

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Alessandro Bagatini

**Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de  
Problemas**

PORTO ALEGRE  
2010

Alessandro Bagatini

**Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de Problemas**

Trabalho de Conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

**Orientadora:** Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup> Marilaine de Fraga Sant'Ana

PORTO ALEGRE

2010

Alessandro Bagatini

**Olimpíadas de Matemáticas, Altas Habilidades e Resolução de Problemas**

Trabalho de Conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

**Orientadora:** Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Aprovado em: \_\_\_\_\_

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke  
Instituto de Matemática - UFRGS

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elisabeth Quintana Ferreira da Costa  
Instituto de Matemática - UFRGS

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marilaine de Fraga Sant'Ana –  
Orientadora - Instituto de Matemática - UFRGS

**Dedico este trabalho aos meus queridos pais, agradecendo o apoio, carinho e educação que me deram durante toda a minha vida e especialmente durante minha formação acadêmica.**

## **AGRADECIMENTOS:**

Neste momento tão especial, tenho que agradecer profundamente a Deus, por me ajudar a trilhar este caminho, que muitas vezes foi doloroso. Sou eternamente grato a Ele pelo guia que foi, e com certeza continuará sendo. Dentre todos seus grandiosos fatos, aquele que sou mais grato é o de ter dado os pais que tenho. Aqueles a quem amo tanto e dedico todas as vitórias que obtive em minha vida. Agradeço do fundo do meu coração a eles, Josemar e Marli Bagatini, por serem simplesmente TUDO em minha vida, pela educação, lição e exemplo que me deram e ao apoio indispensável para chegar aqui. Dedico agradecimento especial à minha prima, pseudo-irmã Duda, pela companhia, amizade e longas insistências para jogar UNO e PACIÊNCIA nos momentos em que eu deveria estar estudando, mas fazia com que eu sempre cedesse aos pedidos ☺.

Além de meus pais, agradeço a todo restante de minha enorme família pelo apoio recebido, além da atenção, motivação e cobrança recebida por eles, bem como a grande amizade cultivada entre nós. Aos meus amigos e colegas de Encantando e Porto Alegre, principalmente, que foram motivadores nas horas de estudos e dificuldades, bem como, os melhores companheiros para as festas e agitos nos finais de semana. Àqueles que compartilharam comigo os bons e os maus momentos, àqueles que quando precisei, não mediram esforços para me ajudar e nas horas boas compartilharam comigo minhas alegrias. Espero que saibam a enorme gratidão que tenho a vocês, e sempre estarão comigo para o que der e vier.

Agradeço à universidade por me ofertar esta valiosa oportunidade de estudos e aos professores desta, pelo ensino e formação de qualidade que me proporcionaram. Foram vocês que me ensinaram não simplesmente o que são Anéis, Ideais, Derivadas e Integrais, mas sim, serviram como exemplo e modelo a ser seguido. De uma forma especial, gostaria de agradecer à professora Marilaine, por ter aceitado me “aturar” na orientação deste trabalho, pela paciência e ajuda que me deu nesta elaboração. Agradeço especialmente também aos professores Eduardo Brietzke e Elisabeth Quintana por aceitarem fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

De um modo geral, quero deixar um espaço reservado aqui a todos que colaboraram para a efetivação deste trabalho. Principalmente aos alunos da disciplina de Fundamentos de Matemática II e do programa PIC da OBMEP que aceitaram participar

das atividades, bem como os respectivos professores pelo espaço cedido para que a prática fosse desenvolvida. Dedico gratidão também à minha colega Marilise, pela ajuda na aplicação prática e pelas “lindas” fotos de minhas caretas durante a mesma. Agradeço também ao professor Fernando Ripe pela ajuda dada na escrita no tema de altas habilidades.

É necessário o agradecimento à “vó do Henrique”, por ceder sua casa nos momentos em que os matemáticos resolviam beber ou fazer festa.

Alessandro Bagatini

## RESUMO

Neste trabalho, faço um retrospecto das principais Olimpíadas de Matemática, sabendo de sua influência na matemática atual. Comento sobre os objetivos que mais se destacam, focando-me principalmente na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, a OBMEP. Os premiados neste tipo de disputa são reconhecidos pela sua alta habilidade na matemática, e pela capacidade de resolver problemas. Por isso, investigo quais as características das pessoas portadoras de altas habilidades, como selecioná-las e, além disso, que tipo de atenção diferenciada eles necessitam ter.

Ao falar em Olimpíadas de Matemática, pensamos na resolução dos problemas que as compõem. Por isso, permeando a teoria de George Polya, comento sobre sua sequência sugerida, além da possível inserção de um currículo baseado na resolução de problemas na escola. Analiso como alunos reconhecidos pela sua capacidade em matemática resolvem os problemas da OBMEP, identificando se eles seguem, mesmo que implicitamente, tal sequência.

**Palavras-Chave:** Olimpíadas de Matemática - Ensino da Matemática - Altas Habilidades - Resolução de Problemas.

## ABSTRACT

In this work, I retrospect upon the main past Math Olympiads, knowing of its influence in present math, commenting on the most important objectives and focusing mainly in Brazilian Math Olympiads of Public Schools, OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). The winners of such competitions are recognized as so for their high skills in math and their capacity to solve problems. Thus, I investigate which are the characteristics of high skilled people, how to select them and, moreover, if and which kind of special attention they are to have.

When it comes to Math Olympiads, we think about solving the problems that it is consisted of. Therefore, permeating the theory of George Polya, I comment on the sequence suggested by him and on the possibility of inserting a curriculum based on the resolution of logical problems in school. I analyze how students known for their high capacity in math solve the problems in the OBMEP tests, checking whether they follow or not the aforementioned sequence, even if implicitly.

**Keywords:** Math Olympiads – Math’s teaching – High abilities – Problems Resolution.



## SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO .....	10
2 – OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA .....	12
2.1 – O que é uma Olimpíada de Matemática?.....	12
2.2 – Histórico das Olimpíadas.....	13
2.2.1 - Linha do tempo das Olimpíadas de Matemática .....	16
2.3 – Principais Olimpíadas de Matemática (mundial e nacional) .....	17
2.3.1 - Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).....	17
2.3.2 – Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) .....	19
2.3.3 – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).....	21
3 – OS MEDALHISTAS OLÍMPICOS E SUAS HABILIDADES.....	24
3.1 - Altas Habilidades .....	25
3.2 - A OBMEP como forma de descoberta de talentos.....	29
3.3 - Programa de Iniciação Científica (PIC) .....	31
4 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS .....	33
4.1 – Notas históricas e sistema de ensino atual.....	33
4.2 – Uma possível mudança no currículo da matemática: Resolução de Problemas	34
4.3 – Método de resolver problemas, de acordo com POLYA.....	38
4.3.1 – Fase 1: <i>Compreender o problema</i> .....	39
4.3.2 - Fase 2: <i>Estabelecimento de um plano</i> .....	40
4.3.3 – Fase 3: <i>Execução do plano</i> .....	40
4.3.4 - Fase 4: <i>Reflexão</i> .....	41
5 – A PRÁTICA .....	42
5.1 – O Público Selecionado.....	42
5.2 – OS OBJETIVOS:.....	42
5.3 - A APLICAÇÃO .....	43
5.3.1 – AS QUESTÕES APLICADAS .....	44
5.3.1.1 – Questão 6, Nível III .....	45
5.3.1.2 – Questão 3, Nível III .....	52
5.3.1.3 – Questão 1, Nível II.....	61
5.3.2 – OS QUESTIONÁRIOS .....	65
5.3.2.1 – Questionário aos alunos do PIC .....	65
5.3.2.2 – Questionário aos alunos da UFRGS .....	66
6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	70
7 - REFERÊNCIAS .....	72
8 – ANEXOS .....	74
8.1 - Questões Selecionadas .....	74
9 - APÊNDICE .....	77
9.1 - Questionário aos alunos do Programa de Iniciação Científica da OBMEP .....	77
9.2 - Questionário aos alunos do Curso de Matemática da UFRGS .....	78
9.3 - Questões extras.....	79
9.4 - Questionário referente aos problemas .....	82

## 1 - INTRODUÇÃO

Diante dos muitos problemas que a educação matemática enfrenta nos dias de hoje, um dos que se sobressaem se refere à dificuldade de aprendizagem de muitos alunos. Muitas vezes nos deparamos com a pergunta: “*para que vou usar isso?*” ou “*para que eu preciso aprender isso?*”. A suposta “inutilidade” do que se aprende em matemática torna seu aprendizado desgastante e possivelmente sem graça, implicando assim, muitas vezes, em desestímulo ao estudar esta disciplina. Um currículo que enfatize a resolução de problemas pode despertar no aluno a vontade por aprender, pois assim ele verá utilidade no que está sendo ensinado e no que a matemática vista em sala de aula poderá ser usada em sua vida.

Diante das diversas tentativas de incentivar o estudo da matemática, algumas se sobressaem, entre elas, as Olimpíadas de Matemática realizadas em diversas escalas (mundial, nacional, regional e etc.). Essa forma de competição ocorre há muito tempo e nasceu primeiramente com o objetivo de selecionar os melhores alunos em matemática para investir na sua carreira e possivelmente contribuir para o avanço científico-tecnológico do seu país. Uma destas competições, que mais se destaca atualmente, é a OBMEP, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, que objetiva principalmente incentivar nos alunos o estudo da matemática, além de encontrar jovens talentos. Os problemas que compõe a prova estão relacionados com o cotidiano do aluno, e fazem-no pensar no seu dia-a-dia ao resolvê-los e de modo conjunto, ver a utilidade da matemática na vida das pessoas.

Com este trabalho, faço um retrospecto das competições olímpicas de matemática, desde o surgimento da primeira até as diversas que existem atualmente. Antes disso, é necessário tentar responder a pergunta: “O que é uma Olimpíada de Matemática?”. Analiso também as principais disputas matemáticas da atualidade, as quais têm grande influência no Brasil: Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP).

Gostaríamos de saber quem são os alunos que se destacam nessas competições. Como pensam e organizam o raciocínio ao resolver problemas, sabendo que são reconhecidos por esta habilidade? Muitos alunos medalhistas em Olimpíadas de Matemática possuem altas habilidades em raciocinar matematicamente e criar

estratégias de resolução de problemas. Da mesma forma que estudantes com dificuldades de aprendizagem necessitam de atenção especial, os alunos “superdotados” precisam de algo diferenciado voltado a eles. Por isso, em paralelo à teoria de altas habilidades, trato das características que devem ser consideradas ao trabalhar com esse público, desde a identificação destes sujeitos até a atenção diferenciada que deve ser dada a eles, considerando, por exemplo, as sugestões do MEC/SEESP (Secretaria de Educação Especial do Ministério de Educação e Cultura).

Na matemática, uma ferramenta que pode servir para tal diagnóstico é a prova da OBMEP, com a qual se pode identificar alunos com habilidades com o pensamento e raciocínio matemático em destaque. Esta competição oferece aos medalhistas, uma maneira diferente para aprimorar seus talentos: O Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC). Um programa extraclasse em que são trabalhadas e aperfeiçoadas suas qualidades, além de proporcionar um aprendizado em que o aluno segue conforme seu ritmo.

Ao falar em Olimpíadas de Matemática, remeto-me conseqüentemente a pensar na resolução dos problemas que as compõem. Para um aluno obter destaque nestas competições, é necessário que ele consiga resolver uma grande quantidade de problemas de forma correta. Mas existe um método que possa auxiliar no processo da resolução? Segundo Polya (2006), existem algumas etapas a serem seguidas, abordadas no decorrer do texto. Para muitos especialistas em educação, um currículo que enfatize a resolução de problemas pode facilitar e dar sentido à aprendizagem da matemática. Por isso, permeando a teoria deste autor, faz-se a análise da possível inserção de problemas no ensino básico, abordando quais são os passos para resolvê-los.

Ao longo do texto, estabeleço relações entre os conceitos acima descritos: Olimpíadas de Matemática, Resolução de Problemas e Altas Habilidades a partir de dados coletados na aplicação de questões da OBMEP aos alunos participantes do programa de Iniciação Científica da mesma e a doze alunos do primeiro ano do curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. É um público diferenciado, que gosta ou tem facilidade em matemática. Objetivo ver como pessoas, que possuem reconhecimento na matemática, organizam o pensamento e raciocinam para a obtenção da solução de problemas. Além disso, procuro observar relações entre os métodos de resolução por eles apresentados com os sugeridos por George Polya e com isso, ver se esses passos são equivalentes.

## 2 – OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

### 2.1 – O que é uma Olimpíada de Matemática?<sup>1</sup>

Quando ouvimos a palavra Olimpíadas, remetemo-nos a lembrar de competições esportivas, nas quais estamos habituados, devido à grande mídia criada e da paixão brasileira pelo esporte. Ela assemelha-se com tais competições na maneira em que o concorrente compete com os outros candidatos a fim de conquistar a vitória, além de ser composta de regras e deveres como em qualquer modalidade. Nesta olimpíada, o “esporte” disputado não requer do concorrente força e/ ou habilidades físicas que lhe garantam capacidades de obter bons resultados. Na verdade, é uma disputa de caráter intelectual entre jovens em que as forças resumem-se em inteligência, criatividade, imaginação e disciplina mental.

Como em qualquer outra competição olímpica, os competidores devem preparar-se especificamente para o que será disputado. Enquanto nas olimpíadas esportivas, é dedicado um grande tempo para treinamento físico por parte dos participantes, os “atletas” da matemática preparam-se através da resolução de problemas de forma coletiva ou individual. Eles se preparam com o objetivo de desenvolver a habilidade lógica e a criatividade, bem como bons métodos de organização de pensamento e de trabalho.

Uma Olimpíada de Matemática caracteriza-se por uma sequência de provas, compostas por problemas instigantes, que emprega a matemática para obtenção da solução. Na maioria das provas, das diversas competições existentes, os problemas que as compõem não requerem do aluno altos conhecimentos matemáticos, mas sim, capacidade de interpretar, criar e improvisar o mais rápido possível.

Como na grande maioria das competições olímpicas, há uma premiação para os competidores que se destacam. Nesse estilo de disputa, os premiados recebem medalhas, menções honrosas e em alguns dos casos, outros prêmios como bolsas de estudo. No entanto, para muitos destes, o simples prazer em competir e confraternizar com outros alunos é o maior dos prêmios. Algumas olimpíadas nacionais servem como seleção para participar de outras a nível mundial.

---

<sup>1</sup> Para a obtenção dos dados aqui apresentados, que não foram apontadas as referências, foram realizadas pesquisas nos sites das olimpíadas, bem como artigos e trabalhos mencionados no corpo do texto. VIDE REFERÊNCIAS.

Entre os objetivos pela realização das olimpíadas de matemática, destacam-se:

- Descobrir e estimular talentos para o estudo da Matemática.
- Contribuir na melhoria do ensino da Matemática em todos os níveis.
- Aumentar a integração entre as universidades e as escolas.
- Favorecer o aumento das relações entre alunos e professores, em escala nacional e internacional.

## 2.2 – Histórico das Olimpíadas<sup>2</sup>

Pesquisas apontam sobre competições não oficiais de matemáticas desde o século XVI. Naquela época, segundo Maciel (2009), havia desafios entre matemáticos, nos quais havia aposta de dinheiro, reputação e até mesmo cátedras em universidades. Muitos destes matemáticos empenhavam-se na busca de resolução de problemas que pudessem lhes trazer algum prestígio ou reconhecimento pela sociedade.

Ser reconhecido pelo talento em matemática requeria, muitas vezes, dedicação intensa e sempre, uma espécie de “carta na manga” na hora principal. Diante disso, tais competidores ocupavam-se na solução de problemas que pudessem ser usados em competições e conseqüentemente trazerem-lhes prestígio, fama e dinheiro. Estas disputas funcionavam na forma de um duelo: Um candidato desafiava o outro por meio de problemas para que eles os resolvessem e ganhava, portanto, aquele que resolvesse em maior número (MACIEL, 2009).

Mais precisamente, a primeira Olimpíada de Matemática ocorreu na Hungria, leste europeu, em 1894. Destinava-se a alunos que concluíam a segunda etapa do ensino regular daquele país, e fora realizada em homenagem a um famoso professor de matemática húngaro József Kürschák, membro da Academia de Ciências da Hungria e do Instituto Politécnico da Universidade de Budapeste, que havia sido nomeado como ministro da educação (FERNANDES & OLIVEIRA, s.d.). Essas competições matemáticas eram chamadas de “Eötvös”<sup>3</sup>, e foram precursoras do que hoje chamamos de Olimpíada de Matemática.

A primeira Olimpíada de Matemática, que podemos classificar como “moderna”, ocorreu em 1934, na cidade de Leningrado, na antiga União Soviética. No

---

<sup>2</sup> Os dados a seguir coletado são oriundos de pesquisas nos sítios de cada uma das Olimpíadas citadas no texto. Vide REFERÊNCIAS.

<sup>3</sup> Sobrenome do presidente da Hungria no ano de 1894

entanto, em 1959 foi realizada a primeira Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), na cidade de Bucareste – Romênia. Essa competição ocorre até os dias atuais e é objetivo maior de todo aluno que gosta de matemática e procura participar de tais competições.

A precursora das Olimpíadas de Matemática no Brasil foi organizada no estado de São Paulo, no ano de 1977. Criada pela Academia Paulista de Ciência, foi destinada somente a alunos do estado e atualmente é realizada em duas fases e, além disso, dividida em três níveis: *Alfa* (sexto e sétimo ano do ensino fundamental), *Beta* (oitavo e nono anos do ensino fundamental) e *Gama* (primeiro e segundo anos do ensino médio).

Dois anos depois no Brasil, em 1979, foi organizada a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática, promovida pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Esta competição envolve alunos de todo país e serve como pré-requisito para a participação de outras importantes competições em todo o mundo.

Em 1985 ocorreu a primeira edição da Olimpíada Ibero-Americana de Matemática, cuja sede foi na cidade de Villa de Leyva na Colômbia. Os países participantes desta competição são da América Latina, além de Espanha e Portugal. Tais nações são representadas por equipes de até quatro estudantes, os quais não podem ter feito 18 anos de idade até 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada e não ter participado anteriormente em duas Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO).

Acontece também anualmente, sempre em um país diferente, a Olimpíada de Matemática do Cone Sul, envolvendo estudantes do Brasil, Argentina, Bolívia, Chile, Equador, Paraguai, Peru e Uruguai. Sua primeira edição ocorreu na cidade de Montevideu no Uruguai em 1988, contando com representantes de apenas quatro países.

O Brasil participa, também, das Olimpíadas de Maio, patrocinada pelo Centro Latino-Americano de Matemática e Informática (CLAMI) e pela Federação de Competições de Matemática. Sua primeira edição foi no ano 1995. Esta competição está dividida em dois níveis: estudantes com idade menor do que 13 anos e estudantes com idade menor do que 15 anos e maior ou igual a 13 anos. O concurso é aplicado nas escolas dos seguintes países: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Cuba, Espanha, México, Panamá, Paraguai e Venezuela. Os brasileiros que participam desta Olimpíada são selecionados se foram premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática.

