1.2 – Condições iniciais e de contorno das malhas, modelo NACA 0012.

Caso	Fig.	Contorno	$T_{est}$ [K]	$c_\infty$ [m/s]	$M_\infty$	$U_\infty$ [m/s]	$Re_c$	$p_{rel}$	$\mu_t / \mu_0$	$I$	$x_t / c$	
B3-6	8.1.1	Veloc. prescrita	288	340.1148	0.223	75.7184	3.00E6		10	0.01		
		Pressão de saída	288					0.0	10	0.01		
		Paredes s/desliz.	Adiab.									5%
		Simetria										
C12	8.1.2	Veloc. prescrita	288	340.1148	0.160	54.5166	2.88E6		10	0.01		
		Pressão de saída	288					0.0	10	0.01		
		Paredes s/desliz.	Adiab.									5%, 43%
O200	8.1.3	Veloc. prescrita	288	340.1148	0.160	54.5166	2.88E6		10	0.01		
		Pressão de saída	288					0.0	10	0.01		
		Paredes s/desliz.	Adiab.									5%, 43%

Os valores iniciais e no contorno da energia cinética turbulenta  $k$  e da taxa de dissipação específica  $\omega$  são estimados a partir de  $U$  e  $I$  com emprego das equações (8.1.1) e (8.1.2) respectivamente:

$$k \approx \frac{3}{2}(IU)^2 \quad (8.1.1)$$

$$\omega \approx \frac{\rho_0 k}{(\mu_t / \mu_0) \mu_0} \quad (8.1.2)$$

Na Fig. (8.1.1), a linha tracejada indica o plano onde a pressão é prescrita. Os planos pontilhados são de simetria e a linha sólida é o contorno onde a velocidade é prescrita. A posição onde ocorre à transição do escoamento ao regime turbulento é indicada pela linha tracejada junto à seção do aerofólio. Essa posição corresponde a 5% da corda ou  $x_t / c = 5\%$ .

Na Fig. (8.1.2), a linha sólida que forma o “C” é o contorno onde a velocidade é prescrita. O plano vertical demarcado pela linha tracejada é o plano onde a pressão é prescrita. Ao caso “C12” duas posições de transição são aplicadas, a 5% e 43% da corda.

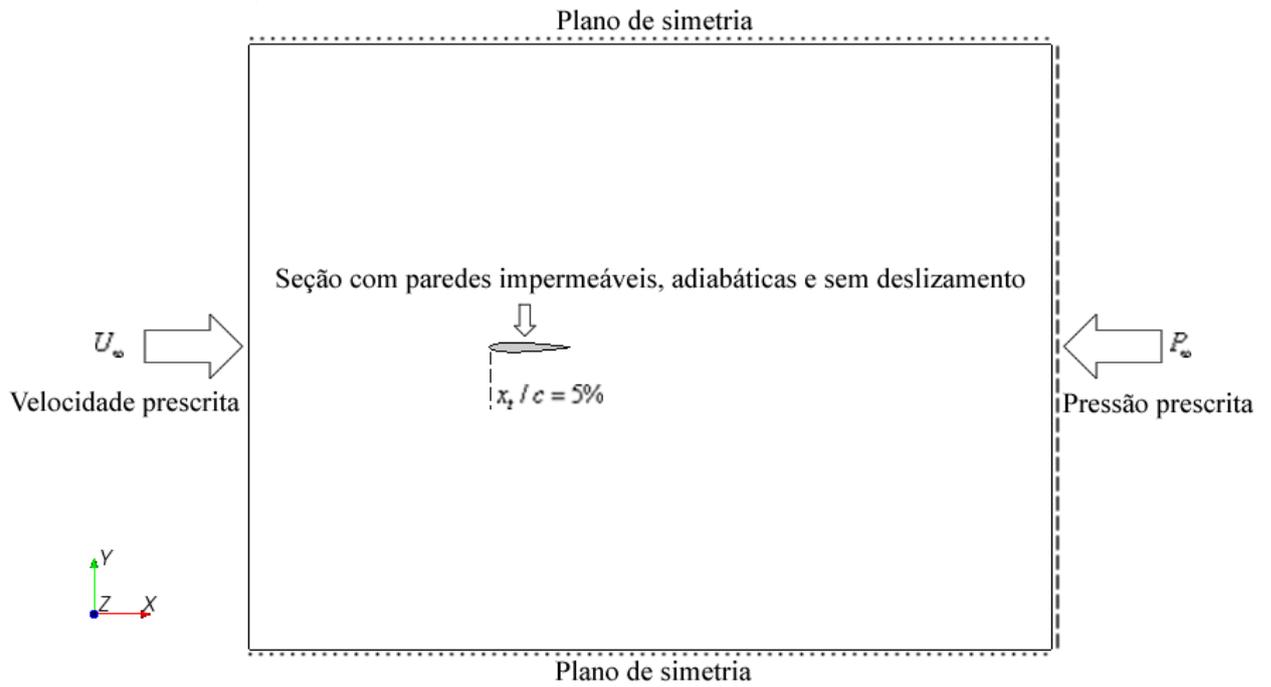


Figura 8.1.1 – Condições de contorno, Caso B3-6, NACA 0012.

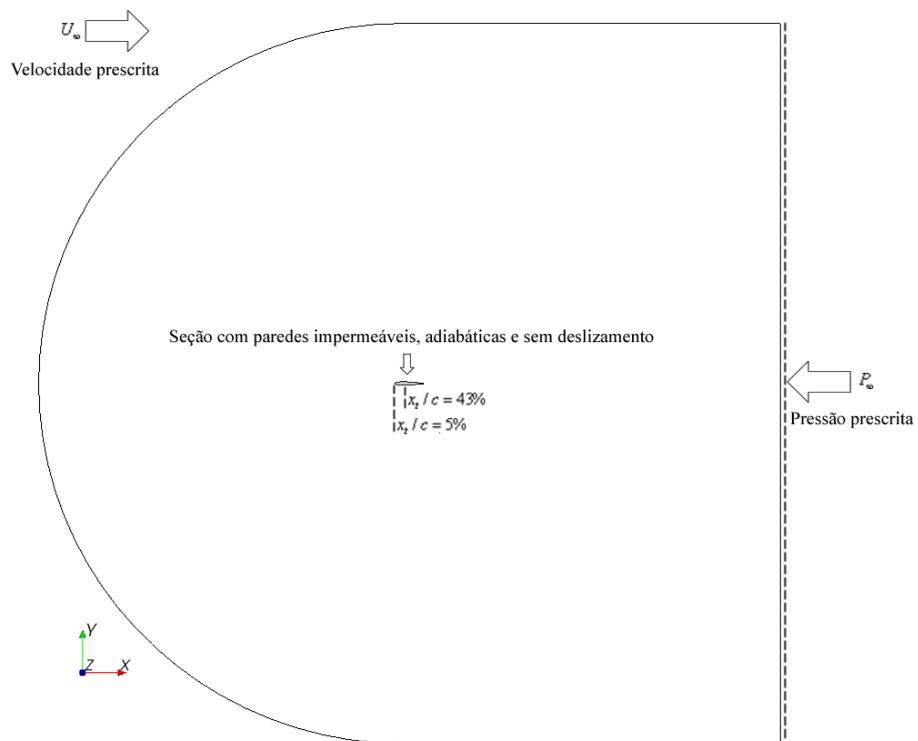


Figura 8.1.2 – Condições de contorno, Caso C12, NACA 0012.

Na Fig. (8.1.3), a linha tracejada central divide o contorno “O” em duas regiões. À esquerda da linha, a velocidade é prescrita. À direita, a pressão é prescrita. A seção do aerofólio não está representada em escala devido à posição do contorno estar situada a 200 cordas do bordo de ataque. Como no modelo anterior, duas posições de transição ao escoamento turbulento são simuladas, a 5% e a 43% da corda.

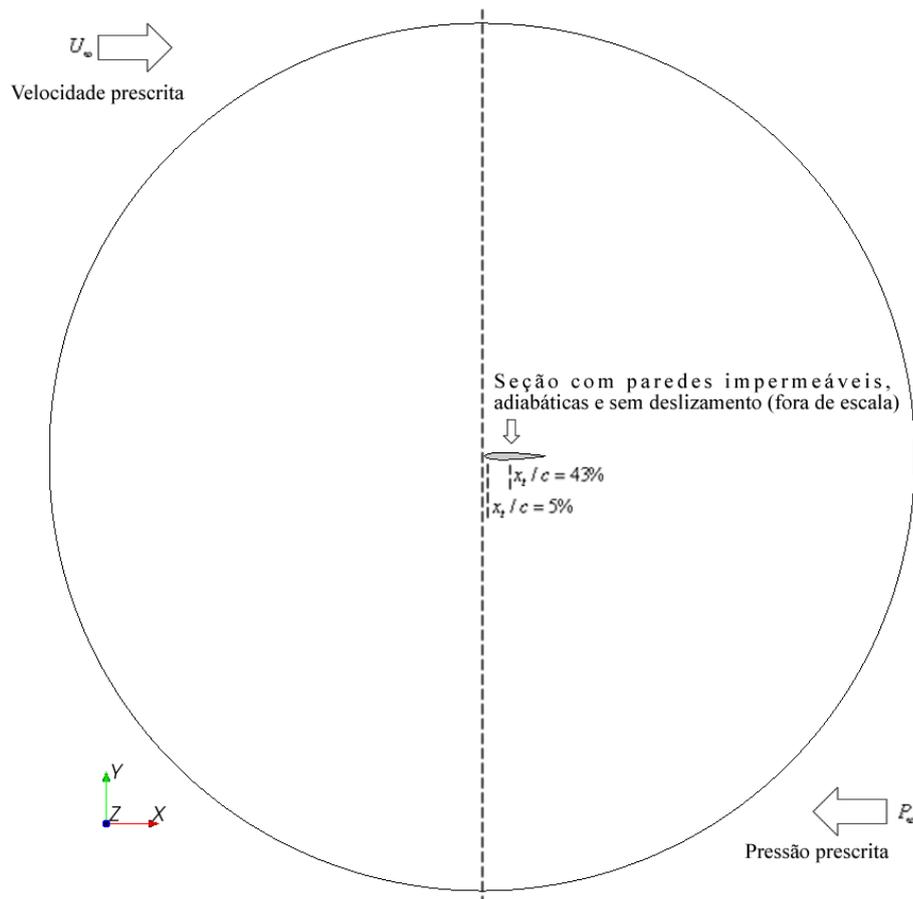


Figura 8.1.3 – Condições de contorno, Caso O200, NACA 0012.

A metodologia de geração de malha não estruturada de volumes poliédricos cujos parâmetros construtivos foram apresentados nas tabelas (7.1.2) e (7.1.3) foi aplicada ao caso B3-6, gerando malhas com características descritas na Tab. (7.1.4). Prescrevendo-se  $y^+ = 0.1$ ,  $r_{ref} \cong 1.44$  e  $BS = 0.24$  m (40% da corda) para a malha mais refinada, obtemos de acordo com essa metodologia  $h_1 = 8.0346E-7$  m e  $\delta_{CL,t} = 1.1244E-2$  m.

As condições de referência, iniciais e de contorno, tabelas (8.1.1) e (8.1.2) respectivamente, são empregadas como parâmetros de entrada na metodologia numérica de

solução segregada do Star-CCM+, onde as equações para conservação de momentum e pressão são resolvidas de forma independente entre si sendo o acoplamento de pressão-velocidade obtido por um arranjo do tipo Rhie-e-Chow combinado com o algoritmo SIMPLE. O modelo de turbulência empregado é o  $k-\omega/SST$  *Low Reynolds* cuja formulação é descrita no capítulo 4, seção 3.

A Tab. (8.1.3) apresenta os resultados quanto ao esforço computacional para três níveis de refinamento (onde a Malha “F” é a mais refinada).

Tabela 8.1.3 – Resultados quanto ao esforço computacional, Caso B3-6, NACA 0012.

#	Malha	Steps	Norm.	CPU/Step	Norm.	$y^+$ Máx.
1	C	1400	REF.	0.422	REF.	< 0.12
2	M	2000	1.4 x	0.864	2.0 x	< 0.12
3	F	4000	2.9 x	1.877	4.5 x	< 0.12

A Tab. (8.1.4) demonstra os resultados obtidos para o coeficiente de arrasto  $c_d = c_{d,p} + c_{d,v}$  expresso em “drag counts” (onde 1 drag count = 1E-4) para cada nível de refinamento, onde as parcelas correspondentes à pressão ( $c_{d,p}$ ) e atrito viscoso ( $c_{d,v}$ ) são apresentadas separadamente. O índice de convergência de malha GCI é obtido entre a malha intermediária (“M”) e a mais refinada (“F”) com uso da Eq. (6.2). Nessa equação, a ordem observada de convergência do método  $p_{obs}$  foi obtida com auxílio da equação (6.5) onde  $r_{12} = r_{efet}$  é obtido pela Eq. (6.6). A variação percentual de  $c_d$  é calculada relativamente ao valor extrapolado (correspondente à malha “FM”) obtido pela Eq. (6.1). O valor na última coluna da Tab. (8.1.4) aplica-se à malha mais refinada e é obtido dividindo-se  $\alpha_{GCI}$  da Eq. (6.4) por  $r_{efet}^{p_{obs}}$ . Valores próximos à unidade indicam que a malha está dentro da região de convergência assintótica [Roache, 1998].

Tabela 8.1.4 – Coeficiente de arrasto  $c_d$ ,  $x_t / c = 5\%$ , Caso B3-6, NACA 0012.

Malha	$c_{d,p}$	$c_{d,v}$	$c_d$	$\Delta\% c_d$	GCI % $c_d$	$\alpha_{GCI} / r_{efet}^{p_{obs}}$
C	25.3	73.0	98.3	1.77		1.0258
M	23.1	74.1	97.2	0.68	0.8715	
F	22.2	74.7	96.8	0.27	0.3336	
FM	21.6	75.0	96.6			

A ordem observada de convergência do método utilizada na Tab. (8.1.4) é  $p_{obs} = 2.6296$ , obtida iterativamente com uso da Eq. (6.5) e das razões efetivas de refinamento  $r_{efet}$  da Tab. (7.1.4). Considerando uma banda de erro de 0.3336 % no entorno do valor extrapolado,  $c_d = 96.6$ , e um esforço computacional moderado relativamente à malha intermediária “M”, a malha “F” é candidata à malha de trabalho para as simulações do caso B3-6.

A Fig. (8.1.4) representa a malha “F” do Caso B3-6. As figuras (8.1.5) e (8.1.6) apresentam a camada limite junto aos bordos de ataque e bordo de fuga respectivamente. A Fig. (8.1.7) apresenta a razão de variação de volume para a malha “F” do caso B3-6.

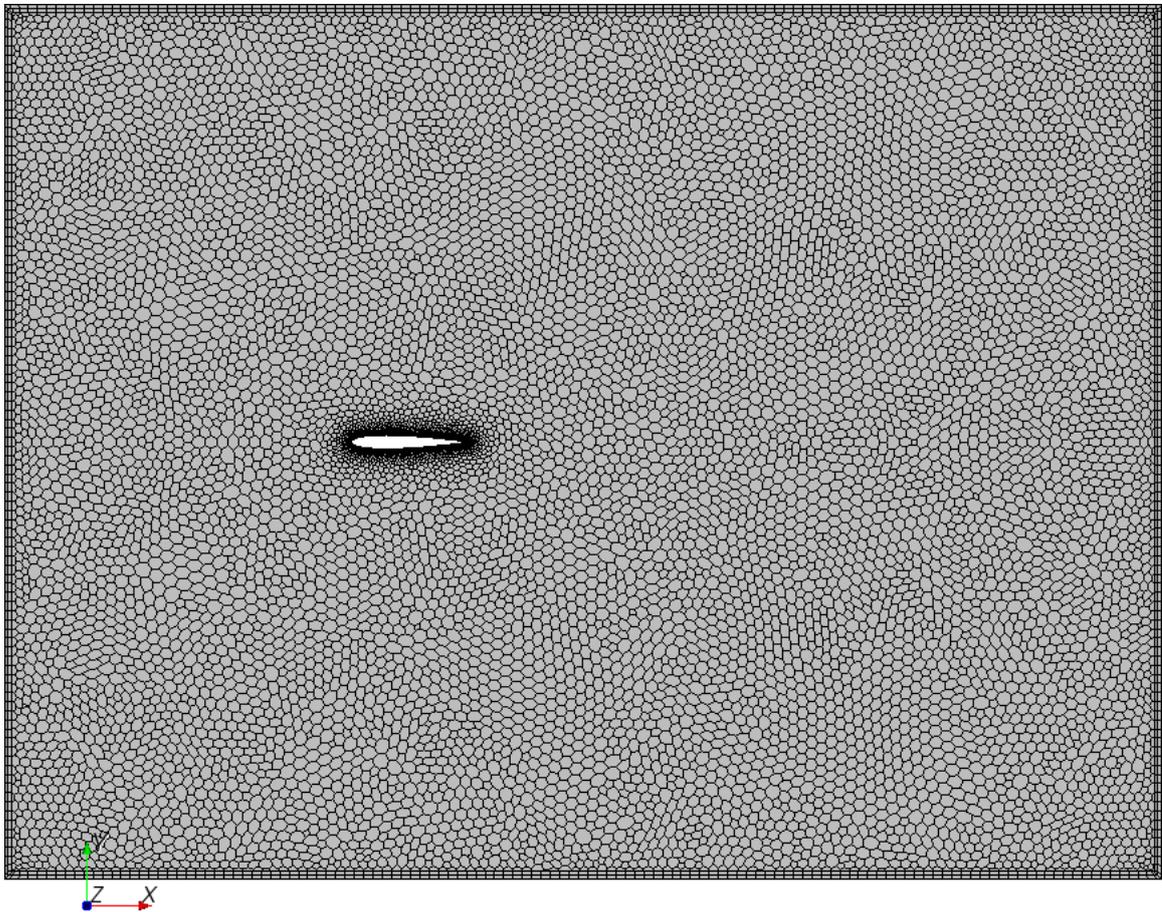


Figura 8.1.4 – Malha não estruturada poliédrica “F”, caso B3-6, NACA 0012.

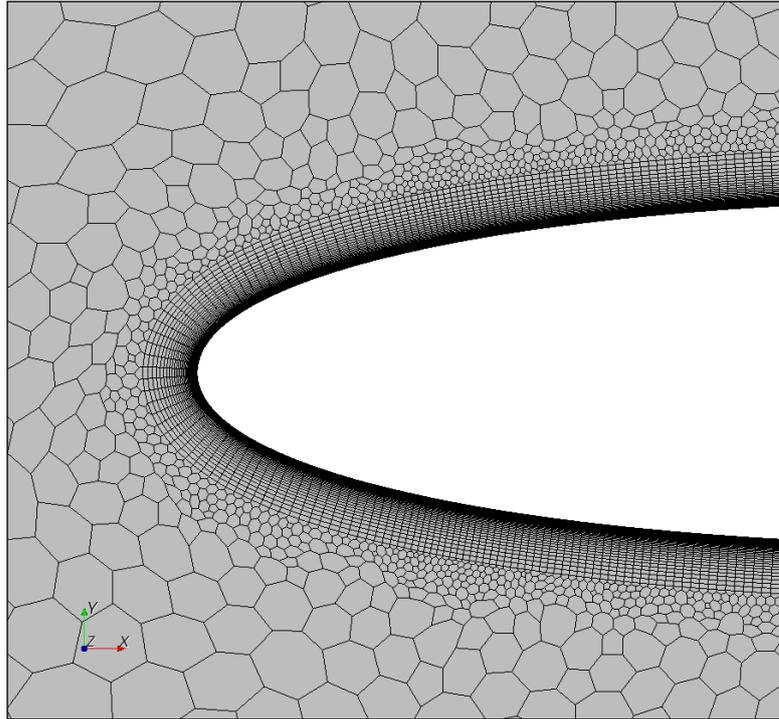


Figura 8.1.5 – Bordo de ataque, malha “F”, caso B3-6, NACA 0012.

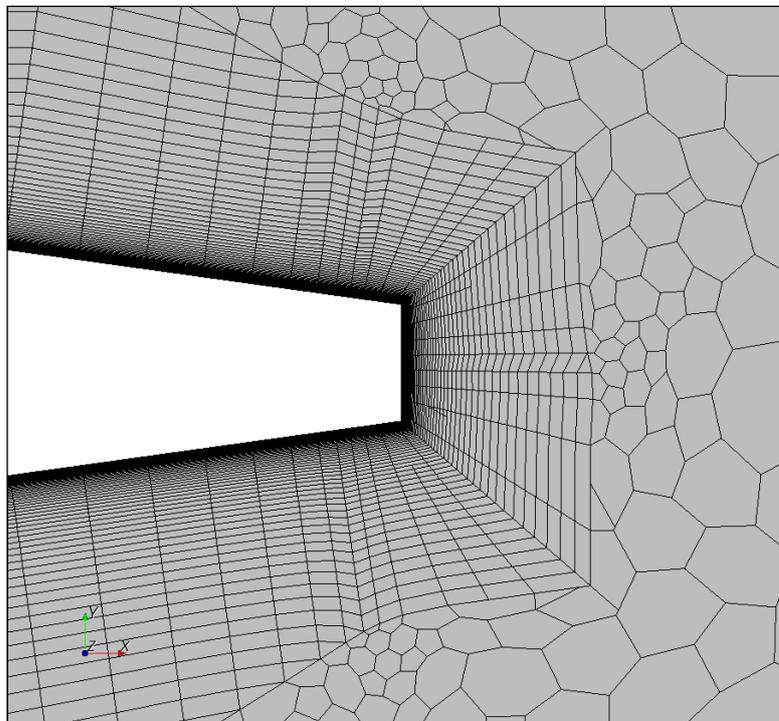


Figura 8.1.6 – Bordo de fuga, malha “F”, caso B3-6, NACA 0012.

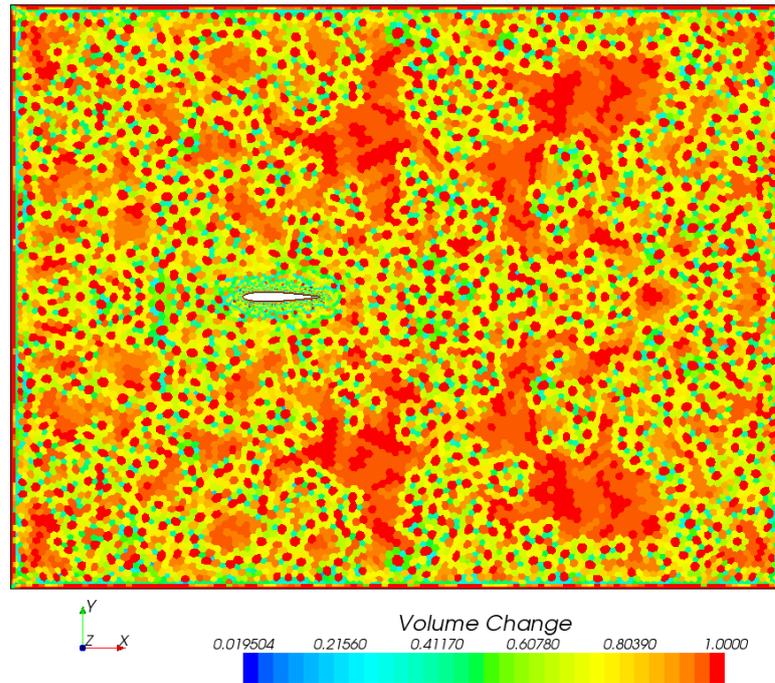


Figura 8.1.7 - Razão de variação de volume para a malha “F” do Caso B3-6

O Caso C12 adota uma malha poliédrica não estruturada aplicada a um modelo NACA 0012 de corda  $c = 0.8$  m. As proporções  $|\mathbf{ds}|$  em percentual da dimensão base BS são aquelas apresentadas na Tab. (7.1.2). Os parâmetros construtivos dessa malha são apresentados na Tab. (8.1.5), onde  $BS = 0.4615$  m (58% da corda) para a malha mais refinada. Prescrevendo-se  $y^+ = 0.1$  e  $r_{ref} \cong 1.44$ , obtém-se  $h_1 = 1.1114E-6$  m e  $\delta_{CL,t} = 1.5115E-2$  m.

Tabela 8.1.5 – Parâmetros construtivos, Caso C12, modelo NACA 0012,  $c = 0.8$  m.

Malha	$N_{CL}$	$r_h$	TE	$ \mathbf{ds} $ LE mín [m]	$ \mathbf{ds} $ TE mín [m]	$ \mathbf{ds} $ Objetivo [m]	BS [m]
C	42	1.1994	4	3.2000E-03	6.7200E-04	6.4000E-03	0.9600
M	61	1.1247	5	2.2188E-03	4.6594E-04	4.4375E-03	0.6656
F	88	1.0793	7	1.5384E-03	3.2306E-04	3.0768E-03	0.4615

A aplicação dos parâmetros construtivos descritos na Tab. (8.1.5) ao gerador de malhas poliédricas do Star-CCM+ criou malhas com as características apresentadas na Tab. (8.1.6). Nessa tabela, a razão de refinamento efetiva  $r_{efet}$  é obtida pela Eq. (6.6) e o indicador de qualidade de refinamento  $Q_r$  pela Eq. (6.7).

Tabela 8.1.6 – Características da malha poliédrica, seção NACA 0012, Caso C12.

Malha	Células	$r_{efet}$	$Q_r$
C	23334		
M	44667	1.38	1.042
F	86656	1.39	1.035

Como no Caso B3-6, as condições de referência, iniciais e de contorno são empregadas como parâmetros de entrada na metodologia numérica de solução segregada do Star-CCM+. O esforço computacional e os valores obtidos para o coeficiente de arrasto  $c_d$  são apresentados por nível de refinamento, tabelas (8.1.7) e (8.1.8) a seguir.

Tabela 8.1.7 – Resultados quanto ao esforço computacional, Caso C12, NACA 0012.

$x_t / c$	Malha	Steps	Norm.	CPU/Step	Norm.	$y^+$ máx.
43%	C	2500	REF.	0.517	REF.	< 0.10
	M	3500	1.4 x	1.022	2.0 x	< 0.10
	F	6000	2.4 x	2.166	4.2 x	< 0.10
5%	F	5500	2.2 x	2.204	4.3 x	< 0.12

Tabela 8.1.8 – Coeficiente de arrasto  $c_d$ , Caso C12, NACA 0012.

$x_t / c$	Malha	$c_{d,p}$	$c_{d,f}$	$c_d$	$\Delta\% c_d$	$GCI\% c_d$	$\alpha_{GCI} / r_{efet}^{P,obs}$
43%	C	20.3	48.3	68.6	1.77		1.0258
	M	17.5	48.2	65.7	0.68	0.8715	
	F	16.2	48.5	64.8	0.27	0.3336	
	FM	15.6	48.7	64.3			
5%	F	22.8	74.6	97.4			

O estudo de dependência de malha foi inicialmente conduzido para a posição da transição do escoamento ao regime turbulento prescrita em  $x_t / c = 43\%$ . Com a mesma argumentação do Caso B3-6, ou seja, que pouco ou nenhum ganho em termos de precisão poderá ser obtido com uma malha mais refinada que a malha “F” e que aumento no esforço computacional é justificável relativamente à malha intermediária “M”, a malha “F” foi selecionada como sendo de trabalho e utilizada para avaliação do coeficiente de arrasto  $c_d$  com a transição prescrita em  $x_t / c = 5\%$ . A Fig. (8.1.8) representa a malha “F” do Caso C12.

As figuras (8.1.9) e (8.1.10) representam os volumes da camada limite junto aos bordos de ataque e de fuga respectivamente. A Fig. (8.1.11) representa a razão de variação de volume.

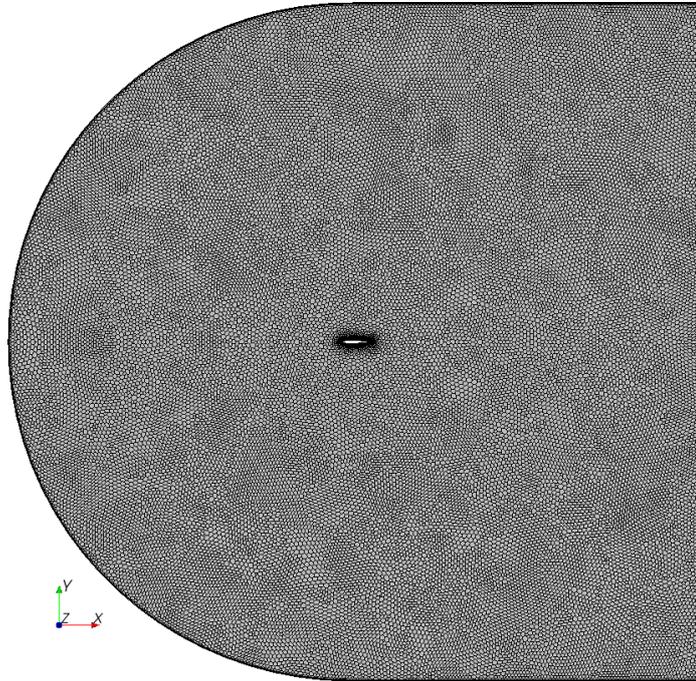


Figura 8.1.8 – Malha “F” do Caso C12, NACA 0012.

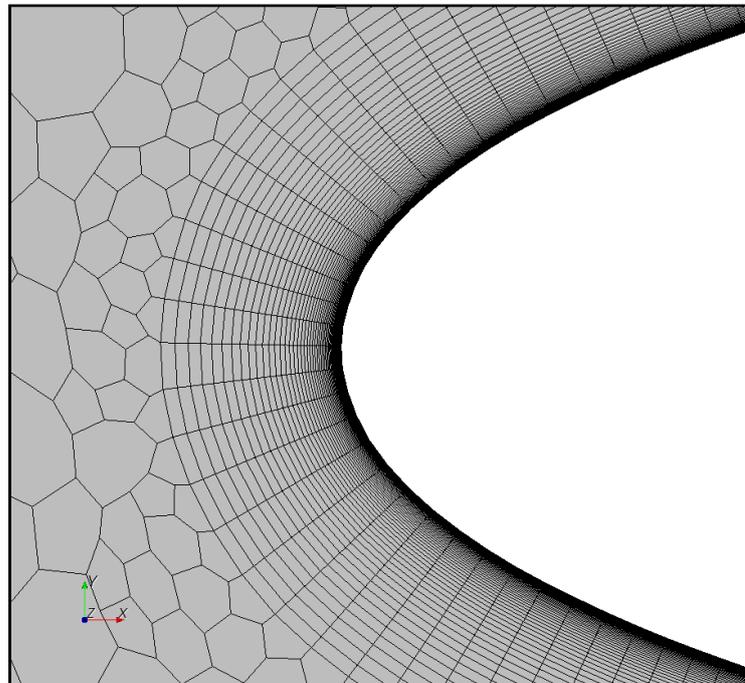


Figura 8.1.9 – Bordo de ataque, malha “F”, Caso C12, NACA 0012.

