UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CARLA SOARES SILVA

ESTUDO DE CASO SOBRE O PENSAMENTO COMBINATÓRIO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

PORTO ALEGRE
2010

CARLA SOARES SILVA

ESTUDO DE CASO SOBRE O PENSAMENTO COMBINATÓRIO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Comissão de Graduação Curso de Matemática – Licenciatura Plena – Noturno da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial e obrigatório para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Elisabete Zardo Burigo

Porto Alegre
2010

RESUMO

A proposta deste trabalho é relatar uma pesquisa realizada com alunos do Ensino Médio do Instituto Estadual Rio Branco, que participaram de uma oficina na qual foram aplicados dois jogos envolvendo conceitos de Análise Combinatória. A partir dos jogos foi avaliado o desenvolvimento do pensamento multiplicativo e do raciocínio combinatório dos alunos, tendo em vista a busca de alternativas ao ensino desse conteúdo. O resultado desta pesquisa mostrou que os alunos apresentam dificuldades em criar estratégias de resolução de problemas que envolvem esse conteúdo.

PALAVRAS CHAVES: Pensamento Multiplicativo. Aprendizagem. Análise Combinatória.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tabuleiros do Jogo da Senha 23
Figura 2 – Tabuleiros do Jogo Bicolorido 24
Figura 3 – Exemplo de representação utilizada para a resolução do questionário do Jogo da Senha 29
Figura 4 – Exemplo de representação utilizada para a resolução da questão 1 do questionário do Jogo da Senha 29
Figura 5 – Exemplo de resolução da questão 1-b do trabalho extra-classe 31
Figura 6 – Exemplo de resolução da questão 1-c do trabalho extra-classe 32
Figura 7 – Exemplo de resolução da questão 2 do trabalho extra-classe 33
Figura 8 – Exemplo de representação utilizada para a resolução da questão 6 do questionário do Jogo da Senha 34
Figura 9 – Exemplo de resolução da questão 7 do questionário da senha 35
Figura 10 – Exemplo de resolução da questão 7 do questionário da senha 35
Figura 11 – Exemplo de representação utilizada para a resolução da questão 7 do questionário do Jogo da Senha 36
Figura 12 – Exemplo de resolução da questão 14 do questionário do Jogo Bicolorido 37

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 5

2 JUSTIFICATIVA 6

3 REFERENCIAL TEÓRICO 10

3.1 PENSAMENTO FORMAL - PIAGET 10
3.2 MULTIPLICAÇÃO E ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS: 13
3.3 ESTUDOS SOBRE ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA 16

4 METODOLOGIA.. 21

4.2 IDENTIFICAÇÃO DOS JOGOS 22
4.2.1 Jogo da Senha 22
4.2.2 Jogo Bicolorido 24
4.3 SUJEITOS DO ESTUDO 25
4.4 RELATO DAS OFICINAS... 26

5 ANÁLISE DAS EXPERIÊNCIAS 31

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 38

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 41

APÊNDICE A – TRABALHO EXTRA-CLASSE APLICADO COM O GRUPO A 44

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DO JOGO DA SENHA 45

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO DO JOGO BICOLORIDO 46

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma investigação realizada com alunos do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Porto Alegre, com o intuito de verificar se esses alunos tinham o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório desenvolvidos. Essa investigação se deu com a aplicação de uma oficina sobre Análise Combinatória, que denominamos: “Descobrindo a Análise Combinatória através de Jogos”.

A escolha do tema para a realização dessa pesquisa deveu-se às minhas vivências, tanto durante a Educação Básica, como na minha trajetória acadêmica. No capítulo 2 apresento um breve relato da minha trajetória e o que me motivou a escrever sobre esse tema.

No capítulo 3, apresentamos uma pesquisa teórica baseada nas teorias cognitivistas de Jean Piaget, principalmente no desenvolvimento do pensamento formal, e na Teoria dos Campos Conceituais de Gerárd Vergnaud, dando ênfase ao estudo das estruturas multiplicativas. Também neste capítulo apresentamos uma breve revisão de trabalhos já publicados sobre o ensino de Análise Combinatória e a aquisição do raciocínio combinatório.

O capítulo 4 é dedicado à metodologia de pesquisa utilizada para a realização da nossa pesquisa. Apresentamos o planejamento da oficina e a caracterização dos jogos utilizados durante a sua execução, bem como suas regras e o material necessário para a sua aplicação. Também descrevemos os sujeitos que participaram da pesquisa e fazemos um breve relato de como se deu a aplicação da oficina.

O capítulo 5 é dedicado à análise do material coletado durante a aplicação da oficina, através de dois questionários respondidos pelos alunos.

No capítulo 6, apresentamos o resultado da nossa pesquisa e as considerações finais em relação ao trabalho realizado.

2 **JUSTIFICATIVA**

> Partindo de princípios definidos na LDB, o Ministério da Educação, num trabalho conjunto com educadores de todo o País, chegou a um novo perfil para o currículo, apoiado em competências básicas para a inserção de nossos jovens na vida adulta. Tínhamos um ensino descontextualizado, compartimentalizado e baseado no acúmulo de informações. Ao contrário disso, buscamos dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender. (BRASIL. MEC. CEB, 2000, p. 4).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio propõem uma reforma curricular, pautada nas considerações sobre as mudanças na sociedade em geral. Atualmente, com o desenvolvimento das tecnologias e da globalização, as pessoas têm acesso a muitas informações, as quais estão sempre se atualizando. Em decorrência disso, torna-se desnecessário que a escola se dedique ao acúmulo de conhecimentos: “A formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, **a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação**.” (BRASIL, MEC, CEB, 2000, p. 5) [grifo do autor].

Pensando nisso, resolvi realizar uma pesquisa sobre a aprendizagem de Análise Combinatória. Escolhi este assunto por considerar que o mesmo é de fundamental importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos educandos. E também devidos às dificuldades que vivenciei por não ter estudado este assunto no meu ensino médio. Cursei o Ensino Médio (antigo 2° grau) em uma escola com ensino profissionalizante. Nessa escola eram oferecidos três cursos diferentes, cada um de uma área específica. Escolhi cursar magistério, e por isso não estudei vários assuntos da área de Matemática do Ensino Médio.

Meu primeiro contato com a Análise Combinatória foi na Universidade, no curso de Licenciatura em Matemática. No decorrer no meu curso de graduação, percebi que o que tinha aprendido bem durante a minha educação básica era resolver exercícios de repetição, do tipo “siga o modelo”. Descobri que fazer matemática não é apenas resolver exercícios. Lembro que apresentei certa dificuldade em compreender conteúdos de Análise Combinatória. No princípio, me preocupava em tentar saber qual fórmula deveria usar para resolver o exercício proposto, fixando-me em alguns detalhes comuns nos enunciados dos exercícios.

Quando cursei a disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II, trabalhei nas Oficinas de Matemática para o Ensino Médio no Colégio de

Aplicação. Nessa ocasião, trabalhei com o grupo do terceiro ano e, entre outros conteúdos, eles estavam estudando Análise Combinatória.

As Oficinas de Matemática são oferecidas para os alunos do Colégio de Aplicação, no contra turno, uma vez por semana, e funcionam como um reforço, como uma monitoria.

As professoras do Colégio de Aplicação ensinavam o conteúdo de Análise Combinatória sem a utilização de fórmulas. Elas abordavam o conteúdo através de situações-problema, sempre salientando os casos em que a ordem era importante. Quando os alunos já dominavam a mecânica da resolução dos exercícios sem a aplicação da fórmula, as professoras apresentaram a fórmula. Para elas, a fórmula serve como uma generalização, como uma ferramenta auxiliar no momento de resolver as situações-problema. Nesse sentido, o foco do ensino deixa de ser o algoritmo e passa a ser a interpretação correta da situação-problema. Esse tipo de abordagem me auxiliou na compreensão e diferenciação dos diversos tipos de agrupamentos envolvidos nos cálculos de Análise Combinatória. Até então, eu tentava resolver exercícios de Análise Combinatória apenas aplicando a fórmula, e, mesmo assim, às vezes não tinha certeza sobre qual fórmula deveria utilizar. Também verifiquei que os alunos, em geral, apresentam muitas dificuldades em relação a esse conteúdo. Isso me motivou a pesquisar alternativas para o ensino de Análise Combinatória.

Também na disciplina de Estágio em Educação Matemática I realizei um projeto numa escola de ensino fundamental incompleto, ou seja, que oferece do primeiro ao quinto ano do Ensino Fundamental de nove anos. Esse projeto baseou-se na criação de oficinas sobre assuntos de matemática, sugeridos pelas professoras titulares das turmas. Criamos uma oficina para os terceiros e quartos anos na qual trabalhávamos com “números móveis”. O objetivo dessa oficina era trabalhar o valor posicional dos números, pois as professoras nos relataram a dificuldade dos alunos em entender esse conceito.

Propusemos, então, a seguinte atividade. Distribuímos para cada grupo de quatro alunos 20 algarismos em E.V.A. (acetato de vinil etileno) com valores indo de 0 até 9 (ou seja, dois algarismos de cada um) e pedimos para que os mesmos escolhessem três algarismos. Com esses três algarismos, eles deveriam criar todos os números possíveis. Feito isso, os números que eles criassem deveriam ser colocados na ordem crescente e na ordem decrescente.

O que pudemos perceber nessa atividade foi a dificuldade encontrada pelos alunos em construir estratégias para obter todas as possibilidades. A maioria dos alunos teve dificuldades em montar todas as sequências numéricas possíveis com os três algarismos que eles escolheram. Dissemos para eles que poderiam ser criados seis números diferentes. Muitos deles repetiram o mesmo número para poder escrever seis números. Percebemos que os alunos pequenos têm dificuldade em fixar um algarismo e variar os outros dois. Eles conseguem perceber a diferença entre dois números compostos pelos mesmos algarismos, em que a posição dos mesmos é diferente. Entretanto, quando estão montando a sequência numérica, acabam não utilizando essa possibilidade.

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio já estejam postos desde o ano 2000, ainda encontramos escolas que trabalham os conteúdos de forma tradicional, descontextualizada, dando ênfase à aplicação de fórmulas para o ensino dos conteúdos matemáticos. Nesse contexto, os alunos acabam aprendendo a resolver exercícios apenas aplicando fórmulas e seguindo modelos, memorizando passos a serem seguidos, muitas vezes sem entender o que de fato estão fazendo. Esses alunos, quando se deparam com exercícios onde não podem aplicar a fórmula diretamente, acabam por não conseguir resolvê-lo, por não apresentarem ferramentas para isso.

Relativamente ao ensino de Combinatória, creio que o ensino focado na aplicação de fórmulas limita o desenvolvimento do pensamento combinatório. O problema desse método é que muitas vezes o aluno acaba se utilizando de artifícios para identificar o tipo de agrupamento solicitado e aplicar a fórmula correspondente. Ele apenas decora passos mecânicos sem compreender o que de fato está calculando. Resulta disso que, se o exercício for um pouco mais complexo, fugindo dos exercícios tradicionais de combinatória, o aluno terá dificuldade em compreender e construir estratégias de resolução.

O que realmente importa para resolver de maneira satisfatória um exercício de combinatória é de fato identificar quais as operações que o exercício pede. Alguns exercícios podem ser resolvidos com operações simples de multiplicação, ou até mesmo de adição. Outros exigem um pensamento mais elaborado, nos quais, muitas vezes, temos que utilizar uma combinação de agrupamentos diferentes. Um dos aspectos que devem ser considerados é se a ordem é importante ou não. É necessário identificar o que realmente está variando no problema: por exemplo, se um exercício pede para formar uma senha com quatro dígitos, o que variam são os dígitos utilizados para preencher cada um dos quatro espaços da senha, ou seja, o número de espaços a serem preenchidos não muda, o que mudam são as possibilidades de preenchimento dos mesmos.

