UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Solução das equações S_N de transferência radiativa-condutiva não lineares através dos métodos LTS_N e Decomposição de Adomian

por

Patrícia Pujól Goulart

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Cynthia Feijó Segatto
Orientadora

Porto Alegre, novembro de 2010.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Pujól Goulart, Patrícia

Solução das equações S_N de transferência radiativa-condutiva não lineares através dos métodos LTS_N e Decomposição de Adomian / Patrícia Pujól Goulart.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2010.

55 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2010.
Orientadora: Feijó Segatto, Cynthia

Dissertação: Matemática Aplicada,
Método LT, Decomposição de Adomian, Transferência Radiativa-Condutiva de Calor

Solução das equações S_N de transferência radiativa-condutiva não lineares através dos métodos LTS_N e Decomposição de Adomian

por

Patrícia Pujól Goulart

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte

Orientadora: Prof. Dr. Cynthia Feijó Segatto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
UFRGS

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas
PUCRS

Prof. Dr. Ricardo de Carvalho Barros
UERJ

Dissertação apresentada e aprovada em
26 de novembro de 2010.

Prof. Dr. Waldir Leite Roque
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado sabedoria e persistência para concluir esta dissertação. Agradeço, também, aos meus pais que sempre acreditaram na educação e investiram no meu ensino, à minha orientadora por toda dedicação, à UFRGS e ao CNPq por acreditar e investir na minha profissão, aos meus colegas de curso por todo apoio.

Dedico este trabalho ao meu marido, Charles, que mais do que eu própria me incentivou a ingressar e permanecer no curso. Por toda ajuda, compreensão e amor, muito obrigada.

Sumário

AGRADECIMENTOS **4**

LISTA DE TABELAS **6**

LISTA DE SIGLAS E SíMBOLOS **7**

RESUMO **10**

ABSTRACT **11**

1 INTRODUÇÃO **1**

2 PROBLEMA ACOPLADO DE TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA **6**

3 MÉTODO LTS_N E DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN **10**

3.1 Formulação do método LTS_N 10

3.2 Método de Adomian 17

4 APLICAÇÃO DO MÉTODO LTS_N E DECOMPOSIÇÃO NAS EQUAÇÕES DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA CONDUTIVA **22**

4.1 Aplicação do método LTS_N 22

4.2 Uma fórmula de recorrência para a determinação dos polinômios $\hat{A}_m$ 26

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS **32**

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES **43**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **46**

7 APÊNDICE **53**

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 Problemas considerados para simulações numéricas 33

Tabela 5.2 Resultado de $D_M LTS_{300}$ para M variando de 0 a 200 para $\tau = 0.5$ 34

Tabela 5.3 Resultado de $D_M LTS_{100}$ para M variando de 0 a 200 para $\tau = 0.5$ 36

Tabela 5.4 Resultado de $D_8 LTS_{200}$ para $\frac{\tau}{\tau_0}$ variando de 0 a 1 37

Tabela 5.5 Resultado de $D_8 LTS_{300}$ para $\frac{\tau}{\tau_0}$ variando de 0 a 1 37

Tabela 5.6 Resultado de $D_8 LTS_{400}$ para $\frac{\tau}{\tau_0}$ variando de 0 a 1 37

Tabela 5.7 Resultado de $D_8 LTS_{300}$ para $\frac{\tau}{\tau_0}$ variando de 0 a 1 39

Tabela 5.8 Resultado de $D_8 LTS_{300}$ para $\tau = 0.5$ 40

Tabela 5.9 Resultado do Abulwafa 40

Tabela 5.10 Resultado de $D_8 LTS_{300}$ para $\tau = 0.5$ 41

Tabela 5.11 Resultado do Abulwafa 41

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

S_N	Sistema de ordenadas discretas
LTS_N	Transformada de Laplace de S_N
I	Intensidade de radiação
$\mathbf{I}$	Vetor de intensidade de radiação (dimensão Nx1)
$\mathbf{I}_1$	Intensidade de radiação na direção positiva (dimensão $\frac{N}{2}$x1)
$\mathbf{I}_2$	Intensidade de radiação na direção negativa (dimensão $\frac{N}{2}$x1)
U_m	Termo da expansão da função intensidade de radiação
$\hat{A}_n$	Polinômios de Adomian
P_l	Polinômios de Legendre
P_l^m	Funções associadas de Legendre
$\cos(\Theta)$	Função de fase
w_k	Peso da quadratura de Gauss-Legendre
q_r^*	Fluxo radiativo
q_r	Fluxo radiativo adimensionalizado
h	Taxa de geração de energia
c_ρ	Calor específico
ρ	Massa específica do meio
k	Condutividade térmica
N_c	Parâmetro de conjugação radiação-condução

η	Índice de refração
$f(\mu)$	Intensidade de radiação em $\tau = 0$ da placa de direção μ
$\mathbf{Q}(\tau)$	Vetor fonte
$g(\mu)$	Intensidade de radiação em $\tau = \tau_0$ da placa de direção μ
$\mathbf{H}(\tau)$	Vetor convolução da matriz $\mathbf{B}(\tau)$ com o vetor fonte $\mathbf{Q}(\tau)$
L^{-1}	Operador da transformada inversa de Laplace
$\mathbf{A}$	Matriz dependente da aproximação considerada
$a(i,j)$	Elementos da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{I_d}$	Matriz identidade
s	Parâmetro complexo proveniente da transformada de Laplace
$\mathbf{D}$	Matriz de autovalores de A
$\mathbf{X}$	Matriz de autovetores de A
$\mathbf{B}(\tau)$	Matriz transformada inversa de Laplace de $(sI_d - A)^{-1}$
$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$	Matriz simbólica associada à solução genérica de ordem N
$\mathbf{B}^{+}(\tau)$	Decomposição da matriz $\mathbf{B}$ nos autovalores positivos
$\mathbf{B}^{-}(\tau)$	Decomposição da matriz $\mathbf{B}$ nos autovalores negativos
$\mathbf{V}^{(m)}$	Vetor da condição de contorno homogênea
T	Temperatura
Θ	Temperatura adimensionalizada
τ	Espessura óptica

τ_0	Espessura óptica máxima
μ_n	Direção discreta
ω	Espalhamento simples, Albedo
β_l	Coeficientes de expansão dos polinômios de Legendre
ϵ_i	Coeficiente de reflexividade emissitividade
ρ_i^s	Coeficiente de reflexividade especular
ρ_i^d	Coeficiente de reflexividade difusa
L	Grau de anisotropia
σ	Constante de Stefan-Boltzmann
β	Coeficiente de extinção
N	Ordem da quadratura usada
$\bigtriangledown$	Gradiente

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma solução analítica para a equação de transferência radiativa-condutiva em geometria planar pela combinação das técnicas da decomposição e $\mathrm{LTS_N}$. A idéia principal baseia-se em três etapas: olhar o problema não linear como uma equação operacional; separação deste operador como a soma de termos lineares e não lineares. A seguir, expandimos a solução e o termo não linear respectivamente como uma série truncada $\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \mathbf{U}_m$ e $\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \hat{A}_m$, onde $\hat{A}_m$ são os conhecidos polinômios de Adomian. Depois de substituir estas séries na equação separada, construímos um conjunto recursivo de problemas lineares que são diretamente resolvidos pelo conhecido método $\mathrm{LTS_N}$. Descrevemos uma forma recursiva para a avaliação dos polinômios de Adomian $\hat{A}_m$, e também apresentamos simulações numéricas e comparações com os resultados da literatura.

ABSTRACT

In this work, we report an analytical solution for the radiative-conductive transfer equation in plane parallel geometry by combining the Decomposition and the $\mathrm{LTS_N}$ techniques. The main idea relies on the steps: viewing the nonlinear problem as an operator equation, we split the operator as a sum of the linear and nonlinear terms. Next, we expand the solution and the nonlinear term respectively as a truncated series namely $\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \mathbf{U}_m$ and $\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \hat{A}_m$, where $\hat{A}_m$ are the Adomian polynomials. After the replacement of these ansatz in to the split equation, we construct a set of linear recursive problems that can be directly solved by the well known $\mathrm{LTS_N}$ approach. We describe a recursive form for the $\hat{A}_m$ Adomian polinomial evaluation for an arbitrary $\mathcal{M}$. We also present numerical simulations and comparisons with the results found in the literature.

1 INTRODUÇÃO

O modelo matemático que descreve a transferência radiativa condutiva em uma placa, consiste no acoplamento das equações para a intensidade de radiação e para a conservação de energia. Tal modelo possui caráter não linear devido ao termo da temperatura encontrar-se elevado à quarta potência na equação para a intensidade de radiação, sendo que a temperatura deve satisfazer a equação diferencial que representa a conservação da energia envolvendo, além da temperatura, a própria intensidade radiativa. O problema associado com a transferência de calor onde os mecanismos de condução e radiação se encontram combinados possui aplicações práticas em diversas situações dentro das quais podemos citar a transferência de calor em fornalhas, turbinas de combustão a gás, materiais porosos, fabricação de vidros e materiais para proteção contra incêndios [36].

Nas últimas três décadas, considerável atenção tem sido dada a estes problemas associados de transferência de calor radiativa e condutiva em meios participativos. A primeira abordagem presente na literatura relativa a esta classe de problemas é atribuída a Viskanta e Grosh, [42] e [43]. Subsequentemente, os mesmos autores, analisaram os efeitos do albedo variante neste tipo de problema acoplado. Os efeitos de anisotropia foram introduzidos por Yuen e Wong, [44] no desenvolvimento de uma formulação analítica para o problema combinado de transferência radiativa-condutiva unidimensional em geometria planar. Mais recentemente, Siewert e Thomas, [30] e [31] e Siewert, [29] usaram uma versão computacionalmente estável do método dos esféricos harmônicos combinado com "spline"cúbico de Hermite para resolver uma série de problemas radiativo-condutivos unidimensionais em estado estacionário. Vargas e Vilhena, [38] desenvolveram uma solução em forma fechada para este problema usando o método de decomposição e LTS_N. Abulwafa, [1] usou a técnica iterativa de Galerkin para resolver este problema usando a equação de transferência radiativa na forma integral. Spuckler e Siegel, [34] e [33] usaram a técnica de diferenças finitas associada às funções de Green para resolver este problema acoplado em placa semi-transparente. Entretanto, cada um destes métodos tem suas próprias vantagens e desvantagens e, por isto, a busca por uma técnica mais eficiente ainda existe.

Neste trabalho seguimos os procedimentos adotados por Vargas e Vilhena, [38] para o problema de transferência de calor por radiação e condução acoplados a partir da combinação dos métodos LTS_N e decomposição. O avanço aqui reside no uso do método LTS_N com diagonalização usado por Segatto, [26], bem como, a geração de uma fórmula recursiva para representar o termo não linear de temperatura pelo método de decomposição de Adomian, [3].

O método S_N consiste basicamente em discretizar a variável angular na equação de transferência radiativa gerando um sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares. O tratamento discreto da variável angular consiste em aproximar o termo integral da equação de transferência radiativa por uma fórmula de quadratura de Gauss-Legendre de ordem N e a aplicação do método da colocação, considerando como função teste $\delta(\mu - \mu_n)$, onde os μ_n, $n = 1 : N$ são as raízes do polinômio de Legendre de grau N gerando, assim, um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável espacial que, neste trabalho, é resolvido analiticamente pelo método LTS_N. Este método resume-se em três passos: a aplicação da transformada de Laplace no sistema de equações S_N, inversão analítica da matriz simbólica e resolução do sistema linear obtido para a intensidade de radiação transformada e aplicação da transformada inversa.

Durante o período de desenvolvimento do método LTS_N, com o objetivo de encontrar uma fórmula analítica para a inversão da matriz associada ao método várias metodologias foram desenvolvidas. Primeiramente Barichello, [4] propôs um algoritmo utilizando a estrutura da matriz LTS_N para problemas com espalhamento linearmente anisotrópico usando o conceito de matriz inversa. Esta formulação foi expandida para problemas com várias ordens de anisotropia, por Oliveira, [19], porém Brancher, [7] mostrou a inviabilidade computacional desta formulação. A seguir o algoritmo de Trzaska [35], que inverte uma matriz do tipo (s$\mathbf{I}$+$\mathbf{A}$), foi aplicado porém, como envolve potenciação de matriz e^s, seu uso também foi descontinuado. Na sequência, com o objetivo de aumentar a ordem de quadratura do método LTS_N foi desenvolvido um algoritmo recursivo de inversão da matriz genérica (s$\mathbf{I}$+$\mathbf{A}$), que associa a decomposição generalizada de Schur com particionamento. Com esta formulação foi possível aumentar a ordem de quadratura até $N = 400$. A vantagem desta metodologia é que pode ser usado mesmo quando os autovalores da matriz A são degenerados conforme Brancher, [8]. Mais recentemente, foi usada a decomposição espectral para calcular a exponencial da matriz associada à solução LTS_N da equação de transferência radiativa, possibilitando assim, uma considerável redução no esforço computacional conforme o trabalho de Gomes, [10]. Este método é aplicado quando o albedo de espalhamento simples $\omega < 1$. Para $\omega = 1$ a matriz associada ao método LTS_N é degenerada e devemos, desta forma, retornar ao método da decomposição de Schur para proceder à inversão. Temos este resultado no trabalho de Marona, [18]. O comportamento exponencial da solução mais o fato de que os autovalores crescem em magnitude com o aumento de N, mostram que esta técnica não é apropriada para resolver problemas de grandes espessuras ou altos graus de anisotropia. Gonçalves, [13] tentando contornar esta dificuldade, empregou a propriedade de invariância das direções discretas. Esta consiste em estabelecer a equivalência de condições entre as coordenadas (x, μ) e $(-x, -\mu)$ ou o tratamento equivalente a fluxos nas direções μ e $-\mu$. O par $(-x, -\mu)$ pode ser recolocado por $(x_0 - x, -\mu)$ como resultado do deslocamento do ponto de reflexão do 0 para $\frac{x_0}{2}$. Na solução LTS_N, a propriedade da invariância de projeção está representada pela simetria das raízes do determinante da matriz $\mathbf{A}$. Usando esta propriedade, Gonçalves, Vilhena e Segatto, [12] eliminaram o problema de overflow originado pelos termos exponenciais da solução. Cabe, ainda, salientar que Pazos e Vilhena, [22] demonstraram a convergência do método LTS_N usando a teoria de semi-grupos fortemente contínuos o que garante que para $N \longrightarrow \infty$ a solução LTS_N se aproxima da solução de Case, [9] para problemas unidimensionais.

