UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

VALÉRIA ESPÍNDOLA LESSA

A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE NÚMERO FRACIONÁRIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O SIGNIFICADO *MEDIDA*

Porto Alegre
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

VALÉRIA ESPÍNDOLA LESSA

A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE NÚMERO FRACIONÁRIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O SIGNIFICADO *MEDIDA*

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Alice Gravina

Porto Alegre
2011

VALÉRIA ESPÍNDOLA LESSA

A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE NÚMERO FRACIONÁRIO:
UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O SIGNIFICADO *MEDIDA*

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

Porto Alegre, janeiro de 2011.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cristiano Alberto Muniz – UnB

Profª. Drª. Elizabete Zardo Búrigo – UFRGS

Profª. Drª. Luisa Rodrígues Doering – UFRGS

Dedico este trabalho a três pessoas muito especiais na minha vida: minha mãe Edilce; meu pai José Antônio; e meu marido Thiago

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, Professora Drª. Maria Alice Gravina, pela orientação, apoio, companheirismo na construção conjunta deste trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de formação continuada, pelo ensino público e de qualidade.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas de mestrado, pela presença nesta caminhada de dois anos e pelos estudos de segunda-feira, em especial à colega e amiga Aline de Bona.

Aos meus professores deste mestrado que contribuíram para minha formação, em especial à Profª Elizabete Búrigo e Profª Luisa Doering, pelo aceite em compor a banca de minha defesa de dissertação.

Ao Prof. Cristiano Muniz, pelas dicas sobre Vergnaud numa tarde de junho e pelo material sobre frações.

Aos meus queridos alunos que colaboraram para a realização deste trabalho e sem eles tudo isso não seria possível.

À escola em que trabalho que possibilitou a realização da pesquisa.

À minha família, pela falta nos almoços de domingo e pelas visitas apressadas.

Em especial ao meu marido, Thiago Ingrassia Pereira, grande incentivador deste trabalho, pelo companheirismo, apoio e por entender o estresse de alguns momentos.

E a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho, em especial aos amigos Zoraia Bittencourt e Giovani Aiub, pelas horas de sono a menos dispensadas para correção e formatação deste trabalho.

RESUMO

Esta dissertação desenvolve uma proposta de ensino com alunos do 6º ano de uma escola privada de Porto Alegre, tratando da aprendizagem do conceito de número fracionário através de seu significado 'medida'. A proposta foi desenvolvida com base nas etapas da Engenharia Didática, uma metodologia de pesquisa que contempla experiências em sala de aula acompanhadas de análises a priori e a posteriori . Na análise das aprendizagens foi usada a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, a qual proporcionou embasamento teórico para observar o processo de aprendizagem vivenciado pelos alunos. Os resultados obtidos ao longo do gradual processo de construção de uma régua numerada indicam que os alunos compreenderam os números fracionário no seu significado 'medida' e também validam a seqüência didática que foi implementada em sala de aula.

Palavras chave: números fracionários; medida; ensino-aprendizagem da matemática escolar.

ABSTRACT

This work presents a teaching experience with students from 6th grade at a private school in Porto Alegre and it aims to provoke the understanding of the fractional numbers concept through its meaning of "measure”. The Didactic Engineering was used as a research methodology, grounded on classroom experiences and supported by a priori and a posterior analysis that can validate the teaching experiment. To carry out the analysis of student’s learning, this study relied on the Conceptual Fields Theory of Vergnaud, which provides the theoretical framework for the identification of knowledge that students put into action during the activities. The results point to students understanding of the fractional number concept through a sequence involving didactic meaning "measure" of fractional numbers and also certify the teaching sequence applied in the classroom.

Keywords: fractional numbers; measure; teaching and learning in mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática escolar é, para muitas pessoas, um mundo totalmente estranho, com muitas regras e símbolos sem sentido, sem utilidade prática e, portanto, nem todos podem ou querem aprendê-la. Segundo Silva (2009, p.17), a Matemática carrega a imagem de uma disciplina difícil e, então, “[...] elitista e seletiva: nem todos podem entrar no universo matemático, muitos alunos reprovam e só alguns conseguem”. Por isso, acredito que os professores desta disciplina precisam ter a consciência de que “a feição rigorosista na exposição matemática contribui para o aumento do tédio e para o despertar da aversão pelos estudos abstratos” (ROXO, 2004, p.158), para, assim, repensar sua prática.

O trabalho na escola básica, principalmente com o Ensino Fundamental (EF), é ponto crucial para a sensibilização dos alunos para o raciocínio matemático, bem como para o apreço (ou a não resistência) à disciplina, muitas vezes entendida como o “bicho papão” da escola. Dessa forma, cabe ao professor buscar alternativas didáticas para uma educação matemática de qualidade, que propicie aos alunos bases para seu desenvolvimento intelectual.

Na busca por esta educação de qualidade, percebi, por exemplo, muita resistência de meus alunos, de Ensino Fundamental e Médio, com os cálculos que envolviam os números racionais na sua representação fracionária. Observei que grande parte deles preferia trabalhar com números decimais, com aproximações, do que efetuar os algoritmos das operações com os números fracionários. Assim, surge a hipótese de que o problema da dificuldade em lidar com estes números não está apenas nos algoritmos, mas na sua compreensão conceitual.

Com isso, comecei a busca por teorias que me ajudassem a pensar sobre a construção do conceito de número fracionário, para, então, propor uma nova estratégia didática para trabalhar este conteúdo. O meu desafio é tornar o ensino deste tema algo significativo para os alunos, buscando que esse conteúdo não se torne estranho ao cotidiano dos alunos, fazendo da disciplina de Matemática algo familiar e importante na caminhada escolar.

O conteúdo de números fracionários geralmente inicia-se no 3º ano do EF, sendo que no 4º ano trata o assunto de forma mais aprofundada quanto ao conceito e representação, porém seu estudo com maior rigor e exigência ocorre a partir do 6º ano deste nível de ensino[1]. Assim, em relação ao currículo, este ensino se constitui pré-requisito para o estudo de outros conteúdos matemáticos dos anos seguintes, como, por exemplo, as frações algébricas e as equações fracionárias. Cabe salientar que apesar das escolas possuírem autonomia na organização dos planos de estudos, percebe-se a influência da organização curricular exercida pelos livros didáticos.

Sabe-se que a notação decimal ganhou mais espaço na vida cotidiana para representar números "quebrados", não inteiros. Mas isto não quer dizer que não devemos ensinar números fracionários na escola, pois, segundo Lopes (2008, p.5), "[...] temos que reconhecer sua importância em contextos não utilitários, que atendem a outros significados e objetivos". Dessa forma, considero ser imprescindível que se pense a respeito de seu ensino e sobre as complexidades que envolvem sua aprendizagem.

Para Lopes (2008), há muitos obstáculos à aprendizagem dos números fracionários, a começar pelo fato de que representam ideias diferentes. Ao conceito de número fracionário estão associados diversos significados, ou interpretações, que dependem do contexto no qual estão inseridos[2]. Entre as classificações estabelecidas nas obras pesquisadas, assumirei neste trabalho cinco significados: "parte-todo", "medida", "operador", "quociente" e "razão".

Acredito que a aprendizagem do conceito de número fracionário se dá mediante o desenvolvimento de todas estas interpretações, de forma integrada, ao longo da vida escolar dos alunos.

No entanto, o ensino de número fracionário na escola básica, em geral, se dá apenas pela definição de fração, cujo trabalho é baseado no significado "parte-todo", a partir da partição de um todo, representado por figuras na forma de chocolates, bolos e pizzas, conjuntos de elementos, seguido do estudo de operações de forma mecânica.

---

[1] Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

[2] Diversas obras apresentam as frações com diferentes significados, entre elas: Brasil (1998); Campose Magina (2008); Llinares e Garcia (1988); Lopes (2008); Merlini (2005); Romanatto (1999); Vasconcelos (2007).

De imediato é importante trazer esclarecimentos sobre as expressões “fração” e “número fracionário” que estarão nos acompanhando ao longo do texto. A expressão “fração” será reservada para designar “um certo número de partes tomadas de uma unidade (um todo) que foi dividida em partes iguais”. Assim a informação “comi $1/2$ pizza” é diferente da informação “comi $2/4$ de pizza” (mesmo sendo a mesma pizza), pois nelas está registrada a forma como foi feita a divisão da pizza. Se desconsiderada a forma da divisão, então temos quantidades iguais e reservo a expressão “número fracionário” para indicar esta mesma quantidade. De forma mais precisa, a expressão “número fracionário” vai indicar uma classe de frações equivalentes[3], e é isto que interessa no processo de aprendizagem que vou colocar sob consideração. Neste trabalho, discuto os múltiplos significados do “número fracionário”, em que relaciono o “parte-todo” com “bolos e pizzas” como sendo um dos possíveis significados.

Mesmo defendendo que na escola se pratique um trabalho integrado, contemplando os diferentes significados de “número fracionário”, entendo que todo professor enfrente imposições curriculares que impossibilitam, muitas vezes, a inovação nas suas propostas de ensino-aprendizagem durante o ano letivo. Mas acredito ser possível o trabalho com os cinco diferentes significados do número fracionário no 6º ano, sendo que é imprescindível a retomada destas idéias nos anos seguintes, em diferentes contextos.

Dos cinco significados apresentados acima, escolho aquele que trata do “número fracionário como um número que mede” como uma interessante “porta de entrada” para iniciar os alunos de 6º ano no estudo deste novo campo numérico. Isto porque ele possibilita atividades que provocam uma concreta necessidade de ter-se “novos números” para realizar medidas que não são mais exatas (os números naturais não bastam). E, de forma natural, estes novos números podem ser colocados em correspondência com pontos, que estão entre os números inteiros já conhecidos pelos alunos, de uma reta, e nisso preparam os alunos para o entendimento de novos campos numéricos – os racionais e os reais. Entendo que o trabalho com a reta

[3] Uma classe de frações equivalentes é um conjunto de frações que representam o mesmo número racional, a mesma quantidade.

numérica, desde o 6º ano, vai facilitar o entendimento (futuro) quanto à insuficiência dos números racionais para “medir as distâncias entre pontos de uma reta”, ou seja, a insuficiência destes números para “etiquetar”[4] todos os pontos da reta, criando-se, então, a necessidade da introdução dos números irracionais.

Este trabalho de dissertação, na sua parte de investigação experimental, terá como foco os números fracionários como números que correspondem a medidas e que podem ser colocados em correspondência com pontos de uma reta. Sumarizamos nossa pergunta de investigação da seguinte forma:

> **– como é possível proporcionar aos alunos uma melhor compreensão do conceito de número fracionário no 6º ano do Ensino Fundamental através de seu significado “medida”?**

Esclareço que utilizo “uma melhor compreensão do conceito” a fim de não desprezar as aprendizagens que os alunos já possuem sobre o conteúdo. E para responder a esta pergunta, trago uma proposta de sequência didática com atividades que enfatizam o significado “medida”, mas que também trabalham com os significados “parte-todo” e “operador”, pois, em certos contextos, como veremos, os significados se interrelacionam.

Assim, o objetivo geral da dissertação é verificar a compreensão do conceito de número fracionário na experimentação desta proposta didática para a escola básica, de forma a qualificar o ensino-aprendizagem de matemática. Como objetivos específicos, este trabalho busca romper com a ideia dos alunos de que o estudo de frações é “difícil” e pretende produzir um material didático como referencial para sala de aula e também para futuras pesquisas.

Para organizar a pesquisa, utilizei a metodologia da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) por ser baseada em experiências de sala de aula. Esta metodologia prevê quatro etapas de trabalho que buscam facilitar a prática de investigação na sala de aula. Na primeira etapa, temos as análises prévias, onde são investigados e

---

[4] Expressão utilizada pela Profª Cydara Ripoll em suas aulas na Disciplina de *Fundamentos A* (2009/1) deste curso de Mestrado.

discutidos os objetos de estudo e as teorias que embasam a pesquisa. A segunda etapa consiste na elaboração das análises *a priori* das experiências que são propostas na sala de aula. Na terceira etapa, temos a experimentação da sequência didática, e, na quarta e última etapa, temos a análise *posteriori* e validação da proposta didática projetada.

As atividades foram elaboradas e analisadas tomando como base a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) desenvolvida em diferentes trabalhos de Gerard Vergnaud. A Engenharia Didática se constituiu na “forma” como o trabalho se organizou e a TCC foi o “olhar” com que elaborei as atividades e analisei a produção dos alunos.

A dissertação se organiza em quatro capítulos. Nesta Introdução, entendida como Capítulo 1, apresentei a temática e o problema de pesquisa, seus objetivos e pressupostos metodológicos. No Capítulo 2, apresento a base teórica do trabalho sob três aspectos: epistemológicos, cognitivos e didáticos. Nos aspectos epistemológicos, faço uma discussão a respeito dos diferentes significados do número fracionário. Nos aspectos cognitivos, apresento a Teoria dos Campos Conceituais, a qual nos orienta acerca da construção do conceito deste número. E, nos aspectos didáticos, faço uma discussão sobre o ensino do tema na escola, segundo orientações normativas e livros didáticos.

No Capítulo 3, apresento a proposta e a experimentação didática realizada numa turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Primeiramente, faço uma discussão sobre a escola e seus contornos, destacando o contrato didático estabelecido e, em seguida, trago a descrição das atividades da sequência didática, divididas em nove módulos. Para cada módulo apresento as análises *a priori e as* análises *a posteriori*, e finalizo o capítulo tratando de validar a hipótese enunciada no inicio da experiência.

Por fim, no Capítulo 4, trago as considerações finais, com reflexão sobre a pesquisa realizada, frente à pergunta norteadora.

2 ASPECTOS TEÓRICOS QUE FUNDAMENTAM A PESQUISA

Neste capítulo apresento a fundamentação teórica do trabalho sob três aspectos: epistemológicos, cognitivos e didáticos. Nos aspectos epistemológicos, será feita uma discussão sobre como se dá o conhecimento do número fracionário, trazendo cinco diferentes significados que este número assume em diversos contextos. Nos aspectos cognitivos, serão discutidas questões referentes à aprendizagem do conceito pelos alunos com base na Teoria dos Campos Conceituais. E, nos aspectos didáticos, será feito um panorama sobre a abordagem dos livros didáticos e das orientações normativas no que se refere aos diferentes significados dos números fracionários.

2.1 ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS: OS DIFERENTES SIGNIFICADOS DO NÚMERO FRACIONÁRIO

Conforme já indicado na Introdução, é intencionalmente que estou diferenciando as expressões “fração” e “número fracionário”. O termo “fração” é uma expressão que, nos livros dos dias de hoje, ainda guarda a noção que é registrada nos livros antigos de Matemática – aquela que associava “fração” a partes de um todo que foi particionado igualmente –, sendo que o termo com origem no latim “fractio” ou “fractione” significa dividir, quebrar.

Uma definição que está no livro didático do início do século XX *Arithmética Progressiva*, de Trajano (1927, p.67), está registrada na figura seguinte:

FRACÇÕES ORDINARIAS

135. Fracção é uma ou mais partes iguaes de uma unidade. A palavra fracção vem do latim *frango*, que quer dizer: *Eu quebro*. Uma fracção é, portanto, uma ou mais partes iguaes de um todo que na numeração tem o nome de unidade ou de 1.

Illustração. Uma unidade é uma cousa inteira como, por exemplo, uma maçã. Se dividirmos esta maçã em duas partes iguaes, cada uma das partes será **um meio** da maçã, e se escreverá $\frac{1}{2}$. Se dividirmos a maçã em tres partes iguaes, cada uma destas partes será **um terço** da maçã, e se escreverá $\frac{1}{3}$; duas destas partes serão dois terços, e se escreverão $\frac{2}{3}$; e as tres partes serão tres terços ou a maçã inteira, e se escreverão $\frac{3}{3}$. Se dividirmos a maçã em quatro partes iguaes, cada parte será **um quarto** da maçã, e se escreverá $\frac{1}{4}$; duas destas partes serão $\frac{2}{4}$; tres destas partes serão $\frac{3}{4}$, etc. Emfim se dividirmos a maçã em cinco partes iguaes, cada parte será $\frac{1}{5}$; se a dividirmos em seis partes iguaes, cada parte será $\frac{1}{6}$; duas destas partes serão $\frac{2}{6}$: tres destas partes serão $\frac{3}{6}$ cinco destas partes serão $\frac{5}{6}$, e assim por diante. Fica, pois, evidente que

Uma unidade

Dois meios

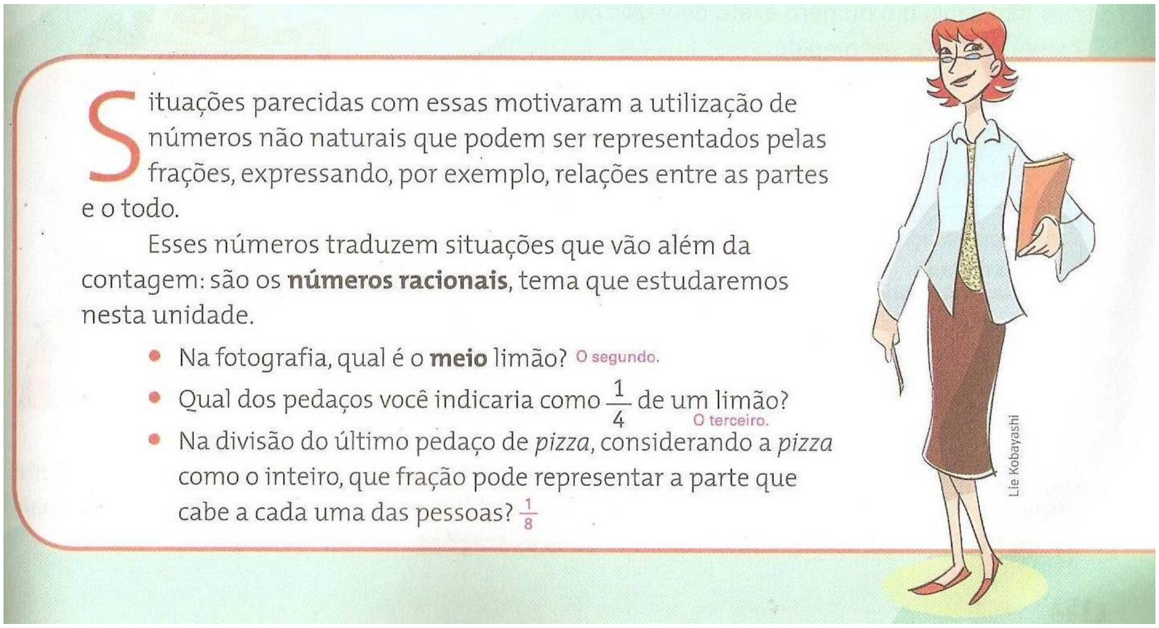
Tres terços

Ouatro quartos

Figura 2.1 – Definição de fração em livro didático de Trajano (1927, p.67)

Apesar de não ser objetivo deste trabalho fazer uma análise pormenorizada das definições de frações que estão nos livros didáticos de 6º ano, é interessante observar que uma breve pesquisa, em dez destes livros[5], revelou que esta idéia de “partes de um todo” é padronizada e está em todos os livros, inclusive nos mais atuais. Entretanto, nestes mais atuais, os autores começam a definir frações também como representações de números racionais, como pode ser observado na figura 2.2.

[5] Thiré e Melo (1940), Todeschi (1955), Kosien (1969), Cavalcante (1973), Lopes (2000), Barroso (2007), Dante (2007), Giovani, Castrucci; Giovanni Jr. (2007) e Mori; Onaga (2009).



Situações parecidas com essas motivaram a utilização de números não naturais que podem ser representados pelas frações, expressando, por exemplo, relações entre as partes e o todo.

Esses números traduzem situações que vão além da contagem: são os **números racionais**, tema que estudaremos nesta unidade.

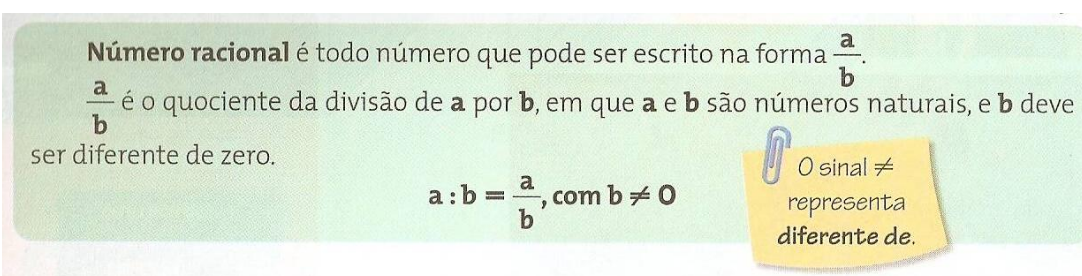
- Na fotografia, qual é o **meio** limão? O segundo.
- Qual dos pedaços você indicaria como $\frac{1}{4}$ de um limão? O terceiro.
- Na divisão do último pedaço de *pizza*, considerando a *pizza* como o inteiro, que fração pode representar a parte que cabe a cada uma das pessoas? $\frac{1}{8}$

Figura 2.2 – Definição de fração em livro didático de 6º ano de Mori; Onaga (2009, p.151)

Ainda neste livro didático, para introduzir números racionais, os autores sugerem ao professor (no caso, no livro “Manual do Professor”)

> proponha situações-problema em que os alunos identifiquem números racionais em diferentes contextos (cotidiano e histórico) e percebam que os números naturais são insuficientes para resolver algumas delas, como por exemplo, as que envolvem medidas e o quociente de uma divisão não exata. (MORI e ONAGA, 2009, p.198)

E mais adiante define números racionais da seguinte forma:



Número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$.

$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ é o quociente da divisão de **a** por **b**, em que **a** e **b** são números naturais, e **b** deve ser diferente de zero.

$$\mathbf{a : b = \frac{a}{b}, \text{com } b \neq 0}$$

Figura 2.3 – Definição de número racional em livro didático de Mori e Onaga (2009, p.199)

Volto aqui aos esclarecimentos já prestados na Introdução. No tradicional início do estudo de frações, através de situações de partição de um todo (parte-todo), as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, ...$ correspondem a diferentes modos de divisão e, nesse sentido, vamos considerá-las frações diferentes. No entanto, sob o ponto de vista da "essência numérica" [6], estando elas na mesma classe de equivalência, são frações que representam o mesmo número (a mesma quantidade) e é esta "essência numérica" que vou denominar "número fracionário".

Com a expressão "número fracionário", estou fazendo uma transição entre a linguagem escolar do 6º ano do Ensino Fundamental, na qual as frações estão presentes, e a linguagem que aparecerá mais adiante, "número racional", que envolverá outras formas de representação do mesmo "número fracionário". Ao utilizar a expressão "número fracionário", estou enfatizando um número que tem múltiplos significados, ampliando o entendimento do número $\frac{2}{3}$ para além da tradicional associação: "2 pedaços de uma pizza que foi dividida em três partes iguais".

É importante observar que esta questão que estou aqui tratando é delicada. Definições formais e recentes que buscam fazer a transição entre o conceito de fração e o conceito de número racional tratam as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ como sendo diferentes e é a "quantidade numérica" que elas representam que é tomada como número racional. Temos em Ripoll, Ripoll e Silveira (2006, p.54):

> o conjunto Q dos números racionais *não* é o conjunto das frações ordinárias, mas sim o conjunto das *quantidades numéricas* que elas representam; ou seja, Q é o conjunto das frações ordinárias *submetidas* à seguinte noção de igualdade: sendo a, b, A, B números inteiros com b e B não-nulos, teremos que $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ quando e só quando $aB = Ab$.

As abordagens dos livros relativas a números fracionários, que são utilizados em sala de aula, carecem de uma discussão no que se refere às situações (cotidianas ou formais) que ajudem a construir esta "essência numérica".

---

[6] Ripoll, Ripoll e Silveira (2006) utilizam a expressão "essência numérica" para indicar a quantidade que frações equivalentes representam.

Neste meu trabalho, estou pressupondo que a compreensão do número fracionário passa por situações de aprendizagem variadas, de forma que a pergunta “o que significa $\frac{2}{3}$ para você?” se desdobra em outras indagações, dependendo da situação em que é colocada: seriam dois pedaços de um bolo que está partido em três pedaços iguais? Seria dividir igualmente duas pizzas para três pessoas? Seria fazer um suco, onde, para cada duas medidas de suco concentrado, temos três medidas de água? Seria R$ 6,00 de R$ 9,00? Ou ainda, seria um número associado a um ponto da reta numérica?

Kieren (apud RODRIGUES, 2009) foi a primeira pesquisadora a propor que a construção do conceito de número fracionário deve levar em consideração diferentes interpretações e significados. Os quatro “subconstructos” propostos por essa autora são: quociente, operador, medida e razão. Outros pesquisadores, como Charalambous e Pitta-Pantazi (2007), consideram um quinto significado, o parte-todo, o qual Kieren considera como estando presente nas situações de quociente, operador e medida, e, por vezes, na situação que corresponde à razão.

É, a partir do diagrama apresentado na figura 2.4, que inicio minha discussão sobre os diferentes significados que podem ser atribuídos ao número fracionário $\frac{a}{b}$ (sendo a e b números inteiros positivos). Nesta próxima seção, procuro esclarecer as diferenças e semelhanças de significados que um número fracionário pode assumir. Aqui já adianto que minha pesquisa, na sua parte experimental, vai tratar de proposta didática que introduz o número fracionário, no 6º ano do EF, através do significado associado à medida.

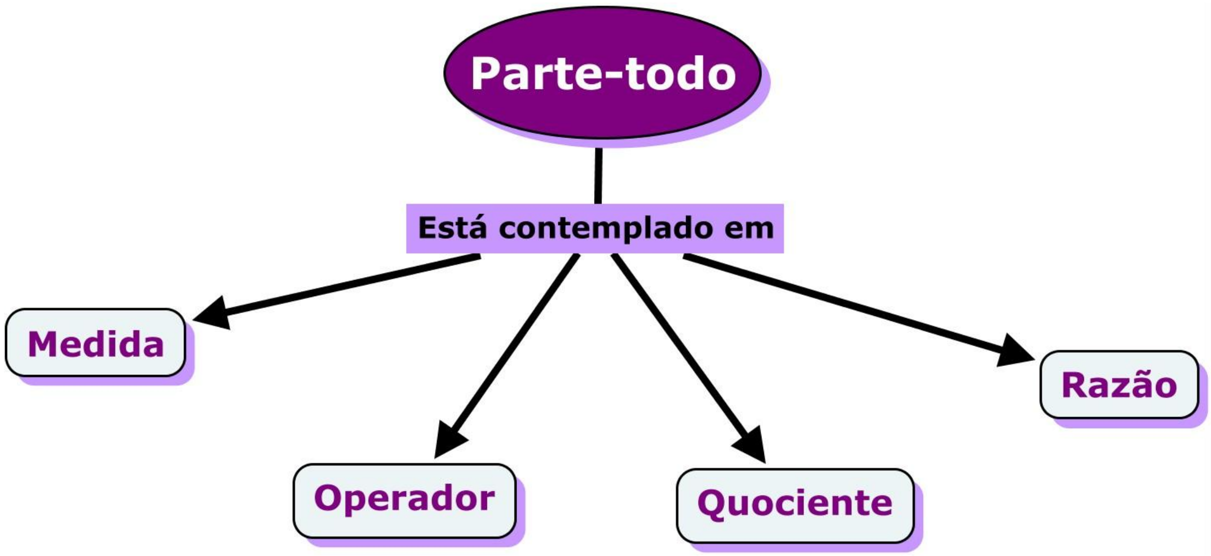


Figura 2.4 – Classificação dos diferentes significados segundo Kieren.

2.1.1 Significado "Parte-todo"

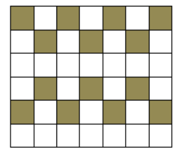
O significado "parte-todo" é o mais trabalhado na escola e o que mais se encontra nos livros didáticos. Este significado está associado à ideia de partição/divisão de um todo, ou um inteiro, contínuo ou discreto[7], em partes iguais e toma um número determinado destas partes. Também é possível fazer a contagem dupla das partes: o denominador é o número de partes que o "todo" foi dividido e o numerador é o número de partes consideradas.

Vejamos exemplos deste significado:

1) Quantidade contínua sem figura: Pedro cortou uma pizza em quatro fatias e comeu três. Que fração da pizza representa o que Pedro comeu?

Quadro 2.1 – Exemplo 1 parte-todo

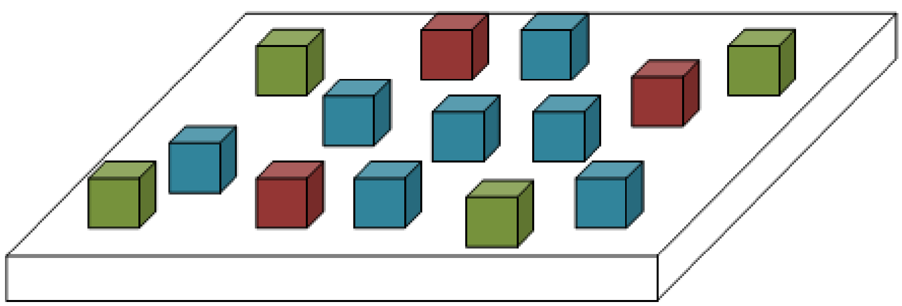
[7] Quantidade contínua: quantidades que podem ser divididas. Quantidade discreta: quantidades que dizem respeito a um conjunto de objetos.

2) Quantidade contínua com figura: Considere a figura como um inteiro e indique a fração que representa a parte pintada em relação a toda a figura. 

Quadro 2.2 – Exemplo 2 parte-todo

3) Quantidade discreta sem figura: Ana tem uma coleção de bolas de gude, todas do mesmo formato e tamanho, sendo 8 na cor azul e 9 na cor verde. Qual é a fração que representa o número de bolas de gude azuis em relação ao total de bolas de gude da coleção?

Quadro 2.3 – Exemplo 3 parte-todo

4) Quantidade discreta com figura: Na sala de aula da 5ª série, há uma coleção de cubinhos coloridos, todos de mesmo tamanho, conforme a figura. Qual é a fração que representa os cubinhos vermelhos em relação ao total de cubinhos? 

Quadro 2.4 – Exemplo 4 parte-todo

Segundo Romanatto (1999), é fundamental darmos importância para a conceitualização da unidade sempre, pois, se o aluno não tem noção do que deve considerar como unidade, ou todo, terá dificuldades para desenvolver a noção parte-todo. Em contexto contínuo, um objeto que será particionado é o todo considerado; já em contexto discreto, o todo é a união de objetos que formam uma coleção, e esta diferença a ser considerada pode ser fator de confusão para os alunos.

Llinares e Garcia (1988) e Charalambous e Pitta-Pantazi (2007) apontam para habilidades importantes que devem ser desenvolvidas para a compreensão do significado parte-todo, além da identificação da unidade:

1. Saber que frações estão relacionadas com partes de igual tamanho, o que pressupõe dividir figuras ou conjuntos em partes iguais;
2. Saber que o número de partes não coincide com o número de "cortes";
3. Saber que uma mesma fração pode representar quantidades diferentes dependendo do todo considerado[8];
4. Ter noção de subdivisões equivalentes do mesmo todo[9];
5. Ter noção de que, quanto mais se particiona, menor é a parte produzida;
6. Saber que as partes fazem parte do todo, ideia de inclusão[10].

Na falta destas habilidades, pode-se identificar alguns equívocos cometidos pelos alunos. Um exemplo é quando se pergunta qual a fração que representa a parte pintada do todo de uma figura e o aluno dá como resposta uma fração que relaciona a parte pintada com a parte não pintada. Na figura 2.6, a parte pintada representa 5 de 8 partes no total, ou seja, $\frac{5}{8}$, mas o aluno responde $\frac{5}{3}$, pois há 5 pintados e 3 em branco. Neste caso, verifica-se que não está desenvolvido a habilidade 7.

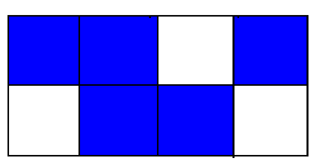


Figura 2.5 – Retângulo branco e azul

[8] Exemplo: ½ de uma pizza é diferente de ½ de uma barra de cereais, mas a relação entre as partes é a mesma – a metade.
[9] Um bolo é dividido em 4 partes e são tomadas 2 destas partes, outro bolo de igual tipo e tamanho é dividido em 8 partes e são tomadas 6 destas partes, assim a quantidade de bolo da primeira situação é a mesma da segunda, por se tratar de bolos iguais.
[10] Exemplo: 2/3, as duas partes fazem parte das três.

Outro exemplo é quando se pergunta o mesmo que anteriormente com a figura 2.6, então, se a noção de divisão em partes iguais não está bem definida, há uma grande tendência que deem a resposta $\frac{2}{3}$, e não $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$. Portanto, não têm a habilidade 1 desenvolvida.

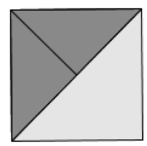


Figura 2.6 – Quadrado branco e cinza

Também se percebe uma confusão na própria notação das frações, confundindo o que significa numerador e denominador. Na figura 2.7, ao invés de representar a parte colorida por $\frac{3}{4}$, escreve $\frac{4}{3}$, entendendo que no numerador coloca-se o total de partes da figura e no denominador coloca-se a quantidade de partes pintadas.

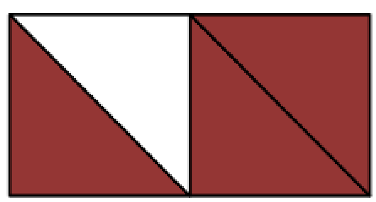


Figura 2.7 – Retângulo branco e bordô

2.1.2 Significado "Medida"

Nesta interpretação, o número fracionário na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos e b não-nulo, é associado a ponto sobre a reta numérica e o seu caráter quantificador indica a medida do segmento com extremidades neste ponto e naquele que é identificado com o número zero (a origem da reta).

Este significado pode possibilitar um processo de ensino-aprendizagem contextualizado em que a existência dos números fracionários se apresenta de forma muito natural. Segundo Crump (apud BACKENDORF, 2010), a necessidade de medir comprimento de segmentos (uma quantidade contínua) é um incentivo para o desenvolvimento dos números fracionários – a medida pode ser considerada um meio pelo qual duas grandezas de mesma espécie podem ser comparadas em termos numéricos.

Ao se medir o comprimento de determinado objeto utilizando uma unidade de medida específica – por exemplo, um pedaço de cordão –, pode-se encontrar uma relação com a unidade que não corresponde a número inteiro, fazendo-se necessário subdividir o cordão em partes iguais para, então, identificar o número conveniente de partes que são necessárias para ajustar a medida procurada. Neste processo, vê-se a presença do significado “parte-todo” (as frações), sendo uma atividade que pode criar ambiente de investigação no qual os alunos trabalham simultaneamente com dois significados de número fracionário, como “medida” e “parte-todo”.

A introdução de uma reta numérica com os números racionais não-negativos, conforme já mencionado, pode ajudar na (futura) compreensão a respeito dos números irracionais, e, consequentemente, da reta real, no sentido de superar uma primeira idéia intuitiva (equivocada) de que, uma vez escolhida livremente uma unidade de comprimento, a medida do comprimento de qualquer segmento de reta poderia ser expressa como um múltiplo fracionário adequado da medida da unidade de comprimento adotada.[11] (RIPOLL, RIPOLL e SILVEIRA, 2006, p.111).

É importante destacar a diferença de contextos quando se trabalha com a régua ou com reta numérica: a régua, por ser um instrumento de medida manipulável aos alunos, coloca o aluno em contexto concreto de ação; já a reta numérica, na qual pontos são identificados com números, exige dos alunos raciocínios em contexto mais abstrato[12], e isto é interessante do ponto de vista de desenvolvimento cognitivo, especialmente se tratando de alunos de 6º ano.

---

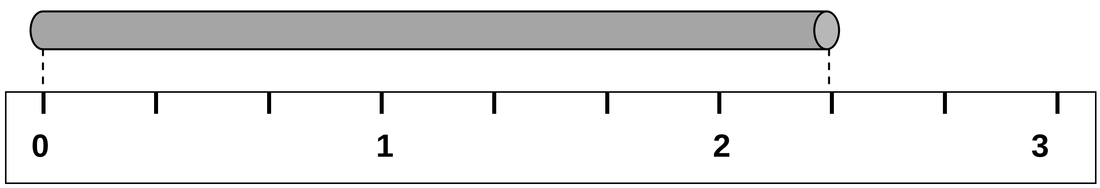
[11] Ou seja, de que qualquer segmento de reta seria comensurável com a unidade.

[12] Considero por contexto abstrato o contexto que não possui objetos manipuláveis, opondo-se ao contexto concreto.

Para fazer esta transição, do concreto para o abstrato, pode ser interessante iniciar com atividades de construção de régua para depois fazer a transposição dos números fracionários para uma reta, e é disto que vamos tratar especialmente em nossa proposta didática, no Capítulo 3. Esclareço desde já que a régua considerada nesta proposta não se trata de régua centimetrada e tampouco decimal. A seguir, apresento alguns exemplos de atividades que envolvem o significado de número fracionário como medida.

1) Contexto de medida:

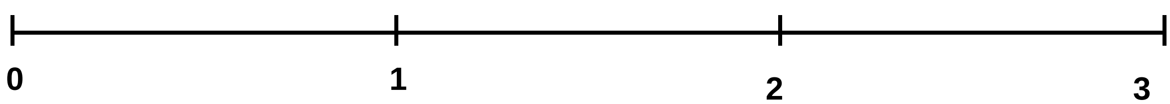
Quanto mede o comprimento do cano?



Quadro 2.5 – Exemplo 1 do significado “medida”.

2) Contexto de ponto na reta:

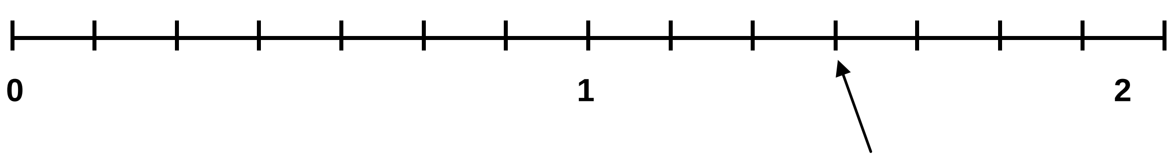
Marque o número $\frac{3}{4}$ na reta numérica abaixo.



Quadro 2.6 – Exemplo 2 de significado “medida”.

3) Contexto de ponto na reta:

Qual número fracionário corresponde ao ponto marcado pela seta na reta abaixo?



Quadro 2.7 – Exemplo 3 do significado “medida”.

No exemplo 1, uma das extremidades do cano está posicionada sobre o número zero, então é preciso encontrar qual número está associado à outra extremidade do cano. Para encontrar este número, deve-se observar em quantas partes a unidade está dividida, e quantas destas partes o cano "ocupa". Este tipo de questão abre a possibilidade da resposta ser de duas formas: o tamanho do cano é 2 unidades inteiras mais $\frac{1}{3}$ da unidade $\left(2\frac{1}{3}\right)$; ou o tamanho do cano é $\frac{7}{3}$ da unidade.

Já no exemplo 2, é preciso realizar a divisão da unidade para, então, poder marcar o número desejado. O exemplo 3 possui a mesma lógica do exemplo 1, porém não está num contexto concreto.

Conforme Charalambous e Pitta-Pantazi (2007), algumas habilidades são necessárias e devem ser desenvolvidas pelos alunos[13] no processo de ensino-aprendizagem do número fracionário como medida:

1. Fazer partições da unidade;
2. Ter noção da densidade dos racionais, isto é, que entre dois números racionais sempre tem outro número racional;
3. Medir a partir do zero;
4. Ter noção de correspondência bijetiva: ponto → número e número →ponto;
5. Ter noção de que, para subdividir a unidade em n subintervalos, é preciso n-1 pontos[14];
6. Ter noção de ordem "maior/menor"[15];
7. Ter noção de equivalência de números fracionários[16];
8. Ter noção da relatividade do denominador b em a / b[17].

Esta forma de trabalhar com os números fracionários será o foco de minha experimentação e acredito que poderá surgir algumas dificuldades iniciais no

[13] Cabe ressaltar que muitos professores de escola básica, principalmente dos anos iniciais, também precisam desenvolver melhor estas habilidades a fim de ter suporte teórico para ensinar seus alunos.
[14] Exemplo: para representar na reta a fração 3/5, é necessário dividir a unidade em cinco partes e, para isso, tem que fazer 4 "cortes" entre o número 0 e número 1.
[15] Exemplo: 1/3 é menor do que ½, pois está mais próximo do zero.
[16] Exemplo: 2/4 e 1/2 estão associados ao mesmo ponto da reta.
[17] Exemplo: marcar o ponto 2/3 na reta que tem a unidade subdividida em 6 partes iguais.

desenvolvimento destas habilidades. As dificuldades e os equívocos cometidos pelos alunos são inerentes ao processo pedagógico.

2.1.3 Significado “Operador Multiplicativo”

O significado de número fracionário como operador multiplicativo é bastante trabalhado na escola, principalmente através de problemas matemáticos no 6º ano do EF. Geralmente, nos capítulos de livros didáticos, é chamado de “fração de uma quantidade” ou “fração de um número”. Este significado tem a função de transformação do número, no sentido de “algo que atua sobre uma situação e a modifica” (LLINARES; GARCIA, 1988).

O operador pode ser comparado à ação de uma “máquina”, que, no contexto discreto, divide e multiplica os números de entrada para obter os números de saída; e, no contexto contínuo, reduz ou amplia a quantidade inicial. Os exemplos a seguir tratam de tornar mais claro este significado do número fracionário.

1) Quantidade discreta:

Numa classe de 36 alunos, $\frac{3}{4}$ dos alunos são meninas. Quantas meninas há na classe?

Entrada	Operador	Saída
36 alunos	Dividir por 4, multiplicar por 3	27 alunos

Quadro 2.8 – Exemplo 1 do significado “operador”

2) Contexto contínuo:

Um pedaço de madeira tem comprimento medindo $\frac{3}{5}$ de um metro. Quanto mede esta madeira?

Estado inicial	Operador	Estado final
1 metro ou 100 centímetros	Dividir por 5, multiplicar por 3	0,6 metros, 60 centímetros Ou apenas 3/5 de metro.

Quadro 2.9 – Exemplo 2 do significado “operador”.

