UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Fernando Rodrigues de Oliveira

Porto Alegre

2010

FERNANDO RODRIGUES DE OLIVEIRA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

Porto Alegre

2010/2

FERNANDO RODRIGUES DE OLIVEIRA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Luisa Rodríguez Doering

INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS

____

Profa. Liana Beatriz Costi Nácul

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Porto Alegre, 14 de dezembro de 2010

A Matemática é a honra do espírito humano.

Leibniz

AGRADECIMENTOS

À Profª. Dra. Elisabete Zardo Búrigo pela orientação nesse trabalho e pelas contribuições feitas ao longo de três anos na graduação.

À Profª. Dra. Luisa Rodríguez Doering e à professora Liana Beatriz Costi Nácul por aceitarem participar da banca examinadora desse trabalho.

Ao corpo docente do Instituto de Matemática e da Faculdade de Educação da UFRGS, em especial para a Profª. Dra. Marilaine de Fraga Santana, para o Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso, para a Profª. Dra.Cydara Cavedon Ripoll, para o Prof. Dr. Vilmar Trevisan, para o Prof. Dr. Claus Ivo Doering, para Profª. Dra. Ada Maria de Souza Doering, para o Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano, para a Profª. Dra. Maria Alice Gravina e para o Prof. Dr. Francisco Egger Moelwalld por me proporcionarem um aprendizado de qualidade.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul por me proporcionar um ensino de qualidade e gratuito.

À minha família, principalmente minha mãe Dorvalina por sempre me incentivar nos estudos. À Michele, à minha tia Olívia, à Daniela, por fazer parte da minha educação, e ao amigo Tiago.

Aos meus colegas, em especial ao Leonardo, Rodrigo, Renato, Guilherme, Diego, Marilise, Luís, Alessandro, Camilla, Grasiela e Sara pelo companheirismo ao longo do curso.

RESUMO

Este trabalho pretende discutir uma proposta de inclusão do ensino de noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio. Também comento a inclusão do ensino de Cálculo no currículo escolar e como é abordado atualmente em alguns livros didáticos adotados no ensino médio. A seguir, são apresentadas duas propostas de atividades que envolvem a introdução da noção de derivada através da ideia de taxa de variação instantânea. Uma das propostas foi experimentada com alunos do Ensino Médio. Ao final, é apresentada uma análise dessa experimentação, concluindo com uma posição afirmativa sobre a possibilidade de inclusão de noções de Cálculo no Ensino Médio.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática, Cálculo, Funções, Taxa de Variação Média, Taxa de Variação Instantânea

ABSTRACT

In this paper we discuss a proposal to include the teaching of notions of Differential Calculus at high school level. We also comment the inclusion of the teaching of calculus in the school curriculum and how this is approached in some textbooks currently adopted in high school. Two proposals for activities are presented, which involve the introduction of the concept of derivative through the idea of instantaneous rate of change. One of these proposals was tested with high school students. At the end, we present an analysis of this trial, concluding with an affirmative answer to the possibility of including notions of calculus at high school level.

Keywords: Mathematics teaching, Calculus, Functions, Average Rate of Change, Instantaneous Rate of Change.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino de matemática no Brasil sofreu, ao longo da história reformas. O ensino de Cálculo Diferencial e Integral esteve incluído, durante um certo período, no programa escolar de ensino de matemática. Entretanto, hoje, nas escolas públicas de Porto Alegre, apenas o Colégio Militar apresenta esse tópico como parte do programa curricular do ensino médio. Assim, podemos nos questionar sobre a causa de outras escolas não adotarem a mesma estrutura curricular.

Em 2008, quando fui bolsista de Iniciação Científica, tive contato com provas de alunos reprovados na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica I-A da UFRGS e, observando algumas dificuldades no estudo dos conceitos dessa área, fui motivado a analisar como se deu o estudo dessa disciplina no Brasil, e questionar sobre a viabilidade do "adiantamento" de alguns tópicos de matemática do ensino superior no ensino médio.

Dentre as justificativas que me motivaram a defender, neste trabalho, a inclusão de noções de Cálculo no ensino médio, encontra-se a convicção de que o Cálculo Diferencial se apresenta como uma grande ferramenta no estudo de funções. Ao ingressar na Universidade e ter o primeiro contato com noções de limites, derivadas e integrais, observei que durante o ensino médio havia sempre estudado as funções de forma estática, apenas com aplicação de fórmulas. Notei que, com esses novos conceitos, esse ensino poderia ser tratado de forma mais dinâmica. O ensino de noções de Cálculo que proponho neste trabalho pretende contribuir para um estudo mais dinâmico de funções visando o pensamento variacional no aluno (VASCO, apud BARALDO, 2004, p. 40). Acredito que o ensino de funções deve priorizar propriedades relacionadas com a dependência entre as variáveis e, com o ensino de Cálculo, esses caminhos ficariam mais diretos e de melhor compreensão. Pela minha experiência na aprendizagem de funções no ensino médio, observo uma ênfase em nomenclaturas e definições que poderiam ser menos valorizadas no ensino de matemática do que, por exemplo, crescimento e decrescimento de funções, pontos críticos e concavidades em um intervalo, que a representação gráfica de uma função pode informar ao estudante.

Atentando para outro fato, ressalvo que com o ensino de Cálculo podemos estabelecer relações com outros conteúdos de Matemática. Relacionando-o com o ensino de Geometria, podemos deduzir a fórmula da área de um círculo usando noções de limites. Na Geometria Analítica podemos analisar pontos críticos e pontos de inflexão, importantes para a descrição de uma curva.

Além das inúmeras situações onde utilizamos o Cálculo Diferencial no ensino de matemática, podemos buscar, junto aos professores de Física, relações dessa ferramenta com tópicos de estudo na área da Física. O ensino e a aprendizagem de conceitos de velocidade, aceleração e posição, bem como os estudos do Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) ficariam muito facilitados quando relacionados com taxas de variação instantânea.

Observa-se uma alta preocupação de professores e estudantes com o ensino de Cálculo no ensino superior. Assim, uma introdução desses tópicos na escola básica também serviria para facilitar uma transição para esses assuntos no ensino superior. Para os alunos ingressantes nos cursos de Engenharia e Matemática, o Cálculo não seria tão impactante.

Nesse trabalho apresento, no segundo capítulo, um breve comentário sobre o ensino de Cálculo nas escolas do Brasil a partir dos anos 1930. Nessa parte do trabalho, há um breve comentário sobre a abordagem ou ausência desse conteúdo nos livros didáticos. No terceiro capítulo, apresento uma proposta de atividade de ensino de derivadas no ensino médio. Após, é descrita uma atividade experimentada com alunos de ensino médio que envolve uma introdução ao estudo de taxas de variação de funções, e que concluiu apresentando, de forma intuitiva, a noção de derivada. Por fim, é apresentada uma análise dessa experiência.

2. UM PANORAMA HISTÓRICO SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO NAS ESCOLAS

O processo de inclusão do ensino de funções no ensino secundário no Brasil está vinculado à reforma que ocorria em alguns países da Europa. A reforma proposta por Felix Klein, um matemático prussiano, visou a união de disciplinas como Álgebra, Geometria e Aritmética, transformando-se na nova disciplina chamada Matemática. Observamos que, de acordo com Schubring:

> No início do século XX, em vários países da Europa, ocorreram iniciativas de reformas curriculares e metodológicas que intencionavam garantir uma instrução matemática mais ampla, incluindo conhecimentos modernos e avançados os quais pudessem servir em aplicações técnicas. (SCHUBRING, apud ALVAREZ, 2004, p. 5)

Essa fusão foi proposta em 1908 na Alemanha em um Congresso Internacional, cujo epicentro foram as ideias de Klein. Segundo Valente:

> Por ocasião do IV Congresso Internacional de Matemática, em 1908, foi criado o IMUK (Internationale Mathematische Unterrichtskommission)/ CIEM (Commission Internationale de I'Enseignement Mathématique), um comitê internacional que visava acompanhar as comunicações sobre as reformas curriculares para o ensino de matemática. Uma comissão central foi eleita para sua direção: Felix Klein, Henri Fehr e George Greenhill. (VALENTE, apud ALVAREZ, 2004, p. 5).

Como parte de um movimento modernizador, Felix Klein elaborou uma proposta convincente para a inclusão do Cálculo Diferencial entre os conteúdos do ensino secundário. Segundo Braga (2006), as pesquisas de Klein com modelos planos para a Geometria Hiperbólica revelaram concepções que o matemático prussiano transpôs, mais tarde, para o ideário do movimento renovador do ensino secundário. A primeira era a ideia de fusão e a combinação de ramos aparentemente separados. Já a segunda, era pensar a matemática de forma parcialmente intuitiva.

Assim, Felix Klein teve um destaque na liderança do movimento internacional do início do século XX, que objetivava reformular o ensino secundário de matemática. Devemos ressaltar que se trata de um matemático que defendia e valorizava a intuição. Além disso, segundo Braga (2006), Klein era altamente respeitado pelos seus trabalhos matemáticos que pretendiam estabelecer uma fusão e combinação de áreas da matemática aparentemente separadas. Por ser filho de um alto funcionário do governo, Klein teve grande influência política, demonstrada por inúmeras comissões das quais participou.

Um fator que motivou Klein a buscar reformulações no ensino de matemática na Alemanha foi a necessidade de propor um ensino mais homogêneo nos diferentes tipos de escolas. Em sua obra *Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Superior*, Klein (apud BRAGA, 2006, p. 43) expressou muitas de suas ideias que acabaram se transformando em princípios do movimento de modernização do ensino de matemática.

Nessa obra, Klein propõe a inserção do Cálculo Diferencial entre os conteúdos do ensino secundário. Klein mostra-se preocupado com questões relacionadas com o ensino superior, justificando que não era dada a devida importância para esta fase do ensino. Se, por um lado, as escolas técnicas superiores priorizavam partes não elementares da matemática para que seus alunos se concentrassem em questões mais próximas de seus estudos técnicos, por outro lado, os alunos das escolas secundárias clássicas precisavam de um embasamento matemático que dessem a eles condições de estudar não somente nas universidades, mas também em escolas politécnicas. Portanto, o que Klein incentivou foi a introdução de conteúdos do ensino preparatório de matemática para as escolas superiores no programa curricular de matemática das escolas secundárias (Ibidem).

Ainda na obra *Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Superior,* dá-se indícios de que a introdução do Cálculo Diferencial foi o objetivo central que motivou Klein à empreitada do movimento modernizador. Segundo Braga (2006), também foram feitas, anteriormente, tentativas inábeis de se incluir esse tópico no ensino secundário, que culminou em uma proibição oficial na Alemanha do ensino de Cálculo nos decênios de 70 e 80 (século XIX). Essa condição de proibição vigente na Alemanha precisava ser revertida, e por isso Klein elaborou uma convincente argumentação, além de uma estratégia política bem arquitetada no sentido de desviar o foco das críticas que seriam feitas ao seu objetivo primordial: a introdução do Cálculo.

Ao usar o princípio de centralizar o ensino de matemática escolar no conceito de função, Klein acreditou que a introdução do Cálculo seria mais viável, pois as variáveis (independente e dependente) das funções estariam no dia-a-dia do secundário.

Vale salientar que outro argumento apontado por Klein para a introdução de funções no ensino secundário estava apoiado na possibilidade de o aluno visualizar e trabalhar com alguma facilidade a mobilidade das figuras geométricas.

2.1 Ensino de Cálculo no Brasil

Após comentar esse movimento modernizador no ensino de matemática mundial, a partir dos programas que Felix Klein propôs para a Alemanha, podemos nos perguntar se o Brasil já teve o ensino de Cálculo em seu programa curricular nas escolas de ensino secundário.

Para entender como funcionava o ensino de Matemática no Brasil, devemos observar o programa curricular da época. O ensino secundário no Brasil, a partir da Reforma Francisco Campos de 1931, era dividido em dois ciclos, o fundamental (cinco anos de duração) e o complementar (dois anos de duração). Na quinta série do fundamental já constava o ensino de noções de derivada, conforme Dassie (2008):

> **Quinta série**
> **Aritmética, Álgebra e Geometria**
> [...] Derivada de um polinômio inteiro em x; Noção de limite. Derivada de $\sqrt{x}$. Derivada de seno de x, co-seno de x, tangente de x e cotangente de x; Interpretação geométrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples; Processos elementares de desenvolvimento em série; convergência de uma série; Desenvolvimento em série do seno, co-seno e tangente; Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas. Aplicação ao cálculo de certas áreas; Volumes do prisma e do cilindro; da pirâmide, do cone e dos respectivos troncos. Volume da esfera e suas partes; Estudo sucinto das seções cônicas. (BRASIL apud DASSIE, 2008, p. 248)

Conforme consta no artigo 4º do Decreto Federal n° 19890 de 1931, relacionado ao curso complementar, o aluno estudaria por dois anos, as seguintes matérias:

> Art 4°
> O Curso Complementar, obrigatório para os candidatos à matrícula em determinados institutos de ensino superior, será feito em dois anos de estudo intensivo, com exercícios e trabalhos práticos individuais, e compreenderá as seguintes matérias: Alemão ou Inglês. Latim, Literatura, Geografia, Geofísica e Cosmografia, História da Civilização, Matemática, Física, Química, História natural, Biologia geral, Higiene, Psicologia e Lógica, Sociologia, Noções de Economia e Estatística, História da Filosofia e Desenho. (BRASIL, 1931).

O Curso Complementar se subdividia em curso pré-médico, curso pré-politécnico e curso pré-jurídico e o ensino de noções de Cálculo, além de estar no pré-politécnico, estava presente no pré-médico como podemos observar no programa abaixo:

> [...]19. Derivadas e diferenciais das funções de uma variável; definições, notações e interpretação geométrica. 20. Funções de mais de uma variável. Derivadas e diferenças parciais. Diferença total. 21. Derivadas e diferenciais sucessivas. 22. Desenvolvimento em série de funções de uma só variável. Fórmula de Taylor. Resto da fórmula de Taylor; expressão de Lagrange. Fórmula de Mac-Laurin. Aplicações às funções elementares. 23. Formas indeterminadas. Regra de L'Hôpital. 24. Estudo

> das curvas definidas por equação de duas variáveis resolvidas em relação a uma delas. Tangentes e normais. Assíntotas. Concavidade. Máxima e mínima. Pontos de inflexão. Pontos notáveis (BRASIL, apud OTONE E SILVA, 2006, p. 58).