O método LTS_N já foi aplicado a diversos problemas de transporte, tais como: unidimensionais, em meio homogêneo por Barichello, [5], e heterogêneo por Tavares, [37], espalhamento anisotrópico por Olveira, [19], Vilhena e Barichello, [40], Segatto et al., [28], para modelos monoenergéticos Barichello, [4], e para modelos multigrupo de energia [40], problemas de transferência radiativa em nuvens com ou sem simetria azimutal, por Segatto et al., [27], Segatto, [25], Vilhena et al., [41], Brancher et al., 1999 [8]. Também já foram realizados estudos para a equação do transporte dependente do tempo Vilhena et al., [41], Segatto et al., [27], Renz, [23], Oliviera et al., [20]. Trabalhos que empregam o método na resolução de problemas de engenharia nuclear como Kruse, [15], Vilhena e Borges, [6]. Ademais, foi utilizado tanto na solução da equação adjunta de transporte de nêutrons por Gonçalez et al., [11], quanto na solução da equação de transferência radiativa condutiva por Lemos, [17]. Em 2004, os problemas de transporte com autovalores complexos foi generalizado, através do LTS_N e, como exemplificação, foi aplicado a um problema de transferência radiativa incluindo efeito de polarização por Simch et al., [32]. Em 2005, utilizado para determinar a distribuição de partículas em meios compostos por uma mistura aleatória binária usando modelos atomic-mix"e "Levermore-Pomraming", por Vasques, [39] e Larsen, [16]. Este método não está limitado a problemas de uma dimensão. Existem testes para problemas multidimensionais em geometria cartesiana para nêutrons por Zabadal et al., [46], Zabadal, [45], Hauser et al., [14], tanto quanto para fótons e elétrons Rodrigues et al., [24].

A não linearidade do problema em estudo, é tratado pelo método da decomposição de Adomian. Esta técnica consiste em obter uma solução analítica de equações diferenciais não lineares. Para isto, decompomos o operador associado à equação em duas partes: uma linear e outra não linear. A parte linear é decomposta novamente de modo que uma destas partes seja facilmente inversível. Após esta decomposição, isolamos a parte facilmente inversível para que a incógnita desconhecida desta equação seja obtida diretamente pela aplicação do operador inverso à equação, ficando, desta forma, expressa em função da parte restante do operador linear, da parte não linear e do termo fonte. Expandimos a variável desconhecida numa série infinita de termos, $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ e expressamos o termo não linear por polinômios, chamados de polinômios de Adomian. Repassando estas hipóteses na solução prévia vinda da aplicação do operador inverso à equação, as funções desconhecidas φ_n são determinadas através de fórmulas de recorrência. Assim, um solução fechada é estabelecida para a equação diferencial não linear.

Para atingirmos o objetivo deste trabalho, esta dissertação é dividida em 6 capítulos. No capítulo 2, descrevemos o problema de transferência radiativa-condutiva. No capítulo 3, apresentamos os métodos LTS_N e decomposição de Adomian. No capítulo 4, encontramos a solução do problema de transferência radiativa-condutiva unidimensional, em estado estacionário através da combinação dos métodos propostos. Assim como, apresentamos uma formulação, em caráter fechado, para o termo não linear. Além de provarmos, por indução matemática, a fórmula de recorrência para geração dos termos da série de Adomian proposto por Segatto et al. [26]. No capítulo 5, apresentamos simulações numéricas com vistas a ser investigada a estabilidade numérica da formulação proposta, mediante testes com diferentes números de termos na expansão de Adomian e diferentes ordens de quadradtura no método LTS_N. Finalmente, no capítulo 6, citamos as conclusões e sugestões de trabalhos futuros a serem realizados.

2 PROBLEMA ACOPLADO DE TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA

Nesta dissertação vamos trabalhar com o problema de tranferência de energia considerando mecanismos de radiação e condução em meios participantes. Este efeito ocorre quando o meio está atuando no processo, isto é, o meio que absorve, emite e espalha radiação. Tal situação é modelada pela equação do transporte associada à equação de conservação de energia. O acoplamento entre as duas formas de transferência de calor torna o problema não linear.

Aqui, para cumprir nossos propósitos, consideramos o problema unidimensional em geometria cartesiana e meio homogêneo. Assumimos que o problema possui independência da variável temporal "t", isto é, a hipótese de estado estacionário satisfaz a situação física. Assumimos, também, que é monoenergética (com um comprimento de onda) e possui simetria azimutal.

O problema acima citado de transferência de energia é descrito por Ozisik [21]. Sendo que este o descreve pela equação de transferência radiativa-condutiva acoplada com a equação de conservação de energia. A primeira equação é definida como

$$\mu\frac{\partial}{\partial\tau}I^*(\tau,\mu)+I^*(\tau,\mu)=\frac{w}{2}\sum_{l=0}^{L}\beta_l P_l(\mu)\int_{-1}^{1}P_l(\mu')I^*(\tau,\mu')d\mu'+(1-w)\frac{\sigma\eta^2}{\pi}T^4(\tau), \tag{2.1}$$

com condições de contorno dadas por

$$I^*(0,\mu)=\epsilon_1\frac{\sigma n^2}{\pi}T_1^4+\rho_1^s I^*(0,-\mu)+2\rho_1^d\int_0^1 I^*(0,-\mu)\mu d\mu \quad \mu>0 \tag{2.2}$$

$$I^*(\tau_0,-\mu)=\epsilon_2\frac{\sigma n^2}{\pi}T_2^4+\rho_2^s I(\tau_0,\mu)+2\rho_2^d\int_0^1 I^*(\tau,\mu)\mu d\mu \quad \mu>0 \tag{2.3}$$

Para a equação (2.1), temos as seguintes definições:

$a)$ $\tau\in[0,\tau_0]$ é a espessura óptica;

b) $I^*(\tau, \mu)$ é a intensidade de radiação na posição τ e direção μ;

c) ω é o espalhamento simples, chamado albedo;

d) P_l são os polinômios de Legendre;

e) β_l são as frações de anisotropia do espalhamento;

f) σ é a constante de Stefan-Boltzmann;

g) $\mathbf{n}$ é o índice de refração;

h) $T(\tau)$ é a temperatura;

i) $T_1 = T(0)$ é a temperatura em $\tau = 0$;

j) $T_2 = T(\tau_0)$ é a temperatura em $\tau = \tau_0$;

l) ϵ_i é a emissividade.

m) ρ_i^s são os coeficientes de reflexão especular para as superfícies de contorno $i = 1, 2$;

n) ρ_i^d são os coeficientes de reflexão difusa para as superfícies de contorno $i = 1, 2$;

Sendo que os coeficientes de emissividades ϵ_i, reflexões especulares ρ_i^s e reflexões difusas ρ_i^d estão relacionados através da identidade $\epsilon_i + \rho_i^s + \rho_i^d = 1$. O termo T, na equação (2.1), representa a temperatura em τ e esta é regulada pela equação da energia, que, por sua vez, é dada por

$$-\nabla.(q_c + q_r^*) + h(\vec{r}, t) = \rho c_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t}, \tag{2.4}$$

onde c_p e ρ são, respectivamente, o calor específico e a massa específica do meio; $h(\vec{r}, t)$ é a taxa de geração de energia por unidade de volume e q_c e q_r^* são os vetores de fluxo condutivo e radiativo, respectivamente. A equação (2.4) está sujeita às condições de contorno

$$T(0) = T_1 \quad e \quad T(\tau_0) = T_2.$$

A equação (2.4) para um sistema em estado estacionário e com ausência de geração interna é escrita como

$$-\nabla.(q_c + q_r^*) = 0. \tag{2.5}$$

Sabendo que o fluxo condutivo é descrito pela lei de Fourier

$$q_c = -K \nabla T(\vec{r}, t) \tag{2.6}$$

e considerando que a condutividade térmica k é constante e que o problema de temperatura considerado é unidimensional em geometria cartesiana. A equação (2.4) é dada por

$$k\beta \frac{d^2}{d\tau^2} T(\tau) = \frac{d}{d\tau} q_r^*(\tau) \tag{2.7}$$

onde β é o coeficiente de extinção. O fluxo radiativo q_r^* é dado por

$$q_r^*(\tau) = 2\pi \int_{-1}^{1} I(\tau, \mu)\mu d\mu. \tag{2.8}$$

Devemos observar que o problema descrito é não linear e esta não linearidade devese ao fato que a distribuição de temperatura depende da intensidade de radiação e está elevada a quarta potência na equação (2.1).

Seguindo um procedimento convencional de transferência de calor descrito por Ozisik [21], as equações anteriores são adimensionalizadas introduzindo-se uma tempertatura de referência T_r e usando as definições que seguem:

$$I^*(\tau, \mu) = \left(\frac{\eta^2 \sigma}{\pi} T_r^4 \right) I(\tau, \mu), \tag{2.9}$$

$$q_r^*(\tau) = \left(\frac{\sigma \eta^2}{\pi} T_r^4 \right) q_r(\tau), \tag{2.10}$$

$$T(\tau) = T_r \Theta(\tau). \tag{2.11}$$

Assim, com a adimensionalização, obtemos o problema de transferência de energia por radiação e condução acoplado como

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu) + I(\tau, \mu) = \frac{w}{2} \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\mu) \int_{-1}^{1} P_l(\mu') I(\tau, \mu') d\mu' + (1 - w)\Theta^4(\tau), \tag{2.12}$$

com condições de contorno dadas por

$$I(0,\mu) = \epsilon_1 \Theta_1^4 + \rho_1^s I(0,-\mu) + 2\rho_1^d \int_0^1 I(0,-\mu)\mu d\mu \qquad \mu > 0 \tag{2.13}$$

$$I(\tau_0,-\mu) = \epsilon_2 \Theta_2^4 + \rho_2^s I(\tau_0,\mu) + 2\rho_2^d \int_0^1 I(\tau_0,\mu)\mu d\mu \qquad \mu > 0, \tag{2.14}$$

onde $\Theta(\tau)$ é a solução da equação para a temperatura dada por

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Theta(\tau) = \frac{1}{4\pi N_c}\frac{d}{d\tau}q_r(\tau), \tag{2.15}$$

com condições de contorno

$$\Theta(0) = \frac{T_1}{T_r} \quad e \quad \Theta(\tau_0) = \frac{T_2}{T_r},$$

onde

$$N_c = \frac{k\beta}{4\sigma\eta^2 T_r^3} \tag{2.16}$$

é o parâmetro de conjugação entre condução e radiação, oriundo da adimensionalização realizada. Desta forma, temos um problema não linear acoplado pelas equações (2.12) e (2.15) com condições de contorno dada pelas equações (2.13) e (2.14) para descrever o fenômeno físico. Ainda devemos observar que a equação (2.15) possui solução analítica e sua solução é dada por

$$\Theta(\tau) = \Theta_1 + (\Theta_2 - \Theta_1)\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{1}{4\pi N_c}\frac{\tau}{\tau_0}\int_\tau^{\tau_0} q_\tau^*(\tau')d\tau' + \frac{1}{4\pi N_c}\int_0^\tau q_\tau^*(\tau')d\tau' \tag{2.17}$$

onde $\Theta_1 = \Theta(0)$ e $\Theta_2 = \Theta(\tau_0)$.

3 MÉTODO LTS_N E DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN

Neste capítulo vamos apresentar os métodos LTS_N e a decomposição de Adomian os quais serão aplicados para a solução do problema.

3.1 Formulação do método LTS_N

Vamos considerar a equação de transferência radiativa unidimensional, monoenergética, estacionária e com simetria azimutal descrita por

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau}(\tau, \mu) + I(\tau, \mu) = \frac{w}{2} \int_{-1}^{1} p(\cos\Theta) I(\tau, \mu') d\mu' + Q(\tau, \mu), \tag{3.1}$$

com condições de contorno

$$I(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0 \tag{3.2}$$

$$I(0, \mu) = g(\mu), \quad \mu < 0 \tag{3.3}$$

onde $f(\mu)$ e $g(\mu)$ são as intensidades de radiação na fronteira do domínio e τ_0 é o comprimento da placa considerada. Da equação acima, temos que $I(\tau, \mu)$ é a intensidade de radiação na direção μ e $\tau \in (0, \tau_0)$ é a espessura ótica. E, ainda,

- $\omega \ \epsilon \ (0, 1]$ é o termo de espalhamento do meio (albedo);
- $\mu = \cos\theta$, θ é o ângulo polar, isto é, $\mu \ \epsilon \ [-1, 1]$
- $p(\cos\Theta)$ é a função de fase;
- $Q(\tau, \mu)$ é um termo de fonte externa.

