

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

AMPLIFICAÇÃO DE RADIAÇÃO DE CÍCLOTRON ELETRÔNICA
EM PLASMAS TERMONUCLEARES*

Luiz Fernando Ziebell

Tese realizada sob a orientação do Dr. Darcy Dillenburg e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

Porto Alegre
1983

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Darcy Dillenbug, pelo apoio, orientação e amizade constantes;

ao Dr. Ignazio Fidone, pelos conhecimentos transmitidos, pelo incentivo e por valiosas discussões;

ao Dr. René-Luc Meyer, pela colaboração inestimável na realização da parte computacional deste trabalho;

aos Drs. Giovanni Granata e Ching-Sheng Wu, pelas sugestões oferecidas e discussões esclarecedoras;

aos integrantes do grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS, pela colaboração e amizade;

a Maria Cecilia do Amaral, pela cuidadosa datilografia;

a Ana Neri Juliano Nunes, pela paciência e cuidado na datilografia de trabalhos relacionados com esta tese;

a Zuleika Berto e demais bibliotecárias, pela colaboração na obtenção e ordenação da bibliografia;

a Cleto Tartarelli, pela execução dos desenhos;

aos meus colegas de sala, Miguel A.C.Gusmão e Mercedes L.V.Gusmão, pela participação em numerosas discussões e pela paciência em me ouvirem em incontáveis ocasiões;

aos colegas e professores, que me ajudaram e honraram com sua amizade;

a todos os que me ajudaram de alguma forma, incluindo as instituições que tornaram possível este trabalho.

RESUMO

A emissão amplificada de radiação de cíclotron eletrônica com frequência próxima da fundamental provinda de uma lâmina de plasma inhomogêneo e anisotrópico é investigada por meio de uma teoria linear. Os efeitos de polarização do plasma são consistentemente incluídos. São desenvolvidas expressões na aproximação WKB, para emissão nos modos ordinário e extraordinário, para propagação perpendicular ao campo magnético. São dados resultados numéricos para o modo extraordinário, que apresenta efeitos mais acentuados. Para o caso de uma distribuição de momentum dos elétrons do tipo cone de perda, mostra-se que a amplificação depende sensivelmente da razão entre as temperaturas paralela e perpendicular e de inhomogeneidades no campo magnético. Estende-se a análise da dependência entre a amplificação e a função distribuição pela superposição de componentes tipo cone de perda e Maxwelliana. Mostra-se que a presença de uma componente Maxwelliana em geral reduz a emissão em relação ao caso puramente do tipo cone de perda, ocorrendo situações em que uma camada da lâmina absorve muito eficazmente toda a radiação amplificada no restante do plasma. Discute-se um comportamento peculiar do índice de refração, o qual ocorre na transição entre o caso cone de perda e o caso Maxwelliano.

ABSTRACT

The amplified emission of electron cyclotron radiation near the fundamental frequency from an inhomogeneous, anisotropic plasma slab is investigated in a linear theory. Plasma polarization effects are consistently included. Expressions are developed in the WKB approximation for emission in the ordinary and the extraordinary modes, for propagation perpendicular to the magnetic field. Numerical results are given for the extraordinary mode, for which effects are strongest. For the case of a loss-cone-type electron momentum distribution, it is shown that the amplification is sensitively dependent on the ratio of parallel-to-perpendicular temperature and on inhomogeneities in the magnetic field. The dependence of the amplification on the distribution is further investigated by considering superpositions of loss-cone and Maxwellian components. It is shown that the presence of a Maxwellian component in general reduces the emission relative to the pure loss-cone case, and situations occur in which a layer in the slab very effectively absorbs all the radiation amplified elsewhere. A peculiar behaviour of the refractive index, which occurs in the transition from the pure loss-cone to the pure Maxwellian case, is discussed.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - MODELO UTILIZADO E INTENSIDADE DA RADIAÇÃO	11
II.1 - A Intensidade da Radiação	11
II.2 - A Função Distribuição de Cone de Perda	24
III - TENSOR DIELÉTRICO E TENSOR CORRELAÇÃO DE CORRENTES	26
IV - ANÁLISE NUMÉRICA I	32
IV.1 - Campo Magnético Homogêneo	34
IV.2 - Campo Magnético Inomogêneo	40
IV.3 - Dependência em Frequência; Efeito de T_{\perp} e Densidade	45
V - ANÁLISE NUMÉRICA II	54
V.1 - Distribuição com Cone de Perda Semipreenchido (Tipo f^I)	57
V.2 - Distribuição de Cone de Perda Mais Componente Térmica de Temperatura Muito Menor (Tipo f^{II})	66
V.3 - O Comportamento de k'	73
VI - CONCLUSÕES	77
APÊNDICE	82
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105

I - INTRODUÇÃO

A propagação de ondas através de um plasma pode dar margem à ocorrência de absorção e emissão estimulada. A absorção efetiva da onda resulta da competição entre estes dois processos. Sob certas circunstâncias, a absorção efetiva pode ser negativa, ocorrendo então uma amplificação da onda à medida que esta se propaga através do plasma. O caso específico de ondas eletromagnéticas de frequência próxima aos harmônicos da frequência de ciclotron eletrônica têm sido alvo de uma série de investigações, tanto teóricas como experimentais; citamos algumas, acrescentando comentários quando julgamos que são procedentes para ajudar a situar o presente trabalho.

Em 1958 Twiss [Tw58] mostrou que em princípio haveria condições para amplificação nos processos de emissão de Cerenkov, de ciclotron e de síncrotron, discutindo sua possível ocorrência e relevância em situações astrofísicas. Na mesma época, Schneider [Sc59] discutiu a possibilidade de um plasma atuar como amplificador de micro-ondas, adotando uma abordagem quântica para obter as probabilidades de transição entre níveis de energia de um elétron sujeito a um campo magnético. Essencialmente, ocorreria amplificação se os elétrons mostrassem uma inversão de população, tendo a correção relativística da massa desempenhado um papel fundamental na obtenção deste resultado.

Tendo sido despertada a atenção para o assunto, questionou-se em alguns pontos o trabalho de Twiss [Tw58], no que se refere à radiação de síncrotron [BB61], [BHB61], [WSW63]. Mostrou-se

que a amplificação poderia ocorrer em plasmas de laboratório, com energias levemente relativísticas, podendo constituir-se em mecanismo importante de perda de energia [BB61], [BHB61]. A condição necessária seria a inversão de população na distribuição de velocidades dos elétrons. Para elétrons extremamente relativísticos, entretanto, o processo de amplificação requereria distribuições quase mono-energéticas, incompatíveis com os modelos empregados na descrição de muitas fontes cósmicas [BB61], [BHB61], [Be66], [Zi79].

Um ponto a ser destacado é que os trabalhos citados até aqui faziam uso da aproximação de partículas independentes no cálculo dos coeficientes de absorção e emissão, desprezando os efeitos dielétricos do plasma ambiente [Be66], [Zi79]. Em 1966 McCray sugeriu que a consideração destes efeitos poderia levar à ocorrência de amplificação da radiação de síncrotron cósmica [Mc66]. Sua abordagem fazia uso das expressões usuais da teoria de partículas independentes, com a inclusão do índice de refração do plasma ambiente em pontos convenientes. Zhelesnyakov também tratou do problema da radiação de elétrons relativísticos movendo-se em um meio, com o uso do coeficiente de absorção na aproximação de partículas independentes; a influência dielétrica foi levada em conta através da expressão da emissividade espectral de um elétron, utilizada no cálculo do coeficiente de absorção [Zh67]. Em outro trabalho, Zhelesnyakov e Suvorov fizeram uso de expressões da teoria cinética, usando uma aproximação linear para estudar a propagação de ondas planas em um plasma infinito e homogêneo [ZS68]. O modelo admitia um sistema de elétrons relativísticos em um campo magnético, na presença de um plasma rarefeito frio. A densidade das partículas fora do equilíbrio termodinâmico foi suposta suficien

temente baixa para que os elementos do tensor dielétrico relacionados com elas fossem de módulo muito menor do que os correspondentes ao plasma frio. Foram analisadas distribuições deltofórmes nas componentes paralela e perpendicular do momentum e distribuições isotrópicas centradas em algum valor $p = p_0$ do momentum. A relação de dispersão foi resolvida e obtidas expressões para a parte imaginária da frequência, mostrando-se para certas condições a ocorrência de incremento das ondas. Particularmente, para elétrons extremamente relativísticos mostrava-se que a amplificação das ondas poderia ocorrer devido à presença do meio, dependendo ainda da distribuição de momentum.

Uma outra abordagem do assunto foi a de Freund e Wu. Estes autores estudaram a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas magnetizados, supondo o meio infinito e homogêneo; seu modelo incluía um substrato termalizado e uma componente de elétrons fora do equilíbrio termodinâmico, tendo sido levados em conta efeitos relativísticos. No caso do modo ordinário, foi estudada a propagação perpendicular, sendo empregadas na análise uma distribuição tipo $\delta(p_{\perp} - p_{\perp 0})F(p_{\parallel})$ e uma distribuição de cone de perda para descrever as partículas não térmicas [FW76] (esta última é de maior interesse para nós); para a obtenção da parte real da frequência foram desprezados na relação de dispersão os termos correspondentes aos elétrons não-térmicos, supostos de pequena densidade. As razões de crescimento ω_i foram determinadas mediante a hipótese usual de serem pequenas frente à parte real ω_r . Foram obtidas instabilidades principalmente em torno do harmônico fundamental da frequência de cíclotron, para os parâmetros considerados. As razões de crescimento obtidas, embora pequenas, levaram

os autores a considerar o fenomeno possivelmente relevante em situacoes astrofísicas [FW76]. O modo extraordinário foi tratado de forma similar para propagação perpendicular e quase-perpendicular, sendo usadas três formas de distribuições com características de cone de perda; uma destas foi a distribuição de Dory, Guest e Harris [DGH65], com o parâmetro λ fixado em $\lambda = 1$ e supondo a dispersão térmica paralela ao campo magnético muito menor do que a dispersão perpendicular (Obs.: Esta distribuição é usada neste trabalho, sem estas restrições). A parte real das frequências foi obtida segundo a aproximação de plasma frio, sendo portanto desprezados os efeitos dos elétrons não-térmicos. Mostrou-se que a amplificacão ocorre em faixas de frequência abaixo dos harmônicos da frequência de cíclotron, faixas essas que se estreitam com o decrescimo da energia dos elétrons. As razões de crescimento associadas com o ramo inferior do modo extraordinário (modo extraordinário lento) foram maiores do que as associadas com o ramo superior (modo extraordinário rápido); mostrou-se que as razões de crescimento deste último modo poderiam ser bastante aumentadas em certas circunstâncias, com a presença de uma componente paralela não nula do vetor de onda [FW77]. Embora tratando de problemas de aplicação generalizada em física de plasmas, estes trabalhos foram conduzidos com vistas a situações astrofísicas; a amplificação do modo extraordinário rápido foi proposta como mecanismo produtor da parcela da radiação decamétrica de Júpiter que aparece correlacionada com o satélite Io [WF77].

Mais recentemente, Wu e Lee propuseram que elétrons refletidos no espelho magnético das regiões polares da Terra poderiam amplificar ondas eletromagnéticas por meio da ressonância de

ciclotron, sendo este processo sugerido como fonte dos surtos de radiação conhecidos como radiação quilométrica das auroras (AKR) [WL79]; a abordagem do trabalho era bastante simples e não incluía os efeitos de plasma ambiente; mais tarde Lee e Wu publicaram um trabalho que incluiu um plasma de fundo de baixa energia, além da quele com a distribuição tipo cone de perda [LW80]. A densidade dos elétrons não-térmicos foi suposta muito menor do que a do plasma ambiente, de modo que seu efeito na relação de dispersão foi desprezado, para o cálculo da parte real da frequência. O tratamento incluiu o efeito de um campo eletrostático no cálculo das razões de crescimento do modo extraordinário rápido e do modo ordinário; foram também calculadas razões de crescimento para o modo extraordinário lento. Para os parâmetros utilizados, as razões de crescimento do modo ordinário foram muito menores do que as do modo extraordinário; as razões de crescimento encontradas para o modo lento foram maiores do que as do modo rápido. Os autores experimentaram duas formas de função distribuição tipo cone de perda (uma delas a de Dory, Guest e Harris) e obtiveram razões de crescimento relativamente insensíveis à forma da função distribuição de velocidades [LW80]. Em outro trabalho, de Lee, Kan e Wu, foi apresentado um tratamento similar, acompanhado de uma descrição mais detalhada da estrutura da região geradora da AKR e da aplicação do modelo [LKW80].