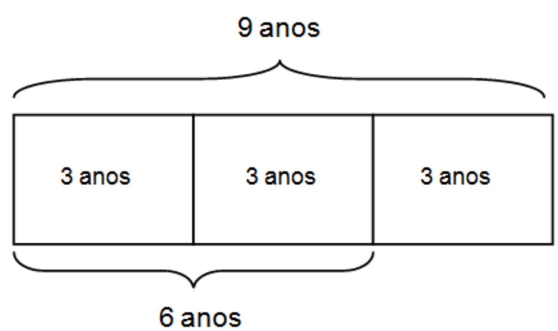
O uso do número fracionário como operador, no geral, está indicado no enunciado de um problema pela preposição “de” e isto sinaliza, para o aluno, uma operação de multiplicação. Pode-se realizar a operação conforme indicado nos quadros 2.8 e 2.9, ou iniciar fazendo a multiplicação pelo número 3 e depois fazer a divisão por 4 ou 5.

Na resolução de problemas, o uso de um operador pode ser explicitado através de diagrama, similar aos que são utilizados nos raciocínios do tipo “parte-todo”. Vale aqui destacar que as representações e os símbolos que os alunos utilizam na interpretação das situações-problema são de grande importância para o entendimento das noções matemáticas. Os “desenhos” ajudam na organização de suas idéias, o exemplo abaixo ilustra isto.

3) Quantidade contínua:

Aninha tem 9 anos de idade. Seu irmão tem $\frac{2}{3}$ de sua idade. Qual é a idade do irmão de Aninha?

(DANTE, 2007, modificado)

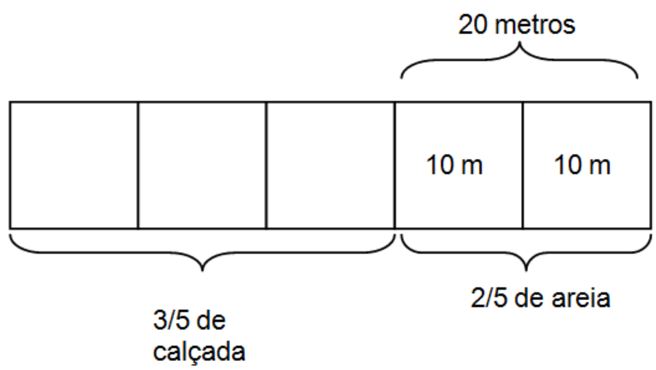


Quadro 2.10 – Exemplo 3 do significado “operador”.

O diagrama, dado no quadro 2.10, representa os 9 anos de Aninha divididos em grupos de 3 anos, o que reflete: ou a ação do operador ($\frac{2}{3}$ da idade de Aninha significa dividir 9 por 3 e multiplicar por 2) ou simplesmente um raciocínio do tipo “parte-todo” (das 3 partes iguais são tomadas duas e somadas). De fato, muitas vezes, a situação de número fracionário como operador pode ser resolvida com raciocínio do tipo “parte-todo", especialmente quando a "divisão do todo em partes iguais" pode ser concretizada[18].

4) Quantidade Contínua:

Três quintos da rua que liga a casa de Lúcia à praia são calçados. Os 20 metros restantes ela anda na areia. Determine a distância da casa à praia? (BARROSO, 2007, p.130)



Quadro 2.11 – Exemplo 4 do significado "operador".

No exemplo do quadro 2.11, também se pode utilizar o significado "operador", porém com o sentido contrário: é dado um valor de saída e queremos o de entrada. Dessa forma, é necessário descobrir que os 20 metros correspondem ao restante 2/5, e, dessa forma, fazer: 20 dividido por 2 e multiplicado por 5. No entanto, o diagrama desenhado para este exemplo induz ao raciocínio "parte-todo", pois, se duas partes das cinco valem 20 metros, cada uma vale 10 metros e como se tem cinco partes ao todo, tem-se 50 metros de calçada.

Para muitos alunos, esta pode não ser uma forma adequada de resolver o problema, ou, por não compreenderem o procedimento ou, então, por já conseguirem realizar as relações mentalmente sem a necessidade de representá-las no papel. O importante, ao se trabalhar este significado com os alunos, é que eles sejam capazes de perceber o caráter de transformação do número fracionário, associado às operações de multiplicação e divisão, e de perceber que fração é sempre divisão em partes iguais,

[18] Se a idade de Aninha fosse 11 anos, o significado "operador" seria inquestionável. Um outro exemplo: para calcular 2 / 3 da área de um quadrado , é natural usar o significado "parte-todo" se o valor da área é divisível por 3. Caso contrário, é com o significado de operador que o cálculo é feito.

desenvolvendo habilidades para a resolução de problemas. Conforme Charalambous e Pitta-Pantazi (2007), tem-se:

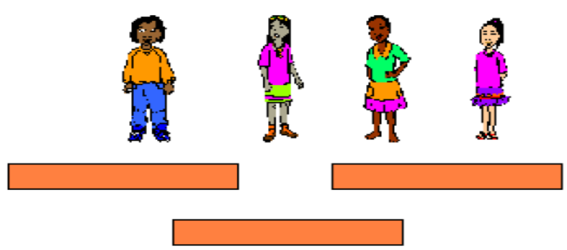
1. Interpretar o operador como parte-todo;
2. Interpretar o operador como uma multiplicação;
3. Relacionar com entrada e saídas de uma “máquina”;
4. Entender que o número fracionário como operador pressupõe um resultado.

2.1.4 Significado “Quociente”

Outro significado associado ao número fracionário é o de quociente. Neste caso, o número fracionário a/b (também indicado por a : b) representa o número c tal que a = c . b. Esta idéia não é simples para os alunos, pois, neste novo significado, a barra da notação $\frac{3}{4}$ assume a função de “dividir 3 por 4”, que é muito diferente do significado de “dividir o todo em 4 partes e tomar 3” .

1) Quantidade contínua:

Três barras de chocolate são divididas para 4 crianças, quanto cada uma receberia? (MERLINI, 2005, p.77)



Quadro 2.12 – Exemplo 1 do significado “quociente”.

A situação apresentada no exemplo 1 do quadro 2.12 é de “quociente”, pois pressupõe dividir 3 chocolates para 4 crianças. Para resolver este problema, a resposta de quanto cada criança receberia poderia ser indicada pelo número fracionário $\frac{3}{4}$, que indica a divisão. Porém, também poderia se pensar em dividir cada chocolate em 4 partes, obtendo-se 12 partes no total, o que caberia 3 destas partes para cada criança, assim será utilizado raciocínio com o significado “parte-todo”. Também, se for considerado que cada criança receberia $\frac{1}{4}$ de cada barra, o significado de operador estaria envolvido. A figura 2.8 ilustra melhor como ficaria a repartição, onde cada cor representa uma criança diferente.

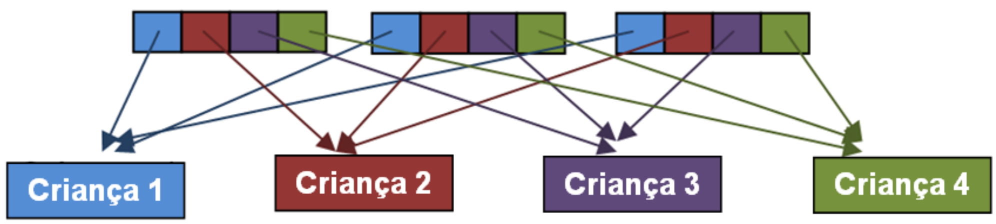


Figura 2.8 – Representação da situação do exemplo 1 do significado “quociente”.

Outra forma de resolução pressupões que a criança divida dois chocolates ao meio obtendo-se quatro metades que podem ser distribuídas, assim cada criança receberia ½ e o terceiro chocolate pode ser dividido por quatro. Portanto cada criança receberia ½ + ¼ o que resulta em ¾.

2) Quantidade discreta: Serão divididos 20 lápis para 5 alunos. Quantos lápis cada aluno receberá?

Quadro 2.13 – Exemplo 2 do significado “quociente”.

No exemplo 2, do quadro 2.13, a resposta seria uma simples divisão de 20 por 5. Veja que não faria sentido utilizar o número fracionário do exemplo 1 numa situação de contexto discreto. Como dividir 3 lápis para 4 alunos? Iríamos quebrar os lápis? Dessa forma, o contexto discreto do significado “quociente” pressupõe que o numerador seja múltiplo do denominador para que a situação tenha sentido.

Segundo Charalambous e Pitta-Pantazi (2007), há ainda outros tipos de situações com o significado “quociente”, conforme o exemplo 3:

3) Quantidade contínua:
Três pizzas serão divididas entre crianças. Sabendo que cada criança comeu $\frac{3}{4}$ de pizza, quantas crianças havia para comer as pizzas?

Quadro 2.14 – Exemplo 3 de significado “quociente”

Neste caso, basta verificar quantas vezes $\frac{3}{4}$ cabe em 3 pizzas, ou seja, $3 \div \frac{3}{4}$ Assim, chega-se à conclusão de que há 4 crianças para comer. Dessa forma, é preciso salientar que este tipo de situação pode ser encontrada, nos livros didáticos de 6º ano do EF, em capítulos referentes à operação de divisão de números fracionários. A figura 2.9 ilustra a solução:

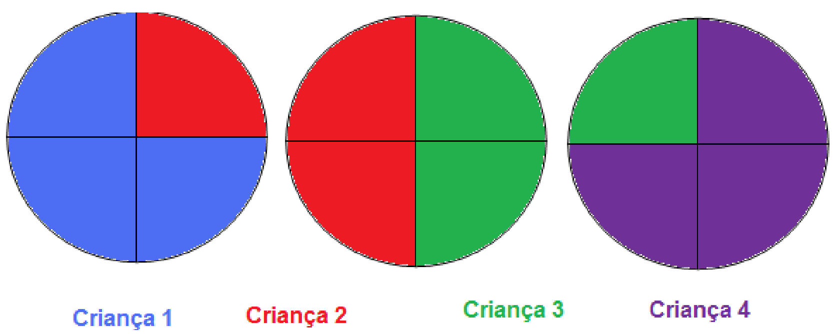


Figura 2.9 – Representação da situação do exemplo 3 do significado “quociente”.

Portanto, a compreensão do significado “quociente” pressupõe o desenvolvimento de algumas habilidades, segundo Charalambous e Pitta-Pantazi (2007):

1. Identificar a barra da fração como divisão: $\frac{a}{b} = a \div b$;
2. Relacionar com o significado parte-todo e, por vezes, com o operador;
3. Estabelecer diferenças em contextos contínuos e discretos;
4. Reconhecer a divisão em dois sentidos: “partitiva e quotitiva”[19];

[19] Expressões traduzidas de “partitive and quotitive division” (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI 2007), sendo que partitivo se refere aos exemplos 1 e 2, e o quotitivo ao exemplo 3.

Vale aqui mencionar que os livros didáticos utilizam o significado de número fracionário como quociente (a : b) ao introduzir os números decimais. Neste momento, ao obter a expansão decimal de $\frac{a}{b}$ através da divisão de a por b, os alunos concretizam um processo de divisão no qual não se tem mais a presença de raciocínios que se confundem com aqueles do tipo “parte-todo” ou “operador”.

2.1.5 Significado “Razão”

Em certas situações, as frações são usadas como um índice comparativo entre duas grandezas, não existindo uma relação com uma unidade ou um todo, necessariamente. A comparação entre duas grandezas “a” e “b” pode ser representada por “a : b” , “$\frac{a}{b}$”, na qual se faz a leitura: “a” está para “b”.

Os exemplos que se seguem estão classificados em quantidades discretas e contínuas.

Quantidade discreta:
1) Na escola de Pedro foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio? (MERLINI, 2005, p.118)

Quadro 2.15 – Exemplo 1 de significado “razão”.

Segundo Llinares e Garcia (1988), a probabilidade de ocorrer um evento estabelece uma relação de comparação todo-todo entre o conjunto de casos favoráveis e o conjunto de casos possíveis. Dessa forma, podemos dizer que há chance do exemplo 1 ser representado pela razão $\frac{20}{150}$ ou $\frac{2}{15}$, ou ainda, pelo percentual de aproximadamente 13,3%. Assim, as porcentagens podem estar associadas ao significado de razão, apesar de também estarem relacionadas com o significado “operador” e “parte-todo”. Veja o exemplo 2, no quadro 2.16.

Quantidade contínua:
2) Quanto é 15% de R$ 300,00?

Quadro 2.16 – Exemplo 2 do significado “razão”.

A situação indica a ideia de “operador” pela preposição “de”[20], mas podemos pensar em 15% como “15 está para 100” ou “a cada 100 reais temos 15 reais”, e estabelecer uma relação entre conjuntos[21].

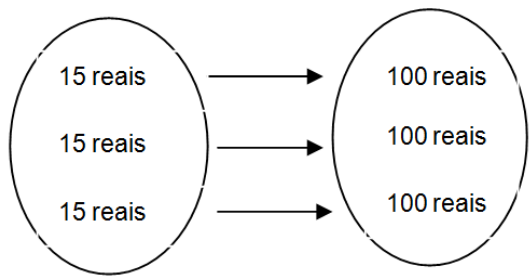
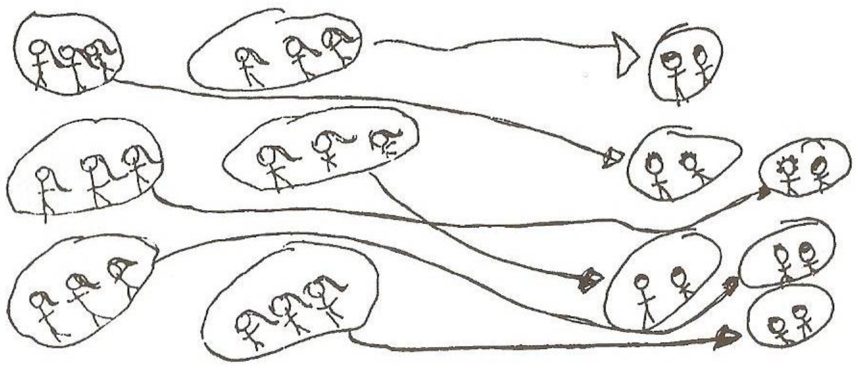


Figura 2.10 – Representação do exemplo 2 do significado “razão”.

Dessa forma, tanto a utilização da interpretação “operador” como a de “razão” são satisfatórias para a resolução do problema, em que ambas resultam em R$ 75,00. O que precisa ser lembrado é que os significados dos números fracionários não estão dissociados, e a escolha pela utilização de um ou de outro deve levar em consideração o que é mais significativo para o sujeito que resolve o problema.

Carvalho (2009, p.56) apresenta um exemplo, já envolvendo o raciocínio proporcional, com a resolução de um aluno e a sistematização da professora:

[20] Cabe salientar a preposição “de” já está presente na multiplicação com números naturais.
[21] Tipo de resolução conforme Llinares e Garcia (1988).

Quantidade extensiva e discreta com proporcionalidade: 3) Em uma festa havia 2 meninos para cada 3 meninas. As meninas eram 18, quantos eram os meninos? 

Quadro 2.17 – Exemplo 3 do significado “razão”.

Após realizar o desenho, o aluno conclui que havia 12 meninos. Posteriormente, a professora redigiu a resposta de acordo com formalização matemática para as razões: “$\frac{2}{3}$ de 18 meninas são 12 meninos”.

Vejamos outros exemplos:

Quantidade contínua: 4) Um automóvel percorre 120 km em 2h. Qual a sua velocidade média ao fazer o percurso? 5) Um menino comprou 3 pacotes de salgadinho por R$ 5,00. Outro menino comprou 4 pacotes do mesmo salgadinho por R$ 6,00. Quem comprou pacotes de salgadinhos mais baratos?

Quadro 2.18 – Exemplos 4 e 5 do significado “razão”.

Quantidade discreta: 6) Numa festa na escola, havia 3 refrigerantes de 2 litros para cada 5 crianças. Se compareceram 90 crianças, quantos refrigerantes havia na festa?

Quadro 2.19 – Exemplo 6 do significado “razão”.

O significado do número fracionário como “razão” dificilmente é trabalhado no 6º ano do EF, sendo que sua abordagem, em geral, é realizada nas séries posteriores, seguida dos estudos de proporção com grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Segundo Charalambous e Pitta-Pantazi (2007), a compreensão do significado “razão” pressupõe o desenvolvimento da habilidade de reconhecer a proporcionalidade estabelecida entre as quantidades quando estas são modificadas. A concentração de um suco, por exemplo, não altera se, de 2 copos de suco concentrado para 3 copos de água, usarmos 4 copos de suco concentrado para 6 copos de água.

* * *

Dessa forma, a construção do conceito de número fracionário passa por um trabalho contemplando diversas situações que envolvem os diferentes significados deste número. Conforme o que foi discutido nesta seção, pode-se perceber que os significados não estão completamente separados, afinal o conhecimento não se dá de forma estanque, e, de certa forma, o fazer matemático é fazer relações. Assim, segundo Llinares e Garcia,

> poderíamos dizer que as paredes que podem separar as distintas interpretações do número racional vão ficando mais finas ao subirmos o edifício matemático, até que chegue um momento que em contextos abstratos (trabalho algébrico com números e equações) passamos de uma interpretação a outra sem impedimentos conceituais. (1988, p.76, traduzido pela autora)

Com isso, não poderia deixar de fazer referência à importância do papel do professor neste processo, nas escolhas e seleção das atividades que propõe para os alunos. Portanto, cabe-nos entender como se dá os processos de aprendizagem dos conceitos pelas crianças e analisar um dos principais materiais que servem de apoio ao professor na sua tarefa, o livro didático.

2.2 ASPECTOS COGNITIVOS: A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO FRACIONÁRIO E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Para entender como se dá o processo de construção do conceito de número fracionário, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) se apresenta como um interessante referencial, pois trata dos processos de conceitualização e representação: significante e significado. Minha intenção, nesta seção, é apresentar os principais elementos desta teoria a fim de proporcionar ao leitor um entendimento a respeito do meu "olhar" quando analiso as ações dos alunos frente às situações que foram propostas na sequência didática implementada como parte de minha pesquisa[22].

A TCC foi desenvolvida pelo psicólogo e pesquisador Gérard Vergnaud e se constitui como resultado de suas reflexões sobre ensino e aprendizagem da Matemática. Em meados dos anos de 1960, a França vivia um momento de consolidação da Matemática Moderna[23], que proporcionou ambiente favorável para o desenvolvimento da Escola Francesa de Didática de Matemática, a partir de 1970. Vergnaud teve grande participação neste processo, se tornando um dos maiores especialistas no campo da Didática da Matemática.

Com o propósito de tentar entender melhor os problemas de aprendizagem em campos específicos de conhecimento, Vergnaud se interessou por aquilo que se passa na sala de aula e pela "epistemologia do conceito", isto é, a "relação existente entre um conceito e os problemas práticos e teóricos aos quais esse conceito dá uma resposta." (VERGNAUD, 1998, p.26). Desenvolveu, então, a TCC, que integra ideias fundamentais de outras teorias, tais como: o papel do docente como mediador; os esquemas de pensamento, de Piaget; e o papel da linguagem, de Vygotsky.

O domínio de um campo conceitual ocorre respeitando o tempo cognitivo dos alunos, considerando a experiência, maturidade e aprendizagem destes sujeitos. Não ocorre em alguns meses nem mesmo em alguns anos. Ao contrário, situações novas

---

[22] O Capítulo 3 trata da concepção, implementação e análise da sequência didática

[23] O Movimento da Matemática Moderna foi um movimento de reformulação do ensino de Matemática no Secundário, a fim de adequá-lo à nova realidade do Ensino Superior da época. Ocorreu na Europa e Estados Unidos, nos anos de 1950 e 1960, e no Brasil em 1960 (BÚRIGO, 1989).

surgem para serem confrontadas e superadas, e assim enriquecem e tornam mais complexo o campo conceitual (MOREIRA, 2002).

Neste processo de aprendizagem em que o conhecimento é interpretado como um “campo conceitual”, grande é a rede de conceitos que constituem este campo. Quanto ao conhecimento relativo a número fracionário, consideramos que este se constitui em um campo conceitual que se insere como um dos componentes de um campo maior – o campo conceitual das estruturas multiplicativas, já bem discutido por Vergnaud. Dessa forma, inserimos o conhecimento “números fracionários” como um dos nós com muitas conexões dentro da grande rede de conexões que se constitui no “campo conceitual multiplicativo”. A figura 2.11 traz uma representação sobre como estou vendo estas conexões da rede.

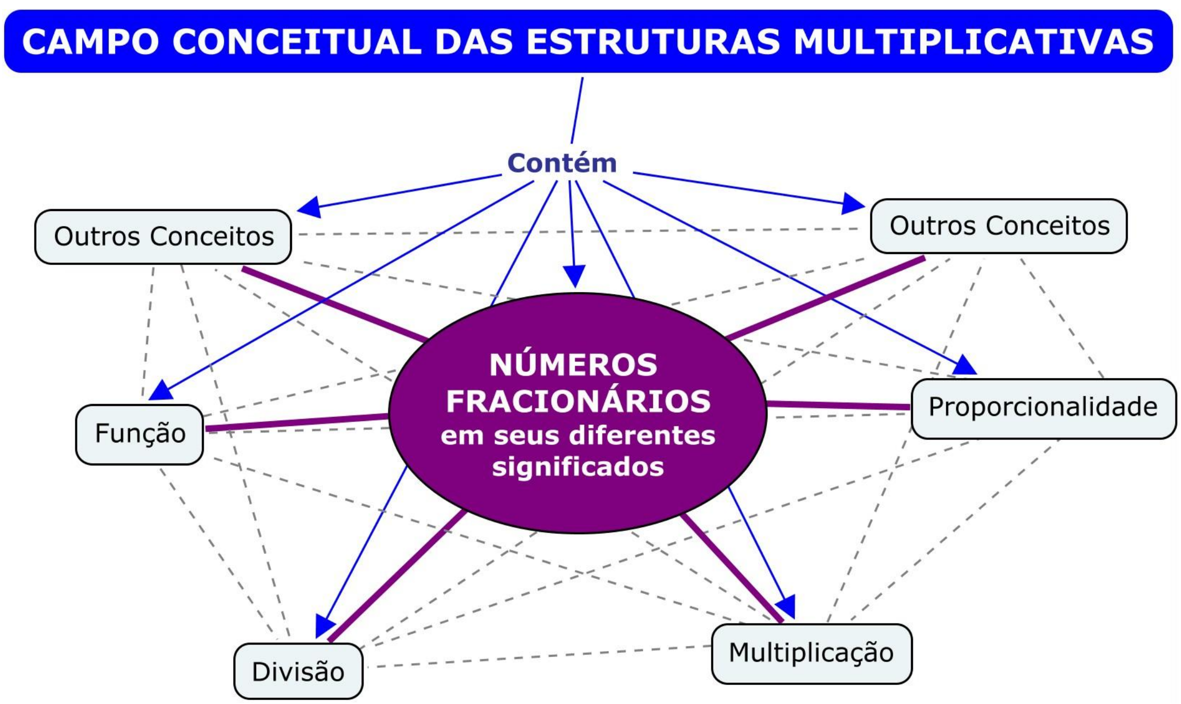


Figura 2.11 – Representação do Campo Conceitual dos Números Fracionários.

Os quatro conceitos destacados na figura foram escolhidos pela conexão que têm com os diferentes significados dos números fracionários. Abaixo listo exemplos de relações entre os diferentes significados do número fracionário e os conceitos que foram colocados em destaque no diagrama, salientando que não estou esgotando as possibilidades de relações que constituem esta complexa rede de conhecimento:

- o significado “parte-todo” utiliza os conceitos de divisão e de proporcionalidade;
- o significado “medida” utiliza os conceitos de divisão, multiplicação, e também função;
- o significado “operador” utiliza os conceitos de função, divisão e multiplicação;
- o significado “ quociente” utiliza o conceito de divisão;
- o significado “ razão” utiliza o conceito de proporcionalidade.

Assim, temos que o conceito de número fracionário, a partir de situações que proporcionam os diferentes significados, evoca muitos conceitos que se relacionam entre si. O destaque que damos ao conceito de números fracionários não faz dele um conceito “maior” ou “mais abrangente” que os demais do diagrama. Se estivéssemos discutindo a Proporcionalidade, por exemplo, teríamos este conceito no centro da figura e o conceito de número fracionário ficaria nas adjacências.

Cabe ressaltar que estes conceitos colocados na figura (função, proporcionalidade, multiplicação e divisão) não são exclusivos de um único campo conceitual, portanto muitas outras ligações podem ser estabelecidas com outros Campos Conceituais. Segundo Vergnaud (2003, p.30), “[...] campo conceitual é um conjunto vasto, porém organizado, a partir de um conjunto de situações”. Ou seja, é um conjunto de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento conectados uns aos outros.

Estabelecido que um campo conceitual é uma rede de conceitos em conexão, avanço com o entendimento que deve ser atribuído à palavra “conceito” na TCC. Segundo Vergnaud (1996b, p.166), um conceito é formado por uma tripla **C=(S, I, R),** na qual:

S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);
I: conjunto das invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado);
R: conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem **que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).**

Quadro 2.20 – Elementos da TCC

A partir desta definição de conceito, dada por Vergnaud, apresento um diagrama na figura 2.12 que ilustra como o conceito de "número fracionário" pode ser entendido à luz da TCC:

Figura 2.12 – Conceito de número fracionário associado à TCC.

No que segue, faço algumas considerações nas quais procuro esclarecer a complexidade do conceito "número fracionário", a qual se evidencia quando ele é tomado na forma de tripla (S, I, R).

Na TCC a construção de um conceito se dá através de uma "classe de situações", pois são elas que dão sentido ao conceito. Esta classe é composta por diversas tarefas, problemas e atividades, correspondentes a um conceito específico, que desestabilizam[24] o aluno para, assim, ocorrer a aprendizagem.

Dessa forma, entendo que um conjunto de situações e de problemas, teóricos ou práticos, envolvendo os diferentes significados do número fracionário – parte-todo;

[24] Segundo Brousseau (2008b, p.34), "[...] o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, dificuldades, desequilíbrios. Esse saber, fruto de sua adaptação, manifesta-se por intermédio de novas respostas, que são a marca da aprendizagem."

quociente; medida; operador; e razão –, se forem propostos aos alunos, contribuem para que este conceito adquira sentido para o aluno.

Dadas as situações, os alunos utilizarão suas competências para resolvê-las. Nesta busca por estratégias de resolução, os alunos evocam conhecimentos anteriormente formados, fazendo uma "organização da sua conduta". À forma de agir perante as situações e às escolhas dos conhecimentos usados, Vergnaud define como "esquema".

Segundo Moreira (2002), o conceito de "esquema" foi introduzido por Piaget, a fim de compreender as formas de organização das habilidades sensório-motoras e das habilidades intelectuais do sujeito. Porém, Vergnaud desloca a relação "indivíduo-objeto", dada por Piaget, para a relação "indivíduo-situação", ampliando a noção de esquema. Assim, Vergnaud chama de esquema "à forma estrutural da atividade, à organização invariante da atividade do sujeito sobre uma classe de situações". (FRANCHI, 2008, p.200).

Logo, o desenvolvimento de um esquema está inteiramente ligado ao tipo de situação, ou classe de situação, a ser resolvida. E, dentro dos esquemas gerados pela situação (ou por cada situação da classe), é possível encontrar elementos invariantes, isto é, conhecimentos em ação (conceitos e teoremas em ação) que perpassam toda a classe de situação. Dessa forma, nas diferentes tarefas desta mesma classe de situações, os mesmos conceitos e teoremas são evocados, e isso justifica o caráter invariante da operacionalidade destes esquemas. O quadro abaixo exemplifica esta relação:

	Classe de Situações					
Conceito A	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	...
	Invariantes Operatórios contidos nos Esquemas $\longrightarrow$					

Quadro 2.21 – Classe de situações

Segundo Franchi (2008), para esclarecer a ideia de esquemas e de invariantes operatórios na atividade matemática, Vergnaud

> analisa, entre outros, o esquema da enumeração de uma pequena coleção de objetos discretos por uma criança de cinco anos: por mais que varie a forma de contar, por exemplo, copos na mesa, cadeiras da sala, pessoas sentadas de maneira esparsa em um jardim, não deixa de haver uma organização invariante essencial para o funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e gestos dos dedos e das mãos, enunciação correta da série numérica, identificação do último elementos da série como o cardinal do conjunto enumerado (FRANCHI, 2008, p.201).

Estes esquemas podem não ser eficazes para resolver certa classe de situações, e, então, há um desencadeamento de diversos outros esquemas, com outros conceitos e teoremas, que podem entrar em competição e que, para resolver o problema, precisam ser acomodados e reorganizados. Dessa forma, a aprendizagem está associada a construção de novos esquemas que permitem ao sujeito resolver novas e mais complexas situações (VERGNAUD,1996a).

Assim, estes elementos essenciais que estão presentes em toda ação da criança são definidos por Vergnaud (2009) da seguinte forma:

> um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação em situação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação (p.23).

Segundo Moreira (2002, p.7), há uma relação dialética entre conceitos e teoremas: “conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos”. Assim, seria um erro confundi-los. Quando um teorema em ação, frente a uma situação, é falso, pode ser modificado para melhor se adaptar à situação. Já um conceito em ação não será verdadeiro ou falso, mas se estabelece se sua utilização é importante ou não, relevante ou irrelevante para a situação. Vale salientar que o significado de teorema em ação, utilizado pela TCC, não é o mesmo do teorema matemático, pois teorema é uma propriedade verdadeira que já foi demonstrada.

Num exemplo, onde crianças precisavam comparar volumes de objetos, Vergnaud (1996b, p.160-161) diz que “o primeiro esquema mobilizado foi o da comparação das alturas”. Assim, para a criança, quanto “mais alto, maior o volume”. Aqui se identifica que o conceito de altura foi utilizado, e, portanto, é o conceito em ação, e que a hipótese de que quanto mais alto maior é o volume é o teorema em ação. Este teorema é falso, pois desconsidera que a área da base do objeto influi no volume. Assim, a criança terá que reformular seu teorema, mas, para isto, precisa entender que o volume é proporcional à altura e à área da base do objeto.

Outro exemplo de teorema em ação, registrado por Vergnaud (1998, p.168), se evidencia quando os alunos resolvem o seguinte problema:

> um trem está andando com velocidade constante e leva 16 minutos para ir da cidade A até a cidade B. A distância entre as cidades A e B é de 40 km. Para ir da cidade B até a cidade C, o trem gasta 36 minutos. Qual é a distância entre as cidades B e C? (tradução da autora)

Alguns alunos apresentam a solução abaixo:

40 x 2 = 80
80 + 10 = 90
Portanto, a distância entre B e C é 90 km

O raciocínio em questão corresponde a decompor 36 minutos em 2 x 16 + 4 e 4 minutos é considerado como ¼ de 16 minutos e, portanto, corresponde a ¼ de 40 km. Neste raciocínio, os alunos estão usando o teorema em ação:

$$f(36) = f\left(2 \cdot 16 + \frac{1}{4} \cdot 16\right) = 2 \cdot f(16) + \frac{1}{4} \cdot f(16)$$

Que, na forma geral, é expresso por :

$$f\left(2 \cdot t + \frac{1}{4} \cdot t\right) = 2 \cdot f(t) + \frac{1}{4} \cdot f(t)$$

Este é um teorema verdadeiro porque a função f, que associa t à distância percorrida, é uma transformação linear[25].

Já os "significantes" são as representações simbólicas (linguagem, formas de comunicação oral e escrita, símbolos, etc.) que um aluno faz de uma situação que resolve. Estas representações, por sua vez, só terão algum sentido para o aluno se vierem acompanhadas dos significados, ou seja, dos invariantes operatórios.

---

[25] Uma transformação linear é uma função T que satisfaz T(x1+ x2) = T(x1) + T (x2) e T(k.x) = k.T(x)

Em geral, os alunos apresentam dificuldades para expressar os conhecimentos (conceitos e teoremas em ação) utilizados na resolução de um problema e, com isso, a maioria destes conceitos e teoremas permanece implícita. Estando implícitos, estes conhecimentos não são cientificamente aceitos, ou seja, se o aluno não consegue representar na linguagem matemática correta seus conceitos e teoremas, não é possível identificar sua aprendizagem. Para torná-los explícitos, entra em cena o papel do ensino: ajudar o aluno a explicitar, em forma de linguagem e símbolos, seus conhecimentos que estão inicialmente implícitos (MOREIRA, 2002).

No entanto, somente a representação correta de um conceito não garante a sua aprendizagem. Vergnaud diz que se trata de uma "ilusão pedagógica" acreditar que a apresentação clara e rigorosa de conteúdos é a confirmação da aprendizagem (MOREIRA, 2002). Assim, o simbolismo matemático não é condição necessária nem suficiente para a conceitualização, apenas contribui para transformar o pensamento matemático em objetos matemáticos. A linguagem natural ajuda na representação das categorias matemáticas, mas não possui a eficiência dos diagramas, das fórmulas e das equações. Apesar da importância dada ao simbolismo, é importante ressaltar que a fonte mais importante de investigação da conceitualização está na ação do sujeito frente a uma situação (VERGNAUD, 1996b).

Assim, Vergnaud (1996b, p.180) define as funções dos significantes:

> ajuda à designação, e, portanto, à identificação, dos invariantes objetos, propriedades, relações, teoremas; ajuda ao raciocínio e à inferência; ajuda à antecipação dos efeitos e dos objetivos, à planificação e ao controle da ação.

A identificação dos invariantes é obtida através das representações, mas não só através delas. As representações simbólicas podem ajudar na resolução de problemas quando há dados numerosos e a resposta exige várias etapas e também ajudam para identificar com mais clareza os objetos matemáticos que são decisivos para a conceitualização. Se o aluno não conhece os termos e linguagem específicos da matemática, reconhecidos socialmente como corretos, para a conceitualização, seus progressos na construção de conhecimento podem ficar comprometidos. Isto porque ele irá criar sua própria representação, repleta de significado e que, não estando “corretamente” escrita, pode ser fonte de dificuldades na comunicação.

Assim, a atenção do professor pesquisador deve estar sobre as representações e sobre as ações. Segundo Vergnaud (2009, p.29), “sem a linguagem e os simbolismos desenvolvidos pela cultura, seria impossível identificar estas construções conceituais”.

Para Vergnaud (1998), o professor tem um difícil papel, pois tem a responsabilidade de oferecer as condições necessárias na sala de aula para que aconteça a aprendizagem. Aprendizagem não somente de conteúdos matemáticos, mas o desenvolvimento de competências para discutir, elaborar, cooperar, entrar em conflito com suas ideias, manejar o conflito e dialogar com os colegas e professor. Enfim, ele tem a responsabilidade no desenvolvimento de habilidades fundamentais para a aprendizagem em qualquer campo do conhecimento.

Finalizo esta seção me colocando na mesma posição de Muniz (2009, p.38) quando ele fala que a Teoria dos Campos Conceituais vem contribuir “para a construção de um novo olhar do professor para as produções matemáticas dos alunos”. Conforme já mencionado, é com este novo olhar que me coloco na posição de observadora do processo de construção do significado de número fracionário, quando tomado como um número que expressa uma medida e que pode ser naturalmente associado a pontos de uma reta. Este é o assunto que vou tratar no Capítulo 3.

2.3 ASPECTOS DIDÁTICOS: OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS NA ESCOLA BÁSICA

As dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem dos números fracionários estão associadas a muitas questões. Entre elas, pode-se citar o fato de serem representações que não são muito usuais na vida cotidiana, onde as representações decimais dão conta de uma série de problemas e de situações reais, como, por exemplo, o sistema monetário, o sistema de medidas e as porcentagens. Outra questão se refere à abordagem conceitual realizada na sala de aula, o ensino baseado apenas no significado “parte-todo”, com uma abordagem rápida, seguida de um trabalho excessivo com as operações, prevalecendo o caráter algébrico ao conceitual.

Segundo Bertoni (2009), quando se fala que os números decimais estão mais próximos dos alunos, nas suas vivências diárias, não podemos deixar de lembrar que, em certas situações de quantificação e de comparação, a utilização dos decimais se torna inadequada prevalecendo a necessidade da utilização das frações. Por exemplo, ao compararmos um terço de um bolo com um quarto de um outro bolo exatamente igual, é mais adequado pensarmos na divisão do bolo em quatro partes e em três partes e depois comparar estas partes. Não seria nem um pouco prático fazer a transformação dos números para comparar: 0,333... e 0,25. Além disso, a representação fracionária é essencial para a compreensão mais ampla de número racional no que diz respeito às proporções, à porcentagem e à probabilidade.

Segundo Llinares e Garcia (1988), não podemos limitar o currículo de matemática às necessidades da vida cotidiana. É tarefa do professor de matemática ajudar os alunos a apreciar a presença dos conceitos matemáticos em geral e também a integrar os procedimentos e conceitos para resolução de problemas em sua atividade cotidiana.

Para verificar como se dá o ensino das frações e dos números fracionários na escola básica, analisei o que os livros didáticos apresentam sobre os diferentes significados e o que as orientações normativas dizem a respeito disso[26].

Sabe-se que o livro didático é uma ferramenta muito utilizada pelos professores na escola básica, servindo, muitas vezes, como único referencial teórico para embasar o currículo de uma escola. Nesse sentido, sabendo da grande importância deste material e da sua influência, organizei uma tabela na qual apresento se determinado significado é abordado. Analiso livros didáticos referentes à série na qual as frações são ensinadas. Optei por livros “antigos” e atuais, entre 1927 até 2010, procurando obter produções de cada década, a fim de obter um panorama da “evolução” deste conteúdo no sistema de ensino de nosso país. A escolha dos autores mais “antigos” se deu pela disponibilidade dos exemplares, que não são fáceis de serem encontrados, e dos autores mais atuais procurei contemplar os livros que utilizo em minha prática docente.

Assim, é possível ter uma noção do que era ensinado e o que pode estar sendo ensinado de frações na escola. Assim tem-se:

---

[26] PCN’s e Matriz de Referência da Prova Brasil e Saeb.

	Parte-todo	Operador "fração de quantidades"	Quociente	Razão	Medida
Trajano (1927)	Maçãs partidas e conjuntos de maçãs	Usa a expressão "Fração de fração" após as multiplicações.	Exemplo: "Dividindo-se 5 maçãs por 2 meninos, que porção receberá cada um?" (p.73)	-	Medidas de "linhas" a partir de uma unidade. (p.69)
Thiré e Melo (1940)	Imagem de linha dividida em segmentos	Apresenta dois exemplos. Depois aparece junto às multiplicações. (p.45)	-	-	-
Todeschi (1955)[27]	Não contextualiza com exemplos. Apresenta uma definição formal	"Fração de fração", junto com a multiplicação. (p.86)			
Kosien (1969)	Figuras em preto e branco. Vários conjuntos de objetos e poucas figuras de bolos e retângulos (p.13)	Muita frase do tipo: "Quanto é 2/3 de 15?" Os problemas aparecem num capítulo à parte. (p. 17)	-	-	-
Cavalcante (1973)	Figuras coloridas: bolo, chocolates, círculos, retângulos, Conjunto de objetos (p.11-21)	Apresenta em problemas, antes das operações. Utiliza desenhos para facilitar o entendimento do problema. (p.36-49)	-	Aparece através de relações entre segmentos de reta. (p.34)	-
Lopes (2000)	Figuras e Tangram. Conjunto de elementos apenas em exercícios, sem discussão prévia. (p.186-190)	Explicação com problemas e exercícios do tipo: "Quanto é 2/3 de 15?" (p.197-200)	-	-	Em um exercício solicita a localização de frações decimais numa escola, mas não faz uma discussão sobre a fração ser um número. (p.195)
Barroso (2007)	Utiliza o palmo da mão como o inteiro e uma borracha e uma caneta para estabelecer as frações do palmo. Depois apresenta figuras geométricas, pizza, chocolate	E perguntas do tipo: "2/5 de bolinhas" (p.127), e depois nos problemas.	Em um exercício aparece a ideia de "dividir 3 barras de chocolate para 5 colegas"(p.130), sem discussão prévia.	-	-

[27] Estes livros foram preparados para a formação de professores, e, portanto, apresentam os conteúdos de modo sucinto, sem ilustrações.

	e conjunto de objetos.(p.122)				
Dante (2007)	Figuras geométricas, segmento de reta, objetos, bolo. Conjunto de objetos (p.124-127)	Em problemas e em perguntas do tipo “6/17 de 102” (p.129)	Faz uma discussão antes de exercícios. “O traço da fração indica divisão.” (p.130). Tem problemas do tipo “duas folhas repartidas entre cinco crianças”. (p.131)	A razão aparece através das relações entre segmentos de reta e na relação entre unidades de tempo e comparação com grandezas de naturezas diferentes. (p.137-139)	Em um exercício aparece a fração como medida de parafusos apresentando uma régua graduada em polegadas (p.134). Depois em outro exercício apresenta uma reta numerada para associar cada fração a sua posição na reta. (p.135)
Giovanni, Castrucci, Giovanni Jr. (2007)	Pizzas, retângulos, relógio, figuras geométricas, segmentos de reta, marcador de combustível. Conjunto de objetos, caixas de ovos. (p.165-168)	Em problemas. Sugere desenhos de retângulos para facilitar compreensão. (p.170-174)	-	-	-
Mori; Onaga (2009)	Retângulos, cordas e conjunto de “bolinhas”. (p.152)	Em problemas. Sugere desenhos de retângulos para facilitar compreensão. (p.156)	-	-	-

Tabela 2.1 – Análise dos diferentes significados dos números fracionários nos livros didáticos

Percebe-se que a obra de Dante (2007) é a mais completa na abordagem dos significados em relação aos outros livros, porém a atualidade dos livros não é indicativo de abordagens mais abrangentes do número fracionário, afinal, o livro de 1927 trabalha com mais significados do que o de 2009.

A predominância do trabalho com o “parte-todo” e o “operador” não parece ter uma explicação histórica referente ao surgimento das noções de frações. Segundo Boyer (1996), no Papiro de Ahmes, pedra egípcia de hieróglifos, havia registrado um problema sobre a divisão de sete pães para dez homens, nas quais representavam por uma soma de frações unitárias[28], e esta situação envolvia o significado “quociente”. Assim, os significados menos abordados, “quociente” e “medida”, provêm de questões cotidianas da sociedade, como a necessidade de medições e a divisão, como já foi discutido. No entanto, estas são desconsideradas ou pouco valorizadas pelos livros didáticos.