É usual expandir a função de fase $p(\cos\Theta)$ como uma série finita de polinômios de Legendre em termos do ângulo de espalhamento Θ, isto é,

$$p(\cos\Theta) = \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\cos\Theta), \tag{3.4}$$

onde os coeficientes β_l são tabelados, com $\beta_0 = 1$. Através do teorema da adição para polinômios de Legendre podemos reescrever a equação (3.4) como

$$p(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{l=0}^{L} \beta_l^m P_l^m(\mu') P_l^m(\mu) \cos m(\varphi - \varphi'), \tag{3.5}$$

onde φ é o ângulo azimutal formado com um ângulo de referência φ', P_l^m são as funções associadas de Legendre e os coeficientes β_l^m são determinados por

$$\beta_l^m = \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\beta_l. \tag{3.6}$$

Nosso problema possui simetria azimutal, logo $M = 0$ e a equação (3.1) é reescrita como

$$\mu\frac{\partial}{\partial\tau}I(\tau,\mu) + I(\tau,\mu) = \frac{\omega}{2}\int_{-1}^{1}\sum_{l=0}^{L}\beta_l P_l(\mu')P_l(\mu)I(\tau,\mu')d\mu' + Q(\tau,\mu). \tag{3.7}$$

Para obtermos a aproximação S_N da equação (3.7), tomamos uma aproximação do seu termo integral por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N (par) e após empregamos o método da colocação na variável de direção μ, considerando como função teste a Delta de Dirac, $\delta(\mu-\mu_m)$ para $m = 1, ...N$, e como pontos de colocação as raízes dos polinômios de Legendre de grau N. Desta forma, encontramos o sistema S_N de equações associado à equação (3.7),

$$\mu_n \frac{d}{d\tau} I_n(\tau) + I_n(\tau) = \frac{\omega}{2} \sum_{l=0}^{L} \beta_l \sum_{k=1}^{N} I_k(\tau) w_k P_l(\mu_n) P_l(\mu_k) + Q_n(\tau) \tag{3.8}$$

e condições de contorno,

$$I_n(0) = f_n, \ \mu_n > 0 \tag{3.9}$$

e

$$I_n(\tau_0) = g_n, \ \mu < 0, \tag{3.10}$$

onde μ_k com $k = 1, ..., N$ são as raízes dos polinômios de Legendre de grau N, normalmente ordenadas de forma decrescente, isto é,

$$\mu_N < ... < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < ... < \mu_1 \tag{3.11}$$

e ω_k são os pesos da quadratura Gaussiana correspondentes ao respectivo μ_k. Os pesos da Quadratura de Gauss-Legendre podem ser calculados através da seguinte fórmula

$$w_i = \int_{-1}^{1} L_i(x) dx \tag{3.12}$$

onde $L_i(x)$ é a função multiplicador de Legendre definida por

$$L_i(x) = \Pi_{k=1, K \neq i}^{N} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \tag{3.13}$$

ou através da seguinte fórmula de recorrência

$$w_i = \frac{2(1 - \mu_i^2)}{N^2 (P_{N-1}(\mu_i))^2}. \tag{3.14}$$

O sistema (3.8), pode ser reescrito na forma de uma equação diferencial ordinária matricial de primeira ordem

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}(\tau) - \mathbf{A}\mathbf{I}(\tau) = \mathbf{Q}(\tau), \tag{3.15}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada de ordem N, definida como

$$\mathbf{A}(i,j) = \begin{cases} -\frac{1}{\mu_i} + \frac{\omega w_j}{2\mu_i}\left[\sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j)\right], & se \ \ i = j \\ \\ \frac{\omega w_j}{2\mu_i}\left[\sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j)\right], & se \ \ i \neq j \end{cases} \tag{3.16}$$

o vetor fonte $\mathbf{Q}(\tau)$ de ordem N é definido como

$$\mathbf{Q}(\tau) = \left[\frac{Q_1(\tau)}{\mu_1}, ..., \frac{Q_N(\tau)}{\mu_N}\right]^T \tag{3.17}$$

e o vetor de intensidade de radiação, $\mathbf{I}(\tau)$, é definido por

$$\mathbf{I}(\tau) = [I_1(\tau), ..., I_{\frac{N}{2}}(\tau), I_{\frac{N}{2}+1}(\tau), ..., I_N(\tau)]^T. \tag{3.18}$$

Usualmente, a fim de facilitar a introdução do método LTS_N, decompomos o vetor de intensidade de radiação em dois subvetores de ordem $\frac{N}{2}$ onde $\mathbf{I}_1(\tau)$ contém as intensidades das direções positivas e $\mathbf{I}_2(\tau)$ contém as direções negativas, isto é,

$$\mathbf{I}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(\tau) \\ \mathbf{I}_2(\tau) \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Para resolução da equação (3.15) usamos o método LTS_N, portanto aplicamos a transformada de Laplace sobre a variável espacial τ da equação (3.15) gerando um sistema linear com N incógnitas e N equações na aproximação S_N. Assim, temos:

$$(s\mathbf{I_d} - \mathbf{A})\bar{\mathbf{I}}(s) = \mathbf{I}(0) + \bar{\mathbf{Q}}(s), \tag{3.20}$$

onde $\bar{\mathbf{I}}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{I}(\tau)]$ e $\bar{\mathbf{Q}}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{Q}(\tau)]$ são as transformadas de Laplace, s é um parâmetro complexo e $\mathbf{I_d}$ é a matriz identidade de ordem N. Reescrevendo a equação (3.20) em função de $\bar{\mathbf{I}}(s)$, temos:

$$\bar{\mathbf{I}}(s) = (s\mathbf{I_d} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{I}(0) + (s\mathbf{I_d} - \mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(s) \tag{3.21}$$

Desta forma, para determinarmos a intensidade de radiação $\mathbf{I}(\tau)$, basta tomarmos a transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[\bar{\mathbf{I}}(s)] = & \ \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I_d} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{I}(0) + (s\mathbf{I_d} - \mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(s)] \\ & = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{Id} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{I}(0)] + \mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{I_d} - \mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(s)]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Para simplificação, usaremos a notação na equação (3.22),

$$\mathbf{I}(\tau) = \mathbf{B}(\tau)\mathbf{I}(0) + \mathbf{H}(\tau), \tag{3.23}$$

onde $\mathbf{H}(\tau)$ é definido como

$$\mathbf{H}(\tau) = \mathbf{B}(\tau) * \mathbf{Q}(\tau) = \int_0^\tau \mathbf{B}(\tau - \xi)\mathbf{Q}(\xi)d\xi \tag{3.24}$$

e o sinal $*$ é a convolução entre os vetores.

Aqui devemos notar que o vetor $\mathbf{I}(0)$ na equação (3.23) não está completamente determinado pelas condições de contorno, pois não conhecemos a intensidade de radiação na direção negativa, $\mathbf{I_2}(0)$, assim para encontrá-lo devemos reescrever a equação (3.23) em forma particionada,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I_1}(\tau) \\ \mathbf{I_2}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_{11}}(\tau) & \mathbf{B_{12}}(\tau) \\ \mathbf{B_{21}}(\tau) & \mathbf{B_{22}}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I_1}(0) \\ \mathbf{I_2}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H_1}(\tau) \\ \mathbf{H_2}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Aqui, aplicando $\tau = \tau_0$ nas $\frac{N}{2}$ últimas linhas da equação acima, obtemos

$$\mathbf{I_2}(\tau_0) = \mathbf{B_{21}}(\tau_0)\mathbf{I_1}(0) + \mathbf{B_{22}}(\tau_0)\mathbf{I_2}(0) + \mathbf{H_2}(\tau_0) \tag{3.26}$$

e notemos que os vetores $\mathbf{I_1}(0)$, $\mathbf{I_2}(\tau_0)$ e $\mathbf{H_2}(\tau_0)$ são conhecidos, assim

$$\mathbf{I_2}(0) = \mathbf{B_{22}}^{-1}(\tau_0)[\mathbf{I_2}(\tau_0) - \mathbf{B_{21}}\mathbf{I_1}(0) - \mathbf{H_2}(\tau_0)] \tag{3.27}$$

Desta forma, a solução (3.23) fica totalmente determinada e é a solução analítica do sistema de equações diferenciais descrito pela equação (3.15). A obtenção da matriz $\mathbf{B}(\tau)$ é dada a partir da inversão de $(s\mathbf{I_d} - \mathbf{A})$ conforme equação (3.23). Para esta inversão, notemos que se $\omega \neq 1$, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são todos simétricos e diferentes, assim a matriz pode ser diagonalizada,

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1} \tag{3.28}$$

onde $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal formada pelos autovalores de $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$ é a matriz coluna de autovetores associados. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\tau) = \;& \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I_d} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[s\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1})^{-1}] \\
&= \mathcal{L}^{-1}[(\mathbf{X}(s\mathbf{I_d} - \mathbf{D})\mathbf{X}^{-1})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s\mathbf{I_d} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}] \\
&= \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I_d} - \mathbf{D})^{-1}]\mathbf{X}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Deste modo, a matriz $(s\mathbf{I_d} - \mathbf{D})$ é uma matriz diagonal, onde os d_i são os autovalores de $\mathbf{A}$ e sua inversa é dada por

$$(s\mathbf{I_d} - \mathbf{D})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-d_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{s-d_N} \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Concluindo, aplicamos a transformada inversa de Laplace na equação (3.30) e obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I_d}-\mathbf{D})^{-1}] = \begin{pmatrix} e^{\tau d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\tau d_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\tau d_N} \end{pmatrix} = e^{D\tau}. \tag{3.31}$$

Portanto, a matriz $\mathbf{B}(\tau)$, descrita em (3.29) pode ser dada por

$$\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{X}\mathbf{e}^{\mathbf{D}\tau}\mathbf{X}^{-1}. \tag{3.32}$$

Como vemos, a solução do problema LS_N possui forma exponencial. Este comportamento exponencial juntamente com o fato de que os autovalores d_k crescem em magnitude com o aumento de N demonstra que este método não é apropriado para resolver problemas de grandes espessuras ou altos graus de anisotropia, pois existe uma falha computacional com o uso de operações aritméticas finitas, o chamado ”overflow”.

Esta falha computacional foi contornada por Gonçalves et al. [13] que analisou o problema em uma placa levando em conta a propriedade de invariância da equação do transporte, isto é, fisicamente, como as direções discretas são simétricas em torno de $\mu = 0$, corresponde considerar partículas deslocando-se da direita para esquerda com $\mu < 0$ identicamente, considerando as partículas deslocando-se da esquerda para a direita com $\mu > 0$.

Usando esta propriedade Gonçalves et al., [11] e [12], Vilhena e Segatto, [41] eliminaram o ”overflow”gerado pelos termos exponenciais positivos para N grande, separando as soluções homogênea e particular em componentes que contêm apenas os expoentes positivos e outra os negativos. Desta forma, obtiveram uma decomposição da matriz $\mathbf{B}(\tau)$ como

$$\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{X}[\mathbf{E}^{+}(\tau-\tau_0) + \mathbf{E}^{-}(\tau)]\mathbf{X}^{-1} \tag{3.33}$$

onde $\mathbf{E}^{+}(\tau)$ e $\mathbf{E}^{-}(\tau)$ são matrizes diagonais cujos elementos da diagonal são dados por

$$\mathbf{E}^{+}(\tau) = \begin{cases} e^{\lambda_i \tau} & \lambda_i > 0 \\ 0 & \lambda_i < 0 \end{cases} \qquad \mathbf{E}^{-}(\tau) = \begin{cases} 0 & \lambda_i > 0 \\ e^{\lambda_i \tau} & \lambda_i < 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

Logo, damos a notação para a matriz $\mathbf{B}$ como

$$\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}^{+}(\tau) + \mathbf{B}^{-}(\tau) \tag{3.35}$$

onde a matriz $\mathbf{B}^{+}(\tau)$ contém apenas os autovalores positivos e $\mathbf{B}^{-}(\tau)$ contém apenas os autovalores negativos da matriz $\mathbf{A}$. Assim considerando a propriedade de invariância e a decomposição da matriz $\mathbf{B}(\tau)$ reescrevemos a solução LTS_N como:

$$\mathbf{I}(\tau) = \mathbf{B}^{+}(\tau - \tau_0)\mathbf{I}(\tau_0) + \mathbf{B}^{-}(\tau)\mathbf{I}(0) + \mathbf{H}(\tau), \tag{3.36}$$

onde o vetor convolução $\mathbf{H}(\tau)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\tau) &= \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{B}^{+}(\tau - \zeta)\mathbf{Q}(\zeta)d\zeta + \int_{0}^{\tau} \mathbf{B}^{-}(\tau - \zeta)\mathbf{Q}(\zeta)d\zeta \\ &= \mathbf{X}\left(\int_{\tau_0}^{\tau} E^{+(\tau-\zeta)}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\zeta)d\zeta + \int_{0}^{\tau} E^{-(\tau-\zeta)}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\zeta)d\zeta\right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

Utilizando a matriz $\mathbf{B}$ desta maneira, podemos notar que os termos exponenciais se tornam negativos e, assim, a intensidade de radiação pode ser determinada sem ocorrer o "overflow" para grandes espessuras ou para elevadas ordens de quadratura.

3.2 Método de Adomian

A resolução de um problema não linear é em geral complicada, por isso, muitas vezes, recorremos a uma solução numérica. Neste tipo de solução, precisamos fazer simplificações e algumas suposições restritivas a fim de linearizar o problema e, consequentemente, deixá-lo solúvel.

A solução encontrada deste modo pode não ser uma boa aproximação para o problema original, isto é, pode não ser fisicamente realística. Por outro lado, o método de decomposição de Adomian é empregado para uma aproximação analítica de equações não lineares sem uso de linearização, técnicas de pertubações, entre outros.

A solução pelo método da decomposição é uma aproximação, mas que não altera o problema dado. A solução obtida por decomposição é geralmente uma série infinita, porém uma aproximação de n *termos*, ϕ_n, normalmente é solução bastante precisa. Sendo que sempre podemos aumentar n para atingir a precisão desejada. Ainda, o método da decomposição tem a vantagem que, em geral, para pequenos valores de n já é possível uma solução significativa.

