UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

SANDRO AZEVEDO CARVALHO

PENSAMENTO GENÉRICO E EXPRESSÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Porto Alegre
2010

SANDRO AZEVEDO CARVALHO

PENSAMENTO GENÉRICO E EXPRESSÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Cydara Cavedon Ripoll

Porto Alegre

2010

SANDRO AZEVEDO CARVALHO

PENSAMENTO GENÉRICO E EXPRESSÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, dezembro de 2010.

Banca Examinadora

Prof[a]. Dr[a]. Cydara Cavedon Ripoll (UFRGS - orientadora)

Prof. Dr. Rogério Ricardo Steffenon (UNISINOS)

Prof[a]. Dr[a]. Elisabete Zardo Búrigo (UFRGS)

Prof. Dr. Vilmar Trevisan (UFRGS)

DEDICATÓRIA

À Luciana e ao Edu, minha amada família.

AGRADECIMENTOS

À professora Cydara, com quem espero ter estabelecido uma parceria de trabalho frutífera, por sua compreensão e por seu espírito crítico.

Aos alunos da turma 7S2, de 2008, da Escola Municipal de Ensino Fundamental Paulo Beck, por terem acolhido a proposta e por terem exigido muito deste professor.

Ao professor Jaime, que por vezes colaborou com suas valiosas impressões e ideias.

Aos meus colegas das escolas onde trabalhei, em especial aos professores João, Erivelto, Roger e Marcelo, com quem eu mantive estimulantes conversas sobre Matemática e seu ensino.

Aos colegas do mestrado, pelos sábados que passamos juntos estudando as disciplinas do curso.

Aos professores do curso de Mestrado em Ensino de Matemática, os quais, cada um com suas características, ajudaram no meu crescimento profissional e pessoal.

Aos membros da banca examinadora, professor Rogério Steffenon, professora Elisabete Búrigo e professor Vilmar Trevisan, por suas contribuições pertinentes e fundamentais para a finalização desse trabalho.

À minha esposa, Luciana, e ao meu filho Edu, por estarem sempre ao meu lado.

Muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho trata basicamente do conteúdo *expressões algébricas* no ensino fundamental. Motivados pela crença de que a ausência do método de argumentação matemática e do pensamento genérico no atual ensino de Matemática têm se apresentado muito nociva ao estudo de expressões algébricas, desenvolvemos, em uma turma de sétima série, uma proposta didática onde apresentamos uma sequência de atividades que enfatizam estes dois aspectos. Tais atividades servem de pré-requisitos para o estudo de expressões algébricas. Inclui-se neste trabalho uma análise dos PCN para o ensino fundamental e uma análise crítica de livros didáticos de sétima série/oitavo ano sobre expressões algébricas. A partir destas análises, percebemos, nos livros didáticos, o inadequado emprego (no nosso ponto de vista) de polinômios neste nível de ensino, o que resultou na elaboração de um capítulo de conteúdo matemático versando sobre *polinômios*, dedicada a professores de Matemática da Educação Básica.

Palavras-chave: livros didáticos, expressões algébricas, polinômios, pensamento genérico, método de argumentação matemática.

ABSTRACT

This text is closely related to the subject *algebraic expressions in Fundamental School*. Believing that the absence of the mathematical method and of what we call *generical thought* in the treatment of mathematics in the first school years causes much harm in the student's mathematical education, mainly when one deals with algebraic expressions, we applied in a 7th grade class and present here a sequence of activities which give emphasis to those two aspects mentioned above and which prepare the students for the study of algebraic expressions. Additionally we include here an analysis of part of the PCN (Brazilian Curriculum Recommendations) and of nine 7th grade-school books, namely, the part related to *algebraic expressions*. Finally, we include a chapter about polynomials which was written for school teachers, motivated by the inadequate use (for this level of mathematical education, at least in our point of view) of polynomials in the school books which we have analyzed.

Key-words: school books, algebraic expressions, polynomials, generical thought, mathematical method.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Originalmente, este trabalho foi motivado pela seguinte questão: como familiarizar gradativamente os alunos da Educação Básica com o método de argumentação matemática? Esta pergunta surge naturalmente após a leitura do artigo *Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes do ensino de Matemática* (LIMA, 1999, p. 1-6) e tem, na nossa opinião, importância crucial quando chegamos ao ensino de expressões algébricas na sétima série/oitavo ano do ensino fundamental.

O método de argumentação matemática é o raciocínio dedutivo, sendo este a base de todo o pensamento matemático. E o raciocínio dedutivo não envolve necessariamente demonstrações formais (ou "típicas da academia" ou "dos matemáticos", como dizem alguns educadores quando querem a ele se referir), mas sim argumentações matematicamente corretas (portanto, completas), utilizando uma linguagem coerente com a série/ciclo da Educação Básica com a qual estejamos trabalhando.

Assim, para uma mesma questão proposta a alunos de diferentes níveis de escolaridade, devemos esperar (e estimular) níveis diferentes de explicitação de uma mesma ideia ou até mesmo uma abordagem diferente daquela do nível anterior, mas ainda correta como argumentação matemática.

Por exemplo, se perguntarmos aos alunos de uma quinta série sobre o resultado da adição de dois números pares, poderemos ter a seguinte argumentação matemática: com uma quantidade par podemos formar duplas sem sobrar nada, de modo que ao somarmos duas quantidades pares, estamos juntando todas estas duplas, sem sobrar nada. Essa justificativa está absolutamente completa e correta sob o ponto de vista matemático, podendo ser aceita em nível de quinta série ou em qualquer nível. Note aqui a ausência do *formalismo matemático*, que muitos educadores confundem com o *método de argumentação matemática*. Com alunos de uma sétima série, por exemplo, cabe ao professor estimular que seja desenvolvido um argumento fazendo uso da mesma ideia, mas agora expressa na linguagem nova que estão aprendendo neste nível (a linguagem das expressões algébricas): como já é conhecida a representação $2n$ para números pares (ou deveria ser; caso contrário, eis aqui um ótimo momento para introduzi-la), podemos somar $2n + 2m = 2(n + m)$, concluindo que a soma de dois pares é necessariamente um número par, uma vez que $n + m$ é um número natural.

Com o exemplo anterior, queremos enfatizar que, sendo base de todo o pensamento matemático, o método de argumentação matemática não é domínio exclusivo dos alunos de ensino superior, mas sim dos alunos que estudam Matemática desde as séries iniciais. Esta nossa visão é corroborada nos PCN (1997-98) para o ensino fundamental:

> Neste [primeiro] ciclo é importante que o professor estimule os alunos a desenvolver atitudes de organização, investigação, perseverança. Além disso, é fundamental que eles adquiram uma postura diante de sua produção que os leve a justificar e validar suas respostas e observem que situações de erro são comuns, e a partir delas também se pode aprender (BRASIL, 1997, p. 49 e 50).
>
> (...) é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas (BRASIL, 1998, p. 71).

Completando a última citação, ousamos dizer que, não apenas “compreendendo provas de alguns teoremas”, mas também avançando, no sentido de desenvolver nos alunos a capacidade de produzir justificativas matemáticas, utilizando uma linguagem acessível e compatível com o seu nível de escolaridade.

O que foi exposto anteriormente é de importância indiscutível quando chegamos ao ensino de expressões algébricas, o que ocorre geralmente na sétima série/oitavo ano do ensino fundamental. Somos de opinião que os alunos apresentam tanta dificuldade nesse nível, especificamente em expressões algébricas, justamente porque, até este momento, tiveram muito pouca ou nenhuma experiência com o pensamento genérico[1] e com o método de

[1] Convém destacar que nesse trabalho nos dedicaremos exclusivamente ao pensamento genérico enquanto pensamento algébrico. O pensamento geométrico e o pensamento combinatório, por exemplo, são também dimensões importantes do pensamento genérico, mas não serão aqui abordados.

argumentação matemática, seja ele enfatizado oralmente ou através de registros/relatórios das argumentações, seja pela valorização dada pelo professor a esse aspecto.

Uma prévia exposição dos alunos a questões, que neste texto chamamos de *questões de caráter genérico* (sendo um exemplo a soma de pares mencionada anteriormente), possibilitaria uma melhor compreensão do uso das letras para representar genericamente os números na introdução de expressões algébricas e suas operações.

Dessa forma, ao trabalharmos as operações entre expressões algébricas polinomiais, temos a grande vantagem de poder explicá-las a partir das propriedades das operações com números, não se tornando assim meras "regras do jogo" ou não necessitando de uma nova definição para tais operações, o que é bem pouco natural no ensino fundamental.

Salientamos que nossa posição não entra em conflito com os PCN (1998), os quais também especificam que, ao final do ensino fundamental, basta que as letras representem números, pois ora serão variáveis, ora incógnitas, ora parâmetros:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas) tomando contato com fórmulas, compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p 50-1).

Por isso, também defendemos que as propriedades das operações aritméticas sejam amplamente trabalhadas desde as séries iniciais, objetivando, nessas séries, o cálculo mental e, a partir da quinta série/sexto ano, o cálculo algébrico, em completa consonância com os PCN (1997-98):

> Objetivos de Matemática para o segundo ciclo
> Nesse ciclo, o ensino de Matemática deve levar o aluno a: […]
> - Ampliar os procedimentos de cálculo - mental, escrito, exato, aproximado - pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados (BRASIL, 1997, p. 56).

> Objetivos de Matemática para o terceiro ciclo
> Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento: (…)
> - Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

> * reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; (…)
>
> * utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).

No decorrer do presente trabalho, mais precisamente, no momento da análise crítica de alguns livros didáticos, percebemos outra problemática: uma referência a polinômios. Mais do que a simples nomenclatura, trata-se da utilização do conceito de polinômio no ensino fundamental para tratar de expressões algébricas polinomiais. No momento em que constatamos não se tratar de mera inadequação de nomenclatura, fomos forçados a refletir sobre tal problemática e a nos posicionarmos com relação às seguintes questões:

a) Para a compreensão das operações com expressões algébricas polinomiais, os alunos do ensino fundamental necessitam do conceito de polinômio?
b) Qual é a orientação dos PCN para o ensino fundamental (1998) quanto à introdução de polinômios nesse nível de ensino?

Objetivo, Produto Final e Estrutura do Trabalho

Como já dissemos, o objetivo inicial de

- verificar se uma maior familiaridade dos alunos com o método de argumentação matemática pode trazer benefícios ao ensino e aprendizagem do conteúdo de expressões algébricas

ficou ampliado por

- realizar uma análise crítica de livros didáticos no que se refere ao conteúdo expressões algébricas;
- elaborar um texto sobre polinômios dirigido a professores de Matemática da Educação Básica.

Ao cabo deste trabalho, podemos visualizar três produtos finais:

a) Uma proposta didática, com as questões de caráter genérico preparatórias ao tratamento das operações com expressões algébricas polinomiais, acompanhadas de sugestões ao professor com possíveis encaminhamentos e melhorias, baseados em uma experiência realizada em sala de aula;

b) Um texto sobre polinômios dirigido a professores de Matemática da Educação Básica, com nosso posicionamento quanto à inadequação do uso dos conceitos relativos a polinômios no ensino fundamental;

c) A análise crítica dos livros didáticos ilustrando vários aspectos que consideramos mal encaminhados sobre o assunto expressões algébricas.

O presente trabalho ficou assim estruturado:

No Capítulo 1 selecionamos e analisamos passagens dos PCN (1997 - 1998) que se referem à Álgebra no ensino fundamental e passagens que se referem ao método de argumentação matemática nesse nível de escolaridade. Nesse capítulo, apresentamos também nossa crítica ao sentido lá dado ao termo *argumentação*, bem como à interpretação lá sugerida à letra em expressões algébricas como um símbolo abstrato, desprovido de qualquer significado, e procuramos confirmar nossa posição de que o método de argumentação matemática pode e deve ser ensinado desde os ciclos iniciais.

O estudo da Matemática subjacente ao tema *polinômio*s é feito no Capítulo 2, relacionando a Matemática superior com a Matemática escolar e que nos dá subsídios teóricos para nossas posições quanto à inadequação do uso dos conceitos relativos a polinômios no ensino fundamental.

A análise crítica de nove livros didáticos de sétima série aprovados pelo MEC é o assunto do Capítulo 3. Aqui, procuramos mostrar os encaminhamentos que julgamos mal formulados quanto ao conteúdo de expressões algébricas.

No capítulo 4, apresentamos uma proposta didática de encaminhamento de questões de caráter genérico diversificadas, na forma de revisão de conteúdos aritméticos das séries anteriores, procurando justificar as propriedades operatórias com números naturais, inteiros e racionais, as quais constituem, em nossa opinião, a base para o tratamento das expressões algébricas polinomiais.

No Capítulo 5, apresentamos as linhas gerais dos encaminhamentos dados às operações com expressões algébricas polinomiais, após o período de familiarização com o pensamento genérico.

Nas Considerações Finais, ressaltamos o diferencial de nossa proposta, relatando algumas falas de alunos que foram expostos à nossa proposta didática.

1 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS - PCN/1998

Nesse capítulo selecionamos e analisamos algumas passagens dos PCN (BRASIL 1998) que dizem respeito ao método de argumentação matemática, ao ensino de Álgebra e às relações entre esses dois aspectos no ensino fundamental. Procuramos, com isso, ver contemplada em um documento de referência nacional, nossa posição de que o método de argumentação matemática, ou seja, o raciocínio dedutivo, pode e deve ser ensinado desde os ciclos iniciais. Apresentamos também nossa crítica a uma das concepções de Álgebra apresentada nos PCN nesse nível de ensino, a saber, aquela em que as letras em expressões algébricas são interpretadas como símbolos abstratos (concepção estrutural da Álgebra).

Em todo este capítulo, analisamos os PCN para o terceiro e quarto ciclos publicados em 1998. Modificamos a ordem em que as passagens lá aparecem a fim de melhor expor nossa linha de pensamento.

1.1 O MÉTODO DE ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Os PCN (BRASIL 1998, p. 35 e 36) destacam o professor, o aluno e o saber matemático como variáveis envolvidas no estudo de fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática, afirmando que “é de fundamental importância ao professor identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações”. Além disso, os parâmetros salientam que “para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área.”

Como métodos matemáticos, além da indução, da comparação, da estimativa, da intuição, procedimentos esses que convergem à formação de conjecturas e com os quais concordamos que estejam presentes no ensino de Matemática em todos os níveis, destacamos o raciocínio dedutivo, o qual é, por excelência, o método de argumentação matemática, sendo isto o que a diferencia de outras ciências como a Física, que é uma ciência empírica.

Pela minha experiência convivendo com colegas das escolas onde atuo (ou já atuei), pela análise de livros didáticos (salvo em algumas páginas de Geometria) e pela minha experiência como formador do GESTAR II, programa de formação continuada em Matemática, promovido e desenvolvido pelo MEC no ano de 2009, observo que o raciocínio dedutivo está cada vez mais ausente das práticas dos professores em sala de aula. Esta constatação é encontrada também em Nasser e Tinoco:

> Após o abandono da matemática moderna, com o movimento de retorno às bases da matemática, o que se viu foi o abandono total do raciocínio dedutivo e das demonstrações. Embora "*desenvolver o raciocínio lógico*" seja um dos objetivos incluídos dos planejamentos de quase todos os professores de matemática, os alunos foram passando pela escola sem que fossem expostos a atividades que desenvolvessem seu raciocínio lógico ou que os preparasse para o domínio do processo dedutivo. (2003, p. 1).

Tais considerações evidenciam um desacordo entre as práticas em sala de aula e as orientações dos PCN, os quais reforçam, em diversos momentos, que a dedução deve estar presente no ensino e na aprendizagem da Matemática dentro de todos os conteúdos. Ilustramos isso com as seguintes passagens:

- Como uma das principais características do conhecimento matemático:

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino (BRASIL, 1998, p. 26).

- Fazendo relações entre o aluno e o saber matemático e reforçando que o método de argumentação matemática deve ser conteúdo trabalhado no ensino de Matemática em geral, e não apenas em Geometria:

> Ao relacionar idéias matemáticas entre si, [os alunos] podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição, decomposição, inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como no trabalho com o espaço, forma e medidas (BRASIL, 1998, p. 37).

- Como um dos objetivos gerais para o ensino fundamental:

> As finalidades do ensino de Matemática visando à construção da cidadania indicam como objetivos do ensino fundamental levar o aluno a:
>
> - resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (BRASIL, 1998, p. 47 e 48).

- Na organização dos conteúdos:

> A organização de conteúdos pressupõe, portanto, que se analisem alguns pontos:

> • a variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos, ou seja, ao planejar suas atividades, o professor procurará articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando a possibilitar a compreensão mais ampla que o aluno possa atingir a respeito dos princípios e métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos (proporcionalidade, equivalência, indução, dedução etc.); além disso, buscará estabelecer ligações entre a Matemática, as situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 53).

- Como princípio norteador:

> • o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa (BRASIL, 1998, P. 56).

- Em considerações sobre o ensino e aprendizagem de Matemática, no terceiro e quarto ciclos:

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos.
>
> O estímulo à capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler idéias matemáticas, interpretar significados, pensar de forma criativa, desenvolver o pensamento indutivo/dedutivo, é o caminho que vai possibilitar a ampliação da capacidade para abstrair elementos comuns a várias situações, para fazer conjecturas, generalizações e deduções simples como também para o aprimoramento das representações, ao mesmo tempo que permitirá aos alunos irem se conscientizando da importância de comunicar suas idéias com concisão (BRASIL, 1998, p. 63).
>
> Também neste quarto ciclo, os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria (BRASIL, 1998, p. 86).

Quanto ao que consta na última citação, discordamos que o trabalho com problemas de Geometria seja a *primeira vez* que aparecem a “necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo” e os próprios PCN se contradizem nesse ponto, pois, logo após aquela citação, trazem:

> Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. A busca da

> construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos (BRASIL, 1998. p. 86).

Além disso, os PCN já mencionavam a presença da dedução no ciclo anterior, como já registramos.

- Nas orientações didáticas quanto a números e operações, especificamente em relação ao cálculo aritmético:

> A importância do estudo do cálculo, em suas diferentes modalidades, justifica-se também pelo fato de que é uma atividade básica para o desenvolvimento das capacidades cognitivas do aluno, visto que:
>
> - possibilita o exercício de capacidades como memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização (BRASIL, 1998, p. 114).

Observamos, portanto, a preocupação constante dos PCN em salientar que o desenvolvimento do raciocínio dedutivo no aluno deve fazer parte dos objetivos do ensino de Matemática no nível fundamental. No entanto, como relatamos anteriormente, tal objetivo nem sempre tem sido contemplado nas práticas dos professores.

Finalizando, quanto ao que se refere ao raciocínio dedutivo, deixamos aqui registradas algumas questões, a título de reflexão:

- O método de argumentação matemática é de conhecimento de todos os professores que atuam na Educação Básica?
- O método de argumentação matemática fez e ainda faz parte, efetivamente, da formação de todos os professores que atuam na Educação Básica?
- Os professores que atuam na Educação Básica consideram importante desenvolver o raciocínio dedutivo nos alunos? Em caso afirmativo, eles têm trabalhado em sala de aula de forma a atingir tal objetivo?
- Os atuais cursos de Licenciatura em Matemática estão menosprezando o método de argumentação matemática e tendendo a minimizá-lo em seus currículos?

Os PCN também dedicam muita atenção à argumentação em Matemática como um caminho que converge às demonstrações. No entanto, nosso entendimento sobre "argumentação em Matemática" difere do sentido que lá é dado ao termo.

Para nós, o método de argumentação matemática é o raciocínio dedutivo que, por sua vez, consiste em raciocínios matematicamente corretos (portanto completos), não necessariamente expressos de maneira formal e, tanto quanto possível, coerentes com o nível de ensino com o qual estamos trabalhando.

Para os PCN a argumentação é apenas uma forma de convencer o outro através de argumentos "pertinentes", visando "ao plausível", chegando a deixar implícito que a intuição já é suficiente:

> A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la.
>
> Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração.
>
> Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração.
>
> Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas (BRASIL, 1998, p. 70-1).

Reiteramos que argumentos *plausíveis* ou *pertinentes* não necessariamente contemplam o método de argumentação matemática. A intuição é obviamente um argumento plausível, mas muitas vezes ela nos engana! Como exemplo, sobre um assunto de ensino fundamental, citamos: é completamente plausível/pertinente/aceitável/intuitivo pensar-se, em um primeiro momento, que se um número inteiro é divisível por r e por s então é também divisível por $r \times s$. No entanto, não se pode parar por aí. De fato, essa afirmação é em muitos casos verdadeira, mas, também, é falsa em muitos casos (por exemplo, 24 é divisível por 2 e por 8; porém, não é divisível por $16 = 2 \times 8$). De fato, prova-se que ela é verdadeira sempre que r e s são relativamente primos. Outro exemplo, agora sobre assunto de ensino médio: é intuitivo imaginar que não é possível contar todos os elementos do conjunto dos números racionais não-negativos, devido à sua densidade[1]. No entanto, prova-se que esse conjunto é enumerável, apesar de denso[2]. Mais um exemplo: é intuitivo pensar-se que há mais números naturais do que números pares, pois nossa experiência com conjuntos finitos respalda a ideia que qualquer parte própria de um conjunto tem menos elementos do que o conjunto todo[3]. Porém, estamos tratando de conjuntos infinitos e prova-se que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números pares e o conjunto dos números naturais. Portanto, ambos os conjuntos têm a mesma cardinalidade.

Argumentação, no sentido dado pelos PCN, está apenas premiando *intuição*, o que pode induzir a um erro, como nos exemplos citados. Por esse motivo, os professores nunca devem se contentar só com o *plausível*, o *intuitivo*, o *pertinente*, devendo convencer os alunos das limitações destes métodos de argumentação matemática. E isso deve ser feito em todos os ciclos, inclusive nas séries iniciais.

Assim, devemos ir *além* do intuitivo, do pertinente, do plausível, sempre que a discussão permitir, realizando uma demonstração ou mostrando contraexemplos para os resultados que são falsos, sempre dentro do nível em que se está trabalhando. Nos casos em que não é possível uma demonstração dentro deste nível, ainda assim devemos ir *além* do plausível, pelo menos informando aos alunos que é possível provar o resultado, mas que os argumentos dependem de um conhecimento matemático que no momento eles não têm.

Como exemplos de casos em que devemos seguir até o convencimento total, ou seja, a demonstração, citamos:

- “A soma de pares é par” numa quinta série;
- A prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ numa sétima ou oitava série.

Exemplos de casos em que só podemos (e devemos!) informar sobre o resultado, em qualquer nível da Educação Básica:

- A irracionalidade de π;
- O fato de ser constante o quociente entre o perímetro e o diâmetro de um círculo.

---

[1] Um conjunto totalmente ordenado é dito denso se entre quaisquer dois de seus elementos podemos encontrar um elemento deste conjunto. Simbolicamente: dados x, y elementos deste conjunto com $x < y$, existe no conjunto um elemento z satisfazendo $x < z < y$.

[2] Erro registrado em um livro didático aprovado pelo MEC: "*Como entre dois racionais sempre há um outro número racional, não é possível escrever todos os elementos do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.*"

[3] Ao questionar alunos do ensino fundamental sobre isso e eles responderam que a quantidade de pares é a metade da quantidade de naturais.

Mais adiante, dentro dos conteúdos propostos para o ensino de Matemática no quarto ciclo, fica implícita a ausência do método de argumentação matemática no conceito de argumentação dado nos PCN:

> Assim, esse trabalho terá continuidade no quarto ciclo, uma vez que a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações. Mesmo que a argumentação e a demonstração empreguem freqüentemente os mesmos conectivos lógicos, há exigências formais para uma demonstração em Matemática que podem não estar presentes numa argumentação. O refinamento das argumentações produzidas ocorrem gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações (BRASIL, 1998, p. 86).

Nosso ponto de vista é que os argumentos (e sua escrita) podem e devem evoluir, tornando-se mais refinados. Porém, devem ser sempre corretos sob o ponto de vista matemático, mesmo que não se utilizem de uma linguagem formal.

Para ilustrar o que consideramos raciocínios matematicamente incompletos (raciocínios que não contemplam o método de argumentação matemática) e o que consideramos raciocínios matematicamente completos e passíveis de serem apresentados no ensino fundamental, exemplificamos com a questão: A soma de dois números pares é sempre um número par?

- Raciocínio incompleto:

  2 + 4 = 6, 8 + 16 = 24, 10 + 18 = 28, *portanto* a soma de dois números pares é sempre par.

- Raciocínio completo a nível de quarta ou quinta série:

Números pares podem ser agrupados em duplas sem sobrar nada, de modo que ao somarmos dois números pares, vamos apenas estar reunindo tais duplas, sem ainda sobrar nada. Portanto, a soma será um número par.

- Raciocínio completo a nível de sétima série:

Pode-se começar com o mesmo argumento da quarta/quinta série, mas não devemos nos contentar apenas com ele, porque agora se espera que os alunos, neste nível, dominem a linguagem das expressões algébricas (caso não a dominem, esse é um excelente exercício em que poderemos trabalhar, entre outras coisas, uma aplicação da distributividade). Assim, um número par pode ser escrito na forma $2n$, onde n é um número natural. Então a soma de dois números pares será representada por $2n+2m=2(n+m)$, que por sua vez é um número par, já que a soma de números naturais é um número natural. Portanto, a soma de dois pares é necessariamente um número par.

Outro exemplo diz respeito à propriedade da multiplicação de potências de mesma base: $a^m \times a^n = a^{m+n}$, para *m* e *n* naturais.

- Raciocínio incompleto:

É comum encontrarmos em livros didáticos a seguinte argumentação (esta foi retirada de um volume de sexta série):

Vamos estudar as propriedades para potências de mesma base.

Multiplicação de potências de mesma base

Observe as multiplicações:

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{(4 \cdot 4)}_{2 \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4)}_{3 \text{ fatores}} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{2+3 \to 5 \text{ fatores}} = 4^{2+3} = 4^5$$

$$(-3)^4 \cdot (-3)^2 = \underbrace{[(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)]}_{4 \text{ fatores}} \cdot \underbrace{[(-3) \cdot (-3)]}_{2 \text{ fatores}} =$$

$$= \underbrace{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}_{4+2 \to 6 \text{ fatores}} = (-3)^{4+2} = (-3)^6$$

Para multiplicar potências de mesma base, conserva-se a base e adicionam-se os expoentes.

- Raciocínio completo:

Em uma sexta série, poderíamos começar com argumentos iniciais do tipo: observe que

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{(4 \cdot 4)}_{2 \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4)}_{3 \text{ fatores}} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{2+3 \to 5 \text{ fatores}} = 4^{2+3} = 4^5,$$

e dar continuidade, escrevendo: em geral, seja qual for o número *a*,

$$a^3 \cdot a^2 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{3 \text{ fatores iguais a } a} \cdot \underbrace{(a \cdot a)}_{2 \text{ fatores iguais a } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{3+2 \text{ fatores iguais a } a} = a^{3+2}$$

e, sejam quais forem os naturais não-nulos *m* e *n,*

$$5^m \cdot 5^n = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5)}_{m \text{ fatores iguais a 5}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5)}_{n \text{ fatores iguais a 5}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{m+n \text{ fatores iguais a 5}} = 5^{m+n}$$

E, por fim, podemos retomar e concluir o argumento anterior, afirmando que estamos escrevendo um produto de m fatores iguais a a (que agora pode ser até um número racional) seguidos de n fatores iguais a a, o que, contando, totaliza $m + n$ fatores iguais a a, que pode ser escrito simbolicamente como:

Seja qual for o número a e sejam quais forem os naturais não-nulos m e n,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ fatores iguais a } a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ fatores iguais a } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ fatores iguais a } a} = a^{m+n}.$$

Salientamos que não estamos criticando atividades de experimentação. Como já dissemos, examinar exemplos particulares pode ser um caminho para construirmos conjecturas, o que já é um passo bastante importante e que é, muitas vezes, o início de um trabalho matemático. O que queremos aqui é chamar a atenção de que não devemos parar nossa argumentação nesse estágio, pois ela não contempla o raciocínio dedutivo completo, além de ser passível de produzir resultados incorretos.

A argumentação em Matemática, tanto sob nosso ponto de vista quanto dos PCN, justifica-se não somente pelo seu papel na construção dos conceitos matemáticos, mas também está presente na formação da cidadania. Assim, a argumentação matemática deve ser estimulada no ensino fundamental:

- Sob o ponto de vista dos PCN:

> Nesse aspecto, a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.
>
> Também é importante salientar que a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc. (BRASIL, 1998, p. 27).

- Sob nosso ponto de vista:

> (…) demonstrar teoremas elementares é educativo para a formação do estudante. Estimula o raciocínio e ensina a desenvolver o espírito crítico. Questionando fatos e corrigindo erros de argumentação, ajuda a formar cidadãos mais conscientes e argutos (LIMA, 2001, p. 293-4).

1.2 A ÁLGEBRA NOS PCN

Quanto à Álgebra tratada nos PCN, concentrar-nos-emos nos aspectos da interpretação dada às letras e nas relações entre as atividades algébricas e o desenvolvimento do método de argumentação matemática.

Antes, porém, convém destacar que, em diversos momentos, os PCN mencionam “regras para a resolução de equações” ou “regras para o manuseio de expressões”. Essas passagens dos PCN, na nossa opinião, podem acarretar interpretações equivocadas:

> (...) Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p. 50-1).

Nessa passagem, observamos que os PCN não deixam explícito o que querem dizer com a frase “compreenderá a ‘sintaxe’ (regras para resolução) de uma equação”. Além disso, a simples exploração de situações-problema pode não ser suficiente para que os alunos consigam compreender a sintaxe de uma equação, sem que sejam estimulados a encontrar justificativas matemáticas para tal sintaxe. Igualmente, manipular cegamente regras arbitrárias sem que sejam dadas justificativas matemáticas para essas regras também pode não ser suficiente para a compreensão. É preciso um trabalho articulado entre resolução de situações-problema e generalização e abstração dos conceitos e procedimentos a fim de que tais conceitos e procedimentos possam ser novamente utilizados na exploração de outras situações-problema.

Mais adiante, dentro dos objetivos para o terceiro ciclo, os PCN amenizam uma possível má interpretação de nossa parte, bem como de alguns autores de livros didáticos, quanto ao significado da expressão “sintaxe (regras para resolução) de uma equação”:

> * reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
>
> *utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).

Nesse ponto os PCN chamam a atenção para a importância das propriedades das operações. Assim, a Álgebra cumpriria a dupla função de generalizar procedimentos aritméticos ao mesmo tempo em que as operações com expressões algébricas poderiam ser explicadas pelas propriedades das operações aritméticas. Segundo nossa visão, essa passagem do texto deveria ter sido não só antecipada (por exemplo, quando tratou de números e operações) como até enfatizada, evitando assim, algum mal-entendido[4]. No entanto, mais adiante, retomam o termo "regra":

> O trabalho com a Álgebra, neste [quarto] ciclo, tem como ponto de partida a "pré-álgebra", desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações.
>
> Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação (p. 84).

Nessa passagem, reiteramos nossa convicção de que o *conhecimento* da sintaxe de uma equação não necessariamente envolve a *compreensão* da sintaxe de uma equação. Dessa forma, mesmo que não seja a intenção dos PCN, podemos interpretar o "compreender" as regras, citado anteriormente, como sinônimo de "decorar as regras". O que queremos alertar é que os alunos podem utilizar mecanicamente as regras, sem ter um conhecimento dos motivos pelos quais tais regras funcionam. Por exemplo, encontra-se em alguns livros didáticos a simples citação da regra: só podemos somar (subtrair) termos semelhantes e isso é feito somando-se (subtraindo-se) os coeficientes e mantendo a parte literal. Não concordamos que possa ser chamado de "compreensão" o fato de um aluno utilizar essa regra, ainda que corretamente, sem que ela tenha sido justificada a partir das propriedades das operações com números.

Dando sequência, dentro dos conteúdos específicos de Álgebra, os PCN mencionam regras para o manuseio de expressões, o que chama de cálculo algébrico:

> Iniciar o estudo da sintaxe que o aluno está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com

[4] Salientamos que este mal-entendido existe, e está registrado em alguns livros didáticos, como teremos a oportunidade de exemplificar.

> regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 118).

O que significa "estudo da sintaxe"? Por que não ser bem específico e dizer "construir a sintaxe através das propriedades das operações aritméticas elementares?" Novamente, no nosso ponto de vista, o texto está dando margem a interpretações equivocadas e autorizando autores de livros didáticos e professores a darem tal encaminhamento ao conteúdo expressões algébricas.

Voltemo-nos agora ao objetivo de discutir os aspectos da interpretação dada às letras em expressões algébricas. Em diversas passagens, os PCN confirmam que as letras em Álgebra estão representando números:

> (...) É suficiente nesse [terceiro] ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo (BRASIL, 1998, p. 68).
>
> O trabalho com a Álgebra, neste [quarto] ciclo, tem como ponto de partida a "pré-álgebra", desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações.
>
> Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas).
>
> Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação.
>
> O trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas da tendência central de uma pesquisa (BRASIL, 1998, p. 84).

Nessas passagens, nota-se como a Álgebra está lidando exclusivamente com números, sendo que as letras em expressões algébricas assumem o papel de variáveis, incógnitas ou parâmetros.

Assim, entendendo as letras em expressões algébricas como uma forma de representar genericamente os números, ressaltamos que os PCN, neste momento, perdem uma excelente oportunidade de enfatizar as propriedades das operações numéricas a fim de justificar os procedimentos de cálculo algébrico, sendo incoerentes suas próprias orientações contidas na seguinte passagem:

> O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos (BRASIL, 1998, p. 22-23).

Por esse motivo, as propriedades das operações aritméticas devem ser enfaticamente trabalhadas desde as séries iniciais, objetivando, nessas séries, o cálculo mental e, a partir da quinta série, além deste, também o cálculo algébrico e concordando plenamente com os objetivos propostos nos PCN:

> **Objetivos de Matemática para o primeiro ciclo**
> Nesse ciclo, o ensino de Matemática deve levar o aluno a:
>
> - Desenvolver procedimentos de cálculo – mental, exato, escrito, aproximado – pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados (BRASIL, 1997, p. 47).
>
> **Objetivos de Matemática para o segundo ciclo**
> Neste ciclo, o ensino de Matemática deve levar o aluno a:
>
> - Ampliar os procedimentos de cálculo - mental, escrito, exato, aproximado - pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados (BRASIL, 1997, p. 56).
>
> **Objetivos de Matemática para o terceiro ciclo**
> Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento:
>
> - Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> * reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;

> * utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).
>
> **Objetivos de Matemática para o quarto ciclo**
> Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento:
>
> - Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> * produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades -, identificando as equações, inequações e sistemas;
> * resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> * observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis (BRASIL, 1998, p. 81).

Repetindo que no ensino fundamental é suficiente (matemática e psicologicamente) que as letras em Álgebra representem números, observamos um excesso e uma inadequação nos PCN quando trazem como orientação que os professores trabalhem, nesse nível, as seguintes *quatro* dimensões da Álgebra de acordo com o uso das letras:

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

> Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões ao longo dos terceiro e quarto ciclos (BRASIL, 1998, p.116-7).

Concordamos que as três primeiras dimensões da Álgebra devam ser trabalhadas de forma articulada no ensino fundamental. Porém, discordamos totalmente da quarta dimensão proposta – estrutural – a qual interpretamos, da única maneira que nos ocorreu, como se referindo a *polinômios* e *indeterminadas*, conceitos não compatíveis com a maturidade intelectual de um aluno de ensino fundamental (veja o Capítulo 2 POLINÔMIOS).

Salientamos que não somos apenas nós que estamos dando à “dimensão estrutural” da Álgebra a interpretação de polinômios e de indeterminadas. Vários autores de livros didáticos também estão tendo a mesma interpretação no ensino fundamental, quando apresentam, por exemplo, a divisão euclidiana de polinômios, quando simplificam frações algébricas sem dar atenção aos valores que anulam o denominador ou quando afirmam que as operações envolvendo expressões algébricas podem ser feitas sem levar em consideração o que elas estão significando (veja Capítulo 3 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS - Seção 3.5).

Ousamos aqui imaginar que o quadro citado tenha sido sugerido pelo artigo *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables*, de Zalman Usiskin, onde é mencionada tal interpretação sobre as concepções da Álgebra e que se encontra nas referências bibliográficas dos PCN. No entanto, neste artigo fica claro que a concepção estrutural mencionada faz parte de conteúdos do ensino médio (High School).

Caberia aqui a pergunta: existe alguma situação, em relação à Álgebra do ensino fundamental, em que é necessário que as letras sejam interpretadas como indeterminada? Da análise dos PCN, exceto pelo quadro anterior, não encontramos qualquer motivo para nos referirmos às letras como indeterminadas nesta etapa da Educação Básica (aliás, o termo “polinômio” nunca é mencionado nos PCN para o ensino fundamental). Portanto, não achamos justificativa para a inclusão da quarta coluna no quadro como orientação ao ensino fundamental.

Nos Capítulos 2 e 3, ficará mais bem esclarecida nossa convicção sobre a inadequação da introdução do conceito de polinômio no ensino fundamental, ou equivalentemente, de letra como símbolo abstrato.

Como defendemos aqui também a ideia de que as operações envolvendo expressões algébricas polinomiais podem ser explicadas pelas propriedades das operações com números, não são necessários uma nova definição nem o estabelecimento de “regras” para aquelas operações, coisa que de fato é sugerido em vários momentos nos PCN.

Retornemos agora ao objetivo de discutir a relação entre a atividade algébrica e o desenvolvimento do método de argumentação matemática. Segundo os PCN,

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas (BRASIL, 1998, p.50).

Consideramos que não só é possível como muito relevante desenvolver alguns aspectos da Álgebra desde as séries iniciais, estimulando a argumentação matemática a partir desse nível de ensino e buscando a preparação dos alunos para o raciocínio dedutivo.

A Álgebra no ensino fundamental tem forte relação com o desenvolvimento do método de argumentação matemática. Através do uso de letras como representantes de números quaisquer, podemos estabelecer resultados da aritmética (não estamos aqui neste trabalho focando a Geometria) e justificá-los recorrendo a um raciocínio genérico. Alusões a relações dessa natureza são encontradas nos PCN:

> Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas) (BRASIL, 1998, p. 84).

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BRASIL, 1998, p. 115).

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar "abstratamente", se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados (BRASIL, 1998, p. 117).

Reconhecemos nos três parágrafos acima a ênfase no método de argumentação matemática, o qual envolve generalizar, abstrair, pensar abstratamente, demonstrar. Acreditamos também fortemente na afirmação de que o aluno tem sim, em qualquer nível, capacidade de responder a perguntas de caráter genérico quando essas forem adequadas ao seu nível.

2 POLINÔMIOS

Em diversos livros de Álgebra de terceiro grau, os polinômios (digamos, na indeterminada X e com coeficientes reais) são definidos como seqüências quase-nulas[1] de números reais. Somente depois de definidas as operações de adição e multiplicação e provada a estrutura de anel que tem o conjunto de tais polinômios, é que introduz-se a notação X para uma dessas sequências e deduz-se quem seriam as potências de X, bem como a expressão geral de um polinômio,

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

em termos de tais potências. Obviamente, trabalhar-se com seqüências quase-nulas e com uma definição nada natural de multiplicação na Educação Básica não é aconselhável. Então, tenta-se introduzir polinômios fazendo-se uso diretamente da notação

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

Porém, essa notação também tem as suas dificuldades e detalhes que não são discutidos na grande maioria dos livros didáticos.

Um dos objetivos do presente capítulo é esclarecer várias imprecisões encontradas na maioria dos textos sobre polinômios quando estes não são introduzidos via seqüências quase-nulas. É o caso, por exemplo, dos livros didáticos.

Além disso, nosso objetivo aqui também é evidenciar o quão abstrato é o assunto "polinômios" para um aluno de ensino fundamental, se nosso interesse é que seu aprendizado envolva uma efetiva compreensão dos conceitos e procedimentos e não simplesmente uma repetição de receitas decoradas para o momento das avaliações.

Paralelamente, este capítulo pode servir também a um professor da Educação Básica como *referência matemática* para o conteúdo de polinômios, mas não como um *texto didático* passível de ser usado em sala de aula da Educação Básica.

Definição 1 (definindo polinômio): Um *polinômio na indeterminada X* e com coeficientes em um conjunto numérico A é uma "expressão matemática simbólica" que tem a forma

---

[1] Ao leitor interessado em uma introdução a polinômios desta forma, recomendamos os livros *Elementos de Álgebra* de A. Garcia e Y. Lequain, Projeto Euclides, IMPA, 2005, e *Elementos de Álgebra* de L. H. Jacy Monteiro, IMPA, 1974.

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X^1 + a_0,$$

ou simplesmente

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0, \qquad (1)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_2, a_1, a_0 \ \in A$, são chamados *coeficientes do polinômio.*

Assim, explicitar um polinômio com coeficientes em *A* significa explicitar o valor de *n* e a lista $a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_2, a_1, a_0$ de coeficientes. O primeiro cuidado então que precisamos ter é com a definição de polinômio nulo.

Definição 2 (definindo polinômio nulo): Se o número zero faz parte do conjunto numérico *A*, qualquer expressão da forma (1) com todos os coeficientes iguais a zero é chamada de *polinômio nulo*.

Salientamos que existem, então, várias representações para o polinômio nulo:

$$0, \quad 0X + 0, \quad 0X^2 + 0X + 0, \text{ etc.},$$

pois nos resta ainda a liberdade para o valor do natural *n* na Definição 1. Analogamente, quando $n = 0$, ou quando os coeficientes são todos nulos com exceção talvez de a_0, a expressão obtida é denominada *polinômio constante.*

Para facilitar nossa redação, vamos adiantar uma propriedade que, afinal, vai existir entre os conjuntos numéricos que nos interessam neste capítulo (anéis ou corpos), introduzindo a seguinte

Convenção 1: No que segue, vamos supor que o número zero pertence ao conjunto numérico *A*.

Definição 3 (definindo grau de um polinômio não-nulo): Se (1) representa um polinômio não-nulo, o maior natural *s* para o qual a_s é diferente de zero é dito o *grau do polinômio*.

Por exemplo, o polinômio $0X^4 + \frac{5}{2}X^3 + (-15)X^2 + \sqrt{2}X + 1$ tem grau 3, enquanto que o polinômio constante $0X^4 + 0X^3 + 0X^2 + 0X + 3$ tem grau zero.

Definição 4 (definindo igualdade de polinômios): Dizemos que dois polinômios

$$a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \qquad \text{e} \qquad b_mX^m + \cdots + b_2X^2 + b_1X + b_0,$$

são iguais quando

- ou ambos representam o polinômio nulo,
- ou são ambos não-nulos, mas de mesmo grau (digamos, s) e ainda $a_i = b_i$, para $0 \le i \le s$.

Assim, por exemplo, são iguais os polinômios

$$0X^4 + 5X^3 + (-15)X^2 + 1X + 1 \text{ e } 0X^5 + 0X^4 + 5X^3 + (-15)X^2 + 1X + 1,$$

pois são ambos de grau 3 e os respectivos coeficientes são iguais, para $0 \le i \le 3$.

Com isso, podemos "completar com zeros" um polinômio tanto quanto quisermos, sem alterá-lo. Por exemplo, são iguais os polinômios $5X^3 + (-15)X^2 + 1X + 1$ e $0X^7 + 0X^6 + 0X^5 + 0X^4 + 5X^3 + (-15)X^2 + 1X + 1$. Faremos uso deste recurso adiante, mencionando apenas a expressão "completando com zeros" [2].

Observação 1: Salientamos que as notações X, X^2, X^3, etc. são, por enquanto, apenas símbolos distintos e não podem ainda ser interpretados como potências de *X*, simplesmente porque

- *X* não está representando um número
  e
- ainda não definimos operações com polinômios.

Reforçando: só teremos

[2] Pode estar ocorrendo ao leitor neste momento a seguinte reflexão: a partir da Definição 4, por exemplo os polinômios $5X^3 + 0X^2 + 1X + 1$ e $5X^3 + bX^2 + 1X + 1$ só serão iguais se *b* for igual a zero. Assim, poderíamos a esta altura também convencionar que coeficientes iguais a zero podem ser omitidos (e não só os primeiros zeros, como dito acima), sem causar nenhuma ambigüidade. Em outras palavras, poderíamos neste ponto convencionar também que se uma componente a_iX^i tem coeficiente a_i igual a zero então ela pode ser omitida da expressão que define o polinômio, escrevendo-se, por exemplo, no lugar de $5X^3 + 0X^2 + 1X + 1$ simplesmente $5X^3 + 1X + 1$. A vantagem imediata com tal convenção seria poder introduzir neste momento a nomenclatura *monômio*. No entanto, salientamos que, se fizermos esta convenção *antes* da demonstração das propriedades das operações entre polinômios, teremos que, ao prová-las, comprovar que tais propriedades são compatíveis com tal convenção (por exemplo, mostrar que calcular um produto trabalhando com um fator igual a $5X^3 + 0X^2 + 1X + 1$ nos dará o mesmo resultado que trabalhando com um fator igual a $5X^3 + 1X + 1$). Assim, só omitiremos a componente $0X^2$ em $5X^3 + 0X^2 + 1X + 1$ depois de termos construído o *anel de* polinômios, quando então mostraremos que, com tal omissão, não é gerada nenhuma ambigüidade (veja Convenção 2).

$$X^i \cdot X^j = X^{i+j}$$

depois que definirmos operações com polinômios, aprendendo assim a operar com expressões que envolvem uma indeterminada (que, salientamos novamente, *não é um número*!).

Pela mesma razão, também aqui o símbolo "+" na expressão simbólica (1) não representa, por enquanto, uma adição, ou seja, a rigor, as expressões $a_i X^i$, com $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ não são parcelas de uma adição nem $a_i X^i$ representa, por enquanto, um produto [3].

Observação 2: Os símbolos X, X^2, X^3, etc. podem, sim, ser interpretados como uma maneira de "marcar o lugar dos coeficientes", isto é, marcar a ordem na qual estamos listando os coeficientes, bem como a quantidade deles. Assim, poderíamos ter definido como polinômio uma expressão da forma

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, 0, \ldots.) \qquad (2)$$

que é, precisamente, o que chamamos de "sequências quase-nulas" de elementos de *A*.

Notações: Antes de começarmos a falar sobre operações com polinômios, será útil introduzirmos algumas notações:

- quando não forem relevantes os coeficientes de um polinômio ou o seu grau (no caso de ele ser não nulo), utilizaremos simplesmente a notação $p(X)$;
- o grau de um polinômio não-nulo $p(X)$ será denotado por $\partial p(X)$;
- denotaremos por $A[X]$ o conjunto de todos os polinômios na indeterminada *X* e com coeficientes no conjunto numérico *A*, isto é:

$$A[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } a_n, \ldots, a_0 \in A\}.$$

Para definir operações entre polinômios, precisamos, entre outras coisas, garantir que, ao operar dois elementos de $A[X]$, ainda obtenhamos um elemento de $A[X]$. Assim, o conjunto numérico *A* tem que "suportar" algumas operações. É comum então considerar-se o conjunto numérico *A* tendo *no mínimo* a estrutura de *anel*, o que de fato é o que fazemos na

[3] E por isso foram chamadas por nós, na nota de rodapé 2, de "componentes" e não de "parcelas".

Educação Básica: lá, os polinômios sempre têm coeficientes inteiros ou racionais ou reais ou complexos. Daí é possível definir-se adição e multiplicação em $A[X]$.

Relembramos aqui as definições de anel, domínio de integridade e corpo:

Definição 5 (definindo anel): Seja A um conjunto numérico munido de duas operações (que aqui denotaremos por $+_A$ e $\times_A$). Dizemos que a estrutura $(A, +_A, \times_A)$ é um *anel* se, para todos $a, b, c \in A$, temos:

i) $+_A$ é comutativa, isto é, $a +_A b = b +_A a$.

ii) $+_A$ é associativa, isto é, $(a +_A b) +_A c = a +_A (b +_A c)$.

iii) $+_A$ admite elemento neutro, isto é, existe um elemento $e \in A$ tal que

$a +_A e = a$ para todo $a \in A$.

iv) $+_A$ admite simétricos, isto é, para cada $a \in A$ existe um elemento $s_a \in A$ tal que

$a +_A s_a = e$ para todo $a \in A$.

v) $\times_A$ é associativa, isto é, $(a \times_A b) \times_A c = a \times_A (b \times_A c)$.

vi) $\times_A$ é distributiva em relação a $+_A$, isto é, $a \times_A (b +_A c) = a \times_A b +_A a \times_A c$ e $(b +_A c) \times_A a = b \times_A a +_A c \times_A a$.

Se, além disso,

vii) $\times_A$ é comutativa, isto é, $a \times_A b = b \times_A a$, então dizemos que $(A, +_A, \times_A)$ é um anel comutativo;

viii) $\times_A$ admite elemento neutro, isto é, existe um elemento $n \in A$ $\quad a \times_A n = n \times_A a = a$ para todo $a \in A$, então dizemos que $(A, +_A, \times_A)$ é um anel com unidade.

É possível provar que num anel $(A, +_A, \times_A)$ os elementos neutros são únicos (por isso são denotados por 0_A e 1_A sem ambiguidade, ou, simplesmente, 0 e 1), bem como é único o simétrico de um elemento $x \in A$ (sendo o mesmo, por isso, denotado por $-x$ sem ambiguidade). Prova-se também que para todo $a \in A$ vale $a \times_A 0_A = 0_A \times_A a = 0_A$. Não faremos essas demonstrações aqui, podendo o leitor encontrá-las em qualquer livro que aborde teoria de Anéis.

Na verdade, os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, munidos das operações usuais de adição e multiplicação, possuem uma estrutura mais específica ainda: são *domínios de integridade*.

Definição 6 (definindo domínio de integridade): Um *domínio de integridade* é um anel comutativo com unidade $(A, +_A, \times_A)$ que não possui divisores de zero além do trivial. Ou seja, se $a, b \in A$ são tais que $a \times_A b = 0_A$, então $a = 0_A$ ou $b = 0_A$.

Um exemplo de estrutura que não é domínio de integridade é o anel dos inteiros módulo 6, usualmente denotado por $\mathbb{Z}_6$. Nesse anel temos, por exemplo, $\overline{2} \times \overline{3} = \overline{0}$, sendo que $\overline{2} \neq \overline{0}$ e $\overline{3} \neq \overline{0}$.

Apesar de os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ serem exemplos de domínio de integridade, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ têm uma propriedade a mais que o domínio $\mathbb{Z}$ e que os torna exemplos de *corpos*:

Definição 7 (definindo corpo): Um *corpo* é um anel comutativo com unidade $(A, +_A, \times_A)$ onde cada elemento a diferente do neutro aditivo 0_A possui um inverso multiplicativo, isto é, para cada $a \neq 0_A \in A$ existe um elemento $y_a \in A$ tal que $a \times_A y_a = 1_A$.

Prova-se que num corpo o inverso multiplicativo de cada elemento não-nulo a é único, e por isso podemos denotá-lo, sem ambiguidade, por a^{-1}. A demonstração da unicidade de inverso e da unicidade de simétrico são ambas feitas de forma análoga e podem ser encontradas em qualquer livro que aborde teoria de Anéis.

Definição 8 (definindo elemento invertível em um anel com unidade): Seja $(A, +_A, \times_A)$ um anel com unidade e $a \in A$ um elemento diferente do neutro aditivo 0_A. Dizemos que a é *invertível*, se existe $b \in A$ tal que $a \times_A b = b \times_A a = 1_A$.

Com a Definição 8 podemos então dizer que um *corpo* é um anel onde todo elemento diferente do neutro aditivo é invertível.

Mais tarde, no presente texto, precisaremos da seguinte propriedade:

Proposição 1: Todo corpo é um domínio de integridade

Demonstração: Queremos demonstrar que se K é um corpo e se $a, b \in K$ são tais que $a \times_K b = 0_K$, então $a = 0_K$ ou $b = 0_K$.

Suponhamos que $a \neq 0_K$. Então, existe $a^{-1} \in K$, pois K é corpo. Daí, como $a^{-1} \times_K a = 1_K$ e $a \times_K b = 0_K$, temos, fazendo uso da associatividade da $\times_K$,

$$b = 1_K \times_K b = \left(a^{-1} \times_K a\right) \times_K b = a^{-1} \times_K \left(a \times_K b\right) = a^{-1} \times_K 0_k = 0_k \,.$$

Logo, se $a \times_K b = 0_K$, com $a \neq 0_K$, então necessariamente $b = 0_K$. Ou seja, se $a \times_K b = 0_K$, então $a = 0_K$ ou $b = 0_K$. Portanto K é domínio de integridade. □

Agora sim podemos definir operações entre polinômios.

Definição 9 (definindo operações entre polinômios): Se a estrutura $(A, +_A, \times_A)$ faz sentido (isto é, se a adição e a multiplicação são operações em A) então é possível definir em $A[X]$ uma adição e uma multiplicação da seguinte forma:

Dados $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ e $q(X) = b_m X^m + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0$, dois polinômios de $A[X]$, definimos:

- *a soma* $p(X) \oplus q(X)$, *dos polinômios* $p(X)$ *e* $q(X)$ como sendo o polinômio

$$p(X) \oplus q(X) = c_s X^s + c_{s-1} X^{s-1} + \cdots + c_2 X^2 + c_1 X + c_0 \,,$$

onde $c_k = a_k +_A b_k$ para cada $0 \leq k \leq s$ sendo $s = \max\{m, n\}$ e onde completamos um dos polinômios com zeros, caso necessário (isto é, caso ocorra $m \neq n$), conforme comentário após a Definição 4.

- *o produto* $p(X) \otimes q(X)$ *dos polinômios* $p(X)$ *e* $q(X)$ como sendo o polinômio

$$p(X) \otimes q(X) = c_{n+m} X^{n+m} + \cdots + c_2 X^2 + c_1 X + c_0 \,,$$

onde, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n+m\}$,

$$c_k = a_0 \times_A b_k +_A a_1 \times_A b_{k-1} +_A \cdots +_A a_k \times_A b_0 = \sum_{\substack{r+s=k \\ r \in \{0,\ldots,n\} \\ s \in \{0,\ldots,m\}}} a_r \times_A b_s \,,$$

ou simplesmente

$$c_k = a_0 \times_A b_k +_A a_1 \times_A b_{k-1} +_A \cdots +_A a_k \times_A b_0 = \sum_{r+s=k} a_r \times_A b_s \,,$$

ficando, neste caso, subentendido que $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $s \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Por exemplo, se $n = 2$ e $m = 4$ então

$$c_5 = a_1 \times_A b_4 +_A a_2 \times_A b_3.$$

Ficam assim definidas operações de adição $\oplus$ e multiplicação $\otimes$ no conjunto $A[X]$ a partir de operações que existem no conjunto *A*.

Antes de nos preocuparmos com a estrutura de $(A[X], \oplus, \otimes)$, chamamos a atenção do leitor para o fato de que, assim como no conjunto dos números inteiros (onde temos três significados diferentes para o sinal "$-$" [4]), temos, até o momento, três significados distintos para "soma" e que estão sendo, por ora, denotados também de maneiras distintas: +, $+_A$ e $\oplus$ para justamente ressaltar este fato. Também temos dois significados para "produto", com as respectivas notações diferenciadoras $\times_A$ e $\otimes$, além do produto sugestionado por uma expressão do tipo $a_i X^i$. Não é comum fazermos uso de notações diferentes para estes diferentes significados. De fato, todas elas podem ser encaradas como operações com polinômios, mas este detalhe nunca é salientado nos livros. Provar este fato passa a ser então a nossa próxima preocupação.

Ressaltamos, porém, que não estamos querendo sugerir ao professor que as utilize em sua sala de aula na Educação Básica, mas sim que tenha consciência de que eventuais confusões dos seus alunos podem ser provenientes precisamente do fato de se utilizar o mesmo sinal de operação em contextos diferentes da aritmética elementar. Neste caso, aí sim, tais diferentes significados deveriam ser mais discutidos.

Por questões de clareza, nos próximos exemplos e resultados ainda manteremos tais diferentes notações, e só depois das Convenções 2 e 3 e da Observação 6 adiante, que provam a afirmação de que todas as diferentes notações podem ser encaradas como operações com polinômios é que passaremos a dispensá-las.

Proposição 2: Se $(A, +_A, \times_A)$ é um anel (comutativo com unidade), então a estrutura $(A[X], \oplus, \otimes)$ é um anel (comutativo com unidade).

Demonstração: Para provarmos que $(A[X], \oplus, \otimes)$ é um anel (comutativo com unidade), precisamos provar que valem as propriedades listadas na Definição 5.

---

[4] Em minha experiência como professor no ensino fundamental, já testemunhei que confusões com o significado do sinal "-" de fato ocorrem quando do estudo dos números inteiros, pois ora ele faz parte do "nome" do número, ora indica o oposto (simétrico) de um número e ora indica a operação de subtração.

É fácil se convencer que a validade, em $A[X]$, das propriedades (*i*), (*ii*), (*v*), (*vi*) e (*vii*) definidoras de anel comutativo com unidade se amparam na validade das mesmas propriedades enunciadas para os coeficientes (que, por sua vez, pertencem ao anel *A*). Ilustramos este aspecto com a demonstração da propriedade (*i*), deixando a verificação das demais propriedades a cargo do leitor:

i) Sejam $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ e $q(X) = b_m X^m + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0$ pertencentes a $A[X]$. Para facilitar a escrita, vamos completar com zeros, se necessário, e considerar $n = m$. Então:

$$\begin{aligned} p(X) \oplus q(X) &= (a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0) \oplus (b_n X^n + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0) \\ &= (a_n +_A b_n) X^n + \cdots + (a_2 +_A b_2) X^2 + (a_1 +_A b_1) X + (a_0 +_A b_0) \\ &= (b_n +_A a_n) X^n \cdots + (b_2 +_A a_2) X^2 + (b_1 +_A a_1) X + (b_0 +_A a_0) \\ &= (b_n X^n + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0) \oplus (a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0) \\ &= q(X) \oplus p(X), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade se justifica porque os coeficientes dos polinômios pertencem ao anel *A* e a operação $+_A$ é por hipótese comutativa em *A*. A segunda e a quarta igualdades são justificadas simplesmente pela definição de adição de polinômios.

Falta-nos ainda verificar as propriedades (*iii*), (*iv*) e (*viii*). Para isso, afirmamos (e é fácil verificar) que o polinômio nulo serve como elemento neutro de $\oplus$ em $A[X]$, seja qual for a representação que escolhamos para ele. Além disso, o polinômio $(-a_n)X^n + \cdots + (-a_2)X^2 + (-a_1)X + (-a_0) \in A[X]$ é o simétrico do polinômio $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in A[X]$ em relação à $\oplus$, sendo por isso denotado por $-p(X)$. Afirmamos também que se 1_A denota o neutro multiplicativo do anel *A* então o polinômio constante $0X^m + \cdots + 0X^2 + 0X + 1_A$ (com *m* qualquer número natural não nulo) serve como elemento neutro multiplicativo de $A[X]$.

De fato,

$$(a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0) \otimes (0X^m + \cdots + 0X^2 + 0X + 1_A) = c_{n+m} X^{n+m} + \cdots + c_1 X + c_0$$

onde, para cada $k \in \{0, \ldots, n+m\}$, temos que

- se $k \leq n$ então

$$c_k = a_k \times_A 1_A = a_k$$

- se $k > n$ então

$$c_k = 0,$$

pois $r \leq n$ e $s = 0$ implica $r + s \leq n < k$, enquanto que, para $s > 0$, temos $b_s = 0$.

Portanto $c_{n+m} X^{n+m} + \cdots + c_1 X + c_0 = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$. □

As propriedades de anel nos permitem "aliviar" algumas notações.

Observação 3: Com a demonstração anterior e, se levarmos em conta que em todo anel o elemento neutro aditivo e o elemento neutro multiplicativo são únicos, temos outro argumento para justificar que todos os polinômios da forma $0X^m + \cdots + 0X^2 + 0X + 0$ são iguais, e passamos a usar a notação 0 para qualquer um deles. Também, a partir da definição de adição, temos que

$$\begin{aligned}
&0X^m + \cdots + 0X^{n+1} + a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \\
&= (0X^m + \cdots + 0X^{n+1} + 0X^n + \cdots + 0X + 0) \oplus (a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0) \\
&= 0 \oplus (a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0) = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.
\end{aligned}$$

Analogamente, todos os polinômios constantes da forma $0X^m + \cdots + 0X^2 + 0X + 1$ são iguais (veja também Definição 2) e passamos a usar a notação 1 para qualquer um deles.

A Observação 3 nos permite reescrever a soma de dois polinômios de uma forma mais simples (compare com a Definição 9):

Dados os polinômios $p(X)$ e $q(X)$ podemos escrevê-los, sem perda de generalidade (completando com zeros, se necessário), na forma

$$p(X) = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \quad \text{e} \quad q(X) = b_n X^n + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0.$$

Neste caso,

$$p(X) \oplus q(X) = (a_n +_A b_n) X^n + \cdots + (a_2 +_A b_2) X^2 + (a_1 +_A b_1) X + (a_0 +_A b_0).$$

No que segue, adotamos as seguintes convenções:

Convenção 2: Componentes de um polinômio que são da forma $a_i X^i$, mas cujos coeficientes são iguais a zero, podem ser omitidos.

Por exemplo, $2X^3 + 3X$ é apenas uma forma resumida de escrevermos $2X^3 + 0X^2 + 3X + 0$, que por sua vez também é a soma dos polinômios $2X^3 + 0X^2 + 0X + 0$ e $3X + 0$.

Convenção 3: Componentes de um polinômio que são da forma $1_A X^i$ podem ser escritos simplesmente como X^i.

Assim, por exemplo, $X^3 + X + 1$ passa a ser apenas uma forma resumida de escrevermos $1X^3 + 0X^2 + 1X + 1$.

Salientamos agora que, com as Convenções 2 e 3, então, teremos ainda a vantagem de podermos interpretar todos os símbolos +, $+_A$ e $\oplus$ como uma adição de polinômios. Da mesma forma, todos os símbolos $\times_A$ e $\otimes$, além do produto sugestionado por uma expressão do tipo $a_i X^i$ podem ser interpretados como uma multiplicação de polinômios. Em outras palavras, com tais convenções temos

$$a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = a_n \otimes X^n \oplus \cdots \oplus a_2 \otimes X^2 \oplus a_1 \otimes X \oplus a_0 .$$

De fato, pelas Convenções 2 e 3 e, considerando o polinômio constante a_i, temos

$$a_i \otimes X^i = a_i \otimes (1_A X^i + 0X^{i-1} + 0X^{i-2} + \cdots + 0X + 0) = c_i X^i + c_{i-1} X^{i-1} + \cdots + c_1 X + c_0,$$

onde, para cada $k \in \{0, 1, 2, \ldots, i-1\}$, $c_k = a_i \times_A 0$, enquanto que $c_i = a_i \times_A 1_A = a_i$; assim, novamente pela Convenção 2,

$$a_i \otimes X^i = a_i X^i + 0X^{i-1} + 0X^{i-2} + \cdots + 0X + 0 = a_i X^i.$$

Ainda, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, pela Convenção 2,

$$\begin{aligned}
&(a_n X^n + \cdots + a_{k+1} X^{k+1}) \oplus (a_k X^k + \cdots + a_0) = \\
&(a_n X^n + \cdots + a_{k+1} X^{k+1} + 0X^k + \cdots + 0X + 0) \oplus (0X^n + \cdots + 0X^{k+1} + a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0) = \\
&(a_n +_A 0) X^n + \cdots + (a_{k+1} +_A 0) X^{k+1} + (0 +_A a_k) X^k + \cdots + (0 +_A a_1) X + (0 +_A a_0) = \\
&a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.
\end{aligned}$$

Também temos que

$$X^i \otimes X^j = X^{i+j} \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}$$

De fato, pelas Convenções 2 e 3,

$$X^i \otimes X^j = (1_A X^i + 0X^{i-1} + \cdots + 0X + 0) \otimes (1_A X^j + 0X^{j-1} + \cdots + 0X + 0) =$$
$$c_{i+j} X^{i+j} + c_{i+j-1} X^{i+j-1} + \cdots + c_1 X + c_0,$$

onde

$$c_{i+j} = 1_A \times_A 1_A = 1_A$$

e, para todo $k < i + j$, temos $c_k = 0$, pois sempre que $r + s = k < i + j$, temos ou $r < i$ (e portanto $a_r = 0$) ou $s < j$ (e portanto $b_s = 0$).

Como caso particular, temos $X^i = X \otimes X \otimes \cdots \otimes X$ (i fatores); concluímos assim que também cada superíndice utilizado em X em um polinômio pode sim ser interpretado como um expoente.

Finalmente, a partir da Convenção 2, é claro que

$$a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = a_n X^n \oplus \cdots \oplus a_2 X^2 \oplus a_1 X \oplus a_0$$

Observação 4: Como em um anel A todo elemento admite simétrico e este é único, é sempre possível definir-se em um anel a operação inversa da adição (denotando-a momentaneamente por $-_A$):

$$a -_A b = a +_A (-b)$$

Dessa forma, como o simétrico de $15X^2$ é o polinômio $(-15)X^2$, podemos escrever, por exemplo,

$$5X^3 + (-15)X^2 + 3X + 1 = 5X^3 \oplus (-15X^2) \oplus 3X \oplus 1 = 5X^3 -_{A[X]} 15X^2 + 3X + 1.$$

Uma vez devidamente justificados os diferentes significados de somas e produtos aqui trabalhados e uma vez aceitas as Convenções 2 e 3, vamos passar a denotar qualquer adição por “+” e qualquer multiplicação por “×” (ou simplesmente “·” ou a simples justaposição), ou seja, pelas notações que são usualmente utilizadas com polinômios na Educação Básica.