Penso que a aprendizagem ficará mais efetiva se abordarmos o assunto utilizando situações-problema, iniciando por casos que possam ser resolvidos através da contagem direta. Quando trabalhamos com números pequenos, os alunos conseguem visualizar melhor todas as possibilidades, utilizando como ferramentas auxiliares as listagens, árvores de possibilidades, diagramas, tabelas, etc. Essas representações e estratégias facilitam o entendimento do raciocínio necessário para resolver o problema em questão. Nesse sentido, os alunos ganham confiança para resolverem os exercícios e desenvolverem estratégias de resolução. Quando os alunos já possuírem as ferramentas necessárias para a resolução dos exercícios sem a utilização das fórmulas, o professor pode mostrar que existe uma outra forma de resolver aquele exercício. Nesse sentido, cabe ao aluno decidir pela utilização da fórmula ou não.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (BRASIL. MEC. SEF, 1998) destacam a importância dos alunos desenvolverem o pensamento combinatório através da resolução de problemas de contagem, utilizando o princípio multiplicativo e o princípio fundamental da contagem. Para que isso ocorra, sugerem que esses assuntos sejam trabalhados já nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

O professor das séries iniciais já pode introduzir problemas de combinatória utilizando situações-problema envolvendo contagem direta. O exemplo que citei acima foi trabalhado com alunos dos anos iniciais. Para resolver a situação-problema, os alunos não necessitavam ter estudado Análise Combinatória, precisavam construir estratégias para enunciar todas as sequências numéricas com os algarismos que escolheram.

Outro tipo de situação em que podemos trabalhar o princípio fundamental da contagem e o princípio multiplicativo é quando trabalhamos a multiplicação. A multiplicação pode ser trabalhada como uma combinação: por exemplo, tenho duas calças e três camisetas, de quantas maneiras diferentes posso me vestir usando uma calça e uma camiseta?

O desenvolvimento do pensamento combinatório é uma ferramenta auxiliar para a resolução de problemas, uma vez que, através dele, é possível prever situações, quantificar possibilidades, visualizar todas as alternativas para uma determinada situação, combinar elementos diversos.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Para realizar esse estudo, vamos nos basear na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e nos estágios de desenvolvimento cognitivo definidos por Piaget, dando ênfase ao pensamento formal.

Posteriormente, iremos comentar algumas pesquisas sobre o ensino de Análise Combinatória, as quais nos auxiliaram a desenvolver esta pesquisa.

3.1 PENSAMENTO FORMAL - PIAGET

Segundo Inhelder e Piaget (1976)

> O aparecimento do pensamento formal é condicionado [...] pela constituição de uma combinatória. [...] Essa combinatória se manifesta pela possibilidade de ligar todas as associações ou correspondências de base, a fim de tirar as relações de implicação, de disjunção, de exclusão, etc., que constituem por essas ligações. (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 81).

Segundo Flavell (1988, p. 207), para Piaget, as operações formais constituem-se no ápice do desenvolvimento intelectual, o estado final de equilíbrio para o qual a evolução intelectual se dirige desde o nascimento.

Nesse sentido, a criança vai evoluindo física e intelectualmente, passando por diversos estágios, os quais Piaget definiu como pré-operacional, operacional concreto e operacional formal. Nosso foco será o estágio operacional formal.

Conforme Flavell (1988),

> a criança pré-operacional tende a funcionar apenas em termos da realidade que tem diante dos olhos. No período operacional concreto [...] a criança começa a estender o pensamento do real para o potencial [...]. Essa evolução é uma consequência natural da formação de estruturas operacionais concretas. (FLAVELL, 1998, p. 208).

No período das operações concretas, a criança não precisa mais ver os objetos para poder operar com os mesmos. Nesse período, a criança já consegue ter uma visualização mental do objeto com o qual ela está operando, por exemplo, a criança já tem conhecimento de que o número 5 representa a quantidade 5. Porém, a criança ainda não consegue pensar em todas as possibilidades para uma determinada situação na qual ela tenha que combinar vários elementos. Para a criança desse nível, é difícil pensar em todas as combinações possíveis. Ela, em geral, combina um elemento com todos os outros, e depois junta todos os elementos. Entretanto ainda não surgem as combinações dois a dois, três a três, quatro a quatro, etc.

Inhelder e Piaget realizaram alguns experimentos com crianças de vários níveis cognitivos, com o intuito de verificar se os sujeitos dos níveis pré-operacional e operacional concreto

> descobrem um sistema combinatório, para as necessidades da experiência, e que demonstrariam independência dessa combinatória com relação às lógicas das proposições, ou, ao contrário, seria necessário esperar o estádio formal para ver a constituição dessa combinatória experimental. (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 81).

Para a verificação de suas proposições, Inhelder e Piaget pediram que os sujeitos combinassem corpos químicos (experimento I):

> Apresentamos à criança quatro frascos semelhantes que contém líquidos incolores, inodoros e perceptivamente idênticos, que numeramos da seguinte forma: 1) ácido sulfúrico diluído; 2) água; 3) água oxigenada; 4) tiosulfato; além disso, uma garrafa com conta-gotas, que denominamos g, tem iodeto de potássio. Sabemos que a água oxigenada oxida o iodeto de potássio num meio ácido. A mistura 1 + 3 + g dá, por isso, uma cor amarela. A água (2) é neutra e sua adição não muda a cor. O tiosulfato (4) descolore a mistura (1 + 3 + g). O experimentador apresenta dois frascos ao sujeito, um com (1 + 3), o outro com (2). Diante do sujeito, o experimentador despeja algumas gotas de g em cada um dos vasos, e provoca a verificação das reações diferentes. O sujeito deve, depois, refazer a cor amarela, usando à vontade os frascos 1, 2, 3, 4 e g. (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 81-82).

Segundo Inhelder e Piaget (1976),

> É interessante notar até que ponto a atitude espontânea, quando da aparição das operações concretas, é da associação sistemática do elemento *g* com todos os outros (no caso do experimento I), mas sem outra combinação. Se sugerimos ao sujeito que combine vários fatores ao mesmo tempo, provocamos algumas tentativas empíricas, mas que não tem seguimento. [...] Portanto, o interesse das reações desse estádio é que esses sujeitos, de posse das operações de multiplicação lógica de correspondência biunívoca, não chegam à ideia de construir combinações dois a dois ou três a três, etc. (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 84).

Embora as crianças no período operacional concreto consigam realizar algumas combinações, elas não conseguem pensar em todas as combinações possíveis por que, neste nível, ainda não existe uma operação combinatória propriamente dita, mas sim correspondências e seriações (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 85).

Já no período operacional formal, o adolescente começa a imaginar todas as relações possíveis para resolver um determinado problema. Dentre todas as relações possíveis, o adolescente procura verificar quais dessas relações são verdadeiras: “Portanto, a realidade é concebida como um subconjunto especial dentro da totalidade de coisas que os dados permitem admitir como hipótese” (FLAVELL, 1988, p. 209).

O pensamento formal passa a ter um caráter fundamentalmente hipotético-dedutivo. O adolescente começa a operar no reino hipotético. Ao tentar encontrar o real dentro do possível, o adolescente precisa considerar o possível como um conjunto de hipóteses que devem ser confirmadas ou rejeitadas.

Segundo Flavell (1988),

> O pensamento formal é, acima de tudo, um pensamento proposicional. As importantes entidades que o adolescente manipula, ao raciocinar, deixaram de ser os dados rudimentares da realidade e passaram a ser afirmações – proposições – que ‘contem’ estes dados.
> Esta propriedade do pensamento operacional formal está intimamente relacionada com a orientação recém-desenvolvida para o possível e o hipotético. [...] (o adolescente) isola sistematicamente todas as variáveis individuais e todas as combinações possíveis dessas variáveis. [...] Ele submete as variáveis a uma análise combinatória, método que garante que o possível será investigado exaustivamente. (FLAVELL, 1988, p. 210).

Todas essas características do pensamento formal “fazem com que ele seja um bom instrumento de *raciocínio científico*” (FLAVELL, 1988, p. 213) [grifo do autor].

> A atitude hipotético-dedutiva, o método combinatório e outros atributos do pensamento formal lhe fornecem os instrumentos necessários para isolar as variáveis que podem ser causais, manter um fator constante a fim de determinar a ação causal do outro, e assim por diante. Ele não é apenas capaz de imaginar as várias transformações que os dados permitem e experimentá-las empiricamente; é capaz também de interpretar lógica e corretamente os resultados desses testes empíricos. (FLAVELL, 1988, p. 213).

Portanto, para Piaget, o pensamento formal tem como uma de suas características o surgimento de um método combinatório ou de uma análise combinatória. O sujeito passa a analisar as situações hipotéticas levando em consideração todas as possibilidades. Ao fixar alguns elementos e variar outros, de modo sistemático, consegue perceber também o comportamento de cada elemento envolvido na situação e estabelecer relações de causa e efeito.

3.2 MULTIPLICAÇÃO E ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS:

Conforme Nunes et alii (apud BACKENDORF, 2010) a ideia de que a origem dos conceitos de multiplicação se deu pela ideia da adição repetida de parcelas iguais é questionada, pois essa conexão entre a adição e a multiplicação não é suficiente para explicar o conceito de multiplicação.

> Pode-se utilizar a adição repetida nos cálculos de multiplicação onde um dos fatores é inteiro, pois a multiplicação é distributiva em relação à adição; no entanto, a adição e a multiplicação são operações com significados distintos e que envolvem também raciocínios de natureza distinta. [...] o invariante conceitual do raciocínio aditivo é a relação parte-todo, (e) o invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é a existência de uma relação fixa entre duas variáveis.
> [...] Qualquer situação multiplicativa envolve duas quantidades em relação constante entre si.
> [...] Conforme Nunes e Bryant (1997, p. 144) no raciocínio multiplicativo há uma invariável presente que não está presente no raciocínio aditivo. Um novo conceito matemático, o conceito de proporção tem como base a correspondência um-para-muitos. (BACKENDORF, 2010, p. 52-53).

Segundo Backendorf (2010, p. 53), para manter uma proporção invariável, utiliza-se a replicação, “que envolve somar a cada conjunto a unidade correspondente para o conjunto”, isto é, para cada unidade aumentada num conjunto, o outro aumenta na mesma proporção, de modo que a correspondência um-para-muitos seja mantida. Também pode ocorrer a replicação inversa, em que removem-se as unidades, mantendo-se a proporção. Denomina-se fator escalar o número de replicações aplicadas a dois conjuntos cuja proporção é constante.

Para Backendorf (2010, p. 53) “nas situações em que aparece o esquema de correspondência um-para-muitos, ocorre a ação direta de elementos de um conjunto para com os elementos de outro conjunto relacionado com o primeiro.”

Vergnaud define a Teoria dos Campos Conceituais como sendo “uma teoria cognitivista que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo as que dependem da ciência e da técnica.” (VERGNAUD, 1990, p. 1).

Embora a Teoria dos Campos Conceituais tenha sido criada para explicar o processo de conceitualização das estruturas aditivas, multiplicativas, relações número-espaço e álgebra, ela não é específica da Matemática.

Um campo conceitual pode ser definido como sendo,

> ao mesmo tempo, um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações. (VERGNAUD, 2009, p. 29).

Para Vergnaud (1990, p. 1) “um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se nos interessamos por sua aprendizagem e seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.”

Um esquema é definido como sendo “a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dadas. É nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.” (VERGNAUD, 1990; 2009).

Conforme Vergnaud (1990, p. 3): “O funcionamento cognitivo dos alunos envolve operações que se automatizam progressivamente e decisões conscientes que permitem perceber os valores particulares das variáveis de situação.” Isto é, à medida que os alunos se deparam com situações-problema semelhantes, eles “acionam” os mesmos esquemas para resolvê-los. Essa repetição faz com que as operações sejam automatizadas pelos alunos.

Para Vergnaud, segundo Piaget, “os esquemas estão no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas: assimilação e acomodação.” (VERGNAUD, 1990, p. 3). Os esquemas sempre trazem uma conceitualização implícita.