Mais recentemente no Brasil, com o objetivo de dar acesso a todas as classes sociais, foi criada a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, a OBMEP. Nascida numa parceria dos Ministérios de Ciência e Tecnologia e Educação e com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), esta competição representa atualmente um sucesso de participação e apresenta-se como uma ótima alternativa para melhorar o quadro do ensino atual.

## 2.2.1 - Linha do tempo das Olimpíadas de Matemática

Baseando-se no histórico das Olimpíadas anteriormente apresentado, podemos construir uma linha do tempo que resume os principais momentos da história destas competições. Abaixo segue um resumo histórico, referente às datas do surgimento das Olimpíadas de Matemática que possuem maior influência no Brasil e no Mundo:





## **2.3 – Principais Olimpíadas de Matemática (mundial e nacional)**

Há registros sobre a eficiência e sucesso de diversas Olimpíadas de Matemática pelo mundo. Em um aspecto geral, grande parte dos países possui um estilo de Olimpíada ou competição de Matemática. No mundo, destaca-se a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) que reúne participantes oriundos de, em média, 100 países. No Brasil, diante das diversas existentes (regionais, estaduais, municipais e etc.) sobressaem a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Segue abaixo uma descrição de cada uma das competições acima relacionadas.

### **2.3.1 - Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)**

Com o objetivo de revelar e aprimorar aptidões, possibilitando a troca de informações entre jovens matemáticos de todo o mundo, existe a Olimpíada Internacional de Matemática, considerada a mais importante competição de matemática de todo o mundo. Criada no ano de 1959, na cidade de Bucareste – Romênia, a IMO teve a participação de poucos países, os quais faziam parte da chamada “Cortina de Ferro”<sup>4</sup>: atualmente extintas União Soviética, Tchecoslováquia e Alemanha Oriental, além de Bulgária, Hungria, Romênia e Polônia. No entanto, com o passar do tempo, essa participação de países teve um aumento expressivo, sendo que nos dias atuais, conta com a participação de, em média, 100 nações.

Durante toda a história das Olimpíadas, existem alguns fatos importantes que podem ser destacados na história da IMO. Entre eles:

- Em 1965, a competição foi realizada em Berlim (Alemanha Oriental) com a participação de dez países, entre eles a Finlândia, que foi o primeiro país fora da “Cortina de Ferro” a participar do evento.
- Em 1974, a competição ocorreu pela segunda vez em Berlim e, dentre os dezesseis países participantes, pela primeira vez, estava os Estados Unidos.

---

<sup>4</sup> O termo “Cortina de Ferro” identificou, durante a Guerra Fria, o conjunto de países de regime comunista sob influência de Moscou. Os países que faziam parte da “Cortina de Ferro” eram Alemanha Oriental, Polônia, Tchecoslováquia - atuais República Tcheca e Eslováquia; Hungria, Romênia, Bulgária, Albânia, Lituânia, Letônia, Estônia e Cuba.

- Em 1979, a competição realizou-se em Londres (Inglaterra) e, dentre os 23 países participantes, pela primeira vez, estava o Brasil.
- Em 1980, não houve competição.
- Em 1981, pela primeira vez, a competição foi organizada fora da Europa, em Washington - Estados Unidos (MACIEL, 2009).

No começo, cada país participante era representado por, no máximo, oito alunos. Este número já fora mudado para quatro e seis competidores, sendo o último utilizado até hoje. Como pré-requisitos para participar desta competição, o aluno não deve ultrapassar a idade máxima de 21 anos e, além disso, não pode estar frequentando e/ou ter concluído qualquer curso de nível superior. A seleção é de livre escolha para cada país, sendo que no Brasil faz-se o uso de uma olimpíada nacional.

A prova é composta de seis problemas, resultado de uma seleção em que cada país participante sugere seis questões, quatro meses antes da realização do evento. A escolha é feita através de um júri composto por todos os chefes de cada nação, mas dirigidos por quatro juízes eleitos pelo país sede. Os problemas propostos devem englobar assuntos relacionados a conteúdos tratados no Ensino Médio: Geometria, Análise Combinatória, Teoria dos Números e Álgebra.

As línguas oficiais da Olimpíada Internacional são o inglês, francês, alemão e russo. Caso seja necessário, os chefes de cada equipe responsabilizam-se pelas traduções da prova. Ela é feita em dois dias, conseqüentemente, três questões por vez. A pontuação máxima para cada uma das perguntas é 7, podendo-se atingir no máximo 42 dois pontos.

Como premiação, os alunos que se destacarem nas provas, recebem medalhas de ouro, prata e bronze e menções honrosas. O número de medalhas é proporcional à metade dos competidores e tem distribuição seguindo a proporção 1:2:3, porém restringindo a que não mais que  $\frac{1}{12}$  dos participantes recebam medalhas de ouro, não mais que  $\frac{1}{4}$  com a medalha de prata e não mais que  $\frac{1}{2}$  com algum tipo de medalha”. Os certificados de menção honrosa são distribuídos a alunos que não obtiveram medalhas, mas que conseguiram resolver corretamente alguma das questões. Estes objetivam, principalmente, incentivar o aluno a buscar a solução de alguns problemas (MACIEL, 2009).

A última edição da Olimpíada Internacional de Matemática ocorreu em Astana, capital da República do Cazaquistão de 2 a 14 de julho de 2010. A participação nesta competição contou com 517 alunos provindos de 97 países, dos quais pouco menos de 50 eram meninas e o restante, meninos. Dentre as 97 nações, a República Popular da China destacou-se perante os outros, sendo a primeira na colocação geral, com seis medalhas de ouro, número máximo de condecorações que pode ser conquistado. A seguir aparece Rússia e Estados Unidos em segundo e terceiro lugar, respectivamente. O Brasil ocupa a posição de número 35, ressaltando a potencialidade do país na matemática.

As duas próximas edições já têm local determinado. Em 2011 a Olimpíada Internacional de Matemática, em sua 52ª edição, será realizada na cidade de Amsterdam na Holanda, no período de 13 a 24 de julho. Após a Holanda, a IMO desembarca na Argentina, porém sem data e cidade ainda especificadas. (FONTES: IMO *on-line*)

### **2.3.2 – Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)**

A Olimpíada Brasileira de Matemática é uma competição nacional criada em 1979 e organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em parceria com o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Faz parte de um projeto que visa a utilização de competições intelectuais para estimular o estudo da matemática e melhorar a qualidade do ensino no país, ou seja, desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, e descobrir talentos precoces para a matemática (OBM, s.d.).

Atualmente, as provas da Olimpíada estão divididas em 4 níveis:

**Nível 1** – Alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental;

**Nível 2** – Alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental;

**Nível 3** – Alunos dos três anos do Ensino Médio;

**Nível Superior** – Alunos que não tenham completado o Ensino Superior.

Desde 1979, ocorreram diversas mudanças na estrutura da OBM. Em suas primeiras edições, mais precisamente, até 1991, havia uma prova única. A partir desta data, as modificações foram feitas em relação aos níveis e à criação/aumento no número

de fases, até chegar ao estilo de Olimpíada atual: com quatro níveis e divididas em três fases.

As provas dos níveis 1, 2 e 3 são feitas em três fases e do nível universitário em duas, e cada uma delas serve como pré-requisito para a próxima. Para os organizadores, devido às várias etapas, através da olimpíada, pode-se ir desde testes amigáveis até uma fase mais seletiva da descoberta de talentos. Além disso, afirmam que contribui de maneira inestimável à formação de um espírito analítico e um pensamento estruturalmente lógico, tão desejados na sociedade atual.

O esquema em que as provas estão organizadas está expresso abaixo, conforme níveis e fases:

### **Níveis 1, 2 e 3:**

**Primeira Fase:** Uma prova de múltipla escolha com 20 a 25 questões com duração de 3 horas.

**Segunda Fase:** Uma prova mista (parte A e parte B), com duração de 4 horas e 30 minutos.

### **Terceira Fase:**

*Nível 1* - uma prova discursiva com 5 problemas com duração de 4 horas e 30 minutos.

*Níveis 2 e 3* - duas provas discursivas realizadas em dois dias consecutivos com 3 problemas em cada dia, com uma duração de 4 horas e 30 minutos por dia.

### **Nível Universitário:**

**Primeira Fase:** Uma prova discursiva com 6 problemas e duração de 4 horas e 30 minutos, aplicada no mesmo dia e horário da Primeira Fase dos níveis 1, 2 e 3.

**Segunda Fase:** Uma prova discursiva com 6 problemas e duração de 4 horas e 30 minutos, aplicada no mesmo dia e horário da Segunda Fase dos níveis 1, 2 e 3.

Dentre os premiados desta competição, são selecionados aqueles que formam as equipes brasileiras na Olimpíada do Cone Sul (4 estudantes, com até 16 anos); na Olimpíada Internacional de Matemática (6 estudantes do ensino médio); na Olimpíada Iberoamericana (4 estudantes, com até 18 anos) e na competição Internacional de Matemática (universitários). As premiações são feitas através de medalhas de ouro, prata e bronze, além de certificados de menção honrosa.

### **2.3.3 – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)**

Em 2004, em um projeto idealizado através da parceria entre os Ministérios da Educação e da Ciência e Tecnologia nasce a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas com apoio do IMPA e SBM, responsáveis pela organização, execução e direção desta competição. Embora o projeto fora criado em 2004, só em 2005 ocorreu a primeira edição, contando com a participação de mais de 10 milhões de alunos. Desde 2005, anualmente acontece uma edição, sendo a de 2010 a sexta. O número de participantes cresce todo ano, chegando, em 2009, a mais de 19 milhões.

O ano de 2004 foi dedicado especialmente à qualidade da educação, e por isso, escolhido para incentivar crianças e jovens a se interessar pela matemática e descobrir novos talentos para a ciência e tecnologia, objetivos estes, ligados à criação desta competição. Mesmo já ocorrendo a Olimpíada Brasileira de Matemática há alguns anos, o governo federal, devido às experiências bem-sucedidas, decidiu ampliar a participação de estudantes oriundos de escolas públicas, nas competições matemáticas.

Sua criação foi inspirada no projeto NUMERATIZAR, do estado do Ceará. Um projeto que, sob uma política pública de inclusão social, tinha como objetivo a melhoria do ensino das escolas públicas cearenses, a descoberta de novos talentos e o incentivo do estudo da matemática. Este plano teve sua primeira edição em 2003, sob a supervisão da Universidade Federal do Ceará. O formato foi semelhante ao de uma olimpíada, na qual participaram cerca de 110.000 alunos do 6º ao 8º ano do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio de escolas públicas do estado. Segundo um dos objetivos do projeto, após identificar os novos talentos (1ª Fase do Projeto), faz-se necessário motivá-los a avançar nos estudos em Matemática (2ª Fase do Projeto) (MACIEL, 2009).

Bem como os objetivos do projeto NUMERATIZAR, os objetivos da OBMEP visam melhorar a qualidade do ensino, um respectivo aumento do acesso de todas as classes sociais, a um ensino de matemática de qualidade e, além disso, descobrir jovens que possam contribuir futuramente para a qualificação desta área.

O público alvo da OBMEP são alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio das escolas públicas municipais, estaduais e federais. Tais alunos são distribuídos através de três níveis: Nível 1 (alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental), Nível 2 (alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e Nível 3 (alunos da 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio).

As provas de todos os níveis são constituídas de duas fases. Na Primeira Fase disputam todos os alunos inscritos em escolas públicas que participam da OBMEP. Como em grande parte das competições, classificam-se para a segunda fase aqueles que obtiverem destaque na primeira. A correção e a seleção de tais alunos são a cargo da escola que ele frequenta, sendo que, ao total, 5% dos inscritos se classificam para prosseguir na competição em cada nível. Caso ocorra empate durante a seleção, a escola é quem decide um critério para o desempate, sempre esclarecendo previamente quais serão utilizados.

A primeira prova é composta por 20 questões objetivas com 5 alternativas (a, b, c, d, e) em cada e o aluno não precisa apresentar os cálculos de cada questão. Os conteúdos englobados em cada prova seguem os sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). O local de realização da prova é na própria escola de origem. No entanto, as provas da Segunda Fase são aplicadas em centros de aplicação indicados pela coordenação da OBMEP e cuja responsabilidade da aplicação é de fiscais/aplicadores também designados pela mesma. Diferentemente da primeira fase, as provas são compostas de seis questões não mais objetivas, mas sim dissertativas e os alunos devem explicitar os cálculos e/ou raciocínios por ele utilizados. Nesta fase a correção fica a cargo de uma comissão regional e, após ser traçada uma nota corte, serão encaminhadas para uma correção nacional unificada, na qual são estabelecidos os premiados.

A premiação da OBMEP é feita por meio de medalhas de ouro, prata e bronze, além de certificados de menção honrosa e Bolsas de Iniciação Científica Júnior do CNPq. Não somente os alunos são premiados, mas também os professores que obtiverem destaque recebem cursos de aperfeiçoamento, as escolas recebem prêmios diversos, entre eles, livros, materiais esportivos e recursos audiovisuais, e os municípios recebem troféus, quadras de esportes e certificados de honra ao mérito.

Ao examinar a história das principais Olimpíadas de Matemática do Mundo, deparamo-nos com a OBMEP, a maior<sup>5</sup> Olimpíada de Matemática do mundo em termos de participação. Diante da sua grande influência na educação matemática brasileira atual nos perguntamos como obter sucesso nessa competição em que poucos se destacam. Será que existe um modo de resolver problemas e obter sucesso nessa prova?

---

<sup>5</sup> <http://www.obmep.org.br/apresentacao.html> Acesso on-line dia 25/10/2010.

Ao falarmos em Olimpíadas de Matemática, remetemo-nos conseqüentemente a falar em resolução dos problemas que a compõe. Para isso, segundo George Polya, temos algumas etapas a serem seguidas. Etapas estas que podem conduzir a uma resolução correta. Para muitos especialistas em educação, um currículo que enfatize a resolução de problemas pode facilitar e dar sentido à aprendizagem da matemática. Por isso, conforme a teoria de Polya, faremos, a seguir, uma análise da possível inserção de problemas no ensino básico, abordando quais são os passos para resolvê-los.

### 3 – OS MEDALHISTAS OLÍMPICOS E SUAS HABILIDADES

Dentre os objetivos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), destaca-se a busca pela melhoria do ensino público, a descoberta de novos talentos, e o incentivo pelo estudo da matemática. Mesmo já ocorrendo a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e diante do seu sucesso, houve o intuito de ampliar a participação de alunos de escolas públicas nesse tipo de competição. Com isso, nos remetemos a perguntar por que deve haver uma olimpíada específica para estudantes da rede pública? Será que há divergência no aprendizado e/ou capacidade de aprendizagem entre alunos pertencentes às classes mais baixas e mais altas?

As questões que compõem as provas da OBMEP não requerem que o aluno tenha grande conhecimento matemático e/ou decore milhares de fórmulas, embora muitos pensem que a matemática se resume a isso. Na verdade, as provas exigem do aluno um ótimo raciocínio e interpretação do problema. São questões que fogem de simples aplicações de fórmulas, ou algoritmos pré-estabelecidos para resolver. Por isso, o modelo de ensino utilizado por muitas escolas foge do padrão cobrado pela OBMEP, tendo como consequência a não obtenção de bons resultados nesta competição.

Dentre todos os objetivos da OBMEP, podemos destacar o de descobrir novos talentos para a matemática, ou seja, sujeitos com altas habilidades matemáticas. Essa busca por talentos, não é feita somente nos dias de hoje. Segundo MIGUEL (2006), a busca por pessoas que possuíam talento em matemática (ou em outras áreas das ciências exatas) vem desde o século XVIII, época em que se fazia necessária uma tecnologia avançada para a criação de armamento bélico para as guerras que aconteciam constantemente. No apogeu das guerras nucleares, obteria sucesso o país que tivesse grande tecnologia para ataque, e por isso era indispensável ter bons físicos, químicos, engenheiros e matemáticos como colaboradores. Assim, se detectado que o jovem possuía altas habilidades nessas áreas, era investido nele desde cedo para que futuramente pudesse contribuir para o avanço do país tanto em momentos de guerras, como para seu avanço científico-tecnológico.

Com objetivo diferente dos citados acima, a OBMEP busca identificar talentos para investir no crescimento da própria matemática, enquanto campo científico. São estudantes que podem se aperfeiçoar e possivelmente contribuir para o avanço desta



área futuramente. Esses perfis procurados e que se destacam nesta competição, geralmente apresentam ótimo rendimento na matemática e conseqüentemente são destaques perante seus colegas de turma, mas não acontece isso com outras disciplinas. São alunos com altas habilidades em resolver problemas e com um ótimo raciocínio lógico-matemático, sendo muitas vezes rotulados como “superdotados”.

Mas o que esses jovens têm de diferente dos demais? Que atenção diferenciada eles devem ter? Será que devemos “normalizá-los” de acordo com a média de aprendizado dos demais colegas, bem como tentamos com aqueles que apresentam dificuldades de aprendizado? Sendo assim, gostaria de discutir o conceito de altas habilidades com aporte teórico do projeto de tese de doutorado de Jelinek (2010), entender que atenção estes alunos precisam e conhecer métodos de identificação dos mesmos. Em especial, tratarei aqui dos alunos que apresentam altas habilidades em matemática. Além disso, como forma de reconhecer estes estudantes, comentarei sobre a prova da OBMEP, que visa selecionar os talentos em matemática e dá a eles uma forma de atendimento diferenciada, o Programa de Iniciação Científica (PIC).

### **3.1 - Altas Habilidades<sup>6</sup>**

Dentre os problemas encontrados por um professor em sala de aula, o que mais se sobressai é a dificuldade de aprendizado de muitos alunos. E a partir desta dificuldade, muitas vezes, considera-se como conseqüência uma relação intrínseca entre ela e alunos de classes menos favorecidas. Tem-se então, a conjectura de que estudantes de classes sociais baixas não são capazes de aprender, principalmente a matemática e caso ocorra o contrário, este aluno é tido como o diferente, exceção. No entanto, é evidente que existem alunos pertencentes a classes econômicas mais altas, que apresentam da mesma forma, dificuldades de aprendizagem, e possivelmente um fracasso em matemática. Jelinek (2010), ao discutir os estudos de Bernard Charlot, considera que não é possível determinar se a culpa de um fracasso escolar se dá em função da classe social em que o aluno se encontra. No outro extremo, se encontram aqueles alunos que apresentam altas habilidades, aqueles que terminam antes os exercícios, os que entendem mais facilmente o conteúdo, etc. Diante destes dois casos, é

---

<sup>6</sup> Os dados ou informações encontradas nesta seção são retirados do projeto de tese de doutorado de Karin Jelinek, 2010. VIDE REFERÊNCIAS.

necessário que o professor crie estratégias para dar conta da demanda criada por esses grupos: ter um planejamento específico para cada um deles e ainda “normalizar” para o restante da classe, que não se encaixa em nenhum deles.