Em 1981, Tsai et alii publicaram um trabalho apontando que a forma usual do tensor dielétrico (Ver capítulo III) muitas vezes não é adequada para uso prático, particularmente nos casos em que a frequência é muito próxima dos harmônicos da frequência de ciclotron [TWWK81]. Uma outra forma foi proposta por Trubnikov

[Tr58], sendo entretanto válida apenas para distribuições Maxwellianas isotrópicas; uma forma simplificada das expressões de Trubnikov foi apresentada por Shkarofsky [Sh66], válida para elétrons fracamente relativísticos. Tsai et alii generalizaram o trabalho de Shkarofsky para situações não-Maxwellianas, incluindo na distribuição o aspecto de cone de perda, anisotropia térmica e um feixe longitudinal, ainda para elétrons fracamente relativísticos em um plasma homogêneo. Usando esta formulação, Wu et alii estudaram a absorção e emissão de ondas eletromagnéticas com frequência próxima à frequência de cíclotron dos elétrons [WLW+81]. Primeiramente, foi estudado um plasma caracterizado por uma distribuição tipo cone de perda, com isotropia de temperaturas, sem a presença de um plasma de fundo mais frio; tanto a parte imaginária como a real da frequência foram determinadas a partir da relação de dispersão, tendo os autores se restringido a situações onde a frequência de plasma dos elétrons é muito menor do que a frequência de cíclotron. O estudo foi concentrado no modo extraordinário rápido, sendo mostrado que este pode sofrer amplificação. Foi mostrado que, para energias suficientemente altas, a frequência de corte do modo pode ficar abaixo da frequência de cíclotron, em contraste com o resultado obtido na aproximação de plasma frio [WLW+81]. Foi estudada também uma distribuição em que os elétrons apresentam uma velocidade de deriva ao longo do campo magnético, com isotropia de temperaturas, sendo obtida uma absorção de ondas com frequência próxima à frequência de cíclotron, em certas circunstâncias.

Ainda usando a formulação de [TWWK81], Wong et alii estudaram a amplificação do modo extraordinário rápido em um plasma constituído de uma componente fracamente relativística com distri

buição tipo cone de perda e de um substrato frio [WWK+82]. Foram usadas duas formas de funções distribuição tipo cone de perda, uma delas sendo a de Dory, Guest e Harris com isotropia de temperaturas. O estudo foi restrito a plasmas em que $\omega_p^2 \ll \Omega_c^2$, sendo ω_p a frequência de plasma e Ω_c a frequência de cíclotron dos elétrons; a razão entre as densidades dos elétrons energéticos e os do substrato foi admitida arbitrária. Entre outros resultados, as razões de crescimento máximas foram de mesma ordem de magnitude para ambas as formas da função distribuição. A dependência angular das razões de crescimento mostrou-se muito sensível às razões entre ω_p e Ω_c e entre as densidades dos elétrons energéticos e do substrato. Foi também estudada uma forma de função distribuição de cone de perda modificada por um campo elétrico paralelo, sendo tal modelo motivado pelo estudo da região das auroras, na magnetosfera terrestre. Foram obtidos aspectos qualitativamente similares ao caso sem o campo elétrico, embora com razões de crescimento maiores [WWK+82].

Quanto a experimentos em laboratório, podem ser citados os trabalhos de Kubo et alii [KNY+75], [KNY+78], onde foram relatadas observações de amplificação de ondas no modo extraordinário. O plasma continha elétrons levemente relativísticos e estava confinado por espelhos magnéticos. Os resultados dos experimentos foram interpretados em termos da aproximação de partículas independentes, conforme [BHB61], tendo sido atribuída ao plasma uma distribuição isotrópica, $f(p) \propto p^s \exp[-E/T]$, sendo p e E o momentum e a energia dos elétrons e T uma "temperatura" em unidades de energia. Através da comparação com a teoria, foram citados valores de s que iam de $s \approx 3,6$ até valores da ordem de 20 a 50. A ocorrência

de amplificação foi observada em uma estreita faixa de frequências levemente abaixo da frequência de cíclotron eletrônica [KNY+75], [KNY+78].

Também Lichtenberg et alii mediram a radiação emitida perpendicularmente ao campo magnético de um espelho magnético contendo uma componente de elétrons de alta temperatura, em frequências próximas à frequência de cíclotron dos elétrons [LSL71]. A comparação dos resultados experimentais com os resultados teóricos obtidos no cálculo do espectro de emissão de partículas independentes forneceu boa concordância. Foi suposta para os elétrons quentes uma função distribuição do tipo indicado anteriormente, tendo os valores $s = 3$ e $T_e \approx 60$ keV melhor se ajustado aos resultados experimentais. Experimentos e resultados similares são também reportados em [LLT71].

Os resultados experimentais de [LSL71] foram também interpretados por Nicholson e Schwartz, tendo sido obtida uma boa concordância com os cálculos baseados em um modelo teórico [NS74]. A geometria do sistema foi modelada por uma lâmina infinita e homogênea, com espessura igual ao diâmetro do plasma no espelho magnético, tendo o campo magnético paralelo às faces [Be66]. O espectro de emissão foi calculado a partir da equação da transferência de radiação em um meio dispersivo homogêneo, sendo o coeficiente de emissão calculado com o uso da aproximação de partículas independentes [Be66]. O coeficiente de absorção foi obtido a partir da parte imaginária do índice de refração, através da solução da relação de dispersão. Aos elétrons foi atribuída uma função distribuição $f(p) \propto \delta(p_{||}) p_{\perp}^s \exp(-p_{\perp}^2/2mT)$; o cálculo do coeficiente de absorção revelou a ocorrência de amplificação em uma estreita

faixa de frequências abaixo da frequência de ciclotron eletrônica, correspondendo a um pico estreito no espectro de emissão. O valor de s obtido no melhor ajuste das curvas experimental e teórica foi de $s = 4$, para um plasma onde $T = 70$ keV [NS74].

Tendo em vista esta linha de desenvolvimento, parece-nos haver lugar para uma análise do fenômeno de emissão induzida de ciclotron que leve em conta de forma consistente os efeitos dielétricos, tanto na absorção quanto na emissão, tendo ainda a preocupação de acompanhar a trajetória da radiação através do plasma, ao invés de restringir-se ao cálculo de razões de crescimento locais. Em tal análise deveriam ser incluídos os efeitos de diversos parâmetros característicos e certos aspectos geométricos do plasma, como suas inhomogeneidades e seu tamanho finito. Para sermos mais específicos, decidimos conduzir uma investigação centrada nos seguintes aspectos:

- Considerar um plasma inhomogêneo, finito e levemente relativístico, estudando o efeito de diferentes fatores sobre a radiação induzida, como anisotropia de temperatura e inhomogeneidade do campo magnético, entre outros.

- Computar o coeficiente de absorção diretamente a partir da relação de dispersão, com os efeitos dielétricos consistentemente incluídos.

- Obter a intensidade da radiação na superfície do plasma, tendo assim um efeito integrado dos fenômenos que ocorrem localmente no meio inhomogêneo.

- Analisar diferentes formas da função de distribuição de velocidades das partículas, envolvendo o aspecto de perda.

Com os fatores acima em mente, limitamos nosso estudo à propagação perpendicular de ondas com frequência próxima à frequência de cíclotron eletrônica. A organização do trabalho é a seguinte: No capítulo II descrevemos o modelo físico e estabelecemos as expressões para a intensidade da radiação. No capítulo III obtemos os elementos do tensor dielétrico e do tensor correlação de correntes, cuja necessidade ficou estabelecida ao longo do capítulo II. No capítulo IV apresentamos e discutimos os resultados de uma análise numérica do problema, estudando os efeitos da inhomogeneidade do campo magnético e da anisotropia de temperaturas, assim como os efeitos da variação da densidade e da temperatura do plasma. Utilizamos sempre frequências abaixo da frequência de cíclotron eletrônica e verificamos que para os parâmetros escolhidos o modo ordinário apresenta resultados menos interessantes, do ponto de vista da magnitude da amplificação produzida. Por essa razão apresentamos apenas resultados numéricos relativos ao modo extraordinário (no caso, o modo extraordinário lento). No capítulo V fazemos um estudo numérico voltado para o efeito da forma da função distribuição, particularmente tendo em vista o preenchimento parcial do cone de perda; neste processo, discutimos a ocorrência de situações peculiares, que podem invalidar aproximações usadas no cálculo da emissão; pelas razões já expostas, nos limitamos ao modo extraordinário. No capítulo VI sumarizamos os principais resultados do trabalho.

II - MODELO UTILIZADO E INTENSIDADE DA RADIAÇÃO

Conforme foi adiantado no capítulo anterior, trabalhamos com um plasma finito e não homogêneo. Usamos como modelo uma lâmina de plasma, com um campo magnético paralelo às faces. Escolhemos o sistema de coordenadas de modo que o eixo Z fique paralelo ao campo magnético e o eixo X perpendicular às faces da lâmina, que é considerada infinita nas direções dos eixos Y e Z e se estende desde $-a$ até a , na direção X. O meio é suposto estacionário e homogêneo nas direções Y e Z. Supomos que o campo magnético e outros parâmetros do plasma podem apresentar inhomogeneidades suaves na direção X, de modo que as distâncias típicas de variação dos parâmetros sejam muito maiores do que os comprimentos de onda envolvidos. O significado desta aproximação deve se tornar mais claro à medida que ela for sendo empregada nas derivações que aparecem a seguir.

Uma vez que o plasma é finito, a propagação de ondas eletromagnéticas deve obedecer à condição de contorno (lei de Snell), que exige que a componente do vetor de onda paralela ao campo magnético ($k_{||}$) se mantenha constante ao longo do trajeto [Zi79]. Os modos de propagação são encontrados através de uma relação de dispersão, que fornece a componente perpendicular do vetor de onda (k_{\perp}) como função de ω e dos demais parâmetros relevantes.