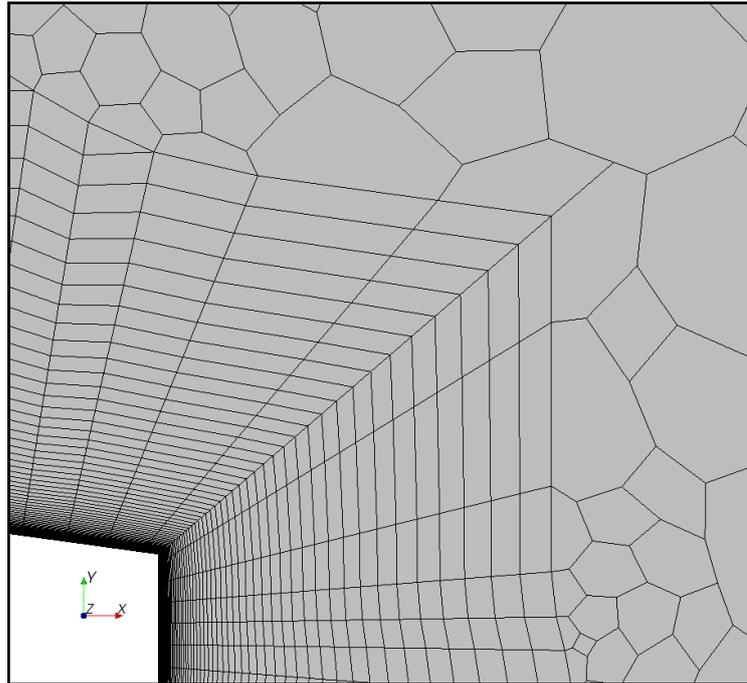


Figura 8.1.10 – Bordo de fuga, malha “F”, Caso C12, NACA 0012.

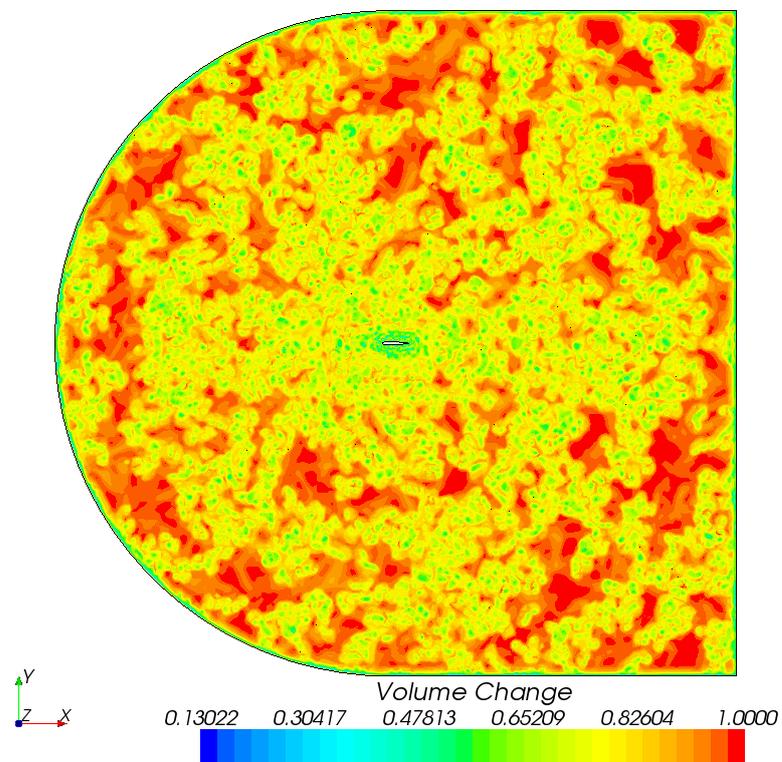


Figura 8.1.11 - Razão de variação de volume, malha “F”, Caso C12, NACA 0012.

O Caso O200 é simulado por uma malha estruturada de células quadrilaterais e geração hiperbólica, aplicada a um modelo NACA 0012 de corda  $c = 0.8$  m. Os valores de referência e as condições iniciais e de contorno são apresentadas nas tabelas (8.1.1) e (8.1.2). Para esse caso, uma malha “F” é simulada sem que seja apresentado o estudo de dependência dessa malha, no pressuposto de que essa já seja a mais refinada de acordo com a metodologia proposta por Roache [1994] e baseada na extrapolação de Richardson. O valor do coeficiente de arrasto  $c_d$  para  $x_t / c = 5\%$  é comparado com aqueles obtidos para os casos B3-6 e C12. Para  $x_t / c = 43\%$ , a comparação é feita com o Caso A7A devido à Zingg [1992] onde  $c = 0.8$  m e  $Re_c = 2.88E6$ .

Para os valores de referência e condições iniciais e de contorno, tabelas (8.1.1) e (8.1.2) respectivamente, prescreve-se  $y^+ = 0.1$  e  $Re_c = 2.88E6$ . Aplicando-se os procedimentos descritos na metodologia de geração de malhas para o caso estruturado, obtém-se  $h_1 = 1.1114E-6$  m e  $\delta_{CL,t} = 1.5115E-2$  m. A Tab. (8.1.9) descreve as características construtivas da malha “F”, Caso O200.

Tabela 8.1.9 - Características construtivas da malha “F”, Caso “O200”, NACA 0012

Caso	LE-TE	TE-FF	TE	FF	Células	$N_{CL}$	Nós	$\tilde{r}_h$	$ \mathbf{ds} _{LE}$ [m]	$ \mathbf{ds} _{TE}$ [m]
O200	249	193	33	200	496 x 192	84	102483	1.09	4.0000E-4	6.3000E-5

Na Tab. (8.1.9), “LE-TE” é o número de nós entre o ponto de estagnação do bordo de ataque e a cúspide do bordo de fuga. “TE-FF” é o número de nós entre qualquer parede da seção e o contorno, “TE” é o número de nós entre as cúspides do bordo de fuga, “FF” é a distância entre as paredes da seção e o contorno onde o escoamento é livre, expresso em cordas. O produto sob “Células” indica o número de células da malha “F.”  $N_{CL}$  é o número de camadas de células que abrangem a camada limite turbulenta, “Nós” é o número de vértices das malhas,  $\tilde{r}_h$  é a razão de crescimento entre as alturas de duas camadas consecutivas,  $|\mathbf{ds}|_{LE}$  e  $|\mathbf{ds}|_{TE}$  são os espaçamentos mínimos nos bordos de ataque e de fuga respectivamente.

Como no Caso C12, as condições de referência, iniciais e de contorno são empregadas como parâmetros de entrada na metodologia numérica de solução segregada do Star-CCM+. O esforço computacional é comparado na Tab. (8.1.10) com aqueles correspondentes às

malhas mais refinadas dos casos B3-6 e C12, a primeira considerada como referência para normalização dos demais casos.

Tabela 8.1.10 – Esforço computacional, malhas refinadas, Caso O200, NACA 0012.

Caso	Steps	Norm.	CPU/Step	Norm.	$y^+$ máx.
B3-6	4000	REF.	1.877	REF.	< 0.12
C12	6000	1.5 x	2.166	1.15 x	< 0.12
O200	3500	0.9 x	1.920	1.02 x	< 0.10

Os resultados obtidos para o coeficiente de arrasto  $c_d$ , em “drag counts”, são apresentados na Tab. (8.1.11) para  $x_t / c = 43\%$  e  $x_t / c = 5\%$ .

Tabela 8.1.11 – Coeficiente de arrasto  $c_d$ , Caso O200, NACA 0012.

$x_t / c$	$c_{d,p}$	$c_{d,f}$	$c_d$
43%	8.7	47.3	56.0
5%	14.7	72.2	86.9

A Fig. (8.1.12) representa a malha aplicada ao Caso O200. As figuras (8.1.13) e (8.1.14) representam as células dentro da camada limite junto aos bordos de ataque e de fuga respectivamente. A Fig. (8.1.15) representa a razão de variação de volume.

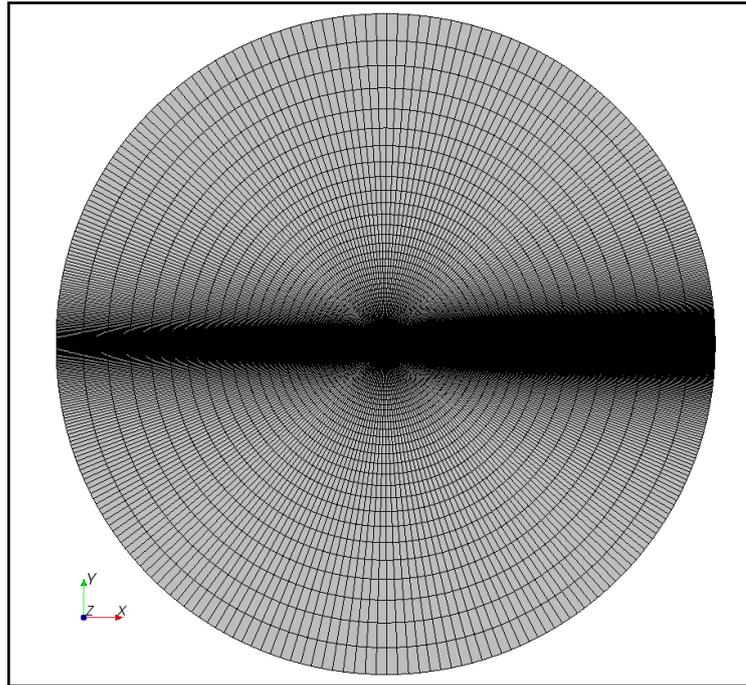
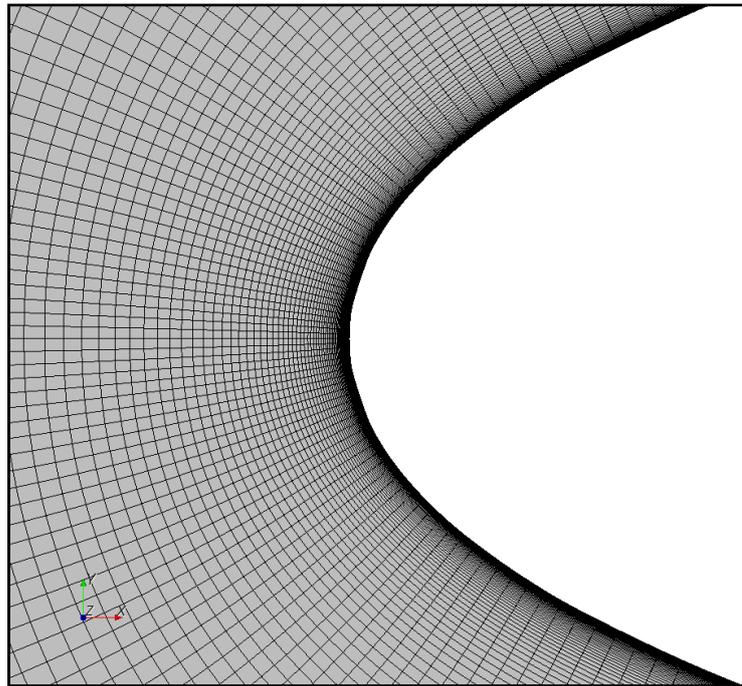
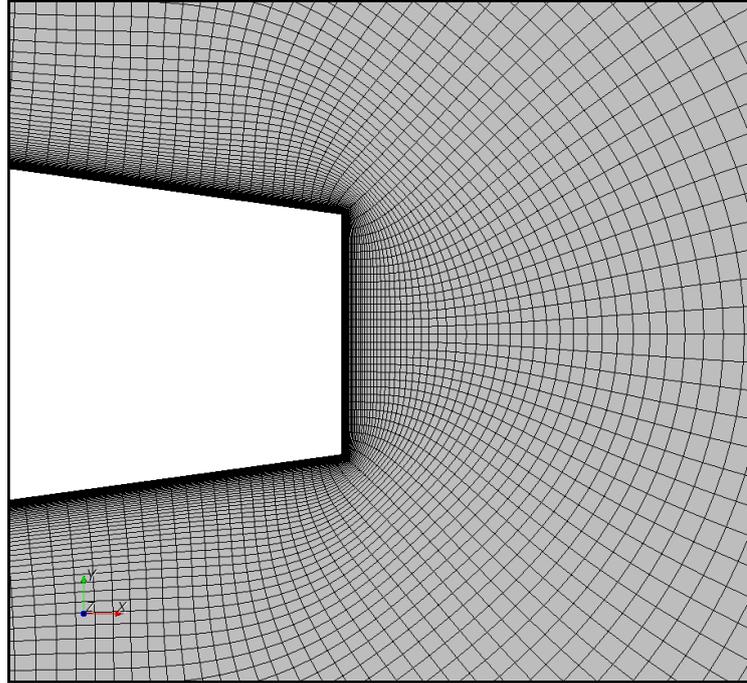


Figura 8.1.12 - Malha estruturada aplicada ao Caso O200, NACA 0012.



Figuras 8.1.13 - Camada limite junto ao bordo de ataque, Caso O200, NACA 0012



Figuras 8.1.14 - Camada limite junto ao bordo de fuga, Caso O200, NACA 0012.

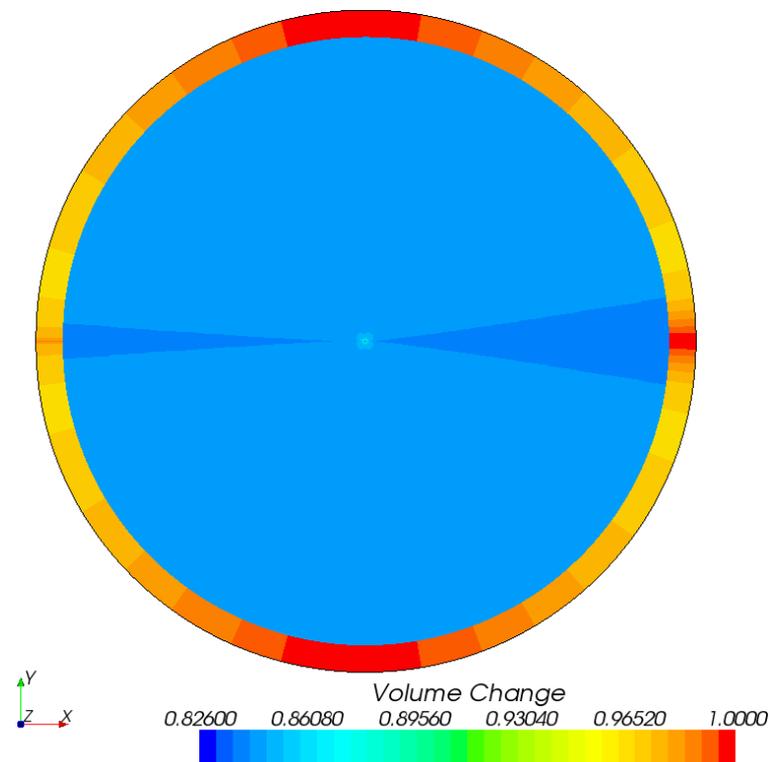


Figura 8.1.15 - Razão de variação de volume, Caso 0200, NACA 0012.

## 8.2 OAT15A

No estudo de dependência de malha para o modelo OAT15A, são aplicadas as metodologias de geração de malha estruturada e verificação ao Caso 11 da Tab. (3.2). Esse caso é simulado com emprego do algoritmo numérico acoplado e da formulação matemática correspondente ao modelo de turbulência Spalart-Allmaras.

O objetivo deste estudo é avaliar o comportamento numérico dos valores dos coeficientes de sustentação e de arrasto de acordo com o nível de refinamento de malha e a posição do contorno onde o escoamento é livre. Para tanto, três níveis de refinamento são simulados, designados pelos prefixos “C”, “M” e “F” (da malha menos refinada a mais refinada respectivamente). Para cada nível de refinamento, três posições de contorno  $FF$  são avaliadas (50, 100 e 200 cordas) resultando em nove estudos onde são obtidos os índices de convergência, a ordem observada do método de discretização e estimativas da solução exata a partir de resultados extrapolados pela metodologia proposta por Roache [1994].

No estudo da influência devido ao refinamento da malha, o uso de uma razão de refinamento  $r_{ref} = 1.5$  constante para ambos os eixos  $x$  e  $y$  é justificado pela simplificação matemática na obtenção da ordem observada de convergência  $p_{obs}$ , de acordo com a Eq. (6.3). O valor não inteiro adotado para a razão de refinamento nas paredes do aerofólio viabilizou o uso de três malhas ao tornar a malha mais refinada computacionalmente viável de acordo com o tempo e recursos disponíveis para este trabalho.

A influência devido à posição do contorno onde o escoamento é livre foi pesquisada a partir de uma malha básica para cada nível de refinamento. Nessas malhas, a razão de crescimento  $r_h$  é obtida iterativamente para cada nível de refinamento (“C”, “M” ou “F”) através da Eq. (7.2.6).

Exemplificando para o caso da malha “C” (a menos refinada), utilizando-se inicialmente  $FF = 50$  e com o valor calculado de  $h_1$  e  $r_h$  prescrito, obtém-se um valor não inteiro para  $N_{\Gamma_i}$ . Esse valor de  $N_{\Gamma_i}$  é então arredondado para um inteiro próximo e um novo valor para a razão de crescimento de célula  $\tilde{r}_h$ , próximo do inicial, é iterativamente obtido de tal forma que a posição do contorno onde o escoamento é livre seja aproximadamente a desejada. As malhas onde  $FF = 100$  e  $FF = 200$  são obtidas permitindo-se o crescimento hiperbólico da malha básica (onde  $FF = 50$ ) com razão  $\tilde{r}_h$  até que a curva de marcha construtiva  $\Gamma_i$ , obtida pela Eq. (7.2.5), atenda a nova condição de posição do contorno

(aproximadamente 100 ou 200 cordas). Essa abordagem equivale a acrescentar ou remover camadas de uma mesma malha básica sem alteração dos parâmetros de discretização, espessura inicial e agrupamento de nós nos bordos de ataque e de fuga. É oportuno observar que a razão de crescimento  $\tilde{r}_h$  é mantida constante dentro e fora da camada limite e que o número de camadas de células dentro da camada limite obtido pela Eq. (A.13) tem o propósito de estipular uma métrica para verificação da qualidade das estimativas e dos parâmetros de geração de malha. A razão de refinamento devida à posição do contorno,  $r_{FF}$ , é obtida pela divisão entre o número de cordas efetivo da malha mais refinada e a menos refinada anterior.

A escolha do modelo SA é justificada pela hipótese de que o mesmo apresente resultados com menor esforço computacional relativamente ao modelo  $k-\omega$ /SST, sendo razoável assumir que as conclusões independam da escolha do modelo de turbulência. A aproximação inicial da malha menos refinada é argumentada no capítulo 7 e a validade dessa aproximação comprovada pelos índices de convergência de malha GCI. Para o estudo de dependência de malha, os valores de referência e propriedades do ar são apresentados na Tab. (8.2.1):

Tabela 8.2.1 – Valores de referência e propriedades do ar.

Valores de referência			<i>Propriedades do ar (constantes)</i>		
$p_0$ [Pa]	$T_0$ [K]	$\rho_0$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\mu_0$ [Pa.s]	$Pr_t$	$C_p$ [J/kg K]
101325	300	1.1772	1.4793E-5	0.9	1003.62

As condições iniciais e as condições de contorno são apresentadas na Tab. (8.2.2). Nessa tabela,  $p_{i,rel}$  é a pressão inicial na fronteira relativa à pressão de referência  $p_0$ .  $T_{i,est}$  é a temperatura estática inicial,  $\mu_t / \mu_0$  a razão entre as viscosidades turbulenta e de referência e  $U_i$  a velocidade inicial.

Tabela 8.2.2 – Condições iniciais do estudo de dependência de malha.

$p_{i,rel}$ [Pa]	$T_{i,est}$ [K]	$\mu_t / \mu_0$	$U_i$ [m/s]
0.0	300	10.0	251.3208

O Star-CCM+ requer para o modelo de turbulência SA um valor inicial para a difusividade turbulenta modificada  $\tilde{\nu}_i$ , obtido pela Eq. (8.2.1):

$$\frac{\mu_t}{\mu_0} = \frac{\rho \tilde{v}_i f_{v1}}{\mu_0} \quad (8.2.1)$$

Na Eq. (8.2.1),  $f_{v1}$  é obtido pela Eq. (4.2.7). A Tab. (8.2.3) apresenta as condições de contorno - escoamento livre e não perturbado no limite do domínio computacional e paredes adiabáticas, impermeáveis e sem deslizamento no extradorso, intradorso e bordo de fuga da seção do aerofólio. Nessa tabela,  $p_{\infty,rel}$  é a pressão na fronteira relativa à pressão de referência  $p_0$ .

Tabela 8.2.3 – Condições de contorno no estudo de dependência de malha.

$\alpha$	$T_\infty$ [K]	$c_\infty$ [m/s]	$M_\infty$	$U_\infty$ [m/s]	$\mu_t / \mu_0$	$Re_c$
1.15°	300	347.1282	0.724	251.3208	10.0	3E6

O valor  $y^+ = 0.45$  é adotado para todas as malhas e mantido constante em todas as simulações empregando  $h_1 = 8.8379E-7$  m obtido pela Eq. (A.9) e  $\delta_{CL,t} = 2.8110E-3$  m através da Eq. (A.10). Esse valor de  $y^+$  é o limite inferior para que o jacobiano das células com face comum entre o bordo de fuga, extradorso e intradorso, representadas pela cor cinza escuro na Fig. (8.2.1), seja mantido positivo.

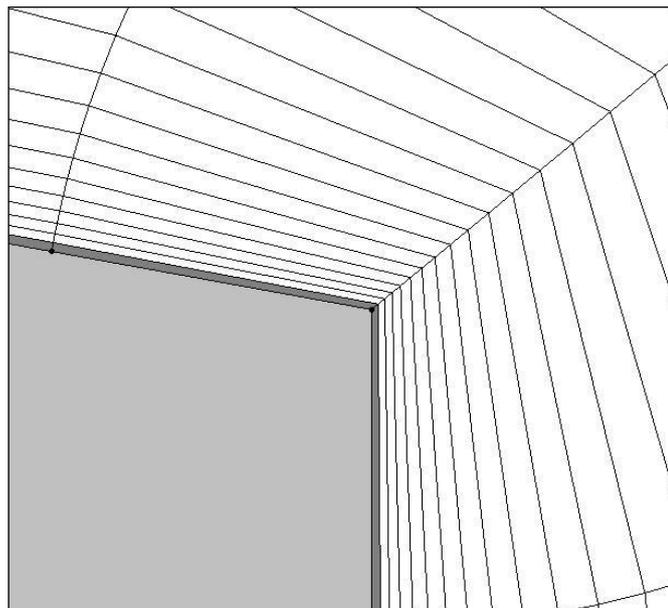


Figura 8.2.1 - Células com face comum entre o bordo de fuga, extradorso e intradorso.

Valores menores de  $y^+$  exigiriam um menor valor para  $h_1$  que combinado com o aumento no número de pontos no bordo de fuga devido ao refinamento, levaria ao jacobiano de célula negativo e à inviabilidade construtiva da malha.

A estimativa de  $N_{CL}$  é obtida pela Eq. (A.13) e  $\tilde{r}_h$  obtido pela Eq. (7.2.6). A Tab. (8.2.4) apresenta as características construtivas das malhas para estudo de dependência, obtidas pela aplicação da metodologia de geração ao Caso 11 descrito na Tab. (3.2):

Tabela 8.2.4 – Características construtivas das malhas para estudo de dependência,  $r_{ref} = 1.5$ .

#	Malha	LE-TE	TE-FF	TE	FF	Células	$N_{CL}$	Nós	$\tilde{r}_h$	$r_{FF}$	$ \mathbf{ds} _{LE}$ [m]	$ \mathbf{ds} _{TE}$ [m]
1	C050	181	81	25	50	384 x 80	36	31347	1.20		2.2500E-4	3.1228E-5
2	M050	271	121	37	50	576 x 120	51	70059	1.12		1.5000E-4	2.0818E-5
3	F050	406	181	55	50	864 x 180	74	156927	1.08		1.0000E-4	1.3879E-5
4	C100	181	85	25	104	384 x 84	36	32895	1.20	2.08	2.2500E-4	3.1228E-5
5	M100	271	127	37	101	576 x 126	51	73533	1.12	2.02	1.5000E-4	2.0818E-5
6	F100	406	190	55	98	864 x 189	74	164730	1.08	1.96	1.0000E-4	1.3879E-5
7	C200	181	89	25	218	384 x 88	36	34443	1.20	2.08	2.2500E-4	3.1228E-5
8	M200	271	133	37	205	576 x 132	51	77007	1.12	2.02	1.5000E-4	2.0818E-5
9	F200	406	199	55	194	864 x 198	74	172533	1.08	1.96	1.0000E-4	1.3879E-5

Na Tab. (8.2.4), a malha “C050” é considerada como a malha de referência para comparação de esforço computacional. “LE-TE” representa o número de nós entre o bordo de ataque e o bordo de fuga. O número de nós na direção ortogonal (ao escoamento) e que é igual ao número de pontos entre o bordo de fuga e o contorno é representado por “TE-FF”. O número de nós no bordo de fuga é representado por “TE”.

Sob a coluna “FF” encontra-se a posição do contorno em cordas, onde pode ser observado que para o conjunto de malhas menos refinadas – “C050”, “C100” e “C200”, essa posição varia com uma razão  $r_{FF} = 2.08$ . Para as malhas intermediárias (“M050”, “M100” e “M200”)  $r_{FF} = 2.02$  e para as malhas mais refinadas,  $r_{FF} = 1.96$ . Esse comportamento deve-se à estratégia de obter malhas com diferentes posições de contorno mediante adição de camadas a uma malha básica. No software Pointwise versão 16.02R3, o algoritmo de geração da malha hiperbólica requer a prescrição de um valor inicial ( $h_1$ ), de uma razão de crescimento ( $\tilde{r}_h$ ) e de uma condição de parada na marcha construtiva. Essa condição de parada é prescrita como sendo no mínimo  $FF \cdot c$  m, levando a pequenas variações no número de cordas para geração de um número inteiro de camadas.

A variação no valor de  $\tilde{r}_h$  é devida ao refinamento da malha na direção do eixo  $y$ . A razão máxima de crescimento de célula  $\tilde{r}_{h,\max} = 1.2$  é convenientemente selecionada para ao mesmo tempo atender as práticas recomendadas por Vassberg et al. [2007] e permitir que a razão de crescimento mínima seja superior a 5% ( $\tilde{r}_{h,\min} = 1.08$ ) [Roache, 1998]. A variação dessa razão justifica o aumento em  $N_{CL}$ .

O parâmetro de agrupamento inicial no bordo de ataque ( $|\mathbf{ds}|_{LE}$ ) varia de acordo com  $r_{ref}$ , onde as malhas intermediárias “M050”, “M100” e “M200” adotam a recomendação  $|\mathbf{ds}|_{LE} \cong 0.001 \cdot c$  m. O parâmetro de agrupamento no bordo de fuga ( $|\mathbf{ds}|_{TE}$ ) é calculado de acordo com a discretização do próprio bordo de fuga, sendo essa escalada de acordo com  $r_{ref}$ .

A transição do escoamento ao regime turbulento foi prescrita para todas as malhas de acordo com a do modelo físico experimental, a 7% da corda a partir do bordo de ataque.

A Tab. (8.2.5) sumariza os resultados obtidos pela simulação das malhas #1 a #9 onde os esforços computacionais são normalizados pelo resultado obtido para a malha “C050”. Pode-se observar nessa tabela que o esforço computacional (tempo de CPU por iteração, “CPU/Iteração”) é aproximadamente quadruplicado enquanto o número de iterações é aproximadamente duplicado entre a malha menos refinada e a malha mais refinada. O valor máximo obtido para  $y^+$  é apresentado para verificação da metodologia de geração.

Tabela 8.2.5 - Resultados obtidos pela simulação das malhas # 1 a 9.

#	Malha	Iterações	Norm.	CPU/Iteração	Norm.	$y^+$ Máx.
1	C050	7900	REF.	0.968	REF.	0.45937
2	M050	12000	1.5 x	2.668	2.8 x	0.45235
3	F050	15750	2.0 x	3.978	4.1 x	0.44648
4	C100	9000	1.1 x	1.092	1.1 x	0.45968
5	M100	13750	1.7 x	1.950	2.0 x	0.45247
6	F100	18200	2.3 x	4.337	4.5 x	0.44672
7	C200	9837	1.2 x	1.062	1.1 x	0.45992
8	M200	16200	2.1 x	1.330	1.4 x	0.45277
9	F200	21500	2.7 x	4.340	4.5 x	0.44685

A aplicação da metodologia numérica onde as equações de transporte de massa, momentum e energia são resolvidas de forma acoplada com integração implícita no tempo, permitiu o uso do número de Courant-Friedrichs-Lewy  $CFL = 5.0$  maior que a unidade para todas as simulações, convergidas para o regime permanente em pseudo-tempo (i.e., os

resultados tem precisão espacial e não temporal). O número de iterações e o tempo de CPU por iteração são apresentados de forma normalizada relativamente à malha #1. O coeficiente  $C = 1.7391$  utilizado na Eq. (A.9) foi obtido considerando-se  $y^+ = 0.45$  entre as malhas 1 e 9, ou seja:

$$C = \frac{h_1}{5.1988 y^+ c \text{Re}_c^{-9/10}} = \frac{8.8379\text{E-}7}{5.1988 \cdot 0.45 \cdot 0.15 \cdot (3\text{E}6)^{-9/10}} \cong 1.7391$$

A Tab. (8.2.6) apresenta o efeito da discretização sobre os coeficientes de sustentação e arrasto para cada posição do contorno onde o escoamento é livre e não perturbado. Esses resultados são consolidados em três grupos onde “ER-1”, “ER-2” e “ER-3” são os valores extrapolados pela Eq. (6.1), para cada um desses grupos.