Muitos professores consideram os alunos que apresentam insucesso escolar, como problemáticos. No entanto, aqueles portadores de altas habilidades também são considerados por diversos autores, como Alencar, Fleith, Mate, Melo (*apud* JELINEK, 2010) como “problemas” para o andamento de uma aula. Eles não conseguem se adaptar ao padrão elaborado pela escola, em trabalhar com os alunos que pertencem à classe de aprendizagem “média”, os ditos normais. Tais problemas são consequência principalmente da falta de comportamento, hiperatividade ou *déficit* de atenção.

Até certo tempo atrás, havia uma classificação dos alunos em três categorias: os retardados, os superdotados e os normais. Porém, para Gardner, existem diversas habilidades existentes e cada aluno pode ser detentor de, pelo menos, alguma delas (*ibidem*). Até o século XX, haviam apenas trechos em leis e documentos citando políticas educacionais voltadas aos alunos com altas habilidades. Todavia, só em 2003, foi criado o *Conselho Brasileiro de Altas Habilidades/Superdotação (CBAH/S)* visando dar um atendimento e suporte diferenciado e especializado a esses alunos com tal tipo de necessidade educacional.

O termo *superdotação* é diferenciado do termo *talento* por autores norte-americanos e europeus, valendo-se de que quem é superdotado possui habilidades nas áreas de linguística e lógico-matemática e, entretanto, pessoas com talento, são aquelas detentoras de habilidades relacionadas a outras áreas, entre elas, a musical e artística. Dentre as características de um aluno “superdotado” em matemática se destacam:

[...] a habilidade numérica, alta memória, a abstração, o pensamento divergente, o raciocínio lógico avançado, a rapidez do pensamento e o desenvolvimento elevado da capacidade mental como indícios desta alta habilidade. (MELO, ALENCAR E MOREIRA, *apud* JELINEK, 2010, p 10)

É necessário esclarecer que, conforme Pérez (*apud* JELINEK, 2010), crianças que apresentam algum tipo de altas habilidades não são necessariamente gênios como, por exemplo, Newton, Darwin, Einstein e outros, reconhecidos pelo conhecimento humano, científico e artístico, os quais deram grandes contribuições à humanidade. Além de não serem gênios, não são necessariamente precoces, pois crianças precoces apresentam alguma habilidade antes do tempo normal, mas que podem acabar se

“igualando” aos demais com o passar do tempo. Ambas podem ocorrer ao mesmo tempo em uma criança, porém uma independe da outra.

Diferentemente do que muitos pensam, uma pessoa portadora de altas habilidades, não necessariamente deve apresentar bons rendimentos escolares. Criou-se esse mito tendo em vista que a ideia de superdotado segue concomitantemente com a concepção de bom aluno, conforme a avaliação escolar. Da mesma forma em que pensamos que os superdotados são bons alunos, criou-se a ideia de que altas habilidades e alunos de baixa renda não é uma combinação possível. Ao contrário, nas investigações de Jelinek (2010), a autora afirma que grande parte dos “superdotados” provém de classes sociais menos favorecidas, porém não o são identificados, pois a escola busca tais pessoas levando em conta seu desempenho acadêmico.

Para identificar tais destaques, portadores de altas habilidades, deve-se ir além do famoso teste Quociente de Inteligência, o teste QI<sup>7</sup>. Na verdade, usam-se testes determinísticos em diferentes áreas na infância. Jelinek (2010) ao discutir estudos de Winner, destaca que há uma divisão em tais áreas, duas relacionadas à produção científica - linguagem e matemática - e duas às artísticas - artes visuais e música.

Segundo Renzulli (*apud* JELINEK, 2010) a identificação de tais crianças deve ser feita através de uma combinação de três quesitos: *Habilidade acima da média*, *Envolvimento com a tarefa* e *Criatividade*. Para qualificar esta busca, foi criado por ele, o Modelo dos Três Anéis, conforme ilustra a figura abaixo:



Figura 1 – Modelo dos Três Anéis de Renzulli

---

<sup>7</sup> Medida obtida por meio de testes desenvolvidos para avaliar as capacidades cognitivas de um sujeito, em comparação ao seu grupo etário.

As leis referentes às altas habilidades sempre tomam como base de comparação os sujeitos ditos “normais”, aqueles que não apresentam nem baixo ou nem alto rendimento. A escola tenta padronizar e homogeneizar seu atendimento de modo a contemplar a maioria. Seu foco principal é voltado ao atendimento do grupo pertencente aos alunos medianos, e se preocupa principalmente em “resgatar” aqueles que estão “abaixo da média”, ao invés de incentivar àqueles que estão acima dela (GUENTHER, *apud* JELINEK, 2010).

Da mesma forma em que estudantes com *déficit* de aprendizagem necessitam de uma atenção especial, os educandos portadores de altas habilidades requerem algo diferenciado voltado a eles. Eles são capazes de aprender sozinhos, criar sozinhos. Tudo o que for proposto e planejado focando-se a “média” dos alunos, possivelmente não lhes será instigante ou a atividade seja considerada fácil, fazendo com que a conclua antes dos demais, podendo assim atrapalhar o andamento do restante do grupo ou inutilizar o tempo restante da aula.

A presença de “superdotados” na escola é percebida através da diferença de aprendizagem mostrada por eles bem como o sucesso em determinadas disciplinas e avaliações específicas, ao ser superior àquela do padrão projetado pela escola. Aqueles que possuem “superdotação” escolar em áreas intelectuais obtêm destaque positivo perante seus colegas, diferentemente daqueles alunos que apresentam altas habilidades nas áreas que envolvem criatividade e expressão, detentores de uma visão negativa perante a média de seu grupo.

As diretrizes do MEC/SEESP<sup>8</sup> sugerem alguns métodos para que se possam identificar tais habilidades em ambientes escolares. Além disso, faz-se necessária a verificação de pelo menos dois dos seguintes métodos, porém não indica possíveis testes, nem 100% de eficácia científica:

- Avaliação realizada por professores, especialistas e supervisores;
- Percepção de resultados escolares superiores aos demais;
- Auto-avaliação;
- Aplicação de testes individuais, coletivos ou combinados;
- Demonstração de habilidades superiores em determinadas áreas.

Jelinek (2010) cita Vieira ao considerar que são dados quatro aspectos essenciais para a descoberta e avaliação de tais alunos. Primeiramente, deve-se levar em

---

<sup>8</sup> Secretaria de Educação Especial de São Paulo

consideração o ambiente e a predisposição em que os estudantes se encontram no momento de realizar a atividade. Em segundo lugar, refere-se à consonância entre aspectos afetivos e emocionais de quem aplica a atividade para o aluno a ser observado, tendo em vista que “fatores emocionais e afetivos podem influenciar nos modos de ver, ouvir e analisar os dados levantados” (JELINEK, 2010, p 25). Por terceiro, deve-se planejar atividades que se relacionem com o ambiente em que o aluno está inserido no momento e que sejam naturais com suas tarefas ali realizadas. E por último, sugere um acompanhamento continuado através de alguns anos, para a verificação das altas habilidades em diferentes contextos da vida do aluno, em situações escolares e extra-escolares.

### **3.2 - A OBMEP como forma de descoberta de talentos**

Em qualquer ambiente escolar podemos identificar alunos com alguma habilidade que se destaque. Não necessariamente esta deve estar ligada aos conteúdos escolares, porém se não o for, muitas vezes não tem o devido reconhecimento por parte dos professores. Ao pensar em um caso real, vivenciado durante minha prática de estágio docente, observei a diferença no reconhecimento, por parte dos professores, de alunos que demonstravam bom rendimento em suas disciplinas, rotuladas como intelectuais, perante àqueles que produziam pouco em suas matérias e que, no entanto, demonstravam alta habilidade com esportes físicos, por exemplo. Havia uma inferioridade presente ao aluno que não era bom em matemática, mas que jogava futebol surpreendentemente. Uma frase que chamou minha atenção, durante um conselho de classe, foi a seguinte: “*Esse não servirá para nada, apenas para jogar futebol*”. Este dito representa a desvalorização de capacidades que não estejam relacionadas às disciplinas tradicionais do currículo, as habilidades físicas e artísticas, que pelos europeus não são caracterizadas como altas habilidades e sim, chamadas de talentos. Geralmente os alunos para serem considerados como “superdotados”, as áreas em que suas habilidades se destacam devem pertencer à linguística ou à lógico-matemática.

Se observarmos aulas de educação física, os alunos que têm destaque ou alta habilidade com algum esporte físico, são indicados ou encaminhados para escolas que preparam para competições e/ou aperfeiçoam essa característica. No entanto, se pensarmos na matemática, como fazer essa seleção dos alunos? Qual o perfil do aluno

procurado? Que tipo de programa ou escola ele deve frequentar a fim de aprimorar suas habilidades e aprender cada vez mais?

Levando-se em conta os critérios para a seleção dos alunos superdotados, sugeridos pelo MEC/SEESP, a OBMEP se torna um instrumento aliado à descoberta de estudantes que demonstram habilidades especiais em relação à matemática. As provas da segunda fase<sup>9</sup> não enfatizam a aplicação de fórmulas ou apenas exigem que os candidatos decorem conceitos, mas sim demandam um raciocínio adequado do aluno para então utilizar ferramentas matemáticas na resolução. Todo o pensamento do aluno é avaliado na correção, não apenas a resposta, por isso faz-se necessário explicitar todo o tipo de raciocínio tido na resolução, a fim de que se possam avaliar coerentemente cada uma das questões.

Da mesma forma em que o aluno que apresenta baixo rendimento em sala de aula deve ter um acompanhamento diferenciado, aquele que apresenta “superdotação” necessita também de uma atenção específica. Os portadores de altas habilidades se sobressaem em relação ao tempo para a aprendizagem se comparado com seus colegas de turma e por isso a aula típica, voltada aos estudantes ditos “normais”, é desinteressante para ele. De acordo com alguns modelos pedagógicos, exige-se do professor, um planejamento específico para que o tempo destes não seja desperdiçado em sala de aula. Este aluno tem capacidade de aprender coisas novas em menos tempo e conseqüentemente seguir adiante com seus estudos, não se detendo aos conteúdos estabelecidos através de um currículo. Ele pode avançar mais rapidamente, de acordo com seu ritmo, nos conteúdos estabelecidos para depois estender seu saber a coisas novas, normalmente não vistas pelos alunos “normais” em tal faixa etária. Com isso, se desaproveita o conhecimento nele presente e a oportunidade de avançar de modo não superficial em estudos e investir na carreira profissional e em pesquisas na área.

Uma alternativa para se trabalhar com alunos portadores de altas habilidades na escola é disponibilizar atividades extraclasse, para que se fortaleça, avance ou encaminhe-o para novos conteúdos, não vistos ainda por ele. Com essa proposta, a OBMEP tenta dar uma atenção especial às características de tais alunos e investir em seus “talentos”. Desta forma, encontrou-se uma maneira de investir nestes jovens talentos e fazer com que estes estudantes sigam aprendendo conforme seu ritmo: um

---

<sup>9</sup> Nesta fase competem os melhores alunos de cada escola participante da Olimpíada, segundo a classificação obtida na primeira fase desta competição

tipo de Iniciação Científica, um esquema extraclasse em que a “média” agora tenha como base suas altas habilidades.

### **3.3 - Programa de Iniciação Científica (PIC): *Uma possibilidade extraclasse para alunos portadores de habilidades matemáticas***<sup>10</sup>

Com o intuito de disponibilizar uma forma dos “superdotados” em matemática aprofundarem o conhecimento matemático e estimular a autonomia no estudo e nos processos de aprendizagem, foi criado o PIC (Programa de Iniciação Científica) da OBMEP. É um projeto que visa dar uma atenção especial a quem demonstra capacidade de ter um aprendizado em matemática mais avançado que os demais ou demonstra habilidades nesta matéria, acima da “média”. É uma maneira diferenciada, fora do âmbito escolar, em que tais alunos têm a possibilidade de interagir com outras pessoas que possuem capacidades semelhantes e ali desenvolver mais seus estudos na matemática, seguindo seu próprio ritmo de aprendizagem.

O PIC é uma modalidade de ensino baseada na concepção de que o aluno pode buscar e construir seu conhecimento, orientado por um professor. Os alunos participantes são selecionados mediante o resultado de sua premiação na OBMEP: medalhistas de ouro, prata e bronze. Caso não haja interesse na participação por parte destes, serão substituídos por outros que obtiveram menção honrosa. Alguns de seus encontros são realizados à distância, através do fórum da OBMEP, que permite a discussão virtual do conteúdo matemático escolhido para a iniciação científica, além dos presenciais. Cada região é dividida em pólos, possuindo responsáveis específicos para cada um. Como incentivo ao estudo, os participantes do PIC recebem uma bolsa-auxílio mensal, além de ter suas despesas pagas para participar dos encontros presenciais, que tem lugar fixo para acontecer, determinado pelo pólo de atuação.

Dentre todos os objetivos do programa PIC – OBMEP há alguns que se destacam e fundamentam melhor os ideais do mesmo. Diante da facilidade em aprender e estudar matemática, o PIC busca despertar o gosto pelo estudo desta e consequentemente objetiva motivar os alunos a optar profissionalmente pelas carreiras científicas e tecnológicas. Com esse tipo de programa, realizado em parceria com algumas universidades, busca-se uma aproximação entre ela e a escola, a fim de

---

<sup>10</sup> Dados obtidos através da pesquisa nos sítios relacionados ao Programa. VIDE REFERÊNCIAS.

estreitar relações entre ambas. Além dos objetivos voltados aos alunos, o professor da escola tem lugar especial: é incentivada neles também, a busca pelo aprimoramento matemático.

Com isso, o Programa de Iniciação Científica PIC – OBMEP torna-se um projeto inerente ao sistema de ensino atual, que dá assistência aos alunos que necessitam de uma atenção especial: aqueles com altas habilidades. Da mesma forma em que estudantes que apresentam baixo rendimento escolar precisam de um olhar peculiar, aos portadores de altas habilidades deve ser dado uma atenção diferenciada, pois eles possuem características diferentes. Na escola, devem-se favorecer as qualidades específicas de cada indivíduo, respeitando suas características individuais e incentivando-o a aperfeiçoá-las ainda mais. O ato de nivelar o ensino conforme uma média faz com que se percam os talentos particulares e se deixe de investir neles. Da mesma forma em que os aspectos culturais levados pelo aluno devem ser preservados no ambiente escolar, seus talentos e habilidades precisam ser valorizados e incentivados cada vez mais, tendo em vista que um dos objetivos principais da educação é promover um ensino de qualidade, sempre respeitando as particularidades de cada educando.



## **4 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

### **4.1 – Notas históricas e sistema de ensino atual**

“Dar sentido ao que se aprende”. Esta frase, aparentemente, é muito comum na ideologia da grande parte das escolas. No entanto, muitas vezes, a educação matemática é centrada na simples memorização de algoritmos, como passo a passos ou regras/”macetes” e resoluções de exercícios repetitivos. O homem, desde a antiguidade adota o método de repetição e acúmulo de conhecimento como uma forma de aprender. Muitas vezes ouvimos o dito: “Quanto mais se faz ou repete, mais se aprende”. No entanto, atualmente pergunta-se sobre a validade de tal procedimento e até que ponto ele favorece ou não um aprendizado de qualidade.

O papel principal da escola consiste em formar cidadãos para atuar ativamente em sociedade. Ela deve preparar o aluno para interpretar e resolver problemas que poderão aparecer em seu cotidiano. Com o método de ensino, dado através da repetição, o aluno mecaniza a obtenção de resultados, o que não contribui à construção do conhecimento.

É bastante comum o aluno desistir de solucionar um problema matemático, afirmando não ter aprendido como resolvê-lo, quando ele não consegue reconhecer o algoritmo ou o processo de solução apropriado para aquele problema. “Falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores” (D’AMBROSIO, B., 1989, p. 1). Mas por que o ensino consiste neste método, que por verificação não garante efetivamente a aprendizagem?

O método de repetição é utilizado desde os tempos mais antigos. Civilizações, como as egípcias e sumérias, deixaram registros históricos sobre sua educação. Por inferência, com base em artefatos encontrados, conclui-se que a “repetição era o método de aprendizagem praticado” (SILVA, E. 2008, p.95) e que o objetivo da aprendizagem era memorizar os textos por meio de cópia do material lido, constatando-se, portanto, que a aprendizagem por repetição e memorização é uma tradição muitíssimo antiga. Com isso, “mantinha-se, portanto, a prática da memorização e repetição como geradora das aprendizagens” (SILVA, E. 2008. p. 96).

Tradicionalmente, a prática pedagógica acentua a transmissão de conhecimentos historicamente acumulados. Privilegia-se o modelo pedagógico centrado no professor e

a preocupação concentra-se na sistematização dos conhecimentos de forma já acabada. As tarefas de aprendizagem, em geral, são padronizadas, no intuito de se conseguir uma fixação de conhecimentos, conteúdos e informações, não importando, geralmente, de que forma esses conteúdos serão aproveitados no futuro.

Sabe-se que a típica aula de matemática nos níveis de ensino básico e superior ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para a lousa aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia o texto do docente para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que, teoricamente, é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor.

Até os anos 50, os estudantes limitavam-se a memorizar fatos e procedimentos, todavia, não compreendiam os conceitos ou as técnicas de aplicação (SHOENFELD, s.d.). No entanto, o currículo que contemplava esse método de ensino começou a mudar, com ponto de partida nos Estados Unidos e passando a adotar o nome de *matemática moderna*. Neste novo currículo, uma grande ênfase era dada à resolução de problemas. O objetivo, com isso, não era apenas solucionar, mas fazer aluno aprender a pensar matematicamente, isto é, ver o mundo sob o ponto de vista matemático e ter ferramentas eficazes para “matematizar” com sucesso.

Em 1980, no National Council of Teachers of Mathematics dos Estados Unidos, foi decretado que resolução de problemas deveria ser o foco principal da educação matemática. A partir disso, em muitos outros países começaram as mudanças curriculares abordando assim, a resolução de problemas como tema central no método educacional da matemática. No entanto, no início, a resolução de problemas resumia-se apenas em exercícios de truques ou em métodos rotineiros de resolução para problemas de histórias elementares (SHOENFELD, s.d.).

#### **4.2 – Uma possível mudança no currículo da matemática: *Resolução de Problemas***

Para Maria da Silva (2008), não é exagero afirmar que o método de ensino dado através da resolução de problemas é um dos mais importantes para uma aprendizagem matemática de qualidade. O modo em que se pode inserir no ou substituir o método

atual pode aparecer de vários modos: como ferramenta para introdução de determinado conteúdo, desenvolvimento ou até mesmo para verificar em que o que fora aprendido em teoria possa ser aplicado na prática.