Como consequência das operações de adição e multiplicação de polinômios, temos a seguinte

Proposição 3: Seja $(A, +, \times)$ um domínio de integridade e sejam $p(X), q(X) \in A[X]$ não-nulos. Então:

a) Se $p(X)+q(X) \neq 0$, então $\partial(p(X)+q(X)) \leq \max\{\partial p(X), \partial q(X)\}$ (3)

b) $\partial(p(X)\times q(X)) = \partial p(X) + \partial q(X)$ (4)

Demonstração: Como $\partial p(X) = n$ e $\partial q(X) = m$, podemos escrever os polinômios na forma

$$p(X) = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \quad \text{e} \quad q(X) = b_m X^m + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0,$$

com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.

a) Como por hipótese $p(X)+q(X) \neq 0$, a Definição 9 nos garante que

$$\partial(p(X)+q(X)) \leq s = \max\{n, m\} = \max\{\partial p, \partial q\}.$$

b) Para o produto temos, também pela Definição 9,

$$p(X)\times q(X) = c_{n+m} X^{n+m} + \cdots + c_1 X + c_0,$$

onde $c_{m+n} = a_n \times b_m$. Mas como A é um domínio de integridade e como $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, concluímos que $c_{m+n} \neq 0$. Portanto, $\partial(p(X)\times q(X)) = m + n = \partial p(X) + \partial q(X)$, o que completa a prova. □

Observação 5: A condição de A ser domínio de integridade é central para que ocorra a igualdade

$$\partial(p(X)\times q(X)) = \partial p(X) + \partial q(X),$$

como podemos ver pelo seguinte exemplo no qual fazemos uso do anel $\mathbb{Z}_6$: consideremos os polinômios $p(X) = \bar{2} X^2 + \bar{3} X + \bar{1}$ e $q(X) = \bar{3} X + \bar{5}$ em $\mathbb{Z}_6[X]$. Como $\partial p(X) = 2$ e $\partial q(X) = 1$, temos

$$p(X)\times q(X) = (\bar{2}\times\bar{3})X^3 + (\bar{2}\times\bar{5}+\bar{3}\times\bar{3})X^2 + (\bar{3}\times\bar{5}+\bar{1}\times\bar{3})X + \bar{1}\times\bar{5}$$
$$= \bar{0}\,X^3 + \bar{1}\,X^2 + \bar{0}\,X + \bar{5},$$

e, portanto, $\partial\left(p(X)\times q(X)\right) = 2 < 2+1 = \partial p(X) + \partial q(X)$.

Como consequência imediata do item (*b*) da proposição anterior, deduzimos o:

Corolário 1: Se $(A, +, \times)$ é um domínio de integridade então $A[X]$ também o é.

Observação 6: Observe que exigimos, no enunciado da Proposição 3, que os polinômios sejam não-nulos. Para que as fórmulas lá enunciadas sejam válidas para *quaisquer* polinômios, é necessário atribuir um grau ao polinômio nulo. Afirmamos que isso realmente é viável se atribuirmos ao polinômio nulo o grau $-\infty$. Essa definição será útil ao tratarmos a divisão de polinômios.

Definição 10 (definindo o grau do polinômio nulo): Definimos o grau do polinômio nulo como $-\infty$, sendo que em $\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$ estendemos a relação de ordem definindo $-\infty < n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e com $-\infty$ somamos da seguinte forma:

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

e, para todo *m* natural,

$$(-\infty) + m = -\infty.$$

Lema 1: As fórmulas apresentadas em (3) e em (4) se generalizam para o polinômio nulo.

Demonstração:

- já sabemos que $0 + q(X) = q(X)$, de modo que, independente de ser ou não nulo o polinômio *q(X)*, temos

$$\partial(q(X)) = \partial(0 + q(X)) \leq \max\{-\infty, \partial(q(X))\} = \max\{\partial(0), \partial(q(X))\}$$

- como $0 \times q(x) = 0$, temos

$$\partial(0\times q(x)) = \partial(\,0) = -\infty = -\infty + \partial(q(X)) = \partial(0) + \partial(q(X)). \quad \square$$

Como mencionamos anteriormente, embora os coeficientes de um polinômio possam pertencer a um corpo *K*, a estrutura $K[X]$ nunca é corpo, e sim, no máximo, um domínio de integridade. Sendo assim, nem sempre é possível efetuar uma divisão exata entre polinômios e obter outro polinômio como resultado. No entanto, da mesma forma que ocorre em $\mathbb{Z}$, é possível definir uma divisão com resto em $K[X]$. Neste caso, o critério para "medir" o tamanho dos polinômios e garantir um resto "menor" do que o divisor é verificar o grau do polinômio obtido como resto. Tal resto será o polinômio nulo, caso em que a divisão é dita exata, ou será não-nulo e terá seu grau menor do que o grau do divisor, caso a divisão não seja exata.

Proposição 4 (Divisão euclidiana de polinômios): Sejam K um corpo e $p(X)$, $d(X)$ polinômios em $K[X]$, com $d(X) \neq 0$. Então existem únicos polinômios $q(X)$ e $r(X)$ em $K[X]$ tais que

$$p(X) = d(X)\,q(X) + r(X),$$

com $\partial r(X) < \partial d(X)$ [5].

Prova da existência:

Se $p(X)$ for o polinômio nulo, então basta tomar $q(X) = 0$ e $r(X) = 0$, pois, $0 = p(X) = d(X)0 + 0$ e, certamente, $-\infty = \partial r(X) < \partial d(X)$.

Suponhamos então, $p(X)$ não-nulo. Nestas condições, temos dois casos a considerar:

i. $\partial p(X) < \partial d(X)$
ii. $\partial p(X) \geq \partial d(X)$

No primeiro caso, basta tomarmos $q(X) = 0$ e $r(X) = p(X)$, pois, $p(X) = d(X)0 + p(X)$ e, certamente, $\partial r(X) < \partial d(X)$.

O segundo caso será provado por indução no grau de $p(X)$. Sejam $n = \partial p(X)$ e $m = \partial d(X)$. Se $n = 0$ então, $m = 0$, pois $d(X) \neq 0$. Assim, $p(X) = a_0$ e $d(X) = d_0$. Então,

---

[5] Note que, para a validade das fórmulas (3) e (4) acima, poderíamos também ter definido grau do polinômio nulo como sendo $+\infty$. No entanto, esta liberdade não se mantém se quisermos substituir a condição "$r(X) = 0$ ou $\partial r(X) < \partial d(X)$" simplesmente por $\partial r(X) < \partial d(X)$ como fizemos aqui.

$p(X) = d_0(a_0 d_0^{-1})$. Fazendo $q(X) = a_0 d_0^{-1}$ e $r(X) = 0$, temos que $p(X) = d(X)\,q(X) + r(X)$.

Suponhamos $n \geq 1$ e que a proposição vale para todo polinômio $g(X)$ em $K[X]$, com $\partial g(X) \leq n-1$.

Suponhamos também $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ e $d(X) = d_m X^m + \cdots + d_0$. Como $n \geq m$, está bem definido o polinômio

$$\begin{aligned} p_1(X) &= p(X) - a_n d_m^{-1} X^{n-m} d(X) \\ &= \left(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots a_0\right) - \left(a_n X^n + d_{m-1} a_n d_m^{-1} X^{n-1} + \cdots d_0 a_n d_m^{-1}\right) \\ &= \left(a_{n-1} - d_{m-1} a_n d_m^{-1}\right) X^{n-1} + \cdots + (a_0 - d_0 a_n d_m^{-1}). \end{aligned}$$

Temos, portanto, $\partial p_1(X) \leq n-1$. Pela hipótese de indução, $p_1(X) = d(X)\,q_1(X) + r(X)$, com $\partial r(X) < \partial d(X)$. Então, igualando as duas expressões para $p_1(X)$,

$$p(X) - a_n d_m^{-1} X^{n-m} d(X) = d(X) q_1(X) + r(X), \text{ donde}$$

$$p(X) = d(X)\left(a_n d_m^{-1} X^{n-m} + q_1(X)\right) + r(X).$$

Escolhendo $q(X) = a_n d_m^{-1} X^{n-m} + q_1(X)$, temos $p(X) = d(X)\,q(X) + r(X)$, com $\partial r(X) < \partial d(X)$.

Prova da unicidade:

Suponhamos que

$$p(X) = d(X)\,q(X) + r(X) = d(X) Q(X) + R(X),$$

onde $\partial d(X) = m$, com $\partial r(X) < \partial d(X)$ e $\partial R(X) < \partial d(X)$. Então,

$$d(X)[q(X) - Q(X)] = R(X) - r(X).$$

Suponhamos que $q(X) - Q(X) \neq 0$. Neste caso, como $K[X]$ é um domínio (veja Proposição 1 e Corolário 1), temos $R(X) - r(X) \neq 0$ e

$$\partial(R(X)-r(X)) = \partial\{d(X)[q(X)-Q(X)]\} = \partial(d(X)) + \partial(q(X)-Q(X)) \geq m\,,$$

pois $\partial(q(X)-Q(X)) \geq 0$. Por outro lado,

$$\partial[R(X)-r(X)] \leq \max\{\partial R(X), \partial r(X)\} < m\,,$$

o que é uma contradição. Logo, $q(X)-Q(X)=0$, o que implica $R(X)-r(X)=0$. Ou seja, $Q(X)=q(X)$ e $r(X)=R(X)$. □

Observação 7: Chamamos a atenção do leitor para o fato de que expressões do tipo $\dfrac{X^2+X}{X-1}$ não são polinômios. Esse tipo de expressão só faz sentido no corpo de frações de *K*[*X*], que é normalmente denotado por *K*(*X*), objeto ainda mais abstrato do que *K*[*X*] e que não iremos abordar aqui. Salientamos, ainda, que o símbolo de fração pode ser encarado como uma divisão apenas em corpos ou, se em anéis, somente nos casos em que o numerador é múltiplo do denominador, como, por exemplo, $\dfrac{X^2+X}{3X}$, o que nem sempre ocorre com polinômios, como acabamos de discutir. Neste caso, $\dfrac{X^2+X}{3X} = \dfrac{1}{3}X + \dfrac{1}{3}$, que é um polinômio em $\mathbb{Q}[X]$.

O algoritmo da divisão nos permite estudar fatoração de polinômios. É sobre esse assunto que passamos a tratar a partir de agora.

Fatorar em Matemática significa *escrever fazendo uso de fatores*, ou seja, *fatorar* significa escrever na forma de produto, questão que pode ser considerada em qualquer estrutura que admita uma operação de multiplicação. Em termos de divisão, fatorar se traduz em realizar uma divisão exata.

Definição 11 (definindo fatoração trivial): Seja $a \in A$ é um elemento invertível do anel *A*, então qualquer outro elemento $b \in A$ admite uma fatoração em *A*:

$$b = a(a^{-1}b)\,.$$

Uma fatoração do tipo acima é dita *fatoração trivial* para *b*.

Por exemplo, como o número 3 é invertível em $\mathbb{Q}$ e 5 é elemento de $\mathbb{Q}$, temos que o número 5 admite aí uma fatoração $5 = 3\times\left(\dfrac{1}{3}\times 5\right) = 3\times\dfrac{5}{3}$.

Analogamente, se $a(X) \in A[X]$ é um polinômio invertível, onde *A* é anel, então todo polinômio $p(X) \in A[X]$ admite uma fatoração em $A[X]$:

$$p(X) = a(X)[a(X)^{-1} p(X)].$$

Tais fatorações são chamadas *fatorações triviais* porque são fatorações que qualquer elemento de *A* e qualquer polinômio de $A[X]$ admitem.

Outro exemplo: todo elemento invertível de um anel só admite fatoração trivial.

Uma a propriedade que nem todo elemento (não-invertível) satisfaz é admitir fatoração não-trivial. Por exemplo, no anel $\mathbb{Z}$, o número 7 só admite fatorações triviais, enquanto que o número 12 admite fatorações não-triviais, por exemplo, $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3$, uma vez que 2, 3, 4 e 6 não são invertíveis em $\mathbb{Z}$. Torna-se relevante, portanto, em relação a polinômios, respondermos as seguintes questões:

i. Sendo *K* corpo, quem são os polinômios invertíveis em $K[X]$?
ii. Quem são os polinômios invertíveis em $\mathbb{Z}[X]$?

Proposição 5: Seja *D* um domínio. Os únicos polinômios $p(X) \in D[X]$ invertíveis são os polinômios constantes $p(X) = a$, onde a é um elemento invertível de *D*.

Demonstração: Seja $p(X) \in D[X]$ tal que $\partial p(X) \geq 1$, ou seja, $p(X)$ não é um polinômio constante. Suponha que existe um polinômio não-nulo $q(X) \in D[X]$ tal que $p(X)\,q(X) = 1 \in D[X]$, ou seja, $q(X)$ é inverso multiplicativo de $p(X)$. Então, da Definição 3 e da Proposição 3(b), obtemos o seguinte resultado:

$$0 = \partial(1) = \partial(p(X)\,q(X)) = \partial p(X) + \partial q(X) \geq 1 + \partial q(X) \geq 1,$$

o que é um absurdo. Concluímos que, se $\partial p(X) \geq 1$, o polinômio $p(X)$ não admite inverso multiplicativo. Dito de outra forma, se $p(X) \in D[X]$ é invertível, então $\partial p(X) = 0$. Portanto, $p(X) = a$, onde a é um elemento invertível de *D*. □

Ora, em particular, se *D* = *K* é um corpo, como todo elemento não-nulo de *K* é invertível, concluímos: os polinômios invertíveis em $K[X]$ são todos os polinômios $p(X) = a$, onde $0 \neq a \in K$. Já, se *D* = $\mathbb{Z}$, os únicos invertíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e – 1, concluímos que os únicos polinômios invertíveis em $\mathbb{Z}[X]$ são os polinômios constantes 1 e -1.

Como consequência imediata da Proposição 5, temos o

Corolário 2:

i) Seja K um corpo e $p(X) \in K[X]$. Qualquer fatoração de $p(X)$da forma $p(X) = a\, q(X)$, onde $0 \neq a \in K$ e $q(X) \in K[X]$é uma fatoração trivial em $K[X]$;

ii) Se $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ admite, em $\mathbb{Z}[X]$, uma fatoração da forma $p(X) = a\, q(X)$, onde $q(X) \in \mathbb{Z}[X]$, então esta fatoração só será trivial quando $a = 1$ou $a = -1$.

Por exemplo, $2(X^2 + 3)$ é uma fatoração não-trivial de $2X^2 + 6$em $\mathbb{Z}[X]$, pois nem 2, nem $X^2 + 3$ são invertíveis em $\mathbb{Z}[X]$. Porém, é uma fatoração trivial em $\mathbb{Q}$[X], em $\mathbb{R}$[X] e em $\mathbb{C}$[X], pois 2 é invertível em $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

No que segue, estamos interessados em discutir o significado da expressão “fatorar completamente”.

Em $\mathbb{Z}$, fatorar completamente um número significa chegar a fatores, todos primos, que são precisamente os inteiros que só podem ser fatorados de forma trivial. Analogamente, fatorar completamente um polinômio significa chegar a fatores que, por sua vez, só podem ser fatorados de forma trivial, o que vai depender (como vimos no exemplo) do campo numérico ao qual pertencem os coeficientes do polinômio. Essas considerações sugerem a

Definição 12 (definindo polinômio irredutível): Seja $p(X) \in D[X]$ um polinômio não-invertível, onde D é domínio. Dizemos que $p(X)$ é *irredutível* em $D[X]$ se $p(X)$ só admite fatorações triviais, ou seja, se $p(X) = f(X)g(X)$, então $f(X)$ é constante em $D[X]$ ou $g(X)$ é constante em $D[X]$ e, mais ainda, esta constante é invertível em D. Se $p(X)$ admite uma fatoração não-trivial em $D[X]$, então $p(X)$ é dito *redutível* em $D[X]$.

Por exemplo, como vimos, $2X^2 + 6$ é redutível em $\mathbb{Z}[X]$, pois $2(X^2 + 3)$ é uma fatoração não-trivial em $\mathbb{Z}[X]$; é redutível em $\mathbb{C}$[X], pois $(2X + 2\sqrt{3}\, i)(X - \sqrt{3}\, i)$ é fatoração não-trivial em $\mathbb{C}$[X]; porém, é irredutível em $\mathbb{Q}$[X] (pelo critério de Eisenstein[6]) e em $\mathbb{R}$[X] (ver item ii a seguir). Observe que $2\left(X^2+3\right)$ é uma fatoração trivial de $2X^2+6$ em $\mathbb{Q}$[X] e em $\mathbb{R}$[X].

Definição 13 (definindo fatoração completa de um polinômio): Fatorar completamente um polinômio em *D*[*X*], onde *D* é domínio, significa fatorá-lo em um produto de polinômios irredutíveis ou invertíveis de *D*[*X*].

Demonstra-se que:

i. Em $\mathbb{C}$[X] os únicos polinômios irredutíveis são os polinômios de grau 1. (Este é um dos possíveis enunciados do chamado Teorema Fundamental da Álgebra).
ii. Em $\mathbb{R}$[X] os únicos polinômios irredutíveis são os polinômios de grau 1 e os polinômios de grau 2, aX^2+bX+c, tais que $b^2-4ac<0$.
iii. Em $\mathbb{Q}$[X] todos os polinômios de grau 1 são irredutíveis, mas aqui também podemos encontrar polinômios irredutíveis de qualquer grau. Por exemplo, pelo Critério de Eisenstein, seja qual for o *n* natural não-nulo, X^n-p, onde *p* é um número primo, é um polinômio irredutível de grau *n*.
iv. Como consequência de (iii), podemos encontrar em $\mathbb{Z}$[*X*] polinômios irredutíveis de qualquer grau. E aqui os polinômios de grau 1 que são irredutíveis são precisamente os polinômios $aX+b$ tais que $mdc(a,b)=1$.

Relacionado com o assunto deste trabalho e motivados pela aparição de tal expressão em alguns dos livros didáticos analisados, é conveniente discutirmos aqui a seguinte questão: que significado queremos dar para “fatoração completa de uma expressão algébrica polinomial”?

Definição 14 (definindo expressão algébrica polinomial associada ao polinômio $p(X)$) Todo polinômio $a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0\in K[X]$ dá origem a uma expressão algébrica na variável $x\in K$

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

[6] Ver em GONÇALVES, 1999.

a qual chamamos de *expressão algébrica polinomial associada ao polinômio* $p(X)$, e que é usualmente denotada por $p(x)$.

Da mesma forma, toda identidade polinomial $p(X) = q(X)$ em $K[X]$, K corpo, dá origem a uma identidade entre expressões algébricas polinomiais $p(a) = q(a)$ para todo $a \in K$. A justificativa para tal afirmação reside no fato de que as regras para se operar com a indeterminada *X*, como vimos, são as mesmas que para se operar com uma variável *x*.

Proposição 6: Seja K um corpo. Se $p(X), q(X) \in K[X]$ são tais que $p(X) = q(X)$, então $p(a) = q(a)$ para todo $a \in K$.

Demonstração: Supondo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \text{ e } q(X) = b_m X^m + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0,$$

temos a seguinte sequência de implicações lógicas:

$$p(X) = q(X) \Rightarrow$$
$$p(X) - q(X) = 0 \Rightarrow$$
$$\text{todos os coeficientes de } p(X) - q(X) \text{ são nulos } \Rightarrow$$
$$\text{para todo } i \in \{0, 1, 2, \cdots, \max\{n, m\}\}, \text{ os coeficientes de } X^i \text{ em } p(X)$$
$$\text{e em } q(X) \text{ coincidem, isto é, } a_i = b_i \Rightarrow$$
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b_m x^m + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \text{ para todo } x \in K. \ \square$$

Assim, o que a Proposição 6 nos diz é que, por exemplo, como $X^2 - 9 = (X - 3)(X + 3)$ em $K[X]$, podemos afirmar que, para todo $b \in K$, vale a igualdade $b^2 - 9 = (b - 3)(b + 3)$.

Reciprocamente, a toda expressão algébrica em x está naturalmente associado um polinômio na indeterminada *X*.

Definição 15 (definindo polinômio associado à expressão algébrica $p(x)$): O polinômio $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in D[X]$ é chamado polinômio *associado à expressão algébrica*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

na variável x pertencente ao mesmo campo numérico D dos coeficientes da expressão algébrica e que aqui vamos supor sendo no mínimo um domínio de integridade.

Com a Definição 15, podemos dizer que fatorar completamente uma expressão algébrica polinomial significa encontrar **alguma** fatoração completa do polinômio a ela associado e, depois, usar a Proposição 6 para originar uma fatoração para tal expressão algébrica. Dizemos, então, que tal fatoração é **uma** fatoração completa da expressão algébrica polinomial original.

Por exemplo, à expressão algébrica polinomial $4x^4 + 8x^2 + 4$ está associado o polinômio $4X^4 + 8X^2 + 4$ de $\mathbb{R}[X]$, sendo que $(2X^2 + 2)^2$ é uma fatoração completa para tal polinômio em $\mathbb{R}[X]$, o mesmo ocorrendo com $4(X^2 + 1)^2$, pois todos os fatores envolvidos são irredutíveis ou são invertíveis em $\mathbb{R}[X]$. Portanto, pela Proposição 6, das identidades polinomiais $4X^4 + 8X^2 + 4 = (2X^2 + 2)^2$ e $4X^4 + 8X^2 + 4 = 4(X^2 + 1)^2$, obtemos, para todo número real x as fatorações completas $4x^4 + 8x^2 + 4 = (2x^2 + 2)^2$ e $4x^4 + 8x^2 + 4 = 4(x^2 + 1)^2$ no universo numérico $\mathbb{R}$. Note-se que essas fatorações completas não são únicas, mas todas elas diferem apenas por um fator invertível.

No entanto, em $\mathbb{Z}$[X], $(2X^2 + 2)^2$ não é fatoração completa para tal polinômio, pois o fator $2X^2 + 2$ é redutível em $\mathbb{Z}$[X] ($2X^2 + 2 = 2(X^2 + 1)$); neste caso, encontramos $(\pm 2)^2 (x^2 + 1)^2$ como únicas fatorações completas possíveis para a expressão algébrica $4x^4 + 8x^2 + 4$ em $\mathbb{Z}$.

Considerações Finais do capítulo: Reiteramos aqui nossa convicção de que os assuntos tratados nesse capítulo requerem um nível de abstração não condizente com o nível cognitivo de um aluno de ensino fundamental. Portanto, qualquer questão relativa a expressões algébricas polinomiais que requeiram tal conhecimento (precisamente: x interpretado como indeterminada) deveriam ser discutidas no mínimo no ensino médio, nunca no ensino fundamental. No entanto, nossa opinião é que se pode sim manter a nomenclatura “expressão algébrica polinomial”, anunciando que, no ensino médio, aprenderão o que é polinômio e função polinomial, entendendo então a justificativa para este termo aqui empregado.

Além disso, enfatizamos que é possível sim trabalharmos com a fatoração de expressões algébricas polinomiais mesmo sem fazer alusão à fatoração de polinômios, apoiando-nos exclusivamente nas propriedades das operações com números, mas ressaltamos que, como visto neste capítulo, não faz sentido falar-se **na** fatoração ou “**na** fatoração completa” de expressões algébricas polinomiais, nem mesmo se restringimos o universo numérico a ser trabalhado, no caso em $\mathbb{Z}$.

3 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

No que segue, apresentaremos encaminhamentos sobre o conteúdo de expressões algébricas encontrados em livros didáticos de sétima série/oitavo ano do ensino fundamental. Tais encaminhamentos, como veremos, são insatisfatórios por vários motivos:

- Falta de clareza, omissões e imprecisões nas definições que podem até levar a exemplos incorretos.
- Incoerência do autor consigo mesmo.
- Erro conceitual.
- Erro gramatical que induz a deduções erradas.
- Exigência de um nível de abstração não condizente com alunos desta etapa da Educação Básica.

Os exemplos apresentados foram retirados de nove livros didáticos, todos de coleções aprovadas pelo Ministério da Educação (MEC) através do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) (Figura 1).

Livro	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PNLD	2008	2008	2008	2008	2002	2008	2008	2008	2008
EDIÇÃO	2005	2006	2006	2006	2002	1997	2006	2002	2000

Figura 1: Relação de livros didáticos analisados

Embora estejamos aqui tratando de 8 dos 16 livros aprovados no PNLD/2008, não temos como objetivo o estudo estatístico dessa amostra. Procuramos apenas apontar incoerências, omissões e erros constatados no conteúdo de expressões algébricas e alertar os leitores para o uso crítico desse material, pois do seu uso irrestrito podem surgir vários vícios e incompreensões por parte dos alunos. A escolha dos livros obedeceu exclusivamente ao critério “os livros que eu possuo em casa”.

É de suma importância expor estes encaminhamentos, uma vez que, conforme o Guia de Livros Didáticos – PNLD/2008 (p.7), “o livro [didático] precisa assumir a função de texto de referência tanto para o aluno, quanto para o docente”. Infelizmente, a realidade é que, para a grande maioria dos professores de Educação Básica, o livro didático **assume**, de fato, a função de **único** referencial, tanto no tocante à "Matemática escolar" quanto ao que se refere à "teoria matemática" [1]. Portanto, são inadmissíveis contradições, confusões e erros conceituais em tais textos, especialmente por terem sido aprovados pelo MEC, o que, em teoria, deveria garantir a qualidade e correção dos mesmos.

Os PCN (1998) corroboram o que dissemos:

> Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória (BRASIL, 1998 p.21-22).

Os trechos retirados dos livros serão apresentados sempre em fonte Comic Sans MS tamanho 10 e nossos comentários em fonte Times New Roman tamanho 12. Suprimimos algumas passagens dos textos originais, indicando-as com "(…)", procurando assim enfatizar apenas o trecho que interessa para a presente discussão.

Classificamos os problemas encontrados quanto aos aspectos analisados e, em cada um, descrevemos os motivos pelos quais cada aspecto foi criticado.

3.1 ASPECTO 1 - DEFINIÇÃO DE EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Na análise dos livros didáticos, percebem-se os seguintes problemas relativos à definição de expressão algébrica:

3.1.1 Ausência da Definição de Expressão Algébrica

Há livros que apenas apresentam alguns exemplos (em geral de expressões algébricas polinomiais) e afirmam que expressões como essas são chamadas expressões algébricas, como nos exemplos a seguir:

Livro 6

(...)

Na álgebra, aparecem expressões com letras como estas:

$3(x+2)$	x^2+1
O triplo da soma de um número com 2.	O quadrado de um número mais 1.

Essas expressões são chamadas de *expressões algébricas*.

[1] Estamos aqui querendo nos referir a todo o conhecimento matemático que o professor deveria ter sobre os assuntos tratados na Educação Básica.

(...)

Livro 7

(...)

Nas fórmulas e nas equações que vimos, apareceram expressões envolvendo letras:

$$A = 4 \cdot 10^{-6} \cdot v^2 \qquad\qquad x + 2 \cdot x = 96$$

expressão

Chamamos expressões como essas de **expressões algébricas**.

(...)

O equívoco de tais encaminhamentos está no fato de que um número finito de exemplos não consegue contemplar a amplitude de expressões algébricas. Poderíamos, então, perguntar: Será que $\frac{3}{2}(x+2)$ ou $\sqrt{x^2+y^2}$ são expressões algébricas?

3.1.2 Definição Vaga e Imprecisa

Há livros que definem expressões algébricas afirmando que são “expressões matemáticas” sem esclarecer o que entendem por “expressões matemáticas” e sem se darem conta da amplitude de tal expressão.

Livro 4

(...)

Uma expressão matemática contendo letras e números, ou somente letras, é uma expressão algébrica. (...)

Livro 2

(...)

Expressões algébricas

Expressões matemáticas formadas por letras e símbolos numéricos são chamadas expressões literais ou, genericamente, **expressões algébricas**.

(...)

Tais “definições” nos autorizam a entender que $\log x$, $\operatorname{sen} x$ e 2^x são expressões algébricas.

Note ainda o mau uso da palavra “genericamente” no exemplo citado, pois $\operatorname{sen} x$, por exemplo, é uma expressão literal, mas não é uma expressão algébrica.

Em um dos livros aparece a seguinte definição completamente vaga e imprecisa:

Livro 5

(...)

Qualquer expressão numérica ou expressão com variáveis é chamada *expressão algébrica*.

(...)

Há também casos em que o autor apenas informa do que são formadas tais expressões, sem chegar a definir expressão algébrica, como no exemplo:

Livro 3

(...)

Expressões como $x \cdot y$, $2x + 2y$, $50 + x + x$ **e** $x + 100 + 20 + 10$ são chamadas **expressões algébricas**.

Expressões algébricas são aquelas formadas por números e letras ou somente por letras. Essas letras são chamadas de **variáveis**.

(...)

Note que, com sua tentativa de definição, o autor não consegue contemplar os próprios exemplos, já que em $50 + x + x$, por exemplo, além de números e letras, há a operação de adição.

Alguns autores chegam a informar que expressões algébricas envolvem também operações, mas não citam quais operações. O exemplo abaixo ilustra o comentário:

Livro 1

(...)

Expressões algébricas são formadas por letras, números e sinais das operações. As letras que aparecem numa expressão algébrica são denominadas *variáveis*.

(...)

Com isto, o autor estaria permitindo, por exemplo, a operação de logaritmação ou exponenciação, a qual não é uma operação algébrica.

Na Figura 2, registramos em quais dos livros analisados repetem-se, de alguma forma, os comentários feitos anteriormente, comprovando que **todos** os livros analisados, por um motivo ou por outro, deixaram a desejar quanto ao Aspecto 1.

Livro→ Problemas ↓	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4	Livro 5	Livro 6	Livro 7	Livro 8	Livro 9
Ausência de definição						X	X		X
Imprecisão na definição	X	X	X	X	X			X	

Figura 2: Problemas quanto à definição de expressão algébrica

3.2 ASPECTO 2 - PRIMEIROS EXEMPLOS DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Nossa crítica aqui recai sobre a pouca abrangência dos primeiros exemplos de expressões algébricas que são apresentados logo após a “definição” ou como motivadores para a sua “definição”. Essa pouca abrangência se dá em dois níveis:

3.2.1 Quanto ao Universo Numérico dos Coeficientes

Considerando que em seis dos nove livros analisados a abordagem do conjunto dos números reais é feita antes do conteúdo de expressões algébricas, é injustificável a não apresentação de exemplos do tipo $\sqrt{5}x^2y$. Ao evitar o trabalho com expressões algébricas envolvendo efetivamente números reais não-racionais (nos casos em que estes já foram trabalhados previamente) os autores perdem uma oportunidade de consolidar o trabalho feito neste conjunto e, ainda, passam a impressão ao leitor de que os números irracionais afinal não são tão importantes. Pior ainda é que, como primeiros exemplos de expressões algébricas, alguns livros apresentam expressões polinomiais exclusivamente com coeficientes inteiros, como no caso do

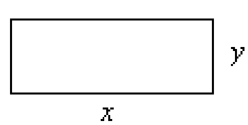
Livro 2

(...)

Vejamos alguns exemplos:

*um número qualquer multiplicado por 10 $\rightarrow x \cdot 10$ ou $10x$

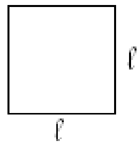
*o perímetro do retângulo



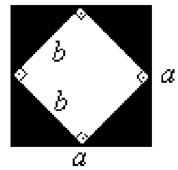
$x + x + y + y = 2x + 2y$

*a área do quadrado

*a área colorida da figura



$\ell \cdot \ell = \ell^2$



$a \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$

(...)

Nesse momento, o autor poderia facilmente apresentar como exemplo a altura de um triângulo equilátero em função da medida do seu lado, onde naturalmente apareceria um coeficiente irracional, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, sem sair do contexto da Geometria.

3.2.2 Tendência em apresentar apenas expressões polinomiais

Os primeiros exemplos de expressões algébricas apresentados são quase exclusivamente de expressões algébricas polinomiais, portanto muito tendenciosos. Em nenhum dos livros observados foi apresentado um exemplo do tipo $\sqrt{x+y}$. É bem verdade que alguns desses livros trazem como exemplos de expressões algébricas expressões como $\frac{20}{a-3}$, às quais chamam de *frações algébricas*. Porém, exemplos desse tipo são muito raros e são localizados preferencialmente em seções de exercícios ou em uma seção à parte. Com essa atitude, os autores induzem o aluno a pensar que “expressão algébrica” e “expressão algébrica polinomial” são sinônimas.

Ilustramos o que foi comentado acima com dois exemplos:

Livro 4

(...)

- $4a^3$
- $5a + 3b - 2c$
- $\frac{2}{5}xy + 7x^2$
- $3(m\text{-}n) + 5m - 2(3m+1)$

são exemplos de expressões algébricas.

(...)

Livro 8

(...)

Nas máquinas programadas apareceram alguns exemplos de expressões algébricas.

$$2n+3 \qquad 3x^2 \qquad \frac{y}{2}-1 \qquad 2r+5 \qquad 2(m+1)$$

(...)

Neste momento, seria altamente recomendável apresentar situações em que são necessárias expressões algébricas não-polinomiais. Por exemplo, citamos:

- Dados o volume e a altura de um paralelepípedo, determinar uma expressão para a área da sua base. Teríamos, nesse caso, a expressão algébrica não polinomial $\frac{V}{h}$ para representar tal área.
- Dados a área A e as medidas da base maior B e da base menor b de um trapézio, determinar uma expressão algébrica para a sua altura. Assim, a altura será dada pela expressão $\frac{2A}{B+b}$, a qual não é polinomial.
- Sabendo o valor da área A de um quadrado, a medida do seu lado será dada por $\sqrt{A}$.
- O comprimento da diagonal de um retângulo, dados os comprimentos a e b dos seus lados é dado pela expressão algébrica $\sqrt{a^2+b^2}$.

Na Figura 3, registramos em quais dos livros analisados repetem-se, de alguma forma, os comentários feitos anteriormente, comprovando que **todos** os livros analisados deixaram a desejar quanto ao Aspecto 2.

Livro→ Problemas ↓	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4	Livro 5	Livro 6	Livro 7	Livro 8	Livro 9
Universo numérico dos coeficientes: $\mathbb{Z}$		X	X			X			X
Universo numérico dos coeficientes: $\mathbb{Q}$	X			X	X		X	X	
Apenas expressões polinomiais	X	X	X	X		X	X	X	X

Figura 3: Primeiros exemplos de expressão algébrica

3.3 ASPECTO 3 - TRANSIÇÃO DE *EXPRESSÃO ALGÉBRICA* PARA *EXPRESSÃO ALGÉBRICA POLINOMIAL*

Destacamos aqui que os autores dos livros didáticos “definem” o que são expressões algébricas e depois, sem tecer quaisquer comentários, passam a tratar exclusivamente de expressões algébricas polinomiais, às quais chamam ainda, incorretamente, de “polinômios” (veja Capítulo 2). Nesse ponto, não deixam claro ao aluno que, a partir daquele momento, passarão a tratar exclusivamente de expressões algébricas polinomiais.

Provavelmente, para um aluno ou mesmo para um professor menos atento, essa observação passa despercebida, uma vez que os exemplos de expressões algébricas apresentados são, com raríssimas exceções, expressões polinomiais, conforme discutido anteriormente (veja Aspecto 2). Mais uma vez, os autores de livros didáticos sugerem fortemente a ideia de que expressões algébricas e expressões algébricas polinomiais são sinônimas.

Além disso, quanto ao aspecto em pauta, há alguns pontos que merecem ser destacados:

3.3.1 Ausência ou má formulação das definições e uso de conceitos não definidos

A ausência ou má formulação da definição de expressão algébrica (apresentada no aspecto 1) e a automática passagem para expressões algébricas polinomiais é piorada pela ausência da definição de “monômios”, pela apresentação de definições incompletas e pelo uso de termos não definidos que dão margem a interpretações incorretas, conforme exemplificamos abaixo:

Livro 6

Definição de expressão algébrica:

(...)

Na álgebra, aparecem expressões com letras como estas:

$3(x+2)$	x^2+1
O triplo da soma de um número com 2.	O quadrado de um número mais 1.

Essas expressões são chamadas de *expressões algébricas*.

(...)

Mais adiante, são apresentados os “monômios” e os “polinômios”:

(...)

As expressões algébricas têm nomes:

$3x^2y$ $\qquad 2x+\frac{yz}{3}$ $\qquad x^2y+5xz^3+6$

monômio binômio trinômio

"Mono" indica um.

"Bi" indica dois.

"Tri" indica três.

"Poli" indica muitos.

Em álgebra, há o costume de chamar de *expressão polinomial* ou *polinômio* não só as expressões com mais de três parcelas. Os monômios, binômios e trinômios também são chamados de polinômios.

(...)

Perceba a ausência da definição de monômios e polinômios. Além disso, o autor poderia ter optado pelo nome "expressão polinomial", pois esta não é sinônimo de "polinômio". Pelo que é dito no livro, um aluno poderá, então, considerar $\sqrt{x}$, por exemplo, como um monômio e $2+x+\log x+\operatorname{sen} x$ torna-se um polinômio.

Livro 4

Definição de expressão algébrica:

(...)

Uma expressão contendo letras e números, ou somente letras, é uma expressão algébrica.

(...)

Definição de monômio:

(...)

Expressões algébricas que têm um único termo são chamadas de monômios.

Veja exemplos:

$2xy \qquad \frac{5}{6}a^3 \qquad -9m^2 \qquad a^5b$

(...)

Segundo essa definição de monômios, podemos, aqui novamente, entender que $\sqrt{x}$, $\cos x$ e 2^x, por exemplo, são monômios. A imprecisão da definição de expressões algébricas e a falta de definição de "termo" dão margem a essas interpretações.

Logo depois, tardiamente, o autor tenta passar a ideia de termo, mencionando:

(...)

Nos monômios, entre os números e as letras só aparece a operação de multiplicação.

(...)

3.3.2 Incoerência do Autor Consigo Mesmo

Em alguns livros analisados, o autor apresenta a definição de expressão algébrica, mas seus exemplos são contraditórios com essa definição. É o que ocorre, por exemplo, no seguinte caso:

Livro 5

Antes de definir monômio, é definido "termo":

(...)

Uma expressão algébrica escrita como um produto ou um quociente de números ou variáveis, ou de ambos, chama-se *termo*.

Veja alguns exemplos de termos:

$$10 \qquad -\frac{1}{2} \qquad \frac{3a}{2} \qquad -4xy \qquad 0{,}36abx \qquad \frac{y-x}{2} \qquad \frac{k-b}{y}$$

(...)

As incoerências entre a definição e os exemplos, neste livro, são gritantes: $y-x$ não pode ser chamado de termo, já que não é uma expressão algébrica escrita como um produto ou quociente de números ou variáveis. Porém, considera $\frac{y-x}{2}$ como um termo!

A definição de termo também não está precisa: falta dizer que um termo é uma expressão algébrica escrita **apenas** como um produto ou quociente de números ou variáveis.

Mais tarde, define monômios:

(...)

Os termos 8, x, y, $8x$, $-4y$, $2xy$, $\frac{3}{2}xy^2$ chamam-se *monômios*.

Um monômio é um termo que pode ser:

- um número: 8
- uma variável: *x*, *y*
- o produto de um número por uma ou mais variáveis: $8x$, $-4y$, $2xy$,

$\frac{3}{2}xy^2$.

(...)

E, para definição de polinômio:

(...)

Um monômio ou uma soma de monômios chama-se *polinômio*.

Assim, $-9x^2y$ é um polinômio de um termo ou *monômio*; $b-2c$ é um polinômio de dois termos ou *binômio*; $a^2+2ab+b^2$ é um polinômio de três termos ou *trinômio*; $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ é um polinômio de quatro termos, etc.

(...)

O autor apresenta como exemplo de binômio a expressão $b-2c$. Porém, acima definiu "termo" e exemplificou com a expressão $\frac{k-b}{y}$, sendo incoerente consigo mesmo.

3.3.3 Texto Mal Redigido

Livro 2

Definição de monômio:

(...)

As expressões algébricas recebem alguns nomes especiais. Veja:

*As parcelas $20t$, $5x^2y$ e $-a$ são designadas por **monômios**.

*As expressões $x+y$ e $3y^5-y^2$ são conhecidas por **binômios**.

*As expressões x^2-5x+6 e ab^2-3a^4b+7 são **trinômios**.

Os trinômios são expressões algébricas com três termos.

(...)

O autor não diz o que é um monômio nem o que é um binômio. Dessa forma, pode-se perguntar: o que têm em comum essas expressões algébricas para receberem nomes especiais? Além disso, no caso dos monômios, o autor do livro chama de "parcelas". Mas, por que chamar de parcelas, se nem ao menos há uma adição envolvida? Logo depois afirma: "trinômios são expressões algébricas com três **termos"**. Por que não diz "com três parcelas" agora? Mais ainda, o que são "termos"?

Definição de polinômio:

(...)

Os monômios, binômios e trinômios são denominados, genericamente, de **polinômios**.

(...)

Observe aqui a má redação do texto: quer dizer então que uma adição de quatro ou mais parcelas não são "polinômios"?

Após isso, dirigem-se ao leitor, usando um personagem para questionar:

–Você sabia que:

Mono significa um?

Bi significa dois?

Tri significa três?

Poli significa muitos?

(...)

Essa passagem deveria ter sido antecipada e utilizada pelo autor na definição de monômio, binômio e trinômio.

Na Figura 4, registramos em quais dos livros analisados repetem-se, de alguma forma, os comentários feitos, comprovando que **todos** os livros analisados deixaram a desejar quanto ao Aspecto 3.

Livro→ Problemas ↓	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4	Livro 5	Livro 6	Livro 7	Livro 8	Livro 9
Ausência ou má formulação das definições e uso de conceitos não definidos	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Incoerência do autor consigo mesmo	X				X		X		
Texto mal redigido	X	X							

Figura 4: Transição de *expressão algébrica* para *expressão algébrica polinomial*

3.4 ASPECTO 4 - SITUAÇÕES ENVOLVENDO O CONTEXTO GEOMÉTRICO

Inicialmente, convém esclarecer que não estamos criticando o fato de os livros didáticos abordarem conceitos e resultados envolvendo expressões algébricas a partir de representações geométricas. Evidentemente, a exploração conjunta de conceitos geométricos e de resultados envolvendo expressões algébricas é de extrema importância para a aprendizagem, pois, além de proporcionarem uma visualização das operações com expressões algébricas (pelo menos nos casos em que as letras representam números reais positivos), fornecem exemplos de aplicações para as mesmas, promovendo uma conexão entre campos matemáticos diversos.

No entanto, os exemplos e exercícios envolvendo o contexto geométrico poderiam ser mais bem aproveitados. Além disso, encontramos erros em alguns casos (por exemplo, uma figura impossível de existir), além de omissões das unidades de medidas que estão sendo utilizadas e da informação da natureza da figura geométrica.

3.4.1 Ausência da Informação Sobre as Unidades de Medidas Expressas pelas Letras

Na maioria dos exemplos e exercícios envolvendo o contexto geométrico, os autores não mencionam as unidades de medidas. Além disso, nos casos em que utilizam mais de uma letra nas expressões que representam as medidas dos lados das figuras, falta também mencionar que as letras estão representando medidas na mesma unidade (exceção do Livro 8). Como veremos a seguir (após comentarmos o próximo item), essa falta de informação sobre as unidades de medidas pode gerar algumas dificuldades.

3.4.2 Ausência da Informação Sobre a Natureza da Figura Geométrica

Encontramos, em alguns livros analisados, exercícios e exemplos onde a figura geométrica deve ser intuída pelo aluno a partir de um simples enunciado da forma “Observe a figura”, como no exemplo a seguir que, além de ilustrar esse fato, também ilustra o que foi ressaltado no item anterior:

Livro 7

(...)

DESAFIO

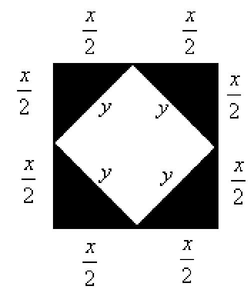
Observe a figura e depois responda:

a) Qual é o polinômio que representa

a área da figura pintada de

[preto], em função de *x* e *y?*

b) Se *x* = 11 cm e *y* = 6 cm, qual é a área da região azul?



(...)

Sem informar que o polígono externo é um quadrado, cabe a discussão, não trivial, se o polígono interno pode ou não ser um losango. Uma vez esclarecido que o polígono interno é um quadrado, ainda restaria salientar que a resposta $x^2 - y^2$ dada pelo autor só estará correta no caso em que as unidades de medidas de x e y são as mesmas. Por exemplo, se x for expresso em metros e y em decímetros, então uma expressão correta, em metros quadrados, para a área pintada da figura, fazendo as suposições iniciais, seria $x^2 - 0{,}01y^2$. Mais ainda, supondo-se que tanto o polígono externo quanto o interno são quadrados, observa-se que não são possíveis os valores x = 11 cm e y = 6 cm.

3.4.3 Ausência da Explicitação do Domínio de Variação das Variáveis

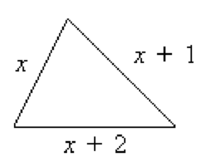
Todos os livros analisados apresentam figuras geométricas, em geral poligonais, cujas medidas dos lados são representadas por letras. Porém, não há uma prévia discussão quanto ao domínio de variação das variáveis envolvidas, algo aqui importante para que os cálculos façam sentido no contexto geométrico ou, antes até, para garantir a existência da figura, por exemplo:

Livro 1

(...)

Determine o perímetro de cada polígono:

a)



(...)

Aqui, além de não ser feita qualquer menção a 1, 2 e x referirem-se à mesma unidade de comprimento, não há qualquer discussão quanto ao domínio de variação da variável x. Note que a simples informação $x > 1$ já garantiria a existência de tal triângulo. Observe que, se fizermos x = 0,5, por exemplo, então o triângulo citado nem mesmo existe.

3.4.4 Incoerência entre Figuras Geométricas Poligonais e as Medidas dos Lados

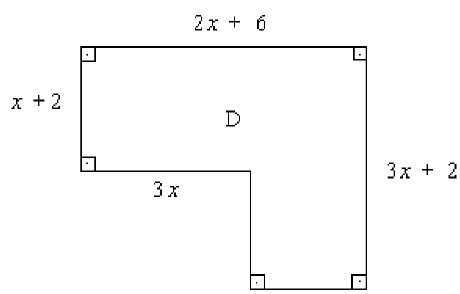
A ausência das informações sobre as unidades de medida, sobre a natureza da figura geométrica e sobre o domínio de variação das letras no contexto geométrico, mencionadas anteriormente, produz erros como a avaliação de uma expressão, solicitada pelo autor, em valores para os quais a figura não fica definida, produzindo uma resposta absurda.

No exercício a seguir, pede-se que o aluno calcule a área de dois terrenos. Destaco apenas a figura que interessa para a discussão:

Livro 2

(...)

As figuras representam dois terrenos. As medidas dos lados estão expressas em metros.



a) Escreva as fórmulas das áreas *A* de cada um desses terrenos.

b) Ache a área de cada um deles se $x = 10$.

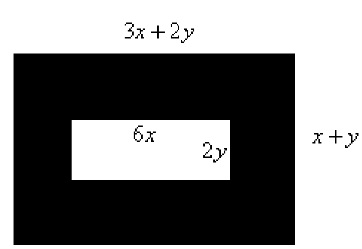
(...)

Nesse caso, considerando todas as medidas dadas na mesma unidade, se $x = 10$, então $2x + 6 = 26 < 30 = 3x$, tornando a figura incoerente com os dados. Ou seja, perde-se aqui, ao ser gerada uma incoerência, a pretensa vantagem do uso da Geometria no ensino de expressões algébricas.

Livro 3

(...)

6. Observe o desenho e responda às questões.



a) Qual é o polinômio que representa a área da região colorida de verde [em preto]?

b) Encontre o valor numérico da área dessa região para $x = 3$ e $y = 1$.

(...)

Subentendendo-se que x e y estão na mesma unidade de comprimento e que as figuras são retângulos, tal figura é impossível com as medidas representadas pelas expressões algébricas dadas, pois, para garantir a existência da região entre os dois retângulos, é necessário que tenhamos $3x+2y>0$, $x+y>0$, $6x \geq 0$, $2y \geq 0$, $3x+2y>6x$ e $x+y>2y$. Resolvendo essas desigualdades chegamos às condições $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $y<x<\frac{2}{3}y$, impossíveis de serem satisfeitas por números reais.

3.4.5 Exemplos e exercícios que não contribuem para a aprendizagem

Livro 5

(...)

40. Expresse a área de cada retângulo de dois modos diferentes.

(...)

Nos exercícios acima, questionamos no que o contexto geométrico está contribuindo para uma aprendizagem da multiplicação de expressões algébricas. A expressão $3x^2+x$ já tem uma "aparência" de área de alguma figura, uma vez que, em um contexto geométrico, a expressão x^2 já está nos sugerindo uma área (seguindo aqui a forma de pensar dos gregos antigos). Assim o produto $x \cdot (3x^2+x) = 3x^3+x^2$, por exemplo, poderia ser mais bem interpretado como o volume de um paralelepípedo.

Salientamos, ainda, que podemos expressar a área dos retângulos de dois modos diferentes escrevendo simplesmente, no primeiro caso, $4a(a^2+3)$ ou $(a^2+3)4a$, o que, pela resposta dada no final do livro, não é o que o autor esperaria: $4a(a^2+3)=4a^3+12a$.

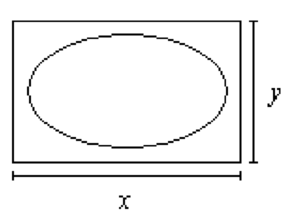
Livro 8

(...)

15. O marceneiro José colocou um espelho elíptico em uma região retangular de madeira na qual x = 60 cm e y = 0,36 m. Responda em seu caderno (use $\pi = 3{,}14$)

a) Qual é a área do espelho?

b) Qual é a área da parte visível da madeira?



(...)

Antes de apresentar a questão, o livro traz a fórmula do cálculo da área de uma elipse de eixos 2a e 2b: $A = \pi ab$. Primeiramente, o autor comete o grave erro de considerar π *igual a* 3,14, onde deveria ter dito que π é *aproximadamente igual a* 3,14. Em segundo lugar, pode-se perguntar: como calcular a área da elipse, a partir da fórmula dada, se não sabemos os comprimentos dos eixos da elipse? Note que o retângulo não tangencia a elipse. No entanto, a resposta dada no livro é 1695,6 cm^2 ou 3,14x30x18 cm^2 (usando x=2a e y=2b!).

Na Figura 5, registramos em quais dos livros analisados repetem-se os comentários feitos, comprovando que **todos** os livros analisados pecam quanto ao Aspecto 4.

Livro→ Problemas ↓	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4	Livro 5	Livro 6	Livro 7	Livro 8	Livro 9
Ausência de informação sobre as unidades de medidas	X	X	X	X	X	X	X		X
Ausência de informação sobre natureza da figura	X		X	X			X		
Ausência de explicitação sobre o domínio de variação das variáveis	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Incoerência entre figuras geométricas poligonais e as medidas de seus lados		X	X						
Exemplos e exercícios que não contribuem para a aprendizagem		X	X		X		X	X	

Figura 5 – Situações envolvendo o contexto geométrico

3.5 ASPECTO 5 - ALUSÃO A POLINÔMIOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Na análise dos livros didáticos, reconhecemos que a intenção dos autores quando se referem a “polinômios” é, na verdade, referir-se **apenas** a “expressões algébricas polinomiais”. Porém, além do erro de chamar tais expressões de polinômios (o que poderia, a princípio, ser encarado apenas como uma nomenclatura inadequada), cometem algum ou alguns outros equívocos tais como:

3.5.1 Definir as operações com expressões algébricas polinomiais a partir de receitas/regras sem justificativas

Saliente-se aqui, primeiramente, que tais justificativas podem e devem ser amparadas nas propriedades das operações com números, pois definir operações entre expressões algébricas polinomiais a partir de regras/receitas só seria adequado se os autores estivessem trabalhando efetivamente com polinômios.

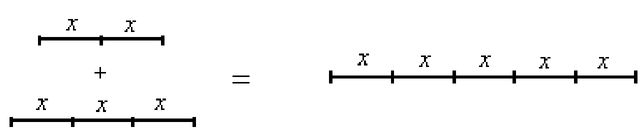
Por exemplo, consideremos a regra: "Só podemos somar/subtrair monômios semelhantes, e isto é feito somando-se/subtraindo-se os coeficientes e mantendo-se a parte literal." Em alguns livros didáticos essa regra é dada com pouca ou nenhuma ênfase nas propriedades das operações com números, atestando que, apesar da intenção de trabalhar apenas com expressões algébricas polinomiais, os autores estão utilizando sim conceitos relativos a polinômios. No caso presente, estão sugerindo uma definição de adição entre expressões algébricas polinomiais de forma análoga à definição de adição entre polinômios, em vez de simplesmente aplicarem a propriedade distributiva e evitarem a introdução de mais uma definição. Observemos os exemplos:

Livro 1

(...)

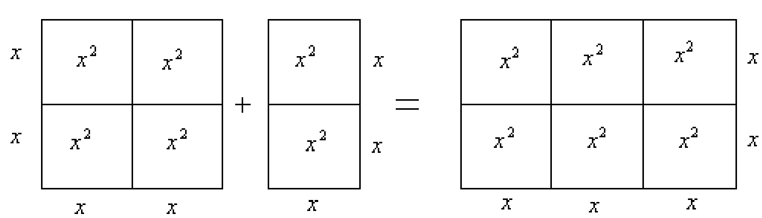
$$2x + 3x = (2+3)x = 5x$$

(Veja uma interpretação geométrica na figura abaixo.)



$$4x^2 + 2x^2 = 6x^2$$

(Veja uma interpretação geométrica na figura abaixo.)



$$7x^2 + 9x + 6x - 2x^2 + 5 - 4x = 5x^2 + 11x + 5$$

"x^2 soma com (ou subtrai de) x^2 e x soma com (ou subtrai de) x. Para x^2 com x, a soma (ou subtração) fica indicada (não dá para reduzir). Por quê?"

(...)

Este autor jamais responde explicitamente a pergunta feita acima. Aqui, supomos que a única justificativa que o autor deve estar esperando é de que não podemos somar comprimento com área. Ou seja, está justificando de forma exclusivamente geométrica. Com isto, está impedindo que interpretemos x como um número negativo.

Livro 7

(...)

semelhantes

$$4y^2 + 5y - 7y^2 + 6y$$

semelhantes

Podemos juntar os termos semelhantes e somá-los, ou subtraí-los, assim:

$$4\boldsymbol{y^2} - 7\boldsymbol{y^2} = (4-7)\boldsymbol{y^2} = -3\boldsymbol{y^2}$$

$$5\boldsymbol{y} + 6\boldsymbol{y} = (5+6)\boldsymbol{y} = 11\boldsymbol{y}$$

Isso nos permite agrupar e fazer operações com termos semelhantes:

$4y^2 + 5y - 7y^2 + 6y = 4y^2 - 7y^2 + 5y + 6y$ agrupamos os termos semelhantes

$= \quad -3y^2 \quad + \quad 11y$ efetuamos as operações com os termos semelhantes

Pronto! Obtivemos um polinômio igual ao anterior, só que escrito de forma mais simples.

(...)

Observe que nenhuma propriedade das operações com números foi salientada no texto. O que nos garante que podemos agrupar os termos semelhantes?

Livro 5

(...)

Para efetuar uma soma de polinômios, recorremos às propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação, e à propriedade distributiva da multiplicação.

Observe os exemplos:

1) $2x^2y + 7x^2y = (2+7)x^2y = 9x^2y$

2) $-a^2b^2 + 4a^2b^2 = (-1+4)a^2b^2 = 3a^2b^2$

3) $(3y^2 - 7y + 1) + \left(y^2 - y + \frac{1}{2}\right) = (3y^2 + y^2) + (-7y - y) + \left(1 + \frac{1}{2}\right)$

$= (3+1)y^2 + (-7-1)y + \frac{3}{2}$

$= 4y^2 - 8y + \frac{3}{2}$

(...)

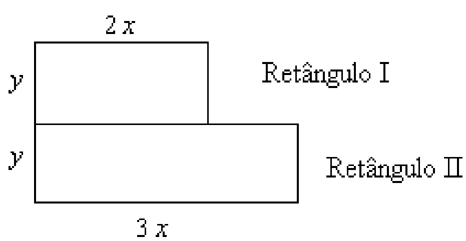
Aqui ele está sugerindo que "adição" e "subtração" têm "vida própria" e são sempre comutativas e associativas. Isto vai causar um problema futuro aos alunos quando estudarem multiplicação de matrizes. No entanto, se este autor tivesse escrito "para efetuar uma soma de polinômios, imitamos as propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação de **números**, e a propriedade distributiva da multiplicação de **números**" não estaria sendo incoerente, uma vez que em seu livro ele considera as letras como representantes de números.

Livro 3

(...)

Adição algébrica de monômios

Qual é a área da figura abaixo?



A área do retângulo I é $2xy$

A área do retângulo II é $3xy$

A área da figura toda é dada pela soma das áreas dos dois retângulos, ou seja, pela **soma algébrica dos monômios semelhantes** $2xy$ e $3xy$.

$2xy + 3xy = (2+3)xy \Leftrightarrow 2xy + 3xy = 5xy$ (propriedade associativa da adição).

Logo, a área da figura toda é $5xy$.

Vejamos outros exemplos de adição algébrica de monômios

- $3x^2 - 9x^2 + 8x^2 = 2x^2$
- $1{,}4xa^2 - 0{,}8xa^2 - 2xa^2 = -1{,}4xa^2$

A adição algébrica de monômios semelhantes é obtida adicionando-se algebricamente os coeficientes e mantendo-se a parte literal.

Observações:

- Podemos adicionar algebricamente apenas monômios semelhantes.
- Adicionar algebricamente monômios semelhantes é o mesmo que reduzir termos semelhantes.

(...)

Perceba o leitor a incoerência: para definir a adição, está utilizando a multiplicação de expressões literais! Além disso, falta uma explicação para o fato de só podermos adicionar algebricamente monômios semelhantes. Nota-se, também, a pouca importância dada pelos autores à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, além do erro de chamar de *propriedade associativa da adição*.

Por um lado, os autores dos livros didáticos sugerem uma definição de adição de expressões algébricas ao informar "agrupa-se os termos semelhantes", sem levar em conta que, em expressões algébricas, estamos lidando com números e que, portanto, já existe uma adição definida. Até aí, poderíamos pensar que teríamos (como em polinômios) uma adição numérica, representada por +, e uma adição algébrica, representada por $\oplus$. No entanto, no momento em que substituem nas aplicações x por 3, por exemplo, e operam com números, estão subentendendo que a adição envolvendo números coincide com a adição de expressões algébricas, sutileza desnecessária e não discutida em nenhum momento. Este último comentário nos leva a considerar também o seguinte item:

3.5.2 Mencionar, desnecessariamente, que as regras/receitas podem ser utilizadas sem a necessidade de se preocupar com o que as expressões algébricas estão representando

Livro 6

(...)

CÁLCULOS ALGÉBRICOS

Vamos ver mais cálculos efetuados com as expressões algébricas. Serão apresentadas algumas regras que nos permitem operar com as expressões sem grande preocupação com o que elas possam estar representando. Assim, estaremos estendendo os cálculos que fazemos com números para esses novos elementos que são as expressões algébricas.

(...)

Ao afirmarem isso, os autores estão fatalmente deixando passar a ideia de polinômio, os quais são, conforme o Capítulo 2 "expressões matemáticas simbólicas", onde o símbolo X

é *indeterminada*, não representando um número. Em expressões algébricas, por sua vez, o símbolo *x* é *variável*, representando um número. Reiteramos aqui a sutil necessidade acarretada de, ao ser substituído efetivamente *x* por um número, ser confirmado que as adições envolvidas nos levam ao mesmo resultado.

3.5.3 Efetuar a divisão de expressões algébricas polinomiais pelo algoritmo da divisão euclidiana, como se isso fosse apenas imitar a divisão de inteiros

Ressaltamos que por trás do procedimento de divisão de expressões algébricas polinomiais pelo algoritmo da divisão euclidiana está a divisão de polinômios, conforme podemos ver pelo seguinte exemplo:

$$\begin{array}{r|l} X^2-16 & X-4 \\ \cline{2-2} -\left(X^2-4X\right) & X+4 \\ \cline{1-1} 4X-16 & \\ -\left(4X-16\right) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Se este procedimento imitasse a divisão com números, então X poderia ser considerado um número, por exemplo, $X=4$, levando-nos a

$$\begin{array}{r|l} 4^2-16 & 4-4 \\ \cline{2-2} -\left(4^2-4\times 4\right) & 4+4 \\ \cline{1-1} 4\times 4-16 & \\ -\left(4\times 4-16\right) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

O último procedimento não é válido, pois estamos efetuando uma divisão por zero!!! Portanto, obviamente, o primeiro procedimento está lidando efetivamente com uma divisão de polinômios e não com uma divisão de números.

Outro argumento para convencer o leitor da falsa analogia entre a divisão de polinômios e a divisão de números é o seguinte exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 2X^2+6X+4 & X-2 \\ \cline{2-2} -\left(2X^2-4X\right) & 2X+10 \\ \cline{1-1} 10X+4 & \\ -\left(10X-20\right) & \\ \cline{1-1} 24 & \end{array}$$

Ou seja, o polinômio $2X^2 + 6X + 4$ não é divisível pelo polinômio $X - 2$. Se esta divisão imitasse a divisão com números, então X poderia ser considerado um número, por exemplo, $X = 2$ levando-nos ao mesmo problema do exemplo anterior. Mas também poderíamos considerar X = 10, o que nos levaria a

$$
\begin{array}{r|l}
2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 4 & 10 - 2 \\ \cline{2-2}
-\left(2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10\right) & 2 \cdot 10 + 10 \\ \cline{1-1}
10 \cdot 10 + 4 & \\
-\left(10 \cdot 10 - 20\right) & \\ \cline{1-1}
24 &
\end{array}
$$

que, no entanto, é uma divisão ainda incompleta, pois,

$$
\begin{array}{r|l}
264 & 8 \\ \cline{2-2}
 & 33 \\
0 &
\end{array}
$$

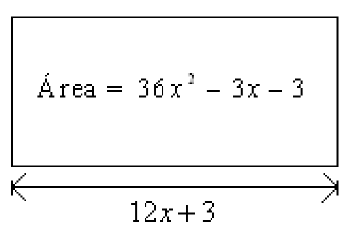
Concluímos, então, que os autores de livros didáticos estão sim usando a divisão de polinômios, mas esta não é uma mera "imitação" da divisão de números. Observamos, no Capítulo 2, que existe sim uma imitação, mas esta diz respeito a uma outra visão: é um procedimento que só se encerra quando obtemos um resto de "tamanho" menor do que o do divisor.

Resta-nos a questão: que utilidade é mencionada nos livros didáticos para a divisão de polinômios? Apresentamos aqui um exemplo retirado do **livro 3**:

(...)

Ao dividir a área do retângulo por seu comprimento, obtemos sua largura.

O retângulo abaixo tem área indicada pelo polinômio $36x^2 - 3x - 3$, e o comprimento indicado pelo polinômio $12x + 3$



a) Que polinômio indica a largura desse retângulo?

b) Qual é a área desse retângulo quando $x = 2$ cm?

c) Qual é a largura desse retângulo quando $x = 2$ cm?

(...)

Observe que, com o conhecimento de fatoração de expressões algébricas em nível de sétima série, muito dificilmente um aluno conseguiria resolver esse exercício. Portanto, os autores estão chegando à resposta do problema, $3x-1$, a partir da identidade polinomial $36X^2 - 3X - 3 = (12X+3)(3X-1)$, gerada pela divisão $36X^2 - 3X - 3 \div (12X+3)$, que por sua vez origina a identidade numérica $36x^2 - 3x - 3 = (12x+3)(3x-1)$, válida para todo número x real (veja Proposição 6 do Capítulo 2). Ressaltamos que esta passagem é matematicamente não-trivial (ver Capítulo 2), mas que, no entanto, nunca é explicitada ou discutida nos livros analisados[2].

Citamos aqui mais alguns exemplos retirados dos livros didáticos analisados para que o leitor confirme a utilização de divisão de polinômios:

Livro 3

Calcule o quociente Q e o resto R das divisões em seu caderno:

a) $\left(x^3 + 3x^2 - 7x - 3\right) \div \left(x-2\right)$

A resposta dada ao exercício no livro (do professor e do aluno) é $Q = x^2 - 5x + 3$ e $R = 3$. Além de o quociente estar errado, deveria ser $Q = x^2 + 5x + 3$, observe que obviamente é uma resposta errada para o resto de uma divisão numérica se tomarmos, por exemplo, $x = 3$. Além disso, como não há qualquer menção ao fato de que devemos exigir $x \neq 2$, para que a divisão faça sentido, concluímos que o autor está trabalhando, de fato, com polinômios.

Livro 1

O polinômio $2x^4 - x^3 - 2x + 1$ é divisível por $x^3 - 1$? Por quê?

Resposta dada no livro do professor: "Sim, pois o resto é zero". Nesse exercício, não há qualquer alusão à impossibilidade de x ser igual a 1. Com isso o autor está sim trabalhando com polinômios. Apesar de ser possível chegar-se à identidade

[2] A expressão "matematicamente não-trivial" refere-se ao encaminhamento que acabamos de relatar: a divisão do polinômio $2X^2 + 6X + 4$ pelo polinômio $X-2$ nos leva à identidade polinomial $2X^2 + 6X + 4 = (X-2)(2X+10) + 24$ que, por sua vez, dá origem à identidade numérica $2x^2 + 6x + 4 = (x-2)(2x+10) + 24$ que é válida inclusive para $x = 2$.