Tabela 8.2.6 - Efeito da discretização para cada posição do contorno.

#	Malha	$c_l$	$c_{d,p}$	$c_{d,v}$	$c_d$	$\Delta\% c_l$	$\Delta\% c_d$	$\text{GCI}_{12} c_d$	$\text{GCI}_{12} c_l$	$\alpha_{\text{GCI}} / r_{\text{ref}}^{p_{\text{obs}}} c_d$	$\alpha_{\text{GCI}} / r_{\text{ref}}^{p_{\text{obs}}} c_l$
1	C050	0.70659	60.8	64.0	124.8	-1.17	5.96			0.9857	1.0025
2	M050	0.70905	56.9	64.0	120.9	-0.82	2.63	3.2011	1.0358		
3	F050	0.71079	55.2	64.0	119.2	-0.58	1.16	1.4333	0.7277		
ER-1	FM050	0.71493	53.8	64.0	117.8						
4	C100	0.71388	57.7	63.9	121.6	-1.02	6.34			0.9846	1.0021
5	M100	0.71602	54.0	63.9	117.9	-0.72	3.08	3.7379	0.9081		
6	F100	0.71753	52.2	63.9	116.1	-0.51	1.50	1.8467	0.6426		
ER-2	FM100	0.72122	50.5	63.9	114.4						
7	C200	0.71709	56.3	63.9	120.2	-0.63	5.85			0.9862	1.0015
8	M200	0.71979	52.4	63.9	116.3	-0.26	2.40	2.9325	0.3244		
9	F200	0.72090	50.8	63.9	114.7	-0.11	0.99	1.2216	0.1325		
ER-3	FM200	0.72166	49.7	63.9	113.6						

O coeficiente de arrasto  $c_d = c_{d,p} + c_{d,v}$ , expresso em drag counts, é analisado devido à contribuição das forças viscosas ( $c_{d,v}$ ) e da distribuição de pressões ( $c_{d,p}$ ). O coeficiente de sustentação ( $c_l$ ) é apresentado de forma consolidada devido à contribuição desprezível das forças viscosas na composição desse coeficiente. As colunas  $\Delta\% c_l$  e  $\Delta\% c_d$  apresentam a diferença percentual entre os coeficientes de sustentação e arrasto e os valores extrapolados para um mesmo grupo. O índice de convergência de malha  $\text{GCI}_{12}$  ( $\times 100$ ), obtido pela Eq.

(6.2) onde  $F_s = 1.25$ , é calculado para ambos os coeficientes relativamente às malhas mais refinadas.

A verificação se os resultados estão na região de convergência assintótica é avaliada pela razão  $\alpha_{GCI} / r_{ref}^{p_{obs}}$ , onde  $p_{obs}$  é a ordem observada de convergência do método obtida pela Eq. (6.3) e apresentada na Tab. (8.2.7) para os coeficientes  $c_l$  e  $c_d$  de acordo com a posição do contorno. Para  $\alpha_{GCI} / r_{ref}^{p_{obs}} \approx 1$  os resultados são considerados convergidos [Roache, 1998].

Tabela 8.2.7 - Ordem observada de convergência do método de discretização.

$FF$	$p_{obs} c_d$	$p_{obs} c_l$
50	2.0173	0.8646
100	1.7772	0.8478
200	2.1941	2.2049

Na Tab. (8.2.6), a variação do coeficiente de sustentação  $c_l$  mostra que esse aumenta com um maior refinamento da malha. Esse aumento entre os níveis de refinamento relativamente aos valores extrapolados diminui com o distanciamento do contorno, sugerindo que o erro devido à posição do contorno é mais sensível nas malhas menos refinadas.

O valor do coeficiente de arrasto devido à distribuição de pressões  $c_{d,p}$  tende a diminuir nas malhas mais refinadas. O aumento na distância entre as paredes e o contorno tende a diminuir a diferença entre os valores de  $c_{d,p}$  obtidos com a malha menos refinada e a mais refinada. O coeficiente de arrasto devido às forças viscosas  $c_{d,v}$  mantém-se aproximadamente constante em todas as malhas, sendo esse fato atribuível à pequena variação de  $y^+$  máximo obtido relativamente ao valor prescrito  $y^+ = 0.45$ .

Os valores extrapolados para os coeficientes de sustentação e arrasto (“ER-1”, “ER-2” e “ER-3”) não se mantêm constantes com o nível de refinamento como a metodologia de verificação poderia sugerir. Entretanto, as diferenças percentuais entre os valores extrapolados “ER-1” e “ER-2” relativamente ao valor “ER-3” diminuem significativamente com o refinamento, como apresentado na Tab. (8.2.8).

Tabela 8.2.8 - Diferenças percentuais entre os valores extrapolados (discretização).

#	$c_l$	$c_d$	$\Delta\% c_l$	$\Delta\% c_d$
ER-1	0.71493	117.8	-0.93	3.74
ER-2	0.72122	114.4	-0.06	0.72
ER-3	0.72166	113.6		
Caso 11	0.59400	106.0	-17.68	-6.69

Na Tab. (8.2.8) também são apresentados os resultados experimentais para o Caso 11 comparados com os valores extrapolados para “ER-3”. A observação dos valores mostra que ambos coeficientes tem seus valores superestimados relativamente ao caso experimental. Zingg [1992] relata um comportamento qualitativamente semelhante para o aerofólio RAE 2822 em condições de escoamento similares, atribuindo esse fenômeno à posição da onda de choque, calculada pelo modelo matemático muito à jusante no escoamento relativamente à localização experimental, portanto justificando o aumento significativo no coeficiente de sustentação (~ 18% neste caso). Para o coeficiente de arrasto a diminuição do erro com o aumento do refinamento, relativamente ao caso experimental, é atribuível a melhor resolução da camada limite (74 camadas) na malha mais refinada.

O índice de convergência de malha relativamente a mais refinada  $GCI_{12}$  diminuiu com o aumento do refinamento. A interpretação é que a banda de erro relativamente ao valor extrapolado torna-se mais estreita com o refinamento. Por exemplo, o coeficiente de sustentação para a malha mais refinada é  $c_l = 0.72166 \pm 0.1325\%$ , enquanto que para o coeficiente de arrasto tem-se  $c_d = 113.6 \pm 1.2216\%$ , sendo a dispersão para o coeficiente de arrasto pequena mas significativamente maior do que a do coeficiente de sustentação.

A confirmação se os resultados estão na região de convergência assintótica é obtida pelo cálculo da razão  $\alpha_{GCI} / r_{ref}^{P_{obs}}$ . A proximidade desses valores da unidade em todos os casos confirma a hipótese de convergência. Pode-se observar que os resultados para o coeficiente de sustentação estão mais próximos do valor assintótico que os valores para o coeficiente de arrasto. A busca de um melhor resultado à custa de um maior refinamento levaria a pequenos ganhos - estimados 0.11% para  $c_l$  e menos de 1% para  $c_d$  - injustificáveis do ponto de vista de esforço computacional já que da Tab. (8.2.5) observa-se que o tempo de CPU por iteração é aproximadamente triplicado entre as malhas “M200” e “F200”.

Ordem observada de convergência do método de discretização  $p_{obs}$  apresentada na Tab. (8.2.7) é coerente com o valor teórico ( $p=2$ ) para o coeficiente de arrasto mas incoerente para o coeficiente de sustentação, onde  $p < 1$  para as malhas onde o contorno está localizado a 50 e 100 cordas das paredes da seção do aerofólio. Argumenta-se que nessas malhas o erro predominante é de primeira ordem e inversamente proporcional à distância entre as paredes e o contorno, sendo essa afirmativa concordante com os resultados obtidos por Zingg [1992] e o comportamento observado por Roache [1998].

Os resultados para o estudo de dependência de malha quanto aos efeitos da variação da posição do contorno são apresentados na Tab. (8.2.9):

Tabela 8.2.9 - Efeito da variação da posição do contorno

#	Malha	$c_l$	$c_{d,p}$	$c_{d,v}$	$c_d$	$\Delta\% c_l$	$\Delta\% c_d$	$GCI_{12} c_d$	$GCI_{12} c_l$	$\alpha_{GCI} / r_{ref}^{p_{obs}} c_d$	$\alpha_{GCI} / r_{ref}^{p_{obs}} c_l$
1	C050	0.70659	60.8	64.0	124.8	-1.7890	4.8662			0.9882	1.0234
4	C100	0.71388	57.7	63.9	121.6	-0.7750	2.1809	2.6680	1.0375		
7	C200	0.71709	56.3	63.9	120.2	-0.3290	0.9775	1.2100	0.4544		
ER-4	C50-200	0.71946	55.2	63.8	119.0						
2	M050	0.70905	56.9	64.0	120.9	-2.0996	5.7156			0.9862	1.0036
5	M100	0.71602	54.0	63.9	117.9	-1.1383	3.0934	3.7508	1.4339		
8	M200	0.71979	52.4	63.9	116.3	-0.6171	1.6743	2.0584	0.7733		
ER-5	M50-200	0.72426	50.5	63.8	114.4						
3	F050	0.71079	55.2	64.0	119.2	-1.8587	5.0360			0.9878	0.9273
6	F100	0.71753	52.2	63.9	116.1	-0.9284	2.3217	2.8362	1.0040		
9	F200	0.72090	50.8	63.9	114.7	-0.4637	1.0703	1.3237	0.4991		
ER-6	F50-200	0.72425	49.6	63.8	113.5						

Para um mesmo nível de refinamento, o efeito da variação da posição do contorno sobre o coeficiente de sustentação  $c_l$  é sensivelmente maior do que o efeito devido à variação do nível de refinamento da malha para uma mesma posição do contorno. Entretanto, o erro relativamente aos valores extrapolados é aproximadamente constante para uma mesma posição do contorno independentemente do nível de refinamento. Esse comportamento sugere que para o coeficiente de sustentação predomina o erro devido à posição do contorno.

O comportamento observado para o coeficiente de arrasto devido à distribuição de pressões  $c_{d,p}$  indica sensibilidade à posição do contorno predominando sobre a influência da variação do refinamento de malha. Como no estudo devido ao efeito da discretização,  $c_{d,v}$  é constante devido à pequena variação de  $y^+$  máximo relativamente ao valor prescrito  $y^+ = 0.45$ .

Para ambos os coeficientes, o índice GCI diminui com o distanciamento da posição do contorno, mas em valores absolutos é sensivelmente maior do que aqueles obtidos com a variação do nível de refinamento.

A razão  $\alpha_{GCI} / r_{ref}^{P_{obs}}$  manteve-se próxima a unidade em todos os casos com a ressalva de que para a malha mais refinada essa razão calculada para o coeficiente de sustentação ficou sensivelmente abaixo dos demais valores.

Assim como no estudo devido ao efeito do refinamento, os valores extrapolados para os coeficientes de sustentação e arrasto (“ER-4”, “ER-5” e “ER-6”) não se mantêm constantes com a posição do contorno. Entretanto, as diferenças percentuais entre os valores extrapolados “ER-4” e “ER-5” relativamente ao valor “ER-6” diminuem significativamente com o aumento do refinamento, como apresentado na Tab. (8.2.10). Em particular, a variação percentual entre os valores extrapolados para 100 e 200 cordas é próxima de zero para o coeficiente de sustentação e menor que 1% para o coeficiente de arrasto, indicando que um além de 200 cordas pouco ou nenhum ganho em precisão será obtido.

Tabela 8.2.10 - Diferenças percentuais entre os valores extrapolados (posição do contorno).

#	$c_l$	$c_d$	$\Delta\% c_l$	$\Delta\% c_d$
ER-4	0.71946	119.0	-0.6620	4.9099
ER-5	0.72426	114.4	0.0010	0.7993
ER-6	0.72425	113.5		
Caso 11	0.59400	106.0	-17.9845	-6.5774

Como no caso do estudo devido ao efeito da discretização, a diferença entre o melhor valor extrapolado (“ER-6”) e os dados experimentais é grande, mas muito próxima aos valores anteriormente obtidos (~18% para o coeficiente de sustentação e 6.5% para o coeficiente de arrasto). Esse fato sugere que a diferença em relação aos valores experimentais não está primariamente associada às características da malha para o caso mais refinado e de maior posição de contorno (“F200”).

Considerando-se na Eq. (6.1) a hipótese de que o erro devido à posição do contorno seja de primeira ordem com o inverso da distância ao contorno (i.e., erro percentual  $\sim 1/FF$ ) e que o tamanho da malha seja quadruplicado (de 50 para 200 cordas), ou seja,  $p = 1$  e  $r_{ref} = 4$ , obtém-se a Eq. (8.2.2):

$$f_{exata} \cong f_1 + \frac{1}{3}(f_1 - f_2) \quad (8.2.2)$$

Aplicando-se a Eq. (8.2.2) aos resultados obtidos para os coeficientes de sustentação e arrasto nas malhas “C200”, “M200” e “F200”, obtém-se a Tab. (8.2.11) onde a ordem de convergência devida à variação da posição do contorno é verificada.

Tabela 8.2.11 – Verificação da ordem de convergência devida à posição do contorno.

Malha	$c'_l$	$\Delta\% c'_l$	$R c'_l$	$c'_d$	$\Delta\% c'_d$	$R c'_d$
C050		-1.6117	2.7048		4.2653	2.6734
C100		-0.5958	4.0000		1.5954	4.0000
C200	0.71816	-0.1490		119.7	0.3989	
M050		-1.6636	2.3834		4.4608	2.3857
M100		-0.6980	4.0000		1.8698	4.0000
M200	0.72105	-0.1745		115.7	0.4674	
F050		-1.5547	2.5016		4.3544	2.6269
F100		-0.6215	4.0000		1.6576	4.0000
F200	0.72202	-0.1554		114.2	0.4144	

Na Tab. (8.2.11),  $c'_l$  e  $c'_d$  são os valores extrapolados para os coeficientes de sustentação e arrasto obtidos com a Eq. (8.2.2). As colunas  $\Delta\% c'_l$  e  $\Delta\% c'_d$  representam a variação desses coeficientes, obtidos para as malhas “C050” a “F200”, relativamente aos valores extrapolados e agrupados por nível de refinamento. Os valores sob as colunas  $R c'_l$  e  $R c'_d$  são as razões observadas entre os valores de  $c'_l$  e  $c'_d$  respectivamente. Se  $\Delta\% \sim 1/FF$ , então a razão teórica entre as malhas a 200 e 100 cordas é 4 enquanto a razão entre as malhas a 100 e 50 cordas é 2. Depreende-se da Tab. (8.2.11) que o valor observado dessas razões foi efetivamente 4 entre 200 e 100 cordas e  $\sim 2.5$  entre 100 e 50 cordas. A Tab. (8.2.12) apresenta a ordem observada de convergência devida à posição do contorno, aproximadamente a unidade em todas as situações. Esse resultado e o apresentado na Tab. (8.2.11) são concordantes com aqueles obtidos por Zingg [1992] e analisados por Roache [1998].

Tabela 8.2.12 - Ordem observada de convergência à posição do contorno.

Tipo	$P_{obs} c_d$	$P_{obs} c_l$
C	1.0902	1.1641
M	0.8703	0.8679
F	1.1424	1.0242

O objetivo do estudo de dependência de malha é verificar a aptidão de uma malha para representar com precisão um modelo físico. Nesse sentido, são avaliadas as diferenças relativamente às soluções extrapoladas, calculados os índices de convergência e a proximidade da solução assintótica. O cálculo da ordem de convergência do método é utilizado para elucidar a origem de diferenças significativas, devidas a discretização ou a posição do contorno.

O critério de escolha da malha de trabalho a ser adotada na obtenção dos resultados baseia-se na capacidade dessa apresentar resultados dentro de uma banda de erro estimada pela metodologia de verificação. Essa banda de erro centrada nos valores extrapolados é apresentada na Tab. (8.2.13), onde os subscritos “máx” e “min” aplicados aos coeficientes de sustentação e arrasto estabelecem o limite superior e inferior respectivamente para um valor extrapolado.

Tabela 8.2.13 - Banda de erro centrada nos valores extrapolados.

#	Malha	$c_{l,min}$	$c_{l,máx}$	$c_{d,min}$	$c_{d,máx}$
ER-1	FM050	0.70973	0.72013	116.12185	119.49897
ER-2	FM100	0.71658	0.72585	112.26964	116.49425
ER-3	FM200	0.72070	0.72262	112.16941	114.94380
ER-4	C50-200	0.71619	0.72273	117.59348	120.47407
ER-5	M50-200	0.71866	0.72986	112.01567	116.72395
ER-6	F50-200	0.72064	0.72787	111.96097	114.96484

São consideradas aptas à seleção como malha de trabalho aquelas cujos valores para os coeficientes de arrasto e de sustentação estejam dentro da banda de erro na Tab. (8.2.13). Esse critério elimina as malhas “C050”, “M050” e “C100”. Entre as malhas restantes, é selecionada a malha “F200” pelos melhores índices de convergência e a coerência na ordem de convergência devida a discretização e a posição do contorno. O fato dessa malha requerer quase o triplo de esforço computacional relativamente à malha “M200”, a segunda opção, não é considerado como um fator que inviabilize seu uso. Dessa forma, os resultados apresentados no capítulo 9 para a seção de aerofólio OAT15A utilizam a malha “F200”.

## 9 RESULTADOS

### 9.1 NACA 0012

Os resultados para o coeficiente de arrasto  $c_d$  utilizando o modelo de turbulência  $k-\omega/SST$  e seções de aerofólio NACA 0012 com ângulo de ataque  $\alpha = 0^\circ$ , de acordo com os casos descritos na Tab. (3.1), são a seguir apresentados. Em todas as simulações foram utilizadas as malhas de trabalho determinadas pelos estudos de dependência apresentados no capítulo 8. Os valores de referência e as condições iniciais e de contorno são descritos nas tabelas (8.1.1) e (8.1.2) respectivamente.

A diferença entre os valores de  $M_\infty$  e  $Re_c$  entre os casos da Tab. (3.1) é explicada pela corda  $c = 0.6$  m, empregada no caso B3-6, e a corda  $c = 0.8$  m, adotada nos casos C12 e O200. Esses últimos dois casos foram simulados para que fosse possível comparar os resultados obtidos nesse trabalho com aqueles apresentados em artigo por Zingg [1992]. Nesse artigo, foram utilizadas malhas de topologia “C” estruturadas e de geração hiperbólica para ângulos de ataque  $\alpha$  variando de zero a  $12^\circ$ .

Os parâmetros do solucionador algébrico das equações de transporte foram configurados de acordo com a metodologia numérica de solução segregada do Star-CCM+ e são apresentados na Tab. (9.1.1) a seguir.

Tabela 9.1.1 – Parâmetros de configuração do solucionador algébrico.

Caso	Condição de parada	<i>Sub-relaxação</i>				
	Norma do resíduo	$\mu_i$	$k, \omega$	Velocidade	Pressão	Esquema
B3-6	$k < 1E-6$	1.0	0.8	0.7	0.3	Gauss-Seidel
C12	$k \cong 5E-7$	1.0	0.8	0.7	0.3	Gauss-Seidel
O200	$k < 1E-8$	1.0	0.8	0.7	0.3	Gauss-Seidel

Na Tab. (9.1.1) e gráficos que seguem a norma do resíduo é a média quadrática sobre todas as células obtida pelo solucionador algébrico através da Eq. (9.1) a seguir:

$$\text{Norma do resíduo} = \sqrt{\frac{\sum_{n \text{ células}} r^2}{n}} \quad (9.1)$$

Na equação anterior, o resíduo “ $r$ ” é o termo à direita na Eq. (5.25) onde o escalar  $\phi$  é a energia cinética turbulenta  $k$ . Para uma solução perfeitamente convergida, o resíduo é igual ao erro de arredondamento de máquina.

Os históricos de convergência das simulações, figuras (9.1.1) a (9.1.5), oferecem uma visão sobre o comportamento dos modelos NACA 0012 submetidos aos casos descritos na Tab. (3.1). Em todas as simulações, acompanha-se a evolução da norma dos resíduos de massa (“Continuity”), momentum em X (“X-momentum”), momentum em Y (“Y-momentum”), energia cinética turbulenta (“Tke”) e taxa de dissipação específica (“Sdr”).

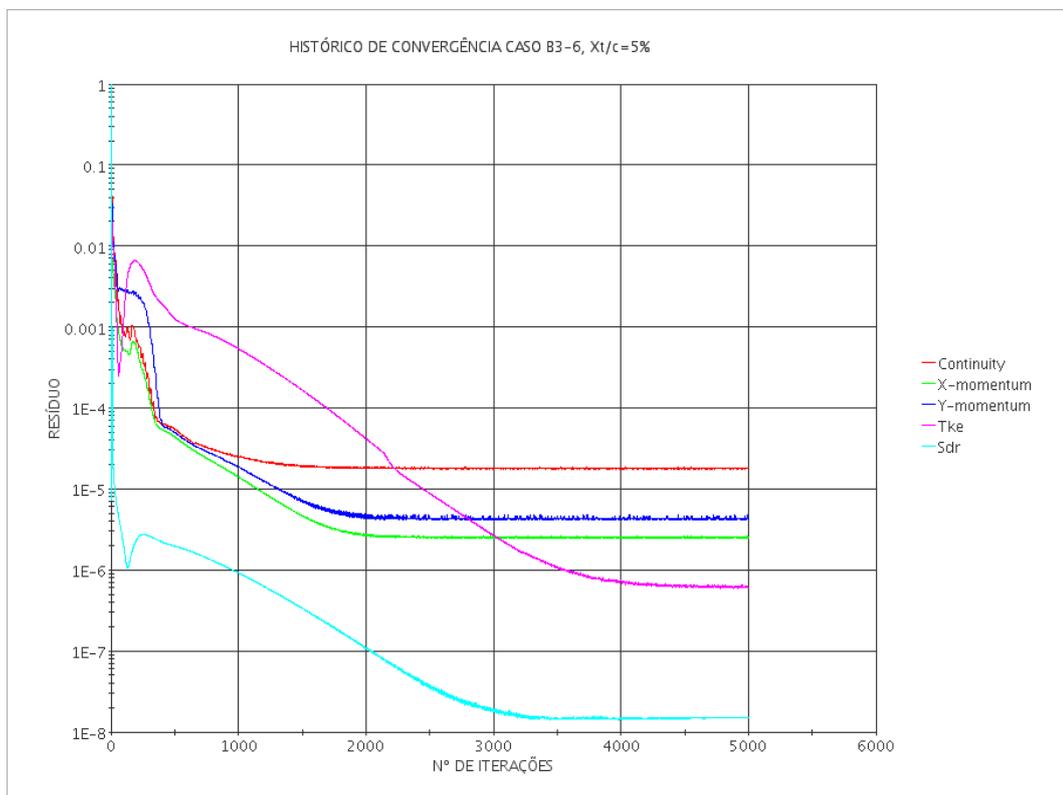


Figura 9.1.1 – Histórico de convergência, caso B3-6,  $x_t / c = 5\%$ , NACA 0012.

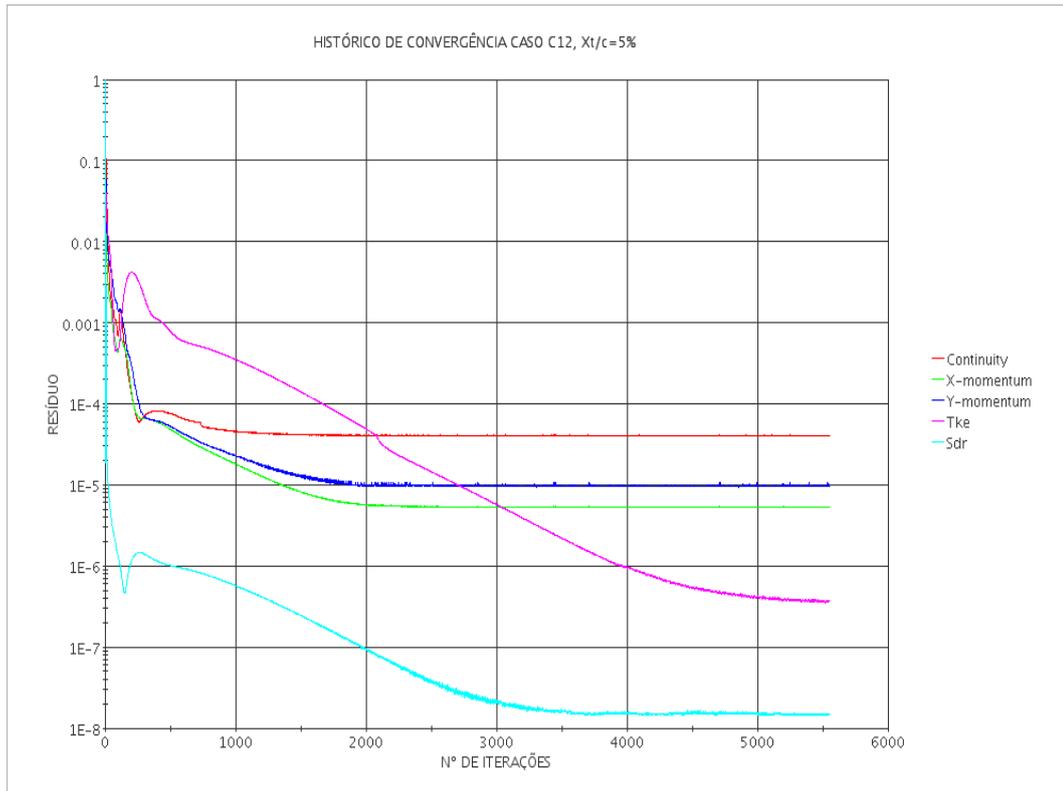


Figura 9.1.2 – Histórico de convergência, caso C12,  $x_t / c = 5\%$ , NACA 0012.

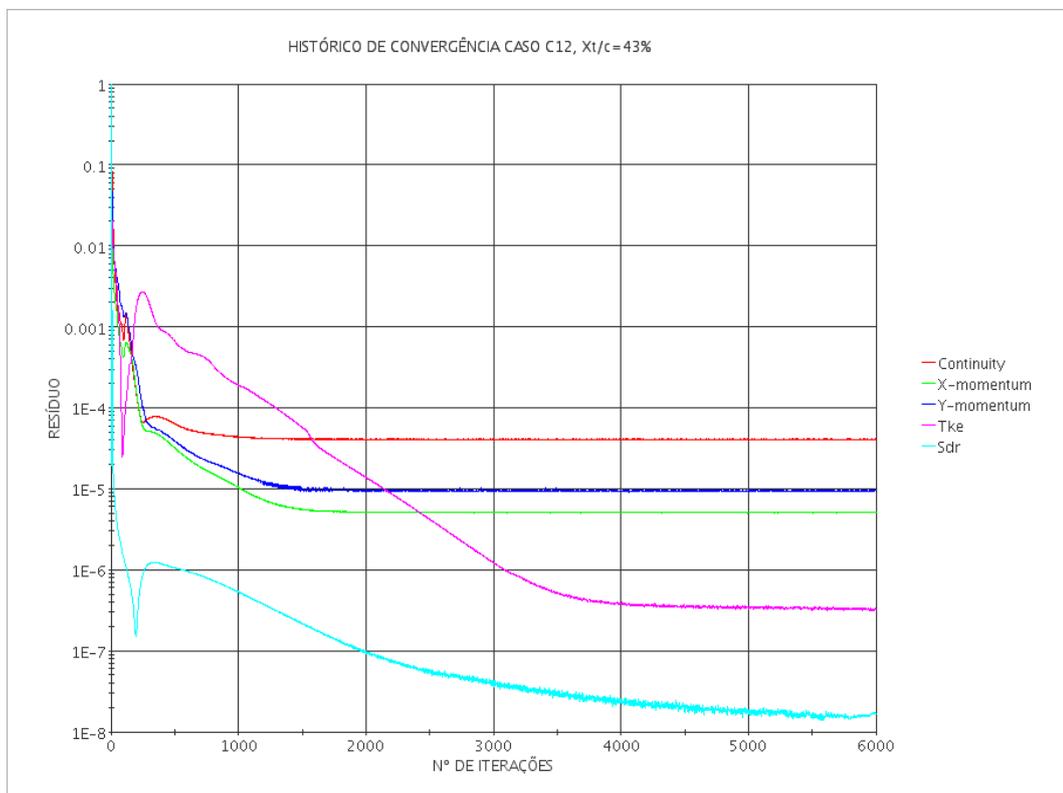


Figura 9.1.3 – Histórico de convergência, caso C12,  $x_t / c = 43\%$ , NACA 0012.

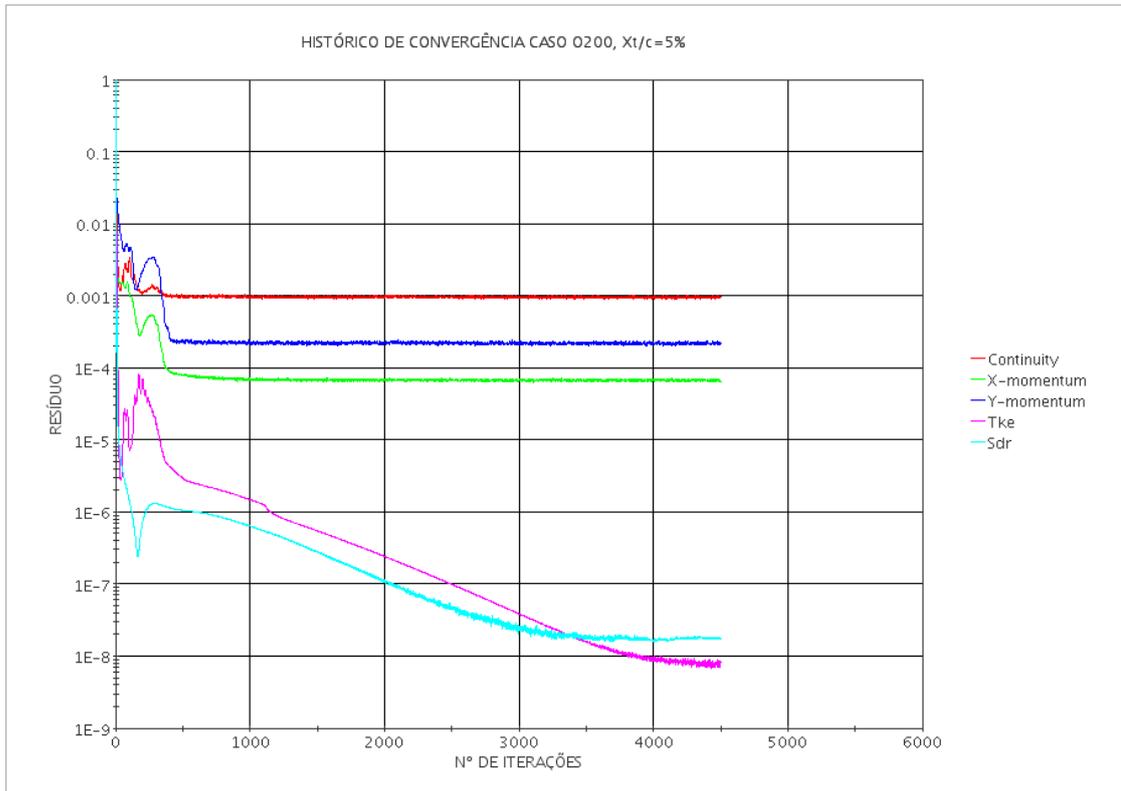


Figura 9.1.4 – Histórico de convergência, caso O200,  $x_t / c = 5\%$  , NACA 0012.