Para obtenção de êxito na resolução de problemas é conveniente ressaltar que esse método não deve ser entendido como uma simples fixação de conhecimentos através da mecanização de algoritmos apresentados em aula. Este método, na verdade, requer que o aluno formule questões por meio de situações motivadoras e desafiantes a ele, mas que não estejam além de suas possibilidades (SILVA, M. 2008). Estes problemas devem estar relacionados, em grande parte, com o cotidiano do aluno, podendo haver assim, uma representação deste, mediante situações reais para, após ser solucionado, ser sistematizando através das operações.

Segundo as idéias de Polya, a forma de ensinar deve ser pensada pelo professor, de modo a contemplar as necessidades da comunidade, ou seja, o que deverá ser contemplado durante o período de ensino-aprendizagem, necessita ser pensado de forma a contribuir para o cotidiano do aluno. Por isso, não podemos utilizar a mesma forma de ensino em dois lugares diferentes, visto que, as necessidades de aprendizagem variam conforme o ambiente (BAUR, 2009).

A seguir, seguem os modos pelos quais alguns autores classificam os problemas, tais como Polya (1978), Huate & Bravo (apud BAUR, 2009), além de Alsina, Fortuny & Pérez (ibid.) e Echeverría (apud SILVA, 2008):

O uso da palavra problema pode ter concepção diferente da real pelos estudantes. Para muitos, a palavra problema pode significar uma simples atividade para ser solucionada. No entanto, faz-se necessário distinguir a palavra exercício da palavra problema. Segundo Echeverría (1998) os exercícios servem como uma aplicação após a aprendizagem, ou seja, são utilizados para metodificar o que fora aprendido. Além disso, estes são subdivididos em dois grupos: aqueles que são apenas de aplicação das fórmulas ou algoritmos aprendidos em aulas, dados principalmente através da repetição contínua, e aqueles que envolvem interpretações verbais para serem aplicadas as técnicas. Os problemas, entretanto, utilizam as técnicas e algoritmos consolidados através da resolução dos exercícios.

Na concepção de Huate & Bravo, os problemas podem ser listados em três categorias: 1- referente àqueles que necessitam apenas de uma aplicação de métodos ou algoritmos, que por eles são denominados de rotineiros. 2- problemas cuja solução demanda da manipulação e aplicação de algoritmos. 3 – aqueles tais que nenhum

algoritmo ou método rotineiro pode ser utilizado para a obtenção da solução. Para eles, ao resolver um problema, devemos identificá-lo quanto às categorias anteriormente apresentadas para identificar qual a estratégia de que devemos utilizar.

No entanto, mediante Alsina, Fortuny e Pérez, os problemas são classificados em seis variedades, nas quais destaca que existem diferenças entre exercício e problema. Diante disso, dentre as seis categorias, três referem-se a exercícios e três mencionam problemas:

- *Exercícios de estruturação*: cujo objetivo é preparar o estudante para aprender determinado conceito.
- *Exercícios de reconhecimento*: objetiva o reconhecimento dos aspectos apresentados pelo professor.
- *Exercícios algorítmicos*: cuja resolução segue apenas uma aplicação de fórmulas.
- *Problemas de aplicação*: envolvem interpretação e em seguida uma simples aplicação de fórmula.
- *Problemas de enunciado aberto*: não possui resolução única.
- *Problemas tema*: Problemas de enunciado aberto que, no entanto permitem que sejam feitas generalizações.

Existem dois tipos de problema para Polya: aqueles que são ou não de rotina. Por rotina entende-se, aqueles que são comumente trabalhados em sala de aula. Para se resolver um problema que não seja de rotina, é necessário certo grau de criação e originalidade do aluno além de que, esse pode *contribuir para o desenvolvimento intelectual e cognitivo do aluno* (POLYA, 1985, p. 14). Um problema que não seja rotineiro pode requerer, de quem irá resolvê-lo, uma dedicação intensa, entretanto ele não o fará se não possuir interesse para isso. Em outras palavras, o problema deve fazer sentido para o aluno.

Inicialmente podemos concluir que o método utilizado pelo professor para conduzir uma aula, influencia na aprendizagem do aluno. Cada professor elabora sua aula, de acordo com sua concepção, a qual afeta diretamente no modo pelo qual a aprendizagem se concretiza. A mudança no uso da metodologia da repetição para uma didática que favoreça um aprendizado que faça algum sentido para o aluno depende, quase que exclusivamente, do professor. É ele quem conduzirá o discente para que seja

o formador de seu conhecimento ou até mesmo saiba interpretar a matemática e a problemática aplicada em que ela possa aparecer.

Para Polya, não se aprende matemática sem que haja uma participação ativa do aluno. Em seu ponto de vista o aluno deve atuar na matemática a fim de construir seu próprio conhecimento, ou seja, a fim de que formule e conjecture hipóteses implicando no seu próprio método de entender as coisas. Com isso o papel do professor se estabelece como um co-orientador no trabalho de obtenção do conhecimento a ser lapidado. O aluno passa então a ter uma aprendizagem construída de forma independente, no qual o professor intermedeia durante a edificação do conhecimento a fim de instruir e guiar o aluno para que alcance o maior objetivo.

Uma aprendizagem relacionada com o cotidiano, no qual o discente faz parte, colabora para um entendimento facilitado e, além disso, incita-o a aprender cada vez mais, com objetivo de buscar soluções para seus problemas que aparecem na sua rotina. O aluno deve estar familiarizado com as situações com que irá trabalhar em sala de aula. Por exemplo, não adianta trabalhar com problemas de produção pecuária sem que o aluno em questão tenha conhecimento prévio sobre o assunto ou motivo pelo seu estudo.

Ao trabalhar em situações abstratas, o aluno não associa em que determinado conteúdo pode ser utilizado em sua vida. Sem nenhuma possível aplicação, a motivação pelo estudo de determinada matéria decresce ou é nula, provocando grande desinteresse pelo estudo. A matemática é uma das disciplinas mais temidas pelos estudantes e conseqüentemente uma das quais tem maior rejeição. O modo como a matemática é ensinada/trabalhada, muitas vezes, aumenta este desgosto. A aula repetitiva e monótona torna-se desgastante e, o pior de tudo, desmotiva o aluno para aprender matemática. No entanto, ao trabalhar matemática por meio de situações concretas, presentes no dia-a-dia do aluno, fica mais prazeroso e interessante a aprendizagem, conforme relata Baur (2009):

Situações matemáticas concretas são obviamente mais fáceis de assimilar do que situações abstratas, uma vez que é mais natural entendermos o que conhecemos e o que faz parte do nosso dia-a-dia, do que compreendermos algo que não faz parte de nossa realidade (BAUR - 2009. p. 14)

O professor que deseja desenvolver nos seus alunos a capacidade de solucionar problemas deve produzir nele a vontade de resolvê-los e, no entanto, também dar-lhes a

oportunidade de reproduzir na vida real. A fim de que a resolução de problemas não se torne uma simples resolução de exercícios, é necessário que o professor tenha dois objetivos: orientar os seus alunos e desenvolver neles a capacidade de resolução de problemas que poderão aparecer depois.

Para resolver um problema, o aluno deve reproduzir o que fazem as pessoas quando resolvem problemas. Polya compara o método de resolução de exercícios com a natação, que aprendemos ao imitarmos alguém que já sabe nadar e também através da prática, isto é, aprendemos a resolver problemas resolvendo-os. Assim faz-se necessário que o próprio professor conheça técnicas e métodos de resolução de problemas para que os seus alunos os “copie”.

A resolução de problemas pode servir como ferramenta para complementar o que fora aprendido na teoria em sala de aula. Além disso, pode estreitar a relação entre o mundo, aparentemente fechado, da escola com a vida real. Ao aplicar o que fora trabalhado em sala, o aluno vê a utilidade do que fora feito, através de resoluções de problemas, passando a ter uma aprendizagem que faça realmente sentido. Aproximar a vida real da atividade escolar constitui-se em uma ação, segundo Perales (apud SILVA, 2008), relevante para identificar os erros e as dificuldades que mais afetam na compreensão dos conteúdos.

#### **4.3 – Método de resolver problemas, de acordo com POLYA**

Como visto anteriormente, para um problema ser solucionado, ele deve despertar no aluno vontade por esta atividade. Este problema deve ter alguma relação com o cotidiano, representar alguma vantagem para obter a solução e que tenha algum propósito para ele. Antes de resolver um problema, o aluno deve interessar-se por solucioná-lo (BAUR, 2009). De acordo com Silva, os problemas devem apresentar-se de forma desafiadora e, além disso, não podem estar afora de suas capacidades de resolução.

O papel do aluno nesta etapa é extremamente importante, digamos, primordial. É ele que seguirá de forma independente todas as etapas da resolução do problema. Para começar, deve-se ter uma idéia que conduzirá a obtenção da solução. Essa idéia deve ser advinda do aluno e não do professor, cujo papel assemelha-se a de um orientador, que guia o seu aluno para trilhar os caminhos que lhe dirijam para o destino certo. Essa

“condução” pode ser feita mediante perguntas que levem o aluno a chegar à resolução correta (BAUR, 2009). Os passos para a obtenção da solução são essenciais para o aluno adquirir “independência” para conseguir resolver por si só, problemas futuros que podem aparecer na sua vida, visto que é um dos principais objetivos da aprendizagem via resolução de problemas.

Os questionamentos levantados pelo professor dão a oportunidade ao aluno entender a metodologia da resolução de problemas e entender as sutilezas implícitas nas perguntas. Essa percepção remete a uma aprendizagem implícita e observadora, fazendo com ele entenda, de forma subjetiva, os métodos que são utilizados e desenvolva por si próprio o pensamento. Conforme Polya:

Com o tempo o aluno poderá compreender o método e usar, por ele mesmo, estas perguntas: aprenderá, assim, a dirigir sua atenção aos pontos essenciais, quando se encontrar perante um problema. Através deste modo, terá adquirido o hábito do pensamento metodológico. (POLYA, 1977)

Para Polya, a resolução de problemas deve seguir 4 fases:

#### **4.3.1 – Fase 1: *Compreender o problema***

É nesta etapa em que o aluno deve identificar as incógnitas, qual é o problema, os dados, as condições e etc.

Para resolver o problema, primeiramente é necessário entender o que este problema nos sugere. *É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja* (POLYA, 1945. p. 7). O aluno deve estar interessado em resolvê-lo e, além disso, este deve estar acessível para que o resolva.

Após o enunciado estar claro, o professor questiona o aluno: Qual a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Aqui os alunos consideram as partes principais dos problemas e a partir disso, partir para a fase 2.

### **4.3.2 - Fase 2: Estabelecimento de um plano**

Esta fase envolve o estabelecimento de um plano de ação que permita a solução do problema. Polya indica alguns questionamentos para estabelecer esse plano:

- Você já viu este problema antes? Ou já ouviu outro problema semelhante a este, já solucionado, que poderia lhe ser útil para a resolução deste problema? Procure outros tipos de problemas já conhecidos que envolvam a mesma incógnita.

- Ao encontrar o outro problema semelhante e já resolvido, é preciso verificar se é possível utilizar o resultado do mesmo para a resolução do problema em questão. Se for possível utilizar o mesmo método adotado ou se é possível introduzir algum outro fator auxiliar para tornar possível a sua utilização na resolução do problema proposto.

A ideia a ser seguida pode surgir de um modo inesperado. É a partir dela que o plano será estabelecido visando a solução do exercício. Polya chama-a de “boa ideia” que muitas vezes é difícil de aparecer, pois o aluno pode não ter experiência ou conhecimento previamente adquirido. É neste momento em que o professor deve intervir através questionamentos do tipo: “conhece um problema relacionado?”, almejando ajudar o aluno a ter essa boa ideia.

O caminho que vai desde a compreensão do problema até ao estabelecimento de um plano pode ser longo e tortuoso e o principal fato da resolução de problemas é a concepção da ideia do plano (POLYA, 1945. p. 9)

O professor possui um papel fundamental nesta etapa, pois através de suas perguntas é possível fazer com que o aluno tenha uma idéia para a resolução do problema. Essas intervenções devem ser de forma reservada fazendo com que o aluno tenha a impressão de que está resolvendo o problema por si próprio. “A melhor coisa que o professor pode fazer por seu aluno, é propiciar-lhe discretamente, uma ideia luminosa” (POLYA, 1977, p. 76)

### **4.3.3 – Fase 3: Execução do plano**



O plano feito agora será executado. É aqui que a validade de todos os passos deve ser verificada para chegar assim a uma solução correta.

O plano projetado na fase anterior apenas esquematiza o roteiro que nesta fase será aplicado. Esta é uma das fases mais fáceis para resolver problemas, visto que agora é apenas a aplicação, um trabalho braçal. Conforme Polya:

Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo, mais uma coisa: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é do que mais se precisa (POLYA, 1945, p. 12)

O trabalho do professor nessa fase pode ser muito tranquilo se o aluno conseguir efetuar a construção do plano de forma independente. Por conseguinte, o aluno terá facilidade em aplicar o que fora planejado:

Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante se esqueça do seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio tiver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia (POLYA, 1945, p. 12).

#### **4.3.4 - Fase 4: Reflexão**

É a verificação dos resultados obtidos. Visa detectar possíveis erros e corrigi-los, além de analisar se o procedimento utilizado pode ser empregado em problemas análogos.

Normalmente os alunos, quando solucionam um exercício, deixam-no de lado e nunca voltam a repensá-lo. “Eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução” (POLYA, 1945, p. 13). Portanto, após a resolução do problema, é importante fazer uma revisão (retrospecto) de todos os passos planejados e executados.

Para Polya, fazendo este retrospecto o aluno terá a oportunidade de consolidar o seu conhecimento obtido através da resolução do problema em questão. Além do mais, com essa volta ao que fora feito, o discente poderá detectar possíveis erros ocorridos durante os passos dos planos de execução.

## 5 – A PRÁTICA

### 5.1 – O Público Selecionado

A prática de ensino aqui apresentada foi planejada a pessoas que possuem certo destaque perante os outros na matemática, alunos que têm facilidade com o pensamento e aprendizagem desta disciplina. Em sua totalidade, frequentaram a prática dezenove alunos, divididos em dois grupos específicos, para que se pudessem aplicar as atividades elaboradas de uma forma diferenciada, com algumas exclusividades, a cada um deles:

- *Alunos calouros do curso de matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul:* doze estudantes matriculados na disciplina de Fundamentos de Matemática II, frequentando, no mínimo, o seu segundo semestre nesta Universidade.

Os estudantes pertencentes a este grupo possuem idades bem heterogêneas. São alunos que recém terminaram seus estudos em idade regular e já ingressaram na faculdade, ou concluíram o ensino básico há certo tempo e só iniciaram o superior agora, ou ainda, trancaram seus estudos, retomando-os há pouco tempo para então entrar em uma universidade. Outra característica deste grupo é que mais da metade deles são advindos de escola privada.

- *Participantes do Programa de Iniciação Científica Jr. da OBMEP:* Sete alunos oriundos de escolas públicas, medalhistas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, que participam deste programa extraclasse, desenvolvido pelo comitê organizador da OBMEP.

Os alunos do PIC que participaram desta prática estão matriculados no Ensino Médio Regular, com exceção de um, ainda no Ensino Fundamental. Quatro deles estudam em um mesmo colégio de Porto Alegre e os outros três, em outros colégios da região metropolitana.

### 5.2 – OS OBJETIVOS:

Sabendo da grande influência exercida pelas Olimpíadas Matemáticas na educação atual, perguntamo-nos sobre quais as habilidades que um aluno deve ter para ser bom em matemática e talvez destacar-se nestas competições. Será que existe uma

fórmula que permite uma pessoa conseguir destaque na matemática? Como os medalhistas olímpicos de matemática pensam ou organizam o pensamento? De que forma os alunos reconhecidos pelo seu conhecimento em matemática, resolvem problemas da OBMEP?

Os problemas propostos nas Olimpíadas de Matemática requerem do aluno grande capacidade de abstração, conhecimento matemático e raciocínio lógico. Conforme Polya (2006) existem alguns passos a serem seguidos para que se consiga chegar à solução de um problema. Mas por que tão poucos conseguem ter bons resultados? Será que o ensino que não enfatiza a resolução de problemas, não faz com que os alunos obtenham sucesso nessas competições?

Queremos observar como pessoas reconhecidas pelo seu talento em matemática, medalhistas da competição aqui trabalhada, organizam o pensamento e seguem na resolução de problemas. Verificar se pessoas, mesmo já cursando Ensino Superior em matemática, tem mesma facilidade/capacidade de resolver os problemas. Será que ambos seguem implicitamente os passos sugeridos por Polya (2006)?

### **5.3 - A APLICAÇÃO**

Visando obter respostas para as questões lançadas acima, nossa prática se concretizou com a aplicação das questões da OBMEP para alunos do Programa de Iniciação Científica desta, cuja participação se deve pelas medalhas conquistadas nesta competição. Mas por que simplesmente mandá-los resolver as questões, se eles já as fizeram antes? Eles não somente resolveram problemas, mas especificaram quais as etapas de resolução, o que pensaram para resolver, quais suas dificuldades bem como a organização do pensamento.

Além dos problemas retirados da prova, elaborei questões que vão além das pedidas. Como boa parte dos alunos já havia resolvido tais problemas, criei questões extras e originais para que essa resolução fosse feita na hora. Tais questões tinham como intuito, fazer com que o aluno fosse além do raciocínio exigido na questão e expressasse naquele, um método de resolução específico.

Da mesma forma que aplicamos tais questões com esses alunos do Ensino Básico, fizemos uma atividade semelhante com os alunos calouros do Curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. De uma forma ou de outra,

os estudantes desse grupo também se destacam perante outros em relação à sua faixa etária: primeiramente por terem ingressado em uma Universidade, cujo processo seletivo é tão concorrido e segundo, por estarem fazendo o curso de Matemática, o que provavelmente implica no gosto pela disciplina.

Concomitantemente com a aplicação, foi entregue a cada aluno, após a resolução de cada problema, um questionário, para que se pudessem obter opiniões pessoais sobre as questões específicas. Nele objetivamos perceber se os alunos seguem os passos sugeridos por Polya (2006) e, além disso, se são os mesmos, independente do problema. Para uma abordagem mais ampla, cada grupo recebeu outro questionário específico, ou seja, um diferente para os alunos da UFRGS e outro para os alunos do PIC, composto por questões mais gerais, cujas perguntas variam de acordo com o público em que estamos trabalhando:

*Alunos da UFRGS:* Tendo em vista que estão seguindo uma carreira docente, questionei sobre possibilidade e maneiras de inserção destes problemas no Ensino Básico, com o objetivo de estimular o estudo da matemática. Além disso, perguntei sobre a coerência entre o nível de dificuldade das questões e o ensino nas escolas.