$2x^4 - x^3 - 2x + 1 = (x^3 - 1)(2x - 1)$ por mera fatoração, notem-se os termos utilizados "divisível por" e "resto" que confirmam a intenção de se utilizar divisão de polinômios.

Por conta de todas as dificuldades levantadas, recomendamos que não sejam solicitados exercícios que necessitem da divisão de polinômios no ensino fundamental. Sugerimos que nesse nível sejam propostos exercícios que exijam apenas o conhecimento da fatoração de expressões algébricas polinomiais usualmente trabalhadas.

Note-se que, semelhantemente ao exercício do **livro 3**, o qual se referia à área do retângulo, **o livro 4**, por exemplo, apresenta o seguinte exercício referente à área do quadrado, e cuja solução exige apenas o conhecimento de fatoração (no caso, do trinômio quadrado perfeito).

Em cada caso, determine a expressão para o lado do quadrado

a)

Área =
$x^2 + 6x + 9$

b)

Área =
$36y^2 - 60y + 25$

3.5.4 Trabalhar com a expressão "<u>a</u> fatoração" ou "<u>a</u> fatoração completa" de uma expressão algébrica polinomial

Em geral, os livros didáticos definem que fatorar uma expressão algébrica polinomial é reescrevê-la como um produto de duas ou mais expressões algébricas polinomiais. Todos mencionam, em algum momento (seja no texto, seja nos exercícios) a expressão "**a** fatoração" ou "**a** fatoração completa" de uma expressão algébrica polinomial, subentendendo, portanto unicidade de fatoração (completa).

O **livro 9** chega a dar a seguinte definição:

- Um polinômio está completamente fatorado quando os fatores que o compõem não podem mais ser fatorados

e apresenta o seguinte exemplo:

- Fatore completamente a expressão $16a^2b^3x + 24ab^2x^2$.

$4abx(4ab^2 + 6bx)$ é uma forma fatorada de $16a^2b^3x + 24ab^2x^2$.

Mas, atenção! A fatoração não está completa.

O binômio $4abx(4ab^2+6bx)$ que compõe o produto ainda pode ser fatorado: $2b(2ab+3x)$.

Então, $16a^2b^3x+24ab^2x^2 = 4abx \cdot 2b(2ab+3x)$.

Assim, a fatoração completa de $16a^2b^3x+24ab^2x^2$ é $8ab^2x(2ab+3x)$.

No **livro 4**, encontramos o exercício:

Fatore completamente:

a) $5x^5+10x^4+5x^3$

b) $12a^2+60a+75$

A resposta (única!) apresentada no livro (inclusive no livro do Professor!) para o item (a) é $5x^3(x+1)^2$ e para o item (b) é $3(2a+5)^2$.

No **livro 1**, há o exercício:

Faça **a** fatoração completa [grifo nosso]

a) $3x^2+6x+3$

b) $10a^2-20a+10$

e) x^4-2x^2+1

As respostas (únicas!) dadas no livro do professor são: a) $3(x+1)^2$ b) $10(a-1)^2$ e) $(x+1)^2(x-1)^2$.

Apesar de, neste nível, o universo numérico do aluno ser, no mínimo, o conjunto dos números racionais, raramente os autores apresentam exemplos ou exercícios com coeficientes racionais não-inteiros ou até mesmo coeficientes irracionais (no caso de já ter sido trabalhado o conjunto dos números reais), conforme já ressaltamos no Aspecto 2. Este fato requereria no mínimo um comentário sobre a limitação do universo dos coeficientes em cada expressão algébrica considerada e sobre a fatoração esperada, principalmente sobre o coeficiente esperado no fator comum, quando o mesmo existe. Por exemplo: está errado escrever $14x\left(\frac{1}{7}x^2+\frac{3}{7}x+\frac{5}{7}\right)$ como fatoração da expressão $2x^3+6x^2+10x$?

Como a maioria das expressões algébricas envolve exclusivamente coeficientes inteiros, é comum encontrarmos $2x(x^2+3x+4)$ como resposta **única** para a expressão acima, onde o fator comum tem para coeficiente o máximo divisor comum dos coeficientes dos termos da expressão. Há autores que inclusive referem-se ao máximo divisor comum. Salientamos que esta terminologia não é adequada num universo $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, onde não temos a unicidade dos coeficientes da fatoração completa, pois, como esses universos são corpos, não é relevante falar-se em divisor, muito menos em máximo divisor comum de dois ou mais números.

Convém ressaltar que dois livros didáticos analisados (livro 5 e livro 6) mencionam outras formas de se fatorar uma expressão algébrica polinomial, por exemplo:

Livro 6

(...)

Há várias maneiras de fatorar uma expressão:

$$\boxed{4x^3+6x^2}\quad \begin{aligned} &= 2(2x^3+3x^2) \\ &= x(4x^2+6x) \\ &= 2x(2x^2+3x) \\ &= 2x^2(2x+3) \end{aligned}$$

Preferimos sempre colocar em evidência o maior número e as letras com maiores expoentes.

Assim, a melhor fatoração de $4x^3+6x^2$ é $2x^2(2x+3)$.

(...)

O livro 5 faz uso inclusive de coeficientes racionais não-inteiros, mesmo quando a expressão original só tem coeficientes inteiros:

Livro 5

(...)

Note que existem outras formas de fatorar esse polinômio:

$$6x^2y+9x^3y = y(6x^2+9x^3) = 3(2x^2y+3x^3y) = \frac{1}{2}x^2y(12+18x).$$

Esse mesmo livro, em alguns exercícios, informa ao aluno o universo esperado como coeficiente do fator comum em cada expressão algébrica considerada:

(...)

Qual é o monômio de maior grau e de maior coeficiente numérico inteiro que é fator de cada termo do polinômio $9x^3-48x^2+15x$? Fatore esse polinômio.

(...)

Qual seria, então, **uma** fatoração completa para a expressão algébrica

$$\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x\,?$$

Obviamente o universo numérico é no mínimo $\mathbb{Q}$ e as fatorações $\frac{2}{3}x\left(x^2+2x+4\right)$, $2x\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)$, assim como $\frac{5}{7}x\left(\frac{14}{15}x^2+\frac{28}{15}x+\frac{56}{15}\right)$ são corretas, no sentido que tanto o polinômio $\frac{2}{3}X\left(X^2+2X+4\right)$ como os polinômios $2X\left(\frac{X^2}{3}+\frac{2}{3}X+\frac{4}{3}\right)$ e $\frac{5}{7}X\left(\frac{14}{15}X^2+\frac{28}{15}x+\frac{56}{15}\right)$ envolvem fatores que são ou invertíveis ou irredutíveis em $\mathbb{Q}$[X] e, portanto, originam fatorações completas da expressão algébrica $\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x$. A análise dos nove livros didáticos mostrou-nos que as respostas dadas para os exercícios de fatoração são únicas, tanto no livro do professor como no livro do aluno.

Reiteramos que, com certeza, os livros estão pecando ao apontarem uma única resposta para fatoração de expressões algébricas polinomiais!

Além disso, os livros didáticos analisados (exceção ao **livro 5**) não apresentam qualquer situação que envolva uma fatoração em que seja dado um fator não usual, por exemplo: fatorar a expressão $5x^2+4x$ de modo que um dos fatores seja $5x$. A fatoração ficaria, então, $5x\left(x+\frac{4}{5}\right)$.

Salientamos que a ideia de "forçar" o aparecimento de um fator comum, diferente dos usualmente apresentados nos livros didáticos, pode ser útil. Por exemplo, para a dedução da forma canônica da função quadrática, no primeiro ano do ensino médio, é comum utilizar-se o seguinte encaminhamento:
Supondo $a\neq 0$,

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, fica aqui também reiterada nossa posição apresentada no Capítulo 1, quanto à dimensão *estrutural* da álgebra (veja quadro da página 28), onde as letras são vistas como *símbolo abstrato* e, para cuja interpretação não conseguimos entender outra que não seja a de *indeterminada* (afinal, no presente contexto, que outra interpretação pode se dar a uma letra além de variável, incógnita, parâmetro ou indeterminada?).

Até aqui estávamos pontuando equívocos dos livros didáticos no tratamento de expressões algébricas polinomiais via polinômios. Agora, passamos a comentar e exemplificar algumas aplicações da fatoração de expressões algébricas polinomiais no ensino fundamental com as quais concordamos:

- Sobre a simplificação de frações algébricas, desde que sempre seja tomado o cuidado de discutir o zero no denominador[3]:

Salientar que é verdade que $\frac{4x+8}{x^2-4} = \frac{4(x+2)}{(x+2)(x-2)}$, mas que a igualdade $\frac{4(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x-2}$ só é verdadeira para $x \neq -2$.

- Sobre a resolução de algumas equações, inclusive equações de grau maior do que 2 explorando a propriedade da integridade em qualquer subanel de $\mathbb{R}$.

a) $5x^2 + 15x = 0 \Rightarrow 5x(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -3$

b) $x^3 + 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2+2x+1) = 0 \Rightarrow x(x+1)^2 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -1$

- Sobre a resolução de problemas do tipo: "A área de um retângulo é dada pela expressão $x^2 + 7x + 3x + 21$. Como poderíamos representar as expressões para as medidas dos lados do retângulo?"

[3] Note que identificar quando ocorre o zero no denominador pode acarretar uma discussão bastante complexa, a menos que restrinjamos os exemplos para casos mais acessíveis a um aluno de Ensino Fundamental.

- Sobre "forçar fatorações adequadas para o momento" Por exemplo, na oitava série, é possível relacionar fatoração de expressões algébricas com soluções de equações quadráticas, sem recorrermos à fatoração de polinômios, bastando apresentar o assunto como segue:

a) Apresentamos a seguinte identidade numérica:

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

b) Portanto

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-b) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = b,$$

de modo que *a* e *b* podem ser descobertos a partir da fatoração.

c) E, se a expressão é da forma $ax^2 + bx + c$, fazemos o seguinte passo inicial, salientando novamente a utilidade de ensinar a encontrar um "fator comum não usual":

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right],$$

de modo que se α e β são as soluções da equação $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, então

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Encerramos este capítulo respondendo a seguinte pergunta: **afinal, o que entendemos por *expressão algébrica*?**

Uma *expressão algébrica* é uma listagem de operações matemáticas, números e *números genéricos*, onde:

- as operações matemáticas são adição, subtração, multiplicação (incluindo sua abreviação: potenciação), divisão e radiciação, todas elas envolvidas apenas um número finito de vezes;
- os *números genéricos* são representados por letras, chamadas *variáveis.* Cada variável, por sua vez, representa qualquer elemento de um conjunto numérico pré-estabelecido, o chamado *domínio desta variável*;

- tal listagem deve “fazer sentido”, isto é, deve ser tal que, ao substituirmos cada variável por algum valor do seu domínio e igualarmos a nova expressão obtida a um número conhecido, esta igualdade se transforma em uma proposição, isto é, em uma afirmação passível de um valor lógico (verdadeiro ou falso).

Exemplo: $x^2 + \frac{5}{7}\sqrt{x} + \frac{3}{2}$, com x uma variável de universo reais positivos, é uma expressão algébrica porque, ao fazermos $x = 5$, a igualdade $5^2 + \frac{5}{7}\sqrt{5} + \frac{3}{2} = 2$ faz sentido em Matemática e tem até um valor lógico (no caso, falso). Já $\div 2 + \times 3x$ não é uma expressão algébrica, pois nenhum valor que atribuamos a x será capaz de transformar a igualdade $\div 2 + \times 3x = 2$ em uma afirmação com sentido em Matemática.

Finalmente, observamos que "expressão algébrica" é sinônimo de "fórmula radical"; esta, por sua vez, pode ser precisamente definida (portanto tornando bem preciso o sentido matemático mencionado anteriormente) fazendo uso de extensões de corpos e do conceito de elemento algébrico sobre um corpo. Maiores detalhes sobre o assunto podem ser vistos em Ripoll (preprint).

4 PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo, relatamos o trabalho realizado em sala de aula durante o primeiro trimestre do ano letivo de 2008. Começamos fazendo uma breve descrição da turma de sétima série e da escola onde realizamos o trabalho.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA E DA TURMA[1]

A Escola Municipal de Ensino Fundamental Paulo Beck localiza-se em um bairro do município de São Leopoldo caracterizado pelos altos índices de violência e criminalidade. A população é, em geral, de classe média-baixa e baixa, incluindo casos que beiram a pobreza.

A escola começou a ser construída no final da década de 1980, após grande movimento da comunidade, pois as crianças precisavam deslocar-se para longe de suas casas a fim de estudar. Foi inaugurada em 10 de julho de 1990, mas o início de suas atividades deu-se antes, em 15 de março de 1990, atendendo a alunos de primeira à quarta série.

Inicialmente com quatro salas de aula, a escola precisou contar com outros espaços na comunidade para acolher o número crescente de alunos. Em 1998 foram construídas mais duas salas de aula que foram destinadas a duas turmas de quinta série, mas a escola ainda não possuía refeitório nem sala dos professores.

Em 2005, através do Orçamento Participativo, a comunidade conseguiu a ampliação da escola, concluída em 2008. Durante esse tempo, a escola ampliou sua oferta de vagas e incluiu a sétima série. Finalmente, em 2009, passou a oferecer vagas em todas as séries do ensino fundamental.

Atualmente, a escola atende a todo ensino fundamental e EJA nos três turnos, dispondo dos seguintes espaços físicos: quinze salas de aula, seis banheiros, auditório, biblioteca, cozinha, laboratório de informática, quadra esportiva coberta, refeitório, sala dos funcionários, sala dos professores, sala de estudos de recuperação, sala para arquivo e reuniões, salas da equipe diretiva e secretaria.

A turma em que foi realizada a experiência de ensino contava, no início do ano, com 21 alunos na faixa etária de 12 a 15 anos (12 anos – 1 aluno, 13 anos – 6 alunos, 14 anos – 9 alunos, 15 anos – 5 alunos). Destes, 9 eram do sexo masculino e 12 do sexo feminino. Na trajetória escolar desses alunos, dez já haviam sido reprovados pelo menos uma vez. No

[1] Informações retiradas da agenda de trabalho da escola de 2008.

decorrer do ano, dois alunos foram transferidos para outra escola e duas alunas evadiram. Ao final do ano, apenas uma aluna ficou retida na 7ª série.

Quando da apresentação da proposta de trabalho para o ano letivo, os alunos ficaram entusiasmados com a ideia de participar de uma pesquisa e de saber que uma professora da Universidade iria observar o trabalho deles em aula. Perguntaram por que eu ainda estava estudando, já que como professor eu já deveria saber tudo da matéria.

4.2 RELATOS DAS AULAS

Ao todo, foram 36 encontros ocorridos nas terças, quartas e quintas-feiras (Figura 6). Nas terças e quintas-feiras, as aulas tinham duração de dois períodos de 50 minutos e aconteciam após o intervalo (quarto e quinto períodos). Nas quartas-feiras, as aulas tinham duração de um período de 50 minutos e ocorriam no terceiro período.

	Março				**Abril**					**Maio**				**Junho**
Terça	**04**	**11**	**18**	**25**	**01**	**8**	**15**	**22**	**29**	**06**	**13**	**20**	**27**	**3**
Quarta	**05**	**12**	**19**	**26**	**02**	**9**	*****	**23**	**30**	**07**	**14**	*****	**28**	**4**
Quinta	**06**	**13**	*****	**27**	**03**	**10**	**17**	**24**		**08**	**15**	*****	*****	**5**

Figura 6: Datas dos Encontros

Este primeiro trimestre foi dedicado a uma prévia familiarização com o pensamento genérico e com o método de argumentação matemática, durante o qual fizemos uma revisão de conteúdos aritméticos de quinta e sexta séries, através de questões de caráter genérico, enfatizando as propriedades das operações com números naturais, inteiros e racionais e explorando, paralelamente, o pensamento genérico em cima de conteúdos que, esperava-se, fossem familiares aos alunos. Entre as propriedades estudadas, destacamos a comutatividade e a associatividade da adição e da multiplicação e a distributividade da multiplicação em relação à adição.

O motivo da escolha desse conteúdo é que as propriedades das operações com números são o que justificam as operações envolvendo expressões algébricas polinomiais, objetivo maior desse trabalho.

Sendo assim, escolhemos os seguintes assuntos para tratar durante este primeiro trimestre:

1. Que tipo de respostas podemos encontrar ao resolver problemas matemáticos?
2. Os algoritmos das quatro operações.
3. Discussões genéricas sobre as operações de subtração e divisão e sobre múltiplos e divisores.
4. Paridade e resto da divisão de números naturais.
5. Divisibilidade.
6. Propriedades das operações: comutatividade e associatividade da adição e da multiplicação e distributividade da multiplicação em relação à adição, envolvendo os campos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{Q}$.

Nos relatos constarão os objetivos específicos de cada aula, o roteiro das questões a serem propostas, os procedimentos, as expectativas, o relato propriamente dito e a minha avaliação da aula, com possíveis encaminhamentos alternativos.

Durante as aulas buscamos sempre os seguintes objetivos gerais:

- Familiarizar os alunos com o raciocínio genérico, a partir da apresentação de questões de caráter genérico.
- Estimular a argumentação e comunicação de ideias matemáticas, tanto por escrito quanto oralmente, enfatizando a necessidade de que os resultados e os argumentos sejam fundamentados matematicamente.
- Familiarizar os alunos, aos poucos, com o uso de letras para representar números de maneira genérica, introduzindo naturalmente as expressões algébricas e suas operações.

4.2.1 Dia 04/03 – Apresentação

Objetivos:

- Apresentar a proposta de trabalho para o ano letivo.
- Com o objetivo de começar a desmistificar a Matemática em relação a questões cuja resposta é apenas um número, chamar a atenção dos alunos e familiarizá-los com alguns diferentes tipos de respostas possíveis em Matemática: um número, mais de um número, porém uma quantidade finita, uma infinidade de números, uma impossibilidade, uma expressão, uma explicação ou justificativa, uma figura, etc.

- Iniciar rápida sondagem de conhecimentos matemáticos dos alunos.

Roteiro de questões:

1. Preencha o quadro com um número que falta para que a igualdade 5 + ☐ = 9 seja verdadeira.
2. Preencha os quadros com números **naturais** que faltam para que a igualdade ☐ + ☐ = 9 seja verdadeira.
3. Agora, resolva a questão 2 utilizando números **inteiros**.
4. Encontre um número que, ao ser elevado ao quadrado, dê como resultado um número negativo.
5. Escreva em linguagem matemática: a soma de dois números representados por x e por y. Explique porque o número 2 é o único número primo par.

Procedimentos:

Aula expositiva em que o professor faz perguntas oralmente aos alunos, procurando estabelecer um diálogo com os mesmos, estimulando-os a reflexões e justificativas para suas respostas.

Expectativas:

Espera-se que os alunos percebam (e se surpreendam até!) com algumas diferentes possibilidades de respostas para problemas de Matemática. Espera-se também, alguma dificuldade em relação às perguntas sobre números inteiros e escrita algébrica.

Relato da aula do dia 04/03:

Iniciei apresentando a proposta de trabalho para o ano letivo. Mencionei que em algumas aulas teríamos a presença de minha orientadora, a qual observaria as aulas. Os alunos ficaram entusiasmados com a ideia de participar de um trabalho de pesquisa.

Ao lançar a questão (1), a resposta “4” veio com facilidade. Facilmente também, os alunos encontraram quase todos os pares de números naturais da questão (2). As respostas vieram sem qualquer ordenação ou sistematização, com exceção do caso em que, quando algum aluno mencionava uma resposta, outro aluno comutava as parcelas para dar outra resposta. Organizei com eles as respostas a fim de nos certificarmos que ali estavam todas as possibilidades. Começando com o $9+0=9$, escrevi no quadro as respostas dos alunos[2]:

"9 + 0 = 9
8 + 1 = 9
7 + 2 = 9
6 + 3 = 9
5 + 4 = 9
4 + 5 = 9
3 + 6 = 9
2 + 7 = 9
1 + 8 = 9
0 + 9 = 9"

Para a questão (3), lembrei rapidamente que os inteiros compreendiam os números inteiros positivos, os inteiros negativos e o zero. Aqui, os alunos não apresentaram respostas diferentes das obtidas na questão anterior. Aproveitando a resposta da questão (2), acrescentei, acima e abaixo da mesma, algumas envolvendo números negativos:

$$\begin{gathered}
\vdots \\
11 + (-2) = 9 \\
10 + (-1) = 9 \\
9 + 0 = 9 \\
8 + 1 = 9 \\
7 + 2 = 9 \\
6 + 3 = 9 \\
5 + 4 = 9 \\
4 + 5 = 9 \\
3 + 6 = 9 \\
2 + 7 = 9 \\
1 + 8 = 9 \\
0 + 9 = 9 \\
(-1) + 10 = 9 \\
(-2) + 11 = 9 \\
\vdots
\end{gathered}$$

Os alunos perceberam que, continuando dessa forma, teríamos infinitos pares de números inteiros como resposta para a questão (3).

Para a questão (4), retomei o significado de "elevar ao quadrado". Coloquei a questão (4), particularizando mais: "Por exemplo, qual é o número que elevado ao quadrado, resulta em -4?" A resposta dos alunos foi "-2". Escrevi no quadro "$(-2)\times(-2)=?$", ao que alguns alunos responderam 4, enquanto outros responderam -4. Retomei rapidamente a "regra de sinais" da multiplicação e escrevi: "$(-2)\times(-2)=+4$ e $(+2)\times(+2)=+4$." Com isso, os alunos se convenceram que não existe número que elevado ao quadrado resulte em

[2] Combinei de início com os alunos que o número zero seria considerado natural.

-4. Mencionei que, por enquanto, eles não conheciam tal número, mas que no ensino médio eles teriam a oportunidade de conhecer.

Para responder de forma genérica a questão (4), utilizei a própria regra de sinais da multiplicação, escrevendo no quadro $(+)\times(+)=(+)$ e $(-)\times(-)=(+)$. Portanto, nunca vai resultar em um número negativo.

Finalmente, resumi o que tínhamos visto até aqui: "Podemos ter por resposta um número apenas, como na questão (1), diversos números (pares de números), como na questão (2), infinitos pares de números, como na questão (3) ou uma impossibilidade, como na questão (4)". Coloquei também que podemos encontrar uma expressão do tipo $x + y$, resposta para a questão (5) ou uma explicação ou justificativa, como na questão (6). Mencionei ainda que uma figura, um gráfico ou uma tabela, entre outros, também poderiam ser respostas a questões em Matemática.

Minha avaliação da aula:

Considero que os objetivos desta aula foram alcançados e as expectativas confirmadas. Os alunos participaram ativamente do trabalho e vários deles não tiveram receio em dar respostas, mesmo que incorretas. Ao final da aula, houve alunos que de fato ficaram surpresos com as diversas possibilidades de resposta para alguns problemas de Matemática.

Reconheço que, no momento em que os alunos comutavam as parcelas na questão (2), perdi a oportunidade de encaminhar alguma resposta que envolvia uma sistematização sugerida pelos alunos a partir de uma propriedade da adição.

Na questão (3), surpreendeu-me o fato de os alunos não se lembrarem dos números negativos e terem parado de responder ao completarem as parcelas apenas com números positivos e com o zero. Credito isso à pouca familiaridade ou à insegurança que os alunos têm com as operações envolvendo números negativos. Neste momento, eu poderia ter perguntado aos alunos "por que na listagem acima paramos no número 9?", na tentativa de incentivá-los a encontrar outras respostas. De qualquer forma, após eu fornecer algumas respostas, houve alunos que deram outros exemplos. Na questão (4), também apareceu uma dificuldade com números negativos, mas agora envolvendo a multiplicação.

4.2.2 Dias 05/03 e 06/03 - Algoritmos da Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de Números Naturais

Objetivos:

- Levantar questionamentos com os alunos sobre os algoritmos da adição, da multiplicação e da subtração de números naturais.
- Lembrar ou apresentar os nomes dos termos das operações com objetivo de facilitar a comunicação futura.
- Iniciar o trabalho com questões de caráter genérico.

Roteiro de questões:

1. Quando é que ocorre o “vai 1” nas adições envolvendo duas parcelas? O que significa o “vai 1” nessas adições?
2. Nas subtrações, quando é que precisamos “pedir emprestado”? O que significa “pegar 1 emprestado”? E por que o próximo algarismo fica valendo uma unidade a menos do que antes de “emprestar 1”?
3. Na multiplicação, por que devemos “deixar uma casa em branco” quando o segundo fator tem dois algarismos?

Procedimentos:

Os mesmos da aula anterior.

Expectativas:

Espera-se que os alunos apresentem dúvidas quanto ao nome dos termos das operações e dificuldades para comunicar suas ideias ao grupo. Espera-se uma boa participação da turma.

Relato da aula do dia 05/03:

Inicialmente, lancei as seguintes perguntas, a fim de dar a motivação para as questões envolvendo os algoritmos das operações:

a) Numa partida de vídeo game, Carlos fez 2597 pontos e Anderson fez 1110 pontos a mais. Quantos pontos os dois fizeram ao todo?
b) Em outra partida, Carlos fez 7621 pontos e Anderson fez 6235 pontos. Carlos fez quantos pontos a mais que Anderson?

Houve alunos que, na pergunta (a), responderam que ao todo os dois fizeram 3707 pontos, adicionando 2597 e 1110. Na pergunta (b) apareceu a resposta 13856, tendo o aluno adicionado 7621 e 6235. Este erro pode ter ocorrido por falta de atenção do aluno. Porém, pela minha experiência, esse tipo de erro ocorre frequentemente quando aparece a expressão "a mais" em alguma questão.

Passei às questões relativas aos algoritmos das operações. Perguntei: "Nas adições envolvendo duas parcelas, como as do problema (a), quando é que ocorre o 'vai 1'?" Depois de alguns instantes, um aluno respondeu: "Quando dá mais que 10." Pedi para o aluno explicar melhor sua resposta. O aluno se utilizou da resolução que estava no quadro:

$$\begin{array}{rcccc} & 3 & 7 & 0 & 7 \\ + & 2 & 5 & 9 & 7 \\ \hline & 6 & 3 & 0 & 4 \end{array}$$

"7 + 7 dá 14, que é mais que 10. Então fica o 4 e vai 1". Pedi para que o aluno calculasse o próximo algarismo da soma. Agora tínhamos que somar $1+0+9$, o que resulta em exatamente 10. O aluno se corrigiu, dizendo: "Ah! Então é quando dá mais que 9".

Lembrei que nosso sistema de numeração envolve unidades, dezenas, centenas, etc. e perguntei novamente: "Quando o que dá mais que 9?" Depois de alguma discussão, concluímos: "Nas adições envolvendo duas parcelas, o 'vai 1' ocorre quando a soma dos algarismos de uma classe (unidades, dezenas, centenas, etc.) ultrapassar 9".

Após concordarmos com a conclusão acima, lancei a pergunta: "E o que significa o 'vai 1' nas adições envolvendo duas parcelas?" Vários alunos responderam que significa "vai uma dezena", "vai uma centena", etc. Por fim, considerei encerrado o assunto com as seguintes conclusões, construídas pelos alunos com minhas sugestões: "Quando a soma dos algarismos das unidades ultrapassar 9, o 'vai 1' significa 'vai uma dezena'. Quando a soma dos algarismos das dezenas ultrapassar 9, o 'vai 1' significa 'vai uma centena' e assim sucessivamente".

Passei então a tratar do algoritmo da subtração de modo semelhante ao que havia sido feito na adição: "Após termos estudado um pouco a adição, podemos fazer perguntas parecidas para a subtração?" Alguns alunos responderam que no caso da subtração, não temos mais o "vai 1". O que temos agora é o "pede 1 emprestado" [3]. Coloquei a questão: "Quando ocorre o 'pede 1 emprestado' nas subtrações?" Com minha colaboração, saiu a resposta: "Nas

[3] Apesar da linguagem inadequada "pedir emprestado" em vez de "troca", resolvi não tocar neste assunto, (pois meu objetivo era outro, já bastante delicado para os alunos) e continuei a utilizá-la.

subtrações, o ‘pede 1 emprestado’ ocorre quando o algarismo de certa classe do subtraendo é maior do que o algarismo da mesma classe do minuendo”.

Para a questão do que significa o “pede 1 emprestado”, a resposta foi mais rápida, com vários alunos adaptando a resposta dada na adição para o caso da subtração: “No caso das unidades, o ‘pede 1 emprestado’ significa ‘pede 1 dezena’; no caso das dezenas, o ‘pede 1 emprestado’ significa ‘pede 1 centena’ e assim sucessivamente.”

Minha avaliação da aula:

Conforme eu esperava, os alunos apresentaram dificuldades para comunicarem seus pensamentos de forma clara e organizada. Embora as ideias lançadas por vários alunos acenarem para um raciocínio correto, a possível falta de conhecimento ou o pouco uso dos nomes dos termos das operações dificultaram a comunicação. Houve alunos que não participaram muito ativamente da aula, mas pareceu-me que acompanharam bem as discussões.

Relato da aula do dia 06/03:

Comecei a aula revisando o que havíamos feito no dia anterior. Finalizando a subtração, perguntei por que o algarismo que “emprestou 1” fica valendo uma unidade a menos. Rapidamente, alguns alunos responderam “é porque o algarismo das dezenas fica com uma dezena a menos, o das centenas, com uma centena a menos, e assim por diante”.

Passei a tratar da multiplicação quando o segundo fator possui dois algarismos. Perguntei: “Por que ‘deixamos uma casa em branco’ nas multiplicações em que o segundo fator tem dois algarismos?” Dois alunos responderam que é para não misturar as dezenas com as unidades. Pedi que esclarecessem o que haviam dito. Responderam com um exemplo:

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & 2 \\ & \times & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 6 \\ + & 8 & 4 & \square \\ \hline & 9 & 6 & 6 \end{array}$$

“O 2 do 23 significa duas dezenas, e duas dezenas vezes 2 dá 4 dezenas, então o 4 fica abaixo do 2, das dezenas.” Perguntei qual é o algarismo das unidades de qualquer número multiplicado por 10, ao que me responderam, após analisar alguns casos particulares que é sempre zero. Neste momento, não me ocorreu uma justificativa simples ou que não envolvesse o uso de letras para garantir o resultado. Resolvi não enfatizar muito isso, apesar de saber que uma justificativa genérica neste momento poderia ser importante para o trabalho.

Passei a tratar de multiplicações em que o segundo fator possui três algarismos. Os alunos reconheceram que, agora, seria necessário deixar duas casas em branco, ao fazermos uso do algarismo da classe das centenas, pois estaríamos multiplicando uma centena por uma unidade. Além disso, alguns alunos perceberam que se tivermos quatro algarismos no segundo fator, teremos quatro parcelas para somar; cinco algarismos, cinco parcelas, etc.

Não incluí nos objetivos dessa aula o algoritmo da divisão, pois, meu foco principal eram as propriedades da adição e da multiplicação. Mesmo assim, quis destacar que o algoritmo da divisão é feito da esquerda para a direita, diferentemente das outras operações, cujos algoritmos são realizados da direita para a esquerda. Porém, um aluno se antecipou: “Por que umas *contas* fazemos da direita para a esquerda e a divisão é ao contrário?” Devolvi a pergunta à turma, pedindo que fizessem alguns exemplos que passei no quadro. Tais exemplos consistiam de adições e subtrações em que o sentido de realização dos cálculos não importava, isto é, nas adições, a soma dos algarismos de qualquer classe nunca ultrapassava 9 e, nas subtrações, o algarismo de qualquer classe do minuendo era sempre maior que ou igual ao algarismo da mesma classe do subtraendo. Não anotei os exemplos, mas era algo do tipo:

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 3 & 7 \\ - & 4 & 1 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & 2 & 4 & 7 \\ + & 5 & 2 & 1 \\ \hline & 7 & 6 & 8 \end{array}$$

Depois coloquei exemplos em que operando da esquerda para a direita, a resolução era mais complicada[4]:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 2 & 1 \\ - & 2 & 8 & 7 \\ \hline & & 3 & 4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & 6 & 8 & 9 \\ + & 5 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

Fizemos o mesmo com a multiplicação e os alunos terminaram concordando que é mais simples operar da direita para a esquerda na adição, na subtração e na multiplicação, pois, uma vez colocado o algarismo na sua devida posição, ele não será mais afetado por outro cálculo posterior.

[4] Convido o leitor a realizar estes cálculos pelo algoritmo tradicional, só que da esquerda para a direita.

Escrevi no quadro algumas divisões e tentamos calculá-las da direita para a esquerda. Novamente, tivemos que modificar algum algarismo que já havia sido determinado em um passo anterior. Os alunos pediram para “deixar assim mesmo” e para que continuássemos “fazendo as contas” da maneira usual.

Para encerrar a aula, ainda pedi o seguinte exercício: Calcule mentalmente e registre seu pensamento no caderno:

a) $13 + 48 + 7 =$
b) $29 + 11 +15 =$
c) $84 + 18 + 16 =$
d) $3 \times 24 =$
e) $5 \times 81 =$
f) $7 \times 45 =$
g) $12 \times 18 =$

Meu objetivo com este exercício era verificar as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos, a fim de sondar se eles aplicavam de forma consciente algumas propriedades das operações com números naturais. Pude perceber que havia alunos que utilizavam as propriedades embora sem mencioná-las nos cálculos. Porém, havia alunos que procuravam repetir mentalmente os algoritmos tradicionais.

Minha avaliação da aula:

Apesar de nem todos os alunos terem participado ativamente da aula, considero que a turma acompanhou bem as discussões.

Quanto ao algoritmo da multiplicação, pretendo justificá-lo em outra oportunidade, utilizando a propriedade distributiva.

Relatei anteriormente que não me ocorreu uma justificativa simples para o fato de que ao multiplicarmos um número natural por 10 o algarismo das unidades é sempre zero. Mais tarde, pensei na seguinte estratégia:

Após realizar alguns exemplos numéricos, faríamos o seguinte cálculo simbólico:

$$
\begin{array}{r}
* \ \# \\
\times \ 1 \ 0 \\
\hline
0 \ 0 \\
+ \ * \ \# \quad \\
\hline
* \ \# \ 0
\end{array},
$$

onde utilizamos os símbolos * e # para representar algarismos, pois se para isso utilizarmos, neste momento, letras *a* e *b*, por exemplo, poderemos confundir um número de dois algarismos $ab = 10a + b$ com a multiplicação de *a* por *b*.

Numa próxima oportunidade, eu utilizaria a seguinte estratégia para justificar que o algarismo das unidades do produto de um número natural por 10 é zero: 42 × 10 = 42 × 1dezena = 42dezenas = 420 (para um aluno com experiência com o material dourado não deveria ser uma dificuldade a última igualdade).

Sobre a atividade final, notei que os alunos que estavam visualizando mentalmente os algoritmos tradicionais demoravam bem mais e tinham mais dificuldades em calcular do que os alunos que usavam outras estratégias de cálculo mental. Questionando algum destes últimos sobre que estratégias estavam utilizando nos cálculos, utilizavam invariavelmente alguma propriedade das operações com números naturais, embora não percebessem que as estavam utilizando (nem eu não estava requisitando essa consciência, nesse momento).

Para manter o formato, a questão (3) deveria ter sido complementada com a seguinte pergunta: o que significa “deixar uma casa em branco”?

4.2.3 Dias 11/03, 12/03 e 13/03 – Introdução de Letras para Representar Números na Abordagem da Subtração e da Divisão de Números Naturais

Objetivos:

- Reconhecer e utilizar os nomes dos termos das operações como um facilitador da comunicação.
- Relembrar o significado dos símbolos $<$, $>$, $\leq$ e $\geq$.
- Observar que no conjunto dos números naturais nem sempre é possível efetuar uma subtração ou uma divisão.
- Introduzir o termo “contraexemplo” e reconhecer esta nomenclatura como um facilitador da comunicação.
- Fazer uma breve revisão sobre divisibilidade no conjunto dos números naturais

(números primos e números compostos, conjunto de divisores e conjunto de múltiplos).

Roteiro de questões:

1. Sobre a subtração de números naturais

Chamamos de **diferença** ou **resto** ao resultado da subtração de dois números.

a) Decida se a afirmação que segue é verdadeira ou falsa, justificando sua decisão.

"A diferença entre dois números naturais quaisquer é **sempre** um número **natural**".

b) Existe algum número natural a tal que a expressão $10-a$ resulte em um número natural? Se existir, qual é ou quais são estes números?
c) Qual deve ser o menor número natural n de modo que a expressão $n-14$ dê como resultado um número natural?
d) Como devem ser dois números naturais para que a diferença entre eles seja um número natural?
e) Como devem ser dois números naturais a e b para que a diferença $a-b$ seja um número natural?[5]

2. Sobre a divisão de números naturais:

a) Decida se a afirmação que segue é verdadeira ou falsa, justificando sua decisão: "A divisão entre números naturais quaisquer resulta **sempre** em um número natural". (Aqui, será enfatizado na aula que desejaremos que a divisão seja exata).
b) Existe algum número natural b de modo que a expressão $12 \div b$ resulte em um número natural? Se existir, qual é ou quais são estes números?
c) Existe algum número natural y tal que a expressão $7 \div y$ tenha por resultado um número natural? Se existir, qual é ou quais são estes números?
d) Como podemos representar o número natural x de modo a garantir que o resultado da divisão $x \div 7$ seja um número natural?

Procedimentos:

---

[5] O que difere nas questões (d) e (e) é o fato de que na questão (d) os alunos poderão responder com palavras de maneira menos formal, utilizando, por exemplo, os termos minuendo e subtraendo. Na questão (e) estou forçando a resposta com o uso de letras para representar os números. Além disso, utilizarei o símbolo $\geq$ de modo a sintetizar simbolicamente a resposta dada em (d).

Para a primeira parte da atividade (subtração de números naturais) as questões serão escritas no quadro e os alunos trabalharão individualmente. Depois disso, o professor estimulará uma discussão com a turma, explicando e corrigindo as questões, ficando um aluno responsável por entregar uma folha com as respostas consideradas definitivas.

Para a segunda parte (divisão de números naturais), a turma será dividida em grupos. Novamente, as questões serão escritas no quadro. Todos os alunos devem copiar e responder as questões no caderno e cada grupo entrega uma folha com as respostas para o professor. No trabalho em grupos, a participação do professor deverá ser mínima e se concentrar em dúvidas pontuais. Após o trabalho em grupos, as soluções serão discutidas no grande grupo e um aluno ficará responsável por escrever um relatório, com as soluções consideradas finais.

Expectativas:

Durante o trabalho individual, espera-se que os alunos tenham muita dificuldade com o tipo de enunciado das questões. No trabalho em grupos, espera-se que os alunos discutam entre si diferentes soluções, expressando seus pontos de vista. Espera-se também que os alunos apresentem dificuldades para comunicarem suas ideias oralmente ou por escrito. Ainda, espera-se alguma dificuldade com o uso de letras para representar números. Creditamos esta possível dificuldade à falta de incentivo anterior à prática do método de argumentação matemática.

Relato da aula do dia 11 /03:

Após uma breve revisão dos assuntos trabalhados na aula anterior, comentei com os alunos sobre o assunto da aula e sobre a dinâmica da atividade. Como sondagem, perguntei aos alunos qual é o resultado de $2-3$, enquanto escrevia as questões no quadro. Todos concordaram que $2-3$ resulta em -1.

Embora a atividade fosse individual, os alunos começaram discutir sobre as questões. Deixei-os à vontade para fazer isso para que não perdessem motivação pelo trabalho e por entender que a atividade individual não fosse tão relevante.

Observando os alunos trabalharem, pude perceber suas dificuldades em escrever as respostas. Geralmente, estas eram dadas sem uma organização que garantisse a apresentação de todas as respostas. Na questão (1b), alguns alunos mencionavam os números sem qualquer ordem específica, por exemplo, 3, 7, 1, 4, etc.

Percebi também que a palavra *diferença*, para muitos alunos, não tinha o significado de resultado da subtração. Quando eu perguntei, por exemplo, qual é a diferença entre o número 10 e o número 6, apareceram respostas do tipo: “é que um número é diferente do outro”, “é que um é o 10 e o outro é o 6”.

Os alunos estavam tendo dificuldades para justificar a resposta da questão (1a). Comentei que, para justificar a falsidade de uma afirmativa, bastaria encontrar um exemplo em que ela não é verdadeira. Mas para justificar que uma afirmação é verdadeira não basta encontrarmos exemplos particulares, pois não poderemos fazer todos os infinitos (neste caso) exemplos possíveis. Para exemplificar, fiz a seguinte afirmação e perguntei: “Nesta sala, *todos* (destaquei o todos) os meninos usam boné. Esta afirmação é verdadeira ou falsa?” Todos concordaram que era falsa, pois havia um menino que não estava de boné (havia mais de um, mas um já era suficiente para garantir que não eram todos). Deixei-os pensarem na relação que havia entre este exemplo e a questão (1a).

Dada a dificuldade para compreender o enunciado da questão (1b), resolvi traduzi-la da seguinte forma: “Se é que existe, qual é ou quais são os números naturais que eu posso colocar no lugar da letra *a* de modo que o resultado da subtração seja ainda um número natural?”. Na questão (1c) também: “Qual é o menor número natural que posso colocar no lugar do *n* de modo que o resultado da subtração ainda seja um número natural?” Procedendo desta forma, alguns alunos começaram a se desembaraçar e a responder as perguntas.

Minha avaliação da aula:

Inicialmente, salientamos que o roteiro de questões sobre subtração dessa aula foi elaborado para alunos de sétima série que já conhecem, portanto, o universo numérico dos inteiros. Só existe resultado aqui porque a subtração é efetivamente uma operação quando passamos a considerar números inteiros. As questões relativas à divisão merecem considerações análogas agora considerando o universo numérico racionais.

Após ter feito uma aula sobre as operações aritméticas elementares em que foram lembrados e destacados os nomes dos termos das operações e, ainda, estando escrito em uma das questões que chamamos de diferença ao resultado de uma subtração, fiquei surpreso com o fato de alguns alunos não terem vinculado a palavra diferença ao resultado de uma subtração. Só aí é que me dei conta da infeliz terminologia *diferença* para o resultado da subtração. Minha sugestão é que se enfatize na sala de aula e nos livros didáticos a terminologia *resto*, que coincide com o significado na linguagem do dia a dia.

Mesmo que os alunos já tivessem tido alguma experiência com o uso de letras em Matemática, considero também que a introdução das letras para representar números pode ter sido feita de maneira muito abrupta. Depois que eu mudei o enunciado das questões (1b) e (1c) para "Se é que existe, qual é ou quais são os números naturais que eu posso colocar no lugar da letra a de modo que o resultado da subtração seja ainda um número natural?". Na questão (1c) também: "Qual é o menor número natural que posso colocar no lugar do n de modo que o resultado da subtração ainda seja um número natural?", os alunos as compreenderam melhor. Parece que não se trata simplesmente de uma mudança na maneira de perguntar, mas uma mudança mais profunda. Algo do tipo: "agora a letra a representa uma caixinha em que você vai depositando números. Quais são os números que você pode depositar nesta caixinha de modo que o resultado da subtração continue a ser um número natural?" Sugerimos ao leitor, então, um trabalho anterior de familiarização com o uso das letras, a partir da ideia de "caixinhas" onde depositamos todos os valores numéricos (do universo da variável).

Relato da aula do dia 12 /03:

Realizei a correção das questões sobre a subtração de números naturais. Para minha surpresa, pois a aula anterior não foi muito produtiva em termos de resultados, os alunos participaram ativamente da correção, dando exemplos, sugestões, criticando as respostas uns dos outros.

Introduzimos o termo "contraexemplo" como uma forma de justificar a falsidade de uma sentença. No presente caso, a afirmação da questão (1a) sobre subtração de naturais foi respondida com diversos contraexemplos. Cada aluno queria dar o seu. Inclusive, um aluno lembrou que eu já havia perguntado qual era o resultado de $2-3$, comentando que eu já havia respondido a questão e que eu só queria ver se eles estavam atentos.

Alguns alunos deram resposta incompleta para a questão (1b), deixando de fora um dos casos $a=0$ ou $a=10$.

Alguns alunos erraram a questão (1c), respondendo que o menor número natural é o zero. Provavelmente estes alunos não leram ou não entenderam o enunciado da questão e imaginaram que eu estava perguntando apenas qual seria o menor número natural. Em momentos como esses é que os próprios alunos corrigiam-se e criticavam-se uns aos outros.

A questão (1d) também foi crítica, pois os alunos não sabiam como escrever a resposta. Diziam: "O número de baixo *pode* ser menor do que o de cima". Perguntei: "Pode ou deve ser menor? E não pode ser igual?" Os alunos concordaram que "o número de baixo deve ser menor e pode ser igual ao de cima". Finalmente, com minha intervenção, saiu a resposta: "O minuendo deve ser maior ou igual ao subtraendo".

Para responder a questão (1e), novamente os alunos não souberam o que fazer com as letras. Comentei que era outra maneira de responder a questão anterior, só que agora, a letra a faz o papel de minuendo e a letra b representa o subtraendo. Aproveitei para lembrar os sinais de desigualdade e escrevi (pois a resposta não saiu) que a tradução, em símbolos matemáticos, da resposta anterior é: "Para que a diferença, $a-b$, entre dois números naturais a e b seja sempre um número natural, devemos ter $a \geq b$".

Minha avaliação da aula:

A introdução do termo "contraexemplo" foi bastante tranquila.

Há alunos que se apressam em responder sem antes ter lido completamente o enunciado, como no caso da questão (1c). Parece que há vários alunos que estão tentando competir para ver quem responde primeiro. Espero conseguir administrar esta competição em sala de aula e tirar disso algum benefício.

Alguns alunos são imprecisos (provavelmente devido à falta de prática) no momento de comunicarem suas respostas, como no caso em que respondem que o minuendo "pode" ser maior do que o subtraendo para que a subtração sempre resulte em um número natural. Neste caso, a expressão correta é "deve" ser maior. Parece-me, neste caso, que a ideia foi construída corretamente, pois quando eu perguntei se o termo correto é "pode" ou "deve", rapidamente os alunos se corrigiram dizendo que o minuendo "deve" ser maior ou "pode" ser igual ao subtraendo.

Quanto ao trabalho com as letras representando números genéricos, ficou muito claro que ele precisa ser retomado e muito reforçado.

Relato da aula do dia 13 /03:

Escrevi as questões sobre divisão no quadro e os alunos começaram a trabalhar. Muitos tiveram dúvida em como justificar a falsidade da afirmação na questão (2a), mesmo que já tivéssemos feito algo parecido nas aulas anteriores, para o caso da subtração. Resolvi orientar a turma toda, reforçando que, para garantir que a afirmação é falsa, bastaria encontrarmos um contraexemplo.

De maneira análoga ao que já havia feito para as questões de subtração, reescrevi os enunciados das questões (2b) e (2c): "Se é que existe, qual é ou quais são os números naturais que eu posso colocar no lugar da letra *b* de modo que o resultado da divisão (exata) seja ainda um número natural?"; "Se é que existe, qual ou quais devem ser os números naturais que podemos colocar no lugar do *y* de modo que $7 \div y$ resulte em um número natural?".

Muitos alunos apresentaram o zero como uma das respostas para a questão (2b). Comentei brevemente e de forma intuitiva sobre a impossibilidade de dividir por zero. Para encontrar os divisores de 12, os alunos iam "chutando" valores aleatoriamente e eu deixei para sistematizar isso na correção. Houve muita confusão entre o que são múltiplos e o que são divisores. Alguns alunos escreveram que o *b* poderia ser 12, 24, 36, etc.

Na questão (2d) os alunos também tiveram dificuldade. Alguns grupos conseguiram representar de forma genérica, com minha ajuda, e outros grupos, mesmo com minha ajuda, representaram com um conjunto de múltiplos de 7, escrevendo {0, 7, 14, 21,...}.

Na correção da questão (2d), utilizei mais ou menos a seguinte abordagem: "se $21 \div 7 = 3$, então $3 \times 7 = 21$. Outro exemplo, $35 \div 7 = 5$, então $5 \times 7 = 35$. Queremos que um número natural, representado pela letra *x*, ao ser dividido por 7 dê como resposta um número natural, que representaremos com a letra *n*. Então, temos $x \div 7 = n$, ou seja, $n \cdot 7 = x$. Logo, podemos representar o número natural *x* tal que a divisão deste número por 7 resulta em um número natural da seguinte forma: $x = n \cdot 7$ ou como $x = 7 \cdot n$, pois o resultado da multiplicação não muda quando trocamos a ordem dos fatores. Observem que colocando números naturais no lugar do *n* obtemos {0, 7, 14, 21, 28,...} que nada mais é do que o conjunto dos múltiplos de 7". Pelas reações dos alunos, alguns compreenderam bem; outros, não tão bem, então, retomamos o raciocínio nessa mesma aula.

Minha avaliação da aula:

Considero que a dificuldade em encontrar um contraexemplo nesta aula não se deve ao ideia de contraexemplo, e sim à dificuldade em compreender o significado de divisão inteira. Agora reconheço que teria sido útil começar discutindo "divisão inteira" e "divisão não inteira" e convencionar que, no que passaríamos a tratar, nos referiríamos à divisão inteira.

Uma possibilidade de resolução da questão (2d), que só me ocorreu depois da aula, foi a de usar o algoritmo da divisão e depois me referir à *prova real* em vez de fazer $x \div 7 = n \Rightarrow x = 7 \cdot n$. Ficaria algo assim:

$$\begin{array}{l|l} x & 7 \\ \cline{2-2} 0 & n \end{array} \Rightarrow x = 7 \cdot n + 0 = 7 \cdot n$$

Considerando todo o trabalho nestes três dias de aula, pude perceber algum progresso no entendimento dos alunos no que diz respeito a questões de caráter genérico. É claro que os altos e baixos são esperados e por vezes um aluno que responde bem uma determinada questão, não consegue responder a seguinte. Outras vezes, o aluno só consegue seguir adiante com a confirmação do professor de que aquilo que respondeu antes está correto. Acho isto bastante natural, tendo em vista a novidade do tipo de questões que estão sendo aqui propostas.

4.2.4 Dias 18/03 e 19/03 – Propriedades Comutativa e Associativa da Adição e da Multiplicação de Números Naturais

Objetivos:

- Revisar ou apresentar as propriedades das operações com números naturais, em particular, a comutatividade e associatividade da adição e da multiplicação, lembrando ou apresentando os nomes dados às propriedades com o objetivo de facilitar a comunicação futura.
- Justificar de maneira precisa as propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação de números naturais.

Roteiro de questões:

1. Observe as seguintes sentenças:

Para todos os números naturais *m* e *n*,

$$m + n = n + m \quad \text{e} \quad m \cdot n = n \cdot m$$

a) Tente enunciar com palavras essas sentenças matemáticas. O que elas significam?
b) As sentenças acima são propriedades (características) da adição e da multiplicação de números naturais. Alguém conhece o nome dessas propriedades?
c) Você consegue encontrar um exemplo de aplicação destas propriedades?
d) A subtração de números naturais também possui a propriedade comutativa?

Justifique.

2. Observe as seguintes sentenças:

Para todos números naturais a, b e c,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

a) Tente enunciar com palavras essas sentenças matemáticas. O que elas significam?
b) As sentenças acima são propriedades (características) da adição e da multiplicação de números naturais. Alguém conhece o nome dessas propriedades?
c) Você consegue encontrar um exemplo de aplicação destas propriedades?
d) A subtração de naturais também possui a propriedade associativa? Justifique.

Procedimentos:

Antes de formular as questões, o professor expõe uma aula sobre as propriedades das operações justificando-as a partir de material manipulativo e do contexto geométrico, (o detalhamento da mesma encontra-se no relato). Para a realização da atividade, a turma será dividida em grupos. As questões serão escritas no quadro, com exceção de (1d) e (2d) que já mencionam o nome das propriedades e serão deixadas para depois de respondidas as questões (1b) e (2b). Todos os alunos devem copiar e responder as questões no caderno e cada grupo entrega uma folha com as respostas para o professor. Pretende-se que a participação do professor seja mínima e se concentre em dúvidas pontuais. Após o trabalho em grupos, as soluções serão discutidas no grande grupo e um aluno ficará responsável por escrever um relatório, com as soluções consideradas finais.

Expectativas:

Espera-se que os alunos apresentem uma maior desenvoltura na comunicação e na argumentação matemática, mas que ainda apresentem dificuldades nesta tarefa. Espera-se também uma maior familiaridade com o uso das letras para representar números. Imagina-se que os alunos não consigam responder as questões (1b), (1c), (2b) e (2c), pois provavelmente nas séries anteriores não tiveram um trabalho muito focado nas propriedades das operações. Espera-se que os alunos tenham mais desenvoltura com o uso de contraexemplos, proporcionada pelas aulas anteriores.

Relato da aula do dia 18/03:

Para esta aula, no que diz respeito à comutatividade da adição de naturais, levei potes plásticos opacos com tampa. Chamei a turma para ficarem próximos à minha mesa e comecei a aula mostrando os dois potes abertos. Num dos potes, à minha esquerda, coloquei três pedaços de giz, no outro pote, à minha direita, coloquei quatro pedaços de giz e perguntei: “Quantos pedaços de giz tenho, ao todo, nos dois potes?” Os alunos responderam: “Sete”. Troquei a posição dos potes, isto é, o pote que estava à esquerda foi para a direita e o da direita para a esquerda. Perguntei, então: “E agora, quantos pedaços de giz há, ao todo, nos dois potes?” Os alunos riram e disseram que eu estava de brincadeira[6], mas insisti para que respondessem. E os alunos: “A mesma coisa que antes, sete!” Refiz isto com diferentes quantidades de giz em cada pote, sempre com os alunos vendo a quantidade de giz que eu havia colocado em cada pote. Às vezes, alguns respondiam dizendo que era a mesma quantidade porque eu só havia trocado as posições dos potes. Outras vezes, respondiam que a quantidade não mudava porque eu não acrescentava nem retirava pedaços de giz. De repente, coloquei muitos pedaços de giz em cada pote e os fechei, antes que os alunos pudessem contar a quantidade de giz: “Neste pote (da esquerda) há uma quantidade de pedaços de giz, mas não sabemos quantos; neste pote (da direita) também há uma quantidade de pedaços de giz, mas não sabemos quantos. Juntando os dois potes, estaremos adicionando os pedaços de giz do pote da esquerda com os pedaços de giz do pote da direita. Isso dá uma quantidade de pedaços de giz, mas não sabemos qual é esta quantidade. O que acontece se eu trocar a posição dos dois potes (colocando o pote da esquerda na direita)?” Alguns alunos responderam: “Vai ter uma quantidade de giz, mas não sabemos que quantidade”. Continuei: “Certo, mas é a mesma quantidade que eu tinha antes de trocar ou mudou a quantidade?” Alguns alunos: “É a mesma, porque só mudou a posição”. Outros: “É a mesma, porque não acrescentou nem retirou nada”.

No quadro, repeti o que havíamos feito. Comecei colocando adições que sabíamos a quantidade de giz colocada em cada pote, por exemplo, $3 + 4 = 4 + 3$, $5 + 9 = 9 + 5$, etc. Depois, perguntei: “E no caso em que não sabemos a quantidade de giz em cada pote, como podemos fazer?” Vários alunos responderam: “Usa uma letra”. Continuei: “Uso a mesma letra para os dois potes ou uso letras diferentes?” Eles: “Diferentes”. Perguntei por que eu deveria usar letras diferentes, mas não souberam responder. Afirmei, então, que se eu usasse letras iguais, eu estaria supondo que havia a mesma quantidade de pedaços de giz nos dois potes, o

---

[6] Essa reação pode ter ocorrido por que as propriedades da adição de números naturais estão há muito tempo internalizadas pelos alunos, sendo as mesmas constitutivas da própria noção de número e da adição de números. De fato, pode-se considerar que uma criança compreende o significado do número 15 quando ela é capaz de decompô-lo como $10 + 5$, ou $5 + 10$, ou $10 + 4 + 1$, ou $10 + 1 + 4$, etc.

que de fato poderia acontecer. Mas, se eu usasse letras diferentes, eu estaria dizendo que as quantidades nos dois potes poderiam ser iguais ou poderiam ser diferentes. Escrevi, então: $x + y \; \mathbf{?} \; y + x$ e perguntei que símbolo ou sinal eu deveria usar no lugar do ponto de interrogação. Os alunos responderam que eu deveria colocar o sinal de igual. Comentei ainda que, apesar de que, na prática, eu não possa colocar uma quantidade qualquer de pedaços de giz nos potes, ainda assim, podemos imaginar que isso pode ser feito, bastando para tal imaginar potes cada vez maiores (ou pedaços de giz cada vez menores). Portanto, aquelas letras que eu usei para representar números estão representando quaisquer números naturais, por maiores que eles sejam.

Depois disso, passei a tratar da comutatividade da multiplicação de naturais. Para isso, recorri à Geometria, especificamente, à área do retângulo. Alguns alunos já sabiam como calcular a área de um retângulo, como o produto da base pela altura; então eu parti daí para chegar ao objetivo de falar da comutatividade da multiplicação. Peguei uma folha de ofício e perguntei como calculamos sua área se sua base medisse, por exemplo, 5 unidades quaisquer de comprimento e a altura, 3 dessas unidades e escrevi esses números no comprimento e na largura da folha. Os alunos responderam que era só fazer 5 vezes 3 que é igual a 15. Como eu estava mais interessado na resposta numérica, não me concentrei nas unidades de medida. Fiz uma rotação de 90º nesta folha e perguntei: “E agora, a base mede quanto?” Responderam: “Três”. “E a altura?” “Cinco”. “Como calculamos sua área?” “Fazendo 3 vezes 5, que é igual a 15”. Repetimos esse procedimento algumas vezes, dando valores diferentes para a base e para a altura, até que escrevi na folha a letra *b* na base e a letra *a* na altura da folha e perguntei como calculamos a área desta folha. Pude ouvir a resposta “*b* + *a*”. Perguntei se era isso mesmo, uma adição. Concordaram que não e corrigiram-se depois: “*b* vezes *a*”. Fiz novamente uma rotação de 90º nesta folha e perguntei: “E agora, a base mede quanto?” Responderam: “Mede *a*”. “E a altura?” “Mede *b*”. “Como calculamos sua área?” “É só fazer *a* vezes *b*”. Perguntei então se a área da folha muda ao mudarmos sua posição e os alunos concordaram que não muda. Coloquei no quadro as conclusões. Primeiro, numéricas, depois, algébricas. Depois disso, comecei a passar as questões sobre comutatividade no quadro.

Mesmo depois das considerações feitas antes da atividade, os alunos tiveram dificuldade em traduzir em palavras as sentenças escritas na questão (1a). Por diversas vezes chamavam a multiplicação de soma, as parcelas de fator e vice versa. Alguns grupos não entenderam que, nesta questão, havia dois resultados para serem traduzidos e um grupo entregou o material assim mesmo, apesar de eu chamar sua atenção.

Na questão (1b), conforme esperado, não sabiam o nome das propriedades, na questão (1c), não sabiam uma utilidade prática. Desta forma, falei o nome da propriedade para a adição e perguntei qual seria o nome da propriedade no caso da multiplicação. Não ocorreu aos alunos que o nome da propriedade poderia ser o mesmo. Assim, acabei dando o nome da propriedade para a multiplicação também, salientando a analogia entre as duas situações.

Na tentativa de exemplificar uma utilidade da propriedade comutativa, perguntei o que eles achavam mais fácil de fazer mentalmente ou até mesmo contando nos dedos, “$8+2$ ou $2+8$?” Também perguntei o que é mais fácil, “2×48 ou 48×2?” Talvez essas perguntas façam mais sentido nas séries iniciais. Nesta turma de sétima série, os alunos acharam que qualquer uma das maneiras é igualmente fácil. Talvez se eu tivesse proposto fatores iguais a 2 e 2347, eles tivessem ficado mais sensibilizados. Ainda assim, sobre a utilidade da comutatividade, uma resposta interessante de um grupo foi de que não é necessário decorar toda a tabuada.

Para a questão (1d), houve alunos que conseguiram responder satisfatoriamente, negando que a subtração fosse comutativa e dando um contraexemplo para isso, mostrando que entenderam o significado de uma operação ser comutativa e o significado de se comprovar a falsidade de uma afirmação através do uso de um contraexemplo. Houve também um grupo que deu uma resposta mais genérica, afirmando que a subtração não possui a propriedade comutativa, pois, quando o minuendo é menor que o subtraendo, o resultado nem ao menos é um número natural. Mas, também houve alunos que não souberam justificar. Novamente eu recordei que se respondessem que a subtração era comutativa eles deveriam encontrar uma justificativa que valesse para todos os números naturais e não apenas para alguns casos particulares. Mas caso encontrassem apenas um exemplo de subtração em que não funcionasse a comutatividade, então estaria garantido que a subtração não é comutativa.

Fiz a correção no quadro, sempre pedindo as respostas dos grupos para que juntos pudéssemos construir uma resposta satisfatória.

Minha avaliação da aula:

Desta aula, considero que os objetivos foram alcançados e as expectativas confirmadas. A abordagem com os potes para justificar a comutatividade da adição de números naturas foi aceita com naturalidade pelos alunos, inclusive a passagem abstrata de imaginar potes maiores para conter quantidades maiores de pedaços de giz ou imaginar pedaços de giz cada vez menores. Além disso, a utilização do material movimentou a turma deixando-os mais agitados, mas também mais interessados e motivados.

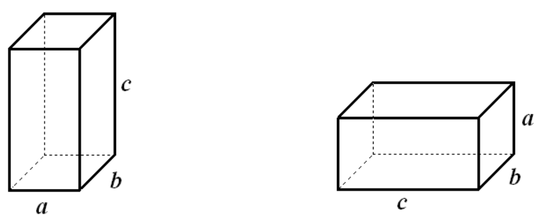
Quanto à abordagem geométrica para a comutatividade da multiplicação de números naturais, penso que eu poderia ter começado mais devagar, resgatando o conceito de área (do retângulo) a partir da contagem de quadrados unitários, já que somente alguns alunos lembravam como calcular a área do retângulo, sendo conhecidas a base e a altura. Além disso, acabei utilizando uma ideia que envolve uma grandeza contínua (área) para justificar uma propriedade com números naturais (conjunto discreto). Reconheço que, com a abordagem via quadradinhos e com as dimensões inteiras, o universo dos naturais seria mantido.

Durante a correção das questões, em particular da questão (1c), comentei que uma aplicação importante das propriedades das operações seria trabalhada mais tarde, quando estudássemos as expressões algébricas. Porém, acho que eu poderia ter me alongado mais neste assunto, procurando convencer os alunos da utilidade da comutatividade no cálculo mental.

Relato da aula do dia 19/03:

Comecei a aula retomando rapidamente o que havíamos feito no dia anterior. Peguei meus potes (agora em número de três) e chamei os alunos para perto da minha mesa. Coloquei dois potes mais à minha esquerda e o outro mais afastado à minha direita. Em cada um deles coloquei uma quantidade de giz, por exemplo, 3, 5 e 6, nesta ordem. Perguntei qual seria o total de pedaços de giz se eu primeiro somasse os que estavam nos potes mais à esquerda e depois com o que estava à direita, isto é (3 + 5) + 6. Os alunos responderam corretamente. Passei para a direita o pote que estava na posição mais central, ficando agora com 3 + (5 + 6). Novamente os alunos responderam 14. Escrevi isso no quadro: (3 + 5) + 6 = 3 + (5 + 6). Fiz o mesmo com outros valores e, assim que calculávamos, eu escrevia o resultado no quadro. Então, como já havia feito na aula anterior, coloquei vários pedaços de giz em cada pote e fechei-os antes que os alunos pudessem contar. O procedimento e as respostas foram parecidos com as da aula anterior. A diferença é que agora, eu já ia registrando no quadro o que havíamos feito com o material. Os alunos concordaram que teremos sempre $(a+b)+c = a+(b+c)$, não importando quais sejam os números naturais a, b e c.

Depois, comecei a tratar da associatividade da multiplicação. Para isso, utilizei uma caixa retangular e trabalhei com o cálculo do volume. Embora fosse interessante, eu decidi não justificar a fórmula para o cálculo do volume de um bloco retangular, com dimensões dadas por números naturais, a partir da contagem de cubinhos unitários. Falei que, para calcular o volume de uma caixa daquele tipo, bastava multiplicar as medidas do comprimento e da largura e multiplicar este resultado pela medida da altura da caixa e que o seu volume seria sempre o mesmo não importando a posição que a caixa estivesse. Aqui, apareceu um complicador que não acontecia no caso do cálculo da área: diferentemente do que ocorria com a comutatividade da multiplicação, a associatividade da multiplicação não aparecia diretamente. Era preciso utilizar também a comutatividade da multiplicação. Por exemplo, para chegar a $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ era preciso passar por $(c \cdot b) \cdot a$, necessitando aplicar duas vezes a comutatividade, conforme podemos observar na Figura 7:



$V = (a \cdot b) \cdot c \qquad V = (c \cdot b) \cdot a = (b \cdot c) \cdot a = a \cdot (b \cdot c)$

Figura 7

Não achei esta abordagem muito satisfatória, pois era necessária a comutatividade da multiplicação para chegarmos à associatividade. Porém, não me ocorreu outra ideia no momento. Por outro lado, eis aqui uma aplicação da comutatividade da multiplicação que havia perguntado antes aos alunos.