Vergnaud (2009, p. 23) define “conceito-em-ação” como sendo um conceito pertinente na ação em situação e “teorema-em-ação” como sendo uma proposição tida como verdadeira na ação em situação. Todavia, “um conceito-em-ação não é, absolutamente, um conceito, nem um teorema-em-ação é um teorema. Em ciências, conceitos e teoremas são explícitos, e podemos discutir sua pertinência e veracidade. O mesmo não se dá, necessariamente, para as invariantes operatórias” (VERGNAUD, 1990, p.8).

Para Vergnaud (1990, p. 10), um campo conceitual é um conjunto de situações. Por exemplo, o campo conceitual das estruturas multiplicativas é o conjunto das situações que requerem uma multiplicação, divisão, ou uma combinação destas operações.

> [...] o campo conceitual das estruturas multiplicativas é, ao mesmo tempo, o conjunto de situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações. (VERGNAUD, 1990, p. 10).

Segundo Vergnaud (1990, p.14), cabe destacar que a análise das estruturas multiplicativas é diferente da das estruturas aditivas. “As relações de base mais simples não são mais ternárias e, sim, quaternárias, visto que os mais simples problemas de multiplicação e divisão implicam a proporção de duas variáveis, uma em relação à outra.”

Esta relação permite a geração de quatro problemas elementares: multiplicação, divisão-partição, divisão-cotação e quarta-proporcional. Esses problemas apresentam dificuldades muito diferentes conforme os valores numéricos empregados e as experiências do sujeito.

Segundo Backendorf (2010)

> Vergnaud (1983) localiza os problemas multiplicativos no campo conceitual das estruturas multiplicativas. [...] segundo ele, as estruturas multiplicativas podem ser vistas como um conjunto de problemas, que podem ser classificados em três subtipos:
> a) Isomorfismos de Medidas;
> b) Produto de Medidas;
> c) Proporção Múltipla. (BACKENDORF, 2010, p. 47)

Conforme Backendorf (2010), para Vergnaud o isomorfismo de medidas é

> um conjunto de problemas que envolvem a proporção direta e simples entre dois espaços de medida M_1 e M_2. Esta estrutura descreve um grande número de situações do cotidiano e técnicas, que estabelecem relações proporcionais entre conjuntos de mesma cardinalidade. (BACKENDORF, 2010, p. 47-48).

Problemas de proporção simples envolvem apenas duas variáveis e podem ser modelados por uma função linear. Embora esses problemas possam ser resolvidos aplicando as propriedades do coeficiente proporcional[1], o caminho mais natural para os alunos é aplicar as propriedades isomórficas da função linear[2].

O produto de medidas “é a estrutura que consiste numa composição cartesiana entre dois espaços de medida e um terceiro. Ele descreve um satisfatório número de problemas relacionados à área, volume, produto cartesiano, trabalho e vários outros conceitos físicos.” (VERGNAUD apud BACKENDORF, 2010, p. 50).

Essa estrutura possui três variáveis envolvidas e é representada por uma dupla correspondência, isto é, uma proporção dupla. No produto de medidas, a unidade do produto expressa o produto dos elementos unitários.

---

[1] Se $f(x) = ax$, então $x = \frac{f(x)}{a}$.

Para Vergnaud (1990)

> a combinação de duas proporções não conduz aos mesmos problemas cognitivos se a combinação se faz por encadeamento das funções que ligam as variáveis duas a duas: *x* proporcional a *y*, *y* proporcional a *z*, nem se ela se faz por produto: *z* proporcional a *x* e a *y*; *x* e *y* independentes entre si. Trata-se aqui de uma estrutura de proporção dupla.
> Nunca é demais destacar a extrema importância epistemológica da proporção dupla (e múltipla) para a geometria, a física, as probabilidades e a estatística. (VERGNAUD, 1990, p. 15-16).

A proporção múltipla é

> uma estrutura muito similar ao produto de medidas do ponto de vista aritmético; nessa estrutura o espaço de medida M_3 é proporcional a dois espaços de medidas diferentes e independentes. [...] a função bilinear é um modelo adequado para o produto de medidas e a proporção múltipla. A partir dela resolvem-se situações mais complexas do que com a função linear. (VERGNAUD apud BACKENDORF, 2010, p. 51).

A multiplicação é, portanto, mais complexa do que a adição, pois envolve um número maior de variáveis para a sua resolução. As estruturas multiplicativas envolvem relações, não mais ternárias, mas sim quaternárias, uma vez que mesmo as situações mais simples de multiplicação e divisão envolvem a proporção entre duas grandezas.

3.3 ESTUDOS SOBRE ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Aqui, apresentaremos alguns trabalhos que falam sobre o processo de Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória.

Na dissertação “O uso de jogos na resolução de problemas de contagem: um estudo de caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre” (CARVALHO, 2009), o principal objetivo é proporcionar aos alunos uma variedade de situações-problema que os motivem a pensar organizadamente, utilizando diversas estratégias para isso, fugindo dos exercícios corriqueiros apresentados nos livros didáticos. Foi desenvolvida uma sequência didática fundamentada em teorias psicológicas e educacionais, utilizando como recursos os jogos.

A pesquisa foi desenvolvida na classe do professor-pesquisador. Tratava-se de uma escola militar, na qual a disciplina é muito valorizada. O recurso dos jogos foi utilizado

---

[2] $f(x+x') = f(x) + f(x')$ e $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

simultaneamente às aulas expositivas, com o objetivo de diversificar as situações-problema envolvendo situações de contagem.

O autor concluiu que o desempenho dos alunos foi positivo. A análise jogo a jogo indicou um aumento do aproveitamento da turma frente às novas situações propostas. Segundo ele, ao propor diversas classes de situações que retornavam ao mesmo campo conceitual, neste caso, estruturas multiplicativas em problemas de contagem, os alunos utilizavam esquemas já empregados em jogos anteriores, reformulando-os ou adaptando-os à nova realidade. O mesmo aconteceu com os invariantes operatórios manifestados em cada atividade.

O autor salienta não ter dúvidas de que a sequência didática colaborou para que os alunos desenvolvessem estratégias de contagem, as quais serão úteis quando os mesmos chegarem ao segundo ano do Ensino Médio.

O autor acredita que, para os alunos da pesquisa, a introdução da Análise Combinatória no segundo ano do Ensino Médio será de melhor compreensão se comparada aos estudantes que não tiveram contato prévio com esse assunto.

Também percebeu-se uma melhora no relacionamento entre a turma, pois os alunos trabalharam em dupla praticamente durante todo o tempo da pesquisa. O autor comenta que percebeu os alunos mais comunicativos e expondo mais suas ideias ao grande grupo, analisando cada situação de forma cooperativa.

Na dissertação “Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas” (SOUZA, 2010), a autora descreve uma pesquisa em Educação Matemática, fundamentada na teoria de Thomas A. Romberg. O objetivo principal dessa pesquisa era criar uma proposta de trabalho para abordar Análise Combinatória na sala de aula, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A autora apresenta uma pesquisa histórica sobre a Análise Combinatória e, também, uma análise de livros didáticos de várias décadas, a fim de verificar como o assunto é abordado nesses livros.

Segundo a autora, a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação significa que o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente, durante o processo de construção de um determinado conceito ou conteúdo e a avaliação deve ser integrada ao ensino, contribuindo, assim, para a melhora da aprendizagem.

A pesquisa foi realizada com os alunos da professora-pesquisadora, em aulas de matemática e também com professores, educadores matemáticos e alunos de licenciatura em matemática em minicursos e oficinas. A professora-pesquisadora relata que apresentou sua pesquisa em congressos e encontros de Educação Matemática, a fim de discutir com outros pesquisadores da área sobre o desenvolvimento de sua pesquisa.

A autora afirma que a metodologia de ensino adotada proporcionou aos participantes um crescimento na aprendizagem. Ela percebeu que, utilizando esse método, os participantes do projetos desenvolvidos puderam construir seus conceitos de Análise Combinatória sem precisar recorrer ao uso mecânico de fórmulas.

No artigo "A resolução de problemas multiplicativos de produto de medidas: um caso exemplar" (TEIXEIRA; VASCONCELOS; GUIMARÃES, 2009) as autoras descrevem e analisam os procedimentos empregados por um aluno do 6º ano do Ensino Fundamental ao resolver problemas multiplicativos. Segundo elas, essa escolha se justifica pois as respostas apresentadas pelo mesmo, em uma pesquisa realizada entre alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, revelaram algumas categorias de processos cognitivos envolvidos na resolução desse tipo de problema.

As autoras concluíram que a multiplicação é uma operação bastante complexa e requer processos cognitivos abstratos.

Na dissertação "Investigando os fatores que influenciam o Raciocínio Combinatório em Adolescentes de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental" (ESTEVES, 2001) o principal objetivo era estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de análise combinatória em adolescentes de 14 anos de idade, cursando a última série do Ensino Fundamental. Foi desenvolvida uma sequência didática fundamentada em teorias psicológicas e educacionais, partindo de situações-problema nas quais era possível utilizar a contagem direta. O grau de dificuldade das situações-problema foi aumentando à medida em que foi avançando a aplicação da sequência didática.

O estudo foi realizado com dois grupos distintos, os quais foram denominados grupo experimental e grupo de referência (alunos do segundo ano do Ensino Médio). Com o grupo de referência, a autora utilizou a abordagem usual do conteúdo de análise combinatória.

A autora concluiu que, à medida que os alunos aprenderam os processos aritméticos e algébricos, eles abandonaram o uso de representações gráficas, como a árvore de possibilidades. Uma das possíveis causas pode ser atribuída ao contrato didático que valoriza o uso do processo formal (algoritmo): "Para eles, o uso da representação chega a ser uma ruptura deste contrato didático onde apenas os alunos 'atrasados' é que necessitam representar para a seguir fazer o uso ou não do algoritmo". (ESTEVES, 2001, p. 191-192)

No artigo “Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade” (LOPES; REZENDE, 2010), o objetivo é desenvolver uma proposta de ensino para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidades através de um jogo e utilizando-se da metodologia da resolução de problemas.

Os autores criaram um jogo, semelhante ao jogo da velha, o qual denominaram de “jogo do quadrado”. Eles sugerem a exploração desse jogo em sala de aula, utilizando a metodologia da resolução de problemas, sempre procurando abordar as situações possíveis de vitória e derrota de cada jogador, de acordo com as estratégias de cada um dos jogadores em cada jogada.

Nesse sentido, os autores esperam que os alunos consigam pensar em todas as possibilidades de jogada, desenvolvendo, com isso, o pensamento combinatório. Também ao verificar as possibilidades de vitória e derrota de cada jogador, de acordo com as estratégias adotadas a cada jogada, os autores pretendem trabalhar a ideia de probabilidade.

No artigo “O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica” (PESSOA; BORBA, 2010), as autoras discutem a importância de se desenvolver o raciocínio combinatório entre os alunos da Educação Básica.

As autoras apresentam conceitos e definições sobre o conteúdo de Análise Combinatória e baseiam-se em teorias cognitivistas e educacionais.

Elas relatam os resultados de uma pesquisa realizada com alunos de duas escolas públicas e duas particulares, que atendem crianças dos 7 aos 17 anos. As mesmas analisaram o desempenho dos alunos em problemas envolvendo arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano, por faixa etária e por tipo de escola (pública ou particular).

Com esse trabalho, as autoras buscaram defender a tese de que o desenvolvimento do raciocínio combinatório ocorre em um longo período de tempo, influenciado por aspectos tanto extra-escolares, como vivências escolares. Elas destacam a importância de se considerarem, em sala de aula, os variados significados, as várias relações e propriedades e as diversas representações simbólicas que compõem as situações combinatórias, com o objetivo de auxiliar na aquisição desse tipo de raciocínio.

No trabalho de conclusão de curso “Ensino de Combinatória: Problemas de Divisão, Teoria de Vergnaud e Metodologia da Engenharia Didática” (CEMIN, 2008), o objetivo foi repensar o ensino usual do conteúdo de Análise Combinatória e criar uma metodologia capaz de auxiliar no processo de aprendizagem. A autora focou o seu trabalho nos exercícios que necessitam de uma divisão para poderem ser resolvidos. A autora também fez uma análise de livros didáticos que abordam esse conteúdo.

