UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

ESTIMATIVAS DO ERRO NAS APROXIMAÇÕES DE GALERKIN PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

por

SUZIANE BOPP ANTONELLO

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
Orientador

Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk
Coorientador

Santa Maria, abril de 2002

AGRADECIMENTOS

Ao esposo Jovane e filho Breno
“Na incerteza do futuro, fostes a certeza das horas...”

`As colegas Deise, Fabiana, Lurdes e Márcia
“Na dúvida e no temor, fostes a renovação dos ideais,
no alento pelo cansaço, a mão estendida...”

Aos Professores João Paulo Lukaszczyk e Leonardo P. Bonorino
“Acima do que decidam de nós o tempo e a vida,
fica o sonho, hoje realidade, que há de ser eterno,
que tu ajudaste a concretizar.”

Enfim, agradeço a Deus e a todos que contribuíram significativamente para enriquecer a minha história e desafiaram-me a crescer.

SUMÁRIO

RESUMO

Neste trabalho são provadas algumas estimativas de erro em espaços L^p para as aproximações de Galerkin para a solução do sistema de equações de Navier-Stokes. Mostra-se que o erro decresce em proporção inversa aos autovalores do operador de Stokes.

ABSTRACT

In this work some error estimates are proved in spaces L^p for the Galerkin approaches for the solution of the system of Navier-Stokes equations . It is shown that the error decreases in inverse proportion to the eigenvalues of the Stokes operator.

NOTAÇÕES

Abaixo estão relacionadas algumas das notações utilizadas no trabalho:

1. IR^n, Espaço Euclidiano
2. Ω, um aberto do IR^n e $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$
3. $\overline{\Omega}$, o fecho de Ω
4. $\partial\Omega$, a fronteira de Ω
5. $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, o operador Laplaciano
6. $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = grad$, o operador Gradiente
7. $C^k(\Omega)$, funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω
8. $C^\infty(\Omega)$, funções infinitamente diferenciáveis em Ω
9. $C_0^\infty(\Omega)$, funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto
10. $D(\Omega)$ ou $D(\overline{\Omega})$, espaço das funções C_0^∞ em Ω ou $\overline{\Omega}$ com divergente nulo
11. $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é um multiíndice, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$
12. u_t, denota a derivada no tempo de u

13. $L^p(\Omega)$, o espaço das funções vetoriais mensuráveis (imagem em IR^n) com p-ésimo expoente absolutamente integráveis ou essencialmente limitadas, para a medida de Lebesgue $dx = dx_1 ... dx_n$ com a norma $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ou $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup ess |u(x)|$

14. $(u;v)$, produto interno quando $u, v \in H$

15. (u,v) produto interno quando u está no dual de H

16. Sendo A espaço Banach, $\phi \in A'$, define-se $\phi(v) = \langle \phi; v \rangle$, $\forall v \in A$.

17. $W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_\alpha \in L^p(\Omega); \int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi \right\}$, espaço de Sobolev onde $m \in \{1,2,...\}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq |\alpha| \leq m$ $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$

18. $W_0^{m,p}(\Omega)$, fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$

19. $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$

20. $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$

INTRODUÇÃO

Mecânica de Fluidos é uma vasta área da ciência onde são estudados e resolvidos diversos problemas que surgem em situações envolvendo o movimento de um fluido, como por exemplo, em projetos de aeronaves (aviões e foguetes), carros, barcos e submarinos, extrações de petróleo, ondas nas superfícies das águas, etc.

A dinâmica de um fluido incompressível é descrita pela lei da conservação da massa e pela lei da conservação do momento (Segunda Lei de Newton). Na descrição euleriana, expressa-se a conservação de massa pela condição de o divergente do campo de velocidades ser nulo. No estudo analítico destaca-se o sistema de equações diferenciais parciais não-lineares de Navier-Stokes, cujo nome deve-se a George Gabriel Stokes (1819 – 1903) e Claude Louis Marie Navier (1785 – 1836) , que expressa a conservação do momento.

Tal sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\rho u_t + \rho u.\nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f$$

onde as incógnitas são

o vetor velocidade: $u = u(x,t) \in IR^n$;

a pressão: $p = p(x,t) \in IR$

e são considerados dados no sistema:

a densidade de massa do fluido: $\rho \in IR$, no trabalho, considera-se $\rho = 1$;
o coeficiente de viscosidade: μ;
o componente de forças externas: f.

No caso de o fluido ser suposto incompressível, adiciona-se ao sistema a equação:

$$div\, u = 0$$

Este sistema descreve o movimento de um fluido numa certa região $\Omega \subset IR^n$ que por razões físicas considera-se $n = 2$ ou $n = 3$. Soluções analíticas em situações especiais são abundantes na literatura da área, cita-se como exemplo, Melo e Neto $[\,7\,]$. Além disto, a teoria de alguns métodos numéricos também está bem desenvolvida, como no texto clássico de Temam.

O principal objetivo deste trabalho é fornecer algumas estimativas de erro para as aproximações de Galerkin em espaços de Sobolev tendo como base o artigo de Rautmann $[\,8\,]$. O principal resultado obtido neste sentido é o Teorema da página 27.

O trabalho está dividido em cinco capítulos. No primeiro, apresenta-se as Preliminares, em que são expostos alguns resultados fundamentais (Corolários, Proposições e Teoremas) importantes para o seu desenvolvimento .Também mostra-se a caracterização do problema de valor de fronteira de Stokes. No segundo capítulo são destacadas os Lemas 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 que fornecem estimativas de erro para as aproximações de Galerkin para o problema de Stokes.

No terceiro capítulo é apresentado e demonstrado o Teorema principal de estimativa de erro, seguido da conclusão e de algumas sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1

1. Preliminares

Apresentam-se abaixo alguns resultados importantes utilizados ao longo do desenvolvimento do trabalho e, em seguida, a caracterização do problema de Stokes.

1.1. Resultados fundamentais

Proposição 1.1.1: Seja M um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H. Dada $f \in H$ e $P : H \to M$ uma projeção ortogonal então $P(f)$ é caracterizada por

$$(f - P(f); v) = 0, \ \forall \, v \in M$$

Dem.) Veja BREZIS $[\,2\,]$, p. 80.

Corolário 1.1.2: Com as hipóteses da Proposição 1 tem- se

$$\| P(f) \| \leq \| f \|_H$$

Considere $v = P(f)$ em $(f - P(f); v) = 0$.

Assim

$$(f, P(f)) - (P(f); P(f)) = 0$$
$$\| P(f) \|_H^2 = (P(f); P(f)) = (f; P(f)) \leq \| f \|_H \| P(f) \|_H \Rightarrow$$
$$\| P(f) \|_H \leq \| f \|_H$$

Proposição 1.1.3: (Identidades de Green)

Seja $\Omega \subseteq IR^2$ um domínio onde vale o Teorema da Divergência e sejam $f, g \in C^2(\Omega)$, então valem as seguintes identidades:

$$\int_\Omega (g \, \Delta f + \nabla f \, \nabla g) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, ds$$

$$\int_\Omega (f \, \Delta g - g \, \Delta f) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) ds$$

Dem.) Veja IÓRIO $[\,5\,]$, p. 233.

Proposição 1.1.4: (Desigualdade de Hölder)

Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ onde $\Omega \subset IR^n$ com $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $u\, v \in L^1(\Omega)$ e vale a seguinte desigualdade:

$$\int_{\Omega} | \, u \, v \, | \, dx \le \left(\int_{\Omega} \left| \, u(x)^{p} \, \right| dx \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_{\Omega} \left| \, v(x)^{q} \, \right| dx \right)^{\frac{1}{q}} = \| \, u \, \|_{p} \| \, v \, \|_{q}$$

Dem.) Veja BREZIS [2], p. 56.

Proposição 1.1.5: (Desigualdade de Poincaré)

Seja Ω em IR^{n} um aberto limitado e $u \in W_{0}^{p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ então $\| \, u \, \|_{L^{p}} \le C \| \, \nabla u \, \|_{L^{p}}$ onde a constante C depende de Ω e p.

Dem.) Veja BREZIS [2], p. 174.