Após esta explanação, escrevi as questões sobre associatividade no quadro. Novamente, os alunos tiveram dificuldade para traduzir em palavras as sentenças escritas em linguagem matemática. Mencionei o verbo “associar”, na tentativa de fazer com que os alunos produzissem alguma resposta. Porém, este verbo não disse muita coisa aos alunos. Utilizei então o verbo “agrupar”. Neste momento, os alunos entenderam melhor e passaram a traduzir as sentenças em língua materna, ainda com grande dificuldade.

Quanto ao nome e à utilidade das propriedades, os alunos também não souberam responder sem minha interferência. Falei sobre o verbo comutar que originava o nome da propriedade comutativa, “então o verbo associar vai gerar o nome...” E um aluno completou: “... associativa”. Sobre a utilidade das propriedades, perguntei: “O que é mais fácil de calcular mentalmente: (15 + 28) + 12 ou 15 + (28 + 12)”. Os alunos concordaram que a segunda maneira é mais fácil porque a soma entre parênteses dá um número “redondo”.

Na última questão, alguns alunos negaram que a subtração de naturais fosse associativa e encontraram um contraexemplo rapidamente, outros alunos achavam que não era verdadeira, mas não conseguiam gerar um contraexemplo. Houve um grupo que afirmou que a subtração é associativa, mas, com a apresentação de contraexemplos pelos colegas, convenceram-se do contrário. Houve um grupo que escreveu coisas do tipo “sociedade sociativa”. Também apareceram respostas do tipo “trocando as ordens dos números não altera o resultado”. Encerramos a aula deste dia, deixando as correções para a próxima aula.

Minha avaliação da aula:

Como já havíamos trabalhado com questões parecidas na aula anterior, eu esperava que os alunos tivessem uma maior facilidade para responder as questões propostas. Porém, a dificuldade que sentiram em comunicar suas ideias foi muito grande, tanto oralmente quanto por escrito.

Quando falei à turma que o volume de uma caixa retangular não se altera se mudarmos sua posição, automaticamente eu já estava anunciando a propriedade associativa. Mais tarde, minha orientadora sugeriu, com o que concordei, que melhor seria dizer que a quantidade de água que cabe na caixa é mesma, seja qual for a posição em que a coloquemos, desde que bem vedada.

Agora percebo que o trabalho com a propriedade comutativa e a propriedade associativa da adição e da multiplicação de números naturais foi realizado muito rapidamente. Porém, estas propriedades seriam retomadas quando tratássemos das operações com números inteiros e, posteriormente, com racionais.

4.2.5 Dias 25 e 26/03 – Resto da Divisão de Números Naturais

Objetivos:

- Revisar conceitos envolvidos em divisibilidade de inteiros positivos, em particular sobre o resto da divisão, haja vista a maior dificuldade em geral apresentada pelos alunos quanto à divisão.

Roteiro de questões:

1. Uma professora tem 50 bombons para distribuir entre seus 14 alunos. Qual é o número mínimo de bombons que ela deverá comprar de modo que, ao juntar com estes 50 bombons que ela já possui, todos os alunos recebam a mesma quantidade e que não

sobrem bombons?

2. Quais são os restos possíveis na divisão de um número natural por 2? E por 7?

3. Quais são os restos possíveis na divisão de um número natural por b, $b \neq 0$? Justifique.

4. Ao dividirmos 25 por 7, obtemos o resto igual a 4 (confirme isto!). Quanto sobrará se dividirmos 25 + 2 por 7? E quando dividirmos 25 + 5 por 7?

5. Se, ao dividirmos um número natural n por 7 obtivemos resto 4, qual será o resto quando dividirmos $n + 2$ por 7? E $n + 5$ por 7?

Procedimentos:

Para a realização da atividade, a turma será dividida em duplas ou trios. Novamente, as questões serão escritas no quadro. Todos os alunos devem copiar e responder as questões no caderno e cada grupo entrega uma folha com as respostas para o professor. Pretende-se que a participação do professor seja mínima e se concentre em dúvidas pontuais. Após o trabalho em grupos, as soluções serão discutidas no grande grupo e um aluno ficará responsável por escrever um relatório com as soluções consideradas finais.

Expectativas:

Espera-se que os alunos consigam efetuar a passagem da solução de casos particulares para o caso genérico com mais desenvoltura. Espera-se também uma participação ativa dos alunos.

Relato da aula do dia 25/03 - 1ª parte:

Após um breve resumo da última aula, iniciei a correção da atividade do dia 19/03/2008, na qual tratamos da associatividade de adição e da multiplicação de números naturais.

Os alunos participaram ativamente da aula, mas continuavam confundindo a comutatividade com a associatividade. Pelo menos foi isso que transpareceu nas suas manifestações faladas e escritas, onde continuavam mencionando a mudança de ordem das parcelas ou dos fatores quando tratávamos da associatividade. Mencionei coisas que os grupos responderam, tais como “sociedade sociativa”, e tentei corrigir as suas falas quanto a “mudar a ordem das parcelas ou fatores” quando da propriedade associativa.

No final, falei aos alunos que as duas propriedades, comutativa e associativa, permitiam que eu somasse ou multiplicasse números naturais em qualquer ordem e formando quaisquer grupos em primeiro lugar. Resumindo, falei que os parênteses não eram necessários nos cálculos envolvendo somente adições de números naturais com mais de duas parcelas. A mesma coisa para a multiplicação com mais de dois fatores. Além disso, mencionei que as propriedades eram ferramentas poderosas para facilitar os cálculos, mas que elas têm outras aplicações que veríamos mais tarde.

Relato da aula do dia 25/03 – 2ª parte

A turma dividiu-se em grupos segundo afinidades e informei que a atividade deveria desenvolver-se como das outras vezes. Escrevi as questões no quadro e os grupos começaram a trabalhar.

Minha participação neste trabalho foi maior que nas outras vezes. Na primeira questão, que deveria servir como um “aquecimento” para as demais questões, os alunos tiveram dificuldade em relacionar o resto da divisão com o divisor para obter a resposta. Pior ainda, alguns alunos tiveram dificuldade em relacionar o problema com a operação de divisão. Depois, pensaram que a professora não precisaria comprar mais bombons, pois cada aluno recebeu 3 bombons e os 8 restantes ficaram com a professora. Pedi para lerem novamente o problema, destacando que todos os alunos, e só estes, deveriam receber a mesma quantidade e não poderiam sobrar bombons. Aos poucos, com minha intervenção, os grupos foram encontrando a solução da questão (1), acrescentando 6 ao resto da divisão.

Na segunda questão, os alunos também não sabiam como começar. Lembrei à turma que dar exemplos particulares não garante que o resultado é verdadeiro se o número de casos a serem examinados for infinito, mas podemos calcular casos particulares para termos uma ideia do que está acontecendo. Mesmo assim, tive que começar os exemplos para que eles continuassem. Alguns alunos não compreenderam mesmo assim. Uma dupla, por exemplo, respondeu que os possíveis restos na divisão por 2 são 1 e 2 e, na divisão por 7 são 1 e 7. Provavelmente tenham respondido quais são os divisores de 2 e de 7, já que os nomes dos termos das operações ou os conceitos propriamente ditos não são, em geral, dominados pelos alunos. Outro grupo escreveu, em forma de conjunto, que os possíveis restos na divisão por 7 são {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...}, utilizando as reticências ao final. Não sei se o grupo queria realmente dizer que o conjunto dos possíveis restos continuava para além do resto 6 ou se foi desatenção no momento de escrever. Preferi deixar comentários para a correção das questões.

A questão (3) também trouxe dificuldades. Perguntei qual era o maior resto possível na divisão por 2, por 3, por 7 e por 20. Os alunos que mais participam responderam que os maiores restos são, em cada caso, 1, 2, 6 e 19. Perguntei: “E na divisão por b?” Um ou dois alunos responderam: “É um antes do *b*”. Perguntei à turma se concordavam que era “um antes do *b*” e como poderíamos escrever isso utilizando letras. A turma concordou, mas não sabia como escrever simbolicamente. Pedi para escreverem aquela resposta mesmo. Nos protocolos apareceram algumas respostas como: “O resultado não pode passar do $B - 1$”, “todos abaixo de B”, “será no máximo $b - 1$”, “não pode passar do B”. Também deixei pra comentar essas respostas na correção da atividade.

Na questão (4), os grupos calcularam o resto de $27 \div 7$ e $30 \div 7$ diretamente, isto é, realizando a operação. Enfatizei que esta estratégia resolve o problema, mas não dá nenhuma ideia de como resolver num caso genérico, como na questão (5). No quadro, depois que os alunos responderam a questão (4), fiz a seguinte solução, que poderia ser útil para as próximas questões:

$$
\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \cline{2-2} -21 & 3 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 25+2 & 7 \\ \cline{2-2} -21 & 3 \\ \cline{1-1} 4+2=6 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 25+5 & 7 \\ \cline{2-2} -21 & 3+1=4 \\ \cline{1-1} 4+5=9 & \\ -7 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}
$$

Os alunos disseram nunca ter visto uma divisão ser feita dessa forma, mas disseram ter entendido esta solução. Contudo, não perceberam como ela poderia ser útil nas próximas questões. Então, terminei resolvendo a questão (5) no quadro, com a participação da turma. A estratégia utilizada na solução (5) está ilustrada abaixo:

$$
\begin{array}{r|l} n & 7 \\ \cline{2-2} 4 & q \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} n+2 & 7 \\ \cline{2-2} 4+2 & q \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} n+5 & 7 \\ \cline{2-2} 4+5 & q+1 \\ \cline{1-1} 9 & \\ -7 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}
$$

Deixei a correção da atividade para a próxima aula.

Minha avaliação da aula:

Eu esperava que os alunos já conseguissem ter maior autonomia na resolução das questões, o que não se confirmou. Até mesmo os alunos que mais participavam foram muito dependentes nesta atividade. Talvez a primeira questão devesse ter sido colocada após a segunda questão, organizando-as assim em ordem crescente de dificuldade. Talvez a passagem para os casos mais genéricos tenha sido feita de maneira muito abrupta. Também a falta do material concreto pode ter contribuído para as dificuldades, uma vez que é possível que a construção da divisão não tenha sido bem trabalhada com estes alunos nas séries iniciais.

Há alunos que definitivamente não compreendem a divisão, e todos tiveram dificuldades com os conceitos nela envolvidos. Procurarei amenizar esta dificuldade no decorrer das próximas aulas.

É interessante notar que, na questão (3), apenas um grupo utilizou o b minúsculo, conforme eu havia escrito no quadro. Isto ocorre com frequência: num momento os alunos representam um número com letra minúscula e, na mesma questão, representam o mesmo número com a mesma letra, só que maiúscula.

Relato da aula do dia 26/03:

Iniciei a correção das questões da última aula. Após resolver a questão (1) e a partir dela, tentei generalizar um pouco mais, perguntando quantos bombons a professora deveria comprar se o número de alunos da turma fosse A e sobrassem 8 bombons. Ninguém respondeu. Então eu retomei, no caso particular da questão (1): "Quantos bombons a professora deveria comprar para completar 14 bombons?" Os alunos responderam "seis". Enfatizei que a resposta saía do cálculo $6 = 14 - 8$, pois 6 é quanto falta para completar 14 a partir de 8. Então, alguns alunos relacionaram este raciocínio com a pergunta que fiz anteriormente, respondendo que era necessário comprar mais A menos 8 bombons. Escrevi no quadro simbolicamente "$A - 8$ bombons".

Esta generalização foi compreendida por alguns alunos, basicamente aqueles que vinham participando mais ativamente das aulas. Familiarizar os alunos com o uso de letras para representar números de maneira genérica era um dos objetivos da aula. Sendo assim, repeti a argumentação, mas antes apresentei mais alguns exemplos para que ficasse claro que a resposta seria a diferença entre o divisor e o resto da divisão, ou seja, quanto faltava para completar o divisor a partir do resto.

Na questão (2), chamei a atenção para os nomes dos termos da divisão, pois me pareceu que alguns alunos confundiram o resto da divisão com os divisores de um número. Reconheço que esta deveria ter sido a primeira questão de todas. Ainda na questão (2), chamei a atenção para a resposta $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...\}$, no caso dos restos possíveis na divisão por 7. Neste caso, enfatizei que as reticências após o número 6 indicam que o conjunto continua.

Porém, o maior resto possível é 6, pois, se o resto fosse igual a 7 ou maior do que 7, então poderíamos dividir novamente.

Como apareceu uma solução do tipo descrita anteriormente, decidi modificar o enunciado da questão (3) para: “Qual será o maior resto possível na divisão de um número natural por $b \neq 0$?” Neste momento, comentei com os alunos que, neste exercício especificamente trocar o *b* minúsculo pelo *B* maiúsculo não causaria maiores problemas. Porém, poderia haver casos em que a mesma letra poderia representar quantidades diferentes num problema, só que uma das quantidades seria representada pela letra minúscula e a outra, pela letra maiúscula.

Quanto às questões (4) e (5), apenas refiz o que já havíamos feito na aula anterior.

Minha avaliação da aula:

Embora os alunos garantissem que haviam entendido a solução da questão (1), percebi que alguns alunos ainda não a haviam compreendido, principalmente no caso genérico. Decidi passar às outras questões, mesmo sabendo da lacuna que poderia ficar naquele momento na aprendizagem desses alunos, mas confiando que em outro momento teríamos a oportunidade para retomar o problema.

Talvez eu tenha feito a passagem de casos numéricos para o caso genérico muito rapidamente da questão (2) para a questão (3). Se eu tivesse pedido justificativas para as respostas de questão (2), isto é, se eu perguntasse aos alunos, por exemplo, por que o maior resto possível na divisão por 7 é 6, talvez tivesse ficado mais claro que os restos possíveis na questão (3) seriam até uma unidade antes de *b*, ou seja, até o antecessor de *b*.

Pretendo retomar questões como a questão (5) quando tratarmos de expressões algébricas, pois teremos uma oportunidade de utilizar operações com essas expressões de forma natural. Por exemplo, poderemos resolver a presente questão da seguinte maneira que aqui coloco de forma simplificada: temos que $n = 7 \cdot q + 4$ (pelo algoritmo de Euclides ou simplesmente nos reportando à prova real). Então, $n + 2 = 7q + 4 + 2 = 7q + 6$. Logo, se o resto da divisão de n por 7 é 4, ao dividirmos $n + 2$ por 7, obteremos resto igual a 6 (as igualdades se justificam pelas propriedades das operações com números naturais). De forma análoga, $n + 5 = 7q + 4 + 5 = 7q + 7 + 2 = 7(q + 1) + 2$.

4.2.6 Dia 27/03 – Quociente e Resto da Divisão de Números Naturais

Objetivos:

- Revisar conceitos de quociente e resto na divisão de números naturais.
- Avançar no sentido de generalizar as questões trabalhadas na aula anterior.

Roteiro de questões:

1. O quociente da divisão de um número inteiro positivo n por 8 é 5 e o resto é zero. Quais são o quociente e o resto da divisão de n + 8 por 8? E de n – 8 por 8?
2. O quociente da divisão de um número inteiro positivo n por um número inteiro positivo m ($m \neq 0$) é 6 e o resto é zero. Quais são o quociente e o resto da divisão de $n+m$ por m? E de $n-m$ por m?
3. O quociente da divisão de um número inteiro positivo n por 4 é 7 e o resto é 2. Quais são o quociente e o resto da divisão de n + 4 por 4? E de n – 4 por 4?
4. O quociente da divisão de um número inteiro positivo n por um número inteiro positivo m ($m \neq 0$) é 12 e o resto é 9. Quais são o quociente e o resto da divisão de n + m por m? E de n – m por m?

Procedimentos:

Idem à aula anterior.

Expectativas:

Para esta atividade, espera-se que os alunos tenham uma maior desenvoltura no tratamento da divisão devido à atividade feita anteriormente. Espera-se que os alunos consigam aplicar um raciocínio genérico para resolver as questões e que encontrem mais facilidade para escrever e comunicar os resultados. Espera-se também uma maior autonomia por parte dos alunos.

Relato da aula de 27/03:

Três alunos, de grupos diferentes, pensaram da mesma forma para resolver a questão (1): calcularam o valor de n como $n = 8 \cdot 5 = 40$. Calcularam $40 + 8 = 48$ e dividiram por 8, depois calcularam $40 - 8 = 32$ e dividiram por 8. Estes alunos ajudaram os outros, de modo que todos ficaram com o mesmo tipo de solução. Embora o raciocínio que eles utilizaram estivesse correto e fosse, no momento, até mais natural para eles, resolvi mostrar outra forma de calcular, como já havia feito na aula anterior. Esperava que esta maneira de calcular permitisse aos alunos obter uma estratégia para resolver a questão (2), envolvendo letras.

$$\begin{array}{l|l} n & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} n+8 & 8 \\ \cline{2-2} 0+8 & 5+1=6 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} n-8 & 8 \\ \cline{2-2} 0-8 & 5-1=4 \\ 0 & \end{array}$$

Mesmo eu tendo feito esta solução, na questão (2) um grupo utilizou um exemplo particular, mas raciocinou com se fosse um caso genérico. Outros grupos tentaram resolver o caso genérico, mas só conseguiram após minha intervenção. O caso $(n-m)\div m$ causou mais dificuldades, pois para sua solução precisaríamos dos números inteiros. Alguns alunos, na tentativa de utilizar a mesma estratégia que eu havia passado, raciocinaram da maneira ilustrada a seguir:

$$\begin{array}{l|l} n-m & m \\ \cline{2-2} 0-m & 6-1=5 \\ \underline{-m} & \\ -2m & \end{array}$$

Estes alunos não perceberam que já havíamos feito algo parecido quando resolvemos o caso $(n-8)\div 8$. Antes de efetivamente realizarmos a atividade, eu não havia notado que poderia ocorrer a dificuldade acima, de envolver números inteiros na solução. O que justifica a nova estratégia apontada a seguir, na avaliação da aula. Comentei que, para obter o resto, subtraímos o resultado obtido na multiplicação do "quociente parcial" pelo divisor. No caso, subtraímos – *m*, ou seja, somamos *m*. Não achei um argumento melhor naquele momento e os alunos aceitaram sem maiores questionamentos.

Aproveitando a deixa, perguntei quais seriam o quociente e o resto de $(n+2\cdot m)\div m$, $(n+3\cdot m)\div m$, $(n-2\cdot m)\div m$, ao que vários alunos responderam corretamente como 8, 9 e 4 respectivamente. Comentei ainda que, nestes casos, o maior valor que poderia subtrair de *n* seria $6\cdot m$, pois, caso contrário, teríamos um quociente negativo.

Nas questões (3) e (4) as dificuldades foram naturalmente maiores, justamente pelo fato de o resto não ser igual a zero. A questão (3) foi resolvida pela maioria dos alunos calculando-se diretamente o valor de *n* de modo semelhante ao que haviam feito na questão (1). No quadro, realizei uma abordagem mais genérica, utilizando uma estratégia semelhante à que havia utilizado na questão (1). Quanto à questão (4), esta foi resolvida de modo semelhante à questão (2):

$$
\begin{array}{r|l}
n+m & \underline{\;m\;\;} \\
9+m & 12+1=13 \\
\underline{\;-m\;} & \\
9 &
\end{array}
$$

Minha avaliação da aula:

Pretendo retomar estas questões no conteúdo de expressões algébricas, pois não considerei satisfatória a abordagem que fiz com a turma. A questão 1, por exemplo, poderá ser tratada assim: $n \div 8 = 5 \Rightarrow n = 8 \times 5 \Rightarrow n + 8 = 8 \times 5 + 8 = 8 \times (5+1) = 8 \times 6 \therefore (n+8) \div 8 = 6$ e o resto é igual a zero. Agora, ocorreu-me que, antes da escrita algébrica, eu poderia trabalhar com material concreto, passando por uma discussão oral e posterior relato escrito com palavras para, finalmente, chegar ao relato simbólico escrito acima. A questão 4 poderá ser tratada assim: do algoritmo da divisão, obtemos

$$n = 12m + 6 \Rightarrow n + m = 12m + 6 + m = m \times (12+1) + 6 = 13m + 6 \therefore (n+m) \div m = 13$$

e o resto é igual a 6. Nos dois exemplos, deverão ser destacadas as propriedades das operações envolvidas em cada etapa da argumentação.

Os alunos ainda apresentaram dificuldades com os termos das operações. Apesar disso, vários alunos tiveram uma boa desenvoltura para tratar das questões propostas na atividade.

Posso afirmar que vários alunos estão aproveitando bem as aulas e estão passando a ter uma atitude mais favorável em relação à Matemática, haja vista os comentários que eles vêm fazendo durante as aulas, tais como: “A matéria que mais gosto é a Matemática, por que não precisamos ficar decorando as coisas, é só pensar”, “Em Matemática todas as coisas se relacionam”, “Temos sempre que justificar nossas afirmações para termos certeza de que podemos continuar adiante”. Também pode contribuir para isso o bom relacionamento entre professor e alunos. Infelizmente, não são todos os alunos atingidos pela experiência que estamos propondo e, até o momento, não consegui elaborar uma estratégia que aproxime seu aproveitamento dos demais.

Após a leitura do relato da aula, ocorreu à minha orientadora que eu poderia ter perguntado na questão (4): “Se o resto da divisão de um número natural por m é 9, qual é o menor número natural representado por m?” Esta pergunta é do mesmo tipo da que fiz na questão (3) na aula do dia 25/03/08 e poderia servir para avaliar se os alunos haviam compreendido a limitação imposta ao resto da divisão. Além disso, para que os alunos relacionassem o conceito de múltiplo com o assunto aqui tratado, poderia ter incluído, após a questão 3, a seguinte: Sabendo que n é um múltiplo de 4, quais são o quociente e o resto da divisão de $n + 4$ por 4? E de $n - 4$ por 4?

Sobre a questão 4, a utilização de duas letras na mesma questão se mostrou inadequada na divisão, onde os alunos revelaram tanta dificuldade. Talvez a mesma deva ser excluída ou utilizada somente se a turma realmente der conta de tudo até ali.

Ao final deste mês de trabalho, fiquei com a impressão de que eu deveria ter me concentrado mais nas propriedades das operações com números naturais, uma vez que serão as propriedades das operações que darão suporte ao trabalho com expressões algébricas a ser realizado posteriormente. No entanto, considero que ter realizado um trabalho sobre a divisão foi positivo, pois nos deu a oportunidade de reconhecer deficiências conceituais e procedimentais dos alunos (e nossa também) quanto ao tema.

Além disso, o trabalho com a divisão nos possibilitou a utilização de letras para representar números de maneira genérica, sem mencionar a oportunidade de estimular os alunos com a apresentação de justificativas para os resultados e a consequente comunicação matemática.

4.2.7 Dias 01 e 02/04 – Divisibilidade em $\mathbb{N}$

Objetivos:

- Revisar conceitos e nomenclaturas envolvidos em divisibilidade de inteiros positivos (múltiplos, divisores, ser divisível, etc.)
- Revisar o conceito de número primo.

Roteiro de questões:

1. O número N é obtido multiplicando-se todos os números naturais de 1 até 7. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

a) *N* é divisível por 5.
b) *N* é múltiplo de 9.
c) O número 11 é fator de *N*.
d) O número 6 é divisor de *N*.

2. O número *B* é obtido pela multiplicação de todos os números de 1 até *n*. Qual deve ser o menor valor de *n* de modo que *B* seja divisível por:

a) 5 b) 6 c) 9 d) 15 e) 17 f) 28

3. Já vimos em questão anterior que os possíveis restos da divisão de um número natural por 2 são........ ou......... Pensando então na divisão por 2, será que existe alguma relação entre um número natural ser par ou ímpar e o resto da divisão por 2? Se existir, descreva esta relação e dê uma interpretação para o quociente da divisão.

Procedimentos:

Os mesmos da aula anterior.

Expectativas:

Espera-se que os alunos não recordem ou tenham dificuldades com os conceitos de divisor, fator, múltiplo, "ser divisível por" e números primos, até mesmo pela experiência que tivemos em aulas anteriores. Apesar destas dificuldades, espera-se que os alunos consigam argumentar ou justificar de forma mais autônoma suas soluções.

Relato das aulas dos dias 01/04 e 02/04:

Escrevi no quadro uma questão de cada vez, esperando que todos os grupos resolvessem, para só então passar à próxima questão.

Os alunos não compreenderam o que estava sendo pedido na questão (1), talvez por conta de dúvidas em relação aos conceitos de ser divisível, fator, múltiplo e divisor. Relembrei rapidamente estes conceitos a partir de alguns exemplos. Os grupos começaram a efetuar a multiplicação para obter o valor de *N* para depois dividir esse valor pelos números solicitados em cada item.

Devido aos diversos erros que estavam cometendo tanto no cálculo de *N* como na divisão, decidi intervir, comentando que uma maneira de responder a questão era como estavam fazendo. Porém, em vez disso, bastava apenas observar se o número envolvido em cada item estava presente na composição de *N*. Resolvi, então, o item (a): "o número 5 está presente na composição $N = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$, portanto N é divisível por 5, pois $N \div 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7$".

Neste ponto alguns alunos responderam que *N* não é divisível por 9, pois a multiplicação só vai até o número 7. Chamei a atenção da turma para o fato de que, embora o número 9 não apareça explicitamente na composição de *N*, se escrevermos o número 6 como 2×3 teremos $N = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7$ e, como a multiplicação de naturais é comutativa e associativa, temos sim a presença do produto $3 \times 3 = 9$. Com isso, a maioria dos grupos respondeu os itens restantes da questão (1) verificando se o número questionado em cada item estava presente, explicitamente ou não, na composição de *N*.

Na questão (2), esperava que os alunos usassem algum argumento semelhante aos da questão anterior. Porém, os alunos não compreenderam até qual valor deveriam multiplicar, isto é, como poderiam expressar *B*. Expliquei que deveriam encontrar o primeiro valor para *n* de modo que, multiplicando todos os números de 1 até este valor, o produto fosse divisível por 5, por exemplo. Começaram tentando alguns valores, até que alguns alunos perceberam a semelhança desta com a primeira questão. Por exemplo, perceberam que, para que o número *B* fosse divisível por 6, não era preciso multiplicar de 1 até 6. Bastava que *n* fosse 3, pois o número 6 estaria "escondido" ou "camuflado", como eles disseram, no 2×3. De maneira análoga, alguns alunos responderam que *B* é divisível por 9, argumentando que bastava multiplicar até 6, pois "o 6 é 2×3 e o 9 é 3×3".

No caso (a), perguntei aos alunos por que precisamos multiplicar até o número 5. Um aluno lembrou que 5 é um número primo, mas não soube relacionar (ou não soube expressar), o fato de o número 5 ser primo com a resposta. Lembrei, então, como 5 é um número primo, então ele não aparece "escondido" ou "camuflado" em multiplicações envolvendo números menores do que 5, isto é, o número 5 não aparece decomposto em multiplicações de números menores do que 5. O mesmo já havia ocorrido na primeira questão, no caso de divisibilidade de *N* por 11. Os alunos utilizaram este argumento para o caso de divisibilidade por 17, embora em seus relatórios não aparecer esta conclusão.

Na questão (3), quatro grupos responderam que havia alguma relação entre a paridade de um número e o resto da divisão por 2 e qual era essa relação, qual seja, se um número é par, então o resto da divisão por 2 é zero e, se um número é ímpar, o resto da divisão por 2 é

1. Dois grupos responderam apenas que havia alguma relação, sem explicitá-la. Dois grupos deram, incorretamente, respostas a partir dos quocientes e não dos restos da divisão.

Como nenhum grupo conseguiu dar uma interpretação para o quociente da divisão por 2, perguntei à turma quantas duplas de alunos eu conseguiria formar se na sala tivesse 24 alunos. Alguns alunos responderam 12 duplas. Perguntei quantas duplas eu formaria se tivéssemos 25 alunos. Responderam que eu formaria 11 duplas e 1 trio, ou então 12 duplas e 1 aluno ficaria sozinho. A partir daí, apenas um grupo respondeu que o quociente da divisão por 2 é o número de duplas que conseguiríamos formar.

Na correção dos exercícios, tentei justificar a relação entre o resto da divisão por 2 e a paridade de um número natural a partir da formação de duplas de alunos numa sala onde se sabia apenas que o número de alunos era par ou ímpar. Assim, se o número de alunos for par, consigo formar duplas e não sobra aluno sem dupla; se o número de alunos for ímpar, consigo formar duplas, mas agora sobra um aluno sem dupla.

Minha avaliação da aula:

Apesar da dificuldade apresentada pelos alunos na resolução da questão (1), fiquei satisfeito com a mesma, pois vários alunos participaram ativamente das discussões e de alguma forma ela serviu como ponto de partida para a questão (2). Talvez tivesse sido mais proveitoso para alguns alunos se eu utilizasse, além das ideias aproveitadas em aula, o algoritmo da divisão, por exemplo, para responder se N é divisível por 5, poderíamos ter feito como ilustrado abaixo:

$$\begin{array}{r|l} 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7 & 5 \\ \cline{2-2} -\ 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7 & 1\times 2\times 3\times 4\times 6\times 7 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Outra ideia, para convencer os alunos a desistirem de efetuar a multiplicação, é pedir um produto maior ainda, por exemplo, de 1 até 15. Mas, nesse caso, precisaríamos colocar números maiores do que 15 e perguntar se esses números dividem o produto, gerando mais dificuldades e fugindo do objetivo da questão.

Achei muito interessante os termos “escondido” e “camuflado” criados pelos alunos para a responderem a questão (2). Isso mostra a tentativa de estabelecerem uma comunicação matemática. Algumas das dificuldades encontradas nessa questão podem ser atribuídas ao fato de aparecerem duas letras, *B* e *n*, sendo que *B* não é utilizada, podendo ser retirada do enunciado da questão. Além disso, os alunos podem ter confundido o *N* da primeira questão com o *n* da segunda questão.

Embora os alunos apresentassem muitas dificuldades conceituais e também de entendimento dos enunciados no decorrer da atividade, de maneira geral, acho que os objetivos destas aulas foram alcançados. Os alunos submeteram-se a discussões bem interessantes, argumentaram corretamente ou não, e conseguiram (não todos, é claro!) estabelecer entre eles e com o professor uma razoável comunicação dos resultados matemáticos.

4.2.8 Dia 03/04 – Adição de Pares e Ímpares

Objetivos:

- Justificar precisamente a paridade da soma envolvendo números pares e ímpares.

Roteiro de questões:

1. Explique como reconhecemos se um determinado número natural é par ou ímpar.
2. Responda com V para verdadeiro ou com F para falso, justificando sua resposta.
   a. ( ) A soma de dois números pares é sempre par.
   b. ( ) A soma de dois números ímpares é sempre ímpar.
   c. ( ) A soma de um número par com um número ímpar é sempre par.
   d. ( ) A soma de dois números ímpares é sempre par.

Procedimentos:

Os mesmos da aula anterior.

Expectativas:

Espera-se que os alunos utilizem o argumento, trabalhado na aula anterior, de formar duplas de alunos verificando se sobrou ou não algum aluno sem dupla, a fim de justificar as respostas das questões sobre paridade. Também se espera maior competência em relação à organização e escrita das respostas.

Relato da aula do dia 03/04:

Os grupos, em geral, responderam bem à primeira questão, mostrando que a aula anterior teve retorno positivo. No entanto, não conseguiram justificar a questão (2a) utilizando a ideia de formar duplas, conforme eu tinha feito na aula anterior. Na maior parte das vezes argumentavam repetindo a própria afirmação, ou então justificavam com casos particulares.

Retomei a aula anterior sobre formar duplas de alunos numa turma em que não se sabia o número de alunos. Coloquei então a seguinte situação: "pretendo trabalhar em duplas com duas turmas. Se tivermos um número par de alunos em nossa turma, posso formar duplas?" Os alunos responderam que sim. Continuei: "Sobra algum aluno sem dupla"? Os alunos responderam que não. "Se na outra turma também tiver um número par de alunos, consigo formar duplas?" "Sim!" "Sobra algum aluno sem dupla?" "Não!" "Agora, juntando as duas turmas, podemos permanecer com as mesmas duplas que foram formadas em cada turma. Sobrará algum aluno sem dupla?" "Não!" "O que se pode dizer, portanto, da soma de dois números pares?" "É sempre par!", responderam aqueles alunos que se mostraram mais interessados. Analogamente, argumentei que ímpar mais ímpar é sempre par, pois agora, em cada turma era possível formar duplas, mas sobraria um aluno de cada turma sem dupla, os quais, juntos, formariam uma nova dupla. Para o caso da soma de par com ímpar sempre sobrará um aluno sem dupla, logo o resultado é sempre ímpar.

Depois de ter feito as argumentações anteriores, eu esperava que os alunos as utilizassem para justificar as questões (2b) e (2c). No entanto, alguns grupos, corretamente, justificaram as respostas através de contraexemplos, mostrando com isto certa independência de raciocínio, o que é bom, além de evidenciarem o aprendizado sobre o conceito de contraexemplo.

Nos últimos trinta minutos de aula, resolvi mostrar outra maneira de justificar a paridade da soma de dois números naturais, até mesmo para mostrar aos alunos que podemos encontrar mais de um argumento para justificar um resultado. Consiste em dividir os números naturais em pares e ímpares verificando-se apenas o último algarismo (unidade) que compõe o número. Na verdade, esta foi uma das caracterizações que os alunos deram para pares e ímpares no início da aula: "Os números pares são aqueles que terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8 e os números ímpares são os que terminam em 1, 3, 5, 7 ou 9". Utilizando essa caracterização e observando apenas o algarismo das unidades da soma, fiz o seguinte procedimento, sempre contando com a participação dos alunos:

Soma de par com par:

$$....0+\begin{cases}....0=....0\\ ....2=....2\\ ....4=....4\\ ....6=....6\\ ....8=....8\end{cases},\quad ....2+\begin{cases}....0=....2\\ ....2=....4\\ ....4=....6\\ ....6=....8\\ ....8=....0\end{cases},\quad ....4+\begin{cases}....0=....4\\ ....2=....6\\ ....4=....8\\ ....6=....0\\ ....8=....2\end{cases},\quad ....6+\begin{cases}....0=....6\\ ....2=....8\\ ....4=....0\\ ....6=....2\\ ....8=....8\end{cases},\quad ....8+\begin{cases}....0=....8\\ ....2=....0\\ ....4=....2\\ ....6=....4\\ ....8=....6\end{cases}$$

onde por ....*a* estamos denotando todos os números naturais terminados pelo algarismo *a*. Portanto, observando apenas os algarismos das unidades da soma, fica garantido que a soma de dois números pares é sempre par.

Procedemos de maneira análoga para a soma de ímpar com ímpar e para a soma de par com ímpar. Além disso, pela comutatividade da adição de naturais, a soma de ímpar com par também é ímpar.

Minha avaliação da aula:

Minha expectativa inicial não foi confirmada pela maioria dos alunos, pois grande parte da turma não conseguiu, por conta própria, utilizar argumentos trabalhados na aula anterior para justificar as respostas das questões desta aula. Além disso, os alunos continuavam apresentando muitas deficiências em relação à escrita das respostas. É interessante notar, ainda, a insistência que muitos apresentaram em responder as questões ou com a própria afirmação da questão ou com exemplos particulares no caso de infinitos exemplos para serem verificados.

Um detalhe que eu não havia planejado, mas que se revelou positivo, foi o de aparecer a propriedade comutativa da adição de naturais quando da estratégia de adicionar números naturais observando apenas o algarismo das unidades da soma: foi mais uma oportunidade de explorar e aplicar as propriedades das operações com números naturais.

Uma abordagem que poderá ser encaminhada quanto à paridade é a relação entre o conceito de resto 1 ou resto zero na divisão por 2 e a definição de pares e ímpares (conhecida pelos alunos e trazida das séries iniciais) de se observar o algarismo das unidades do número.

Igualmente interessante, e que eu retornaria quando trabalhasse expressões algébricas com essa mesma turma, é a abordagem utilizando letras para representar números pares e números ímpares:

$$2n+2m=2(n+m)=2k\,,$$

onde $k=n+m\in\mathbb{N}$ e

$$(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2=2(n+m+1)=2l\,,$$

onde $l=n+m+1\in\mathbb{N}$.

O procedimento acima não foi utilizado nessa aula porque ainda não trabalhamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números naturais.

4.2.9 Dia 08/04 – Paridade de Números Naturais Consecutivos

Objetivos:

- Justificar precisamente a paridade da soma envolvendo números pares e ímpares.
- Relembrar os conceitos de sucessor de um número natural e de números naturais consecutivos.

Roteiro de questões:

Nas questões abaixo, complete com V se a afirmação for verdadeira ou com F se for falsa, justificando cada resposta:

1. A soma de um número natural com seu sucessor é
   a. ( ) sempre par. b. ( ) às vezes par, às vezes ímpar. c. ( ) sempre ímpar.

2. A soma de três números naturais consecutivos é
   a. ( ) sempre par. b. ( ) sempre ímpar. c. ( ) às vezes par, às vezes ímpar.

3. Em que casos a soma de três números naturais consecutivos resulta em par? E em que casos resultam em ímpar? Justifique.

Procedimentos:

Os mesmos que da aula anterior.

Expectativas:

Espera-se que os alunos utilizem os resultados da aula anterior a fim de justificar suas respostas às atividades desta aula. Espera-se que os alunos apresentem dúvidas quanto aos conceitos de sucessor de um número natural e de números consecutivos.

Relato da aula do dia 08/04:

Antes de passar as questões no quadro, fiz uma breve revisão dos resultados obtidos na aula anterior, sobre a paridade da soma de dois números naturais. Também lancei as seguintes perguntas: “Adicionando três números pares, o resultado é sempre par ou sempre ímpar?”, “A soma de três números ímpares é sempre par ou sempre ímpar?", "Uma soma do tipo par + ímpar + par é sempre par ou sempre ímpar"?

Os objetivos destas questões foram reforçar os resultados da última aula e salientar aos alunos que eles poderiam utilizar livremente os resultados justificados anteriormente. Além disso, esperava-se que os alunos utilizassem a propriedade associativa e talvez também a comutativa da adição de números naturais.

Em suas respostas alguns alunos novamente se utilizaram do argumento que repete a afirmação; outros apresentaram exemplos particulares para justificar um resultado que é válido em uma quantidade infinita de casos. Alguns alunos utilizaram o argumento de formar duplas de alunos e verificar se sobra algum aluno sem dupla. Nenhum utilizou ou lembrou o argumento de dividir os números naturais em classes de pares e de ímpares e verificar o algarismo das unidades da soma (o que de fato seria muito trabalhoso).

Informei que a argumentação a partir da formação de duplas estava correta, mas decidi mostrar que, se utilizássemos a propriedade associativa da adição de números naturais e os resultados da última aula, a resposta seria facilmente obtida. Escrevi no quadro:

"par + par + par = (par + par) + par"

Neste momento, procurei evidenciar que, embora estivesse usando a palavra "par" para designar três números, isso não significava que os três números eram iguais, e concluí: "Como a soma entre parênteses é sempre par, conforme vimos na aula anterior, par + par = par, sempre".

Depois dessa explicação, os alunos facilmente responderam as outras duas questões, inclusive associando de formas diferentes e utilizando também, de forma explícita, a comutatividade da adição de números naturais.

Depois disso, passei as questões no quadro, uma a uma, item a item e os alunos começaram a trabalhar.

Na questão (1a), tive que relembrar o conceito de sucessor de um número natural. Os alunos não sabiam como começar o raciocínio. Sugeri aos alunos que eles calculassem alguns exemplos na tentativa de entender o comportamento da paridade da soma de um número natural com seu sucessor. Salientei novamente que, embora esses exemplos não garantissem o resultado, elas serviriam como conjectura, ou seja, como um caminho para o resultado. Ainda assim ficaram sem saber o que fazer. Então, disse para eles somarem, por exemplo, $0+1$, $1+2$, $2+3$, etc. e observarem os resultados. Só assim conseguiram responder que é falso que são sempre pares, havendo alunos que mencionaram o termo "contraexemplo".

Passei no quadro a questão (1b), a qual ficou em aberto até que a questão (1c) fosse respondida. Essa foi respondida por alguns alunos a partir dos exemplos dados na questão anterior. Novamente salientei que, neste caso, exemplos particulares não justificam que a afirmação vale sempre. Perguntei aos alunos se o sucessor de um número par é par ou é ímpar. Os alunos responderam que é ímpar, mas deram exemplos particulares. Outra vez lembrei sobre justificativas envolvendo exemplos particulares. Falei então que o sucessor de um número par é do tipo "par + 1" que é sempre ímpar, pois é a soma de um par com um ímpar. Escrevi no quadro "par + sucessor de par = par + ímpar". Os alunos completaram afirmando que par + ímpar é sempre ímpar como havíamos visto. Perguntei se esta era a única possibilidade para a soma de um número natural com seu sucessor. Houve alunos que responderam que se o número considerado for ímpar, o seu sucessor será par, pois ímpar mais 1 é sempre par, ficando com ímpar + par que é sempre ímpar também. Concluíram, assim, que a soma de um número natural com seu sucessor é sempre ímpar. Depois disso, retornamos à afirmação (1b) cuja falsidade foi facilmente justificada pelos alunos afirmando: "Se a resposta é sempre ímpar, então não pode às vezes ser par".

Passei no quadro a questão (2). Para começar, tive que retomar o conceito de números naturais consecutivos. Fiz uma analogia com a sequência no jogo de cartas e os alunos pareceram ter entendido. Para responder a questão (2a), novamente orientei os alunos a testarem alguns casos a fim de perceberem o que poderia acontecer. Alguns testaram apenas casos em que o primeiro dos três números era par, dando como resultado sempre um número ímpar. Chamei sua atenção quanto a isso, com o que depois verificaram que às vezes a soma é par, outras vezes é impar. Não foi difícil, depois disso e através dos contraexemplos, verificarem que (2a) e (2b) são falsas e que, portanto, (2c) é verdadeira.

A questão (3) serviria para dar um fechamento à atividade e vários alunos argumentaram corretamente que se os três números naturais consecutivos começassem por um número par, a soma seria ímpar e, se começassem por ímpar, a soma seria par, pois teríamos respectivamente par + ímpar + par = ímpar e ímpar + par + ímpar = par.

Minha avaliação da aula:

Nesta aula, vários alunos perceberam rapidamente os argumentos que justificariam suas respostas. Porém, nem todos os alunos acompanharam os raciocínios. Além disso, alguns ainda insistem em argumentar repetindo a afirmação ou apresentando exemplos particulares para a veracidade de uma afirmação quando temos infinitos casos para avaliar. Outros, no entanto, já compreenderam e utilizam corretamente contraexemplos.

Também considerei válida a atividade, por ter possibilitado o uso das propriedades da adição de números naturais.

4.2.10 Dia 09/04 – Multiplicação de Pares e Ímpares

Objetivos:

- Justificar precisamente a paridade do produto envolvendo números pares e ímpares.
- Rever conceito de sucessor, dobro e triplo de um número natural.

Roteiro de questões:

Nas questões abaixo, complete com V se a afirmação for verdadeira ou com F se for falsa, justificando cada resposta:

1. O produto de um número natural com seu sucessor é
   a. ( ) sempre par. b. ( ) sempre ímpar. c. ( ) às vezes par, outras vezes ímpar.

2. O dobro de um número natural é
   a. ( ) sempre ímpar. b. ( ) sempre par. c. ( ) às vezes par, outras vezes ímpar.

3. O sucessor do dobro de um número natural é
   a. ( ) sempre par. b. ( ) sempre ímpar. c. ( ) às vezes par, outras vezes ímpar.

4. O triplo de um número natural é
   a. ( ) sempre par. b. ( ) sempre ímpar. c. ( ) às vezes par, outras vezes ímpar.

5. Em que caso o triplo de um número natural será par? E Em que caso será ímpar?

Procedimentos:

Antes de lançar as questões, o professor retoma a aula anterior e questiona sobre a paridade da multiplicação de naturais, a qual será discutida juntamente com os alunos. Para responder as questões mencionadas acima, a turma não será dividida em grupos. Os alunos terão a liberdade de trabalharem individualmente ou em conjunto com outros colegas.

Pretende-se que a participação do professor se restrinja a dúvidas pontuais, sendo mínima esta participação. As questões serão passadas uma de cada vez e será dado um tempo para que os alunos discutam e resolvam as mesmas.

Expectativas:

Espera-se que os alunos apresentem uma boa desenvoltura na solução das questões, devido à semelhança com as atividades feitas nas aulas anteriores.

Relato da aula do dia 09/04:

Comecei a aula perguntando se o produto de dois números pares é sempre par ou é sempre ímpar. Alguns alunos apresentaram contraexemplos para afirmar que não é sempre ímpar. Para justificar que este produto é sempre par, tentaram uma argumentação a partir da formação de duplas. No entanto, a tentativa de alguns alunos de justificar a partir da formação de duplas não convenceu a todos.

Lembrei aos alunos como procedemos na última aula para justificar a paridade da adição de naturais, sem utilizar o argumento da formação de duplas. Os alunos lembraram-se da separação em casos e a análise dos casos individualmente. Juntamente com os alunos, fui calculando e registrando no quadro o algarismo das unidades dos produtos. Alguns alunos pediram para eles próprios completarem no quadro, no que foram obviamente atendidos. Eu apenas corrigia alguma fala ou escrita incorreta, com a participação dos demais alunos. Ficamos, ao final, com os seguintes resultados:

Par multiplicado por par:

$$\ldots 0\times\begin{cases}\ldots 0=\ldots 0\\ \ldots 2=\ldots 0\\ \ldots 4=\ldots 0\\ \ldots 6=\ldots 0\\ \ldots 8=\ldots 0\end{cases},\quad \ldots 2\times\begin{cases}\ldots 0=\ldots 0\\ \ldots 2=\ldots 4\\ \ldots 4=\ldots 8\\ \ldots 6=\ldots 2\\ \ldots 8=\ldots 6\end{cases},\quad \ldots 4\times\begin{cases}\ldots 0=\ldots 0\\ \ldots 2=\ldots 8\\ \ldots 4=\ldots 6\\ \ldots 6=\ldots 4\\ \ldots 8=\ldots 2\end{cases},\quad \ldots 6\times\begin{cases}\ldots 0=\ldots 0\\ \ldots 2=\ldots 2\\ \ldots 4=\ldots 4\\ \ldots 6=\ldots 6\\ \ldots 8=\ldots 8\end{cases},\quad \ldots 8\times\begin{cases}\ldots 0=\ldots 0\\ \ldots 2=\ldots 6\\ \ldots 4=\ldots 2\\ \ldots 6=\ldots 8\\ \ldots 8=\ldots 4\end{cases}$$

Observando o algarismo das unidades de cada produto, concluímos que o produto de dois números pares é sempre par.

As respostas para os casos “ímpar × ímpar” e “par × ímpar” foram dadas de maneira análoga. Além disso, pela comutatividade da multiplicação de números naturais, um produto “ímpar × par” também é sempre par.

Após este início, comecei a passar no quadro as questões, uma de cada vez, aguardando que os alunos resolvessem antes de passar à próxima questão. Como das outras vezes, alguns alunos não sabiam como começar, apesar de já termos feito este tipo de atividade em outras oportunidades.

Para a questão (1), novamente sugeri que calculassem exemplos na tentativa de intuir alguma regularidade. Outros alunos já partiram direto para os contraexemplos, com os quais verificaram a falsidade da afirmação (1a), calculando, por exemplo, $5 \times 6 = 30$. Aos poucos, alguns alunos perceberam que, como o sucessor de um número par é ímpar e como o sucessor de um número ímpar é par, sempre temos um produto do tipo par x ímpar ou ímpar x par. Em qualquer caso, o produto é par pelo que havíamos visto anteriormente.

Com a questão (2), ocorreu algo semelhante. Sugeri que fizessem alguns exemplos a partir dos quais os alunos justificaram a falsidade da afirmação de que o resultado é sempre ímpar. Aqueles alunos que estavam se destacando nestas atividades não tiveram dificuldade em justificar a veracidade da afirmação de que o dobro de um número natural é sempre par. Argumentaram que o dobro de um número par será do tipo "2 x par = par", pois é um produto de pares, ou do tipo "2 x ímpar = par", pois é um produto de um número par com um número ímpar. Um aluno sugeriu, neste momento, que poderíamos representar um número par usando letras, ficando a resposta, embora não exatamente com estas palavras, assim: "O dobro de um número pode ser representado por $2 \times n$, por exemplo. Se n for par, o resultado será par; se n for ímpar, o resultado será novamente par." Não resisti à tentação de informar que esta era justamente a maneira usual de se representar genericamente um número par, podendo a letra n ser substituída por qualquer número natural. Os demais alunos acompanharam a discussão e concordaram com as ideias do colega. Consideramos este fato um êxito em todo o nosso trabalho.

A questão (3) foi interessante após a discussão anterior, porque os alunos perceberam rapidamente que se o dobro de um número é sempre par, seu sucessor será sempre ímpar, pois é da forma par + 1. Aproveitei para perguntar como representamos um número ímpar e os alunos que responderam bem a questão anterior e participaram das discussões chegaram à conclusão de que esta representação seria $2 \times n + 1$. Alertei para o fato de que n deveria representar um número natural.

Na questão (4), alguns alunos tentaram concluir apressadamente que se o dobro é sempre par, o triplo seria sempre ímpar. Pedi para examinarem melhor sua conclusão através de exemplos. Com os exemplos, os alunos concluíram que às vezes o resultado era par, outras vezes, era ímpar. Sugeri que eles separassem em casos para analisar: calculando o triplo de um número par e calculando o triplo de um número ímpar. Com isso, já estávamos respondendo a próxima pergunta - questão (5) - à qual foi escrita no quadro após os alunos terem concluído e justificado que o triplo de par é sempre par e o triplo de ímpar é sempre ímpar.

Minha avaliação da aula:

Para justificar os resultados trabalhados no início da aula, antes da atividade propriamente dita, não ocorreu em nenhum momento aos alunos o raciocínio aditivo, isto é: seja qual for o número de vezes que eu some um número par com ele mesmo, este resultado sempre será par. Já com um número ímpar, pode acontecer de resultar par ou ímpar, dependendo se o número de parcelas iguais for par ou ímpar. Na verdade eu planejava passar este argumento no caso de ele não aparecer, mas acabei me esquecendo durante a aula e não o retomei.

O argumento de formação de duplas para a multiplicação de par com par não foi convincente devido à dificuldade de interpretação do cálculo “duplas × duplas”. Talvez tivesse sido positivo tentar neste momento o argumento “$n \times m = n$ vezes m duplas”, o que resultaria em par qualquer que fosse o natural $n > 0$, resolvendo-se ao mesmo tempo o caso ímpar × par.

Como das outras vezes, esperava maior desenvoltura por parte dos alunos com este tipo de questão. De fato, houve vários alunos que conseguiram sair-se bem nas suas argumentações e justificativas. Conseguiram relacionar um resultado novo com outro já justificado ou utilizar alguma estratégia análoga à de outra questão em uma nova situação. Porém, muitos dos alunos só conseguem começar o trabalho depois que o professor encaminha alguma sugestão ou abordagem. Quando das atividades em grupos, estes mesmos alunos não discutem com os colegas as possibilidades de resposta, preferindo chamar o professor para resolver alguma dúvida ou para pedir alguma sugestão.

Nesta aula, apareceu a escrita algébrica para um número par e para um número ímpar, um resultado muito interessante o qual eu não esperava neste momento.

Sugestão de reescrita das questões:

Nas questões abaixo, assinale a alternativa que completa afirmativamente cada frase, justificando cada resposta.

1. O produto de um número natural com seu sucessor é

   ( ) sempre par. ( ) sempre ímpar. ( ) às vezes par, outras vezes ímpar.

2. O dobro de um número natural é

   ( ) sempre ímpar. ( ) sempre par. ( ) às vezes par, outras vezes ímpar.

3. O sucessor do dobro de um número natural é

   ( ) sempre par. ( ) sempre ímpar. ( ) às vezes par, outras vezes ímpar.

4. O triplo de um número natural é

   ( ) sempre par. ( ) sempre ímpar. ( ) às vezes par, outras vezes ímpar.

5. Em que caso o triplo de um número natural será par? E Em que caso será ímpar?

4.2.11 Dia 10/04 – Propriedade Distributiva da Multiplicação de Números Naturais

Objetivos:

- Revisar ou apresentar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{N}$.
- Justificar a distributividade em $\mathbb{N}$.
- Rever o conceito de área de um retângulo.

Roteiro de questões:

Não foi planejada uma sequência rígida de questões para os alunos trabalharem. As perguntas serão feitas conforme o assunto for sendo tratado em sala de aula. Porém, pretende-se explorar questionamentos sobre área do retângulo, sobre o uso de letras pra representar números naturais genericamente, sobre as propriedades já estudadas, sobre cálculo mental, etc.

Procedimentos:

Inicialmente, aula expositiva em que o professor questiona o grupo enquanto apresenta o assunto da aula, apoiado no contexto numérico e geométrico. Posteriormente, exercícios de cálculo mental e registro do procedimento de cálculo mental. Finalmente, exercícios para praticar o uso da propriedade distributiva envolvendo números naturais.

Expectativas:

Espera-se que os alunos consigam compreender a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números naturais e percebam sua utilização no algoritmo da multiplicação e a incorporem, aplicando-a, por exemplo, no cálculo mental.

Relato da aula do dia 10/04:

Comecei a aula, revisando a comutatividade e a associatividade da adição e da multiplicação de números naturais, escrevendo no quadro: Se *a*, *b*, *c* representam números naturais quaisquer, então valem as seguintes propriedades:

$$\textit{Propriedade Comutativa} \begin{cases} \textit{da adição: } a+b=b+a \\ \textit{da multiplicação: } a\cdot b=b\cdot a \end{cases}$$

$$\textit{Propriedade Associativa} \begin{cases} \textit{da adição: } (a+b)+c=a+(b+c) \\ \textit{da multiplicação: } (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \end{cases}$$

Lembrei de como havíamos chegado a estas conclusões (com material manipulativo e geometricamente) e que a subtração e a divisão de números naturais não possuem tais propriedades.

Alertei os alunos sobre o fato de que as duas propriedades vistas anteriormente trabalhavam separadamente a adição e a multiplicação e que a propriedade que trabalharíamos agora relacionava as duas operações. Não mencionei inicialmente o nome da propriedade.

Para introduzir a distributividade, utilizei a seguinte abordagem: Desenhei no quadro a Figura 8 e, sem escrever os números correspondentes de linhas e colunas, perguntei aos alunos quantos pontos havia nesta figura. Procedi assim para verificar a estratégia de contagem dos alunos. Alguns alunos contaram os pontos um a um, outros multiplicaram o número de linhas pelo número de colunas, tentando ainda explicar aos colegas o porquê de proceder desta maneira. Depois, pedi que os meninos contassem apenas os pontos em azul e as meninas, os pontos em rosa, enquanto escrevia no quadro, conforme as respostas dos alunos, $4\cdot 3=12$ e $4\cdot 2=8$. Assinalei, na figura, os números que indicavam as linhas e colunas de cada cor e resumi os cálculos feitos: Por um lado $20=4\cdot 5=4\cdot(3+2)$. Por outro lado $20=12+8=4\cdot 3+4\cdot 2$. Portanto $4\cdot(3+2)=20=4\cdot 3+4\cdot 2$. Pela transitividade da relação de igualdade, concluímos que $4\cdot(3+2)=4\cdot 3+4\cdot 2$.

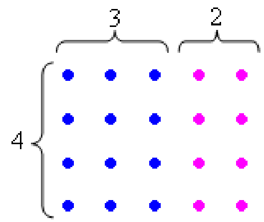


Figura 8

Fiz o mesmo com a Figura 9 e com a Figura 10 em que os alunos contaram 32 e 30 pontos, respectivamente. Neste momento, não percebi alunos contando os pontos um a um. Como da outra vez, resumi os cálculos feitos, destacando nas figuras cada passo dos cálculos.

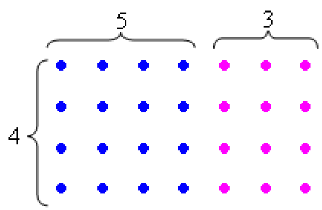


Figura 9

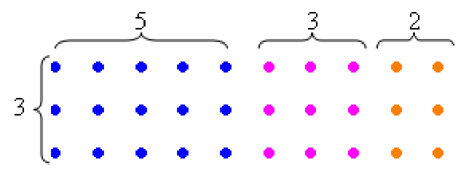


Figura 10

Mesmo já tendo trabalhado a comutatividade da multiplicação de naturais, resolvi fazer mais um caso (Figura 11) para confirmar o que já sabíamos, isto é, que a distributividade funciona tanto à esquerda quanto à direita. Neste caso, obtivemos, por um lado, $20 = 5 \cdot 4 = (3+2) \cdot 4$; por outro lado, $20 = 12 + 8 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4$. Portanto $(3+2) \cdot 4 = 20 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4$. Pela transitividade da relação de igualdade, concluímos que $(3+2) \cdot 4 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4$.

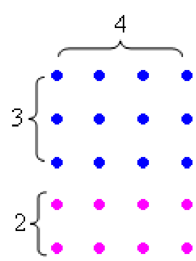


Figura 11

A partir daqui, acho que eu já poderia ter encaminhado uma generalização, pensando em *a* linhas, *b* colunas de pontos de cor azul e *c* colunas de pontos de cor rosa, mas não senti, nesse momento, convicção nos alunos (nem em mim de convencê-los) para realizar esta generalização. Assim, utilizei também o contexto geométrico para justificar a distributividade da multiplicação nos naturais.

Comecei com casos particulares para relembrar o cálculo da área do retângulo. Como estávamos tratando de números naturais, não foi difícil mostrar aos alunos (inclusive eu estava devendo isso quando tratei da comutatividade da multiplicação) que a área do retângulo é dada pelo produto do comprimento pela largura, contando o número de quadrados de área unitária que cobriam aquele retângulo. Então, desenhei no quadro a Figura 12 e perguntei aos alunos como calcular a área azul e a área rosa. Vários alunos responderam com as expressões $a \cdot b$ e $a \cdot c$. Concluindo, abaixo da Figura 12, escrevi:

Área do retângulo todo = Área do retângulo azul + Área do retângulo rosa

$$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Até aqui, havíamos concluído que a propriedade distributiva é válida para todos os números naturais exceto para o zero, pois, se uma das medidas for zero, não existirá o retângulo. Fizemos separadamente o caso do zero, onde calculamos

$$0 = 0 \cdot (b+c) = 0 \cdot b + 0 \cdot c = 0 + 0 = 0 \text{ e } 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

Depois, abordamos a distributividade da multiplicação em relação à subtração de naturais, desde que essa subtração seja possível em $\mathbb{N}$. Para isso, utilizei também a área de retângulos como ilustrado na Figura 13.

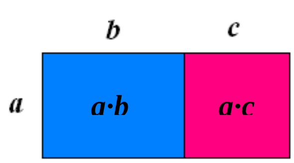


Figura 12

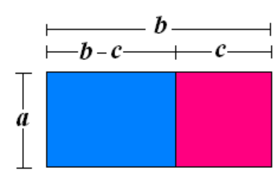


Figura 13

Novamente, escrevi a conclusão abaixo da figura 13:

Área do retângulo azul = Área do retângulo todo - Área do retângulo rosa

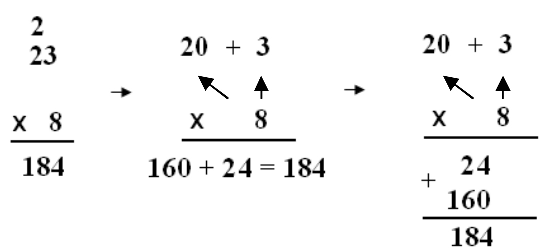
$$a(b-c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Após isso, pedi que os alunos realizassem mentalmente alguns cálculos do tipo 8×23, 7×19, 4×37 e depois registrassem suas estratégias. A maioria dos alunos tentou reproduzir mentalmente o algoritmo da multiplicação. Assim, exemplifiquei como poderíamos fazer estes cálculos mentalmente utilizando a propriedade que tínhamos recém trabalhado. Fiz o caso 8×23: “8 vezes 20 é igual a 160 e 8 vezes 3 é igual a 24. Temos que 160 mais 24 é igual a 184. Portanto, $8 \times 23 = 184$”. Fiz também outros exemplos que não registrei. Com isso, alguns alunos tentaram calcular os outros produtos que eu pedia, utilizando a propriedade distributiva. Porém, a maioria dos alunos continuava ou utilizando mentalmente o algoritmo ou não conseguindo decompor os números em adições ou subtrações de forma que as multiplicações se tornassem mais fáceis. Fizemos oralmente algumas dessas multiplicações e os alunos registravam no caderno. Eu tentava acompanhar a escrita dos alunos sugerindo como eles deveriam escrever. Apareceram escritas do tipo

$$8 \times 23 = 8 \times (20+3) = 160$$
$$8 \times 3 = 24 + 160 = 184 .$$

Tentei corrigir a escrita desses alunos, mostrando que nem $8 \times 23 = 160$ nem $8 \times 3 = 184$, mas que $8 \times 23 = 184$.

Finalmente, procurei mostrar aos alunos que o algoritmo da multiplicação se baseia na propriedade distributiva, fazendo, entre outros exemplos, o seguinte cálculo



Minha avaliação da aula:

Com esta aula, foram trabalhadas três importantes propriedades das operações com números naturais: a comutatividade, a associatividade e a distributividade. Analisando agora, percebo que elas foram trabalhadas muito rapidamente, mas eu não dispunha de tanto tempo para utilizar neste assunto, embora fosse central na abordagem que pretendia fazer em expressões algébricas. Certamente me concentrarei mais nas propriedades numa próxima experiência com o assunto, principalmente na propriedade distributiva, através de jogos, material manipulativo, etc. Contudo, eu voltaria a trabalhar com propriedades das operações quando fosse tratar dos números inteiros e dos números racionais.

Devido às dificuldades apresentadas pelos alunos até aqui, podemos estimar o parco trabalho feito nas séries anteriores com as propriedades das operações.

4.2.12 Dia 15/04 – Avaliação

Objetivos:

- Avaliar individualmente a aprendizagem dos alunos, verificando o conhecimento conceitual adquirido, seus argumentos e justificativas e capacidade de comunicação envolvendo números naturais.

Roteiro de questões:

1) Complete com V se a afirmação for verdadeira ou com F se for falsa, justificando sua resposta.
Sejam $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ dois números naturais, tais que $x \geq y$. Nestas condições, a diferença $\boldsymbol{x - y}$

a. (   ) nunca é um número natural.
b. (   ) sempre é um número natural.
c. (   ) às vezes é um número natural, outras vezes não é um número natural.

2) Qual é o **maior** número natural $\boldsymbol{k}$, de modo que a diferença $\mathbf{5} - \boldsymbol{k}$ seja um número natural? Justifique.

3) Considere a adição de dois números naturais, digamos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

a. Como podemos representar a soma destes dois números, se não sabemos os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$?
b. Se somarmos 5 à primeira parcela e 6 à segunda parcela, como podemos representar cada nova parcela?
c. Como podemos representar a nova soma? Justifique.

4) Considere $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ dois números naturais. O produto destes dois números pode ser representado por $\boldsymbol{m \cdot n}$. Qual é o resultado da multiplicação do dobro do primeiro fator com o triplo do segundo fator? Explique.

5) Um número primo é um número natural que possui **exatamente dois** divisores. Com base nesta definição, responda com V para verdadeiro ou com F para falso, justificando sua resposta:

a. (   ) Além do número 2, há outros números primos pares.
b. (   ) O número 5 é o único número primo terminado em 5.
c. (   ) O número 1 é um número primo.

6) Responda com V para verdadeiro ou com F para falso, justificando cada resposta.

a. (   ) O quadrado de um número par é sempre um número par.
b. (   ) A soma de um número ímpar com o seu quadrado é sempre par.
c. (   ) O cubo de um número ímpar é sempre ímpar.
d. (   ) O quadrado da soma de um número par com um numero ímpar é sempre ímpar.

Procedimentos:

Avaliação escrita individual sem consulta ao material a ser realizada em dois períodos de 50 minutos.

Expectativas:

Espera-se que, em geral, os alunos tenham dificuldades na apresentação de justificativas, mas que, nos demais itens da prova tenham um bom desempenho.

Análise da avaliação:

Participaram da avaliação 21 alunos.

A questão (1) tinha como objetivos verificar se os alunos conseguiram compreender a linguagem simbólica, com o uso de letras para representar os termos da subtração, bem como o significado do símbolo "$\geq$"; verificar se os alunos apropriaram-se do termo "diferença" como o resultado de uma subtração; observar as justificativas dos alunos, quanto ao uso de contraexemplos ou justificativas genéricas.

Dos 21 alunos, 11 (52,38%) responderam corretamente a questão (1a), incluindo aí a justificativa, 2 alunos (9,52%) não responderam a questão e 8 alunos (38,10%) acertaram parcialmente a questão. Dos alunos que acertaram completamente, 6 utilizaram um contraexemplo para justificar sua resposta e 5 utilizaram uma justificativa genérica. Para exemplificar, um aluno respondeu com o seguinte contraexemplo: "se o x for 5 e o y for 5 vai dar um número natural". Outro aluno simplesmente justificou assim: "pois $5 – 4 = 1$". Como exemplo de justificativa genérica, um aluno respondeu: "pois quando o minuendo for maior ou igual ao subtraendo o resultado vai dar outro número natural", certamente identificando o primeiro termo, x, como o minuendo e o segundo termo, y, como o subtraendo. Como exemplo de justificativa incorreta, podemos citar a de um aluno que simplesmente repetiu a afirmação ou a de outro aluno que respondeu: "pois *às* vezes na soma vai dar um número natural", mostrando confundir o nome do resultado da adição com o nome do resultado da subtração.