A explicação sobre a importância delegada aos significados “parte-todo” e “operador” não é obtida fazendo a análise destes livros. Para tal, seria necessário um estudo mais aprofundado sobre a história da matemática, especificamente de seus conteúdos escolares.

O ensino dos números racionais na escola básica inicia-se a partir do Segundo Ciclo do Ensino Fundamental, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s)[29] (BRASIL, 1998), ou mais precisamente a partir do 4º e 5º ano de escolarização, com o objetivo de ampliar o universo dos números até então estudados pelos alunos – os números naturais –, possibilitando a resolução de situações-problemas mais complexas. É também nas séries iniciais que se espera serem trabalhadas as representações fracionárias e decimais do número racional. Também,

> neste ciclo, são apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal. (BRASIL, 1998, p.57, grifo meu)

Para o Terceiro Ciclo, o qual inclui o 6º ano, os PCN’s apresentam uma preocupação com a exploração dos diferentes significados, ampliando o trabalho de razão e representação na reta numérica em relação ao que foi colocado do 3º e 4º anos, trazendo uma explicação mais detalhada sobre cada um. Para uma melhor compreensão do que está sendo discutido, separei a citação dos PCN’s quanto ao significado abordado (BRASIL, 1998, p.102-103):

---

[28] Ao invés de representar a situação por $\frac{7}{10}$, faziam $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$.

[29] Os PCN’s utilizam a nomenclatura de ciclos: 1º ciclo para a 1ª e 2ª séries, 2º ciclo para a 3ª e 4ª séries, 3º ciclo para a 5ª e 6ª séries e 4º ciclo para a 7ª e 8ª séries. No entanto, Lei nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006, constitui o Ensino Fundamental de 9 anos de duração. Assim, o 2º ciclo pressupõe o 4º e 5º anos e o 3º ciclo o 6º e 7º anos. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/relatorio_internet.pdf>. Acesso em: 04 out. 2010.

Quanto ao significado “parte-todo”:

> a relação parte/todo se apresenta quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes [...]. A interpretação da fração como relação parte/todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas [...].

Quanto ao significado “quociente”:

> uma outra interpretação do número racional como quociente de um inteiro por outro (a: b = b $\neq$ 0). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número [...].

Quanto ao significado “razão”:

> uma interpretação diferente das anteriores é aquela em que o número racional é usado como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, quando é interpretado como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com situações do tipo: 2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes [...]. Outras situações são as que envolvem probabilidades [...], escalas [...], e também da porcentagem [...].

Quanto ao significado “operador”:

> existe ainda uma quarta interpretação que atribui ao número racional o significado de um operador, ou seja, quando ele desempenha um papel de transformação [...], algo que atua sobre uma situação e a modifica [...].

Quanto ao trabalho integrado:

> na perspectiva do ensino não é desejável tratar isoladamente cada uma dessas interpretações. A consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo do terceiro e quarto ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema. (BRASIL, 1998, p.103)

No entanto, não são todas as escolas que conseguem realizar um trabalho sobre números fracionários no Segundo Ciclo, explorando os seus diferentes significados, ficando, muitas vezes, no Terceiro Ciclo, ou melhor no 6º ano, a responsabilidade sobre seu ensino. Sendo assim, o seu ensino deve permitir que o aluno se aproprie da ideia de número fracionário, identificando quantidades fracionárias no dia-a-dia e, assim, associar o seu contexto cotidiano com a sala de aula.

Números fracionários têm sido um dos conteúdos em que os alunos apresentam dificuldades que podem ser comprovadas nos baixos desempenhos que são registrados nos diferentes exames de avaliação. Segundo Bertoni (2009), avaliações e pesquisas têm verificado um baixo rendimento dos alunos, e, no entanto, pouco tem sido discutido sobre novas abordagens e novas perspectivas para seu ensino-aprendizagem.

Segundo Campos e Magina (2008), o Sistema de Avaliação da Escola Básica (SAEB)[30], realizado em 2001, concluiu que o conceito de número racional na sua forma fracionária precisa ser mais trabalhado na escola. Os resultados do SAEB apontam que a porcentagem dos alunos do 5º ano que obteve sucesso em questões sobre frações foi de 35%. O estudo das referidas autoras sugere que o ensino seja feito em situações práticas, de modo a proporcionar entendimento em contextos que facilitem os raciocínios a serem feitos pelos alunos.

A partir deste trabalho de Campos e Magina, tratei de localizar a matriz de referência da Prova Brasil e Saeb[31] no que diz respeito aos conteúdos de matemática para o 5º ano e 9º ano. Nesta matriz, os conteúdos exigidos nas avaliações estão estruturados em quatro temas de estudos, relacionados às habilidades que deveriam estar em prontidão nos alunos. Cada um destes temas está ainda subdividido no que são chamados de “descritores”, os quais se referem às competências desenvolvidas pelos alunos. As frações são contempladas tanto nos referenciais para o 5º ano como para o 9º ano, estando estas no terceiro tema de estudos, chamado “Números e Operações/Álgebra e funções”.

Para o 5º ano, encontra-se o “descritor D24”, o qual associa para a fração os significados “parte-todo”, “quociente” e “razão”, conforme a figura 2.13.

[30] Prova de Matemática e Língua Portuguesa realizada com alunos de 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio.
[31] Matriz referencial completa disponível em: <http://provabrasil.inep.gov.br/index.php?option=com_wrapper&Itemid=14>.

D24 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

As habilidades que podem ser avaliadas por meio deste descritor referem-se à compreensão, pelo aluno, dos diferentes significados que uma fração pode representar. Podem-se citar os seguintes significados:

1. A relação parte-todo apresenta-se como um todo que se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes;

2. Outro significado das frações é o de quociente; baseia-se na divisão de um número natural por outro (a ÷ b = a / b; b ? 0). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas. No entanto, nos dois casos, o resultado é representado pela mesma notação: 2/3;

3. Uma terceira situação, diferente das anteriores, é aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo “2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes”.

Essas habilidades são avaliadas por meio de situações-problema que se apóiem, principalmente, em ilustrações próximas de situações cotidianas representando os diferentes significados de fração citados anteriormente.

Exemplo:

Sara fez um bolo e repartiu com seus quatro filhos. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum. Sabendo-se que o bolo foi dividido em 24 pedaços iguais, que parte do bolo foi consumida?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{24}$

Figura 2.13 – “Descritor 24” que contempla fração para o 5º ano.

Para o 9º ano, encontram-se mais “descritores” que dizem respeito aos diferentes significados. O “D17” se refere à localização de números fracionários e decimais na reta, ou seja, utiliza o significado “medida”. Depois, o “D21” se refere ao “parte-todo” e o “D22” ao “quociente” e “razão”, conforme as figuras 2.14, 2.15 e 2.16

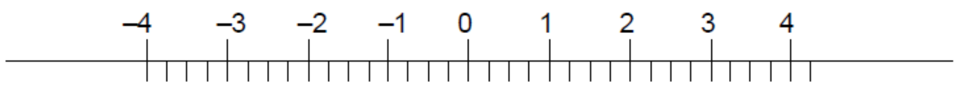
D17 – Identificar a localização de números racionais na reta numérica.

Esse descritor deve verificar a habilidade de o aluno compreender a disposição dos números racionais, tanto positivos quanto negativos, na reta numerada.

Essa habilidade é avaliada por meio de situações-problema contextualizadas, nas quais podem ser exploradas as representações fracionária e decimal dos números racionais.

Exemplo de item do descritor D17:

Observe o desenho abaixo.



O número $\frac{11}{4}$, nessa reta numérica, está localizado entre

(A) –4 e –3.

(B) –2 e –1.

(C) 3 e 4.

(D) 2 e 3.

Figura 2.14 – “Descritor 17” do 9º ano que contempla o significado “medida”.

D21 – Reconhecer as diferentes representações de um número racional.

Esse descritor deve verificar a habilidade de o aluno lidar com os números racionais dados na forma fracionária, decimal e percentual.

Essa habilidade é avaliada por meio de situações-problema contextualizadas, que permitam ao aluno identificar, por exemplo, que ¼, 0,25 e 25% são diferentes representações do mesmo número racional.

Exemplo de item do descritor D21:

Em qual das figuras abaixo o número de bolinhas pintadas representa $\frac{2}{3}$ do total de bolinhas?

(A) ● ● ○ ○ ○ ○

(B) ● ● ● ○ ○ ○

(C) ● ● ● ● ○ ○

(D) ● ● ● ● ● ○

Figura 2.15 – “Descritor 21” do 9º ano que contempla o significado “parte-todo”.

D22 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

Esse descritor deve verificar a habilidade de o aluno identificar uma fração $\frac{p}{q}$ como um quociente, com $q \neq 0$, como parte do todo, ou seja, tomar p como parte de um objeto que está dividido em q pedaços, e como uma razão entre dois números: "p está para q".

Essa habilidade é avaliada por meio de situações-problema contextualizadas, de modo que o aluno reconheça essas diferentes formas.

Exemplo de item do descritor D22:

Das 15 bolinhas de gude que tinha, Paulo deu 6 para o seu irmão. Considerando-se o total de bolinhas, a fração que representa o número de bolinhas que o irmão de Paulo ganhou é

(A) $\frac{6}{15}$.

(B) $\frac{9}{15}$.

(C) $\frac{15}{9}$.

(D) $\frac{15}{6}$.

Figura 2.16 – "Descritor 22" do 9º ano que contempla "quociente", "parte-todo" e "razão".

Assim, estas provas preveem que o ensino de números fracionários no EF esteja contemplado não apenas pelo significado "parte-todo", mas principalmente pelo "quociente", "razão" e "medida". Porém, o significado "operador", tão trabalhado nos livros didáticos, não é exigido nestas provas. Mesmo assim, pode-se dizer que esta matriz está mais de acordo com o que os PCN's defendem do que consta nos livros didáticos.

Então, por que ainda temos livros didáticos de 6º ano que não fazem referência a estes significados? Por que a abordagem é centralizada nos significados "parte-todo" e "operador" dos livros?

Enfim, muitas questões surgiram cujas respostas não estão ao meu alcance neste momento. No entanto, o que transparece é que os livros didáticos, em geral, estão deixando a desejar a respeito do ensino dos números fracionários.

3 A PROPOSTA DIDÁTICA

Na primeira seção deste capítulo, apresento a metodologia usada na realização da pesquisa. Na segunda seção, apresento o contrato didático estabelecido entre os elementos que estão envolvidos no trabalho: escola, professor e aluno. E, na terceira seção, apresento a descrição, a implementação e a análise da sequência didática numa turma de 6º ano.

3.1 SOBRE A METODOLOGIA

A Engenharia Didática foi criada na área de Didática da Matemática, na França, no início da década de 1980 com o objetivo de auxiliar na tarefa didática. Muitos são os teóricos que trabalham nesta perspectiva, porém assumiremos como referencial os trabalhos de Artigue (1996), por ser considerada uma pesquisadora que muito contribuiu para o desenvolvimento desta teoria.

A palavra “engenharia” é usada porque a metodologia é comparada com o trabalho de um engenheiro. Para resolver um problema, o engenheiro se apoia em conhecimentos científicos, mas, frente a questões específicas do problema, ele precisa adaptar a teoria para construir suas próprias soluções.

Esta teoria considera a sala de aula como o espaço de investigação. Assim se constitui um referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerado a partir da união de conhecimentos práticos e teóricos (CARNEIRO, 2005). A Engenharia Didática se organiza em quatro fases de investigação:

> 1) análises prévias; 2) concepção e análise *a priori* de experiências didático pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática; 3) Implementação da experiência; 4) análises *a posteriori* e validação da experiência (CARNEIRO, 2005, p.91)

Este trabalho implementa estas quatro etapas por se tratar de uma pesquisa realizada em sala de aula e que pretende produzir um material didático.

No Capítulo 2, realizei uma pesquisa de cunho científico a respeito do objeto de estudo – os números fracionários. Em consulta a diferentes autores, inicialmente discuti os diferentes significados dos números fracionários e, depois, à luz da Teoria dos

Campos Conceituais (TCC), procurei entender a complexidade do processo de aprendizagem deste conteúdo. Também fiz um levantamento sobre o tratamento que é dado ao assunto nos livros escolares. Desta forma, nas análises prévias, a primeira fase da Engenharia, tratei de aspectos epistemológicos, aspectos cognitivos e aspectos didáticos relativos aos números fracionários.

A segunda fase da engenharia trata da parte empírica do trabalho. Ao elaborar as atividades para a sala de aula, realizei as análises *a priori*, ou seja, estabeleci os objetivos da atividade e as hipóteses deste trabalho. Na experimentação, terceira fase da Engenharia, coloquei em prática a sequência didática projetada na fase anterior. E, finalmente, na quarta fase, das análises *a posteriori* e de validação, fiz uma descrição dos achados e dos resultados da experimentação, procurando identificar a validação das hipóteses iniciais.

Meu “olhar” nas análises *a posteriori,* à luz da Teoria dos Campos Conceituais, busca entender as formas que os alunos usam seus conhecimentos em ação e quais são eles, para, assim, compreender o processo de aprendizagem. Deixo claro que não é uma preocupação deste trabalho apenas a análise dos resultados, mas é principalmente entender o processo de aprendizagem.

3.2 SOBRE O CONTRATO DIDÁTICO

Quando se aborda questões sobre ensino-aprendizagem, as quais envolvem as relações entre escola, professor e aluno, não se pode deixar de falar sobre o contrato didático estabelecido. Segundo Brousseau (apud SILVA, 2008, p.50)

> chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...]. Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Além do contrato implicitamente estabelecido entre professor e aluno, temos as relações destes com a escola. A escola estabelece o contexto onde se dará o contrato na forma de impor algumas regras de ação dos professores frente à tarefa didática.

Assim, é importante esclarecer o contexto no qual se estabeleceu o contrato didático da experimentação deste trabalho.

A escola em que trabalho faz parte de uma rede de ensino privado constituída de diversas unidades escolares localizadas em cinco estados brasileiros. Este sistema possui uma proposta pedagógica baseada na uniformização do ensino de todas as unidades, através de materiais didáticos, organização curricular, provas, cronogramas e calendários iguais para todos. Os tipos de avaliação e as datas nas quais são realizadas também são previamente estabelecidos.

Desta forma, o professor encontra pouca autonomia em alterar, modificar, ou até substituir conteúdos do currículo de sua disciplina sob pena de “atrapalhar“ o desenvolvimento do cronograma e, assim, prejudicar o desempenho dos alunos nas provas previamente elaboradas para toda a rede de ensino[32]. Além disso, o caráter particular de cada comunidade escolar não é considerado nesta padronização.

Mesmo assim, assumindo um certo risco, resolvi ousar na minha prática a fim de proporcionar um ambiente de aprendizagem que privilegiasse os meios para um ativo processo de construção de conhecimento, com as conversas, os diálogos e as interações. Nesta mudança, alguns aspectos do contrato didático estabelecido foram “quebrados”, tais como: o trabalho de noções matemáticas que não estavam previstos para as avaliações; o trabalho em equipe; a diminuição das tarefas de casa; e uma maior liberdade em sala de aula.

É preciso esclarecer que a escola não exige uma metodologia didática centrada na aula expositiva e no professor, mas o sistema que ela propõe faz com que as aulas acabem sendo desta forma, a fim de o professor conseguir atender às demandas.

É importante destacar que, no contrato, os alunos esperam por explicações antes, durante e depois de realizar qualquer atividade, e, sendo assim, minha intervenção com explicações se torna indispensável para eles. Porém, acredito que a intervenção deva ocorrer na forma de orientação durante a atividade e, ao final dela, na forma de sistematização do que foi realizado. Considero que a institucionalização dos

---

[32] As avaliações são elaboradas por uma equipe especializada, na sede da rede de ensino, que distribui o material pronto para todas as unidades. Assim, o professor recebe sua prova pronta, faz o gabarito desta prova e pode dar sugestões de alteração, porém nada garante que sua sugestão será considerada.

conhecimentos que os alunos colocaram em ação nas atividades se constituiu em um importante momento da aprendizagem. Brousseau (2008b, p.31-32) diz que:

> há a necessidade de considerar as fases de *institucionalização* que deram a determinados conhecimentos o *status* cultural indispensável de saber. Tal como os *teoremas em ato*[33] desapareciam rapidamente diante da ausência de uma formulação e uma comprovação, os conhecimentos particulares, e até mesmo os públicos, continuariam contextualizados e tenderiam a desaparecer na maré das lembranças cotidianas, caso não fossem recolocados em um repertório especial, cuja importância e uso não foram confirmados pela cultura e pela sociedade

Assim, o contrato estabelecido entre os alunos e eu se constituiu da seguinte forma: eu fazia a proposta de atividade e explicava o que eles deveriam fazer; os alunos tentavam realizá-la e tinham a liberdade de pedir ajuda a colegas e a mim; e, no término da atividade, os alunos entregavam o material escrito. Se a atividade causasse muitas dúvidas, eu deveria intervir com explicações para o grande grupo.

Em relação às notas, eu estava realizando muito mais atividades do que o previsto nas avaliações processuais da escola[34]. Sendo estes trabalhos o material de análise da pesquisa, eu não poderia fazer correções, atribuir notas e devolver para os alunos (toda a avaliação deve ser corrigida e devolvida na escola). Dessa forma, estabeleci com a turma que o conjunto dos trabalhos realizados na sequência de atividades com os números fracionários seria contabilizado nas tarefas de casa, na qual cada atividade realizada e entregue valeria um “mais”[35].

Esta combinação a respeito das notas das atividades não limitou, em momento algum, o desempenho e o entusiasmo dos alunos em realizar as tarefas da proposta.

3.3 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA: APRESENTAÇÃO, IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISES

A sequência didática foi realizada numa turma de 6º ano de uma escola particular da cidade de Porto Alegre, com 22 alunos. A experimentação se deu durante

---

[33] Teorema em ato é o mesmo que teorema em ação.

[34] Segundo regras da escola, a cada trimestre, as avaliações são: duas provas valendo 7,0 pontos cada; atividades processuais valendo um total de 5,0 pontos; tarefas de casa valendo 1,0 ponto. Para realizar a média trimestral, se faz o somatório de cada avaliação e divide-se por dois.

[35] Pelas regras da escola, para cada tarefa de casa realizada, atribui-se um sinal de “mais” e, a cada tarefa não realizada, um sinal de “menos”.

um mês, do dia 8 de junho até o dia 8 de julho de 2010, com o total de 20 horas/aula de 50 minutos cada.

As aulas foram organizadas em 9 módulos compostos por atividades diversas, tratando de três diferentes significados para números fracionários: “medida”, “parte-todo” e “operador”. Em virtude do currículo da escola, que trabalha “razões” no 7º ano, não foi trabalhado este significado neste momento. E, para o significado “quociente”, não foram realizadas atividades específicas devido à insuficiência do tempo disponibilizado no cronograma da escola para o trabalho com o conceito de número fracionário.

As atividades foram planejadas e testadas nesta turma especificamente, mas visando sua aplicabilidade em outras turmas. É importante esclarecer que é pretensão deste trabalho realizar sua pesquisa empírica com uma turma inteira de 6º ano, no período normal de aula. Assim verificarei a possibilidade de esta sequência servir de material didático viável de ser utilizado por outros professores. Minhas análises não centrarão na evolução da aprendizagem de determinados alunos, e, portanto, não se trata de um estudo de caso.

Não foi realizado um estudo mais profundo sobre os conhecimentos que os alunos desta turma traziam sobre o conceito de número fracionário e nem sobre a organização curricular da disciplina de matemática das séries iniciais do EF. Mas através de nossos diálogos nas aulas pude perceber que a maioria dos alunos já conheciam algo sobre frações, apenas dois alunos se manifestaram sobre nunca terem trabalhado nas séries anteriores. Os conhecimentos prévios manifestados por esta maioria era a representação de algumas frações através de desenhos de chocolates e pizzas e a leitura de frações do tipos “quatro onze avos”.

O cronograma da escola, para o 6º ano, prevê que o ensino das noções iniciais de frações, envolvendo conceitos anteriores às operações – a idéia, a representação, a leitura, e escrita dos tipos de frações, número misto e problemas com frações – seja realizado em duas semanas, no tempo total de 10 horas/aula. As quatro semanas seguintes são reservadas ao trabalho com frações equivalentes, comparação e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Assim como em outras escolas, este tipo de cronograma impossibilita, muitas vezes, a inovação das estratégias de ensino, já que toda atividade diferenciada de criação e construção exige mais tempo. Isto pode explicar porque a ênfase no ensino de números fracionários acaba sendo essencialmente no significado “parte-todo”, no geral a primeira abordagem deste conteúdo no livro didático.

Entretanto, considero que o trabalho com o significado “medida” constitui uma proposta inovadora para o 6º ano, pois proporciona situações que levam a uma natural necessidade do uso de número fracionário, bem como desenvolvimento de outros conceitos relacionados e previstos no currículo. Sendo assim, fiz uma escolha de pesquisa: fazer análise minuciosa da produção dos alunos nas atividades que envolvem o significado “medida”. As demais atividades da sequência, tratando dos significados “parte-todo” e “operador”, são descritas de forma sucinta, com o propósito de tão somente trazer um panorama geral do trabalho que foi feito com os alunos. O detalhamento completo da sequência de atividades se encontra no Apêndice II deste trabalho.

Conforme as etapas da Engenharia Didática, para cada encontro, apresento a implementação realizada, acompanhada de análises *a priori e a posteriori* e, por fim, trato da validação das hipóteses enunciadas. Na análise *a posteriori*, procurei identificar, nas estratégias utilizadas pelos alunos, os invariantes operatórios, com base na Teoria dos Campos Conceituais, e, na medida do possível, também tratei de descrevê-los em forma de conceitos e teoremas em ação[36] contidos na resolução das atividades e nas formas de representações das resoluções. Em cada encontro foram propostas atividades, e, nestas atividades, estavam contidas as diferentes situações que proporcionaram ao aluno dar, ou não, significado ao conceito de número fracionário.

Dessa forma, ao final da experiência de ensino pretende-se validar a hipótese de que esta sequência didática proporciona aos alunos uma melhor compreensão do conceito de número fracionário no 6º ano do Ensino Fundamental através de seu significado “medida”.

---

[36] A forma de descrição dos conceitos e teoremas em ação foi baseada no trabalho de Dissertação de Backendorf (2010).

3.3.1 Módulo 1: Medições na sala de aula

Como atividade introdutória da sequência didática, os alunos são convidados a realizar medições de objetos da sala de aula, usando uma unidade de medida não convencional – uma tira de papel. A régua graduada em centímetros, que os alunos costumam utilizar, não poderá ser usada nesta atividade, visto que ela possibilita a medição de objetos “pequenos”, usando os milímetros, e, desta forma, não se apresenta a necessidade do uso de frações da unidade.

O módulo inicia com uma conversa a respeito da necessidade de uma padronização das unidades de medida. Em seguida, os alunos são convidados a realizar medições na sala de aula, utilizando a unidade de medida que é a mesma para todos. A turma é dividida em duplas, as quais recebem a unidade de medida em formato de tira de papel (tira-unidade) e uma folha para suas anotações. Os objetos a serem medidos são previamente escolhidos[37], para que se obtenha uma padronização das medições, facilitando a comparação das medidas obtidas. Os materiais usados estão indicados nas figuras 3.1 e 3.2.

Nome da dupla:______________________________

Meça os objetos da sala de aula com a tira de papel:

Classe:

Comprimento:____________________

Largura:__________________________

Mural:

Comprimento:____________________

Largura:__________________________

Caixa de livros:

Comprimento:____________________

Largura:__________________________

Altura:___________________________

Livro de matemática:

Comprimento:____________________

Largura da porta da sala:______________________

Folha do espelho de classe:

Comprimento:____________________

Largura:__________________________

Cartaz Economia e Vida:

Comprimento:____________________

Largura:__________________________

Largura da janela: ____________________

Minidicionário Houaiss:

Comprimento:____________________

Largura:__________________________

Espessura:_______________________

Quadro-negro:

Comprimento:____________________

---

[37] Objetos que já se encontravam na sala de aula.

Largura:_________________________

Espessura:_______________________

Vidro da janela:

Comprimento:____________________

Largura:_________________________

Madeira do chão:

Comprimento:____________________

Largura:_________________________

Largura:_________________________

Largura do suporte de giz______________

Figura 3.1: Folha de anotações da atividade de medições

Figura 3.2: Unidade-tira de 10 cm

Após as medições, é realizada uma conversa em grande grupo a respeito das medidas obtidas, das dificuldades encontradas e das estratégias utilizadas para realização das medições.

Este Módulo foi programado para 50 minutos (1 hora-aula).

Análises *a priori*

O objetivo deste primeiro módulo é a medição de comprimento de objetos, maiores ou menores do que a unidade considerada, desta forma provocando nos alunos a necessidade da utilização do número fracionário para fazer medições. Com esta atividade, os alunos devem sentir a necessidade de ampliar o campo dos números inteiros para bem realizar medições com maior precisão.

Análise *a posteriori*

Na observação das duplas realizando as medições, pude perceber diferentes estratégias no uso da unidade de medida (a tira-unidade) quanto ao segurar a tira e quanto ao seu movimento longo dos objetos que estavam sendo medidos. Alguns alunos giravam a tira-unidade em 180º, fazendo movimentos de rotação; outros faziam movimentos de reflexão da tira-unidade; outros indicavam movimentos de translação da tira, marcando sempre com lápis onde ela terminava; e alguns alunos realizaram as medições com bastante displicência nos movimentos, sem maiores preocupações quanto à precisão das medidas. Nestas diferentes estratégias, podemos identificar uma atitude comum: a tentativa de saber quantas vezes a unidade-tira cabe no comprimento solicitado na atividade, explicitando o conceito em ação (C1.1): **medir é comparar com a unidade escolhida.**

As figuras abaixo registram o modo como os alunos realizaram as medições. Na figura 3.3, fazem a translação da tira-unidade marcando sua extremidade final com o dedo. Na figura 3.4, fazem a rotação de 180º da tira-unidade. Na figura 3.5, a aluna faz a reflexão da tira, mas, não se convencendo da medida que obteve, muda de estratégia. Ela passa a fazer translação igual à registrada na figura 3.3 e tem a ajuda da colega que marca com o lápis a extremidade “final” da unidade, como pode ser visto na figura 3.6. E na figura 3.7, o aluno não se preocupou em marcar com precisão o término da unidade-tira, e foi arrastando o papel, imitando o “andar de uma minhoca”.

Figura 3.3 – Translação da unidade-tira

Figura 3.4 – Rotação da unidade-tira

Figura 3.5 – Reflexão da unidade-tira

Figura 3.6 – Mudança de estratégia de medição

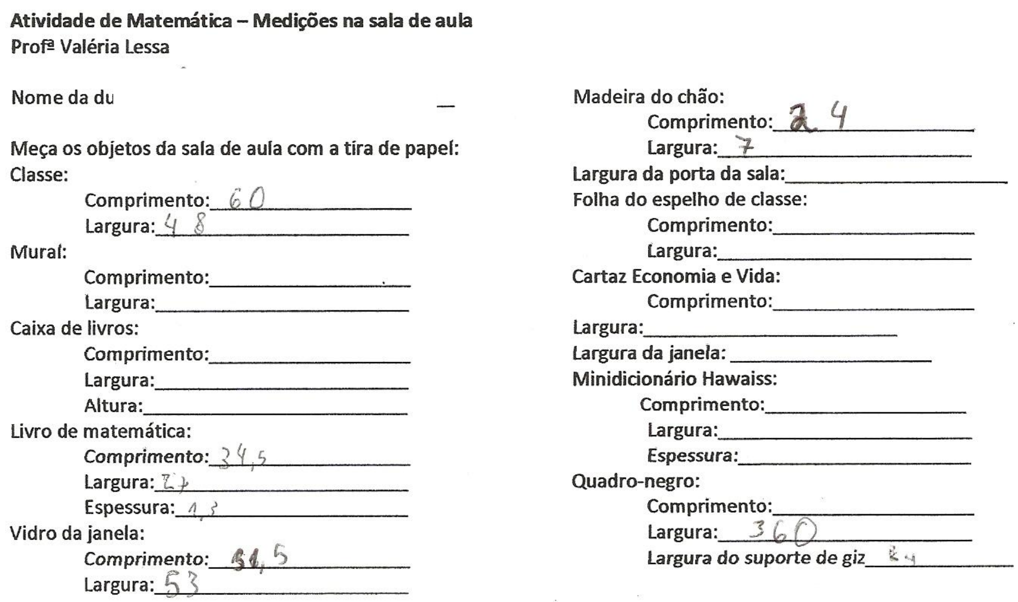
Figura 3.7 – Arrastando a unidade usando aproximações na medição do mural

Apesar destas diferentes formas de manipular a tira-unidade, algo de comum perpassou todas as estratégias. Identifiquei, assim, um invariante operatório em forma de outro conceito em ação (C1.2): **medir é saber quantas vezes a unidade-tira cabe no objeto.**

Outros alunos, ao medirem a largura do *parquet* do chão, observaram que a sua medida era menor do que a tira-unidade. Então, decidiram abandonar a unidade convencionada e pegar uma régua, encontrando como medida 7 cm, registrando isto na folha, conforme a figura 3.8. Estes alunos não levaram em consideração a regra estabelecida inicialmente, sobre não usar a régua dos centímetros e sentiram liberdade em propor alterações no contrato didático inicial.

Figura 3.8 – Utilização da régua dos centímetros

A mesma dupla, depois de ter percebido que a unidade-tira tinha comprimento de 10 cm, registra na folha as medidas em centímetros. Apesar disso, continuavam a medir com unidade-tira, mas depois faziam a multiplicação por 10, transformando a medida obtida para cm. Quando era necessário usar uma parte da unidade-tira, simplesmente utilizavam a régua. Na figura 3.9, temos os registros destes alunos:


Atividade de Matemática – Medições na sala de aula
Profª Valéria Lessa

Nome da du

Meça os objetos da sala de aula com a tira de papel:
Classe:
Comprimento: 60
Largura: 48
Mural:
Comprimento:
Largura:
Caixa de livros:
Comprimento:
Largura:
Altura:
Livro de matemática:
Comprimento: 34,5
Largura: 27
Espessura: 1,3
Vidro da janela:
Comprimento: 81,5
Largura: 53
Madeira do chão:
Comprimento: 24
Largura: 7
Largura da porta da sala:
Folha do espelho de classe:
Comprimento:
Largura:
Cartaz Economia e Vida:
Comprimento:
Largura:
Largura da janela:
Minidicionário Hawaiss:
Comprimento:
Largura:
Espessura:
Quadro-negro:
Comprimento:
Largura: 360
Largura do suporte de giz 24

Figura 3.9 – Registro em centímetros

Assim, observei que os alunos utilizam a proporcionalidade para resolver o problema das medições, e, dessa forma, identifiquei um teorema em ação (T1.1) : **se a unidade mede 10 cm, então n vezes a unidade mede n vezes 10 cm.**

A partir da análise das folhas de registros preenchidas pelos alunos, juntamente com a observação de suas ações durante as medições, percebi que muitos alunos reconheciam a existência de medidas menores do que a unidade-tira, mas não sabiam como registrar estas quantidades, e, assim, utilizavam aproximações com números decimais e com números fracionários. O fato de não conseguirem registrar as medidas não significa que não sabem o conceito, este é um exemplo na qual a observação dos atos e dos diálogos é fundamental para o professor perceber as aprendizagens de seus alunos.

Nas figuras a seguir (3.10, 3.11), a dupla desconsidera o “pedacinho” que sobra da unidade-tira e registra na folha a medida “4,0”, onde deveria ser 3 unidades inteiras e mais uma parte da unidade. Na folha, ainda observamos que a dupla considerou como medida a metade da unidade, registrando “5,5”. Isso mostra que a dupla desconsidera a parte da unidade quando ela é “pequena” e considera a metade da unidade quando esta parte é maior. Dessa forma, tem-se uma forte tendência ao uso de números decimais que revela a realidade cultural dos alunos e assim identifica-se dois teoremas em ação (T1.2 e T1.3): **se sobrar um pouquinho da unidade, então a medida é um número inteiro**; **se sobrar um tamanho razoável da unidade, então a medida é a metade da unidade.**

As figuras 3.10 e 3.11 ilustram o momento em que a dupla põe em ação seus teoremas e os seus registros.

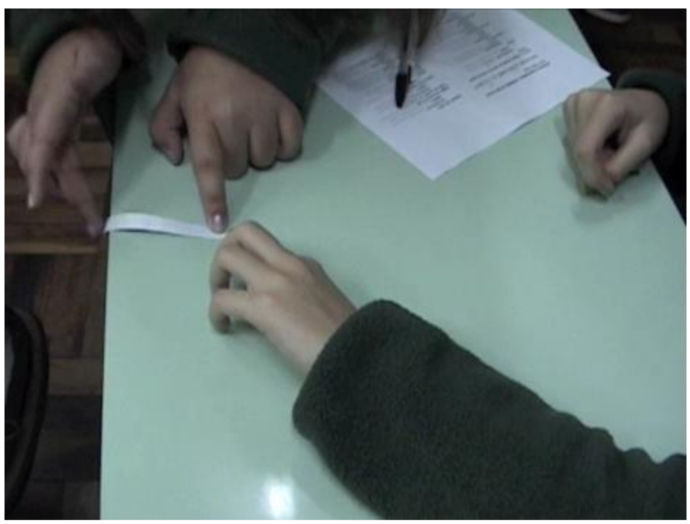
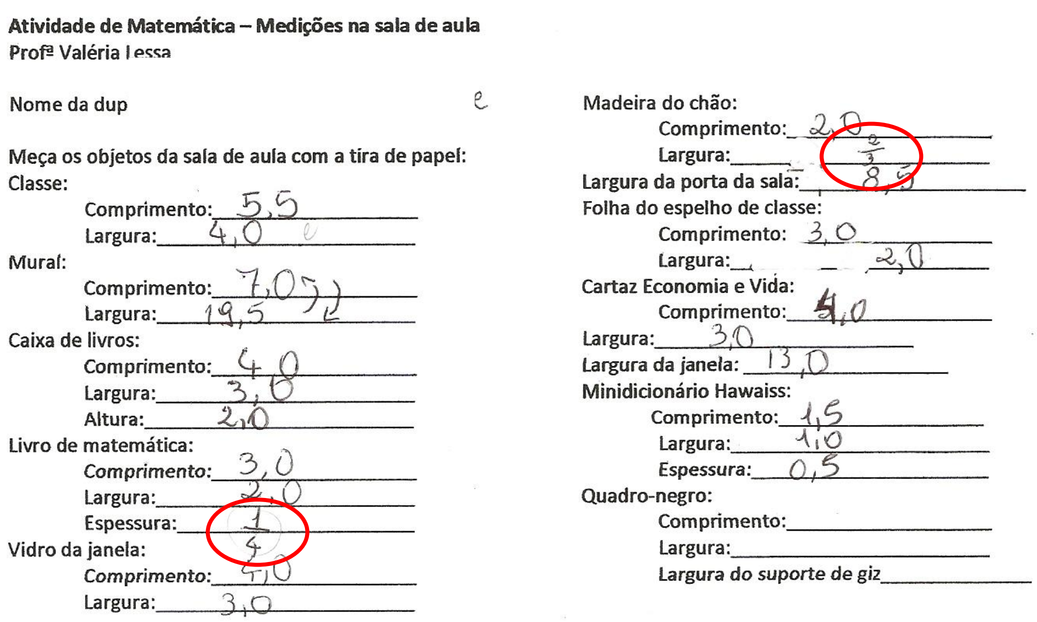


Figura 3.10 – Alunos desconsideram o que sobra da unidade


Atividade de Matemática – Medições na sala de aula
Profª Valéria Lessa

Nome da dup

Meça os objetos da sala de aula com a tira de papel:

Classe:
Comprimento: 5,5
Largura: 4,0

Mural:
Comprimento: 7,0
Largura: 19,5

Caixa de livros:
Comprimento: 4,0
Largura: 3,0
Altura: 2,0

Livro de matemática:
Comprimento: 3,0
Largura: 2,0
Espessura: $\frac{1}{4}$

Vidro da janela:
Comprimento: 4,0
Largura: 3,0

Madeira do chão:
Comprimento: 2,0
Largura: $\frac{2}{3}$

Largura da porta da sala: 8,5

Folha do espelho de classe:
Comprimento: 3,0
Largura: 2,0

Cartaz Economia e Vida:
Comprimento: 4,0
Largura: 3,0

Largura da janela: 13,0

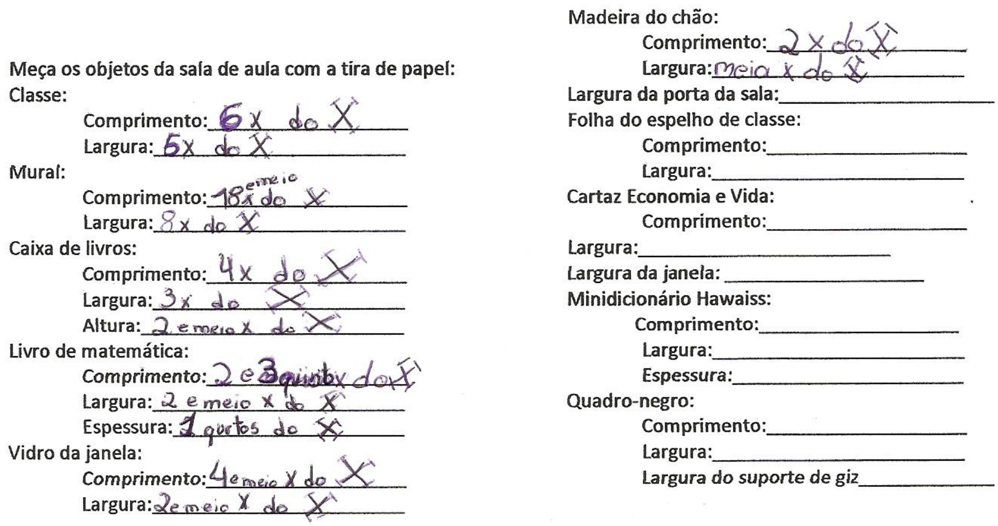
Minidicionário Hawaiss:
Comprimento: 1,5
Largura: 1,0
Espessura: 0,5

Quadro-negro:
Comprimento:
Largura:
Largura do suporte de giz

Figura 3.11 – Registro

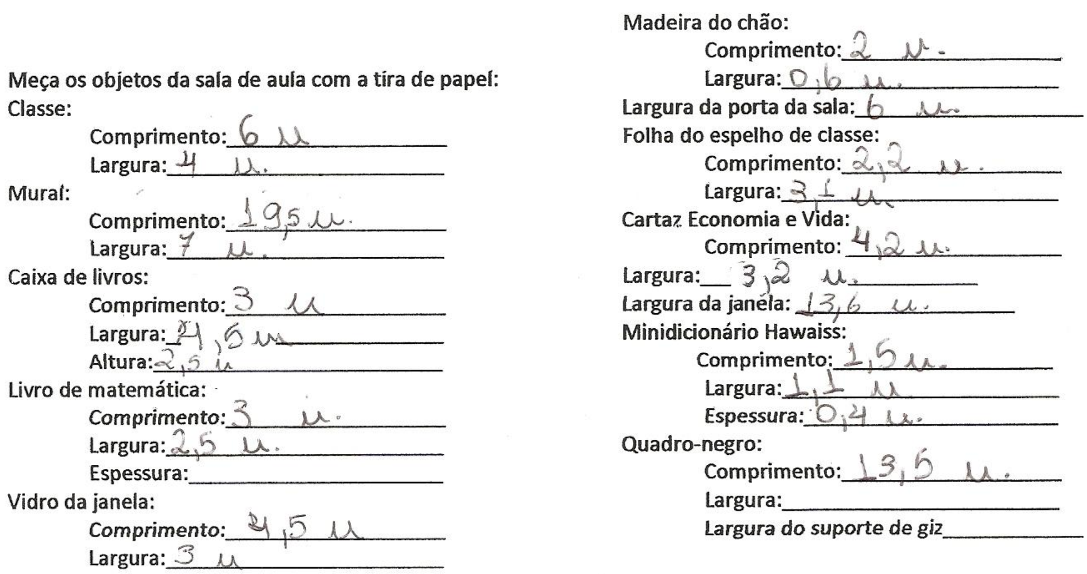
Como pode ser observado nos números realçados em vermelho na figura 3.11, apesar da grande incidência na notação decimal, esta dupla utilizou números fracionários. Em outros trabalhos, os números racionais apareceram em forma de fração, de decimais e por extenso, como, por exemplo, “metade”.

Algumas duplas se preocuparam em registrar na folha, além das medidas, algo que indicasse a relação com a unidade-tira. Na figura 3.12, vemos a representação “6x do X” e “18 e meio x do X”, onde o primeiro x significa “vezes” e o segundo X é o nome que deram à unidade-tira. Na figura 3.13, temos a unidade-tira indicada por “u”. E, na figura 3.14, temos a unidade-tira indicada pela palavra “tira”.