II.1 - A Intensidade da Radiação

Estabelecida a geometria do modelo, queremos obter a po

tência irradiada por unidade de área da lâmina de plasma. Esta é uma grandeza macroscópica, de modo que começamos por definir uma média de ensemble sobre as flutuações microscópicas dos campos; escrevemos o valor médio do vetor de Poynting na superfície da lâmina:

$$\vec{S}_m(\vec{r}_1) = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E}(\vec{r}_1, t) \times \vec{B}(\vec{r}_1, t) \rangle \quad [r_1 = (\pm a, Y, Z)] \quad (\text{II.1})$$

Para a obtenção dos campos \vec{E} e \vec{B} que aparecem na equação acima, usamos as equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (\text{II.2})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Antes de partir para a solução das equações de Maxwell, entretanto, vamos fazer algumas transformações convenientes na Eq. (II.1). Começamos supondo que \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} e \vec{J} possam ser escritos na forma:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \vec{A}(k_y, k_z, \omega, x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (\text{II.3})$$

onde $\vec{A}(k_y, k_z, \omega, x)$ representa uma amplitude cuja dependência predominante em posição é da forma $\exp(i \int^x k_x dx')$, com $k_x = k_x(k_y, k_z, \omega, x)$ obtido a partir de uma relação de dispersão, que veremos mais

adiante. Com isto, e com a primeira das equações (II.2), temos:

$$\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1) \times \vec{B}(k'_y, k'_z, \omega', x_1) \cong \frac{c}{\omega'} \vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1) \times \vec{k}(k'_y, k'_z, \omega', x_1) \\ \times \vec{E}(k'_y, k'_z, \omega', x_1) = \frac{c}{\omega'} \vec{k}(k'_y, k'_z, \omega', x_1) \left[\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1) \cdot \vec{E}(k'_y, k'_z, \omega', x_1) \right]$$

No último passo, foi usado o fato de que $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$ quando $x = x_1$, pois x_1 marca o limite da lâmina de plasma. Ficamos com,

$$\vec{S}_m(\vec{k}_1) = \frac{c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk'_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \\ \times \frac{\vec{k}(k'_y, k'_z, \omega', x_1)}{\omega'} \langle \vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1) \cdot \vec{E}(k'_y, k'_z, \omega', x_1) \rangle \\ \times \exp \left\{ i \left[(k_y + k'_y) y + (k_z + k'_z) z - (\omega + \omega') t \right] \right\} \quad (\text{II.4})$$

O vetor $\vec{E}(\vec{r}, t)$ é real, de modo que da equação (II.3) obtemos as relações seguintes:

$$\vec{E}^*(k_y, k_z, \omega, x) = \vec{E}(-k_y, -k_z, -\omega, x) \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{k}^*(k_y, k_z, \omega, x) = -\vec{k}(-k_y, -k_z, -\omega, x)$$

Com as relações acima, podemos escrever a equação (II.4)

como

$$\vec{S}_m(\vec{r}_1) = \frac{c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_y' \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} dk_z' \left[-\frac{\vec{k}^* (-k_y', -k_z', -\omega' x)}{\omega'} \right] \\ \times \langle \vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1) \cdot \vec{E}^*(-k_y', -k_z', -\omega', x_1) \rangle \exp \left\{ i \left[(k_y + k_y')y + (k_z + k_z')z - (\omega + \omega')t \right] \right\}$$

Uma vez que o meio é estacionário e homogêneo nas direções Y e Z, a expressão acima não deve depender de t, y ou z, de modo que podemos escrever

$$\vec{S}_m(x_1) = \frac{c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\vec{k}(k_y, k_z, \omega, x_1)}{\omega} \langle |\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle \quad (\text{II.6})$$

onde fizemos uso do fato de que $\vec{k}(k_y, k_z, \omega, x_1)$ é real e definimos

$$\langle \vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1) \cdot \vec{E}^*(k_y', k_z', \omega', x_1) \rangle = \langle |\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle \\ \times \delta(k_y - k_y') \delta(k_z - k_z') \delta(\omega - \omega')$$

Podemos introduzir uma integral em dk_x na expressão (II.6):

$$\vec{S}_m(x_1) = \frac{c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\vec{k}(k_y, k_z, \omega, x_1)}{\omega} \\ \times \langle |\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle \delta \left\{ k_x - \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_y^2 + k_z^2) \right]^{1/2} \right\}$$

Usando as propriedades das funções delta e mudando de coordenadas cartesianas para esféricas, ficamos com:

$$\delta \left\{ k_x - \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_y^2 + k_z^2) \right]^{1/2} \right\} = \left[1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_y^2 + k_z^2) \right]^{1/2} \left[\delta(k - \frac{\omega}{c}) + \delta(k + \frac{\omega}{c}) \right]$$

e

$$\vec{S}_m(x_1) = \frac{c}{2\pi} \int_0^\omega d\omega \int_0^x dk k^2 \int_{4\pi} d\Omega_{\vec{k}} \left[1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_y^2 + k_z^2) \right]^{1/2}$$

$$\cdot \delta(k - \frac{\omega}{c}) \langle |\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle \vec{u}_k(x_1),$$

onde $\vec{u}_k(x_1)$ é um vetor unitário na direção de \vec{k} .

Para obter a potência irradiada por unidade de área da lâmina de plasma é preciso fazer o produto escalar de $\vec{u}_k(x_1)$ com o vetor unitário na direção x :

$$\vec{u}_k(x_1) \cdot \hat{i} = [u_k(x_1)]_x = \frac{ck_x}{\omega} = \left[1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_y^2 + k_z^2) \right]^{1/2}$$

Assim, a potência irradiada por unidade de área da lâmina ($d\sigma$), por unidade de ângulo sólido ($d\Omega_{\vec{k}}$), por unidade de frequência angular ($d\omega$), nas posições $x_1 = a$ ou $x_1 = -a$, fica dada por [FG79]:

$$\frac{d^3 P(x_1)}{d\sigma d\Omega_{\vec{k}} d\omega} = \frac{c}{2\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_y^2 + k_z^2) \right] \langle |\vec{E}(k_y, k_z, \omega, x_1)|^2 \rangle \quad (\text{II.7})$$

onde $\omega > 0$.

Neste trabalho, consideramos apenas radiação de frequência ω propagando-se na direção perpendicular às faces da lâmina,

de modo que $k_y = k_z = 0$ e $\vec{k} = k \hat{i}$.

Voltemos agora às equações de Maxwell; usando (II.3) e supondo que vale localmente a relação entre \vec{D} e \vec{E} que vigora em um meio homogêneo, ficamos com:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\omega, x) &= i(\omega/c) \vec{B}(\omega, x) \\ \nabla \times \vec{B}(\omega, x) &= -i(\omega/c) \vec{D}(\omega, x) + (4\pi/c) \vec{J}(\omega, x)\end{aligned}\quad (\text{II.8})$$

onde $\vec{D}(\omega, x) = \overleftrightarrow{\epsilon}(\omega, x) \cdot \vec{E}(\omega, x)$.

Os elementos do tensor dielétrico são obtidos supondo-se o plasma localmente homogêneo e levemente relativístico; nesse ponto do trabalho as suas expressões explícitas não são importantes, mas podemos fazer uso das relações seguintes, válidas no contexto que temos em mente (Ver capítulo III e Apêndice):

$$\begin{aligned}\epsilon_{yy} &\equiv \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} &= -\epsilon_{yx}\end{aligned}\quad (\text{II.9})$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{xz} &\equiv \epsilon_{zx} = 0 & \epsilon_{yz} &= -\epsilon_{zy} = 0\end{aligned}$$

Com o uso das expressões acima e com a introdução da forma explícita do operador ∇ , reduzimos as expressões (II.8) a:

$$B_x = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$E_x = -(\epsilon_{xy}/\epsilon_{xx})E_y - (4\pi i/\omega)J_x/\epsilon_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_z = -i(\omega/c)B_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y = i (\omega/c) B_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_z = i (\omega/c) [-\epsilon_{xy} E_x + \epsilon_{xx} E_y] - (4\pi/c) J_y$$

(II.10)

$$\frac{\partial}{\partial x} B_y = -i (\omega/c) [\epsilon_{zz0} + N^2 \chi_{zz}] E_z + (4\pi/c) J_z ,$$

onde usamos a notação $\epsilon_{zz} = \epsilon_{zz0} + N^2 \chi_{zz}$, com $N^2 = c^2 k^2 / \omega^2$; fica subentendido que os E_i , B_i e J_i são funções de ω e x .

Supusemos anteriormente que as amplitudes dos campos e correntes têm uma dependência em x predominantemente da forma $\exp(i \int^x k_x dx')$; isto nos permite escrever N como $-i(c/\omega)(\partial/\partial x)$, desprezando o efeito deste operador sobre o elemento χ_{zz} , suposto fracamente dependente da posição. Já sabemos que $B_x = 0$; usando a segunda das equações (II.10) para eliminar E_x , ficamos com:

$$\frac{\partial}{\partial x} E_z = -i (\omega/c) B_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y = i (\omega/c) B_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_z = i (\omega/c) [(\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2) / \epsilon_{xx}] E_y - (4\pi/c) (J_y + J_x \epsilon_{xy} / \epsilon_{xx}) \quad (II.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_y = -i (\omega/c) \epsilon_{zz0} E_z + i (c/\omega) \chi_{zz} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z + (4\pi/c) J_z .$$

Derivando as duas primeiras equações (II.11) e usando as duas últimas, resulta [FGMR78]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z + (\omega^2/c^2) N_0^2 E_z = S_0 \quad (II.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + (\omega^2/c^2) N_x^2 E_y = S_x ,$$

onde

$$N_0^2 = \epsilon_{zz0} / (1 - \chi_{zz}), \quad N_x^2 = (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2) / \epsilon_{xx};$$

$$S_0 = - (4\pi i\omega / c^2) J_z / (1 - \chi_{zz}),$$

$$S_x = - (4\pi i\omega / c^2) (J_y + J_x \epsilon_{xy} / \epsilon_{xx}).$$

Os símbolos N_0^2 e N_x^2 representam os quadrados dos índices de refração dos dois modos propagantes no plasma; $N_0 = \sqrt{N_0^2}$ representa o modo ordinário e $N_x = \sqrt{N_x^2}$ o modo extraordinário, propagando-se no sentido de x crescente; as raízes com sinal contrário representam os mesmos modos propagando-se no sentido de x decrescente. Um procedimento equivalente para obter os modos normais do plasma seria considerar os campos de radiação localmente como uma superposição de ondas planas, escrevendo as equações de Maxwell sem fontes na forma $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + (\omega/c)^2 \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} = 0$.

No caso de propagação perpendicular, com os elementos de $\vec{\epsilon}$ satisfazendo às relações (II.9), obtêm-se a relação de dispersão

$$N^4 [\epsilon_{xx} (1 - \chi_{zz})] - N^2 [(\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2)(1 - \chi_{zz}) + \epsilon_{xx} \epsilon_{zz0}] + \epsilon_{zz0} (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{xy}^2) = 0,$$

da qual as grandezas N_0^2 e N_x^2 , definidas acima, são raízes.

Supondo que N_0 e N_x satisfaçam às condições de validade da aproximação WKB [as quais, para propagação perpendicular, se reduzem a $(c/\omega) \left| \frac{1}{N_\alpha} \frac{dN_\alpha}{dx} \right| \ll 1$], escrevemos as soluções das equações (II.12):

$$\begin{aligned}
 E_z(\omega, x) &= \left[\frac{ic}{2\omega} \int_a^\lambda dx' \frac{S_x(x')}{N_0^{1/2}(x')} \exp\left(-\frac{i\omega}{c} \int_a^{x'} N_0(x'') dx''\right) \right] \\
 &\quad + \left[\frac{ic}{2\omega} \int_a^\lambda dx' \frac{S_z(x')}{N_0^{1/2}(x')} \exp\left(\frac{i\omega}{c} \int_a^{x'} N_0(x'') dx''\right) \right] \\
 &\quad + \frac{\exp\left(-\frac{i\omega}{c} \int_a^x N_0(x') dx'\right)}{N_0^{1/2}(x)} \quad (II.13)
 \end{aligned}$$

com uma expressão similar para E_y , onde aparecem S_x e N_x no lugar de S_0 e N_0 . A componente E_x pode ser obtida a partir de E_y através da segunda das equações (II.10). A solução dada por (II.13) supõe que não haja radiação incidente sobre a lâmina de plasma.