Na questão (1b), 7 alunos (33,33%) responderam correta e completamente, 6 alunos (28,57%) erraram ou não responderam e 8 alunos (38,10%) só acertaram a escolha “V” para a afirmação, mas erraram ou não apresentaram a justificativa. Das justificativas corretas, destacamos a seguinte: “pois quando o minuendo for maior ou igual ao subtraendo o resultado vai dar outro número natural”. Outro exemplo de justificativa que consideramos correta foi: “porque o x é maior *ai* sobra não *fauta*”. Claro que aqui o aluno não se lembrou de considerar ou deixou de escrever o caso em que x e y são iguais, para ficar perfeita a justificativa, mas o seu raciocínio dá a entender que ele já está pensando em números negativos. Das justificativas incorretas, novamente temos aquelas que repetem a afirmação (inclusive feita pelo mesmo aluno com que exemplificamos na questão anterior), outras que procuram justificar com um exemplo particular e outras, ainda, deixadas em branco.

Na questão (1c), tivemos 9 alunos (42,86%) acertando completamente, 5 alunos (23,81%) acertando parcialmente a escolha “F”, mas errando ou não apresentando justificativa e 7 alunos (33,33%) errando completamente ou não respondendo a questão. A resposta “falso, pelas respostas anteriores” foi a que mais apareceu entre as respostas corretas. Mas é interessante anotar resposta: “falso, porque não tem como dar um negativo, só se mudar as *ordens*”, mostrando que o aluno pensou na não-comutatividade da subtração, onde, no presente caso, nem ao menos o resultado é um número natural quando os dois termos são distintos. Das respostas incorretas destacamos aquelas que, ao menos, foram coerentes com suas respostas anteriores, onde responderam “F” nas questões (1a) e (1b) e “V” na questão (1c) e deram a justificativa “pelas respostas anteriores”.

O objetivo da questão (2) era verificar a capacidade de os alunos interpretarem o enunciado de uma questão de caráter genérico.

Esta questão foi respondida corretamente por 11 alunos (52,38%). Entre as respostas corretas destacamos: “O maior número é o 5 pois $5-5\,e\;0$ e zero é um número natural. E se passar de 5 por ex: $5-6=-1$ e não é um número natural”. Também damos como exemplo a resposta: “5 pois $5-5\,e\;0$ e $0\;e$ um número natural menor”, deixando subentendido que o maior possível é o número 5 porque é aquele que dá o menor resultado. Seis alunos (28,57%) erraram a questão (2 alunos responderam incorretamente e 4 alunos não responderam). Uma das respostas incorretas foi: “4 porque $5-4=1$ e 1 é um n^o natural”, em que o aluno, além de uma justificativa incompleta, talvez não tenha lembrado que consideramos desde o início o zero como sendo um número natural. A outra resposta incorreta mostra total confusão por parte do aluno: "k pois $5-4$ não é um número natural". Quatro alunos (19,05%) apenas acertaram que o número procurado é o número 5 e não justificaram ou sua justificativa não foi considerada correta, como a do aluno que respondeu: "5 pois é um número natural".

A questão (3) objetivava: verificar se os alunos eram capazes de escrever uma sentença matemática utilizando letras para representar genericamente números naturais; verificar se eles memorizaram os nomes dos termos de uma adição; verificar se eles justificariam a soma das duas novas parcelas através das propriedades da adição (comutativa e associativa).

No item (a), 10 alunos (47,62%) responderam corretamente, embora com uma variedade de respostas corretas. Por exemplo, houve quem respondeu "$a+b$", conforme o esperado, houve quem respondeu com a expressão

$$\begin{array}{r} a \\ +\ B \\ \hline \end{array} \quad ,$$

utilizando a adição montada como no algoritmo e, ainda, utilizando a letra B maiúscula e houve, também, que respondeu com "$a+b=x$", representando a soma por x e dizendo que este x vale $a+b$. Também foram 10 (47,62%) os alunos que ou não responderam (6 alunos) ou erraram (4 alunos) essa questão. As respostas consideradas incorretas foram as seguintes: "sendo que a possa ser um número natural e b também ou não", "podemos representar esses dois números como duas parcelas", "podemos representar com 2 números naturais quaisquer", "damos um valor a cada um deles". A primeira resposta não faz qualquer sentido. Na segunda e terceira respostas, os alunos parecem entender que não podem dar um exemplo particular, mas não conseguem expressar-se simbolicamente. A terceira resposta mostra que o aluno tenta particularizar em vez de generalizar a escrita matemática, podendo aqui ter havido uma ambigüidade da interpretação de *representar um número qualquer*, sugerindo que se pode escolher o número que quiser. Apenas 1 aluno (4,76%) apresentou uma resposta que não consideramos como correta, mas que tem alguma coerência: "Podemos representar $A+B=8$. Como também $4+4=8$". Aqui também se evidencia a necessidade de haver um fechamento para a resposta, ou seja, o aluno não considera $A+B$ como uma possível resposta para a questão.

O item (b) da questão (3) foi respondida corretamente por apenas 2 alunos (9,52%) e foi respondida incorretamente ou não respondida por 19 alunos (90,48%). Este resultado foi totalmente inesperado, já que, por diversas vezes, tivemos que escrever a representação da soma entre dois números naturais. Alguns erros foram os seguintes: “podemos representar cada parcela com uma adição de dois números comutativos”, “$a5+b6$”, “5 + 6”, “podemos representar 7 *tercera*, 8 quarta, 9 quinta, 10 sexta, 11”, “por uma letra”, “com um n^{o} *impar* depois um n^{o} par”, “somando + 1”. A primeira e a quarta respostas não fazem qualquer sentido. A segunda e a terceira respostas até têm alguma coerência, mas estão longe de estarem corretas.

No item (c), os alunos naturalmente tiveram um desempenho pior do que na questão anterior. Apenas um aluno (4,76%) correspondeu às expectativas, embora sem justificar explicitamente sua resposta. Isto é, o aluno utilizou as propriedades para representar a adição, mas não deixou claro que tenha feito isso de forma consciente. Sua resposta foi: “$A+B+(5+6)$”. Ainda assim, além de utilizar as letras maiúsculas, o aluno não percebeu que poderia ter somado 5 + 6 para encontrar a resposta esperada $a+b+11$. Dezenove alunos (90,48%) erraram ou não responderam e um aluno (4,76%) deu uma resposta que consideramos como parcialmente correta, pois apresentou coerência na escrita, foi ela:

$$\begin{array}{rl} & a+5 \\ + & \underline{B+6} \end{array}$$

Das respostas incorretas, damos como exemplo: “7 a primeira parcela e 3 a segunda”, “6 + 5, trocando a ordem”, “*c* pois não sabemos o *proximo* número”, aparentemente usando a ordem *alfabética* no contexto das expressões genéricas.

Na questão (4), os objetivos eram análogos aos objetivos da questão (3), exceto pelo fato de que agora a operação envolvida era a multiplicação e que apareciam os termos dobro e triplo, os quais eu também pretendia verificar se os alunos conheciam.

Nenhum aluno chegou ao resultado esperado, qual seja, $6 \cdot m \cdot n$. No entanto, consideramos corretas as respostas de 4 alunos (19,05%) que responderam com “$2m \cdot 3n$”, ou alguma variação dessa expressão. Consideramos como correta, pois não ficou claro, no enunciado da questão, que eles deveriam realizar todos os cálculos possíveis para escrever a forma esperada de resposta e que explicassem com as propriedades. Nesse sentido, deveríamos também considerar correta a resposta

$$\begin{array}{rl} & a+5 \\ + & \underline{B+6} \end{array}$$

apresentada para a questão (3c). Porém, como um aluno foi capaz de escrever "$A+B+(5+6)$", consideramos a anterior apenas parcialmente correta. Treze alunos (61,90%) erraram ou não responderam a questão e 4 alunos (19,05%) acertaram parcialmente a questão, esboçando alguma coerência na resposta. Exemplificamos as respostas incorretas com: "$3 \cdot 2 + n \cdot 3$", "$m^2 \cdot m^3 = n^3$ porque $m^2 \cdot m^2 = n^3$". Dos alunos que acertaram parcialmente a questão, destacamos a resposta "$2m + 3n$", em que a troca do sinal de multiplicação pelo sinal de adição pode ter ocorrido por falta de atenção.

Para a questão (5), os objetivos eram: observar se os alunos seriam capazes de utilizar uma definição dada explicitamente na questão para, com base nesta definição, justificar suas respostas; verificar as justificativas dos alunos, quanto ao uso de contraexemplos ou justificativas genéricas; avaliar a capacidade de leitura e interpretação dos alunos.

Dos 21 alunos, 6 (28,57%) acertaram completamente o item (a) dessa questão, respondendo de alguma forma que quaisquer números pares maiores do que 2 terão no mínimo três divisores, o 1, o 2 e ele mesmo. Dos 10 alunos (47,62%) que erraram, trazemos o seguinte exemplo: "verdadeiro 0, 2, 4, 6". Tivemos ainda 5 alunos (23,81%) que acertaram parcialmente a questão. Quatro deles respondendo com "F", mas não justificando e um aluno respondendo com "V", mas justificando corretamente com: "porque todos os outros pares *tem* 3 divisores". Consideramos correta essa justificativa, mesmo que o aluno não tenha explicitado que os números pares, com exceção do número 2, têm *no mínimo* 3 divisores.

No item (b), 7 alunos (33,33%) acertaram a resposta, 8 alunos (38,10%) erraram ou não responderam e 6 alunos (28,57%) acertaram parcialmente, respondendo apenas que a afirmação é verdadeira. As respostas corretas foram justificadas, por exemplo, com: "pois todos os números que terminam em 5 (menos o 5) *pode* ser dividido por 1, 5 e por ele mesmo". Das respostas erradas destacamos: "Falso, 5, 15, 25, 35, 45 e assim sucessivamente". Ao menos essa justificativa foi coerente com a falsidade da afirmação respondida pelo aluno. Como exemplo de respostas parcialmente corretas podemos citar aquelas que respondem com "V", mas justificam repetindo a afirmação ou dando exemplos de números terminados em 5 que, obviamente, não são primos. Esta questão deixa bem claro que a maioria dos alunos não conseguiu compreender até este momento o conceito de número primo, talvez por conta de sua dificuldade com os conceitos de ser divisível e de divisor, conforme constatamos durante as aulas.

O item (c) da questão (5) foi corretamente respondido por 8 alunos (38,10%) que justificaram afirmando que “o 1 tem apenas um divisor, ele mesmo”. Também consideramos corretas as justificativas dos alunos que escreveram que o 1 é um número primo porque não tem dois divisores. Claro que nesta resposta faltou o detalhe de incluir a palavra “exatamente”, como estava escrito na definição. Cinco alunos (23,80%) erraram ou não responderam e 8 alunos (38,10%) acertaram parcialmente a questão, 6 deles respondendo apenas com “F” e 2 deles respondendo com “V” mas justificando corretamente. Pode-se perceber claramente, pelo menos para um dos dois alunos que acertaram parcialmente a questão, que ele considerou {1, 1} como o conjunto dos divisores de 1. Talvez este aluno tenha recuperado a definição errônea de número primo como aquele número natural que só é divisível por 1 e por ele mesmo. Como exemplo de resposta totalmente errada, destacamos: “Sim porque tem vários outros n^{o} primos com o n^{o} 1”. Este aluno provavelmente não compreendeu a questão, confundindo o número 1 com números primos terminados em 1.

Os objetivos da questão (6) eram: verificar se os alunos compreenderam os conceitos de par e ímpar; avaliar a capacidade de leitura e interpretação dos alunos; verificar as justificativas dos alunos, quanto ao uso de contraexemplos ou justificativas genéricas; observar como os alunos interpretam as expressões “o quadrado de um número” e “o cubo de um número”.

O item (a) da questão (6) foi corretamente respondido por 6 alunos (28,57%). Em geral, seus argumentos foram os mesmos, de que “par *vez* par resulta em um número par”, demonstrando compreenderem o significado da expressão “o quadrado de um número”. Alguns alunos escreveram também a expressão “par com par”, mas depois escreveram “par × par”. Doze alunos (57,14%) responderam corretamente com “V”, porém, não justificaram ou justificaram incorretamente. Nas justificativas de maior ocorrência ou os alunos repetiram a afirmação ou calcularam alguns exemplos particulares ou, ainda, tomaram o quadrado de um número par por “par + par”. Mas, também apareceu a seguinte justificativa para esta questão: “Sim porque: $2 \cdot 0 = 0 \;|\; 2 \cdot 2 = 4 \;|\; 2 \cdot 6 = 2 \;|\; 2 \cdot 8 = 6$”. Nesta justificativa, o aluno repetiu parte de um procedimento que fizemos em aula, onde mostramos que o produto de pares é sempre par. Porém, o aluno dá mostras de que não compreendeu o significado da expressão “o quadrado de um número”, confundindo o mesmo com “o dobro de um número”. Apenas 3 alunos (14,29%) deixaram a questão em branco.

Dos 21 alunos, apenas 2 (9,52%) acertaram o item (b) da questão (6), 13 alunos (61,90%) erraram ou não responderam e 6 alunos (28,57%) responderam afirmativamente a questão, errando ou não apresentando a justificativa. Um dos alunos para os quais consideramos a resposta correta deu a seguinte justificativa: “Verdadeiro, pois ímpar + ímpar · ímpar = par”. Este aluno não deixou claro que tenha calculado o produto de ímpares primeiro para depois calcular a adição, mas interpretou corretamente a afirmação, reescrevendo-a em um formato mais simbólico. O outro aluno que respondeu corretamente justificou afirmando: “sim porque ímpar + ímpar = par”. Quanto a este aluno, não sabemos se ele separadamente calculou o quadrado de um número ímpar, o qual resulta em ímpar, para só então somar este resultado ao primeiro. Foram consideradas incorretas as justificativas que repetiam a afirmação e aquelas em que o aluno apenas exibiu um ou mais exemplos particulares. Mas houve quem apresentasse uma justificativa absurda, por exemplo: “porque 9 + 2 = 11 por isso é impar”, “ímpar · par = ímpar”, “nem sempre”, “ex: 3 + 35 = 38”.

Quanto ao item (c) da questão (6), novamente, apenas 2 alunos (9,52%) responderam corretamente, 11 alunos (52,38%) responderam corretamente com “V”, mas erraram a justificativa ou não justificaram e 8 alunos (38,10%) erraram ou não responderam a questão. Os dois alunos que responderam corretamente deram a mesma resposta: “verdadeiro, pois ímpar · ímpar · ímpar = ímpar”. Dos alunos que acertaram parcialmente a questão, houve aqueles que responderam com a própria afirmação, aqueles que deram um exemplo particular (às vezes incorreto como o caso do aluno que deu o seguinte exemplo: “$3^3 = 35$”) e algumas respostas desprovidas de sentido, como: “pois se pegarmos a terceira *potencia* elevada ao quadrado vai dar *impar*”. Interessante é a resposta “Sim porque 3 · 1 = 3 | 3 · 3 = 9 | 3 · 5 = 5 | 3 · 7 = 1 | 3 · 9 = 7” dada pelo mesmo aluno que havia respondido, na questão (6a), “Sim porque 2 · 0 = 0 | 2 · 2 = 4 | 2 · 6 = 2 | 2 · 8 = 6”, pois demonstra claramente que o aluno confunde o quadrado de um número com o dobro de um número e o cubo de um número com o triplo de um número. Dos 8 alunos que erraram ou não responderam, temos 3 alunos no primeiro caso e 5 alunos no segundo caso. Dos 3 alunos que erraram 1 não justificou. Quanto aos outros dois, suas respostas foram: “Falso, ímpar · ímpar = par” e “Falso, pois $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 18$”. Pela primeira resposta, o aluno não compreende o que significa “o cubo de um número, além de ter errado a conclusão. Quanto à segunda resposta, o aluno provavelmente calculou 3 + 3 = 6 e multiplicou então por 3, resultando em 18. Esse erro de cálculo terminou produzindo um contraexemplo para a afirmação, levando o aluno a escolher erroneamente a resposta “F”.

Nenhum aluno acertou completamente o item (d) da questão (6). Tivemos 9 alunos (42,86%) acertando parcialmente e 12 alunos (57,14%) errando ou deixando de responder. Entre as respostas e justificativas erradas, destacamos as seguintes:

- "falso, $2+5=7^2 \rightarrow 7 \cdot 7 = 14$". Este erro de cálculo gerou um contraexemplo para a afirmação, levando o aluno ao erro da escolha do valor lógico da afirmação.

- "falso, pois a soma de um número par com um número ímpar é sempre par". Este aluno não foi capaz de testar um exemplo para convencer-se de que sua afirmação estava errada.

- "Verdadeiro. Qualquer *numero* par elevado ao quadrado e depois somado com um número *impar dara* ímpar". Esta resposta evidencia que o aluno não foi capaz de interpretar corretamente a afirmação.

Minha avaliação da prova:

Para mim, foi surpresa o resultado tão insatisfatório nesta primeira avaliação individual e sem consulta ao material.

Nas Figuras 18, 19 e 20 dos APÊNDICES A, B e C, respectivamente, incluí uma coluna denominada "Nota teórica". Esta deveria ser a nota dos alunos na prova caso o Município de São Leopoldo não adotasse um sistema avaliativo por conceitos. Calculando a média aritmética das notas teóricas (40,73) observa-se que 14 alunos ficaram abaixo da média, a qual não chega a cinqüenta por cento do escore total. Se exigíssemos o mínimo de 60% de aproveitamento, o número de alunos abaixo do mínimo aumentaria para 16 alunos.

Na verdade, eu esperava dificuldades por parte de alguns alunos, precisamente daqueles que não apresentaram durante as aulas uma boa participação. Porém, houve pelo menos outros três alunos que vinham participando relativamente bem quando dos trabalhos em grupo e que não demonstraram bom desempenho durante um trabalho individual. No entanto, pretendo continuar realizando trabalhos em grupo, pois o trabalho individual durante as aulas não surtiu bom resultado. Além disso, eu não consegui ainda criar uma estratégia que faça com que os alunos trabalhem individualmente com o mesmo interesse que realizam as atividades em grupos.

É bem verdade que os alunos desta turma não têm o hábito de estudar fora do horário da escola, conforme eles mesmos relatam, e isto certamente contribuiu para o seu fraco desempenho na avaliação. Também é verdade que apenas um mês e meio de aulas (17 encontros) não é tempo suficiente para que haja uma mudança muito radical de atitude dos alunos perante a Matemática e que adquiram a competência de pensar genericamente. Mas, encontrar alunos numa sétima série que desconhecem o significado da expressão “o quadrado de um número” ou “o cubo de um número”, ou ainda que não saibam calcular uma potência natural de um número, revela ao menos uma defasagem de conhecimentos conceituais e procedimentais. Isto não quer dizer que os professores anteriores não tenham trabalhado com estes alunos os conceitos mencionados. Eu mesmo fui professor de muitos alunos desta turma no final da quinta série e na sexta série e tenho certeza que trabalhei aqueles conceitos. Mas, talvez a forma como estes conceitos (e outros tantos) foram trabalhados e a ênfase com que foram tratados naquelas oportunidades é que estejam equivocadas.

Voltando ao resultado da prova, acreditamos que o baixo índice de acertos em algumas questões deve-se, então, à novidade de abordagem da Matemática que estou introduzindo nesta turma. Questões como a (3) e a (4) deverão ser novamente solicitadas na prova sobre números inteiros, com os enunciados reformulados a fim de tornar claras as respostas esperadas. As demais questões serão apenas retomadas e reforçadas em aula.

Quero crer que algumas das dificuldades encontradas pelos alunos nesta primeira avaliação individual serão menores à medida que questões análogas forem abordadas novamente com os números inteiros e racionais. Além disso, acredito que a continuidade em aula com o trabalho envolvendo questões de caráter genérico renderá bons resultados quando tratarmos, posteriormente, o conteúdo expressões algébricas.

4.2.13 Dia 17/04 – Números Inteiros (Conceitos Gerais)

Objetivos:

- Revisar conceitos envolvidos no campo numérico dos inteiros (números positivos, números negativos, localização na reta numérica, módulo, oposto ou simétrico, regras da adição).
- Preparar os alunos com conceitos que serão úteis para encaminhamentos futuros, tais como as justificativas para as propriedades das operações com números inteiros e, posteriormente, com números racionais.

Roteiro de questões:

Para esta aula, não foi elaborado um roteiro rígido de questões para os alunos trabalharem individualmente ou em grupos. Direcionaremos as perguntas na tentativa de fazer com que os alunos resgatem alguns conceitos trabalhados nas séries anteriores. Alguns aspectos que pretendemos retomar são: situações práticas cuja representação necessita dos números inteiros, diferenças e semelhanças entre os números naturais e os números inteiros, a distribuição dos números inteiros numa reta numérica, o conceito de módulo de um número inteiro, operações envolvendo os números inteiros, etc.

Procedimentos:

Aula expositiva em que o professor lança questões aos alunos a fim de que eles retomem conceitos relativos ao campo numérico dos inteiros. Apesar de não haver um roteiro rígido de questões, o professor procurará direcionar as perguntas, dos conceitos iniciais, tais como módulo e oposto, às operações com inteiros.

Expectativas:

Espera-se que os alunos consigam lembrar-se de alguns conceitos sobre os números inteiros, mas também se imagina que apresentem dificuldades quanto ao conceito de módulo e sobre as regras das operações. Espera-se uma participação ativa dos alunos na discussão.

Relato da aula do dia 17/04:

Comecei a aula, perguntando se os alunos lembravam-se dos números inteiros estudados na sexta série. Os alunos disseram lembrar-se de alguma coisa, mencionaram os números negativos, alguns mencionaram a frase “negativo *com* negativo é positivo... não, é negativo?!?”, lembraram-se das temperaturas abaixo de zero e o saldo de gols. Tratei de organizar algumas respostas, escrevendo no quadro:

Descrição da situação	**Notação utilizada**
5º C abaixo de zero	Temperatura: -5^{o} C
Equipe marcou 12 gols e sofreu 15 gols	Saldo de gols: -3 gols
Fiquei devendo 2 reais ao meu irmão	Meu saldo com meu irmão: -2 reais
300 metros abaixo do nível do mar	Altitude: -300 metros

Mencionei que temos também os números inteiros positivos e que, neste caso, não precisamos utilizar o sinal “+” para caracterizá-los, pois estes números coincidem com os números naturais, já conhecidos, por exemplo:

Descrição da situação	**Notação utilizada**
5º C de temperatura	Temperatura: $5^{o}\,C$
Equipe marcou 15 gols e sofreu 12 gols	Saldo: 3 gols
Sobraram 2 reais	Saldo:2 reais
300 metros acima do nível do mar	Altitude: $+300$ metros ou 300 metros

Depois disso, tratei da representação dos números inteiros numa reta numérica. Desenhei uma reta orientada horizontal, marquei um ponto para localizar o número zero e uma unidade de comprimento. Alertei que, para marcar os próximos números inteiros, devemos manter a mesma unidade. Os alunos lembraram que à direita do zero localizamos os inteiros positivos e à esquerda do zero, os inteiros negativos (Figura 14):

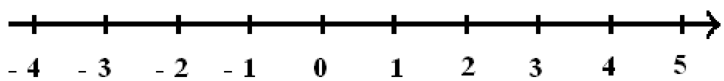


Figura 14

Lembrei aos alunos que poderíamos também colocar esta reta na vertical, sendo que é comum estabelecer-se os números positivos acima do zero e os negativos abaixo do zero.

Escrevi por extensão o conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ para representar o conjunto dos números inteiros. Nesse momento, chamei a atenção de que a adição envolvendo números naturais sempre resulta em um número natural. Mas, com a subtração não ocorre a mesma coisa, como já havíamos visto anteriormente (aulas dos dias 11/03 e 12/03) . Perguntei: “O número 3 é natural, o número 5 também é natural. O que podemos dizer da diferença (insisti no termo “diferença” porque queria fixar essa nomenclatura) $3-5$?” A maior parte dos alunos respondeu “– 2”. Perguntei se “ -2 ” é um número natural. Os alunos responderam que não e concluí: “Portanto, nem sempre uma subtração envolvendo números naturais resulta em um número natural”.

Perguntei aos alunos: “Em que condições a diferença entre dois números naturais é um número natural (questão feita nas aulas dos dias 11/03 e 12/03)? Esta questão foi respondida rapidamente por diversos alunos: “É quando o número de cima é maior ou igual que o número de baixo”, “é quando o minuendo é maior ou igual ao subtraendo”, foram respostas de vários alunos. Questionei: “No conjunto dos naturais, a diferença entre dois números nem sempre é um número natural, por exemplo, $3-5=-2$. E no conjunto dos números inteiros?” Vieram várias respostas, um pouco confusas, incompletas ou incorretas. Concluí, corrigindo, resumindo e organizando as respostas dos alunos, dizendo: “No conjunto dos números inteiros é sempre possível efetuarmos subtrações, pois o resultado será ou um inteiro positivo, ou um inteiro negativo ou zero”.

Procurando outra característica que diferencia o conjunto dos naturais do conjunto dos inteiros, perguntei: “Qual número natural é o antecessor do zero?” Vários alunos responderam: “O zero não possui antecessor. Só se for um número negativo”. Escrevi no quadro, por extensão e de forma a obedecer a ordem, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ e os alunos confirmaram que o zero não tem antecessor, já que ele é o menor número natural. Perguntei, então, se existia algum número inteiro que não possui antecessor. A maioria dos alunos respondeu que todos os inteiros possuem antecessor. Indaguei como encontramos o antecessor de um número, ao que alguns responderam: “é só pegar o número que vem antes”. Procurei fazer com que eles melhorassem a resposta, afirmando: “Então o 5 é antecessor do 9, pois o 5 vem antes do 9”. Responderam: “Não! O antecessor do 9 é o 8”. Dando sequência, afirmei que no conjunto dos números inteiros o antecessor é aquele número que vem imediatamente antes do número considerado e pedi para os alunos determinarem o antecessor de alguns números inteiros, tanto positivos como negativos.

Para isso, desenhei novamente no quadro uma reta numérica marcando alguns pontos nesta reta. Eu perguntei à turma que cálculo deveria ser feito para se determinar o antecessor de cada um dos números inteiros solicitados. Após diversos exemplos, vários alunos concluíram que bastava subtrair 1 do número considerado. Repeti a pergunta feita anteriormente: “Existe algum número inteiro que não possui antecessor? Por quê?” Esperei mais um tempo e, como não houve resposta, continuei: “Já sabemos que no conjunto dos números inteiros sempre podemos subtrair que a diferença será um número inteiro. Então, em particular, se subtrairmos 1 de qualquer número inteiro, o resultado será ainda um número inteiro. Por isso é que todo inteiro tem um antecessor”.

Antes de revisar as operações, revisei a noção de módulo ou valor absoluto de um número inteiro. Alguns alunos afirmaram que o módulo de um número inteiro é “o mesmo número, só que sem o sinal" [7]. Retomei, então, a interpretação geométrica de módulo como a distância do ponto que representa o número na reta numérica até o ponto marcado com o zero.

Aproveitei para lembrar o conceito de oposto ou simétrico de um número inteiro. Defini que dois inteiros diferentes são opostos ou simétricos quando têm o mesmo módulo. Usei esta maneira de definir por ser bem intuitiva, pois, considerando dois números opostos na reta numérica, eles estão em lados *opostos* da reta, mas à mesma distância do zero. Mais tarde, eu ampliaria este conceito, definindo o oposto de um número como sendo aquele número que ao ser somado com o outro resulta zero.

Para rever as operações com números inteiros, começando com a adição, procurei trazer a ideia de lucro e prejuízo, apresentando diversos exemplos que os alunos resolviam. Porém, para justificar posteriormente as propriedades da adição com inteiros, achei melhor trabalhar a partir das regras tendo em vista ser este assunto de sexta série, além de não ser o foco principal deste trabalho:

- **Adição de números inteiros de mesmo sinal**: somamos os módulos dos números, permanecendo o sinal comum aos dois números.
- **Adição de números inteiros de sinais contrários**: subtraímos os módulos dos números (maior – menor), deixando o sinal do número com maior módulo.

Procurei justificar estas regras a partir dos significados de lucro e prejuízo, dizendo: "quando somamos dois lucros, somamos os seus valores absolutos e continuamos com um lucro; quando somamos dois prejuízos, somamos os seus valores absolutos e continuamos com um prejuízo. Mas, quando somamos um lucro com um prejuízo, subtraímos o menor módulo do maior módulo e podemos ter um lucro, se o módulo do lucro for maior; ou um prejuízo, quando o módulo do prejuízo for maior". Dei estas justificativas uma a uma, relacionando-as às regras. Aparentemente, os alunos compreenderam estas ideias, pois responderam bem a outros exemplos apresentados.

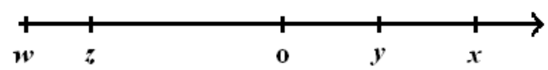
A subtração de números inteiros foi tratada simplesmente como sendo uma adição pelo oposto. Não fiquei muito tempo discutindo a subtração, apenas trabalhei alguns exemplos.

---

[7] Essa afirmação nos permite conjecturar que o que ficou para os alunos do conceito de módulo foi uma a ideia de que "basta tirar o sinal do número", sem que tenha ficado, efetivamente, o conceito de módulo.

Encerrei a aula com o exercício a seguir para complementar alguns conceitos ainda não revisados, tais como a comparação entre números inteiros (relação de ordem) e o significado do símbolo $-x$. Escrevi um item de cada vez e os alunos respondiam oralmente, enquanto eu fazia algumas considerações e correções. As questões e as respectivas soluções feitas conjuntamente entre professor e alunos foram as seguintes:

Considere a reta numérica abaixo, onde estão marcados alguns números inteiros representados pelas letras *x*, *y*, *w* e *z*. Responda com V para verdadeiro ou com F para falso, justificando sua resposta:



(   ) x é um número negativo.

Falso, porque ele está à direita do zero.

(   ) y é um número positivo.

Verdadeiro, porque ele está à direita do zero.

(   ) $w > z$.

Para essa questão, lembrei aos alunos que, se considerarmos uma reta numérica horizontal, os números à direita são sempre maiores do que os que estão à esquerda. Assim, *w* é menor do que *z* porque ele está à esquerda do *z*. Portanto a afirmação é falsa.

(   ) Se a distância de *x* até o zero é igual à distância de *z* até o zero, então *x* e *z* são opostos.

Verdadeiro, é esta a definição de opostos vista anteriormente.

(   ) $x > z$.

Verdadeiro, pois o *x* está à direita do *z*. Apareceu também o seguinte argumento genérico: "Verdadeiro, pois *x* é positivo e *z* é negativo e um positivo é sempre maior do que um negativo".

(   ) $-z$ é negativo.

Esta e a próxima questão pretendiam chamar a atenção dos alunos para que, ao representarmos um número inteiro com uma letra, o fato de ter um sinal negativo antes da letra não significa necessariamente que o número é negativo. A afirmação é, portanto, falsa, pois se o número *z* é negativo, então $-z$ é positivo. Aproveitei aqui também para indicar a notação de oposto de um número inteiro: "Se *x* é um número inteiro, então $-x$ é seu oposto".

(   ) $-w$ é positivo.

Verdadeiro, pois *w* é negativo e $-w$ é oposto de *w*.

Minha avaliação da aula:

Considerei que os objetivos programados para a aula foram atingidos. Porém, acho que eu deveria ter utilizado mais aulas para essa revisão, pois vários conceitos (módulo, relação de ordem, oposto ou simétrico, regras das operações) tiveram que ser constantemente retomados nas aulas posteriores.

Quando representei os números inteiros numa reta numérica, eu já poderia ter aproveitado a reta dos naturais, caso essa já houvesse sido trabalhada, como ponto de partida; caso contrário, eu poderia tê-la construído antes de abordar números inteiros.

No último exercício, quando utilizo a reta numérica para determinar relação de ordem nos inteiros, na verdade, eu já estava utilizando a ordem para marcar os pontos na reta.

Além disso, aqui surge outra questão delicada: o sinal "menos" que pode significar uma subtração, o sinal de um número negativo ou o oposto de um número. Certamente, isso deve ser uma das causas das dificuldades dos alunos com números inteiros.

4.2.14 Dia 22/04 – Comutatividade e Associatividade da Adição e da Multiplicação de Números Inteiros

Objetivos:

- Rever as regras da multiplicação de números inteiros envolvendo dois fatores.
- Justificar a propriedade comutativa e a propriedade associativa da adição e da multiplicação de números inteiros.

Roteiro de questões:

Para esta aula, não foi elaborado um roteiro rígido de questões para os alunos trabalharem individualmente ou em grupos. Começaremos revisando as regras da multiplicação de números inteiros envolvendo dois fatores. A seguir, trabalharemos a comutatividade da adição de números inteiros. Depois, mencionaremos, sem demonstrar, a propriedade associativa da adição de números inteiros, procurando convencer os alunos da possibilidade de se justificar esta propriedade com o devido tempo e interesse. A seguir, justificaremos a propriedade comutativa da multiplicação de números inteiros. Por fim, a associatividade da multiplicação de números inteiros será justificada.

Procedimentos:

Aula expositiva em que professor e alunos retomam as regras da multiplicação de números inteiros e procuram justificar as propriedades das operações com esses números utilizando resultados trabalhados em aulas anteriores (partindo de algumas hipóteses sobre as parcelas e os fatores e utilizando a comutatividade da adição e da multiplicação de números naturais). Conforme o desenrolar da aula, o professor oralmente convida os alunos a participarem, questionando-os sobre alguns passos da argumentação, revendo conceitos que estarão sendo utilizados e solicitando que refaçam sozinhos alguns argumentos.

Expectativas:

Espera-se, de início, alguma dificuldade no entendimento do assunto por parte dos alunos, devido não só à generalidade dos argumentos, mas também, devido à falta de apoio em material concreto ou contexto geométrico. No entanto, com o andamento da aula, espera-se que os alunos comecem a acompanhar melhor os raciocínios, observando o seu encadeamento desde as hipóteses iniciais até as conclusões.

Relato da aula dia 22/04:

Comecei a aula retomando as propriedades da adição e da multiplicação de números naturais. Lembrei também como havíamos chegado a estes resultados, apoiando-nos no material concreto e no contexto geométrico. Porém, agora o contexto geométrico não seria útil para tratar dos números inteiros, já que não é natural representar comprimentos ou áreas utilizando números negativos. Futuramente (ensino médio), velocidade negativa terá a sua devida interpretação.

Inicialmente, tratei da multiplicação de números inteiros. Como hoje minha convicção sobre a introdução da multiplicação de números inteiros é diferente da que eu tinha, em particular, quando o primeiro fator é negativo[8], além de o assunto ser conteúdo de sexta série, decidi aqui também só relembrar as regras da multiplicação. Assim, coloquei alguns exemplos no quadro, os quais foram respondidos pelos alunos às vezes corretamente, outras, incorretamente. Escrevi diretamente no quadro as regras para multiplicação envolvendo dois fatores:

- **Fatores de mesmo sinal**: multiplicamos seus módulos e o resultado fica positivo.
- **Fatores de sinais contrários**: multiplicamos seus módulos e o sinal fica negativo.

[8] Antes eu utilizava a propriedade comutativa para mostrar que o produto de negativo por positivo resulta em negativo.

Após isso, revisamos as regras da adição, e passamos a tratar da comutatividade dessa operação. A abordagem utilizada em aula para tratar da comutatividade da adição apoiou-se no que já conhecíamos sobre as propriedades das operações com números naturais e nas regras das operações com números inteiros. Comecei, então, considerando dois números inteiros que fossem não-negativos. Perguntei aos alunos como podíamos representar estes dois números. Vários alunos responderam ao mesmo tempo: “Usando letras!”. Decidimos representar estes números com as letras a e b. Expliquei que escolhemos números positivos ou zero, pois, desta forma, trabalhar com a e b seria o mesmo que trabalhar com números naturais, com os quais já estávamos familiarizados. Falei ainda que seria útil considerar, por exemplo, a maior ou igual a b. Assim, nossas hipóteses iniciais para o trabalho, escritas simbolicamente, seriam a e b números inteiros com $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $a \geq b$. Desta forma, os símbolos $-a$ e $-b$ certamente representariam números inteiros negativos ou zero e, como $|-a| = a$, $|-b| = b$ e $a \geq b$, teríamos que $|-a| \geq |-b|$. Os alunos participaram de toda esta etapa, onde alertamos que os símbolos $-a$ e $-b$ só representam números negativos porque os números a e b foram tomados positivos ou nulos desde o início. Passei, então, aos raciocínios registrados aqui de forma simplificada:

1º caso - parcelas positivas:

Diretamente, temos que $a + b = b + a$, pois, pelas hipóteses iniciais, a e b são números inteiros positivos ou zero, ou seja, a e b podem ser encarados como números naturais, e já vimos que a adição de números naturais é comutativa.

2º caso - parcelas com sinais diferentes

i) Módulo do positivo maior ou igual ao módulo do negativo:

Temos que $a + (-b) = +(a - b)$. Da mesma forma, $(-b) + a = +(a - b)$. Logo, calculando $a + (-b)$ ou $(-b) + a$, encontramos o mesmo resultado. Portanto, $a + (-b) = (-b) + a$.

ii) Módulo do positivo menor ou igual ao módulo do negativo:

Temos que $(-a) + b = -(a - b)$. De maneira análoga, $b + (-a) = -(a - b)$. Logo, $(-a) + b = b + (-a)$.

3º caso - parcelas negativas:

Temos $(-a)+(-b)=-(a+b)$. Da mesma forma, $(-b)+(-a)=-(b+a)=-(a+b)$. Logo, $(-a)+(-b)=(-b)+(-a)$.

Salientei aos alunos que, como esgotamos todas as possibilidades de adições de duas parcelas envolvendo números inteiros e, em todos os casos, observamos que vale a propriedade comutativa, então está garantida a comutatividade da adição de números inteiros.

Durante a exposição do assunto, cada passo era justificado apoiando-se nos resultados trabalhados anteriormente. Houve diversas retomadas de raciocínios. Em cada caso era chamada a atenção dos alunos para o fato de que, como agora as letras a e b representavam números inteiros não-negativos, então os símbolos $-a$ e $-b$ representavam, com certeza, números inteiros negativos ou zero.

Quanto à associatividade da adição de números inteiros, decidi não justificá-la, devido ao grande número de casos que deveríamos considerar e ao tempo que teria que dispor para isso. Pensei em talvez mostrar um ou dois casos, mas terminei optando por não fazê-lo, até mesmo por não me sentir suficientemente seguro para tal naquele momento. Apresentei então alguns exemplos particulares, apenas a título de ilustração, no que fui acompanhado pelos alunos. Combinei que este seria um dos resultados que não justificaríamos em aula. Finalmente, ficamos com o seguinte resultado: se a, b e c representam números inteiros quaisquer, onde as mesmas letras, que antes eram só naturais, são talvez negativos, então $(a+b)+c=a+(b+c)$.

A comutatividade da multiplicação de números inteiros, envolvendo dois fatores, decorreu de forma semelhante à adição. Novamente, considerei a e b não-negativos (os alunos concordaram em continuar utilizando as mesmas letras), de modo a serem encarados como números naturais. Assim, novamente, os símbolos $-a$ e $-b$ representariam números negativos ou zero. No caso da multiplicação, não importava qual dos dois fatores seria o maior, pois não necessitamos da noção de ordem para se efetuar uma multiplicação através das regras. O procedimento adotado foi o seguinte:

1º caso – fatores positivos:

Diretamente, temos que $a \cdot b = b \cdot a$, pois, pelas hipóteses iniciais, a e b podem ser encarados como números naturais e já sabemos que a multiplicação de números naturais é comutativa.

2º caso – fatores negativos:

Pela regra da multiplicação de números inteiros de mesmo sinal temos que $(-a)\cdot(-b)=+(a\cdot b)$. De forma análoga e pela comutatividade justificada no 1º caso, $(-b)\cdot(-a)=+(b\cdot a)=+(a\cdot b)$. Logo, $(-a)\cdot(-b)=(-b)\cdot(-a)$.

3º caso – fatores de sinais diferentes:

Pela regra da multiplicação de números inteiros de sinais diferentes, multiplicamos os módulos dos números e o produto fica negativo, ou seja, $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$. Como $a\cdot b$ é positivo ou zero, então, seguramente $-(a\cdot b)$ é negativo ou zero. Da mesma forma, $(-b)\cdot a=-(b\cdot a)=-(a\cdot b)$, pela mesma regra anterior e pela comutatividade da multiplicação de números inteiros positivos, já justificada no 1º caso. Logo, $a\cdot(-b)=(-b)\cdot a$. Analogamente, $-a\cdot b=b\cdot(-a)$.

Mostramos, assim, que vale a comutatividade da multiplicação de números inteiros.

Notei que, para justificar a comutatividade da multiplicação, os alunos interagiram mais. Talvez por terem já compreendido melhor a argumentação utilizada, ou porque a multiplicação não envolve a noção de módulo, ou por ambas.

Resolvi não tratar a associatividade da multiplicação de números inteiros nesta aula, pois esta envolvia oito casos a serem considerados. Apenas deixei como atividade para casa que os alunos tentassem verificar se a multiplicação de inteiros é ou não associativa. Para isso, mostrei um dos possíveis casos, a fim de que os alunos tivessem um exemplo.

Minha avaliação da aula:

Acho que o tempo para a abordagem destas propriedades foi suficiente, considerando que a associatividade da adição tenha sido apresentada "por decreto". Os alunos, em geral, acompanharam os raciocínios e pediam para que eu retomasse algum ponto que não haviam compreendido. Houve alunos que se destacaram na participação, impacientando-se quando colegas faziam perguntas que consideravam óbvias. Conflitos deste tipo tem sido rotina durante as aulas, sem que eu tenha conseguido, até o momento, encontrar uma estratégia para amenizar os desequilíbrios em sala de aula.

Talvez, eu pudesse ter encontrado uma forma de ilustrar concretamente as operações envolvendo números inteiros. Contudo, não era minha intenção me concentrar no resgate das operações envolvendo números inteiros e sim nas justificativas das propriedades destas operações. Além do mais, achei que esta seria uma ótima oportunidade de fazer uso significativo das letras para representar números, familiarizando os alunos com o uso das mesmas, além de uma chance imperdível de mostrar a eles raciocínios matemáticos com o uso ferramentas algébricas.

O fato de eu ter utilizado os símbolos $-a$ e $-b$ para representar números negativos poderia ter reforçado o vício de imaginar que essas expressões representam sempre números negativos. No entanto, durante a aula, eu sempre alertava que tais símbolos só representavam números negativos porque a e b foram tomados positivos ou nulos desde o início da argumentação. Os alunos compreenderam bem essa passagem. Ou pelo menos eu imaginei isso até o resultado da avaliação de 20/05/2008, a qual demonstrou que os alunos permaneceram com a ideia de que o símbolo $-x$ significa um número negativo. Devido a isso, torna-se necessário encontrar outra abordagem para justificar as propriedades da multiplicação de inteiros, a fim de não reforçar o vício aqui atestado.

4.2.15 Dia 23/04 – Associatividade da Multiplicação de Números Inteiros

Objetivos:

- Justificar a propriedade associativa da multiplicação de números inteiros.

Roteiro de questões:

Não foi elaborado um roteiro rígido de questões para esta aula. Pretendemos trabalhar a propriedade associativa da multiplicação de números inteiros, partindo de algumas hipóteses sobre os fatores e utilizando o fato de que não são necessários parênteses para indicar quais fatores multiplicamos primeiro em uma multiplicação com três fatores envolvendo números naturais, conforme já havíamos visto na aula do dia 25/03 – 1ª parte. As questões serão feitas aos alunos na medida em que o assunto for sendo trabalhado, chamando-os a participar da argumentação.

Procedimentos:

Aula expositiva em que professor e alunos procuram justificar a propriedade associativa da multiplicação de números inteiros. Conforme o desenrolar da aula, o professor oralmente convida os alunos a participarem, questionando-os sobre alguns passos da argumentação, revendo conceitos que estarão sendo utilizados e solicitando que refaçam sozinhos alguns argumentos.

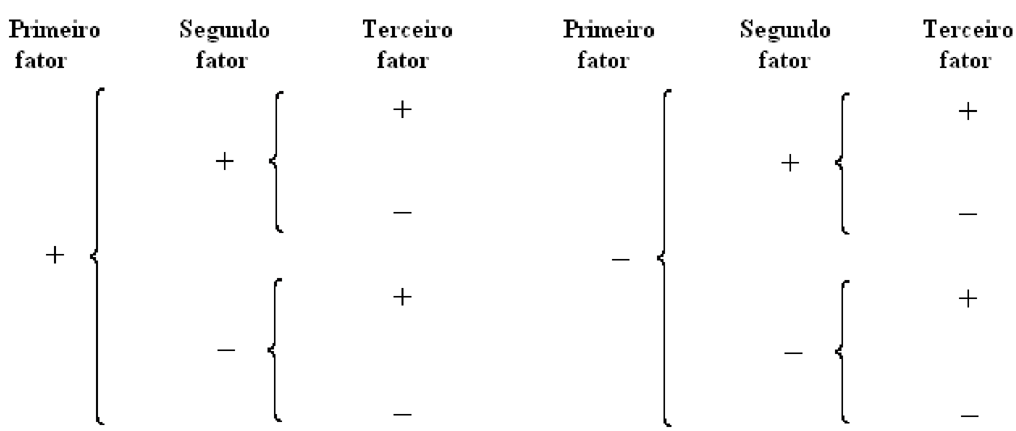
Expectativas:

Espera-se que os alunos demonstrem melhor desenvoltura e entendimento do assunto da aula devido às suas experiências em aulas anteriores. Espera-se uma participação maior dos alunos na atividade.

Relato da aula do dia 23/04:

Rapidamente, revisei a aula anterior mencionando as propriedades das operações lá trabalhadas. Questionei se alguém havia conseguido fazer a atividade solicitada para casa, qual seja, a tentativa de justificar a propriedade associativa da multiplicação de números inteiros. De fato, alguns alunos tentaram realizar a tarefa, mas não conseguiram justificar todos os casos. Na verdade, não conseguiram listar todos os casos possíveis de se considerar. Além disso, em alguns dos casos verificados pelos alunos havia lacunas nos raciocínios, saltos muito bruscos entre os argumentos. Isto era de se esperar, devido à pouca experiência dos alunos com este tipo de atividade.

Resumi o que pretendíamos fazer nessa aula: “Queremos garantir que sempre teremos $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, não importando quais sejam os números inteiros *a*, *b* e *c*.” A ideia foi novamente dividir em casos. Agrupei os casos segundo as seguintes possibilidades, sempre com a participação dos alunos, como abaixo:



Comecei, como das outras vezes, considerando três números inteiros $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$. Pela maneira que acompanhavam e participavam da aula, percebi que os alunos compreenderam bem que os símbolos $-a$, $-b$ e $-c$ representavam números negativos ou zero, mas que isso poderia ser diferente, por exemplo, quando os números *a*, *b* ou *c* são negativos. Começamos, então, a detalhar os casos:

1º caso: $[(+)\cdot(+)]\cdot(+)$

Neste caso, a, b e c, podem ser interpretados como números naturais, para os quais a associatividade da multiplicação já está garantida, conforme vimos anteriormente (aula do dia 19/03). Logo, $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.

Para efetuar os próximos casos, foi necessário esclarecer aos alunos que o símbolo $a\cdot b$ poderia representar tanto a multiplicação de a com b como o produto, isto é, o resultado da multiplicação de a com b. Em outras palavras, combinei com os alunos que o símbolo $a\cdot b$ representaria, num momento, a multiplicação entre dois números, noutro momento, o resultado daquela multiplicação. Pela forma como acompanharam os argumentos e justificativas, posso considerar que os alunos compreenderam, pelo menos naquele momento, quando eu me referia ao símbolo $a\cdot b$ como uma multiplicação e quando eu me referia como um número.

Como eu não havia mencionado antes, os alunos tiveram que aceitar sem maiores justificativas o fechamento do conjunto dos números inteiros para a multiplicação. Esta dificuldade passou despercebida por mim durante o planejamento da atividade, tendo sido sentida somente no momento em que me deparei com ela durante a resolução do segundo caso.

2º caso: $[(+)\cdot(+)]\cdot(-)$

Pretendemos mostrar que $[(a)\cdot(b)]\cdot(-c) = a\cdot[(b)\cdot(-c)]$. Inicialmente, temos

$$[(a)\cdot(b)]\cdot(-c) = [(a\cdot b)]\cdot(-c) = -[(a\cdot b)\cdot c] = -[a\cdot b\cdot c].$$

De forma análoga,

$$a\cdot[(b)\cdot(-c)] = a\cdot[-(b\cdot c)] = -[a\cdot(b\cdot c)] = -[a\cdot b\cdot c].$$

Concluímos que $[(a)\cdot(b)]\cdot(-c) = a\cdot[(b)\cdot(-c)]$.

3º caso: $[(+)\cdot(-)]\cdot(+)$

Queremos garantir que vale a igualdade $[(a)\cdot(-b)]\cdot c = a\cdot[(-b)\cdot c]$. Temos que

$$[(a)\cdot(-b)]\cdot c = [-(a\cdot b)]\cdot c = -[(a\cdot b)\cdot c] = -[a\cdot b\cdot c].$$

Por outro lado,

$$a \cdot [(-b) \cdot (c)] = a \cdot [-(b \cdot c)] = -[a \cdot (b \cdot c)] = -[a \cdot b \cdot c].$$

Portanto, $[(a) \cdot (-b)] \cdot c = a \cdot [(-b) \cdot c]$.

A partir daqui, os alunos começaram a perceber que sempre daria como resultado o produto $[a \cdot b \cdot c]$, acompanhado do sinal positivo ou negativo, dependendo dos sinais de cada fator.

Continuamos a realizar a verificação da associatividade, só que agora observando apenas o sinal dos produtos, não mais nos concentrando nas letras. Após efetuarmos a verificação de todas as possibilidades de multiplicações envolvendo três fatores, concluímos que a multiplicação de números inteiros é associativa.

Minha avaliação da aula:

Considero que os objetivos da aula foram alcançados, pois os alunos, em geral, acompanharam a argumentação. Mesmo os alunos que pouco participavam faziam perguntas quando não compreendiam alguma passagem.

Também pareceram entender, sem a necessidade de muitas explicações, o motivo de eu ter começado considerando a, b e c números inteiros não-negativos, qual seja, para ter um resultado já conhecido por onde começar a argumentação. No entanto, o caso em que algum dos fatores é igual a zero poderia ter sido considerado logo no início, antes mesmo de nos preocuparmos com o sinal do produto. Isso diminuiria a quantidade de hipóteses iniciais.

Também, poderíamos ter combinado desde o início que a multiplicação envolvendo os três fatores sempre resultaria o produto $[a \cdot b \cdot c]$, acompanhado do sinal positivo ou negativo, dependendo dos sinais de cada fator.

Além disso, eu poderia ter convencionado $a \cdot b$ ou $a \times b$ para representar a multiplicação de dois números inteiros e ab para representar o produto (resultado da operação).

4.2.16 Dias 24/04 e 29/04 – Distributividade da Multiplicação de Números Inteiros

Objetivos:

- Justificar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição envolvendo números inteiros.

Roteiro de questões:

Não foi elaborado um roteiro rígido de questões para esta aula. Pretendemos trabalhar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números inteiros, partindo de algumas hipóteses iniciais. Cada resultado apoiar-se-á em outros resultados já trabalhados em aula através de um encadeamento de argumentos até as conclusões. As perguntas serão feitas aos alunos na medida em que o assunto for sendo trabalhado, chamando-os a participar da argumentação.

Procedimentos:

Aula expositiva em que professor e alunos procuram justificar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números. Conforme o desenrolar da aula, o professor oralmente convida os alunos a participarem, questionando-os sobre alguns passos da argumentação, revendo conceitos que estarão sendo utilizados e solicitando que refaçam sozinhos alguns argumentos.

Expectativas:

Espera-se para a distributividade que os alunos tenham mais dificuldade do que nos casos anteriores, já que aqui combinamos as operações de multiplicação e adição de números inteiros, sendo necessário utilizar as regras destas duas operações. Espera-se alguma confusão com as "regras de sinais". Mas, quanto à estratégia utilizada, espera-se que os alunos acompanhem bem devido à similaridade com o que foi feito nas aulas anteriores.

Relato da aula do dia 24/04:

Comecei a aula revisando a propriedade distributiva da multiplicação envolvendo números naturais e recordando o uso do contexto geométrico para justificar esta propriedade.

Perguntei aos alunos se agora, considerando números inteiros, poderíamos utilizar o contexto geométrico novamente. Os alunos responderam que sim. Pedi, então, para eles darem um exemplo de configuração geométrica (retangular especificamente) em que pudéssemos contar um número negativo de pontos ou um comprimento expresso por um número negativo. Os alunos não conseguiram encontrar uma situação em que ocorressem os números negativos. Falei então que, como não fomos capazes de encontrar uma situação em que pudéssemos utilizar o contexto geométrico para tratar de números inteiros negativos, também aqui utilizaríamos a estratégia de dividir em casos conforme a combinação de sinais positivos e negativos, e que usaríamos novamente as regras das operações com números inteiros. Juntos, determinamos todos os casos possíveis, como segue:

$$(+)\cdot[(+)+(+)],\ \ (+)\cdot[(+)+(-)],\ \ (+)\cdot[(-)+(+)],\ \ (+)\cdot[(-)+(-)]$$

$$(-)\cdot[(+)+(+)],\ \ (-)\cdot[(+)+(-)],\ \ (-)\cdot[(-)+(+)],\ \ (-)\cdot[(-)+(-)]$$

Como das outras vezes, considerei três números inteiros *a*, *b* e *c*, de modo que $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ e $a \geq b \geq c$. Comentei com os alunos que agora seria importante introduzir ordem entre os números inteiros *a*, *b* e *c*, relembrando que, para efetuarmos adições de números inteiros a partir das regras da adição, precisamos saber qual número tem maior módulo. Desta forma, ficamos com $-a$, $-b$ e $-c$ representando números negativos e com $a\cdot b \geq a\cdot c$ e $-a\cdot b \leq -a\cdot c$.

Para justificar que $a\cdot b \geq a\cdot c$ e $-a\cdot b \leq -a\cdot c$, procedi da seguinte maneira: primeiro, verificamos alguns exemplos particulares para que os alunos compreendessem o que estava sendo exposto. Depois, utilizei a ideia da balança de dois pratos, a partir dos mesmos exemplos anteriores com $a > 0$. Por último, tratei do caso mais geral, ou seja, os números inteiros $b \geq 0$ e $c \geq 0$, com $b \geq c$, podem ser considerados "pesos" em uma balança de dois pratos. Como $b \geq c$, teremos a situação ilustrada na Figura 15.

Agora, acrescentando um número de "pesos" iguais a *c* no prato esquerdo da balança e o mesmo número de "pesos" iguais a *b* no prato direito (Figura 16), o desequilíbrio se mantém (mais acentuado agora). Ou seja, se representarmos o número igual de "pesos" acrescentados nos dois lados da balança por $a > 0$, teremos que $a\cdot b \geq a\cdot c$ (Figura 17). Após isso, verificamos mais alguns exemplos particulares, para tornar mais claro o argumento geral.

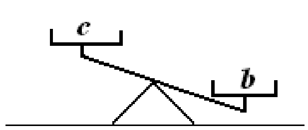


Figura 15

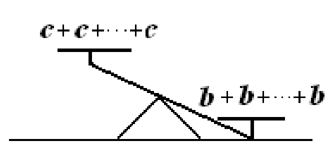


Figura 16

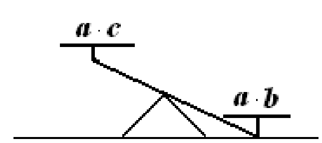


Figura 17

A seguir, discutimos a viabilidade do uso da balança para o caso em que $a < 0$ através de alguns exemplos particulares. Percebemos que a ideia de adicionar um número negativo de "pesos" não fazia sentido, concretamente falando. Sendo assim, tratei do caso $-a\cdot b \leq -a\cdot c$ resumidamente da seguinte forma: $|-a\cdot b| = |-(a\cdot b)| = a\cdot b$ e $|-a\cdot c| = |-(a\cdot c)| = a\cdot c$. A primeira igualdade em cada caso, justificada pela regra da multiplicação de números inteiros de sinais diferentes e a segunda pelo fato de que o módulo é a distância do número considerado até o zero, a qual é sempre positiva. Mas, $a \cdot b$, que é o módulo de $-a \cdot b$ é maior ou igual a $a \cdot c$, que é o módulo de $-a \cdot c$. Simbolicamente, $|-a \cdot b| = a \cdot b \geq a \cdot c = |-a \cdot c|^{(*)}$ e, como nos inteiros negativos quanto maior é o módulo, menor é o número, pois está mais afastado do zero, temos que $-a \cdot b \leq -a \cdot c$. Obviamente, o que foi exposto aqui é uma simplificação do que realmente ocorreu em sala de aula. A desigualdade (*) não foi escrita como aqui, mas desenvolvida passo a passo e não na mesma linha. Diversas vezes eu tive que retomar algum ponto ou até mesmo o argumento todo, até que tivesse ficado bem claro para a turma.

Após estas considerações, iniciei a justificativa, questionando e solicitando o acompanhamento dos alunos em cada passo.

1º caso: $(+) \cdot [(+) + (+)]$

Queremos garantir que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Neste caso, *a*, *b* e *c*, podem ser interpretados como números naturais, para os quais a distributividade já foi discutida na turma e, portanto, está garantida. Logo, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

2º caso: $(+) \cdot [(+) + (-)]$

Queremos garantir que $a \cdot [b + (-c)] = a \cdot b + a \cdot (-c)$. Pela regra da adição de números inteiros de sinais diferentes, com $b \geq c$, temos $a \cdot [b + (-c)] = a \cdot (b - c)$. Além disso, $b - c$ é um número natural, pois $b \geq c$. Como a propriedade distributiva também vale para a subtração de naturais, temos $a \cdot [b + (-c)] = a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$. Agora, calculando $a \cdot b + a \cdot (-c)$, observamos que $a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b + [-(a \cdot c)] = a \cdot b - a \cdot c$. Na primeira igualdade, utilizamos a regra da multiplicação de números inteiros com sinais diferentes e, na segunda igualdade, a regra da adição de números inteiros com sinais diferentes e o fato de que $|a \cdot b| \geq |a \cdot c|$. Portanto, $a \cdot [b + (-c)] = a \cdot b + a \cdot (-c)$.

3º caso: $(+) \cdot [(-) + (+)]$

Queremos mostrar que vale a igualdade $a \cdot [(-b) + c] = a \cdot (-b) + a \cdot c$. Pela regra da adição de números inteiros de sinais diferentes, com $|-b| \geq |c|$, temos que $a \cdot [(-b) + c] = a \cdot [-(b - c)]$. Além disso, pela regra da multiplicação de números inteiros de sinais diferentes $a \cdot [-(b-c)] = -[a \cdot (b-c)]$. Mas, como $b-c$ é um número natural, então $-[a \cdot (b-c)] = -[a \cdot b - a \cdot c]$. Portanto, $a \cdot [-(b)+c] = -[a \cdot b - a \cdot c]$. Agora, calculando $a \cdot (-b) + a \cdot c$, temos que $a \cdot (-b) + a \cdot c = -(a \cdot b) + a \cdot c = -(a \cdot b - a \cdot c)$, pela regra da adição de números inteiros de sinais diferentes, com $|-(a \cdot b)| \geq |a \cdot c|$. Portanto, $a \cdot [(-b)+c] = a \cdot (-b) + a \cdot c$.

4º caso: $(+) \cdot [(-)+(-)]$

Queremos mostrar que $a \cdot [(-b)+(-c)] = a \cdot (-b) + a \cdot (-c)$. Inicialmente, temos $a \cdot [(-b)+(-c)] = a \cdot [-(b+c)]$. Além disso, $a \cdot [-(b+c)] = -[a \cdot (b+c)] = -[a \cdot b + a \cdot c]$. Logo, $a \cdot [(-b)+(-c)] = -(a \cdot b + a \cdot c)$. Mas, $a \cdot (-b) + a \cdot (-c) = -(a \cdot b) + [-(a \cdot c)] = -(a \cdot b + a \cdot c)$. Portanto, concluímos que $a \cdot [(-b)+(-c)] = a \cdot (-b) + a \cdot (-c)$.

Deixei os próximos quatro casos para os alunos tentarem resolver em casa, os quais seriam corrigidos na próxima aula.

Minha avaliação da aula:

Em geral, os alunos acompanharam os argumentos satisfatoriamente. Por diversas vezes, alguns se atrapalhavam em algum ponto, então eu recomeçava aquela parte do argumento que não estava bem entendida, o que é perfeitamente compreensível haja vista o simbolismo algébrico empregado.

Novamente os alunos, em geral, não tiveram problemas com o argumento em si. Suas dificuldades pairavam sobre qual sinal deveria ter o resultado das operações. Isso pode significar que as operações com números inteiros não estão consolidadas, nem apelando para interpretações possíveis para as operações com números inteiros, nem apelando para as regras destas operações.

Relato da aula do dia 29/04:

Comecei a aula, verificando quem havia tentado justificar os quatro casos que faltavam para a distributividade. Vários alunos haviam trabalhado nisso em casa, mas nenhum deles conseguiu completar de maneira satisfatória todos os casos. Sempre ficava alguma coisa faltando ou havia algum erro ou o salto de um argumento para o outro era muito brusco. Elogiei os alunos por terem se interessado em tentar completar a atividade e convidei-os a fazermos juntos, eu escrevendo no quadro e orientando-os em caso de erros ou dificuldades, e eles me dizendo o que eu deveria fazer. Neste processo, a participação dos alunos, de uma maneira geral, foi muito ativa. No entanto, eu não conseguia trazer para a discussão aqueles alunos que não participavam. Eu perguntava à turma o que eu deveria fazer em cada passo da justificativa e os alunos descreviam os resultados de cada passo. Diversas vezes ocorreram discussões entre eles, cada um procurando convencer o colega da correção do seu argumento.

Havia algum tempo ainda e resolvi adiantar o que seria a próxima aula, escrevendo no quadro as questões que os alunos deveriam trabalhar em duplas. Estas questões referiam-se a escrita algébrica, traduzindo frases em língua materna para a linguagem algébrica, e outras questões de caráter genérico.

Minha avaliação da aula:

Com essa aula, terminamos a abordagem das propriedades das operações com números inteiros que eu havia me proposto a fazer. Mais tarde, faremos o mesmo com os números racionais.

Fiquei muito satisfeito com as discussões entre os alunos, mas também apreensivo por ter alguns alunos que não participavam. Pior, passei a perceber que estes alunos não estavam conseguindo acompanhar as aulas de maneira satisfatória, pois somente agora eu conseguira corrigir a avaliação do dia 15/04/08.

4.2.17 Dia 30/04 – Escrita Matemática

Objetivos:

- Revisar conceitos de sucessor, antecessor, dobro, triplo, quadrado, cubo e suas respectivas representações algébricas.
- Traduzir para a linguagem algébrica sentenças escritas ou faladas em língua materna, envolvendo os conceitos mencionados acima.

Roteiro de questões:

1. Responda as seguintes questões sobre números inteiros:

a. Existe algum número inteiro que não possui sucessor? Se existir, qual é esse número?

b. Como podemos representar o sucessor do número inteiro n?

c. Existe algum número inteiro tal que seu antecessor não é um número inteiro? Se existir, qual é esse número?

d. Como podemos representar o antecessor do número inteiro m?

2. Associe cada frase à sua escrita matemática:

(A) O dobro de um número.	( )	a^3
(B) O triplo de um número.	( )	$x^2 + y^2$
(C) O quadrado de um número.	( )	$2 \cdot (p+1)$
(D) O cubo de um número.	( )	$2 \cdot x$
(E) O dobro do sucessor de um número.	( )	$(a-b)^2$
(F) O dobro do antecessor de um número.	( )	$3 \cdot m$
(G) O quadrado da diferença de dois números.	( )	$x^2 - y^2$
(H) A soma dos quadrados de dois números.	( )	$2 \cdot (t-1)$
(I) O quadrado da soma de dois números.	( )	$(a+b)^2$
(J) A diferença dos quadrados de dois números.	( )	r^2

Procedimentos:

Em duplas ou trios os alunos respondem às questões e cada dupla ou trio entrega uma folha com as respostas. Como já tiveram algum tempo para pensar a respeito das questões, as mesmas serão corrigidas ainda nesta aula.

Expectativas:

Espera-se que os alunos tenham uma boa desenvoltura nesta atividade, pois com a maioria destes alunos, o assunto foi trabalhado na sexta série. Podem, porém, apresentar alguma dificuldade, por exemplo, com as sentenças “a diferença dos quadrados” e “o quadrado da diferença”.

Relato da aula do dia 30/04:

Iniciei a aula, organizando os grupos para o trabalho. Os alunos já haviam copiado as questões na aula passada e alguns deles já haviam respondido em casa. Em geral, os alunos acharam a atividade muito fácil, principalmente a questão (2), pois a tradução das sentenças para a linguagem algébrica já estava dada no exercício. Isso indicou que deveríamos ter dado mais opções na coluna da direita para que não ficasse um exercício de exclusão.