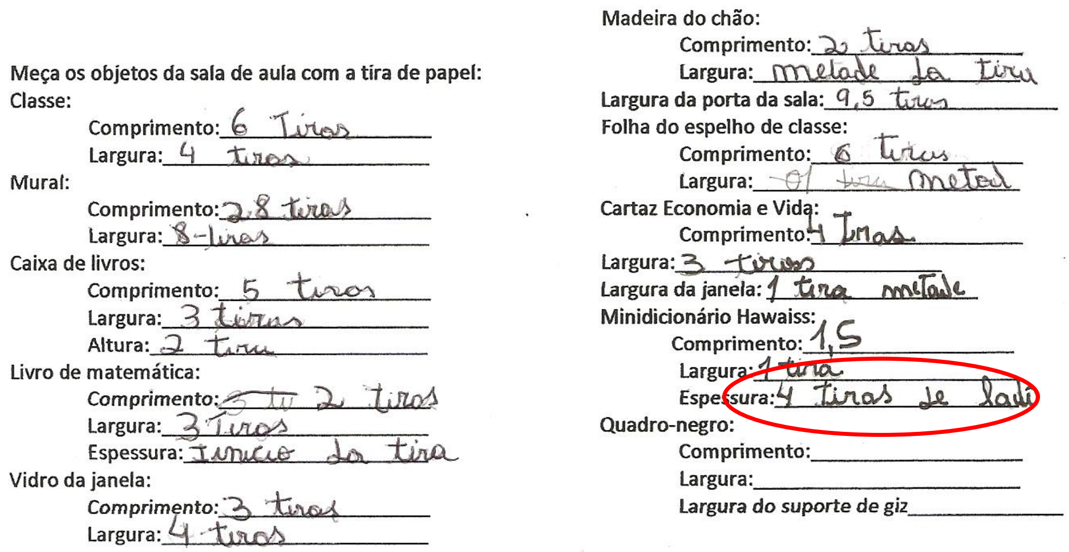
Meça os objetos da sala de aula com a tira de papel:
Classe:
Comprimento: 6x do X
Largura: 5x do X
Mural:
Comprimento: 18x e meio do X
Largura: 8x do X
Caixa de livros:
Comprimento: 4x do X
Largura: 3x do X
Altura: 2 e meio x do X
Livro de matemática:
Comprimento: 2 e 3 quintos x do X
Largura: 2 e meio x do X
Espessura: 1 quartos do X
Vidro da janela:
Comprimento: 4 e meio x do X
Largura: 2 e meio x do X
Madeira do chão:
Comprimento: 2 x do X
Largura: meia x do X
Largura da porta da sala:
Folha do espelho de classe:
Comprimento:
Largura:
Cartaz Economia e Vida:
Comprimento:
Largura:
Largura da janela:
Minidicionário Hawaiss:
Comprimento:
Largura:
Espessura:
Quadro-negro:
Comprimento:
Largura:
Largura do suporte de giz

Figura 3.12 – Registro usando "X"



Meça os objetos da sala de aula com a tira de papel:
Classe:
Comprimento: 6 u
Largura: 4 u.
Mural:
Comprimento: 19,5 u.
Largura: 7 u.
Caixa de livros:
Comprimento: 3 u
Largura: 4,5 u
Altura: 2,5 u
Livro de matemática:
Comprimento: 3 u.
Largura: 2,5 u.
Espessura:
Vidro da janela:
Comprimento: 4,5 u
Largura: 3 u
Madeira do chão:
Comprimento: 2 u.
Largura: 0,6 u.
Largura da porta da sala: 6 u.
Folha do espelho de classe:
Comprimento: 2,2 u.
Largura: 3,1 u
Cartaz Economia e Vida:
Comprimento: 4,2 u.
Largura: 3,2 u.
Largura da janela: 13,6 u.
Minidicionário Hawaiss:
Comprimento: 1,5 u.
Largura: 1,1 u
Espessura: 0,4 u.
Quadro-negro:
Comprimento: 13,5 u.
Largura:
Largura do suporte de giz

Figura 3.13 – Registro usando "u"



Meça os objetos da sala de aula com a tira de papel:

Classe:
Comprimento: 6 Tiras
Largura: 4 tiras

Mural:
Comprimento: 2.8 tiras
Largura: 8-tiras

Caixa de livros:
Comprimento: 5 tiras
Largura: 3 tiras
Altura: 2 tira

Livro de matemática:
Comprimento: ~~5 ti~~ 2 tiras
Largura: 3 Tiras
Espessura: Inicio da tira

Vidro da janela:
Comprimento: 3 tiras
Largura: 4 tiras

Madeira do chão:
Comprimento: 2 tiras
Largura: metade da tira

Largura da porta da sala: 9,5 tiras

Folha do espelho de classe:
Comprimento: 6 tiras
Largura: ~~01 tira~~ metad

Cartaz Economia e Vida:
Comprimento: 4 tiras

Largura: 3 tiras

Largura da janela: 1 tira metade

Minidicionário Hawaiss:
Comprimento: 1,5
Largura: 1 tira
Espessura: 4 tiras de lado

Quadro-negro:
Comprimento:
Largura:
Largura do suporte de giz

Figura 3.14 – Registro usando a palavra "tira"

Nesta última figura, 3.14, os alunos escreveram "6 tiras" para o comprimento solicitado e "início da tira" para outro comprimento, cuja medida era menor que a unidade. É interessante notar que a frase realçada em vermelho, indicando "4 tiras de lado", informa que o aluno utilizou a unidade-tira na sua largura[38], e, assim, possibilitou medir comprimentos menores sem o uso de frações da unidade-tira convencionada, mostrando necessidade de ter a unidade de medida menor do que a grandeza a ser mensurada. A dupla percebe a diferença no uso da unidade-tira na sua largura e no seu comprimento e tem o cuidado em informar isto em seu registro.

Nestas representações, podemos perceber o teorema em ação (T1.4) **"o valor da medida depende da unidade",** pois há a preocupação em registrar um símbolo para a unidade usada ou apresentar uma explicação, já que a unidade "uma tira" é diferente da unidade "uma tira de lado" (aqui referindo-se à dimensão menor da tira papel que está sendo usada como unidade-tira) .

No momento de socialização e institucionalização realizada após a etapa das medições, procurei escutar as falas e as explicações dos alunos, e, sempre que alguma dúvida surgia, orientava nas soluções. Contemplei momentos em que as duplas apresentavam suas estratégias para o grande grupo e pude observar as "falas" nas

---

[38] Estou utilizando as palavras comprimento e largura no sentido da maior e menor dimensão da unidade-tira, respectivamente.

quais explicavam como os números fracionários apareciam nas medições, ao mostrar para os colegas as dobras a serem feitas na tira-unidade.

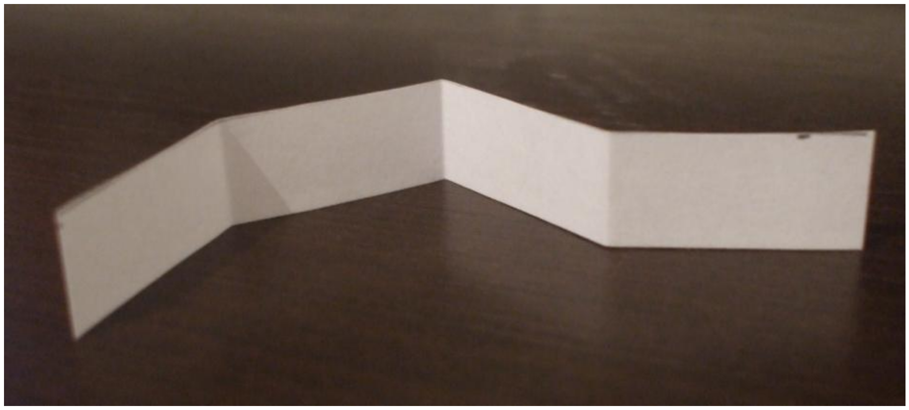


Figura 3.15 – Unidade de medida particionada em quartos

Neste processo, estabelecemos um ambiente interessante de aprendizagem, com descontração, onde todos participavam com entusiasmo.

Conclusões sobre a atividade

Vemos que, na maioria das duplas, a utilização das frações, isto é, da notação $\frac{a}{b}$, não é algo natural, mas o raciocínio que apresentam mostra que estão entendendo a ideia de número fracionário. Ao escrever “a metade” e “início da tira”, podemos dizer que o aluno percebe a existência destes números “fracionados”, mas não possui conhecimento para expressá-los na forma de número fracionário. Esta dificuldade fica evidente quando os alunos forçam para a unidade-tira caber um número inteiro de vezes no objeto que está sendo medido.

Dos 11 registros analisados, identifiquei 5 nos quais aparece informação na forma de número fracionário (ver tabela 3.1). No entanto, com base nas observações das ações dos alunos, podemos dizer que os alunos identificaram a necessidade dos números racionais, mas não sabiam como escrevê-los. Isto corresponde às expectativas enunciadas na análise *a priori*. Vi que, a partir do conhecimento que o aluno traz, a experimentação em duplas e a sistematização feita no grande grupo possibilitaram que os alunos testassem suas estratégias e tomassem consciência dos diferentes procedimentos de medição que tinham feito na atividade. E, neste último momento, os números fracionários surgiram como a forma de representação das medidas.

Número de registro	***Tipo de representação***
1	Somente números inteiros
5	Números inteiros e decimais
2	Números inteiros, decimais e fracionários
1	Números inteiros e fracionários
2	Números inteiros e palavras que indicavam frações. Ex. “metade”
Total = 11	

Tabela 3.1 – Atividade de Medições

Como conceitos e teoremas em ação, neste primeiro Módulo, identifica-se:

- (C1.1) medir é comparar com a unidade escolhida.
- (C1.2) medir é saber quantas vezes a unidade-tira cabe no objeto;
- (T1.1) se a unidade vale 10 cm, então n vezes a unidade vale n vezes 10 cm;
- (T1.2 e T1.3) se sobrar um pouquinho da unidade, então a medida é um número inteiro; se sobrar um tamanho razoável da unidade, então a medida é a metade da unidade;
- (T1.4) o valor da medida depende da unidade.

3.3.2 Módulo 2: Construção da régua dos números fracionários

De forma a dar continuidade à proposta anterior, o segundo Módulo propôs a construção de um instrumento de medida que facilitasse as medições de objetos com medidas que são números fracionários. Para isto, uma atividade de construção de uma régua numerada[39] (tira-régua), com números fracionários estava programada. O encontro foi composto de duas atividades que se complementaram. A primeira consistiu numa discussão coletiva de construção de uma régua com números fracionários. Na segunda atividade, cada aluno fez a construção da sua régua. Para construir a régua coletivamente, que ficou fixada no quadro, foi necessário uma tira de papel de dimensões 200 cm x 10 cm e uma tira-unidade com dimensões 25 cm x 10 cm. Para o segundo momento, cada aluno recebeu uma tira de cartolina com dimensões 66 cm x 7cm e uma unidade-tira de 10cm x 1cm[40], conforme a figura 3.16.

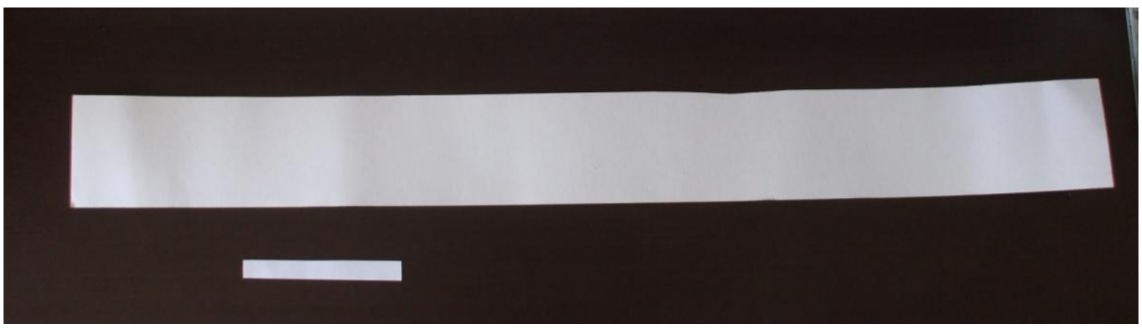


Figura 3.16 – Material entregue aos alunos do Módulo 2

Este Módulo foi programado para 100 minutos (2 horas/aula).

Análises *a priori*

O significado que os números fracionários assumem neste Módulo 2 é o de "medida", pois, no processo de construção da tira-régua, são números que serão associados a pontos da tira. Fixada uma unidade de medida e feita a escolha do ponto O a ser associado ao número zero, um ponto P à direita de O será associado ao número que mede, na unidade determinada, a distância de P até O. Era minha expectativa que este Módulo proporcionasse a compreensão de que números fracionários são associados a pontos na régua que se localizam entre os pontos que correspondem aos números naturais e, portanto, são medidas fracionadas da unidade.

[39] Ver secção 2.1.4
[40] São sugestões de medidas.

Análises *a posteriori*

Para realizar a primeira atividade, fixei a tira de papel de 200 cm x 10 cm no quadro, indicando uma "régua-gigante", e com a unidade-tira escolhida (25 cm x 10 cm), fui realizando as marcações dos números fracionários, em discussão com os alunos. Durante a construção da régua no quadro, houve muita participação dos alunos, com perguntas e sugestões.

Inicialmente, usando a unidade-tira, marquei os números inteiros de 1 até o 7, a partir da origem O. Em seguida, dobrei a unidade-tira ao meio, posicionei uma das extremidades da tira na origem O, e questionei sobre qual número deveria ser marcado na outra extremidade. Logo, alguém falou "meio", outro disse "um meio", perguntei como se escrevia "um meio" com números, então alguém disse "é 1 em cima do 2", e, então, fiz a marcação $\frac{1}{2}$ na régua.

Um aluno perguntou: "não deveria ser depois do um?". Pedi que explicasse melhor, e, então, outro aluno disse: "não tinha que começar do um?" Nestas falas, vemos que os dois alunos não têm um claro entendimento quanto à utilização de uma régua; por exemplo, não estão seguros se a medição começa no número "1" ou no número "0". Neste nível de escolarização, os alunos estão acostumados a contar conjuntos discretos, ou seja, trabalham com quantidades discretas, nas quais a contagem inicia a partir do primeiro elemento do conjunto, assim a contagem está associada ao número "1". Segundo Nunes *et AL*. (2005), é mais difícil para as crianças compreenderem as quantidades contínuas porque as diferentes unidades que a compõem não são percebidas separadamente, o que não acontece nos casos de quantidades discretas. Dessa forma, o aluno não compreende que a primeira unidade é formada do "0" ao "1" e, após o número "1", temos o início de outra unidade.

Assim, percebemos a manifestação de um conceito em ação (C2.3) não pertinente para esta situação de quantidade contínua: **a medição começa no número "1".** Esta idéia de começar a contagem a partir do número "1" é influenciada, como já foi dito, pela noção de contagem de objetos, em contextos discretos.

Quando fui marcar $\frac{5}{2}$, um aluno falou "ah, entendi o $\frac{5}{2}$, tu andou 5 vezes com o meio". Nesta fala, o aluno demonstra conhecimento em ação referente à medida, que foi trabalhada no Módulo 1, portanto, ele está pondo em ação novamente um invariante comum às duas atividades[41], porém, desta vez, o aluno considera sua unidade (que anda 5 vezes), o "meio" e, portanto, manifesta o teorema em ação (T2.5): **1/n é uma unidade.**

Perguntei para a turma se eles saberiam outra forma de representar $\frac{5}{2}$, e uma aluna respondeu "5,2". Neste caso, a aluna apresenta um teorema em ação (T2.6) equivocado: **se um número racional x está escrito na forma "p/q", então pode ser escrito na forma decimal "p,q".** Para que este teorema seja reelaborado, busquei mostrar que estes números não estão no mesmo lugar na reta.

Depois de marcadas algumas frações, as equivalências apareceram. Questionei sobre a localização de algumas frações, como $\frac{28}{4}$, $\frac{56}{8}$, e outras. Um aluno que havia percebido as equivalências disse "Ah, no 7 vai ser 28/4", eu perguntei o porquê da afirmação e ele respondeu "não sei como consegui raciocinar isso [...]", e, em seguida, disse "[...] 7 vezes 4 é 28, e o $\frac{56}{8}$ fica no 7, porque 7 vezes 8 é 56". Outro aluno percebeu que $\frac{6}{3}$, $\frac{4}{2}$ e 2 se localizavam no mesmo ponto, afirmando "é só dividir 4 por 2 e 6 por 3". Estes dois alunos demonstraram o teorema em ação (T2.7): **se o numerador é múltiplo do denominador, então este número fracionário se localiza em ponto da régua que corresponde a número inteiro.** Com este teorema em ação, os alunos indicam compreender a equivalência de números fracionários, pois percebem que existem vários números que são associados ao mesmo ponto da reta.

[41] O aluno pôs em ação novamente o conceito: **medir é saber quantas vezes a unidade-tira cabe no objeto.**

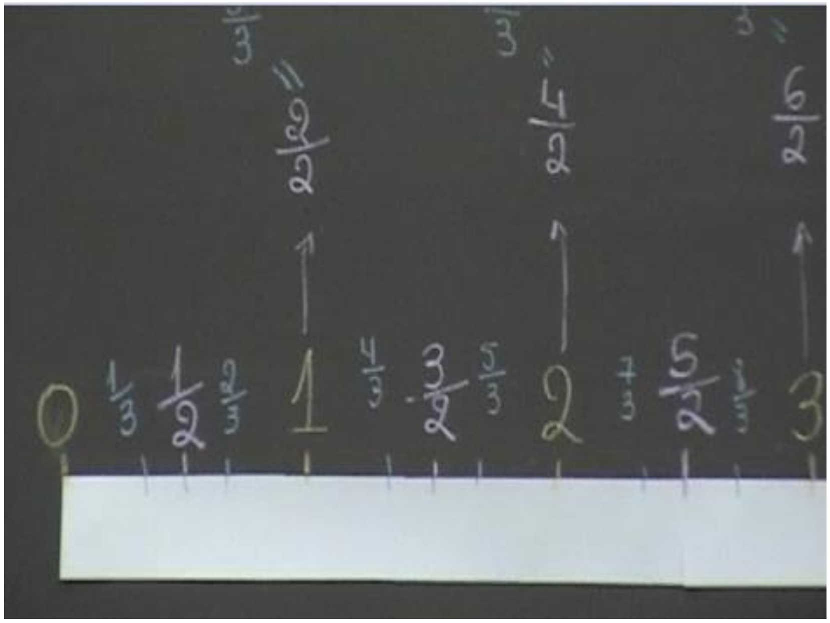


Figura 3.17 – Parte da régua construída no quadro

Após esta etapa, os alunos foram organizados em duplas para realização da construção de uma régua para cada um. Os alunos receberam uma tira de papel e a unidade-tira. Entretanto, durante os diálogos, questionei os alunos a respeito da unidade de medida que estávamos usando: “se usássemos uma unidade de medida menor ou maior, o que aconteceria com nossa régua? Os objetos medidos teriam a mesma medida?”. Como a intenção desta proposta é de que os números fracionários apareçam de forma natural, não me preocupei com trabalho de unidades de medida de diferentes tamanhos. A figura 3.18 mostra um aluno marcando números inteiros com a unidade-tira na sua régua.

Figura 3.18 – Aluno construindo a régua

A proposta previa que os alunos marcassem em suas réguas frações com denominadores 2, 3, 4, 6 e 8. Porém, identifiquei uma variável didática durante a aula: dificuldade dos alunos em dobrar a unidade em três partes. Dessa forma, com o intuito de facilitar, retiramos a tarefa de marcar os terços e os sextos. Assim, nem todas as réguas possuem frações com denominadores 3 e 6.

Na análise das réguas, podemos observar diferentes formas de organização das frações, porém alguns elementos apareceram de forma invariante no processo.

Das 22 réguas analisadas, 12 estão com seus pontos marcados com significativa precisão de medidas, e, na figura 3.19, tem-se um exemplar de tais construções:

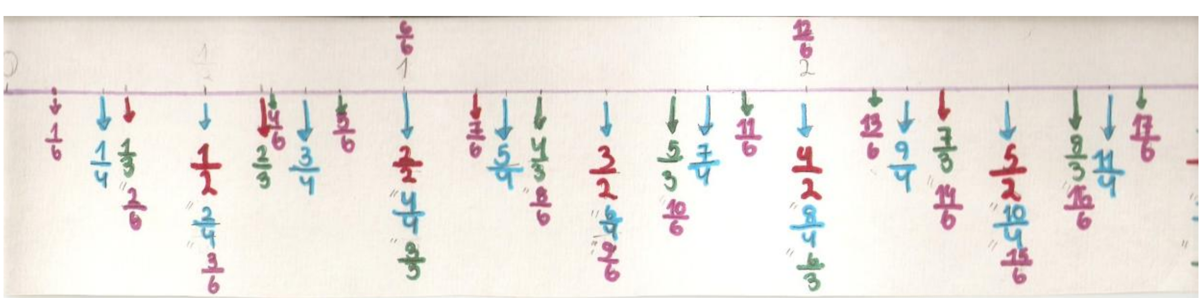


Figura 3.19 – Régua com equivalências explícitas

Dentre essas réguas, 5 não apresentavam frações equivalentes conforme havíamos feito na discussão no grande grupo. Na conversa com um aluno, ele explica que “não precisava marcar alguns números, pois já tem números ocupando o lugar”. Assim, identificamos um teorema em ação (T2.8): **se já tem um número associado a ponto da reta, então não há necessidade de associar outro número equivalente.** Isto revela que o aluno compreende o significado de frações equivalentes. A figura 3.20 ilustra a construção da régua na qual as frações equivalentes não são explicitadas.

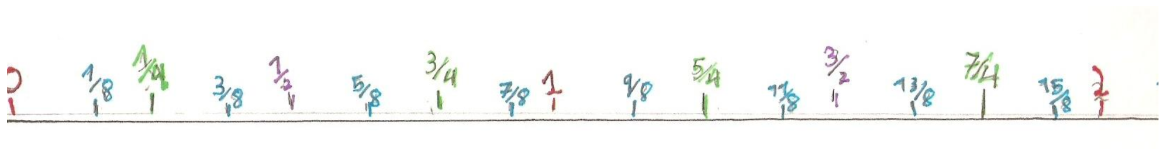


Figura 3.20 – Régua com equivalências implícitas

As outras 10 réguas analisadas possuem algum tipo de falha nas marcações. Na maioria dessas que apresentavam alguma falha, percebi que os alunos usaram um procedimento automatizado a cada denominador escolhido. Com isso, os alunos não percebem as equivalências, não tomam cuidado com a precisão das marcações e com a ordenação dos números fracionários. Isso pode ser evidenciado na figura 3.21, onde os “terços” estão com tamanhos de “quartos”, o $\frac{6}{3}$ e o $\frac{9}{3}$ estão repetido e o $\frac{8}{3}$ está depois do $\frac{9}{3}$, mas as equivalências estão corretas. Isto justifica-se pelo fato de que o aluno, ao fazer as marcações dos terços, “pulou” na marcação do número inteiro, depois “volta” e marca corretamente o $\frac{6}{3}$, $\frac{9}{3}$ e o $\frac{12}{3}$ nos pontos correspondentes. Isso indica a manifestação de um teorema em ação (T2.9): **os números inteiros não fazem parte da marcação dos números fracionários.** Já na figura 3.22, percebemos uma marcação diferente, onde, para cada denominador, tem-se um nível e uma cor, e, sendo realizadas as marcações das linhas com certa coerência, porém não há uma correspondência entre as frações de denominadores diferentes.

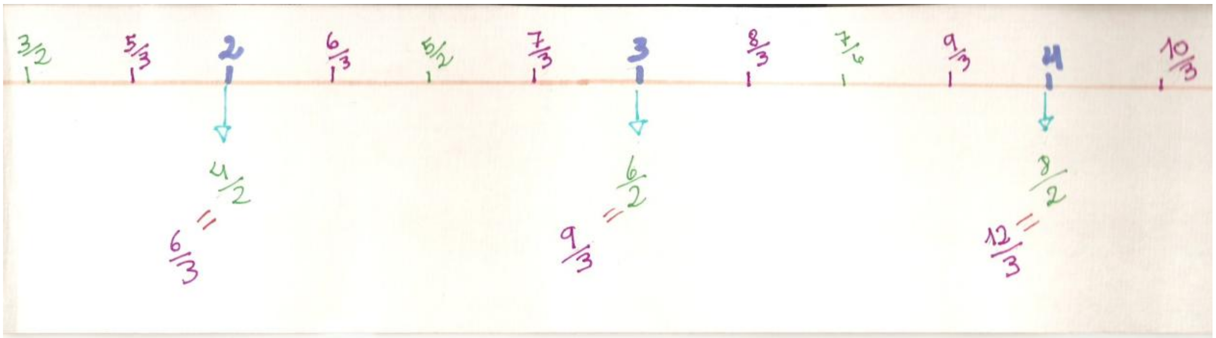


Figura 3.21 – “Terços” com tamanho de “quartos”

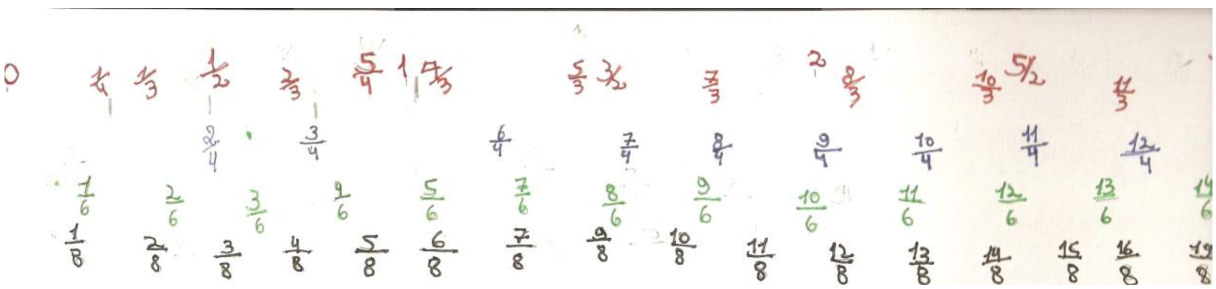


Figura 3.22 – Frações desalinhadas

É interessante notar, na figura 3.23 a seguir, que há coerência nas frações equivalentes marcadas, apesar de não estarem no mesmo ponto. Isso evidencia a falta de precisão das marcações ou talvez a não compreensão das equivalências como diferentes números que representam a mesma medida e que estão no mesmo ponto da régua.

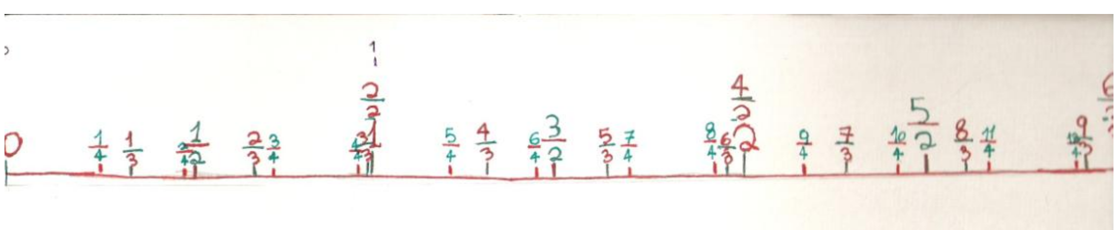


Figura 3.23 – Equivalências que não estão no mesmo lugar

Analisando as réguas, percebemos a presença de um teorema em ação comum a todas as construções (T2.10): **para marcar o número fracionário $\frac{m}{n}$, devemos**

dividir a unidade em n partes iguais e fazer a contagem destas partes conforme o numerador m deste número.

Conclusões sobre a atividade

A partir das análises das falas e dos registros dos alunos, entre os conhecimentos em ação encontrados, encontrei: três teoremas em ação formulados adequadamente à situação; um teorema em ação que deverá ser reformulado; e um conceito em ação não pertinente ao contexto de quantidades contínuas. São estes invariantes operatórios:

- (C2.3) a medição começa no número “1”;
- (T2.5) 1/n é uma unidade.
- (T2.6) se um número racional x está escrito na forma “p/q”, então pode ser escrito na forma decimal “p,q”;
- (T2.7): se o numerador é múltiplo do denominador, então este número fracionário se localiza em ponto da régua que corresponde a número inteiro;
- (T2.8): se já tem um número associado a ponto da reta, então não há necessidade de associar outro número equivalente;
- (T2.9): os números inteiros não fazem parte da marcação dos números fracionários
- (T2.10): para marcar o número fracionário $\frac{m}{n}$, devemos dividir a unidade em n partes iguais e fazer a contagem destas partes conforme o numerador m deste número;

Os teoremas em ação identificados indicam que os alunos compreenderam a correspondência entre números fracionários e pontos de uma reta. Em geral, a atividade proporcionou a compreensão dos números fracionários como pontos de uma régua, a partir do contexto de medida, e permitiu a visualização das equivalências e da ordenação entre as frações. Mais de 50% das réguas construídas estavam com uma excelente precisão, e as que não estavam apresentaram indícios de compreensão do conceito de número fracionário.

Os objetivos da atividade foram alcançados, mas se apresentou a necessidade de uma sistematização a respeito dos conhecimentos que os alunos utilizaram no processo. Esta constatação interferiu no planejamento do Módulo 3.

3.3.3 Módulo 3: A reta numérica como régua numerada

O terceiro módulo busca realizar uma sistematização do que foi trabalhado anteriormente, com maior exigência de abstração (no sentido oposto à atividade prática com objetos manipuláveis), já que sua régua e o objeto a ser medido estarão desenhados num papel. Para este trabalho, foi organizada uma folha com três atividades envolvendo réguas numeradas

A primeira atividade solicita a medição de uma “fita” usando três réguas diferentes, conforme a figura 3.24, e tem como objetivo evidenciar para os alunos que o valor da medida da fita depende da régua que está sendo utilizada.

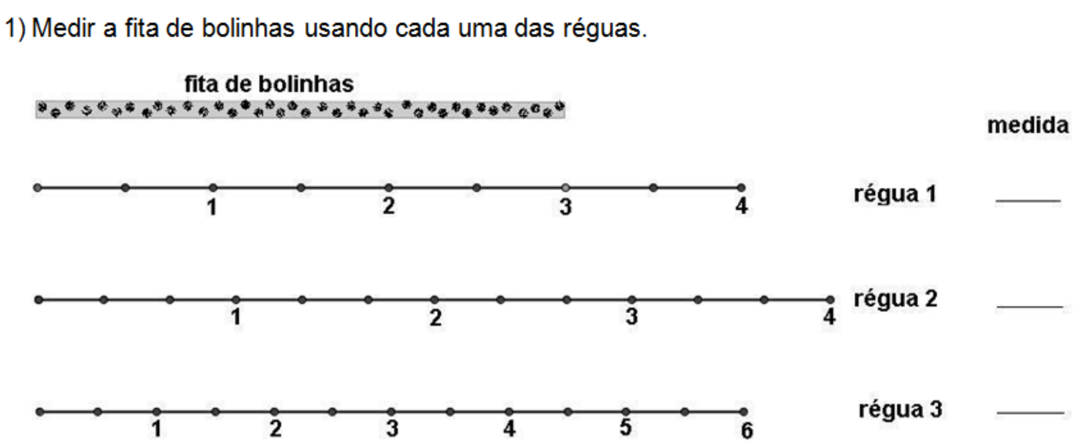


Figura 3.24 – Tarefa 1: Fita de bolinhas

A segunda atividade trata da identificação de alguns números fracionários que estão associados a pontos da reta colocados em destaque com setas (ver Figura 3.2.5, item 2). A atividade pretende proporcionar a compreensão da associação do número fracionário à medida de um segmento de reta com origem no ponto O (associado ao número zero) e extremidade no ponto P destacado.

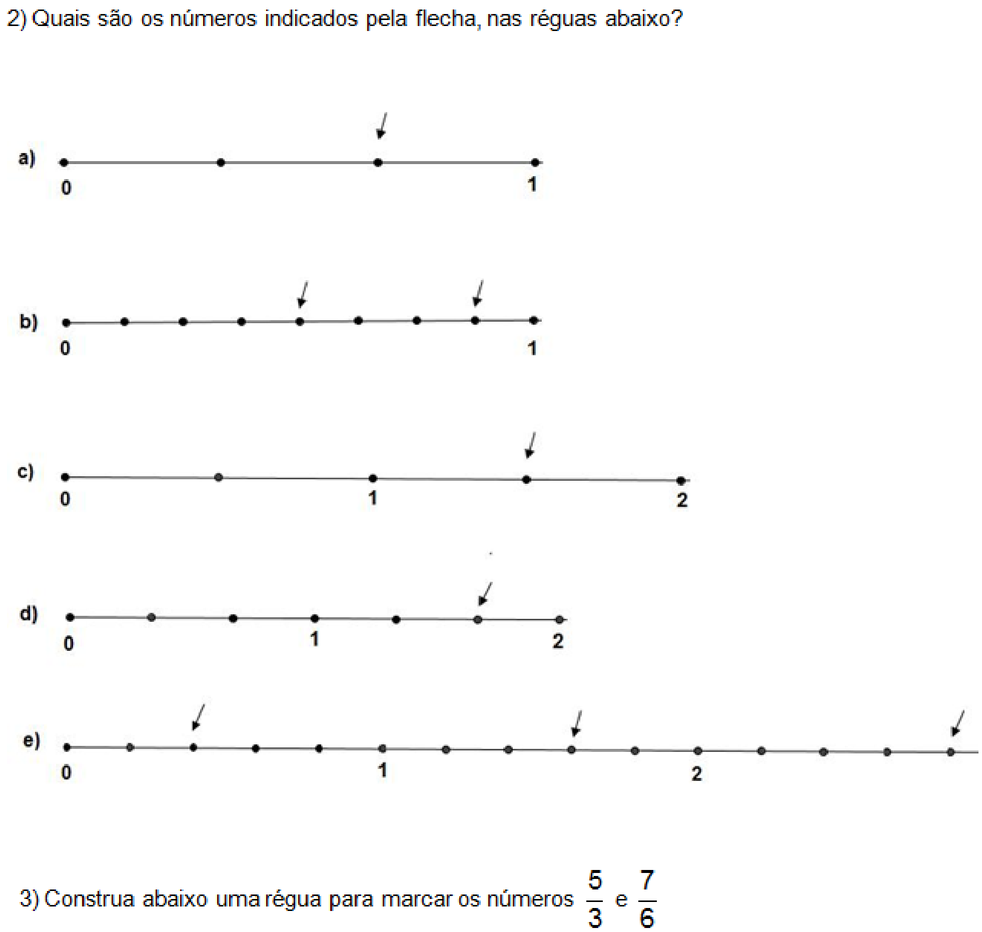


Figura 3.25 – Tarefas 2 e 3

A terceira tarefa consiste em construir uma régua para marcar dois números fracionários determinados (ver Figura 3.2.5, item 3). Apesar de o enunciado solicitar a construção de uma régua, trata-se da construção de uma reta numerada. Esta atividade não está mais enfatizando o procedimento de medição de objetos, e cabe ao aluno identificar a subdivisão da unidade a ser feita para bem localizar os números fracionários indicados.

Este módulo foi programado para 100 minutos (2 horas/aula).

Análises *a priori*

A primeira atividade trata de medição de um objeto (a fita de bolinhas), mas em contexto mais abstrato, pois a medição é feita sem que haja manipulação da régua. A informação da medida deve ser lida em três réguas diferentes, e, dessa forma, o mesmo objeto terá três medidas diferentes.

A segunda atividade exige a identificação dos pontos que correspondem a medidas de segmentos que estão na reta, portanto a medição é feita na própria régua. Na terceira atividade, os alunos devem construir uma conveniente régua para marcar os números.

A gradativa exigência de abstração no processo de medir visa garantir uma transição do contexto “régua” para o contexto “reta” de forma natural, pois, em ambos contextos, o número fracionário tem o mesmo significado de “medida”.

Análises *a posteriori*

No Módulo anterior, o trabalho finalizou com a construção da régua em tira de papel e, neste sentido, foi interessante a atitude de uma aluna no início do trabalho deste Módulo 3. Ela trouxe uma régua de metal e argumentou que era igual a que havia sido realizada em aula. Nesta régua havia marcação de centímetros e milímetros, mas a semelhança percebida pela aluna com o Módulo 2 foram as marcações de polegadas, na qual haviam frações. Isto mostra que ela conseguiu identificar elementos invariantes nos dois instrumentos de medida (os números e sua ordenação nas réguas), que independem de suas formas e tamanhos diferentes. Esta atitude mostra que a aluna estabeleceu relações e associações, evidenciando sua aprendizagem.

Nas falas observadas e nos registros na folha de atividades, identifiquei algumas habilidades com as quais os alunos resolveram as questões, assim como também alguns erros de representação das medidas e dos pontos nas retas.

Na primeira atividade, verifiquei que, dos 21 alunos que realizaram a atividade, 7 fizeram todas as medições corretas (aproximadamente 33%), e os outros 14 cometeram algum tipo de equívoco em alguma das réguas. Apenas um aluno apresentou erros em todas as medições.

Foi interessante notar que, em 4 registros, entre as corretas e não corretas, verifiquei o uso de uma representação mista, com números inteiros e frações e de decimais. A forma da figura da atividade propiciou que os alunos indicassem a medida da "fita de bolinhas" como uma medida inteira somada à medida fracionária, na qual os alunos indicaram esta soma pela letra "e". Ressaltando que a formalização de número misto ainda não havia sido tratada, isto pode evidenciar que os alunos estão trazendo seus conhecimentos anteriores e aplicando-os em novas situações. A figura 3.26 apresenta registros aproximados de número misto.

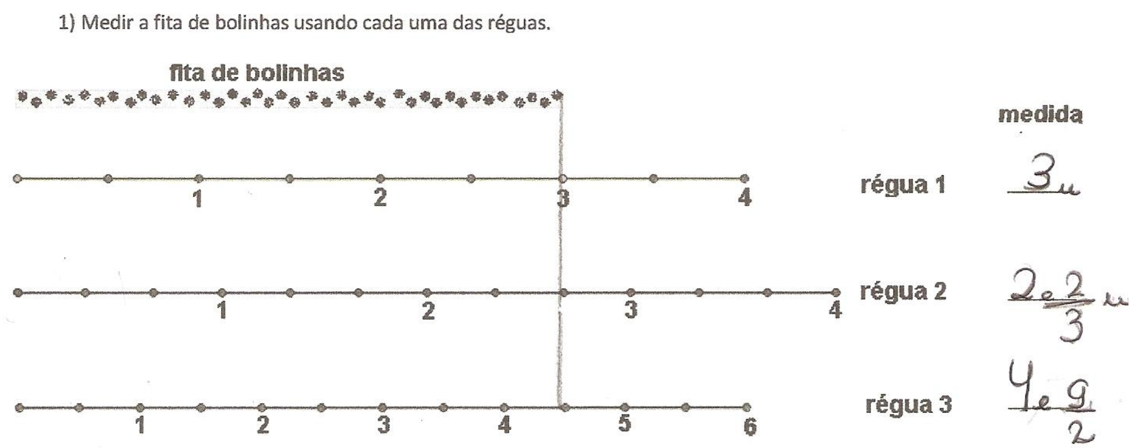


Figura 3.26 – Medições com representação mista

Contudo, alguns equívocos de representação foram cometidos nesta atividade. Alguns alunos misturaram formas de representação das medidas, usando um número inteiro seguido de frações impróprias, mas também pode-se interpretar como sendo duas formas de representar o mesmo número, na qual a preposição "e" significaria "ou", e dessa forma não estaria errado, conforme pode ser observado ainda na figura 3.26 na medição feita com a régua 3, e também na figura 3.27, na medição feita com a régua 2.

Nos registros corretos das medições, identificamos o teorema em ação que se refere ao número misto: (T3.9) **se uma medida é maior do que a unidade, então pode ser representada por um múltiplo da unidade mais uma parte fracionária desta unidade.**

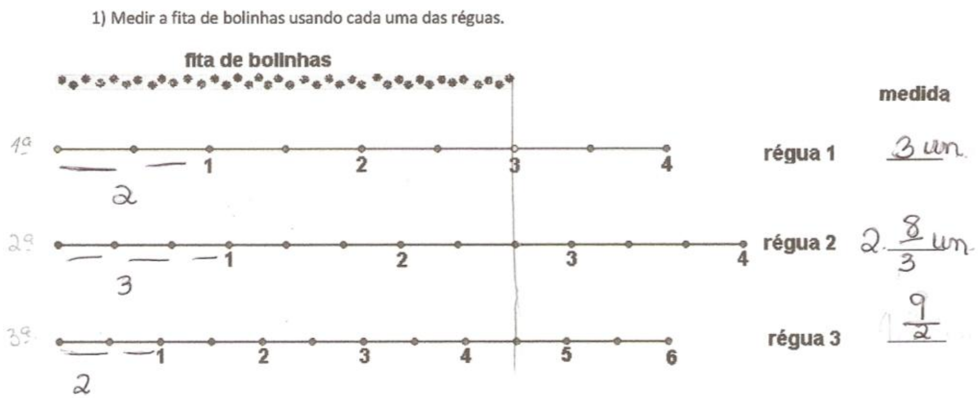


Figura 3.27 – Medições com representação mista e fração imprópria

Entre as medições equivocadas dos alunos, vemos ainda partições errôneas da unidade, nas quais contam os pontos e não os segmentos. Por exemplo na figura 3.28 abaixo: registram como medida o número fracionário $\frac{8}{2}$ na régua 2. Assim, entendo que o aluno considerou que a unidade está dividida em duas partes, pois "olhou" para os pontos entre a origem "0" e o "1" e não para os segmentos,. Dessa forma, o correto seria $\frac{8}{3}$.

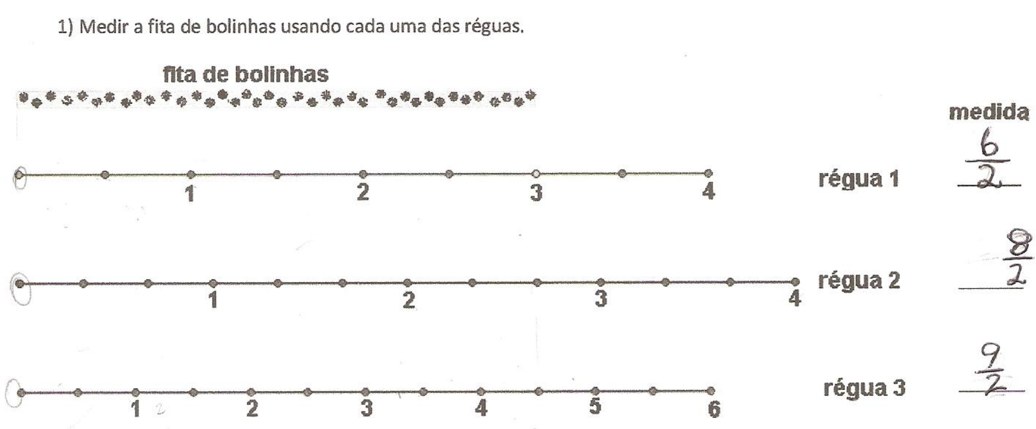


Figura 3.28 – Medição com erro no denominador na régua 2.

Na segunda atividade, a passagem do uso da régua numerada (contexto concreto) para a reta numérica (contexto abstrato) causou certa dificuldade. O trabalho que vinha sendo realizado até então utilizava réguas para medir objetos e, a partir de agora ela teria outro significado – os números associados a medidas de segmentos da própria reta. Neste momento, minha intervenção na atividade foi necessária.