Para termos a potência irradiada [Exp.(II.7)] precisamos do campo na borda da lâmina, nas posições $x_1 = a$ ou $x_1 = -a$. A componente E_x é nula, pois $\epsilon_{xy}(x_1) = J_x(x_1) = 0$. Na expressão resultante podemos separar facilmente os modos ordinário e extraordinário, pois as equações (II.12) nos mostram que estes correspondem às componentes E_z e E_y , respectivamente,

$$|\vec{E}(\omega, x_1)|^2 = |\bar{E}_y(\omega, x_1)|^2 + |\bar{E}_z(\omega, x_1)|^2$$

Usando (II.13), temos

$$\begin{aligned}
 |\bar{E}_z(\omega, x_1)|^2 &= (c/2\omega)^2 \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{x_1} du \Gamma_0(x) \Gamma_0^*(u) \\
 &\quad \times \exp\left[-\frac{i\omega}{c} \left(\int_a^x N_0(x') dx' - \int_a^u N_0^*(u') du'\right)\right] \exp\left[\frac{i\omega}{c} \int_a^{x_1} (N_0 - N_0^*) dx'\right]
 \end{aligned}$$

onde u é uma variável de integração e $\Gamma_0(x) = S_0(x)/N_0^{1/2}(x)$; tem-

-se $x_0 = -a$ quando $x_1 = a$ e $x_0 = a$ quando $x_1 = -a$. Esta expressão pode ser reescrita de outra maneira, introduzindo-se as partes real (N'_α) e imaginária (N''_α) de N_α :

$$\int^x N_\alpha dx' - \int^u N_\alpha^* du' = \int^x N'_\alpha dx' - \int^x N''_\alpha dx' + \int^u N'_\alpha du' - \int^u N''_\alpha du' = 2i \int^x N''_\alpha dx' - \int^u N''_\alpha du'$$

$$|E_z(\omega, x_1)|^2 = (c/2\omega)^2 \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{x_0}^{x_1} du \Gamma_0(x) \Gamma_0^*(u) \times \exp\left[\frac{2\omega}{c} \int_{x_0}^x N''_\alpha dx' + \frac{i\omega}{c} \int_x^{x_1} N_\alpha^* dx'\right] \exp\left[-\frac{2\omega}{c} \int^u N''_\alpha dx'\right].$$

Façamos uma mudança de variáveis; seja $v \equiv u-x$;

$$|E_z(\omega, x_1)|^2 = (c/2\omega)^2 \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{x_0-x}^{x_1-x} dv \Gamma_0(x) \Gamma_0^*(v+x) \times \exp\left[\frac{2\omega}{c} \int^x N''_\alpha dx' + \frac{i\omega}{c} \int_x^{x_1} N_\alpha^* dx'\right] \exp\left[-\frac{2\omega}{c} \int^u N''_\alpha dx'\right].$$

A expressão (II.7) requer uma média de ensemble; nesse caso, temos

$$\langle |E_z(\omega, x_1)|^2 \rangle = (c/2\omega)^2 \exp\left[-\frac{2\omega}{c} \int^x N''_\alpha dx'\right] \int_{x_0}^{x_1} dx \exp\left[\frac{2\omega}{c} \int^x N''_\alpha dx'\right] \times \int_{x_0-x}^{x_1-x} dv \langle \Gamma_0(x) \Gamma_0^*(x+v) \rangle \exp\left[\frac{i\omega}{c} \int_x^{x+v} N_\alpha^* dx'\right] \quad (\text{II.14})$$

Em nosso plasma levemente inhomogêneo, é razoável admitir que a escala típica das distâncias onde é significativa a correlação $\langle \Gamma_0(x) \Gamma_0^*(x+v) \rangle$ seja muito menor do que a escala das distâncias típicas de variação dos parâmetros do plasma, de modo que a integral em dv que aparece em (II.14) pode ser calculada como se o meio fosse homogêneo [FGMR78]. Além disso, impomos que $|N_0''| \ll |N_0'|$, amparados na própria validade do tratamento linear, de modo que usamos nesta integração apenas a parte real de N_0 (o decaimento ou amplificação seriam desprezíveis, dentro da curta distância onde as correlações são significativas). Para simplificar os cálculos, estendemos os limites da integral para $\pm\infty$ sem incluir nenhuma alteração de monta,

$$\int_{\lambda_0 - x}^{\lambda_1 - x} dv \langle \Gamma_0(x) \Gamma_0^*(x+v) \rangle \exp \left[\frac{i\omega}{c} \int_x^{\lambda_1 + v} N_0' dx' \right] \cong \\ \cong \left(\frac{4\pi\omega}{c^2} \right)^2 \frac{1}{|N_0| |1 - \chi_{zz}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \langle J_z(x) J_z^*(x+v) \rangle \exp(i k_0' v)$$

onde $k_0' = (\omega/c) N_0'$; foram usadas as expressões (II.12).

Introduzindo as transformadas de Fourier de J_z , resulta

$$\left(\frac{4\pi\omega}{c^2} \right)^2 \frac{1}{|N_0| |1 - \chi_{zz}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 \langle J_z(q_1) J_z^*(q_2) \rangle \exp \left[i(q_1 - q_2)x + i(k_0' - q_2)v \right] \quad (II.15)$$

onde q_1 e q_2 são reais. Definindo o tensor de correlação de correntes [Sh67],

$$\langle J_\alpha(\omega, \vec{k}) J_\beta^*(\omega', \vec{k}') \rangle = G_{\alpha\beta}(\omega, \vec{k}) \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (II.16)$$

temos

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{4\pi\omega}{c^2}\right)^2 \frac{1}{|N_0| |1-\chi_{zz}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 G_{zz}(\omega, q_1) \delta(q_1 - q_2) \\
 & \quad \times \exp[i(q_1 - q_2)x + i(k'_0 - q_2)v] \\
 & = \left(\frac{4\pi\omega}{c^2}\right)^2 \frac{1}{|N_0| |1-\chi_{zz}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 G_{zz}(\omega, q_1) \exp[i(k'_0 - q_1)v] \\
 & = 2\pi \left(\frac{4\pi\omega}{c^2}\right)^2 \frac{1}{|N_0| |1-\chi_{zz}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 G_{zz}(\omega, q_1) \delta(k'_0 - q_1) \\
 & = \left(\frac{4\pi\omega}{c^2}\right)^2 \frac{2\pi}{|N_0| |1-\chi_{zz}|^2} G_{zz}(\omega, k'_0) \tag{II.17}
 \end{aligned}$$

Portanto, a Eq. (II.14) fica:

$$\langle |E_z(\omega, x_1)|^2 \rangle = \frac{8\pi^3}{c^2} \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{G_{zz}}{|N_0| |1-\chi_{zz}|^2} \exp\left[-\frac{2\omega}{c} \int_x^{x_1} N_0''(x') dx'\right]$$

Usando esta expressão e a Eq. (II.7), a potência irradiada no modo ordinário fica dada por [FGMR78], [FG79], [FGM+80],

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^3P}{d\sigma d\Omega_E d\omega} \right|_0 & \equiv I_0 = \frac{4\pi^2}{c} \frac{\omega^2}{c^2} \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{G_{zz}}{|1-\chi_{zz}|^2 |N_0|} \\
 & \quad \times \exp\left[-\frac{2\omega}{c} \int_x^{x_1} N_0''(x') dx'\right] \tag{II.18}
 \end{aligned}$$

Fazendo um cálculo similar para $|E_y(\omega, x_1)|^2$, podemos escrever, analogamente à Eq. (II.17):

$$\int_{x_0-x}^{x_1-x} dv \langle \Gamma_x(x) \Gamma_x^*(x+v) \rangle \exp \left[i \frac{\omega}{c} \int_x^{x+v} N_x^* dx' \right] \cong \dots$$

$$\dots = \left(\frac{4\pi\omega}{c^2} \right)^2 \frac{2\pi}{|N_x|} \left(G_{yy} + \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} G_{xy} + \frac{\epsilon_{xy}^*}{\epsilon_{xx}^*} G_{yx} + \frac{|\epsilon_{xy}|^2}{|\epsilon_{xx}|^2} G_{xx} \right). \quad (\text{II.19})$$

As formas explícitas dos elementos $G_{\alpha\beta}$ serão obtidas no próximo capítulo; entretanto, faremos uso agora das seguintes propriedades (Ver capítulo III e Apêndice):

$$G_{yy} = G_{xx} \quad G_{xy} = -G_{yx} = -i G_{xx}$$

$$G_{xz} = G_{zx} \quad G_{yz} = -G_{zy} \cong i G_{xz}.$$

Assim, a expressão (II.19) pode ser escrita como:

$$\left(\frac{4\pi\omega}{c^2} \right)^2 \frac{2\pi}{|N_x|} \left[|\epsilon_{xx}|^2 + |\epsilon_{xy}|^2 - i(\epsilon_{xy} \epsilon_{xx}^* - \epsilon_{xy}^* \epsilon_{xx}) \right] \frac{G_{xx}}{|\epsilon_{xx}|^2}$$

$$= \left(\frac{4\pi\omega}{c^2} \right)^2 \frac{2\pi}{|N_x|} \frac{|\epsilon_{xx} - i \epsilon_{xy}|^2}{|\epsilon_{xx}|^2} G_{xx}.$$

Usando a expressão acima obtemos a potência irradiada no modo extraordinário [FGMR78], [FG79], [FGM+80],

$$\left. \frac{d^3 P}{d\sigma d\Omega_k d\omega} \right|_x \equiv I_x = \frac{4\pi^2}{c} \frac{\omega^2}{c^2} \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{|\xi_{xx} + i\xi_{xy}|^2}{|\xi_{xx}|^2 |N_x|} G_{xx} \times \exp \left[-\frac{2\omega}{c} \int_x^{x_1} N_x''(x') dx' \right]. \quad (\text{II.20})$$

As expressões (II.18) e (II.20) coincidem com o resultado da aproximação de partículas independentes [Be66] quando $\frac{\omega_p^2}{2} \ll 1$ para o modo ordinário e quando $\left| \frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \int d^3 p p_{\perp} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} / (\gamma - \frac{\Omega_c}{\omega}) \right| \ll 1$ para o modo extraordinário [FGMR78].

II.2 - A Função Distribuição de Cone de Perda

Finalmente, introduzimos a função distribuição que caracteriza os elétrons de nosso plasma, para uso no cálculo dos elementos de \vec{E} e \vec{G} . O aspecto fundamental que desejamos é a inversão populacional na distribuição de velocidades, a qual pode dar margem à ocorrência de emissão induzida. Uma forma de função distribuição que apresenta tal aspecto é a função distribuição de Dory, Guest e Harris [DGH65], também conhecida como função distribuição de cone de perda (existem outras formas de funções também chamadas de distribuições de cone de perda [FW77]). Além do aspecto de cone de perda (insuficiência de partículas com valores baixos de p_{\perp}) admitimos uma anisotropia de temperaturas e escrevemos a função distribuição como

$$f_l(p_{\perp}, p_{\parallel}) = A p_{\perp}^{2l} \exp(-M_{\perp} p_{\perp}^2/b - M_{\parallel} p_{\parallel}^2/b), \quad (\text{II.21})$$

onde p_{\parallel} e p_{\perp} indicam o momentum dos elétrons, nas direções parale

la e perpendicular ao campo magnético,

$$A = \frac{\mu_L^{\ell+1} \mu_{\parallel}^{1/2}}{b^{\ell+3/2} \pi^{3/2} \ell!}, \quad b = \frac{2}{3} (mc)^2,$$

$$\mu_{\perp} = mc^2 / T_{\perp}, \quad \mu_{\parallel} = mc^2 / T_{\parallel},$$

m é a massa dos elétrons, c a velocidade da luz, T_{\perp} e T_{\parallel} são uma medida das temperaturas perpendicular e paralela, dadas em unidades de energia; ℓ é um parâmetro inteiro maior ou igual a zero.

Esta função distribuição é básica em nosso modelo. Nos capítulos IV e V realizamos uma análise numérica do processo de emissão e absorção de cíclotron, introduzindo valores para os parâmetros do plasma; nesta análise usamos a função distribuição na forma tal qual apresentada em (II.21), ou na forma de uma superposição de dois termos do tipo dado por (II.21), com valores diferentes de ℓ , T_{\perp} e T_{\parallel} .