Para descrever o método de Adomian vamos considerar

$$Au(t) = f(t), \tag{3.38}$$

onde A é um operador qualquer, isto é, envolvendo uma parte linear e outra não linear. Este operador é dividido em $L + N$, onde L é a parte linear, facilmente invertido e N é o restante desde operador ou uma não linearidade. Logo, temos:

$$(L + N)u(t) = f(t). \tag{3.39}$$

Reescrevendo a equação acima, pois Lu é facimente inversível, obtemos

$$u(t) = L^{-1}f(t) - L^{-1}Nu(t). \tag{3.40}$$

Como u é solução do problema, podemos expandi-lo como $u = u_0 + u_1 + u_2 + ...$, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u \tag{3.41}$$

e podemos escolher $u_0 = L^{-1}f(t)$. Por outro lado, o termo não linear Nu é expandido em termos dos polinômios de Adomian, como:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n. \tag{3.42}$$

Estes polinômios serão discutidos adiante. Com este procedimento podemos, reescrever a equação (3.40) como

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n. \tag{3.43}$$

Consequentemente, podemos escolher:

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}\hat{A}_0 \\ u_2 &= -L^{-1}\hat{A}_1 \\ &\vdots \\ u_n &= -L^{-1}\hat{A}_{n-1}. \end{aligned}$$

Devemos notar que com esta escolha os polinômios $\hat{A}_n$ são gerados para cada não linearidade, de modo que, $\hat{A}_0$ dependa somente de u_0, $\hat{A}_1$ dependa somente de u_0 e u_1, $\hat{A}_2$ dependa somente de u_0, u_1 e u_2 e assim por diante [3]. Desta forma, a solução do problema pode ser encontrada como $u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u$. Se a série converge, o enésimo termo da soma parcial $\phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$ será a solução aproximada desde que

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u \tag{3.44}$$

por definição do Adomian, 1988 [3].

Existem duas maneiras de calcular os polinômios de Adomian, os chamados $\hat{A}_n$ acelerados e os A_n lentos (por sua convergência ser mais lenta). Neste trabalho iremos empregar o referido como acelerado e, por isso, nos deteremos na análise deste. Estes dois modos de encontrar os polinômios de Adomian resultam na mesma solução aproximada. A diferença está na velocidade da convergência. A outra forma, dita lenta, pode ser encontrada na referência [3].

Para obtenção dos polinômios de Adomian, $\hat{A}_n$, devemos considerar uma equação com solução $u(t)$ contendo uma não linearidade

$$Nu = f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \tag{3.45}$$

Tomando a expansão da série de Taylor da função $f(u)$ em torno de $u_0(t)$, obtemos

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n = f(u) = f(u_0) + (u - u_0)f'(u_0) + \frac{(u-u_0)^2}{2!} f''(u_0) + \ldots \ . \tag{3.46}$$

Estes polinômios são definidos por

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= f(u_0) \\ \hat{A}_1 &= u_1 \tfrac{d}{du_0} f(u_0) + \tfrac{u_1^2}{2!} \tfrac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \tfrac{u_1^3}{3!} \tfrac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_2 = \quad & u_2 \tfrac{d}{du_0} f(u_0) + \tfrac{u_2^2}{2!} \tfrac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \tfrac{u_2^3}{3!} \tfrac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + u_1 u_2 \tfrac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \\ & + \tfrac{1}{2}(u_1^2 u_2 + u_2^2 u_1) \tfrac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + \ldots \end{aligned}$$

e assim por diante. Nesta formulação os subíndices de cada termo de $\hat{A}_n$ não ultrapassa n do polinômio, isto é, $\hat{A}_0$ só tem termos com u_0, $\hat{A}_1$ só tem termos com u_0 e u_1, assim por diante [3]. No nosso caso, queremos aplicar a decomposição para resolução da equação S_N de transferência radiativa-condutiva dada por

$$\frac{d}{d\tau} I_n(\tau) + \frac{1}{\mu_n} I_n(\tau) = \frac{\omega}{2\mu_n} \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\mu_n) \sum_{k=1}^{N} P_l(\mu_k) I_k(\tau) + \frac{1-\omega}{\mu_n} \Theta^4(\tau) \tag{3.47}$$

Assim, desta forma, para aplicarmos o método de Adomian, escolhemos a parte não linear como

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n = \Theta^4(\tau). \tag{3.48}$$

Como mensionamos anteriormente, nossa não linearidade está no termo θ^4 pois este depende da intensidade de radiação através de um acoplamento realizado. Portanto, aplicamos a decomposição de Adomian tomando a expansão binomial deste termo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n = \theta^4 = T_0^4 + 4T_0^3 \sum_{i=0}^{m} T_i + \frac{12}{2!} T_0^2 \left(\sum_{i=0}^{m} T_i \right)^2 + \frac{24}{3!} \left(\sum_{i=0}^{m} T_i \right)^3 + \frac{24}{4!} \left(\sum_{i=0}^{m} T_i \right) \tag{3.49}$$

E o restante da equação (4.14),

$$\frac{d}{d\tau} I_n(\tau) + \frac{1}{\mu_n} I_n(\tau) - \frac{\omega}{2\mu_n} \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\mu_n) \sum_{k=1}^{N} P_l(\mu_k) I_k(\tau) = 0, \tag{3.50}$$

é o operador L do método de Adomian que possui solução exata através do método LTS_N.

4 APLICAÇÃO DO MÉTODO LTS_N E DECOMPOSIÇÃO NAS EQUAÇÕES DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA CONDUTIVA

Neste capítulo empregamos os métodos LTS_N e Decomposição nas equações S_N de tranferência radiativa-condutiva a fim de determinar sua solução analítica.

4.1 Aplicação do método LTS_N

Conforme descrito no capítulo 2, vamos considerar o seguinte problema de transferência de calor radiativo-condutivo,

$$\frac{d}{d\tau}I_n(\tau) + \frac{1}{\mu_n}I_n(\tau) = \frac{\omega}{2\mu}\sum_{l=0}^{L}\beta_l P_l(\mu_n)\sum_{k=1}^{N}P_l(\mu_k)I_k(\tau) + \frac{(1-\omega)}{\mu_n}\Theta^4(\tau), \qquad (4.1)$$

com $n = 1, ..., N$ e com as condições de contorno

$$I_n(0) = \epsilon_1\Theta_1^4 + \rho_1^s I_{N-n+1}(0) + 2\rho_1^d\sum_{k=1}^{N/2}\omega_k\mu_k I_{N-k+1}(0) \qquad (4.2)$$

$$I_{N-n+1}(\tau_0) = \epsilon_2\Theta_2^4 + \rho_2^s I_n(\tau_0) + 2\rho_2^d\sum_{k=1}^{N/2}\omega_k\mu_k I_k(\tau_0), \qquad (4.3)$$

onde a distribuição de temperatura $\Theta(\tau)$ é satisfeita pela equação da condução de calor, dada por

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Theta(\tau) = \frac{1}{4\pi N_c}\frac{d}{d\tau}q_r(\tau) \qquad (4.4)$$

com condições de contorno

$$\Theta(0) = \Theta_1 \ \ e \ \ \Theta(\tau_0) = \Theta_2.$$

Da equação (4.1), temos que $I_n(\tau) = I(\tau, \mu_n)$ que é a intensidade de radiação na posição τ e na direção μ_n, onde os μ_n são as direções discretas ordenadas em ordem decrescente e $n = 1, ..., N$.

Lembrando, na equação (4.4), temos o parâmetro N_c definido como segue:

$$N_c = \frac{k\beta}{4\sigma\eta^2 T_r^3} \tag{4.5}$$

e sendo o fluxo radiativo descrito como:

$$q_r(\tau) = 2\pi \sum_{k=1}^{N} I_k(\tau)\mu_k\omega, \tag{4.6}$$

onde ω_k são os pesos da quadratura Gaussiana.

Seguindo os procedimentos para aplicação do método LTS_N do capítulo 3, temos que a equação (4.1) pode ser reescrita como uma equação diferencial ordinária matricial de primeira ordem,

$$\frac{d}{dx}\mathbf{I}(\tau) - \mathbf{A}\mathbf{I}(\tau) = \frac{(1-\omega)}{\mu_n}\Theta^4, \tag{4.7}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada de ordem N definida por

$$\mathbf{A}(i,j) = \begin{cases} -\frac{1}{\mu_i} + \frac{\omega_j}{2\mu_i}\left[\sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j)\right], & se\ i = j \\ \\ \frac{\omega_j}{2\mu_i}\left[\sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j)\right], & se\ i \neq j \end{cases}. \tag{4.8}$$

O termo fonte da equação (4.1), com a não linearidade no termo Θ^4, será representado através dos polinômios de Adomian, isto é,

$$\Theta^4 = \sum_{m=0}^{M} \hat{A}_m(\tau) \tag{4.9}$$

e $\mathbf{Q}(\tau)$ é um vetor de ordem N, descrito por

$$\mathbf{Q}(\tau) = (1-\omega)\left[\frac{1}{\mu_1}, ..., \frac{1}{\mu_n}\right]. \tag{4.10}$$

O vetor de intensidade de radiação, $\mathbf{I}(\tau)$, é definido por:

$$\mathbf{I}(\tau) = [I_1(\tau), ..., I_{\frac{N}{2}}(\tau), I_{\frac{N}{2}+1}(\tau), ..., I_N(\tau)]^T \tag{4.11}$$

que usualmente decompomos em dois subvetores de ordem $\frac{N}{2}$ onde $\mathbf{I}_1(\tau)$ contém as intensidades nas direções positivas e $\mathbf{I}_2(\tau)$ contém as direções negativas, isto é,

$$\mathbf{I}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(\tau) \\ \mathbf{I}_2(\tau) \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Podemos, também, formalmente escrever a intensidade de radiação como uma série, isto é,

$$\mathbf{I}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(\tau), \tag{4.13}$$

logo, a partir da equação (4.7)obtemos

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{d}{d\tau}\mathbf{U}_m - \mathbf{A}\mathbf{U}_m(\tau)\right) = \mathbf{Q}\sum_{m=0}^{\infty}\hat{A}_m(\tau). \tag{4.14}$$

O procedimento adotado para a resolução do sistema de equações (4.14) é inicializar o processo resolvendo o problema homogêneo

$$\frac{d}{d\tau}U_0 - \mathbf{A}U_0(\tau) = 0 \tag{4.15}$$

juntamente com as condições de contorno e, após isso, entrando com o processo recursivo das equações com condições de contorno homogêneas definidas como

$$\frac{d}{d\tau}U_m - \mathbf{A}U_m(\tau) = \hat{A}_{m-1}\mathbf{Q}, \tag{4.16}$$

para $m = 1, 2, ..., M$. Cada uma dessas equações são resolvidas de forma analítica pelo método LTS_N.

Logo, a solução da equação (4.15) pelo método LTS_N do sistema recursivo (4.14) é dado pela forma:

$$U_0(\tau) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}\tau}\mathbf{V}^{(0)}, \tag{4.17}$$

onde $\mathbf{X}$ é a matriz de autovetores, $\mathbf{D}$ é a matriz de autovalores resultante da decomposição espectral da matriz $\mathbf{A}$ e $\mathbf{V^0}$ são determinados a partir da aplicação das condições de contorno do problema. Conforme o capítulo 3, já sabíamos que a solução tem carácter exponencial e a matriz $e^{\mathbf{D}\tau}$ tem a forma

$$e^{\mathbf{D}\tau} = \begin{cases} e^{d_{ii}\tau} & se\ d_{ii} < 0 \\ e^{d_{ii}(\tau-\tau_0)} & se\ d_{ii} > 0 \end{cases}, \tag{4.18}$$

onde os d_{ii} são as entradas dos autovalores da matriz $\mathbf{D}$. A solução geral pelo método LTS_N foi descrita no capítulo anterior pela equação (3.36). Logo o sistema recursivo (4.14) tem sua solução geral dada por

$$\mathbf{U}_m(\tau) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}\tau}\mathbf{V}^{(m)} + \mathbf{X}e^{\mathbf{D}\tau}\mathbf{X}^{-1} * \hat{A}_{m-1}(\tau)\mathbf{Q} \tag{4.19}$$

para um $m = 0, ..., M$, $\mathbf{V^m}$ para $m = 0, ..., M$ são determinados a partir da aplicação das condições de contorno homogêneas e o sinal $*$ denota o operador de convolução.

Observamos, ainda, que a solução apresentada na equação (4.19) inclui os polinômios de Adomian $\hat{A}_m$ para $m = 1 : M$ e estes serão determinados na próxima seção.

4.2 Uma fórmula de recorrência para a determinação dos polinômios $\hat{A}_m$

Os polinômios de Adomian são empregados para termos não lineares. Na equação (4.1) temos uma não linearidade no termo da fonte. Assim, para esta resolução tomamos uma expansão finita para a temperatura θ,

$$\Theta = \sum_{m=0}^{M} T_m(\tau), \tag{4.20}$$

isto é, utilizamos a decomposição de Adomian para aproximar a solução θ. Deste modo, temos que

$$\Theta^4 = \sum_{m=0}^{M} \hat{A}_m. \tag{4.21}$$

Logo, se tomarmos θ^4 na equação (4.20), temos, por binômio de Newton

$$\begin{aligned} \theta^4 &= \left(\sum_{m=0}^{M} T_m(\tau)\right)^4 = \\ &= T_0^4 + 4T_0^3\left(\sum_{i=0}^{M} T_i\right) + \frac{12}{2!}T_0^2\left(\sum_{i=0}^{M} T_i\right)^2 + \frac{24}{3!}T_0\left(\sum_{i=0}^{M} T_i\right)^3 + \frac{24}{4!}\left(\sum_{i=0}^{M} T_i\right)^4. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Pelo somatório dos polinômios T_m podemos expandir θ^4 para um M desejado. A partir desta nova expressão é que podemos determinar os polinômios $\hat{A}_m$.