Os alunos que ingressassem no pré-politécnico, também estudariam conceitos do Cálculo Diferencial, conforme Otone e Silva (2006):

> [...] Limites. [...] Funções contínuas. [...] Funções elementares. Diferença finita, derivada, diferencial. Cálculo das derivadas e das diferenciais. Aplicação às funções elementares. Teorema de Rolle. [...] Regra de L'Hôpital. Comparação das funções exponencial e logarítmica com os polinômios. [...] Máximos e mínimos. Estudo da variação de uma função. Representação cartesiana. (BRASIL, apud OTONE e SILVA, 2006, p. 60)

Em 1942, uma nova legislação (Decreto-Lei nº 4.244), conhecida como Lei Orgânica do Ensino Secundário, modificou a organização curricular do secundário. Separado em dois ciclos, o Ginasial (quatro anos de duração) e o Colegial (3 anos de duração), o ensino secundário apresentava em seu programa curricular o estudo de conceitos do Cálculo no terceiro ano do curso Científico do Colegial e na terceira série do Curso Clássico do Colegial. Entre eles, o ensino de derivadas e aplicações envolvendo problemas de máximos e mínimos.

> **Programas do Segundo Ciclo**
> **Programas do Curso Clássico**
> **Terceira Série**
> **Álgebra**
> Unidade I – Funções: 1 – Noção de função de variável real. 2 – Representação Cartesiana. 3 – Noção de limite e de continuidade.
> Unidade II – **Derivadas**: 1 – **Definição; interpretação geométrica e cinemática.** 2 – **Cálculo de Derivadas**. 3 – Derivação de funções elementares. 4 – **Aplicação à determinação dos máximos e mínimos** e ao estudo da variação de algumas funções simples. (BRASIL, apud DASSIE, 2008, p. 252)

No curso científico, a abordagem é mais abrangente, como nos mostra Dassie (2008):

> **Programas do Segundo Ciclo**
> **Programas do Curso Científico**
> **Terceira Série**
> **Álgebra**
> Unidade I – Séries: 1 – Sucessões. 2 – Cálculo aritmético dos limites. 3 – Séries numéricas. 4 – Principais caracteres de convergência.
> Unidade II – Funções: 1 – Função de uma variável real. 2 – Representação cartesiana. 3 – Continuidade: pontos de continuidade; descontinuidades de uma função racional.
> Unidade III – **Derivadas**: 1 – **Definição; interpretação geométrica e cinemática.** 2 – **Cálculo de Derivadas**. 3 – Derivação de funções elementares. 4 – **Aplicação à determinação dos máximos e mínimos** e ao estudo da variação de algumas funções simples. (DASSIE, 2008, p. 254)

Em 1951, a Portaria n.º 966 do Ministério da Educação e Saúde incumbiu o Colégio Pedro II da elaboração dos programas das disciplinas de todo o curso secundário. Todas as escolas brasileiras deveriam seguir esse programa, que foi detalhado através da Portaria nº 1.045, desse mesmo ano. Para a terceira série do curso colegial, o programa proposto para o ensino de Matemática no secundário era o seguinte:

> Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; **noção intuitiva de limite e continuidade. Noções sobre derivadas e primitivas; interpretações; aplicações.** Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades, divisibilidade por x±a; problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais. (BRASIL. MES, 1951).

Mas, a partir de 1960, o ensino de Cálculo foi sendo excluído das escolas brasileiras. Há algumas hipóteses para explicar esse abandono: segundo Ávila (1991), os defensores da matemática moderna priorizavam outros tópicos, que melhor se prestavam às necessidades que eles consideravam modernas; por outro lado, não haveria muito espaço no programa, já que o rigor e o formalismo que se exigia da Teoria dos Conjuntos, e vários detalhamentos axiomáticos, tomavam muito tempo. Além disso, devido a essa excessiva preocupação com o pensamento rigoroso, o ensino de Cálculo deveria exigir um estudo detalhado dos números reais, o que levaria muito tempo, e por isso seria totalmente inviável. Segundo o autor, o vestibular prestado na época também não cobrava, em seu edital, o estudo de Cálculo.

A seguir apresento um breve comentário sobre a disposição de conteúdos relacionados à introdução de noções de Cálculo nos livros didáticos:

- "Matemática: Ciência e Aplicações" (IEZZI et alii, 2001)

No terceiro volume desse livro, consta em seu nono capítulo o estudo de funções contínuas como pré-requisito para um estudo de derivadas. Assim, no início, é dada uma ênfase em exemplos de funções contínuas em todo o seu domínio e de funções descontínuas em algum ponto. Após essa unidade, o livro define a derivada em um ponto do domínio da função. Na terceira unidade, o livro trata da equação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto, usando a relação com a derivada no ponto em questão. A seguir, traz a definição da função derivada e, usando a definição, determina a derivada de algumas funções elementares. Após isso, o livro traz uma aplicação das derivadas ao estudo da Cinemática, e, terminando o capítulo, o livro traz a relação entre a derivada e a continuidade de uma função.

O décimo capítulo inicia com as propriedades da derivada da soma de duas funções e do produto de duas funções e, a seguir, o livro traz a derivada da função inversa. No décimo primeiro capítulo, é dada uma ênfase ao estudo de máximos e mínimos das funções. Neste momento, há uma ênfase na interpretação geométrica da derivada, na medida em que se usam as raízes da função derivada como pontos críticos.

- “Matemática, Conceitos e Fundamentos (Vol. 3)” (YOUSSEF, 1993)

O quinto capítulo desse livro traz, como introdução ao estudo da derivada, uma unidade que estuda limites e continuidade das funções reais. Assim, a ênfase inicial é no ensino das propriedades operatórias dos limites. Na terceira unidade, o livro trata de limites nas quais a variável cresce ilimitadamente. Após o estudo dos limites fundamentais, o livro introduz o estudo da derivada com uma motivação geométrica, sem usar o limite na definição. A partir dessa definição, o livro traz uma lista de regras de derivação. Em sua sétima unidade, o livro define a regra de derivação para funções compostas, sem dedução formal. O estudo de pontos críticos e de inflexão é apresentado na oitava unidade do livro. Na última unidade, o livro propõe o estudo dos gráficos de funções racionais.

- “Matemática, Ensino Médio (Vol. 3)” (SMOLE, 2003)

Esse livro aborda o estudo da derivada sob o ponto de vista de taxas de variação, introduzindo no primeiro capítulo, o estudo de taxa de variação média de funções. A seguir, o livro aborda uma noção intuitiva de limites. Ao abordar o estudo da derivada, a autora a relaciona com o estudo de taxa de variação instantânea de uma função. Após, o livro descreve uma interpretação da derivada na Cinemática. Após a introdução do conceito de função derivada, e a dedução da derivada de algumas funções elementares, como a derivada da função seno, o livro aborda o estudo do sinal da função derivada e o estudo dos pontos críticos de uma função.

- Matemática: Contexto e Aplicações (Vol. 3) (DANTE, 2003)

Em seu oitavo capítulo, o livro inicia a abordagem do conceito de derivada de uma função, usando a taxa de variação da função. Para a introdução do conceito de derivada, o livro aborda uma interpretação geométrica da derivada de uma função em um ponto. A seguir, o autor define a função derivada usando a noção de limite, e determina a derivada de algumas funções elementares. Após estudar as propriedades operatórias da derivada, o livro aborda o comportamento de funções usando a ferramenta da derivada. Por fim, o livro aborda a os pontos críticos de uma função.

Atualmente, encontramos em alguns livros de ensino médio noções de limites e derivadas. Mas esse assunto não aparece no índice de livros didáticos publicados em volume único. Entre os livros didáticos de volume único analisados estão: Curso de Matemática (BIANCHINI, 2003); Coleção base: Matemática (PAIVA, 1999); Matemática Completa (GIOVANNI, 2002); Série novo ensino médio: Matemática (SOUZA, 2004). Isso acaba revelando que o ensino médio de Matemática não tem o estudo de Cálculo como um de seus assuntos principais, pois esse é um dos conteúdos que são retirados dos livros editados em volume único. Os livros de volume único são adotados na maioria das escolas públicas de Porto Alegre e do país, indicando, possivelmente, que os alunos da rede pública não estudam essas noções de Cálculo.

3. UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE DERIVADAS

Analisando o currículo de matemática do ensino médio praticado em escolas e em livros didáticos, observo que o estudo de funções se apresenta em geral em blocos separados dos outros conteúdos. Não há uma relação com outros conceitos matemáticos, prejudicando a aprendizagem dos alunos. Mas também no estudo de funções não há uma abordagem que possibilite ao aluno um ensino mais dinâmico. Dá-se uma ênfase em nomenclaturas e definições que não têm significado para o aluno. Quando me refiro a essas nomenclaturas, tomo como exemplo a ênfase em nomear o domínio, a imagem e o contradomínio de uma função, assim como uma maior importância dada a algumas definições como injetividade, sobrejetividade e bijetividade de uma função. Essas definições tomam muito tempo no ensino de funções. Devo lembrar que não proponho a exclusão desses conceitos do ensino, mas que outras propriedades sejam enfatizadas. Dentre essas propriedades, destaco a relação entre uma função e seu comportamento que pode ser analisado através do seu gráfico, envolvendo pontos críticos e intervalos de crescimento e decrescimento. Desse modo o aluno pode visualizar as relações envolvidas entre o estudo de funções e outras áreas da matemática, e até mesmo da Física.

Com o ensino de noções de Cálculo, podemos aproximar conceitos da matemática que usualmente são ensinados em blocos, facilitando sua compreensão. A interpretação geométrica da noção de taxa de variação instantânea permite o estudo de várias propriedades de uma função acima citadas.

Diante disso, exemplificarei, nesse trabalho, uma possibilidade de abordagem de tópicos de Cálculo no Ensino Médio apresentada na Revista do Professor de Matemática proposta pelo professor Geraldo Ávila (2006). A seguir, apresentarei uma adaptação desse planejamento que foi experimentada em uma escola de ensino médio de Porto Alegre. Essa proposta envolve o estudo gráfico de uma função quadrática, analisando elementos do comportamento gráfico, como crescimento e decrescimento, bem como pontos críticos, sempre utilizando o conceito de derivada, entendido como taxa de variação instantânea.

3.1 Um roteiro inicial

Apresento a seguir a proposta de Ávila (2006) para uma abordagem de noções de Cálculo no Ensino Médio.

Segundo o autor, a Geometria Analítica pode ser fortemente relacionada com o estudo de funções. Assim, podemos iniciar o roteiro introduzindo o conceito de equação de reta, mas sem enfatizar nomenclaturas do tipo “equação geral de reta”, “equação na forma normal”, ou “retas perpendiculares”. Podemos trabalhar apenas com retas que passam pela origem, usando a ideia de proporção. Com esse conceito de proporcionalidade entre grandezas, podemos falar em declividade da reta $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, enfatizando o significado geométrico de que, quanto maior a declividade da reta, maior o ângulo em relação ao eixo horizontal.

A seguir, propõe-se uma breve introdução do conceito de função, de preferência com exemplos simples e concretos, mas com aplicações significativas.

Mostrando que grandezas proporcionais podem ser vistas como duas variáveis (independente e dependente) que se relacionam, podemos esboçar o gráfico de uma reta que passa pela origem. Logo após, pode-se mostrar que a equação da reta na forma $y = ax + b$ trata-se apenas de uma translação vertical no gráfico de $y = ax$ com magnitude b. De acordo com Ávila (2006), atribuindo valores diferentes para a e b, podemos levar o aluno a um raciocínio mais geral sobre a relação entre a equação e o gráfico.

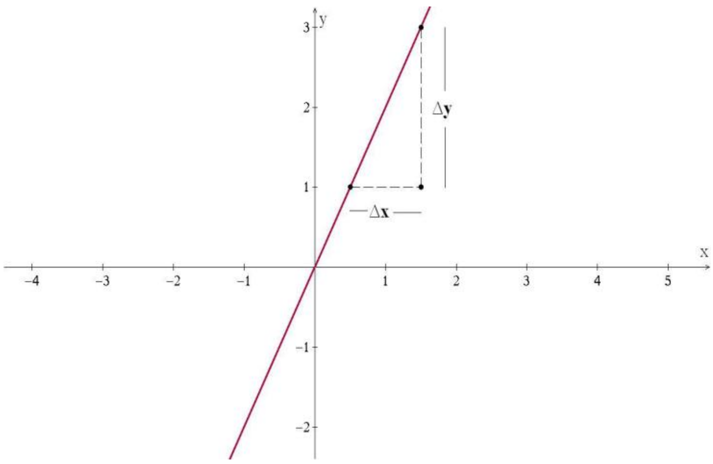


Figura 1

3.1.1 Estudando mais funções

Ao continuar o estudo de funções, podemos apresentar um exemplo mais adequado pela sua simplicidade, que é o da função quadrática $y = f(x) = x^2$. Aqui podem-se calcular alguns valores de $y = f(x)$ para valores atribuídos a x como, por exemplo, $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm\frac{3}{2}$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$. Neste momento, torna-se conveniente discutir a paridade da função, pois com esses pontos marcados não é difícil intuir que $f(-x) = f(x)$. Assim, podemos conjecturar que o gráfico da função $f(x) = x^2$ tem o comportamento igual ao esboçado na figura 2.

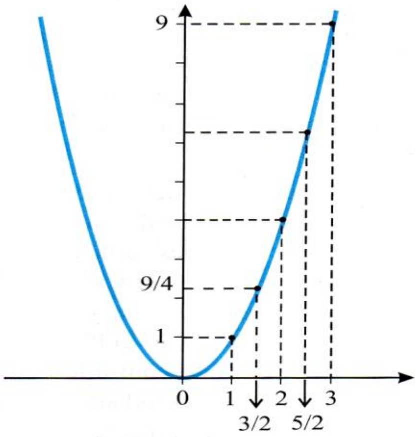


Figura 2

Neste momento, Ávila (2006) comenta que devemos questionar os alunos sobre como ter a certeza de que o gráfico da função em questão é sempre côncavo para cima, pois para valores de *x* maiores que 3, por exemplo, fica inviável uma representação gráfica baseada em pontos particulares, e também esse é um processo que não garante que o gráfico não tenha o aspecto parecido com o gráfico esboçado na figura 3, ou com o primeiro gráfico esboçado na figura 4.