III. TENSOR DIELÉTRICO E TENSOR CORRELAÇÃO DE CORRENTES

Os elementos do tensor dielétrico para um plasma infinito, homogêneo e magnetizado, no caso de oscilações eletromagnéticas de alta frequência, são dados por [Be66]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} = & \delta_{\alpha\beta} + X \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{p_{\perp} \overline{\pi}_{\alpha n}^* \overline{\pi}_{\beta n}}{\delta + n\gamma - \frac{N_{\parallel} p_{\parallel}}{mc}} L f \\ & + X \delta_{\alpha z} \delta_{\beta z} \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} - \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \right) f, \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

onde $\alpha, \beta = x, y, z$ e

$$X = \omega_p^2 / \omega^2, \quad \omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 / m, \quad Y = \Omega_c / \omega,$$

$$\Omega_c = |e B_0 / mc|, \quad \gamma = (1 + p^2 / m^2 c^2)^{1/2}, \quad \vec{p} = m \gamma \vec{v},$$

-e \bar{e} é a carga do elétron, n_e o número de elétrons por unidade de volume, B_0 a intensidade do campo magnético,

$$\overline{\pi}_{xn} = n J_n(\rho) / \rho, \quad \overline{\pi}_{yn} = i J_n'(\rho), \quad \overline{\pi}_{zn} = p_{\parallel} J_n(\rho) / p_{\perp}.$$

J_n e J_n' são a função de Bessel de ordem n e sua derivada, respectivamente, de argumento $\rho = -N p_{\perp} / mc Y$, onde N é o índice de refração, definido por $N = ck / \omega$; f é a função distribuição de momentum dos elétrons, e L é um operador dado por

$$L = \left(1 - \frac{N_{\perp} p_{\perp}^2}{\gamma m c}\right) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{N_{\perp} p_{\perp}}{\gamma m c} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \quad (\text{III.2})$$

Neste trabalho, estamos interessados em propagação perpendicular ao campo magnético, em um plasma que é finito e inhomogêneo. Entretanto, a inhomogeneidade é suposta fraca, de modo que usamos uma aproximação no cálculo dos elementos do tensor dielétrico. Esta aproximação consiste em supor que as propriedades dielétricas são função dos parâmetros locais, ou seja, que podemos usar a Eq.(III.1) para obter os elementos do tensor dielétrico em cada ponto da lâmina de plasma, caracterizando o que chamamos de plasma "localmente homogêneo". Portanto, tomamos a Eq. (III.1) para $N_{\parallel} = 0$ e com uso da função distribuição (II.21) obtemos os elementos $\epsilon_{\alpha\beta}$ que caracterizam nosso plasma. Este cálculo é bastante trabalhoso, de modo que neste capítulo apenas delineamos as aproximações envolvidas e apresentamos as expressões finais, usadas na análise numérica. Os detalhes do cálculo são deixados para o Apêndice.

Nosso plasma é levemente relativístico, de modo que é possível usar somente o primeiro termo relevante da expansão da expressão (III.1) em potências de ρ^2 , se for satisfeita a condição $\rho^2 \ll 1$. Este parâmetro de expansão pode ser avaliado se tomarmos o valor médio de p_{\perp} , para a função distribuição (II.21):

$$\rho^2 = \frac{N^2}{Y^2} \frac{2}{\mu_{\perp}} \left[\frac{\Gamma(\ell + 3/2)}{\ell!} \right]^2 \quad (\text{III.3})$$

Além disso, como estamos interessados em radiação em fre

freqüências próximas a frequência de ciclotron eletrônica, mantemos apenas os termos que correspondem ao harmônico fundamental ($n = 1$).

Escrevendo $\chi_{\alpha\beta} = \chi'_{\alpha\beta} + i \chi''_{\alpha\beta}$, obtemos:

$$\mathcal{E}'_{xx} = 1 + B \int_0^{\infty} dr \exp(-\mu_{\parallel} r^2/2) \sum_{\sigma=\pm} h_{\sigma}(r)$$

$$\mathcal{E}'_{xy} = -i B \int_0^{\infty} dr \exp(-\mu_{\parallel} r^2/2) \sum_{\sigma=\pm} \sigma h_{\sigma}(r)$$

$$\mathcal{E}'_{zz} = \mathcal{E}_{zz0} + N^2 \chi'_{zz} \quad (\text{III.4})$$

$$\mathcal{E}'_{xz} = \mathcal{E}'_{zx} = 0 \quad \mathcal{E}'_{yz} = \mathcal{E}'_{zy} = 0$$

$$\mathcal{E}'_{xy} = -\mathcal{E}'_{yx} \quad \mathcal{E}'_{yy} \cong \mathcal{E}'_{xx},$$

onde

$$B = X \mu_{\perp} (\mu_{\parallel}/2\pi)^{1/2} / l!$$

$$h_{\sigma}(r) = -l! + (l-x_{\sigma}) \left[(1-\delta_{l,0}) \sum_{m=0}^{l-1} (l-1-m)! x_{\sigma}^m - x_{\sigma}^l e^{-x_{\sigma}} E_l(x_{\sigma}) \right]$$

$$\mathcal{E}_{zz0} = 1 - 2 \mu_{\parallel} B \int_0^{\infty} dr \exp(-\mu_{\parallel} r^2/2) r^2 h_0(r)$$

$$h_0(r) = (1-\delta_{l,0}) \sum_{m=0}^{l-1} (l-1-m)! x_0^m - x_0^l e^{-x_0} E_l(x_0)$$

$$\chi_{\sigma}^{\prime} = (B/Y^2) \int_0^{\infty} dr \exp(-\mu_0 r^2/2) r^2 \sum_{\sigma} h_{\sigma}(r)$$

$$\chi_{\sigma} = -\mu_{\perp} \alpha_{\sigma} \quad , \quad \chi_0 = -\mu_{\perp} \alpha_0 \quad ,$$

$$\alpha_{\sigma} = 1 + (r^2/2) - \sigma Y \quad , \quad \alpha_0 = 1 + (r^2/2) \quad e \quad r = p_{\parallel} / (mc) \quad .$$

$E_j(x)$ é a integral exponencial [AS72], definida por

$$E_j(x) = \oint_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0) \quad ,$$

onde P indica o valor principal da integral. O símbolo $\delta_{m,n}$ indica a delta de Kronecker.

As partes anti-hermitianas são dadas por

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}'' &= K_1 Y \frac{(-1)^{\ell+1}}{s} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \frac{\beta_1^{\ell-k}}{t^{1+2k}} \left\{ -q_+ e^{-sq_+^2} \right. \\ &\quad \times \left[(1-\delta_{k,0}) \eta_{\perp} \theta_{k-1} + \frac{\theta_k}{t^2} \right] + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) \\ &\quad \left. \times \left[(1-\delta_{k,0}) \eta_{\perp} \phi_k + \delta_{k,0} \eta_{\perp} + \frac{\phi_{k+1}}{t^2} \right] \right\} \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

$$\epsilon_{zz}'' = N^2 \chi_{zz}'' \quad , \quad \epsilon_{yy}'' \cong \epsilon_{xx}'' \quad ,$$

$$\epsilon_{xy}'' = -\epsilon_{yx}'' = -i \epsilon_{xx}'' \quad , \quad \epsilon_{xz}'' = \epsilon_{zx}'' = 0$$

$$e \quad \epsilon_{yz}'' = -\epsilon_{zy}'' = i \epsilon_{xz}'' = 0 \quad ,$$

onde

$$K_1 = \frac{\pi \times}{4} \frac{\mu_{\perp}^{\ell+2} \mu_{\parallel}^{1/2}}{(2\pi)^{1/2} 2^{\ell} \ell!} \exp(\mu_{\perp} \beta_1 / 2),$$

$$\phi_m = \frac{(2m-1)!!}{(2s)^m}, \quad \theta_m = q_+^{2m} \sum_{j=0}^m \frac{(2m+1)!!}{(2m+1-2j)!!} \frac{1}{(2sq_+^2)^j},$$

$$\beta_1 = 1 - Y^2, \quad \eta_{\perp} = 2\ell/\mu_{\perp} + \beta_1,$$

$$r_+^2 = -\beta_1, \quad q = tr, \quad t = (|d|/2)^{1/2},$$

$$d = \mu_{\perp} - \mu_{\parallel}, \quad s = -d/|d|,$$

$$\chi_{\ell 22}'' = \frac{K_1}{Y} \frac{(-1)^{\ell+1}}{s} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \frac{\beta_1^{\ell-k}}{t^{3+2k}} \left\{ -q_+ e^{-sq_+^2} \left[\eta_{\perp} \theta_k + \frac{\theta_{k+1}}{t^2} \right] \right. \\ \left. + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) \left[\eta_{\perp} \phi_{k+1} + \frac{\phi_{k+2}}{t^2} \right] \right\};$$

$\operatorname{erf}(x)$ é a função erro [AS72], definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x \exp(-t^2) dt,$$

$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ é o coeficiente binomial e $m!!$ o duplo fatorial.

Evidentemente, as expressões (III.4) e (III.5) satisfazem às relações (II.9) (Ver Apêndice).

Para o cálculo do tensor correlação de correntes, o procedimento é similar. Seus elementos, para um plasma infinito, ho

homogêneo e magnetizado, quando $k_{\parallel} = 0$, são dados por [Sh67]

$$G_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_p^2}{2m\omega} \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3\rho \frac{P_{\perp}^2 \Pi_{\alpha n}^* \Pi_{\beta n}}{\gamma} f \delta(\gamma + n\gamma) \quad (\text{III.6})$$

Supondo o plasma localmente homogêneo, expandimos estes elementos em potências de ρ^2 e tomamos o primeiro termo relevante dos termos correspondentes ao harmônico fundamental, obtendo (os detalhes são dados no Apêndice):

$$G_{xx} = g K_1 \frac{(-1)^{\ell+1}}{s} \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{k} \frac{\beta_1^{\ell+1-k}}{\ell^{1+2k}} \left\{ -q_+ e^{-sq_+^2} (1-\delta_{k,0}) \theta_{k-1} \right. \\ \left. + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) \left[\delta_{k,0} + (1-\delta_{k,0}) \phi_k \right] \right\} \\ G_{zz} = N^2 g \frac{K_1}{Y^2} \frac{(-1)^{\ell+1}}{s} \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{k} \frac{\beta_1^{\ell+1-k}}{\ell^{3+2k}} \left\{ -q_+ e^{-sq_+^2} \theta_k \right. \\ \left. + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) \phi_{k+1} \right\} \quad (\text{III.7})$$

$$G_{yy} \cong G_{xx}, \quad G_{xy} = -G_{yx} = -i G_{xx},$$

$$G_{xz} = G_{zx} = 0, \quad G_{yz} = -G_{zy} = i G_{xz} = 0,$$

onde $g = \omega m c^2 / [(2\pi)^5 \mu_{\perp}]$. Estamos agora prontos para uma análise numérica do problema da emissão induzida de cíclotron, o que passamos a fazer no próximo capítulo.

IV. ANÁLISE NUMÉRICA I

Neste capítulo estudamos os efeitos da anisotropia de temperaturas e da inhomogeneidade do campo magnético sobre a emissão induzida de cíclotron, além de verificarmos a dependência do coeficiente de absorção em densidade e temperatura [ZD83], [ZD82a]. Este estudo é realizado através de uma análise numérica, tendo por base as expressões analíticas obtidas nos capítulos anteriores. Nosso modelo supõe uma lâmina de plasma, com parâmetros levemente inhomogêneos na direção perpendicular às faces. Para a análise numérica, escolhemos perfis para os parâmetros do plasma; evidentemente, estes perfis têm uma grande dose de arbitrariedade, mas podem ser pensados como representativos da seção central de um plasma confinado por espelhos magnéticos.

$$\begin{aligned}n_e(x) &= n_e(0)(1 - x^2/a^2) \\T_{\perp, \parallel}(x) &= T_{\perp, \parallel}(0)(1 - x^2/a^2)^2 \\B_0(x) &= B_0(a) [1 + \delta \cos(\pi x/2a)],\end{aligned}\tag{IV.1}$$

onde $n_e(0) = 7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, $T_{\perp}(0) = 10 \text{ keV}$, $0 \leq T_{\parallel}(0) \leq 10 \text{ keV}$, $B_0(a) = 15 \text{ kG}$ e $a = 10 \text{ cm}$; o parâmetro δ é pequeno e dá margem a uma pequena inhomogeneidade do campo magnético.

Antes de prosseguirmos, cabe um comentário. Bornatici, Engelmann e Lister [BEL79] mostraram que no cálculo de processos de absorção e emissão de cíclotron no modo extraordinário poderiam aparecer efeitos relevantes devidos a termos de ordem mais

alta na expansão dos elementos do tensor dielétrico em potências do raio de Larmor. O parâmetro relevante para a inclusão ou não destes termos seria ω_p^2/Ω_c^2 (para um plasma térmico, o efeito seria significativo para $(\omega_p/\Omega_c)^2 \approx 1$). Em nossa escolha de parâmetros, este quociente não excede o valor 0,32, o que está abaixo do limite crítico fixado em [BEL79].