Supondo $M = 2$, na equação (4.22), conseguimos os primeiros polinômios do método.

$$\Theta^4 = T_0^4 + 4T_0^3(T_1 + T_2) + 6T_0^2(T_1 + T_2)^2 + 4T_0(T_1 + T_2)^3 + (T_1 + T_2)^4 \tag{4.23}$$

Para determinar os $\hat{A}_m$, realizamos o seguinte procedimento: subdividimos a expansão θ^4 fazendo:

para $m = 0$, $\hat{A}_0$ tenha somente termos com índice 0;

para $m = 1$, $\hat{A}_1$ tenha somente termos com índice 0 e 1;

para $m = 2$, $\hat{A}_2$ tenha somente termos com índice 0, 1 e 2; e caso houvesse mais termos na expansão, o procedimento continuaria no mesmo padrão. Portanto,

$\hat{A}_0 = T_0^4$

$\hat{A}_1 = 4T_0^3T_1 + 6T_0^2T_1^2 + 4T_0T_1^3 + T_1^4$

$\hat{A}_2 = 4T_0^3T_2 + 12T_0^2T_1T_2 + 6T_0^2T_2^2 + 12T_0T_1^2T_2 + 12T_0T_1T_2^2 + 4T_0T_2^3 + 4T_1^3T_2 + 6T_1^2T_2^2 + 4T_1T_2^3 + T_2^4$

Com uma análise das expansões realizadas para M, podemos notar que os polinômios $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ e $\hat{A}_4$ não se alteram para $M = 4$ e $M = 6$. A determinação de cada $\hat{A}_m$ com $M = 4$ e $M = 6$ está disponível no apêndice deste trabalho. O que nos leva a supor que independentemente do M escolhido os primeiros $\hat{A}_m$ não variam. Desta maneira, somos levados a pensar que podemos determinar qualquer $\hat{A}_m$ sem precisarmos calcular os polinômios anteriores, logo, tendo em vista a constatação anterior, queremos criar uma regra para construção desses polinômios. Para isso, então, buscamos uma fórmula de recorrência para os $\hat{A}_m$.

Primeiramente realizamos uma fatoração em cada $\hat{A}_1$, ..., $\hat{A}_6$ conforme cálculo abaixo apresentado. Notamos nesta fatoração um produto formado por 3 fatores em cada $\hat{A}_m$.

$\hat{A}_1 = T_1(2T_0 + T_1)(2T_0^2 + 2T_0T_1 + T_1^2)$

$\hat{A}_2 = T_2(2T_0 + 2T_1 + T_2)(2T_0^2 + 4T_0T_1 + 2T_1^2 + 2T_0T_2 + 2T_1T_2 + T_2^2)$

$\hat{A}_3 = T_3(2T_0+2T_1+2T_2+T_3)(2T_0^2+4T_0T_1+2T_1^2+4T_0T_2+4T_0T_3+2T_1T_3+2T_2T_3+T_3^2)$

$\hat{A}_4 = T_4(2T_0 + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4)(2T_0^2 + 4T_0T_1 + 2T_1^2 + 4T_0T_2 + 4T_1T_2 + 2T_2^2 + 4T_0T_3 + 4T_1T_3 + 4T_2T_3 + 2T_3^2 + 2T_0T_4 + 2T_1T_4 + 2T_2T_4 + 2T_3T_4 + T_4^2)$

$\hat{A}_5 = T_5(2T_0 + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + T_5)(2T_0^2 4T_0T_1 + 2T_1^2 + 4T_0T_2 + 4T_1T_2 + 2T_2^2 + 4T_0T_3 + 4T_1T_3 + 4T_2T_3 + 2T_3^2 + 4T_0T_4 + 4T_1T_4 + T_2T_4 + 4T_3T_4 + 2T_4^2 + 2T_0T_5 + 2T_2T_5 + 2T_3T_5 + 2T_4T_5 + T_5^2)$

$\hat{A}_6 = T_6(2T_0 + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + T_6)(T_5(2T_0 + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + T_5)(2T_0^2 4T_0T_1 + 2T_1^2 + 4T_0T_2 + 4T_1T_2 + 2T_2^2 + 4T_0T_3 + 4T_1T_3 + 4T_2T_3 + 2T_3^2 + 4T_0T_4 + 4T_1T_4 + T_2T_4 + 4T_3T_4 + 2T_4^2 + 4T_0T_5 + 4T_1T_5 + 4T_2T_5 + 4T_3T_5 + 4T_4T_5 + 2T_5^2 + 2T_0T_6 + 2T_1T_6 + 2T_2T_6 + 2T_3T_6 + 2T_4T_6 + 2T_5T_6 + T_6^2)$

Analisando a formação destes fatores é que obtemos: o primeiro fator é chamado de T_m, onde $m = 1, ..., 6$, o segundo é chamado de S_m, então definimos que $S_0 = T_0$. Assim sendo, conseguimos uma fórmula de recorrência para este fator

$$S_m = S_{m-1} + T_m + T_{m-1} \tag{4.24}$$

O terceiro fator chamamos de R_m e definimos $R_0 = T_0^2$. Logo, também, conseguimos uma fórmula de recorrência

$$R_m = R_{m-1} + S_{m-1}T_{m-1} + S_mT_m \tag{4.25}$$

Por meio destas fórmulas de recorrência é possível determinar os polinômios de Adomian associados ao tipo de não linearidade apresentada na equação (4.1) através equação

$$\hat{A}_m = T_mS_mR_m \tag{4.26}$$

que nada mais é do que a fatoração de cada $\hat{A}_m$.

A partir desta ideia, provamos por indução matemática que podemos determinar qualquer polinômio $\hat{A}_m$ de Adomian para a não linearidade estudada neste trabalho pela regra $\hat{A}_m = T_m S_m R_m$ através das fórmulas de recorrência

$$S_m = S_{m-1} + T_m + T_{m-1} \;\; e \;\; R_m = R_{m-1} + S_{m-1}T_{m-1} + S_m T_m$$

Primeiramente provamos a fórmula para S_m. Portanto, temos

Seja válido para $m = 1$, isto é,

$$S_1 = S_0 + T_1 + T_0 \tag{4.27}$$

como definimos $S_0 = T_0$, temos

$$S_1 = T_0 + T_1 + T_0 = 2T_0 + T_1 \tag{4.28}$$

o que se verifica conforme mostramos anteriormente na composição de cada $\hat{A}_m$.

Supondo que seja válido para $m = n$, temos

$$S_n = S_{n-1} + T_n + T_{n-1} \tag{4.29}$$

Temos que provar que para $m = n+1$ também é válido; isto é, $S_{n+1} = S_n + T_{n+1} + T_n$. Usando esta relação, temos:

$$S_n + T_{n+1} + T_n = S_{n-1} + T_n + T_{n-1} + T_{n+1} + T_n. \tag{4.30}$$

Assim, pela forma de composição do S_{n-1}, sabemos que

$$S_{n-1} = 2T_0 + 2T_1 + ... + 2T_{n-2} + T_{n-1} \tag{4.31}$$

Logo, da equação (4.30), temos

$$\begin{aligned} S_{n+1} = \;\; & 2T_0 + 2T_1 + ... + 2T_{n-2} + T_{n-1} + T_n + T_{n-1} + T_{n+1} + T_n = \\ & = 2T_0 + 2T_1 + ... + 2T_{n-2} + 2T_{n-1} + 2T_n + T_{n+1} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Portanto, $S_{n+1} = S_n + T_{n+1} + T_n$. Segue que para provar a fórmula de recorrência para R_m, procedemos de forma análoga. Por indução, para $m = 1$, temos

$$R_1 = R_0 + S_0T_0 + S_1T_1 = T_0^2 + T_0T_0 + (2T_0 + T_1)T_1 = 2T_0^2 + 2T_0T_1 + T_1^2, \quad (4.33)$$

o que se verifica conforme mostramos anteriormente, sendo que $R_0 = T_0^2$.

Supõe-se válido para $m = n$,

$$R_n = R_{n-1} + S_{n-1}T_{n-1} + S_nT_n, \quad (4.34)$$

Queremos provar que para $m = n+1$ também é válido, assim $R_{n+1} = R_n + S_nT_n + S_{n+1}T_{n+1}$. Partindo desta relação, temos

$$R_n + S_nT_n + S_{n+1}T_{n+1} = R_{n-1} + 2S_nT_n + S_{n-1}T_{n-1} + S_{n+1}T_{n+1}. \quad (4.35)$$

Observando a formação do polinômio R_{n-1}, podemos notar que

$$\begin{aligned} R_{n-1} = \; & 2T_0^2 + 4T_0T_1 + 4T_0T_2 + ... + 4T_0T_{m-2} + 2T_0T_{n-1} + \\ & +2T_1^2 + 4T_1T_2 + T_1T_3 + ... + 4T_1T_{n-2} + 2T_1T_{n-1} + ... + \\ & +2T_{n-2}^2 + 2T_{n-2}T_{n-1} + T_{n-1}^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

E expandindo os termos S_nT_n, $S_{n-1}T_{n-1}$ e $S_{n+1}T_{n+1}$, obtemos

$$S_nT_n = T_n(2T_0 + 2T_1 + 2T_2 + ... + 2T_{n-1} + T_n) \quad (4.37)$$

$$S_{n-1}T_{n-1} = T_{n-1}(2T_0 + 2T_1 + 2T_2 + ... + 2T_{n-2} + T_{n-1}) \quad (4.38)$$

$$S_{n+1}T_{n+1} = T_{n+1}(2T_0 + 2T_1 + 2T_2 + ... + 2T_n + T_{n+1}). \quad (4.39)$$

Assim, seguindo da equação (4.35), tomamos, primeiramente, todos os termos com T_0, após todos os termos com T_1 e assim por diante, obtendo

$$\begin{aligned}
T_0 \Rightarrow \quad & 2T_0^2 + 4T_0T_1 + 4T_0T_2 + ... + 4T_0T_{m-2} + 2T_0T_{m-1} + 4T_0T_m + 2T_0T_{m+1} + 2T_0T_{m-1} = \\
& = 2T_0^2 + 4T_0T_1 + 4T_0T_2 + ... + 4T_0T_{m-2} + 4T_0T_{m-1}4T_0T_m + 2T_0T_{m+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1 \Rightarrow \quad & 2T_1^2 + 4T_1T_2 + ... + 4T_1T_{m-2} + 2T_1T_{m-1} + 4T_1T_m + 2T_1T_{m+1} + 2T_1T_{m-1} = \\
& = 2T_1^2 + +4T_1T_2 + ... + 4T_1T_{m-2} + 4T_1T_{m-1}4T_1T_m + 2T_1T_{m+1}
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
T_{m-2} \Rightarrow \quad & 2T_{m-2}^2 + 2T_{m-2}T_{m-1} + 4T_{m-2}T_m + 2T_{m-2}T_{m+1} + 2T_{m-2}T_{m-1} = \\
& 2T_{m-2}^2 + 4T_{m-2}T_{m-1} + 4T_{m-2}T_m + 2T_{m-2}T_{m+1}
\end{aligned}$$

$$T_{m-1} \Rightarrow \quad T_{m-1}^2 + 4T_{m-1}T_m + 2T_{m-1}T_{m+1} + T_{m-1}^2 = 2T_{m-1}^2 + 4T_{m-1}T_m + 2T_{m-1}T_{m+1}$$

$$T_m \Rightarrow \quad 2T_m^2 + 2T_mT_{m+1}$$

$$T_{m+1} \Rightarrow T_{m+1}^2$$

Notamos com essa expansão que obtemos a formação de R_{m+1}. Logo, o resultado desejado segue. Portanto, podemos calcular a não linearidade θ^4 pela decomposição de Adomian, sendo que $\hat{A}_m$ é determinado pela fórmula $\hat{A}_m = T_mS_mR_m$.

Logo, da equação (2.17) podemos construir a fórmula recursiva para a temperatura, como

$$T_0(\tau) = \Theta_1 + (\Theta_2 - \Theta_1)\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{1}{2N_c}\frac{\tau}{\tau_0} < W, \int_0^{\tau_0} U_0(\tau')d\tau' > + \frac{1}{2N_c} < U_0(\tau')d\tau' > \tag{4.40}$$

e

$$T_{m+1}(\tau) = -\frac{1}{2N_c}\frac{\tau}{\tau_0}\langle \mathbf{W}, \int_0^{\tau_0} \mathbf{U}_m(\tau')d\tau'\rangle + \frac{1}{2N_c}\langle \mathbf{U}_m(\tau')d\tau'\rangle, \tag{4.41}$$

onde $m = 0, ..., \mathrm{M}$ e o vetor coluna $\mathbf{W} = col\left[\frac{\omega_1}{\mu_1}, ..., \frac{\omega_N}{\mu_N}\right]$ contêm como componentes as direções discretas μ_i e ω_i são os pesos de quadratura de Gauss. O símbolo $\langle\rangle$ significa o produto interno. Note que a equação (4.40) estabelece os polinômios de Adomian em termos da temperatura nas fronteiras e as condições de expansão da intensidade, o que em princípio poderia ser determinada até a precisão desejada.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, de forma a mostrar a exequibilidade do método $D_M LTS_N$ para resolver o problema S_N de transferência radiativa-condutiva em uma placa, vamos apresentar simulações numéricas para encontrar a temperatura adimensionalizada, isto é,

$$\Theta(\tau) = \Theta_1 + (\Theta_2 - \Theta_1)\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{1}{4\pi N_c}\frac{\tau}{\tau_0}\int_{\tau}^{\tau_0} q_{\tau}^{*}(\tau')d\tau' + \frac{1}{4\pi N_c}\int_{0}^{\tau} q_{\tau}^{*}(\tau')d\tau', \tag{5.1}$$

os fluxos radiativo e condutivo, respectivamente, calculados como:

$$Q_r = \frac{1}{4\pi N_c} q^{*}(\tau) \tag{5.2}$$

$$Q_c = -\frac{d}{d\tau}\Theta(\tau) \tag{5.3}$$

e o fluxo total definido como a soma dos fluxos radiativo e condutivo.