*Alunos do PIC:* A este público questionei sobre a existência de uma possível sequência genérica de passos para resolução de qualquer problema, além das suas opiniões sobre as questões da OBMEP, sob um âmbito geral. Sabendo de sua facilidade com a matemática, perguntei também se seus colegas de turma compartilham a mesma opinião sobre estas provas.

### **5.3.1 – AS QUESTÕES APLICADAS**

As questões selecionadas envolvem os conteúdos de geometria, funções, e aritmética. Foram três problemas aplicados em ambos os grupos. Tendo em vista que o público selecionado se encaixa principalmente no nível III designado pela OBMEP, duas questões foram retiradas das provas deste nível e uma do nível II: Questão 6, nível III; questão 3, Nível III; questão 1, Nível II.

Aqui serão analisadas todas as respostas dos problemas aplicados e apresentadas através de um apanhado geral, ou seja, mostradas as ideias de resolução mais comuns entre os alunos. Eventuais casos serão destacados devido a algum detalhe ou forma diferenciada de resolver o problema que foi solicitado. Aparecerão imagens

digitalizadas das resoluções dos alunos, que possam ilustrar o que foi tratado no texto. A descrição do relatório prático está organizada apresentando a questão, com o enunciado em figura juntamente com uma breve reflexão, e após, são comentadas as respostas dadas pelos alunos, analisando possíveis relações entre as respostas dadas e os passos de resolução de problemas sugeridos por Polya (2006).

### 5.3.1.1 – Questão 6, Nível III

Este problema envolve conteúdos de funções e geometria plana. De uma maneira conjunta, estabelece uma relação entre os dois conteúdos, em que se destaca, principalmente, a análise de gráficos, pontos, distâncias e trajetórias. Para a resolução, é necessário que o aluno estabeleça uma analogia entre as informações dadas no gráfico e a geometria presente no deslocamento da formiga.

Mediante a classificação de Alsina, Fortuny e Pérez (*apud* BAUR, 2009) pode-se identificar este problema segundo a categoria “Problemas de Aplicação”, pois inicialmente envolve interpretação para após serem aplicadas formulas ou conceitos matemáticos. Para Polya (2006), é possível designar este como um “problema que não é de rotina”, tendo em vista que pertence a um estilo geralmente não trabalhado em sala de aula. Conforme Echeverría (1998), essa questão não se classifica como exercício, e sim como problema, pois faz uso de técnicas e algoritmos aprendidos através da resolução de exercícios, feitos repetitivamente.

No total, 14 alunos que participaram desta prática, resolveram esta questão.

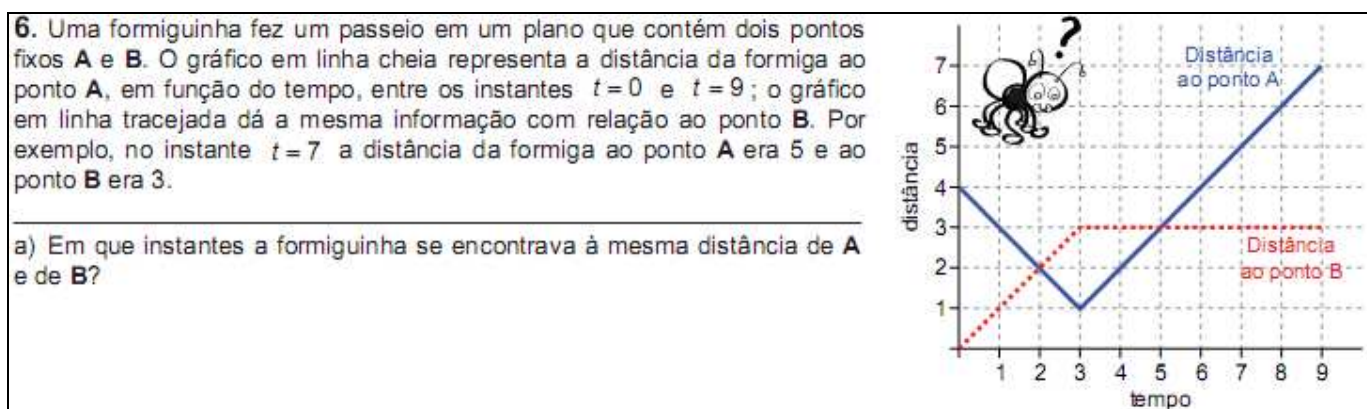


Figura 2: Enunciado do problema 6, nível III OBMEP 2010

**Sobre a questão:** É um item que exige dos alunos somente uma interpretação do problema juntamente com visualização gráfica, sabendo que os gráficos apresentados foram construídos a partir das distâncias da formiga aos pontos A (esboço vermelho) e B (esboço azul). As distâncias são as mesmas nos instantes em que os gráficos se cruzam, ou seja, são obtidos através da interseção das duas curvas.

**Sobre as respostas:** As respostas apresentadas pelos alunos foram sempre iguais, apenas obtidas através de visualização gráfica. Em todas as respostas, apareceram os instantes pedidos  $t=2$  e  $t=5$ , e como justificativa: “*são os pontos em que os gráficos de encontram*”.

b) Qual é a distância entre A e B?

Figura 3: Enunciado do item b da questão 6, nível III

**Sobre a questão:** Através de interpretações gráficas, foi possível perceber que no instante  $t=0$ , a formiguinha está exatamente sobre o ponto B. Sabendo que neste mesmo momento a distância da formiga ao ponto A é 4, pode-se concluir que o ponto A dista de B 4 unidades.

**Sobre as respostas:** As respostas obtidas nas aplicações foram basicamente idênticas. Todas argumentaram da mesma maneira que a anteriormente apresentada, observando a posição da formiga no instante  $t=0$ .

c) Entre que instantes a formiguinha estava sobre a reta que passa por A e B?

Figura 4: Item c do problema 6, nível III

**Sobre a questão:** Aqui é imprescindível a transposição dos dados obtidos no gráfico para uma linguagem geométrica. Há vários modos de interpretação desta questão, desde aquela que descreve a trajetória da formiga, tomando como base as distâncias entre os dois pontos, até o uso da linguagem “vetorial”.

**Sobre as respostas:** Foram apresentadas de duas maneiras distintas:

*Aluno 1:* Observou que a formiga permanece na reta determinada pelos pontos A e B quando a soma das distâncias em relação aos dois pontos é 4. Em outro caso, considerou a diferença entre as distâncias, e afirmou que estarão na reta, quando a diferença é 4, conforme a figura 5.

Implicitamente, o aluno utilizou a ideia de soma de vetores, tendo em vista o sentido em que eles se encontram. Nos instantes em que os vetores que partem dos pontos

até a formiga estão em sentidos opostos, somam-se os comprimentos, e de modo contrário, diminui-se o seu tamanho quando possuem mesmo sentido.

c) Entre que instantes a formiguinha estava sobre a reta que passa por **A** e **B**?

Nos instantes 0, 1, 2 e 3, pois as distâncias dela aos pontos A e ao B somam 4 u.

No instante  $t=9$ , ela também está sobre a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , pois a diferença entre as distâncias até A e até B é 4 u.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

Figura 5: Resolução do item c pelo Aluno 1

Pode-se notar que, na resposta apresentada, o aluno considerou apenas um conjunto discreto de pontos. O gráfico dado no enunciado diz que o tempo é contínuo, ou seja, a formiga não salta. Esse equívoco na escrita da resposta foi verificado em mais três casos. Semelhante a este modo de resolução, mais cinco alunos utilizaram esta estratégia.

Outra forma de resolução apresentada foi esboçando a trajetória da formiga, com base no gráfico dado. A figura abaixo representa a solução dada pelo *aluno 2*:

c) Entre que instantes a formiguinha estava sobre a reta que passa por **A** e **B**?

$t=0$  a  $t=3$  e  $t=9$

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

Figura 6: Resolução do item da questão pelo aluno 2.

Além da ilustração feita, alguns alunos explicitaram como fora construído o desenho, sabendo da importância da explicação do raciocínio na questão. Observando a figura, notaram que entre os instantes  $t=0$  e  $t=3$  a formiguinha se desloca pela reta que passa por A e B. A partir daí, como a distância até B permanece constante igual a 3, a conclusão foi de que ela deve percorrer um círculo centrado em B e de raio 3. Em sequência, para marcar as posições nos próximos instantes, foram construídos círculos centrados em A e raio determinado pela distância no instante, com base no gráfico.

Através do desenho, foi possível notar que até o instante 3, a formiga anda em linha reta e depois descreve uma meia circunferência centrada em B, de raio 3. Com

efeito, ela pára exatamente em um ponto que está sobre a reta que passa por A e B em sentido oposto ao lugar em que estava no instante  $t=3$ . Por isso, além dos instantes entre  $t=0$  a  $t=3$ , a formiga permanece em tal reta quando ela termina seu trajeto, ou seja, em  $t=9$ .

Além do erro obtido pela diferença entre o contínuo e o discreto, seis alunos esqueceram-se de citar o instante  $t=9$ , em que a formiga também se encontra sobre a reta que passa por A e B.

d) Qual foi o comprimento do trajeto percorrido pela formiguinha entre os instantes  $t=0$  e  $t=9$  ?

Figura 7: Enunciado do item d da questão 6, nível III

**Sobre a questão:** Quem havia feito o desenho da trajetória da formiga no item anterior, verificou com facilidade como se calculava o caminho percorrido. Já quem não havia feito a ilustração, neste item necessitou fazê-la.

**Sobre as respostas:** Todos os alunos que resolveram a questão fizeram da mesma maneira, a seguir apresentada. O desenho se torna fundamental para que se calcule o caminho percorrido pela formiga. Quem o fez anteriormente, tornou este item da questão muito simples, bastando apenas calcular o comprimento de uma circunferência, dividi-lo por 2, pois sua trajetória é apenas em metade dela. Após adicionaram-no com o valor percorrido em linha reta, entre os instantes  $t=0$  e  $t=3$ . Ou seja,

Trajetória: linha reta mais meia circunferência, ou seja,  $3 + \frac{2\pi \cdot 3}{2}$

Trajetória:  $3 + 3\pi$

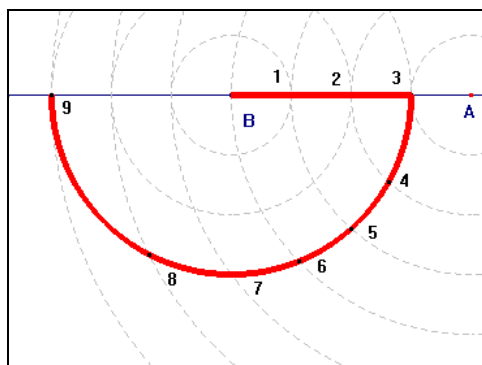


Figura 8: Trajetória da formiga

### 5.3.1.1.1 - Análise das questões extras:



**Questão extra 1:** Qual a distância máxima que a formiga pode estar de A, mantendo-se constante a distância a B, a partir do instante  $t=3$ ?

**Sobre as respostas:** Dos 10 alunos que conseguiram iniciar esse problema, todos eles responderam diretamente que a distancia máxima é 7. Quando justificada, era através do desenho anteriormente feito para calcular o trajeto da formiga, sabendo que ela deverá se locomover sobre um círculo, a fim de que sua distância até o ponto B seja constante igual a três.

**Questão extra 2:** É possível que o gráfico das distâncias da formiga em relação aos pontos A e B seja da seguinte forma, supondo que a formiguinha continue caminhando a uma distância constante a B? Explique.

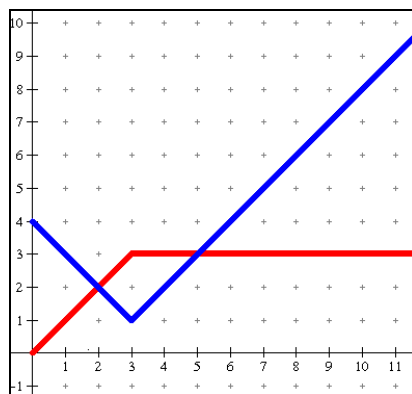


Figura 9: Gráfico do enunciado da questão extra 2.

**Sobre as respostas:** Ao observar o gráfico, oito alunos notaram que a formiga se desloca sempre a uma distância constante do ponto B, ou seja, o mesmo caso tratado anteriormente. Com isso, de acordo com a resposta dada no item anterior, a distância máxima é sete, contradizendo o gráfico.

Dois alunos justificaram através da apresentação de um gráfico que se tornaria adequado, ao considerar que a formiga se desloca da mesma forma quando deu sua primeira meia volta, entre os instantes  $t=3$  e  $t=9$ , na circunferência:

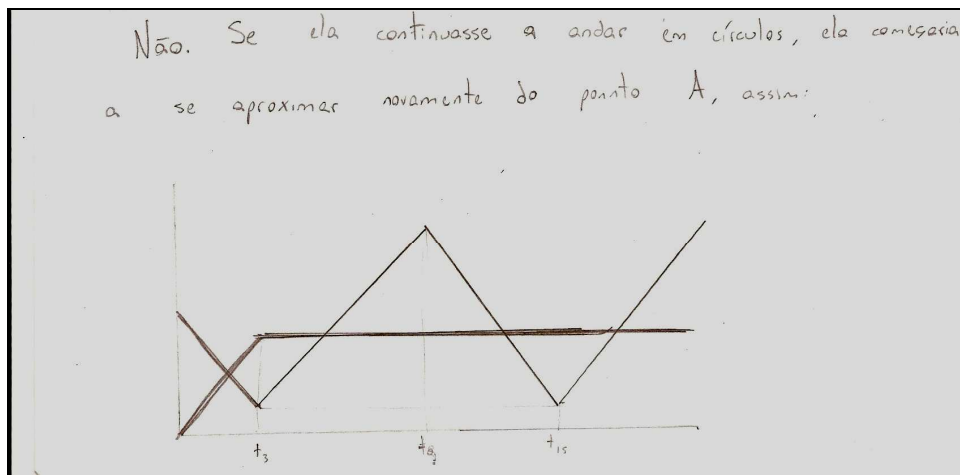


Figura 10: Resolução do problema extra 2 dada por um aluno.

**Questão extra 3:** Se dissermos que a partir do instante  $t=2$ , a distância entre a formiga e o ponto B é sempre a mesma que a distância entre a formiga e o ponto A, descreva o lugar geométrico que a formiga percorre.

**Sobre as respostas:** Cinco alunos responderam este item. As respostas dadas por eles não tiveram nenhum formalismo em justificativas. Como já deviam saber que a mediatriz de um segmento torna qualquer ponto pertencente a ela equidistante de seus extremos, apenas deram a resposta, sem se preocupar em argumentações.

**Questão extra 4:** Como calcular o caminho percorrido pela formiga em instantes menores que 9 e maiores que 4? Calcule tal distância em dois instantes diferentes. Se for necessário, utilize uma calculadora.

**Sobre as respostas:** Esta questão foi concluída por apenas dois alunos. Inicialmente, eles supuseram que a formiga se deslocava a uma velocidade constante, fazendo com que a cada instante ela se movimentasse  $1/6$  da meia circunferência. Assim o problema se resumiria em contar quantos sextos de meia circunferência seriam percorridos, dependendo do instante pedido. Fiz uma intervenção questionando sobre a veracidade desta suposição e caso estivessem em dúvida, aconselhei que olhassem para o desenho da trajetória feito nos primeiros itens. Analisando melhor o esquema, notaram que a formiga não se movimenta a uma taxa constante, pois a velocidade a qual se movimenta não tem relação alguma com a distância aos pontos, esboçada no gráfico.

Após concluírem que, a cada instante o comprimento do trajeto não é o mesmo, passaram a procurar uma maneira de descobrir o ângulo formado pelo

segmento que une a formiga e o ponto B e o segmento determinado pelos pontos A e B. Segundo Polya (2006), a Intervenção do professor deve ser feita lançando-se questões para que o aluno reflita sobre. Por isso, aqui relato uma intervenção realizada por mim, nesta questão:

*Professor:* Vamos raciocinar no caso  $t=8$ . Quais as informações que temos no problema?

*Aluno 3:* Sabemos o tamanho do segmento que une a formiga e o ponto B, vale 3. Além disso, temos o tamanho do segmento AB que mede 4. Só isso!

*Professor:* Que figura pode formar se unirmos os três pontos em questão?

*Aluno 3:* Um triângulo. E?

*Professor:* Sabemos o tamanho deste novo segmento criado?

*Aluno 3:* Sim, ele é dado no gráfico. Ele mede 6.

*Professor:* Faça um desenho separado com todas as informações aqui comentadas.

*Aluno 3:* Ok, temos um triângulo de lados 3, 4, e 6, e um ângulo entre os segmentos de medida 3 e 4.

*Professor:* Existe alguma relação que envolva as medidas dos lados do triângulo, e algum ângulo interno do mesmo?

*Aluno 3:* hummm, sim, a Lei dos Cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \phi$$

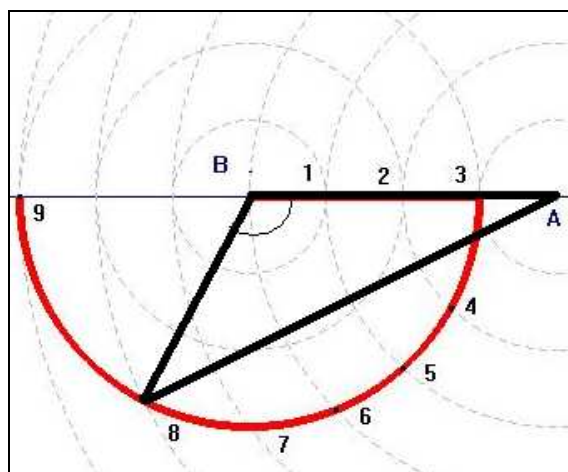


Figura 11: Desenho para visualização do cálculo do ângulo.

Assim, o trajeto foi calculado por:  $3 + \text{arco percorrido em instantes maiores ou iguais a } 3$ , fazendo uso da lei dos cossenos, ou  $\text{trajeto} = \text{instante}$ , quando é menor que 3.

Observação: A intervenção utilizada por mim foi análoga em ambos os casos.

#### **5.3.1.1.2 – Opiniões sobre a questão e sua resolução:**

Por meio das respostas dadas no questionário específico, de um modo geral, pude inferir que os alunos não a acharam tão difícil. A maior crítica referente a ela é sobre o contexto irreal a que foi elaborada, pois sua situação não se equipara tanto com a realidade.

Quando questionados se haviam visto uma questão semelhante no colégio todos responderam de forma negativa. Foi verificado, por meio das respostas, que para a resolução foi necessário interpretar o gráfico e transformar as informações em dados geométricos. Pude notar também, através deste questionário, que os desenhos foram fundamentais para a obtenção das respostas corretas e que normalmente os alunos não retomam o problema para verificar se os dados obtidos estão corretos e verificar eventuais erros.