Essa pesquisa foi baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e utilizou-se a metodologia da Engenharia Didática. Os sujeitos da pesquisa foram dois grupos de alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, um grupo de estudantes do 5º semestre e o outro de estudantes do 7º semestre. O segundo grupo serviu como grupo de referência.

Depois de realizar a análise prévia, a autora elaborou uma proposta didática, em que sugeriu uma metodologia para uma abordagem diferenciada aos problemas que envolvem divisão, utilizando para isso o conceito de divisão por quotas.

Segundo a autora, todos os sujeitos participantes da pesquisa aprovaram o método proposto pela pesquisadora, pois o mesmo esclarece os motivos pelos quais é necessário realizar a divisão. Entretanto, alguns estudantes informaram que não utilizariam esse método para a resolução de problemas semelhantes.

As pesquisas nos mostram que a aplicação de fórmulas não incentiva e não substitui a aquisição do pensamento multiplicativo e do raciocínio combinatório. Trata-se de um raciocínio complexo, que é mais facilmente adquirido se o aluno tiver contato com vários tipos de situações-problema. Para tanto, vários autores sugerem o uso de jogos para desenvolver este tipo de raciocínio, pois, ao jogarem, os alunos necessitam criar estratégias para vencer o jogo.

4 METODOLOGIA

Utilizarei um estudo de caso como metodologia para embasar a pesquisa. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 110),

> O estudo de caso busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando as interpretações ou a análise do objeto, no contexto onde ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização.

Nesse sentido, creio que essa metodologia é a que mais se aproxima da minha pesquisa. Com esta pesquisa, pretendo verificar como alunos do Ensino Médio resolvem problemas que envolvem o raciocínio combinatório e se o fato de alguns já terem estudado o assunto através da aplicação da fórmula facilita o desenvolvimento deste tipo de raciocínio.

Procurarei seguir uma abordagem qualitativa. A abordagem qualitativa “[...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação encontrada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”. (BOGDAN; BIKLEN apud BONADIMAN, 2007, p. 62). Além disso, “os métodos qualitativos poderão observar, diretamente, como cada indivíduo, grupo ou instituição experimenta, concretamente, a realidade pesquisada.” (GOLDEMBERGER apud BONADIMAN, 2007, p. 62).

4.1 PLANEJAMENTO DAS OFICINAS

Escolhemos realizar oficinas com alunos do Ensino Médio, com a proposta de apresentar uma outra forma de fazer matemática, na qual o aluno deve ser agente de sua aprendizagem. Nosso maior interesse era verificar que tipo de raciocínio os alunos utilizam ao resolverem problemas envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem e o Princípio Multiplicativo. Nesse sentido, decidimos utilizar como recursos dois jogos sugeridos por Carvalho (2009), o Jogo da Senha e o Jogo Bicolorido, ambos com o objetivo de avaliar e desenvolver o pensamento combinatório e o raciocínio lógico.

Segundo Carvalho (2009, p. 31)

> O uso de jogos como recursos às aulas de matemática favorece um ambiente adequado para a resolução de problemas, aplicação e exploração de conceitos matemáticos e/ou para um aprofundamento destes. Assim, torna-se relevante a prática de jogos nas aulas de matemática, pois esses propiciam momentos de desbloqueios dos estudantes que, normalmente, tem aversão a essa disciplina. (CARVALHO, 2009, p. 31)

As oficinas foram realizadas com dois grupos de alunos do Ensino Médio do Instituto Estadual Rio Branco. O grupo A era uma turma de segundo ano do Ensino Médio que havia tido contato recentemente com o estudo de Análise Combinatória, através da aplicação de fórmulas. O grupo B era composto por alunos convidados a participar de uma atividade extra-classe, que não necessariamente teriam estudado o conteúdo de Análise Combinatória.

Planejamos trabalhar da mesma forma com os dois grupos. Escolhemos começar a oficina com o jogo da senha: num primeiro momento, distribuindo as cartelas do jogo da senha, juntamente com uma folha explicando as regras do jogo; antes dos alunos começarem a jogar, faríamos uma leitura coletiva das regras, a fim de esclarecer eventuais dúvidas que surgissem.

Planejamos dar aos alunos um tempo, de aproximadamente 35 minutos, para jogarem. Na sequência, seria distribuído um questionário contendo perguntas relativas ao jogo e os alunos teriam, aproximadamente, 15 minutos para responderem o questionário.

Logo após, planejamos distribuir as cartelas do jogo bicolorido, juntamente com uma folha explicando as regras do jogo, repetindo os procedimentos listados para o outro jogo.

Os questionários serviriam de base para a análise do desenvolvimento do pensamento combinatório nesse grupo de alunos.

Nosso objetivo era analisar:

- Que tipo de representações os alunos utilizam quando resolvem os exercícios que envolvem problemas de contagem?
- Que tipo de estratégias os alunos utilizam para responder ao questionário? Eles conseguem pensar multiplicativamente?
- Existe diferença na abordagem dos problemas pelos dois grupos? O fato do grupo A já ter tido contato com o conteúdo em questão auxilia no momento da resolução dos problemas?

4.2 IDENTIFICAÇÃO DOS JOGOS

4.2.1 Jogo da Senha

Material do jogo:

Adaptado do jogo original, o material para cada dupla será composto por:

1. Tabuleiro;

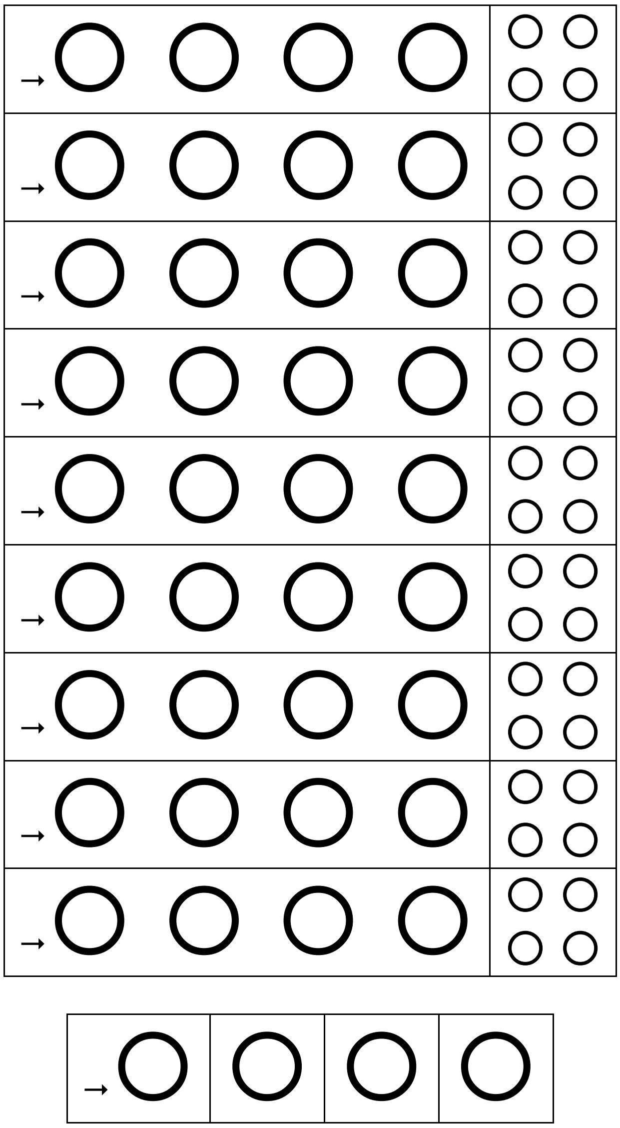

Figura 1 – Tabuleiros do Jogo da Senha

2. Caneta hidrocor.

Regras do jogo:

Antes do início do jogo, escolhe-se quem será o desafiante, ou seja, aquele que comporá a senha, e o desafiado, aquele que tentará descobri-la. Escolhidos os papéis de cada jogador, seguem-se as regras:

a) O desafiante compõe uma senha e colore os espaços reservados para a senha seguindo a direção da seta. Para a composição da senha, devem ser escolhidas 4 das 6 cores previamente estipuladas. Para diminuir o número de possibilidades, foi combinado que as cores não poderiam se repetir.

b) O desafiado, então, forma uma senha que acredita ser a formada pelo desafiante. Caso não tenha acertado a senha, o desafiante dá algumas dicas na coluna da direita do tabuleiro do desafiado. Se o desafiado acertar alguma cor e a posição em que ela está, o desafiante pinta um dos círculos de preto. Se o desafiado acertar apenas alguma cor, mas não sua posição, o desafiante deixa algum dos círculos em branco. Caso a senha apresentada pelo desafiado contenha alguma cor que não coincide com a do desafiante, este marca um "*x*" em algum dos círculos.

c) O desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha em nenhuma das nove oportunidades, ele contabiliza nove pontos.

d) Alternadamente, os jogadores invertem seus papéis. O jogo segue da mesma forma e será considerado vencedor aquele que descobrir a senha do outro em menos tentativas, ou seja, aquele que obtiver o menor número de pontos.

4.2.2 Jogo Bicolorido

Material do jogo:

1. Tabuleiro;

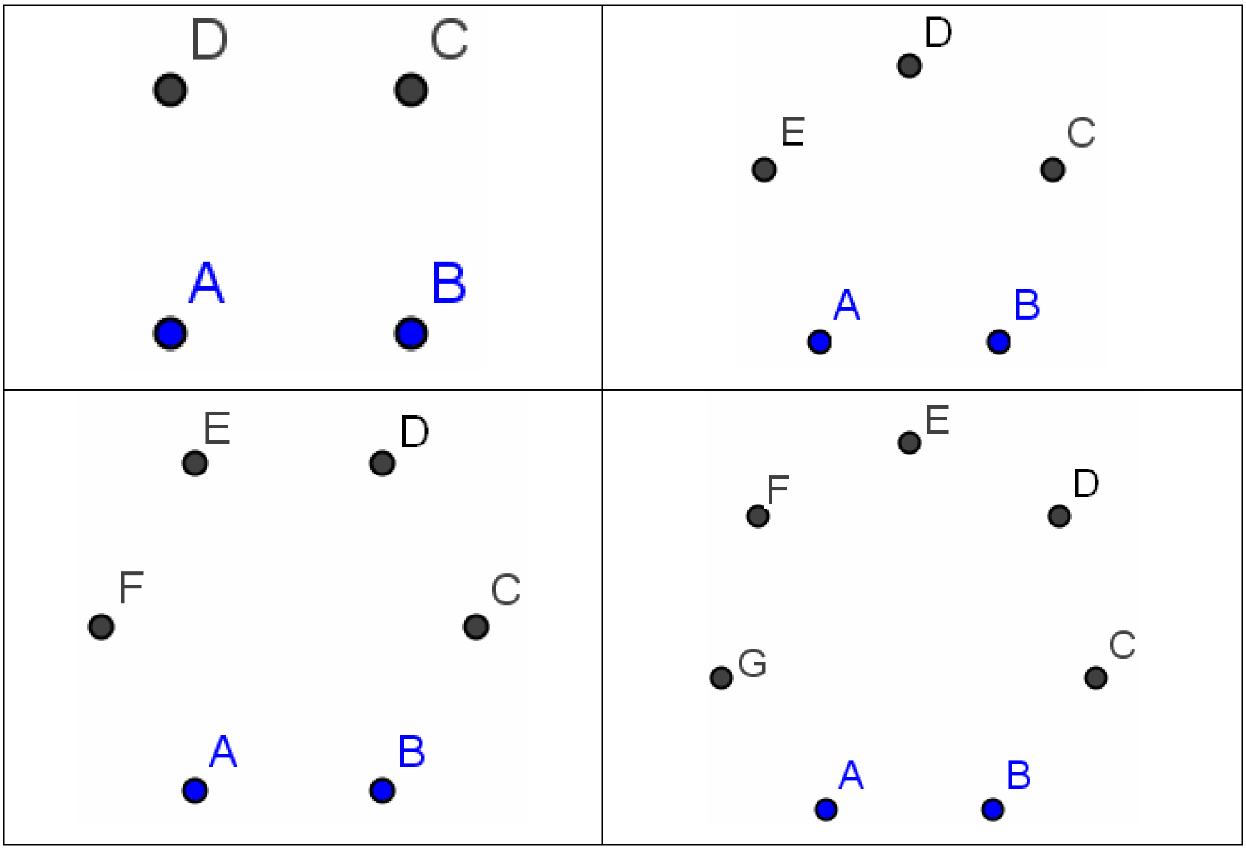

Figura 2 – Tabuleiros jogo Bicolorido

2. Caneta hidrocor.

Regras do jogo:

Escolhe-se o jogador a fazer a primeira jogada e o tabuleiro a iniciar o jogo. Combinamos com os alunos de começar com o tabuleiro de 4 pontos e ir aumentando, gradativamente, a cada término de jogo.

a) Os jogadores, cada um com uma caneta hidrocor de cor distinta, deverão, sucessiva e alternadamente, construir segmentos de reta com extremos nos pontos dados no início do jogo. Esses segmentos podem ser lados ou diagonais.
b) Será declarado vencedor aquele jogador que primeiro fechar um triângulo monocromático com a cor de sua caneta.