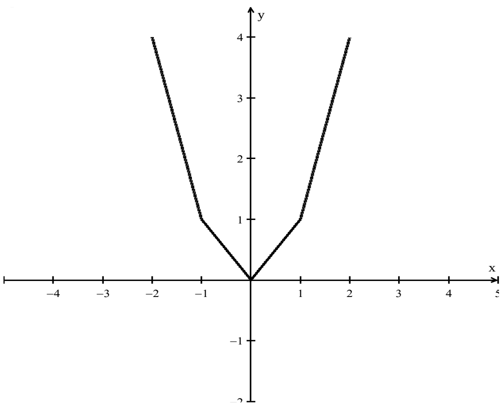


Figura 3

Aqui, surge mais um conceito não abordado anteriormente: o que significa o gráfico de uma função ser côncavo para cima em um intervalo? Um modo de definir a concavidade é o seguinte: consideramos dois pontos distintos do gráfico $A = (a, c)$ e $B = (b, d)$, assim dizemos que o gráfico da função é *côncavo para cima no intervalo* $I = (a, b)$ se todos os pontos do segmento de reta $\overline{AB}$ estiverem acima do gráfico da função. E dizemos que o gráfico da função é *côncavo para baixo no intervalo* $I = (a,b)$ se todos os pontos do segmento estiverem abaixo do gráfico (RIPOLL; RIPOLL; SILVEIRA, s/d).

Segundo Ávila (2006), para responder aos questionamentos sobre a concavidade, podemos introduzir o conceito de reta tangente, e usar a declividade da reta tangente à curva em um ponto como argumento para discutir a concavidade da função. A curva será côncava para cima se a declividade da reta tangente à curva crescer quando os valores de *x* crescerem.

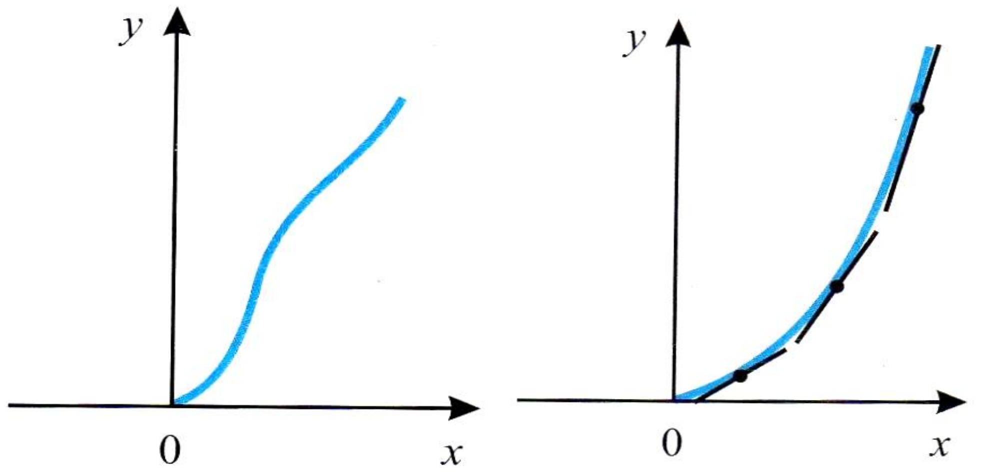


Figura 4

E como saber se essa declividade é sempre crescente num intervalo dado? Uma das maneiras é calcular essa declividade. Essa tarefa parece difícil, uma vez que não sabemos o que é reta tangente a uma curva qualquer. Estamos acostumados a trabalhar com a ideia de retas tangentes a um círculo, que podemos definir como as retas que intersectam o círculo em apenas um ponto. Mas, de acordo com a figura 5, notamos que essa definição não pode ser estendida para uma curva qualquer. Na primeira curva que aparece na figura, a reta intersecta um ponto na curva, mas não consideramos que seja tangente à curva. Já na segunda curva, a reta intersecta a curva pelo menos duas vezes, e, segundo Ávila (2006), faz sentido considerar essa situação como "reta como tangente à curva no ponto *P*". Mais adiante retornarei a essa discussão sobre a definição de reta tangente a uma curva.

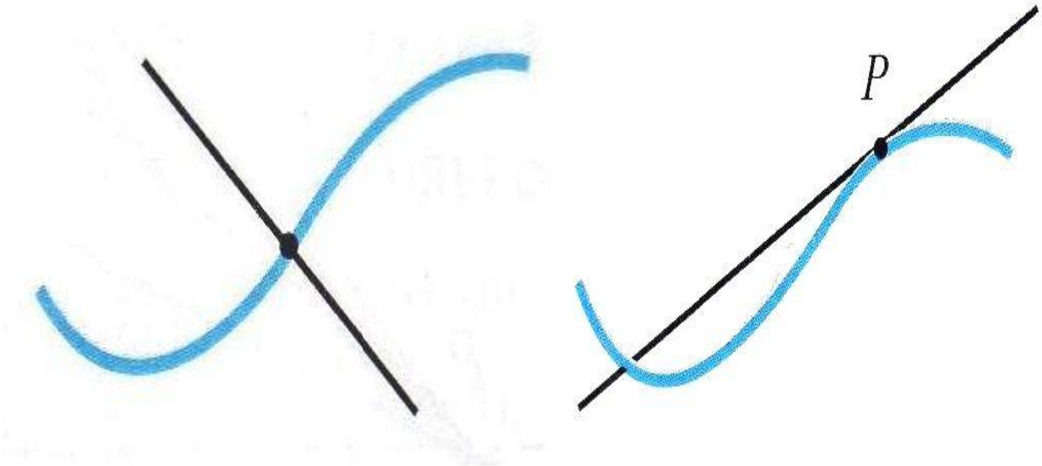


Figura 5

Para chegar a uma definição de reta tangente, segundo Ávila (1991), consideramos uma curva que seja gráfico de uma função $y = f(x)$. Para traçarmos a reta tangente à curva no ponto $P = (x, f(x))$, consideraremos o acréscimo $\Delta x = h$ atribuído a um valor *x*. A variável *y* sofrerá um acréscimo Δy. Logo temos o ponto $Q = (x + h, y + \Delta y)$. Assim, para definirmos a reta tangente à curva em *P* tomamos primeiramente a secante $\overleftrightarrow{PQ}$ e, fixando o ponto *P*, variamos o valor de *h*. Na figura 5 são representadas várias posições de *Q* à medida que o valor de *h*, sempre positivo, vai se aproximando de zero. Assim, podemos de maneira intuitiva perceber que a reta secante vai se aproximando de uma "posição *limite"*, uma reta que definimos como reta tangente à curva no ponto *P*. A utilização de um software gráfico pode auxiliar na compreensão da reta tangente a uma curva no ponto *P* pois, com a animação de figuras geométricas possibilitada pelo software, o aluno identifica que a posição limite da reta secante é a reta tangente.

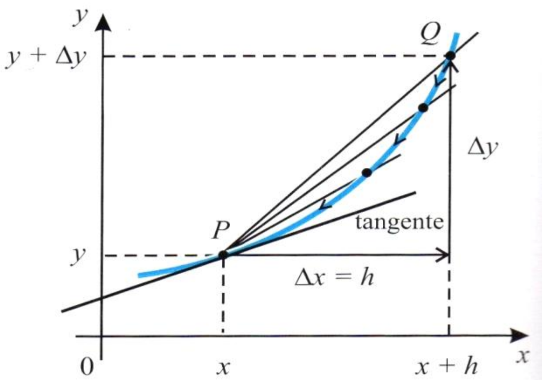


Figura 6

Voltando à nossa função quadrática, temos que:

$$y+\Delta y = f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

Assim:

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = \left(x^2 + 2xh + h^2\right) - x^2 = h(2x+h)$$

Portanto a declividade da reta secante é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = 2x + h$$

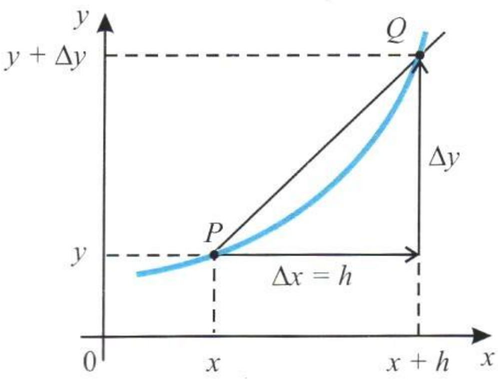


Figura 7

A declividade da reta tangente da função em questão é o limite de $2x+h$ quando *h* tende a zero, e seu valor é $2x$.

Devemos ressaltar que o valor de Δx nunca é zero, pois nesse caso não faria sentido a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Assim, o mais importante é saber o *valor limite* dessa razão, o valor do qual ela pode se tornar tão próxima quanto quisermos, bastando para isso fazer *h* ficar suficientemente próximo de zero. Esse valor é o que se chama de limite e é a *derivada* da função no valor *x* da variável independente.

3.1.2 A função derivada

A atividade proposta até agora foi elaborada para discutir a "derivada" de uma função em um ponto particular. Mas podemos estender essa atividade para discutir a função derivada. A partir do momento em que calculamos esse valor limite para um valor fixo e genérico x, podemos definir a função derivada que associa, para essa função *f*, a cada *x* do domínio o valor $f'(x)=2x$.

3.1.3 Aplicações da derivada

A derivada tem inúmeras aplicações no estudo das funções. Se nos limitarmos à função $y = f(x) = x^2$, podemos introduzir a noção de crescimento e decrescimento usando noções simples de fácil compreensão. A função será crescente se o valor de *y* crescer quando *x* cresce e será decrescente se *y* decresce quando *x* cresce.

Com essas definições, podemos concluir que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente para valores de *x* maiores do que zero e decrescente para valores de *x* menores do que zero, comparando as imagens de dois pontos quaisquer distintos de cada um desses intervalos. Também chegamos à conclusão de que sua derivada $y' = f'(x) = 2x$ é crescente para todos os valores reais de *x*. Assim, segundo Ávila (2006), respondemos a pergunta do início da atividade, justificando que a função em questão é sempre côncava para cima devido ao fato de que sua derivada é sempre crescente. Portanto, ela tem o comportamento do gráfico da função esboçado na figura 2. Além disso, a inclinação é nula quando *x* é zero, portanto existe reta tangente (horizontal) nesse ponto. Assim sendo, o gráfico da função não pode conter "bicos" como aparece na figura 8.

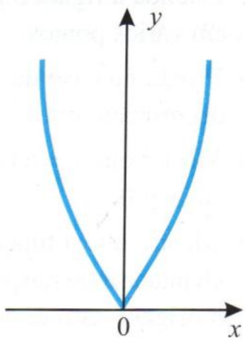


Figura 8

Podemos observar que, ao trabalhar com a derivada nesse contexto, trabalhamos com diversos conceitos, e o aluno pode visualizar diversas propriedades da função.

3.2 Planejamento do projeto de introdução à noção da derivada

Este trabalho foi planejado como uma proposta de atividade a ser desenvolvida com alunos de Ensino Médio do Colégio Estadual de Ensino Médio Cândido José de Godói, buscando aproximar os conteúdos relacionados à taxa de variação instantânea do tema das funções tal como é visto no Ensino Médio. Foram realizados quatro encontros de aulas combinadas com atividades computacionais e uso de materiais manipulativos, com a hipótese de que esses recursos auxiliariam na compreensão da noção de derivada, bem como da sua interpretação geométrica.

A seguir, apresento o planejamento do projeto, tal como foi elaborado, antes de sua aplicação.

3.2.1 Primeira etapa

Realizarei a primeira etapa inspirado na atividade proposta por Gravina (1993) sobre o estudo de taxas de variação de funções, utilizando para isso, materiais manipulativos.

O início da atividade será feito utilizando reservatórios como materiais manipulativos para ilustrar a seguinte situação:

> São dados diversos reservatórios com a mesma capacidade e a mesma altura. Temos torneiras enchendo cada um dos reservatórios e vamos admitir que a vazão de água é a mesma para todos eles, constante e igual a k metros cúbicos por minuto. Queremos analisar o comportamento do nível de água no decorrer do tempo. Seja $f_i(t)$ a altura do nível de água no instante t ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ conforme o reservatório); vamos medir a altura em metros e o tempo em minutos. (GRAVINA, 1993, p. 33).

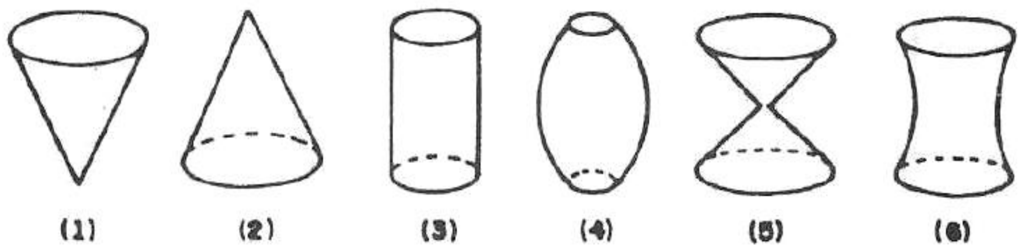


Figura 9

A altura $f_i(t)$ aumenta quando t aumenta, ou seja, todas as funções são crescentes. Mas existem diferenças significativas nessas funções que dizem respeito ao aumento mais rápido ou mais lento no nível de água, conforme o tipo de reservatório. Analisando cada um dos reservatórios, podemos esboçar os gráficos das alturas. Por exemplo:

- Em (1), no início do processo, o nível de água aumenta rapidamente e depois continua aumentando, mas não mais tão rápido.
- Em (2) o processo é inverso ao de (1).
- Em (3) o nível de água aumenta de modo uniforme.
- Em (4) o nível de água vai aumentando cada vez mais devagar, até chegar a metade do reservatório, depois reverte o seu comportamento.
- Em (5), até a metade do reservatório o comportamento é similar ao de (2) e depois similar ao de (1); no meio do reservatório tem-se a altura aumentando mais rapidamente.
- Em (6) o comportamento é similar ao de (5), porém no meio do reservatório a altura não aumenta de modo tão rápido.