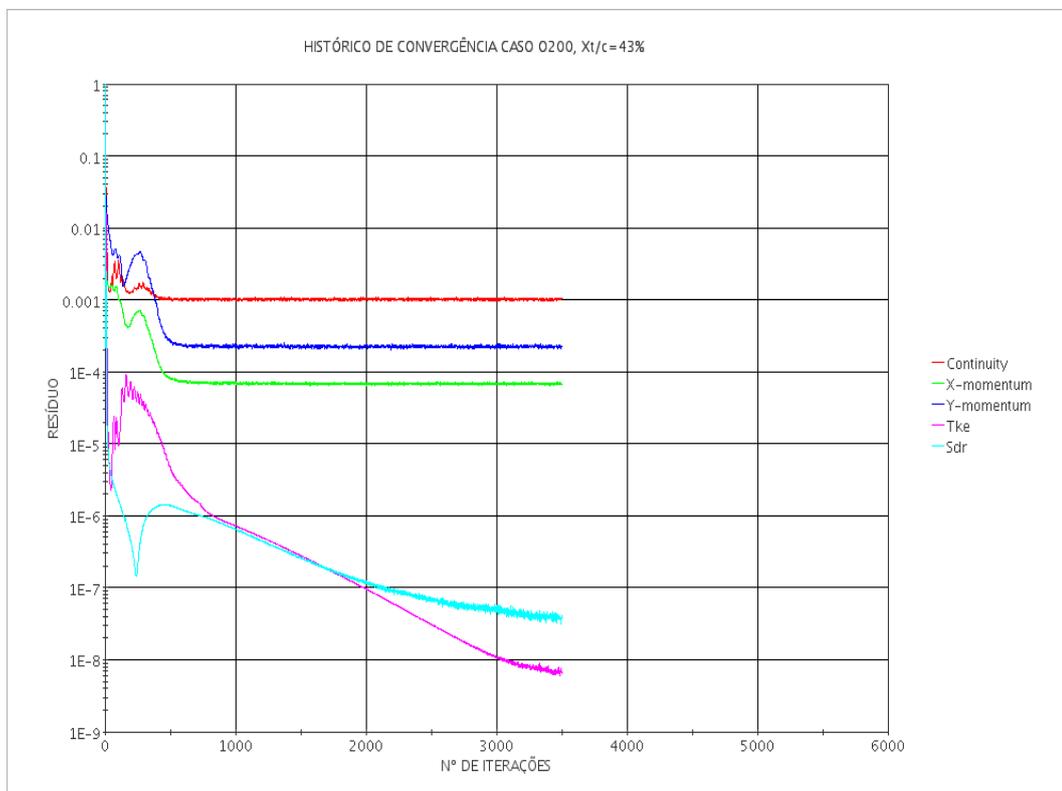


Figura 9.1.5 – Histórico de convergência, caso O200,  $x_t / c = 43\%$  , NACA 0012.

O histórico de convergência do coeficiente de arrasto para os casos B3-6, C12 e O200 onde  $x_t / c = 5\%$ , Fig. (9.1.6), mostra que esse coeficiente converge para seu valor final com ~3500 iterações, coincidindo com o ponto a partir do qual o resíduo da taxa de dissipação específica atinge aproximadamente seu menor valor.

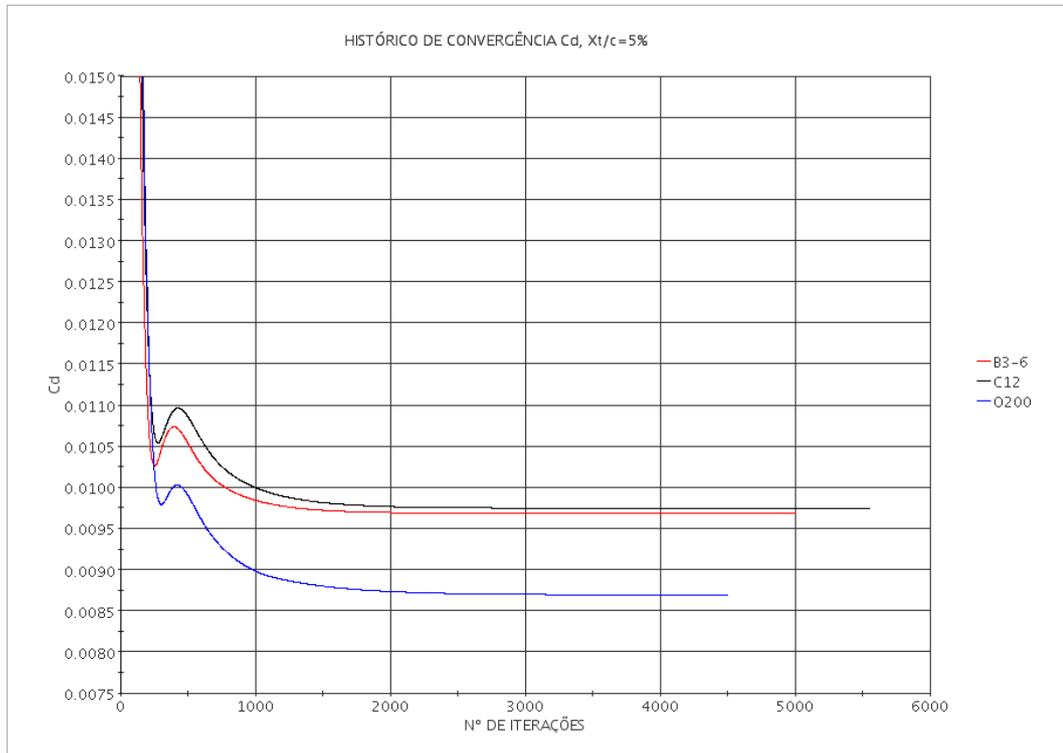


Figura 9.1.6 – Histórico de convergência  $c_d$ , casos B3-6, C12 e O200,  $x_t / c = 5\%$

Para os casos C12 e O200 onde  $x_t / c = 43\%$ , Fig. (9.1.7), o histórico de convergência do coeficiente de arrasto mostra que esse atinge seu valor final após ~2000 iterações, não exibindo um comportamento acoplado à queda do resíduo da taxa de dissipação específica como nos casos anteriores. Esse comportamento sugere que a posição da transição do escoamento ao regime turbulento influencia o solucionador algébrico e a expectativa de convergência da solução.

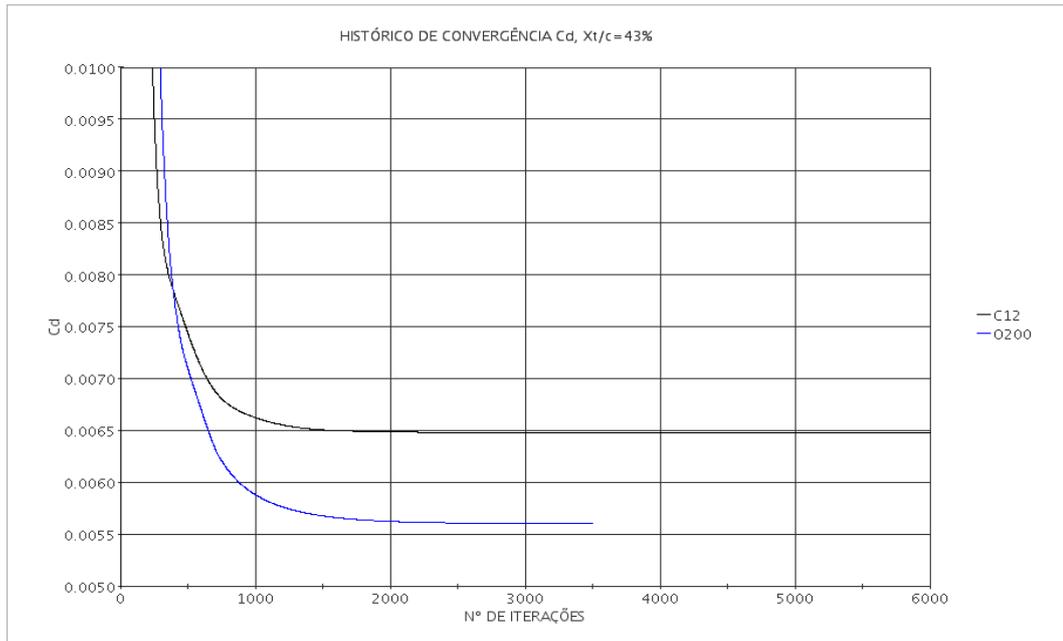


Figura 9.1.7 – Histórico de convergência  $c_d$ , casos C12 e O200,  $x_t / c = 43\%$

O valor de  $y^+$  ao longo da posição adimensional  $x/c$  é apresentado nas figuras (9.1.8) a (9.1.12), correspondentes aos casos da Tab. (3.1). O aspecto serrilhado da curva no caso B3-6 é atribuído a uma assimetria na distribuição de pressões entre dorso e intradorso, situação essa associada ao posicionamento das paredes da seção muito próximas do contorno (de 3 a 6 cordas) onde o escoamento é não perturbado.

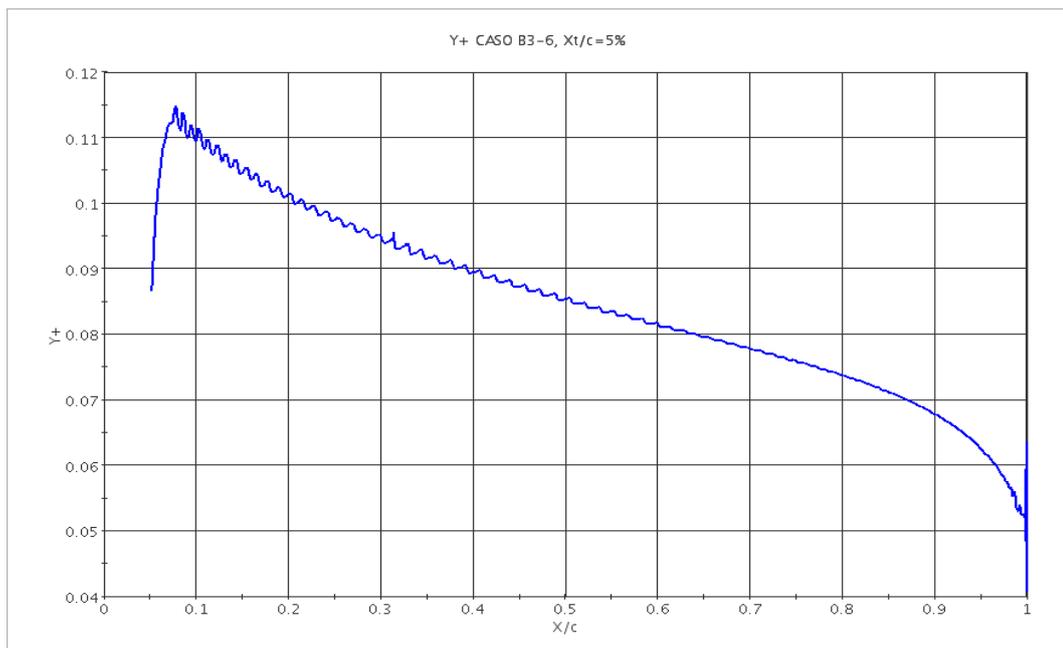


Figura 9.1.8 –  $y^+$  Caso B3-6,  $x_t / c = 5\%$

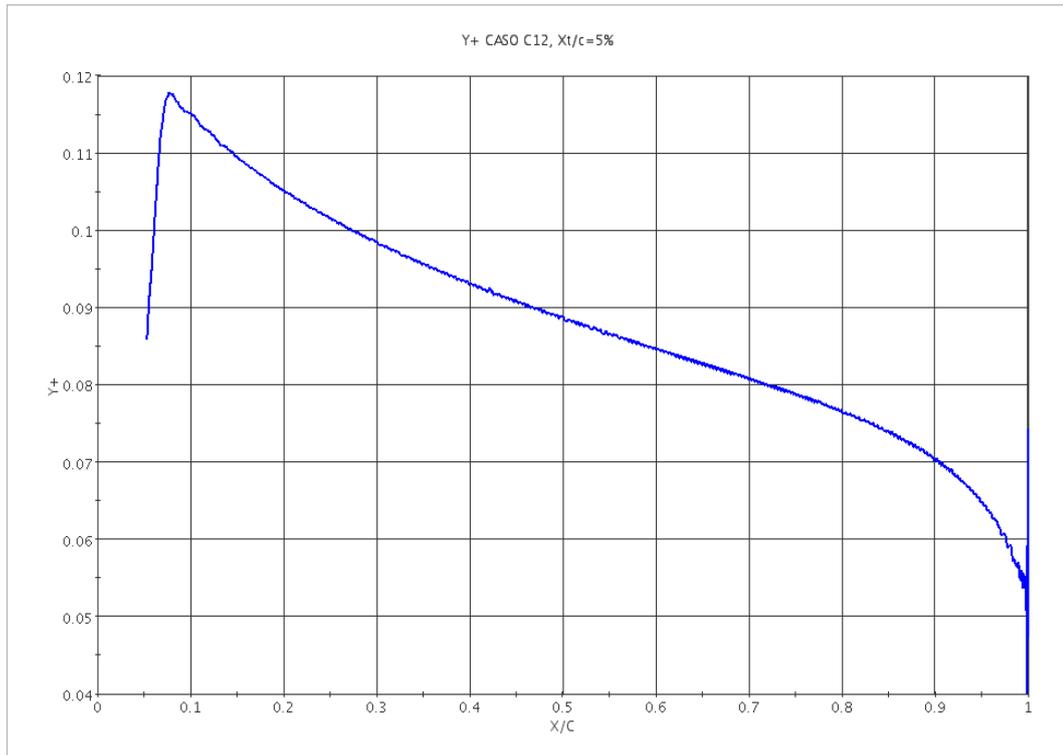


Figura 9.1.9 –  $y^+$  Caso C12,  $x_t / c = 5\%$

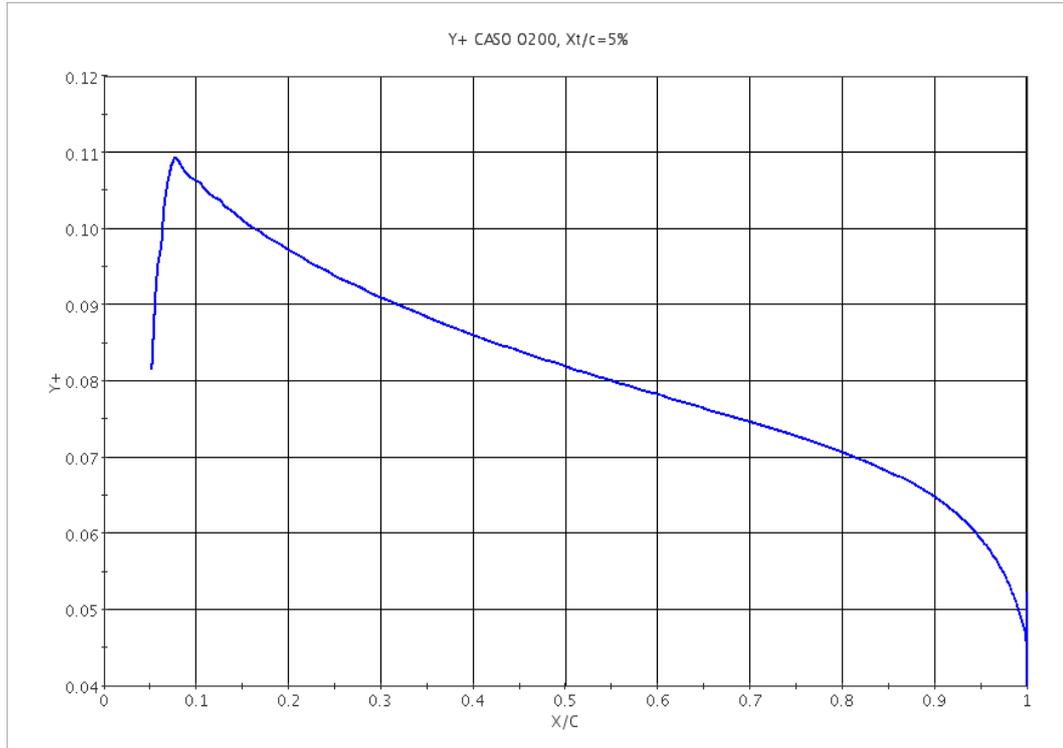


Figura 9.1.10 –  $y^+$  Caso O200,  $x_t / c = 5\%$

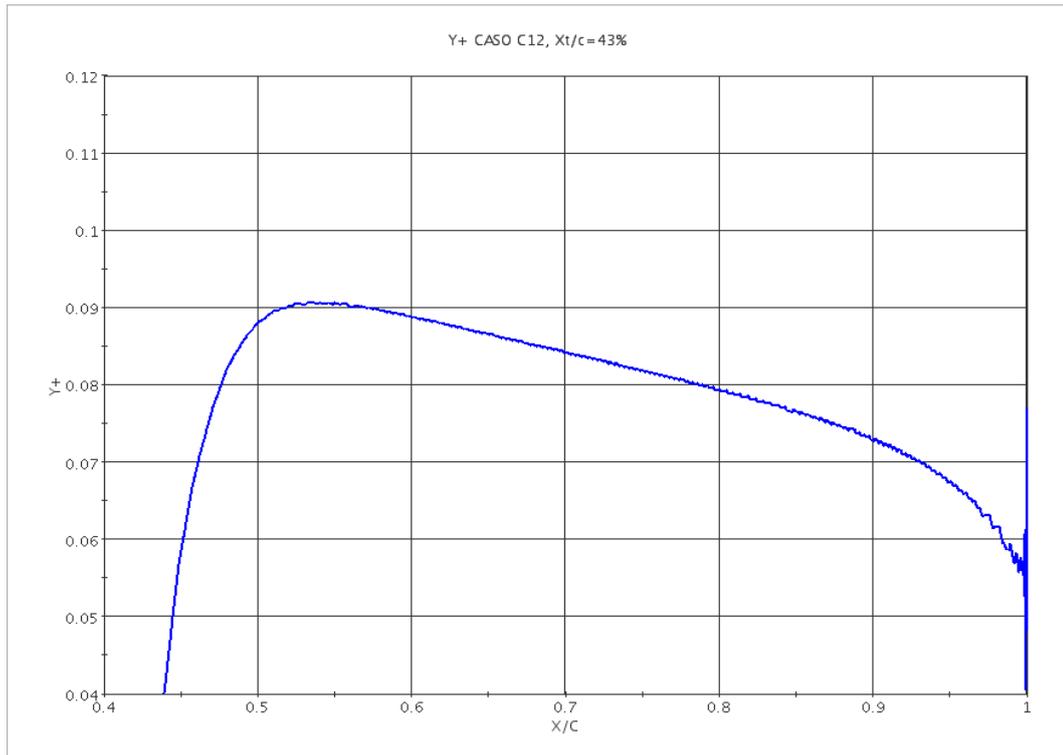


Figura 9.1.11 –  $y^+$  Caso C12,  $x_t / c = 43\%$

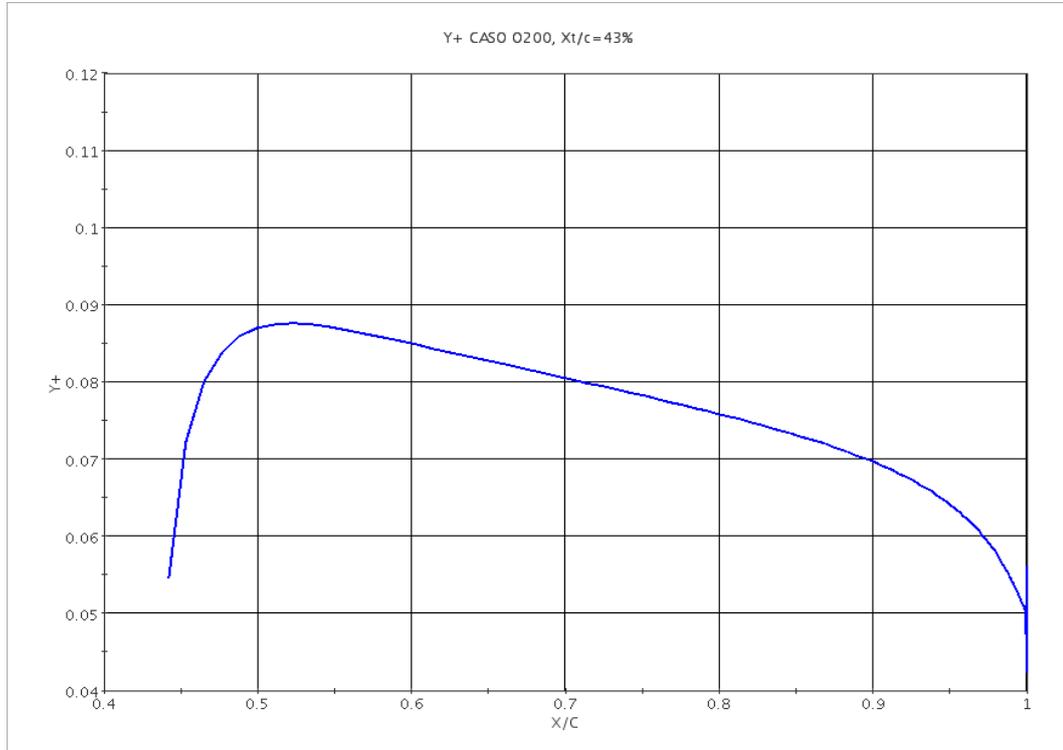


Figura 9.1.12 –  $y^+$  Caso O200,  $x_t / c = 43\%$

A Fig. (9.1.13) apresenta o coeficiente de pressão  $c_p$  comparado entre os casos da Tab. (3.1). Nessa figura,  $c_p$  é grafado versus  $x/c$ . O caso B3-6 tem sua transição prescrita em  $x_t/c = 5\%$ . Os demais casos, C12 e O200, são apresentados para  $x_t/c = 5\%, 43\%$ . A seta “A” indica a região no entorno de  $x_t/c = 5\%$ , enquanto as setas “B” e “C” indicam a transição no entorno de  $x_t/c = 43\%$ . No Star-CCM+, a prescrição da posição da transição suprime a turbulência para  $x/c < x_t/c$ , fazendo que a estimativa da posição da transição calculada pelo modelo de turbulência  $k-\omega/SST$  em termos de um número de Reynolds crítico  $Re_{x,critico}$  [Wilcox, 1998] seja ignorada a partir do ponto prescrito. Isso justifica a existência de duas regiões de descontinuidade nos casos C12 e O200 onde  $x_t/c = 43\%$  (legendas “C12-43” e “O200-43” na figura). No bordo de fuga há uma dispersão de valores devida à concentração de células com a mesma ordenada.

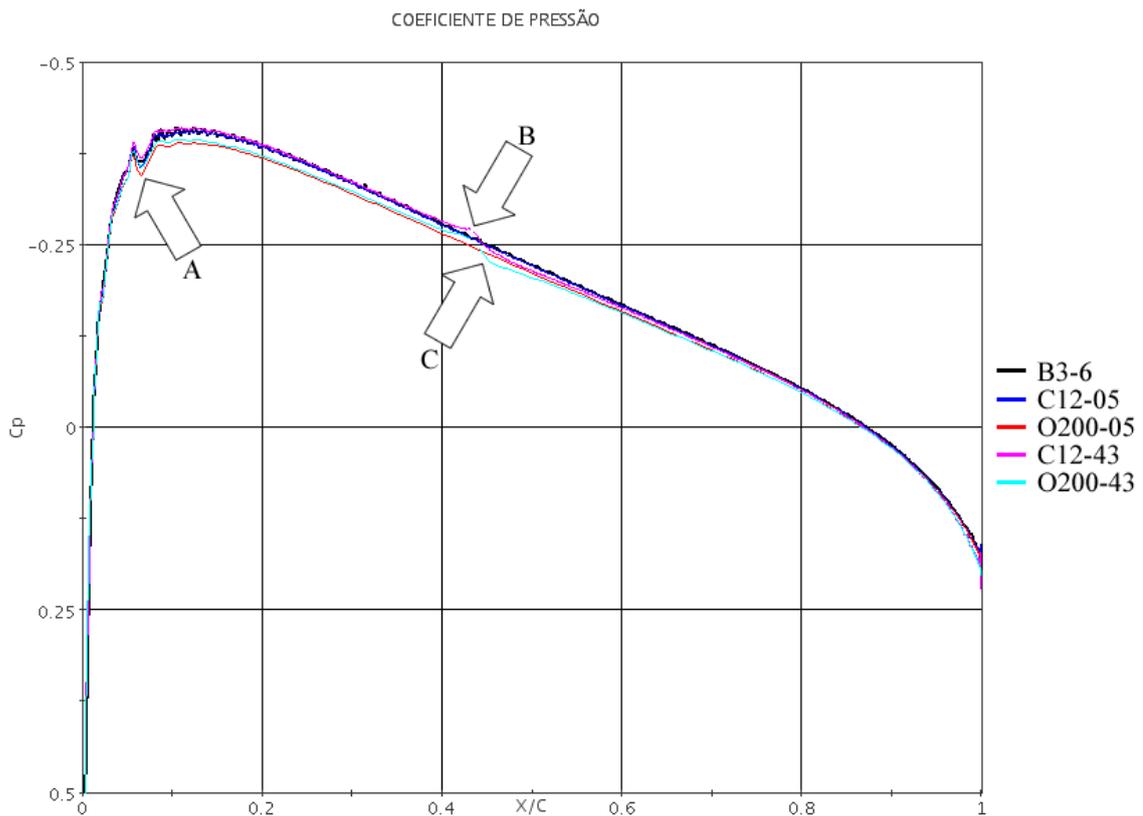


Figura 9.1.13 – Coeficientes de pressão, Casos B3-6, C12, O200,  $x_t/c = 5\%, 43\%$

A Tab. (9.1.2) consolida os resultados das simulações aplicadas ao modelo NACA 0012 de acordo com os casos descritos na Tab. (3.1) e o caso “A7A” [Zingg, 1992]. Esses

resultados são comparados em termos de uma diferença percentual com aqueles obtidos pelo emprego das equações (3.1) e (3.2) [McCroskey, 1987] para  $x_t / c = 5\%$  e  $x_t / c = 43\%$  respectivamente.

Tabela 9.1.2 – Resultados consolidados dos casos aplicados ao modelo NACA 0012

Caso	$x_t / c$ %	$Re_c$	Células	$N_{CL}$	$y_{\max}^+ <$	$c_{d,p}$	$c_{d,v}$	$c_d$	McCroskey	$\Delta\%$
B3-6	5	3.00E+06	78976	76	0.12	22.2	74.7	96.8	90.4	7.1
C12	5	2.88E+06	86656	88	0.12	22.8	74.6	97.4	90.9	7.2
O200	5	2.88E+06	102432	84	0.11	14.7	72.2	86.9	90.9	-4.4
C12	43	2.88E+06	86656	88	0.10	16.2	48.5	64.8	63.3	2.3
O200	43	2.88E+06	102432	84	0.09	8.7	47.3	56.0	63.3	-11.6
A7A	43	2.88E+06	95921	N/D	0.02	8.1	50.3	58.4	63.3	-7.8

Na Tab. (9.1.2),  $c_d = c_{d,p} + c_{d,v}$  onde os termos no lado direito são as contribuições devidas ao campo de pressões e atrito viscoso respectivamente. A variação percentual  $\Delta\%$  é calculada relativamente ao valor obtido pelo emprego da Eq. (3.1) ou (3.2) sob a coluna “McCroskey”.

O exame dos resultados para  $x_t / c = 5\%$  indica que a posição do contorno tem influência significativa na solução do campo de pressões que determina o termo  $c_{d,p}$  do coeficiente de arrasto. Os casos B3-6 e C12, ambos utilizando malhas não estruturadas mas de topologias e condições de contorno distintas, geram resultados bastantes próximos mesmo levando-se em consideração a pequena diferença no valor  $Re_c$  de avaliação. O caso O200 que emprega malha estruturada mostra uma notável queda no valor de  $c_{d,p}$  com o aumento para 200 cordas da distância entre as paredes da seção e o contorno. O termo  $c_{d,v}$  é aproximadamente o mesmo entre esses casos sugerindo que  $N_{CL}$  foi corretamente estimado. Na malha estruturada de geração hiperbólica (O200) não há uma divisão topológica ou geométrica entre a camada limite e o campo do escoamento como ocorre nas malhas não estruturadas. Essa característica elimina erros na avaliação de  $c_{d,v}$  devidos à insuficiência de volumes dentro da camada limite ou de resolução na porção exterior da mesma. Para  $x_t / c = 5\%$ , a malha estruturada com posição do contorno situado a 200 cordas, caso O200, apresentou o resultado mais próximo àquele obtido com a Eq. (3.1).