4.3 SUJEITOS DO ESTUDO

Como mencionado anteriormente, esta pesquisa foi realizada com alunos do Ensino Médio do Instituto Estadual Rio Branco. Foram formados dois grupos distintos, denominados de grupo A e grupo B.

O grupo A trata-se de uma turma de segundo ano do Ensino Médio, com aproximadamente 15 alunos, entre 18 e 45 anos, do turno da noite, os quais já haviam estudado o conteúdo de Análise Combinatória, ensinado através da aplicação de fórmulas. A oficina com o grupo A foi realizada no dia 12 de novembro de 2010.

Para compor o grupo B, convidamos os alunos do Ensino Médio do Instituto Estadual Rio Branco, do turno da manhã, para participar das oficinas de matemática que ocorreriam no turno da tarde. Os alunos poderiam se inscrever livremente, até o limite de 15 alunos por oficina. Não foi exigido que os alunos possuíssem conhecimento prévio sobre Análise Combinatória. Porém, apenas três alunos do terceiro Ano do Ensino Médio participaram da oficina sobre Análise Combinatória. A oficina com o grupo B foi realizada no dia 04 de novembro de 2010.

Cada oficina teve duração aproximada de 2 horas.

4.4 RELATO DAS OFICINAS

Com o grupo A, foi realizado, antes da oficina, um trabalho extra-classe de resolução de situações-problema, que eles poderiam resolver utilizando os conceitos de permutação, combinação ou arranjo.

Na oficina “Descobrindo a análise combinatória através de jogos”, os alunos jogaram apenas o Jogo da Senha. Como os alunos estavam bastante empolgados durante o jogo, não quisemos interrompê-los. Em virtude disso, acabamos não conseguindo aplicar o Jogo Bicolorido.

No dia estavam presentes 13 alunos. Foram formados três trios e duas duplas. Os alunos se envolveram na atividade, com exceção de um aluno. Esse aluno, num primeiro momento, disse que não entraria em nenhum grupo, pois era “anti-social”. No início da atividade, ele ficou sozinho e “interpretou” os dois jogadores, como se estivesse alternando os dois papéis. Porém, com o passar do tempo, o aluno resolveu entrar em um grupo e trabalhar juntamente com os colegas; mas não respondeu ao questionário.

Alguns grupos entenderam rapidamente as regras do jogo, outros nem tanto. Foi necessário explicá-las várias vezes, algumas para o grande grupo, outras individualmente, até que os alunos as entendessem. A maior dificuldade apresentada pelos grupos foi em relação às dicas que o desafiante deveria dar aos desafiados. Percebi que, mesmo após várias partidas, ainda havia alunos que não estavam informando as dicas corretamente, conforme estava especificado nas regras do jogo. Alguns grupos, ao invés de dar as dicas conforme as regras, estavam dando as dicas oralmente. Outros criaram um novo sistema de signos para dar as dicas das senhas, substituindo, por exemplo, a bolinha branca por uma bolinha com “*x*” para indicar uma cor certa na casa errada. Penso que isso acabou dificultando um pouco os desafiados nas tentativas de encontrarem a senha correta.

Percebi que os alunos, em geral, tinham dificuldades em criar estratégias para descobrir a senha correta. Tudo indica que eles não conseguiam pensar em todas as possibilidades. Aparentemente eles não conseguiam fixar alguns elementos da combinação de cores e variar outras. Normalmente eles trocavam tudo de lugar.

Por exemplo, em um dos grupos, uma aluna falou “eu já usei todas as cores e ainda tem cor errada”, sem se dar conta de que, ao substituir uma cor na senha, ele poderia ter substituído uma cor certa por uma errada, e assim, continuado a ter cores erradas na sua senha. Aparentemente essa aluna não consegue pensar em todas as possibilidades de sequência de cores. Isso pode significar que a mesma ainda encontra-se no estágio operatório concreto.

Em outro grupo, os alunos também questionaram o desafiante: “em todas as jogadas ele disse que tinha uma cor no lugar certo, mas nenhuma cor se repetiu”. De novo, não perceberam que, de uma jogada para outra, eles poderiam ter trocado a cor certa de lugar, mas acertado outra cor.

Isso parece indicar a dificuldade dos alunos em fixar uma cor, por exemplo, e variar as demais. Alguns, simplesmente, de uma tentativa para outra, mudavam tudo de lugar. Com essa atitude, dificilmente se encontra a senha correta.

Teve um grupo, em especial, que demorou bastante para entender as regras do jogo. Ao invés de dar as dicas pintando os círculos pequenos, eles diziam as cores que estavam certas e no lugar certo, de modo que o jogo terminava na primeira jogada. Isto é, o desafiante criava uma senha, e cada um dos desafiados (neste caso eram dois) tentava adivinhar a senha. O desafiante olhava a combinação de cores dos desafiados e indicava o que eles haviam acertado e o que eles haviam errado, acabando a partida nesse momento. Desse modo, tratava-se apenas de um jogo de adivinhação e de sorte. Depois de algumas intervenções da professora, eles conseguiram entender que o jogo continuava e que as dicas deveriam ser pintadas no espaço adequado para isso, e não fornecidas oralmente.

Esse grupo era formado por três alunos. Quando compreenderam as regras do jogo, eles se organizaram da seguinte maneira: um era escolhido o desafiante e cada um dos outros dois tentava descobrir a senha individualmente. O desafiante olhava a combinação de cores formada por cada um dos desafiados individualmente, e dava as dicas necessárias. Entretanto, os dois desafiados não trocavam informações entre si, ou seja, um não olhava a combinação de cores que o outro formou. É interessante notar que os dois alunos que foram “desafiados” não trabalhavam em equipe, cada um queria descobrir a senha por si só, sem o auxílio do outro. Eles também se preocupavam em não deixar que o outro visse a sua combinação de cores, para não facilitar a descoberta da senha pelo colega. Nesse sentido, eles não se apropriavam das dicas dadas pelo desafiante ao colega, pelo contrário, eles estavam competindo entre si.

Outro detalhe interessante em relação a esse grupo é que eles não perceberam que o número máximo de jogadas permitidas era o número de linhas da cartela do desafiado, ou seja, nove. Quando eles chegavam ao final da cartela, eles simplesmente continuavam o jogo utilizando outra cartela e dando prosseguimento ao jogo. Caso a senha fosse descoberta, eles se reorganizavam em relação a quem seria o próximo desafiante, e continuavam a jogar na mesma cartela que já havia sido utilizada anteriormente, mas que ainda possuía linhas em branco.

No momento de responder ao questionário, os alunos deram preferência ao uso das fórmulas de permutação, combinação e arranjo, pois eles haviam estudado o conteúdo de Análise Combinatória não fazia muito tempo, e nessa ocasião foi dada bastante ênfase à aplicação dessas fórmulas. Nenhum aluno fez o uso de representações gráficas como, por exemplo, diagrama de árvore, enumeração das senhas. Inclusive, na primeira pergunta do questionário, que pedia para que as senhas fossem enumeradas, a maioria dos alunos não escreveu todas as possibilidades, e uma aluna reclamou “tem que escrever tudo isso”.

Já com grupo B foi realizada apenas a oficina “Descobrindo a análise combinatória através de jogos”. Neste dia, estavam presentes apenas três alunos, todos alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

Para o primeiro jogo, o Jogo da Senha, os alunos se organizaram da seguinte maneira, um era escolhido o desafiante, e os outros dois eram os desafiados. Porém, com esse grupo, os desafiados jogavam juntos. Eles entenderam rapidamente as regras do jogo e pudemos perceber que eles aproveitavam as dicas dadas pelo desafiante para tentar descobrir a senha em um número menor de tentativas. Isto é, eles realmente tentavam interpretar as dicas dadas pelo desafiante, fixando uma parte da combinação de cores e variando outra. Com isso conseguiam analisar qual combinação de cores era a melhor para a próxima jogada, descobrindo, assim, a senha mais rapidamente. Foram jogadas duas partidas e, em ambas, a senha foi descoberta em menos de nove tentativas.

Durante a aplicação do questionário, percebeu-se que os alunos não apresentam o hábito de utilizar representações gráficas tipo diagrama de árvore ou enumeração. Um colega licenciando que estava presente durante a aplicação da oficina informou aos alunos sobre a possibilidade deles representarem cada espaço que tinham que preencher com uma das cores por um traço e que eles poderiam colocar, acima dos traços, o número de cores com as quais aquele espaço poderia ser preenchido. Além disso, para calcular a resposta, eles deveriam multiplicar todos os números encontrados. Os alunos fizeram uso dessa dica e resolveram o questionário utilizando esse tipo de representação. É importante salientar que o questionário foi respondido em grupo e que, durante a resolução do mesmo, procuramos discutir com os alunos o porquê da escolha de determinada resposta, a fim de tentar entender como os mesmos estavam pensando. Entretanto, como os alunos responderam ao primeiro questionário de acordo com a dica do colega, na realidade não sabemos se eles entenderam o que estavam calculando, ou apenas seguiram mecanicamente a dica dada.

Figura 3 – Exemplo de representação utilizada para a resolução do questionário do Jogo da Senha

Para responder à primeira pergunta do questionário: “Utilizando 3 cores, por exemplo, azul, laranja e vermelho, para preencher 3 espaços, sem repetição, quantas senhas diferentes podemos formar? Quais são as senhas formadas?”, eles utilizaram cartelas em branco, nas quais montaram as senhas possíveis. O que pudemos perceber nesse momento foi que eles montaram uma combinação possível com as cores dadas e escolheram um valor ao acaso: “dá nove senhas”. Nesse momento, fizemos uma intervenção, exemplificando, com a utilização de uma cartela em branco, que para cada cor que eu fixar na primeira posição, eu tenho duas combinações possíveis com as outras duas cores. Somando todas as possibilidades, o total são 6 combinações possíveis. Salientamos, porém, que os alunos se deram conta do número total de senhas possíveis nesse caso, mesmo antes de montarmos todas as combinações possíveis no papel.

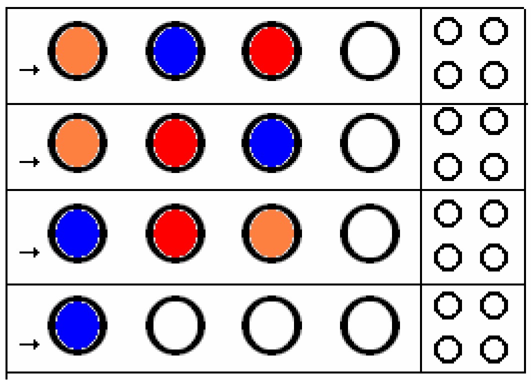

Figura 4 – Exemplo de representação utilizada para a resolução da questão 1 do questionário do Jogo da Senha

No decorrer da resolução do questionário, um dos alunos comentou que conseguiu recordar o conteúdo de Análise Combinatória que tinha estudado na série anterior.