O objetivo é entender qual conceito matemático explica essas diferenças no comportamento crescente das funções. Assim posso aplicar a primeira avaliação a respeito dos gráficos que modelam o comportamento dessas funções.

3.2.2 Segunda etapa

- *Reta como gráfico de função*

Iniciarei, com os alunos, um estudo relacionado à inclinação de uma reta, pensando nela como gráfico de uma função. Para esse estudo, irei utilizar a ideia geométrica de semelhança de triângulos, pois usarei a proporcionalidade como ferramenta para definir a inclinação da reta.

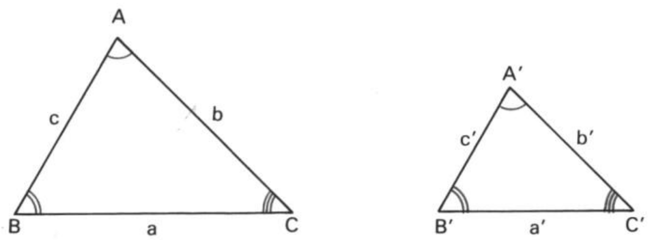


Figura 10

Com triângulos semelhantes, podemos abordar a declividade de uma reta no plano xy. Ou seja, um ponto $X = (x, y)$ está na reta definida por $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ se, e somente se, os triângulos PQS e QTX forem semelhantes, sendo S e T, respectivamente, os vértices dos triângulos retângulos de hipotenusa PQ e QX, como ilustrado na Figura 11.

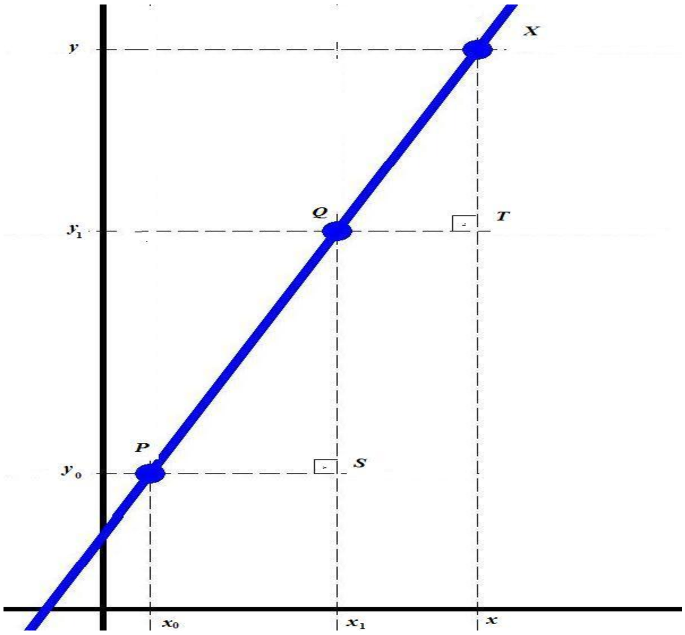


Figura 11

Da semelhança dos triângulos PQS e QTX, sabemos que vale a relação:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = k$$

Ou seja, é constante a razão entre as alturas e as bases dos triângulos retângulos, que denominamos k. Nesse momento, definimos k como a declividade da reta em questão. Vale ressaltar que k pode ser negativo, se considerarmos que o ponto S está à direita de Q ($x > x_1$), e abaixo de Q ($y > y_1$), tendo assim $k < 0$, pois $\frac{y - y_1}{x - x_1} < 0$.

A partir daí, podemos observar uma reta cujos pontos, para valores de $x > 0$, estão abaixo do eixo horizontal, isto é, têm ordenada negativa. Após, podemos definir a inclinação da reta como a razão entre a variação "vertical" e a variação "horizontal", ou entre a variação das alturas e das abscissas, isto é, como:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

No encontro seguinte introduzimos o estudo de retas secantes aos gráficos de funções.

3.2.3 Terceira etapa

- *Retas secantes*

Nesta atividade, irei propor um estudo gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$. Primeiramente, revisarei os tópicos abordados no primeiro encontro, dando uma maior importância para a parte final do encontro, no qual definimos a inclinação de uma reta no plano xy.

No momento seguinte, relembrarei que muitos problemas modelados em matemática recaem em equações (e funções) quadráticas. Ou seja, equações do tipo:

$ax^2 + bx + c = 0$, no qual a, b e c são constantes reais com $a \neq 0$.

Para uma melhor visualização do comportamento de funções do tipo $f : \Re \rightarrow \Re$ definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c constantes reais e $a \neq 0$, estudamos o comportamento de funções $g(x) = x^2$ do ponto de vista de taxas de variação (média e instantânea).

a) Ao *plotar* alguns pontos da função $y = g(x)$, podemos esboçar o gráfico de g.

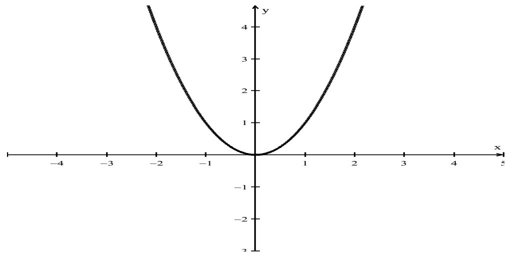


Figura 12

- O importante aqui é questionar aos alunos sobre o porquê desse gráfico não ter uma forma como a da figura abaixo (já que não podemos marcar todos os pontos do gráfico, um a um).

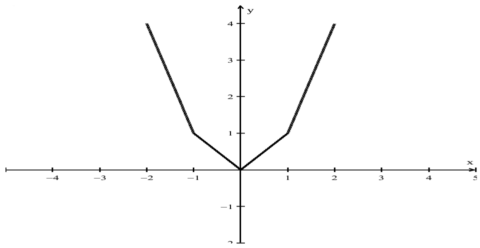


Figura 13

b) Nesse momento, pedirei aos alunos para determinarem a taxa de variação média da função no intervalo $[0,1]$ e $[1,2]$.

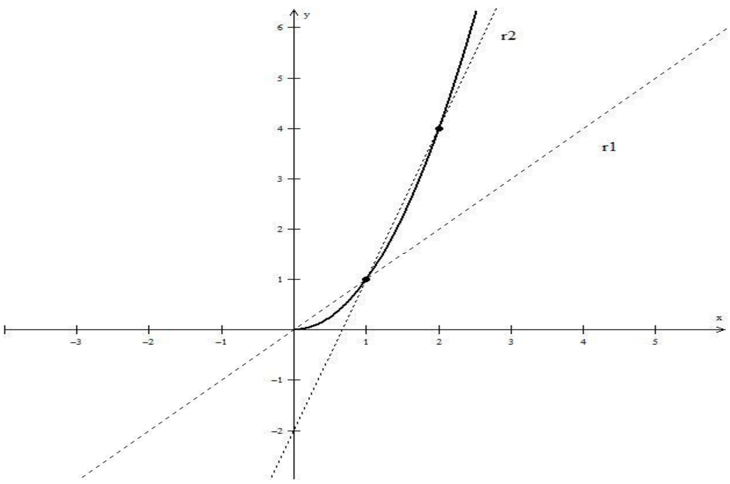


Figura 14

A partir desse momento, definirei a taxa de variação média como um conceito que exprime a razão com que a função cresce em um intervalo do domínio.

Generalizando para uma função:

A **taxa de variação média** de uma função f no intervalo $[x_A, x_B]$ é definida por:

$$TV_m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

A **taxa de variação média** de uma função f no intervalo $[x_A, x_B]$ pode ser interpretada geometricamente como a inclinação da reta que passa pelos pontos $A = (x_a, f(x_a))$ e $B = (x_B, f(x_B))$.

$$m = tg\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = TV_m$$

Ou seja, geometricamente, a inclinação da reta que passa pelos pontos A e B é a taxa de variação média da f em $[x_A, x_B]$.

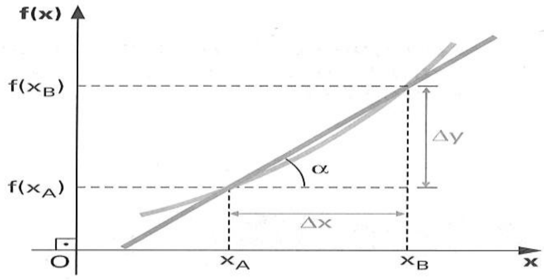


Figura 15

Salientarei que para uma função que tem como gráfico uma reta, essa taxa de variação é sempre constante. Já no exemplo acima, ao comparar intervalos diferentes, ressaltarei que apesar de terem o mesmo comprimento, as taxas de variação mudam, ou seja, a declividade das retas r_1 e r_2 são distintas. Isso já explica que o gráfico da figura 13 não poderia ser o da função $f(x) = x^2$, mesmo que colocássemos mais segmentos de reta. Apresentarei a interpretação da variável x como o tempo e de $f(x)$ como a posição de um objeto que se desloca em uma linha reta. Com essa associação, questionarei o que acontecerá com as inclinações das retas secantes e com a taxa de variação da f quando fixar um dos extremos do intervalo de comprimento Δx.

Essa intuição é principalmente geométrica. Estaremos recorrendo novamente à analogia de x com o tempo e da função f como uma função que descreve a posição do objeto em função do tempo, no qual o objeto se desloca sobre uma reta. Assim, essa taxa de variação média pode ser associada com uma velocidade média.

3.2.4 Quarta etapa

- *Reta tangente, velocidade instantânea*

Nesta etapa será dada uma ênfase aos seguintes questionamentos.

“Se, ao invés de sabermos a velocidade média de um objeto em um intervalo de tempo, quisermos saber a velocidade instantânea de um objeto em um instante determinado, como faremos?”

“Se, ao invés de determinarmos a taxa de variação média em um intervalo, quisermos saber a taxa de variação instantânea em um ponto?”

Essas questões pretendem introduzir o assunto de taxas de variação instantânea como uma ferramenta para resolver problemas do cotidiano, pois, por exemplo, um radar de controle de velocidade que denuncia a velocidade de um automóvel estima a sua velocidade instantânea. Nesse caso, por exemplo, o que interessa não é a velocidade média do automóvel ao longo do percurso. Assim como nesse exemplo, em outras situações é mais importante sabermos a velocidade instantânea do que a velocidade média.

A partir desses questionamentos, irei introduzir o conceito de taxa de variação instantânea usando intervalos muito pequenos de “x”.

Tomando um intervalo cujo extremo inferior é 1 e o superior é 3 (intervalo $[1,3]$) temos $\Delta x = 2$. Após isso, irei calcular junto com os alunos a taxa de variação média da função $f(x) = x^2$ nesse intervalo.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4$$

O que acontecerá se diminuirmos o valor de Δx, isto é, se aproximarmos o valor do extremo superior, mantendo fixo o valor do extremo inferior?

Por exemplo, tomando o extremo superior do intervalo igual a $\frac{3}{2}$, qual é o valor da razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, no qual $y = f(x)$?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{f\left(1 + \frac{1}{2}\right) - f(1)}{2} = \frac{5/4}{1/2} = 2{,}5$$

Tomando $\frac{3}{2}$ ao invés de 3, diminuiu a **inclinação da reta secante.**

Com a tabela abaixo, mostrarei para os alunos o valor da aproximação de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando o extremo inferior é 1 e Δx é um valor muito pequeno:

y	$\Delta x = h$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1,3	0,3	2,3
1,2	0,2	2,2

1,1	0,1	2,1
1,01	0,01	2,01
1,00001	0,00001	2,00001
1,00000001	0,00000001	2,0000001

O valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ torna-se muito próximo de 2.

De uma forma mais geral, para o intervalo [1, 1 + h] , temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1^2 + 2\cdot 1\cdot h + h^2 - 1^2}{h} = \frac{h(2\cdot 1 + h)}{h} = 2\cdot 1 + h$$

Portanto, confirmarei a nossa conjectura de que, quando $\Delta x = h$ se aproxima de 0, o coeficiente da reta secante se aproxima de 2.

Generalizando, teremos a inclinação da secante dada por: $m_{\sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cdot x_0 + h$, onde $x = x_0$ é o extremo inferior e h é o comprimento do intervalo. Quando *h* se aproxima de 0, $m_{\sec}$ se aproxima de $2\cdot x_0$.

Seguindo Ávila (1992), definimos a *reta tangente a uma curva em um ponto* $P = (x_0, f(x_0))$, como a reta que passa por P e que tem como coeficiente angular *m*, sendo *m* o valor do qual $m_{\sec}$ se aproxima quando *h* se aproxima de 0 ou tende a 0. Ou seja, para o nosso exemplo, o coeficiente da reta tangente à curva no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é $m = 2\cdot x_0$.

- Exemplo envolvendo velocidade média e velocidade instantânea.

Suponha que um objeto seja largado do repouso (ou seja, com velocidade inicial nula) desde o alto do Empire State Building, em Nova York, EUA, de uma altura de 1250 pés acima do nível da rua. Mostra-se na Física que com hipóteses simplificadoras adequadas, a altura *s* do objeto (em pés) acima do nível da rua, *t* segundos depois de ser largado, pode ser modelada pela função posição:

$$s(t) = 1250 - 16t^2$$

Verifique que o objeto não alcançou o nível da rua para $t = 5$ e encontre a sua velocidade instantânea nesse instante.

Usando a definição de velocidade média (ANTON, 2007, p. 171):

$$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

No qual t_2 e t_1 são os extremos do intervalo de tempo em que é calculada a velocidade média. Aqui será relembrada a diferença entre velocidade e velocidade escalar. A primeira caracteriza-se por um módulo (o quão rápido o objeto se move) e um sentido (contrário ou não ao eixo de convenção), já a segunda apenas é caracterizada pelo módulo. Assim, adotando o sentido do eixo da figura 1, questionarei sobre o sinal da velocidade média no intervalo $[5, 6]$.