Os resultados para  $x_t / c = 43\%$  permitem uma comparação direta entre os casos C12 e A7A. Ambos casos são de mesma topologia (“C-Mesh”), mesmas condições de contorno e

iniciais, com a posição do escoamento não perturbado situada a 12 cordas das paredes da seção. O número de células aproximadamente o mesmo entre esses casos foi obtido com a escolha criteriosa da dimensão base e aplicação da metodologia de geração de malhas ao caso C12. A diferença fundamental entre esses casos é o tipo de malha, não estruturada e poliédrica para o caso C12 e estruturada com geração hiperbólica para o caso A7A. Outra diferença é o modelo de turbulência Baldwin-Lomax (“BL”) do caso A7A em contraste com o modelo  $k-\omega$ /SST do caso C12. A comparação da contribuição de  $c_{d,p}$  e  $c_{d,v}$  entre esses casos indica uma diferença marcante nessas estimativas, em particular para  $c_{d,p}$  que no caso A7A parece estar subestimado comparativamente ao caso C12 e no computo geral relativamente ao valor obtido através da Eq. (3.2) (i.e.,  $c_d = 63.3$ ). Essa subestimativa parece ser uma característica da malha estruturada já que se repete no caso O200.

## 9.2 OAT15A

Os resultados numéricos utilizando os modelos de turbulência Spalart-Allmaras e  $k-\omega$ /SST para os Casos 11 e 14, Tab. (3.2), são a seguir apresentados. Esses resultados são comparados e interpretados de forma consolidada, sob os aspectos numérico e fenomenológico. Algumas análises utilizam dados experimentais do Caso 14 que embora não seja objeto de estudo neste trabalho, tem as mesmas condições de contorno e iniciais do Caso 11 para diferentes medições realizadas. Em todas as simulações foi utilizada a malha mais refinada, “F200”, onde a transição ao escoamento turbulento foi prescrita em  $x_t / c = 7\%$ . Os valores de referência e as condições iniciais e de contorno são descritas nas tabelas (8.2.1) e (8.2.2) respectivamente.

A Tab. (9.2.1) apresenta as condições iniciais empregados na simulação utilizando os modelos SA e  $k-\omega$ /SST. Nessa tabela,  $p_{i,rel}$  é a pressão inicial na fronteira relativa à pressão de referência  $p_0$ .  $T_{i,est}$  é a temperatura estática inicial,  $\mu_t / \mu_0$  a razão entre as viscosidades turbulenta e de referência e  $U_i$  a velocidade inicial.  $I$  é a intensidade de turbulência, aplicável somente ao modelo  $k-\omega$ /SST.

Tabela 9.2.1 – Condições iniciais, modelos SA e  $k-\omega$ /SST.

Modelo	$p_{i,rel}$ [Pa]	$T_{i,est}$ [K]	$\mu_t / \mu_0$	$U_i$ [m/s]	<b>I</b>
SA	0.0	300	10.0	251.3208	
$k-\omega$ /SST	0.0	300	10.0	251.3208	0.01

Para o modelo SA, o valor inicial da difusividade turbulenta modificada  $\tilde{\nu}_i$  é obtido pela Eq. (8.2.1). O valor inicial da energia cinética turbulenta  $k_i$  é estimado a partir de  $U_i$  e  $I$  pela Eq. (8.1.1). A taxa de dissipação específica  $\omega_i$  é estimada a partir do valor de  $k_i$  e pela razão  $\mu_t / \mu_0$  através da Eq. (8.1.2).

A Tab. (9.2.2) apresenta as condições de contorno onde  $p_{\infty,rel}$  é a pressão na fronteira relativa à pressão de referência  $p_0$ .  $k_{\infty}$  representa a energia cinética turbulenta e  $\omega_{\infty} \sim k_{\infty} / \varepsilon_{\infty}$  é a taxa de dissipação específica do escoamento livre.  $k_{\infty}$  e  $\varepsilon_{\infty}$  seguem dados do túnel de vento adotados por Bigarella e Azevedo [2007], onde  $k_{\infty} = 0.07$  J/kg e  $\varepsilon_{\infty} = 0.4$  J/kg · s .

Tabela 9.2.2 – Condições de contorno, modelos SA e  $k-\omega$ /SST.

Modelo	$\alpha$	$T_{\infty}$ [K]	$c_{\infty}$ [m/s]	$M_{\infty}$	$U_{\infty}$ [m/s]	$Re_c$	$p_{\infty,rel}$	$\mu_t / \mu_0$	$k_{\infty}$ [J/kg]	$\omega_{\infty}$ [1/s]
SA	1.15°	300	347.1282	0.724	251.3208	3E6	0.0	10		
$k-\omega$ /SST	1.15°	300	347.1282	0.724	251.3208	3E6	0.0		0.07	0.175

Os parâmetros de configuração do solucionador algébrico, Tab. (9.2.3), foram configurados de acordo com a metodologia numérica de solução acoplada. A condição de parada é a convergência ao erro de máquina, onde o resíduo obtido pela Eq. (9.1) é normalizado pelos valores máximos de  $\nu_t$  ou  $\omega$  obtidos entre as cinco primeiras iterações.

Tabela 9.2.3 – Parâmetros de configuração do solucionador, modelos SA e  $k-\omega$ /SST

Modelo de turbulência	$CFL$	Condição de parada	<i>Sub-relaxação</i>		
		Resíduo normalizado	Modelo	Viscosidade	Esquema
SA	5.0	$\nu_t / \nu_{t,max,5} \approx 1E-4$	0.7	1.0 ( $\nu_t$ )	Gauss-Seidel
$k-\omega$ /SST	5.0 a 1.0	$\omega / \omega_{max,5} \approx 1E-6$	0.8	1.0 ( $\mu_t$ )	Gauss-Seidel

As sub-relaxações são prescritas para os escalares nas equações de transporte do modelo de turbulência (“Sub-relaxação Modelo”,  $\nu$  ou  $\omega$ ) e para as viscosidades (“Sub-

relaxação Viscosidade”,  $\nu_t$  ou  $\mu_t$ ). Ainda de acordo com a metodologia numérica, o algoritmo (“Esquema”) de Gauss-Seidel é empregado no método algébrico de multi-malha.

Os históricos de convergência das simulações oferecem uma visão sobre o comportamento dos modelos SA e  $k-\omega$ /SST sob o ponto de vista de esforço computacional. Para ambos modelos, acompanham-se as evoluções dos resíduos para massa (“Continuity”), momentum em X (“X-momentum”), momentum em Y (“Y-momentum”) e energia (“Energy”). Para o modelo SA, o resíduo da difusividade turbulenta (“Sa\_nut”) é monitorado enquanto que para o modelo  $k-\omega$ /SST os resíduos da energia cinética turbulenta (“Tke”) e da taxa de dissipação específica (“Sdr”) são acompanhados. A palavra “resíduo” é aqui utilizada como sinônimo de resíduo normalizado.

Durante a simulação empregando o modelo SA, Fig. (9.2.1), o número de Courant-Friedrichs-Lewy  $CFL = 5.0$  foi mantido constante e maior que a unidade sem prejuízo à estabilidade numérica da solução. Essa estabilidade é atribuída à formulação e à metodologia numérica, onde as equações de transporte pré-condicionadas são resolvidas de forma acoplada com integração implícita no tempo. A convergência é obtida para momenta e energia após ~16000 iterações, enquanto que para a difusividade turbulenta a convergência é obtida somente após ~21000 iterações.

Na simulação com emprego do modelo  $k-\omega$ /SST, Fig. (9.2.2), o número de Courant-Friedrichs-Lewy  $CFL = 5.0$  foi mantido até ~15000 iterações. Após, foi reduzido para  $CFL = 1.0$  e mantido nesse patamar até o final. A redução do número de Courant-Friedrichs-Lewy teve como efeito uma pequena queda nos resíduos, exceto para energia cinética turbulenta (“Tke”). Esse resíduo, a partir de ~10000 iterações, apresentou um comportamento quase divergente cuja explicação remete à utilização das equações de amortecimento (4.3.11) a (4.3.13). Nessas equações, os coeficientes  $\beta_1^*$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha^*$  tem seu valores modificados para garantir a consistência assintótica junto à parede onde para  $y$  tendendo a zero,  $k / y^2$  tende a um valor constante e  $\varepsilon / k$  tende a assumir o valor  $2\nu / y^2$  [Wilcox, 1998]. A desativação do uso dessas equações no solucionador, com aproximadamente 19000 iterações, permitiu a queda dos resíduos de energia cinética turbulenta e da taxa de dissipação específica, sendo observada uma redução de 3 drag counts no valor de  $c_d$ . Esse comportamento é justificado pela alteração do número de Reynolds de transição previsto pelo modelo e que é afetado pelos coeficientes modificados pelas equações de amortecimento. A condição de parada, no caso do modelo  $k-\omega$ /SST, foi obtida com ~24000 iterações.

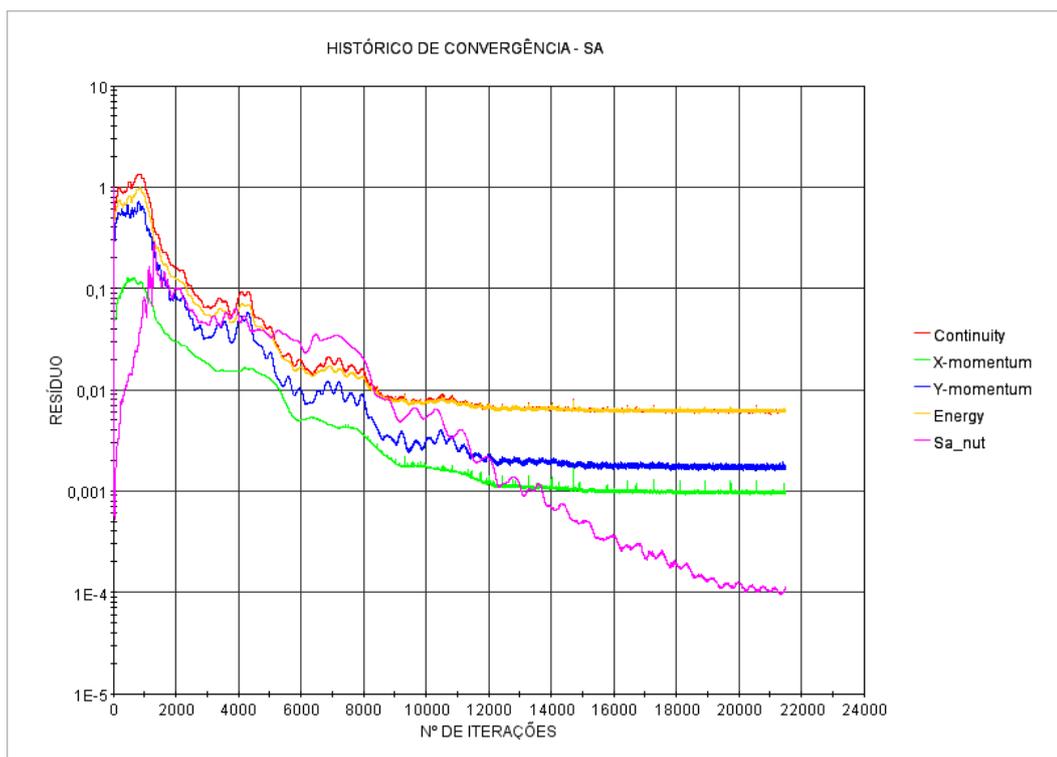


Figura 9.2.1 – Histórico de convergência, modelo SA

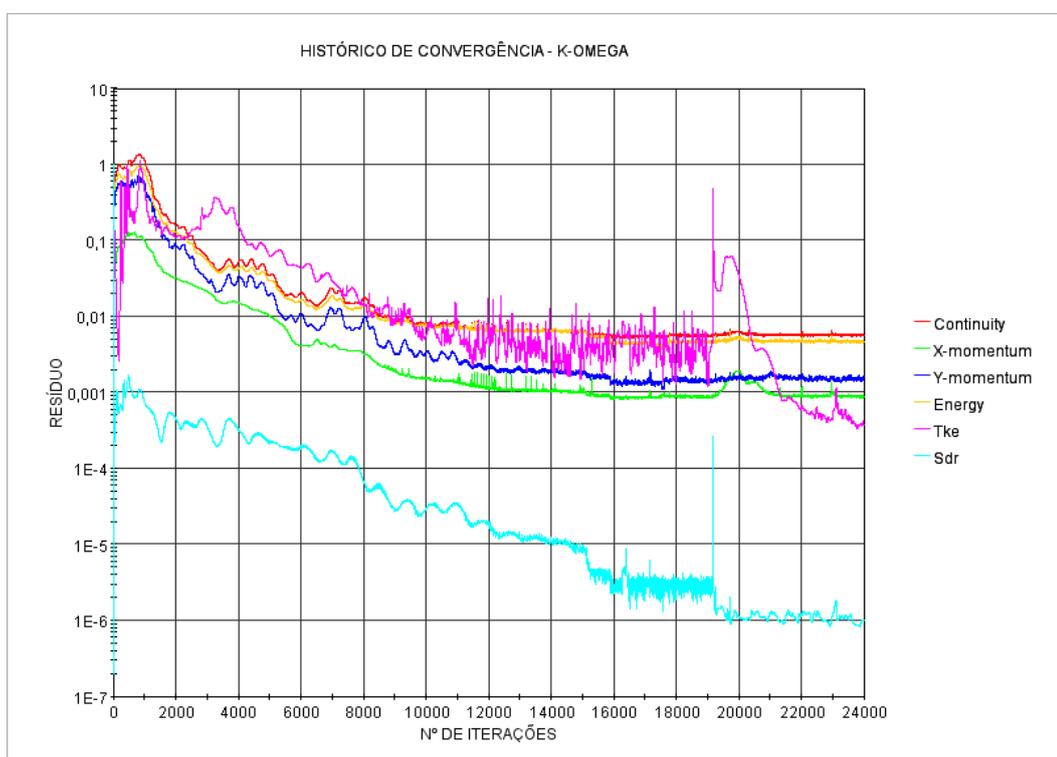


Figura 9.2.2 – Histórico de convergência, modelo  $k-\omega$ /SST

O histórico de convergência do coeficiente de arrasto para o modelo SA, Fig. (9.2.3), mostra que esse converge para seu valor final com ~16000 iterações, coincidindo com o ponto

a partir do qual os resíduos de momento, massa e energia atingem seus valores mais baixos e estáveis. Comportamento semelhante apresenta o modelo  $k-\omega$ /SST, Fig. (9.2.4), onde após ~19000 iterações pode ser observada a estabilidade no valor desse coeficiente.

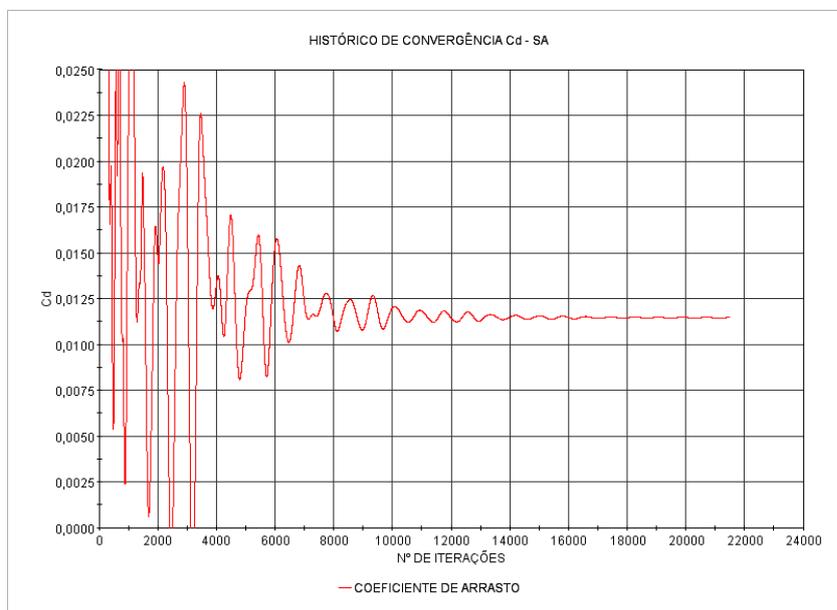


Figura 9.2.3 - Histórico de convergência, coeficiente de arrasto, modelo SA.

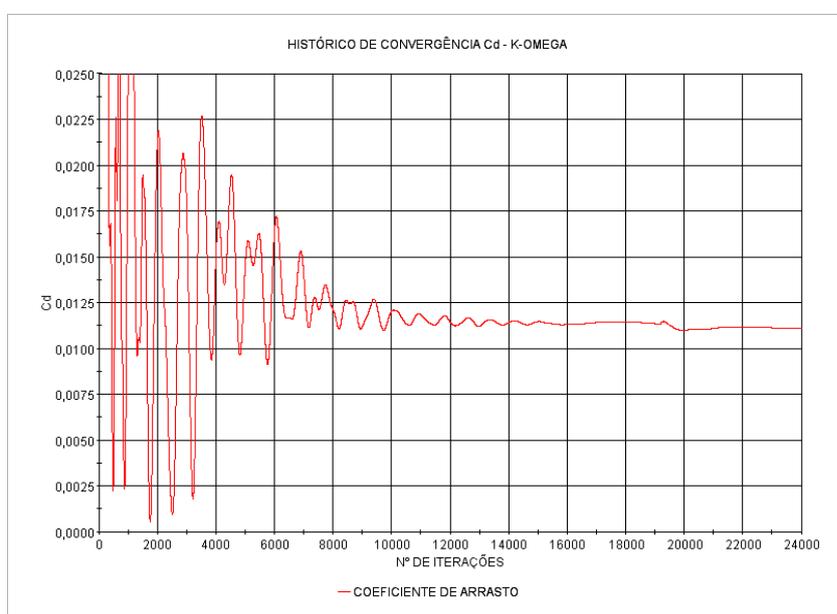


Figura 9.2.4 - Histórico de convergência, coeficiente de arrasto, modelo  $k-\omega$ /SST.

O histórico de convergência do coeficiente de sustentação para o modelo SA é apresentado na Fig. (9.2.5), onde se observa que a convergência é obtida a partir de ~14000 iterações. A Fig. (9.2.6) apresenta o histórico para o modelo  $k-\omega$ /SST onde a desativação no

uso das equações de amortecimento teve efeito negligenciável na convergência desse coeficiente, obtida a partir de ~14000 iterações.

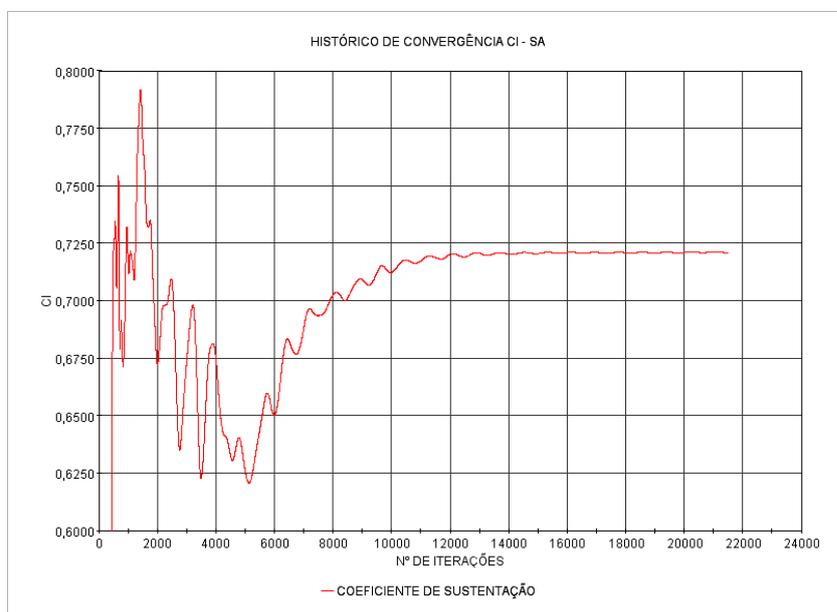


Figura 9.2.5 - Histórico de convergência, coeficiente de sustentação, modelo SA.

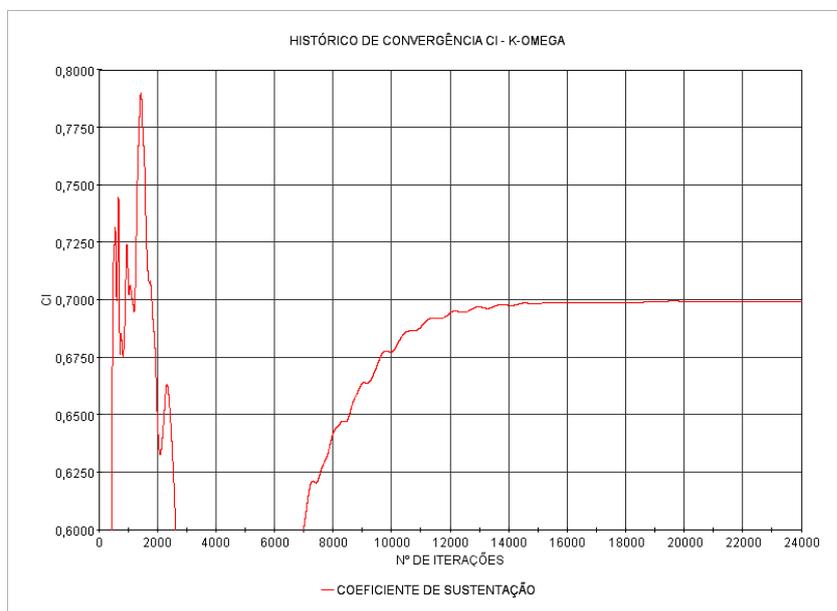


Figura 9.2.6 - Histórico de convergência, coeficiente de sustentação, modelo  $k-\omega/SST$ .

A verificação do valor de  $y^+$  ao longo das paredes turbulentas (à jusante de  $x/c = 7\%$  a turbulência é numericamente suprimida) é apresentada nas figuras (9.2.7) e (9.2.8), modelos SA e  $k-\omega/SST$  respectivamente. Em ambos os casos, a linha inferior representa o extradorso e

a linha superior o intradorso, sendo a distância horizontal  $x$  em relação ao bordo de ataque adimensionalizada pela corda  $c$ .

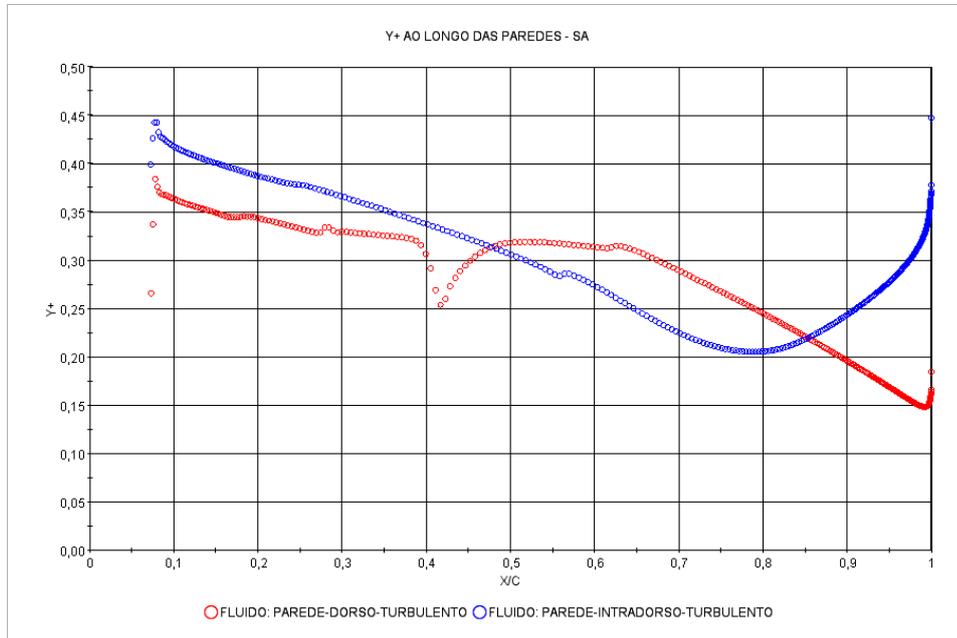


Figura 9.2.7 -  $y^+$  ao longo das paredes, modelo SA.

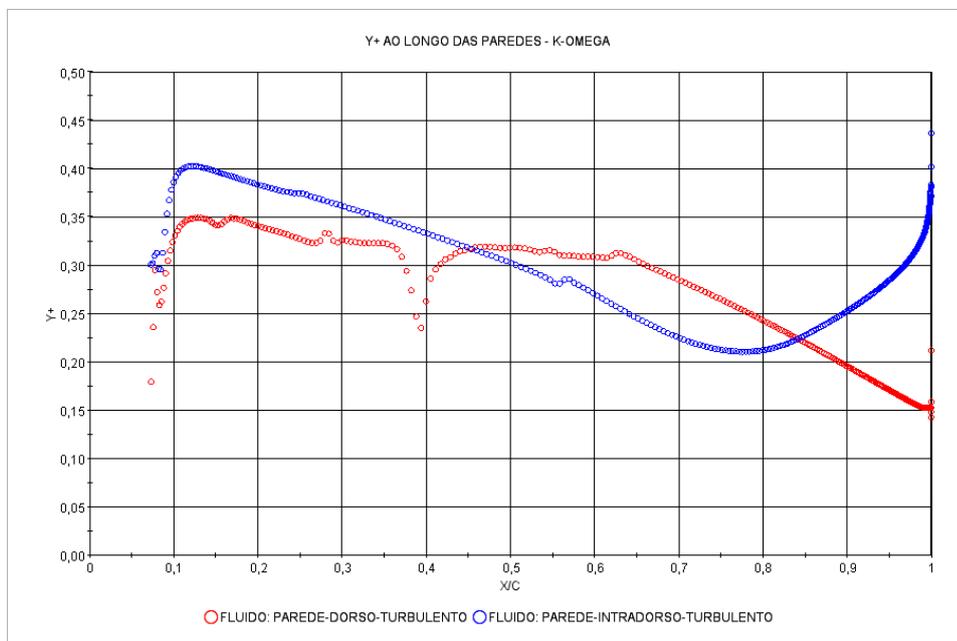


Figura 9.2.8 -  $y^+$  ao longo das paredes, modelo  $k-\omega$ /SST.

A discrepância notável nos valores de  $y^+$  para  $x/c \sim 7\%$  é atribuída ao tratamento da transição, prescrita. No modelo SA, o momentum e portanto a espessura da camada limite

parecem superestimados nessa região relativamente ao modelo  $k-\omega$ /SST, onde a espessura da camada limite cresce rapidamente para em  $x/c \sim 15\%$  tornar-se completamente turbulenta. Para os dois casos em  $x/c \sim 27\%$  ocorre uma desaceleração e espessamento da camada limite. Nas proximidades de  $x/c \sim 40\%$  há formação da onda de choque e interação com a camada limite. O modelo  $k-\omega$ /SST previu a posição da onda de choque mais à jusante (e portanto mais próximo do resultado experimental) que o modelo SA, indicando o melhor resultado no tratamento da transição pelo modelo  $k-\omega$ /SST. O comportamento qualitativo e quantitativo de ambos modelos a partir de  $x/c \sim 45\%$  é semelhante até a região do bordo de fuga, onde o modelo SA subestima momenta relativamente ao modelo  $k-\omega$ /SST. No bordo de fuga, ocorre o descolamento da camada limite e consequente recirculação.

As Figuras (9.2.9) e (9.2.10) apresentam para os modelos SA e  $k-\omega$ /SST respectivamente o coeficiente de pressão  $c_p$  comparado com o resultado experimental para o Caso 11, Tab. (A.3). Nessas figuras,  $c_p$  é grafado versus a distância horizontal ao bordo de ataque adimensionalizada pela corda,  $x/c$ . Para ambos os modelos e junto ao bordo de ataque, à montante do ponto prescrito de transição ( $x/c = 7\%$ ), há uma diferença pronunciada relativamente ao resultado experimental. No resultado numérico, o coeficiente de pressão é menor e mais à jusante que no resultado experimental, indicação de que a prescrição da transição no modelo numérico não equivale à fixação da transição no modelo físico. Nesse modelo, a informação sobre o efeito do arame de tropeço é propagada à montante do escoamento já que a variação de pressão característica da transição é observada para  $x/c < 5\%$ .

A onda de choque forma-se no extradorso do modelo físico para  $x/c \sim 30\%$  enquanto os modelos numéricos preveem  $x/c \sim 40\%$ , sendo que o modelo  $k-\omega$ /SST se aproxima mais do resultado experimental. A diferença na posição da onda de choque é atribuída a superestimativa de momentum com consequente espessamento da camada limite turbulenta, retardando o ponto onde o escoamento atinge a velocidade sônica e justificando a diferença de  $\sim 18\%$  a mais no resultado numérico do coeficiente de sustentação. Após a região de formação da onda de choque e ao longo do bordo de fuga e intradorso, os resultados numéricos acompanham os resultados experimentais.

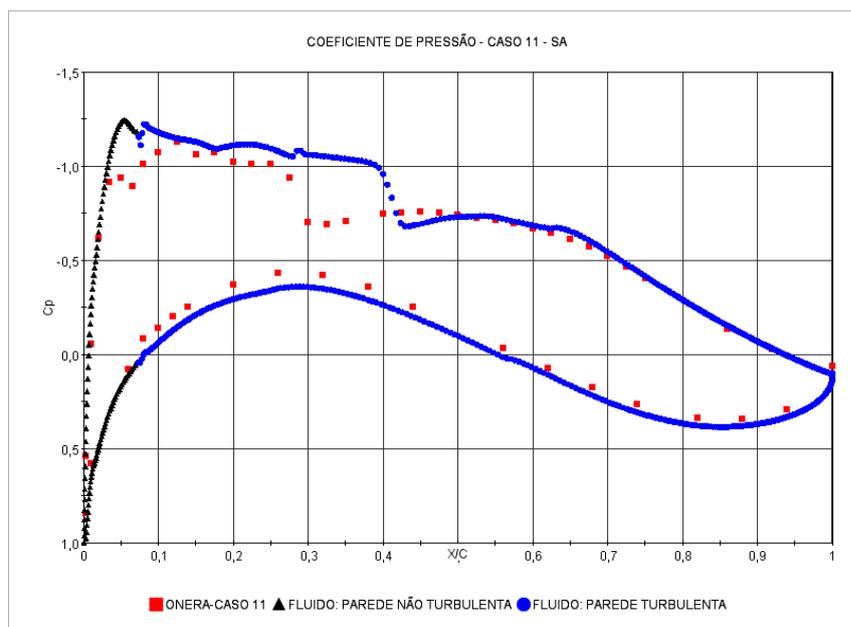


Figura 9.2.9 – Coeficientes de pressão, Caso 11, modelo SA.