Dos 21 registros, 11 apresentavam todas as marcações corretas (aproximadamente 52%), e os outros 10 apresentavam alguns equívocos. Apesar de esta atividade resultar em mais registros corretos, se comparado com a atividade 1, aconteceu de ter-se um maior número de alunos pedindo ajuda para a sua resolução. Assim, minhas intervenções acabaram interferindo na resolução dos alunos.

Na resolução da atividade, muitos alunos utilizaram os seguintes procedimentos: identificar a unidade; identificar o número de partes que a unidade está dividida; fazer a contagem destas partes até o ponto marcado pela seta. Entre as respostas, podemos destacar um caso em que a marcação do número fracionário está sobre os intervalos entre os pontos e não sobre os pontos, conforme a figura 3.29. Temos, então, um conceito em ação (C3.3): **os números fracionários estão associados a segmentos de forma equivocada**. Isto por que trata de uma associação entre números e segmentos que é não pertinente, frente a convenção que associa, na reta, números a pontos. Por exemplo na figura 3.29, o aluno associa os número fracionários $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}$ ..., a uma sequência de segmentos consecutivos. Assim, a noção do que representa $\frac{2}{8}$ talvez ainda não esteja clara. Não há problema em associar números a segmentos desde que seja segmento de tamanho condizente com o número. Assim, o número $\frac{2}{8}$, deveria ser associado ao segmento que vai do zero até o ponto $\frac{2}{8}$, conforme a indicação de vermelho na figura 3.29.

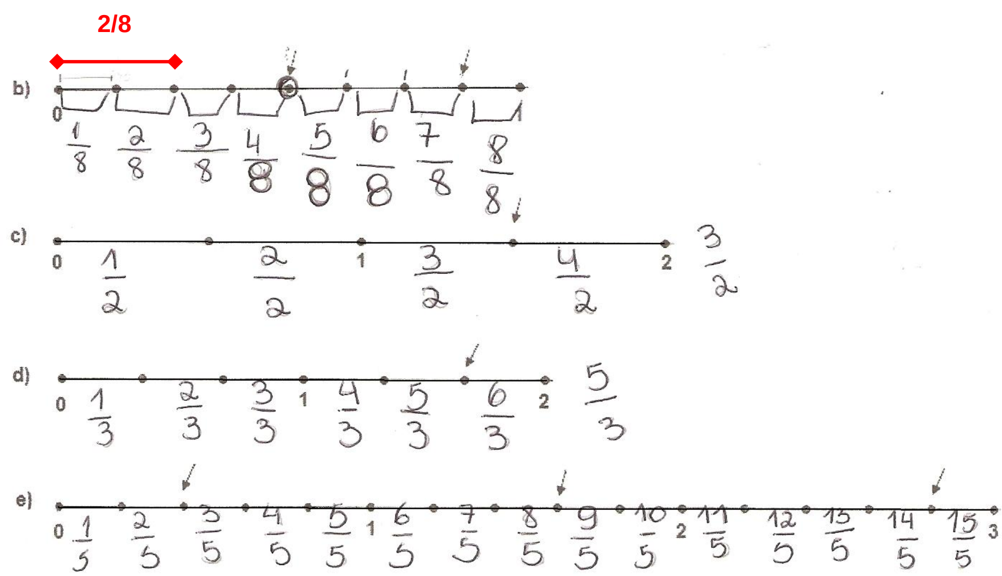


Figura 3.29 – Frações marcadas sobre segmentos

Outro fato observado, na conversa entre os alunos, foi a ideia de que, para identificar o denominador da fração, deve-se considerar os pontos marcados entre o “0” e o “1” e não os segmentos obtidos nestas divisões. Já vimos esta ideia na atividade 1, na figura 3.28 (régua 2) mostrada anteriormente. Portanto, estes alunos manifestaram um teorema em ação equivocado (T3.10): **se há n pontos entre os extremos da unidade, então a unidade está dividida em n partes**.

Também vemos que, em outros registros, além de fazer as contagens de pontos e não de segmentos, eles contavam também o ponto sobre a origem “0” e sobre o “1”, conforme a figura 3.30.

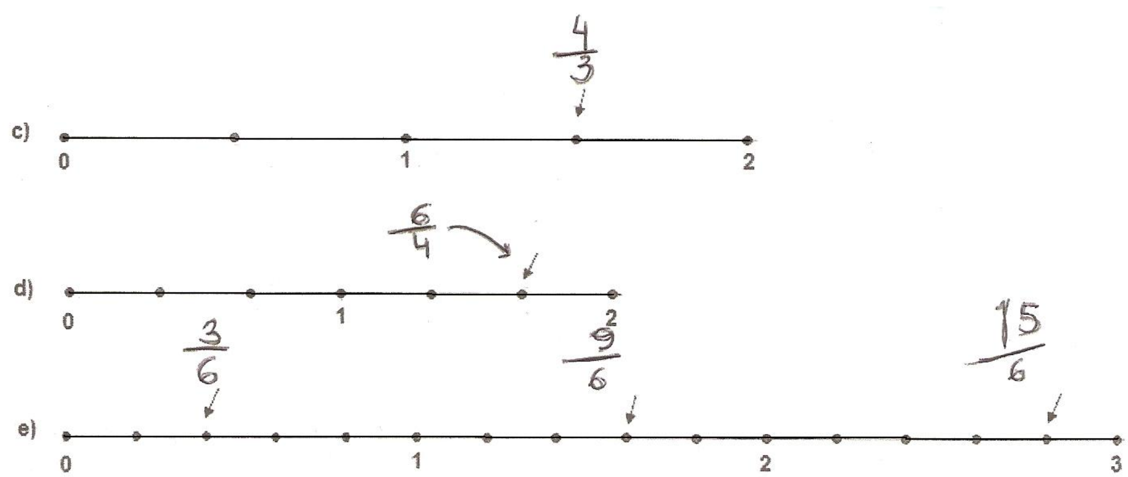


Figura 3.30 – Contagem de pontos 1

Parece-nos que, na questão (c), da figura 3.30, o aluno interpretou o número $\frac{4}{3}$ da seguinte forma: o número 3 está associado ao número de pontos destacados no segmento com extremos em zero e um; e o número 4 está associado ao número de pontos destacados no segmento com extremos em zero e naquele destacado pela seta. É com o mesmo raciocínio que ele localiza os demais números fracionários nos outros itens.

Assim, percebe-se que a estratégia do aluno possui coerência, porém não está de acordo com a formalização. Aqui temos um teorema-em-ação semelhante ao anterior (T3.11): **se há n pontos sobre a unidade, então a unidade está dividida em n partes e, portanto, o denominador das frações será n.**

Na atividade 3, dos 21 alunos, 11 conseguiram construir a reta e marcar os pontos solicitados (aproximadamente 52%). Para isso, usaram o mesmo procedimento realizado na atividade de construção das réguas do Módulo 2, estabelecendo uma unidade e fazendo divisões desta unidade, inclusive muitos alunos pediram para usar a unidade-tira (da atividade do Módulo 2) para construir a régua, estabelecendo uma relação com o que eles já haviam realizado.

Assim, observamos diferentes formas de construção destas “réguas”. Entre elas, observamos, na figura 3.31, que, além do cuidado em construir duas réguas, uma para cada número fracionário, ao marcar $\frac{7}{6}$, o aluno não divide a unidade em 6 partes para tomar 7 destas partes. Pressupomos, então, que o aluno tenha estabelecido a relação de equivalência entre o número 1 e $\frac{6}{6}$, e, dessa forma, manifestou o **conceito em ação** (C3.4) referente à equivalência.

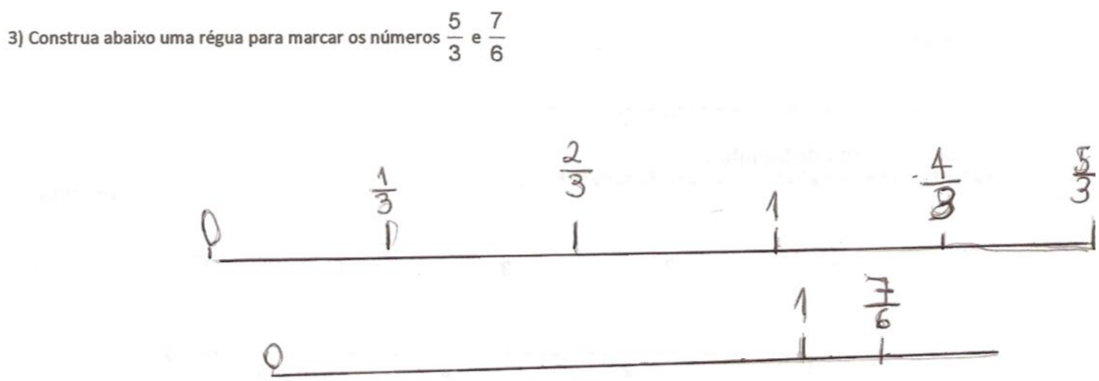


Figura 3.31 – Uma régua para cada número fracionário

Em outros 5 registros, verifica-se confusão na marcação do número $\frac{7}{6}$. Como pode ser observado na figura 3.32, o número $\frac{7}{6}$ está localizado no mesmo lugar do número $\frac{7}{3}$.

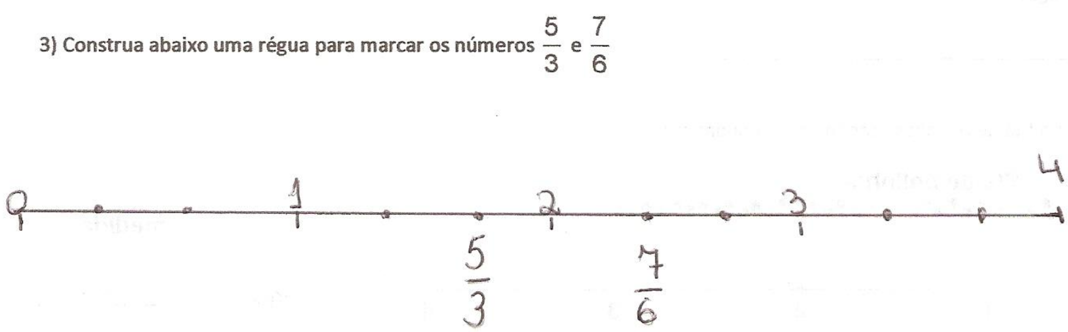


Figura 3.32 – régua com 7/6 no lugar de 7/3

Observei também, em outros registros, que os números marcados nas réguas não tinham sido solicitados no exercício. Na figura 3.33, vemos que o aluno marcou “quartos” e “oitavos” de forma equivocada, tanto por não ter realizado o que o enunciado da questão solicitava, como por ter feito “quartos” no lugar de “meios” e “oitavos” no lugar de “quartos”. Isso mostra a falta de atenção com que o aluno resolvia a atividade.

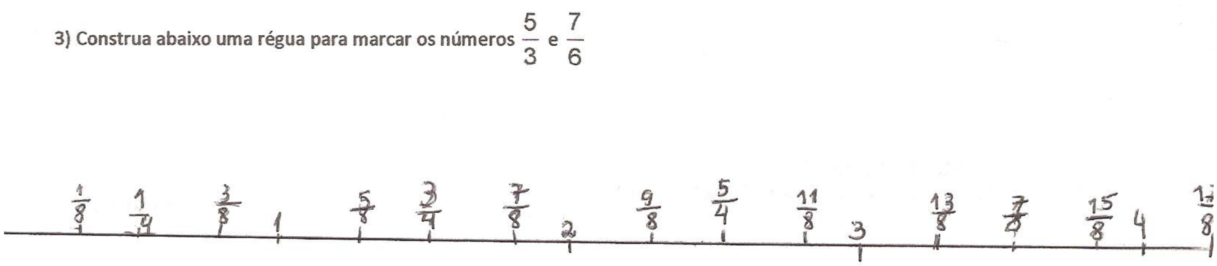


Figura 3.33 – Régua com números fracionários não solicitados

Conclusão sobre a atividade

Esta atividade proporcionou que os alunos mostrassem suas dúvidas em relação ao número fracionário como representação de uma medida. Os conhecimentos que os alunos demonstravam nas suas ações foram descritos em dois conceitos em ação, sendo um não pertinente e três teoremas em ação, dos quais um possui validade e os outros dois precisam ser reformulados. Sejam eles:

- (T3.9) se uma medida é maior do que a unidade, então pode ser representada por um múltiplo da unidade mais uma parte fracionária desta unidade;
- (T3.10): se há n pontos entre os extremos da unidade, então a unidade está dividida em n partes;
- (T3.11): se há n pontos sobre a unidade, então a unidade está dividida em n partes e, portanto, o denominador das frações será n;
- (C3.3): os números fracionários estão associados a segmentos;
- (C3.4): referente à equivalência.

Verifica-se também que a passagem da régua numerada para a reta numérica não se deu de forma tranquila, pois muitas confusões e equívocos foram cometidos e minha intervenção com explicações foi necessária. Talvez um dos fatores que contribuiu para as dificuldades foi a forma de representação da reta numérica, a qual propiciou a confusão de pontos com segmentos.

Dessa forma, considerei necessário realizar mais uma atividade nestes moldes, a fim de proporcionar a reformulação de teoremas e o estabelecimento de conceitos mais adequados a estas situações.

3.3.4 Módulo 4: Retomando a reta numérica como régua numerada

O Módulo 4 se constitui de dois momentos: o primeiro consistiu numa retomada da construção da régua numerada com bastante diálogo e o segundo momento de uma folha de atividades entregue aos alunos, com duas questões, de modo a utilizar os números fracionários para medir alguns comprimentos e a realizar marcações destes números numa reta numérica.

Para a atividade 1, utilizou-se réguas diferentes para medir fitas diferentes, inserindo um diferencial se comparado à atividade 1 do módulo anterior, que utilizava três réguas para um mesmo objeto a ser medido. Para a questão 2, foi separada a representação das frações, estabelecendo uma reta para cada número fracionário, evitando confusões de números com denominadores diferentes na mesma reta, como foi observado na análise da questão 3 do módulo anterior. A atividade está representada na figura 3.34.

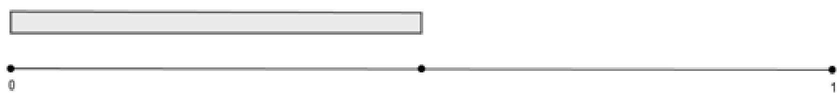
Este Módulo está programado para 100 minutos (2 horas/aula).

Atividade de Matemática – Réguas com Frações 2

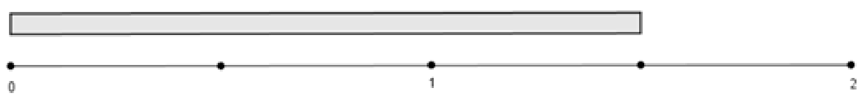
Nome:________________________________Data:______________

1) Sabendo que do 0 ao 1 temos uma unidade de medida de comprimento, ache a medida de cada fita nas réguas abaixo.

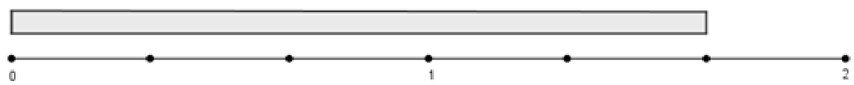
a)



b)

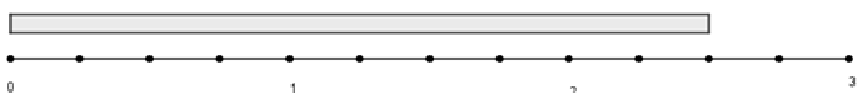


c)



d)

e)



2) Marque os pontos nas réguas:

a) $\frac{1}{4}$ ____

b) $\frac{9}{4}$ ____

c) $\frac{25}{8}$ ____

Figura 3.34 – Atividade do Módulo 4

Análises *a priori*

A reta numérica dissociada da função de medição, e, portanto de régua, causou estranhamento nos alunos no módulo anterior. Assim, considero importante retomar a ideia dos números fracionários associados a medidas de objetos, para, então, ajudar na reformulação dos teoremas em ação equivocados sobre segmentos e pontos. A expectativa, então, era que houvesse a reformulação destes teoremas em ação, assim como o estabelecimento de conceitos mais adequados.

Análises *a posteriori*

Para realizar as atividades propostas para este módulo, foi necessária a retomada da construção da régua numerada, dando enfoque para a discussão a respeito da posição dos números ser sobre os pontos e não sobre os segmentos, já que este foi um dos equívocos encontrados no Módulo anterior. Na conversa e nos registros dos alunos, podemos identificar algumas habilidades interessantes nas resoluções e as confusões ainda realizadas para cada atividade.

Na atividade 1, de 22 alunos que realizaram, 10 apresentaram todas suas medições corretas, ou seja, aproximadamente 45%. Nestes registros, destacamos a identificação correta da unidade, assim como a contagem correta das partes da unidade para a medição da fita. A figura 3.35 apresenta o registro correto e também se percebe o cuidado do aluno em marcar todos os pontos da reta.

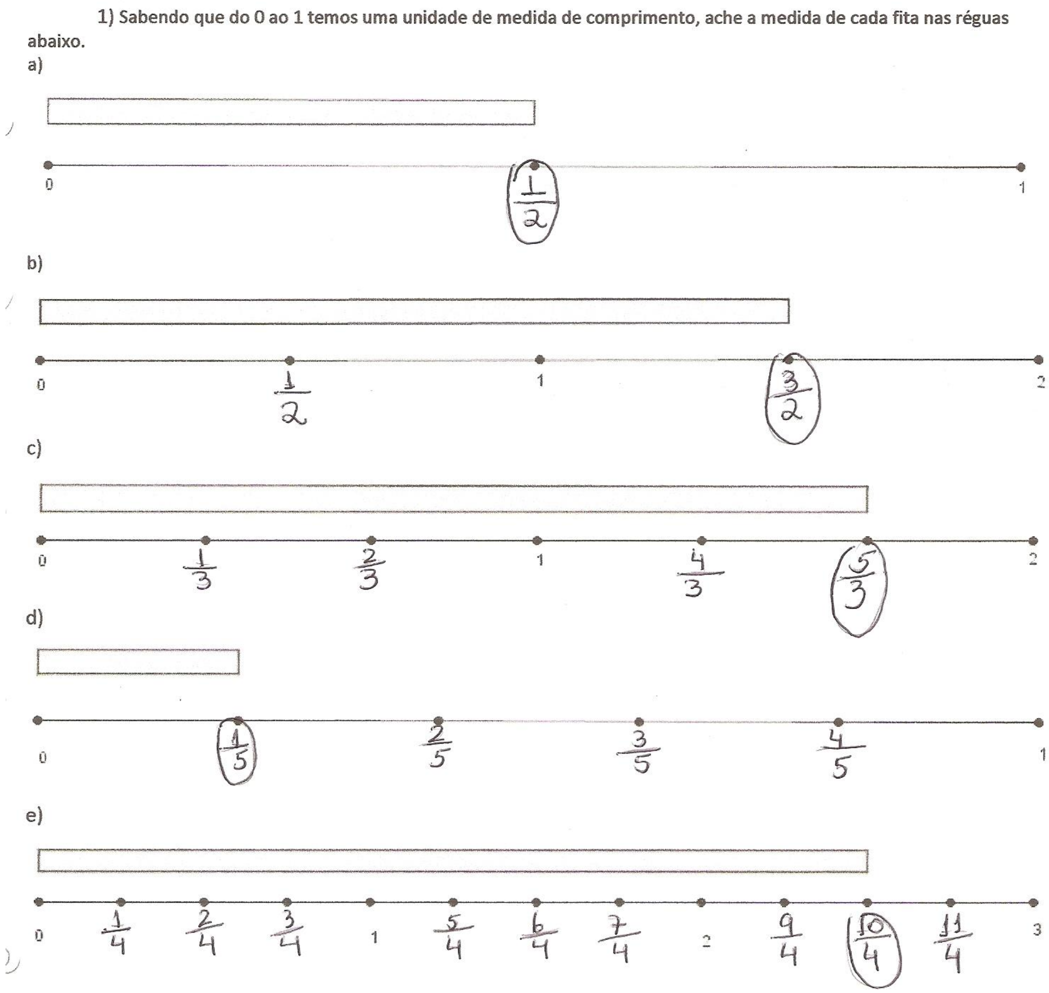


Figura 3.35 – Registro correto da questão 1

Nos outros 12 registros (aproximadamente 55%), identificamos, ainda, erros referentes à identificação da unidade e à contagem de pontos marcados na reta e não dos segmentos determinados por estes pontos. Na figura 3.36, podemos ver que o aluno considerou toda a reta a sua unidade, isto pode indicar um problema na representação, onde a imagem da reta representa o "todo". Aqui o aluno utiliza um teorema em ação equivocado (T4.12): **se o segmento todo está dividido em n partes, então cada ponto está associado a um número fracionário com denominador n.**

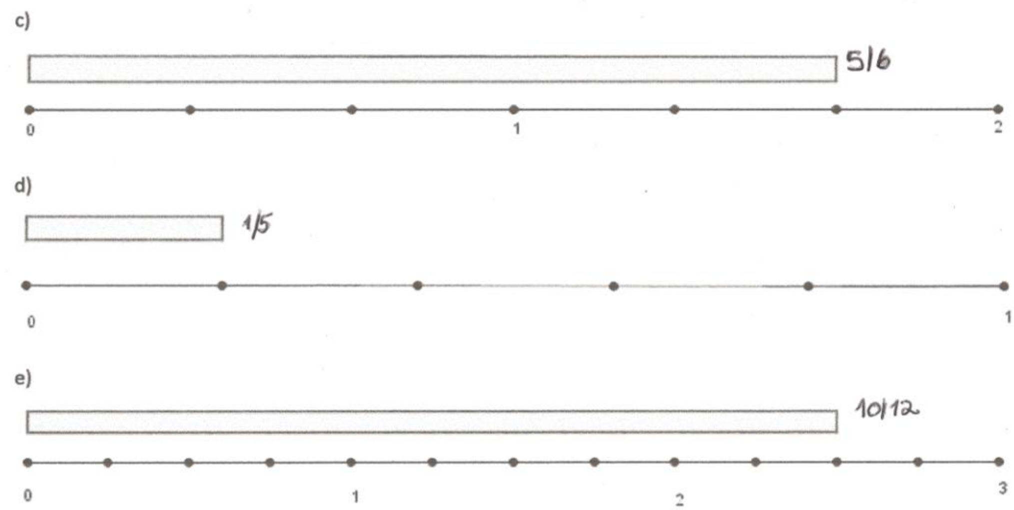


Figura 3.36 – A unidade é toda a reta

A contagem dos pontos e não dos segmentos que subdividem a unidade continua sendo um erro recorrente nos registros. Na figura 3.37, vemos que, para estabelecer o denominador, o aluno considerou os 5 pontos até o número 1, mas, para marcar as frações, considerou os segmentos.

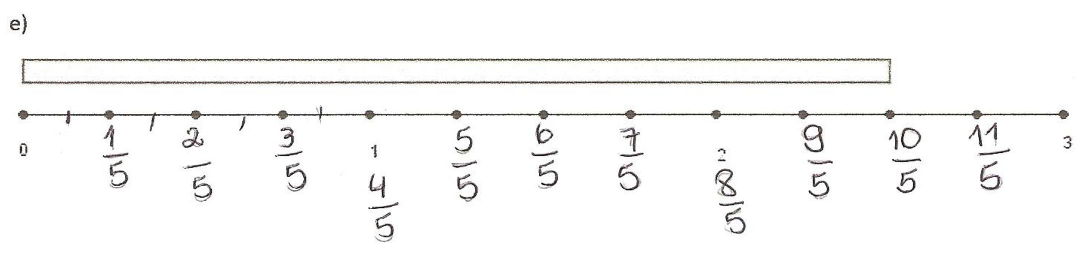


Figura 3.37 – Contagem de pontos 2

Na atividade 2, observa-se que 10 alunos, dos 22, apresentaram todas as suas marcações de pontos corretas (aproximadamente 45%). Entre estas, destacamos a percepção da equivalência de frações para a marcação dos pontos em 4 dos 10 registros. A noção de equivalência foi mostrada pelos alunos tanto nas falas quanto nos registros.

Em um dos momentos da discussão em aula (antes de ser entregue a folha de atividades), pedi que um aluno marcasse, na reta desenhada no quadro, o número fracionário $\frac{15}{7}$, e, quando eu estava apagando o número $\frac{32}{5}$ (que já estava marcado na reta), ele disse: “Não precisa, não vou chegar aí, é menor.” Perguntei o porquê da afirmação e ele respondeu: “É, Sora, porque 2 vezes 7 é 14, não vai chegar no 6.” Este aluno possui o conhecimento de equivalência de frações e consegue com facilidade encontrar a posição destes números.

Nos registros, os números são marcados sem a necessidade de dividir a unidade, e, para isso, os alunos usam a equivalência, veja figura 3.38. Ao questionar um dos alunos sobre a sua marcação na folha do $\frac{9}{4}$, na questão 2, ele respondeu: “porque o $\frac{8}{4}$ é aqui no 2, e o $\frac{9}{4}$ é aqui do lado do 2”. Este foi o mesmo raciocínio usado na questão 3 do Módulo anterior, mostrado na figura 3.31 (p.71), ao marcar o número $\frac{7}{6}$.

Assim, podemos enunciar o teorema em ação (T4.13) que utiliza o conceito de equivalência destas duas situações, do módulo 3 e do 4, da seguinte forma: **se** $\frac{p}{q} = n$ **com n natural, então** $\frac{p+k}{q} = \frac{p}{q} + \frac{k}{q} = n + \frac{k}{q}$**, sendo k = (1,2,3,...) e k<q.**

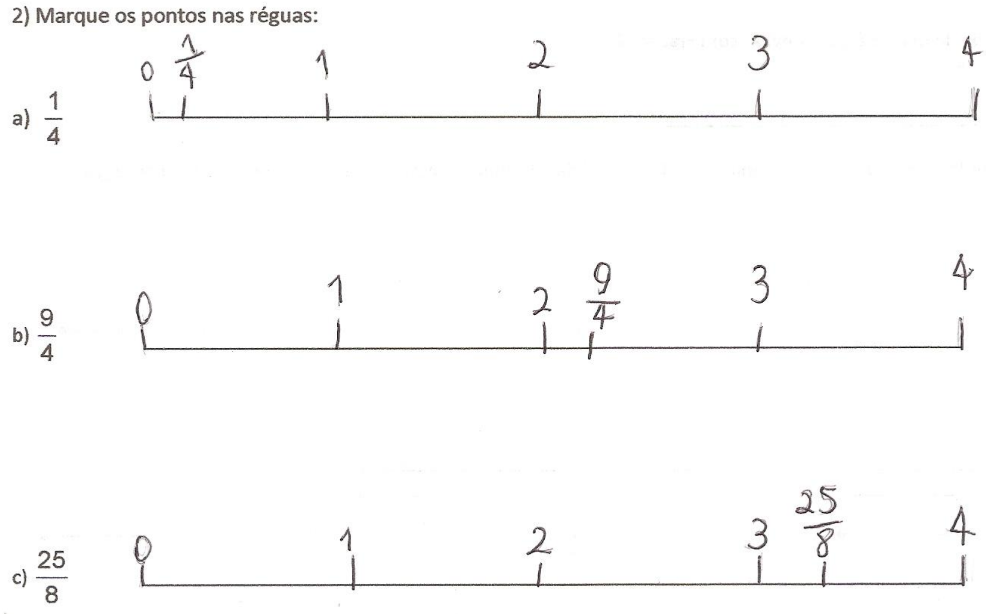


Figura 3.38 – Uso de equivalências sem divisão da unidade

Nos registros, também se percebe alguns erros de representação, como o da figura 3.39. Podemos observar que a divisão da unidade em 5 segmentos não levou o aluno propriamente ao erro, pois este usou a ideia de equivalência implicitamente, na qual sobre o ponto representado pelo número 2 há também número fracionário $\frac{8}{4}$, e o $\frac{9}{4}$ fica "um pouco" à direita de $\frac{8}{4}$. Aqui o aluno evidencia também o mesmo teorema-em-ação citado anteriormente sobre equivalência.

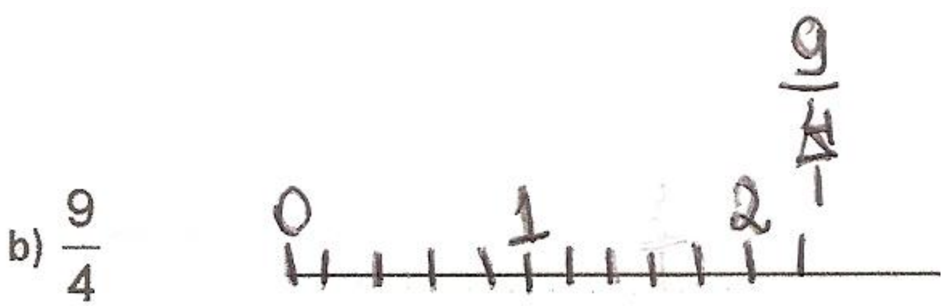


Figura 3.39 – Marcação com divisões erradas

Já em outros casos, a divisão da unidade em 5 segmentos levou o aluno ao erro. Observe a parte destacada de vermelho da figura 3.40. Estes alunos continuam utilizando um teorema em ação[42] (T4.14) equivocado, que foi enunciado no Módulo 3, porém aqui a iremos enunciá-lo da seguinte forma: **se o denominador do número fracionário é n, então deve-se marcar n pontos entre os extremos da unidade.**

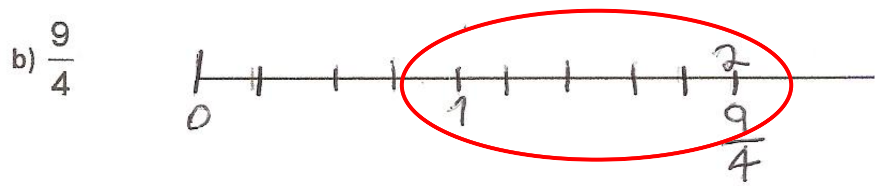


Figura 3.40 – Divisões da unidade de forma equivocada

Conclusão da atividade

Comparando o aproveitamento favorável da atividade 1, de aproximadamente 45%, com o da atividade 1 do módulo anterior, de aproximadamente 33%, percebe-se um aumento de 12% nos registros corretos. Já na atividade 2, de aproximadamente 45%, se comparada com a atividade 3 do módulo anterior, de aproximadamente 52%, temos uma diminuição dos registros corretos[43].

É preciso ressaltar que, neste módulo, os alunos resolveram as atividades com mais autonomia, sem apresentar as dificuldades do módulo 3, e, dessa forma, minha intervenção foi mínima. Apesar de ainda não ser o ideal e de que se esperava um aproveitamento melhor dos alunos neste módulo, vemos que os alunos apresentaram uma melhora nas resoluções das questões.

Este quarto Módulo possibilitou a retomada da atividade do módulo anterior fazendo muitos alunos perceber seus erros, os quais passaram a utilizar com certa autonomia a ideia de frações equivalentes. Porém, não conseguimos verificar a reformulação do teorema referente a equívocos nas contagens de pontos e não de

[42] Este teorema-em-ação foi apresentado nas análises a *posteriori* do encontro anterior, escrito de outra forma: **se há n pontos entre os extremos da unidade, então a unidade está dividida em n partes.**

[43] É importante destacar que esta diferença percentual se refere a apenas um registro.

segmentos. Consideramos que estes equívocos são inerentes ao processo de constituição de uma nova representação para os alunos, no caso, a reta numérica.

Três foram os teoremas em ação enunciados neste Módulo de atividades, sejam eles:

- (T4.12): se a reta toda está dividida em n partes, então cada parte será uma fração com denominador n;
- (T4.13): se $\frac{p}{q} = n$ então $\frac{p+k}{q} = \frac{p}{q} + \frac{k}{q} = n + \frac{k}{q}$, sendo k = (1,2,3,...), p, q e n naturais não nulos;
- (T4.14): se o denominador da fração é n, então deve-se marcar n pontos entre os extremos da unidade;

Assim, concluo, com este módulo, as primeiras atividades envolvendo o significado do número fracionário como medida. Os demais Módulos tratarão de atividades envolvendo outros dois significados das frações: “parte-todo” e “operador”, sendo que, no Módulo 9, voltarei ao trabalho com o significado “medida”. A seguir, falaremos sobre estas atividades que não foram contempladas na análise minuciosa.

3.3.5 Observações sobre os Módulos 5, 6, 7 e 8

Após o trabalho com a reta numérica, realizamos a continuidade da sequência didática com atividades envolvendo os significados “parte-todo” e “operador” das frações, organizados em três Módulos. Entretanto, estas atividades não foram objetos de análise minuciosa desta pesquisa, pois foi nossa escolha fazer um acompanhamento cuidadoso do processo de construção do número fracionário como “medida”, e esta escolha se justifica por ser uma proposta que julgo inovadora no 6º ano do EF, utilizando um contexto de régua, que faz sentido para os alunos e não poderíamos deixar de explorar e analisar todos os seus efeitos. A fim de deixar o leitor a par de tudo o que foi realizado nesta sequência didática, a seguir um breve resumo de como foram realizadas cada uma das atividades dos módulos 5, 6, 7 e 8. Para um melhor entendimento da descrição a seguir, sugiro a consulta das atividades no Apêndice II deste trabalho.

Os alunos não fizeram apenas as atividades propostas na sequência didática. Como os alunos têm livro didático de matemática e há um contrato didático que estabelece algumas regras, foi necessário que eu utilizasse o livro durante a sequência. Nos módulos sobre o significado “medida”, com o uso da reta numérica, não fiz uso do livro, pois não apresentava atividades com este contexto. Nos demais significados, pude relacionar as atividades do livro “Projeto Araribá” (BARROSO, 2007), livro didático adotado na escola. O uso do livro se deu na forma de tarefas de casa, e, portanto, não estão contemplados na sequência didática.

O Módulo 5 tratou do significado “parte-todo”, cujas atividades tinham por objetivo resgatar os conhecimentos que os alunos já traziam sobre números fracionários em situações de quantidades contínuas. Buscava-se, também, apresentar este “novo” contexto e estabelecer relações com a representação na reta numérica, observando as semelhanças e diferenças, principalmente nas frações próprias, impróprias, aparentes, não deixando de enfatizar as questões relacionadas ao “todo/unidade” considerado em cada situação das atividades.

O Módulo 6 tratou do significado “parte-todo”, dando continuidade ao trabalho anterior, porém com quantidades discretas. O objetivo desta atividade é estabelecer as diferenças das frações em quantidades contínuas e discretas, proporcionando a construção do significado “parte-todo”.

O Módulo 7 teve o objetivo de proporcionar a construção do significado de “operador multiplicativo” dos números fracionários, através da ideia de transformação de números por uma máquina e trabalhar com problemas matemáticos. Foram 3 atividades trabalhadas: a primeira consistia na introdução da ideia das máquinas através de uma aula expositiva; na segunda, os alunos teriam que utilizar máquinas para fazer transformações em números; e na terceira, havia uma lista de problemas envolvendo a ideia de “operador”.

Com o objetivo principal de introduzir as operações de adição e de subtração com frações, senti necessidade de realizar atividades mais específicas de equivalências envolvendo o contexto de parte-todo de figuras e o contexto da reta numérica, antes de entrar nas operações. Assim, os objetivos do Módulo 8 foram: retomar a equivalência de frações na reta numérica; introduzir a equivalência de frações em figuras; introduzir o procedimento de cálculo para encontrar frações equivalentes; e proporcionar a percepção das classes de equivalências.

A partir destas atividades e considerando que os alunos já conseguiam trabalhar com frações equivalentes, dei continuidade à sequência didática rumo à adição e à subtração de frações, que constitui o próximo Módulo.

3.3.6 Módulo 9: Adição e Subtração com Medidas Fracionárias

Para este Módulo, elaborei atividades em dois momentos. No primeiro momento, foi realizada uma discussão no grande grupo sobre comparação de frações usando o significado “parte-todo”, com desenhos de figuras e o significado “medida”, com a reta. Em seguida, os alunos participaram da resolução de algumas tarefas de medição e adição, com a utilização de uma régua fixada no quadro e tiras de papel coloridas para serem medidas. E, no segundo momento, foi realizada uma lista de atividades. Os materiais usados estão expressos nas figuras 3.41, 3.42 e 3.43.

A primeira atividade da folha trata de um contexto concreto, no qual o aluno faz medições, escolhe a melhor medida a ser usada, e adiciona, conforme o solicitado. Já a segunda atividade envolve um raciocínio abstrato, pois o aluno não escolhe a fração mais adequada, e sim utiliza equivalência para transformar as frações em frações equivalentes. O objetivo destas atividades é, portanto, proporcionar a necessidade da transformação de frações em outras equivalentes, com e sem a ajuda da régua.

Este Módulo foi programado para 150 minutos (3 horas/aula).

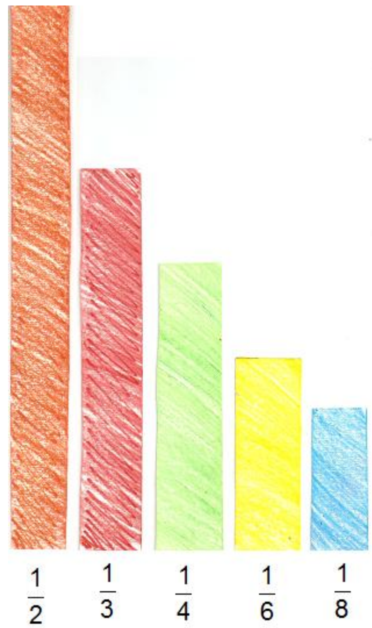


Figura 3.41 – Tiras coloridas para medições

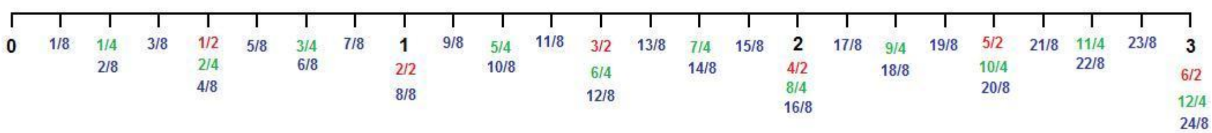


Figura 3.42 – Régua para as medições

Análises *a priori*

O uso da régua numerada nos primeiros encontros suscitava a oportunidade de trabalhar com adições e subtrações de frações em situações de medição. No momento que números fracionários assumem o significado de “medida”, estas podem ser envolvidas em questões contextualizadas do tipo: se comprei $\frac{1}{2}$ metro de fita azul e $\frac{3}{4}$ metros de fita laranja, quantos metros de fita eu comprei ao todo?

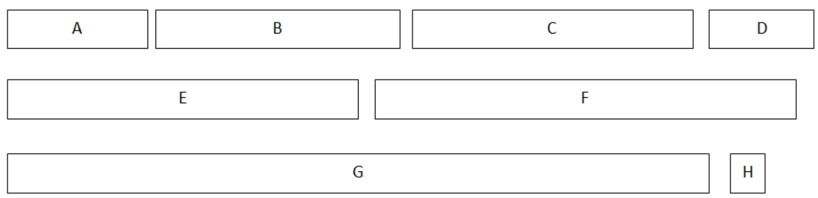
Dessa forma, o contexto da régua possibilitou elaborarmos uma atividade que explore a medição de objetos com tamanhos fracionários, a comparação e a adição destas medidas com a necessidade de usar as equivalências.

Assim, tinha a expectativa de que os alunos fizessem a correta medição dos comprimentos das tiras desenhadas, a correta adição e subtração e que esta proposta fizesse com que a utilização da técnica operatória, algoritmo incessantemente utilizado nos cálculos algébricos, não se tornasse algo ausente de sentido para os alunos, e, portanto, mecânico.

Atividade de Matemática: Adição e Subtração de Medidas Fracionárias

Nome:____________________________ ____________Data:____________

Meça o comprimento das tiras de papel usando a régua que você recebeu e some estas medidas conforme a tabela abaixo:



Peças	Medidas e cálculos:	Resposta:
A + B		
B + C		
C – A		
D + E		
F – E		
F + G		
G – H		
A - H		

Desafio: Sem o auxílio da régua, faça as adições e subtrações abaixo, usando frações equivalentes.

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=$

c) $\frac{4}{3}-\frac{1}{9}=$

b) $\frac{1}{5}+\frac{3}{2}=$

d) $2-\frac{1}{3}=$

Figura 3.43 – Lista de atividades de adição e subtração

Análises *a posteriori*

Num primeiro momento, foi realizada uma discussão, na qual os alunos foram questionados a respeito da comparação de algumas frações, através de desenhos de figuras e da reta numérica (graduada de 0 a 3, com as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$). Para as frações com denominadores diferentes, a representação na reta numérica causou um melhor entendimento aos alunos, já que basta verificar a posição destes números. E a representação com as figuras causou certa confusão, pois fazíamos divisões nas figuras de modo a transformá-las em frações equivalentes para poder comparar.

Assim, verificou-se que, para comparar frações no contexto de reta numérica, não havia necessidade do uso de frações equivalentes. Sendo assim, passamos logo para a etapa de adições e subtrações.

Neste momento, eu solicitava que alunos viessem até o quadro para medir as fitas coloridas e somar as suas medidas. Com isso, foram realizadas várias combinações entre elas: laranja e verde; verde e verde, laranja e laranja; verde e azul, vermelha e amarela; laranja e azul.