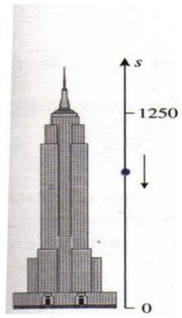


Figura 16

Após isso, verificarei que no instante $t = 5$ o objeto ainda não está no solo: $s(5) = 1250 - 16 \cdot 5^2 = 850$, de modo que o objeto ainda está caindo quando $t = 5$. De uma forma mais analítica, tentarei conjecturar a velocidade instantânea quando $t = 5$, usando os valores da tabela:

INTERVALO DE TEMPO	VELOCIDADE MÉDIA ($pés/s$)
$5 \le t \le 6{,}0$	-176
$5 \le t \le 5{,}1$	-161,6
$5 \le t \le 5{,}01$	-160,16
$5 \le t \le 5{,}001$	-160,016
$5 \le t \le 5{,}0001$	-160,0016

Aparentemente, a velocidade instantânea quando $t = 5$ é $-160\ pés/s\,egundo$. Portanto, de uma forma mais geral temos para um intervalo de tempo $\Delta t = h$ qualquer:

$$v_m = \frac{s(5+h) - s(5)}{h} = \frac{1250 - 16(5+h)^2 - \left(1250 - 16 \cdot 5^2\right)}{h} = \frac{-16\left(5^2 + 2 \cdot 5h + h^2\right) + 16 \cdot 5^2}{h} \Rightarrow$$

$$v_m = \frac{-16\left(10h + h^2\right)}{h} = \frac{-16h(2 \cdot 5 + h)}{h} = -16 \cdot 2 \cdot 5 + h$$

Confirmando, quando tomamos um intervalo de tempo muito pequeno, de comprimento próximo de zero, temos que a velocidade instantânea é $-16 \cdot 2 \cdot 5 = -160\ pés/s$ no instante $t = 5$.

Por fim, terminaremos a atividade concluindo que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $s(t)$ em um instante t_0 é a velocidade instantânea em t_0. Usando o recurso computacional, mostrarei aos alunos o comportamento de inclinações de retas tangentes em diferentes funções, fazendo uma relação com o crescimento dessas funções.

4. RELATÓRIO DAS AULAS DO PROJETO

A prática de ensino de noções de Cálculo foi realizada no Colégio Estadual de Ensino Médio Cândido José de Godói. O projeto contou com a participação de alunos do segundo e do terceiro ano do ensino médio. Ao total, eram 7 alunos, 4 meninos e 3 meninas, sendo que 3 alunos tiveram presença em todos os encontros. Para preservar a identidade dos alunos, irei identificá-los pelas letras H_i e M_i, representando os meninos e as meninas respectivamente. Foram realizados 4 encontros em duas semanas (ver anexo), totalizando uma carga horária de 8 horas.

4.1 Primeiro encontro

A aula iniciou com a minha apresentação aos alunos e com a apresentação dos tópicos a serem abordados. Salientei aos alunos que estudaríamos conceitos de matemática que não eram estudados no Ensino Médio, mas, como pré-requisito, faríamos uma breve revisão do conceito de função.

No primeiro encontro, a escola disponibilizou a sala de laboratório de Química, onde havia torneiras ativas. Após a apresentação, iniciei a prática mostrando aos alunos os diferentes tipos de sólidos que seriam usados na atividade.

A partir daí, questionei os alunos sobre a velocidade com que o nível de água subiria em cada sólido, considerando que a vazão de água é constante. Todos os alunos fizeram algumas conjecturas. Em particular, a aluna M_1, após refletir sobre a questão, respondeu:

M_1: Na “casca de sorvete”[1] a água sobe rápido.

Eu: Mas sempre sobe rápido?

M_1: Não. Só no início.

Para outros alunos essa conclusão não foi imediata, assim solicitei a todos os alunos que abrissem a torneira a uma vazão constante enchendo o sólido até o nível suportado pelo sólido. Após essa verificação, o aluno H_1 exclamou:

H_1: É verdade! Eu tinha pensado ao contrário da colega M_1.

Essa afirmação do aluno H_1 reflete, possivelmente, uma interpretação de uma função que associa o volume de água do cone - e não o nível de água - com o tempo, como se o

[1] Nome dado pela aluna ao sólido que é representado por um cone com o vértice voltado para baixo

volume crescesse mais lentamente no início e mais rapidamente no final, não considerando o fato de a vazão ser constante.

Após a verificação com o cone, solicitei aos alunos que fizessem o mesmo para os outros sólidos que tinham abertura para a entrada de água. Os sólidos que não tinham abertura para serem preenchidos com água foram analisados visualmente por último.

Figura 17

Após os testes com os sólidos, solicitei aos alunos que fizessem uma descrição por escrito do comportamento do nível de água para os diferentes tipos de sólidos. Essa descrição foi feita individualmente e os alunos poderiam observar todos os sólidos envolvidos. A avaliação serviu para analisar se os alunos estavam compreendendo o que estava acontecendo com o nível de água a cada intervalo de tempo.

Após escreverem, solicitei que os alunos esboçassem o gráfico, em um sistema de eixos, que representaria a relação entre a altura do nível de água e o tempo, e que fizessem uma descrição por escrito, para cada um dos seguintes sólidos:

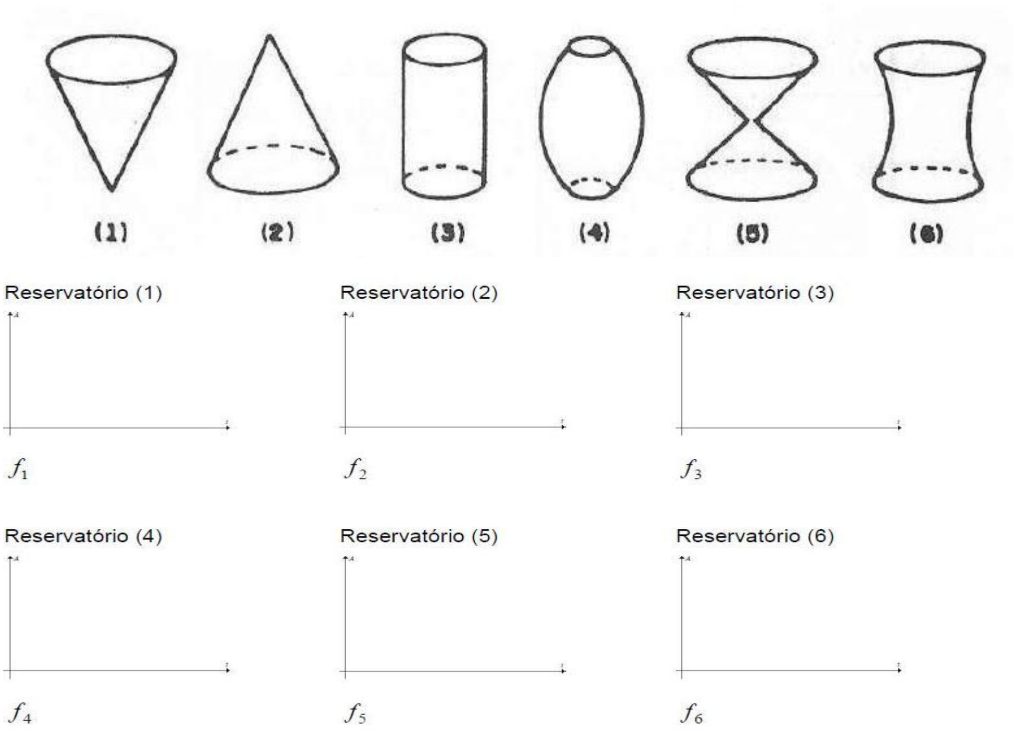


Figura 18

Podemos fazer uma análise das respostas obtidas por escrito de cada aluno:

- Aluno H_1

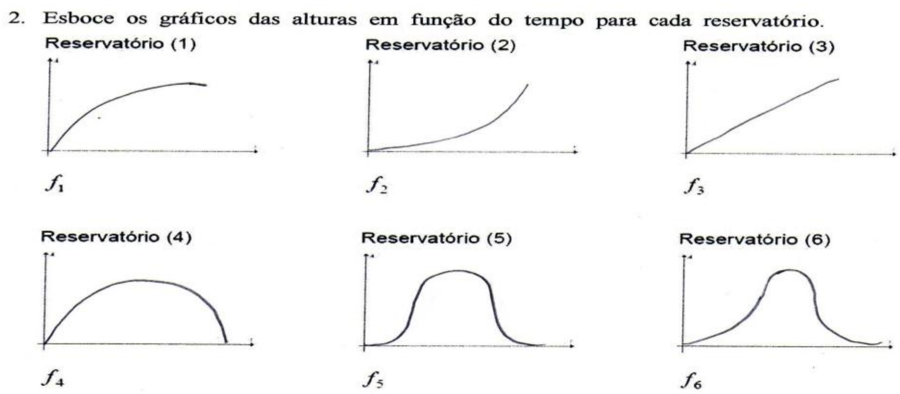


Figura 19

Observando as respostas do aluno, notamos que para os sólidos cônicos não há dificuldade em expressar o comportamento gráfico. Para o reservatório (1) o aluno mostra que o crescimento é rápido no início do processo, e que o nível da água cresce lentamente no final do processo. Para o segundo reservatório o raciocínio é inverso. O crescimento uniforme fica identificado na análise do gráfico do reservatório (3).

A partir do reservatório (4), nota-se uma possível dificuldade em representar graficamente o comportamento da função. A análise desses gráficos sugere que o aluno confunde a função envolvida no processo, isto é, que o aluno está representando a velocidade com que sobe o nível de água nesses reservatórios, e não o nível de água. Para o reservatório (5), por exemplo, aparentemente, o aluno indica que a velocidade com que o nível de água sobe no início do processo é crescente. Após um pico da velocidade, o nível de água cresce em uma velocidade que está decrescendo. Um raciocínio similar é usado para esboçar o reservatório (6). Nota-se que para os reservatórios 4, 5 e 6 o aluno não identifica a contradição entre a representação de uma função decrescente, em algum intervalo, e a observação de que o nível de água não pode diminuir conforme passa o tempo.

Quanto à análise escrita, solicitada para os sólidos que foram preenchidos com água, o aluno representa através de um esquema com flechas os diferentes comportamentos dos sólidos:

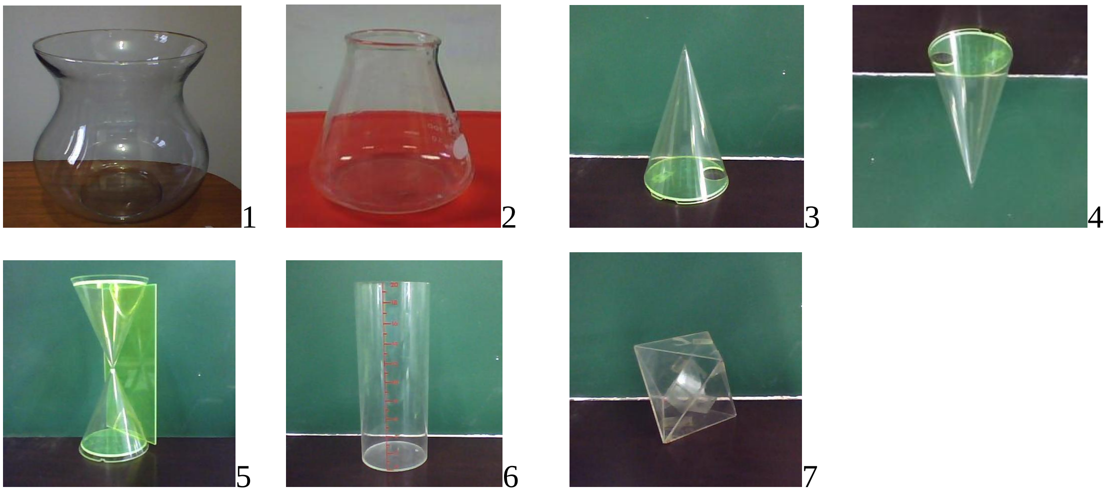
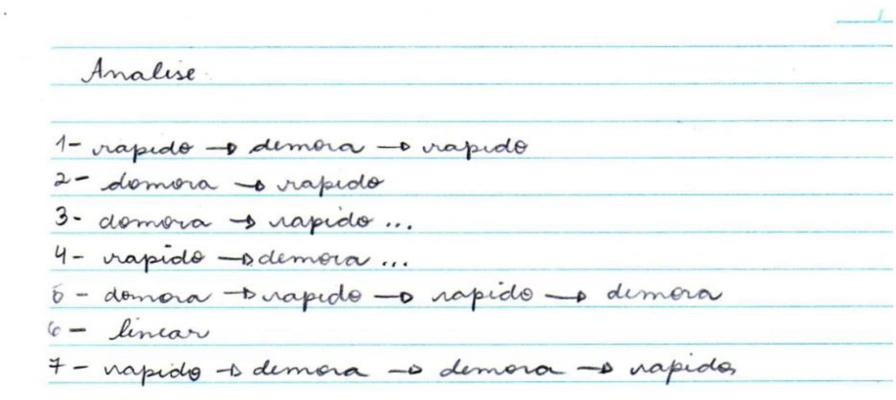


Figura 20



Analise

1- rapido → demora → rapido
2- demora → rapido
3- demora → rapido ...
4- rapido → demora ...
5- demora → rapido → rapido → demora
6- linear
7- rapido → demora → demora → rapido