Teorema 1.1.6: (Teorema de Lax- Milgram)

Seja A um espaço de Hilbert e $a\,(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva, isto é, $| \, a\,(u,v) \, | \le C \| \, u \, \| \| \, v \, \|$ e $a\,(u,u) \ge C \| \, u \, \|^{2}$ $\forall \, u, v \in A$, então dado $\phi \in A^{'}$ existe uma única $u \in A$ tal que $a\,(u,v) = \langle \phi, v \rangle$ $\forall \, v \in A$.

Dem.) Veja BREZIS [2], p. 84.

Proposição 1.1.7: Sejam E, F e G três espaços de Banach, $T : E \to F$ um operador linear contínuo e $S : F \to G$ um operador compacto. Então $S \, o T : E \to G$ é um operador compacto.

Dem.) Veja BREZIS [2], p. 90.

Teorema 1.1.8: Sejam A um espaço de Hilbert separável e $T : A \to A$ um operador linear compacto e autoadjunto, então A admite uma base Hilbertiana formada por autovetores de T.

Dem.) Veja BREZIS [2], p. 97.

Teorema 1.1.9: Seja $T : E \to E$ um operador compacto com $\dim E = \infty$ e seja $VP(T)$ o conjunto de seus autovalores. Então vale uma das afirmações:

(i) $VP(T) = \{0\}$

(ii) $VP(T) \setminus \{0\}$ é finito

(iii) $VP(T) \setminus \{0\}$ é uma seqüência que tende a zero

Dem.) Veja BREZIS [2], p. 95.

Definição 1.1.10: (Base Hilbertiana) Chama-se base Hilbertiana toda sucessão (e_n) de elementos de H tais que:

(i) $| e_n | = 1 \;\forall\; n,\ (e_m, e_n) = 0 \;\forall\, m, n, m \neq n$

(ii) o espaço vetorial gerado pelos (e_n) seja denso em H.

Sabe-se que se (e_n) forma uma base Hilbertiana, então, todo $u \in H$ pode ser escrito na forma:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n)\, e_n \quad \text{com} \quad | u |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | (u, e_n) |^2$$

Proposição 1.1.11: Seja $\Omega \subset IR^3$ e $b(u, v, w) = (u.\nabla v; w)$ onde $u, v, w \in H_0^1$. Então

$$b(u, v, v) = 0 \quad \forall\, u \in V \ \text{ e } \ v \in H_0^1$$

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v) \quad \forall\, u \in V;\, v, w \in H_0^1$$

onde V é o espaço das funções em $\left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ com divergente nulo.

Dem.) Veja TEMAM [9], p. 163, Lema 1.3.

Lema 1.1.12: Seja $\Omega \subset IR^n$ um aberto limitado regular. Então $\| -P\Delta u \|$ é uma norma em $V \cap H^2(\Omega)$ equivalente a norma de $H^2(\Omega)$.

Dem.) Veja TEMAM [9], p. 313, Lema 3.7.

Lema 1.1.13: (Lema de Gronwall): Sejam $\varphi(t)$, $\alpha(t)$ funções contínuas em $t \in [a,b]$ e $\beta(t)$ uma função integrável em $[a,b]$ satisfazendo:

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\,\varphi(s)\,ds\,; \quad a \leq t \leq b$$

Então

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \left[\beta(s)\,\alpha(s) \left(\exp \int_a^t \beta(u)\,du \right) \right] ds\,; \quad a \leq t \leq b$$

Dem.) Veja HALE [3], p. 36.

Proposição 1.1.14: Seja B um espaço de Banach e seja $(x_n) \subset B$ uma seqüência tal que $x_n \rightarrow x$ fracamente em B, então $\| x_n \|_B$ é limitada e $\| x \|_B \leq \liminf \| x_n \|$.

Dem.) Veja BREZIS [2], p. 35, Proposição III.5, item (iii).

1.2 Problema de Stokes

Seja Ω um conjunto aberto limitado no espaço tridimensional IR^3 com pontos $x = (x_1, x_2, x_3)$. A fronteira é assumida como sendo de classe C^3, isto é, $\partial\Omega \in C^3$. Considere o problema de valor de fronteira de Stokes:

$$\begin{cases} -\Delta v + \nabla q = h \;\; em \;\; \Omega \\ div\, v = 0 \;\; em \;\; \Omega \\ v = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

onde: $h = (h_1, h_2, h_3)$ é dado, $\nabla q = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2}, \frac{\partial q}{\partial x_3} \right)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ são as incógnitas e v é a solução procurada no espaço de Sobolev $H^m(\Omega)$.

A norma em H^m é a usual:

$$\| f \|_{H^m} = \left(\sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq m} \int_{\Omega} \left| \partial_x^{\alpha} f(x) \right|^2 \right)^{1/2}$$

Os fechos de D em L^2 ou H_0^1 são denotados por H ou V, respectivamente.

A fronteira sendo regular, como salientado anteriormente, os espaços H e V podem ser caracterizados da seguinte forma:

$$H = \overline{D} = \left\{ u \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 : div\, u = 0, u.\vec{n}\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$V = \overline{D} = \left\{ u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 : div\, u = 0 \right\}$$

Dem.) Veja TEMAM [9], pp. 15 e 18.

De acordo com o Teorema de Weyl, se $P : L^2 \to H$ é a projeção ortogonal de L^2 sobre H, logo, $P(\nabla f) = 0$ para qualquer $f \in H$.

Então, o problema de valor de fronteira de Stokes toma a seguinte forma:

Dada $h \in V$, procura-se uma solução $v \in V \cap H^2$ para a equação $-P\Delta v = h$, pois partindo-se da equação $-\Delta v + \nabla q = h$ e aplicando a projeção em ambos os lados, obtém-se a equação da Projeção do Laplaciano:

$$
\begin{aligned}
&P(-\Delta v + \nabla q) = P(h) \\
&P(-\Delta v) + P(\nabla q) = h \\
&-P\Delta v + P\nabla q = h \\
&-P\Delta v + 0 = h \\
&-P\Delta v = h
\end{aligned}
$$

CAPÍTULO 2

2. Autofunções do Problema de Stokes

2.1. Propriedades Fundamentais

Com relação as autofunções do problema de Stokes, três importantes propriedades devem ser consideradas:

Proposição 2.1.1: A função $-P\Delta : V \cap H^2 \to H$ define em $V \subset H$ um operador simétrico definido positivo tendo a inversa compacta $(-P\Delta)^{-1} : H \to H$.

Dem.) A prova desta proposição resulta das seguintes observações, as quais também serão usadas nos próximos capítulos:

1º) O operador linear $P\Delta$ é simétrico em $V \cap H^2$, isto é, $(P\Delta f; g) = (f; P\Delta g)$ para $f, g \in V \cap H^2$.

Conforme a Proposição 1.1.1, tem-se que

$$(\Delta f - P\Delta f \,;\, g) = 0 \quad \forall\, g \in V$$

Portanto, pode-se escrever

$$(\Delta f \,;\, g) - (P\Delta f \,;\, g) = 0$$

Assim

$$(\Delta f \,;\, g) = (P\Delta f \,;\, g)$$

Mas, de acordo com a Identidade de Green (Proposição 1.1.3)

$$\int_{\Omega} f\ \Delta g\ dx - \int_{\Omega} g\ \Delta f\ dx = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) ds \quad \text{e} \quad f\big|_{\partial\Omega} \equiv g\big|_{\partial\Omega} \equiv 0$$

Portanto $(f;\Delta g) = (g;\Delta f)$

Dessa forma: $(P\Delta f \,;\, g) = (\Delta f \,;\, g) = (f \,;\, \Delta g) = (\Delta g \,;\, f)$ (1)

Por outro lado $(\Delta g - P\Delta g;\, f) = 0 \ \Rightarrow\ (\Delta g;\, f) = (P\Delta g;\, f)$

Então

$$(P\Delta f \,;\, g) = (f \,;\, P\Delta g) \quad \forall\, f, g \in H \tag{2}$$

2º) O operador $-P\Delta$ é definido positivo em V, isto é, $\| -P\Delta f \| \geq C \| \nabla f \|$ pois pela Identidade de Green (Proposição 1.1.3):

$$\int_{\Omega} (g\,\Delta f + \nabla f\,\nabla g)\,dx = \int_{\Omega} g\,\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,ds = 0 \text{ pois } g|_{\partial\Omega} \equiv 0$$