Para apresentarmos nossos resultados tomamos os problemas da tabela abaixo, com os valores definidos para os coeficentes de emissitividades, os de reflexividades especulares e difusivos que aparecem nas condições de contorno, as temperaturas conhecidas nos extremos, o espalhamento simples de albedo, a espessura da placa, o parâmetro de conjugação radiação-condução e o grau de anisotropia.

Tabela 5.1: Problemas considerados para simulações numéricas

	ϵ_1	ϵ_2	ρ_1^s	ρ_2^s	ρ_1^d	ρ_2^d	Θ_1	Θ_2	ω	τ_0	N_c	L
Problema 1	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.5	0.95	1.0	0.05	299
Problema 2	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.9	1.0	0.05	0
Problema 3	0.6	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4	1.0	0.5	0.95	1.0	0.05	299
Problema 4	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.5	1.0	0.1	0
Problema 5	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.9	1.0	0.1	0

Problema 1

Neste problema vamos determinar os valores de M, número de termos usado para o método da decomposição de Adomian e N, ordem da quadratura usada no método LTS_N, de forma a garantir a precisão de seis dígitos significativos nos resultados apresentados. Para tanto, vamos considerar um problema com condições de contorno completas e alto grau de anitropia. Por facilidade, para testar nossa técnica de solução, e evitar uma tabela extensa para os coeficientes da lei de espalhamento, vamos utilizar aqui a lei binomial de espalhamento dada por Siewert e Thomas [30] formado por:

$$p(\cos\Theta) = \sum_{l=0}^{L} \beta_l P_l(\cos\Theta) \tag{5.4}$$

onde $\beta_0 = 1$ e para $l \geq 1$ os β_l são obtidos recursivamente pela fórmula

$$\beta_l = \left(\frac{2l+1}{2l-1}\right)\left(\frac{L+1-l}{L+1+l}\right)\beta_{l-1} \tag{5.5}$$

Os resultados obtidos para o problema 1 (com anisotropia) estão na tabela abaixo:

Tabela 5.2: Resultado de $D_M LTS_{300}$ para M variando de 0 a 200 para $\tau = 0.5$

M	$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
0	.8104526524049995	.5043324582741411	4.4021634273935980	4.9064958856677390
1	.7593620753437466	.4622112840292911	4.5157474363757750	4.9779587204050660
2	.7695134205015403	.4698782181555088	4.5002694279216820	4.9701476460771920
3	.7676910486719937	.4685717968627365	4.5028521889890710	4.9714239858518080
4	.7680211754339947	.4688042401738775	4.5023947585254610	4.9711989986993390
5	.7679616196703567	.4687625210369356	4.5024768276137770	4.9712393486507130
6	.7679723651805831	.4687700378643430	4.5024620426347140	4.9712320804990570
7	.7679704267360670	.4687686823504692	4.5024647087768150	4.9712333911272840
8	.7679707764209818	.4687689268548886	4.5024642278672540	4.9712331547221420
9	.7679707133402565	.4687688827490549	4.5024643146178130	4.9712331973668680
10	.7679707247195696	.4687688907053835	4.5024642989687330	4.9712331896741160
11	.7679707226668237	.4687688892701215	4.5024643017917100	4.9712331910618310
12	.7679707230371242	.4687688895290323	4.5024643012824650	4.9712331908114980
13	.7679707229703247	.4687688894823267	4.5024643013743300	4.9712331908566570
14	.7679707229823748	.4687688894907520	4.5024643013577580	4.9712331908485100
15	.7679707229802011	.4687688894892321	4.5024643013607480	4.9712331908499800
16	.7679707229805932	.4687688894895063	4.5024643013602090	4.9712331908497150
17	.7679707229805225	.4687688894894568	4.5024643013603060	4.9712331908497630
18	.7679707229805353	.4687688894894658	4.5024643013602890	4.9712331908497550
19	.7679707229805329	.4687688894894642	4.5024643013602920	4.9712331908497560
20	.7679707229805334	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550
21	.7679707229805333	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550
22	.7679707229805333	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550
23	.7679707229805333	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550
24	.7679707229805333	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550
25	.7679707229805333	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550
50	.7679707229805333	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550
100	.7679707229805333	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550
150	.7679707229805333	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550
200	.7679707229805333	.4687688894894644	4.5024643013602910	4.9712331908497550

Na tabela (5.2), podemos ver a estabilidade do método proposto para um grande número de termos da série de Adomian (M). Desta maneira, notemos que a partir do 20º termo não temos mais modificações nos resultados obtidos. Com isso, queremos mostrar com os problemas 1 e 2 que podemos tomar um M grande e isto não afeta na estabilidade do método empregado para a solução dos problemas. E, também, que com poucos termos na série de Adomian já temos uma boa solução aproximada. Assim, por facilidade computacional, adotamos nos outros problemas resolvidos, um número pequeno de termos da série de Adomian. Abaixo mostraremos os resultados, utilizando o problema 2, com M variando e com espalhamento isotrópico ($L = 0$).

Problema 2

Os resultados obtidos para o Problema 2 estão listados na tabela 2.3.

Tabela 5.3: Resultado de $D_M LTS_{100}$ para M variando de 0 a 200 para $\tau = 0.5$

M	$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
0	.6066684393314057	1.0376588580356740	2.6894439542418770	3.7271028122775510
1	.5635190552200093	.9614636651583911	2.8463663763776990	3.8078300415360900
2	.5730016272524635	.9768753430593534	2.8207664840257980	3.7976418270851510
3	.5711802331071503	.9739912282532358	2.8254559431399000	3.7994471713931360
4	.5715317212854055	.9745430729552433	2.8245639720341880	3.7991070449894320
5	.5714643820393162	.9744375581750492	2.8247343536362490	3.7991719118112980
6	.5714772804999023	.9744577580507433	2.8247017451409280	3.7991595031916710
7	.5714748107443184	.9744538907197237	2.8247079877885990	3.7991618785083230
8	.5714752836321163	.9744546311800697	2.8247067925562720	3.7991614237363420
9	.5714751930891885	.9744544894065670	2.8247070214026970	3.7991615108092640
10	.5714752104252334	.9744545165515623	2.8247069775861200	3.7991614941376830
11	.5714752071059440	.9744545113541799	2.8247069859755660	3.7991614973297460
12	.5714752077414800	.9744545123493096	2.8247069843692600	3.7991614967185690
13	.5714752076197955	.9744545121587747	2.8247069846768150	3.7991614968355900
14	.5714752076430941	.9744545121952559	2.8247069846179290	3.7991614968131840
15	.5714752076386332	.9744545121882710	2.8247069846292030	3.7991614968174750
16	.5714752076394873	.9744545121896083	2.8247069846270450	3.7991614968166530
17	.5714752076393238	.9744545121893523	2.8247069846274580	3.7991614968168110
18	.5714752076393551	.9744545121894014	2.8247069846273790	3.7991614968167800
19	.5714752076393491	.9744545121893919	2.8247069846273940	3.7991614968167860
20	.5714752076393502	.9744545121893937	2.8247069846273910	3.7991614968167850
21	.5714752076393500	.9744545121893934	2.8247069846273920	3.7991614968167850
22	.5714752076393500	.9744545121893935	2.8247069846273920	3.7991614968167850
23	.5714752076393500	.9744545121893935	2.8247069846273920	3.7991614968167850
24	.5714752076393500	.9744545121893935	2.8247069846273920	3.7991614968167850
25	.5714752076393500	.9744545121893935	2.8247069846273920	3.7991614968167850
50	.5714752076393500	.9744545121893935	2.8247069846273920	3.7991614968167850
100	.5714752076393500	.9744545121893935	2.8247069846273920	3.7991614968167850
150	.5714752076393500	.9744545121893935	2.8247069846273920	3.7991614968167850
200	.5714752076393500	.9744545121893935	2.8247069846273920	3.7991614968167850

Vemos novamente a estabilidade da decomposição de Adomian. Isto nos indica que o alto grau de anisotropia não interfere no resultado. Assim sendo, com poucos termos na série de Adomian, já temos uma solução precisa. Portanto, continuando com o problema 2, usamos $M = 8$, pois já produzimos o resultado desejado e variamos, então, N para 200, 300 e 400 nas tabelas (5.4), (5.5) e (5.6), respectivamente.

Tabela 5.4: Resultado de D_8LTS_{200} para $\frac{\tau}{\tau_0}$ variando de 0 a 1

$\frac{\tau}{\tau_0}$	$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
.000000E+00	.100000E+01	.837892E+00	.296127E+01	.379916E+01
.100000E+00	.918027E+00	.808913E+00	.299025E+01	.379916E+01
.200000E+00	.836956E+00	.817841E+00	.298132E+01	.379916E+01
.300000E+00	.753557E+00	.853899E+00	.294526E+01	.379916E+01
.400000E+00	.665559E+00	.908530E+00	.289063E+01	.379916E+01
.500000E+00	.571476E+00	.974455E+00	.282471E+01	.379916E+01
.600000E+00	.470505E+00	.104529E+01	.275388E+01	.379916E+01
.700000E+00	.362437E+00	.111560E+01	.268356E+01	.379916E+01
.800000E+00	.247545E+00	.118120E+01	.261796E+01	.379916E+01
.900000E+00	.126449E+00	.123928E+01	.255988E+01	.379916E+01
.100000E+01	.000000E+00	.128795E+01	.251121E+01	.379916E+01

Tabela 5.5: Resultado de D_8LTS_{300} para $\frac{\tau}{\tau_0}$ variando de 0 a 1

$\frac{\tau}{\tau_0}$	$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
.000000E+00	.100000E+01	.837894E+00	.296126E+01	.379916E+01
.100000E+00	.918027E+00	.808914E+00	.299024E+01	.379916E+01
.200000E+00	.836956E+00	.817841E+00	.298131E+01	.379916E+01
.300000E+00	.753557E+00	.853899E+00	.294526E+01	.379916E+01
.400000E+00	.665559E+00	.908530E+00	.289063E+01	.379916E+01
.500000E+00	.571476E+00	.974455E+00	.282470E+01	.379916E+01
.600000E+00	.470505E+00	.104529E+01	.275387E+01	.379916E+01
.700000E+00	.362437E+00	.111560E+01	.268356E+01	.379916E+01
.800000E+00	.247545E+00	.118120E+01	.261796E+01	.379916E+01
.900000E+00	.126449E+00	.123928E+01	.255987E+01	.379916E+01
.100000E+01	.000000E+00	.128795E+01	.251121E+01	.379916E+01

Tabela 5.6: Resultado de D_8LTS_{400} para $\frac{\tau}{\tau_0}$ variando de 0 a 1

$\frac{\tau}{\tau_0}$	$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
.000000E+00	.100000E+01	.837895E+00	.296126E+01	.379915E+01
.100000E+00	.918027E+00	.808914E+00	.299024E+01	.379915E+01
.200000E+00	.836956E+00	.817841E+00	.298131E+01	.379915E+01
.300000E+00	.753557E+00	.853899E+00	.294525E+01	.379915E+01
.400000E+00	.665559E+00	.908530E+00	.289062E+01	.379915E+01
.500000E+00	.571476E+00	.974455E+00	.282470E+01	.379915E+01
.600000E+00	.470505E+00	.104529E+01	.275387E+01	.379915E+01
.700000E+00	.362437E+00	.111560E+01	.268356E+01	.379915E+01
.800000E+00	.247545E+00	.118120E+01	.261795E+01	.379915E+01
.900000E+00	.126449E+00	.123928E+01	.255987E+01	.379915E+01
.100000E+01	.000000E+00	.128795E+01	.251121E+01	.379915E+01

Das tabelas (5.4), (5.5) e (5.6) acima notamos que os resultados são muito próximos para $N = 200, 300$ e 400 variando somente a partir do sétimo dígito. Relembrando que o método LTS_N tem sua convergência demonstrada por Pazos e Vilhena [22].

Percebemos, também, que o uso da decomposição de Adomian para trabalharmos a parte não linear mostrou-se computacionalmente muito eficiente. Nas tabelas 5.2 e 5.3 aumentamos o número de termos da série de Adomian e os resultados se manteram sem auterações. Assim, fazendo N crescer obtemos uma solução um pouco mais precisa. Deste modo, após as observações quanto ao número de termos da série de Adomian e a ordem de quadratura para a solução da equação de transferência radiativa-condutiva fazemos comparações dos nossos resultados com outros obtidos a partir de métodos diferentes a este aplicado.

No artigo de Siewert e Thomas [30], temos para as mesmas condições do Problema 1, da tabela 5.1 como resultados disponíveis para comparação. Observamos a coincidência de seis dígitos entre os resultados obtidos pelos autores mencionados e os obtidos com a técnica apresentada neste trabalho. Sendo que o método aplicado por Siewert e Thomas no artigo acima citado, é o P_N, também chamado de método harmônico esférico. "É usado juntamente com splines cúbicos de Hermite para definir uma técnica iterativa para resolver uma classe de problemas não lineares em transferência radiativa"[30].