Figura 21

- Aluna M_1

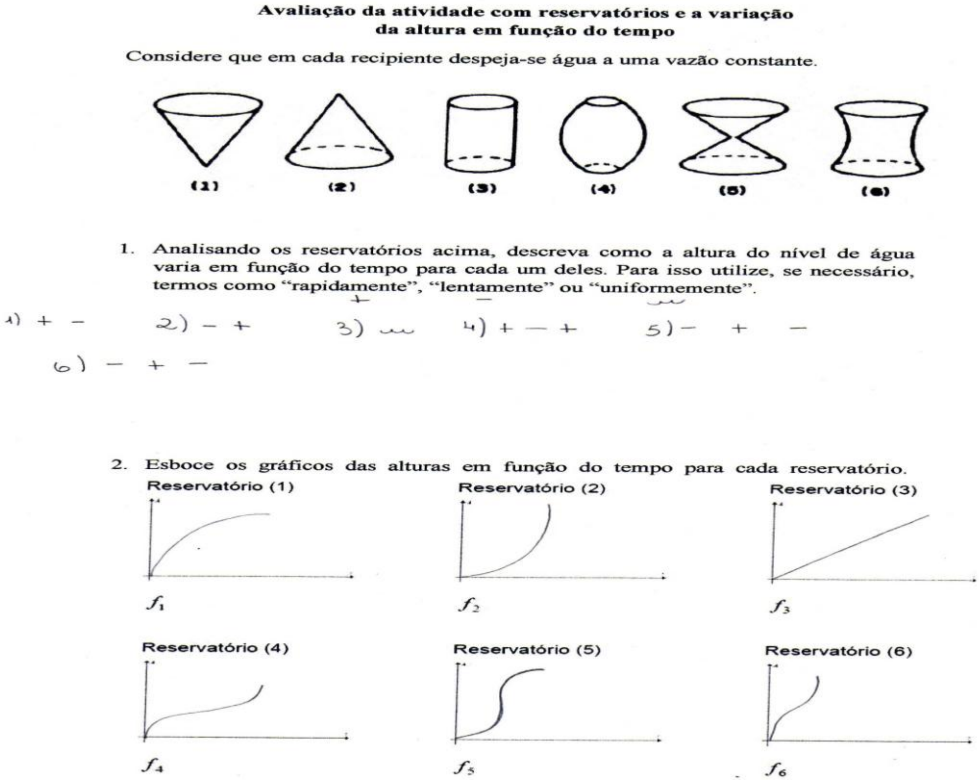


Figura 22

Analisando a primeira avaliação da aluna, percebemos que, para descrever o processo de como sobe o nível de água com o passar do tempo, a aluna usa os símbolos +, -, "u" para representar as palavras "rapidamente", "lentamente" e "uniformemente" respectivamente. O comportamento descrito na forma de símbolos é coerente com essa linguagem. Mas observa-se que, ao representar graficamente as funções para cada sólido, a aluna apresenta uma dificuldade em representar o que acontece no reservatório (6), de modo que o gráfico para o reservatório 6 fica similar ao gráfico do reservatório 4, como se as duas funções tivessem o mesmo comportamento. O que não acontece, pois no reservatório (6) o nível de água sobe lentamente no início, e, conforme o nível atinge a metade da altura do reservatório, o nível de água aumenta rapidamente.

Assim, o gráfico que representa a função associada ao reservatório (6) é mais próximo ao do gráfico que representa o reservatório (5).

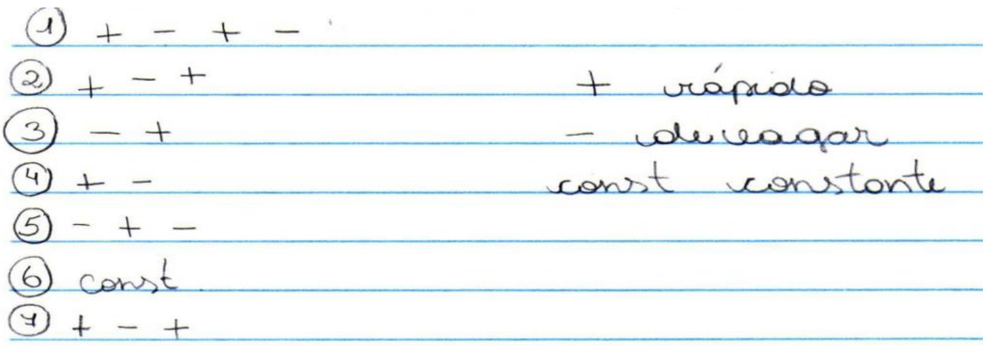
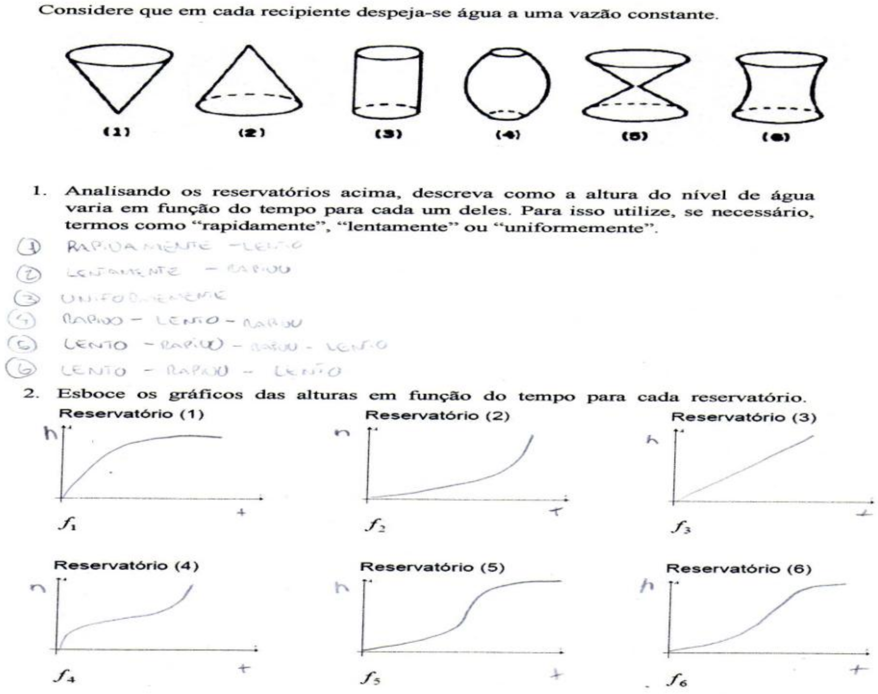


Figura 23

Para os sólidos da atividade em sala de aula, a aluna mantém os símbolos para descrever o crescimento do nível de água para os diferentes sólidos.

- Aluno H_3



Considere que em cada recipiente despeja-se água a uma vazão constante.

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

1. Analisando os reservatórios acima, descreva como a altura do nível de água varia em função do tempo para cada um deles. Para isso utilize, se necessário, termos como "rapidamente", "lentamente" ou "uniformemente".

(1) RAPIDAMENTE - LENTO
(2) LENTAMENTE - RAPIDO
(3) UNIFORMEMENTE
(4) RAPIDO - LENTO - RAPIDO
(5) LENTO - RAPIDO - RAPIDO - LENTO
(6) LENTO - RAPIDO - LENTO

2. Esboce os gráficos das alturas em função do tempo para cada reservatório.

Reservatório (1) f_1
Reservatório (2) f_2
Reservatório (3) f_3
Reservatório (4) f_4
Reservatório (5) f_5
Reservatório (6) f_6

Figura 24

A avaliação mostra que o aluno apresenta uma escrita clara para descrever o comportamento da altura do nível de água para cada reservatório. O esboço dos gráficos indica uma coerência para cada sólido analisado, mostrando que o aluno tem uma boa compreensão do conceito de variação. A boa compreensão se confirma quando o aluno descreve o comportamento dos sólidos analisados visualmente:

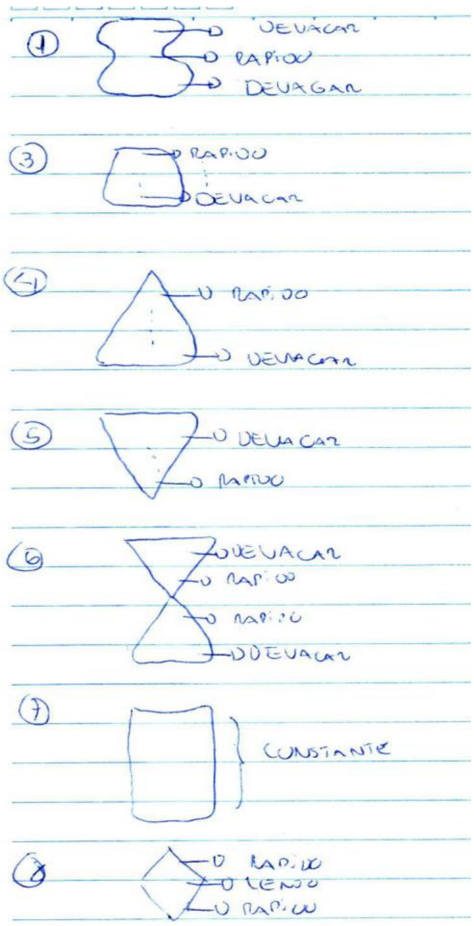


Figura 25

Depois dessa análise, desenhei no quadro alguns sólidos que foram utilizados na atividade prática, e esbocei um sistema de eixos para a representação de variação do nível de água em cada sólido.

Assim, pedi para os alunos representarem, no quadro-negro, o gráfico que expressava a relação da altura do nível de água em cada instante e para cada sólido. Nesse momento surgiram algumas dificuldades para a representação gráfica da função, para alguns sólidos. Entre essas dificuldades, podemos destacar que a aluna M_1, ao iniciar a solução do gráfico que representava a função no caso do cone com o vértice voltado para baixo, comentou:

M_1: Agora eu não sei se o gráfico é assim (indicando que o gráfico tinha uma concavidade voltada para baixo) ou assim...(indicando que o gráfico tinha uma concavidade voltada para cima)

Eu: Tenta lembrar o que acontece com o nível de água no início do processo.

H_2: No início sobe mais rápido.

Após fala do aluno H_2, a aluna reflete sobre a dica do colega, e esboça o gráfico da função de maneira correta. Após o esboço dos gráficos que representaram os outros sólidos, fiz com os alunos um questionamento sobre qual ferramenta matemática poderíamos usar para analisar o comportamento gráfico de funções.

M_1: Não sei como, não me lembro de fazer isso no colégio.

Salientei aos alunos que todos os gráficos obtidos representavam funções crescentes, mas que existia uma diferença no modo como o nível de água crescia em cada sólido. Ou seja, o nível de água sobe em todos os sólidos, mas em alguns sólidos o nível da água sobe sempre com a mesma velocidade, em outros sobe cada vez mais rapidamente, em outros cada vez mais lentamente e, em outros, os dois comportamentos ocorrem em intervalos diferentes.

Relatei que com a ferramenta estudada no curso, poderíamos analisar o comportamento de muitas funções, dentre elas a função quadrática e cúbica.

4.2 Segundo encontro

O segundo encontro ocorreu um dia após o primeiro, em uma sala com disponibilidade de quadro-negro. Nesse encontro, salientei que iniciaríamos estudando um conteúdo matemático que geralmente se estuda no Ensino Fundamental na área de Geometria: a semelhança entre triângulos.

Ao questionar a turma se esse conceito era novo para eles, o aluno H_3 responde:

H_3: Eu só me lembro que eu usava para encontrar medidas dos lados de triângulos, usando a ideia de que um lado está para outro, assim como no outro triângulo um lado está para outro.

De forma expositiva, defini que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os seus ângulos internos correspondentes são congruentes.

Figura 26

Após esboçar dois triângulos semelhantes no quadro, citei que uma das propriedades da semelhança é a de que a razão entre os lados correspondentes dos dois triângulos é sempre a mesma, ou seja, para dois triângulos semelhantes ABC e DEF, tem-se:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = m$$

Após isso, fiz a observação de que, se a razão entre os lados correspondentes dos triângulos é m, a razão entre dois elementos lineares homólogos quaisquer também é m (DOLCE, 2005). Assim, a razão entre as alturas homólogas é m, a razão entre as bissetrizes homólogas é m, a razão entre as medianas homólogas é m, entre outras.

Essa razão permite fazer a comparação entre cada lado de um triângulo com o lado correspondente do triângulo semelhante:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{DE} = m \Rightarrow AB = m \cdot DE \\ \dfrac{AC}{DF} = m \Rightarrow AC = m \cdot DF \end{array}\right\} \frac{AB}{AC} = \frac{m \cdot DE}{m \cdot DF} = \frac{DE}{DF}$$

A partir disso, iniciei o estudo da inclinação de uma reta no plano cartesiano buscando uma relação com a semelhança de triângulos. Para isso, comecei usando o axioma sobre a existência da reta. Considerando dois pontos distintos $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$, existe uma única reta que contém esses pontos. Um ponto $X = (x, y)$ está na reta que passa por *P* e *Q*

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Nesse momento, atentei para o fato de que os triângulos PSQ e QTX, onde $S = (x_1, y_0)$ e $T = (x, y_1)$, são semelhantes, e que, portanto, a razão entre os pares de lados homólogos é a mesma:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0} = \lambda$$

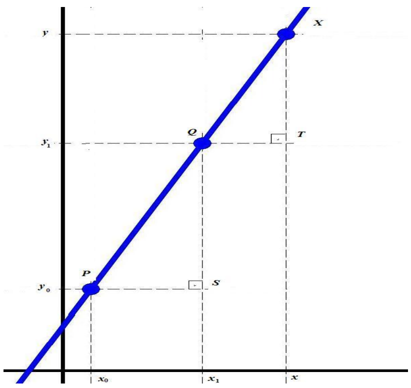


Figura 27

A partir dessa última equação, chegamos a $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = k$ e podemos justificar essa expressão como condição de pertencimento de um ponto $X = (x, y)$ à reta $\overleftrightarrow{PQ}$. A seguir, tomando k como a razão entre a variação das ordenadas e a variação das abscissas, defini k como a inclinação de reta.

Considero interessante essa relação com triângulos semelhantes na medida em que o raciocínio inicial é motivado por uma ideia geométrica, usando conceitos que aproximam duas áreas da Matemática: a Geometria e a Álgebra.

No exemplo exposto no quadro, a reta aparentava passar pela origem, assim o aluno H_2 conjecturou que poderia tomar outros triângulos semelhantes, e que continuaria valendo a relação $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$:

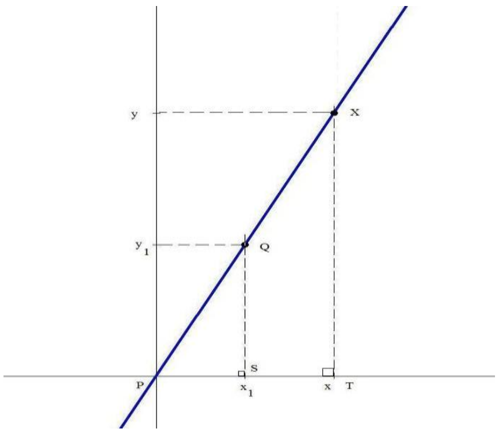


Figura 28

O aluno estava considerando os triângulos PSQ e PTX como triângulos semelhantes. Salientei que essa seria uma particularização da definição, quando tomamos o ponto P como sendo a origem, e que isso só pode ser feito se a origem pertencer à reta.