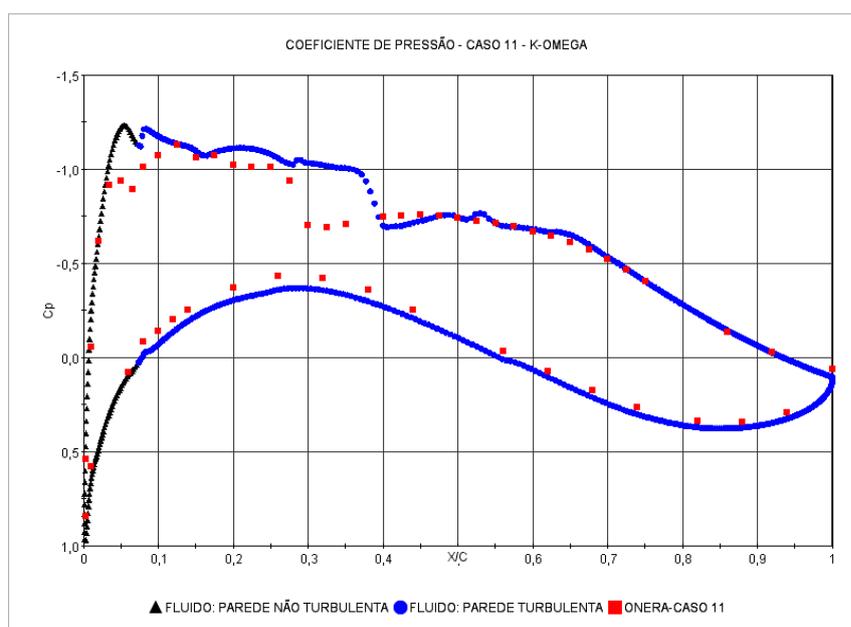


Figura 9.2.10 – Coeficientes de pressão, Caso 11, modelo  $k-\omega$ /SST.

As figuras (9.2.11) e (9.2.12) comparam os resultados numéricos com os resultados experimentais do Caso 14, Tab. (A.4). Apesar da proximidade das condições iniciais e de contorno entre os Casos 11 e 14, existem diferenças quantitativas significativas na distribuição de pressões no extradorso do modelo físico e na posição da onda de choque. A diferença no coeficiente de pressão experimental entre os Casos 11 e 14 pode ser atribuída à

flutuação na posição da onda de choque, bem mais à jusante no Caso 14 e portanto mais próxima dos resultados obtidos pelos dois modelos de turbulência, em particular o  $k-\omega$ /SST.

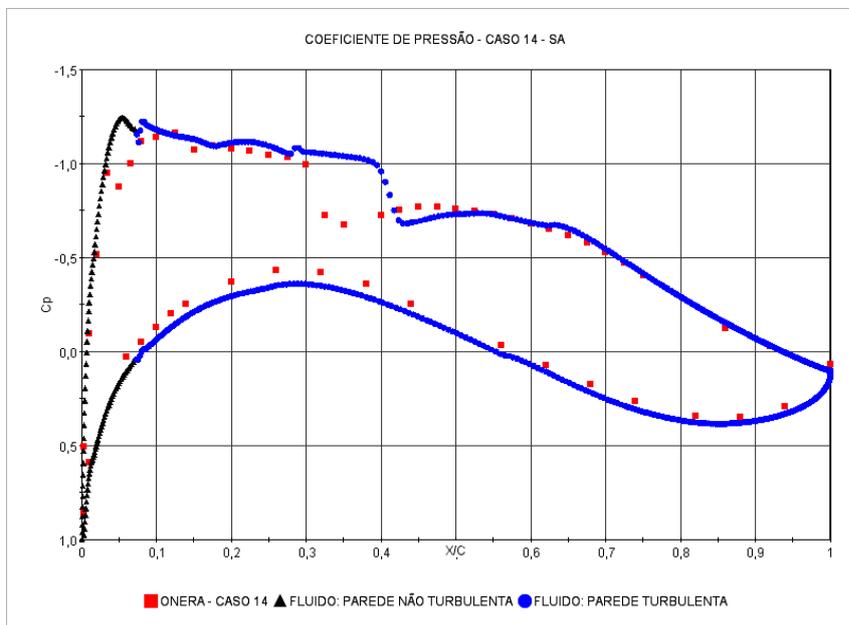


Figura 9.2.11 – Coeficientes de pressão, Caso 14, modelo SA.

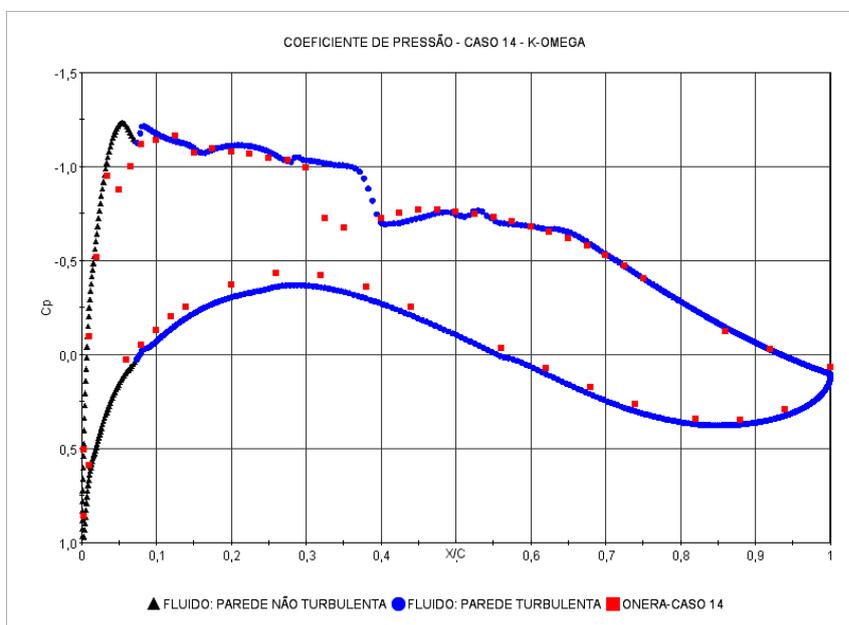


Figura 9.2.12 – Coeficientes de pressão, Caso 14, modelo  $k-\omega$ /SST.

As figuras (9.2.13) e (9.2.14) apresentam o perfil de velocidade no extradorso do aerofólio na posição  $x/c = 27\%$ . O perfil é pesquisado a partir da parede, sendo à distância à

parede  $y$  e adimensionalizada pela corda  $c$ . A velocidade local  $U$  é adimensionalizada pela velocidade do escoamento livre  $U_\infty$  (“ $U/U_{inf}$ ”) e comparada com o Caso 14, Tab. (A.5).

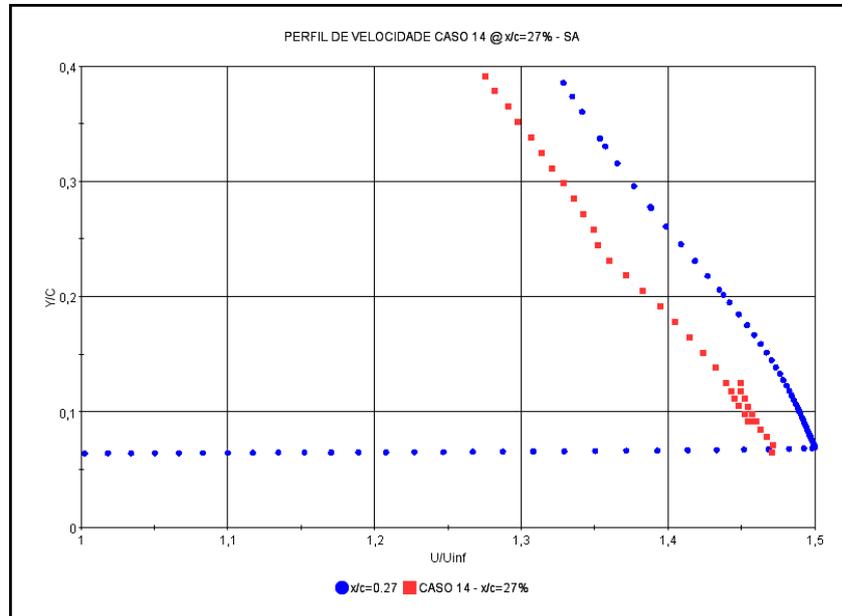


Figura 9.2.13 – Perfil de velocidade em  $x/c = 27\%$ , Caso 14, modelo SA.

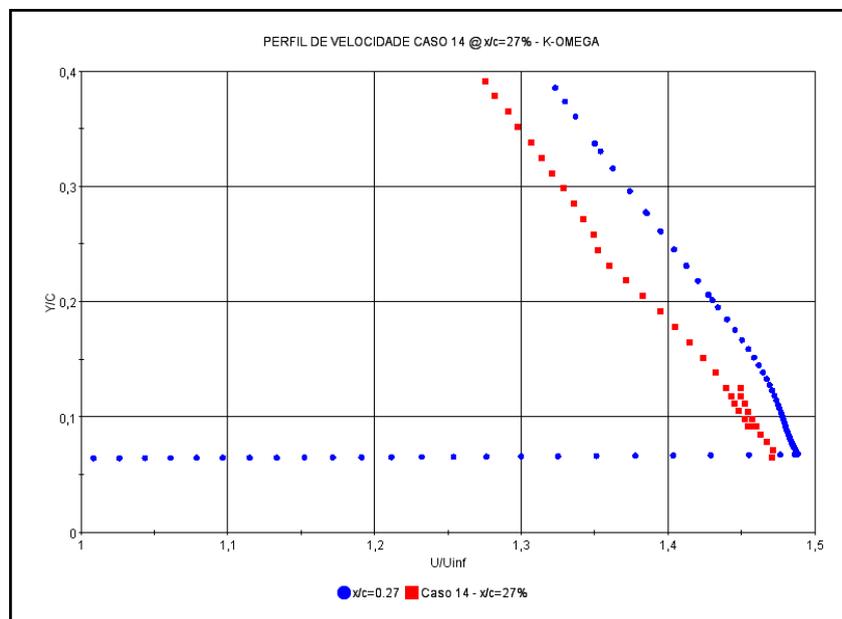


Figura 9.2.14 – Perfil de velocidade em  $x/c = 27\%$ , Caso 14, modelo  $k-\omega$ /SST.

Para  $y/c \sim 0,06$ , os resultados numéricos são 1.13% e 2% maiores do que o resultado experimental com os modelos  $k-\omega$ /SST e SA respectivamente. A posição mais à jusante da onda de choque no modelo SA explica o pior resultado relativamente ao modelo  $k-\omega$ /SST.

O perfil da camada limite no extradorso do aerofólio para a posição  $x/c = 60\%$  é apresentado nas Figuras (9.2.15) e (9.2.16), modelos SA e  $k-\omega$ /SST respectivamente. Nessas figuras, a velocidade local  $U$  é adimensionalizada pela velocidade local externa à camada limite  $U_e$ , obtida na coordenada ( $x/c = 60\%$ ,  $y/c = 9\%$ ). Essa velocidade é grafada versus à distância à parede  $y/c$  e comparada com os dados experimentais do Caso 11, Tab. (A.6). Para o modelo SA  $U_e = 330.4$  m/s e para o modelo  $k-\omega$ /SST  $U_e = 329.8$  m/s. No modelo SA, a concordância entre os dados experimentais e numéricos é satisfatória e coerente com a observação experimental. Manifesta-se nesse resultado outro aspecto – a qualidade dos dados experimentais gerados pelo túnel de vento e a aplicação de correções quanto ao efeito das paredes laterais. Para o modelo  $k-\omega$ /SST, o perfil apresenta-se menos acelerado do que no modelo SA já partir de  $x/c \sim 25\%$ .

O perfil da camada limite no dorso do aerofólio para a posição  $x/c = 95\%$  é apresentado como no caso anterior nas Figuras (9.2.17) e (9.2.18), modelos SA e  $k-\omega$ /SST respectivamente. As velocidades externas à camada limite, obtidas na coordenada ( $x/c = 95\%$ ,  $y/c = 4\%$ ), são  $U_e = 265.4$  m/s para o modelo SA e  $U_e = 265.0$  m/s para o modelo  $k-\omega$ /SST. Os resultados experimentais de acordo com a Tab. (A.7) divergem dos resultados numéricos de forma mais sensível para o modelo SA do que para o modelo  $k-\omega$ /SST. Esse comportamento discrepante entre os resultados experimental e numérico é aqui explicado pela proximidade ao bordo de fuga, onde há desaceleração do escoamento devido ao descolamento da camada limite. O perfil da camada limite obtido pelo modelo SA superestima momenta relativamente ao modelo  $k-\omega$ /SST. Entretanto, para  $y/c \sim 0.04$  ambos os modelos estimam o mesmo valor  $U / U_e \sim 95\%$ .

As Figuras (9.2.19) e (9.2.20) apresentam o campo de velocidades no dorso do aerofólio, na região de formação da onda de choque para os modelos SA e  $k-\omega$ /SST respectivamente. O espessamento da camada limite e a desaceleração do escoamento é observável a jusante da linha vertical que demarca a posição  $x/c = 40\%$  para o modelo SA e à montante dessa linha para o modelo  $k-\omega$ /SST.

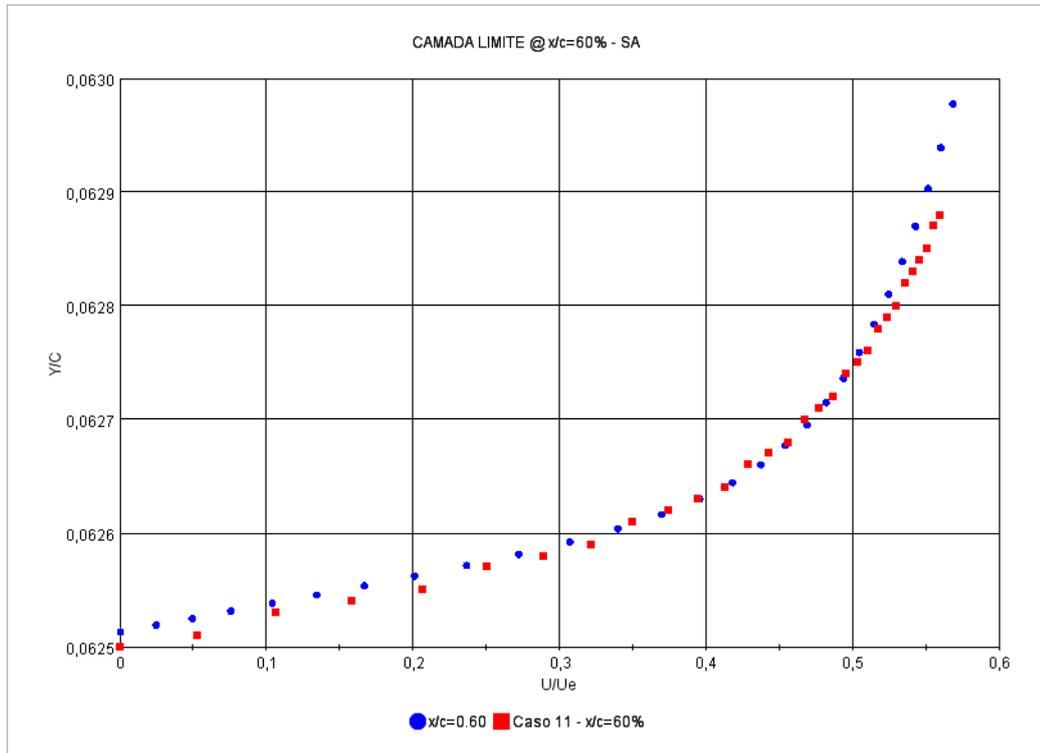


Figura 9.2.15 – Perfil da camada limite,  $x/c = 60\%$ , Caso 11, modelo SA.

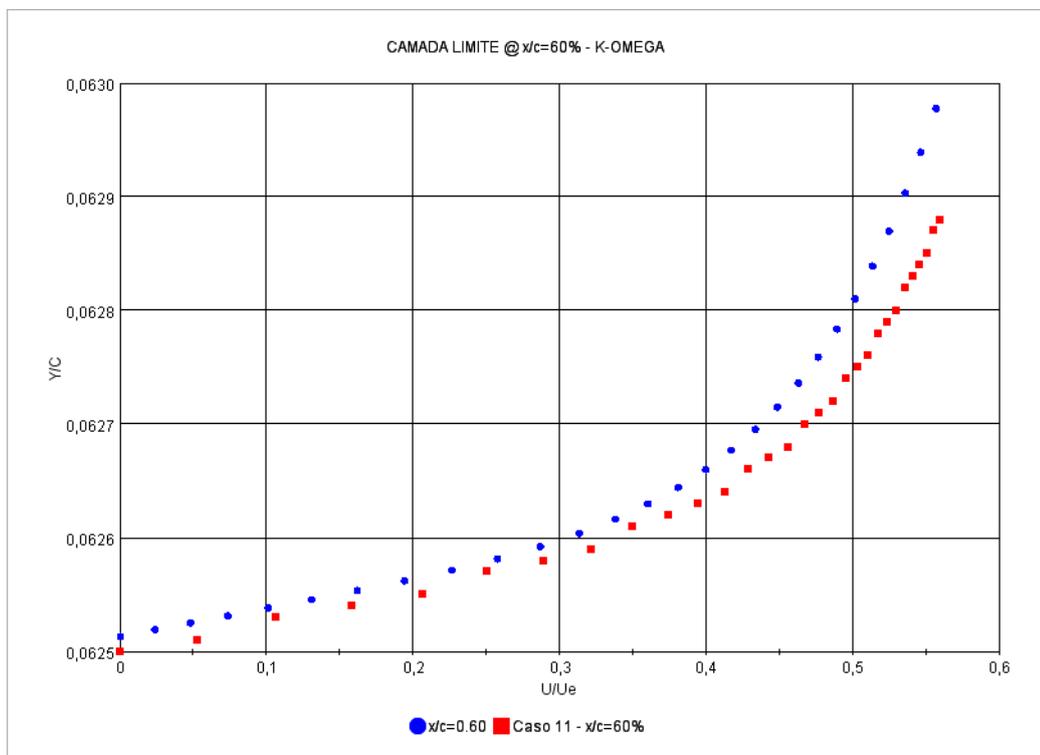


Figura 9.2.16 – Perfil da camada limite,  $x/c = 60\%$ , Caso 11, modelo  $k-\omega$ /SST.

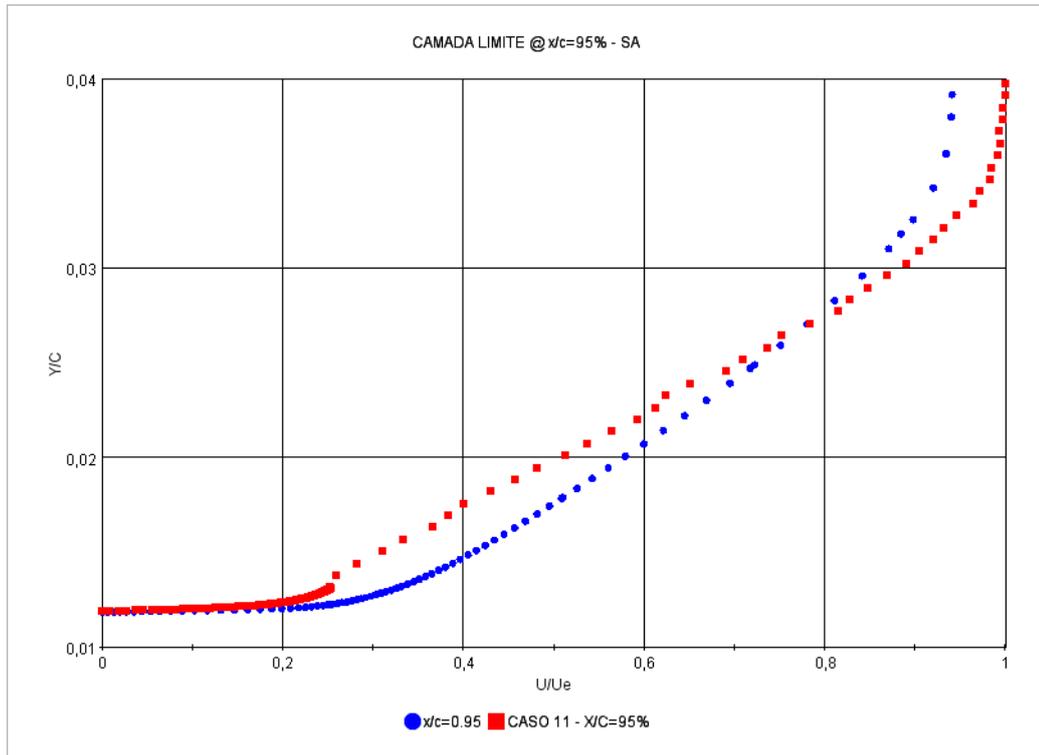


Figura 9.2.17 – Perfil da camada limite,  $x/c = 95\%$ , Caso 11, modelo SA.

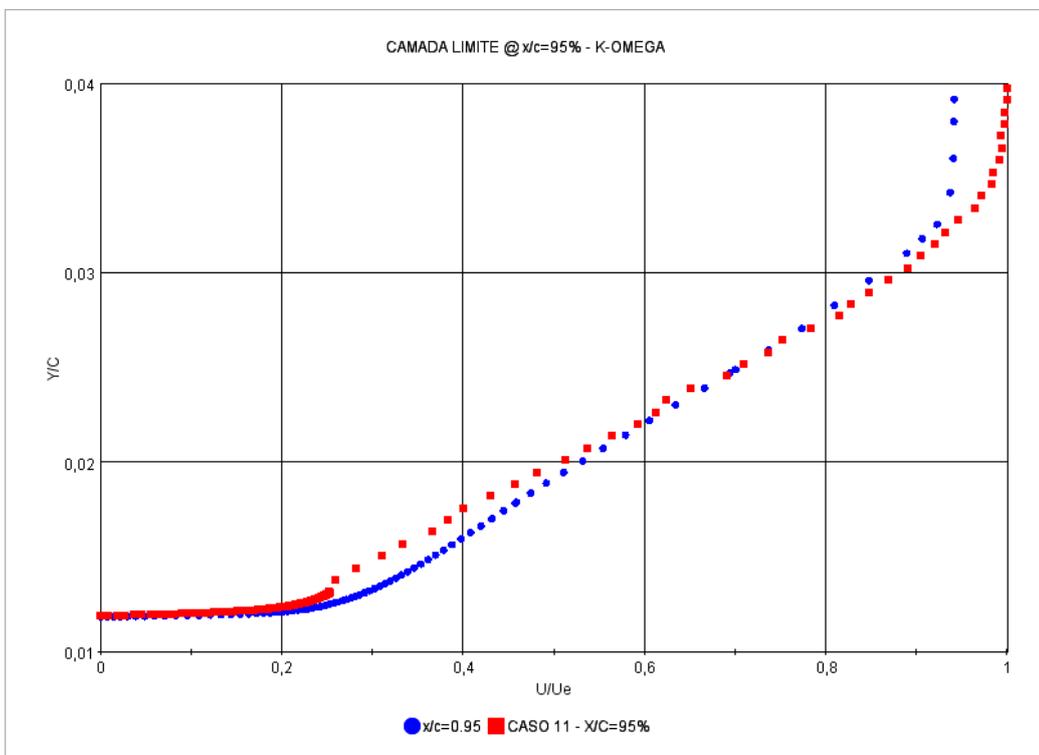


Figura 9.2.18 – Perfil da camada limite,  $x/c = 95\%$ , Caso 11, modelo  $k-\omega$ /SST.

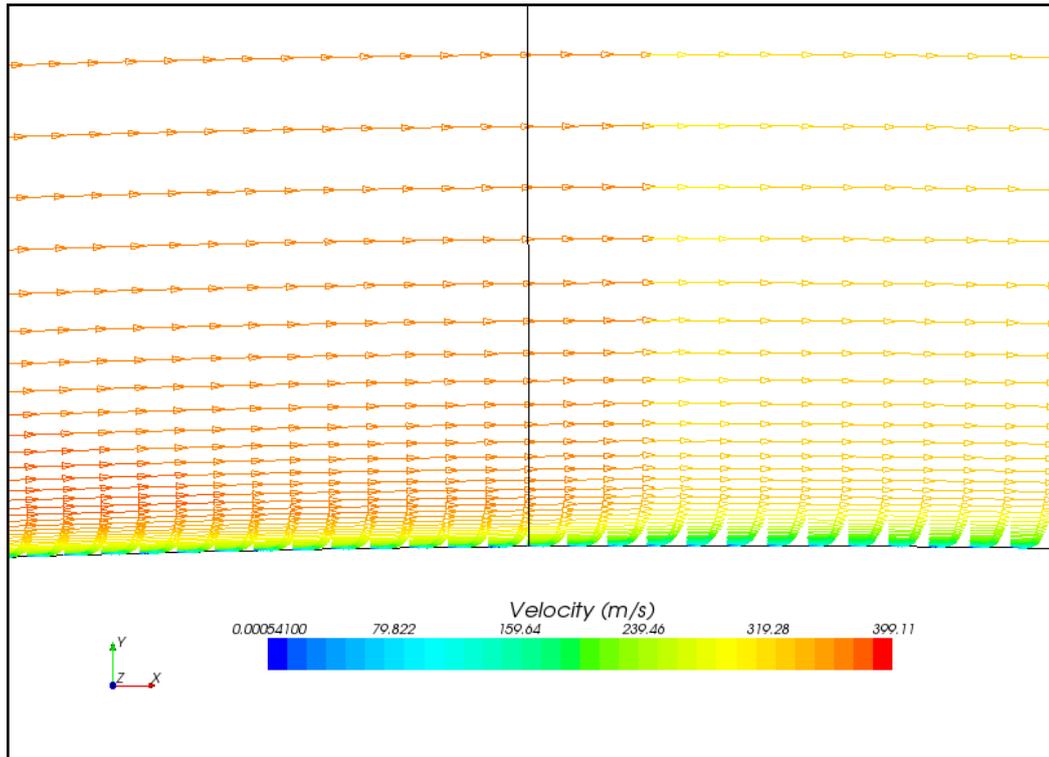


Figura 9.2.19 - Campo de velocidades no extradorso,  $x/c = 40\%$ , modelo SA.

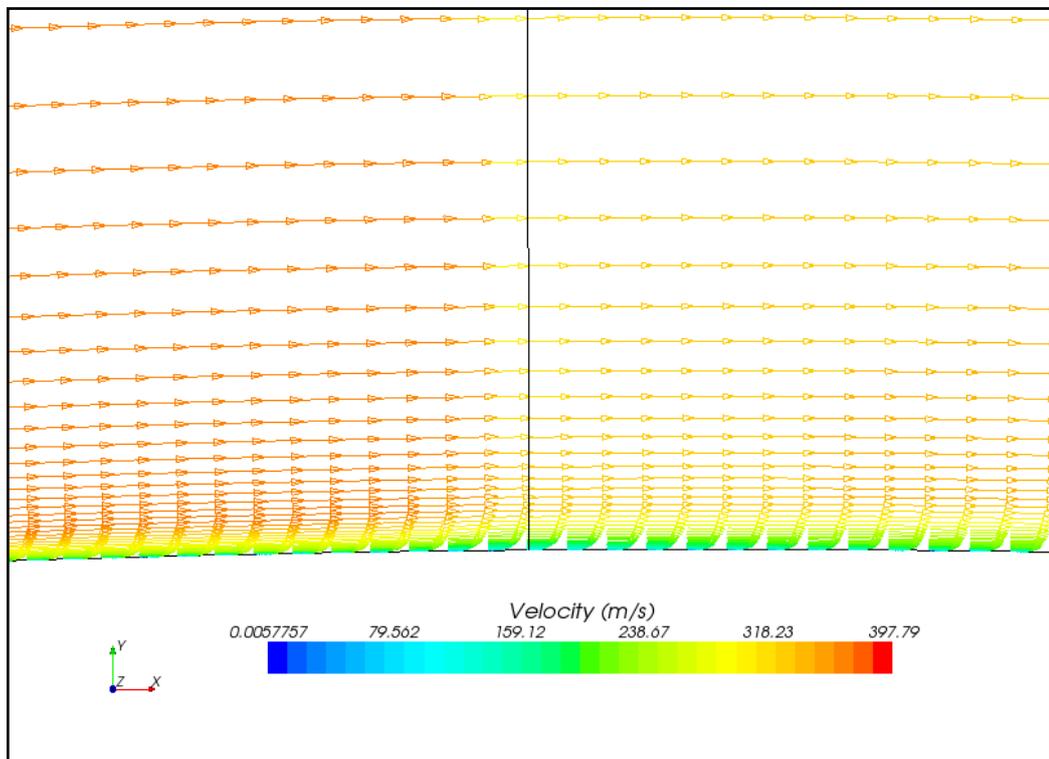


Figura 9.2.20 - Campo de velocidades no extradorso,  $x/c = 40\%$ , modelo  $k-\omega$ /SST.

As Figuras (9.2.21) e (9.2.22) representam as linhas de corrente nas proximidades do bordo de fuga. A recirculação é assimétrica relativamente ao dorso e intradorso e há descolamento da camada limite. O aspecto mais alongado da região de recirculação no caso do modelo  $k-\omega$ /SST evidencia de forma qualitativa a diferença relativamente à solução obtida pelo modelo SA.

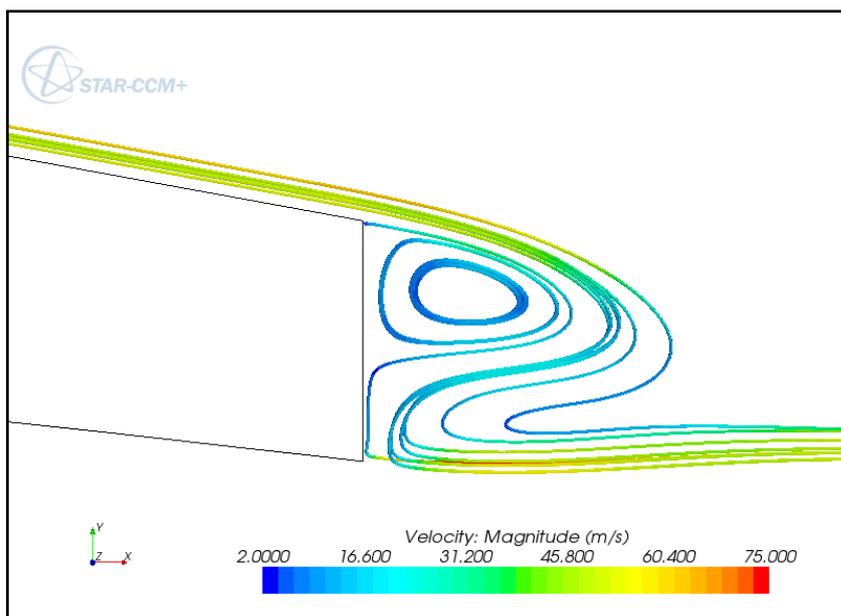


Figura 9.2.21 - Linhas de corrente nas proximidades do bordo de fuga, modelo SA.