O jogo Bicolorido é um jogo mais dinâmico. Durante a aplicação desse jogo, a organização do grupo teve que mudar um pouco, pois não é possível jogar o jogo em trio. Por isso, a professora jogou com uma das alunas, e os outros dois formaram a outra dupla.

Durante a realização do jogo, não foi possível perceber a criação de estratégias específicas para ganhar o jogo.

Durante a aplicação do questionário, os alunos necessitaram visualizar, no papel, o número total de segmentos que se formavam. Para isso, utilizaram os tabuleiros em branco, unindo os pontos em cada um dos tipos de tabuleiros. No momento da contagem do número de diagonais e do número de triângulos, surgiram algumas dúvidas, principalmente nos tabuleiros com mais de cinco pontos. O tabuleiro com quatro pontos era o mais fácil de visualizar. Nele foi visualizado rapidamente o número total de segmentos e, destes, quantos eram lados da figura e quantos eram diagonais. Porém, em relação ao número de triângulos formados, foram contados manualmente e encontrados apenas três, mas o número total de triângulos é quatro. O tabuleiro com cinco pontos também não apresentou muitas dificuldades no momento da contagem do número de segmentos. Novamente, durante a contagem do número de triângulos formados, alguns encontraram apenas nove triângulos e outros dez (que era a resposta correta). O tabuleiro de seis pontos foi o que mais apresentou dificuldades na contagem do número de segmentos. Durante a contagem do número de diagonais, percebemos que estávamos contando as diagonais duas vezes. Informei para os alunos que existe uma fórmula que calcula o número de diagonais de um polígono, e buscamos a mesma em um livro de matemática de Ensino Fundamental. Neste momento, o colega licenciando conferiu o número de diagonais encontrado, utilizando a fórmula de combinação. Não chegamos a calcular o número de triângulos. Também não realizamos os cálculos em relação ao tabuleiro de sete pontos, pois os alunos já estavam visivelmente cansados e querendo terminar logo para poderem ir embora.

Enquanto respondia ao questionário, uma das alunas perguntou se não existia uma fórmula com a qual ela pudesse resolver esse tipo de situação-problema. Não chegamos a responder essa pergunta, pois queríamos que os alunos conseguissem perceber que o número de segmentos crescia de forma padronizada, seguindo uma sequência lógica a qual poderia ser escrita de uma forma geral. Porém, os alunos não conseguiram perceber essa generalização sozinhos.

5 ANÁLISE DAS EXPERIÊNCIAS

O Grupo A é uma turma de segundo ano do Ensino Médio, noturno, em que a maioria dos alunos trabalha durante o dia. A maioria deles tem o hábito de sentar em duplas durante as aulas, com exceção de poucos alunos. Esse grupo estudou o conteúdo de Análise Combinatória no final do segundo trimestre (durante o mês de setembro). O professor titular da turma informou que ele não tem o hábito de trabalhar esse conteúdo, mas que resolveu abordá-lo esse ano. Ele deu preferência por abordar o assunto através da utilização das fórmulas de permutação, arranjo e combinação. Porém, como a abordagem foi no final do trimestre, esse conteúdo acabou sendo pouco trabalhado, principalmente a combinação.

Fiz meu estágio curricular com essa turma. Solicitei aos alunos um trabalho extra-classe sobre o conteúdo de Análise Combinatória. O trabalho consistia de duas situações-problema e três exercícios de aplicação da fórmula. Treze alunos fizeram o trabalho.

A primeira situação-problema era a seguinte: “Considere a palavra LIVRO. Quantos anagramas são formados com as letras dessa palavra? Quantos deles começam por L e terminam por O? Quantos contêm as letras RO juntas e nessa ordem?”

Esta questão poderia ser resolvida com a fórmula da permutação, pois o número total de letras da palavra “livro” é igual ao número de letras de cada um dos anagramas que podemos formar com essas letras, isto é, “$n = p$”, com n sendo o número total de elementos e p sendo o número de elementos em cada grupo. Todos os alunos acertaram a primeira pergunta, uma aluna errou a segunda pergunta e quatro alunos erraram a terceira.

A aluna 1, que errou a segunda pergunta, resolveu a questão da seguinte forma:

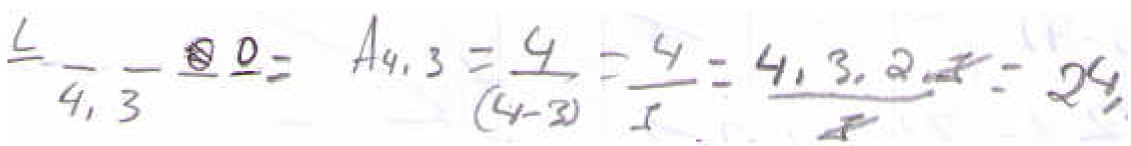

Figura 5 – Exemplo de resolução da questão 1-b do trabalho extra-classe

Pela resolução apresentada pela aluna 1, parece que a mesma não conseguiu perceber que se duas letras já foram utilizadas, isto é, se duas letras já estão fixas uma na primeira e outra na última posição, restando apenas três letras que devem ser reorganizadas nos três espaços restantes. Portanto, a operação a ser utilizada era a multiplicação $3 \cdot 2 \cdot 1$, ou seja, 3!. Como a aluna optou por resolver a questão com a aplicação de fórmulas, a mais adequada para a resolver essa situação-problema seria a da permutação, pois o número de letras a serem reorganizadas é igual ao número de espaços a serem preenchidos.

Em relação à terceira pergunta, a dificuldade era perceber as letras “RO” como uma letra, e permutá-la com as demais. Três, dos quatro alunos que erraram a questão, esqueceram de permutar a sílaba “RO”. A aluna 1 apresentou a seguinte resolução:

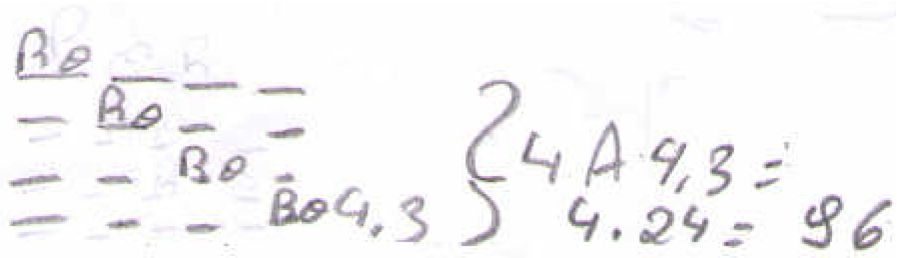

Figura 6 – Exemplo de resolução da questão 1-c do trabalho extra-classe

Ela conseguiu perceber que as letras RO deveriam permanecer juntas, nessa ordem e que a sílaba deveria ser permutada com as demais letras, porém, novamente, não percebeu que duas letras já haviam sido utilizadas, restando apenas três letras que deveriam ser permutadas nos três espaços restantes. De novo, a fórmula mais adequada para a resolução dessa situação-problema seria a fórmula da permutação, pois o número de letras a serem reorganizadas é igual ao número de espaços a serem preenchidos. Entretanto, não podemos esquecer que a sílaba “RO” deve ser permutada também com as demais, como se fosse uma única letra.

A outra situação-problema envolvia um tipo de agrupamento em que os grupos formados se diferenciavam uns dos outros apenas pela natureza dos elementos, e não pela ordem. Por exemplo: se temos cinco objetos distintos (régua, lápis, borracha, caneta e apontador) e queremos escolher dois objetos, não importando a ordem com que escolhemos cada objeto - isto é, se escolhermos o lápis e depois a borracha, ou se escolhermos a borracha e depois o lápis - o subconjunto formado é o mesmo, independente da ordem em que os objetos foram escolhidos. Nesse sentido, essa situação-problema poderia ser resolvida utilizando-se a fórmula da combinação.

A questão dizia o seguinte: “Em uma floricultura, estão à venda 8 mudas de cravos e 12 mudas de rosa, todas diferentes entre si. Um cliente pretende comprar 3 mudas de cravos e 4 de rosas. De quantos modos ele pode selecionar as 7 mudas que quer comprar?” Essa questão foi resolvida por apenas 5 dos 13 alunos que entregaram o trabalho. Destes, 4 alunos apresentaram corretamente o cálculo do número de mudas de cravos e o cálculo do número de mudas de rosas, porém não multiplicaram o número de mudas de cravo pelo número de mudas de rosas. Aparentemente os alunos não perceberam que, para cada grupo com três mudas de cravo que o cliente escolhesse, ele poderia escolher cada um dos grupos com 4 mudas de rosa. Aqui surge uma situação de correspondência um-para-muitos. Mais uma vez a aluna 1 apresentou uma resolução interessante:

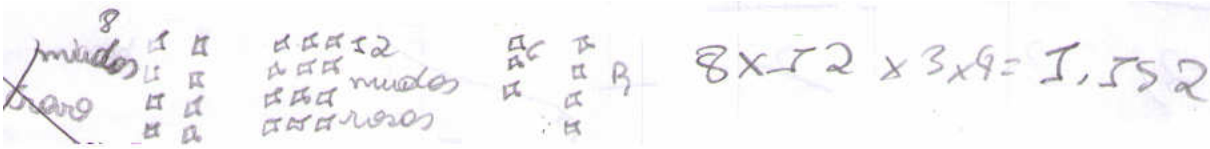

Figura 7 – Exemplo de resolução da questão 2 do trabalho extra-classe

A resolução do problema envolvia encontrar os diferentes subconjuntos de mudas de cravos e os diferentes subconjuntos de rosas e combiná-los. O que a aluna fez foi usar todos os números que apareciam no enunciado do problema, multiplicando-os. Em aulas anteriores, resolvemos, no quadro-negro, algumas situações-problema utilizando o princípio multiplicativo. Isso pode ter levado a aluna a pensar que tudo se resolve com uma multiplicação. Mas ela não considerou, por exemplo, que as três mudas de cravo deveriam ser escolhidas dentre as oito e não multiplicadas como se estivéssemos combinando elementos de conjuntos distintos. Percebe-se que a aluna não interpretou corretamente a tarefa proposta pela situação-problema. Isso pode indicar que a aluna não tem o pensamento combinatório desenvolvido, que segundo a teoria piagetiana é uma das características do pensamento formal.

Durante a aplicação da oficina com esse grupo, percebi a dificuldade que os alunos apresentaram em criar estratégias para encontrar a senha mais rapidamente. Embora esse grupo tenha tido contato com o conteúdo de Análise Combinatória neste semestre, pareceu que os mesmos não conseguiram desenvolver o raciocínio combinatório.

Nas diversas situações do jogo, percebi que eles têm dificuldade em pensar em todas as possibilidades de senhas que podiam ser criadas com as cores disponíveis e também de interpretar o que o desafiante queria dizer com as dicas dadas. Muitas vezes, de uma jogada para outra, os alunos trocavam todas as cores de lugar. Isso indica que os alunos conseguem realizar algumas combinações, porém ainda não conseguem pensar em todas as possibilidades. Eles também apresentam dificuldade em fixar alguns elementos e variar outros, que é um dos traços do pensamento combinatório, e portanto, do pensamento formal.

No que diz respeito aos questionários, percebi que os alunos que acertaram mais questões no questionário foram os que entenderam as regras do jogo mais rapidamente. Tanto o questionário como o trabalho extra-classe foram resolvidos em grupos. Embora cada aluno tenha feito a entrega individual da sua produção, percebe-se que todos os alunos do grupo apresentam resoluções idênticas. Pode ter ocorrido que o aluno que entendeu melhor o conteúdo resolveu os exercícios e os demais apenas copiaram.