Eles afirmaram que não tiveram plano para a resolução da questão, porém verifiquei, através das soluções, que todos identificaram as variáveis e o objetivo do problema. Assim, mesmo não tendo a consciência, eles criaram um roteiro, observando todos os dados do problema. Houve um tratamento das informações dadas no gráfico para a geometria, facilitando assim, todo o processo. Na questão extra 3, por exemplo, após identificar o que deveria ser feito (plano), coube apenas executar. Foi possível ver que, inicialmente os alunos tiveram uma concepção errada do problema, sendo assim necessária a intervenção do professor. Neste caso, a reflexão tornou-se fundamental para identificar os erros cometidos. Mesmo que de modo implícito, alguns passos de resolução de Polya (2006) foram seguidos na resolução do problema.

#### **5.3.1.2 – Questão 3, Nível III**

Conforme Echeverría (1998) a questão deve ser rotulada como problema e não como exercício. De acordo com a classificação dada por Polya (2006), este problema não é de rotina, além disso, tendo em vista que há diferentes maneiras de se resolver a questão, e que no item b é possível fazer generalizações, segundo Alsina, Fortuny e Pérez (*apud* BAUR, 2009) podemos designá-lo por “problema tema”.

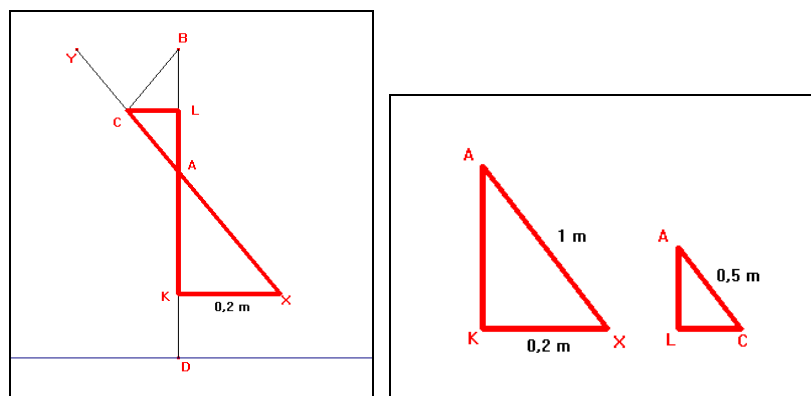
3. A figura ilustra o funcionamento de uma porta de garagem, representada pelo segmento  $XY$ . Ao mover o ponto  $X$ , o ponto  $A$  desliza por um trilho vertical, representado pelo segmento  $BD$ . Algumas das medidas na figura são  $AC = BC = CY = 0,5$  m e  $AX = 1$  m.

a) Na figura abaixo, o ponto  $X$  está a  $0,2$  m do trilho  $BD$ . Qual é a distância de  $C$  ao trilho?

Figura 12: Enunciado da questão 3, nível III da OBMEP 2010

**Sobre a questão:** Este problema exige que o aluno observe o desenho e encontre alguma relação entre os triângulos ali implícitos. É possível notar semelhanças em alguns deles.

**Sobre as Respostas:** 15 alunos participantes da prática resolveram este problema. Observando os ângulos formados pelos componentes do portão, todos os estudantes encontraram dois triângulos semelhantes, observando-os da seguinte forma:



Figuras 13 e 14: O portão sob um olhar geométrico

$$\text{Logo, } \frac{\overline{AX}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{KX}}{\overline{LC}} \Leftrightarrow 2 = \frac{0,2}{\overline{LC}} \Leftrightarrow \overline{LC} = 0,1\text{m}$$

Sem fazer tais contas, alguns alunos notaram que como a medida do segmento  $AC$  é a metade de  $AX$ , o comprimento de  $LC$  é consequentemente, a metade do segmento  $KX$ , que mede  $0,2$  metros.

b) Mostre que a altura do ponto  $Y$  com relação ao chão não se altera com o movimento da porta.

Figura 15: Enunciado do item b do problema 3, nível III

**Sobre a questão:** É uma questão de demonstração. Faz-se necessário saber qual é a tese e quais são as hipóteses. O objetivo final (tese) deve ser interpretado de uma maneira geométrica para então saber em que se deve chegar e quais ferramentas podem ser utilizadas. Aqui é importante traçar um plano para a resolução.

**Sobre as respostas:** Este item foi resolvido pelos mesmos 15 alunos que iniciaram o problema. Notei, neste exercício, que todos os alunos traçaram um plano implicitamente. Para provar que o ponto permanece sempre a mesma distância do solo, eles chegaram à conclusão de que isso se resume a provar que o ponto se desloca em uma reta paralela ao chão. Mais do que isso, ela deve passar pelo extremo superior do trilho, tendo em vista que quando fechado, o ponto Y fica sobre. Equivalentemente, basta provar que o ponto se desloca em uma reta perpendicular ao trilho.

Todas as resoluções apresentadas foram feitas utilizando três conceitos básicos de geometria: ângulos em um triângulo isósceles, ângulos complementares e suplementares e soma dos ângulos internos de um triângulo.

Com base nas informações dadas, foi possível identificar dois triângulos isósceles na parte superior do portão, a qual permanece na “parte de dentro”. A partir disto, foram sendo nomeados todos os ângulos, de acordo com as propriedades ali existentes. Em sequência, apareceram diferentes formas de se chegar à conclusão:

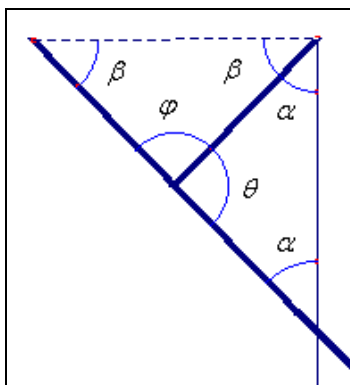


Figura 16: Ilustração dos ângulos formados pelos elementos da parte interna do portão.

$$\text{Aluno 1: } \begin{cases} 2\alpha + \theta = 180^\circ \\ 2\beta + \varphi = 180^\circ \end{cases}, \text{ somando as equações, obtemos:}$$

$$2\alpha + \theta + 2\beta + \varphi = 360^\circ$$

$$(\varphi + \theta) + 2(\alpha + \beta) = 360^\circ$$

Como  $\varphi + \theta = 180^\circ$ , temos que:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

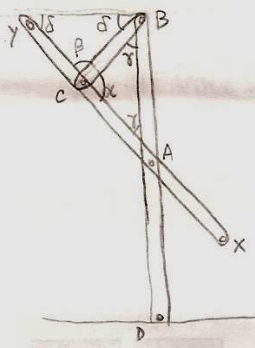
$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$$

Aluno 2:  $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Abaixo seguem duas soluções diferentes, apresentadas por estes dois alunos:

b) Mostre que a altura do ponto Y com relação ao chão não se altera com o movimento da porta.



$\alpha$  e  $\beta$  são suplementares, então  $\alpha + \beta = 180^\circ$

Des triângulos isósceles ABC e BCY, temos:

$$\alpha + 2\gamma = 180^\circ \quad (I)$$

$$\beta + 2\delta = 180^\circ \quad (II)$$

Fazendo (I)+(II):

$$\alpha + \beta + 2(\gamma + \delta) = 360^\circ$$

$$\gamma + \delta = \frac{360^\circ - (\alpha + \beta)}{2} \Rightarrow \gamma + \delta = \frac{360^\circ - 180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Logo,  $\gamma$  e  $\delta$  são complementares e o ângulo  $\hat{A}BY$  é sempre  $90^\circ$ .

Portanto Y está sempre na mesma horizontal, à mesma distância do chão.

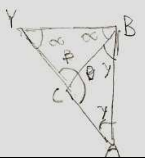
Correção Regional

Correção Nacional

Figura 17: Solução do item b, pelo aluno 1

b) Mostre que a altura do ponto Y com relação ao chão não se altera com o movimento da porta.

Se a altura do ponto em relação ao chão não se altera, SEMPRE  $BY \parallel$  chão e, portanto  $BY \perp BD$ , já que  $BD \perp$  chão. O problema consiste, portanto, em provar que  $\hat{Y}BA$  sempre mede  $90^\circ$ . Como  $\overline{CY} = \overline{BC} = \overline{AC}$ ,  $\triangle BYC$  é isósceles e  $\triangle BCA$  é isósceles. Abaixo, reproduzimos os dois triângulos abaixo e denotamos os ângulos utilizando a propriedade: "ângulos da base de um  $\triangle$  são congruentes".



Do desenho, concluímos:  $\alpha + \alpha + \gamma + \gamma = 180^\circ$  (triângulo  $ABY$ ), logo  $\alpha + \gamma = 90^\circ$ ,  $BY \perp BD$  e, portanto,  $BY \parallel$  chão, *q.d.*

Figura 18: Solução do item b exercício, pelo aluno 2

É possível verificar que existe um rigor ao responder as questões e uma preocupação na explicação detalhada, relatando todos os passos feitos, justificando-os.

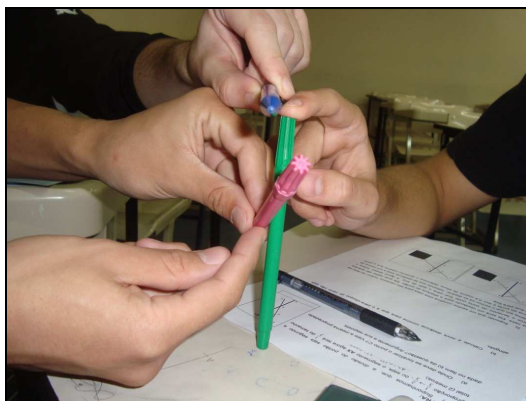


Figura 19: Alunos visualizando o problema dado.

c) Se o para-choque de um carro tem altura de 0,4 m, como na figura, qual deve ser a distância mínima entre o trilho e o para-choque para que ele não seja atingido ao abrir a porta?

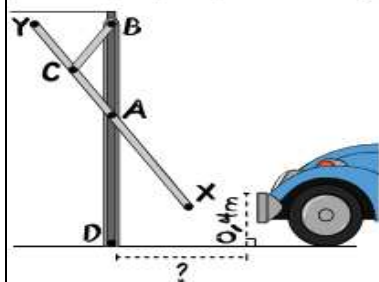


Figura 20: Enunciado do item c da questão 3, nível III

**Sobre a questão:** Este item da questão se torna fácil quando se observa todas as relações implícitas na figura. Ao juntar algumas delas, obtêm-se o resultado esperado. Requer que o aluno observe bem o desenho e atente para os dados no problema. De alguma forma, todos eles deverão ser utilizados.

**Sobre as respostas:** Dos 15 alunos que participaram desta prática, apenas 10 chegaram a resolver este problema. A estratégia da resolução de todos foi de inicialmente observar que o caso procurado se resume ao caso limite, ou seja, quando o portão encosta no para-choque do carro. Com isso, foi possível perceber a existência de dois triângulos congruentes: o formado pela metade do portão que permanece na parte de dentro, e o formado pela parte de fora, conforme mostra a figura 21. A partir da visualização destes dois triângulos congruentes, juntamente com o comprimento do trilho e a posição do portão ao encostar-se ao para-choque, concluiu-se que as medidas dos lados destas figuras, adjacentes ao trilho, são iguais e medem 0,8, pois o comprimento total deste é 2,0 metros.

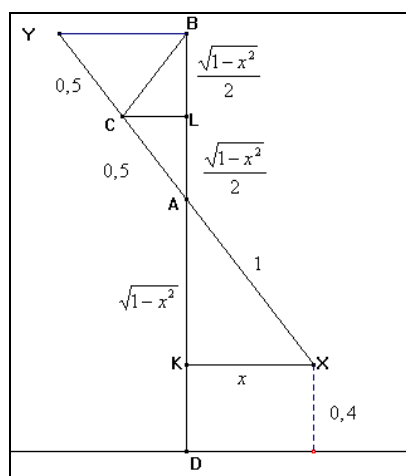


Figura 21: Olhar geométrico da situação observada do portão



Com essas informações, os alunos utilizaram a relação de Pitágoras para encontrar o valor do outro cateto do triângulo retângulo formado pelo segmento do portão que permanece fora. Conseqüentemente o valor calculado é a distância procurada, que mede 0,6 metros.

### 5.3.1.2.1 - Análise das questões extras:

**Questão extra 1:** Suponhamos que, a divisão do portão seja segundo a proporção  $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$ , ou seja, o segmento AX agora terá  $\frac{1}{3}$  do tamanho total (2 metros).

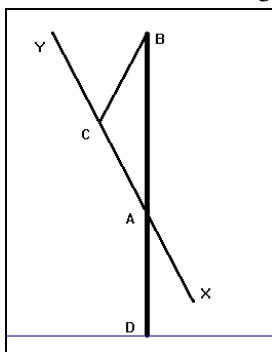


Figura 22: Ilustração referente à questão extra

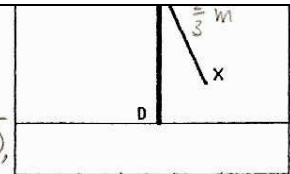
**Item a.** Onde deve se localizar o ponto C? Vale a mesma propriedade dada no item b da questão? Argumente a sua resposta.

**Sobre as respostas:** Apenas sete pessoas responderam esta questão.

No momento em que criei esta questão objetivava respostas cujas justificativas eram apenas pensando no caso prático, ou seja, comentando sobre o portão na “vida real”. Uma maneira possível, e que apareceu em cinco soluções, foi afirmando que quando o portão estiver fechado, o segmento YC deve coincidir com CB, e quando totalmente aberto, o segmento CB deveria sobrepor-se ao CA. Logo, C deve estar no ponto médio do segmento YA, cujo tamanho é o dobro do segmento CB. Para o segundo questionamento, fazia-se necessário apenas comentar sobre a existência de dois triângulos isósceles e a semelhança entre alguns deles, e com isso poder-se-ia recair no mesmo problema do item b da questão da OBMEP, sem necessariamente refazer todos os cálculos.

Os outros dois alunos justificaram todos os passos, inclusive para provar a localização do ponto C. A figura 23 mostra a resolução por um destes dois alunos.

a) Onde deve se localizar o ponto C? Vale a mesma propriedade dada no item b) da questão? Argumente a sua resposta.



Quando o portão está fechado, C e Y ficam sobre o trilho  $\overline{BD}$ , então  $\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AX} = \overline{BD} = 2\text{ m} \Rightarrow \overline{BC} + \overline{AC} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ . Da mesma forma,  $\overline{AC} + \overline{CY} = \frac{4}{3}$ . Logo  $\overline{BC} = \overline{CY}$ . Quando o portão está completamente aberto ( $A \equiv B$ ),  $\overline{BC} + \overline{CY} = \overline{AC} + \overline{CY} = \frac{4}{3}$ . Logo  $\overline{BC} = \overline{AC}$ . Então,  $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CY}$ , mostrando que C é ponto médio de  $\overline{AY}$  e  $\triangle ABC$  e  $\triangle BCY$  são isósceles, validando a mesma propriedade do item b).

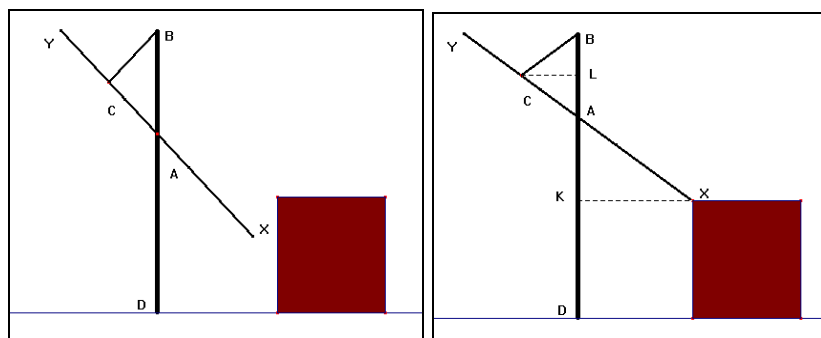
Figura 23: Resolução da questão pelo aluno 1

**Item b.** Calcule a nova distância mínima para que a o para-choque do carro não seja atingido.

**Sobre as respostas:** Seis pessoas resolveram este item da questão

Todas as respostas dadas foram usando argumento análogo à questão original, apenas levando-se em conta que a proporção entre os triângulos observados anteriormente agora mudaram. Neste exercício, os alunos utilizaram um exercício parecido para solucionar, aquele feito no item c do problema da OBMEP. Verificaram que as mesmas propriedades valiam em ambos os casos e conseqüentemente o anterior poderia ser usado na resolução deste. Aqui verifiquei a possibilidade do uso de outros problemas para resolver o mesmo, o que caracteriza uma sugestão para o estabelecimento de um plano, segundo Polya (2006).

**Questão extra 2:** Supondo que um senhor construa uma casa para seu cachorro “cusco” ao lado de sua casa. Ela será um obstáculo para a abertura do portão. Ele quer saber até quantos metros o tamanho da porta pode ficar para o lado de fora. A figura abaixo ilustra o problema em que o senhor irá se deparar. Sabendo que tal obstáculo está a 0,8 metros de distância da porta e tem 0,8 metros de altura, determine o tamanho máximo que a porta poderá ficar para fora.



Figuras 24 e 25: Esquema do portão dado no exercício

**Sobre as respostas:** Houve três pessoas que resolveram este exercício.

Esse problema se assemelha com os anteriores, porém agora o que se pede é a proporção na divisão do portão e não a distância do objeto até a porta. Ela se torna mais difícil, pois há poucos dados para que se consiga encontrar a resposta rapidamente. É necessário operar com várias letras e razões entre os triângulos semelhantes, além de utilizar várias relações ali presentes.

As respostas apresentadas tiveram a mesma direção, porém usando outros dados e nomeando as figuras de uma forma diferente, mas utilizando a mesma essência dos anteriores. Os alunos iniciaram nomeando todos os lados, ou em função do valor  $x$ , que representa o segmento do portão que ficará para fora, ou com outras letras, para depois utilizá-las nas relações.

Em conversa paralela com os alunos durante a resolução, notei que eles estabeleceram uma meta, mesmo não a explicitando na escrita da resolução. O papel do professor nesta etapa é de um orientador para a obtenção da solução, e por isso, segundo Polya (2006), a intervenção deve ser dada através de questionamentos e não através da indicação do caminho pronto. Eles dão a oportunidade do aluno entender a metodologia a ser usada, além das sutilezas implícitas na pergunta do problema. Destaco abaixo uma conversa tida com o aluno 5, que relata o estabelecimento de uma meta para a resolução:

*Aluno 5:* Se determinar o valor do cateto sobreposto ao trilho, do triângulo retângulo formado pela parte de fora do portão, nosso problema está terminado.

*Professor:* Mas o que eu preciso saber para determinar isso?