Logo $\int_{\Omega} g\,\Delta f\,dx = -\int_{\Omega} \nabla f\,\nabla g\,dx$, que pode ser escrito da seguinte forma: $(g;\Delta f) = -(\nabla f;\nabla g)$ (3)

Utilizando (1), pode-se obter

$$(P\Delta f; g) = (\Delta f; g) = -(\nabla f; \nabla g)$$

Então $(-P\Delta f; g) = (\nabla f; \nabla g)$ (4)

Fazendo $g = f$, tem-se

$$(-P\Delta f; f) = (\nabla f; \nabla f) = \| \nabla f \|^2$$

Então

$$\| \nabla f \|^2 = (-P\Delta f; f) \leq \| -P\Delta f \| \| f \|$$

Utiliza-se agora, a Desigualdade de Poincaré (Proposição 1.1.5)

$$\| \nabla f \|^2 \leq \| -P\Delta f \| \| f \| \leq C' \| -P\Delta f \| \| \nabla f \|$$

Então

$$\| \nabla f \| \leq C' \| - P\Delta f \|$$

$$\| - P\Delta f \| \geq \frac{1}{C'} \| \nabla f \|$$

$$\| - P\Delta f \| \geq C \| \nabla f \|$$

3º) O operador $-P\Delta : V \cap H^2 \to H$ possui a inversa compacta $(-P\Delta)^{-1} : H \to H$.

(a) Para provar que $-P\Delta$ é inversível, deve ser mostrado, primeiramente, que dada uma função $h \in H$, existe um único $v \in V$ tal que $-P\Delta v = h$.

De acordo com o Lema de Dubois Raymond, tem-se que

$$-P\Delta v = h \iff \int_{\Omega} (-P\Delta v) g \, dx = \int_{\Omega} h \, g \quad \forall \, g \in V$$

Mas, sabe-se que $(-P\Delta v; g) = (-\Delta v; g) = (\nabla v; \nabla g)$

Dessa forma, dada $h \in H$, precisa-se achar $v \in V$ tal que

$$(\nabla v; \nabla g) = (h; g) \ \forall \, g \in V$$

Define-se a forma bilinear a da seguinte forma: $a(u; w) = (\nabla u; \nabla w), \ u, w \in V; \ \phi : V \to IR$ onde $\langle \phi; w \rangle = (h; w)$, com

→ a contínua em VxV pois,

$| a(u; w) | = | (\nabla u; \nabla w) | \leq \| \nabla u \| \| \nabla w \| = \| u \|_V \| w \|_V$

→ a é coerciva, pois,

$a(w; w) = (\nabla w; \nabla w) = \| \nabla w \|^2$

→ $\phi \in V'$, pois, $\langle \phi; w \rangle = (h; w) \leq \| h \| \| w \| \leq C \| h \| \| \nabla w \| = C_h \| v \|_V$, isto é, ϕ é um funcional linear contínuo em V.

E, utilizando-se do teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.1.6), conclui-se que a equação $a(v;g)=\langle\phi;g\rangle\ \forall\, g\in V$ possui uma única solução $v\in V$, isto é, $(\nabla v;\nabla g)=(h;g)\ \forall\, g\in V$.

Portanto, $(-P\Delta)^{-1}:H\to V$ está bem definido.

(b) $V\subset H$ compactamente, isto é, $Id:V\to H$ é compacta. Isto decorre da imersão $H_0^1\subset L^2$ ser compacta. (Veja Adams, p. 144, Teorema 6.2).

(c) $Id\,\mathrm{o}(-P\Delta)^{-1}:H\to H$ é compacta. Isto decorre do fato de $(-P\Delta)^{-1}:H\to V$ ser contínua e $Id:V\to H$ ser compacta, como mostra a Proposição 1.1.7.

Proposição 2.1.2: O operador $-P\Delta$ possui uma seqüência de autovalores $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$; $\lambda_i \to \infty$ e as correspondentes autofunções $(e_i)_{i\in IN}$ formam um conjunto ortonormal completo em H.

Dem.) Neste caso, utilizamos o Teorema 1.1.8 com $A=H$, $T=(-P\Delta)^{-1}$, isto é $(-P\Delta)^{-1}:H\to H$.

Sabe-se que H é um Espaço de Hilbert separável e já foi provado que $(-P\Delta)^{-1}$ é compacto em H e autoadjunto, isto é, $((-P\Delta)^{-1}f;g)=(f;(-P\Delta)^{-1}g)$.

OBSERVAÇÕES:

(1) $\{e_i\}$ é chamada Base Espectral;

(2) $T : H \to H$ é autoadjunto $\Rightarrow$ $T^{-1} : H \to H$ é autoadjunto, pois

$$(T(u); v) = (u; T(v))$$

$$(T^{-1}(u); v) = (T^{-1}(u); T(w)) \text{ onde } v = T(w)$$

Assim, $(T^{-1}(u); T(w)) = (T(T^{-1}(u); w)) = (u; w) = (u; T^{-1}(v))$

Isto mostra que H admite uma base Hilbertiana formada por autovetores de T. Além disto, de acordo com o Teorema 1.1.8 o conjunto $(\beta_i)_{i \in IN}$ dos autovalores de $(-P\Delta)^{-1}$ forma uma seqüência que tende para zero. Portanto $\lambda_i = \dfrac{1}{\beta_i}$ forma uma seqüência de autovalores de $-P\Delta$ que tende para infinito. Finalmente, como $-P\Delta$ é autoadjunto, então, considerando os correspondentes autovetores ortonormais em L^2, $e_i \in H$ tem-se que

$$-P\Delta e_i = \lambda_i e_i \tag{5}$$

Assim

$$0 < (-P\Delta e_i;\ e_i) = (\lambda_i e_i;\ e_i) = \lambda_i \| e_i \|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i > 0$$

Reordenando os λ_i, tem-se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$

Definição 2.1.3: Define-se H_m o subespaço m-dimensional de H gerado por $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ onde $-P\Delta e_i = \lambda_i e_i$. Além disto, define-se $P_m : L^2 \to H_m$ a projeção ortogonal. Assim, como $f \in L^2$ tem- se:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, e_i \quad e \quad \alpha_i = (f\,; e_i) = \int_{\Omega} f(x)\, e_i(x) dx$$

e, portanto, $P_m f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, e_i$.

Proposição 2.1.4: A seqüência $\left(\dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)_{i \in IN}$ forma um conjunto completo ortonormal em V e para $\forall f \in V$ a seqüência $(P_i f)$ converge para f em V.

Dem.) Como e_i é autovetor de $-P\Delta$ com autovalor λ_i, tem-se

$$-P\Delta e_i = \lambda_i e_i$$

De acordo com (4) tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(-P\Delta\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)\left(\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \right) dx = \int_{\Omega} \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) dx$$

Por outro lado, sabe-se que

$$-P\Delta\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda i}} \right) = \frac{\lambda_i e_i}{\sqrt{\lambda_i}} = \sqrt{\lambda_i}\, e_i$$

então

$$\int_\Omega \left(-P\Delta\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\left(\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right) dx\right) = \int_\Omega \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_k}} e_i e_k \, dx = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_k}} \int_\Omega e_i e_k \, dx = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}} \displaystyle\int_\Omega e_i e_k \, dx = 1, & i = k \\ \dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_k}} .0 = 0, & i \neq k \end{cases}$$

Portanto, $\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)_{i \in IN}$ forma um conjunto ortonormal em V.

Para mostrar agora que $\left\{\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}$ é completo, considere $(-P\Delta)^{-1} : H \to V$ contínuo e a imersão $V \subset H$ compacta, isto é, $Id : V \to H$ é compacta. Então $T_1 = Id \circ (-P\Delta)^{-1} : H \to H$ é compacta conforme a Proposição 2.1.2. Portanto, H possui uma base ortogonal de autovetores de T_1, $T_1(v) = \lambda v$. Mas, além disto, $v \in V$ pois a imagem de $(-P\Delta)^{-1}$ está em V.

Por outro lado $T_2 = (-P\Delta)^{-1} \circ Id : V \to V$ também é compacta e assim V possui uma base ortogonal de autovetores de T_2; $T_2(v) = \beta v$.

Portanto, os elementos da base são os mesmos, com a diferença de que e_i é ortonormal em H e $\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)$ é ortonormal em V.