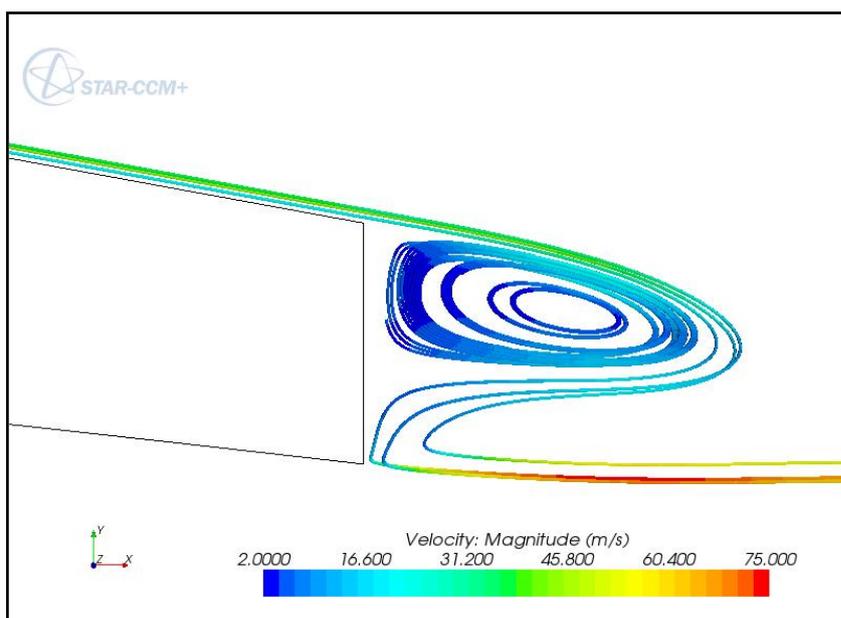


Figura 9.2.22 - Linhas de corrente nas proximidades do bordo de fuga, modelo  $k-\omega$ /SST.

As Figuras (9.2.23) e (9.2.24) representam a distribuição do número de Mach sobre as paredes aerofólio para os modelos SA e  $k-\omega$ /SST respectivamente. Nessas imagens, são visíveis os efeitos devidos à transição e à formação da onda de choque sobre o campo de velocidades. Nas regiões  $x/c \sim 7\%$  e  $x/c \sim 40\%$ , as isotacas têm um aspecto dentado que se propaga em direção às fronteiras do domínio.

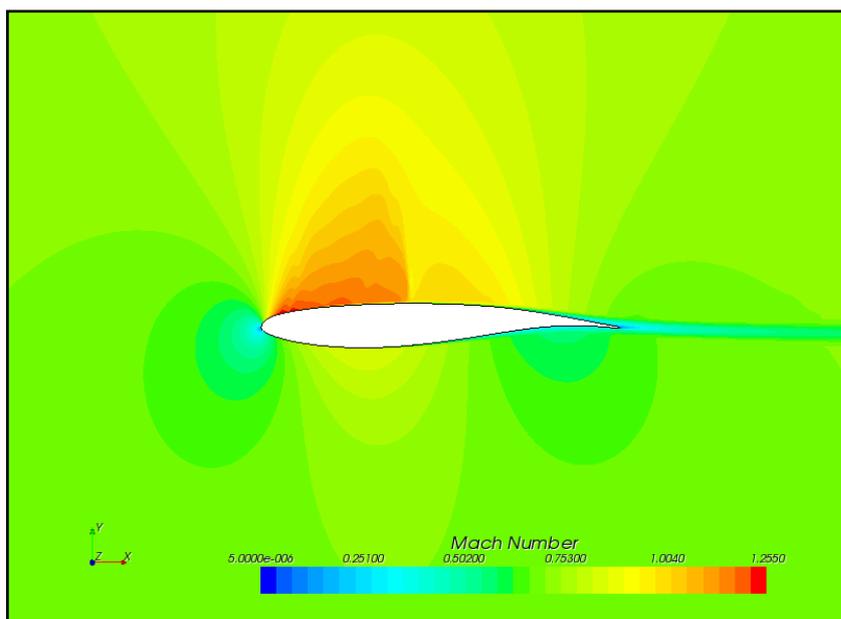


Figura 9.2.23 - Número de Mach , modelo SA.

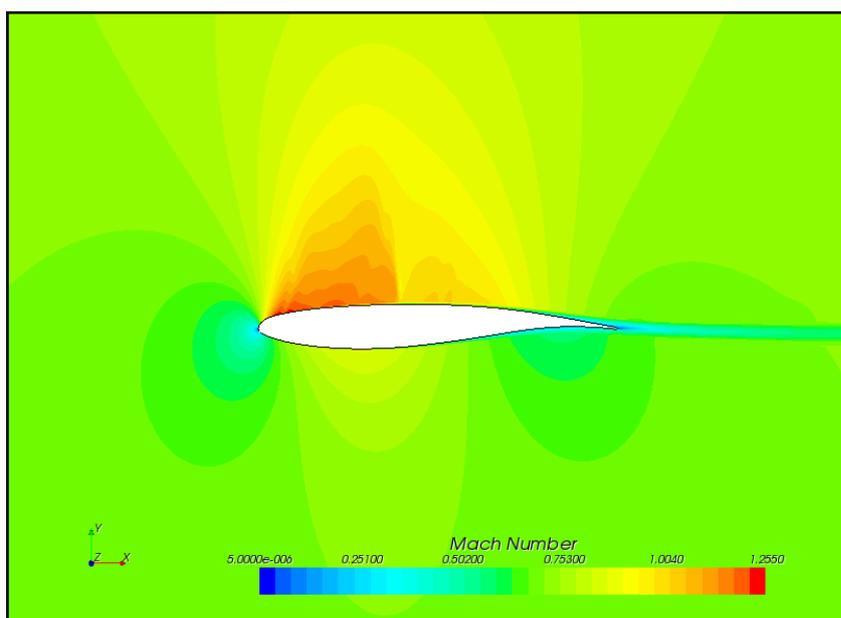


Figura 9.2.24 - Número de Mach, modelo  $k-\omega$ /SST.

Os resultados obtidos são consolidados e apresentados na Tab. (9.2.4) para os coeficientes de sustentação e arrasto. As diferenças percentuais são comparadas relativamente ao Caso 11 entre os coeficientes obtidos com os modelos SA e  $k-\omega$ /SST, o melhor valor extrapolado - “ER-6” na Tab. (8.2.8) – e o Caso 14. O coeficiente de arrasto é expresso em drag counts.

Tabela 9.2.4 – Resultados comparados, modelo OAT15A

Modelo	Malha	$c_l$	$c_{d,p}$	$c_{d,v}$	$c_d$	$\Delta c_l$ %	$\Delta c_d$ %	CPU/Iteração
SA	F200	0.7209	50.8	63.9	114.7	21.4	8.2	REF.
$k-\omega$ /SST	F200	0.6985	49.2	61.9	111.1	17.6	4.8	1.5 x
	ER-6	0.7242	49.6	63.8	113.5	21.9	7.1	
Caso 11		0.5940			106.0			
Caso 14		0.6140				3.4		

A observação dos resultados indica que o modelo  $k-\omega$ /SST obteve melhores resultados as custas de 50% a mais no esforço computacional, em tempo de CPU por iteração, relativamente ao modelo SA.

A hipótese da validade da aplicação da extrapolação de Richardson para estimativa de um valor assintótico quando diferentes modelos de turbulência são aplicados deve ser empregada com cautela. O limite inferior da banda de erro do valor extrapolado ER-6 para o coeficiente de arrasto,  $c_{d,\min} = 111.9609$  na Tab. (8.2.13), é maior do que o valor obtido com o modelo  $k-\omega$ /SST.

A diferença entre os valores do coeficiente de arrasto obtidos pelos modelos  $k-\omega$ /SST e SA, aproximadamente 4 drag counts, equivale a quatro passageiros a mais ou a menos em uma aeronave de transporte subsônica [Salas, 2006]. Essa afirmativa ilustra a importância da busca pela precisão na modelagem, na correta formulação e aplicação da metodologia numérica a malhas perfeitamente convergidas e com credibilidade numericamente demonstrada. O entendimento do fenômeno físico e em especial das limitações e possibilidades dos modelos de turbulência são aspectos fundamentais na aplicação da metodologia RANS a problemas reais de engenharia.

## 10 CONCLUSÃO

As conclusões obtidas ao longo desse trabalho podem ser organizadas de acordo com os objetivos inicialmente propostos.

O fenômeno físico objeto de estudo dessa dissertação, o escoamento turbulento, foi numericamente analisado aplicando-se a formulação matemática e as metodologias numéricas correspondentes aos casos onde o escoamento é tratado como sendo incompressível ou compressível. A escolha dos modelos físicos (NACA 0012 e OAT15A) e dos modelos de turbulência (Spalart-Allmaras ou  $k-\omega/SST$ ) foi respaldada pela disponibilidade de dados experimentais “free-air” gerados especificamente para validação de códigos CFD, comerciais ou não, e pelas limitações dos modelos de turbulência. A escolha de modelos físicos relevantes que tenham referenciais experimentais e modelos de turbulência aplicáveis sem restrições ao fenômeno físico em estudo – o escoamento turbulento sobre seções de aerofólio em pequeno ângulo de ataque – atendeu ao primeiro objetivo proposto.

A compreensão e correta aplicação da metodologia numérica, i.e., a utilização do algoritmo segregado versus o algoritmo acoplado, foi demonstrada e discutida no capítulo 9, “Resultados”. Para o caso onde o escoamento é considerado como incompressível, a metodologia numérica adotada foi a segregada, onde o acoplamento pressão-velocidade é obtido pelo algoritmo SIMPLE e argumentado como mais eficiente do ponto de vista computacional nessa situação. Para o caso compressível, a metodologia de solução acoplada das equações de transporte de momentum e energia seguiu a recomendação do desenvolvedor do software Star-CCM+, cujo código pré-condiciona essas equações e as resolve de forma acoplada. Entender a aplicabilidade desses dois algoritmos (segregado versus acoplado) foi o segundo objetivo atingido.

O terceiro objetivo proposto diz respeito ao projeto de malhas. Esse projeto requer estimativas das grandezas do escoamento e escolha de condições de contorno coerentes com as condições físicas do fenômeno. Partindo-se do dimensionamento da camada limite junto às paredes da seção do aerofólio, desenvolvido no Apêndice A, foram aplicadas as condições de contorno descritas na formulação matemática para diferentes topologias e tipos de malhas, estruturadas e não estruturadas, dentro dos limites de aplicabilidade dos dois modelos de turbulência utilizados.

A verificação dos resultados, um exercício matemático com objetivo a demonstrar a precisão dos resultados numéricos, foi aplicada aos casos de estudo desse trabalho em

atendimento ao quarto objetivo. Em todos esses casos, foi possível estabelecer a credibilidade desses resultados conciliando-se a metodologia proposta por Roache [1994], o primeiro critério de Ollivier-Gooch [2009] e as práticas recomendadas pelos organizadores das oficinas de predição de arrasto da AIAA descritos em artigos por Vassberg et al. [2007] e Mavriplis et al. [2009].

O quinto objetivo, o de entender as diferenças entre os resultados numéricos e experimentais com base na formulação dos modelos de turbulência, é atendido no capítulo de resultados para o modelo OAT15A. Nesses resultados, manifestam-se aspectos fundamentais como o tratamento da transição ao regime turbulento e a correlação entre o estado turbulento do escoamento e a posição onde há a formação da onda de choque.

O atendimento ao sexto objetivo, o de comparar os resultados numéricos com os experimentais, é consolidado na Tab. (9.1.2) para o aerofólio NACA 0012 e na Tab. (9.2.4) para o aerofólio OAT15A. De especial interesse no caso do aerofólio OAT15A é o resultado apresentado na Fig. (9.2.15) onde o perfil da camada limite para  $x/c = 60\%$  corresponde aos resultados experimentais. Para o aerofólio NACA 0012, onde o enfoque foi o de pesquisar o comportamento do coeficiente de arrasto  $c_d$ , o melhor resultado relativamente ao experimental foi obtido com uma malha não estruturada de volumes poliédricos e de topologia “C”, com transição prescrita em  $x_t/c = 43\%$  e contorno posicionado a apenas 12 cordas das paredes da seção.

A conclusão mais significativa obtida neste trabalho, considerando que todos os objetivos propostos foram atingidos, é sobre o rigor requerido em todas as etapas de construção de um modelo numérico. Entre a escolha dos modelos físicos e a aplicação dos modelos de turbulência, passando pela construção e verificação da malha, diversos fatores podem influenciar os resultados numéricos obtidos. Como exemplo, a combinação de uma malha menos refinada com contorno posicionado a 50 cordas e o modelo  $k-\omega$ /SST configurado para utilizar as equações de amortecimento – equações (4.3.11) a (4.3.13), são suficientes para que o erro relativamente ao melhor valor extrapolado do coeficiente de arrasto seja aproximadamente 15 drag counts, elevado para padrões da indústria aeronáutica.

A aplicação das metodologias RANS e de verificação como ponto de partida para validação de resultados obtidos com outras metodologias mais exigentes do ponto de vista computacional, como a simulação de grandes escalas, é uma abordagem coerente e em linha com os objetivos e a conclusão mais significativa desse trabalho, sendo a trajetória a ser seguida à simulação de geometrias mais complexas e tridimensionais em regime transiente.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIAA, 1998. **Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations**, AIAA G-077-1998, American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Abbot, I.H., von Doenhoff, A.E., 1959. **Theory of Wing Sections**, Dover Publications Inc., New York.

Anderson Jr., J.D., 2004. **Fundamentals of Aerodynamics**, Ed. McGraw-Hill.

Archambaud, J.P., Michonneau, J.F., Mignosi, A., 1994. **Analysis of test section sidewall effects on a two dimensional airfoil: Experimental and numerical investigations**, AGARD N95-19251 05-34, Wall Interference, Support Interference and Flow Field Measurements, 8 p.

Archambaud, J.P., Mignosi, A., 1988. **Two-Dimensional and Three-Dimensional Adaptation at the T2 Transonic Wind Tunnel**, Aerodynamic Testing Conference, 15th, San Diego, CA, May 18-20, 1988, Technical Papers (A88-37907 15-09), Washington, DC, American Institute of Aeronautics and Astronautics, pp. 342-350.

Beck, P.A., Vielmo, H.A, Petry, A.P., 2009. **Numerical Evaluation of the NACA 0012 Airfoil Drag Coefficient Employing a Polyhedral Mesh**, Anais do 30º Congresso Íbero-Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia – CILAMCE.

Bigarella, E.D.V, Azevedo, J.L.F., 2007. **Advanced Eddy-Viscosity and Reynolds-Stress Turbulence Model Simulations of Aerospace Applications**, AIAA Journal, Vol. 45, No.10.

CD-adapco, 2009. **Star-CCM+ User Guide**, pp. 2274-2799.

Dacles-Mariani, J., Zilliac, G., Chow, J.S., Bradshaw, P., 1995. **Numerical /experimental study of a wingtip vortex in the near field**, AIAA Journal, Vol. 33, No. 9, pp. 1561-1568.

De Vahl Davis, G., 1983. **Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Benchmark Numerical Solution**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, No. 3, pp. 249-264.

Durbin, P.A. 1996. **On the  $k$ - $\varepsilon$  stagnation point anomaly**, Int. J. Heat and Fluid Flow 17, pp. 89-90.

Eça, L., Hoekstra, M., 2009. **Evaluation of Numerical Error Estimation Based on Grid Refinement Studies with the Method of the Manufactured Solutions**, Computers and Fluids, 2009.

Eça, L., Hoekstra, M., Roache P.J., 2005. **Verification of Calculations: An Overview of the Lisbon Workshop**, AIAA Paper 4728, AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Toronto.

Gregory, N., O'Reilly, C.L., 1970. **Low Speed Aerodynamic Characteristics of NACA 0012 Airfoil Section, Including the Effects of Upper Surface Roughness Simulation Hoarfrost**. NPL Aero Report 1308, National Physical Laboratory.

Ladson, C.L., Brooks Jr., C.W., Hill, A.S., Sproles, D.W., 1996. **Computer Program To Obtain Ordinates for NACA Airfoils**. Technical Memorandum 4741. NASA.

Lal, S.A., Prasad, B.V.S.S.S., Sitaram, N., 2001. **Geometry-Based Hyperbolic Grid Generation for Computational Fluid Dynamics**, AIAA Journal, Vol. 39, No. 8.

McCroskey, W.J., 1987. **A Critical Assessment of Wind Tunnel Results for the NACA 0012 Airfoil**. Technical Memorandum 100019, NASA.

Maliska, C.R., 2004. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**, Ed. LTC.

Mavriplis, D.J., Vassberg, J.C., Tinoco, E.N., Mani, M., Brodersen, O.P., Einfeld, B., Wahls, R.A., Morrison, J.H., Zickuhr, T., Levy, D., Murayama, M., 2009. **Grid Quality and Resolution Issues from the Drag Prediction Workshop Series**, Journal of Aircraft, Vol. 46, No. 3.

Mehta, U.B., 1996. **Guide to Credible Computer Simulations of Fluid Flows**, AIAA Journal of Propulsion and Power, Vol. 12, No. 5.

Menter, F.R. 1994. **Two-equation eddy-viscosity turbulence modeling for engineering applications**, AIAA Journal, Vol. 32, No. 8, pp. 1598-1605.

Ollivier-Gooch, C., 2009. **Assessing Validity of Mesh Refinement Sequences, with Application to DPW-III Meshes**, AIAA Paper 2009-1174, 47<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting.

Patankar, S.V., Spalding, D.B., 1972. **A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows**, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, p. 1787.

Pope, S.B., 2000. **Turbulent Flows**, Cambridge University Press.

Rivers, S.M.B., Owens, L.R., Wahls, R.A., 2008. **Investigations for Supersonic Transports at Transonic and Supersonic Conditions**, Journal of Aircraft, Vol. 45, No. 1.

Roache, P.J., Knupp, P.M., 1993. **Completed Richardson Extrapolation**, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, pp. 365-374.

Roache, P.J., 1994. **Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies**, ASME Journal of Fluids Engineering, Sept. 1994, Vol 116, pp. 405-413.

Roache, P.J., 1998. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**, Hermosa Publishers.

Rodde, A.M., Archambaud, J.P., 1994. **OAT15A Airfoil Data, A selection of Experimental Test Cases for the Validation of CFD Codes**, NATO AGARD, No. AGARD-AR-303, Case A-11.

Salas, M.D., 2006. Digital Flight: **The Last CFD Aeronautical Grand Challenge**, Journal of Scientific Computing, Vol. 28, No. 213, pp. 479-505.

Spalart, P.R., Allmaras, S.R., 1992. **A one-equation turbulence model for aerodynamic flows**, 30th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, January 6-9, 1992, Reno, NV, AIAA Paper 92-0439.

Thiery, M., Coustols, E., 2005. **URANS computations of shock induced oscillations over 2D rigid airfoil: influence of test section geometry**, Engineering Turbulence Modelling and Measurements - ETMM6, Villasimius, Sardinia, Italy 23-25 mai 2005.

Thiery, M., Coustols, E., 2006. **Numerical prediction of shock induced oscillations over a 2D airfoil: Influence of turbulence modeling and test section walls**, International Journal of Heat and Fluid Flow 27 (2006), pp. 661–670.

Thompson, J.F., 1984. **Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics**, AIAA Journal, Vol. 22, No. 11.

Turkel, E., 1987. **Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations**, Journal of Computational Physics, Vol. 72, pp. 277-298.

Vassberg, J.C., Tinocco, E.N., Mani, M., Brodersen, O.P., Eisfeld, B., Wahls, R.A., Morrison, J.H., Zichuhr, T., Laflin, K.R., Mavriplis, D.J., 2007. **Summary of the Third AIAA CFD Drag Prediction Workshop**, 45<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, AIAA Paper 2007-260.

Weiss, J.M., Maruszewski, J.P., Smith, W.A., 1999. **Implicit solution of preconditioned Navier-Stokes equations using algebraic multigrid**, AIAA Journal, Vol. 37, No. 1, pp. 29-36.

Weiss, J.M., Smith, W.A., 1995. **Preconditioning applied to variable and constant density flows**, *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 11, pp. 2050-2057.

Wilcox, D.C., 1998. **Turbulence Modeling for CFD**, 2<sup>nd</sup> Edition, DCW.

Zingg, D.W., 1992. **Grid Studies for Thin-Layer Navier-Stokes Computations of Airfoil Flowfields**, 30<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, AIAA Paper 92-0184.

## APÊNDICE A – GERAÇÃO DA CAMADA LIMITE

Os modelos de turbulência requerem a discretização da região do escoamento junto às paredes por uma região de células quadrilaterais com altura, número de camadas e distribuição prescritas. Neste trabalho, esses dois parâmetros de geração são calculados seguindo as práticas aplicadas nas oficinas de predição de arrasto promovidas pela AIAA [Mavriplis et al., 2009]. Essas práticas sugerem que:

- i. Sejam utilizados três níveis de refinamento para estudo dependência de malha.
- ii.  $y^+ < 1.0$  para todas as malhas, onde  $y^+ = \frac{u^* y}{\nu}$  é a distância adimensionalizada à parede.
- iii. Junto à parede, deve haver duas camadas igualmente espaçadas.
- iv. Seja aplicada em cada direção dos eixos coordenados entre diferentes níveis de refinamento de malha uma razão de refinamento  $r_{ref} \cong 1.5$ ,
- v. A razão de crescimento entre alturas das células seja  $r_h < 1.25$ .
- vi. Na malha intermediária, o espaçamento entre nós no bordo de ataque deverá ser aproximadamente 0.1 % da corda geométrica  $c$ . Esse valor deverá ser escalado de acordo com a razão de refinamento  $r_{ref}$  para as malhas menos e mais refinadas.
- vii. No bordo de fuga, o número mínimo de células deverá 12, 16 ou 24 de acordo com o grau de refinamento da malha (da mais grosseira a mais refinada respectivamente).

Para determinar as características geométricas (altura da primeira camada e número de camadas) da região que abrange toda a espessura da camada limite, são feitas aproximações com o escoamento turbulento sobre uma placa plana considerando-se os pequenos ângulos de ataque utilizados nas simulações.

A prescrição do valor de  $y^+$  permite a obtenção de  $h_1$ , a altura da primeira célula adjacente à parede, através da Eq. (A.1):

$$h_1 = \frac{y^+ \mu_0}{\rho_0 u^*} \quad (\text{A.1})$$

Na Eq. (A.1),  $\mu_0$  é a viscosidade dinâmica para a temperatura de referência  $T_0$ ,  $\rho_0$  é a densidade de referência (obtida pela Lei dos Gases para a temperatura de referência  $T_0$ ) e  $u^*$  a velocidade de fricção, definida pela Eq. (A.2):

$$u^* \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_0}} \quad (\text{A.2})$$

Na Eq. (A.2),  $\tau_w$  é a tensão de cisalhamento na parede, obtida pela Eq. (A.3):

$$\tau_w = \frac{D_f}{S_{ref}} \quad (\text{A.3})$$

Na Eq. (A.4),  $D_f$  é a força de arrasto devido ao atrito viscoso e  $S_{ref}$  a área de referência. Essa força é obtida pela Eq. (A.5):

$$D_f = \frac{1}{2} \rho_0 U_\infty^2 C_f S_{ref} \quad (\text{A.5})$$

Nessa equação,  $U_\infty$  é a velocidade do escoamento livre e  $C_f$  o coeficiente de atrito que para um escoamento turbulento sobre uma placa plana de comprimento  $L$  é obtido através da Eq. (A.6) [Anderson, 2004]:

$$C_f = \frac{0.074}{\text{Re}_L^{1/5}} \quad (\text{A.6})$$

Introduzindo-se na Eq. (A.3) as equações (A.5) e (A.6), obtém-se uma nova expressão para  $\tau_w$  como função de  $U_\infty$  e do número de Reynolds com referência a um comprimento  $L$   $\text{Re}_L$ , Eq. (A.7):

$$\tau_w = \frac{D_f}{S_{ref}} = \frac{1}{2} \rho_0 U_\infty^2 \frac{0.074}{\text{Re}_L^{1/5}} = \rho_0 U_\infty^2 \frac{0.037}{\text{Re}_L^{1/5}} \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a Eq. (A.7) na Eq. (A.2), obtém-se uma nova expressão para a velocidade de fricção  $u^*$ , Eq. (A.8):

$$u^* \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\rho_0 U_\infty^2 0.037}{\rho_0 \text{Re}_L^{1/5}}} = U_\infty \sqrt{\frac{0.037}{\text{Re}_L^{1/5}}} = 0.1924 U_\infty \text{Re}_L^{-1/10} \quad (\text{A.8})$$

Introduzindo-se a Eq. (A.8) na Eq. (A.1) e rearranjando em termos de  $h_1$ , obtém-se a Eq. (A.9) que expressa a altura da primeira camada de células adjacentes à parede:

$$h_1 = 5.1988 C y^+ L \text{Re}_L^{-9/10} \quad (\text{A.9})$$

Na Eq. (A.9) foi introduzido um coeficiente  $C$  para ajustar o valor obtido de  $h_1$  de acordo com o modelo físico (para placa plana,  $C = 1$ ). Para obter  $N_{CL}$ , faz-se necessária uma estimativa da espessura da camada limite turbulenta,  $\delta_{CL,t}$ . Para uma placa plana de comprimento  $L$ , essa espessura é obtida pela Eq. (A.10) [Anderson, 2004]:

$$\delta_{CL,t} = \frac{0.37L}{\text{Re}_L^{1/5}} \quad (\text{A.10})$$

Considerando-se que a camada de células quadrilaterais junto à parede abranja toda a espessura da camada limite, pode-se expressar essa espessura como sendo a soma da distância  $h_1$  e da espessura total das  $N_{CL} - 1$  camadas adjacentes, a Eq. (A.11):

$$\delta_{CL,t} = h_1 \sum_{i=0}^{N_{CL}-1} r_h^i \quad (\text{A.11})$$

Na Eq. (A.11),  $r_h^i$  é a razão (prescrita) entre as alturas de duas células adjacentes elevada a  $i$ -ésima potência e  $N_{CL}$  o número de camadas a determinar. Como o lado direito da Eq. (A.11) é uma série geométrica, essa equação é reescrita na forma da Eq. (A.12):

$$\delta_{CL,t} = h_1 \frac{1 - r_h^{N_{CL}}}{1 - r_h} \quad (\text{A.12})$$

Reorganizando a Eq. (A.12) em termos de  $r_h^N$  e aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da expressão resultante, obtém-se uma expressão para  $N_{CL}$ , o número de camadas de células dentro da camada limite, Eq. (A.13):

$$N_{CL} = \frac{\ln \left[ \frac{\delta_{CL,t}}{h_1} (r_h - 1) + 1 \right]}{\ln r_h} \quad (\text{A.13})$$

## APÊNDICE B – SUPRESSÃO DE TURBULÊNCIA

No Star-CCM+, a utilização de supressão de turbulência permite que o efeito da transição ao escoamento turbulento seja simulado em regiões pré-definidas quando a posição da transição é a priori conhecida, sendo essa abordagem mais eficiente do ponto de vista computacional relativamente ao uso de um modelo de transição.

Define-se uma fronteira de transição como uma parede onde os efeitos da turbulência são suprimidos. Para definir a região onde a turbulência será suprimida, o Star-CCM+ calcula duas distâncias para cada nó do campo de escoamento:

- i. A distância à parede, calculada como a menor distância entre um nó do campo de escoamento e uma parede que não seja fronteira de transição;
- ii. À distância à fronteira de transição, definida como a menor distância entre um nó do campo de escoamento e uma fronteira que seja de transição.

Define-se a região onde a turbulência será suprimida como aquela cuja distância à fronteira de transição é menor que a distância à parede.

Obtém-se a supressão de turbulência em uma região da seguinte forma:

- i. Tornando zero a viscosidade turbulenta e/ou o tensor de tensões de Reynolds;
- ii. Tornando zero o termos de produção de turbulência nas equações de transporte;
- iii. Usando os métodos para escoamento laminar no cálculo das tensões de contato.

## ANEXO A

### A.1 COORDENADAS DO AEROFÓLIO OAT15A

As coordenadas do aerofólio OAT15A são definidas por 300 pontos calculados como proporções da corda geométrica  $c$ . A Tab. (A.1) apresenta essas coordenadas calculadas para  $c = 0.15$  m.

Tabela A.1 – Coordenadas do aerofólio OAT15A,  $c = 0.15$  m.