É bem verdade que o limite fixado em [BEL79] é válido para um plasma Maxwelliano e que este não é em geral o nosso caso, neste trabalho. Entretanto, como se trata de avaliar correções de vidas a termos usualmente desprezados, não esperamos que para distribuições não-Maxwellianas este aspecto seja substancialmente alterado.

Além disto, usando (III.3) obtemos $\rho_{\text{máx}}^2 \approx 0,07 [\Gamma(\ell+3/2)/\ell!]^2$, onde tomamos $N^2 \approx 1,3$, um valor similar ao obtido na aproximação de plasma frio e que pode ser verificado posteriormente, em busca de consistência. Como usamos no máximo $\ell = 3$, ficamos com $\rho_{\text{máx}}^2 \approx 0,25$, o que serve para justificar a expansão em potências de ρ^2 feita na obtenção do tensor dielétrico e do tensor correlação de correntes.

A função de distribuição de velocidades que usamos é do tipo "cone de perda generalizado", com anisotropia de temperaturas, conforme apresentada na Eq. (II.21). Os elementos do tensor dielétrico e do tensor correlação de correntes são obtidos diretamente a partir das expressões derivadas no Capítulo III. Evidentemente, a função distribuição que escolhemos nos permite uma liberdade adicional, além da escolha dos parâmetros dados por (IV.1); esta é a escolha do inteiro ℓ , que caracteriza o aspecto de "cone de perda" da distribuição.

IV.1 - Campo Magnético Homogêneo

Iniciamos considerando o caso em que o campo magnético é homogêneo ($\delta = 0$). Na Figura IV.1 mostramos a dependência de k'' (parte imaginária de k) em x , para $\ell = 1$ e $\ell = 3$. Vemos que ocorre amplificação ($k'' < 0$) em uma região considerável da lâmina de plasma. A extensão desta região de amplificação pode ser compreendida a partir de uma interpretação simples. As partículas ressonantes com a onda devem satisfazer a condição $\gamma - Y = 0$. No caso em que $T_{||} = 0$, que é mais simples, esta condição pode ser expressa como $p_{\perp r}^2 = m^2 c^2 (\gamma^2 - 1)$, onde "r" indica partículas ressonantes. Por outro lado, a função distribuição dada por (II.21) tem seu máximo em $p_{\perp m}^2 = m^2 c^2 2\ell / \mu_{\perp}$. Da igualdade de $p_{\perp r}^2$ e $p_{\perp m}^2$ e do perfil de temperatura (IV.1), mostra-se que pode existir amplificação para valores de x entre

$$\pm a \left\{ 1 - \left[\frac{m c^2}{T_{\perp}(0)} \frac{\gamma^2 - 1}{2\ell} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

correspondentes a ressonâncias em valores de p_{\perp} para os quais a $f(p_{\perp})$ apresenta derivada positiva. Assim, para $T_{\perp}(0) = 10$ keV e $\gamma = 1,01$, ocorrem valores negativos de k'' entre $x = \pm 5,3$ cm, para $\ell = 1$, e $x = \pm 7,6$ cm para $\ell = 3$, como visto na Figura 1. Quando $T_{||} \neq 0$, há um intervalo de valores para $p_{\perp r}^2$, ou seja, $0 \leq p_{\perp r}^2 \leq m^2 c^2 (\gamma^2 - 1)$; conseqüentemente, o processo de amplificação pode iniciar em $x = \pm a$ e assim sobrepujar a absorção em uma região maior do que no caso de $T_{||} = 0$.

Com relação ao valor de $k''(x)$, podemos fazer uma inter

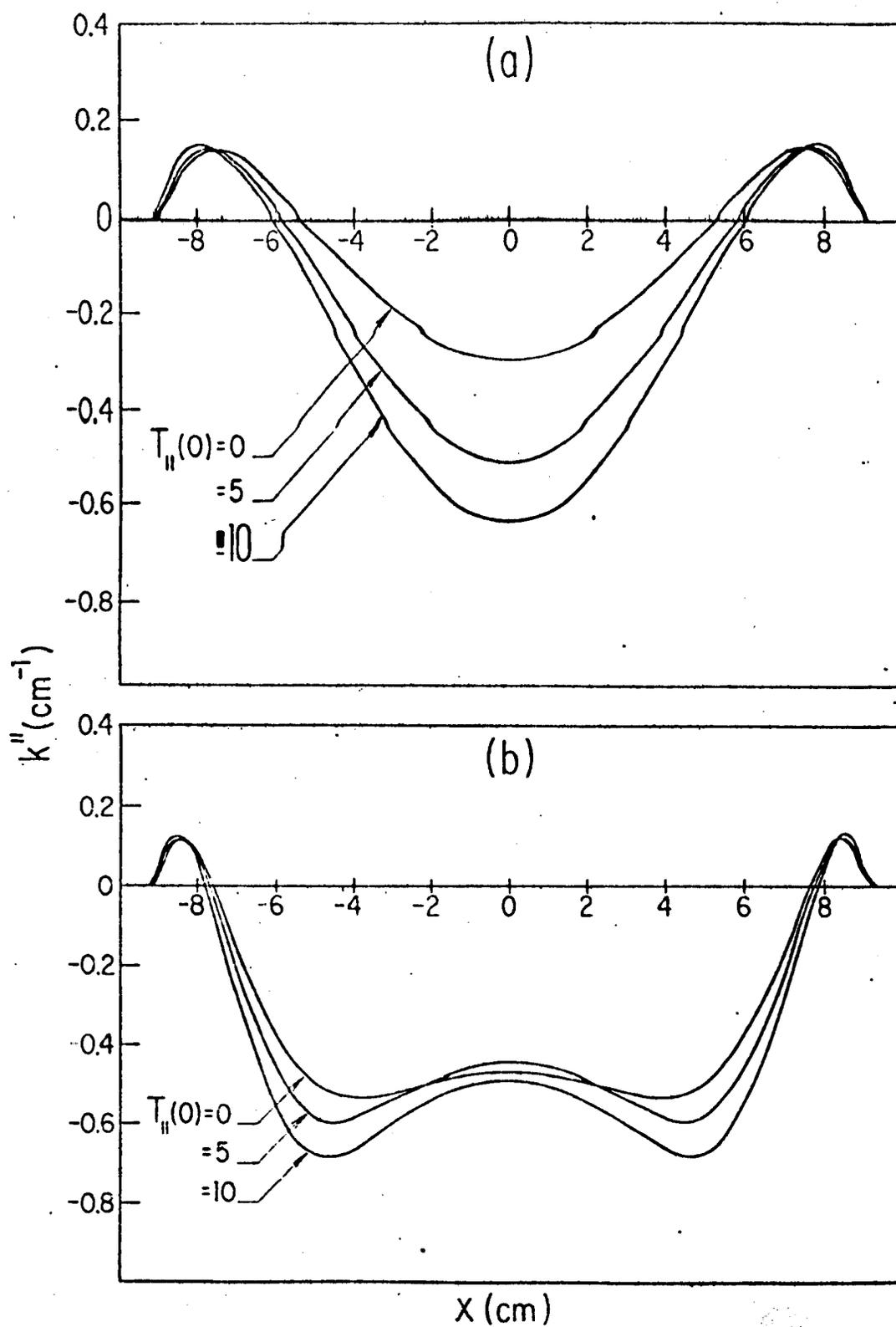


Figura IV.1 - k'' como função de x para diferentes valores de $T_{||}$ e
 (a) $\lambda = 1$, (b) $\lambda = 3$; $n_e(0) = 7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, $T_{\perp}(0) =$
 $= 10 \text{ keV}$, $B_0 = 1,5 \text{ T}$, $\delta = 0$, $\gamma = 1,01$.

pretação qualitativa dos resultados na Figura IV.1 (Ver Fig. IV.2). Tomemos $T_{||} = 0$, por simplicidade. Próximo à borda da lâmina temos $p_{\perp r}^2 \gg p_{\perp m}^2$, de modo que a inclinação da função distribuição no ponto de ressonância é pequena e negativa, resultando em pequena absorção. À medida que a onda prossegue para o interior da lâmina ela passa sucessivamente através de regiões de inclinação crescente, constante e decrescente, até chegar ao ponto de inclinação zero, onde $p_{\perp r} = p_{\perp m}$; correspondentemente, o coeficiente de absorção cresce, passa por um máximo, decresce e vai a zero. Prosseguindo para o interior, o processo de amplificação inicia e cresce. Entretanto, para valores suficientemente grandes de λ , a inclinação positiva da função distribuição pode começar a diminuir antes que a onda atinja o centro da lâmina, porque $p_{\perp r}^2$ se torna muito menor do que $p_{\perp m}^2$, causando um decréscimo na taxa de amplificação. Este último efeito pode ser claramente observado por comparação entre os casos de $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$, na Figura IV.1.

Na Figura IV.3 mostramos a emissão em $x_{\perp} = a$, dada pela Eq. (II.20), como função da temperatura paralela $T_{||}(0)$. A emissão está dividida por seu valor para $T_{||} = 0$. Para $\lambda = 0$, a emissão é praticamente independente de $T_{||}$; para $\lambda = 1, 2, 3$ a tendência geral da emissão de aumentar com $T_{||}$ pode ser entendida a partir do comportamento de $k''(x)$ na Figura IV.1. Por exemplo, no caso de $\lambda = 1$, k'' apresenta valores negativos cada vez maiores à medida que $T_{||}(0)$ cresce de 0 keV até 5 keV, mas o aumento se torna menor à medida que $T_{||}(0)$ muda de 5 keV para 10 keV; isto é claramente refletido na inclinação decrescente da curva para $\lambda = 1$ na Figura IV.3.

Na Tabela IV.1 damos a amplificação da emissão em $x_{\perp} = a$

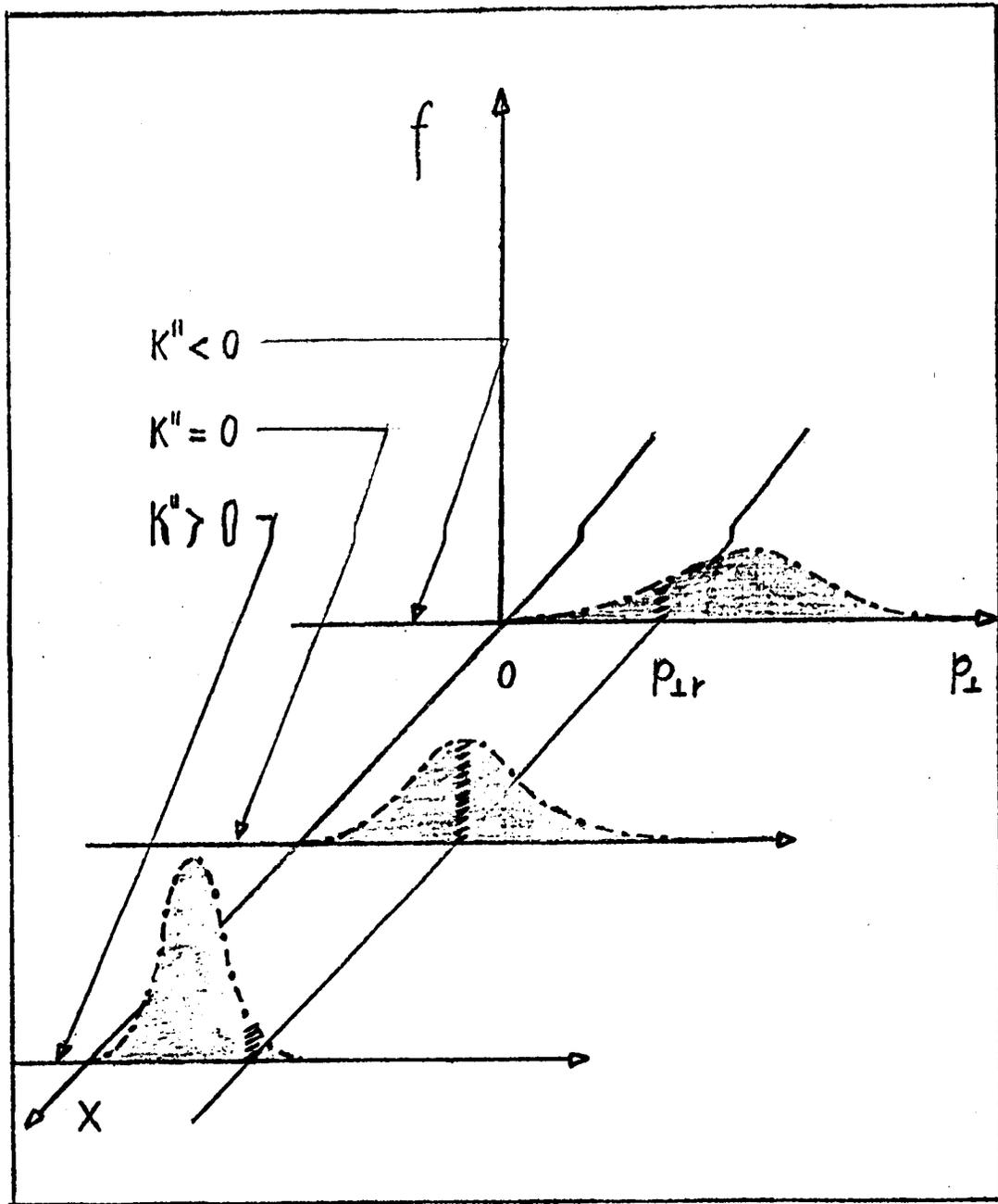


Figura IV.2 - Esquema ilustrativo da relação entre a posição do máximo da distribuição $f(p_{\perp})$ e os momentos ressonantes, para diferentes posições na lâmina de plasma. Mostra-se a ocorrência de regiões onde ocorre absorção ($k'' > 0$) e regiões onde ocorre amplificação ($k'' < 0$).