Tomamos, agora, mais dois problemas para continuarmos nossas comparações, todos oriundos do artigo acima citado. Ressaltamos que os problemas 1 e 3 possuem grau de anisotropia de 299. Logo, usamos $N = 300$ nas simulações. A seguir o Problema 3, para comparações:

Problema 3

Os Problemas 1, 2 e 3 apresentam soluções idênticas ao artigo de Siewert e Thomas [30]. Por este motivo, as tabelas com os resultados dos autores não estão presentes neste trabalho. Os autores acima, deixaram em aberto a questão da convergência do método aplicado. Os resultados para o problema 3 seguem na tabela abaixo:

Tabela 5.7: Resultado de D_8LTS_{300} para $\frac{\tau}{\tau_0}$ variando de 0 a 1

$\frac{\tau}{\tau_0}$	$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
.000000E+00	.100000E+01	.473500E+00	.157059E+01	.204409E+01
.100000E+00	.954144E+00	.446342E+00	.159775E+01	.204409E+01
.200000E+00	.910237E+00	.434045E+00	.161004E+01	.204409E+01
.300000E+00	.866920E+00	.434218E+00	.160987E+01	.204409E+01
.400000E+00	.823037E+00	.445091E+00	.159900E+01	.204409E+01
.500000E+00	.777591E+00	.465293E+00	.157880E+01	.204409E+01
.600000E+00	.729706E+00	.493676E+00	.155041E+01	.204409E+01
.700000E+00	.678618E+00	.529202E+00	.151489E+01	.204409E+01
.800000E+00	.623661E+00	.570860E+00	.147323E+01	.204409E+01
.900000E+00	.564275E+00	.617629E+00	.142646E+01	.204409E+01
.100000E+01	.500000E+00	.668459E+00	.137563E+01	.204409E+01

Após todas comparações com o trabalho de Siewert e Thomas [30], agora tomamos outro autor, com problemas diferentes para simulações. No artigo de Abulwafa [2], encontramos dois novos problemas, que apresentamos a seguir.

Problema 4

Os nossos resultados obtidos para o Problema 4 estão listados na tabela 5.8.

Tabela 5.8: Resultado de D_8LTS_{300} para $\tau = 0.5$

$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
.100000E+01	.819472E+00	.163886E+01	.245833E+01
.923337E+00	.729793E+00	.172854E+01	.245833E+01
.851480E+00	.717683E+00	.174065E+01	.245833E+01
.778079E+00	.757532E+00	.170080E+01	.245833E+01
.698753E+00	.834099E+00	.162423E+01	.245833E+01
.610421E+00	.935839E+00	.152249E+01	.245833E+01
.511107E+00	.105194E+01	.140639E+01	.245833E+01
.399911E+00	.117174E+01	.128659E+01	.245833E+01
.276954E+00	.128576E+01	.117257E+01	.245833E+01
.143176E+00	.138738E+01	.107095E+01	.245833E+01
.000000E+00	.147338E+01	.984952E+00	.245833E+01

Resultados obtidos pelo autor:

Tabela 5.9: Resultado do Abulwafa

$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
1.0000	0.8602	1.6064	2.4666
0.9441	0.7629	1.7037	2.4666
0.9745	0.6963	1.7703	2.4666
0.7929	0.7256	1.7410	2.4666
0.7006	0.8360	1.6305	2.4666
0.59993	0.9187	1.5479	2.4666
0.4902	1.0321	1.4345	2.4666
0.03745	1.1580	1.3085	2.4666
0.2535	1.2724	1.1941	2.4666
0.1283	1.3780	1.0886	2.4666
0.0000	1.4729	0.9937	2.4666

Existe uma semelhança nos resultados comparados das tabelas (5.8) e (5.9). Sendo que a pequena diferença pode ser apontada nos métodos distintos adotados para solução do problema. A seguir, no problema 5, também podemos perceber este fato.

Problema 5

Os nossos resultados obtidos para o Problema 5 estão listados na tabela 5.10.

Tabela 5.10: Resultado de D_8LTS_{300} para $\tau = 0.5$

$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
.100000E+01	.908311E+00	.148973E+01	.239804E+01
.910044E+00	.894881E+00	.150316E+01	.239804E+01
.820331E+00	.902255E+00	.149579E+01	.239804E+01
.729118E+00	.923915E+00	.147413E+01	.239804E+01
.635249E+00	.954600E+00	.144344E+01	.239804E+01
.538040E+00	.990066E+00	.140798E+01	.239804E+01
.437189E+00	.102695E+01	.137110E+01	.239804E+01
.332689E+00	.106270E+01	.133534E+01	.239804E+01
.224745E+00	.109558E+01	.130246E+01	.239804E+01
.113704E+00	.112451E+01	.127353E+01	.239804E+01
.000000E+00	.114871E+01	.124934E+01	.239804E+01

Resultados obtidos pelo autor:

Tabela 5.11: Resultado do Abulwafa

$\Theta(\tau)$	$Q_c(\tau)$	$Q_r(\tau)$	$Q(\tau)$
1.0000	0.9103	1.4881	2.3984
0.9150	0.9026	1.4958	2.3984
0.8255	0.9037	1.4947	2.3984
0.7321	0.9234	1.4750	2.3984
0.6352	0.9563	1.4421	2.3984
0.5350	0.9863	1.4120	2.3984
0.4321	1.0211	1.3773	2.3984
0.3268	1.0574	1.3410	2.3984
0.2194	1.0917	1.3067	2.3984
0.1104	1.1234	1.2750	2.3984
0.0000	1.1483	1.2501	2.3984

Para concluirmos nossas simulações, temos que: a comparação efetuada do $D_M LTS_N$ aos resultados do Abulwafa [2] mostram uma concordância razoavelmente boa entre os métodos. No entanto, existe uma diferença devido ao fato de que a abordagem deste faz uso de uma aproximação no decorrer da sua solução. Já os problemas de comparação de Siewert e Thomas [30], no aspecto quantitativo, com três abordagens diferentes mostram a qualidade do método atual, especialmente devido ao fato de que ela reproduz exatamente a solução analítica no limite $M \to \infty$ e, portanto, permite implementar computacionalmente um critério de convergência real.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Concluímos, afirmando que o objetivo proposto nesta dissertação foi alcançado, uma vez que, apresentamos uma formulação analítica para as equações S_N não lineares de transferência radiativa-condutiva em uma placa plana homogênea, no sentido que, nenhuma aproximação é feita no processo de derivação da solução, a exceção do truncamento da solução em série. Assim, também, salientamos elegância matemática da solução proposta e os excelentes resultados encontrados. Desta maneira, podemos afirmar que a solução apresentada é exata, podendo ser calculada com a precisão desejada controlando o número de termos na solução em série. Portanto, podemos fazer algumas considerações:

- Primeiramente, os metódos empregados se mostraram estáveis; além disso, o número de termos da série de Adomian $m = 1 : M$ tem sua convergência já nos primeiros termos da série. Como visto no capítulo dos resultados numéricos, com 20 termos na série já é possível obtermos o resultado exato. E, também, a estabilidade é vista no LTS_N, quando variamos N para mostrar que obtemos apenas uma maior precisão com o seu aumento;

- Ressaltamos o aspecto relevante da demonstração por indução matemática das fórmulas dos polinômios de Adomian, conhecidos como polinômios $\hat{A}_m$. Estas são válidas para qualquer $m = 1 : M$ inteiro. Este fato reforça a afirmativa de exatidão da solução proposta, uma vez que a solução pode ser calculada para qualquer m inteiro. Nas tabelas 5.2 e 5.3, verificamos a confirmação da convergência numérica da solução encontrada, aumentando o número de termos na solução em série.

• Também devemos ressaltar, que o método da decomposição proposto por Adomian para resolver problemas não lineares sem linearização decompõe o operador associado à equação como a soma da derivada de maior ordem com o operador linear restante e o operador não linear. Neste trabalho, apresentamos um novo procedimento, fazendo a decomposição como a soma do operador linear e do não linear. Por este novo procedimento, tornamos possível inverter o operador linear, pois a solução analítica das equações lineares envolvidas no sistema recursivo são determinadas pelo método LTS_N.

• Observamos que a contribuição deste trabalho consiste na determinação de uma fórmula de recorrência para os polinômios de Adomian $\hat{A}_m$, que aproximam o termo não linear. Esta fórmula permite a determinação de resultados numéricos com a precisão desejada, regulando o número de termos usados na solução em série.

• As comparações das simulações numéricas obtidas geraram resultados iguais aos apresentados na literatura por Siewert e Thomas [30], enquanto que a comparação com os resultados de Abulwafa [2] são satisfatórias, devido a aproximação de Pomaring-Eddington;

• Observamos que a solução do problema não linear estudado é apresentado em forma de série, assim a validade desta solução é limitada pelo raio de convergência. Portanto, problemas em domínios com dimensão maior que o raio de convergência da solução devem ser resolvidos pelo método da continuação analítica, o que permite escrever a solução em série para o domínio desejado;

Finalmente, sugerimos como trabalho futuro a aplicação desta metodologia na solução deste tipo de problema estudado, considerando domínio heterogêneo constituído de placas planas paralelas.

Referências Bibliográficas

[1] E.M. Abulwafa. Conductive-radiative heat transfer in an inhomogeneous plane-parallel medium using galerkin-iterative method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 61:583–589, 1999.

[2] E.M. Abulwafa. Conductive-radiative heat transfer in an inhomogeneous slab with directional relflecting boundaries. *Journal of Physics*, 32:1626–1632, 1999.

[3] G. Adomian. A review of the decopositon method adomian in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135:501–544, 1988.

[4] L.B. Barichello. *Formulação Analítica da Solução do Problema de Ordenadas Discretas Unidemensional*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 1992.

[5] L.B. Barichello and M.T.M.B. Vilhena. A general analytical approach to one group one dimensional transport equation. *Kerntechnik*, 58:182–184, 1993.

[6] V. Borges and M.T.M.B. Vilhena. Uso do método LTS_N aplicado a problemas de engenharia nuclear. *INAC - Internacional Nuclear Atlantic Conference - XIII ENFIR*, 2002.

[7] J. Brancher. *Formulação Analítica para solução do problema de ordenadas discretas pelo método LTS_N, para valores de* N *grandes*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalurgica e Materiais - PPGEM, Porto Alegre, RS, Brasil, 1998.

[8] J. Brancher, C.F. Segatto, and M.T.M.B. Vilhena. The LTS_N solution for radiative transfer problem without azimutal symmetry with severe anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, Great Britain*, 62:743–753, 1999.

[9] K.M. Case. Elementary solution of transport equation and their applications. *Annals of Physics*, 9:1–23, 1960.

[10] M.G. Gomes. Métodos de inversão matricial para (sA+B) em problemas de transporte de nêutrons. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil, 1999.

[11] T. Gonçalez, C.F. Segatto, and M.T.M.B. Vilhena. A closed form solution for the one-group time-depend transport equation in a slab by the LTS_N method. *Anais do* XV ENFIR - *Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica, Santos, SP, Brasil*, 2007.

[12] G.A. Gonçalves, G. Orengo, M.T.M.B. Vilhena, and C.O. Graça. LTS_N solution of the adjoint neutron transport equation with arbitrary source for high order of quadrature in a homogeneous slab. *Annals of Nuclear Energy*, 29(5):561–569, 2002.

[13] G.A. Gonçalves, C.F. Segatto, and M.T.M.B. Vilhena. The LTS_N particular solution in a slab for na arbitrary source and large quadrature. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 66(3):271–276, 2000.

[14] E.B. Hauser, R.P. Pazos, and M.T.M.B. Vilhena. An error bound estimate and convergence of the nodal-LTS_N solution in a rectangle. *Annals of Nuclear Energy*, 32:1146–1156, 2005.

[15] F. Kruse. Cálculo do fator utilização térmica de um reator nuclear através do método LTS_N. Dissertação de mestrado, Universidade do Rio Grande

do Sul - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil, 1998.

[16] E.B. Larsen, R. Vasques, and M.T.M.B. Vilhena. Particle transport in the 1_d diffusive atomic mix limit. *American Nuclear Society, LaGrange Parke, IL*, 1, 2005.

[17] R.M. Lemos. Solução da equação de transferência radiativa condutiva em placa plana pelo método da decomposição e LTS_2. Dissertação de mestrado, Universidade do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil, 2000.

[18] D.V. Marona. Solução LTS_N da equação de transporte em geometria cartesiana unidimensional para $c = 1$. Dissertação de mestrado, Universidade do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil, 2007.

[19] J.V.P. Oliveira. Formulação LTS_N para o problema de ordenada discreta com anisotropia. Dissertação de mestrado, Universidade do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil, 1993.

[20] J.V.P. Oliveira, A.V. Cardona, M.T.M.B. Vilhena, and R.C Barros. A semi-analytical numerical method for time-dependent radiative transfer problems in a slab geometry with coherent isotropic scattering. *Journal of Quantitative Spectroscopy e Radiative, Great Britain*, 73:55–62, 2002.

[21] M.N. Ozisik. *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*. Wiley, New York, 1973.

[22] R. Pazos and M.T.M.B. Vilhena. Convergence of the LTS_N method: approach of semi-groups. *Progress in nuclear energy*, 30:77–86, 1999.

[23] S.P. Renz. Solução da equação de transferência radiativa dependente do tempo pelos métodos espectral e LTS_N. Dissertação de mestrado, Universidade do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil, 1999.

[24] B.A. Rodrigues, M.T.M.B. Vilhena, and V. Borges. A closed-form solution for the two-dimensional fokker-planck equation for eletron transport in the range of compton effect. *Annals of Nuclear Energy, Great Britain*, 2007.

[25] C.F. Segatto. *Extensão da formulação LTS_N para problemas de transporte sem simetria e problemas dependentes do tempo.* Tese de doutorado, Universidade Federal de Rio Grande do Sul- Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, RS, Brasil, 1995.

[26] C.F. Segatto, R.M.F. Vargas, M.T.M.B. Vilhena, and B.E.J. Bodmann. A solution for the non-linear S_N radiative-conductive problem in a grey plane-parallel participating medium. *International Journal of Thermal Sciences*, 49(9):1493–1499, 2010.

[27] C.F. Segatto and M.T.M.B. Vilhena. Extension of the LTS_N formulation for discrete ordinates problem without azimutal symetry. *Annals of Nuclear Energy, Great Britain*, 21:701–710, 1994.

[28] C.F. Segatto, M.T.M.B. Vilhena, and J. Brancher. The one-dimensional LTS_N formulation for high of degree of anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 1999.

[29] C.E. Siewert. An improved iterative method for solving a class of coupled conductive radiative heat transfer problems. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 54:599–605, 1995.