*Aluno 5:* Primeiramente temos dois triângulos semelhantes, porém não sabemos qual a razão de semelhança. Se eu nomear todos os lados que puder, e começar a ver as semelhanças, eu chego a algum lugar! (risos)

Professor: Tente fazer isso, qualquer coisa, se não der certo, volte e tente outras relações.

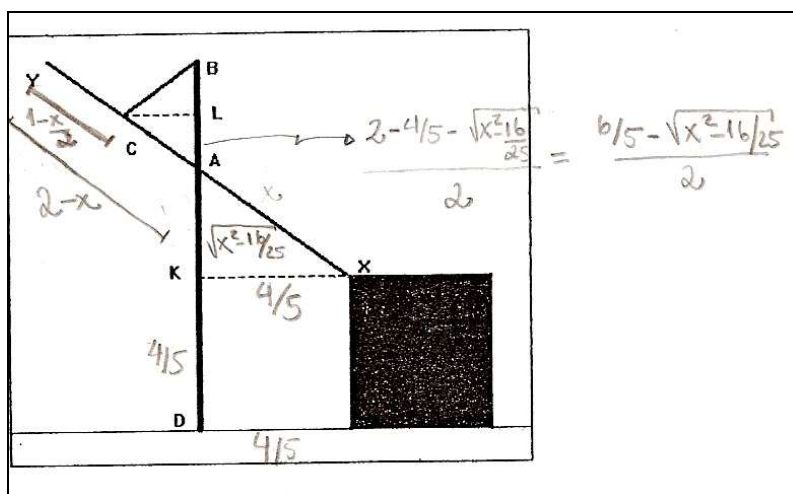


Figura 26: Todos os segmentos dos triângulos nomeados, em função do lado procurado  $x$ , pelo aluno 5

O aluno 5, após fazer o desenho, ilustrado pela figura, montou as relações que apareciam no esquema do portão e calculou o que fora pedido, da seguinte forma:

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{CA}}$$

Equivalentemente:

$$\frac{\frac{\sqrt{x^2 - 16/25}}{6/5 - \sqrt{x^2 - 16/25}}}{2} = \frac{x}{(2-x)/2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x^2 - 16/25}}{6/5 - \sqrt{x^2 - 16/25}} = \frac{2x}{2-x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 16/25}}{6/5 - \sqrt{x^2 - 16/25}} = \frac{x}{2-x}$$

$$(2-x)\sqrt{x^2 - 16/25} = x\left(\frac{6}{5} - \sqrt{x^2 - 16/25}\right) \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2 - 16/25} - x\sqrt{x^2 - 16/25} = \frac{6}{5}x - x\sqrt{x^2 - 16/25} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2 - 16/25} = \frac{6}{5}x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 16/25} = \frac{3}{5}x \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}x^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{16}{25}x^2 - \frac{16}{25} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

Logo,  $x = 1$

### 5.3.1.2.2 – Opiniões sobre a questão e sua resolução:

As opiniões sobre a questão variaram entre o difícil e o relativamente fácil. A grande quantidade de conteúdos de geometria envolvida dificultou o tratamento da informação e o foco norteador do caminho a ser trilhado. Segundo os comentários, foi uma questão que envolveu muitos conceitos geométricos em um problema só, dificultando o trabalho e o pensamento. Além disso, afirmam nunca terem visto uma questão semelhante no colégio, apenas com esses conteúdos segmentados. Eles comentaram que os itens anteriores da questão foram fundamentais para entender o esquema do portão, e facilitaram nos posteriores.

No item b, oito deles acharam fácil, mesmo envolvendo demonstrações. Justificaram sua opinião dizendo que após entender a moral do exercício e o que ele exige que seja feito, facilita muito:

*“O item b, apesar de sua resolução ser simples, exigiu um pouco mais de raciocínios. Após entender o deveria ser feito, ficou muito fácil!”*. Com base nesta resposta, é possível ver que após o aluno ter a “boa ideia”, conceito designado por Polya (2006), a resolução fica simples. Vê-se, com isso, que a maior dificuldade não é a resolução e sim o surgimento desta “boa ideia”.

Os alunos responderam que retomaram o problema porque foi possível, devido ao tempo disponível e por não haver uma pressão análoga a quando estiverem fazendo uma avaliação. Citando a prova da OBMEP, disseram que esse retrospecto é raro, tendo em vista que há pouco tempo para revolvê-la. Quando lhes falta tempo, geralmente revisam apenas as contas no momento em que as resolvem.

### 5.3.1.3 – Questão 1, Nível II

A classificação desta questão pode ser feita das seguintes formas, com aporte dos respectivos autores:

- *Problema*, para Echeverría (1998).
- *Problema Tema*, para Alsina, Fortuny e Pérez (*apud* BAUR, 2009)
- *Problema não de rotina*, para Polya (2006)

1. Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

- some 1, se o cartão for verde;
- some 2, se o cartão for amarelo;
- some 3, se o cartão for azul;
- some 4, se o cartão for vermelho.



Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu."

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

Figura 27: Enunciado do problema 1, nível II da OBMEP 2010

**Sobre a Questão:** O problema envolve somente conteúdos de aritmética. Exige que o aluno tenha um raciocínio em trabalhar com diferentes operações, conforme regra a cor do cartão e o número nele contido. Este primeiro item se resume em fazer contas, seguindo as restrições dadas pela cor e número do cartão.

Observação: Apenas três alunos participaram da resolução desta questão, todos eles participantes do Programa de Iniciação Científica do OBMEP. Em cada item desta, os três alunos apresentaram soluções.

**Sobre as Respostas:** Foram todas dadas de maneiras simples: apenas fazendo as contas, usando a operação com o número dado na ficha -  $3 \Rightarrow 2 \cdot 3 \Rightarrow 2 \cdot 3 + 3 \Rightarrow (2 \cdot 3 + 3)5 = 45$  - e adicionando a quantidade referente à cor do cartão -  $45 + 4 = 49$ .

b) Mariázinha disse "Setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

Figura 28: Enunciado do item b do problema 1, nível II

**Sobre a Questão:** Diferentemente do item anterior, aqui é dado o resultado final e pede-se a cor e número do cartão. Deve-se fazer o processo inverso do feito anteriormente, porém já no primeiro passo dá problema, pois temos que descontar o valor da cor do cartão, que é desconhecido. É necessário encontrar um método alternativo para fazer a sequência inversa.

**Sobre as Respostas:** Tendo em vista que há apenas quatro possibilidades para a cor do cartão, dois alunos fizeram uma espécie de tentativa e erro com cada valor. Segue agora uma tentativa do aluno 4 que resultou em erro:

"Se a cor do cartão for vermelha, devemos descontar quatro unidades de 76, obtendo 72. Em seguida, devemos dividir por 5, o que se torna impossível, pois o valor

não é um múltiplo de 5 e conseqüentemente resulta que o número do cartão não é inteiro”.

Ao testarmos com o cartão verde, ou seja, inicialmente descontando uma unidade de 76, seguimos os passos, dividindo 75 por 5, subtraindo 3 de 15 e pegando a metade de 12, obtendo, por consequência, um valor inteiro igual a 6.

De uma forma genérica, um aluno fez uma expressão em função do número do cartão  $x$  e o número equivalente à cor  $y$ , ou seja, aplicando os passos sugeridos, obtêm-se:

$$x \Rightarrow 2x \Rightarrow 2x + 3 \Rightarrow (2x + 3)5 \Rightarrow (2x + 3)5 + y = 10x + 15 + y = 10(x + 1) + 5 + y,$$

sendo que  $y \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Para identificar qual a cor e o número do cartão, basta apenas observar o algarismo das dezenas, ou centenas quando houver, e descontar um. Observando a expressão, percebe-se que as unidades podem ser os valores 6, 7, 8 ou 9, pois  $y$  pode assumir somente os valores 1, 2, 3 ou 4. Para descobrir, portanto, a cor do cartão é preciso descontar 5 do algarismo das unidades, e observar o respectivo valor, relacionando-o com o que se deve adicionar pela cor.

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse “Sessenta e um” e o matemágico respondeu “Você errou alguma conta”. Explique como o matemágico pôde saber isso.

Figura 29: Enunciado do item c do problema 1, nível II

**Sobre a Questão:** Neste item, é preciso achar uma maneira de identificar se a pessoa que retira o cartão e faz as devidas contas, realizou tudo corretamente. Pode-se fazer sob tentativa e erro ou achar uma maneira genérica (algoritmo) e rápida para tal identificação. É importante destacar que o tal *matemágico* não dispõe de muito tempo para testar as quatro cores de cartão quando realiza essa brincadeira, por isso deve encontrar uma maneira direta para identificar se a conta está ou não errada, e quando correta, determinar a cor e o número do cartão.

**Sobre as Respostas:** Dois alunos responderam fazendo uso da forma genérica do valor das operações, dados o número e a cor do cartão. Utilizando a mesma, pode-se perceber se a conta está ou não errada, apenas observando que os únicos algarismos da unidade possíveis são 6, 7, 8 ou 9. Com o número 61, é possível concluir que ele não pode ser expresso na forma  $10(x + 1) + 5 + y$ , com  $y$  natural e menor que 5, chegando à conclusão de que Pedrinho deve ter efetuado alguma conta errada. O outro aluno, apesar

de ter feito todo o raciocínio de escrever a forma geral no item anterior, testou todos os casos possíveis, verificando erro em todos eles.

#### **5.3.1.3.1 - Análise das questões extras:**

**Questão extra 1:** Como o tal *matemágico* pode identificar se a pessoa fez a conta errada?

**Sobre as respostas:** Baseando-se na forma geral, que resulta o número obtido através da manipulação algébrica dos valores referentes à cor e número de cada cartão, os alunos responderam a questão levando em conta o algarismo das unidades do número dado, da seguinte forma como respondeu o aluno 5:

*Aluno 5:* Se o algarismo das unidades for menor que 6, a conta está errada.

Além disso, este aluno complementou que existe um número máximo para o valor das operações. Levou em conta o maior número do cartão (13) e o maior valor a ser somado, referente à cor verde, obtendo o número 153 como resposta.

**Questão extra 2:** Suponha que você seja o tal *matemágico*. Descreva um algoritmo que usaria para descobrir o número e a cor dos cartões.

**Sobre as respostas:** A resposta foi idêntica nos três casos. Descreverei aqui a resolução de um destes alunos:

1º - Observando o número, pego o número das unidades e desconto 5. O número obtido representa a cor do cartão (equivalente ao número que temos que somar).

2º - Observando o número, consideramos um novo valor, resultado da subtração pela sua unidade. Dividimo-lo por 10 e o resultado obtido diminuimos 1 para encontrar o valor do cartão.

#### **5.3.1.3.2 – Opiniões sobre a questão e sua resolução:**

Referente a esta questão, as opiniões dadas pelos estudantes foram todas positivas. Os alunos que a resolveram acharam-na fácil e compatível com a matemática tida na escola, pois envolvia apenas as quatro operações fundamentais, porém exigia um raciocínio um pouco mais complexo. Dois alunos disseram que viram questões semelhantes quando iniciaram seus estudos em álgebra, na sétima série. Um problema



semelhante, citado no questionário, foi seguindo o modelo: “Pensei em um número, multipliquei por 5, somei ...”

Neste problema, os alunos afirmaram ter feito uma revisão detalhada, pelo fato de envolver uma grande quantidade de contas, acontecendo aqui a quarta fase da teoria de Resolução de Problemas por Polya (2006), denominada de reflexão. Ainda, conforme um passo de sua teoria, há o estabelecimento de um plano, sendo que os estudantes disseram que criaram esse tal roteiro para a resolução da questão: primeiramente, encontrar uma fórmula fechada para determinar o valor referente às diversas manipulações, sem fazer todos os passos. Após, achar uma maneira de determinar se a conta está errada, e caso correta dizer a cor e o número do cartão, com base nesta fórmula.

### **5.3.2 – OS QUESTIONÁRIOS**

#### **5.3.2.1 – Questionário aos alunos do PIC**

Pude notar que os alunos originários de uma certa escola, quando questionados se os conteúdos de matemática do Ensino Básico são suficientes para resolver os problemas da OBMEP, responderam de forma afirmativa, dizendo que toda a matemática necessária para resolver as questões é vista em seu colégio. De forma contrária, os alunos deste grupo que provém de outros institutos de educação, consideram estes problemas muito difíceis e acham a matéria da escola precária para solucionar tais problemas, havendo uma disparidade entre ambas. Todos os estudantes compartilham a mesma opinião sobre as questões da OBMEP: mais difíceis que as trabalhadas na escola; interessantes, pois são problemas que se aplicam à vida real, em situações do cotidiano (todos citaram o problema do portão) e não requerem que o aluno apenas decore conceitos e fórmulas e sim, exigem do mesmo um ótimo raciocínio para a resolução. Seus colegas geralmente não compartilham a mesma opinião em relação aos problemas da OBMEP. Dizem que eles não gostam de estudar matemática, acham a disciplina muito difícil e por isso se desmotivam pelo seu estudo.

Quanto aos métodos de resolução de problemas, eles começam a busca pela solução organizando todos os dados do problema, possivelmente transformando-os e encontrando equações que os satisfaçam. Isso se compara com a primeira fase dada por Polya (2006), a compreensão do problema. Com referência ao estabelecimento de um

plano, eles afirmam que geralmente criam, porém não o escrevem, seguindo assim, alguns dos passos sugeridos pelo autor. Comentaram que, independente da questão, é feito o estabelecimento, mesmo que mental, pensando nos objetivos a serem alcançados.

Em questões que envolvam demonstrações, caso não consigam resolver diretamente, os alunos disseram que tentam fazer uma visualização específica em um exemplo, para entenderem qual o processo e o funcionamento e então tentar generalizar. Afirmam também, que não utilizam um roteiro genérico fixo que se aplica a qualquer problema, e sim, variam de acordo com o caso que aparecer, podendo ser diferente a cada tipo de problema. O único fator em comum, quanto à criação de um plano para resolver uma questão, é que todos eles focam o objetivo. Identificam o que realmente pede o problema para então trabalhar nele, juntando os dados necessários e entender o que deve ser feito para se chegar à solução do mesmo.

Perguntados se a maneira de alcançar a solução foi criada por eles ou ensinada, os alunos oriundos do mesmo colégio afirmaram que os professores ensinam alguns métodos ou dão dicas de como trabalhar e adaptam-nos de acordo com o que pedem os problemas. Já os alunos de outras escolas afirmam que eles mesmos interpretam o problema e o caminho que seguem é sempre criado por eles, sem ter tido dicas ou metodologias ensinadas por alguém.

### **5.3.2.2 – Questionário aos alunos da UFRGS**

As questões destinadas a estes alunos tinham como intuito saber opiniões sobre os problemas da OBMEP, a coerência destes com a matemática do dia-a-dia e, além disso, saber posicionamentos referentes à utilização, ou não, de problemas desta competição como forma de melhorar o ensino e possivelmente aumentar ou criar no aluno o gosto pelo estudo desta disciplina. Aqui, a descrição será feita mediante o esboço da questão para então fazer um compacto de suas respostas, juntamente com alguns comentários e citações dos alunos.

**Questão 1:** De acordo com sua opinião, a matemática vista no colégio é suficiente para que a pessoa consiga resolver os problemas da OBMEP? Justifique.

**Sobre as respostas:** As opiniões se dividiram. Quando as respostas foram afirmativas, houve uma restrição à obtenção de sucesso na competição olímpica,

necessitando que aluno seja inteligente e esforçado, caso contrário é muito difícil isso acontecer. Quando as respostas eram “não”, as justificativas que apareciam se referiam à falta de tempo que as escolas têm para dar conta de todo o conteúdo e que com isso não há tempo de trabalhar com o raciocínio e problemas que se relacionam com o dia-a-dia do aluno, foco da OBMEP.

Abaixo seguem trechos que ilustram as respostas e mostram as opiniões de alguns alunos:

*“[...] as escolas mal e mal dão a matéria obrigatória sem passar para a aplicação prática e raciocínio lógico...”* – Aluno 5.

*“É necessária uma melhor contextualização do conteúdo para que o aluno tenha mais condições de ir bem nesta competição”* – Aluno 1.

*“Penso que a matemática como conteúdo é suficiente. O problema é que essas questões não são trabalhadas na escola e os alunos não compreendem como aplicar o que aprenderam com exemplos de seu cotidiano”* – Aluno 3.

*“Não. Talvez um colégio com um ensino ótimo (o Colégio Militar, por exemplo), mas um colégio ‘normal’ não.”* – Aluno 4.

A escola em que quatro alunos do Programa de Iniciação Científica estudam, foi citada em exatamente metade das respostas. Afirmam que somente um colégio com características muito específicas, prepara seus alunos para esse tipo de competição e dá alicerces plenos para que se possa obter sucesso nela. Alguns sustentam a hipótese de que os conhecimentos matemáticos tidos no colégio são suficientes, porém o modo em que são trabalhados não favorece um aprendizado coerente para que os alunos sejam capazes de resolver um problema da OBMEP. Não é dado suporte adequado ao trabalho do raciocínio matemático, pois a matemática escolar se resume a uma aplicação de fórmulas e memorização de conceitos, totalmente contrário ao propósito dos problemas desta competição.

**Questão 2:** Se lhe fosse dado um problema qualquer, descreva, de modo genérico, qual a sequência que utiliza para resolver, caso tenha.

**Sobre as respostas:** Todos partilham a mesma resposta ao que se deve fazer primeiramente para resolver um problema: organizar os dados e extrair todas as informações contidas. A partir daí, os passos que foram citados são: esboço de desenhos quando as questões são de geometria; encontrar modos que encaminhem à obtenção da

solução (planos, roteiros); aplicar a matemática no problema, e caso dê algo errado, encontrar outros caminhos; após o término da resolução, retomar o problema para verificar se os dados obtidos têm lógica e estão corretos.

**Questão 3:** Você, que está cursando o nível superior, conseguiria resolver essas questões se estivesse ainda no colégio?

**Sobre as respostas:** Em unanimidade, as respostas que apareceram foram: “provavelmente não” ou apenas “não”. Alguns complementaram que a maioria das pessoas que estudam no ensino básico teria muita dificuldade para resolver, independente de sua escola ser pública ou privada, sendo isso consequência do enfoque tecnicista dado nestas instituições de ensino. Isso se deve ao tipo de preparação dada aos alunos, que visam a aprovação em um concurso vestibular e que em grande parte dos casos, exige apenas que ele decorra fórmulas e não raciocine matematicamente.

**Questão 4:** Tendo em vista que você será professor, como podemos utilizar os problemas da OBMEP em sala de aula e estimular os alunos pela aprendizagem matemática?

**Sobre as respostas:** De acordo com as respostas, os problemas da OBMEP servem para contextualizar a matemática com o dia-a-dia da pessoa. São problemas que envolvem mais raciocínio e a matemática implícita vem como consequência, “pois é mais difícil entender o que pede o problema do que calcular” (Aluno 2).