OBSERVAÇÃO: Com relação a regularidade das autofunções (e_i) há resultados relacionando esta regularidade com a regularidade da fronteira $\partial\Omega$ do conjunto Ω.

2.2. Estimativas para o erro nas aproximações em termos das autofunções da equação de Stokes

As seguintes estimativas fornecem resultados referentes ao erro da aproximação $P_m f \in H_m$ de uma função f em diferentes espaços funcionais:

PRIMEIRA ESTIMATIVA

Lema 2.2.1: Supondo $f \in V$ então vale a seguinte estimativa do erro $f - P_m f$:

$$\| f - P_m f \|^2 \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \| \nabla f \|^2$$

Dem.) Como $-P\Delta e_i = \lambda_i e_i$, então, para $i \geq m+1$,

$$(f;e_i) = \int_\Omega f(x)\, e_i(x)\, dx = \int_\Omega f(x) \frac{(-P\Delta e_i(x))}{\lambda_i}\, dx = \frac{1}{\lambda_i} \int_\Omega f(x)\,(-P\Delta e_i(x))\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_\Omega f(x) \left(\frac{-P\Delta e_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} \right) dx \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_{m+1}}} \int_\Omega f(x) \left(\frac{-P\Delta e_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{m+1}}} \int_\Omega \nabla f(x)\, \nabla \left(\frac{e_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} \right) dx$$

pois $\lambda_i \geq \lambda_{m+1}$, se $i \geq m+1$ e $\dfrac{1}{\lambda_i} \leq \dfrac{1}{\lambda_{m+1}}$.

Da Identidade de Parseval, sabe-se que se $f \in L^2(\Omega)$ então

$$\| f \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (f; e_i)^2$$

e

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \quad , \qquad P_m f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_1 e_i$$

Mas, $f_m = f - P_m f = \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i e_i = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + ... + 0\alpha_n + \alpha_{m+1} e_{m+1} + ...$

Então

$$\| f_m \|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} (f; e_i)^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} f(x)\, e_i(x)\, dx \right)^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} \nabla f(x) \nabla \left(\frac{e_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} \right) dx \right)^2 \quad (6)$$

Mas como $f \in V$ e $\left(\dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)$ é ortonormal em V, tem-se

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}; \quad \alpha_i = \left(f; \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) = \int_{\Omega} \nabla f\, \nabla \left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) dx$$

Como $\|f\|_V = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{\,2} \right)^{1/2}$ então

$$\| f \|_{V^2}^2 = \| \nabla f \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} \nabla f\, \nabla \left(\frac{e_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} \right) dx \right)^2 \geq \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} \nabla f\, \nabla \left(\frac{e_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \right)^2$$

SEGUNDA ESTIMATIVA

Lema 2.2.2: Seja $f \in V \cap H^2$ então, vale a seguinte estimativa do erro $f - P_m f$:

$$\| f - P_m f \|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^2} \| P\Delta f \|^2$$

Dem.) Analogamente como no Lema 2.2.1, tem-se $-P\Delta e_i = \lambda_i e_i$ e $\lambda_i \geq \lambda_{m+1}$ quando $i \geq m+1$.

Além disto,

$$\left(\int_\Omega f(x)\, e_i(x)\, dx \right)^2 = \left(\int_\Omega f(x) \frac{(-P\Delta e_i(x))}{\lambda_i}\, dx \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i^2} \left(\int_\Omega f(x)\, (-P\Delta e_i(x))\, dx \right)^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^2} \left(\int_\Omega f(x)\, (-P\Delta e_i(x))\, dx \right)^2 = \frac{1}{\lambda_{m+1}^2} \left(\int_\Omega \left(-P\Delta f(x)\, e_i(x)\, dx \right) \right)^2$$

pois $-P\Delta$ é simétrico.

Mas, de acordo com (4) e (6), tem-se

$$\| f - P_m f \|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega f(x)\, e_i(x)\, dx \right)^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^2} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega (-P\Delta f(x)\, e_i(x)\, dx \right)^2$$

Como $-P\Delta \in L^2$, então

$$-P\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i(x), \quad \text{onde } \alpha_i = (-P\Delta f ; e_i) \text{ e, assim,}$$

$$\| -P\Delta f \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_\Omega (-P\Delta f(x)\, e_i(x))\, dx \right) \geq \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega (-P\Delta f(x)\, e_i(x))\, dx \right)^2$$

Portanto,

$$\| f - P_m f \|^2 \le \frac{1}{\lambda_{m+1}^2} \| P\Delta f \|^2$$

TERCEIRA ESTIMATIVA

Lema 2.2.3: Seja $f \in V \cap H^2$. Então, vale a seguinte estimativa de erro:

$$\| \nabla f - \nabla(P_m f) \|^2 \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \| P\Delta f \|^2$$

D.) De (4) obtém-se

$$\left[\int_\Omega \nabla f \, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) dx \right]^2 = \left[\int_\Omega (-P\Delta f) \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \, dx \right]^2 = \frac{1}{\lambda_i} \left(\int_\Omega (-P\Delta f) \, e_i \, dx \right)^2 \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \left(\int_\Omega (-P\Delta f) \, e_i \, dx \right)^2$$

pois $\lambda_i \ge \lambda_{m+1}$ para $i \ge m+1$.

Usando (4) e (5), obtém-se

$$\int_\Omega f \, \lambda_i e_i \, dx = \int_\Omega f (-P\Delta e_i) \, dx = \int_\Omega (-P\Delta f) e_i \, dx = \int_\Omega \nabla f \, \nabla e_i \, dx .$$

Então $\int_\Omega f \, \lambda_i e_i \, dx = \int_\Omega \nabla f \, \nabla e_i \, dx$

$$\int_\Omega f \, e_i dx = \int_\Omega \nabla f \, \nabla \frac{e_i}{\lambda_i} \, dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_\Omega \nabla f \, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) dx$$

Assim

$$\nabla e_i \int_\Omega f e_i \, dx = \frac{\nabla e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \int_\Omega \nabla f \, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) dx = \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) \int_\Omega \nabla f \, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) dx$$

Então

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \nabla e_i \int_\Omega f e_i \, dx = \sum_{i=m+1}^{\infty} \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) \int_\Omega \nabla f \, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) dx$$

Como $\left(\dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)$ é ortonormal em V (Proposição 2.1.4), então

$$\| \nabla f_m \|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega \nabla f \, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) dx \right)^2 \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega (-P\Delta f) e_i \, dx \right)^2 \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_\Omega (-P\Delta f) e_i \, dx \right)^2$$

Portanto

$$\| \nabla f_m \|^2 \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \| P\Delta f \|^2 < \infty$$

pois $f \in H^2(\Omega) \Rightarrow \Delta f \in L^2(\Omega)$.

CAPÍTULO 3

3. Estimativas de erro para as soluções do sistema de equações de Navier-Stokes

3.1 Descrição do problema

Seja a equação de Navier- Stokes a seguir:

$$\begin{cases} u_t + u.\nabla u - \mu\Delta u + \nabla p = f \\ div\, u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} \equiv 0 \; para\; t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ f \equiv 0; \mu = 1 \end{cases} \qquad (7)$$

A qual pode ser escrita do seguinte modo:

$$u_t + u.\nabla u - \Delta u + \nabla p = 0$$

Aplicando a projeção P na equação acima, obtém-se:

$$P(u_t + u.\nabla u - \Delta u + \nabla p) = P(0) = 0$$

$$P(u_t) + P(u.\nabla u) - P\Delta u + P(\nabla p) = 0 \qquad (8)$$

Pode-se fazer $P(u_t) = \partial_t (Pu) = \partial_t u$ pois $Pu = u;\ u \in V$ e $V \subset H$.

Como $\nabla p \in H^1$ (Veja Temam $[\,9\,]$, p. 15), então $P(\nabla p) = 0$, pode-se escrever a equação (8) do seguinte modo:

$$u_t + P(u.\nabla u) - P\Delta u = 0$$

Assim , a equação (7) pode ser reescrita do seguinte modo :

$$\begin{cases} u_t - P\Delta u = -P(u.\nabla u) \ \ em \ \ Q = \Omega\, x\, [0,t[\\ u \equiv 0 \ \ em\, \partial\Omega;\ t \geq 0 \\ u = u_0;\ t = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

O problema agora é procurar $u_k(t,x) = \sum_{i=1}^{k} a_{k,i}(t)\, e_i(x)$, solução k dimensional, onde $\{\, e_i \,\}$ é a base espectral, isto é, $-P\Delta e_i = \lambda_i e_i$.