[30] C.E. Siewert and J.R. Thomas. A computational method for solving a class of coupled conductive-radiative heat transfer problems. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 45(5):273–281, 1991.

[31] C.E. Siewert and J.R. Thomas. On coupled condictive radiative heat transfer problems in a cylinder. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 48:227–236, 1992.

[32] M.R. Simch, C.F. Segatto, and M.T.M.B. Vilhena. An analytical solution for the sn radiative transfer equations with polarization in a slab by the LTS_N method. *Jounal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 97:424–435, 2005.

[33] C. M. Spuckler and R. Siegel. Refractive index and scattering effects on radiative behavior of a semitransparent layer. *Jounal Thermophys Heat Transfer*, 7:302–310, 1993.

[34] C.M. Spuckler and R. Siegel. Refractive index effects on radiative behavior of a heated absorbing-emiting layer. *Jounal Thermophys Heat Transfer*, 6:596–604, 1992.

[35] E.E. Streck. *Solução analítica para a aproximação P_N da equação de transporte linear unidimensional*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul- Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, Brasil, 1993.

[36] P. Talukdar and S.C. Mishra. Analysis of conduction-radiation problem in absorbing, emiting and anisotropically scattering media using the collapsed dimension method. *Internacional Journal of Heat and Mass Transfer*, 45:2159–2168, 2002.

[37] L. Tavares. Cálculo dos parâmetros superficiais de radiação pelo método LTS_N. Dissertação de mestrado, Universidade do Rio Grande do Sul -

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, RS, Brasil, 2000.

[38] R.M.F. Vargas and M.T.M.B. Vilhena. A closed-form solution for the one-dimensional radiative condutive problem by the decomposition and LTS_N methods. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 92:121–127, 1998.

[39] R. Vasques. *A review of particle transport theory in a binary stochastic medium*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2005.

[40] M.T.M.B. Vilhena and L.B. Barichello. An analytical solution for the multigroup slab geometry discrete ordinates problems. *Transport Theory and Statistical Physics, USA*, 24:1337–1352, 1995.

[41] M.T.M.B. Vilhena and C.F. Segatto. A new iterative method to solve the radiative transfer equation. *Journal of Quantitative Spectoscopy and Radiative Transfer, Great Britain*, 55:493–498, 1996.

[42] R. Viskanta and R. J. Grosh. Effect of surface emissivity on heat transfer by simultaneous conduction and radiation. *Internacional Journal Heat and Mass Transfer*, 5:729–734, 1962.

[43] R. Viskanta and R. J. Grosh. Heat transfer by simultaneous conduction and radiation in an absorbing medium. *ASME - Journal Heat Transfer*, 84:63–72, 1962.

[44] W.W. Yuen and L.W. Wong. Heat transfer by conduction and radiation in a one-dimensional absorbing emitting and anisotropically-scattering medium. *ASME - Journal Heat Transfer*, 102:303–307, 1980.

[45] J. Zabadal. *Solução Analítica da Equação de Ordenadas Discretas Multidimensional*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do

Sul - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, Brasil, 1994.

[46] J. Zabadal, M.T.M.B. Vilhena, and L.B. Barrichelo. Solução da equação de ordenada discreta em duas dimensões pelo método LTS_N. *Anais do IX ENFIR-Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, pages 90–92, 1993.

7 APÊNDICE

Variando o número de termos da série de Adomian para $M = 4$ e $M = 6$ na equação (4.22) obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} \theta^4 = \; & T_0^4 + 4T_0^3(T_1+T_2+T_3+T_4) + 6T_0^2(T_1+T_2+T_3+T_4)^2 \\ & +4T_0(T_1+T_2+T_3+T_4)^3 + (T_1+T_2+T_3+T_4)^4 \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} \theta^4 = \; & T_0^4 + 4T_0^3(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6) + 6T_0^2(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6)^2 \\ & +4T_0(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6)^3 + (T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6)^4 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Para a determinação dos polinômios de Adomian para $M = 4$ procedemos de maneira análoga ao $M = 2$ descrito na subseção 4.2. Assim,

$\hat{A}_0 = T_0^4$

$\hat{A}_1 = 4T_0^3T_1 + 6T_0^2T_1^2 + 4T_0T_1^3 + T_1^4$

$\hat{A}_2 = 4T_0^3T_2 + 12T_0^2T_1T_2 + 12T_0T_1^2T_2 + 4T_1^3T_2 + 6T_0^2T_2^2 + 12T_0T_1T_2^2 + T_1^2T_2^2 + 4T_0T_2^3 +$
$+4T_1T_2^3 + T_2^4$

$\hat{A}_3 = 4T_0^3T_3 + 12T_0^2T_1T_3 + 12T_0T_1^2T_3 + 4T_1^3T_3 + 12T_0^2T_2T_3 + 24T_0T_1T_2T_3 + 12T_1^2T_2T_3 +$
$+12T_0T_2^2T_3 + 12T_1T_2^2T_3 + 2T_2^2T_3 + 6T_0^2T_3^2 + 12T_0T_1T_3^2 + 6T_1^2T_3^2 + 12T_0T_2T_3^2 + +12T_1T_2T_3^2 +$
$6T_2^2T_3^2 + 4T_0T_3^3 + 4T_1T_3^3 + 4T_2T_3^3 + T_3^4$

$\hat{A}_4 = 4T_0^3T_4 + 12T_0^2T_1T_4 + 12T_0T_1^2T_4 + 4T_1^3T_4 + 12T_0^2T_2T_4 + 24T_0T_1T_2T_4 + 12T_1^2T_2T_4 +$
$+12T_0T_2^2T_4 + 12T_1T_2^2T_4 + 2T_2^2T_4 + 12T_0^2T_3T_4 + 24T_0T_1T_3T_4 + 12T_1^2T_3T_4 + 24T_0T_2T_3T_4 +$
$+24T_1T_2T_3T_4 + 12T_2^2T_3T_4 + 12T_0T_3^2T_4 + 12T_1T_3^2T_4 + 12T_2T_3^2T_4 + 4T_3^3T_4 + 6T_0^2T_4^2 +$
$+12T_0T_1T_4^2 + 6T_1^2T_4^2 + 12T_0T_4^2 + 12T_1T_2T_4^2 + 6T_2^2T_4^2 + 12T_0T_3T_4^2 + 12T_1T_3T_4^2 + +12T_2T_3T_4^2 +$
$6T_3^2T_4^2 + 4T_0T_4^3 + 4T_1T_4^3 + 4T_2T_4^3 + 4T_3T_4^3 + T_4^4$

E determinando os polinômios $\hat{A}_m$ para $M = 6$, obtemos:

$\hat{A}_0 = T_1^4$

$\hat{A}_1 = 4T_0^3T_1 + 6T_0^2T_1^2 + 4T_0T_1^3 + T_1^4$

$\hat{A}_2 = 4T_0^3T_2 + 12T_0^2T_1T_2 + 12T_0T_1^2T_2 + 4T_1^3T_2 + 6T_0^2T_2^2 + 12T_0T_1T_2^2 + T_1^2T_2^2 + 4T_0T_2^3 + 4T_1T_2^3 + T_2^4$

$\hat{A}_3 = 4T_0^3T_3 + 12T_0^2T_1T_3 + 12T_0T_1^2T_3 + 4T_1^3T_3 + 12T_0^2T_2T_3 + 24T_0T_1T_2T_3 + 12T_1^2T_2T_3 + 12T_0T_2^2T_3 + 12T_1T_2^2T_3 + 2T_2^2T_3 + 6T_0^2T_3^2 + 12T_0T_1T_3^2 + 6T_1^2T_3^2 + 12T_0T_2T_3^2 + 12T_1T_2T_3^2 + 6T_2^2T_3^2 + 4T_0T_3^3 + 4T_1T_3^3 + 4T_2T_3^3 + T_3^4$

$\hat{A}_4 = 4T_0^3T_4 + 12T_0^2T_1T_4 + 12T_0T_1^2T_4 + 4T_1^3T_4 + 12T_0^2T_2T_4 + 24T_0T_1T_2T_4 + 12T_1^2T_2T_4 + 12T_0T_2^2T_4 + 12T_1T_2^2T_4 + 4T_2^3T_4 + 12T_0^2T_3T_4 + 24T_0T_1T_3T_4 + 12T_1^2T_3T_4 + 24T_0T_2T_3T_4 + 24T_1T_2T_3T_4 + 12T_2^2T_3T_4 + 12T_0T_3^2T_4 + 12T_1T_3^2T_4 + 12T_2T_3^2T_4 + 4T_3^3T_4 + 6T_0^2T_4^2 + 12T_0T_1T_4^2 + 6T_1^2T_4^2 + 12T_0T_4^2 + 12T_1T_2T_4^2 + 6T_2^2T_4^2 + 12T_0T_3T_4^2 + 12T_1T_3T_4^2 + 12T_2T_3T_4^2 + 6T_3^2T_4^2 + 4T_0T_4^3 + 4T_1T_4^3 + 4T_2T_4^3 + 4T_3T_4^3 + T_4^4$

$\hat{A}_5 = 4T_0^3T_5 + 12T_0^2T_1T_5 + 12T_0T_1^2T_5 + 4T_1^3T_5 + 12T_0^2T_2T_5 + 24T_0T_1T_2T_5 + 12T_1^2T_2T_5 + 12T_0T_2^2T_5 + 12T_1T_2^2T_5 + 4T_2^3T_5 + 12T_0^2T_3T_5 + 24T_0T_2T_3T_5 + 24T_1T_2T_3T_5 + 212T_2^2T_3T_5 + 12T_0T_3^2T_5 + 12T_1T_3^2T_5 + 12T_2T_3^2T_5 + 4T_3^2T_5 + 12T_0^2T_4T_5 + 24T_0T_1T_4T_5 + 12T_1^2T_4T_5 + 24T_0T_2T_4T_5 + 24T_1T_2T_4T_5 + 12T_2^2T_4T_5 + 24T_0T_3T_4T_5 + 24T_1T_3T_4T_5 + 24T_2T_3T_4T_5 + 12T_3^2T_4T_5 + 12T_0T_4^2T_5 + 12T_1T_4^2T_5 + 12T_2T_4^2T_5 + 12T_3T_4^2T_5 + 4T_4^3T_5 + 6T_0^2T_5^2 + 12T_0T_1T_5^2 + 6T_1^1T_5^2 + 12T_0T_2T_5^2 + 12T_1T_2T_5^2 + 6T_2^2T_5^2 + 12T_OT_3T_5^2 + 12T_1T_3T_5^2 + 12T_2T_3T_5^2 + 6T_3^2T_5^2 + 12T_0T_4T_5^2 + 12T_1T_4T_5^2 + 12T_2T_4T_5^2 + 12T_3T_4T_5^2 + 6T_4^2T_5^2 + 4T_0T_5^3 + 4T_1T_5^3 + 4T_2T_5^3 + 4T_3T_5^3 + 4T_4T_5^3 + T_5^4$

$\hat{A}_6 = 4T_0^3T_6 + 12T_0^2T_1T_6 + 12T_0T_1^2T_5 + 4T_1^3T_6 + 12T_0^2T_2T_6 + 24T_0T_1T_2T_6 + 12T_1^2T_2T_6 + 12T_0T_2^2T_6 + 12T_1T_2^2T_6 + 4T_2^3T_6 + 12T_0^2T_3T_6 + 24T_0T_2T_3T_6 + 24T_1T_2T_3T_6 + 212T_2^2T_3T_6 + 12T_0T_3^2T_6 + 12T_1T_3^2T_6 + 12T_2T_3^2T_6 + 4T_3^2T_6 + 12T_0^2T_4T_6 + 24T_0T_1T_4T_6 + 12T_1^2T_4T_6 + 24T_0T_2T_4T_6 + 24T_1T_2T_4T_6 + 12T_2^2T_4T_6 + 24T_0T_3T_4T_6 + 24T_1T_3T_4T_6 + 24T_2T_3T_4T_6 + 12T_3^2T_4T_6 + 12T_0T_4^2T_6 + 12T_1T_4^2T_6 + 12T_2T_4^2T_6 + 12T_3T_4^2T_6 + 4T_4^3T_6 + 12T_0^2T_5T_6 + 24T_0T_1T_5T_6 12T_1^2T_5T_6 + 24T_0T_2T_5T_6 + 24T_1T_2T_5T_6 + 12T_2^2T_5T_6 + 24T_0T_3T_5T_6 + 24T_1T_3T_5T_6 +$

$24T_2T_3T_5T_6 + 12T_3^2T_5T_6 + 24T_0T_4T_5T_6 + 24T_1T_4T_5T_6 + 24T_2T_4T_5T_6 + 24T_3T_4T_5T_6 + 14T_4^2T_5T_6 + 12T_0T_5^2T_6 + 12T_1T_5^2T_6 + 12T_2T_5^2 + 12T_3T_5^2T_6 + 12T_4T_5^2T_6 + 4T_5^3T_6 + 6T_0^2T_6^2 + 12T_0T_1T_6^2 + 6T_1^2T_6^2 + 12T_0T_2T_6^2 + 12T_1T_2T_6^2 + 6T_2^2T_6^2 + 12T_0T_3T_6^2 + 12T_1T_3T_6^2 + 12T_2T_3T_6^6T_3^2T_6^2 + 12T_0T_4T_6^2 + 12T_1T_4T_6^2 + 12T_2T_4T_6^2 + 12T_3T_4T_6^2 + 6T_4^2T_6^2 + 12T_0T_5T_6^2 + 12T_1T_5T_6^2 + 12T_2T_5T_6^2 + 12T + 3T_5T_6^2 + 12T_4T_5T_6^2 + 6T_5^2T_6^2 + 4T_0T_6^3 + 4T_1T_6^3 + 4T_2T_6^3 + 4T_3T_6 + 4T_4T_6^3 + T_5T_6^3 + T_6^4$