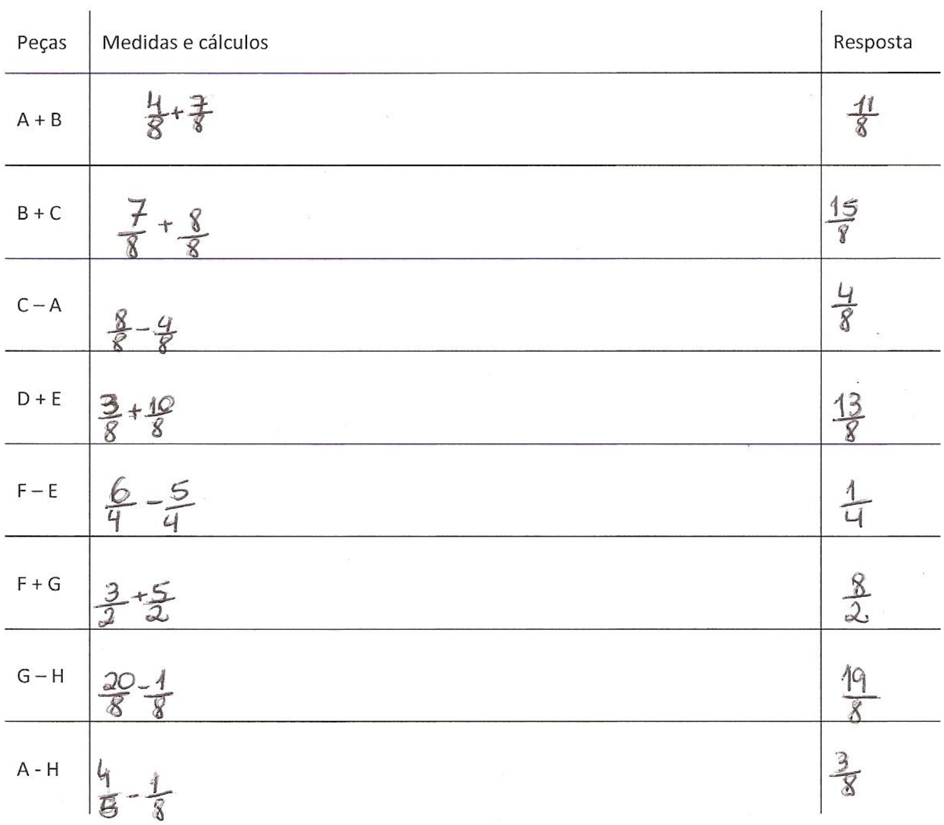
No início, alguns alunos posicionavam as fitas uma ao lado da outra, na régua, desde o zero, a fim de medir as duas fitas juntas. Esta estratégia foi muito interessante, pois o aluno não precisou se preocupar com frações equivalentes, apesar de estar usando-as implicitamente. Por exemplo: o aluno deduziu pela posição das fitas que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, mas como saber que, no final das duas tiras, é $\frac{3}{4}$ se não havia marcação na reta? Para isso, o aluno percebeu que em $\frac{1}{2}$ havia duas vezes o $\frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, e, portanto, temos $\frac{3}{4}$. Este raciocínio se constitui um teorema em ação (T9.15)**: se a medida x = 2y, então, x + y = 3y**

Em falas dos alunos durante a aula, apareceram conhecimentos sobre a necessidade da equivalência para realizar as adições: "tem que transformar $\frac{1}{4}$ em $\frac{2}{8}$

para somar com $\frac{1}{8}$". Com esta ideia, o aluno manifesta o **teorema em ação (T9.16): se as frações têm denominadores diferentes, então é preciso transformar estas frações em outras equivalentes e que tenham o mesmo denominador para adicioná-las.**

Num segundo momento, os alunos realizaram uma folha de atividades com duas atividades: a primeira consistia em medir fitas com pequenas réguas e realizar operações com as medidas; e a segunda consistia em realizar operações sem o uso da régua. Faremos, então, observações a respeito de cada questão.

Na primeira atividade da folha, observei que todos os alunos conseguiram medir corretamente as tiras (100%), porém em 11 dos 21 registros apresentavam todas as operações corretas (aproximadamente 52%). Para adicionar as frações, surgiram dois tipos de registros corretos, conforme as figuras abaixo:



Peças	Medidas e cálculos	Resposta
A + B	$\frac{4}{8}+\frac{7}{8}$	$\frac{11}{8}$
B + C	$\frac{7}{8}+\frac{8}{8}$	$\frac{15}{8}$
C – A	$\frac{8}{8}-\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$
D + E	$\frac{3}{8}+\frac{10}{8}$	$\frac{13}{8}$
F – E	$\frac{6}{4}-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$
F + G	$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$	$\frac{8}{2}$
G – H	$\frac{20}{8}-\frac{1}{8}$	$\frac{19}{8}$
A - H	$\frac{4}{8}-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Figura 3.44 – Registro de frações com o mesmo denominador

Peças	Medidas e cálculos	Resposta
A + B	$\frac{1^{\times 4}}{2^{\times 4}} + \frac{7}{8} =$	$\frac{11}{8}$
B + C	$\frac{7}{8} + \frac{^{\times 4}2}{_{\times 4}2} =$	$\frac{15}{8}$
C – A	$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} =$	$\frac{1}{2}$
D + E	$\frac{3}{8} + \frac{^{\times 2}5}{_{\times 2}4} =$	$\frac{13}{8}$
F – E	$\frac{3^{\times 2}}{2^{\times 2}} - \frac{5}{4} =$	$\frac{1}{4}$
F + G	$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} =$	$\frac{8}{2}$
G – H	$\frac{5^{\times 4}}{2^{\times 4}} - \frac{1}{8} =$	$\frac{19}{8}$
A - H	$\frac{1^{\times 4}}{2^{\times 4}} - \frac{1}{8} =$	$\frac{3}{8}$

Figura 3.45 – Registro mostrando o procedimento de equivalência

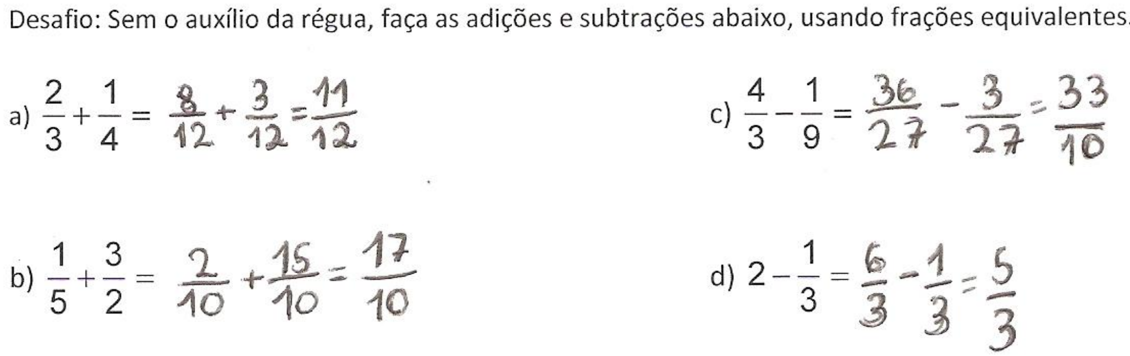
Assim, verifiquei que os alunos compreenderam ser necessário utilizar de frações com o mesmo denominador para realizar as operações. Na figura 3.44, o aluno buscou as frações com o mesmo denominador no momento da medição, poupando trabalho, e na figura 3.45, o aluno apresentou a primeira medida que encontrou na régua e depois fez os procedimentos para encontrar frações equivalentes. Estes registros reafirmam **o teorema em ação descrito anteriormente**.

Em poucos registros foram encontrados equívocos nas adições e subtrações. A figura 3.46 mostra que o aluno inicia corretamente, porém “se perde” nas demais operações sem estabelecer lógica nas suas resoluções.

Peças	Medidas e cálculos	Resposta
A + B	$\frac{1}{2} + \frac{7}{8}$ ou $\frac{4}{8} + \frac{7}{8} = \frac{11}{8}$	$\frac{11}{8}$
B + C	$\frac{7}{8} + 1$	$\frac{15}{8}$
C – A	$1 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$
D + E	$\frac{3}{8} + \frac{5}{4}$	$\frac{18}{8}$
F – E	$\frac{3}{2} - \frac{5}{4}$	$\frac{1}{8}$
F + G	$\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$	$\frac{28}{8}$
G – H	$\frac{5}{2} - \frac{1}{8}$	$\frac{19}{8}$
A - H	$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Figura 3.46 – Registro parcialmente correto

Na atividade 2, observa-se que a maioria dos alunos não conseguiu resolver as adições e subtrações sem o uso da régua. Dos 21 registros, 5 estavam com todas as operações corretas, 8 apresentavam alguma operação de forma equivocada e, nos demais registros, a questão não havia sido resolvida. Os alunos que não fizeram a questão alegaram não saber como fazer e os alunos que apresentaram a resolução correta faziam a transformação para frações equivalentes. Nos dois registros, apresentados nas figuras 3.47 e 3.48, vê-se que se diferenciam apenas pela forma de representação das equivalências, na qual o aluno do segundo registro necessitou indicar os fatores que transformam as frações em outras equivalentes com o mesmo denominador. Assim, o **teorema em ação anterior volta a aparecer.**



Desafio: Sem o auxílio da régua, faça as adições e subtrações abaixo, usando frações equivalentes.

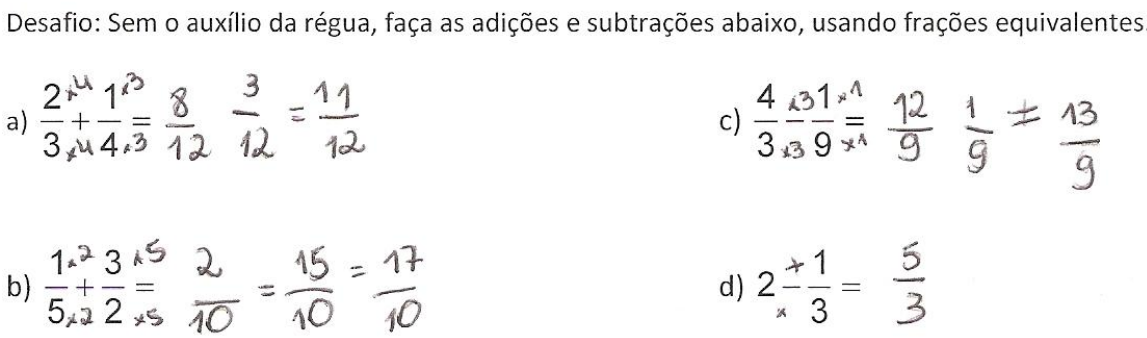
a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$

c) $\frac{4}{3}-\frac{1}{9}=\frac{36}{27}-\frac{3}{27}=\frac{33}{10}$

b) $\frac{1}{5}+\frac{3}{2}=\frac{2}{10}+\frac{15}{10}=\frac{17}{10}$

d) $2-\frac{1}{3}=\frac{6}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

Figura 3.47 – Redução de frações ao mesmo denominador



Desafio: Sem o auxílio da régua, faça as adições e subtrações abaixo, usando frações equivalentes.

a) $\frac{2^{\times 4}}{3_{\times 4}}+\frac{1^{\times 3}}{4_{\times 3}}=\frac{8}{12}\ \frac{3}{12}=\frac{11}{12}$

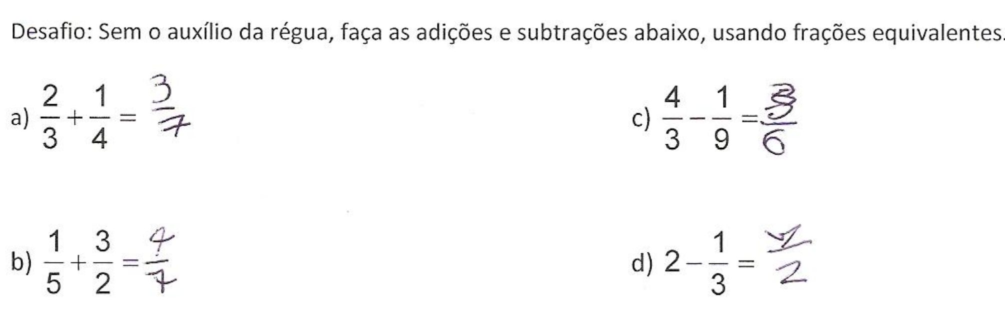
c) $\frac{4}{3}{}_{\times 3}^{\times 3}-\frac{1}{9}{}_{\times 1}^{\times 1}=\frac{12}{9}\ \frac{1}{9}\neq\frac{13}{9}$

b) $\frac{1^{\times 2}}{5_{\times 2}}+\frac{3^{\times 5}}{2_{\times 5}}=\frac{2}{10}=\frac{15}{10}=\frac{17}{10}$

d) $2\,{}^{\times}_{\times}\!-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

Figura 3.48 – Redução de frações ao mesmo denominador com fatores indicando a equivalência

Entre os registros errados, dois alunos apresentaram um tipo de resolução muito comum de aparecer, tanto nas respostas de alunos do Ensino Fundamental quanto dos alunos do Ensino Médio, e se constituem um **teorema em ação (T9.17): se** $x=\frac{a}{b}$ **e** $y=\frac{c}{d}$**, então** $x+y=\frac{a+c}{b+d}$**.**



Desafio: Sem o auxílio da régua, faça as adições e subtrações abaixo, usando frações equivalentes.

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{7}$

c) $\frac{4}{3}-\frac{1}{9}=\frac{3}{6}$

b) $\frac{1}{5}+\frac{3}{2}=\frac{4}{7}$

d) $2-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

Figura 3.49 – Adições e Subtrações equivocadas

Conclusão sobre a atividade

A introdução da adição e subtração de frações através de medidas se constituiu uma atividade produtiva, visto que proporcionou à maioria dos alunos um entendimento da necessidade de se utilizar frações com denominadores iguais para somar e subtrair. Foi curioso observar que muitos alunos escolheram as medidas que apareciam primeiro na régua, e, posteriormente, utilizavam equivalência para adicionar e subtrair.

Foram três teoremas em ação descritos neste Módulo, sendo o T9.17, um teorema equivocado de grande ocorrência na escola básica, e o T9.16 se manifestou em três momentos. Sejam eles:

- (T9.15): se a medida x = 2y, então, x + y = 3y;
- (T9.16): se as frações têm denominadores diferentes, então é preciso transformar esta frações em outras equivalentes com o mesmo denominador para adicioná-las;
- (T9.17): se $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, então $x + y = \frac{a+c}{b+d}$.

Enfim, a expectativa de que essa compreensão influenciaria no uso não automatizado dos algoritmos não foi possível de ser verificada em virtude de que exigiria uma análise cuidadosa na forma como os alunos passariam a resolver a adição e subtração de frações, e não tivemos tempo hábil para isso.

Para a segunda questão, da mesma forma que a passagem do uso da "régua" para o uso da "reta" não foi simples, a passagem de um contexto concreto, nas medições com a régua, que indicavam as equivalências, para um contexto abstrato, de operações sem a medição não ocorreu de forma tranquila. Outras atividades precisarão ser realizadas de modo a proporcionar esta transição.

3.3.7 Sobre a sequência didática e a validação da hipótese enunciada

Esta sequência didática possibilitou que os alunos colocassem em ação seus conceitos matemáticos através de teoremas usados durante a realização de tarefas.

Foram 17 teoremas e 3 conceitos em ação descritos nas análises *a posteriori* que elucidaram os entendimentos e as dificuldades que os alunos têm sobre os números fracionários. Sendo que em 12 destes teoremas, os alunos apresentaram uma leitura correta da situação matemática, assim evidenciando suas aprendizagens. Nestas aprendizagens, observa-se, por exemplo, os conceitos de proporcionalidade, de equivalência, de função (associar ponto a número e número a ponto), de medição, de multiplicação e de adição, não se esgotando por aqui.

Com base nas oito habilidades[44] sugeridas por Charalambous; Pitta-Pantazi (2007), discutidas na seção 2.1.3, percebe-se que "medir a partir do zero" e "ter noção de que, para subdividir a unidade em n subintervalos, é preciso n+1 pontos" foram as que surtiram mais dificuldades. Para lembrar quais são estas habilidades, no quadro abaixo temos novamente a relação:

5. Fazer partições da unidade; 6. Ter noção da densidade dos racionais, isto é, que entre dois números sempre têm outros números; 7. Medir a partir do zero; 8. Ter noção de correspondência bijetiva: ponto → número e número →ponto; 9. Ter noção de que, para subdividir a unidade em n subintervalos, é preciso n-1 pontos[45]; 10. Ter noção de ordem "maior/menor" [46]; 11. Ter noção de equivalência de números fracionários [47]; 12. Ter noção da relatividade do denominador b em a / b [48].

Quadro 3.1 – Habilidades a serem desenvolvidas com o significado "medida" da seção 2.1.3

Estas dificuldades, entretanto, não estão ligadas necessariamente à noção de número fracionário, mas à percepção que as crianças têm de contagem a partir de quantidades discretas, pois,

[44] Lembrando: associar ao significado "parte-todo"; fazer as partições da unidade; ter noção da densidade dos racionais; medir a partir do zero; ter noção da correspondência bijetiva: ponto-número e número-ponto; ter noção de que número de pontos não coincide com o número de intervalos; ter noção de ordem; ter noção de equivalência; ter noção da dimensão relativa da fração.
[45] Exemplo: para representar na reta a fração 3/5, é necessário dividir a unidade em cinco partes e, para isso, tem que fazer 4 "cortes" entre o número 0 e número 1.
[46] Exemplo: 1/3 é menor do que ½, pois está mais próximo do zero.
[47] Exemplo: 2/4 e 1 / 2 estão associados ao mesmo ponto da reta.
[48] Exemplo: marcar o ponto 2/3 na reta que tem a unidade subdividida em 6 partes iguais.

> Piaget salientou que a lógica subjacente às quantidades contínuas e descontínuas é muito semelhante. No entanto, é mais difícil para as crianças compreenderem quantidades contínuas porque, no caso dessas quantidades, as diferentes unidades que compõe a quantidade não são percebidas separadamente. (NUNES *et alli*, 2005, p.120).

Sendo assim, como o contexto da reta é de quantidades contínuas, é necessário um tempo para que estas crianças percebam as diferenças nas contagens e, assim, consigam desenvolver as duas habilidades. As demais habilidades foram, de certa forma, melhor compreendidas pelos alunos, principalmente a “noção de equivalência de números fracionários”.

É importante ressaltar que a observação de todas as ações, das falas, e a retomada de alguns aspectos com os alunos individualmente, considerada importante na identificação dos teoremas em ação, não foi possível de forma efetiva, visto que esta prática foi realizada com base na realidade de minha escola, que não possui tempo suficiente para diálogos e reflexões com os alunos além dos períodos no turno de aula.

Dessa forma, foi validada a hipótese desta proposta didática neste contexto de pesquisa, na qual a sequência didática pode proporcionar uma melhor compreensão do conceito de números fracionário para os alunos que evidenciaram suas aprendizagens. Para os alunos que mostraram incompreensões do conceito outras atividades devem ainda ser realizadas na forma de complementação desta sequência.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> O primeiro número que você aprendeu e provavelmente o primeiro que falou: “um”. Ele sempre foi um número cheio de significado. Quando compreendemos que quatro quartos se transformam magicamente em um inteiro, o número 1 passa a significar singularidades, completude, unidade e proximidade (BENTLEY, 2009, p.36)

Ao longo deste trabalho de pesquisa, que trata de uma proposta didática sobre o conceito de número fracionário para o 6º ano do EF, verificou-se que, através de uma sequência de atividades envolvendo o significado “medida”, é possível propiciar aos alunos uma melhor compreensão deste tipo de número. O significado “medida” proporcionou um entendimento que julgo pouco convencional para alunos de 6º ano – as frações deixaram de representar somente as partes de um todo e passaram a ser identificadas também com medidas de segmentos e com pontos de uma reta graduada. E vale observar que, frequentemente, não é fácil para os alunos a compreensão dos números fracionários maiores do que um, representados pelas frações impróprias e números mistos, quando se toma como referencia uma ensino que prioriza o significado “parte-todo”. No contexto de medições de segmentos em uma reta, as frações impróprias se apresentaram de forma natural e foi sem maiores dificuldades que os alunos trabalharam com estas frações.

No acompanhamento das aprendizagens dos alunos, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud se constituiu um aporte teórico relevante. A partir desta teoria, pude interpretar os conhecimentos que os alunos manifestaram durante a realização das tarefas, nas suas falas e atitudes, bem como nos registros escritos. Foi com grande satisfação que, ao fazer a transposição da teoria para o campo da experimentação, identifiquei os diferentes *conceitos* e *teoremas em ação* nas falas dos alunos em processo de aprendizagem e isto justifica o destaque em negrito que foi dado no texto que trata das análises *a posteriori .*

Considero a Teoria dos Campos Conceituais uma pertinente teoria para todo profissional da educação, e ressalto que ela é complexa. Foi na prática de sala de aula que consegui compreender com maior clareza o que nos é proposto por Vergnaud. Assim foi que, depois de muitas idas e vindas nas leituras e de muitas análises da prática, meu olhar para as ações dos alunos passou a perceber os invariantes teorizados por Vergnaud e, desta forma, pude identificá-los como conhecimentos matemáticos válidos ou conhecimentos que precisavam ser reelaborados pelos alunos de modo a se constituírem como válidos no corpo do saber matemático.

É claro que, além dos registros feitos, um diálogo mais individualizado com os alunos, a fim de escutar com mais atenção suas palavras e interpretar melhor suas atitudes, poderia aprimorar a identificação de outros *conceitos* e *teoremas em ação*. Mas esta seria outra pesquisa e com espírito diferente da que realizei - minha pesquisa feita na sala de aula tal qual vivencio no meu dia-a-dia de professora, com todas as dificuldades e nuances que se apresentam no acompanhamento da aprendizagem de uma turma de quase trinta alunos. Como é de se esperar, diferentes ritmos de aprendizagem se apresentaram no grupo de alunos e mesmo tendo identificado casos de equívocos conceituais ainda no final da experiência, podemos dizer que houve progressos quanto à compreensão do número fracionário no seu significado “medida”. E considerando que a aprendizagem é um processo gradual de amadurecimento de ideias, acredito que a consolidação do conhecimento relativo a número fracionário também vai depender de recorrente retomada dos seus diferentes significados, em diferentes momentos da educação escolar.

Hoje consigo ter outra visão sobre as dificuldades de meus alunos. Busco perceber os conceitos que eles utilizam e de que forma os utilizam, para, então, auxiliá-los numa possível reformulação de seus *teoremas em ação*. Um exemplo que posso citar são os erros comuns na simplificação de frações algébricas, nas quais os alunos “cortam” os termos sem realizar a fatoração, especialmente no 8º ano do EF. Estes alunos geralmente conseguem fazer as simplificações com frações numéricas, mas na álgebra o desempenho já não é o mesmo. Assim, percebo que a ideia de simplificação de fração não está sendo bem utilizada, simplificar não é “cortar” termo a termo. Então, é preciso retomar o conceito de equivalência de frações para que eles reformulem este teorema de “cortes”: $\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{\cancel{x}+\cancel{3}}{\cancel{x}^2-\cancel{9}}=\frac{1+1}{x-3}=\frac{2}{x-3}$.

Este Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática contribuiu consideravelmente para minha formação e qualificação profissional, possibilitando a reflexão sobre a prática na sala de aula, tanto em questões ligadas aos fundamentos da ciência matemática como em questões sobre a educação matemática. Assim, ele gerou melhorias no meu fazer pedagógico e abriu a possibilidade de continuação de um trabalho reflexivo sobre a minha prática, ponto fundamental para uma intervenção pedagógica de qualidade.

As reflexões realizadas no Capitulo 2 deste trabalho, sobre os diferentes significados dos números fracionários, juntamente com a teoria a respeito da construção do conceito, constituem um material que pode auxiliar os professores no entendimento da complexidade do processo de aprendizagem deste conteúdo. Nos apêndices deste trabalho, deixo como referencial ao professor, um produto didático que foi testado e que se organiza na forma de sequência de atividades.

Por fim, devido à importância do tema deste trabalho no ensino de matemática na escola básica, novas pesquisas podem ser realizadas de modo a qualificar o ensino de números fracionários. Dentre elas, deixo registrada a possibilidade de identificação de outros *teoremas em ação*, que podem ser manifestados no trabalho com todos os diferentes significados dos números fracionários. Estas pesquisas são importantes e podem contribuir para a reformulação das abordagens que os livros didáticos apresentam no tópico “números racionais”, mais especificamente “números fracionários” no 6º ano do EF.

5 REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (org). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p.193-217.

BACKENDORF, V. R. *Uma Sequência Didática de Medidas de Comprimento e Superficie no 5º ano do Ensino Fundamental*: um estudo de caso. 2010. 188f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Porto Alegre: Instituto de Matemática: UFRGS, 2010.

BARROSO, J. M. *Projeto Araribá*: matemática 6º ano. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2007.

BERTONI, N. *Pedagogia*: Educação e Linguagem Matemática IV: Frações e Números Fracionários. Brasilia: UnB, 2009.

BENTLEY, P. O Livro do Números: uma história ilustrada da matemática. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2.ed. São Paulo: Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília, DF, 1998.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:* conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BÚRIGO, E. Z. Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 295f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Porto Alegre: Instituo de Matemática/UFRGS, 1989.

CAMPOS, T.; MAGINA. S. A Fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. *Bolema*. Ano 21, n.31, p.23-40, Rio Claro, 2008.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. *Zetetiké.* v.13, n.23, p.87-119, jan/jun. 2005.

CARVALHO, D. L. *Metodologia do Ensino da Matemática*. 3.ed. São Paulo: Cortez, 2009.

CAVALCANTE, L. G. *Matemática Moderna Fundamental*: método moderno para o ensino fundamental. v. 3. São Paulo: Formar, 1973.

CHARALAMBOUS, C. Y, PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a theoretical model to study student' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*. v. 64, n.3, p.293-316, University of Michigan, School of Education: Springer Netherlands, 2007.

DANTE, L. R. *Tudo é Matemática*. 5ª série. São Paulo: Ática, 2007.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. D. A (org). *Educação Matemática:* uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008.

GIOVANNI; CASTRUCCI; GIOVANNI Jr. *A Conquista da Matemática.* 6º ano. Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2007.

KOSIEN, V. Coleção Moderna de Estudos Primários – Matemática. 3º volume. São Paulo: ECLAL, 1969.

LLINARES, S. GARCIA, M. V. S. *Fracciones*. Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

LOPES, A. J.(Bigode) *Matemática hoje é feita assim*. 5ª série. São Paulo: FTD, 2000.

LOPES, A. J. (Bigode) O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema*. Ano 21, n. 31, p.1-22, Rio Claro, 2008.

MERLINI, V. L. *O Conceito de fração em seus diferentes significados*: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. 238f. Dissertação (Mestrado em Matemática) São Paulo: PUCSP, 2005.

MOREIRA, A. M. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud: o Ensino de ciências e a pesquisa na área. *Investigação em Ensino de Ciências*, v.7(1), p.7-29 Porto Alegre: UFRGS, 2002.

MORI, I.; ONAGA, D. *Matemática*: ideias e desafios. 6º ano. 15 ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

MUNIZ, C. O Conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.* 1.ed. Curitiba: Editora CRV, 2009. (p.37-52)

NUNES, T. CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. *Educação Matemática 1*: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. *Números racionais, reais e complexos*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.

RODRIGUES, M. *A. S. Explorando Números Reais através de uma representação Visual e Sonora*: um estudo das interações dos alunos do Ensino Médio com a ferramenta MusiCALcolorida. 2009. 245f Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: UNIBAN, 2009.

ROMANATTO, M. C. Número Racional: uma teia de relações. *Zetetiké*, v.7, nº12, p.37-49, jul/dez.1999.

ROXO, E. A matemática e o curso secundário. In: VALENTE, W. R. (org.). *Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil.* Brasília: UnB, 2004.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: MACHADO, S .D. A (org). *Educação Matemática:* uma (nova) introdução. 3.ed. São Paulo: EDUC, 2008, p.49-75.

SILVA, V. A. *Por que e para que aprender a matemática?* São Paulo: Cortez, 2009.

THIRE, C.; MELO E SOUZA. *Matemática*. 1º ano. 12 ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1940.

TODESCHI, S. *Matemática:* para as cadeiras de curso pedagógico dos Institutos de Educação do Brasil. v.16. São Paulo: Editora do Brasil, 1955.

TRAJANO, A. *Arithmética Progressiva*. Curso Superior. 62 ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1927.

VASCONCELOS, I. C. P. *Números Fracionários*: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª série de uma escola do ensino fundamental. 2007. 104f. Dissertação (Mestrado em Educação). Porto Alegre: Faculdade de Educação/UFRGS, 2007.

VERGNAUD, G. A Trama dos Campos Conceituais na Construção do Conhecimento. *Revista do GEEMPA,* Porto Alegre, n. 4, Jul. 1996a.

______. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. (org). *Didáctica das matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, p.155-91, 1996b.

______. Entrevista. Temas Transversais na Educação. *Pátio Revista Pedagógica*, Porto Alegre, n. 5, p. 23-26, maio/jul, 1998.

______. A Gênese dos Campos Conceituais. In: GROSSI, E .P.(org.) *Por que ainda há quem não aprende?* a Teoria. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2003, p.21-60.

VERGNAUD, G. O. que é aprender In: BITTAR, M; MUNIZ, C. A. (orgs.). *A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: Edutora CRV, 2009.

______. A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behaviour*, n. 17(2), p.167-81, 1998.

APÊNDICES

Apêndice I: Termo de Consentimento Informado

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____________________________________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordo com a participação do(a) aluno(a) na pesquisa de dissertação de Mestrado da Professora Valéria Espíndola Lessa, sobre os Números Racionais, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, orientado pela Profª. Dra. Maria Alice Gravina.

Estou ciente de que esta pesquisa tem finalidade acadêmica e seus achados poderão contribuir para o aprimoramento dos estudos relacionados ao processo ensino-aprendizagem da matemática, com propostas que propiciem a melhoria na qualidade da educação. Os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pelo primeiro nome e idade.

Caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) professor(a) responsável no endereço da Escola ou pelos telefones (051) 33205400 / (51)84063363.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar desse trabalho a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ____________ de _____________.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

Apêndice II: Sequência Didática

MÓDULO 1 – MEDIÇÕES NA SALA DE AULA

Objetivos:

- Proporcionar a medição de comprimentos de objetos, maiores ou menores do que a unidade considerada;
- Provocar a utilização do número fracionário como resultado das medições;
- Provocar a utilização de procedimentos pelos alunos para a realização da atividade

Tempo médio de duração: 50 minutos – 1 hora/aula

Materiais:

- Unidade de medida: tiras de papel medindo 10 centímetro de comprimento e 2 de largura (opcional);
- Folha com os objetos da sala que deverão ser medidos e espaço para anotações de suas medidas.

Procedimentos:

1 – Conversa inicial sobre a necessidade de ser estabelecida uma unidade de medida padrão para se fazer medições.

2 – Formação de duplas. A escolha das duplas fica a critério da turma.

3 – Todas as duplas receberão o seguinte material:

Folha de anotações

Nome:________________

Meça os objetos da sala de aula com a tira de papel:
Classe:
    Comprimento:___________________
    Largura:________________________
Mural:
    Comprimento:___________________
    Largura:________________________
Caixa de livros:
    Comprimento:___________________
    Largura:________________________
    Altura:_________________________
Livro de matemática:
    Comprimento:___________________
    Largura:________________________
    Espessura:______________________
Vidro da janela:

Largura da porta da sala:___________________
Folha do espelho de classe:
    Comprimento:___________________
    Largura:________________________
Cartaz Economia e Vida:
    Comprimento:___________________
    Largura:________________________
    Largura da janela: __________________
Minidicionário Houaiss:
    Comprimento:___________________
    Largura:________________________
    Espessura:______________________
Quadro-negro:
    Comprimento:___________________
    Largura:________________________
    Largura do suporte de giz____________

Comprimento:___________________ **Largura:**________________________ **Madeira do chão:** **Comprimento:**___________________ **Largura:**________________________

Unidade de medida

4 – As duplas realizarão as medições com a unidade de medida, e farão os registros destas medidas na folha. Orientar os alunos a se organizarem nas medições para não haver mais de uma dupla medindo o mesmo objeto.

5 – Apresentação do procedimento utilizado para fazer as medições, de algumas duplas, ao grande grupo.

6 – Discussão e questionamentos do professor ao grande grupo:

- Como utilizaram a unidade de medida para medir?
- Em algum momento a unidade não coube um número inteiro de vezes, no tamanho do objeto?
- Como foi representada esta medida?

MÓDULO 2 – CONSTRUÇÃO DA RETA NUMÉRICA

Objetivos:

- Proporcionar a construção do significado número das frações;
- Construir a reta numérica com números naturais e fracionários a partir de uma unidade de medida estabelecida;
- Introduzir a ideia de frações equivalentes, frações próprias, impróprias, e número misto;
- Introduzir a noção de ordenação entre as frações.

Tempo de duração: 100 minutos – 2 horas/aula

Materiais:

- Quadro;
- Giz ou caneta;
- Tira de papel cartaz/cartolina de dimensões 2 metros por 10 centímetros, pra servir de régua no quadro. De preferência usar cor diferente do quadro, para uma boa visualização.

- Tira de papel cartaz/cartolina para servir como unidade de medida, aproximadamente 25 centímetros.
- Tira de cartolina e/ou papel cartaz de dimensões 66 centímetros por 7centímetros, para cada aluno.
- Tiras de papel ofício de dimensões 10 centímetros por 1 centímetros.

Procedimento:

1º Momento:

1 – Retomar a atividade da aula anterior. Foi difícil medir alguns objetos com a unidade? Instigar os alunos para a construção de um instrumento que facilite a medição de quantidades “quebradas” - uma régua.

2 – Primeiramente, o professor fará a construção no quadro, mantendo um diálogo com os alunos.

3 – Prender no quadro a tira de papel cartaz de 2 metros, para a construção da régua, na qual será graduada. Poderá ser usado giz ou caneta, conforme o quadro.

4 – Na extremidade da esquerda, marcar o ponto zero, perguntando aos alunos qual é o primeiro número da régua que eles conhecem. Questionar como marcar o próximo ponto usando uma unidade.

5 – Marcar os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

6 – Dobrar a unidade ao meio, encostar no zero e perguntar que medida tem este papel? Ou qual o número associado a este ponto? Marcar o ½ , enfatizar a palavra “um meio”. Marcar mais algumas frações utilizando a subunidade “um meio”: 2/2, 3/2, 4/2. A quantidade de frações que deverão ser marcadas dependerá do nível de entendimento da turma.

7 – Dobrar a unidade em três partes e fazer o mesmo com o “um terço”, marcar 1/3, 2/3, 3/3 e 4/3. Sugestão: use outra unidade de medida para dobrar em três.

8 – Questionar os alunos sobre a possibilidade de dividir a unidade em quatro, seis ou oito partes, e sobre quais números poderíamos marcar na régua.

9 – Questionamentos: Onde está o número 18/3? E o número 56/8? Instigar a percepção das frações equivalentes que têm a mesma posição na régua.

2º Momento:

10 – Formação de duplas. Cada aluno receberá uma tira de papel e uma unidade de medida para construir sua reta. Estabelecer no quadro alguns números a serem marcadas na reta:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	**½, 3/2, 5/2, 7/2**	**1/3, 2/3, 4/3, 5/3, 7/3**	**¼, 2/4, ¾, 5/4, 6/4, 7/4,**	**1/8, 2/8, 4/8, 7/8, 9/8.**

11 – Dialogar com os alunos a respeito de alguns aspectos que ocorrem: Por que há frações que ocupam o mesmo lugar e qual a diferença entre os números menores que um e os maiores do que um?

MÓDULO 3 – FOLHA DE ATIVIDADES COM RÉGUA 1

Objetivos:
- Proporcionar a medição de um mesmo objeto com réguas diferentes;
- Proporcionar a identificação de pontos marcados nas réguas;
- Proporcionar a construção de uma régua de modo a marcar pontos determinados.

Tempo médio de duração: 100 minutos – 2 horas/aula

Materiais:
- Folha de atividades;

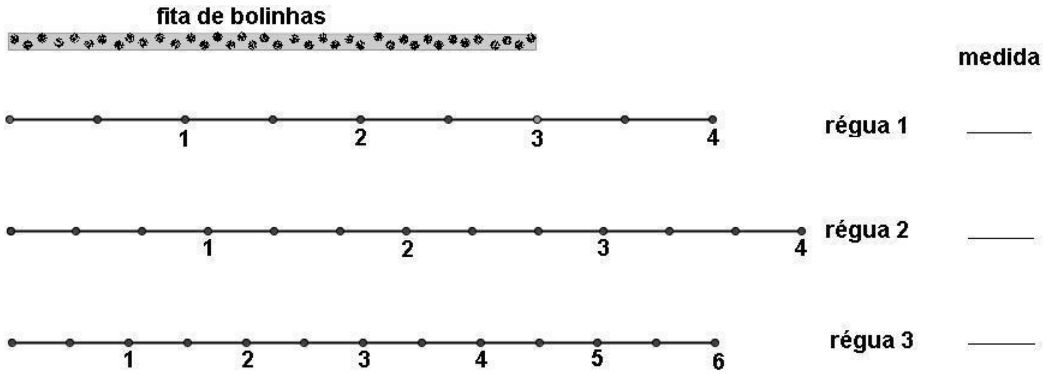
Procedimento:

1 – Retomar a atividade da aula anterior.

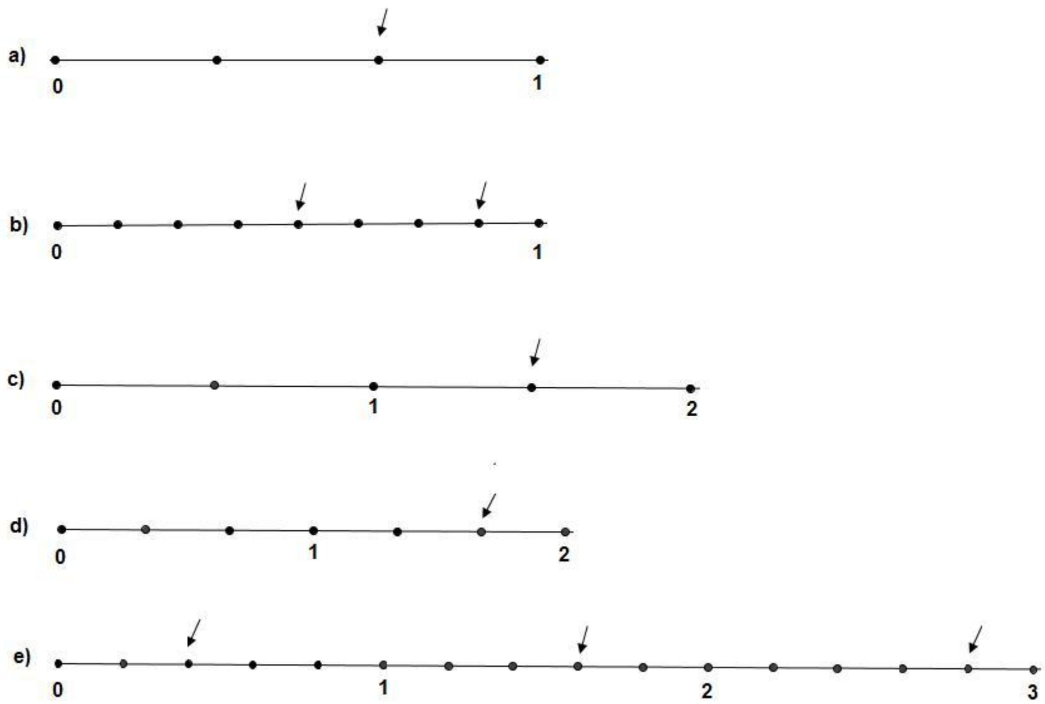
2 – Entregar a folha de atividades para cada aluno. Permitir que façam em duplas para que se ajudem.

Atividade de Matemática – Régua com frações
Nome:___________________________ Data:_______

1) Medir a fita de bolinhas usando cada uma das réguas.



2) Quais são os números indicados pela flecha, nas réguas abaixo?



3) Construa abaixo uma régua para marcar os números $\frac{5}{3}$ e $\frac{7}{6}$

<u>MÓDULO 4 – FOLHA DE ATIVIDADES COM RÉGUA 2</u>

Objetivos:

- Retomar a construção da régua numerada com frações;

- Proporcionar a marcação de frações usando a noção de equivalências;
- Proporcionar novamente a medição de comprimentos utilizando réguas numeradas.
- Proporcionar a identificação de frações como pontos de uma régua.

Tempo de duração: 100 minutos – 2 horas/aula

Materiais:
- Régua numerada desenhada (ou fixada) no quadro.
- Folha de atividades;

Procedimento:

1 – Retomar algumas questões sobre o posicionamento das frações na reta numérica, construindo novamente uma régua numerada no papel pardo, de 0 a 6, com frações de denominadores 2, 3, 6, 4 e 8, de modo a ficar exposta na sala de aula;

2 – Fazer questionamentos sobre a posição de frações não triviais, a fim de instigar ao raciocínio mais abstrato;

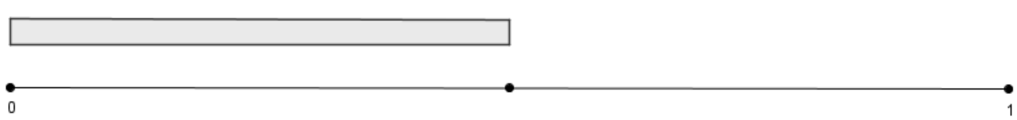
3 – Entregar a folha de atividades;

Atividade de Matemática – Réguas com Frações 2

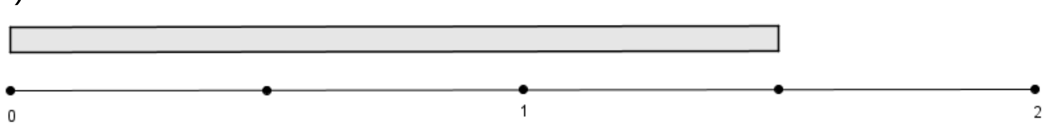
Nome:________________________________**Data:**______________

1) Sabendo que do 0 ao 1 temos uma unidade de medida de comprimento, ache a medida de cada fita nas réguas abaixo.

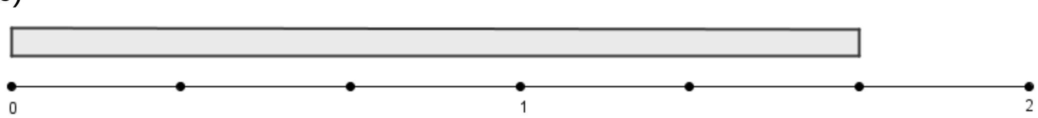
a)



b)



c)



d)

e)

2) Marque os pontos nas réguas:

a) $\frac{1}{4}$ ____

b) $\frac{9}{4}$ ____

c) $\frac{25}{8}$ ____

MÓDULO 5 – SIGNIFICADO “PARTE-TODO” (QUANTIDADE CONTÍNUA)

Objetivos:

- Resgatar conhecimentos dos alunos sobre o significado parte-todo;
- Estabelecer relações do significado “parte-todo” com a representação na reta numérica (frações próprias, impróprias e aparentes);
- Proporcionar a noção de “todo/unidade” em situações de quantidades contínuas;
- Proporcionar a construção do significado “parte-todo” da fração em situações de quantidades contínuas.