Multiplicando a equação (9) por $v \in V$ e integrando em x, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega} u\, v\, dx \right) - \int_{\Omega} P\Delta u\, v\, dx = -\int_{\Omega} P(u.\nabla u)\, v\, dx$$

$$\frac{d}{dt}(u;v) - (P\Delta u; v) = -(P(u.\nabla u); v)$$

Substituindo u por u_k na equação acima e considerando $v \in V_k$ onde $V_k = [e_1, e_2, ..., e_k] \subset V$, tem-se

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_k ; v) - (P\Delta u_k ; v) = -(P(u_k.\nabla u_k); v), \ v \in V_k \\ u_k(0) = u_{0,k} \ \ , \ onde \ \ u_{0,k} \ \ é \ \ a \ \ projeção \ \ de \ \ u_0 \ \ em \ \ V_k . \end{cases} \tag{10}$$

Mas, deve ser observado que

$(P(u_k.\nabla u_k); v) = (u_k.\nabla u_k ; Pv) = (u_k.\nabla u_k ; v)$ pois $P(v) = v$ já que $v \in V_k$,

$$(P\Delta u_k ; v) = (\Delta u_k ; Pv) = (\Delta u_k ; v)$$

e

$$\frac{d}{dt}(u_k ; v) = \left(\frac{d}{dt}u_k , v\right)$$

Portanto, (10) fica

$$\left(\frac{d}{dt}u_k ; v\right) - (\Delta u_k ; v) = -(u_k.\nabla u_k ; v)$$

Substituindo v por $e_i(x)$ e multiplicando a equação por $a_{k,i}$ e somando-se em $i = 1,...,k$,obtém-se

$$\left(\frac{d}{dt}u_k ; u_k\right) - (\Delta u_k ; u_k) = -(u_k.\nabla u_k ; u_k)$$

Note que

i) $(\Delta u_k ; u_k) = -(\nabla u_k ; \nabla u_k) = -\| \nabla u_k \|^2$

ii) $(u_k . \nabla u_k ; u_k) = 0$ devido a Proposição 1.1.11.

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u_k \|^2 - (-\| \nabla u_k \|^2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\| u_k \|^2 + 2\| \nabla u_k \|^2 = 0$$

O seguinte teorema, devido a J. Heywood (veja Heywood [4]), fornece um resultado de existência de soluções cujas estimativas utilizaremos em secções subseqüentes.

Teorema 3.1.1: Seja $\Omega \subset IR^3$ um aberto limitado e regular, $u_0 \in V$ e $T > 0$ dados, então o sistema de equações (7) possui uma única solução u definida em $[0, \varepsilon)$ com $\varepsilon \leq T$ onde esta solução e suas aproximações de Galerkin satisfazem:

$$\| \nabla u(t) \|^2 + \int_0^t \| u_t(\tau) \|^2 d\tau \leq F_0(t) \leq F_{0,0} \quad \forall\, t \in [0, \varepsilon) \text{ onde } F_{0,0} \in IR_+ \qquad (11)$$

$$\int_0^t \| P\Delta u(\tau) \|^2 d\tau \leq h_0(t) \quad \forall\, t \in [0, \varepsilon) \qquad (12)$$

onde F_0 e h_0 são funções contínuas em $[0, T]$.

3.2 Estimativas de erro para as aproximações de Galerkin para as soluções do sistema de equações de Navier-Stokes

Para demonstrar o próximo Teorema, que é o resultado fundamental deste estudo de estimativas de erro, utiliza-se o seguinte Lema:

Lema 3.2.1: Seja $a(t) \geq 0$ uma função contínua com $a'(t) \geq 0$ e $b(t)$ integrável em $[0,T]$ e $\lambda > 0$. Suponha que para funções φ e α contínuas positivas em $[0,T]$ vale a desigualdade

$$\varphi(t) + \int_0^t \alpha(s)\, ds \;\leq\; \frac{a(t)}{\lambda} + \int_0^t b(s)\,\varphi(s)\, ds \tag{13}$$

Então

$$\varphi(t) + \int_0^t \alpha(s)\, ds \leq \frac{A(t)}{\lambda} \;,$$

onde

$$A(t) = \left(1 + \psi(t)\int_0^t b(s)\, ds\right) a(t)$$

$$\psi(t) = \exp\left(\int_0^t b(s)\, ds\right)$$

Dem.) De (13) vem que:

$$\varphi(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \alpha(s)\, ds \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \int_0^t b(s)\, \varphi(s)\, ds$$

Utilizando o Lema de Gronwall (Lema 1.1.13) , vem

$$\varphi(t) \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \int_0^t b(s) \frac{a(s)}{\lambda} \left(\exp \int_0^t b(u)\, du \right) ds$$

Como $a'(s) \geq 0 \Rightarrow a$ é crescente $\Rightarrow a(s) \leq a(t) \;\; para \;\; 0 \leq s \leq t$

Então

$$\varphi(t) \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \frac{a(t)}{\lambda} \int_0^t b(s) \left(\exp \int_0^t b(u)\, du \right) ds \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \frac{a(t)}{\lambda} \exp\left(\int_0^t b(u)\, du \right) \int_0^t b(s)\, ds =$$

$$\frac{1}{\lambda} \left[1 + \exp\left(\int_0^t b(u)\, du \right) \int_0^t b(s)\, ds \right] a(t)$$

Para a demonstração do próximo Teorema, considere um intervalo de tempo $[0,T]$; (e_i) base espectral conforme Proposições 2.1.2 e 2.1.4 anteriores.

Teorema 3.2.2: Seja $u_0 \in V$. Então as aproximações de Galerkin u_k do sistema de equações de Navier-Stokes (7) satisfazem as seguintes estimativas de erro:

$$\| u(t) - u_k(t) \|^2 + \int_0^t \| \nabla(u(s) - u_k(s)) \|^2 ds \leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (14)$$

Aqui a função $F_0^*(t)$ é limitada e depende de T e de $\| \nabla u_0 \|$.

OBSERVAÇÃO: A desigualdade (14) vale com $u_l(t)$ no lugar de $u(t)$, desde que $l > k$, isto é,

$$\| u_l(t) - u_k(t) \|^2 + \int_0^t \| \nabla(u_l(s) - u_k(s)) \|^2 ds \leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}; \ l > k, \ t \in [0,T].$$

Dem.) Sejam $u_k(x,t)$ e $u_l(x,t)$ duas aproximações de Galerkin do sistema de equações de Navier-Stokes. Como a igualdade (10) vale $\forall v \in V_k$, então

$$\begin{cases} \partial_t u_k - P\Delta u_k = -P_k(u_k.\nabla u_k) \\ u_k(0) = P_k u_0 \end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases} \partial_t u_l - P\Delta u_l = -P_l(u_l.\nabla u_l) \\ u_l(0) = P_l u_0 \end{cases} \qquad (16)$$

Definindo $w = u_l - u_k$ e subtraindo (15) de (16), tem-se

$$\partial_t u_l - P\Delta u_l - \partial_t u_k + P\Delta u_k = -P_l(u_l.\nabla u_l) + P_k(u_k.\nabla u_k) \qquad (17)$$

$$\partial_t(u_l - u_k) - P(\Delta(u_l - u_k) = P_k(u_k.\nabla u_k) - P_l(u_l.\nabla u_l)$$

$$\partial_t w - P\Delta w = P_k(u_k.\nabla u_k) - P_l(u_l.\nabla u_l) \qquad (18)$$

$$w(0) = u_l(0) - u_k(0) = P_l u_0 - P_k u_0 = (P_l - P_k)(u_0)$$

Somando-se e subtraindo-se $P_k(u_l.\nabla u_l)$ em (18) , tem-se

$$\partial_t w - P\Delta w = P_k(u_k.\nabla u_k) - P_l(u_l.\nabla u_l) + P_k(u_l.\nabla u_l) - P_k(u_l.\nabla u_l)$$

$$\begin{aligned} &\partial_t w - P\Delta w = P_k(u_l.\nabla u_l) - P_l(u_l.\nabla u_l) + P_k(u_k.\nabla u_k) - P_k(u_l.\nabla u_l) \\ &\partial_t w - P\Delta w = -(P_l - P_k)(u_l.\nabla u_l) + P_k(u_k.\nabla u_k) - P_k(u_l.\nabla u_l) = \\ &= -(P_l - P_k)(u_l.\nabla u_l) + P_k(u_k.\nabla u_k - u_l.\nabla u_l) \end{aligned} \qquad (19)$$