#	x	y	#	x	y	#	x	Y	#	x	y	#	x	y
1	0.1500000	-0.0003745	31	0.1091834	-0.0010264	61	0.0542011	-0.0082622	91	0.0192982	-0.0069753	121	0.0044145	-0.0034259
2	0.1495823	-0.0003267	32	0.1072254	-0.0013149	62	0.0526590	-0.0083428	92	0.0185238	-0.0068587	122	0.0041563	-0.0033229
3	0.1492485	-0.0002893	33	0.1052626	-0.0016136	63	0.0511423	-0.0084110	93	0.0177719	-0.0067407	123	0.0039091	-0.0032219
4	0.1488110	-0.0002414	34	0.1032969	-0.0019200	64	0.0496513	-0.0084672	94	0.0170422	-0.0066216	124	0.0036725	-0.0031226
5	0.1482651	-0.0001833	35	0.1013301	-0.0022317	65	0.0481862	-0.0085117	95	0.0163344	-0.0065015	125	0.0034462	-0.0030252
6	0.1476113	-0.0001161	36	0.0993639	-0.0025466	66	0.0467473	-0.0085449	96	0.0156480	-0.0063807	126	0.0032298	-0.0029295
7	0.1468538	-0.0000414	37	0.0974001	-0.0028630	67	0.0453348	-0.0085673	97	0.0149829	-0.0062592	127	0.0030229	-0.0028355
8	0.1459973	0.0000394	38	0.0954402	-0.0031792	68	0.0439487	-0.0085793	98	0.0143385	-0.0061373	128	0.0028252	-0.0027430
9	0.1450466	0.0001244	39	0.0934857	-0.0034937	69	0.0425893	-0.0085814	99	0.0137147	-0.0060149	129	0.0026363	-0.0026520
10	0.1440066	0.0002120	40	0.0915383	-0.0038052	70	0.0412565	-0.0085740	100	0.0131109	-0.0058923	130	0.0024558	-0.0025623
11	0.1428819	0.0003003	41	0.0895992	-0.0041124	71	0.0399504	-0.0085578	101	0.0125269	-0.0057696	131	0.0022834	-0.0024739
12	0.1416772	0.0003873	42	0.0876698	-0.0044143	72	0.0386711	-0.0085330	102	0.0119623	-0.0056467	132	0.0021188	-0.0023867
13	0.1403970	0.0004712	43	0.0857513	-0.0047098	73	0.0374185	-0.0085002	103	0.0114167	-0.0055237	133	0.0019615	-0.0023004
14	0.1390458	0.0005497	44	0.0838450	-0.0049981	74	0.0361926	-0.0084600	104	0.0108898	-0.0054009	134	0.0018114	-0.0022149
15	0.1376280	0.0006205	45	0.0819520	-0.0052782	75	0.0349933	-0.0084126	105	0.0103812	-0.0052781	135	0.0016680	-0.0021302
16	0.1361479	0.0006811	46	0.0800734	-0.0055495	76	0.0338205	-0.0083586	106	0.0098906	-0.0051556	136	0.0015312	-0.0020460
17	0.1346096	0.0007289	47	0.0782102	-0.0058113	77	0.0326742	-0.0082982	107	0.0094176	-0.0050333	137	0.0014005	-0.0019621
18	0.1330175	0.0007608	48	0.0763634	-0.0060631	78	0.0315542	-0.0082320	108	0.0089617	-0.0049115	138	0.0012758	-0.0018783
19	0.1313756	0.0007742	49	0.0745340	-0.0063042	79	0.0304604	-0.0081602	109	0.0085227	-0.0047903	139	0.0011567	-0.0017945
20	0.1296879	0.0007662	50	0.0727227	-0.0065344	80	0.0293925	-0.0080832	110	0.0081000	-0.0046697	140	0.0010431	-0.0017104
21	0.1279586	0.0007342	51	0.0709305	-0.0067532	81	0.0283504	-0.0080012	111	0.0076933	-0.0045499	141	0.0009347	-0.0016257
22	0.1261917	0.0006762	52	0.0691581	-0.0069603	82	0.0273340	-0.0079145	112	0.0073022	-0.0044310	142	0.0008315	-0.0015402
23	0.1243910	0.0005906	53	0.0674062	-0.0071555	83	0.0263429	-0.0078236	113	0.0069263	-0.0043133	143	0.0007332	-0.0014536
24	0.1225602	0.0004768	54	0.0656755	-0.0073385	84	0.0253770	-0.0077285	114	0.0065651	-0.0041968	144	0.0006399	-0.0013655
25	0.1207031	0.0003347	55	0.0639666	-0.0075089	85	0.0244360	-0.0076298	115	0.0062182	-0.0040817	145	0.0005516	-0.0012756
26	0.1188231	0.0001651	56	0.0622801	-0.0076668	86	0.0235197	-0.0075275	116	0.0058853	-0.0039681	146	0.0004684	-0.0011836
27	0.1169233	-0.0000305	57	0.0606165	-0.0078118	87	0.0226278	-0.0074221	117	0.0055658	-0.0038561	147	0.0003904	-0.0010889
28	0.1150068	-0.0002501	58	0.0589764	-0.0079438	88	0.0217600	-0.0073139	118	0.0052594	-0.0037458	148	0.0003181	-0.0009914
29	0.1130763	-0.0004911	59	0.0573602	-0.0080629	89	0.0209160	-0.0072032	119	0.0049657	-0.0036373	149	0.0002518	-0.0008905
30	0.1111344	-0.0007509	60	0.0557682	-0.0081690	90	0.0200955	-0.0070902	120	0.0046842	-0.0035307	150	0.0001920	-0.0007861

#	x	y	#	x	y	#	x	y	#	x	y	#	x	y
151	0.0001394	-0.0006779	181	0.0025863	0.0036065	211	0.0181514	0.0076223	241	0.0543913	0.0100780	271	0.1110200	0.0072821
152	0.0000945	-0.0005658	182	0.0028507	0.0037637	212	0.0189869	0.0077352	242	0.0560118	0.0101072	272	0.1129889	0.0069955
153	0.0000580	-0.0004499	183	0.0031305	0.0039190	213	0.0198460	0.0078469	243	0.0576580	0.0101313	273	0.1149419	0.0066961
154	0.0000303	-0.0003303	184	0.0034257	0.0040725	214	0.0207292	0.0079571	244	0.0593294	0.0101499	274	0.1168764	0.0063863
155	0.0000116	-0.0002071	185	0.0037366	0.0042241	215	0.0216366	0.0080659	245	0.0610257	0.0101629	275	0.1187901	0.0060690
156	0.0000017	-0.0000808	186	0.0040634	0.0043739	216	0.0225686	0.0081732	246	0.0627463	0.0101698	276	0.1206802	0.0057471
157	0.0000000	0.0000000	187	0.0044062	0.0045217	217	0.0235254	0.0082790	247	0.0644907	0.0101705	277	0.1225442	0.0054233
158	0.0000006	0.0000485	188	0.0047653	0.0046678	218	0.0245072	0.0083831	248	0.0662585	0.0101646	278	0.1243791	0.0051000
159	0.0000079	0.0001806	189	0.0051409	0.0048120	219	0.0255143	0.0084855	249	0.0680489	0.0101519	279	0.1261820	0.0047789
160	0.0000233	0.0003154	190	0.0055333	0.0049545	220	0.0265470	0.0085861	250	0.0698613	0.0101318	280	0.1279495	0.0044617
161	0.0000465	0.0004528	191	0.0059427	0.0050954	221	0.0276055	0.0086847	251	0.0716950	0.0101042	281	0.1296783	0.0041496
162	0.0000775	0.0005930	192	0.0063693	0.0052346	222	0.0286900	0.0087814	252	0.0735490	0.0100685	282	0.1313649	0.0038440
163	0.0001160	0.0007358	193	0.0068135	0.0053722	223	0.0298007	0.0088760	253	0.0754227	0.0100244	283	0.1330057	0.0035457
164	0.0001623	0.0008814	194	0.0072755	0.0055084	224	0.0309377	0.0089684	254	0.0773150	0.0099715	284	0.1345967	0.0032558
165	0.0002167	0.0010299	195	0.0077556	0.0056430	225	0.0321012	0.0090585	255	0.0792248	0.0099094	285	0.1361342	0.0029752
166	0.0002794	0.0011811	196	0.0082540	0.0057763	226	0.0332915	0.0091463	256	0.0811512	0.0098375	286	0.1376139	0.0027047
167	0.0003510	0.0013350	197	0.0087712	0.0059082	227	0.0345086	0.0092314	257	0.0830930	0.0097555	287	0.1390317	0.0024450
168	0.0004319	0.0014914	198	0.0093074	0.0060387	228	0.0357527	0.0093139	258	0.0850488	0.0096629	288	0.1403834	0.0021967
169	0.0005228	0.0016502	199	0.0098629	0.0061679	229	0.0370238	0.0093936	259	0.0870174	0.0095592	289	0.1416643	0.0019605
170	0.0006242	0.0018110	200	0.0104380	0.0062959	230	0.0383221	0.0094704	260	0.0889973	0.0094440	290	0.1428700	0.0017370
171	0.0007368	0.0019736	201	0.0110331	0.0064227	231	0.0396475	0.0095441	261	0.0909871	0.0093168	291	0.1439959	0.0015269
172	0.0008612	0.0021375	202	0.0116485	0.0065482	232	0.0410002	0.0096146	262	0.0929851	0.0091771	292	0.1450372	0.0013312
173	0.0009980	0.0023022	203	0.0122844	0.0066726	233	0.0423801	0.0096817	263	0.0949896	0.0090244	293	0.1459891	0.0011509
174	0.0011476	0.0024675	204	0.0129412	0.0067957	234	0.0437872	0.0097452	264	0.0969988	0.0088583	294	0.1468469	0.0009871
175	0.0013105	0.0026327	205	0.0136193	0.0069176	235	0.0452215	0.0098052	265	0.0990107	0.0086784	295	0.1476057	0.0008412
176	0.0014872	0.0027977	206	0.0143189	0.0070383	236	0.0466829	0.0098612	266	0.1010235	0.0084841	296	0.1482606	0.0007144
177	0.0016779	0.0029619	207	0.0150404	0.0071576	237	0.0481712	0.0099133	267	0.1030349	0.0082750	297	0.1488075	0.0006080
178	0.0018830	0.0031251	208	0.0157841	0.0072757	238	0.0496865	0.0099612	268	0.1050426	0.0080505	298	0.1492459	0.0005225
179	0.0021026	0.0032871	209	0.0165503	0.0073926	239	0.0512283	0.0100047	269	0.1070444	0.0078103	299	0.1495804	0.0004571
180	0.0023370	0.0034476	210	0.0173393	0.0075081	240	0.0527967	0.0100437	270	0.1090377	0.0075540	300	0.1500000	0.0003750

## A.2 LOCALIZAÇÃO DOS SENSORES DE PRESSÃO

Os 56 sensores são localizados sobre a linha central do modelo (37 pontos no dorso e 19 no intradorso) de acordo com a Tab. A.2.

Tabela A.2 – Coordenadas dos sensores adimensionalizadas pela corda  $c$ .

#	x/c	y/c	#	x/c	y/c
1	0.000000	0.000000	38	0.010000	-0.013510
2	0.003000	0.010140	39	0.060000	-0.032820
3	0.010000	0.018730	40	0.080000	-0.037700
4	0.020000	0.025650	41	0.100000	-0.041750
5	0.035000	0.032350	42	0.120000	-0.045180
6	0.050000	0.037140	43	0.140000	-0.048100
7	0.065000	0.040940	44	0.200000	-0.054190
8	0.080000	0.044110	45	0.260000	-0.056940
9	0.100000	0.047670	46	0.320000	-0.056780
10	0.125000	0.051350	47	0.380000	-0.053920
11	0.150000	0.054430	48	0.440000	-0.048700
12	0.175000	0.057050	49	0.560000	-0.033170
13	0.200000	0.059280	50	0.620000	-0.023810
14	0.225000	0.061190	51	0.680000	-0.014170
15	0.250000	0.062810	52	0.740000	-0.005130
16	0.275000	0.064180	53	0.820000	0.003300
17	0.300000	0.065300	54	0.880000	0.004000
18	0.325000	0.066210	55	0.940000	0.002700
19	0.350000	0.066910	56	1.000000	0.002500
20	0.400000	0.067700			
21	0.425000	0.067800			
22	0.450000	0.067710			
23	0.475000	0.067410			
24	0.500000	0.066900			
25	0.525000	0.066170			
26	0.550000	0.065210			
27	0.575000	0.064000			
28	0.600000	0.062540			
29	0.625000	0.060800			
30	0.650000	0.058760			
31	0.675000	0.056410			
32	0.700000	0.053700			
33	0.725000	0.050610			
34	0.750000	0.047120			
35	0.860000	0.029330			
36	0.920000	0.018930			
37	1.000000	0.002500			

### A.3 COEFICIENTES DE PRESSÃO – CASO 11

A Tab. A.3 apresenta os coeficientes de pressão relativamente a uma posição  $x$  adimensionalizada pela corda,  $x/c$ .

Tabela A.3 - Coeficientes de pressão, Caso 11.

#	$x/c$	$c_p$	#	$x/c$	$c_p$
1	9.40E-01	2.91E-01	29	1.25E-01	-1.13E+00
2	8.80E-01	3.45E-01	30	1.50E-01	-1.06E+00
3	8.20E-01	3.38E-01	31	1.75E-01	-1.07E+00
4	7.40E-01	2.66E-01	32	2.00E-01	-1.02E+00
5	6.80E-01	1.77E-01	33	2.25E-01	-1.01E+00
6	6.20E-01	7.61E-02	34	2.50E-01	-1.01E+00
7	5.60E-01	-3.40E-02	35	2.75E-01	-9.35E-01
8	4.40E-01	-2.49E-01	36	3.00E-01	-6.99E-01
9	3.80E-01	-3.58E-01	37	3.25E-01	-6.91E-01
10	3.20E-01	-4.18E-01	38	3.50E-01	-7.08E-01
11	2.60E-01	-4.31E-01	39	4.00E-01	-7.43E-01
12	2.00E-01	-3.69E-01	40	4.25E-01	-7.53E-01
13	1.40E-01	-2.53E-01	41	4.50E-01	-7.56E-01
14	1.20E-01	-2.01E-01	42	4.75E-01	-7.52E-01
15	1.00E-01	-1.39E-01	43	5.00E-01	-7.40E-01
16	8.00E-02	-8.17E-02	44	5.25E-01	-7.26E-01
17	6.00E-02	8.01E-02	45	5.50E-01	-7.13E-01
18	1.00E-02	5.81E-01	46	5.75E-01	-6.94E-01
19	3.00E-03	8.46E-01	47	6.00E-01	-6.68E-01
20	0.00E+00	1.09E+00	48	6.25E-01	-6.43E-01
21	3.00E-03	5.40E-01	49	6.50E-01	-6.10E-01
22	1.00E-02	-5.33E-02	50	6.75E-01	-5.71E-01
23	2.00E-02	-6.18E-01	51	7.00E-01	-5.22E-01
24	3.50E-02	-9.14E-01	52	7.25E-01	-4.67E-01
25	5.00E-02	-9.38E-01	53	7.50E-01	-4.05E-01
26	6.50E-02	-8.92E-01	54	8.60E-01	-1.31E-01
27	8.00E-02	-1.01E+00	55	9.20E-01	-2.91E-02
28	1.00E-01	-1.07E+00	56	1.00E+00	6.60E-02

## A.4 COEFICIENTES DE PRESSÃO – CASO 14

A Tab. A.4 apresenta os coeficientes de pressão relativamente a uma posição  $x$  adimensionalizada pela corda,  $x/c$ .

Tabela A.4 - Coeficientes de pressão, Caso 14.

#	$x/c$	$c_p$	#	$x/c$	$c_p$
1	0.00E+00	1.10E+00	29	6.25E-01	-6.52E-01
2	3.00E-03	5.06E-01	30	6.50E-01	-6.16E-01
3	1.00E-02	-9.24E-02	31	6.75E-01	-5.78E-01
4	2.00E-02	-5.16E-01	32	7.00E-01	-5.25E-01
5	3.50E-02	-9.48E-01	33	7.25E-01	-4.68E-01
6	5.00E-02	-8.77E-01	34	7.50E-01	-4.06E-01
7	6.50E-02	-1.00E+00	35	8.60E-01	-1.23E-01
8	8.00E-02	-1.12E+00	36	9.20E-01	-2.78E-02
9	1.00E-01	-1.14E+00	37	1.00E+00	7.03E-02
10	1.25E-01	-1.16E+00	38	9.40E-01	2.95E-01
11	1.50E-01	-1.07E+00	39	8.80E-01	3.50E-01
12	1.75E-01	-1.09E+00	40	8.20E-01	3.45E-01
13	2.00E-01	-1.08E+00	41	7.40E-01	2.66E-01
14	2.25E-01	-1.07E+00	42	6.80E-01	1.78E-01
15	2.50E-01	-1.04E+00	43	6.20E-01	7.50E-02
16	2.75E-01	-1.03E+00	44	5.60E-01	-3.50E-02
17	3.00E-01	-9.94E-01	45	4.40E-01	-2.50E-01
18	3.25E-01	-7.24E-01	46	3.80E-01	-3.60E-01
19	3.50E-01	-6.73E-01	47	3.20E-01	-4.20E-01
20	4.00E-01	-7.24E-01	48	2.60E-01	-4.32E-01
21	4.25E-01	-7.50E-01	49	2.00E-01	-3.70E-01
22	4.50E-01	-7.67E-01	50	1.40E-01	-2.53E-01
23	4.75E-01	-7.69E-01	51	1.20E-01	-2.02E-01
24	5.00E-01	-7.55E-01	52	1.00E-01	-1.31E-01
25	5.25E-01	-7.48E-01	53	8.00E-02	-5.03E-02
26	5.50E-01	-7.31E-01	54	6.00E-02	2.96E-02
27	5.75E-01	-7.07E-01	55	1.00E-02	5.92E-01
28	6.00E-01	-6.81E-01	56	3.00E-03	8.62E-01

## A.5 PERFIL DE VELOCIDADE PARA $X/C = 27\%$ – CASO 14

A Tab. A.5 apresenta o perfil de velocidade adimensional relativamente à distância à parede  $y$  adimensionalizada pela corda  $c$ ,  $y/c$ . As medições foram tomadas na posição  $x$  adimensionalizada pela corda  $c$ ,  $x/c = 27\%$ . A velocidade local  $U$  é adimensionalizada pela velocidade do escoamento livre  $U_\infty$ .

Tabela A.5 - Perfil de velocidade para  $x/c = 27\%$ , Caso 14.

#	$y/c$	$U/U_\infty$	#	$y/c$	$U/U_\infty$
1	0.064467	1.470767	20	0.151200	1.423905
2	0.071133	1.471602	21	0.164533	1.414726
3	0.077800	1.467846	22	0.177867	1.404714
4	0.084467	1.463255	23	0.191200	1.395118
5	0.091133	1.460751	24	0.204533	1.383020
6	0.091200	1.454778	25	0.217867	1.371754
7	0.091200	1.458532	26	0.231200	1.360491
8	0.091200	1.459367	27	0.244533	1.352146
9	0.097800	1.457830	28	0.257867	1.349644
10	0.097867	1.452274	29	0.271200	1.342551
11	0.104467	1.454908	30	0.284533	1.335876
12	0.104533	1.448102	31	0.297867	1.329200
13	0.111133	1.452821	32	0.311200	1.321274
14	0.111200	1.445600	33	0.324533	1.313764
15	0.117800	1.449900	34	0.337867	1.307089
16	0.117867	1.443513	35	0.351200	1.297911
17	0.124467	1.449483	36	0.364533	1.291652
18	0.124533	1.439758	37	0.377867	1.282474
19	0.137867	1.432666	38	0.391200	1.275799

## A.6 CAMADA LIMITE PARA $x/c = 60\%$ – CASO 11

A Tab. A.6 apresenta o desenvolvimento da camada limite com a distância à parede  $y$  adimensionalizada pela corda  $c$ ,  $y/c$ . As medições foram tomadas na posição  $x$  adimensionalizada pela corda  $c$ ,  $x/c = 60\%$ . A velocidade  $U$  é adimensionalizada pela velocidade externa à camada limite  $U_e$ .

Tabela A.6 – Camada limite para  $x/c = 60\%$ , Caso 11.

$y/c$	$U/U_e$
0.06250	0.00000
0.06251	0.05325
0.06253	0.10627
0.06254	0.15808
0.06255	0.20686
0.06257	0.25080
0.06258	0.28911
0.06259	0.32197
0.06261	0.35006
0.06262	0.37416
0.06263	0.39500
0.06264	0.41316
0.06266	0.42913
0.06267	0.44329
0.06268	0.45594
0.06270	0.46733
0.06271	0.47766
0.06272	0.48707
0.06274	0.49570
0.06275	0.50365
0.06276	0.51100
0.06278	0.51784
0.06279	0.52422
0.06280	0.53020
0.06282	0.53581
0.06283	0.54110
0.06284	0.54609
0.06285	0.55083
0.06287	0.55532
0.06288	0.55960

## A.7 CAMADA LIMITE PARA $x/c = 95\%$ – CASO 11

A Tab. A.7 apresenta o desenvolvimento da camada limite com a distância à parede  $y$  adimensionalizada pela corda  $c$ ,  $y/c$ . As medições foram tomadas na posição  $x$  adimensionalizada pela corda  $c$ ,  $x/c = 95\%$ . A velocidade  $U$  é adimensionalizada pela velocidade externa à camada limite  $U_e$ .

Tabela A.7 – Camada limite para  $x/c = 95\%$ , Caso 11.

#	$y/c$	$U/U_e$	#	$y/c$	$U/U_e$	#	$y/c$	$U/U_e$	#	$y/c$	$U/U_e$
1	1.18539E-02	0.00000	37	1.23099E-02	0.19803	73	1.27659E-02	0.23913	109	1.81872E-02	0.43001
2	1.18665E-02	0.00935	38	1.23225E-02	0.19991	74	1.27785E-02	0.23983	110	1.88205E-02	0.45700
3	1.18792E-02	0.01870	39	1.23352E-02	0.20173	75	1.27912E-02	0.24052	111	1.94539E-02	0.48148
4	1.18919E-02	0.02804	40	1.23479E-02	0.20347	76	1.28039E-02	0.24119	112	2.00872E-02	0.51273
5	1.19045E-02	0.03736	41	1.23605E-02	0.20515	77	1.28165E-02	0.24186	113	2.07205E-02	0.53677
6	1.19172E-02	0.04663	42	1.23732E-02	0.20677	78	1.28292E-02	0.24251	114	2.13539E-02	0.56405
7	1.19299E-02	0.05581	43	1.23859E-02	0.20833	79	1.28419E-02	0.24315	115	2.19872E-02	0.59289
8	1.19425E-02	0.06485	44	1.23985E-02	0.20983	80	1.28545E-02	0.24378	116	2.26205E-02	0.61223
9	1.19552E-02	0.07368	45	1.24112E-02	0.21129	81	1.28672E-02	0.24440	117	2.32539E-02	0.62390
10	1.19679E-02	0.08225	46	1.24239E-02	0.21270	82	1.28799E-02	0.24501	118	2.38872E-02	0.65151
11	1.19805E-02	0.09049	47	1.24365E-02	0.21406	83	1.28925E-02	0.24561	119	2.45205E-02	0.69168
12	1.19932E-02	0.09837	48	1.24492E-02	0.21538	84	1.29052E-02	0.24620	120	2.51539E-02	0.70973
13	1.20059E-02	0.10584	49	1.24619E-02	0.21666	85	1.29179E-02	0.24678	121	2.57872E-02	0.73656
14	1.20185E-02	0.11290	50	1.24745E-02	0.21790	86	1.29305E-02	0.24735	122	2.64205E-02	0.75290
15	1.20312E-02	0.11955	51	1.24872E-02	0.21911	87	1.29432E-02	0.24791	123	2.70539E-02	0.78369
16	1.20439E-02	0.12579	52	1.24999E-02	0.22028	88	1.29559E-02	0.24846	124	2.76872E-02	0.81467
17	1.20565E-02	0.13165	53	1.25125E-02	0.22141	89	1.29685E-02	0.24901	125	2.83205E-02	0.82844
18	1.20692E-02	0.13713	54	1.25252E-02	0.22252	90	1.29812E-02	0.24955	126	2.89539E-02	0.84774
19	1.20819E-02	0.14227	55	1.25379E-02	0.22359	91	1.29939E-02	0.25008	127	2.95872E-02	0.86999
20	1.20945E-02	0.14709	56	1.25505E-02	0.22464	92	1.30065E-02	0.25060	128	3.02205E-02	0.89110
21	1.21072E-02	0.15161	57	1.25632E-02	0.22566	93	1.30192E-02	0.25111	129	3.08539E-02	0.90494
22	1.21199E-02	0.15586	58	1.25759E-02	0.22666	94	1.30319E-02	0.25162	130	3.14872E-02	0.92111
23	1.21325E-02	0.15986	59	1.25885E-02	0.22763	95	1.30445E-02	0.25212	131	3.21205E-02	0.93144
24	1.21452E-02	0.16362	60	1.26012E-02	0.22857	96	1.30572E-02	0.25262	132	3.27539E-02	0.94686
25	1.21579E-02	0.16717	61	1.26139E-02	0.22950	97	1.30699E-02	0.25310	133	3.33872E-02	0.96487
26	1.21705E-02	0.17052	62	1.26265E-02	0.23040	98	1.30825E-02	0.25358	134	3.40205E-02	0.97163
27	1.21832E-02	0.17369	63	1.26392E-02	0.23128	99	1.30952E-02	0.25406	135	3.46539E-02	0.98261
28	1.21959E-02	0.17669	64	1.26519E-02	0.23214	100	1.31079E-02	0.25453	136	3.52872E-02	0.98407
29	1.22085E-02	0.17955	65	1.26645E-02	0.23299	101	1.31205E-02	0.25253	137	3.59205E-02	0.99155
30	1.22212E-02	0.18225	66	1.26772E-02	0.23381	102	1.37539E-02	0.26014	138	3.65539E-02	0.99532
31	1.22339E-02	0.18483	67	1.26899E-02	0.23462	103	1.43872E-02	0.28228	139	3.71872E-02	0.99332
32	1.22465E-02	0.18729	68	1.27025E-02	0.23541	104	1.50205E-02	0.31027	140	3.78205E-02	0.99755
33	1.22592E-02	0.18963	69	1.27152E-02	0.23618	105	1.56539E-02	0.33403	141	3.84539E-02	0.99750
34	1.22719E-02	0.19187	70	1.27279E-02	0.23694	106	1.62872E-02	0.36708	142	3.90872E-02	0.99968
35	1.22845E-02	0.19401	71	1.27405E-02	0.23768	107	1.69205E-02	0.38369	143	3.97205E-02	1.00000
36	1.22972E-02	0.19606	72	1.27532E-02	0.23841	108	1.75539E-02	0.40132			

## ANEXO B

### B.1 COORDENADAS DO AEROFÓLIO NACA 0012

As coordenadas do aerofólio NACA 0012 neste trabalho são definidas por 120 pontos calculados como proporções da corda geométrica  $c$ . Esses pontos, apresentados na Tab. (B.1), foram obtidos com os procedimentos computacionais propostos por Ladson et al. [1996].

Tabela B.1 – Coordenadas da seção NACA 0012 adimensionalizadas pela corda  $c$ .

#	x/c	y/c	#	x/c	y/c	#	x/c	y/c	#	x/c	y/c
1	1.000000	-0.0012600	31	0.4000000	-0.0580301	61	0.0002160	0.0026018	91	0.4200000	0.0572255
2	0.9800000	-0.0040319	32	0.3800000	-0.0587125	62	0.0008770	0.0052090	92	0.4400000	0.0563069
3	0.9600000	-0.0067372	33	0.3600000	-0.0592633	63	0.0020000	0.0078146	93	0.4600000	0.0552821
4	0.9400000	-0.0093783	34	0.3400000	-0.0596722	64	0.0033220	0.0100140	94	0.4800000	0.0541578
5	0.9200000	-0.0119576	35	0.3200000	-0.0599279	65	0.0050000	0.0122131	95	0.5000000	0.0529403
6	0.9000000	-0.0144772	36	0.3000000	-0.0600173	66	0.0072670	0.0146254	96	0.5200000	0.0516351
7	0.8800000	-0.0169388	37	0.2800000	-0.0599258	67	0.0100000	0.0170371	97	0.5400000	0.0502475
8	0.8600000	-0.0193439	38	0.2600000	-0.0596369	68	0.0145110	0.0203181	98	0.5600000	0.0487821
9	0.8400000	-0.0216937	39	0.2400000	-0.0591312	69	0.0200000	0.0235978	99	0.5800000	0.0472429
10	0.8200000	-0.0239893	40	0.2200000	-0.0583863	70	0.0300000	0.0284014	100	0.6000000	0.0456337
11	0.8000000	-0.0262312	41	0.2000000	-0.0573754	71	0.0400000	0.0322772	101	0.6200000	0.0439578
12	0.7800000	-0.0284198	42	0.1800000	-0.0560662	72	0.0500000	0.0355469	102	0.6400000	0.0422180
13	0.7600000	-0.0305553	43	0.1600000	-0.0544182	73	0.0600000	0.0383758	103	0.6600000	0.0404169
14	0.7400000	-0.0326374	44	0.1400000	-0.0523797	74	0.0800000	0.0430723	104	0.6800000	0.0385567
15	0.7200000	-0.0346656	45	0.1200000	-0.0498818	75	0.1000000	0.0468277	105	0.7000000	0.0366391
16	0.7000000	-0.0366391	46	0.1000000	-0.0468277	76	0.1200000	0.0498818	106	0.7200000	0.0346656
17	0.6800000	-0.0385567	47	0.0800000	-0.0430723	77	0.1400000	0.0523797	107	0.7400000	0.0326374
18	0.6600000	-0.0404169	48	0.0600000	-0.0383758	78	0.1600000	0.0544182	108	0.7600000	0.0305553
19	0.6400000	-0.0422180	49	0.0500000	-0.0355469	79	0.1800000	0.0560662	109	0.7800000	0.0284198
20	0.6200000	-0.0439578	50	0.0400000	-0.0322772	80	0.2000000	0.0573754	110	0.8000000	0.0262312
21	0.6000000	-0.0456337	51	0.0300000	-0.0284014	81	0.2200000	0.0583863	111	0.8200000	0.0239893
22	0.5800000	-0.0472429	52	0.0200000	-0.0235978	82	0.2400000	0.0591312	112	0.8400000	0.0216937
23	0.5600000	-0.0487821	53	0.0145110	-0.0203181	83	0.2600000	0.0596369	113	0.8600000	0.0193439
24	0.5400000	-0.0502475	54	0.0100000	-0.0170371	84	0.2800000	0.0599258	114	0.8800000	0.0169388
25	0.5200000	-0.0516351	55	0.0072670	-0.0146254	85	0.3000000	0.0600173	115	0.9000000	0.0144772
26	0.5000000	-0.0529403	56	0.0050000	-0.0122131	86	0.3200000	0.0599279	116	0.9200000	0.0119576
27	0.4800000	-0.0541578	57	0.0033220	-0.0100140	87	0.3400000	0.0596722	117	0.9400000	0.0093783
28	0.4600000	-0.0552821	58	0.0020000	-0.0078146	88	0.3600000	0.0592633	118	0.9600000	0.0067372
29	0.4400000	-0.0563069	59	0.0008770	-0.0052090	89	0.3800000	0.0587125	119	0.9800000	0.0040319
30	0.4200000	-0.0572255	60	0.0002160	-0.0026018	90	0.4000000	0.0580301	120	1.0000000	0.0012600