Tempo de duração da aula: 150 minutos

Materiais:

- Fichas com figuras;
- Folha de atividades do Tangram;
- Folha de atividades com figuras.

Procedimento:

1º momento:

1 – Retomar a representação de uma fração na régua numerada. Comparar a representação de ½ na reta com a ficha 1.

2 – Mostrar as outras fichas e perguntar sobre as frações que representam as partes pintadas, retomando a ideia que o total de partes de uma figura é representado pelo denominador e as partes pintadas pelo numerador.

3 – Ao mostrar as fichas de frações impróprias, 7, 8, 9 e 10, relacionar com a representação destas frações na régua. O que estas representações têm em comum?

3 – Depois disso, cada aluno receberá peças do Tangram. A ideia é que eles manipulem o material de forma a montar diversas figuras. Os alunos devem estar organizados em duplas para que troquem ideias.

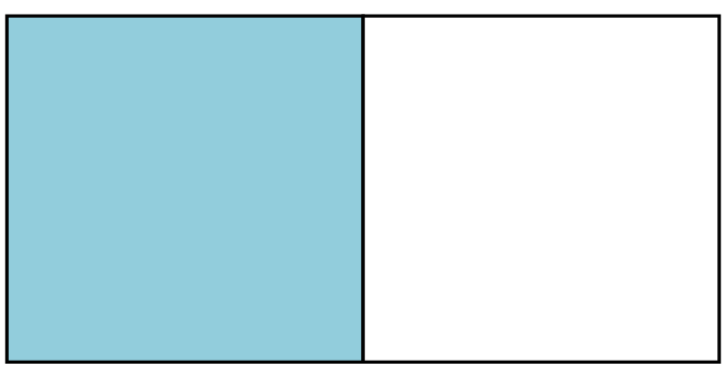
4 – Entregar uma folha de atividades do Tangram e solicitar que os alunos montem um quadrado com as peças sobre o espaço em branco da folha. Depois, se necessário, explicar como preencher a tabela da atividade.

6 – Entregar a segunda folha de atividades com figuras.

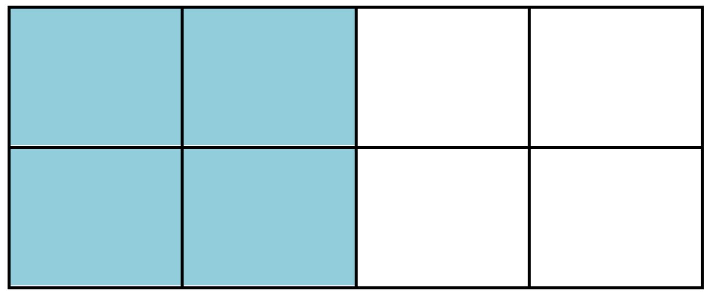
Expectativas:

- Se conseguiu manipular o Tangram com facilidade;
- Se enxergou as peças de um único formato formando o quadrado, sem ter todas para formá-lo;
- Verificar se compreendeu a noção parte-todo com figuras;
- Verificar se compreendeu a noção de “todo”/”unidade” com elementos discretos;
- Verificar se compreendeu a noção de parte-todo com elementos discretos, em atividades com material manipulável e em atividades onde haverá uma certa abstração.

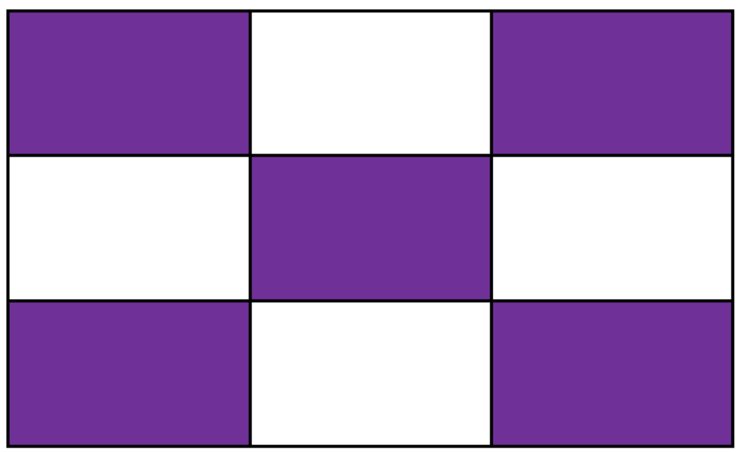
Ficha 1



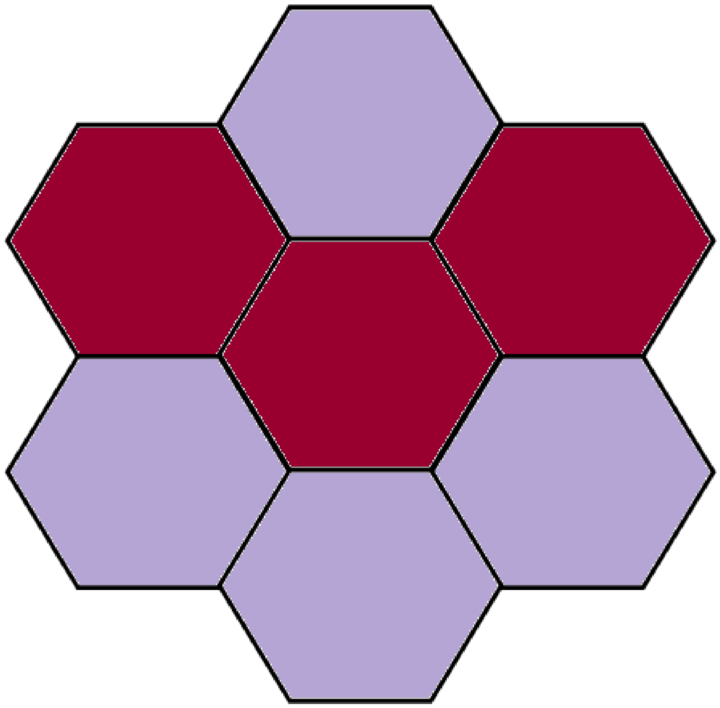
Ficha 2



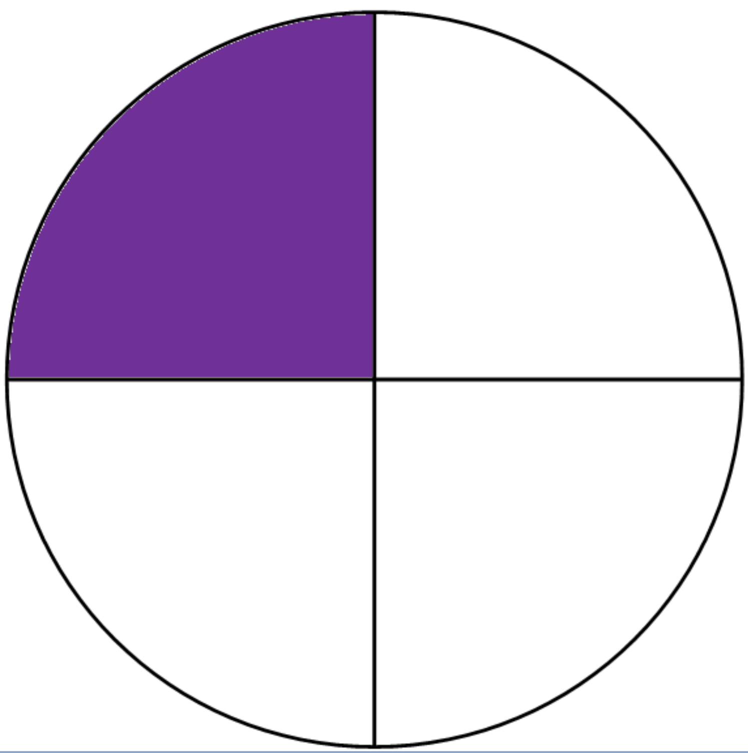
Ficha 3



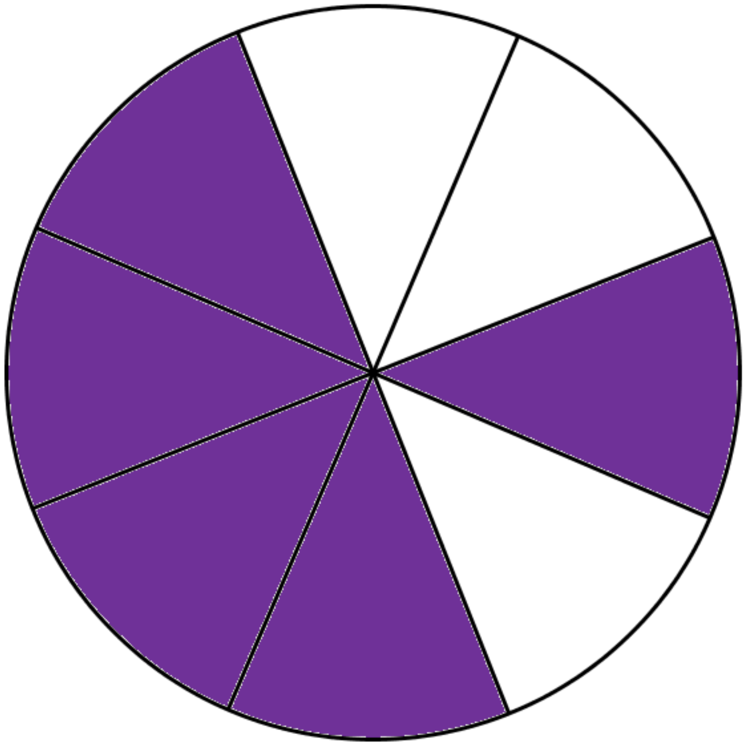
Ficha 4



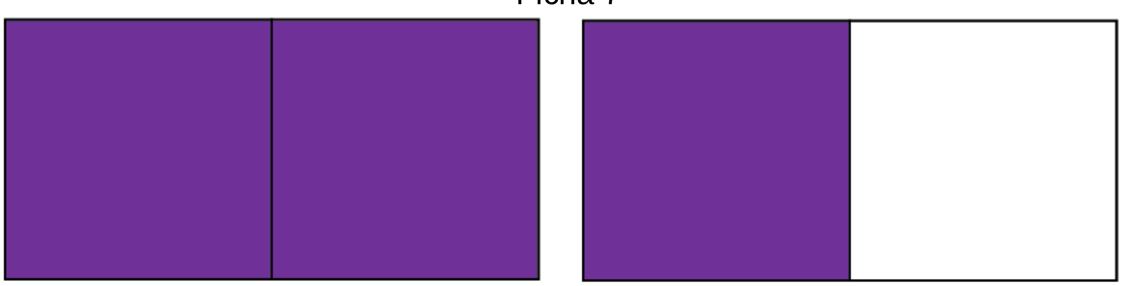
Ficha 5



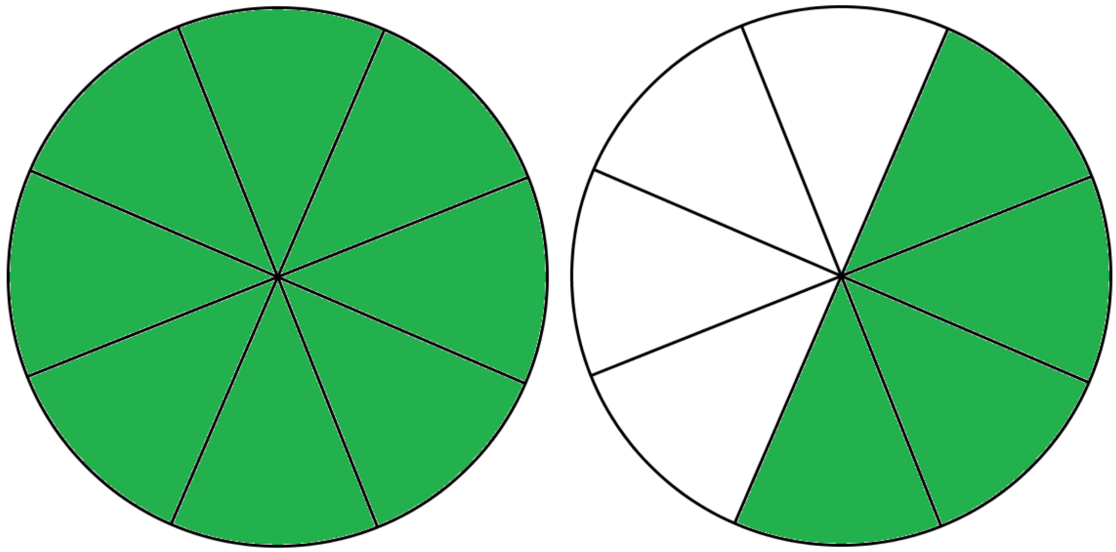
Ficha 6



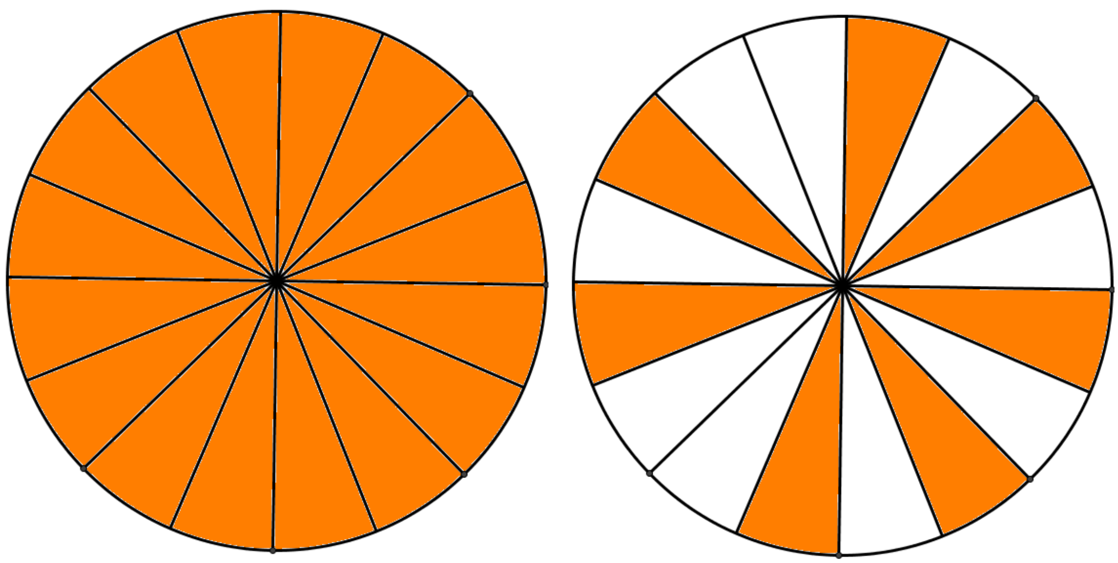
Ficha 7



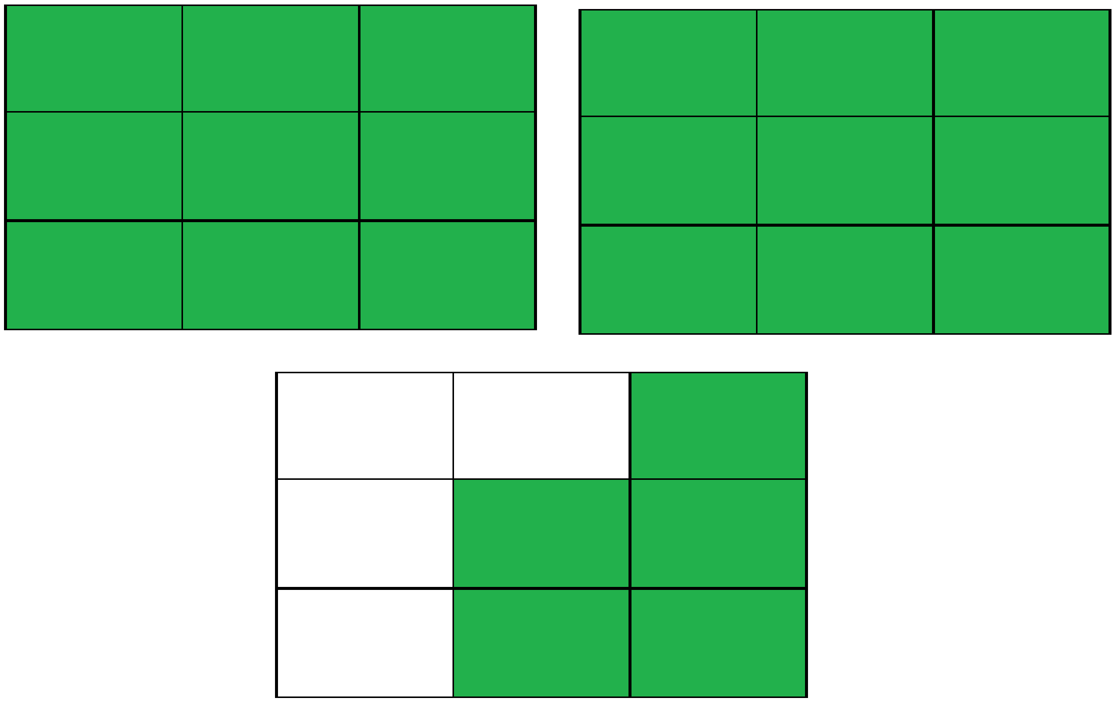
Ficha 8



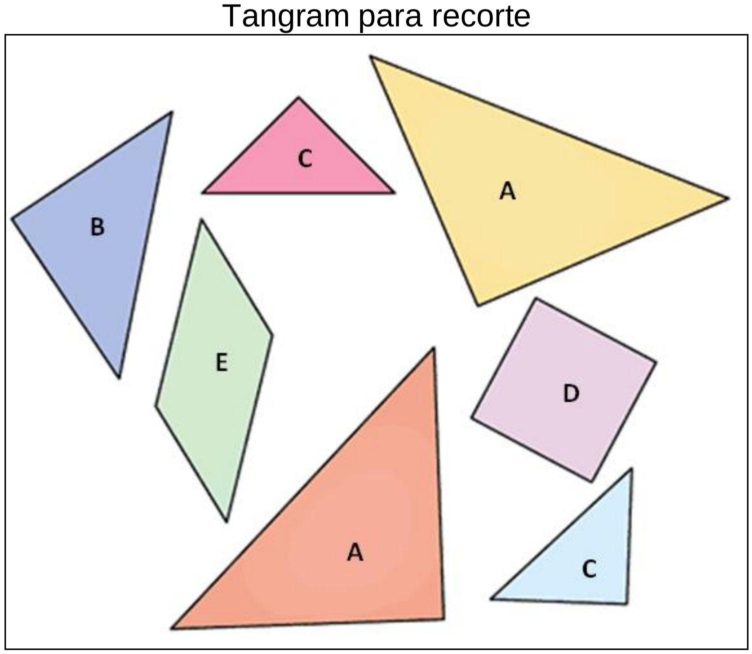
Ficha 9



Ficha 10



Tangram para recorte



Atividade de Matemática: TANGRAM

Nome:______________________ Data: _______________

1) O Tangram é um quebra-cabeça composto por 7 peças, sendo 2 triângulos grandes congruentes, 1 médio e 2 pequenos congruentes, um quadrado e um paralelogramo. Com estas peças é possível formar várias figuras de formatos interessantes. Recorte as peças e faça algumas figuras.

2) Desafio: encaixe todas as peças do Tangram no quadrado ao lado.

3) Complete a tabela escrevendo a fração que as peças representam do quadrado construído e faça mais relações com outras peças e o todo :

Peças	Fração do quadrado construído
A	
B	
A+A	
C	

Atividade de Matemática:

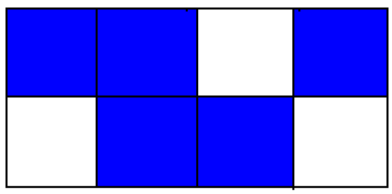
Profª Valéria Lessa

Nome:______________________________

Nome da dupla:_________________________ Data: _______________

1) Observe as figuras e diga quanto representa a parte pintada da figura e a parte não pintada:

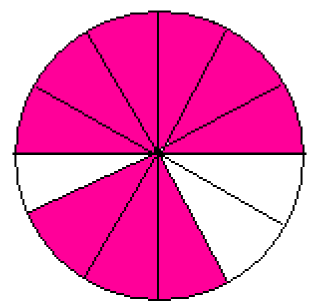
a)



Pintada:____________

Não pintada:___________

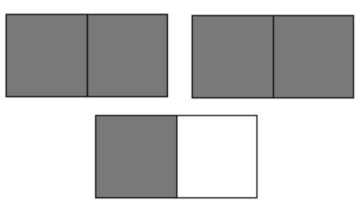
b)



Pintada:____________

Não pintada:___________

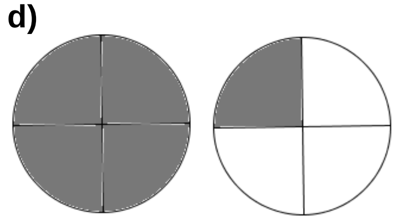
c)



Pintada:____________

Não pintada:___________

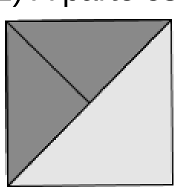
d)



Pintada:____________

Não pintada:___________

2) A parte escura da figura representa:



(   ) $\frac{2}{3}$ (   ) $\frac{1}{2}$ (   ) $\frac{2}{4}$ (   ) $\frac{1}{4}$

3) Faça desenhos e pinte-os para representar as frações abaixo:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{12}{5}$

MÓDULO 6 – SIGNIFICADO "PARTE-TODO" (QUANTIDADE DISCRETA)

Objetivos:

- Resgatar conhecimentos dos alunos sobre o significado parte-todo;
- Proporcionar a noção de "todo/unidade" em situações de quantidades discretas, estabelecendo a diferença em situação de quantidades contínuas;
- Proporcionar a compreensão de frações próprias, impróprias e aparentes em situação de quantidades discretas.
- Proporcionar a construção do significado "parte-todo" da fração em situações de quantidades discretas.

Tempo de duração: 50 minutos – 1 hora/aula

Materiais:

- Quadradinhos de EVA de mesma cor e tamanho (ou qualquer outro objeto) para cada grupo. A quantidade de quadradinhos deve ser variada entre os grupos, de modo que encontrem resultados diferentes.
- Folha de atividades.

Procedimentos:

1 – Chamar 6 alunos para formar um grupo na frente da classe. Estes 6 alunos serão o todo. Perguntar: O aluno "tal" representa que fração de todo o grupo? Dois alunos representam que fração do grupo? Três alunos? Quatro alunos? Cinco alunos?

2 – Perguntar sobre frações impróprias. Como eu representaria 6/5? E 7/5? E 11/5? Verificar se os alunos vão perceber que precisamos de outro grupo.

2 – Agora formar um grupo de 12 alunos (chamar outros alunos para participarem). Estes 12 alunos serão o todo.

3 – Dividir em dois subgrupos. Quanto cada grupo é do todo? Poderá aparecer ½ ou 6/12.

4 – Dividir em três subgrupos. Quanto cada grupo é do todo? Poderá aparecer 1/3 ou 4/12.

5 – Dividir em quatro subgrupos. Quanto cada grupo é do todo? Poderá aparecer ¼ ou 3/12.

6 – Dependendo do entendimento dos alunos, fazer a dinâmica com outros grupos.

7 – Com os alunos organizados em grupos, entregar os materiais, quadradinhos e folha de atividades.

Atividade de Matemática – Frações em conjuntos e problemas

Nome:__________________ **Data:** ______________

1) Com os quadradinhos coloridos, você tem um conjunto de peças. Divida as peças em dois grupos, sem precisar ter a mesma quantidade de quadradinhos em cada um. Você verá que há muitas possibilidades para escolher estes grupos. Então anote as escolhas e escreva as frações correspondentes:

Quantidade de peças do grupo 1	Quantidade de peças do grupo 2	Fração do grupo 1 em relação a todo o conjunto	Fração do grupo 2 em relação a todo o conjunto

2) Indique as frações correspondentes a cada situação:

a) Carolina comeu 3 doces de uma caixa que continha 12 doces.

b) Janice comprou 7 cadernos de um pacote que continha 28 cadernos.

3) Numa loja há 5 bonés vermelhos e 7 bonés azuis de mesmo formato e tamanho. Que fração representa a quantidades de bonés vermelhos em relação ao total de bonés da loja?

4) Pedro fez aniversário e convidou para sua festa 15 amigos e apenas 9 compareceram.

a) Qual a fração que representa a quantidade de amigos que compareceram?

b) Qual a fração que representa a quantidade de amigos que não compareceram?

5) Maurício está completando o álbum de figurinhas com os jogadores da Copa do Mundo de 2010. As figurinhas que ele tem para trocar com os colegas são: 5 de jogadores da Itália, 7 de jogadores da Inglaterra e 8 de jogadores da Argentina.

a) Qual a fração que representa a quantidade de figurinhas da Itália em relação a todas as figurinhas?

b) Qual a fração que representa a quantidade de figurinhas da Itália e da Argentina juntos, em relação ao total de figurinhas?

MÓDULO 7 – SIGNIFICADO “OPERADOR” MULTIPLICATIVO

Objetivos:

- Proporcionar a construção do significado de operador multiplicativo das frações;
- Introduzir a ideia de fração como transformação de números através de ideia de máquinas;
- Trabalhar com problemas matemáticos.

Tempo de duração: 250 minutos (5 períodos de aula)

Material:

- Fichas com máquinas;
- Folha com atividades das máquinas;
- Folha com problemas.

Procedimento:

1 – Iniciar uma conversa sobre as frações que os alunos já aprenderam durante as aulas. Relacionar uma mesma fração em situações diferentes, por exemplo:

- Onde está 2/3 na reta numérica?
- Desenhar uma figura no quadro e pedir para alguém representar 2/3.

2 – Introduzir a ideia de operador em algumas perguntas do tipo:

- 2/5 de 25 alunos, são quantos alunos?
- Gastei 2/3 de 12 reais, quanto gastei?
- Eu e meus amigos, comemos 3/5 de 25 docinhos que tinham numa festa. Quantos docinhos comemos juntos?

3 – Ajudar os alunos a estabelecer relações de divisão e multiplicação nas situações discutidas acima;

4 – Introduzir a ideia de máquina: a máquina faz transformações nos números que entram nela, estas modificações são operações de multiplicação e/ou divisão. Deixar claro que há uma regra nas máquinas e que elas só fazem operações de multiplicação e divisão.

5 – Primeiramente fixar oito máquinas no quadro e deixar que eles encontrem a função da máquina.

Máquina 1 (x 2): entra 7 e sai 14
Máquina 2 (x 5): entra 12 e sai 60
Máquina 3 (: 2 ou x ½): entra 12 e sai 6
Máquina 4 (: 8 ou x 1/8): entra 24 e sai 3
Máquina 5 (x 2/3): entra 12 e sai 8
Máquina 6 (x ¾): entra 12 e sai 9.
Máquina 7 (x4/6=2/3): entra 18 e sai 12.
Máquina 8 (x5/6): entra 18 e sai 30

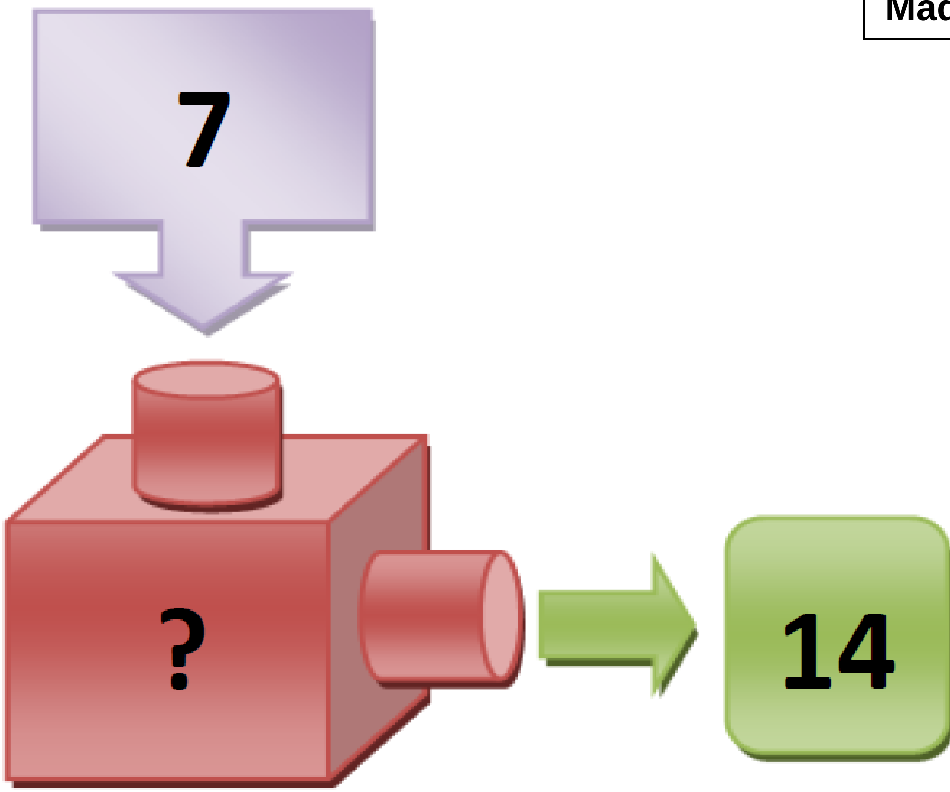
6 – Proporcionar a percepção de que dividir por dois é o mesmo que multiplicar por 1/2;

7 – Depois de entendido a questão da multiplicação e divisão, fixar a máquina 9 e fazer uma tabela com alguns números de entrada para descobrir os números de saída, e alguns números de saída para encontrar os de entrada.

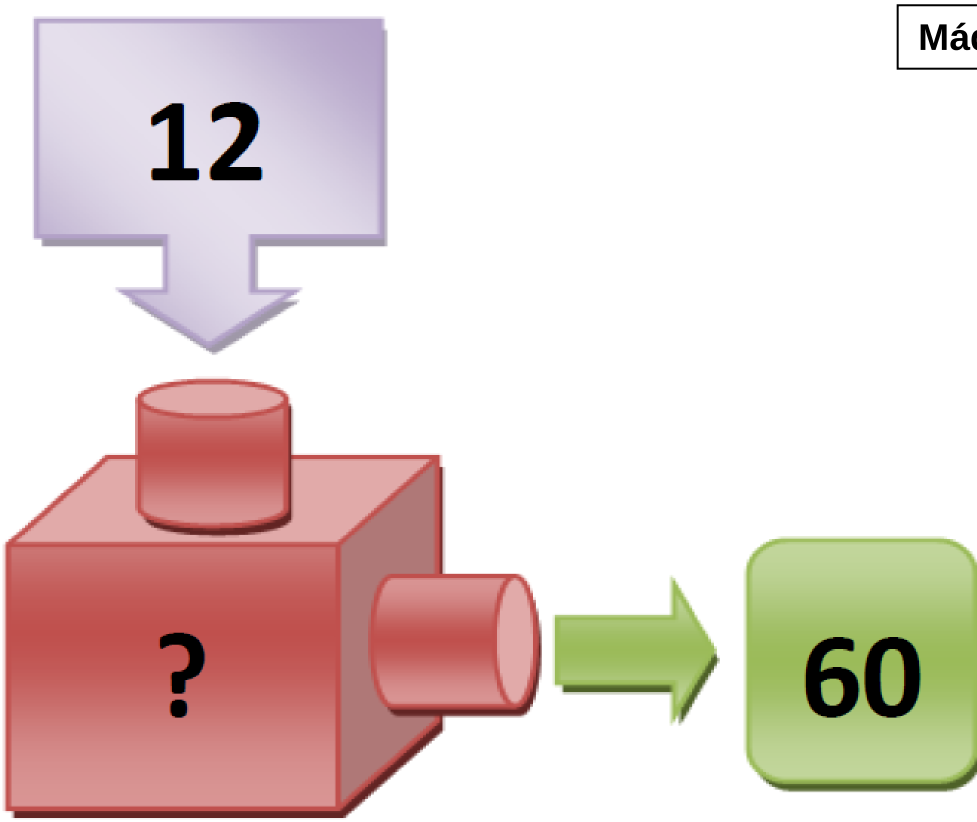
Máquina 9: (x2/3)