Todos os alunos do grupo A preferiram responder o questionário utilizando as fórmulas de permutação, arranjo e combinação que já conheciam, pois haviam estudado o conteúdo de Análise Combinatória há pouco tempo. O uso de representações gráficas restringiu-se a um pequeno grupo de alunos, para responder o item 6 do questionário. A resolução desta situação-problema não poderia ser feita aplicando diretamente alguma fórmula. Para resolvê-la, deveria ser utilizado o princípio multiplicativo. A questão era a seguinte: “E se pudermos escolher entre 6 cores para 4 espaços, com repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?”

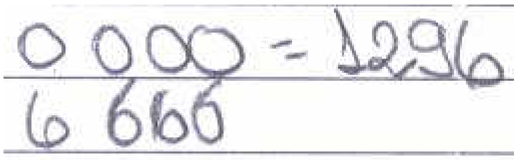

Figura 8 – Exemplo de representação utilizada para a resolução da questão 6 do questionário do Jogo da Senha

A questão número 1 era a seguinte: “Utilizando 3 cores, por exemplo, azul, laranja e vermelho, para preencher 3 espaços, sem repetição, quantas senhas diferentes podemos formar? Quais são as senhas formadas?” Essa questão poderia ser resolvida utilizando-se a fórmula da permutação, pois o número de cores disponível para a criação das senhas era igual ao número de espaços a serem preenchidos pelas cores. Todos os alunos acertaram os cálculos. Porém, apenas três alunos listaram as referidas senhas. Dois alunos listaram apenas parte das senhas e os demais nem fizeram menção às senhas que poderiam ser criadas.

A questão número 2 era a seguinte: “Utilizando 4 cores para preencher os 4 espaços da senha, sem repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?”, também poderia ser resolvida com a fórmula de permutação, pelo mesmo motivo da questão anterior. Esta questão foi resolvida de forma correta por todos os alunos.

As questões número 3, 4 e 5 era as seguintes:

3. E se pudermos escolher entre 5 cores para os 4 espaços, quantas senhas diferentes é possível formar?
4. No caso do nosso jogo, onde podemos escolher entre 6 cores, qual é o número total de senhas possíveis?
5. Se fixarmos a primeira cor, por exemplo amarela, quantas senhas diferentes poderemos formar?

Elas poderiam ser resolvidas com a fórmula de arranjo, pois o número de cores disponíveis para a criação das senhas era maior que o número de espaços a serem preenchidos e a ordem em que os espaços eram preenchidos era importante. Isto é, os agrupamentos, neste caso, diferem entre si pela ordem de escolha dos elementos. Para resolver essas questões, sete dos doze alunos que responderam ao questionário, apresentaram corretamente a enunciação da fórmula a ser utilizada. Entretanto, três alunos erraram no momento de fazer os cálculos da questão 4, aparentemente por falta de atenção. Os outros cinco alunos resolveram todo o questionário com a fórmula de permutação. O problema de utilizar a fórmula da permutação para resolver todos os exercícios do questionário, é que a permutação pode ser considerada como um caso especial de arranjo, em que o número total de elementos (n) é igual ao número de elementos de cada grupo (p), isto é, $n = p$. No caso específico do nosso questionário, na maioria das questões n é maior que p.

A questão 6 pedia que os alunos calculassem o número total de senhas, caso fosse possível a repetição das cores. Nessa questão, somente três alunos responderam corretamente, utilizando o princípio multiplicativo para resolver a questão e fazendo uso de representação gráfica. Os demais alunos resolveram a questão utilizando ou a fórmula do arranjo (quatro alunas) ou a fórmula da permutação (cinco alunos).

A questão número 7 era a seguinte: “Quantas senhas podemos formar com *n* cores para *p* espaços?”, pedia uma generalização, uma expressão que fosse capaz de resolver as situações-problema apresentadas anteriormente. É interessante salientar que embora os alunos desse grupo tenham optado por resolver as situações-problema propostas no questionário aplicando as fórmulas de permutação e arranjo, os mesmos não foram capazes de enunciar corretamente a fórmula. Nessa questão, sete alunos apresentaram a fórmula do arranjo e cinco alunos apresentaram a fórmula da permutação. Dos alunos que apresentaram a fórmula do arranjo, quatro apenas escreveram “$A_{n,p}$”. Os demais alunos apresentaram as seguintes fórmulas:

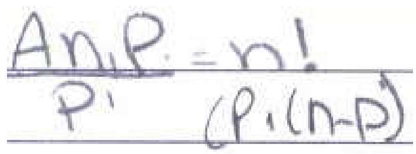

Figura 9 – Exemplo de resolução da questão 7 do questionário da senha

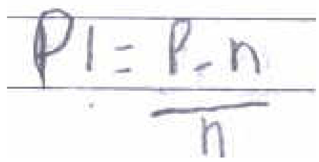

Figura 10 – Exemplo de resolução da questão 7 do questionário da senha

Percebe-se que, no momento de calcular, eles conseguem colocar os números nas posições corretas, porém quando são solicitados a fornecer a fórmula que acabaram de utilizar, não sabem enunciá-la corretamente.

O grupo B era composto de três alunos do terceiro ano do Ensino Médio do turno da manhã. Os alunos informaram haviam que estudado o conteúdo de Análise Combinatória no ano anterior, porém não questionamos qual o tipo de abordagem havia sido adotada.

Durante a aplicação do Jogo da Senha, percebi que os alunos entenderam rapidamente as regras do jogo e que aproveitavam as dicas dadas pelo desafiante para tentar descobrir a senha mais rapidamente. Como havia um desafiante para dois desafiados, os desafiados trabalhavam em dupla, criando estratégias para a descoberta da senha. As dicas dadas pelo desafiante eram consideradas e surgiram alguns comentários do tipo: “aqui tinha a cor verde e tinha uma cor errada, aqui também, sempre que aparece a cor verde, tem uma cor errada, portanto a cor verde não faz parte da senha.” Percebi que os alunos, de uma tentativa para outra, mantinham algumas cores no lugar e variavam outras, trocando as cores quando existia alguma cor errada. Essa situação demonstra a criação de uma estratégia para a resolução do problema.

Durante a aplicação do questionário do Jogo da Senha, percebi que os alunos praticamente não utilizam representações gráficas para a resolução das situações-problema. Como eram alunos do terceiro ano e fazia mais tempo que tinham aprendido o conteúdo de Análise Combinatória, os mesmos não lembravam das fórmulas. Porém, em virtude da dica dada pelo colega, não é possível perceber se realmente entenderam o que estavam calculando ou se apenas repetiram o modelo sugerido, sem interiorizar o conceito.

Todo o questionário foi respondido utilizando a dica dada pelo colega. Para a questão número 7: “Quantas senhas podemos formar com *n* cores para *p* espaços?”, foi apresentada a seguinte dica:

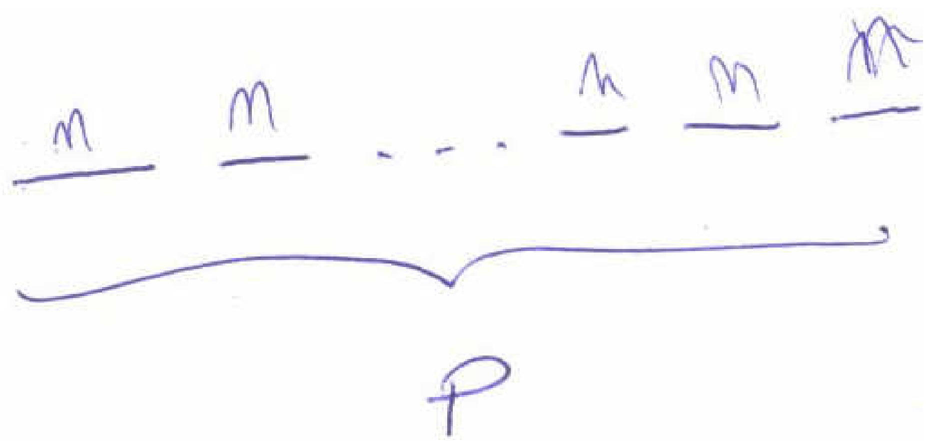

Figura 11 – Exemplo de representação utilizada para a resolução da questão 7 do questionário do Jogo da Senha

Com essa dica, os alunos chegaram à seguinte generalização: n^p. Porém, essa generalização não resolve todos os casos. Esta generalização é específica para os casos onde podemos ter repetição, ou seja, não se aplica para a maioria das situações-problema propostas no questionário.

Durante a aplicação do Jogo Bicolorido, não foi possível perceber a criação de estratégias específicas para ganhar o jogo, pois estava jogando com uma das alunas e não consegui acompanhar o outro grupo. Um tipo de estratégia possível para esse jogo é tentar antecipar as possíveis jogadas do adversário e bloquear as que dariam chance de vitória.

Durante a aplicação do questionário do Jogo Bicolorido, resolvemos o questionário debatendo quais eram as possibilidades. Percebi a necessidade, por parte dos alunos, do concreto para poder responder as questões, isto é, eles precisavam traçar e contar os segmentos um a um. Eles não conseguiram perceber que poderia ser utilizada alguma representação gráfica e/ou algébrica para resolver as situações. Todas as questões foram resolvidas utilizando a contagem manual do número de lado, de diagonais e de triângulos.

Para resolver as questões 13 e 14: “Seguindo essa lógica, existe a possibilidade de calcularmos o número de segmentos para 8, 9 e 10 pontos? E para *n* pontos?”. Informamos que eles podiam pensar a partir da fórmula que calcula o número de diagonais: $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

Os alunos não conseguiram chegar à generalização: $s = \frac{n^2 - n}{2}$, eles apenas repetiram a fórmula que calcula o número de diagonais de um polígono, sem perceber que eles deveriam somar “*n*”, pois o número de segmentos é igual ao número de diagonais mais o número de lados.

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

Figura 12 – Exemplo de resolução da questão 14 do questionário do Jogo Bicolorido

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Participaram da nossa pesquisa, ao total, dezesseis alunos, sendo treze pertencentes ao grupo A e três pertencentes ao grupo B. Todos já haviam estudado o conteúdo de Análise Combinatória, pois se tratavam de alunos do segundo e terceiro anos do Ensino Médio.

Durante a aplicação dos jogos, percebemos que alguns alunos apresentaram dificuldades em criar estratégias para vencer o jogo. Em relação ao primeiro jogo, o Jogo da Senha, os alunos tiveram dificuldade em interpretar as dicas dadas pelo desafiante. Muitos duvidavam das dicas dadas, dizendo não ser possível a existência da situação apresentada pelo desafiante. Já o segundo jogo não exigia a criação de estratégias muito elaboradas. Nesse caso, os alunos tinham que tentar antecipar a jogada do adversário, para tentar bloqueá-lo, a fim de evitar uma derrota. Percebemos que os alunos do grupo A apresentaram mais dificuldades, tanto durante o jogo, como no momento de resolver as situações-problema apresentadas no questionário. Uma das possibilidades dessa diferença pode estar no fato dos alunos do grupo A serem alunos do segundo Ano do Ensino Médio, e também pelo fato de terem estudado o conteúdo de Análise Combinatória unicamente através da aplicação de fórmulas.

Para a resolução do questionário, notamos o pouco uso que os alunos fazem das representações gráficas. Pareceu-nos que isso se deve à estrutura das aulas de matemática. A maioria dos alunos está habituada a resolver problemas utilizando apenas a fórmula. Normalmente, eles tentam utilizar todos os números que aparecem no enunciado do problema, muitas vezes sem se dar conta de quais números realmente são relevantes para a resolução daquele problema. O mesmo acontece quando não está explícito algum número relevante para o problema, como por exemplo, no item 4 do questionário do Jogo da Senha, que dizia o seguinte: “No caso do nosso jogo, onde podemos escolher entre 6 cores, qual é o número total de senhas possíveis?”. Alguns alunos nos questionaram se não estava faltando nenhum número, sem ligarem o questionário ao jogo que eles haviam jogado minutos antes.