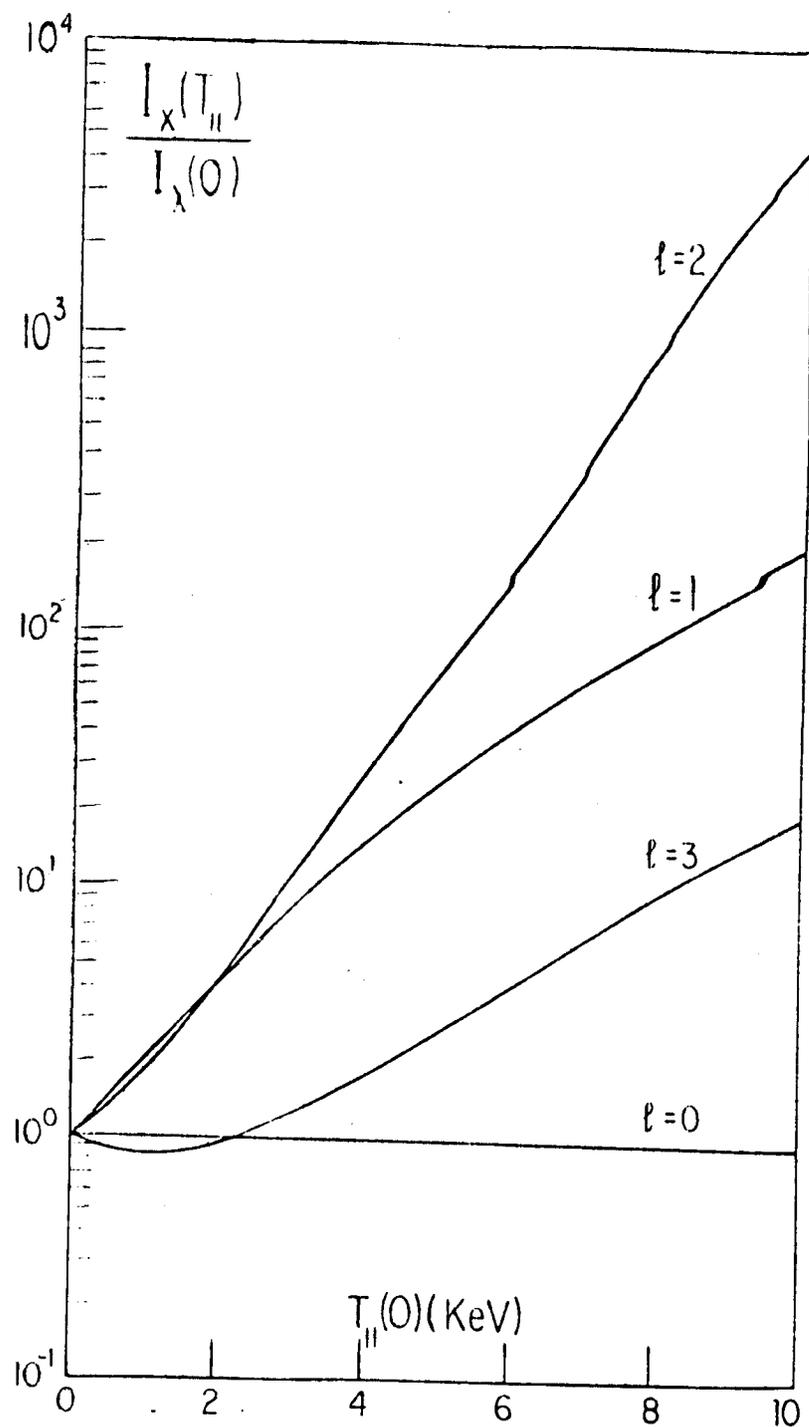


Figura IV.3 - $I_x(T_{II})/I_x(0)$ como função de T_{II} e diferentes valores de l ; outros parâmetros como na Figura IV.1.

TABELA IV.1 - A_{ℓ} para $Y = 1,01$ em $x_1 = a$ para diversos valores de ℓ e $T_{II}(0)$, com $\delta = 0$.

$\ell \backslash T_{II}(0)$ (keV)	1	2	3
0	20,9	56,0	56,3
2,5	28,7	64,3	56,7
5	35,2	74,5	60,6
7,5	40,3	84,1	65,1
10	44,4	93,0	69,4

para diferentes valores de ν e $I_{\parallel}(0)$, definida como $A_{\nu} = 10 \log [I_{x,\nu}/I_{x,0}]$ onde $I_{x,\nu}$ refere-se à Eq. (II.20) para um dado valor de ν . Observa-se uma grande amplificação, fortemente dependente de ν . Este resultado pode ser explicado a partir da Figura IV.4, a qual mostra a dependência de $k''(x)$ em ν , para $T_{\parallel}(0) = T_{\perp}(0) = 10$ keV. Para $\nu = 2$, os valores negativos de k'' na região central são maiores do que os valores obtidos no caso de $\nu = 1$, mas a curva mostra uma certa tendência para "achatar-se" na região do centro da lâmina. Para $\nu = 3$, já há um decréscimo relativo dos valores de k'' em um grande intervalo de valores de x .

IV.2 - Campo Magnético Inomogêneo

Nesta seção admitimos a possibilidade de uma pequena inhomogeneidade do campo magnético ($\delta \neq 0$). Escolhemos valores de δ tais que o campo magnético no centro da lâmina mostra um acréscimo de no máximo 2% em relação ao seu valor na borda, ou mostra um decréscimo de até 0,5% em relação a este mesmo valor. Na Tabela IV.2 damos a amplificação da emissão em $x_1 = a$ para valores diferentes de ν e δ , definida como $A_{\delta} = 10 \log [I_{x,\nu}(\delta \neq 0)/I_{x,\nu}(\delta = 0)]$. Nota-se que no caso de $\nu = 1$ mesmo pequenos acréscimos no campo magnético causam uma grande redução da emissão, enquanto a emissão fica muito maior no caso de $\delta = -0,005$ do que no caso homogêneo. Isto significa que para $\delta = 0$ a frequência que teria a máxima amplificação é algo mais próximo de ω_c do que a que foi escolhida. Similarmente, os resultados para $\nu = 3$ mostram que a frequência de máxima amplificação é mais distante de ω_c . Na Figura IV.5 mostra-

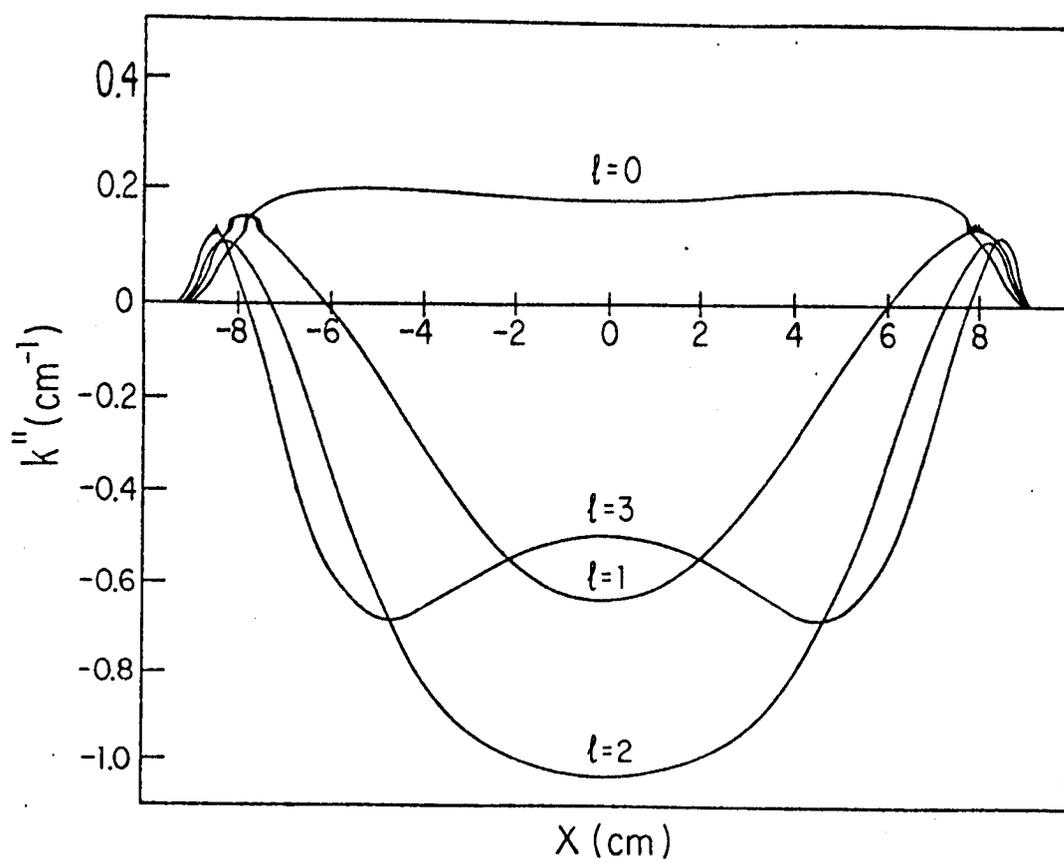


Figura IV.4 - k'' como função de x para diferentes valores de l e $T_{||}(0) = T_{\perp}(0) = 10$ keV; outros parâmetros como na Figura IV.1.

TABELA IV.2 - A_{δ} para $Y(a) = 1,01$ em $x_1 = a$, para diversos valores de ℓ e δ , com $T_{II}(0) = 5$ keV.