Assim, salientei que, a partir daquele momento, chamaríamos a constante k de inclinação da reta que passa por P e Q. Ao concluir a explicação, salientei que o valor k poderia ser negativo se $y_1 - y_0$ tivesse sinal contrário ao do valor $x_1 - x_0$.

Por fim, adiantei para os alunos que no próximo encontro estudaríamos a relação que existe entre essa inclinação da reta e o conceito de taxa de variação média em um intervalo do domínio de uma função.

4.3 Terceiro encontro

Iniciei a prática do terceiro encontro com o conceito de retas secantes, questionei os alunos sobre o que significa reta secante a uma curva. O aluno H_2 responde:

H_2: É o inverso do cosseno no triângulo?

O aluno relaciona a expressão secante com a trigonometria no triângulo retângulo, pois, provavelmente, foi a única vez que ele ouviu falar nessa expressão. Utilizando o exemplo da circunferência, salientei que a expressão *reta secante à circunferência* significa dizer que esta reta intersecta a circunferência em dois pontos.

A partir disso, explanei aos alunos que estudaríamos a inclinação de retas secantes a algumas curvas que podem ser expressas por funções. Entre as funções que estudaríamos estavam as funções quadráticas e cúbicas. Para a motivação do estudo dessas funções, utilizei o fato de que muitos problemas envolvendo áreas recaem em funções quadráticas e que muitos problemas que envolvem volumes recaem em funções cúbicas.

Com a função $f(x) = x^2$, iniciei o estudo do comportamento gráfico dessa função utilizando uma tabela que indicava os valores da f para $x = \pm 2$, $x = \pm 1$, $x = 0$, obtendo o gráfico abaixo:

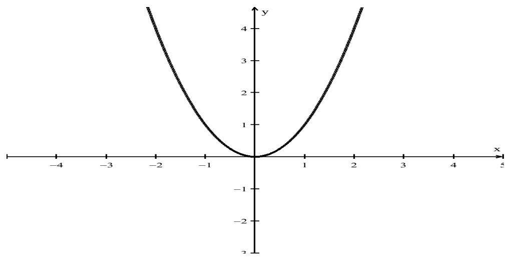


Figura 29

Devo lembrar que é comum o estudo dessas funções quadráticas no ensino médio ser desenvolvido apenas por uma substituição de pontos, sem tratar do comportamento do gráfico dessa função. Mas com testes particulares não podemos ter a noção real desse comportamento. Para o esboço da parábola foi utilizado o conhecimento dos alunos que já haviam estudado, no primeiro ano, o gráfico dessas funções.

Utilizamos os conceitos abordados da aula anterior, calculamos a inclinação da reta secante que passa pela origem e pelo ponto $P_1 = (1, f(1))$, obtendo 1. Obtendo a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $P_1 = (1, f(1))$ e $P_2 = (2, f(2))$, o aluno H_2 exclamou:

H_2: Não é constante!

O aluno identificou que o valor encontrado para a inclinação não era o mesmo que tinha sido calculado antes. Tendo obtido a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $P_2 = (2, f(2))$ e $P_3 = (3, f(3))$, o aluno H_1 afirmou:

H_1: As inclinações estão em P.A. de razão 2.

Ele conjecturou essa relação, pois os valores encontrados para as inclinações eram respectivamente 1, 3 e 5.

Após essa fala, apresentei uma questão que envolvia o aspecto gráfico da função em questão. Questionei o porquê desse gráfico não apresentar o aspecto como o representado abaixo:

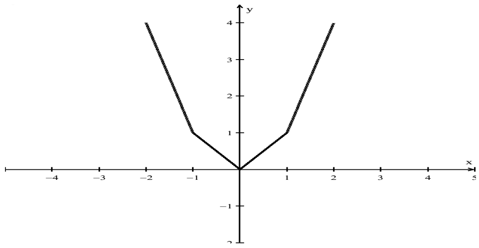


Figura 30

Ao marcar os pontos correspondentes para os valores de *x* na tabela, estaríamos sem ter uma compreensão de como é o comportamento gráfico dessa função. O aluno H_2, após pensar um pouco, afirmou que isso (o traçado do esboço) não poderia acontecer devido à taxa de variação não ser constante. Aproveitando o raciocínio do aluno, introduzi a definição de taxa de variação média de uma função:

A **taxa de variação média** de uma função f no intervalo $[x_A, x_B]$ é definida por:

$$TV_m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

Com essa definição, fiz o mesmo estudo para a função cúbica $g(x) = x^3$. Nesse momento, a aluna M_1 pergunta o que aconteceria tivéssemos analisado o intervalo $[0, 2]$, para a função *f*. Respondi que, ao estendermos o intervalo para duas unidades teríamos um taxa de variação média maior do que a taxa de variação média no intervalo $[0,1]$, e que pela interpretação gráfica isso se verificaria observando a inclinação das retas secantes.

Por fim, solicitei que os alunos refletissem sobre o que aconteceria se diminuíssemos o tamanho do intervalo.

4.4 Quarto encontro

O último encontro contou com a presença dos alunos H_1, H_2 e M_1 e a aula foi realizada na sala de informática da escola. Para essa aula, foram disponibilizados computadores pela escola para o uso do software *Winplot*, que foi usado na atividade. A sala também contava com um quadro branco.

Na primeira parte da atividade, lembrei do questionamento feito no encontro anterior sobre o que aconteceria com a reta secante ao gráfico da função $f(x) = x^2$ quando tomasse intervalos cada vez menores. Essa motivação incentivou a apresentação de uma tabela, em que fixamos o extremo inferior do intervalo $[1, 2]$, e onde o extremo superior variava, tendendo a 1. Calculei com os alunos a taxa de variação média da função f para o intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right]$. Obtendo o valor de 2,5 para essa taxa, observei que o valor era menor do que o valor da taxa para o intervalo $[1, 2]$. A questão que apresentei foi saber qual seria o valor do qual essa taxa estaria se aproximando.

x	$\Delta x = h$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1,3	0,3	2,3
1,2	0,2	2,2
1,1	0,1	2,1
1,01	0,01	2,01
1,00001	0,00001	2,00001
1,00000001	0,00000001	2,0000001

Ao utilizar a tabela acima, o aluno H_1 questionou:

H_1: Está se aproximando de 2?

H_2: Aparenta estar se aproximando de 2.

A partir do raciocínio dos alunos, salientei que precisaríamos confirmar, com um raciocínio mais geral, se essa taxa está se aproximando do valor 2, pois usando apenas valores os valores da tabela não teríamos a garantia de que esse valor estaria realmente tendendo a 2. Para isso usei o raciocínio algébrico para representar a taxa de variação média de função no intervalo [1, 1+*h*], no qual *h* é o comprimento do intervalo, ou seja, a diferença entre os extremos do intervalo.

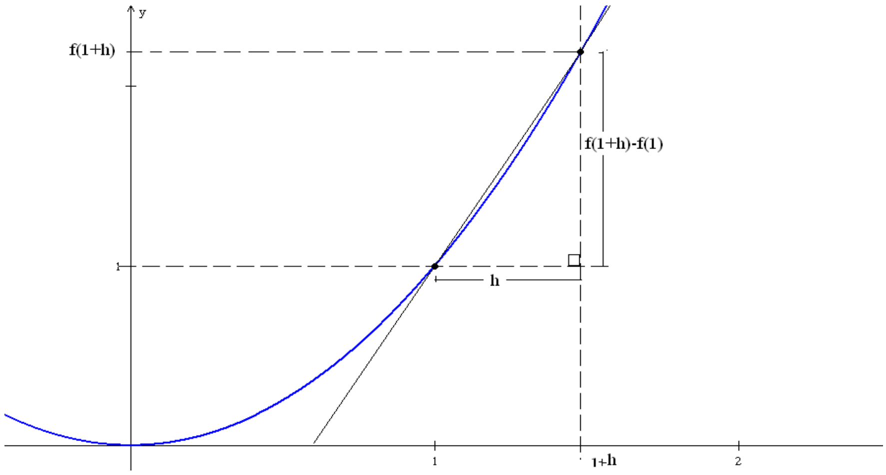


Figura 31

Com o gráfico acima esboçado no quadro, calculei em função de *h*:

$$TVM = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h + 2$$

O aluno H_2, ao identificar a equação, afirma:

H_2: Quando *h* é zero, a taxa de variação é 2.

Salientei ao aluno que o raciocínio correto é similar ao dele, mas lembrei que o valor de *h* não pode ser nulo, pois não faria sentido a divisão por zero no cálculo da taxa de variação. Assim respondemos a questão do aluno H_1, alertando que quando o valor de *h* se aproxima de zero, a taxa de variação se aproxima de 2.

Para complementar com o raciocínio geométrico, observei que quando o valor de *h* se aproxima de zero, a inclinação da reta secante que passa pelos pontos *P* e *Q* se aproxima da inclinação de uma reta tangente à curva no ponto fixo.

Após o raciocínio para esse extremo inferior do intervalo, generalizei para um extremo inferior fixo x_0. Assim a TVM fica:

$$TVM = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - {x_0}^2}{h} = \frac{{x_0}^2 + 2x_0 h + h^2 - {x_0}^2}{h} = \frac{h(h + 2x_0)}{h} = h + 2x_0$$

Para finalizar essa etapa, defini que a taxa de variação instantânea da função no ponto $(x_0, f(x_0))$ é o valor da taxa de variação média quando *h* se aproxima de zero. Para essa função em particular, a taxa de variação instantânea é $2x_0$.

A interpretação geométrica da taxa de variação instantânea foi auxiliada pelo software *Winplot*, pois os alunos esboçaram nesse software o gráfico da função f e, com o auxílio do professor, foi representada uma reta secante ao gráfico. Devo lembrar que o objetivo do estudo não era ensinar aos alunos como que se esboça a reta secante, mas evidenciar o comportamento da reta na medida em que o tamanho do intervalo fica pequeno. Com os parâmetros que o software disponibiliza, os alunos visualizaram a interpretação geométrica da taxa de variação para alguns pontos particulares.

Para o término do encontro, foi realizada uma nova avaliação, na qual os alunos associariam os gráficos de funções que modelaram a atividade do primeiro encontro, com os seus respectivos sólidos. Depois disso, os alunos responderam algumas questões qualitativas a respeito do que foi abordado no curso.

1. Explique com suas palavras o que você entende por taxa de variação média.
2. Explique com suas palavras o que você entende por taxa de variação instantânea.
3. A inclinação das retas tangentes ao gráfico da função $f(x) = x^2$ é sempre crescente?
4. Existe(m) ponto(s) em que a inclinação é nula?

Figura 32

- Aluno H_1

A primeira questão da avaliação desse último encontro, solicitou que o aluno fizesse uma relação dos gráficos já esboçados, com a forma do reservatório que aproxima melhor o comportamento da função que expressa o nível de água em função do tempo. Os sólidos em questão são os mesmos pedidos na primeira atividade, na qual os alunos esboçaram o gráfico para cada um deles.

O aluno H_1 associa corretamente todos os 6 gráficos, mostrando uma evolução na compreensão do conceito de função e taxas de variação. No primeiro encontro, o aluno havia esboçado erroneamente os gráficos para os sólidos 4, 5 e 6.

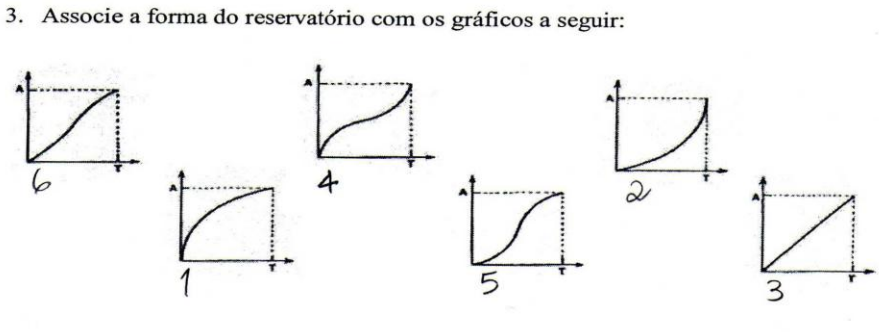
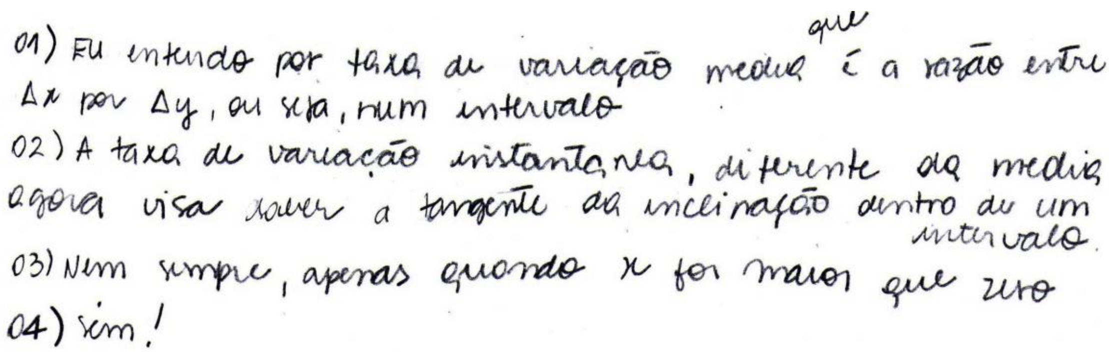


Figura 33

Para as questões qualitativas, o aluno mostrou algumas dificuldades em expressar o conceito de taxa de variação média, trocando o numerador pelo denominador na razão. Para essa questão, o aluno interpreta a taxa de variação média de forma algébrica. A idéia geométrica do que é taxa de variação instantânea é descrito pelo aluno ao responder a questão sobre o que ele entende sobre esse conceito.


01) Eu entendo por taxa de variação media que é a razão entre Δx por Δy, ou seja, num intervalo

02) A taxa de variação instantanea, diferente da media, agora visa saber a tangente da inclinação dentro de um intervalo.