ENTRADA	SAÍDA
3	
12	
9	
18	
21	
	10
	16
	24

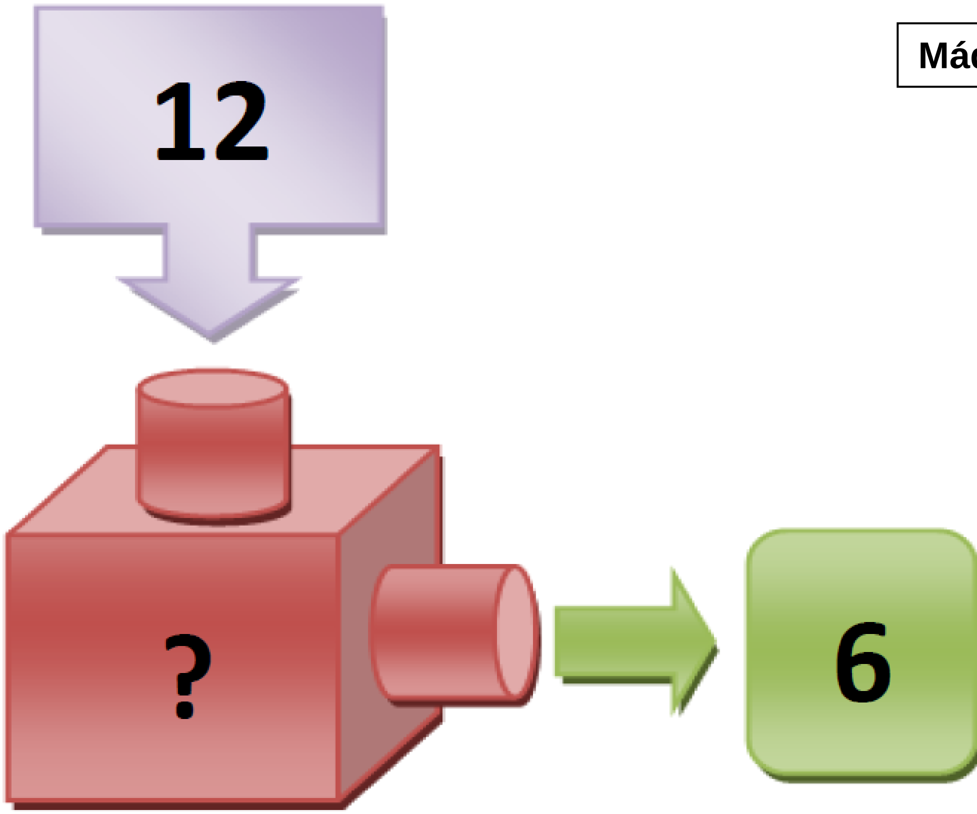
Máquina 1



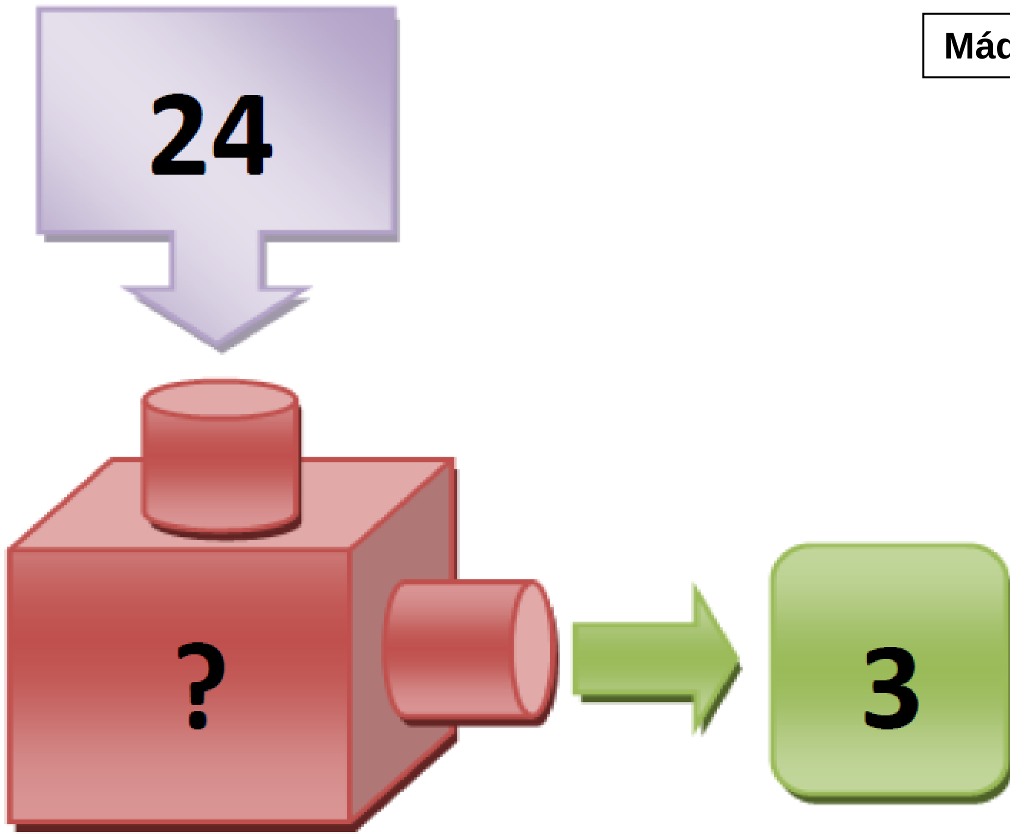
Máquina 2



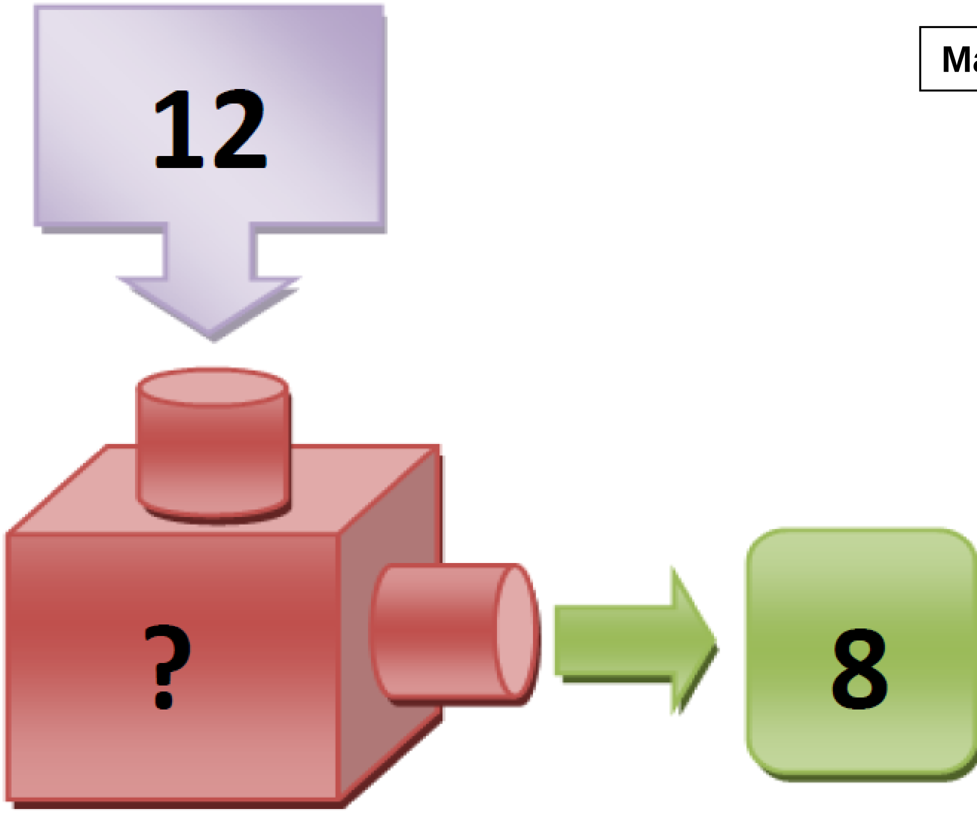
Máquina 3



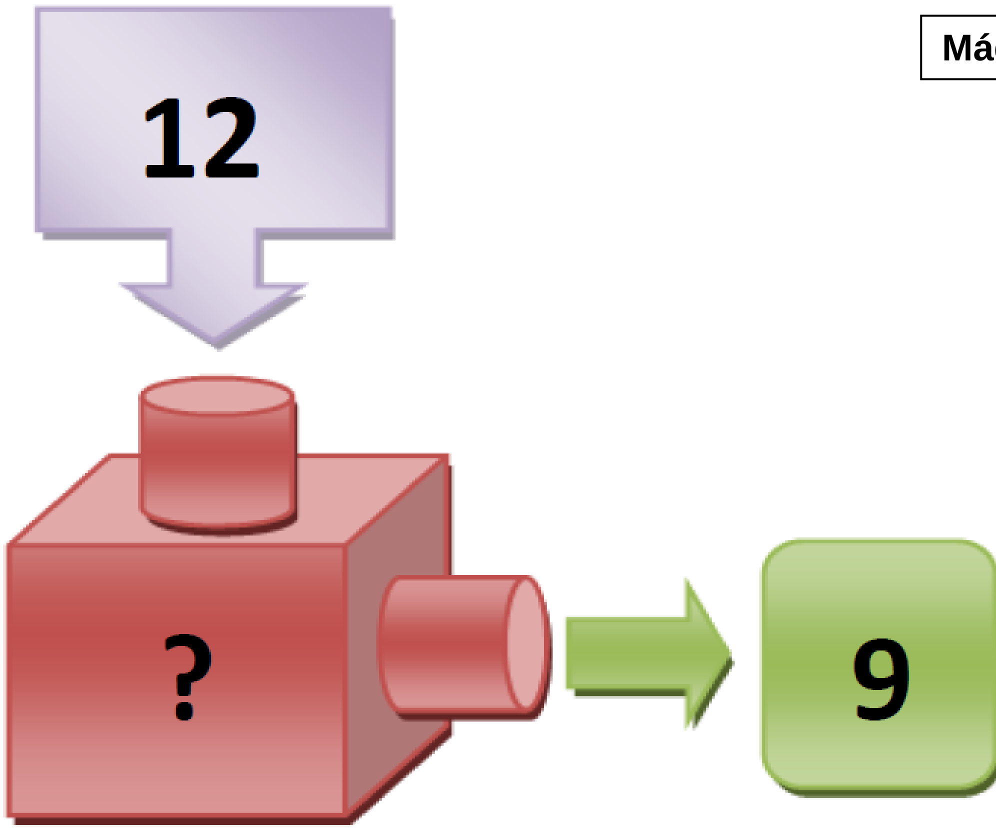
Máquina 4



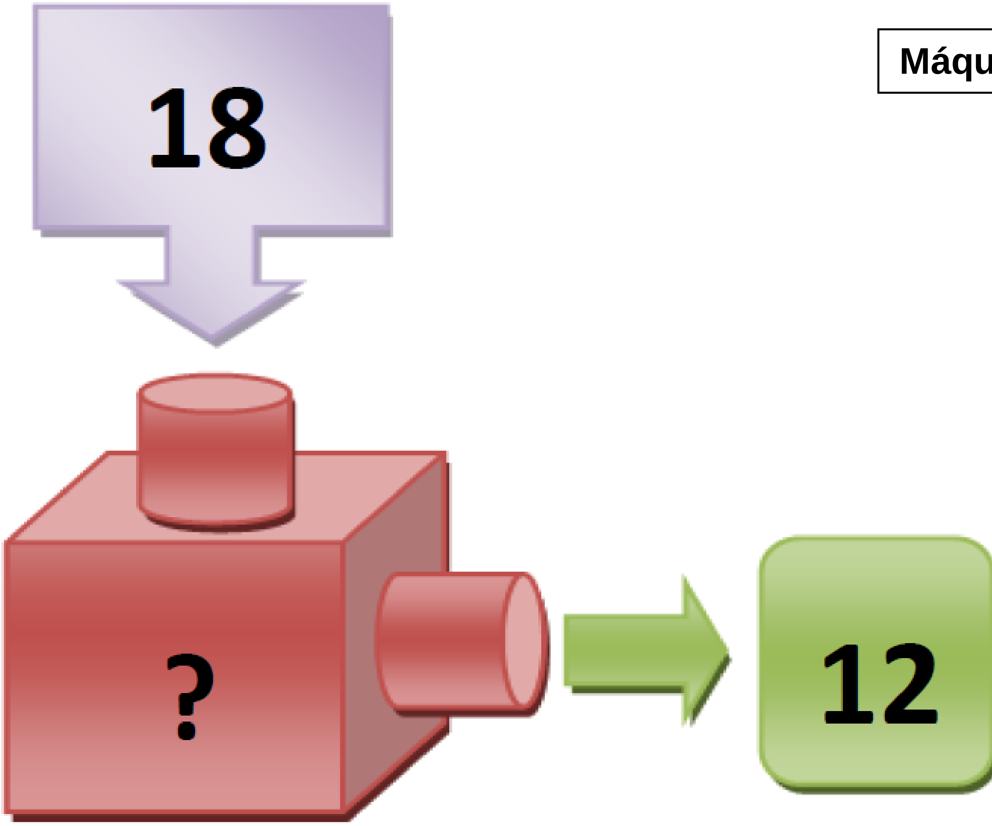
Máquina 5



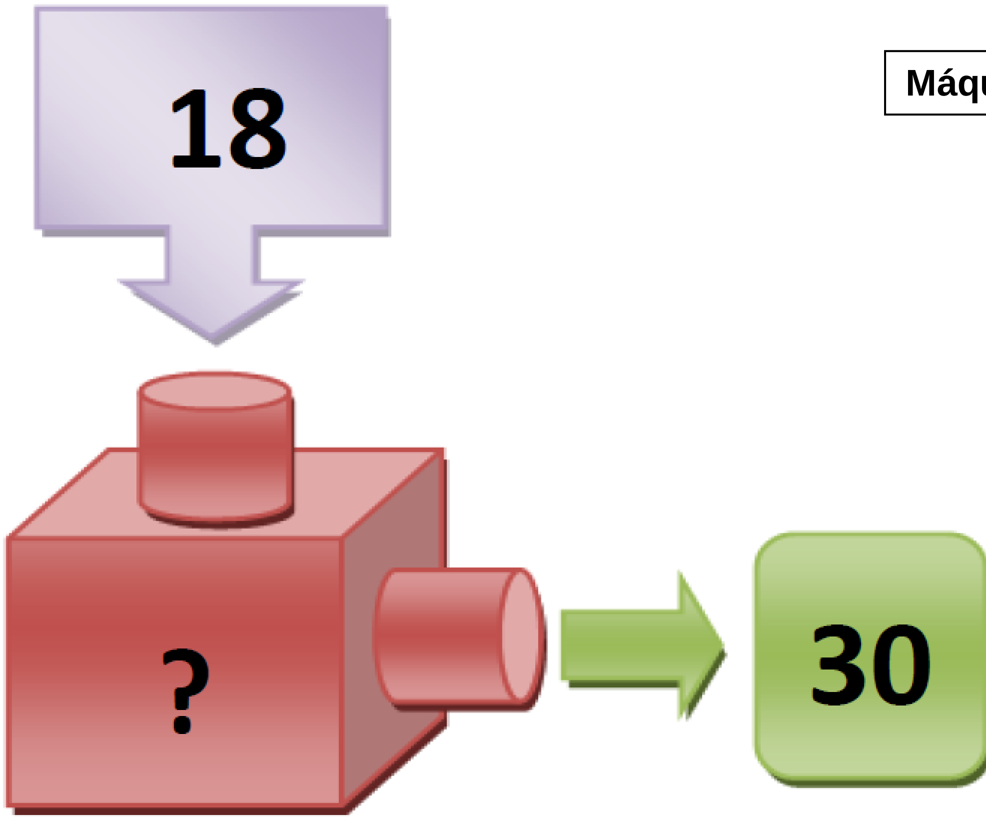
Máquina 7



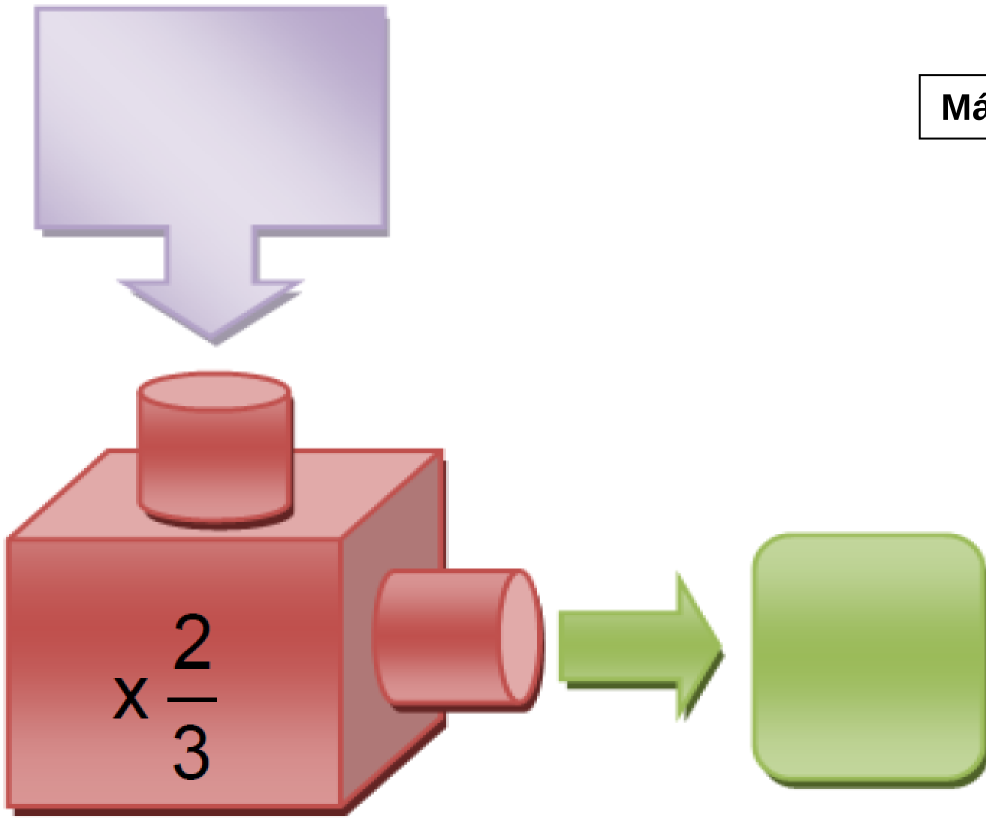
Máquina 7



Máquina 8



Máquina 9



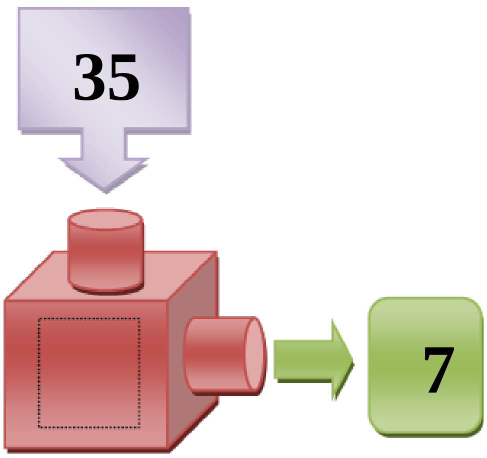
3º momento: Atividade em folhinha

Atividade de Matemática - Máquinas
Profª Valéria Lessa

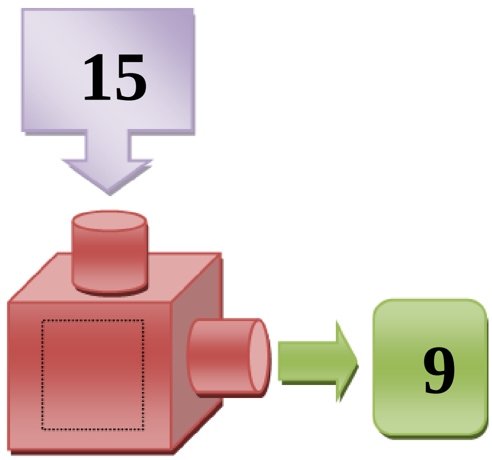
Nome:______________________________ Data:_____________

Descubra o número de dentro de cada máquina, para que os números de ENTRADA se transformem nos números de SAÍDA.

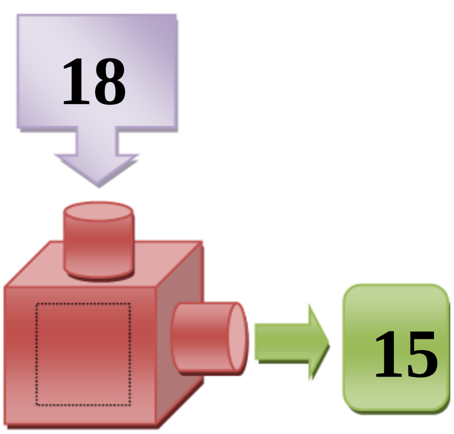
Máquina 1



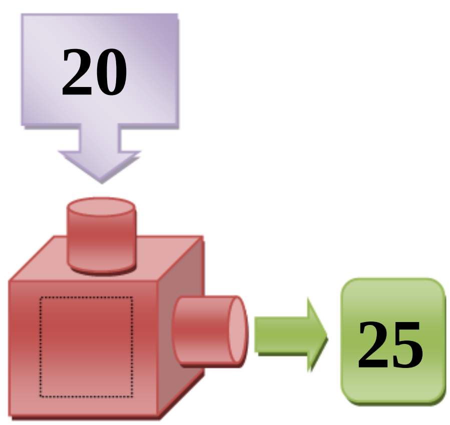
Máquina 2



Máquina 3



Máquina 4

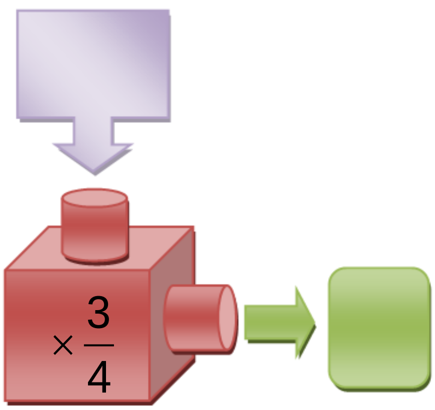


Atividade de Matemática - Máquinas

Nome:_________________________________ **Data:**____________

Faça a máquina trabalhar!
Complete a tabela ao lado de cada máquina. Não esqueça que, para cada número de entrada, deve haver um número de saída.
Nas linhas em branco, escolha números para colocar na máquina.

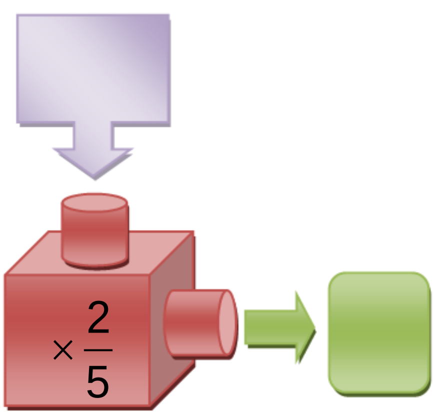
Máquina 1



ENTRADA	SAÍDA
4	
20	
12	
	6
	24
24	
	12

Cálculos:

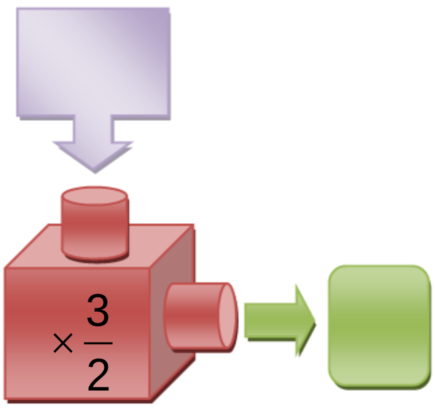
Máquina 2



ENTRADA	SAÍDA
	2
10	
30	
55	
	10
	8
45	

Cálculos:

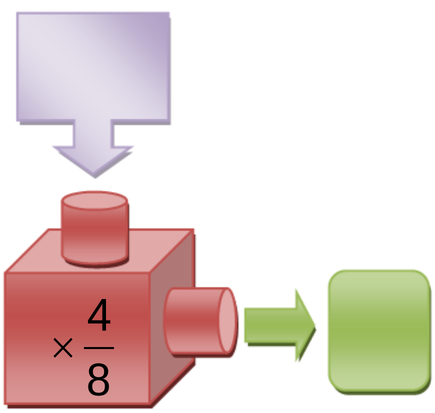
Máquina 3



ENTRADA	SAÍDA
2	
	12
20	
24	
56	
	27
	51

Cálculos:

Máquina 4



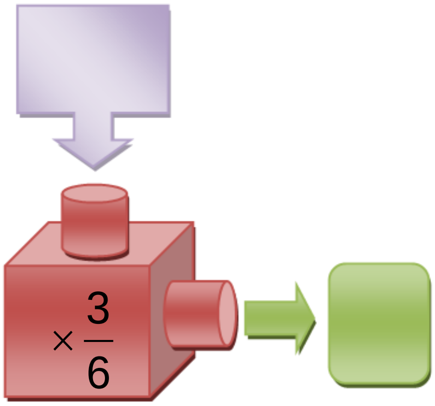
ENTRADA	SAÍDA
8	
16	
	12
	16
64	
	36
88	

Cálculos:

Máquina 5

ENTRADA	SAÍDA
6	
24	
	6
	9
36	
	30
48	
	15

Cálculos:



Problemas de Matemática - Operador
Profª Valéria Lessa

Nome:___________________________ Data:_____________

1) Rodrigo está organizando alguns carrinhos da sua coleção. Observando os carrinhos a seguir responda:

a) Quantos carrinhos há no total?

R.: ____

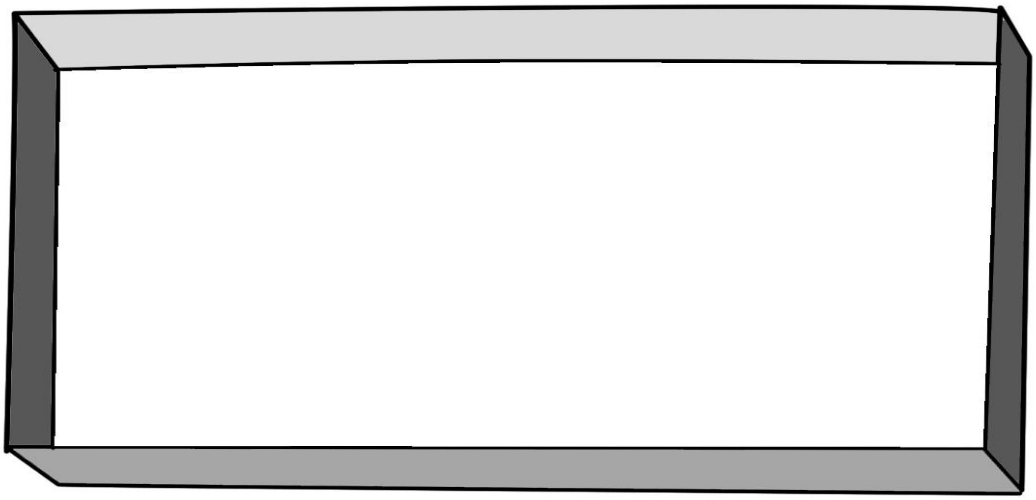
b) Que fração do total de carrinhos é de cor escura?

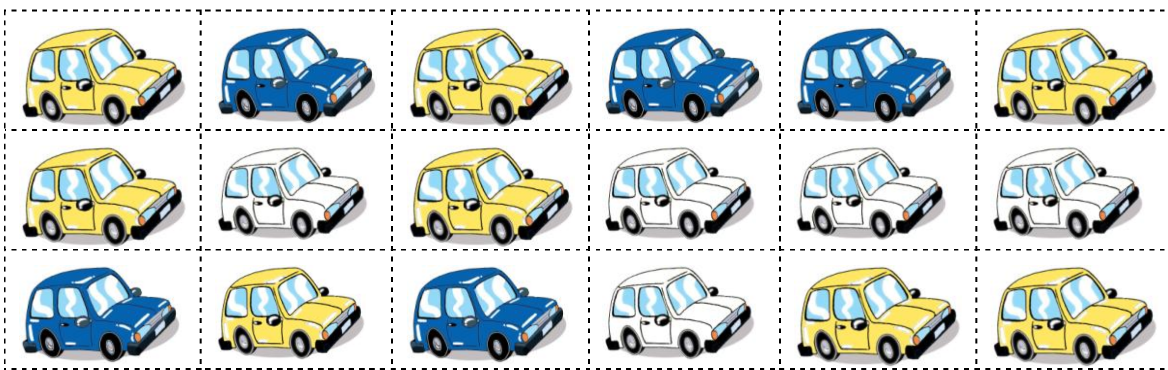
R.: ____

c) Que fração do total de carrinhos não é de cor escura?

R.: ____

d) Rodrigo irá dar para seu irmão $\frac{2}{6}$ do total de carrinhos que possui, o restante ele irá guardar em uma caixa. Recorte na linha pontilhada esses carrinhos e cole sobre a quantidade de carrinhos que Rodrigo irá guardar.





2) Para completar o álbum de figurinhas da Copa do Mundo Fifa de 2010, são necessários 352 figurinhas de diferentes jogadores de futebol. Marcelo já completou 3/16 deste álbum.

a) Quantas figurinhas Marcelo já tem?

R.:____

b) Quantas figurinhas ainda faltam?

R.:____

3) Dos 25 alunos da quinta série de uma escola, 1/5 faltaram a aula no dia da prova de matemática. Quantos alunos fizeram a prova de matemática?

R.:____

4) Um Skate que custava R$ 1.250,00 estava em promoção, com um desconto de 1/5 do valor. Quanto custou o Skate com o desconto?

R.:____

5) Pedro recebe R$ 60,00 de mesada. Sabendo que gastou 1/3 de sua mesada na compra de um jogo de PlayStation, responda:

a. Quanto custou o jogo?

R.:____

b. Quanto sobrou de dinheiro?

R.:____

6) Luana recebeu R$ 60,00 de mesada este mês e resolveu fazer algumas compras. Gastou 1/4 da mesada para comprar uma bolsa e 2/5 do que restou do dinheiro para comprar uma bijuteria. Quanto sobrou de dinheiro?

R.:____

MÓDULO 8 – EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES (com figuras e na reta)

Objetivos:

- Retomar a reta numérica para perceber as equivalências.
- Introduzir o procedimento de cálculo para encontrar frações equivalentes.
- Proporcionar a equivalência de frações comparando partes pintadas de figuras.
- Proporcionar a percepção das classes de equivalências.

Tempo de duração: 100 minutos (2 períodos de aula)

Material:

- Régua numerada desenhada (ou fixada) no quadro.
- Fichas com desenhos representando frações equivalentes.
- Folha de atividades

Procedimento:

1 – Falar da equivalência de frações retomando a régua no quadro. Fazer a régua de zero a três e marcar pontos, inteiros, metades, terços, quartos, oitavos, sextos.

2 – Perguntar por que duas frações diferentes ocupam o mesmo lugar. Qual é a diferença entre elas? A intenção é que eles entendam que fração equivalente representa a mesma quantidade se considerado o mesmo todo.

3 – Questionar sobre como se consegue encontrar frações equivalentes.

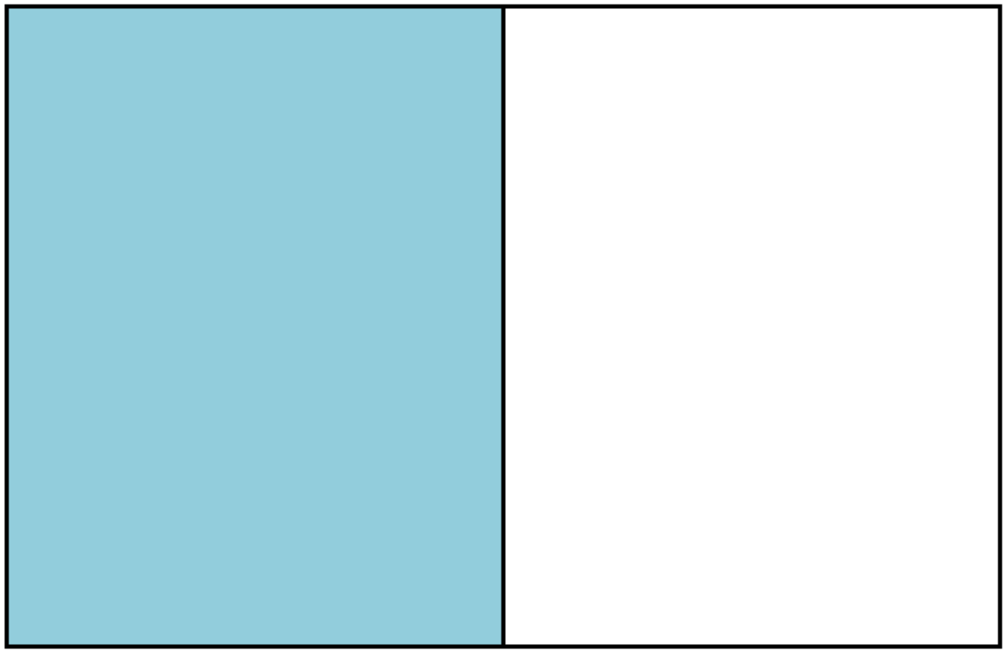
4 – Introduzir a técnica de multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número natural. Questionar o que significa graficamente este procedimento.

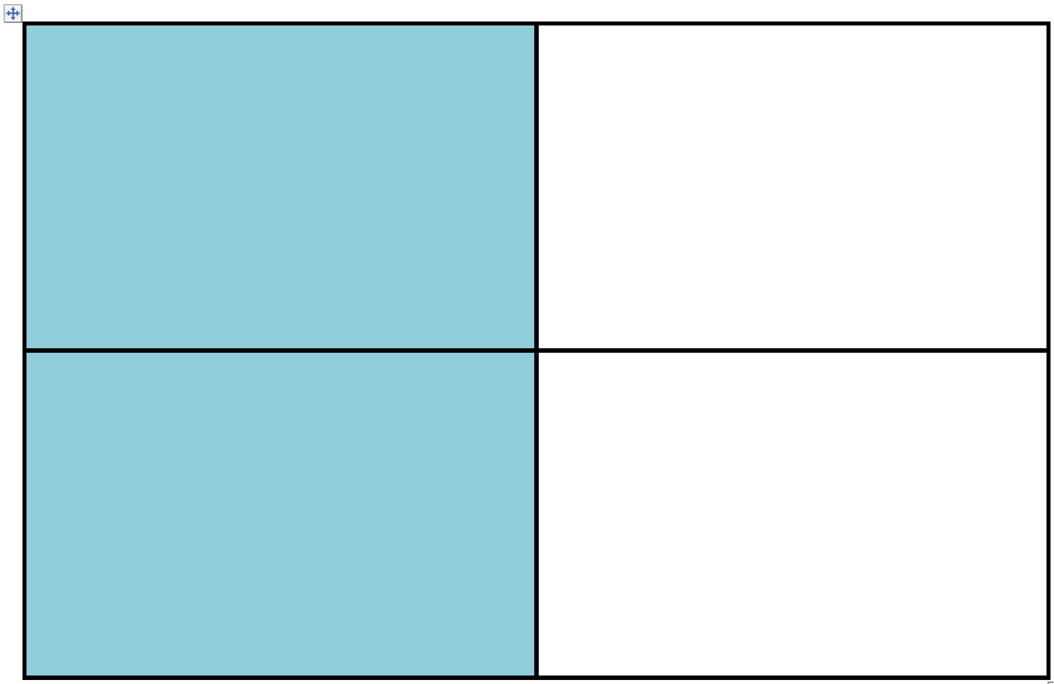
5 – Introduzir o contexto do significado parte-todo com as figuras. Mostrar os cartões de cor azul e indagar sobre a relação entre eles. Fixar no quadro apontando as frações que representam a parte pintada de cada uma das figuras.

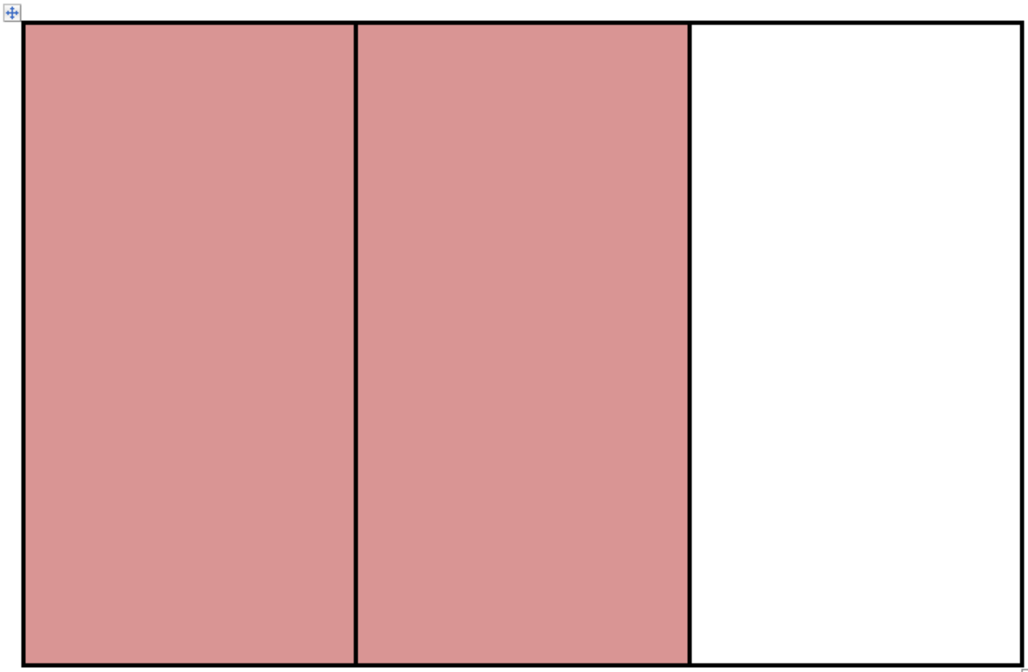
6 – Fazer o mesmo com as figuras de cor rosa. Pode ser realizado mais fichas com outras equivalências.

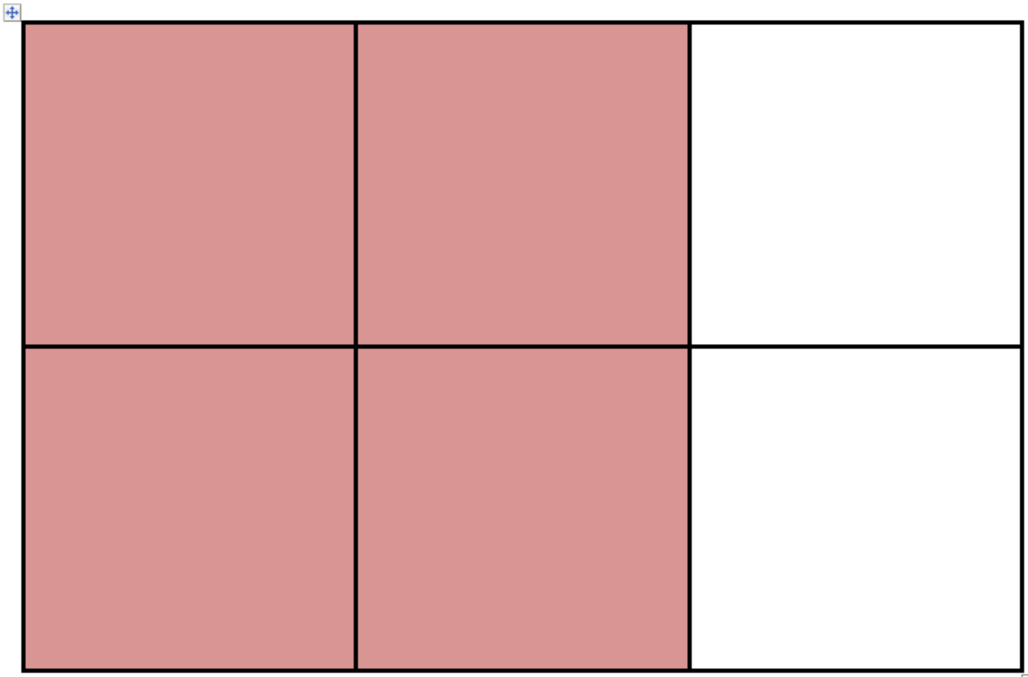
7 – Estabelecer a classe de equivalências com as figuras e com a reta.

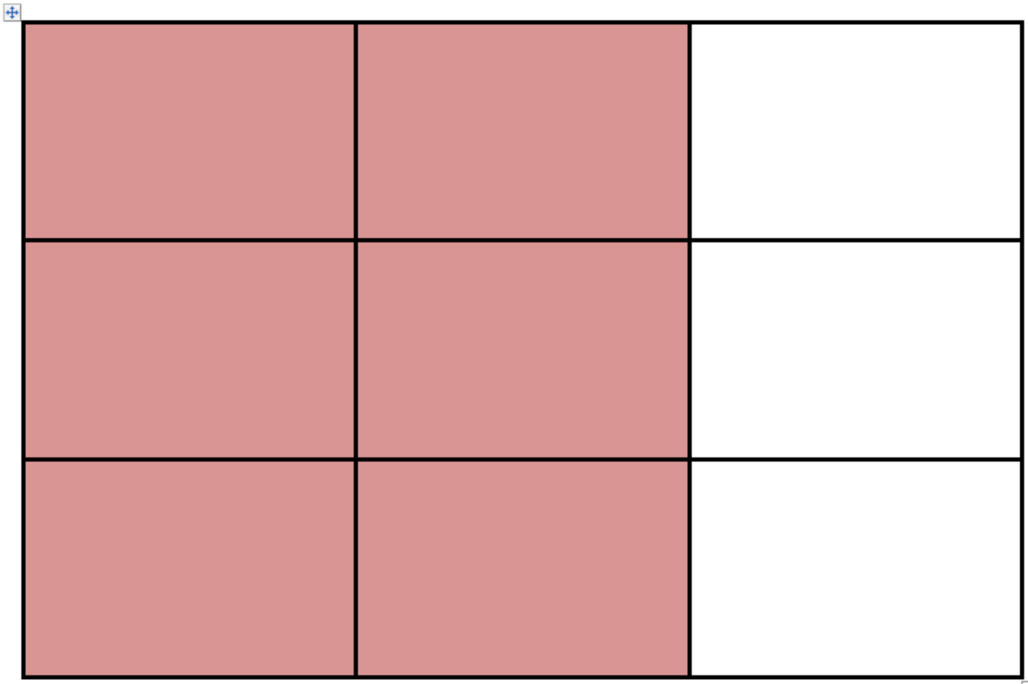
Fichas:

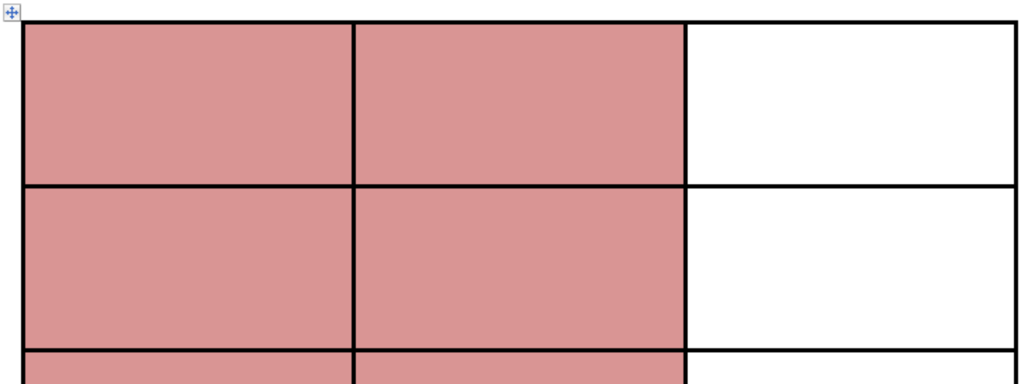








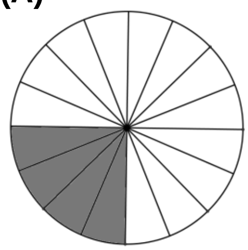
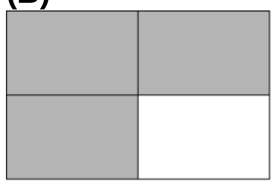
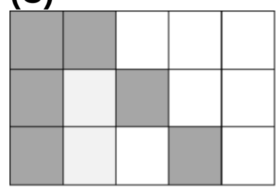
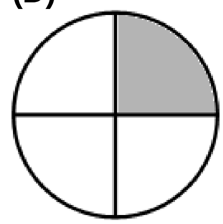
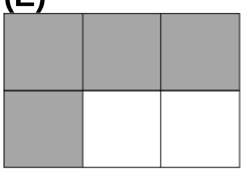
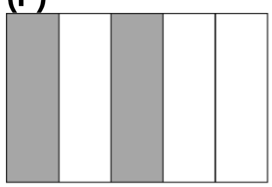
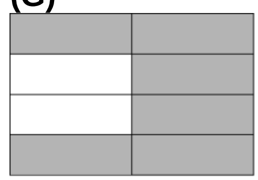
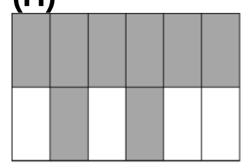




Atividade de Matemática – Equivalências de frações
Profª Valéria Lessa

Nome:______________________________ _____________Data:_____________

1) Agrupe as figuras que representam frações equivalentes dentro das caixas, através de suas letras. Cada caixa deve conter apenas um tipo de equivalência.

(A) 	**(B)** 	**(C)** 	**(D)** 
(E) 	**(F)** 	**(G)** 	**(H)** 

Grupo 1: **Grupo 2:** **Grupo 3:** **Grupo 4:**

Indique as frações de cada grupo nos espaços abaixo

2) Ache outras frações equivalentes para cada grupo da atividade anterior:

Grupo 1:

Registre aqui como você fez:

Grupo 2:

Grupo 3:

Grupo 4:

<u>MÓDULO 9 – COMPARAÇÃO E ADIÇÃO</u>

Objetivos:

- Proporcionar a comparação de frações através do significado parte-todo, quantidade contínua;
- Retomar a reta numérica para fazer a comparação de frações;
- Retomar a reta numérica para perceber as equivalências;
- Proporcionar a comparação de frações pelo processo de equivalência;
- Adição e subtração de frações.

Tempo de duração: 150 minutos (3 períodos de aula)

Material:

- Régua numerada fixada no quadro.
- Tiras de papel de tamanhos: $\frac{1}{2}$ (laranja), $\frac{1}{3}$ (vermelha), $\frac{1}{4}$ (verde), $\frac{1}{6}$ (amarela) e $\frac{1}{8}$ (azul) em relação à unidade de medida usada na construção da régua numerada.

Procedimento:

1 – Fazer a comparação de frações usando o contexto de figuras e da régua numerada, com denominadores iguais (2/5 e 4/5), com numeradores iguais (4/6 e 4/7) e numerador e denominador diferentes (3/2 e 7/4, 2/5 e 1/10, 2/3 e 3/5).

2 – Neste momento, permitir que os alunos percebam a necessidade de encontrar frações equivalentes para comparar com mais facilidade. No exemplo de comparação entre 3/2 e 7/4, se o aluno entende que 3/2 = 6/4, consegue fazer a comparação rapidamente.

3 – Mostrar aos alunos o método prático de encontrar frações equivalentes.

3 – Adição e Subtração de frações: chamar dois alunos e entregar as tiras **laranja(1/2) e verde(1/4)**. Pedir que meçam estas tiras na régua do quadro e perguntar qual é a maior.

4 – Aproveitar o momento e questionar sobre como adicionar estas medidas.

5 – Pedir que outros alunos venham no quadro para medir as tiras **verde (1/4) e azul(1/8),** e somá-las.

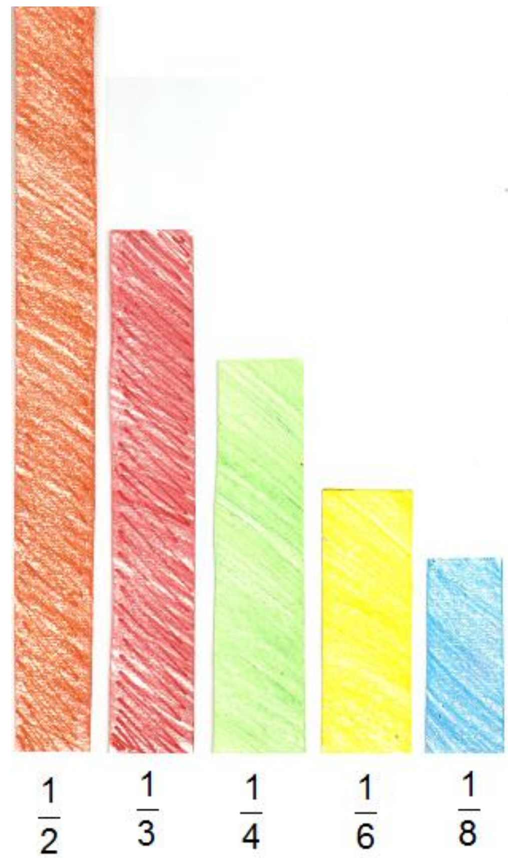
6 – Fazer o mesmo com outras tiras: **laranja (1/2) com azul (1/8) e vermelha(1/3) com amarela(1/6).**

7 – Propor outras combinações com as tiras.

8 – Agora, sem a medição de tiras, escrever algumas adições no quadro e pedir para alguém tentar resolver.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}= \qquad \frac{2}{3}+\frac{5}{9}= \qquad \frac{7}{3}+\frac{1}{5}= \qquad 1-\frac{1}{5}= \qquad 3+\frac{1}{2}= \qquad \frac{7}{3}-1=$$

Tiras de papel para as medições. Os tamanhos das tiras dependem do tamanho da unidade considerada.

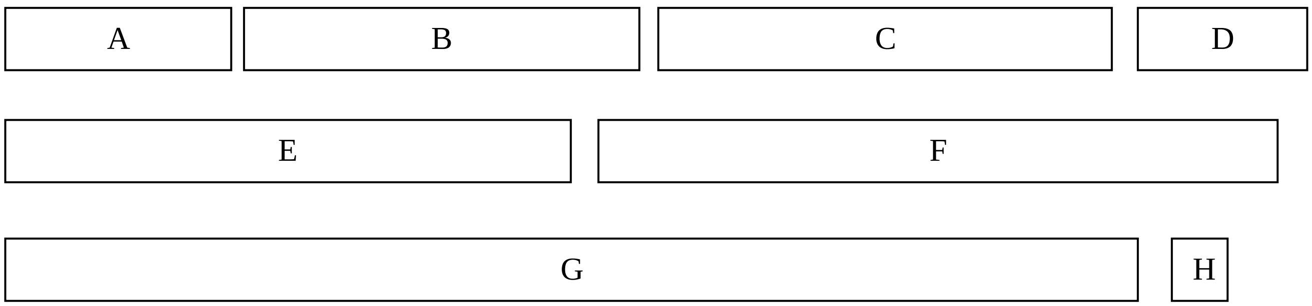


1/2
1/3
1/4
1/6
1/8

Atividade de Matemática: Adição e Subtração de Medidas Fracionárias

Nome:________________________________ ______________Data:______________

Meça o comprimento das tiras de papel usando a régua que você recebeu e some estas medidas conforme a tabela abaixo:



Peças	Medidas e cálculos:	Resposta:
A + B		
B + C		
C – A		
D + E		
F – E		
F + G		
G – H		
A - H		

Desafio: Sem o auxílio da régua, faça as adições e subtrações abaixo, usando frações equivalentes.

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=$

c) $\frac{4}{3}-\frac{1}{9}=$

b) $\frac{1}{5}+\frac{3}{2}=$

d) $2-\frac{1}{3}=$