Analisando as respostas dos alunos, dois trios não apresentaram os resultados esperadas. Para as questões (1a) e (1b), responderam que o número inteiro 1 não possui sucessor e, ainda, responderam que o sucessor do número inteiro *n* é dado pela divisão de *n* por 2 tendo como resto o zero. Para as questões (1c) e (1d), responderam que o zero não tem antecessor e que o antecessor do inteiro *n* é dado pela divisão de *n* por 3, restando 1. Certamente os dois grupos copiaram as respostas um do outro e mostraram não ter tido uma compreensão do conceito de sucessor e antecessor ou fizeram uma confusão entre estes conceitos e os de par e ímpar. Além disso, parecem não ter compreendido algumas diferenças entre os números naturais e os números inteiros, quando responderam que, no conjunto dos números inteiros, o zero não tem antecessor. Também revelam pouca habilidade lógica ou pouca desenvoltura com o pensamento genérico, quando primeiro afirmam que o 1 não tem sucessor e depois tentam, genericamente, representar o sucessor de um número inteiro *n*. O mesmo para o caso do antecessor, quando afirmam que o zero não tem antecessor e depois tentam escrever genericamente como seria o antecessor de um inteiro *m*.

Durante a correção destas questões, procurei destacar algumas características que diferenciavam os naturais dos inteiros. Argumentei que sempre existem o antecessor e o sucessor de um número inteiro, pois ao somarmos 1 a um inteiro ou subtrairmos 1 de um inteiro, o resultado ainda é um inteiro. Destaquei que as operações de somar 1 ou subtrair 1 possuem a mesma representação que no conjunto dos números naturais, só que agora as letras representam números inteiros. Os componentes destes dois grupos afirmaram ter compreendido os erros que haviam cometido.

Outro grupo também apresentou problemas nas respostas da questão (1). Porém, parecem ser apenas dificuldades para expor seu pensamento por escrito (o que compromete bastante seu trabalho). Por exemplo, para a questão (1a) respondeu: “Não, pois Todos os números inteiros existem sucessores”. E na questão (2a): “Não existe. Todos tem números inteiros”. Quando perguntei a um dos componentes do grupo o que ele estava tentando dizer, ficou claro que seu raciocínio estava correto.

Para a questão (2), apenas os dois primeiros grupos mencionados anteriormente cometeram erros. Confundiram a representação do quadrado de um número com o dobro do sucessor e vice-versa; também trocaram o quadrado da soma com o dobro do antecessor e este com o quadrado da diferença.

Durante a correção, procurei fazer a tradução das sentenças passo a passo. Por exemplo, no caso do dobro do sucessor, comecei perguntando como podemos representar um número inteiro, ao que os alunos responderam “usando uma letra”. Resolvi usar a letra *p*, para não ficarmos apenas com o *x*. Depois perguntei: "Como representamos o sucessor desse número?" "$p+1$", responderam vários alunos. Continuei: "Agora, temos que se p é um número inteiro, $p+1$ também é um número inteiro. Como podemos representar o dobro desse novo número?" Os alunos responderam: "Fazendo duas vezes $p+1$". Então, escrevi no quadro $2 \cdot p+1$, ao que vários alunos corrigiram dizendo que o $p+1$ deveria estar entre parênteses. Mencionei que o uso dos parênteses serve para indicarmos que estamos considerando o dobro do número $p+1$ e não apenas o dobro do número *p*, dando um exemplo numérico. Aproveitei também para esclarecer que o resultado $2 \cdot p+1$ representa a sentença "o sucessor do dobro de um número". As demais questões seguiram o mesmo tipo de encaminhamento.

Minha avaliação da aula:

Foi surpresa, para mim, o fato de haver alunos que não compreenderam os conceitos de sucessor e antecessor ou que tenham confundido estes conceitos com os de par e ímpar, após estes conceitos terem sido trabalhados durante algum tempo enquanto tratávamos dos números naturais.

Quanto às dificuldades com a tradução de sentenças em língua materna para a linguagem algébrica, eu esperava que os alunos tivessem dificuldades, mas estas só foram reveladas por dois grupos.

Após a correção do exercício (2), dei-me conta de que seria útil darmos mais opções na coluna da direita deste exercício. Assim, depois de encerradas as associações, sobrariam algumas expressões não relacionadas e, então, poderíamos fazer o contrário, isto é, a partir das sentenças escritas em linguagem matemática, perguntarmos o que representam estas sentenças em língua materna. Os alunos teriam então que fazer o caminho inverso. Por exemplo, poderíamos incluir as seguintes expressões na coluna da direita: $\frac{n}{2}$, $\frac{q}{3}$, $2 \cdot k+1$, $2 \cdot w-1$.

Também poderia ter mostrado a diferença entre as expressões $2 \cdot p+1$ e $2 \cdot (p+1)$, utilizando a propriedade distributiva no segundo caso, ficando claro que as duas expressões são distintas.

4.2.18 Dias 06/05 e 07/05 – Operações e Propriedades em ℤ e Escrita Algébrica

Objetivos:

- Retomar e aprofundar os conceitos trabalhados até o momento relativos ao campo numérico dos inteiros.
- Aplicar conscientemente as propriedades das operações em ℤ.
- Permitir ao aluno um contato maior com a linguagem algébrica, na qual as letras representam números inteiros.
- Calcular o valor de expressões numéricas provenientes de expressões algébricas[9].

Roteiro de questões:

1. A soma das idades de dois irmãos é 35 anos. Daqui a cinco anos, qual será a soma de suas idades? Justifique.
2. Se, na questão (1), chamarmos a idade de um dos irmãos de *m* e a idade do outro irmão de *n*, resolva o mesmo problema, agora com o uso de letras.
3. A diferença entre as idades de dois irmãos é de cinco anos. Daqui a sete anos, qual será a diferença entre as idades dos dois irmãos?
4. Se, na questão (3), chamarmos a idade de um dos irmãos de *a* e a idade do outro irmão de *b*, resolva o mesmo problema, agora com o uso de letras.
5. Considere a multiplicação de dois números inteiros x e y.
   a) Como podemos representar o produto (resultado da multiplicação) destes dois números, se não conhecemos os valores de x e y?
   b) Como podemos representar o triplo do número x? E o quádruplo do número y?
   c) Como podemos representar o produto do triplo de x com o quádruplo de y?
6. Considere a multiplicação de dois números inteiros, digamos u e v.
   a) Se somarmos três ao segundo fator, v, e multiplicarmos novamente, como podemos representar este novo produto?
   b) Qual será a diferença (resultado da subtração) entre esse resultado e o anterior?
   c) Confirme sua conclusão com os seguintes exemplos: $u = 2$ e $v = 5$, $u = -3$ e $v = 2$, $u = 4$ e $v = -5$, $u = -2$ e $v = -1$.

---

[9] Este último objetivo é conteúdo trabalhado correntemente na sétima série sob o título "Valor Numérico de uma Expressão Algébrica". Optamos por manter em sala de aula esta nomenclatura, mas reconhecemos que pode ser mal interpretada por parte dos alunos (principalmente por sua tendência em procurar sempre uma resposta numérica para questões em Matemática) e recomendamos que esta forma de se expressar seja evitada.

7. Considere a multiplicação de dois números inteiros, digamos p e q.
    a) Se somarmos três ao primeiro fator, p, e multiplicarmos novamente, como podemos representar este novo produto?
    b) Qual será a diferença (resultado da subtração) entre esse resultado e o anterior?
    c) Confirme sua conclusão com os seguintes exemplos: $p = 2$ e $q = 5$, $p = -3$ e $q = 2$, $p = 4$ e $q = -5$, $p = -2$ e $q = -1$.

8. Seja x um número inteiro negativo. Nestas condições responda:
    a) $\boldsymbol{x}^{par}$ É positivo ou negativo? Justifique.
    b) $\boldsymbol{x}^{ímpar}$ É positivo ou negativo? Justifique.
9. Observe as seguintes igualdades envolvendo três números inteiros consecutivos:

$$(-4, -3, -2) \rightarrow -3 = \frac{(-4)+(-2)}{2}$$

$$(4, 5, 6) \rightarrow 5 = \frac{4+6}{2}$$

$$(22, 23, 24) \rightarrow 23 = \frac{22+24}{2}$$

Identifique um padrão e a seguir responda: Será que o padrão que você intuiu vale para todos os números inteiros? Como você pode garantir isso?

10. Quantos e quais são os números inteiros x tais que:
    a) $|\boldsymbol{x}| = 5$
    b) $|\boldsymbol{x}| < 5$
    c) $|\boldsymbol{x}| > 5$

OBS.: o símbolo “$|\quad|$” denota o módulo ou valor absoluto de um número.

Procedimentos:

A atividade está prevista para ser realizada em duas aulas. A turma será dividida em grupos de dois ou três alunos. Será entregue aos grupos uma folha com as questões. O professor acompanhará o trabalho dos grupos, dando sugestões e esclarecendo enunciados de algumas questões. No caso em que mais de um grupo tenha dúvidas em alguma questão, o professor dará os esclarecimentos para o grande grupo.

Expectativas:

Espera-se que os alunos demonstrem autonomia na realização do trabalho. Como primeira atividade desse tipo, envolvendo escrita algébrica e propriedades das operações, espera-se alguma dificuldade dos alunos em escrever as respostas corretamente, utilizando as propriedades das operações em $\mathbb{Z}$. Esperam-se, também, dificuldades para compreender os enunciados das questões (6), (7) e (9).

Relato da aula do dia 06/05:

Iniciei a atividade formando os grupos por afinidades e entregando a ficha de trabalho para cada grupo. Formaram-se dez grupos, totalizando vinte e um alunos.

Para as questões (1) e (3) em particular, não era necessário considerar números inteiros, já que as idades dos dois irmãos são representadas por números naturais. No entanto, não mencionei isto, pois imaginei que teríamos dificuldades para responder a questão (4), se considerássemos apenas números naturais, devido à não-comutatividade e à não-associatividade da subtração de números naturais. Com os números inteiros esta dificuldade é contornada, considerando-se a subtração como uma adição com o oposto.

Enquanto trabalhavam na primeira questão, vários alunos atribuíram idades particulares aos dois irmãos. Procurei esclarecer que, a fim de justificar sua resposta, eles deveriam efetuar todas as possíveis adições de idades de modo que a soma fosse 35 anos, pois não foram ditas as idades dos irmãos. Expliquei que deveriam procurar uma justificativa que valesse para qualquer caso, sem mencionar um caso em particular.

O resultado esperado na questão (1) foi conseguido por seis grupos. De alguma forma, seus argumentos foram que, se a idade de cada um dos irmãos aumenta 5 anos, ao todo a soma inicial aumentará 10 anos, os quais, somados com os 35 anos, resultam em 45 anos. Um destes grupos não escreveu a justificativa por extenso, mas calculou $2 \times 5 = 10$ e $35 + 10 = 45$, evidenciando que compreenderam o problema genericamente, não se baseando em um exemplo particular nem em letras para expressar sua resolução. Um grupo calculou $35 + 5 = 45$. Um grupo respondeu corretamente, mas não apresentou justificativa. Um grupo respondeu com base em um único exemplo, imaginando que um dos irmãos tinha 10 anos e o outro 25 anos. Apenas um grupo errou completamente a questão, respondendo que as idades dos dois irmãos totalizariam 40 anos.

A questão (3) foi respondida corretamente por nove grupos (se bem que, pelas respostas dadas, suponho que houve cópia entre grupos). Apesar de não ter sido solicitado, seis grupos esboçaram argumentos na tentativa de justificar sua resposta.

Os alunos tiveram dificuldade em compreender o enunciado das questões (2) e (4). Resolvi, então, reescrevê-las de modo que os alunos pudessem resolvê-las por etapas. As questões ficaram assim:

Questão 2.

a) Se, na questão (1), chamarmos a idade de um dos irmãos de m e a idade do outro irmão de n, como podemos representar a idade de cada irmão daqui a 5 anos?
b) Qual será a soma das idades dos dois irmãos daqui a 5 anos?

Questão 4.

a) Se, na questão (3), chamarmos a idade de um dos irmãos de a e a idade do outro irmão de b, como podemos representar a idade de cada irmão daqui a 7 anos?
b) Qual será a diferença das idades dos dois irmãos daqui a 7 anos?

Ainda assim, foi necessário esclarecer os itens (b) das duas questões, pois os alunos simplesmente deram as respostas que já haviam calculado anteriormente.

De fato, eu esperava que os alunos encontrassem as mesmas respostas que nas questões (1) e (3), mas que utilizassem para isso as expressões algébricas envolvidas. Certamente, nos enunciados das questões esta minha expectativa não estava clara. Eu deveria ter esclarecido aos alunos minha intenção de que eles utilizassem as expressões encontradas nos itens anteriores e que justificassem suas respostas com o uso das propriedades. Eu esperava alguma resposta que incluísse fragmentos do seguinte argumento: Justificado pela propriedade associativa e pela propriedade comutativa da adição de números inteiros e considerando a subtração de números inteiros como a adição com o oposto, a soma das idades dos dois irmãos daqui a cinco anos será calculada por

$$m+5+n+5=m+n+10=35+10=45$$

e a diferença das idades dos dois irmãos daqui a sete anos será calculada por

$$a+7-(b+7)=a+7+(-b)+(-7)=a+[7+(-7)]+(-b)=a-b=5$$

Apenas três grupos aproximaram-se das respostas esperadas. Escreveram corretamente as expressões, mas não justificaram explicitamente com as propriedades das operações. Os erros mais comuns foram de escrita algébrica: por exemplo, na diferença entre as duas "novas" idades dos irmãos daqui a 7 anos, três grupos escreveram $a+7-b+7$, sem os parênteses, o que resultaria $a-b+14=5+14=19$ anos.

Na questão (5) encontramos uma diversidade de respostas. Houve grupos que confundiram o produto com a diferença, representando o produto de x e y por $x-y$. Dois grupos apresentaram respostas do tipo $x \cdot y = b$ para a questão (5.a) ou $x = 3x$ e $y = 3y$ para a questão (5.b) ou, ainda, $3x \cdot 4y = x$ para a questão (5.c), evidenciando uma necessidade de "fechamento" para as respostas. Nenhum grupo respondeu que $3 \cdot x \cdot 4 \cdot y = 12 \cdot x \cdot y$, muito menos mencionou o uso da propriedade comutativa e da propriedade associativa da multiplicação.

Como esperado, vários grupos pediram ajuda nas questões (6) e (7). Um dos objetivos nestas questões era que os alunos percebessem que, na questão (6), a resposta final seria sempre o triplo de v e, na questão (7), seria sempre o triplo de q. Decidi fazer no quadro um exemplo deste tipo de questão, utilizando outras letras para representar números inteiros e outros valores a serem considerados nos cálculos.

Encerrei a aula neste momento, combinando com os alunos que eles tentassem continuar a atividade em casa e que a retomaríamos na próxima aula.

Minha avaliação da aula:

Refletindo sobre o resultado da aula, esperava que, mesmo com dificuldades, os alunos conseguissem responder um pouco melhor as questões, principalmente porque eu fornecia exemplos e explicações para todas estas primeiras questões.

No início do relato desta aula, mencionei o fato de que não precisávamos considerar números inteiros nas questões (1) e (3), já que idades são dadas por números naturais. No entanto, para responder a questão (4) encontraríamos dificuldades se pretendêssemos utilizar propriedades para justificar os cálculos, pois a subtração de números naturais não é comutativa nem associativa. Em outras palavras, para estes alunos a justificativa para a questão (4) só podia ser feita no conjunto $\mathbb{Z}$ (apesar de idade ser um número natural), pois em geral não é discutida (e nós também não fizemos neste trabalho de preparação com os alunos) a possibilidade de expressões do tipo $2-5+9-5$, por exemplo, serem resolvidas em $\mathbb{N}$. Assim, temos que o universo numérico $\mathbb{Z}$ nos permite afirmar que, se a operação puder ser realizada em $\mathbb{N}$ (isto é, o resultado é um número natural), então ele pode ser obtido também da seguinte forma: é possível somarmos todas as parcelas, somarmos todos os números que estão sendo subtraídos e subtrairmos o segundo resultado do primeiro.

Afora a discussão anterior, pude perceber que os alunos não utilizaram conscientemente as propriedades das operações para responder as perguntas. Embora todo o tempo eu chamasse sua atenção para a utilidade das propriedades, certamente faltou explicitar nas questões a minha expectativa de que as propriedades utilizadas fossem destacadas.

Além disso, o fato de haver justificado as propriedades das operações em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$ e de ter mostrado alguma utilidade delas no cálculo mental não se mostrou suficiente para que os alunos percebessem sua utilidade nos cálculos com letras. Considero que essa habilidade requer um maior contato com questões como as do tipo colocadas nesta atividade. Por isso, deixo como sugestão aos professores leitores deste trabalho buscar variadas situações em que o raciocínio é baseado exclusivamente nas propriedades das operações para que os alunos fiquem convencidos de que os cálculos que fazem naturalmente são possíveis devido às propriedades das operações.

Por outro lado, fiquei bastante satisfeito pelo fato de vários alunos terem procurado esboçar uma justificativa para a questão (3), mesmo sem ela ter sido solicitada. Isto corrobora nosso ponto de vista de que, se o ensino de Matemática é conduzido desta maneira, ou seja, propondo-se justificativas ou argumentos matematicamente corretos que validem uma resposta, a partir de certo momento os próprios alunos vão sentir falta disso e vão espontaneamente complementar suas respostas com argumentos.

Relato da aula do dia 07/05:

Dando continuidade às atividades, os alunos formaram os grupos e começaram a trabalhar. Observando as respostas dos grupos para as questões (6) e (7) percebe-se que alguns grupos conseguiram responder bem a parte envolvendo a escrita algébrica e o uso das propriedades operatórias (se bem que houve cópias entre grupos), ainda que não tenham explicitado que propriedades estavam utilizando. Mas, ocorreram alguns erros, aparentemente devido à distração, como no caso em que, num momento, os alunos calcularam a diferença entre duas expressões e escreveram um sinal “+” entre as expressões, no momento seguinte, no cálculo com números conhecidos, colocam corretamente o sinal “ – ”. Quanto à parte numérica destas questões, a maioria dos grupos respondeu incorretamente, não tendo sido capaz de repetir com os números conhecidos os passos realizados com as letras. Alguns esbarravam nas “regras de sinais” da multiplicação, outros simplesmente não sabiam de onde partir e onde chegar.

A questão (8) tinha o duplo objetivo de incentivar os alunos a construírem um argumento genérico para justificar sua resposta e também de ratificar que um número negativo pode muito bem ser representado, por exemplo, pela letra x, sendo que seu oposto é positivo, apesar de ser representado por $-x$. Esta noção já havia sido tratada em outras ocasiões e agora eu pretendia observar se os alunos não estavam confusos quanto a esta representação. Como os grupos apresentavam dificuldades em organizar-se para responder a esta questão, tentei ajudá-los a partir de exemplos particulares, lembrando novamente que exemplos particulares não justificam uma resposta se o número de casos a serem analisados for infinito, mas que examinar casos particulares pode nos indicar um caminho para uma resposta genérica. Ainda assim, os alunos que tentaram responder não conseguiram esboçar uma resposta satisfatória. Cinco grupos não elaboraram qualquer resposta. Dois grupos responderam corretamente, mas não justificaram. Dois grupos responderam, embora não corretamente, e tentaram esboçar uma justificativa. Um grupo confundiu completamente os conceitos de par e ímpar com positivo e negativo.

A questão (9) também não foi bem acolhida pelos alunos. Nenhum grupo conseguiu dar uma resposta satisfatória. Os grupos que tentaram uma resposta não expuseram o padrão que intuíram, mas responderam que sim, que o padrão vale para todos os números inteiros. Suas justificativas foram ou porque “os exemplos garantem que sim”, ou repetindo a mesma frase feita na pergunta.

Mesmo após ter sido revisado o conceito de módulo, a questão (10) só foi respondida satisfatoriamente por três grupos, e ainda assim, provavelmente, com cópia de respostas. Dois grupos esqueceram-se de considerar os números negativos na resposta das questões (10b) e (10c).

Minha avaliação da aula:

Também nesta aula eram esperadas dificuldades com os enunciados das questões. Sendo assim, eu dei exemplos e esclarecimentos do que eu esperava como resposta em cada questão. Ainda assim, avaliando com mais critério as questões trabalhadas neste dia, percebo que em várias delas o seu enunciado poderia ter sido outro, mais esclarecedor, mais indutivo, no sentido de encaminhar os alunos às respostas. Por exemplo, nas questões (6c) e (7c), pede-se “Confirme sua conclusão com os seguintes exemplos”. Mas, a que conclusão estou me referindo? Para este caso, talvez o seguinte enunciado fosse mais adequado: "Refaça o exercício considerando agora valores específicos para u e v. Por exemplo, considere $u = 2$ e $v = 5$ e refaça todos os passos do exercício. Faça o mesmo com $u = -3$ e $v = 2$, depois com $u = 4$ e $v = -5$ e, por último, considerando $u = -2$ e $v = -1$. Compare suas respostas numéricas com sua resposta envolvendo letras. O que se pode concluir?"

Da mesma forma, dei-me conta de que, neste momento, a notação "x^{par}, $x^{ímpar}$" nas questões (8a) e (8b) foi infeliz pelo tipo de resposta que os alunos deram. Talvez eu devesse ter escrito, por exemplo, x^s onde s é um número par ou simplesmente "x elevado a um expoente par". Outro exemplo de escrita que se mostrou ineficaz, talvez por falta de familiaridade dos alunos com a expressão, foi na questão (9) onde pedi "Intua um padrão". Além disso, todas as ternas de números consecutivos apresentadas iniciavam com números pares. Caberia aqui incluir casos em que a terna se inicia com número ímpar.

Hoje eu vejo que eu deveria ter dado mais tempo para atividades deste tipo antes de entrar nas propriedades das operações em $\mathbb{Q}$ (a seguir). Acho que nestes dois dias foram abordados muitos conceitos ao mesmo tempo. Talvez eu tenha exigido demais dos alunos, pois eu queria que eles dessem conta de conceitos, escrita algébrica, propriedades, argumentação e comunicação matemática. Pressionado por conta do final do primeiro trimestre que estava próximo e pelo fato de que não importava se as letras estivessem representando números inteiros ou racionais e, portanto, o tratamento algébrico seria o mesmo, acabei optando por dar esta velocidade ao assunto. De qualquer forma, questões deste tipo seriam retomadas com números racionais.

4.2.19 Dia 08/05 – Números Racionais (Conceitos Gerais)

Objetivos:

- Revisar conceitos envolvidos no campo numérico dos racionais (frações equivalentes, adição e subtração de números racionais na forma fracionária).
- Preparar os alunos com conceitos que serão úteis para as justificativas das propriedades das operações com números racionais expressos na forma fracionária.

Roteiro de questões:

Para esta aula, não foi elaborado um roteiro rígido de questões. Procurarei direcionar as perguntas na tentativa de fazer com que os alunos resgatem algumas noções trabalhadas nas séries anteriores, tais como o conceito de frações equivalentes e as operações com números racionais na forma fracionária.

Procedimentos:

Aula expositiva em que o professor lança questões aos alunos a fim de que eles retomem conceitos relativos ao campo numérico dos racionais. Pretende-se abordar a necessidade prática e a necessidade estrutural dos números racionais. As operações serão revisadas apenas com a representação fracionária dos números racionais, já que na sexta série foi trabalhada a passagem da representação fracionária para a decimal e vice-versa com a maioria dos alunos desta turma. Para a adição e subtração, usaremos frações equivalentes, pois este conceito será útil quando trabalharmos as propriedades das operações.

Expectativas:

Como há alunos oriundos de outras escolas, espera-se que apareçam diferentes estratégias para a adição e subtração de frações, por exemplo, fazendo uso de frações equivalentes ou fazendo simplesmente uso do mínimo múltiplo comum sem dar ênfase ao conceito de frações equivalentes (ou seja, usando uma “receita pronta”).

Relato da aula do dia 08/05:

Iniciei a aula, falando aos alunos sobre a insuficiência dos números inteiros para representar medidas. Dei como exemplos uma porta com 2,15 m de comprimento, uma pessoa com 74,325 kg de massa, uma mercadoria que custe R$52,25, uma temperatura de $-15{,}3^{o}$C, etc. Os alunos colaboraram com outros exemplos parecidos. Mencionei também o fato de que nem sempre a divisão entre dois números inteiros resulta em um número inteiro. Mas, com os números racionais, o problema de efetuar divisões com divisor não-nulo estava resolvido, ou seja, a divisão de dois números racionais, com divisor diferente de zero, sempre resulta em um número racional.

Aproveitei para dar aos alunos um panorama do trabalho feito até aqui envolvendo os campos numéricos estudados: “Começamos com os números naturais, com os quais sempre é possível efetuar adições e multiplicações, mas não é sempre possível subtrair nem dividir. Depois trabalhamos com os números inteiros, com os quais é sempre possível efetuar adições, multiplicações e subtrações, mas nem sempre é possível efetuar divisões. Agora, com o conjunto dos números racionais, poderemos sempre adicionar, subtrair, multiplicar e dividir, desde que o divisor seja diferente de zero”.

Alguns alunos comentaram que acharam “legal” essa coisa de ampliar os conjuntos de modo a abranger novas operações e de modo a poderem ser aplicados em outras situações práticas. Um aluno chegou a questionar se haveria um conjunto “maior”, no sentido de haver uma operação que não pudesse ser feita no conjunto dos números racionais. Pedi para ele tentar calcular $\sqrt{2}$, isto é, determinar o número racional que elevado ao quadrado dá 2 como resultado. Outros alunos entraram na discussão e tentaram o número 1 e o número 2. Perceberam que o primeiro era pequeno demais e que o segundo ultrapassava o 2. Então, alguns alunos sugeriram que fosse o 1,5. Calculamos $1{,}5^2$ e vimos que o resultado passava de 2. A partir daí fomos chegando a aproximações racionais para $\sqrt{2}$, utilizando uma calculadora de oito dígitos.

Para finalizar a discussão, afirmei que mesmo que tivéssemos uma calculadora com um número infinito de dígitos, jamais encontraríamos um número decimal exato ou uma dízima periódica que, elevando ao quadrado, resultasse exatamente igual a 2. Portanto, o número decimal que representa $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Apesar de ser muito interessante e legítima, por ter partido dos alunos, achei melhor não continuar com esta discussão, pois estávamos nos desviando do objetivo da aula. Combinei com os alunos que, na oitava série, nós demonstraríamos que não é possível representar $\sqrt{2}$ na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

A partir daqui, sugeri trabalharmos com números racionais expressos na forma de fração, pois esta forma permitiria que operássemos com mais facilidade do que com a forma decimal, e destaquei que qualquer número decimal, exato ou periódico, podia ser representado na forma de fração, conforme havíamos trabalhado na sexta série.

Primeiramente salientei que o conjunto dos números racionais não deveria ser entendido como o conjunto das frações, mas como o conjunto dos números que podem ser representados na forma de fração. Com isso, introduzi a noção de fração equivalente: duas ou mais frações são equivalentes quando representarem a mesma quantidade, isto é, o mesmo número racional. Comecei exemplificando com o número racional 0,5, cuja forma fracionária mais simples (irredutível) é $\frac{1}{2}$. Rapidamente alguns alunos relembraram que $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, etc. também representam a quantidade ou o número 0,5, pois dois é a metade de quatro, três é a metade de seis, quatro é a metade de oito, etc. Concluímos que todas aquelas frações, e infinitas outras, representam o número racional 0,5, sendo chamadas de frações equivalentes.

Mostrei à turma que para obtermos frações equivalentes, basta multiplicar ou dividir (quando possível) ambos os termos da fração pelo mesmo número inteiro diferente de zero. Assim, qualquer fração $\frac{1n}{2n}$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, representa o número racional 0,5.

Introduzi a notação $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tais que } a \text{ e } b \text{ são inteiros e } b \neq 0 \right\}$ como uma representação para o conjunto dos números racionais. Um aluno perguntou por que o b deve ser diferente de zero. Questionei o aluno quanto ao resultado de uma divisão por zero, o qual respondeu que não se pode dividir por zero.

Depois disso, iniciei uma breve revisão da adição e da subtração de frações. Comecei diretamente relembrando: para adicionar ou subtrair frações com o mesmo denominador, mantemos o denominador e adicionamos ou subtraímos os numeradores. Coloquei os exemplos $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$, $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$, $\frac{6}{8}-\frac{4}{8}=\frac{2}{8}$, $\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$. Fiz alguns desenhos para ilustrar estas adições e subtrações, dividindo um retângulo em partes iguais. No caso de os denominadores serem diferentes, exemplifiquei com a adição $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$. Neste caso, alguns alunos procuraram somar os numeradores e os denominadores, obtendo $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$. Para esses alunos, mostrei que esse procedimento levaria ao seguinte erro: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, ou seja, somando duas metades resultaria a metade?!?! Sendo assim, relembrei, com a participação de alguns alunos, que podemos encontrar frações equivalentes às anteriores, mas que tenham o mesmo denominador e então efetuamos como anteriormente. Mostrei como podemos fazer isso, multiplicando os termos da primeira fração pelo denominador da segunda fração e multiplicando os termos da segunda fração pelo denominador da primeira. Ficamos com $\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{2}{6}$ e $\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{3}{6}$. Logo, $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$.

Contrariamente ao esperado, os alunos não apresentaram outra maneira ou regra para a adição de números racionais na forma fracionária. Houve alunos que não compreenderam a construção das frações equivalentes. Esta construção deveria ficar bastante clara, pois seria utilizada na justificativa das propriedades da adição de números racionais. Fiz mais alguns exemplos, incluindo a subtração, sempre destacando que o objetivo era encontrar frações equivalentes às anteriores, respectivamente, mas que tivessem o mesmo denominador. Com isso, poderíamos adicionar ou subtrair quaisquer frações. Neste momento, entendi que seria melhor não mencionar o uso do mínimo múltiplo comum, pois poderia confundir os alunos, além de não perceber vantagem na sua utilização para o nosso trabalho.

Finalizando a aula, fizemos uma adição genérica de números racionais na forma fracionária. Escrevi, com o acompanhamento dos alunos: “Queremos somar os números $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, onde *a*, *b*, *c* e *d* são números inteiros tais que $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Para isso, usaremos a noção de fração equivalente:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a \cdot d}{b \cdot d}+\frac{c \cdot b}{d \cdot b}, \text{ com } b \cdot d \text{ e } d \cdot b \text{ não nulos}$$

Pela comutatividade da multiplicação de números inteiros

$$b \cdot d = d \cdot b \text{ e } c \cdot b = b \cdot c,$$

resultando

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a \cdot d}{b \cdot d}+\frac{b \cdot c}{b \cdot d}=\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.”$$

Foi preciso repetir o raciocínio bem devagar para que todos compreendessem o que havia sido feito; ainda assim, não me convenci de que todos o tivessem compreendido. De qualquer forma, este resultado seria retomado diversas vezes na próxima aula, quando tratássemos das propriedades comutativa e associativa da adição de números racionais.

Minha avaliação da aula:

Como uma breve revisão de conceitos e procedimentos, considero que atingimos os objetivos da aula. Pela minha experiência, posso afirmar que as dificuldades que os alunos apresentam ao operar com frações não serão sanadas apenas com esta aula de revisão. Portanto, será essencial incluir nas atividades questões envolvendo frações com alguma frequência.

Também considerei boa a discussão gerada pela pergunta de um aluno sobre se há alguma operação que os números racionais não dão conta. Quando uma pergunta dessas parte de um aluno, rapidamente outros alunos também se animam a participar, pois foi uma discussão lançada por eles mesmos.

Havia outras características importantes para trabalharmos com números racionais, por exemplo, a densidade do conjunto $\mathbb{Q}$. Porém não havia tempo hábil para um trabalho desse tipo, além do que eu gostaria de chegar rapidamente às propriedades das operações em $\mathbb{Q}$.

Deixo aqui registrada a observação que a expressão $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}$ poderia ter sido substituída por $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}$, e assim teria-se evitado a necessidade da propriedade comutativa em $b\cdot d=d\cdot b$ e $c\cdot b=b\cdot c$. Essa observação passa despercebida quando lidamos com números conhecidos.

4.2.20 Dia 13/05 – Propriedades Comutativa e Associativa da Adição de Números Racionais

Objetivos:

- Justificar as propriedades comutativa e associativa da adição de números racionais representados na forma fracionária.

Roteiro de questões:

Para esta aula, não foi elaborado um roteiro rígido de questões para os alunos trabalharem individualmente ou em grupos. Pretendemos trabalhar a propriedade comutativa e a propriedade associativa da adição de números racionais representados na forma fracionária, apoiando-nos no conhecimento sobre propriedades das operações com números inteiros e no conceito de frações equivalentes.

Procedimentos:

Aula expositiva em que professor e alunos procuram justificar a propriedade comutativa e a propriedade associativa da adição de números racionais representados na forma fracionária, utilizando resultados trabalhados em aulas anteriores. Conforme o desenrolar da aula, o professor oralmente convida os alunos a participarem, questionando-os sobre alguns passos da argumentação, revendo conceitos que estarão sendo utilizados e solicitando que refaçam sozinhos alguns argumentos.

Expectativas:

A despeito do trabalho realizado até aqui, espera-se que os alunos tenham dificuldades para acompanhar os argumentos, principalmente no caso da associatividade, devido à sua pouca habilidade no trato com frações e devido à quantidade de letras que precisamos utilizar para representar genericamente números racionais na forma fracionária.

Relato da aula do dia 13/05:

Iniciei propondo uma adição de números racionais representados na forma fracionária, a qual foi resolvida por frações equivalentes e, contrariando o que dissemos na última aula, a pedido de um aluno, por mínimo múltiplo comum:

Por frações equivalentes:

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{1\times 4}{8\times 4}+\frac{3\times 8}{4\times 8}=\frac{4}{32}+\frac{24}{32}=\frac{28}{32}=\frac{28\div 4}{32\div 4}=\frac{7}{8}.$$

Por mínimo múltiplo comum:

$$\begin{array}{c|c} 8\,,4 & 2 \\ 4\,,2 & 2 \\ 2\,,1 & 2 \\ 1\,,1 & \end{array} \qquad \frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{1+6}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\text{m.m.c}(8\,,4)=2\times 2\times 2 = 8$$

Perguntei à turma qual método eles acharam melhor de trabalhar. Talvez porque muitos dos alunos desta turma foram meus alunos na quinta ou sexta séries e, como naquelas oportunidades eu trabalhei a adição de frações através de frações equivalentes, a turma, com uma ou duas exceções, preferiu a solução por frações equivalentes. Comentei com os alunos que é possível mostrar a equivalência dos dois métodos, mas que eu não faria isso naquele momento para não nos afastarmos do objetivo da aula.

Neste ponto, refizemos uma adição genérica de frações, a exemplo do que já havíamos feito na aula anterior. Com algumas exceções, desta vez os alunos acompanharam mais facilmente o procedimento.

Partindo para a propriedade comutativa da adição de números racionais, perguntei aos alunos: “Já vimos que a adição de números naturais e a adição de números inteiros possuem a propriedade comutativa. Será que a adição de números racionais possui a mesma propriedade?” E escrevi no quadro: “Será que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$, onde a, b, c e d são números inteiros e b e d são diferentes de zero?” Sem refletirem muito, vários alunos responderam que sim. Perguntei a eles como poderiam ter tanta certeza, no que alguns responderam que “só podia ser, só falta justificar”.

Fizemos, então, o seguinte: calculamos detalhadamente

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad (1),$$

como já havíamos feito (só que agora utilizando a observação final da avaliação da última aula). A seguir, calculamos também, detalhadamente, da seguinte forma

$$\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=\frac{b\cdot c}{b\cdot d}+\frac{a\cdot d}{b\cdot d}=\frac{b\cdot c+a\cdot d}{b\cdot d} \quad (2).$$

Perguntei aos alunos se estes dois resultados, (1) e (2), eram iguais. Os alunos que mais participavam não tiveram dúvidas em responder que sim; dos demais alunos, alguns ficaram receosos em responder, outros não esboçaram qualquer reação. Provoquei, então, aos que responderam afirmativamente, contra-argumentando: “Mas, como assim são iguais! Os denominadores são iguais, mas e os numeradores?” Pude ouvir alguns alunos responderem ao mesmo tempo “os números são os mesmos, só mudaram de ordem”, e complementei: “Ou seja, vocês estão dizendo que os numeradores são iguais pela propriedade comutativa da adição de números inteiros”.

Fiquei bastante satisfeito com a resposta de alguns alunos e perguntei aos demais se eles haviam compreendido a justificativa dos colegas e se concordavam com ela. Alguns afirmaram que compreendiam e concordavam, outros não emitiram opinião. Retomei em detalhe o argumento para que todos pudessem compreender e acompanhar o restante da aula, procurando fazer com que os alunos participassem e tentando entender em qual ou quais passagens estavam tendo dúvidas.

Depois dessa nova explicação em que alguns alunos, forçosamente, tiveram que participar, pareceu-me que as dúvidas não recaíam na justificativa pela comutatividade da adição nos denominadores, mas na adição de frações. Resolvi deixar as coisas assim mesmo, pois ainda teríamos muitas oportunidades de somar frações. Depois disso, escrevi no quadro:

"pelo que vimos agora, garantimos que a adição de números racionais é comutativa". Fizemos, ainda, um exemplo numérico para verificar nosso resultado.

A seguir, tratamos da propriedade associativa da adição de números racionais. Fiz perguntas semelhantes às que fiz no caso da comutatividade: "Será que a adição de números racionais é associativa?" E escrevi: "Considerando *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, e *f* números inteiros, de modo que *b*, *d* e *f* são diferentes de zero, será que $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$?" Começamos calculando $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$. A expressão dentro dos parênteses foi calculada em separado e depois reescrita na igualdade $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\left(\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\right)+\frac{e}{f}$. Perguntei à turma o que deveríamos fazer para realizar a adição. Vários alunos responderam que deveríamos multiplicar o numerador e o denominador da primeira fração por *f* e o numerador e o denominador da segunda fração por $b\cdot d$. Completei afirmando que, desta forma, obtemos frações equivalentes com denominadores iguais e questionei: "Por que os denominadores são iguais?" "Pela propriedade comutativa da multiplicação de números inteiros" foi a resposta de vários alunos. Um aluno mencionou a propriedade associativa da multiplicação de números inteiros, mas se corrigiu depois de eu ter explicado que ele deveria encarar $b\cdot d$ não como a multiplicação de dois números inteiros, mas como um número inteiro em si, isto é, deveria pensar no resultado de $b\cdot d$.

Ficamos com a igualdade $\left(\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{(a\cdot d+b\cdot c)\cdot f}{b\cdot d\cdot f}+\frac{e\cdot b\cdot d}{f\cdot b\cdot d}$. Perguntei aos alunos como faríamos para calcular $(a\cdot d+b\cdot c)\cdot f$. Neste momento, deu-se um silêncio em que nenhum aluno se manifestou. Perguntei se tínhamos alguma "ferramenta" que nos ajudasse a realizar aquela multiplicação. Ninguém se manifestou. Perguntei, então, se tínhamos trabalhado alguma propriedade que nos mostrasse como calcular uma adição vezes um número. Neste momento, vários alunos se manifestaram. Uns respondendo a propriedade comutativa, outros a associativa e outros, ainda, a distributiva. Falei que alguns estavam certos (mesmo porque já haviam mencionado todas as propriedades trabalhadas até então!), no que vários alunos começaram a discutir entre si para tentar convencer um ao outro. Terminou vencendo, na força dos argumentos, a propriedade distributiva.

Durante as discussões os alunos argumentavam dando exemplos de cálculos onde cada propriedade era utilizada. Confirmei que a propriedade que utilizaríamos para realizar aquela multiplicação era mesmo a propriedade distributiva da multiplicação de números inteiros e comecei a calcular: $(a \cdot d + b \cdot c) \cdot f = a \cdot d \cdot f + b \cdot c \cdot f$. Voltando ao cálculo inicial, ficamos com:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \left(\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{(a \cdot d + b \cdot c) \cdot f}{b \cdot d \cdot f} + \frac{e \cdot b \cdot d}{f \cdot b \cdot d} = \frac{a \cdot d \cdot f + b \cdot c \cdot f + e \cdot b \cdot d}{b \cdot d \cdot f},$$

onde $b \cdot d \cdot f \neq 0$.

Repetimos todo o procedimento anterior para calcular $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$. A participação da maioria dos alunos foi muito boa, mas alguns ainda não participavam. Finalizando os cálculos, ficamos com o seguinte resultado:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \left(\frac{c \cdot f + e \cdot d}{d \cdot f}\right) = \frac{a \cdot d \cdot f}{b \cdot d \cdot f} + \frac{(c \cdot f + e \cdot d) \cdot b}{d \cdot f \cdot b} = \frac{a \cdot d \cdot f + c \cdot f \cdot b + e \cdot d \cdot b}{b \cdot d \cdot f},$$

onde $b \cdot d \cdot f \neq 0$.

A maioria dos alunos concluiu que as últimas expressões dos dois resultados eram iguais, pelas propriedades da multiplicação de números inteiros aplicadas às parcelas dos numeradores das expressões. Escrevi no quadro: "Por tudo que vimos aqui, concluímos que $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$, onde *a*, *b*, *c*, *d* e *f* são números inteiros e *b*, *d* e *f* são diferentes de zero, ou seja, provamos que a adição de números racionais é associativa. A seguir, fizemos um exemplo numérico desta propriedade.

Ainda havia algum tempo de aula e decidi revisar a regra da multiplicação de frações, sem procurar uma justificativa para esta regra, pois isto poderia tomar muito tempo e eu já estava extrapolando os objetivos da aula. Além disso, eu não objetivava dar mesmo um significado concreto para a multiplicação de frações. Apenas lembrei aos alunos de como procedemos: "numerador multiplicado por numerador e denominador multiplicado por denominador". Utilizando as letras *a*, *b*, *c* e *d* para representar números inteiros, com *b* e *d* diferentes de zero, fizemos: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Resolvemos algumas multiplicações e pedi como tarefa para casa que tentassem mostrar que a multiplicação de números racionais é comutativa e associativa.

Minha avaliação da aula:

Sobre a comutatividade, ou até antes, eu poderia ter começado pedindo aos alunos para tentarem escrever o que iríamos justificar nesta aula. Por exemplo, em vez de eu ter escrito no quadro que gostaríamos de verificar se $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$, eu deveria ter solicitado que os próprios alunos escrevessem esta igualdade para observar se conseguiriam ou onde encontrariam dificuldades. O mesmo vale para a associatividade. Dessa forma, eu já estaria trabalhando com a escrita algébrica e com a tradução matemática de sentenças em língua materna.

Além disso, quando questionei como poderiam ter tanta certeza que números racionais comutam na adição, eu poderia ter explorado melhor sua intuição (completamente correta), pois adicionar, para eles, ainda significa adicionar quantidades, e, sejam elas inteiras ou não, sempre vai significar juntar quantidades (até chegarmos ao universo numérico complexos, onde então a coisa muda), de modo que eles têm razão em "enxergar" a comutatividade da adição de racionais.

Em um dos argumentos usados na justificativa da associatividade da adição de números racionais, ao comparar os denominadores $b \cdot d \cdot f$ e $f \cdot b \cdot d$, um aluno confundiu a comutatividade da multiplicação de números inteiros com a associatividade. Credito a mim a responsabilidade por essa confusão, pois em alguma aula anterior, para facilitar a distinção entre a comutatividade e a associatividade, mencionei que a comutatividade envolvia dois fatores e a associatividade envolvia três fatores.

Talvez eu devesse ter incluído alguns exercícios que exigissem o uso destas propriedades, pois, da maneira como foi encaminhada a aula, quem mais trabalhou foi o professor, mesmo eu tendo constantemente chamado os alunos a participarem. Contudo, pareceu-me que as dificuldades maiores dos alunos foram com a operação de adição de frações propriamente dita e não com as justificativas baseadas na comutatividade e associatividade da adição e da multiplicação de inteiros.

Pelo relato da aula, pode parecer difícil que um aluno de sétima série possa compreender todos aqueles cálculos envolvendo letras, principalmente no caso da associatividade. Mas os cálculos foram feitos bem lentamente e não foram feitos em uma só linha, como está no relato. Em cada passo o objetivo era repetido de modo que os alunos não se perdessem no meio dos cálculos. Ainda assim, acho muito difícil que um aluno consiga refazer os raciocínios para justificar principalmente a associatividade da adição de números racionais. Entretanto, não tenho como objetivo que os alunos refaçam tal justificativa. O importante é que os alunos tenham oportunidade de tomar contato com justificativas de resultados matemáticos que são centrais para a compreensão dos assuntos que virão a seguir. Mais ainda, o importante é que os alunos participaram desse processo, compreendendo o encadeamento de argumentos.

Por tudo o que foi dito, considero que os objetivos da aula foram atingidos pela maior parte dos alunos, haja vista as discussões que foram mantidas em momentos diversos da aula.

4.2.21 Dia 14/05 – Propriedades Comutativa, Associativa e Distributiva da Multiplicação de Números Racionais

Objetivos:

- Revisar a regra da multiplicação de frações.
- Justificar a comutatividade e a associatividade da multiplicação de números racionais e a distributividade da multiplicação em relação à adição de números racionais representados na forma fracionária.

Roteiro de questões:

Para esta aula, não foi elaborado um roteiro rígido de questões para os alunos trabalharem individualmente ou em grupos. Pretendemos trabalhar a comutatividade e a associatividade da multiplicação de números racionais e a distributividade da multiplicação em relação à adição de números racionais representados na forma fracionária, apoiando-nos no conhecimento sobre propriedades das operações com números inteiros e na regra da multiplicação e da adição de frações.

Procedimentos:

Aula expositiva em que professor e alunos procuram justificar as propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação de números racionais representados na forma fracionária, utilizando resultados trabalhados em aulas anteriores. Conforme o desenrolar da aula, o professor oralmente convida os alunos a participarem, questionando-os sobre alguns passos da argumentação, revendo conceitos que estarão sendo utilizados e solicitando que refaçam sozinhos alguns argumentos.

Expectativas:

Espera-se que os alunos tenham maior facilidade com o trato das propriedades comutativa e associativa da multiplicação do que tiveram com a adição, devido à maior simplicidade da regra da multiplicação de frações. Porém, espera-se maior dificuldade com a propriedade distributiva, pois aqui aparecem as duas operações.

Relato da aula do dia 14/05:

Iniciei a aula retomando a regra da multiplicação de frações vista rapidamente na aula anterior. Perguntei aos alunos como multiplicamos duas frações, ao que responderam "numerador vezes numerador e denominador vezes denominador". Escrevi esta frase com o uso de letras para representar os números: "$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, onde *a*, *b*, *c* e *d* são números inteiros e *b* e *d* são diferentes de zero". Os alunos não apresentaram maiores dificuldades com a regra da multiplicação de frações.

Perguntei se algum aluno havia feito o tema de justificar a propriedade comutativa e a propriedade associativa da multiplicação de números racionais. A maior parte dos alunos tentou fazer a tarefa, mas não conseguiram realizá-la satisfatoriamente. O mais comum foi não terem conseguido organizar o início do trabalho, isto é, não terem conseguido escrever que, no caso da comutatividade, procurávamos mostrar que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ e, no caso da associatividade, que $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$. De fato, o caso da associatividade foi onde os alunos apresentaram as maiores dificuldades. Não esperava por isso, pois já havíamos trabalhado as propriedades quando dos números naturais e dos números inteiros. De qualquer forma, apoiei a iniciativa dos que tentaram realizar a tarefa, mas pedi para serem mais atentos e que da próxima vez procurassem em seus cadernos algum resultado que pudesse orientá-los no trabalho. Também salientei que, se fosse necessário, eles poderiam utilizar todos os resultados já trabalhados em aula sem a necessidade de justificá-los novamente.

Comecei a trabalhar no quadro, solicitando a participação dos alunos, a comutatividade: "Queremos verificar que vale a comutatividade da multiplicação de números racionais, isto é, que $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$, não importando quais são os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde *a*, *b*, *c* e *d* números inteiros e *b* e *d* não são zero". Pedi para calcularem separadamente o lado esquerdo da igualdade e o lado direito da igualdade. Os alunos responderam, respectivamente, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ e $\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}=\frac{c\cdot a}{d\cdot b}$. Salientei o fato de que nos dois casos os denominadores garantidamente eram diferentes de zero, pois, se *b* e *d* eram diferentes de zero, então o produto dos dois seria diferente de zero[10]. Pedi, então, para compararem os dois resultados obtidos. Imediatamente vários alunos responderam que os resultados eram iguais, pois "$a\cdot c$ e $c\cdot a$ eram a mesma coisa, só mudou a ordem, o mesmo vale para $b\cdot d$ e $d\cdot b$". Perguntei qual resultado sobre números inteiros havíamos visto que mencionava a mudança de ordem dos fatores de uma multiplicação e o resultado mantinha-se o mesmo. Os mesmos alunos responderam que era a propriedade comutativa da multiplicação. Completei: "de números inteiros" [11]. Questionei aos demais alunos se eles concordavam com o que os colegas haviam dito. Todos concordaram. Concluímos, então, que a multiplicação de números racionais é comutativa e escrevi no quadro, tentando introduzir um pouco mais de simbolismo: "Vimos que $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$, onde *a*, *b*, *c* e $d \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Portanto, a multiplicação em $\mathbb{Q}$ é comutativa".

A seguir, passamos a tratar da associatividade da multiplicação de números racionais. Comecei escrevendo no quadro: "Desejamos comprovar que $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$, quaisquer que sejam os números racionais $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$, onde *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f* são números inteiros com *b*, *d* e *f* diferentes de zero". Começamos calculando o lado esquerdo da igualdade. Sempre questionando os alunos em cada passagem, chegamos ao resultado $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\left(\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{(a\cdot c)\cdot e}{(b\cdot d)\cdot f}=\frac{a\cdot c\cdot e}{b\cdot d\cdot f}$, salientando que $b\cdot d\cdot f \neq 0$. Aqui, eliminei os parênteses no numerador e no denominador, alegando aos alunos que a propriedade associativa e a propriedade comutativa da multiplicação de números inteiros nos possibilitam multiplicar em qualquer ordem e agrupando os fatores dois a dois como quisermos.

---

[10] Algumas aulas após, um aluno levantou a questão de um produto ser igual a zero, gerando uma discussão bastante interessante envolvendo alunos e professor.
[11] Completei a frase dos alunos, pois, futuramente no Ensino Médio aprenderão outras multiplicações (matrizes) que não serão comutativas.

Dando continuidade, convidei os alunos a calcularmos o lado direito da igualdade. Da mesma forma que antes, encontramos o resultado $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)=\frac{a\cdot c\cdot e}{b\cdot d\cdot f}$. Pedi para compararem os dois resultados obtidos. Todos concordaram com a igualdade dos resultados e concluímos, portanto, que a multiplicação de números racionais é associativa.

Passamos, então, a tratar da distributividade. Os alunos tiveram dificuldade em expressar oralmente suas ideias. Comecei tentando organizar suas ideias: "Lembrem que a distributividade é aquela propriedade que envolve a multiplicação e a adição. O que diz a distributividade?" Pelas falas, pude perceber que havia alunos que estavam visualizando a propriedade distributiva, mas, apesar das tentativas, não estavam conseguindo verbalizar. Tentei ajudá-los na verbalização, no que os alunos me acompanhavam, completando as lacunas que eu deixava em minha fala. Como das outras vezes, escrevi no quadro que pretendíamos justificar que $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$, não importando quais fossem os números racionais $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$, onde *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f* são números inteiros com *b*, *d* e *f* diferentes de zero. Novamente, solicitando a participação dos alunos em cada ponto, calculamos o membro esquerdo da igualdade e depois, o membro direito:

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c\cdot f+e\cdot d}{d\cdot f}\right)=\frac{a\cdot(c\cdot f+e\cdot d)}{b\cdot d\cdot f}=\frac{a\cdot c\cdot f+a\cdot e\cdot d}{b\cdot d\cdot f}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}+\frac{a\cdot e}{b\cdot f}=\frac{a\cdot c\cdot f}{b\cdot d\cdot f}+\frac{a\cdot e\cdot d}{b\cdot f\cdot d}=\frac{a\cdot c\cdot f+a\cdot e\cdot d}{b\cdot d\cdot f}$$

Em cada igualdade eu perguntava aos alunos que resultado eu estava utilizando como argumento para seguir adiante. Grande parte da turma respondia corretamente, mas havia alguns alunos que não davam qualquer resposta (os de sempre).

Para calcular o membro direito, em particular, o segundo sinal de igual, recorremos às frações equivalentes de uma forma diferente do que vínhamos fazendo. Em geral, estávamos multiplicando o numerador e o denominador de cada fração pelo denominador da outra fração. Alguns alunos tentaram fazer isso, mas as respostas ficavam muito grandes e aparentemente diferentes do primeiro resultado. Lembrei que podíamos multiplicar o numerador e o denominador por qualquer número diferente de zero, não sendo necessário multiplicar exatamente pelo denominador da outra fração, desde que os denominadores das duas novas frações ficassem iguais. Realizando lentamente os cálculos no quadro, os alunos, em sua maioria, conseguiram acompanhar o raciocínio. Pelo que havíamos feito concluímos que a multiplicação de números racionais é distributiva em relação à adição de números racionais.

Com estes resultados, dei por encerradas as aulas que envolviam a justificativa das propriedades das operações com números naturais, inteiros e racionais. Comentei com os alunos que, pelo fato de as operações possuírem as mesmas propriedades (pelo menos no que diz respeito às propriedades que trabalhamos), passaríamos a utilizar uma letra para representar qualquer número, seja ele natural, inteiro ou racional.

Minha avaliação da aula:

Apesar de toda dificuldade apresentada pelos alunos, considero atingidos os objetivos da aula. A maior parte dos alunos participou ativamente da aula dando sugestões, errando, acertando e discutindo entre si. Pensando em uma avaliação escrita, não há garantias de que os alunos consigam um desempenho satisfatório. Mas, considerando as dificuldades de se trabalhar com a turma, a participação deverá ter um peso grande na avaliação.

No caso da comutatividade da multiplicação, eu poderia ter tentado justificar utilizando a seguinte estratégia:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \underset{\substack{\text{Regra da}\\ \text{multiplicação}}}{=} \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \underset{\substack{\text{Comutatividade da}\\ \text{multiplicação em } \mathbb{Z}\\ \text{no numerador e}\\ \text{no denominador}}}{=} \frac{c\cdot a}{d\cdot b} \underset{\substack{\text{Regra da}\\ \text{multiplicação}}}{=} \frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

E, no caso da associatividade da multiplicação, a seguinte estratégia:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f} = \left(\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\right)\cdot\frac{e}{f} = \frac{(a\cdot c)\cdot e}{(b\cdot d)\cdot f} = \frac{a\cdot(c\cdot e)}{b\cdot(d\cdot f)} = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c\cdot e}{d\cdot f}\right) = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right),$$

sendo a 1^a, a 2^a, a 4^a e a 5^a igualdades justificadas pela regra da multiplicação de números racionais e a 3^a igualdade justificada pela associatividade da multiplicação de números inteiros. No entanto, achei melhor continuar realizando os passos da justificativa da mesma forma que eu já vinha fazendo desde o início, isto é, calculando cada membro da igualdade separadamente e comparando os resultados obtidos.

Na propriedade distributiva, acredito que se eu tivesse chamado algum aluno ao quadro, ou se eu tivesse pedido para que eles escrevessem a distributividade no caderno, provavelmente alguns teriam conseguido escrever pelo menos a parte central da propriedade, isto é, teriam conseguido escrever que $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$, mas esse encaminhamento não me ocorreu naquele momento.

4.2.22 Dia 15/05 – Correção do trabalho realizado nos dias 06 e 07/05

Objetivos:

- Revisar conteúdos de números naturais e números inteiros como preparação para a avaliação de 20/05/08.
- Esclarecer pontos que ficaram dúbios quando da realização da atividade pelos alunos.

Roteiro de questões:

As questões trabalhadas nesta aula são as mesmas das aulas de 06 e 07/05/08 (ver p. 170 e 171).

Procedimentos:

Aula expositiva com a participação dos alunos. Eventualmente algum aluno pode ser convidado a resolver alguma questão no quadro.

Expectativas:

Espera-se uma participação ativa dos alunos, haja vista todo o trabalho realizado desde o início do ano letivo. Espera-se que os alunos percebam os erros cometidos quando da realização do trabalho.

Relato da aula do dia 15/05:

Nesta aula de revisão, me concentrei basicamente em retomar alguns pontos que não ficaram muito claros quando da realização da atividade pelos alunos.

Nas questões (1) e (3) não houve maiores discussões. Os alunos acompanharam bem, inclusive respondendo com mais convicção do que na realização da atividade.

Na questão (2), apenas destaquei o uso das letras e das propriedades para justificar a resposta. Neste caso, poderíamos considerar apenas números naturais sem qualquer problema, pois aí valem a comutatividade e a associatividade da adição. Escrevi no quadro o padrão de resposta que eu esperava, qual seja: $m+5+n+5=m+n+10=35+10=45$, onde as igualdades justificam-se pelas propriedades da adição de números naturais e pelo fato de que $m+n=35$. Os alunos naturalmente questionaram o porquê de usarmos letras para resolver uma questão em que elas não eram necessárias. Respondi que o objetivo da questão era justamente familiarizá-los com o uso das letras e mostrar que o cálculo com letras leva ao mesmo resultado que eles já conheciam.

A questão (4) deu mais trabalho, pois tivemos que considerar as idades como números inteiros (positivos) a fim de podermos utilizar comutatividade e a associatividade da adição de números inteiros. Procedi à correção, escrevendo inicialmente a diferença das idades dos dois irmãos, supondo $a>b$, como $a+7-(b+7)$. Destaquei aos alunos a importância do uso dos parênteses para que a expressão realmente traduzisse o que queríamos calcular, ou seja, a diferença entre as idades acrescidas de 7 anos. Perguntei como eliminar os parênteses da expressão. Alguns alunos lembraram-se da sexta série, onde viram que o sinal de menos antes dos parênteses significa que multiplicamos a expressão por -1. Assim, ficamos com $a+7-b-7$. Agora, para nos livrarmos da subtração, a qual não é comutativa nem associativa, lembrei aos alunos que uma subtração pode ser escrita como uma adição do primeiro número com o oposto do segundo número[12]. A maioria dos alunos não teve problemas com isso, pois foi assim que aprenderam na sexta série. Os demais aceitaram sem questionar, até mesmo porque esse fato já havia sido mencionado quando tratamos a revisão das operações com números inteiros (aula do dia 17/04). Ficamos, então, com $a+7-b-7=a+7+(-b)+(-7)=a+(-b)+[7+(-7)]=a-b=5$, onde as igualdades são justificadas pelas propriedades da adição de números inteiros e pelo fato que a diferença das idades dos dois irmãos é de 5 anos.

Aproveitei aqui para mencionar outra definição de oposto, diferente da que havíamos dado na aula de revisão sobre números inteiros (dia 17/04): “Dois números são opostos se sua soma é igual a zero” e coloquei alguns exemplos numéricos.

[12] Novamente aparece aqui a delicada questão do significado do sinal “menos”, a qual já mencionamos na aula do dia 17/04/08: ora pode significar uma subtração, ora pode significar o sinal de um número negativo, ora pode significar o oposto de um número.

Na questão (5) apenas destaquei o item (c) no qual poderíamos escrever o resultado final como $3 \cdot x \cdot 4 \cdot y = 12 \cdot x \cdot y$, utilizando a comutatividade e a associatividade da multiplicação de números inteiros.

Das próximas duas questões, resolvi apenas a questão (6), explicando aos alunos o que estava sendo solicitado em cada item. O item (c), em particular, foi resolvido passo a passo, refazendo-se todos os cálculos que anteriormente foram feitos com letras. Embora, quando do trabalho com estas questões em aula, eu tivesse feito um exemplo completo, os alunos manifestaram-se com: "Ah! Era isso que era pra fazer!"

Reescrevi a questão (8) da seguinte maneira: Responda com V para verdadeiro ou com F para falso, justificando sua resposta.

a. Seja *x* um número negativo. Então $\boldsymbol{x}^{par}$ é

   ( ) sempre negativo.

   ( ) sempre positivo.

   ( ) às vezes negativo, às vezes positivo.

b. Seja *x* um número negativo. Então $\boldsymbol{x}^{ímpar}$ é

   ( ) sempre positivo.

   ( ) sempre negativo.

   ( ) às vezes negativo, às vezes positivo.

A primeira afirmação da questão (a) é falsa e incentivei os alunos a encontrarem um contraexemplo para justificá-la. Mas aqui apareceu uma dificuldade: qual é o significado das expressões $(-7)^2$ e -7^2. Questionei qual das duas maneiras é a correta, no presente caso. Houve alunos que responderam que a primeira forma é correta, outros responderam que é a segunda forma e outros, ainda, responderam que as duas formas davam o mesmo resultado. Expliquei à turma que a primeira forma está correta para o que gostaríamos de calcular, pois queremos que o número negativo seja elevado ao quadrado e não apenas o número 7. Também mencionei que -7^2 significa o oposto de 7^2. Então, quando quisermos calcular uma potência de base negativa, para que não haja ambiguidade, colocamos a base entre parênteses.

A segunda afirmação da questão (a) é verdadeira e solicitei que os alunos dessem exemplos para tentar conjecturar essa verdade. Houve algum aluno que respondeu que a afirmação era verdadeira, pois todos os exemplos resultavam em positivo. Então, para minha satisfação, alguns alunos manifestaram-se dizendo que exemplos não justificavam e que precisávamos de uma maneira para mostrar que era sempre verdade, pois não podemos dar infinitos exemplos.

No entanto, os alunos não conseguiram um argumento que justificasse a veracidade da afirmação. Para não demorarmos muito, acabei fornecendo aos alunos algo parecido com seguinte argumento: “Imaginem um número negativo, mas não pensem em um número em particular, só o que vocês sabem desse número é que ele é negativo. Sabemos que negativo multiplicado com negativo resulta em positivo. Agora, se o expoente é par isso significa que temos um número par de fatores negativos, pois a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais e o expoente indica quantas vezes este fator se repete. Já que o expoente é um número par, se formarmos duplas de fatores negativos não vai sobrar nenhum fator sem dupla. Assim, teremos duplas de negativos sendo multiplicados e o produto de cada uma destas duplas vai ser positivo. No final, teremos só positivos que multiplicados vai resultar em positivo”. Esse argumento foi explicado bem detalhadamente, sendo que algumas passagens foram repetidas mais de uma vez. A maioria dos alunos se deu por satisfeita com a justificativa.

A falsidade da terceira afirmação foi facilmente justificada pelos alunos, pois se o resultado é sempre positivo, não pode ser às vezes negativo.

A resolução da questão (b) correu de forma semelhante à anterior. Para justificar a veracidade da segunda afirmação recorri ao mesmo argumento que antes, com a diferença de que agora, sendo ímpar o expoente, sobraria um fator negativo sem dupla. Isso faria com que, no final, o resultado fosse negativo.

Para a questão (9), comecei refazendo os cálculos que haviam sido dados na questão. Pedi aos alunos outros exemplos de sequências de três números consecutivos e também calculamos com estes exemplos. Respondendo já a primeira pergunta, indaguei aos alunos se aquele padrão valia sempre: “Quando tivermos uma sequência de três números inteiros consecutivos, a metade da soma do primeiro termo com o terceiro termo resulta sempre no termo do meio. Os alunos agora haviam entendido a pergunta, pois o enunciado “intua um padrão” não havia sido compreendido por eles quando da resolução da atividade.

Perguntei como poderíamos representar três números consecutivos. Alguns alunos responderam “usando letras!” e um deles exemplificou com as letras a, b e c. Concordei com o aluno, mas questionei-o sobre como aquela representação iria ajudar, já que teríamos que encontrar $\frac{a+c}{2}=b$, ou seja, como ele poderia me garantir que a metade da soma de a com c seria igual a b. Este aluno e outros concordaram que aquela forma de representar não ajudava na justificativa. Um aluno sugeriu representar um dos números com a letra n. Perguntei como poderíamos representar os dois outros números da sequência. Como demoraram a responder, intervim salientando que, o primeiro número era o antecessor do número do meio e o terceiro número era o sucessor do número do meio. O aluno que deu a ideia de representar um dos números com a letra n completou: "Então é $n-1$, n e $n+1$".

Com esta representação, calculamos $\frac{n-1+n+1}{2}=\frac{2\cdot n}{2}=n$ e concluí: "Portanto, é verdade que, quando tivermos uma sequência de três números inteiros consecutivos, a metade da soma do primeiro termo com o terceiro termo resulta sempre no termo do meio". Aproveitei para mostrar aos alunos que, se utilizássemos outra representação para uma sequência de três números consecutivos, por exemplo, n, $n+1$ e $n+2$, ainda assim, o encontraríamos como resultado o termo do meio, só que os cálculos ficariam um pouco mais complicados, pois teríamos o seguinte cálculo:

$$\frac{n+n+2}{2}=\frac{2\cdot n+2}{2}=\frac{2\cdot n}{2}+\frac{2}{2}=n+1.$$

Para responder a questão (10), recordei aos alunos que o símbolo "$|\quad|$" indicava o módulo de um número e que o módulo havia sido definido, na reta numérica, como a distância do número considerado até o zero. Esbocei uma reta numérica marcando nela números inteiros de -8 até 8.

Comecei perguntando qual ou quais são os números inteiros que estão exatamente a cinco unidades de distância do zero. Os alunos contaram, a partir do zero, cinco unidades para a direita e responderam que o número procurado era o número 5. Perguntei se só havia números à direita do zero e os alunos se deram conta de que podiam contar também cinco unidades à esquerda do zero. Concluímos que há dois números que estão a cinco unidades de distância do zero: são o número 5 e o número -5, ou seja, se $x=5$ ou $x=-5$ então $|x|=5$.