03) Nem sempre, apenas quando x for maior que zero

04) Sim!

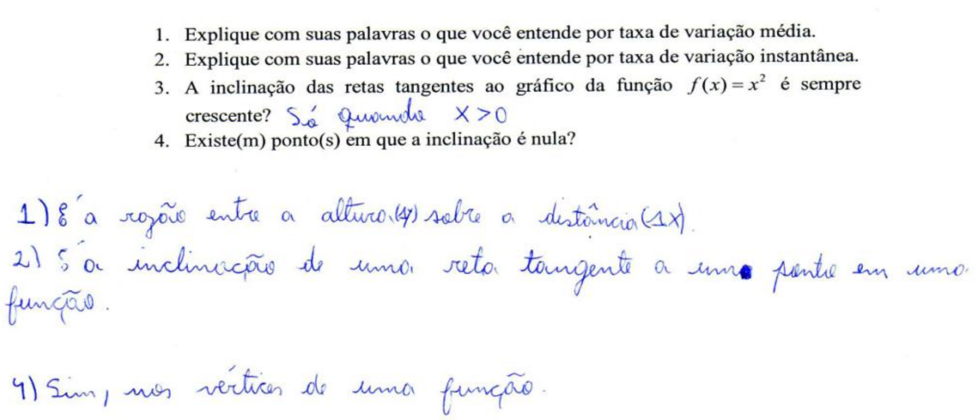
Figura 34

Notamos que há uma confusão na resposta da segunda questão, pois o aluno confunde os conceitos de inclinação de uma reta, com a posição relativa da reta em relação à curva. Para as outras questões, o aluno consegue interpretar a noção de inclinação de reta tangente ao gráfico da *f*, justificando que as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$ são crescentes apenas quando $x > 0$.

- Aluno H_2

O aluno H_2 associa corretamente todos os gráficos com o formato dos sólidos. Durante o curso, o aluno H_2 fez questionamentos pertinentes às questões que envolvia taxa de variação média, sempre buscando uma interpretação geométrica para esse conceito.

Devo fazer uma ressalva quanto à questão 3 sobre a inclinação das retas tangentes a cada ponto no gráfico da função $f(x) = x^2$, pois a formulação da questão poderia dar um sentido ambíguo para a resposta. A questão estava solicitando uma interpretação sobre a função derivada $f'(x) = 2x$. Mas os alunos responderam a questão considerando o sinal das inclinações das retas tangentes à função.



1. Explique com suas palavras o que você entende por taxa de variação média.
2. Explique com suas palavras o que você entende por taxa de variação instantânea.
3. A inclinação das retas tangentes ao gráfico da função $f(x) = x^2$ é sempre crescente? Só quando $X > 0$
4. Existe(m) ponto(s) em que a inclinação é nula?

1) É a razão entre a altura (Δy) sobre a distância (ΔX).
2) É a inclinação de uma reta tangente a um ponto em uma função.

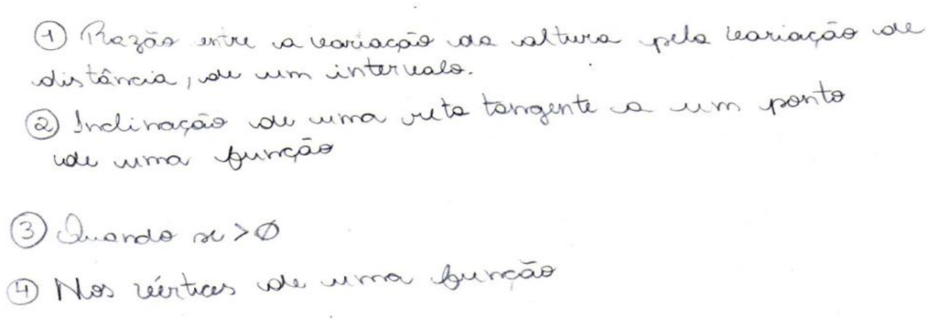
4) Sim, nos vértices de uma função.

Figura 35

Podemos notar que, para a questão 4, o aluno associa os pontos onde a inclinação é nula com o "vértice da função", possivelmente buscando uma relação com o vértice da parábola, no qual a derivada aplicada no ponto é zero.

- Aluna M_1

A aluna associa coerentemente cada reservatório ao gráfico que representa a função da altura do nível de água em função do tempo. Para as respostas das questões qualitativas, a aluna tem a seguinte interpretação:



① Razão entre a variação da altura pela variação de distância, de um intervalo.
② Inclinação de uma reta tangente a um ponto de uma função
③ Quando $x > Ø$
④ Nos vértices de uma função

Figura 36

Na resposta à primeira questão, nota-se que a aluna tem uma compreensão geométrica da taxa de variação média, pois descreve essa taxa como razão entre a diferença nas imagens (alturas) da função e o comprimento do intervalo no domínio.

A aluna responde a questão 4 utilizando, possivelmente, um raciocínio para funções em geral, e não somente para a função $f(x) = x^2$.

4.5 Avaliação Geral

A avaliação que podemos concluir do experimento é a de que os alunos refletiram sobre propriedades de funções de variável real, em especial nos casos de funções quadráticas e cúbicas. Compreenderam a noção de taxa de variação instantânea como a inclinação de uma reta tangente ao gráfico de uma função num ponto dado e que os modos como as funções crescem pode ser estudado tanto gráfica como analiticamente.

Essa evolução fica mostrada pelo fato de que alguns alunos que, antes, apresentavam uma visão fragmentada do que seria uma função, no final do curso compreendiam e representavam graficamente os diferentes tipos de crescimento das funções que representavam o nível da altura de água nos diferentes tipos de reservatórios.

Uma exclamação feita pelo aluno H_2 sobre a descoberta de que a taxa de variação não é constante nos mostra que o aluno revelava uma surpresa e, provavelmente, a expectativa de que essa taxa fosse sempre a mesma. Ou seja, a experimentação é válida na medida em que o estudante aumenta a sua compreensão sobre o comportamento de uma função, considerando elementos como crescimento, concavidade, mínimos e máximos. Assim, o aluno compreende propriedades que, sem a ferramenta da taxa de variação instantânea, seriam de difícil compreensão.

Um das observações ao final dessa experimentação é a evolução na escrita matemática dos alunos. Nota-se que essa desenvoltura na escrita é melhorada, pois as expressões dos alunos na avaliação da primeira atividade são descritas de forma esquemática, usando símbolos para representar as suas idéias. No final da última avaliação, os alunos conseguem expressar-se de maneira mais completa com relação às definições de taxa de variação média e instantânea.

Assim, a prática, que envolveu a introdução de noções de Cálculo Diferencial, propiciou aos alunos uma visão mais ampla e aprofundada de funções reais de variável real, podendo observar propriedades que antes não estavam claras.

Em particular, para as funções quadráticas, os alunos relembraram como se determina o ponto de máximo ou de mínimo desse tipo de função. Agora, com o auxílio da taxa de variação instantânea, e com a sua representação gráfica, os alunos puderam visualizar a dedução do vértice de uma parábola, através da noção da derivada.

Com o software *Winplot*, a interpretação geométrica da taxa de variação foi melhorada, pois, com essa ferramenta, os alunos observaram de forma dinâmica a posição limite das retas secantes à curva conforme diminuíamos o intervalo entre as abscissas. Acredito que softwares que possibilitem essa animação, auxiliam na compreensão geométrica dos assuntos relacionados com funções.

Acredito que a prática com materiais concretos possibilitou uma melhor visualização do comportamento da função que expressava a altura do nível de água em função do tempo. A manipulação com esses tipos de sólidos possibilitou que o estudante observasse em tempo real a que rapidez o nível água aumentava.

Ao trabalhar o estudo de noções de Cálculo no ensino médio com a introdução do conceito de taxas de variação, podemos comparar os crescimentos das funções de forma intuitiva, possibilitando uma aproximação com o estudo de outros tópicos de Matemática. Acredito que essa prática possibilitou essa aproximação, na medida em que foram utilizados alguns conceitos de Geometria. Portanto, os alunos puderam visualizar as propriedades da função quadrática através de uma interpretação geométrica.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um panorama da história da educação matemática no Brasil relacionado ao estudo de Cálculo, procurando entender se esse tópico já esteve presente no ensino de Matemática no Brasil e as causas do declínio de seu estudo no Ensino Médio. A pesquisa mostrou que esse conteúdo já esteve presente nas escolas brasileiras. Acredito que, por se tratar de um assunto de extrema importância cultural, não deve deixar de ser ensinado no Ensino Médio. Os argumentos se aproximam do que os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (PCNs) sugerem para o ensino de Matemática em relação ao estudo de funções. De acordo com os PCNs

> Cabe [...] ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (BRASIL, MEC, 1999, p. 44).

Adotando esse pensamento, acredito que o ensino de noções de Cálculo deva fazer parte do programa curricular de matemática, pois os conceitos estudados incentivam, no estudo de funções, a busca de soluções de problemas modelados. Assim, o aluno trabalha com funções analisando as suas propriedades principais.

Ao longo deste trabalho, mostrei que esse assunto já foi abordado em escolas brasileiras, e com isso valorizei a retomada da abordagem desse tópico no ensino de matemática. A importância cultural do ensino de Cálculo está relacionada ao fato de que a derivada - um dos tópicos desse assunto - foi uma das maiores descobertas da humanidade em matemática. Já o argumento social envolve pensarmos que muitos problemas da vida cotidiana poderiam ser facilitados usando as ferramentas do Cálculo, além de que a aplicação de conceitos básicos do Cálculo poderia servir para resolver problemas de outras áreas, tendo, assim, um caráter funcional (ANDRÉ, 2008, p. 4).

Apresentei duas propostas didáticas para o estudo de cálculo no ensino médio, no qual a principal intenção foi, inicialmente, introduzir a ideia da taxa de variação média, e de taxa de variação instantânea, valorizando a intuição. Acredito que, dessa forma, a introdução ao estudo de derivadas não se torne um assunto de difícil aprendizagem para estudantes da escola básica. Procurei, nesse trabalho, estruturar as atividades de um modo que fosse possível estudar esses tópicos de Cálculo, viabilizando uma possível posterior definição formal.

Analisando a participação dos alunos na atividade e os resultados obtidos nos testes feitos com alunos do ensino médio, considero ser viável a introdução de noções de Cálculo nessa etapa de ensino de matemática.

Por fim, estudei nesse trabalho questões relacionadas ao programa curricular de matemática nas escolas públicas brasileiras, e como o assunto de noções de Cálculo foi distribuído nesse programa na educação básica desde 1930. Este trabalho contribuiu para compartilhar idéias sobre a inclusão dessas noções de Cálculo, baseado numa avaliação de que os conteúdos de matemática estão mal dispostos e separados. Algumas experiências na universidade, mais precisamente experiências com a Iniciação Científica, me propiciaram observar algumas dificuldades com relação ao estudo de Cálculo Diferencial, e portanto o trabalho permitiu que essas experiências durante a licenciatura (estágios e cursos de extensão) me motivassem a defender a inclusão desses tópicos no ensino médio, com o principal objetivo de contribuir para um melhor ensino de matemática. Ciente das dificuldades que terei durante a profissão, espero levar para sala de aula, as experiências vividas com o Cálculo na graduação, para propiciar um melhor estudo de funções. Assim, considero que um primeiro passo para essa mudança é a consciência da possibilidade e da importância do estudo de noções de Cálculo.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVAREZ, Tana Giannasi. **A matemática da Reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar.** São Paulo, 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2004. Disponível em < http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacoes_2004.html >

ANDRÉ, S. L. C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio.** Rio de Janeiro, 2008. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

ANTON, Howard. **Cálculo.** 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, n. 18, SBM, p. 1 – 9, 1991.

_______, Geraldo. Limites e derivadas no ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**, n. 60, SBM, p. 30 – 38, 2006.

BIANCHINI, E; PACCOLA, H. **Curso de matemática.** 3 ed. São Paulo: Moderna, 2003.

BRAGA, C. **Função: a alma do ensino de matemática.** São Paulo: FAPESP, 2006. 172 p.

BUENO, Rafael Winícius da Silva. **As múltiplas representações e a construção do conceito de função.** Porto Alegre, 2009. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: 2009.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações.** 2 ed. São Paulo: Ática, 2006.

_______. **Matemática: contexto e aplicações. v. 3.** 2 ed. São Paulo: Ática, 2006.

DASSIE, B. A. **Euclides Roxo e a educação matemática no Brasil.** Rio de Janeiro, 2008. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: 2008.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar v. 9.** 8 ed. São Paulo: Atual, 2005.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R; GIOVANNI, J. R. **Matemática Completa: ensino médio.** São Paulo: FTD, 2002.

GRAVINA, M. A. Um estudo de funções. **Revista do Professor de Matemática**, n. 20, SBM, p. 33 – 38, 1992.

IEZZI, G; DOLCE, O; DEGENSZAJN, D; PÉRIGO, R; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações v. 3.** 1ª ed. São Paulo: Atual, 2001.

OTONE e SILVA, Maryneusa Cordeiro. **A matemática do curso complementar da Reforma Francisco Campos.**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2006.

PAIVA, M. **Coleção base: Matemática.** São Paulo: Moderna, 1999.

PINTO, G. M. F. **Compreensão Gráfica da Derivada de uma função real em um curso de Cálculo semi-presencial.** Rio de Janeiro, 2008. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: 2008.

RIPPOL, C.; RIPOLL, J.; SILVEIRA, J.P. **Apostila de Fundamentos de Matemática II**. Porto Alegre: Instituto de Matemática, s/d.

SANTOS, C. A. M; GENTIL, N; GRECO, S. E. **Série novo ensino médio: Matemática.** 7 ed. São Paulo: Ática, 2004.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. **Matemática: ensino médio.** 3 ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

SOUZA, M. H. S; SPINELLI, W. **Matemática: 2º grau v. 3.** São Paulo: Scipione, 1996.

VASCO, C. **El Pensamiento variacional y la modelación matemática.** XI CIAEM, Brasil, 2003.

YOUSSEF, A. N; FERNANDEZ, V. P. **Matemática: conceitos e fundamentos v. 3.** São Paulo: Scipione, 1993.