Porém, o termo $P_k(u_k.\nabla u_k - u_l.\nabla u_l)$ na equação acima pode ser escrito como

$$P_k(u_k.\nabla u_k - u_l.\nabla u_l) = -P_k(u_l.\nabla u_l - u_k.\nabla u_k)$$

E vale a seguinte afirmação: $u_l.\nabla u_l - u_k.\nabla u_k = u_l.\nabla w + w.\nabla u_k$, pois

$$\begin{aligned} &u_l.\nabla w + w.\nabla u_k = u_l.\nabla(u_l - u_k) + (u_l - u_k).\nabla u_k = \\ &= u_l.\nabla u_l - u_l.\nabla u_k + u_l.\nabla u_k - u_k.\nabla u_k = u_l.\nabla u_l - u_k.\nabla u_k \end{aligned}$$

Portanto, a equação (19) fica

$$\partial_t w - P\Delta w = -(P_l - P_k)(u_l.\nabla u_l) - P_k(u_l.\nabla u_l - u_k.\nabla u_k)$$

$$\begin{aligned}&\partial_t w - P\Delta w = -(P_l - P_k)(u_l.\nabla u_l) - P_k(u_l.\nabla w + w.\nabla u_k)\\&w(0) = (P_l - P_k)u_0\end{aligned} \tag{20}$$

Multiplicando-se a equação (20) por w e integrando, tem-se

$$(\partial_t w; w) - (P\Delta w; w) = -((P_l - P_k)(u_l.\nabla u_l); w) - (P_k(u_l.\nabla w + w.\nabla u_k); w)$$

Usando o fato de que

$$(\partial_t w; w) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| w \|^2 \;\; e \;\; (-P\Delta w; w) = (\nabla w; \nabla w) = \| \nabla w \|^2$$

e substituindo na equação acima, vem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| w \|^2 + \| \nabla w \|^2 = -\int_\Omega [(P_l - P_k)(u_l \nabla u_l) + P_k(u_l.\nabla w + w.\nabla u_k)]\, w\, dx$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\| w \|^2 + 2\| \nabla w \|^2 = -2\int_\Omega [(P_l - P_k)(u_l \nabla u_l) + P_k(u_l.\nabla w + w.\nabla u_k)]\, w\, dx\\&\| w(0) \|^2 = \| (P_l - P_k)u_0 \|^2\end{aligned} \tag{21}$$

Mas,

$$\begin{aligned}&\| w(0) \|^2 = \| P_l u_0 - P_k u_0 \|^2 = \| P_l u_0 - u_0 + u_0 - P_k u_0 \|^2 \le\\&\le \left(\| P_l u_0 - u_0 \| + \| u_0 - P_k u_0 \| \right)^2 \le 2\| P_l u_0 - u_0 \|^2 + 2\| u_0 - P_k u_0 \|^2\end{aligned}$$

Por sua vez, baseando-se na primeira estimativa (Lema 2.2.1), pode-se escrever

$$2\| P_l u_0 - u_0 \|^2 + 2\| u_0 - P_k u_0 \|^2 \leq \frac{2}{\lambda_{l+1}}\| \nabla u_0 \|^2 + \frac{2}{\lambda_{k+1}}\| \nabla u_0 \|^2 = \\ = 2\left(\frac{1}{\lambda_{l+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}} \right)\| \nabla u_0 \|^2 \qquad (22)$$

Porém, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_{k+1} \leq \lambda_{l+1}$ pois $l > k$, então $\frac{1}{\lambda_{k+1}} \geq \frac{1}{\lambda_{l+1}}$.

Portanto, tem-se de (22), o seguinte

$$2\left(\frac{1}{\lambda_{l+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}} \right)\| \nabla u_0 \|^2 \leq 2\left(\frac{1}{\lambda_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}} \right)\| \nabla u_0 \|^2 = \frac{1}{\lambda_{k+1}}.4\| \nabla u_0 \|^2$$

De (11) conclui-se que

$$\| \nabla u(t) \|^2 \leq F_{0,0}$$

Então $\| \nabla u(0) \|^2 \leq F_{0,0}$ e $\| \nabla u_0 \|^2 \leq F_{0,0}$

Assim, $\frac{1}{\lambda_{k+1}} 4\| \nabla u_0 \|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} 4\, F_{0,0}$

Abaixo segue a estimativa do lado direito da equação (21) em duas partes:

I) Estimativa de $\int_\Omega (P_l - P_k)(u_l.\nabla u_l)\, w\, dx$

Para tal, usa-se o fato de:

i) $l > k$

ii) P_l, P_k e $P_l - P_k$ são projeções ortogonais em L^2

iii) $P_l\, u_k = P_k\, u_k = u_k$

iv) $P_l\, u_l = u_l$

Então, pode-se afirmar que $\int_\Omega ((P_l - P_k)f)\, w = \int_\Omega f(1 - P_k)u_l$, para $f \in L^2$.

Pois,

$$\int_\Omega ((P_l - P_k)f)\, w = \int_\Omega f(P_l - P_k)(u_l - u_k) =$$

$$\int_\Omega f\,(P_l u_l - P_l u_k - P_k u_l + P_k u_k) =$$

$$\int_\Omega f\,(u_l - u_k - P_k u_l + u_k) =$$

$$\int_\Omega f\,(u_l - P_k u_l) = \int_\Omega f\,(1 - P_k)u_l$$

Portanto

$$\int_\Omega ((P_l - P_k)(u_l.\nabla u_l))\, w = \int_\Omega (u_l.\nabla u_l)(1 - P_k)u_l \tag{23}$$

Por outro lado, tem-se

$$\left\| \int_{\Omega} \left(f\nabla g \right) h \, dx \right\| \leq \| f . \nabla g \| \| h \| \leq \| f \|_{\infty} \| \nabla g \| \| h \|$$

De acordo com o caso “c” da página 97 de Adams $[1]$, com $m = 2$, $n = 3$ e $p = 2$, tem-se a seguinte Imersão de Sobolev: $H^2(\Omega) \subset C_B^0(\Omega)$, onde $C_B^0(\Omega) = C^0(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$.

Assim, para $f \in H^2(\Omega) \Rightarrow$

$$\| f \|_{\infty} \leq C \| f \|_{H^2}$$

Utilizando o Lema 1.1.12 obtém-se que $\exists C,\ c' > 0$ tal que

$$\| -P\Delta f \| \leq C \| f \|_{H^2}$$
$$\| f \|_{H^2} \leq c' \| -P\Delta f \|$$

Assim, $\| f \|_{\infty} \leq C \| f \|_{H^2} \leq c' \| P\Delta f \|$.

Portanto

$$\left| \int_{\Omega} (f\nabla g) \, h \, dx \right| \leq \| f\nabla g \| \| h \| \leq \| f \|_{\infty} \| \nabla g \| \| h \| \leq C \| P\Delta f \| \| \nabla g \| \| h \| =$$
$$C \| \nabla g \| \left(\| P\Delta f \| \| h \| \right) \leq \delta \| \nabla g \|^2 + c_{\delta} \| P\Delta f \|^2 \| h \|^2$$

pois

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

$$ab = \left(\sqrt{2\varepsilon}a\right)\left(\frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) \le 2\varepsilon\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4\varepsilon} = \varepsilon\, a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

Utilizando-se as estimativas acima, vem:

$$\left|\int_\Omega (P_l - P_k)(u_l.\nabla u_l)\, w\right| = \left|\int_\Omega (u_l.\nabla u_l)(1-P_k)u_l\right| \le \int_\Omega |\, u_l \,||\, \nabla u_l \,||\, (1-P_k)u_l \,| \le$$
$$\le \|\, u_l \nabla u_l \,\|\|\, (1-P_k)u_l \,\| \le \|\, u_l \,\|_\infty \|\, \nabla u_l \,\|\|\, (1-P_k)u_l \,\| \le C\|\, P\Delta u_l \,\|\|\, \nabla u_l \,\|\|\, (1-P_k)u_l \,\| \le$$
$$\le C\|\, P\Delta u_l \,\|\|\, \nabla u_l \,\| \frac{C}{\lambda_{k+1}}\|\, P\Delta u_l \,\| = \frac{C}{\lambda_{k+1}}\|\, P\Delta u_l \,\|^2 \|\, \nabla u_l \,\|$$

em que utilizou-se a segunda estimativa (Lema 2.2.2) .