Continuando, falei aos alunos que a expressão $|\boldsymbol{x}|<5$ significava os números que estão a uma distância menor do que cinco unidades a partir do zero. Novamente, os alunos contaram para a direita e para a esquerda todos os números x tais que $|\boldsymbol{x}| < 5$ e escrevi no quadro, com vários alunos me acompanhando oralmente, que os números inteiros x tais que $|\boldsymbol{x}| < 5$ são $-4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ e 4. O número zero não foi mencionado pelos alunos, então eu o incluí na resposta.

Por último, também traduzi a expressão $|\boldsymbol{x}| > 5$ como os números que estão a uma distância maior do que cinco unidades a partir do zero. A resposta final ficou como os números inteiros x tais que $|\boldsymbol{x}| > 5$ são $\pm 6, \pm 7, \pm 8, \cdots$.

Minha avaliação da aula:

Considerei que a aula foi bem sucedida quanto aos objetivos pretendidos. Além de termos esclarecido diversos conceitos que não haviam sido bem entendidos, vários alunos que haviam errado as respostas na atividade manifestaram-se afirmando que haviam compreendido o erro.

A questão (8) foi reescrita da seguinte maneira: Responda com V para verdadeiro ou com F para falso, justificando sua resposta.

c. Seja x um número negativo. Então $\boldsymbol{x}^{par}$ é
   ( ) sempre negativo.
   ( ) sempre positivo.
   ( ) às vezes negativo, às vezes positivo.
d. Seja x um número negativo. Então $\boldsymbol{x}^{ímpar}$ é
   ( ) sempre positivo.
   ( ) sempre negativo.
   ( ) às vezes negativo, às vezes positivo.

Nessa questão (8), podemos dar outras justificativas para a potência de números inteiros negativos se os alunos já conhecem algumas propriedades da potenciação e se já têm alguma familiaridade com o uso de letras para representar números genericamente. Por exemplo, no caso x^{par}, onde x é um número inteiro negativo, podemos representar um número par como $2 \cdot n$, onde n é um número natural. Pelas propriedades das potências de expoente natural, $x^{2 \cdot n} = \left(x^2\right)^n$. É fácil mostrar que x^2 é sempre positivo, pois é um produto do tipo negativo vezes negativo. Ficamos afinal com um número inteiro positivo elevado a um expoente natural, o qual já se sabe que é positivo. No caso de $x^{\text{ímpar}}$, onde x é negativo, podemos proceder analogamente, representando um número ímpar por $2 \cdot n + 1$. Pelas propriedades das potências de expoente natural, $x^{2 \cdot n+1} = x^{2 \cdot n} \cdot x^1 = \left(x^2\right)^n \cdot x$. Utilizando o resultado anterior, sabemos que $\left(x^2\right)^n$ é sempre positivo. Ao multiplicarmos um positivo por um negativo resulta em um número negativo.

Na questão (9), um aluno representou três números consecutivos utilizando as letras *a*, *b* e *c*. A princípio, pensei que o aluno estava imaginando três **letras** consecutivas do alfabeto, como se letras consecutivas representassem necessariamente números consecutivos. Depois, porém, percebi que ele não estava pensando em letras consecutivas, pois ele afirmou que poderia ser quaisquer letras, por exemplo, *m*, *x* e *s*. Contudo, não posso garantir que algum aluno não tenha pensado em três letras consecutivas, pois já ocorreu de um aluno afirmar que o antecessor do número *n* é o *m* e, quando perguntado qual seria então o antecessor do número *a*, o aluno não soube responder, sugerindo que estava pensando em letras consecutivas para representar números consecutivos.

Ainda na questão (9), onde utilizei os cálculos $\frac{n+n+2}{2} = \frac{2 \cdot n + 2}{2} = \frac{2 \cdot n}{2} + \frac{2}{2} = n + 1$, para justificar o padrão intuído, há a possibilidade de retomá-la, como aplicação da fatoração de expressões algébricas, assim: $\frac{n+n+2}{2} = \frac{2 \cdot n + 2}{2} = \frac{2 \cdot (n+1)}{2} = n + 1$.

4.2.23 Dia 20/05 – Avaliação Sobre Números Inteiros

Objetivos:

- Avaliar individualmente os alunos em relação a conceitos, escrita matemática, uso das propriedades, argumentação e comunicação matemática, envolvendo números inteiros.
- Identificar assuntos que necessitam uma retomada antes de iniciarmos com o conteúdo de expressões algébricas propriamente ditas.

Roteiro de questões:

1. Descreva **duas** características que encontramos nos números inteiros e que não encontramos nos números naturais.

2. Seja a adição de dois números inteiros ***x*** e ***y***.

a. Como representamos a **soma** destes dois números, nesta ordem?

b. Somando **5** à primeira parcela, ***x***, e somando **7** à segunda parcela, ***y***, como podemos representar cada nova parcela?

c. Adicione as duas expressões obtidas no item anterior, utilizando as propriedades comutativa e associativa da adição em $\mathbb{Z}$.

d. Qual é o resultado obtido no item anterior, sabendo que a soma de ***x*** e ***y*** é –9?

3. Considere a multiplicação de dois números inteiros ***m*** e ***n***.

a. Como podemos representar o produto destes dois números, nesta ordem?

b. Somando **10** ao segundo fator, ***n***, como podemos representar este novo fator?

c. Obtenha o produto entre ***m*** e o novo fator obtido no item (b), utilizando a propriedade distributiva.

d. Obtenha a diferença entre a expressão obtida no item (c) e a expressão obtida no item (a). Faça todos os cálculos possíveis.

e. Obtenha o produto do triplo de ***m*** com o dobro de ***n***, utilizando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação.

f. Qual é o resultado obtido no item (e), se o produto de ***m*** e ***n*** é igual a –7?

4. Considere um número inteiro ***u***.

a. Represente o sucessor do dobro de ***u*** e o antecessor do dobro de ***u***.

b. Verifique que a diferença entre estes dois números, tomados na mesma ordem acima, é **sempre** igual a 2.

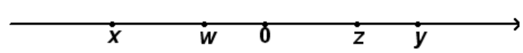
c. Represente o dobro do sucessor de ***u*** e o dobro do antecessor de ***u***.

d. Verifique que a diferença entre estes dois números, tomados na mesma ordem acima, é **sempre** igual a 4.

5. Quantos e quais são os números inteiros ***x*** tais que:

a. $|\,x\,| = 3$ b. $|\,x\,| < 3$ c. $|\,x\,| > 3$ d. $|\,x\,| = -3$

6. Abaixo estão representados alguns números inteiros na reta numérica. Obs.: A distância de ***x*** até **0** é igual a distância de ***y*** até **0**:



Responda com V se a afirmação for verdadeira ou com F se for falsa, justificando sua resposta:

a. ( ) ***x*** é um número positivo.

b. ( ) **–** ***x*** é um número positivo.

c. ( ) ***y*** é menor que zero.

d. ( ) ***w*** é menor que ***x***.

e. ( ) ***x*** e ***y*** são opostos.

f. ( ) podemos escrever **-*x*** = ***y*** ou **-*y*** = ***x***.

g. ( ) ***y* + *z*** é maior do que ***x* + *w***.

7. Responda com V se a afirmação for verdadeira ou com F se for falsa, justificando sua resposta:

a. ( ) Dados dois números inteiros distintos negativos, o maior deles é o que tem o menor módulo.

b. ( ) Um número inteiro e seu oposto têm o mesmo módulo.

c. ( ) Todo número inteiro tem antecessor.

Procedimentos:

Avaliação escrita individual sem consulta a ser realizada em dois períodos de 50 minutos.

Expectativas:

Espera-se um bom desempenho da maior parte dos alunos, haja vista todo o trabalho realizado desde o inicio do ano letivo e a participação da maioria dos alunos da turma nas atividades de sala de aula.

Análise da avaliação:

Participaram desta avaliação 20 alunos.

A questão (1) tinha como objetivo apenas verificar se os alunos conseguiriam diferenciar minimamente o conjunto dos números naturais do conjunto dos números inteiros, apresentando duas características específicas do conjunto dos números inteiros que não encontramos no conjunto dos números naturais. Considerei corretas as respostas de 6 alunos (30%), parcialmente corretas as respostas de 5 alunos (25%) e incorretas ou sem solução as respostas de 9 alunos (45%).

As características mais mencionadas, tanto pelos alunos que acertaram totalmente quanto pelos alunos que acertaram parcialmente foram que no conjunto dos números inteiros temos positivos e negativos, já no conjunto dos números naturais só temos positivos e que todos os números inteiros têm antecessor, mas o zero não tem antecessor no conjunto dos números naturais. Ainda como característica, um aluno mencionou que temos a noção de oposto no conjunto dos números inteiros, noção esta não encontrada no conjunto dos números naturais. Outro aluno, ainda, mencionou que com os números inteiros podemos subtrair. Nesta resposta, faltou a palavra "sempre", pois no conjunto dos números naturais também podemos subtrair, só que não sempre. Mesmo assim considerei correta sua resposta, pois entendi que o aluno quis dizer que sempre podemos subtrair números inteiros e o resultado será ainda um número inteiro. Houve também um aluno que deu a resposta: "tem mais operações para fazer". Provavelmente este aluno estava se referindo à possibilidade de sempre podermos subtrair números inteiros. Porém, não considerei como correta, pois sua resposta ficou muito vaga.

Como incorreta, menciono as respostas de alunos que exibiram exemplos de números inteiros. Destaco o número de alunos (5 alunos - 25%) que deixaram de responder esta questão por não a terem entendido ou por não conseguirem, de fato, diferenciar minimamente os dois conjuntos.

A questão (2) pretendeu ser uma retomada da questão (3) da prova do dia 15/04, a qual teve um baixo índice de acertos, tendo por objetivos:

- Verificar se os alunos eram capazes de escrever uma sentença matemática utilizando letras para representar genericamente números inteiros.
- Verificar se os alunos memorizaram os nomes dos termos de uma adição.
- Observar se os alunos justificariam a soma das duas novas parcelas através das propriedades da adição (comutativa e associativa).
- Verificar se, no item (d), os alunos substituiriam corretamente o valor de $x - y$ na expressão obtida no item (c).

Dos 20 alunos considerados na avaliação, 17 alunos (85%) responderam corretamente o item (a) desta questão, uma melhora significativa em relação à avaliação anterior, onde apenas 10 alunos (47,62%) entre 21 responderam corretamente. Apenas 2 alunos (10%) responderam incorretamente e um aluno (5%) acertou parcialmente. As respostas incorretas foram "$x \cdot y$" e "$xy = xy, \quad x \cdot x = x^2$", revelando uma confusão entre o significado de soma e produto. A resposta parcialmente correta foi "$x + y = \frac{x}{y}$". Considerei parcialmente correta, pois o aluno escreveu corretamente a expressão para a soma de x e y, mas depois escreveu uma expressão sem sentido. Não compreendi porque ele escreveu um quociente.

O item (b) desta questão foi respondido corretamente por 10 alunos (50%), um número ainda pequeno, mas já bem superior ao número de 2 alunos (9,52%) que acertaram questão análoga da prova anterior. A outra metade da turma errou a resposta. Nenhum aluno deixou de responder. Dos erros, o mais freqüente foi escrever as novas expressões como "$5x$ e $7y$". Estas expressões foram escritas até mesmo por alunos que acertaram o item (a). Aqui os alunos dão mostra de confundir soma e produto e de não relacionar a palavra parcela (que é explicitada na questão) com a adição.

Apenas 2 alunos (9,52%) acertaram completamente o item (c) (um aluno a mais que na avaliação do dia 15/05 em questão análoga), um número muito pequeno, considerando que 10 alunos haviam acertado o item anterior e considerando as atividades realizadas em aula. A resposta dada por estes alunos foi "$x+5+y+7=x+y+12$", considerada correta apesar de não explicitarem o uso da comutatividade e da associatividade. Dos demais, 15 alunos (75%) erraram ou não responderam (8 alunos erraram e 7 não responderam). Das respostas erradas, quero destacar a de um aluno que respondeu da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&(x+5)\cdot(y+7)\\
&x\cdot y+5\cdot 7\\
&x\cdot y+35\\
&xy+35
\end{aligned}
$$

Este aluno confundiu a soma com o produto e ainda aplicou incorretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Houve também alunos que incluíram frações em suas respostas e outros que tentaram justificar as propriedades da adição, inclusive de números racionais. Certamente estes alunos procederam assim porque o enunciado da questão mencionava a utilização das propriedades para obter uma expressão final para a soma. Então, os alunos acabaram confundindo a utilização com a exemplificação ou justificativa das propriedades. Ou seja, a minha tentativa de tornar o enunciado mais claro e objetivo terminou atrapalhando os alunos. Houve ainda 3 alunos (15%) que responderam apenas com a expressão "$x+5+y+7$". Como não atinaram em adicionar 5 e 7, considerei parcialmente correta sua solução.

Finalizando a questão (2), o item (d) foi corretamente respondido por apenas 1 aluno (5%), ainda assim, este aluno apenas colocou o resultado numérico final. Os demais erraram (5 alunos) ou não responderam (14 alunos). O número de alunos que errou ou não respondeu foi muito grande e mostra o pouco entendimento da turma sobre o assunto *avaliação* (do inglês *evaluate*) tratado na questão.

A questão (3) procurou, no item (e), retomar os objetivos da questão (4) da prova anterior. Como da outra vez, resolvi colocar letras diferentes de *x* e *y*, a fim de familiarizar os alunos com o uso de quaisquer letras para representar números de maneira genérica. Além disso, esta questão objetivou:

- Verificar o conhecimento dos alunos quanto aos termos da adição, multiplicação e subtração de inteiros.
- Observar se os alunos aplicariam corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de inteiros.
- Verificar se os alunos substituiriam corretamente o valor de $x \cdot y$ na expressão obtida no item (e).

O item (a) desta questão foi corretamente respondido por 13 alunos (65%). Seis alunos (30%) erraram ou não responderam. Um aluno (5%) acertou parcialmente. O erro mais comum foi o de escrever o produto de *m* e *n* como "$m+n$". Um aluno escreveu a expressão sem sentido "$(mn)^2$" e outro escreveu uma expressão como em uma divisão pelo algoritmo tradicional, usando o símbolo $\llcorner\!\_$ que identifica o divisor.

Dos alunos que acertaram o item (a), um escreveu "$M \cdot N$", utilizando letras maiúsculas. Este aluno já havia sido orientado para manter os símbolos como haviam sido apresentados, pois trocar as letras minúsculas por maiúsculas poderia causar confusão em algum problema. O aluno que acertou parcialmente escreveu $m \cdot n = \frac{m}{n}$, como já havia feito no caso da soma. Mais tarde, quando questionado por que havia escrito a fração, o aluno não respondeu, dando de ombros ao professor.

O item (b) apenas pedia para representar a soma de *n* com 10. Este item não pôde ser desvinculado do próximo item, (c), pois houve alunos que escreveram incorretamente a expressão para a soma no item (b), mas, depois, escreveram corretamente a expressão do produto de *m* por $n+10$. Os alunos que assim procederam tiveram sua resposta para o item

(b) considerada como correta. Doze alunos (60%) acertaram a questão, respondendo com a expressão "$n+10$" ou "$10+n$". Sete alunos (35%) tiveram suas respostas consideradas incorretas e um aluno (5%) acertou parcialmente. Uma resposta considerada incorreta foi a seguinte: "podemos representar este novo fator como parcela ou soma de dois números". Outro erro foi o aluno ter respondido com a expressão "$n \cdot 10$", evidenciando confusão entre soma e produto. Mais um exemplo de resposta incorreta foi do aluno que novamente escreveu como no algoritmo tradicional da divisão, com m como dividendo, n como divisor e 10 como quociente. Não tenho ideia do raciocínio do aluno, pois este é um dos alunos que nunca participam da aula, nem mesmo quando questionado em separado, sem que os colegas percebam. A resposta que consideramos parcialmente correta foi a seguinte: "$10n$ e $n+10$". É provável que o aluno quisesse aqui trocar a ordem das parcelas, mas se enganou escrevendo 10 e n justapostos (creio que aqui o aluno nem pensou no produto, visto que eu vinha me esforçando para não escrever, por enquanto, xy, por exemplo, como representação para o produto).

Quanto ao item (c), apenas 6 alunos (30%) acertaram, aplicando corretamente a propriedade distributiva. Oito alunos (40%) erraram ou deixaram de responder. Os 6 alunos restantes (30%) acertaram parcialmente, tendo representado corretamente o produto, mas não aplicando a propriedade distributiva, ou tendo aplicado corretamente a propriedade distributiva, mas depois escrevendo outras expressões incorretas e desnecessárias. Das respostas incorretas, é interessante a de um aluno que incluiu a letra b na resposta, provavelmente se atrapalhando com o enunciado da questão que pedia para utilizar o resultado do item (b). Sua resposta foi a seguinte: "$m10+b10=m\cdot b+10\cdot 10$".

Obviamente, o item (d) teve baixíssimo índice de acerto. Apenas 2 alunos (10%) acertaram a resposta para este item. Um destes alunos raciocinou corretamente, mas sua escrita, além de utilizar letras maiúsculas, apresenta imprecisões. Sua resposta foi: "$M \cdot N - M \cdot N + 10M = MN - MN = 0 + 10M = 10M$. Um aluno (5%) acertou parcialmente, tendo respondido:

$$\begin{gathered} m\cdot(n+10)-m\cdot n \\ m\cdot n+m\cdot 10-m\cdot n \\ 10 \end{gathered}$$

Parece que o aluno simplesmente esqueceu-se de escrever o m multiplicando 10, mas também pode ser que o aluno tenha imaginado que todas as letras m se anulavam. Dezessete alunos (85%) erraram ou não responderam o item (d) (9 erraram e 8 não responderam). Entre as respostas erradas está a de um aluno que não relacionou, até este momento, o termo diferença com o resultado da subtração, tendo dado a seguinte resposta: "a diferença é que no item *A* está multiplicando e no *C* está somando. Houve uma variedade de expressões dadas como resposta a esse item, por exemplo, "$m \cdot (n - 10) = m \cdot n - m \cdot 10$", onde o aluno interpretou que deveria calcular a diferença entre n e 10 e depois multiplicar por m essa expressão. Curioso é que este mesmo aluno errou a distributividade na resolução do item (c), mas, agora, aplicou a propriedade corretamente. Destaca-se também que alguns dos alunos que erraram a resposta do item (d), ao menos foram coerentes com os resultados que haviam encontrado nos itens (a) e (c), por exemplo, um aluno escreveu: "$m10 + b10 + (mn)^2$". Ainda assim, onde deveria ter feito uma subtração, fez uma adição, provavelmente por não relacionar o termo diferença ao resultado da subtração.

O item (e) desta questão é muito parecido com a questão (4) da avaliação de 15/04. Há duas diferenças entre esta questão e aquela: aqui eu peço o produto do triplo de *m* com o dobro de *n*; lá eu havia solicitado o produto do dobro do primeiro fator (que era *m*) com o triplo do segundo fator (que era *n*), não explicitando qual seria o primeiro fator e qual seria o segundo fator. Novamente, nenhum aluno acertou esse item, conforme já havia ocorrido na prova anterior. Pelo enunciado de agora e por todo o trabalho feito após a avaliação anterior, eu tinha certeza de que os alunos iriam entender que era para eles escreverem $3 \cdot m \cdot 2 \cdot n = 6 \cdot m \cdot n$. No entanto, 15 alunos (75%) erraram ou não responderam e 5 alunos (25%) acertaram parcialmente. Entre os alunos que erraram a resposta, a que mais ocorreu foi "$3m + 2n$", confirmando a dificuldade que a turma tem com os nomes dos termos das operações. Pelo menos souberam expressar o triplo e o dobro de um número. Os alunos que acertaram parcialmente escreveram apenas "$3m \cdot 2n$", não percebendo que as propriedades permitiam que multiplicassem o número 3 e o número 2 para obter "$6 \cdot m \cdot n$". Aliás, mencionar a utilização das propriedades fez com que aparecesse a resposta "$3m \cdot 2n = 2n \cdot 3m$", como já havia ocorrido no caso da adição.

Pelo resultado anterior, não foi surpresa que nenhum aluno tenha acertado (nem mesmo parcialmente) a resposta do item (f) da questão (3). Treze alunos deixaram em branco e 7 alunos erraram sua resposta. Uma das respostas incorretas foi:

$$3 \cdot m + 2 \cdot n$$
$$m \cdot n + 3 \cdot 2$$
$$m \cdot n + 6$$
$$-7 + 6 =$$
$$-1$$

onde o aluno errou a manipulação simbólica, mas substituiu e calculou corretamente o resultado numérico, de acordo com sua resposta.

A questão (4) tinha por objetivos, nos itens (a) e (c), observar se os alunos apropriaram-se dos conceitos de sucessor e antecessor, além de verificar se saberiam escrever, em linguagem matemática, sentenças escritas em língua materna. Os itens (b) e (d) objetivavam verificar se os alunos saberiam calcular a diferença entre as duas expressões a fim de dar uma justificativa genérica para um resultado matemático (adiantando, portanto, o cálculo com expressões algébricas). Certamente, outros argumentos que justificassem as afirmações também seriam aceitos.

Dos 20 alunos que fizeram a avaliação, 7 alunos (35%) e 5 alunos (25%) responderam corretamente os itens (a) e (c) da questão (4), respectivamente, o que é muito pouco. Onze alunos (55%) e 15 alunos (75%) erraram ou não responderam, respectivamente, os itens (a) e (c). Ainda, houve 2 alunos (10%) que acertaram parcialmente o item (a), um deles respondendo com as expressões "$1+2u$" e "$1-2u$". Certamente, este aluno só acertou a primeira expressão porque a adição é comutativa, isto é, não parece que o aluno estivesse consciente da correção de sua resposta. O outro aluno que acertou parcialmente apresentou somente a expressão para o sucessor do dobro de *u*. Entre as respostas incorretas para o item (a), além de expressões que respondiam o item (c), apareceram as expressões "$2u$ e $-2u$", "$u+1$ e $u-1$" e a expressão sem sentido "$5+x=\frac{5}{x}$". Das respostas incorretas para o item (c), além daquelas que respondiam o item (a), apareceram as expressões como: "$2 \cdot u$ e $-2 \cdot u$". Houve alguns alunos que responderam corretamente, mas de maneira diferente do esperado, escreveram "$(u+1)\cdot 2$ e $(u-1)\cdot 2$". Somente 1 aluno (5%) acertou as respostas dos itens (b) e (d), ainda assim, com uma escrita não muito precisa. No item (b) o aluno respondeu com "$2u+1-2u-1=1-(-1)=2$". Geralmente, os alunos esquecem-se de colocar os parêntesis quando escrevem a subtração de uma expressão com mais de um termo. No item (d) sua resposta foi

“ $2(u+1)-2(u-1)=2\cdot u+2\cdot 1-2u-2\cdot 1=2\cdot 1+2\cdot 1=4$ ”.

Quinze alunos (75%) erraram ou não responderam o item (b) e 19 alunos (95%) erraram o item (d). Exemplos de respostas erradas para o item (b) são: “verifiquei e vi que é verdade mesmo” e “Não é sempre igual a 2”. Esta segunda resposta mostra que o aluno não compreendeu o enunciado da questão, o qual afirmava que o resultado era igual a 2. Para o item (d), destacamos como incorretas aquelas respostas que repetem a afirmação e, também, a seguinte resposta: “ $2u+2u=4$ e $-1+1=0$ ”. Ainda, houve 4 alunos (20%) que acertaram parcialmente o item (b), apresentando alguma escrita coerente, por exemplo: “ $(2u+1)-(2u-1)=3u-u=2u$ ”. Este aluno errou os cálculos algébricos, mas escreveu corretamente a diferença entre o sucessor do dobro de u e o antecessor do dobro de u.

Na questão (5) eram pedidas duas coisas: responder quantos e quais são os números inteiros que satisfaziam determinadas condições. O objetivo de perguntar quantos era para verificar se os alunos se dariam conta de que podemos ter infinitos números ou de que poderíamos ter uma impossibilidade, uma não-existência, como resposta. Além disso, a questão tinha por objetivo verificar a compreensão dos alunos quanto ao conceito de módulo de um número inteiro.

O índice de acertos nos quatro itens foi baixo. Acertaram o item (a), apenas 4 alunos (20%). Acertaram parcialmente o item (a), 7 alunos (35%). Erraram ou não responderam esse item, 9 alunos (45%). No item (b), houve 3 alunos (15%) que acertaram, 4 alunos (20%) que acertaram parcialmente e 13 alunos (65%) que não responderam ou que erraram suas respostas. O item (c) foi respondido corretamente por 4 alunos (20%). Dois alunos (10%) acertaram parcialmente e 14 alunos (70%) erraram ou deixaram em branco. Pior foi o item (d), o qual apenas 1 aluno (5%) acertou a questão e os 19 alunos restantes (95%) erraram ou não responderam, sendo que 9 alunos erraram e 10 alunos não responderam. Pouquíssimos alunos responderam quantos eram os inteiros que satisfazem cada uma das condições. Devido a isso, desconsiderei a pergunta “quantos” e considerei para efeito de correção, apenas as respostas para a pergunta “quais”. Um resultado tão ruim nesta questão reflete um pouco entendimento do conceito de módulo de um número inteiro. Mas, também pode ter contribuído para o péssimo resultado o uso dos símbolos $>$ e $<$, além do próprio símbolo para representar o módulo.

Um exemplo de resposta incorreta e que nos permite intuir que os símbolos para maior e menor não foram absorvidos pelos alunos é, para o item (b): “Deve ser os números maiores (acima) de 3”. Vários alunos responderam o item (d) apresentando números inteiros que satisfariam a condição $|x| = -3$. Isto mostra claramente o não entendimento dos alunos quanto ao conceito de módulo.

“São vários” foi a resposta de um aluno para o item (c), mostrando que o aluno não diferencia uma quantidade grande de números de uma infinidade de números. É importante ressaltar que, mesmo alunos que vinham tendo boa participação em aula, não conseguiram um bom desempenho nesta questão. Nas respostas consideradas parcialmente corretas os alunos geralmente não apresentavam todos os números que satisfaziam cada condição. No item (c), como não é possível apresentar todos os números, os alunos que não utilizaram as reticências para indicar que a lista de números era infinita, tiveram suas respostas consideradas parcialmente corretas. No caso do item (d) apenas um aluno respondeu que não existe número inteiro tal que $|x| = -3$.

A questão (6) trazia consigo diversos objetivos. Um deles era verificar se o aluno conseguiria comparar números inteiros representados de maneira genérica numa reta numérica. Também objetivava observar se os alunos haviam compreendido que o sinal de menos antes de uma letra que representa um número não significa, necessariamente, que este número é positivo. Resolvi incluir esta questão, pois, durante o trabalho com propriedades das operações com números inteiros, representei um número negativo genérico como $-a$. Só que naquele contexto havia ficado claro (pelo menos assim eu imaginei) que a letra a representava um número positivo. Outro objetivo importante foi o de verificar se o conceito e a notação de oposto foram absorvidos pelos alunos. Por último, o objetivo sempre presente de observar os argumentos dos alunos para as justificativas das respostas.

Dos sete itens envolvidos nesta questão, os itens (b) e (f) foram os que tiveram maior número de alunos que erraram ou não responderam: 11 alunos (55%) no item (b) e 10 alunos (50%) no item (f). Este número grande respostas incorretas para o item (b) evidencia que estes alunos não atingiram o objetivo de reconhecer que o símbolo $-x$ não representa necessariamente um número negativo. Interessante é que 8 alunos que erraram a resposta do item (b) acertaram o item (a). Este erro foi cometido inclusive por alunos que estavam se destacando positivamente durante as aulas. Em relação a isso, admito grande responsabilidade minha.

Quanto ao item (f), convém destacar que nenhum aluno acertou completamente a resposta. Em geral, os alunos ou não justificaram ou erraram a justificativa. Também é interessante observar que 7 alunos que erraram a resposta do item (f), responderam corretamente o item (e).

A questão (7) objetivava observar se os alunos haviam compreendido que, no caso de números negativos, quanto mais distante estiver do zero, na reta numérica, menor é o número. Também reforçava a verificação do conceito de módulo. Por último o sempre presente objetivo de observar a argumentação matemática dos alunos.

O item (a) dessa questão teve apenas 1 aluno (5%) acertando completamente. Sua justificativa foi: "pois o que tem menor módulo está *a* direita no caso dos negativos". Onze alunos (55%) acertaram parcialmente, sendo que 6 desses alunos apenas responderam com "V", sem justificar. Foi em número de 8 (40%) os alunos que erraram ou deixaram de responder o item (a). Entre as justificativas incorretas, tanto dos alunos que acertaram parcialmente quanto dos alunos que erraram encontramos exemplos particulares, repetição da afirmação e as respostas "pois não importa o módulo" e "falso porque o maior deles é o que tem o maior módulo".

O item (b) da questão (7) repetiu o que foi pedido no item (e) da questão (6) e, apesar de o item (6e) ter tido um bom índice de acertos totais ou parciais, ainda assim, apenas 3 alunos (15%) acertaram a resposta do item (b) da questão (7). Nove alunos (45%) erraram ou não responderam e 8 alunos (40%) acertaram parcialmente. Alguns exemplos de justificativas incorretas, além de exemplos particulares e repetição da afirmação, são: "$a = b$ e não *tem* o mesmo *modulo*", "2 o *modulo* dele é diferente", "Não porque não existe módulos", "sim pois são o mesmo numero" . Esta última resposta reflete a ideia de que um número negativo é um número natural com um sinal.

Apenas 4 alunos (20%) acertaram completamente o item (c). Nove (45%) alunos acertaram parcialmente e 7 alunos (35%) erraram ou deixaram em branco. Das justificativas erradas destacamos: "Não porque o zero não possui antecessor próprio", "o 1 não tem", "menos o zero" (este aluno respondeu com "V"), "Sim, Todos os números não importa seu conjunto Tem antecessor", "pois os inteiros são *unicos* que não tem antecessor" e "pois o 0 não tem oposto". Entre as justificativas que consideramos como corretas três destacam que "nos inteiros têm negativos", então "até o zero tem antecessor". Somente um aluno justificou a existência do antecessor de qualquer número inteiro pela subtração da unidade, o que é sempre possível de ser feito no conjunto dos números inteiros.

Minha avaliação da prova:

Inicialmente, acho oportuno relatar sobre o comportamento dos alunos antes e durante a realização da prova, pois isso pode explicar, em parte, o seu fraco desempenho. A turma é naturalmente agitada. Mas, no dia 20/05/08, a turma estava especialmente agitada. Normalmente, eu conseguia a atenção dos alunos depois de decorridos alguns poucos minutos da entrada em sala de aula. Porém, neste dia, a maioria dos alunos não se aquietou nem mesmo durante a realização da avaliação. Além disso, houve alguns alunos que finalizaram sua avaliação muito rapidamente e ficaram perturbando os demais, os quais também não estavam muito interessados na avaliação. Eu pedia insistentemente para que parassem de perturbar e que revisassem suas respostas, mas isso foi inútil. Poucos alunos pareciam estar realmente interessados em realizar a prova. Mesmo aqueles que apresentavam dificuldades e que não participavam durante as aulas não mostraram interesse em obter um bom resultado na avaliação.

Para mim, o resultado da prova foi uma decepção total. Eu esperava um desempenho melhor dos alunos, influenciado por sua maior e melhor participação nas atividades de sala de aula e durante as aulas expositivas. Observando a média aritmética das notas teóricas dos alunos (37,24) e comparando com a média da prova anterior (40,73), observamos uma queda de aproveitamento dos alunos nesta segunda avaliação. Desconsiderando-se os dois alunos já mencionados no início, observa-se que 11 alunos ficaram abaixo da média, a qual é bem menor do que cinqüenta por cento do escore total. Se exigíssemos o mínimo de 60% de aproveitamento, o número de alunos abaixo do mínimo aumentaria para 18 alunos.

Eu esperava que mais alunos acertassem o item (c) da questão (2), uma vez que no enunciado estava explicita minha intenção de que os alunos utilizassem as propriedades para encontrar a expressão final. No entanto, o enunciado acabou confundindo alguns alunos que, em vez de utilizar as propriedades tentaram justificá-las ou apenas ilustrá-las. Esta confusão pode ser devido à falta de interpretação do enunciado por parte dos alunos ou porque realmente o enunciado não está ainda muito claro e preciso.

Ainda sobre a questão (2), pensando melhor sobre o item (d), percebo que esta foi talvez a segunda vez que eu pedi uma questão desse tipo. A primeira vez foi no problema da soma das idades de dois irmãos daqui a 5 anos, sabendo que hoje suas idades somam 35 anos.

Só que no caso do problema das idades, os alunos já sabiam a resposta de antemão, pois primeiramente o problema havia sido resolvido sem o uso de letras.

Um cuidado que eu havia decidido tomar e que acabou me escapando foi o de não escrever questões encadeadas com muitos itens, como na questão (4). Os itens (e) e (f) poderiam ter sido colocados em uma nova questão, pois, exceto pelo fato de envolver uma multiplicação, eles são independentes dos demais.

Ainda há muita confusão sobre nomes dos termos das operações. Muitos alunos ainda confundem parcelas com fatores, soma com produto, e há explicitamente um aluno que ainda não relacionou a palavra diferença, no contexto de operações, com o resultado da subtração. Na minha opinião, os nomes corretos das operações (e dos seus termos, tanto quanto possível e cabível) devem ser introduzidos desde as séries iniciais, pois, depois de absorvidas expressões como “continha de mais”, “continha de vezes”, “continha de menos” e “continha de dividir”, dificilmente os alunos conseguem abandonar ou substituir estas expressões pelos seus nomes corretos, acarretando uma dificuldade de comunicação. Inclusive, já relatei o caso ocorrido nesta turma (mas não é exclusivo desta turma) de realizar uma adição simplesmente porque no enunciado do problema aparece a expressão “a mais”.

Sobre a resposta para o item (c) da questão (3), em que um aluno incluiu na expressão a letra *b* que se referia ao item (b) da mesma, convém relatar que eu só decidi me referir diretamente ao item (b), porque eu havia feito, em minhas outras turmas de sétima série, uma questão em que era necessário utilizar uma resposta obtida no item anterior, escrevendo no enunciado “utilizando a resposta do item anterior”, e houve alunos que utilizaram a resposta de outra questão anterior, que nada tinha em comum com o presente problema.

Vários alunos têm demonstrado, durante as aulas, dificuldades na tradução em linguagem matemática de sentenças escritas ou faladas em língua materna. Isso se refletiu no resultado da prova. Além disso, os alunos, em geral, mostraram não ter compreendido que o símbolo $-x$ pode representar um número positivo ou negativo, dependendo do valor de *x*. Estes dois assuntos também deverão ser retomados nas próximas aulas e verificados na próxima avaliação.

4.2.24 Dia 27/05 – Atividades Sobre Números Naturais, Inteiros e Racionais

Objetivos:

- Reforçar e revisar os conceitos trabalhados durante o trimestre e avaliados na prova de 20/05, com ênfase nos números inteiros.

Roteiro de questões:

- Comparando os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.

1. Complete com V se afirmação for verdadeira ou com F se a afirmação for falsa.

a. (   ) A subtração de dois números naturais sempre dá como resultado um número natural.

b. (   ) A divisão de dois números inteiros sempre dá como resultado um número inteiro, com resto igual a zero.

c. (   ) Todo número natural também é um número inteiro.

d. (   ) Todo número inteiro também é um número natural.

e. (   ) Todo número inteiro também é um número racional.

f. (   ) Todo número racional também é um número inteiro.

g. (   ) No conjunto dos números naturais sempre encontramos o oposto de algum número natural.

h. (   ) No conjunto dos números inteiros sempre encontramos o oposto de algum número inteiro.

i. (   ) O oposto do número racional $\frac{a}{b}$ é o número racional $-\frac{a}{b}$.

j. (   ) No conjunto dos números naturais sempre encontramos o antecessor e o sucessor de qualquer número natural.

k. (   ) No conjunto dos números inteiros sempre encontramos o sucessor e o antecessor de qualquer número inteiro.

l. (   ) Nos inteiros negativos, quanto mais próximo do zero maior é o número.

m. (   ) Nos inteiros negativos, quanto maior é o módulo, menor é o número.

n. (   ) Nos inteiros positivos, quanto mais perto do zero, menor é o número.

o. (   ) Nos inteiros positivos, quanto maior é o módulo, maior é o número.

p. (   ) As propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação valem apenas no conjunto dos números inteiros.

q. (   ) A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição não vale no conjunto dos números racionais.

r. ( ) Não é possível multiplicar números racionais.

s. ( ) É sempre possível subtrair nos números naturais.

- Nomes dos termos das operações:

Nos quadros, coloque o nome da operação, assim como os nomes dos termos de cada operação:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 5 \\ \hline -45 & 9 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Operação

$$\begin{array}{r} 254 \\ \times\ 4 \\ \hline 1016 \end{array}$$

Operação

$$\begin{array}{r} 235 \\ +\ 186 \\ \hline 421 \end{array}$$

Operação

$$\begin{array}{r} 235 \\ -\ 186 \\ \hline 49 \end{array}$$

Operação

- Escrita matemática, operações e argumentação matemática.

1. Associe as frases em nossa língua com a sua respectiva representação em linguagem matemática

(A) O sucessor do dobro de um número	( ) $2 \cdot x - 1$
(B) O antecessor do dobro de um número	( ) $4 \cdot x \cdot 2 \cdot y = 8 \cdot x \cdot y$
(C) O dobro do sucessor de um número	( ) $x - (x - 1) = x - x + 1 = 1$
(D) O dobro do antecessor de um número	( ) $x - y$
(E) A soma de dois números	( ) $2 \cdot (x + 1)$
(F) O produto do quádruplo de um número com o dobro de outro número	( ) $x \cdot (y + 5) = x \cdot y + x \cdot 5$
(G) A diferença entre dois números	( ) $x \cdot y$

(H) O produto de um número com a soma entre outro número e 5	( ) $2 \cdot x + 1$
(I) A diferença entre um número e seu antecessor	( ) $2 \cdot (x - 1)$
(J) O produto entre dois números	( ) $x + y$

2. Adição de números inteiros

a) O resultado de uma adição é chamado de **soma** ou total. Como podemos representar a **soma** dos números inteiros ***m*** e ***n***?

b) Se somarmos 10 ao ***m*** e 4 ao ***n***, como podemos representar a **soma** destes dois novos números?

c) Se o resultado da adição de ***m*** e ***n*** é igual a 20, qual será o resultado numérico da soma obtida na questão (b)?

3. **Subtração** de números inteiros

a) O resultado de uma subtração é chamado de **diferença** ou resto. Como podemos representar a **diferença** entre dois números inteiros ***m*** e ***n***, nesta mesma ordem (primeiro o ***m***, depois o ***n***)?

b) Adicione 6 ao ***m*** e adicione 5 ao ***n***. Após, faça a subtração destas duas novas expressões na mesma ordem em que elas aparecem. Como podemos representar essa subtração?

c) Se o resultado da subtração de ***m*** e ***n*** é igual a 1, qual será o resultado numérico da subtração obtida na questão (b)?

4. **Multiplicação** de números inteiros

a) O resultado de uma multiplicação é chamado de **produto**. Como podemos representar o **produto** dos números inteiros ***m*** e ***n***?

b) Se fizermos o quádruplo de ***m*** e o dobro de ***n***, como podemos representar o **produto** destes dois novos fatores?

c) Se o resultado da multiplicação de ***m*** e ***n*** é igual a -5, qual será o resultado numérico do produto obtido na questão (b)?

d) Adicione 5 ao fator ***n***. Após isso, multiplique ***m*** pelo novo fator. Aplique a propriedade distributiva.

e) Subtraia da expressão obtida no item (d) a expressão obtida no item (a).

f) Se o valor de ***m*** for igual a 3, qual será o resultado numérico obtido no item (e)? Esse resultado depende do valor numérico atribuído ao ***n***? Por quê?

5. Expresse em linguagem matemática as seguintes sentenças:

a) A soma de três números inteiros ***x***, ***y*** e ***z***.

b) A diferença entre o dobro do número ***x*** e o triplo do número ***y***.

c) O produto do número ***x*** com a soma entre o número ***y*** e 15.

d) A soma de três números consecutivos.

e) A diferença entre o cubo do número ***x*** e o quadrado do número ***y***.

f) A soma do número ***x*** com seu sucessor.

g) A diferença entre o produto do dobro de ***x*** com o triplo de ***y*** e o produto do triplo de ***x*** com o dobro de ***y***.

6. Responda com V para verdadeiro ou com F para falso, justificando cada resposta.

a. (   ) Se $|x| = 6$, então $x = 6$ ou $x = -6$.

b. (   ) Não existe número inteiro ***x*** tal que $|x| = -6$.

c. (   ) Ao somarmos três números inteiros consecutivos, obtemos como resultado o triplo de um número.

d. (   ) A diferença entre o sucessor e o antecessor de um número é **sempre** igual a 2.

e. (   ) Ao somarmos o sucessor e o antecessor do número ***x***, obtemos como resultado o dobro de ***x***.

f. (   ) Se ***x*** é um número inteiro negativo, então o quadrado de ***x*** **sempre** é negativo.

g. (   ) Se ***x*** é um número inteiro negativo, então o cubo de ***x*** **sempre** é negativo.

h. (   ) Se ***x*** é um número inteiro negativo, então ***–x*** também é um número inteiro negativo.

i. (   ) Considere dois números inteiros **negativos** ***x*** e ***y***, tais que o módulo de ***x*** é maior do que o módulo de ***y***. Nestas condições, podemos dizer que ***x*** é maior que ***y***.

j. (   ) Considere dois números inteiros **positivos** ***x*** e ***y***, tais que o módulo de ***x*** é maior do que o módulo de ***y***. Nestas condições, podemos dizer que ***x*** é maior que ***y***.

Procedimentos:

Aula de exercícios de revisão e reforço dos conceitos trabalhados durante o trimestre. Os alunos deverão trabalhar individualmente consultando seu próprio material, devendo encarar a atividade como uma avaliação. Pretende-se corrigir esta atividade, em aula expositiva, nos dias 03/06 e 04/06.

Expectativas:

Não se espera muito interesse por parte dos alunos na realização da atividade, tendo em vista que o professor titular da disciplina estará ausente neste dia.

Relato da aula:

Nesta aula não pude estar presente, deixando uma professora substituta (séries iniciais) com a incumbência de organizar o trabalho na turma. A professora relatou que os alunos não realizaram a tarefa mesmo sabendo que faria parte da avaliação do trimestre. Esse procedimento por parte dos alunos é comum nas ausências do professor titular da disciplina.

Minha avaliação da aula:

Nada a comentar, a não ser que já era esperado o desinteresse dos alunos na realização da atividade, devido à ausência do professor da disciplina.

4.2.25 Dia 28/05 – Correção da Prova de 20/05

Objetivos:

- Corrigir erros, retomar e reforçar os conceitos abordados na avaliação de 20/05, com vistas à recuperação.

Roteiro de questões:

As mesmas da avaliação de 20/05 (ver p. 199 a 201).

Procedimentos:

Aula expositiva em que o professor resolve no quadro as questões da prova, aproveitando para aprofundar ou abordar outras características dos conjuntos numéricos.

Expectativas:

Espera-se que os alunos participem com interesse, identificando e corrigindo os erros cometidos na prova.

Relato da aula:

Na primeira questão, lembrei aos alunos o conceito de números opostos, o qual definimos de duas maneiras distintas: primeiro como números diferentes, mas com módulos iguais (com exceção do zero); depois, como números cuja soma é zero. Perguntei aos alunos se o conjunto dos números naturais tem a noção de oposto e escrevi no quadro "$2+(\ )=0$" e pedi para que encontrassem um número natural para colocar entre os parênteses de modo ao cálculo resultar zero. Vários alunos disseram que não tinha como dar zero, só se fosse o – 2. Enfatizei que o -2 não é um número natural. Um aluno mencionou o zero, mas outros alunos o corrigiram dizendo que 2 mais zero é igual a 2 e não igual a zero.

Pedi que encontrassem um número natural de forma que $a+(\ )=0$, onde $a \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$. Os alunos deram exemplos particulares e concluíram que a soma é sempre maior do que zero. Argumentei que seja qual for o número natural escolhido para ser colocado nos parênteses, o resultado será sempre maior do que zero, pois estamos somando dois números positivos (pensando como números inteiros). O único número natural que poderíamos dizer possuir oposto, por qualquer das duas definições, é o zero.

Continuei falando sobre oposto de um número, afirmando que é sempre possível encontrar o oposto de um número inteiro, pois se considerarmos o número inteiro x (positivo ou negativo), seu oposto será $-x$, pois $x+(-x)=0$ e também $-x+x=0$. Avançando mais um pouco, afirmei que no conjunto dos números racionais também existe o oposto de qualquer número, pois considerando a e b dois números inteiros com $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ representa um número racional e $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a+(-a)}{b}=\frac{0}{b}=0$.

Ainda sobre a questão (1) da prova, comentei que no conjunto dos números naturais só não é possível determinar o antecessor do zero, bastando subtrair 1 de qualquer número natural diferente de zero. Já, no conjunto dos inteiros, é sempre possível determinar o antecessor de qualquer número, pois a subtração é sempre possível neste conjunto. Em particular, subtraindo 1 de qualquer número inteiro, o resultado continua sendo um número inteiro. Quanto ao sucessor, relembrei que ele sempre existe nos naturais e nos inteiros, pois a ação de somar 1 sempre é possível nesses conjuntos.

Como ninguém perguntou sobre o antecessor e o sucessor de um número racional, mencionei que não temos essa noção no conjunto dos números racionais. Afirmei que é possível garantir que entre os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{a}{b}+1$ existem infinitos números racionais. Não era meu objetivo aprofundar esse fato, mas dei como exemplo o seguinte caso: 1 é um número racional, pois pode ser escrito como a fração $\frac{1}{1}$. O número $1+1=2$ também é racional, pois pode ser escrito como a fração $\frac{2}{1}$. Mas, estabelecendo como universo o conjunto dos números racionais, o número 2 não é o sucessor de 1, pois temos, por exemplo, os números racionais 1,1 e 1,9 que vêm antes do número racional 2.

Na questão (2) destaquei o uso das propriedades da adição que permitem efetuarmos a adição mudando a ordem das parcelas ou agrupando-as como desejarmos, ficando com $(x+5)+(7+y)=x+y+12=-9+12=3$.

Para a questão (3), itens (e) e (f), dei um exemplo parecido, novamente enfatizando o uso das propriedades a fim de se chegar a uma resposta final, onde os números conhecidos são multiplicados e a multiplicação das letras só fica indicada até que se substitua pelo valor dado no problema.

Resolvi algebricamente a questão (4), mostrando como operar com as expressões envolvendo letras, destacando o uso das propriedades e alertando para o uso dos parênteses. Alguns alunos perceberam seus erros e comentaram que não era difícil a questão.

A questão (5) foi retomada de forma semelhante ao que havia sido feito na aula do dia 15/05, utilizando a reta numérica para encontrarmos os números inteiros que satisfaziam cada item.

Ao tratar a questão (6) da prova, reforcei a ideia de que na reta numérica se convenciona o sentido de crescimento dos números da esquerda para a direita, se a reta estiver na horizontal, e de baixo para cima, se estiver na vertical. Assim, numa reta numérica horizontal, o número que está à direita é sempre maior do que o número que está à esquerda. Da mesma forma, o número que está acima é sempre maior do que o número que está abaixo, se a reta estiver na vertical.

Minha avaliação da aula:

Nesta aula não dei muita oportunidade para a participação dos alunos. Ainda assim, alguns comentavam ou respondiam quando eu fazia alguma pergunta. Pude ouvir comentários deles dizendo uns para os outros “Viu como era fácil!” ou “Ah! Agora entendi!”, referindo-se à utilização das propriedades para justificar os passos nos cálculos envolvendo expressões com letras.

Seria interessante ter continuado a tratar com a turma sobre a densidade do conjunto dos números racionais. Porém, como não era objetivo da aula, achei melhor deixar para outra oportunidade. Agora acho que poderia ter dado mais um exemplo, onde os números trabalhados não fossem inteiros para visualizar por que não temos as noções de sucessor e de antecessor no conjunto dos números racionais. Se tiver oportunidade, trabalharei esse conceito na oitava série do próximo ano.

4.2.26 Dias 03/06 e 04/06 – Revisão

Objetivos:

- Retomar conteúdos trabalhados durante o trimestre com vistas à prova de recuperação a ser realizada no dia 05/06.

Roteiro de questões:

As mesmas da aula do dia 27/05/2008 (ver p. 213 a 216).

Procedimentos:

Aula expositiva de correção de exercícios com a participação dos alunos.

Expectativas:

Espera-se que os alunos acompanhem a aula com interesse e participem da mesma, tendo em vista o objetivo de reforço e revisão dos conteúdos que serão avaliados na prova do dia 05/06/2008.

Relato das aulas dos dias 03 e 04/06:

Nestas aulas, a participação dos alunos foi menos intensa do que as demais aulas dedicadas ao período de familiarização ao pensamento genérico. Sua participação se restringiu em pedir para eu resolver algumas questões, as quais eles simplesmente diziam não terem entendido.

Percebi também alguma dificuldade dos alunos quanto à noção de inclusão de conjuntos, quando estes respondiam que todo número inteiro também é natural e todo número racional também é inteiro.

Em geral, os alunos responderam bem as questões de escrita matemática quando lhes foram dadas as alternativas. Ainda assim, confundiram sentenças do tipo “o dobro do sucessor" e "o sucessor do dobro". O resultado piorou, e muito, quando não havia alternativas de respostas em que se apoiar.

Minha avaliação das aulas:

Como últimas aulas do trimestre e repassando tudo o que foi trabalhado até agora, considero que a participação menor dos alunos nestas duas aulas foi normal. Confesso que eu já estava também bastante cansado de trabalhar aqueles assuntos e achei mais fácil simplesmente resolver as questões que os alunos solicitavam, as quais na maior parte conferiam com as dificuldades que eu já havia observado. Em última análise, o importante neste momento para os alunos era tirar dúvidas específicas a fim de ter um bom desempenho na prova de recuperação.

4.2.27 Dia 05/06 – Avaliação de Recuperação (números naturais, inteiros e racionais)

Objetivos:

- Dar uma oportunidade de os alunos melhorarem seu desempenho em uma avaliação individual e sem consulta.
- Observar se os alunos conseguem obter um melhor desempenho em relação ao apresentado nas provas anteriores (dias 15/04 e 20/05).

Roteiro de questões:

1) Associe cada frase a uma das possíveis escritas matemáticas:

(A) A soma de dois números.	( ) $m+1+m-1$
(B) A diferença de dois números.	( ) m^3
(C) O produto de dois números.	( ) $m+n$
(D) A soma do sucessor com o antecessor de um número.	( ) $m+1-(m-1)$
(E) A diferença entre o sucessor e o antecessor de um número.	( ) m^2
(F) O cubo de um número.	( ) $m-n$
(G) O quadrado de um número.	( ) $m \cdot n$

2) Sabemos que a **adição** possui a propriedade comutativa, isto é, se representarmos dois números por ***a*** e ***b***, temos que ***a* + *b* = *b* + *a***. Pergunta-se: a **subtração** possui a propriedade comutativa? Em outras palavras, **sempre** teremos que ***a* – *b* = *b* – *a***? **Justifique** sua resposta.

3)

(a) Sem efetuar a **subtração**, como podemos representar a **diferença** entre **7** e **12**, nesta ordem? E a **diferença** entre **– 6** e **8**, nesta ordem?

(b) Como podemos representar a **diferença** entre dois números ***x*** e ***y***, nesta ordem?

(c) Qual será o resultado numérico da expressão $\boldsymbol{x - y + 12}$, se soubermos que a **diferença** entre ***x*** e ***y***, nesta ordem, é igual a **4**?

4)

(a) Sem efetuar a **adição**, como podemos representar a **soma** de **–7** com **3**? E a **soma** de **9** com **6**?

(b) Como podemos representar a **soma** do número ***x*** com **2**? E a **soma** do número ***y*** com **8**?

(c) Como podemos representar a **soma** de dois números ***x*** e ***y***?

(d) **Adicione** as duas expressões obtidas no item (b) desta questão. Qual será o seu resultado numérico, se soubermos que a **soma** de ***x*** e ***y*** é igual a **–5** ?

5)

(a) Sem efetuar a **multiplicação**, como podemos representar o **produto** de **9** com **7**? E o **produto** de **–5** com **3**?

(b) Como podemos representar o **produto** do número ***x*** com **2**? E o **produto** do número ***y*** com **8**?

(c) Como podemos representar o **produto** dos números ***x*** e ***y***?

(d) **Multiplique** as expressões obtidas no item (b) desta questão. Qual será o seu resultado numérico, se soubermos que o produto de ***x*** e ***y*** é igual a **–1**?

6)

(a) Sem efetuar a **multiplicação**, como podemos representar o **produto** do número ***x*** pela soma de ***y*** com **8**?

(b) Utilizando a propriedade distributiva, multiplique o número ***x*** pela soma de ***y*** com **8**.

(c) Da expressão obtida no item (b) desta questão, **subtraia** o produto de ***x*** com ***y***.

(d) Se o valor numérico de ***x*** for **–2**, qual será o resultado numérico da expressão obtida no item (c)?

7) Sabemos que a **multiplicação** possui a propriedade comutativa, isto é, se representarmos dois números por ***a*** e ***b***, temos que $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$. Pergunta-se: a **divisão** possui a propriedade comutativa? Em outras palavras, **sempre** teremos que $\boldsymbol{a \div b = b \div a}$? **Justifique** sua resposta.

8) Como podemos representar o oposto do número ***x***?

9) Responda com V se a afirmação for verdadeira ou com F se for falsa, justificando cada resposta.

a. (   ) 3 é o oposto de – 3 , isto é, – (–3) = 3.

b. (   ) Se ***x*** é um número **negativo**, então **–*x*** também é um número **negativo**.

c. (   ) Se ***x*** é um número **negativo**, então o quadrado de ***x*** é **sempre negativo**.

d. (   ) Se ***x*** é um número **negativo**, então o cubo de ***x*** **sempre** é **negativo**.

e. (   ) Todo número **inteiro** também é **natural**.

f. (   ) Todo número **inteiro** também é **racional**.

g. (   ) Dados dois números distintos **negativos**, o **maior** deles é o que tem o **menor** módulo.

10) Considere um número inteiro ***m***.

(a) Verifique que a **diferença** entre o sucessor de ***m*** e o antecessor de ***m***, nesta ordem, é **sempre** igual a 2.

(b) Verifique que a **soma** do sucessor de ***m*** com antecessor do número ***m***, sempre resulta no dobro de ***m***.

Procedimentos:

Avaliação escrita individual sem consulta a ser realizada em dois períodos de 50 minutos.

Expectativas:

Espera-se, da maior parte dos alunos nesta avaliação de recuperação um desempenho melhor do que na prova do dia 20/05.

Análise da avaliação do dia 05/06:

Nesta época, a turma contava com 21 alunos. No entanto, participiparam da avaliação 19 alunos.

A questão (1) tinha como objetivo apenas fornecer aos alunos expressões que eles poderiam utilizar para resolver outras questões no decorrer da prova. Portanto, visava verificar a capacidade do aluno de relacionar as questões da avaliação, além de avaliar se conseguiriam, minimamente, traduzir sentenças dadas em língua materna para linguagem matemática.

Como, em geral, os alunos saiam-se bem nas atividades envolvendo escrita matemática onde as alternativas eram fornecidas e, ainda, como (por esquecimento do professor) não foram colocadas mais alternativas escritas simbolicamente do que sentenças em língua materna, esperava-se um bom desempenho nesta questão. De fato, nos sete itens da questão (1) os alunos tiveram um ótimo desempenho. Apenas 3 alunos (15,79%) erraram as sentenças (D) e (E), assinalando a soma do sucessor com o antecessor na diferença e vice-versa. Um aluno (5,26%) errou as sentenças (B) e (C) assinalando a diferença no produto e vice-versa.

A questão (2) objetivava observar se os alunos haviam compreendido a propriedade comutativa da adição, descrita simbolicamente, e se entenderam que a subtração não é comutativa. Além disso, visava observar a argumentação matemática dos alunos.

Para mim foi surpresa que apenas 3 alunos (15,79%) responderam e justificaram corretamente. Onze alunos (57,89%) escreveram respostas parcialmente corretas, 8 deles apenas negaram que a subtração é comutativa, sem justificar, e 3 responderam corretamente, mas em sua justificativa escreveram alguma expressão desnecessária e incorreta. Cinco alunos (26,32%) erraram ou não responderam, sendo que 2 destes erraram e 3 não responderam. A justificativa de um deles foi: "Sim Porque se nós não sabemos o *numero* de a e b". O outro aluno, como justificativa, repetiu a afirmação: "Sim ela é comutativa *por que* a *sobitração* de $a-b=b-a$". Dois alunos que acertaram a justificativa da questão (2) o fizeram apresentando contra-exemplos e o terceiro afirmou que "se quisermos comutar a conta não será o mesmo resultado só será se o *diminuendo* e o subtraendo *ser* igual".

A questão (3) envolvia o conhecimento da representação matemática para a subtração de números representados genericamente por letras. O item (a) serviria apenas como um "aquecimento" para os próximos itens. Pretendia observar se os alunos haviam compreendido o significado de diferença, no contexto de operações, e se aprenderam a substituir um valor numérico numa expressão, calculando o resultado final.

Os itens (a) e (b) foram respondidos corretamente por 13 alunos (68,42%) e 16 alunos (84,21%) respectivamente. O item (a) teve ainda 3 alunos (15,79%) que acertaram parcialmente, apresentando apenas um dos cálculos ou escrevendo uma adição e uma subtração, e 3 alunos (15,79%) que erraram a resposta. Um deles escreveu os termos da subtração um ao lado do outro, talvez entendendo que o enunciado pedia para não apresentar o sinal de menos, o outro aluno escreveu um produto e o terceiro escreveu uma adição. O item (b) teve 1 aluno respondendo incorretamente e 2 alunos que não responderam (15,79% de alunos que erraram ou não responderam). O aluno que respondeu incorretamente foi coerente com sua resposta para a questão (1): "$x \cdot y$".

Somente 7 alunos (36,84%) acertaram o item (c) da questão (3), 4 alunos (21,05%) acertaram parcialmente e 8 alunos (42,11%) erraram ou não responderam. Dos alunos que acertaram, a resposta mais freqüente foi a esperada “$x - y + 12 = 4 + 12 = 16$”, mas houve quem só colocasse os valores numéricos “4 + 12 = 16”. Um dos alunos que acertou parcialmente escreveu: “$x \;\; y \;\; 4 + 12 = xy = 16$”. Os outros, embora corretos, apenas apresentaram o resultado final.

De forma semelhante à questão anterior, a questão (4) tinha como objetivos observar se os alunos haviam incorporado uma escrita simbólica para a adição de dois números e se saberiam substituir um valor numérico em uma expressão. Também verificar se os alunos aprenderam os nomes dos termos da adição e se utilizariam a propriedade comutativa e associativa da adição para chegar a uma expressão final com um número menor de termos.

A maioria dos alunos respondeu corretamente os itens (a), (b) e (c), 14 (73,68%), 17 (89,48%) e 19 (100%) alunos respectivamente. Mas, apenas 7 alunos (36,84%) acertaram completamente o item (d) e 3 alunos (15,79%), parcialmente. Nove alunos (47,37%) erraram ou deixaram em branco, sendo que 8 erraram a resposta do item (d).

Um dos alunos que acertou parcialmente fez tudo certo, mas no final calculou errado $-5 + 10 = -5$. Como exemplos de respostas incorretas para o item (d) destaco os seguintes: “$x + 2 \quad y + 8 \quad -5 + 2 = -3 \quad -5 + 8 = -13$”, onde o aluno apenas escreveu uma expressão ao lado da outra e substituiu, em cada expressão, x por –5 e y por –5. Outro exemplo é: “$x + 2 + y + 8 = 10xy = 10 - 5 = -5$”, em que o aluno justapôs o resultado numérico e as letras. Certamente este aluno não pensou em uma multiplicação. Para ele, a expressão encontrada significa mesmo uma adição, o que pode ser subentendido do cálculo final.

Novamente, na questão (5), repetem-se os objetivos das duas questões anteriores, mas, desta vez, envolvendo a multiplicação.

A maioria dos alunos respondeu corretamente os itens (a), (b) e (c), 18 alunos (94,74%), 17 alunos (89,48%) e 18 alunos (94,74%) respectivamente. Um aluno (5,26%) deixou de responder o item (a), 2 alunos (10,52%) erraram a resposta do item (b), onde ambos escreveram as expressões “$x - 2$” e “$y - 8$”, fazendo confusão entre multiplicação e subtração, e 1 aluno (5,26%) errou o item (c), tendo escrito, de forma coerente com sua resposta para a questão (1) e para o item (b) da questão (5), a expressão “$x - y$”.

O item (d) foi corretamente respondido por 7 alunos (36,84%), 2 alunos (10,53%) acertaram parcialmente e 10 alunos (52,63%) erraram a resposta. Entre as respostas erradas destaco: "$x \cdot 2$, $y \cdot 8$ $-1 \cdot 2 = -2$, $-1 \cdot 8 = -8$". Esta resposta foi dada pelo mesmo aluno que respondeu "$x + 2$ $y + 8$ $-5 + 2 = -3$ $-5 + 8 = -13$" no caso da adição e revela a mesma estrutura na construção da resposta. Os dois alunos que erraram o item (b) dessa questão, coerentemente erraram aqui também, escrevendo subtrações em vez de multiplicações. Outro exemplo de solução incorreta, feita por um aluno que vinha tendo bom desempenho durante as aulas, foi

$$\begin{aligned}&x \cdot 2 + y \cdot 8\\&x \cdot y + 10\\&-1 + 10\\&\quad 9\end{aligned}$$

A questão (6) tinha como objetivo principal avaliar o entendimento e o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Dos 19 alunos que fizeram a prova, 12 (63,16%) acertaram a resposta do item (a) e 7 (36,84%) erraram suas respostas para esse item. A expressão "$x \cdot y \cdot 8$" é um exemplo de resposta errada para esse item dada por dois alunos. Outro exemplo é a expressão "$x + y8$", também dada por outros dois alunos. Também apareceram as expressões "$x + y + 8$", "$8 - (x + y)$", "$x \cdot (+8y)$" e "$x + 2$".

No item (b), houve 10 alunos (52,63%) que acertaram, 1 aluno (5,26%) que acertou parcialmente e 8 alunos (42,11%) que erraram ou não responderam (apenas 1 aluno não respondeu).

Um exemplo de resposta incorreta é a expressão "$x \cdot y \cdot 8 = x8 \cdot x \cdot y$". Outro exemplo foi a expressão "$x \cdot (y + 8) = x \cdot y + 8 + x$". Também encontramos a resposta "$(x + y) \cdot 8 \to 8 \cdot (x + y) = 8 \cdot x \cdot y$". Todos os alunos que erraram a resposta ao item (a), naturalmente erraram o item (b). O aluno que teve sua resposta considerada parcialmente correta aplicou corretamente a distributividade, mas depois cancelou os dois x ficando com a expressão final "$y + 8$".

Apenas 3 alunos (15,79%) acertaram a resposta do item (c). Quinze alunos (78,95%) erraram ou não responderam, sendo que 12 alunos erraram e 3 não responderam. Um aluno (5,26%) teve sua resposta considerada parcialmente correta.

Das respostas incorretas, houve quem respondeu de forma coerente com itens anteriores. O aluno que acertou parcialmente a resposta do item (b) respondeu incorretamente, mas de forma coerente, com a expressão "$(y+8)-(y\cdot x)=8-x$". Apareceu também a expressão "$x\cdot(y-8)=x\cdot y-x\cdot 8$", onde o aluno, ao menos, aplicou corretamente a distributividade. Interessante é a expressão "$8\cdot(x+y)-x\cdot y=8$", em que, além de escrever incorretamente o primeiro termo da subtração o aluno, cancelou, conforme ele assinalou na sua resposta, as expressões $x+y$ e $x\cdot y$. O aluno que acertou parcialmente o item (c) escreveu corretamente a expressão para a diferença, mas não calculou até o final.

Também foram poucos os alunos que acertaram o item (d) da questão (6). Quatro alunos (21,05%) acertaram a resposta, 14 alunos (73,69) erraram ou não responderam e 1 aluno (5,26%) acertou parcialmente a resposta.

Entre as respostas incorretas apareceu "$-2+8=10$", em que o aluno errou o resultado do cálculo, mas foi coerente com sua resposta aos itens (b) e (c), onde respondeu da seguinte forma: "$x\cdot y+8+x-x\cdot y=8+x$". Outro aluno também foi coerente com sua resposta ao item (b), onde respondeu com a expressão "$x\cdot(y+8)=(x\cdot y)+(x\cdot 8)=y+8$", mas errou o cálculo encontrando $8-(-2)=6$. O aluno que acertou parcialmente fez o cálculo "$8\cdot -2=-16$". Porém, sua resposta ao item (c) foi $8\cdot(x+y)-x\cdot y=8$. Portanto, não considerei seu acerto intencional, mas, também não poderia considerar errada sua resposta.

Semelhantemente à questão (2), a questão (7) pretendia observar se os alunos haviam compreendido a propriedade comutativa da multiplicação, descrita simbolicamente, e se entenderam que a divisão não é comutativa. Também tinha por objetivo observar a argumentação matemática dos alunos.

Como na questão (2) muitos alunos apenas acertaram a negação de que a comutatividade vale para a divisão e erraram ou não fizeram a justificativa. Quatro alunos (21,05%) acertaram e justificaram corretamente, 9 alunos (47,37%) acertaram parcialmente e 6 alunos (31,58%) erraram ou não responderam.