A utilização dos problemas da OBMEP pode ser complementada com uso de materiais manipulativos, que facilitem a visualização do que está ocorrendo. Segundo eles, o problema do portão poderia tornar mais fácil o entendimento e conseqüentemente facilitar a resolução. Foi possível ver, durante a prática, que os alunos “construíram” um portão com suas canetas, para esboçar seu funcionamento e entendê-lo, conforme mostra a figura 19.

Contrariando todas as respostas, um aluno afirmou que uso dos problemas pode desmotivar ainda mais o aluno, pois ele verá o alto nível de matemática que é exigido e que não se sente capaz de resolver, desmotivando-o para o aprendizado. Ele já acha que, como a maioria dos alunos não gosta de matemática, ao se depararem com estes problemas, sentir-se-iam “incapazes e impotentes” diante da matemática e admitindo o seu “fracasso” com essa matéria.

Cito abaixo, duas respostas à pergunta, dadas por dois alunos:

*“A riqueza na quantidade de raciocínios e encadeamentos lógicos necessários é bem alta e eu acho que isso proporciona uma autonomia para os alunos. Acho que esses problemas também proporcionam que a matemática da escola seja menos mecânica e sim, mais inteligente. Acho que isso já é um grande estímulo” - Aluno 1.*

*“[...] com o aluno vendo a utilidade da matemática no mundo real, ele se motiva a estudar e querer aprender ainda mais. Com isso, o aprendizado pode ser tornar mais fácil e prazeroso.” – Aluno 3.*

## 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os passos para resolução de problemas, sugeridos por Polya, formam uma sequência que visa a obtenção da solução do problema. Com aporte da prática, pude observar que os alunos não usam sempre a mesma sequência para resolver um problema. Eles costumam adaptá-la conforme o problema, mas sempre iniciam observando o que realmente o problema pede e organizando todos os dados e equações implícitas. Conforme as resoluções analisadas e de acordo com os depoimentos dos questionários, foi possível ver que a maior dificuldade que os alunos tiveram para resolver um problema, tinha relação com a obtenção da “boa ideia” que encaminhe ao resultado. Bem como Polya (2006) afirma, às vezes, é muito difícil de ter essa ideia, o que torna o problema complicado de se resolver. Isso realmente se verificou na prática, consoante ao depoimento de um aluno: *“Após entender o deveria ser feito, ficou muito fácil”*.

Ao analisar a história das competições de Matemática, verifiquei algumas mudanças referentes aos seus objetivos com o passar do tempo. As primeiras visavam ser uma espécie de duelo entre rivais na área ou simplesmente um crivo para identificar jovens talentos em matemática para investir na tecnologia bélica. Porém, diante da cessação de várias guerras, os rumos dessa seleção foram tomando diretrizes diferentes. As contemporâneas pretendem, além da seleção dos alunos com altas habilidades em matemática, proporcionar melhoras na educação desta disciplina e conseqüentemente aumentar/criar o gosto por estudar matemática.

Ao observar a prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, a OBMEP, foi possível conjecturar que a utilização de suas questões pode servir como um instrumento para a contextualização da matemática no dia-a-dia do aluno, tendo em vista que seus problemas são aplicações à vida real. Ao trabalhar com questões que façam sentido para o aluno, a aprendizagem matemática pode se tornar mais interessante e desafiadora, aumentando assim o gosto pelo seu estudo. Com esse objetivo, o uso dos problemas da OBMEP no ensino pode se tornar uma ferramenta aliada a fim de favorecer uma aprendizagem contextualizada ao cotidiano do aluno. Todavia, se ao se deparar com um molde totalmente diferente do que está acostumado a trabalhar em sala de aula, os problemas que envolvem mais raciocínio do que apenas a aplicação de fórmulas, conceitos e contas, podem gerar erros inesperados e

possivelmente causar desmotivações, decorrentes de sucessivos fracassos durante as resoluções.

Por meio da contextualização da matemática ao cotidiano do aluno, é possível possibilitar a compreensão e a necessidade de aprendê-la e, além disso, como utilizá-la quando estiverem diante de um problema. Mais do que simplesmente compor o ensino da matemática segundo o par transmissão-incorporação, ele deve ser pensado de modo a preparar os alunos para uma vida independente e serem capazes de resolver seus próprios problemas. Ao trabalhar com uma aplicação útil do que está estudando, a aprendizagem da matemática pode se tornar algo mais interessante e menos cansativo para o aluno, e com isso, há a possibilidade de aumentar o gosto por seu estudo. Assim, uma maneira que pode favorecer este tipo de aprendizado é produzir um currículo baseado na resolução de problemas, aplicados ao cotidiano do aluno. Além de ter potencial para abordar todos os conteúdos do currículo escolar, esse modo de ensino-aprendizagem favorece o raciocínio do aluno, e auxilia-o a ver como a matemática pode ser aplicada ao mundo em que vive.

Com base nos depoimentos dos alunos foi possível ponderar que a matemática vista na escola, em geral, não é suficiente para garantir que um aluno se destaque em uma competição olímpica desta área. No entanto, alguns alegaram que os conteúdos de matemática que são exigidos na prova são equiparáveis com os vistos no colégio, porém o modo com que são trabalhados não requer que o aluno raciocine ou pense no real sentido do que está fazendo, faltando assim, preparo dos mesmos para resolver os problemas propostos nestas provas. Pior do que isso é que, não sabendo como utilizar todos os conceitos aprendidos/ “decorados”, o aluno não saberá como aplicar a matemática em seu cotidiano e assim, não reconhecerá uma maneira de utilizá-la como ferramenta para resolver problemas que possivelmente aparecerão em sua vida.

A utilização de questões de Olimpíadas na escola pode se tornar uma forma de, possivelmente, reverter a falta de contextualização entre o ensino e a vida real. Assim, faz-se necessário que seja dado um suporte adequado para que estes problemas sejam trabalhados em sala de aula, tendo em vista que suas resoluções exigem do aluno bom raciocínio para então aplicar os conteúdos matemáticos aprendidos. Além disso, pode servir como um meio de favorecer um aprendizado em que o aluno entenda o que esta sendo ensinado, bem como a utilidade no seu dia-a-dia. Como consequência, o aluno estará melhor preparado para competir em Olimpíadas de Matemática e principalmente terá uma aprendizagem que condiz com o que necessita.

## 7 - REFERÊNCIAS

**BAUR**, Anelise. *O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. [Trabalho de Conclusão de Curso] Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

**BRASIL-1998**. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática: terceiro e quarto ciclo. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília, MEC/SEF, 1998, 148p. Disponível em <[www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf](http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf)> acesso em: 26 de abril de 2010.

**D'AMBROSIO**, Beatriz S. *Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates*. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989.

**FERNANDES**, José de Arimatéia; **OLIVEIRA**, Carlos Carneiro de. *Olimpíadas de Matemática: Contextualizando o dia-a-dia*. Campina Grande – PB. sd.

**INTERNATIONAL MATHEMATICS OLYMPIAD**. Disponível em: <<http://imo.math.ca/>> Acesso *on-line* em 27 de agosto de 2010.

**JELINEK**, Karin Ritter. *A produção do sujeito de altas habilidades: entre jogos de linguagem, práticas matemáticas e formas de vida*. [Projeto de Tese de Doutorado] Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul: Porto Alegre, 2010.

**MACIEL**, Marcos V. M. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): As Origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica*. In: *Anais*. Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí, RS. 2009.

**MIGUEL**, Antônio. *Pesquisa em Educação Matemática e Mentalidade Bélica*. Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática: São Paulo, 2005.

**OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS**. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/>> Acesso *on-line* em 03 de julho de 2010.

**OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**. Disponível em: <<http://www.obm.org.br/opencms/>> Acesso *on-line* em 18 de agosto de 2010.

**OLIMPÍADA DE MAIO**. Disponível em: <<http://www.oma.org.ar/internacional/may.htm>> Acesso *on-line* em 27 de agosto de 2010.

**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE-SUL**. Disponível em: <<http://treinamentoconesul.blogspot.com/>> Acesso *on-line* em 27 de agosto de 2010.

**OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA**. Disponível em: <<http://www.oei.es/oim/index.html>> Acesso *on-line* em 27 de agosto de 2010.



**OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA.** Disponível em <<http://www.opm.mat.br/>> Acesso *on-line* em 27 de agosto de 2010.

**POLYA, George.** *A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático.* Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

\_\_\_\_\_. *How to solve it.* Princeton University Press. New Jersey 1945.

\_\_\_\_\_. *O ensino por meio de problemas.* In: Revista do professor de matemática. n.7. São Paulo. 1985. p. 11-16.

**PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JR. (PIC) – OBMEP -** <[http://www.obmep.org.br/prog\\_ic\\_2008.html](http://www.obmep.org.br/prog_ic_2008.html)> Acesso *on-line* dia 10/11/2010.

**REGULAMENTO PIC:** <<http://www.obmep.org.br/regulamento.html>> Acesso *on-line* dia 10/11/2010.

**SHOENFELD, Alan.** *Por que toda essa agitação acerca da resolução de problemas?* EUA. s.d.

**SILVA, Maria José de Castro.** *As relações entre a aprendizagem da matemática e a resolução de problemas.* Anuário da Produção Acadêmica Docente. Vol. II. n. 3. Unianhanguera. 2008. p. 223 -232

**SILVA, Eleonora da.** *A virtude do erro: Uma visão construtiva da avaliação.* *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 19, n. 39, jan./abr. 2008.

**THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA.** Disponível em: <<http://amc.maa.org/e-exams/e9-imo/imohistory.shtml>>. Acesso *on-line* em 18 de agosto de 2010.

## 8 – ANEXOS

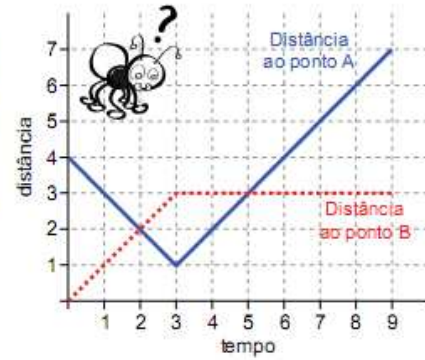
### 8.1 - Questões Seleccionadas



Respostas sem justificativa não serão consideradas

NÍVEL 3 7

6. Uma formiguinha fez um passeio em um plano que contém dois pontos fixos **A** e **B**. O gráfico em linha cheia representa a distância da formiga ao ponto **A**, em função do tempo, entre os instantes  $t = 0$  e  $t = 9$ ; o gráfico em linha tracejada dá a mesma informação com relação ao ponto **B**. Por exemplo, no instante  $t = 7$  a distância da formiga ao ponto **A** era 5 e ao ponto **B** era 3.



a) Em que instantes a formiguinha se encontrava à mesma distância de **A** e de **B**?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Qual é a distância entre **A** e **B**?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

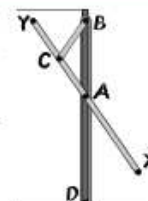
c) Entre que instantes a formiguinha estava sobre a reta que passa por **A** e **B**?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

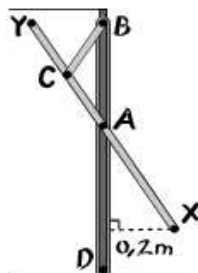
d) Qual foi o comprimento do trajeto percorrido pela formiguinha entre os instantes  $t = 0$  e  $t = 9$ ?

	Correção Regional	Correção Nacional
<b>TOTAL</b>	Correção Regional	Correção Nacional

3. A figura ilustra o funcionamento de uma porta de garagem, representada pelo segmento  $XY$ . Ao mover o ponto  $X$ , o ponto  $A$  desliza por um trilho vertical, representado pelo segmento  $BD$ . Algumas das medidas na figura são  $AC = BC = CY = 0,5$  m e  $AX = 1$  m.



a) Na figura abaixo, o ponto  $X$  está a  $0,2$  m do trilho  $BD$ . Qual é a distância de  $C$  ao trilho?

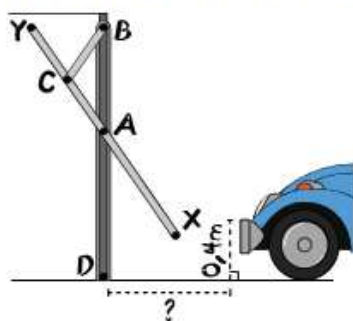


Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Mostre que a altura do ponto  $Y$  com relação ao chão não se altera com o movimento da porta.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Se o para-choque de um carro tem altura de  $0,4$  m, como na figura, qual deve ser a distância mínima entre o trilho e o para-choque para que ele não seja atingido ao abrir a porta?



Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	Correção Nacional

1. Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

- some 1, se o cartão for verde;
- some 2, se o cartão for amarelo;
- some 3, se o cartão for azul;
- some 4, se o cartão for vermelho.



Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu."

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Mariazinha disse "Setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse "Sessenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pôde saber isso.

	Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional

## 9 - APÊNDICE

### 9.1 - Questionário aos alunos do Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Nome: \_\_\_\_\_

Idade: \_\_\_\_\_

Série: \_\_\_\_\_

Escola: \_\_\_\_\_

**1:** O que você acha dos problemas da OBMEP? Seus colegas do colégio também acham ou têm a mesma opinião?

**2:** Os conteúdos cobrados nas provas desta Olimpíada se relacionam (são coerentes) com a matemática ensinada no colégio?

**3:** Como você organiza os dados da questão antes de resolver o problema?

**4:** O que você faz primeiramente ao resolver uma questão? Depende da questão ou você sempre faz isso?

**5:** Caso a questão seja para mostrar algo genérico, você tenta fazer alguns exemplos específicos antes de resolvê-la?

**6:** Antes de resolver um problema, você estabelece algum plano (roteiro)?

**7:** Você segue alguns passos para resolver o problema, ou seja, tem uma sequência/ algoritmo/ “receita de bolo” para a resolução? Se sim, explicita.

**8:** Se você tem alguma sequência de passos, criou-a sozinho (a) ou alguém lhe ensinou?

## 9.2 - Questionário aos alunos do Curso de Matemática da UFRGS

1) De acordo com sua opinião, a matemática vista no colégio é suficiente para que uma pessoa consiga resolver os problemas da OBMEP? Justifique.

2) Se lhe fosse dado um problema qualquer, descreva, de modo genérico, qual a sequência que utiliza para resolver, caso tenha.

3) Você, que está cursando o nível superior, conseguiria responder essas questões se estivesse ainda no colégio?

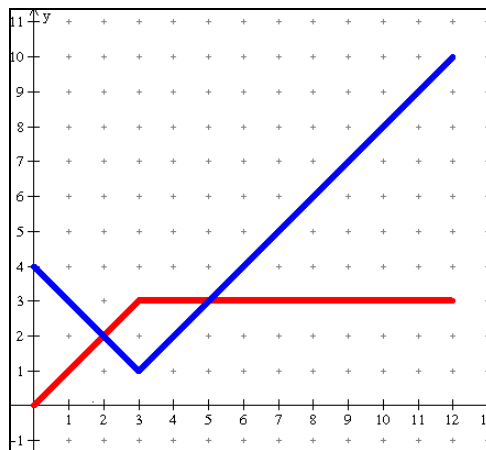
4) Tendo em vista que você será professor, como podemos utilizar os problemas da OBMEP em sala de aula, e estimular os alunos pela aprendizagem da matemática?

### 9.3 - Questões extras

#### Extra Questão 6 – Nível III:

1) Qual a distância máxima que a formiga pode estar de A, mantendo-se constante a sua distância a B, a partir do instante  $t=3$ ?

2) É possível que o gráfico das distâncias da formiga em relação aos pontos A e B seja da seguinte forma, supondo que a formiguinha continue caminhando a uma distância constante a B? Explique.



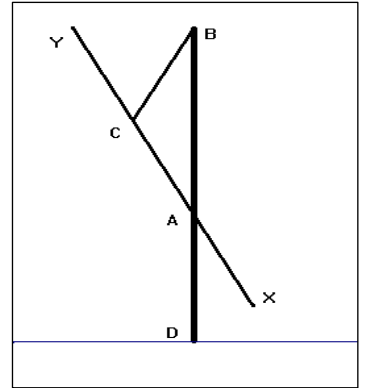
3) Se dissermos que a partir do instante  $t=2$ , a distância entre a formiga e o ponto B é sempre a mesma que a distância ao ponto A, descreva o lugar geométrico que a formiga percorre.

4) Como calcular o caminho percorrido pela formiga em instantes menores que 9 e maiores que 4? Calcule tal distância em dois instantes diferentes. Se for necessário, utilize uma calculadora.

**Extra Questão 3 – Nível III:**

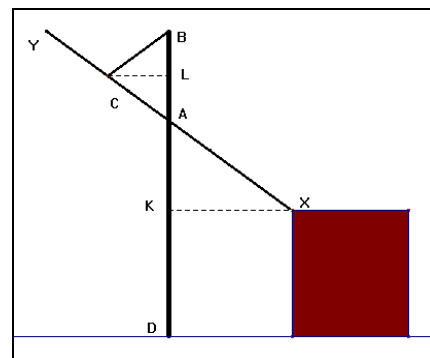
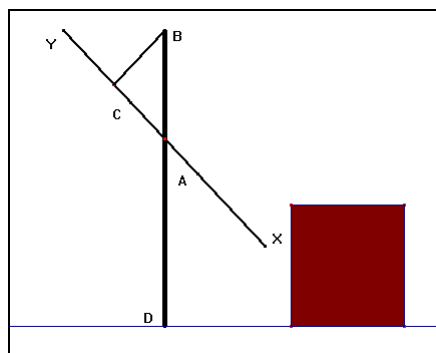
1) Suponhamos que, a divisão do portão seja segundo a proporção  $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$ , ou seja, o segmento **AX** agora terá  $\frac{1}{3}$  do tamanho total (2 metros).

b) Onde deve se localizar o ponto **C**? Vale a mesma propriedade dada no item b) da questão? Argumente a sua resposta.



c) Calcule a nova distância mínima para que o para-choque do carro não seja atingido.

2) Supondo que um senhor construa uma casa para seu cachorro “cusco” ao lado de sua casa. Ela será um obstáculo para a abertura do portão. Ele quer saber até quantos metros o tamanho da porta pode ficar para o lado de fora. A figura abaixo ilustra o problema com que o senhor irá se deparar. Sabendo que tal obstáculo está a 0,8 metros de distância da porta e tem 0,8 metros de altura, determine o tamanho máximo que a porta poderá ficar para fora.







#### **9.4 - Questionário referente aos problemas**

1) O que você achou da questão? Difícil ou fácil? Descreva o que achou de interessante, ou sua opinião sobre ela!

2) Você já viu uma questão parecida no colégio? Se lembrar dela, pode descrevê-la?

3) Você resolveu para alguns casos específicos (exemplos), para entender a moral do problema?

4) Você usou uma questão parecida com esta para resolvê-la?

5) O que você pensou para resolver o problema?

6) Após resolver o problema, você retoma-o para verificar possíveis erros?