Mas de (11) vem:

$$\|\, \nabla u_l \,\|^2 \le F_{0,0} \Rightarrow \|\, \nabla u_l \,\| \le \sqrt{F_{0,0}}$$

Assim:

$$\frac{1}{\lambda_{k+1}}\|\, P\Delta u_l \,\|^2 \|\, \nabla u_l \,\| \le C\frac{1}{\lambda_{k+1}}\|\, P\Delta u_l \,\|^2 \sqrt{F_{0,0}}$$

II) Estimativa de $\int_\Omega P_k(u_l.\nabla w + w.\nabla u_k)\, w\, dx$

Primeiramente, observe que, de acordo com o Corolário 1.1.2 com $H = L^2(\Omega)$ tem- se

$$\| P_k f \| \leq \| f \| \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

Agora,

$$\left| \int_\Omega P_k(u_l.\nabla w)\, w\, dx \right| \leq \int_\Omega | P_k(u_l.\nabla w) || w | dx \leq \| P_k(u_l.\nabla w) \| \| w \| \leq \| u_l.\nabla w \| \| w \| \leq$$

$$\leq \| u_l \|_\infty \| \nabla w \| \| w \| \leq \| \nabla w \| (\| P\Delta u_l \| \| w \|) \leq \delta \| \nabla w \|^2 + c_\delta \| P\Delta u_l \|^2 \| w \|^2$$

Por outro lado:

$$\left| \int_\Omega P_k(w.\nabla u_k)\, w\, dx \right| \leq \int_\Omega | P_k(w.\nabla u_k) || w | dx \leq \| P_k(w.\nabla u_k) \| \| w \| \leq \| w.\nabla u_k \| \| w \| =$$

$$\left(\int_\Omega |w.\nabla u_k|^2 dx \right)^{1/2} \| w \| \leq \left(\int_\Omega | w |^{2.3} dx \right)^{1/6} \left(\int_\Omega | \nabla u_k |^{2.\frac{3}{2}} dx \right)^{1/3} \| w \| =$$
$$= \| w \|_6 \| \nabla u_k \|_3 \| w \| \leq C \| \nabla w \| \| \nabla u_k \|_3 \| w \| \leq$$
$$\leq C \| \nabla w \| \| u_k \|_{H^2} \| w \| \leq C \| \nabla w \| \| -P\Delta u_k \| \| w \|$$

OBSERVAÇÕES:

1) As duas imersões de Sobolev abaixo podem ser vistas na página 97 de Adams $[1]$, no caso de $mp < n$, com $m = 1$, $p = 2$ e $n = 3$, sendo que no caso i abaixo, $j = 1$.

i) $H^2(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ com $2 \leq p \leq 6$;

ii) $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, assim para $f \in H_0^1(\Omega)$ tem- se $\| f \|_6 \leq C \| f \|_{H_0^1} = C \| \nabla f \|$.

2) Dada $g \in V \cap H^2$ tem- se: $\| g \|_3 \leq c\left(\| \nabla g \|^{1/2} \| g \|^{1/2} + \| g \| \right)$

De fato

$$\| g \|_3 = \left(\int_\Omega | g |^3 dx \right)^{1/3} = \left(\int_\Omega | g |^{3/2} | g |^{3/2} dx \right)^{1/3} \leq \left(\int_\Omega | g |^{3p/2} dx \right)^{1/3p} \left(\int_\Omega | g |^{3q/2} dx \right)^{1/3q}$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Fazendo $p = \frac{4}{3}$ e $q = 4$ obtém-se:

$$\left(\int_\Omega | g |^2 dx \right)^{1/4} \left(\int_\Omega | g |^6 dx \right)^{1/12} = \| g \|^{1/2} \| g \|_6^{1/2} \leq C \| g \|^{1/2} \| g \|_{H_0^1}^{1/2} =$$

$$= C \| g \|^{1/2} \left(\sqrt{\| g \|^2 + \| \nabla g \|^2} \right)^{1/2} \leq C \| g \|^{1/2} \left(\sqrt{\| g \|^2} + \sqrt{\| \nabla g \|^2} \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C \| g \|^{1/2} \left(\sqrt{\| g \| + \| \nabla g \|} \right) \leq C \| g \|^{1/2} \left(\| g \|^{1/2} + \| \nabla g \|^{1/2} \right) =$$

$$= C \left(\| g \| + \| g \|^{1/2} \| \nabla g \|^{1/2} \right)$$

Portanto, usando as observações acima, tem-se:

$$\left| \int_\Omega P_k\,(w.\nabla u_k)\, w\, dx \right| \leq \; C \,\| \nabla w \| \, \left(\| P\Delta u_k \| \| w \| \right) \leq \; \delta \,\| \nabla w \|^2 + c_\delta \,\| P\Delta u_k \|^2 \,\| w \|^2$$

Substituindo as Estimativas I e II na equação (21), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \| w \|^2 + 2 \| \nabla w \|^2 \;\leq$$

$$\leq \; C \frac{1}{\lambda_{k+1}} \| P\Delta u_l \|^2 \sqrt{F_{0,0}} + 4\,\delta \,\| \nabla w \|^2 + c_\delta \,\| P\Delta u_k \|^2 \,\| w \|^2 + c_\delta \,\| P\Delta u_l \|^2 \,\| w \|^2$$

$$\frac{d}{dt} \| w \|^2 + (2 - 4\delta) \| \nabla w \|^2 \;\leq\; \frac{c}{\lambda_{k+1}} \| P\Delta u_l \|^2 \sqrt{F_{0,0}} + c_\delta \,(\| P\Delta u_k \|^2 + \| P\Delta u_l \|^2) \| w \|^2$$

Escolhe-se $\delta > 0$ tal que $2 - 4\delta > 0$, isto é, $\delta < \frac{1}{2}$, por exemplo $\delta = \frac{1}{4}$:

$$\frac{d}{dt} \| w \|^2 + \| \nabla w \|^2 \;\leq\; \frac{C}{\lambda_{k+1}} \| P\Delta u_l \|^2 \sqrt{F_{0,0}} + C\,(\| P\Delta u_k \|^2 + \| P\Delta u_l \|^2) \| w \|^2$$

Integrando no tempo entre 0 e t

$$\| w(t) \|^2 - \| w(0) \|^2 + \int_0^t \| \nabla w \|^2 ds \;\leq$$

$$\leq \; \frac{C}{\lambda_{k+1}} \sqrt{F_{0,0}} \int_0^t \| P\Delta u_l \|^2 ds + C \int_0^t (\| P\Delta u_k \|^2 + \| P\Delta u_l \|^2) \| w(s) \|^2 \, ds$$

Utilizando a desigualdade (12) obtém-se

$$\| w(t) \|^2 + \int_0^t \| \nabla w \|^2 ds \leq \| w(0) \|^2 + \frac{C\sqrt{F_{0,0}}h_0(t)}{\lambda_{k+1}} + \int_0^t b(s) \| w \|^2 ds \qquad (24)$$

onde $b(s) = C(\| P\Delta u_k \|^2 + \| P\Delta u_l \|^2)$.

Observe que, novamente , de acordo com a desigualdade (12) , tem-se

$$\int_0^t b(s)\, ds = \int_0^t C(\| P\Delta u_k \|^2 + \| P\Delta u_l \|^2)\, ds \leq 2\,C\, h_0(t) \qquad (25)$$

Por outro lado, já foi mostrado que

$$\| w(0) \|^2 \leq \frac{4}{\lambda_{k+1}} \| \nabla u_0 \|^2 \leq \frac{4}{\lambda_{k+1}} F_0(0)$$

Onde a última desigualdade é obtida fazendo-se $t = 0$ em (11) .