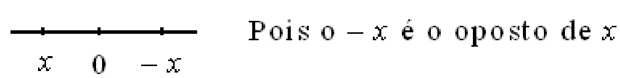
Os quatro alunos que acertaram completamente justificaram sua resposta através de contra-exemplos (alguns calculados incorretamente). Como justificativas incorretas, tanto dos alunos que acertaram parcialmente como dos que erraram, destaco: "Não, porque o divisor tem que ser maior ou igual ao dividendo", "Sim pois nós vimos em sala de aula que a propriedade comutativa vale para a divisão”. Considerei também como incorretas as justificativas em que os alunos simplesmente escreveram “pois se mudar a ordem o resultado não será o mesmo”, a qual eu interpretei como se os alunos estivessem dizendo “Não, porque não!”, isto é, faltou apresentar um contra-exemplo. É bem verdade que estes alunos talvez tenham encontrado um contra-exemplo através de um cálculo, mas não apresentaram o cálculo. Além disso, os alunos que assim justificaram esqueceram-se de que se os dois números *a* e *b* forem iguais e não nulos, então teremos $a \div b = b \div a$.

A questão (8) simplesmente retomava a representação de oposto e estava relacionada com outras questões que viriam a seguir. Quinze alunos (78,95%) acertaram e 4 alunos (21,05%) erraram. As respostas incorretas foram: “$x+1$”, “$2x$”, “Não sabemos pois não se sabe se *x* é positivo ou negativo” e “$(-x) = x$”.

A questão (9) era composta de sete itens. Os dois primeiros itens estavam relacionados à questão (8). Os itens (b), (c), (d) e (g) participaram, de alguma forma, da avaliação do dia 20/05 e aqui estavam sendo retomados. Os principais objetivos dessa questão eram avaliar o conhecimento dos alunos em relação ao conceito e à representação de oposto, verificar o entendimento da inclusão de conjuntos e o sempre presente objetivo de observar os argumentos matemáticos dos alunos nas justificativas para as respostas.

Em geral, os resultados não foram bons. A exceção foi o item (b), corretamente respondido por 13 alunos (68,43%), parcialmente respondido por 4 alunos (21,05%) e incorretamente respondido por 2 alunos (10,52%).

Um dos alunos com acerto parcial no item (b) provavelmente se confundiu ao responder com “V”, pois apresentou a justificativa:



Dos 13 alunos que responderam corretamente o item (b), 7 justificaram escrevendo de alguma forma que se *x* é negativo, seu oposto, $-x$, é positivo. Outros 5 alunos justificaram sem mencionar o oposto, apenas escreveram “pois se *x* é negativo $-x$ é positivo”. Um aluno justificou com a seguinte frase: “pois $-$ com a operação de $-$ é positivo”. Esta última resposta nos remete às observações feitas anteriormente de que o sinal “–” pode causar dificuldades aos alunos, ao estudarem números inteiros, por apresentar mais de um significado.

Os itens da questão (9) que os alunos mais erraram foram os itens (d) e (e), respectivamente 10 alunos (52,63%) e 9 alunos (47,37%). O item (d) contou com o acerto parcial de 7 alunos (36,84%), os quais acertaram a escolha "V", mas erraram a justificativa ou não justificaram. Dois alunos acertaram o item (d). Suas justificativas foram: "pois sempre *dara* negativo $- \cdot - \cdot - = -$ " e "$(-)\cdot(-)=(+)=(+)\cdot(-)=(-)$", mostrando que compreenderam bem uma justificativa genérica. Desconsiderei o segundo sinal de igual que o aluno colocou.

Alguns exemplos de justificativas incorretas para o item (d) são: "Sim x não tem oposto", "Verdadeiro, ex: $-3^3 = -3\times -3\times -3 = -27$ ", "Falso porque é positivo", "o cubo de x não precisa ser negativo", "$x \cdot x \cdot x = x$ portanto x é negativo", "pois somente o quadrado de um número negativo é positivo".

Em minha opinião, questões do tipo "verdadeiro ou falso" têm maior interesse pelas justificativas. Por isso, a partir de agora procurarei me deter em apresentar algumas justificativas corretas e outras incorretas nos diversos itens da questão (9) a título de ilustração.

Inicialmente, algumas justificativas corretas.

Para o item (a):

- "Verdadeiro, *por que* a distância deles até o zero é de 3".
- "pois o 3 e o – 3 *tem* a mesma distância do zero".
- "Pois o módulo de $|3| = 3$ e o de $|-3| = 3$".

Para o item (c):

- "Pois sempre *dara* positivo $- \cdot - = +$".
- "Falso, exemplo $-3^2 = -3\times -3 = 9$" (aqui, o aluno pecou por não colocar o número –3 entre parêntesis, conforme já havíamos combinado em aula).
- "Pois $(-)\cdot(-) = +$".

Para o item (e):

- "Pois nos números inteiros existem números negativos e nos naturais não".
- "pois -1 é um n^{o} inteiro e não é natural".
- "Ex: -7".

Para o item (f):

- "pois pode ser escrito como uma fração".
- "pois podemos representar cada um em forma de fração".
- "Verdadeiro, porque podemos fazer em forma da frações".

Para o item (g):

- "Pois *esta* mais *a* direita".

Agora, exemplos de justificativas incorretas.

Para o item (a):

- "Pois não existe oposto *á* – 3".
- "sim *por que* o oposto de 3 é o – 3".

Para o item (b):

- "não sabemos quanto vale o *x*".
- "Sim pois *x tem* a mesma *distancia* o $-x$".

Para o item (c):

- "pois $-x \cdot -x \cdot -x \cdot -x = 4x$"
- "pois se multiplicamos um positivo por um negativo é igual a negativo".

Para o item (e):

- "Porque inteiro é um e natural é outro".
- "Sim Pois todos *tem* sucessor".

Para o item (f):

- "Porque eles não dão *numeros* com *virgula*".
- "Pois os números inteiros são positivos, negativos e os racionais a *unica* diferença *é* as frações".
- "Porque inteiro é um e racional é outro".

Para o item (g):

- "pois nos negativos o *modulo* sendo o menor o n^o será o maior".
- "falso pois o maior tem o maior modulo".

Finalmente, a questão (10) estava relacionada com a questão (1). Tinha por objetivo avaliar a habilidade do aluno em realizar uma justificativa algébrica, utilizando para isso uma escrita matemática de sentenças. Evidentemente que outras justificativas seriam aceitas.

Poucos alunos conseguiram acertar os dois itens da questão. Quatro alunos (21,05%) acertaram o item (a), 12 alunos (63,16%) erraram ou não responderam e 3 alunos (15,79%) acertaram parcialmente. Quanto ao item (b), 4 alunos (21,05%) acertaram, 11 alunos (57,90%) erraram ou não responderam e 4 alunos (21,05%) acertaram parcialmente.

Os alunos que acertaram os dois itens cometeram pequenos erros de escrita, como esquecer parêntesis, por exemplo. Mas, como foram dados na prova, esses alunos chegaram até os resultados finais.

Fato interessante sobre os alunos que erraram ou não responderam a questão (10) é que vários deles não observaram que uma parte da resposta já estava pronta na questão (1).

Minha avaliação da prova:

É possível, mas pouco provável, que tenha havido alunos cometendo erros em questões posteriores devido a erros cometidos na questão (1). Por exemplo, houve um aluno que errou as questões (3) e (5) escrevendo um produto onde era diferença e vice-versa. Este mesmo aluno também trocou a diferença pelo produto nos itens (B) e (C) da questão (1). Porém, houve um aluno que errou os itens (D) e (E) da questão (1) e escreveu corretamente as expressões para a soma e para a diferença entre o sucessor e o antecessor na questão (10).

Vários alunos erraram as questões, mas foram coerentes com os erros cometidos nos itens ou questões anteriores. Isso pode sinalizar para que não construamos, em uma prova, muitas questões encadeadas umas nas outras. Talvez essa estratégia de relacionar as questões umas com as outras seja mais adequada em uma atividade de sala de aula que, mesmo sendo avaliada, não tem o mesmo caráter de uma prova e geralmente é encarado como uma tarefa mais amena do que uma prova.

Nesta prova, em quase todas as questões, eu não especifiquei em qual conjunto numérico estávamos trabalhando. Isso porque em alguma das aulas eu mencionei para os alunos que os números seriam sempre representados de maneira genérica utilizando uma letra, até mesmo os números racionais. Nesta oportunidade, expliquei aos alunos que x, por exemplo, pode representar um número racional escrito na forma decimal. Claro, precisaríamos de duas letras se, dependendo do contexto, fosse necessário representar um número racional na forma fracionária. A justificativa que dei aos alunos para utilizar só uma letra, mesmo se o número for racional, foi de que, como vimos durante o trimestre, as operações de adição e multiplicação com números naturais, inteiros ou racionais possuem as mesmas propriedades.

Pelas respostas ao item (b) da questão (9), ao menos 68,43% dos alunos compreenderam que o símbolo $-x$ pode representar um número ou positivo ou negativo (sem mencionar o zero), dependendo do valor de x, percentual muito superior aos 30% de alunos que acertaram questão análoga na prova anterior.

Nesta prova, o desempenho dos alunos foi bem melhor do que nas duas provas anteriores. Observando a média aritmética das notas teóricas dos alunos (66,10) e comparando com as anteriores (40,73 na primeira prova e 37,24 na segunda prova) vemos que a melhora foi considerável, passando até de 60 % da nota máxima possível. Nove alunos obtiveram nota teórica superior à média. Se exigíssemos o mínimo de 60% de aproveitamento, 12 alunos ficariam acima desse mínimo. Se a exigência fosse de 50% de aproveitamento, 15 alunos ultrapassariam esse patamar.

Considero, portanto, válida a experiência. A despeito de todas as dificuldades encontradas e dos encaminhamentos que por vezes se revelaram mal construídos, os alunos começam a apresentar uma argumentação mais consistente, com exceções é claro.

5 ENCAMINHAMENTOS EM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Os encaminhamentos que apresentaremos a seguir não devem ser encarados como uma sequência didática para o ensino das operações com expressões algébricas polinomiais. Pretendemos, com tais encaminhamentos, apenas proporcionar ao leitor deste texto as linhas gerais do trabalho que foi feito após o período de familiarização com o pensamento genérico, tendo nas propriedades das operações com números a base matemática sobre a qual as operações com expressões algébricas polinomiais foram construídas.

Salientamos que tais encaminhamentos não excluem outros procedimentos como o uso do contexto de Geometria, de jogos ou de tecnologia para o tratamento das expressões algébricas polinomiais e suas operações. O uso conjunto de todas essas estratégias pode contribuir, por exemplo, como motivação ou ponto de partida, para que os alunos compreendam melhor o assunto. Contudo, o uso de outros contextos diversos do que aqui apresentamos procuram, muitas vezes, justificar as operações com expressões algébricas polinomiais com argumentos não-matemáticos (por exemplo, com regras de um jogo), o que, em nossa opinião, induz o aluno a procurar justificativas não-matemáticas para os resultados e procedimentos.

É importante também ressaltar a reação dos alunos diante de nossa proposta, depois do período de familiarização com o pensamento genérico, por exemplo, no caso da adição expressões algébricas polinomiais, onde não utilizamos o conceito de *termos semelhantes*. Depois de feitos os encaminhamentos que descreveremos resumidamente a seguir, os próprios alunos chegaram à conclusão de que só é possível somar duas expressões, obtendo outra expressão que não envolva o sinal de adição, quando as variáveis envolvidas são as mesmas e com os mesmos expoentes. A partir daí, introduzimos a nomenclatura *termos semelhantes* para facilitar a comunicação e, também, porque, afinal, é essa a terminologia encontrada nos livros didáticos. Recomendamos, no entanto, que sempre seja relembrada a justificativa matemática para a regra "agrupar termos semelhantes, somar ou subtrair os coeficientes e manter a parte literal".

5.1 ADIÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS POLINOMIAIS

Inicialmente, definimos *identidade algébrica* como uma igualdade entre duas expressões algébricas verdadeira para quaisquer valores das variáveis pertencentes ao universo numérico que está sendo utilizado naquele momento para cada uma delas.

Situação 1: Motivado, por exemplo, pela resposta recorrente $8xy$ à soma $5x+3y$ foi discutida com a turma a seguinte situação:

Consideremos a igualdade entre expressões algébricas polinomiais $5x+3y=8xy$. Vamos verificar se essa igualdade é verdadeira para todos os números reais[1] *x* e *y*, calculando separadamente as expressões dos dois membros da igualdade, substituindo-se *x* e *y* por valores conhecidos:

Fazendo $x=0$ e $y=0$, obtemos $5\cdot 0+3\cdot 0=0$ e $8\cdot 0\cdot 0=0$. Portanto, a igualdade é verdadeira para esses valores de *x* e de *y*;

Fazendo $x=1$ e $y=1$, obtemos $5\cdot 1+3\cdot 1=8$ e $8\cdot 1\cdot 1=8$. Portanto, a igualdade é verdadeira para esses valores de *x* e de *y*;

Fazendo $x=\frac{1}{2}$ e $y=\frac{5}{2}$, obtemos $5\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{5}{2}=10$ e $8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=10$. Portanto, a igualdade é verdadeira para esses valores de *x* e de *y*;

A partir desses três casos apenas, podemos afirmar que a igualdade $5x+3y=8xy$ é verdadeira para todos os valores reais de *x* e de *y*?

A resposta da questão acima é negativa, pois a verificação de alguns casos particulares não garante o resultado para os infinitos valores possíveis de *x* e de *y*. Tanto é que, fazendo, por exemplo, $x=1$ e $y=0$, obtemos $5\cdot 1+3\cdot 0=5$ e $8\cdot 1\cdot 0=0$. Portanto, para esses valores de *x* e de *y*, a igualdade é falsa.

Como há pelo menos um valor de *x* e um valor de *y* para os quais a igualdade não é verdadeira, ou seja, um contraexemplo para a referida igualdade, concluímos que é falso que $5x+3y=8xy$, para quaisquer valores reais de *x* e *y*.

Situação 2: Consideremos a igualdade entre expressões algébricas polinomiais $5xy+3xy=8xy$. Essa igualdade é verdadeira para todos os números reais *x* e *y*?

Fazendo $x=0$ e $y=0$, obtemos $5\cdot 0\cdot 0+3\cdot 0\cdot 0=0$ e $8\cdot 0\cdot 0=0$. Portanto, para esses valores de *x* e de *y*, a igualdade é verdadeira;

[1] Ou qualquer outro universo numérico pré-estabelecido para as variáveis.

Fazendo $x=1$ e $y=1$, obtemos $5\cdot 1\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1=8$ e $8\cdot 1\cdot 1=8$. Portanto, para esses valores de *x* e de *y*, a igualdade é verdadeira;

Fazendo $x=\frac{1}{2}$ e $y=\frac{5}{2}$, obtemos $5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=10$ e $8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=10$. Portanto, para esses valores de *x* e de *y*, a igualdade é verdadeira;

Fazendo $x=1$ e $y=0$, obtemos $5\cdot 1\cdot 0+3\cdot 1\cdot 0=0$ e $8\cdot 1\cdot 0=0$. Portanto, para esses valores de *x* e de *y*, a igualdade é verdadeira;

Fazendo $x=\sqrt{2}$ e $y=\sqrt{5}$, obtemos $5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{2}\cdot 5=8\sqrt{10}$ e $8\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=8\sqrt{10}$. Portanto, para esses valores de *x* e de *y*, a igualdade é verdadeira;

A partir desses cinco casos apenas, podemos afirmar que a igualdade $5xy+3xy=8xy$ é verdadeira para todos os valores reais de *x* e de *y*?

Observe que até agora não conseguimos encontrar valores reais de *x* e de *y* para os quais a igualdade não se verifica, ou seja, não encontramos um contraexemplo para a referida igualdade. Porém, somente a partir desses valores, não podemos afirmar que a igualdade se verifica sempre. Como temos aqui infinitos casos para testar, precisamos fazer uso de outra estratégia para decidirmos o valor lógico desta igualdade: vamos recorrer às propriedades das operações com números reais. Pela propriedade distributiva da multiplicação, podemos escrever $5xy+3xy=(5+3)xy=8xy$, para quaisquer números reais *x* e *y*. Note aqui que estamos utilizando um argumento válido para todos os números reais *x* e *y*. Portanto, a igualdade $5xy+3xy=8xy$ é uma *identidade*.[2]

Situação 3: A igualdade $5xy+3yx=8xy$ é verdadeira para todos os valores reais de *x* e de *y*?

Observamos que há uma inversão na ordem dos fatores *x* e *y*. Porém, pela propriedade comutativa da multiplicação de números reais, $xy=yx$ para quaisquer números reais *x* e *y*. Assim, $5xy+3yx=5xy+3xy=(5+3)xy=8xy$, para quaisquer números reais *x* e *y*.

---

[2] Chamamos a atenção do leitor sobre o mesmo encaminhamento inicial dado às Situações 1 e 2. No entanto, não podemos parar nosso argumento antes da pergunta "apenas estes exemplos são suficientes para garantir a veracidade da igualdade?" Reiterando o método de argumentação matemática, reforçamos a necessidade de ir-se adiante no argumento; tanto que a primeira afirmação revelou-se falsa e a segunda, verdadeira.

Situação 4: A igualdade $5x+3y+2x-5y=7x-2y$ é verdadeira para todos os valores reais de *x* e de *y*?

Utilizando a propriedade comutativa da adição, podemos reescrever a expressão do membro esquerdo da igualdade como $5x+2x+3y-5y$. Essa, por sua vez, pode ser reescrita como $(5+2)x+(3-5)y=7x-2y$ aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação de números reais. Portanto, $5x+3y+2x-5y=7x-2y$, para quaisquer números reais *x* e *y*.

5.2 MULTIPLICAÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS POLINOMIAIS

Aplicando-se as propriedades da multiplicação de números reais, juntamente com as propriedades das potências de base real e expoente natural e, lembrando que uma multiplicação entre variáveis ou entre variáveis e constantes pode ser indicado por ·, × ou pela simples justaposição, podemos multiplicar expressões algébricas polinomiais.

Exemplo 1: Sendo *x* e *y* números reais quaisquer, calcule $3x^2y\times(-5)x^3y$.

Aplicando-se sucessivamente as propriedades comutativa e associativa da multiplicação de números reais, bem como a propriedade da multiplicação de potências de base real e expoente natural, e como as expressões $3x^2y$ e $(-5)x^3y$ também envolvem multiplicações, podemos fazer $3x^2y\times(-5)x^3y=3\times(-5)x^2x^3yy=-15x^5y^2$, para quaisquer números reais *x* e *y*.

Exemplo 2: Sendo *x* e *y* números reais quaisquer, calcule $\frac{3}{2}x^2y\times\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)$.

Aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais, temos

$$\frac{3}{2}x^2y\times\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=\frac{3}{2}x^2y\times\frac{x}{2}+\frac{3}{2}x^2y\times\frac{y}{3}.$$

Agora, aplicamos as propriedades comutativa e associativa da multiplicação de números reais a cada parcela podemos fazer

$$\frac{3}{2}x^2y\times\frac{x}{2}+\frac{3}{2}x^2y\times\frac{y}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}x^2xy+\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}x^2yy.$$

Agora, aplicando a propriedade da multiplicação de potências de mesma base real e expoente natural em cada parcela, obtemos

$$\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}x^2xy+\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}x^2yy=\frac{3}{4}x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2.$$

Assim,

$$\frac{3}{2}x^2y\times\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=\frac{3}{4}x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2,$$

para quaisquer números reais *x* e *y*.

Exemplo 3: Sendo *x* e *y* números reais quaisquer, calcule $(2x+y)\times(x-2y)$.

Aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação de números reais à esquerda, temos

$$(2x+y)\times(x-2y)=(2x+y)\times x-(2x+y)\times 2y.$$

Agora, aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação de números reais à direita a cada termo da subtração (que equivale à adição pelo oposto), obtemos

$$(2x+y)\times x-(2x+y)\times 2y=2x\times x+y\times x-(2x\times 2y+y\times 2y).$$

Aplicando a propriedade da multiplicação de potências de mesma base real e expoente natural em cada parcela e pelo que já sabemos da adição de expressões algébricas polinomiais, obtemos

$$\begin{aligned}2x\times x+y\times x-(2x\times 2y+y\times 2y)&=2x^2+yx-(4xy+2y^2)\\&=2x^2+yx-4xy-2y^2\\&=2x^2-3xy-2y^2.\end{aligned}$$

Portanto, $(2x+y)\times(x-2y)=2x^2-3xy-2y^2$, para quaisquer números reais *x* e *y*.

5.3 FATORAÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS POLINOMIAIS[3]

[3] Na turma em que foi aplicada a experiência, só trabalhamos o caso fator comum e agrupamento. Mais precisamente, não foram tratados os casos *“trinômio” quadrado perfeito* e *diferença de dois quadrados*.

Fatorar uma expressão algébrica polinomial é reescrevê-la na forma de uma multiplicação.

Exemplo 1: Fatore a expressão $2x + 2y$, onde x e y são números reais quaisquer.

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, podemos reescrever a expressão como

$$2x + 2y = 2(x + y).$$

Essa é uma possível fatoração da expressão $2x + 2y$. Porém, como estamos trabalhando no campo numérico dos reais[4], podemos também escrever, por exemplo,

$$2x + 2y = \frac{1}{2} \cdot 4(x + y)$$

Exemplo 2: Fatore a expressão algébrica polinomial $18m^4n - 24mn^2 + 12m^2n$, onde m e n são números reais[5], obtendo um fator igual a:

a) 2

Uma possível resposta é $2 \times (9m^4n - 12mn^2 + 6m^2n)$. Outra possível resposta é $2 \times m \times (9m^3n - 12n^2 + 6mn)$.

b) 6

Uma possível resposta é $6 \times (3m^4n - 4mn^2 + 2m^2n)$. Outra possível resposta é $6 \times n \times (3m^4 - 4mn + 2m^2)$.

c) $2m$

Uma possível resposta é $2m \times (9m^3n - 12n^2 + 6mn)$. Outra possível resposta é $2m \times n \times (9m^3 - 12n + 6m)$.

d) $6n$

Uma possível resposta é $6n \times (3m^4 - 4mn + 2m^2)$. Outra possível resposta é $6n \times m \times (3m^3 - 4n + 2m)$.

---

[4] Na turma em que foi aplicado esse encaminhamento o universo numérico era o conjunto dos números racionais.

[5] Se restringirmos o universo das variáveis para $\mathbb{Z}$, as duas últimas fatorações não são possíveis de serem realizadas (item f).

e) $6mn$

Uma possível resposta é $6mn \times \left(3m^3 - 4n + 2m\right)$. Outra possível resposta é $6mn \times 2 \times \left(\frac{3}{2}m^3 - 2n + m\right)$.

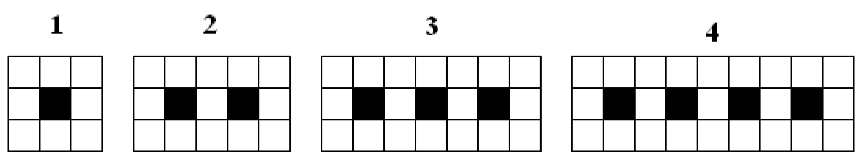
f) $18mn$

Uma possível resposta é $18mn \times \left(m^3 - \frac{4}{3}n + \frac{2}{3}m\right)$. Outra possível resposta é $18mn \times 2 \times \left(\frac{1}{2}m^3 - \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}m\right)$.

5.4 APLICAÇÃO DAS OPERAÇÕES COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS EM SEQUÊNCIAS DE FIGURAS E IDENTIFICAÇÃO DE PADRÕES

Descreveremos aqui uma interessante aplicação das operações com expressões algébricas.

Observe a sequência de figuras abaixo:



a) Encontre um padrão para a construção desta sequência e desenhe as figuras 5 e 6, de acordo com este padrão.

b) Explicite o padrão que você encontrou, explicando como contar o número de quadrados em branco de uma figura.

c) Se a sequência continuar com este mesmo padrão, quantos quadrados em branco terá a figura 10? E a figura 20?

d) Determine uma expressão algébrica para o número de quadrados em branco da figura n.

e) Se uma figura construída com este padrão por você especificado tem 208 quadrados em branco, qual é a posição desta figura na sequência?

O objetivo do item (a) é familiarização com a construção da figura. No item (b), o objetivo é que os alunos verbalizem o padrão que encontraram. O item (c) objetiva que os alunos contem o número de quadrados em branco, utilizando o padrão que verbalizaram em (b). Pulamos da figura 6 para a figura 10 e depois para a figura 20 a fim de desencorajar os alunos a desenharem essas figuras. Para responder o item (d) é provável que os alunos encontrem padrões diferentes na contagem dos quadrados em branco, gerando expressões algébricas distintas. Porém, após efetuarem as operações com as expressões encontradas, chegarão à mesma expressão algébrica polinomial em *n*. Por exemplo, alguém poderia contar assim:

1	**2**	**3**	**4**	**…**	***n***
3 + 3 + 2	5 + 5 + 3	7 +7 + 4	9 + 9 + 5	…	$(2n+1)+(2n+1)+(n+1)$

Outro aluno poderia contar assim:

1	**2**	**3**	**4**	**…**	***n***
3 × 3 - 1	3 × 5 - 2	3 × 7 - 3	3 × 9 - 4	**…**	$3\times(2n+1)-n$

Um terceiro poderia contar assim:

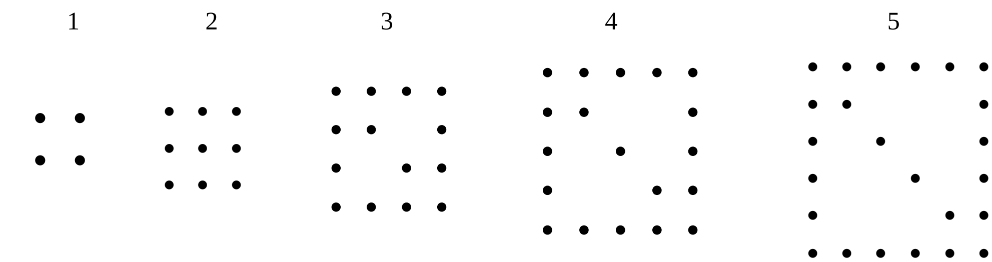
1	**2**	**3**	**4**	**…**	***n***
2 × 3 + 1 × 2	3 × 3 + 2 × 2	4 × 3 + 3 × 2	5 × 3 + 4 × 2	**…**	$(n+1)\times 3+n\times 2$

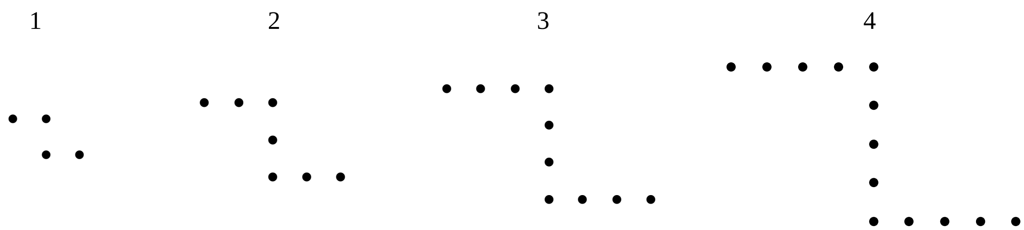
Poderiam, ainda, aparecer outras formas de contar, ou seja, outros padrões. Chega-se aqui a um importante momento para o professor explorar a igualdade de tais expressões ou: "Será que alguém está errado?" Ao efetuarmos as operações indicadas nas expressões algébricas polinomiais em *n*, verifica-se se chegamos todos à mesma expressão:

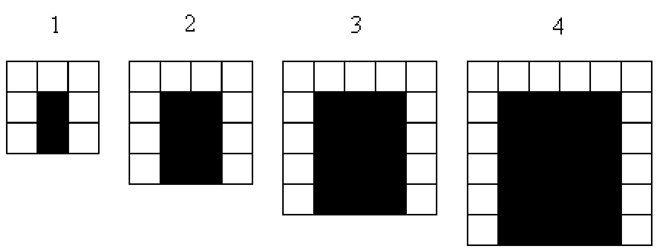
- $2n+1+2n+1+n+1=5n+3$
- $3\times(2n+1)-n=6n+3-n=5n+3$
- $(n+1)\times 3+n\times 2=3n+3+2n=5n+3$

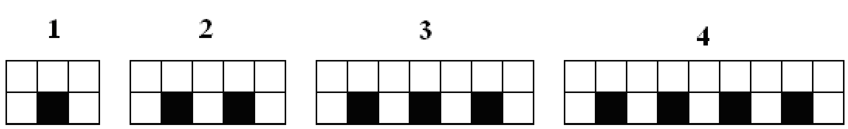
O item (e) objetiva a resolução de equações a partir da expressão algébrica encontrada em (d).

Com os mesmos objetivos anteriores, apresentamos as seguintes sequências, todas elas gerando diferentes respostas dos alunos, revelando-se uma interessante atividade lúdica, onde os alunos, para corrigir os colegas, terão que *demonstrar* que a sua fórmula pode ser obtida a partir da do colega e vice-versa.


1
2
3
4
5


1
2
3
4


1
2
3
4


1
2
3
4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema *ensino de Álgebra na Educação Básica* é largamente estudado nos programas brasileiros de pós-graduação em educação matemática e gera grande quantidade de trabalhos (veja no APÊNDICE D uma breve lista de trabalhos relacionados ao tema).

Nessa dissertação, ficamos muito focados no ensino de *expressões algébricas* em nível de sétima série/oitavo ano do ensino fundamental. Nossa proposta dá ênfase às propriedades das operações com números como argumento suficiente para justificar precisamente as operações com expressões algébricas. Destaca, também, o pensamento genérico e o método de argumentação matemática, como objetivos do ensino de Matemática em qualquer nível. A ponte entre o método de argumentação matemática/pensamento genérico e as expressões algébricas se dá no momento em que utilizamos letras na representação genérica de números para justificarmos resultados matemáticos.

Outra característica marcante deste trabalho é a construção e apresentação de um texto sobre polinômios, dedicado aos professores de Matemática da Educação Básica, no qual relacionamos a Matemática formal com a Matemática escolar. Este texto nos forneceu subsídios para analisar criticamente os encaminhamentos sobre expressões algébricas nos livros didáticos.

No decorrer das aulas aqui relatadas, que trataram de uma sequência de atividades visando o pensamento genérico algébrico e utilizando as consequentes representações algébricas decorrentes desse tipo de pensamento, vários alunos, inclusive os que não acompanhavam satisfatoriamente as aulas, nos deram retornos positivos, dentre os quais destacamos (Capítulo 4, Subseção 4.2.6, p. 118):

- “A matéria que mais gosto é a Matemática, por que não precisamos ficar decorando as coisas, é só pensar”;
- “Em Matemática todas as coisas se relacionam”;
- “Temos sempre que justificar nossas afirmações para termos certeza de que podemos continuar adiante”.

Depoimentos como esses nos motivaram a dar continuidade ao trabalho a despeito de toda a dificuldade que os alunos apresentavam nos estudos em geral e em Matemática, em particular.

Depois de transcorrido certo período de familiarização com o pensamento genérico e com o método de argumentação matemática, chegamos a encontrar alunos que procuravam justificar suas respostas mesmo que isso não tivesse sido solicitado, ou seja, tentar justificar matematicamente os resultados passou a fazer parte da rotina de alguns alunos, conforme relatamos no Capítulo 4, Subseção 4.2.18, p. 173 e 175.

Em outras ocasiões, alguns alunos demonstravam curiosidade em dar continuidade ao assunto que estava sendo trabalhado, por exemplo, ao questionar se havia alguma operação que os números racionais não davam conta, conforme relatamos no Capítulo 4, Subseção 4.2.19, p. 179, 181 e 182.

Há, ainda, alguns depoimentos que não foram relatados no trabalho. Por exemplo, depois de rapidamente discutirmos (sem demonstrar[1]) a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e observarmos que existem outros números além dos racionais, perguntaram se havia alguma operação que não poderia ser feita nesse conjunto “maior” ainda que os racionais (os reais). Outro exemplo: Um aluno chegou a questionar por que $0 \cdot x = 0$. Esse aluno até compreendia que $n \cdot 0 = 0$, com *n* natural não-nulo, pois $n \cdot 0$ significava somar *n* parcelas iguais a zero, mas para ele não fazia sentido somar zero parcelas iguais a *x*. Também questionavam coisas como potências cujo expoente é zero, ou a divisão por zero. Essas curiosidades, trazidas pelos próprios alunos, passaram a ser motivo de discussões em sala de aula, com os alunos tentando convencer uns aos outros de seus argumentos, contando com a mediação do professor.

[1] Embora pudesse ser demonstrado na sétima série, deixei essa demonstração para trabalhar na oitava série, quando introduzisse os números irracionais.

Falas como essas dos alunos demonstram para nós que é sim possível um trabalho visando o pensamento genérico e o método de argumentação matemática, o que é corroborado nos PCN na já citada passagem

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar "abstratamente", se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados (BRASIL, 1998, p. 117).

A despeito dos aspectos positivos elencados, não poderíamos deixar de mencionar algumas dificuldades que enfrentamos durante o período de familiarização ao pensamento genérico e ao método de argumentação matemática. Procuramos, no capítulo 4 (PROPOSTA DIDÁTICA), tecer considerações e propor sugestões a essas dificuldades.

Um desses momentos foi quando da retomada dos números inteiros, a partir da Subseção 4.2.13, p. 147 do Capítulo 4. Nesse momento, pelo pouco tempo que dispúnhamos, não era viável uma reapresentação das operações com números inteiros, conferindo interpretações concretas a essas operações. Devido a isso, decidimos retomar as operações a partir das regras que usualmente são apresentadas na sexta série. Ora, a simples apresentação de regras para operar com números inteiros entra em choque com o nosso objetivo de familiarizar os alunos com o pensamento genérico e com o método de argumentação matemática. Esse impasse nos ocorreu enquanto planejávamos a proposta didática, sem que tivéssemos encontrado um melhor encaminhamento.

Após o período de familiarização com o método de argumentação matemática e com o pensamento genérico ficou confirmada nossa afirmação (da INTRODUÇÃO) de que se faz necessário um trabalho mais consistente, desde as séries iniciais, com as propriedades das operações numéricas para que os estudantes possam utilizá-las para justificar as operações com expressões algébricas polinomiais.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. **______**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. **Guia de livros didáticos PNLD 2008: Matemática.** Brasília: MEC, 2007.

E. M. E. F. PAULO BECK. **Agenda de trabalho 2008.** São Leopoldo: s.ed. 2008.

GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de Álgebra**. (Projeto Euclides). Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, manipulação e aplicações. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 41, p. 1-6, 3º quadrimestre/1999.

LIMA, Elon Lages. et al. **Exame de Textos:** Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

NASSER, Lílian (coord.); TINOCO, Lúcia A. de A. (coord.). **Argumentação e provas no ensino de matemática**. 2.ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto. **Funções Numéricas e Fórmulas (I).** preprint.

USISKIN, Zalman. **Conceptions of School Algebra and Uses of Variables.** Disponível em <http://www.octm.org/jcooke/Algebra%20Readings/5Conceptions%20of%20School%20Algebra.pdf> Acesso em: 23 nov. 2009.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.

OBRAS CONSULTADAS

ANDRINI, Álvaro; ZAMPIROLO, Maria Jose C. de V. **Novo Praticando Matemática.** São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

ARCHBOLD, John Willian. **Algebra.** London: Pitman & Sons, 1958.

BARROSO, Juliane Matsubara. (ed.). **Projeto Araribá: matemática.** São Paulo: Moderna, 2006.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo: FTD, 2000.

BONADIMAN, Adriana. **Álgebra no ensino fundamental:** produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. Porto Alegre: UFRGS, 2007. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/handle/10183/11228> Acesso em: 10 ago. 2010.

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES, Ayrton. **Matemática: fazendo a diferença.** São Paulo: FTD, 2006.

CARDIA, Luciana Simoneti Ferreira. **Integrando geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas.** São Paulo: PUC, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2007. Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/luciana_ferreira_cardia.pdf> Acesso em: 08 jun. 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática.** São Paulo: Ática, 2002.

______. **Matemática contexto e aplicações.** São Paulo: Ática, 2000.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Algebra.** Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

GUELLI, Oscar. **Matemática: uma aventura do pensamento.** São Paulo: Ática, 2002.

HERSTEIN, Israel Nathan. **Tópicos de álgebra.** São Paulo: Polígono, 1970.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; LELLIS, Marcelo. **Matemática.** São Paulo: Scipione, 1997.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade.** 5.ed. São Paulo: Atual, 2005.

JAMAL, Roberto Miguel El. **Álgebra na educação básica:** as múltiplas sinalizações do que se espera que devem saber os alunos. São Paulo: PUC, 2004. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2004. Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/roberto_miguel_jamal.pdf> Acesso em: 08 jun. 2008.

KEPPKE, Charston Lima. **Álgebra nos currículos do Ensino Fundamental.** São Paulo: PUC, 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2007. Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/charston_lima_keppke.pdf> Acesso em: 08 jun. 2008.

LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 1998. v.1.

______.______**.** Rio de Janeiro: SBM, 1998. v.3.

MODANEZ, Leila. **Das seqüências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico.** São Paulo: PUC, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2003. Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/leila_modanez.pdf > Acesso em: 08 jun. 2008.

MONTEIRO, Luiz Henrique Jacy. **Elementos de álgebra.** Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969.

OLIVEIRA, Marília Barros de. **Construindo significados para a linguagem algébrica com o auxílio do jogo codificação-decodificação.** São Paulo: PUC, 2004. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2004. Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marilia_barros_oliveira.pdf> Acesso em: 08 jun. 2008.

PINTO, Renata Anastácia. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra:** o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula. Campinas: UNICAMP, 1997. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1997. Disponível em: <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000121507> Acesso em: 15 dez. 2008.

REIS, Lourisnei Fortes dos; CARVALHO, Alexandre Luís Trovon de. Aplicando a matemática. Tatuí, SP: Casa Publicadora Brasileira, 2006.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto. **Números Racionais, Reais e Complexos.** Porto Alegre: UFRGS, 2006.

SANTOS, Leila Muniz. **Concepções do professor de matemática sobre o ensino de álgebra.** São Paulo: PUC, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontificia

Universidade Católica de São Paulo, 2005. Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/leila_muniz_santos.pdf> Acesso em: 08 jun. 2008.

SILVA, Maria Helena da. **Estudo das visões sobre álgebra presentes nos parâmetros curriculares nacionais de matemática do ensino fundamental em relação a números e operações.** São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2006. Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/maria_helena_silva.pdf> Acesso em: 15 dez. 2008.

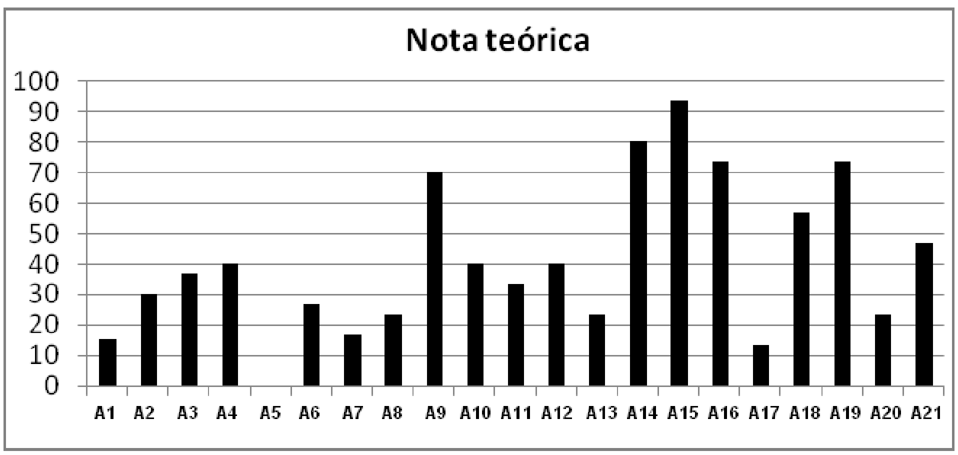
APÊNDICE A – Figuras relativas à avaliação de 15/04

Aluno	1a	1b	1c	2	3a	3b	3c	4	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d
A1	1	4	4	2	4	4	4	4	4	4	1	2	2	2	4
A2	2	2	2	5	1	4	4	5	2	2	4	2	4	5	2
A3	1	2	1	4	1	5	5	4	2	2	2	2	4	5	5
A4	1	4	4	1	5	5	5	5	3	1	1	1	4	4	2
A5	5	5	5	5	5	4	5	5	4	4	5	5	5	5	5
A6	2	4	4	1	4	4	5	5	4	2	2	2	2	2	5
A7	2	2	1	5	5	5	5	5	4	4	4	2	5	4	4
A8	2	4	4	4	1	4	4	6	4	4	2	2	4	4	2
A9	1	1	2	1	1	5	5	6	1	1	1	1	2	2	2
A10	5	5	4	1	1	4	4	6	2	2	2	2	1	2	4
A11	2	2	2	2	6	4	5	4	2	2	2	2	4	2	4
A12	2	2	2	2	1	4	4	4	4	2	1	2	4	2	2
A13	1	2	2	1	4	4	4	5	4	4	4	5	5	2	5
A14	1	1	1	2	1	1	6	1	1	1	3	1	4	1	2
A15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	2
A16	1	1	1	1	1	4	4	1	1	1	1	1	2	2	4
A17	2	2	4	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
A18	1	1	1	1	4	4	5	6	1	1	1	2	4	2	4
A19	1	1	1	1	1	4	4	1	1	1	1	1	2	2	4
A20	2	2	1	5	5	5	5	5	4	4	2	2	4	5	2
A21	1	1	1	1	5	5	5	4	4	4	1	2	2	2	2

Aluno	#1	#2	#3	#4	#5	#6	Total	Nota teórica	%C	%PC	%I	%Total
A1	2	4	0	9	0	0	15	15,33	13,33	26,67	60	100
A2	1	7	0	4	3	0	15	30	6,67	46,67	46,67	100
A3	3	5	0	3	4	0	15	36,67	20	33,33	46,67	100
A4	5	1	1	4	4	0	15	40	33,33	13,33	53,33	100
A5	0	0	0	3	12	0	15	0	0	0	100	100
A6	1	6	0	5	3	0	15	26,67	6,67	40	53,33	100
A7	1	3	0	5	6	0	15	16,67	6,67	20	73,33	100
A8	1	4	0	9	0	1	15	23,33	6,67	33,33	60	100
A9	8	4	0	0	2	1	15	70	53,33	33,33	13,33	100
A10	3	5	0	4	2	1	15	40	20	40	40	100
A11	0	9	0	4	1	1	15	33,33	0	66,67	33,33	100
A12	2	8	0	5	0	0	15	40	13,33	53,33	33,33	100
A13	2	3	0	6	4	0	15	23,33	13,33	20	66,67	100
A14	10	2	1	1	0	1	15	80	66,67	26,67	6,67	100
A15	13	1	1	0	0	0	15	93,33	86,67	13,33	0	100
A16	10	2	0	3	0	0	15	73,33	66,67	13,33	20	100
A17	1	2	0	1	11	0	15	13,33	6,67	13,33	80	100
A18	7	2	0	4	1	1	15	56,67	46,67	20	33,33	100
A19	10	2	0	3	0	0	15	73,33	66,67	13,33	20	100
A20	1	5	0	3	6	0	15	23,33	6,67	33,33	60	100
A21	5	4	0	3	3	0	15	46,67	33,33	26,67	40	100

Figura 18: Avaliação do dia 15/04/08 – Números naturais

Questão	#1	# 2	#3	# 4	#5	#6	Total	%A	%AP	%E	%Total
1a	11	8	0	0	2	0	21	52,38	38,10	9,52	100
1b	7	8	0	4	2	0	21	33,33	38,10	28,57	100
1c	9	5	0	6	1	0	21	42,86	23,81	33,33	100
2	11	4	0	2	4	0	21	52,38	19,05	28,57	100
3a	10	0	0	4	6	1	21	47,62	4,76	47,62	100
3b	2	0	0	12	7	0	21	9,52	0	90,48	100
3c	1	0	0	8	11	1	21	4,76	4,76	90,48	100
4	4	0	0	5	8	4	21	19,05	19,05	61,90	100
5a	6	4	1	9	1	0	21	28,57	23,81	47,62	100
5b	7	6	0	7	1	0	21	33,33	28,57	38,10	100
5c	8	6	2	3	2	0	21	38,10	38,10	23,80	100
6a	6	12	0	0	3	0	21	28,57	57,14	14,29	100
6b	2	6	0	9	4	0	21	9,52	28,57	61,90	100
6c	2	11	0	3	5	0	21	9,52	52,38	38,10	100
6d	0	9	0	7	5	0	21	0	42,86	57,14	100



Legenda:
1: Resposta correta (resposta e justificativa ou cálculos).
2: Resposta parcialmente correta (acertou a resposta, mas errou ou não fez a justificativa ou cálculos).
3: Resposta parcialmente correta (errou a resposta, mas a justificativa ou cálculos estão corretos).
4: Resposta incorreta (tanto a resposta quanto a justificativa ou cálculos).
5: Não fez (deixou em branco).
6. Resposta está incompleta ou não está totalmente correta, mas há fragmentos coerentes e corretos; ou está correta, depois o aluno escreveu alguma coisa desnecessária e incorreta.

%C: Percentual de respostas corretas do aluno.
%PC: Percentual de respostas parcialmente corretas do aluno.
%I: Percentual de respostas incorretas/em branco do aluno.

%A: Percentual de alunos que acertaram a questão.
%AP: Percentual de alunos que acertaram parcialmente a questão.
%E: Percentual de alunos que erraram/deixaram em branco a questão.

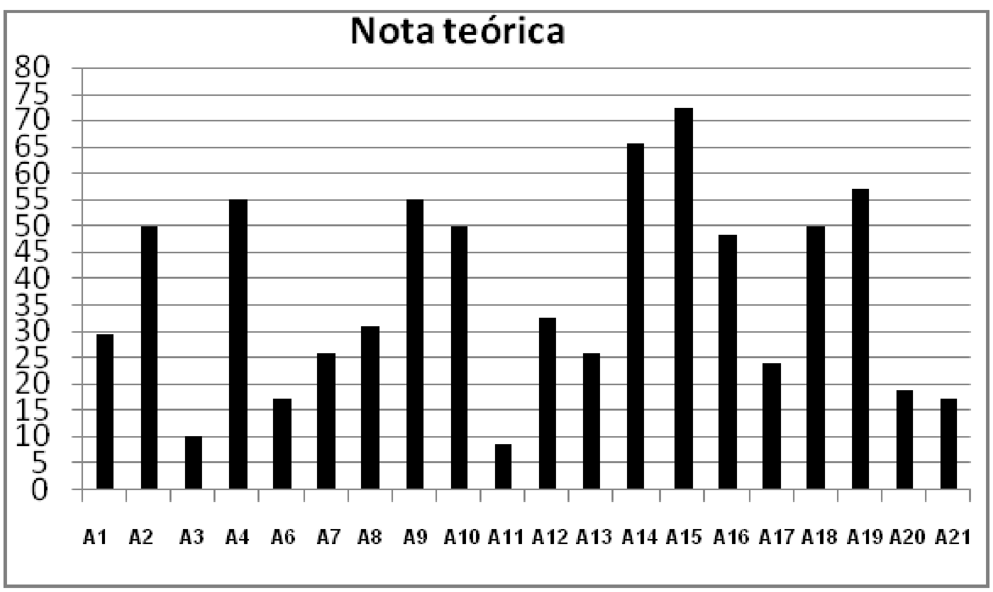
APÊNDICE B – Figuras relativas à avaliação de 20/05

Aluno	1	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	3e	3f	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	6d	6e	6f	6g	7a	7b	7c
A1	1	1	4	4	5	4	1	1	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1	4	2	1	2	6	4	5	1	4
A2	5	1	1	6	5	1	1	6	4	4	5	1	5	5	5	6	6	1	1	1	1	1	1	1	5	6	5	4	4
A3	4	1	4	4	5	4	4	4	4	4	5	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	4	2	4	4	4	2	4	2
A4	1	1	1	4	4	1	1	1	6	4	4	4	5	4	5	1	1	1	5	1	1	3	1	1	4	1	4	2	2
A6	5	1	4	4	5	5	4	5	5	4	5	4	4	4	5	6	4	4	5	4	4	1	2	2	2	4	4	2	2
A7	5	1	4	5	5	4	6	5	5	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	1	1	1	2	2	2	2	2	4	2
A8	4	1	4	5	4	1	1	1	4	4	4	6	6	4	4	6	6	6	4	1	4	2	4	4	4	4	2	4	2
A9	6	1	1	6	5	1	1	6	4	6	5	1	6	4	4	1	1	6	4	1	4	1	1	1	4	4	2	2	1
A10	6	1	4	4	5	1	4	4	4	6	4	1	4	1	4	1	1	1	4	1	3	1	1	1	2	4	2	2	2
A11	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	2	2	3	4	4	2	4	4	2	4
A12	5	1	1	4	5	1	1	6	4	4	5	4	4	4	4	4	4	5	4	1	1	1	4	2	2	2	4	2	4
A13	6	1	1	5	5	1	4	4	5	5	5	4	5	4	5	6	6	4	4	4	4	1	4	2	2	2	2	4	4
A14	1	1	1	5	1	1	1	1	1	6	4	1	6	1	5	4	5	5	5	1	1	1	1	1	2	1	2	4	1
A15	6	1	1	5	5	1	1	1	1	6	5	1	1	1	1	1	6	5	4	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
A16	1	1	1	1	5	1	1	6	5	6	5	1	5	1	5	5	5	5	5	1	4	1	1	1	4	2	4	4	2
A17	4	4	4	4	4	1	1	6	4	5	5	5	5	5	5	6	4	4	4	1	4	2	2	1	5	1	5	5	5
A18	4	1	1	6	5	1	1	6	5	4	4	6	4	4	4	6	4	1	4	1	4	1	1	1	4	1	1	2	1
A19	1	1	1	1	4	1	1	1	5	5	5	1	6	1	4	5	5	4	5	1	4	1	1	1	4	2	2	1	1
A20	1	6	4	5	5	6	4	4	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5	4	3	4	2	2	2	2	2	2	4
A21	6	1	4	5	5	4	4	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	1	4	1	4	4	4	2	2	4	2

Aluno	#1	#2	#3	#4	#5	#6	Total	Nota teórica	%C	%PC	%I	%Total
A1	7	2	0	8	11	1	29	29,31	24,14	10,34	65,52	100
A2	12	0	0	4	8	5	29	50,00	41,38	17,24	41,38	100
A3	1	3	0	22	2	1	29	10,34	3,45	13,79	82,76	100
A4	14	2	1	8	3	1	29	55,17	48,28	13,79	37,93	100
A6	2	5	0	13	8	1	29	17,24	6,90	20,69	72,41	100
A7	4	6	0	5	13	1	29	25,86	13,79	24,14	62,07	100
A8	5	3	0	15	1	5	29	31,03	17,24	27,59	55,17	100
A9	12	2	0	7	2	6	29	55,17	41,38	27,59	31,03	100
A10	11	4	1	10	1	2	29	50,00	37,93	24,14	37,93	100
A11	0	4	1	15	9	0	29	8,62	0,00	17,24	82,76	100
A12	7	4	0	13	4	1	29	32,76	24,14	17,24	58,62	100
A13	4	4	0	11	7	3	29	25,86	13,79	24,14	62,07	100
A14	17	2	0	3	5	2	29	65,52	58,62	13,79	27,59	100
A15	18	3	0	1	4	3	29	72,41	62,07	20,69	17,24	100
A16	12	2	0	4	9	2	29	48,28	41,38	13,79	44,83	100
A17	5	2	0	10	10	2	29	24,14	17,24	13,79	68,97	100
A18	12	1	0	10	2	4	29	50,00	41,38	17,24	41,38	100
A19	15	2	0	5	6	1	29	56,90	51,72	10,35	37,93	100
A20	1	6	1	8	11	2	29	18,97	3,45	31,03	65,52	100
A21	3	3	0	9	13	1	29	17,24	10,35	13,79	75,86	100

Figura 19: Avaliação do dia 20/05/08 – Números inteiros

Questão	#1	# 2	#3	# 4	#5	#6	Total	%A	%AP	%E	%Total
1	6	0	0	4	5	5	20	30	25	45	100
2a	17	0	0	2	0	1	20	85	5	10	100
2b	10	0	0	10	0	0	20	50	0	50	100
2c	2	0	0	8	7	3	20	10	15	75	100
2d	1	0	0	5	14	0	20	5	0	95	100
3a	13	0	0	5	1	1	20	65	5	30	100
3b	12	0	0	7	0	1	20	60	5	35	100
3c	6	0	0	5	3	6	20	30	30	40	100
3d	2	0	0	9	8	1	20	10	5	85	100
3e	0	0	0	10	5	5	20	0	25	75	100
3f	0	0	0	7	13	0	20	0	0	100	100
4a	7	0	0	7	4	2	20	35	10	55	100
4b	1	0	0	5	10	4	20	5	20	75	100
4c	5	0	0	8	7	0	20	25	0	75	100
4d	1	0	0	7	12	0	20	5	0	95	100
5a	4	0	0	3	6	7	20	20	35	45	100
5b	3	0	0	5	8	4	20	15	20	65	100
5c	4	0	0	5	9	2	20	20	10	70	100
5d	1	0	0	9	10	0	20	5	0	95	100
6a	15	1	0	4	0	0	20	75	5	20	100
6b	6	1	2	11	0	0	20	30	15	55	100
6c	13	3	2	2	0	0	20	65	25	10	100
6d	10	5	0	5	0	0	20	50	25	25	100
6e	10	6	0	4	0	0	20	50	30	20	100
6f	0	9	0	8	2	1	20	0	50	50	100
6g	5	7	0	7	0	1	20	25	40	35	100
7a	1	11	0	5	3	0	20	5	55	40	100
7b	3	8	0	8	1	0	20	15	40	45	100
7c	4	9	0	6	1	0	20	20	45	35	100



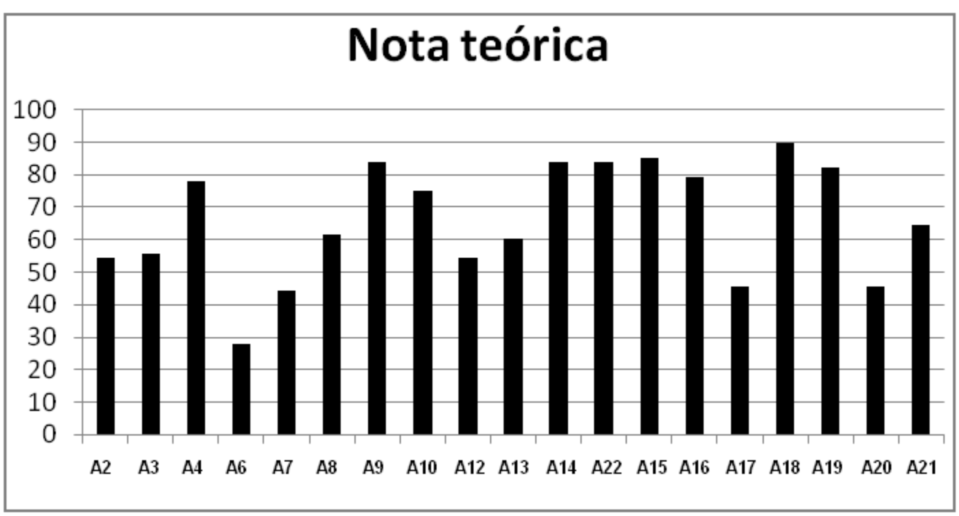
APÊNDICE C – Figuras relativas à avaliação de 05/06

Aluno	1 a	1 b	1 c	1 d	1 e	1 f	1 g	2	3 a	3 b	3 c	4 a	4 b	4 c	4 d	5 a	5 b	5 c	5 d	6 a	6 b	6 c	6 d	7	8	9 a	9 b	9 c	9 d	9 e	9 f	9 g	10 a	10 b
A2	1	1	1	4	4	1	1	4	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1	4	4	1	4	6	3	4	4	4	4	2	4	4
A3	1	1	1	1	1	1	1	1	4	1	4	4	6	1	4	1	1	1	4	1	1	5	5	2	1	2	2	2	4	4	4	2	4	4
A4	1	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	1	4	4	4	4	4	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1
A6	1	4	4	1	1	1	1	6	4	4	4	5	1	1	4	5	4	4	4	4	4	4	5	4	4	2	2	2	4	4	2	4	5	5
A7	1	1	1	1	1	1	1	5	4	1	4	4	4	1	4	1	1	1	4	4	5	5	5	5	1	2	2	2	4	4	2	4	4	5
A8	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1	5	5	2	1	4	4	2	4	4	2	2	4	4
A9	1	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	4	4	1	1	1	2	2	1	4	1
A10	1	1	1	4	4	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	2	1	1	1	1	2	1	1	2	6	6
A12	1	1	1	1	1	1	1	4	6	5	5	6	1	1	6	1	1	1	4	1	1	4	4	2	1	2	4	2	4	4	4	2	4	4
A13	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	4	4	4	4	6	5	1	5	1	2	4	2	4	2	4	4
A14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	2	1	6	5
A22	1	1	1	1	1	1	1	2	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
A15	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	4	2	2	2	1	1
A16	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	2	1	2	1	4	2	1	1	2	6	6
A17	1	1	1	1	1	1	1	5	1	5	5	6	1	1	4	1	1	1	4	4	4	4	4	5	4	2	1	4	4	4	4	2	4	4
A18	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	6
A19	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	4	4	2	1	1	1	1	1	1	1	4	4	6
A20	1	1	1	4	4	1	1	5	6	1	4	1	1	1	5	1	4	1	4	4	4	4	4	5	1	4	1	2	2	4	2	2	4	4
A21	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	6	1	1	1	4	1	1	1	3	4	4	4	5	1	1	2	1	2	4	4	2	1	4	4

Aluno	#1	#2	#3	#4	#5	#6	Total	Nota teórica	%C	%PC	%I	%Total
A2	17	1	1	14	0	1	34	54,41	50	8,83	41,17	100
A3	16	5	0	10	2	1	34	55,88	47,06	17,65	35,29	100
A4	24	3	0	5	0	2	34	77,94	70,58	14,71	14,71	100
A6	7	4	0	17	5	1	34	27,94	20,59	14,71	64,70	100
A7	13	4	0	11	6	0	34	44,12	38,24	11,76	50,00	100
A8	18	6	0	8	2	0	34	61,76	52,94	17,65	29,41	100
A9	27	2	0	4	0	1	34	83,82	79,41	8,82	11,77	100
A10	23	3	0	6	0	2	34	75,00	67,64	14,71	17,65	100
A12	15	4	0	10	2	3	34	54,41	44,12	20,59	35,29	100
A13	18	4	0	9	2	1	34	60,29	52,94	14,71	32,35	100
A14	25	6	0	1	1	1	34	83,82	73,53	20,59	5,88	100
A22	25	6	0	2	0	1	34	83,82	73,53	20,59	5,88	100
A15	25	8	0	1	0	0	34	85,29	73,53	23,53	2,94	100
A16	23	6	0	3	0	2	34	79,41	67,65	23,53	8,82	100
A17	14	2	0	13	4	1	34	45,59	41,18	8,82	50,00	100
A18	27	5	0	0	0	2	34	89,71	79,41	20,59	0,00	100
A19	26	2	0	4	0	2	34	82,35	76,46	11,76	11,77	100
A20	13	4	0	13	3	1	34	45,59	38,24	14,71	47,05	100
A21	19	4	1	8	1	1	34	64,71	55,88	17,65	26,47	100

Figura 20: Avaliação do dia 05/06/08 – Números naturais, inteiros e racionais

Questão	#1	# 2	#3	# 4	#5	#6	Total	%A	%AP	%E	%Total
1a	19	0	0	0	0	0	19	100	0	0	100
1b	18	0	0	1	0	0	19	94,74	0	5,26	100
1c	18	0	0	1	0	0	19	94,74	0	5,26	100
1d	16	0	0	3	0	0	19	84,21	0	15,79	100
1e	16	0	0	3	0	0	19	84,21	0	15,79	100
1f	19	0	0	0	0	0	19	100	0	0	100
1g	19	0	0	0	0	0	19	100	0	0	100
2	3	8	0	2	3	3	19	15,79	57,89	26,32	100
3a	13	0	0	3	0	3	19	68,42	15,79	15,79	100
3b	16	0	0	1	2	0	19	84,21	0	15,79	100
3c	7	3	0	6	2	1	19	36,84	21,05	42,11	100
4a	14	0	0	2	1	2	19	73,68	10,53	15,79	100
4b	17	0	0	1	0	1	19	89,48	5,26	5,26	100
4c	19	0	0	0	0	0	19	100	0	0	100
4d	7	1	0	8	1	2	19	36,84	15,79	47,37	100
5a	18	0	0	0	1	0	19	94,74	0	5,26	100
5b	17	0	0	2	0	0	19	89,48	0	10,52	100
5c	18	0	0	1	0	0	19	94,74	0	5,26	100
5d	7	1	1	10	0	0	19	36,84	10,53	52,63	100
6a	12	0	0	7	0	0	19	63,16	0	36,84	100
6b	10	0	0	7	1	1	19	52,63	5,26	42,11	100
6c	3	0	0	12	3	1	19	15,79	5,26	78,95	100
6d	4	0	0	9	5	1	19	21,05	5,26	73,69	100
7	4	9	0	2	4	0	19	21,05	47,37	31,58	100
8	15	0	0	4	0	0	19	78,95	0	21,05	100
9a	6	8	0	3	1	1	19	31,58	47,37	21,05	100
9b	13	3	1	2	0	0	19	68,43	21,05	10,52	100
9c	3	13	0	3	0	0	19	15,79	68,42	15,79	100
9d	2	7	0	10	0	0	19	10,53	36,84	52,63	100
9e	6	4	0	9	0	0	19	31,58	21,05	4737	100
9f	3	11	0	5	0	0	19	15,79	57,89	26,32	100
9g	5	11	0	3	0	0	19	26,32	57,89	15,79	100
10a	4	0	0	11	1	3	19	21,05	15,79	63,16	100
10b	4	0	0	8	3	4	19	21,05	21,05	57,90	100



APÊNDICE D – Relação de trabalhos sobre a Álgebra na Educação Básica

Relacionamos a seguir, uma breve lista de trabalhos sobre o ensino de Álgebra na Educação Básica produzidos em programas brasileiros de pós-graduação. Não temos a pretensão de esgotar todos os trabalhos na área. Só incluímos aqueles que apresentam no título os termos "álgebra", "linguagem algébrica", "pensamento algébrico" ou "expressão algébrica". Restringimos nossa pesquisa ao período de 1997 a 2007.

Autor: Adriana Bonadiman **Defesa:** 2007
Título: Álgebra no ensino fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas
Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/11228

Autor: Luciana Simoneti Ferreira Cardia **Defesa:** 2007
Título: Integrando geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas
Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/luciana_ferreira_cardia.pdf

Autor: Adilson Sebastião de Souza **Defesa:** 2007
Título: Metacognição e ensino da álgebra: análise do que pensam e dizem professores de matemática da educação básica
Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-29012009-120830/es.php

Autor: Charston Lima Keppke **Defesa:** 2007
Título: Álgebra nos currículos do ensino fundamental
Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/KEPPKE_charston_lima.html

Autor: Maria Helena da Silva **Defesa:** 2006
Título: Estudo das visões sobre álgebra presentes nos parâmetros curriculares nacionais de matemática do ensino fundamental em relação a números e operações
Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/maria_helena_silva.pdf

Autor: Anna Paula de Avelar Brito Menezes **Defesa:** 2006
Título: Contrato didático e transposição didática: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental
Disponível em: http://ce.ufpe.br/posemeducacao/documentos/Teses_2006/Anna_Paula_de_Avelar_Brito_Menezes.pdf

Autor: Ieda Maria Oliveira **Defesa:** 2005
Título: A pesquisa e a prática docente: investigação sobre hipóteses que alunos de 5ª série formulam a respeito de escritas algébricas
Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/ieda_mara_oliveira.pdf

Autor: Leila Muniz Santos **Defesa:** 2005
Título: Concepções do professor de matemática sobre o ensino de álgebra
Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/leila_muniz_santos.pdf

Autor: Roberto Miguel El Jamal **Defesa:** 2004
Título: Álgebra na educação básica: as múltiplas sinalizações do que se espera que devem saber os alunos
Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/roberto_miguel_jamal.pdf

Autor: Marília Barros de Oliveira **Defesa:** 2004
Título: Construindo significados para a linguagem algébrica com o auxílio do jogo codificação-decodificação
Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marilia_barros_oliveira.pdf

Autor: Edméa Aparecida Rocha Silva Raboni **Defesa:** 2004
Título: Saberes profissionais do professor de matemática: focalizando o professor e a álgebra no ensino fundamental
Disponível em: http://www4.fct.unesp.br/pos/educacao/teses/edmea.pdf

Autor: Leila Modanez **Defesa:** 2003
Título: Das seqüências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico
Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/leila_modanez.pdf

Autor: Alessandro Jacques Ribeiro **Defesa:** 2001
Título: Analisando o desempenho dos alunos do ensino fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP
Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/alessandro_ribeiro.pdf

Autor: Renata Anastácia Pinto **Defesa:** 1997
Título: Erros e dificuldades no ensino da álgebra: o tratamento dado por professoras de 7ª série em aula
Disponível em: http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000121507

Autor: Marco Antônio Geraldo de Oliveira **Defesa:** 1997
Título: O ensino da álgebra elementar: depoimentos e reflexões daqueles que vêm fazendo sua história
Disponível em: http://www.ghoem.com/textos/p/dissertacao_oliveira.pdf