É interessante salientar que alguns alunos conseguiram responder ao questionário de forma satisfatória, pois conseguiram identificar corretamente as fórmulas que poderiam ser utilizadas para a resolução dos mesmos, porém, durante o jogo, não conseguiram criar uma estratégia para encontrar a senha mais rapidamente.

Com essa pesquisa, pudemos perceber que um ensino focado na aplicação de fórmulas não é suficiente para desenvolver o pensamento combinatório. É necessário oportunizar ao aluno o contato com uma grande diversidade de situações-problema, em que ele possa desenvolver ferramentas auxiliares para conseguir resolvê-las.

Nesse sentido, propomos que o professor inicie a abordagem do conteúdo de Análise Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, começando com problemas de contagem. Pensamos ser interessante partir de problemas que possam ser resolvidos com contagem direta, incentivando os alunos ao uso de representações gráficas. Pensamos que o uso de representações gráficas tipo diagrama de árvore, tabelas de dupla entrada, enumerações, são facilitadoras do processo de aquisição do pensamento combinatório. Também é importante incentivar os alunos a descobrir, discutir e utilizar as diversas possibilidades de resolução dos problemas de combinatória. Dessa forma, o aluno, ao chegar no Ensino Médio, já terá tido contato com o conteúdo de Análise Combinatória, o que poderá facilitar o entendimento dos diversos tipos de agrupamentos envolvidos nesse conteúdo.

Cremos que o professor, ao realizar uma abordagem progressiva, aumentando o grau de dificuldade das situações-problema e diversificando-as, favorece o desenvolvimento dos esquemas empregados pelos alunos para a sua resolução. Nesse sentido, o aluno vai, gradativamente, construindo suas estruturas mentais, passando de um estágio de desenvolvimento cognitivo a outro.

Relativamente aos jogos escolhidos na montagem da oficina de matemática, consideramos que ambos podem ser utilizados para a introdução do Princípio Multiplicativo, tanto com alunos do Ensino Médio, como com alunos do Ensino Fundamental. Inicialmente ficamos um pouco receosos de utilizar um jogo com alunos do Ensino Médio, porém a receptividade dos alunos nos surpreendeu, e vimos nessa ocasião a possibilidade da ampliação do uso dessa ferramenta nas aulas de matemática.

Sabemos que o tempo de uma oficina é insuficiente para conseguirmos concluir sobre a aprendizagem dos alunos, porém, concluímos que esses jogos são boas ferramentas para a introdução do Princípio Multiplicativo, pois com eles conseguimos abordar os três principais tipos de agrupamentos envolvidos em Análise Combinatória: Arranjo, Permutação e Combinação. Além disso, conseguimos propor algumas situações-problema que podiam ser resolvidas com o princípio multiplicativo.

Cremos que o uso dos jogos auxilia no processo de aquisição do raciocínio combinatório, pois os alunos devem buscar estratégias para conseguir “vencer” o jogo. Relativamente ao Jogo da Senha, os desafiados precisam pensar em todas as possibilidades de senhas que podem ser criadas com as cores disponíveis e interpretar corretamente as dicas dadas pelo desafiante. Já no jogo Bicolorido, eles necessitam antecipar possíveis jogadas do adversário e, de acordo com o número de pontos do tabuleiro, tentar prever quais as chances de vitória de cada um dos jogadores.

Durante a aplicação das oficinas com os dois grupos, percebi que, nem sempre, as expectativas em relação aos alunos são satisfeitas. Cheguei na escola com a expectativa de que os alunos, por serem alunos do Ensino Médio, já teriam desenvolvido o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório, e que eles não apresentariam muitas dificuldades de compreensão das situações propostas. Porém notei que alguns alunos trazem deficiências em sua formação inicial. Uma das possíveis causas desse fracasso, pode ser devido à metodologia de ensino mais comumente utilizada pelos professores nas aulas de matemática. Ainda temos a tendência de darmos mais importância à aplicação correta da fórmula, muitas vezes deixando de lado a construção do conceito envolvido na situação.

Entretanto, ao estudar as teorias cognitivistas de Piaget e Vergnaud, percebi que o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório não são simples, tampouco triviais. O número de variáveis envolvidas no pensamento multiplicativo é maior do que no pensamento aditivo. Portanto, penso que precisamos oportunizar aos alunos o contato com diversos tipos de situações-problema envolvendo o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório, a fim de facilitar o desenvolvimento dos esquemas pertencentes às estruturas multiplicativas.

Percebi que os alunos, mesmo sendo adolescentes/adultos, aceitaram bem a proposta da oficina. No início, tive um pouco de receio em propor uma situação de jogos com alunos mais velhos, por pensar que os mesmos fossem rejeitar a atividade. Com isso, aprendi que o interesse dos alunos é diretamente proporcional à metodologia de ensino empregada no momento de abordar um conteúdo. Creio que o fato dos alunos trabalharem em grupos, tanto em situações de jogo, como numa aula “normal”, auxilia o processo de aprendizagem, pois muitas vezes, a linguagem utilizada pelo colega é mais simples do que a linguagem utilizada pelo professor. Desta forma, o colega acaba se tornando, muitas vezes, um tradutor do que o professor está dizendo.

Com os dados levantados nessa pesquisa, podemos pensar em uma abordagem do conteúdo de Análise Combinatória de uma forma mais significativa para os alunos, não simplesmente enchendo o quadro-negro de fórmulas que, sozinhas, não dizem muita coisa. Para nós, é muito importante colocar o foco da aprendizagem na construção dos conceitos matemáticos envolvidos. Por essa razão, cremos que ainda existe muito a ser pesquisado sobre o processo de aquisição do pensamento multiplicativo e do raciocínio combinatório.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACKENDORF, Viviane Raquel. **Uma Sequência Didática de Medidas de Comprimento e Superfície no 5º Ano do Ensino Fundamental: Um Estudo de Caso**. Porto Alegre: UFRGS, 2010. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/25221/000752787.pdf?sequence=1> Acessado em: 13/11/2010.

BONADIMAN, Adriana. **Álgebra no Ensino Fundamental:** Produzindo Significados para as Operações Básicas com Expressões Algébricas. Porto Alegre: UFRGS, 2009. 300 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/11228/000609939.pdf?sequence=1> Acessado em: 26/10/2010.

BRASIL, SEB, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC / SEB, 2000.

BRASIL, SEF, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais –** Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CARVALHO, Gustavo Quevedo. **O Uso de Jogos na Resolução de Problemas de Contagem:** Um Estudo de Caso em uma Turma do 8º Ano do Colégio Militar de Porto Alegre. Porto Alegre: UFRGS, 2009. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17845/000725685.pdf?sequence=1> Acessado em: 17/08/2010.

CEMIN, Kelen Luiza. **Ensino de Combinatória:** Problemas de Divisão, Teoria de Vergnaud e Metodologia da Engenharia Didática. Porto Alegre: UFRGS, 2008. 93 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: < http://euler.mat.ufrgs.br/~comgradmat/tccs/monos_0802/TCC_Kelen.pdf > Acessado em: 27/03/2010.

ESTEVES, Inês. **Investigando os Fatores que Influenciam o Raciocínio Combinatório em Adolescentes de 14 anos –** 8ª série do Ensino Fundamental. São Paulo: PUCSP, 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Dissertacao_Esteves.pdf > Acessado em: 16/06/2010.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2007.

FLAVELL, John H..As Operações Formais e a Percepção. In: ______. **A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget**. São Paulo: Pioneira, 1988. cap. 6. p. 207-229.

INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. **Da lógica da Criança à Lógica do Adolescente**. Tradução de Dante Moreira Leite. São Paulo: Pioneira, 1976.

LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho. Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade. **Bolema**. Rio Claro, v. 23, nº 36, p. 657-682, ago./2010.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia –** Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. [recurso eletrônico]. Recife, v. 1, nº. 1, 2010. Disponível em: < http://www.gente.eti.br/emteia/index.php/emteia/index >. Acessado em: 31/10/2010.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**. São Paulo: UNESP Rio Claro, 2010, 344 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010. Disponível em: < http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2010/souza_acp_me_rcla.pdf >. Acessado em: 20/08/2010.

TEIXEIRA, Leny R. M.; VASCONCELLOS, Mônica; GUIMARÃES, Sheila Denize. A Resolução de Problemas Multiplicativos de Produto de Medidas: Um Caso Exemplar. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (orgs.). **A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. 1. Ed. Curitiba: Editora CRV, 2009. Cap. 4, p. 77-89.

VERGNAUD, Gérard. O que é Aprender?. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (orgs.). **A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. 1. Ed. Curitiba: Editora CRV, 2009. cap. 1, p. 13-35.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos Campos Conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1990, Rio de Janeiro**. Anais...** Rio de Janeiro, 1990.

APÊNDICE A – Trabalho Extra-classe Aplicado com o Grupo A

INSTITUTO ESTADUAL RIO BRANCO

Nome: ______________________________Turma: _________ Data: ____/____/____

Lista de Exercícios: Revisão e Análise Combinatória – Arranjos, Permutações e Combinações

1) Considere a palavra LIVRO.
   a. Quantos anagramas são formados com as letras dessa palavra?

   b. Quantos deles começam por L e terminam por O?

   c. Quantos contêm as letras RO juntas e nessa ordem?

2) (UEL – PR) Em uma floricultura, estão à venda 8 mudas de cravos e 12 mudas de rosa, todas diferentes entre si. Um cliente pretende comprar 3 mudas de cravos e 4 de rosas. De quantos modos ele pode selecionar as 7 mudas que quer comprar?

3) Resolva a equação: $2A_{x,4} = 4!C_{x,x-5}$.

4) Calcule:
   a. $A_{6,2}$

   b. $\dfrac{A_{5,4} + A_{3,2}}{A_{4,2} - A_{2,1}}$

5) Calcule:
   a. $\dfrac{C_{6,2} + C_{4,3} - C_{5,2}}{C_{9,2} + C_{8,1}}$

   b. $\dfrac{C_{5,2} + C_{6,1} - C_{5,3}}{C_{10,2} - C_{7,3}}$

APÊNDICE B – Questionário do Jogo da Senha

Questionário:

Jogo da Senha:

1) Utilizando 3 cores, por exemplo, azul, laranja e vermelho, para preencher 3 espaços, sem repetição, quantas senhas diferentes podemos formar? Quais são as senhas formadas?
2) Utilizando 4 cores para preencher os 4 espaços da senha, sem repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?
3) E se pudermos escolher entre 5 cores para os 4 espaços, quantas senhas diferentes é possível formar?
4) No caso do nosso jogo, onde podemos escolher entre 6 cores, qual é o número total de senhas possíveis?
5) Se fixarmos a primeira cor, por exemplo amarela, quantas senhas diferentes poderemos formar?
6) E se pudermos escolher entre 6 cores para 4 espaços, com repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?
7) Quantas senhas podemos formar com n cores para p espaços?

APÊNDICE C – Questionário do Jogo Bicolorido

Questionário:

Jogo bicolorido:

1) Partindo de 4 pontos A, B, C e D, quantos segmentos de reta podemos formar?
2) Desses segmentos, quantos são lados e quantos são diagonais do quadrilátero ABCD?
3) E quantos triângulos?
4) E com 5 pontos, A, B, C, D e E, quantos segmentos podemos formar?
5) Quantos lados e quantas diagonais do pentágono ABCDE?
6) E quantos triângulos?
7) E com 6 pontos, A, B, C, D, E e F, quantos segmentos podemos formar?
8) Quantos lados e quantas diagonais do hexágono ABCDEF?
9) E quantos triângulos?
10) E com 7 pontos, A, B, C, D, E, F e G, quantos segmentos podemos formar?
11) Quantos lados e quantas diagonais do heptágono ABCDEFG ?
12) E quantos triângulos?
13) Seguindo essa lógica, existe a possibilidade de calcularmos o número de segmentos para 8, 9 e 10 pontos?
14) E para n pontos?