Substituindo a desigualdade acima na inequação (24), vem

$$\| w(t) \|^2 + \int_0^t \| \nabla w \|^2 ds \leq \frac{4\| \nabla u_0 \|^2 + C\sqrt{F_{0,0}}h_0(t)}{\lambda_{k+1}} + \int_0^t b(s) \| w(s) \|^2 ds$$

Denominando

$$a(t) = 4\| \nabla u_0 \|^2 + C\sqrt{F_{0,0}}\; h_0(t),$$

$$b(t) = C\left(\| P\Delta u_k(t) \|^2 + \| P\Delta u_l(t) \|^2 \right);$$

$$\varphi(t) = \| w(t) \|;$$

$$\alpha(t) = \| \nabla w(t) \|,$$

e utilizando o Lema 3.2.1 com $\lambda = \lambda_{k+1}$, tem-se

$$\| w(t) \|^2 + \int_0^t \| \nabla w \|^2 dt \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \left(1 + \psi(t) \int_0^t b(s)\, ds \right) a(t) \tag{26}$$

onde $\psi(t) = \exp\left[\int_0^t C \left(\| P\Delta u_k(s) \|^2 + \| P\Delta u_l(s) \|^2 \right) ds \right]$.

Então de acordo com (25), obtém-se

$$\psi(t) \leq \exp\left(2\, C\, h_0(t) \right)$$

Além disto, de acordo com (25), tem-se

$$\int_0^t b(s)\, ds = \int_0^t C \left(\| P\Delta u_k(s) \|^2 + \| P\Delta u_l(s) \|^2 \right) ds \leq 2\, C\, h_0(t)$$

Substituindo as desigualdades acima na equação (26), obtém-se

$$\| w(t) \|^2 + \int_0^t \| \nabla w(s) \|^2 ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \left[1 + e^{2 C h_0(t)}\, 2\, C\, h_0(t) \right] \left(4 \| \nabla u_0 \|^2 + C \sqrt{F_{0,0}}\, h_0(t) \right) = \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}$$

Observe que o lado direito da inequação acima não depende da aproximação u_l com $l > k$ e é uma função contínua para $t \in [0,T]$.

Assim:

$$\| u_l(t) - u_k(t) \|^2 + \int_0^t \| \nabla u_l(s) - \nabla u_k(s) \|^2 ds \leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}} \tag{27}$$

Portanto, existe uma subseqüência $u_l \longrightarrow u$ em $L^2(0,T,H)$ (veja Temam $[\,9\,]$, p. 287). Assim

$$\int_0^T \| u_l(t) - u(t) \|^2 dt \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

Isto é, $\int_0^T \| u_l(t) - u(t) \|^2 dt < \varepsilon$ se $l > l_\varepsilon$

$$\Rightarrow \int_0^T \sup_{0\le t\le T} \| u_l(t) - u(t) \|^2 dt < \varepsilon$$

$$\Rightarrow T \sup_{0\le t\le T} \| u_l(t) - u(t) \|^2 dt < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \| u_l(t) - u(t) \|^2 \le \sup_{0\le t\le T} \| u_l(t) - u(t) \|^2 < \frac{\varepsilon}{T}$$

Assim

$$\| u_l(t) - u(t) \|^2 < \varepsilon' \text{ se } l > l_{\varepsilon'} \quad \Rightarrow \quad \lim_{l\to\infty} \| u_l(t) - u(t) \| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{l\to\infty} \| u_l(t) - u_k(t) \|^2 = \| u(t) - u_k(t) \|^2$$

Utilizando (3.40) da página 287 de Temam $[\,9\,]$, sabe-se que

$u_l \longrightarrow u$ fraco em $L^2(0,T,V)$ quando $l \to \infty$, logo $(\, u_l - u_k \,) \longrightarrow (\, u - u_k \,)$ fraco em $L^2(0,T,V)$ quando $l \to \infty$.

Da proposição 1.1.14 tem-se que

$$\| u - u_k \|_{L^2(0,T,V)} \leq \liminf_{l\to\infty} \| u_l - u_k \|_{L^2(0,T,V)} \leq \limsup_{l\to\infty} \| u_l - u_k \|_{L^2(0,T,V)}$$

Tomando o limite superior em ambos os lados de (26), obtém-se

$$\limsup_{l\to\infty} \| u_l(t) - u_k(t) \|^2 + \limsup_{l\to\infty} \int_0^t \| \nabla u_l(s) - \nabla u_k(s) \|^2 ds \leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}$$

$$\| u(t) - u_k(t) \|^2 + \int_0^t \| \nabla u(s) - \nabla u_k(s) \|^2 \, ds \leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}$$

sendo a estimativa proposta no teorema 3.2.2 que fornece estimativas do erro para as aproximações de Galerkin em normas L^2 e H_0^1.

CAPÍTULO 4

4. Conclusão e sugestões para trabalhos originais futuros

Neste trabalho foi apresentado uma estimativa de erro para as aproximações de Galerkin da velocidade nas equações de Navier-Stokes nas normas $L^\infty(0,T,H)$ e $L^2(0,T,V)$ em termos dos autovalores do operador de Stokes: $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots)$ com $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = \infty$. Mostrou-se, assim, que quando k aumenta, a aproximação de ordem k (sendo k uma dimensão finita) o erro tende a zero na ordem inversa do valor do autovalor λ_k , isto é, $\dfrac{1}{\lambda_k}$.

A técnica utilizada foi o método espectral de Galerkin, adotando-se como funções base as autofunções do operador de Stokes.

A grande vantagem do uso destas autofunções está, além da sua regularidade (pois são funções de $H^2(\Omega)$), na propriedade $P\Delta u_k = \lambda_k u_k$.

Numa etapa preliminar fundamental foram apresentados três Lemas, (veja 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3), onde obteve-se estimativas em $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ da diferença entre u e $P\Delta u$ e em todas estas estimativas surgiu a ordem inversa dos autovalores. Nesta etapa as dificuldades enfrentadas não foram no âmbito da teoria, mas sim, da técnica, devido ao uso das propriedades do operador $P\Delta u$.

Na demonstração do resultado principal uilizou-se o Método de Galerkin juntamente com o operador $P\Delta u$ e na etapa final o resultado utilizado possuía uma desigualdade diferencial (veja Lema 3.2.1)

O resultado mostrado neste trabalho tem uma aplicação direta na ordem da convergência de um método numérico, como por exemplo, o de elementos finitos, ou outro, com base no Método de Galerkin sugerindo o uso de autofunções onde a seqüência inversa dos autovalores convergem para zero de forma mais rápida possível (dependendo do domínio considerado).

A maior dificuldade surgida durante este estudo foi na obtenção de estimativas adequadas para expressões envolvendo o operador $P\Delta$ diferentemente de uma situação mais geral onde poderiam ser utilizadas como funções bases um outro conjunto qualquer de funções (veja pp. 283 a 289 de Temam [9]).

Como sugestões para trabalhos originais futuros pode-se citar:

- Obtenção de estimativas de erro para normas mais exigentes em espaços de Sobolev (com um conseqüente aumento de exigência nas hipóteses dos dados iniciais);

- Obtenção de estimativas de erro para outras equações relacionadas com a equação de Navier-Stokes, cita-se equação para fluidos não-homogêneos, equação para fluidos em meios porosos granulares, equação de Burgers, etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMS, ROBERT A. Sobolev Spaces, Academia Press, New York, 1975

[2] BREZIS, Häim. Analyse Fontionelle. Théorie et applications, Massos, 1983.

[3] HALE, JACK K. Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience, 1969

[4] HEIWOOD, J.G. The Navier-Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions, Indiana University, Mathematics Journal, Volume 29, Numver 5, p. 639 – 681, 1980.

[5] IÓRIO, Valéria de Magalhães. EDP – Um curso de graduação, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1991.

[6] LIMA, Elon Lages Lima. Curso de análise, Vol. 2, Projeto Euclides, Editora do IMPA, 1976.

[7] MELO, Severino Toscano e NETO, Francisco Moura. Mecânica dos fluidos e equações diferenciais, Minicurso no 18º Colóquio Brasileiro de Matemática do IMPA, 1991.

[8] RAUTMANN, Reimund. On the convergence-rate of nonstationary Navier-Stokes approximations, Lecture notes Mathematics – 771, Approximations methods for Navier-Stokes problem, Springer Verlag, 1979.

[9] TEMAM, Roger. Navier-Stokes equations – Theory and Numerical Analysis, North-Holland Publishing Company, 1979.