$\delta \backslash \ell$	- ,005	0	,005	,010	,020
1	40,9	0	-17,6	-26,2	-31,8
3	-21,1	0	5,6	1,8	-14,5

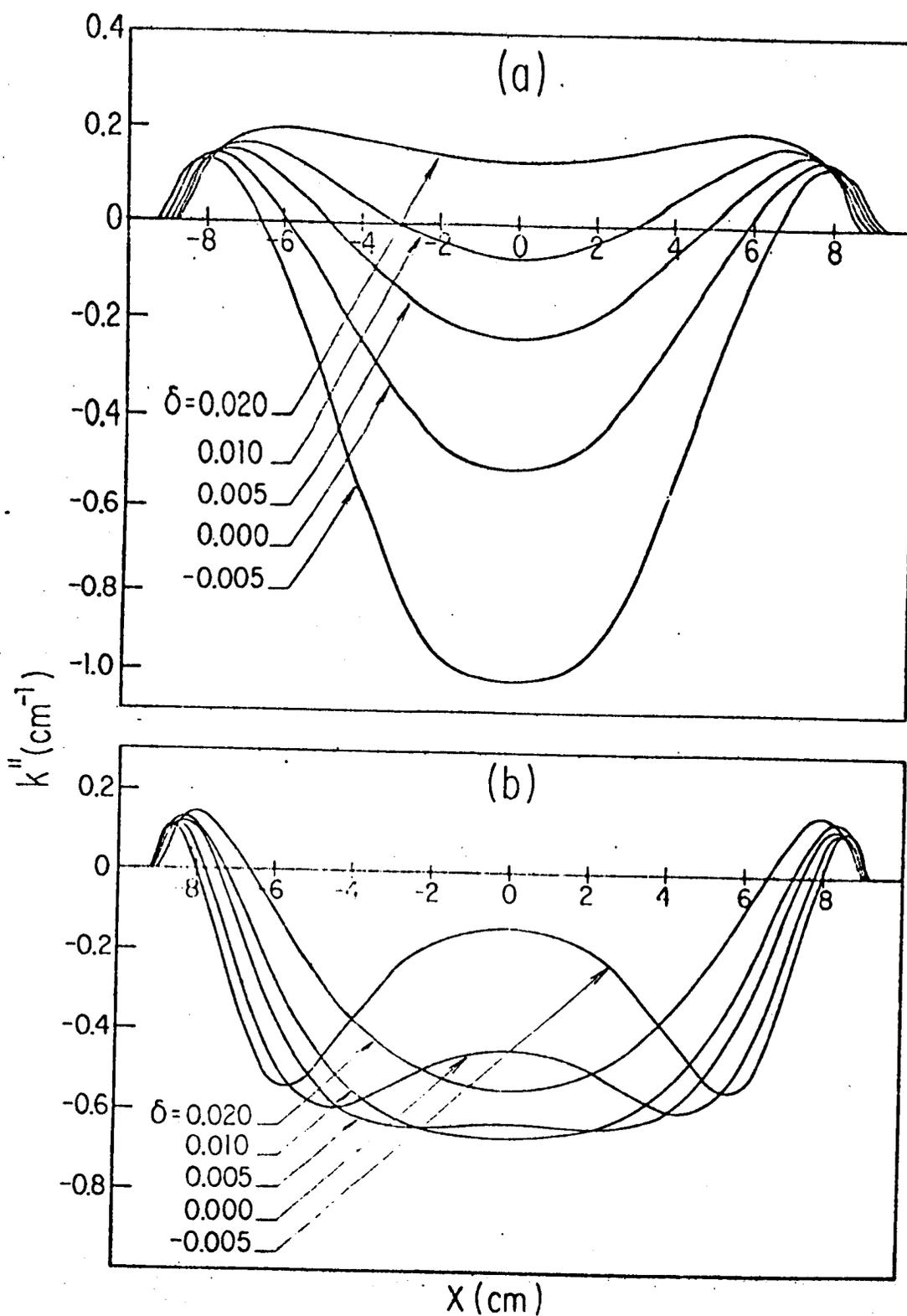


Figura IV.5 - k'' como função de x para diferentes valores de δ e (a) $l = 1$, (b) $l = 3$; $n_e(0) = 7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, $T_{\perp}(0) = 10 \text{ keV}$, $T_{\parallel}(0) = 5 \text{ keV}$, B_0 (a) = 1,5 T, Y (a) = 1,01.

mos $k''(x)$ para diferentes valores de ℓ e δ . Comparando as Figuras IV.5a e IV.1a notamos que mesmo para δ tão pequeno quanto 0,5% a região espacial de amplificação se torna menor, enquanto k'' em $x = 0$ é reduzido à metade de seu valor. Para $\delta = -0,5\%$, observa-se justamente o contrário. Uma análise similar pode ser feita para as Figuras IV.5b e IV.1b.

A chave para compreender porque a inomogeneidade pode decrescer ou aumentar a amplificação recai na maneira em que ela afeta a inclinação da função de distribuição, na ressonância. Tomemos o caso de $\delta > 0$; para $\delta < 0$, aplicam-se considerações análogas. Quando δ é positivo, os momentos ressonantes $p_{\perp r}$ são em toda a lâmina maiores do que no caso de $\delta = 0$ e seu valor aumenta no sentido do centro da lâmina, pois Y aumenta. Devido ao perfil de temperatura, a localização do pico da função distribuição, $p_{\perp m}$, também aumenta no sentido do centro. Quando uma onda se move, por exemplo, de $x = -a$ para $x = 0$, pode ocorrer uma das seguintes situações:

Suponhamos que no caso de $\delta = 0$ a inclinação positiva da distribuição, na ressonância, fosse crescente até o centro da lâmina, como acontece para $\ell = 1$ com nossa escolha de parâmetros (ver Figura IV.1a). Neste caso os valores maiores de $p_{\perp r}$ que ocorrem para $\delta > 0$ corresponderão a valores menores da derivada da função distribuição, em cada posição de região de amplificação. Conseqüentemente, resultam valores negativos menores de k'' e da amplificação, conforme se vê na Figura IV.5a e Tabela IV.2.

Alternativamente, suponhamos que no caso $\delta = 0$ a inclinação da função distribuição na ressonância fosse crescente até um certo ponto da lâmina, decrescendo daí em diante no sentido do

centro. Isto acontece, para nossa escolha de parâmetros, para $\ell = 3$, como se vê na Figura IV.1b. Nesse caso os valores maiores de $p_{\perp r}$ ocorrendo para $\delta > 0$ cairão em regiões de maior inclinação da função distribuição, resultando em valores negativos de k'' aumentados, assim como em maior amplificação (ver Figura IV.5b e Tabela IV.2).

Na Figura IV.6 mostramos $\eta(x) = 1 - \exp[-2 \int_{-a}^x k''(x') dx']$, para $\ell = 1$ e diversos valores de δ ; $\eta(x)$ representa a fração removida ($\eta > 0$) ou acrescentada ($\eta < 0$) à radiação ao longo do caminho de $-a$ até x supondo uma radiação incidente em $x = -a$. Novamente vemos uma grande amplificação na frequência que escolhemos, se o campo é homogêneo ou levemente reduzido na região central. Entretanto, para $\delta = 1\%$, em torno de 80% da radiação incidente é absorvida. Para $\delta = 2\%$, quase toda a radiação é absorvida antes de chegar ao centro da lâmina.

Através da informação ganha pelo uso da Tabela IV.2 e das Figuras IV.5 e IV.6, podemos concluir que há uma banda estreita de frequências para as quais ocorre amplificação. Da Tabela IV.2 vemos que a frequência de máxima amplificação se afasta de ω_c com o aumento de ℓ ; uma vez que a amplificação para $\ell = 3$ não é tão sensível a pequenas mudanças na frequência como é para $\ell = 1$, segue-se que a largura da banda amplificada aumenta com ℓ .

IV.3 - Dependência em Frequência; Efeito de T_{\perp} e Densidade

As últimas considerações da seção anterior podem ser ve

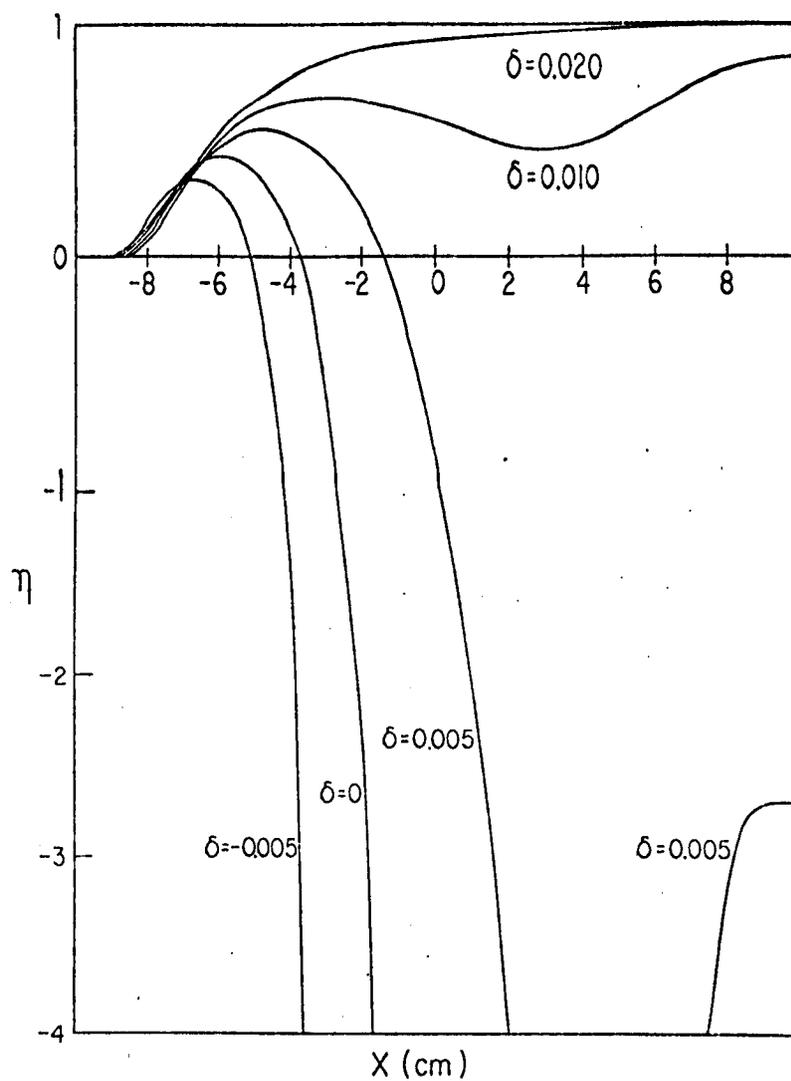


Figura IV.6 - $\eta(x)$ como função de x , para $\lambda = 1$ e diferentes valores de δ ; outros parâmetros como na Figura IV.5.

rificadas diretamente através de um cálculo da dependência em frequência de k'' e I_x . Para este propósito, supomos novamente um campo homogêneo. Na Figura IV.7 mostramos k'' como função da frequência, para $\ell = 2$ e $\ell = 3$ e duas posições na lâmina de plasma. Sabemos que na posição $x = 0$ cm T_{\perp} é maior do que na posição $x = -0,5$ cm. Pela comparação de $p_{\perp r}^2$ e $p_{\perp m}^2$, podemos esperar que este aumento de T_{\perp} tenha o efeito de afastar de Ω_c as frequências ressonantes. Isto é claramente observado no gráfico da Figura IV.7. Na Fig. IV.8, mostramos a dependência em frequência de I_x , para os casos $\ell = 2$ e $\ell = 3$. O espectro de emissão se alarga e seu pico se afasta de Ω_c quando ℓ aumenta, como antecipado na análise do caso de campo inhomogêneo. Não mostramos o espectro de emissão para $\ell = 1$ porque o mesmo não pode ser calculado, no presente caso; no intervalo de frequências de máxima amplificação são violadas as condições $\frac{c}{\omega} \left| \frac{1}{N_j} \frac{dN_j}{dx} \right| \ll 1$ e $|k''| \ll |k'|$, ambas essenciais para a validade da Eq. (II.20).

Para podermos visualizar melhor o que foi afirmado acima a respeito do efeito da temperatura, a Figura IV.9 mostra k'' como função de ω , em $x = 0$ cm. Nesta figura abandonamos a convenção a respeito dos valores de temperatura adotada em (IV.1) e mostramos três curvas, para $T_{\perp}(0) = T_{\parallel}(0) = 5, 10$ e 15 keV.

O uso de $T_{\perp}(0) = 15$ keV nos fornece $\rho_{\max}^2 \approx 0,37$; evidentemente, para temperaturas mais elevadas começa a se tornar menos válida a manutenção apenas do primeiro termo relevante em potências de ρ^2 que fizemos no Capítulo III. Entretanto, o valor de ρ_{\max}^2 obtido para $T_{\perp}(0) = 15$ keV ainda pode ser considerado suficientemente pequeno para validar a aproximação, especialmente quando consideramos que os próximos termos devem representar corre-

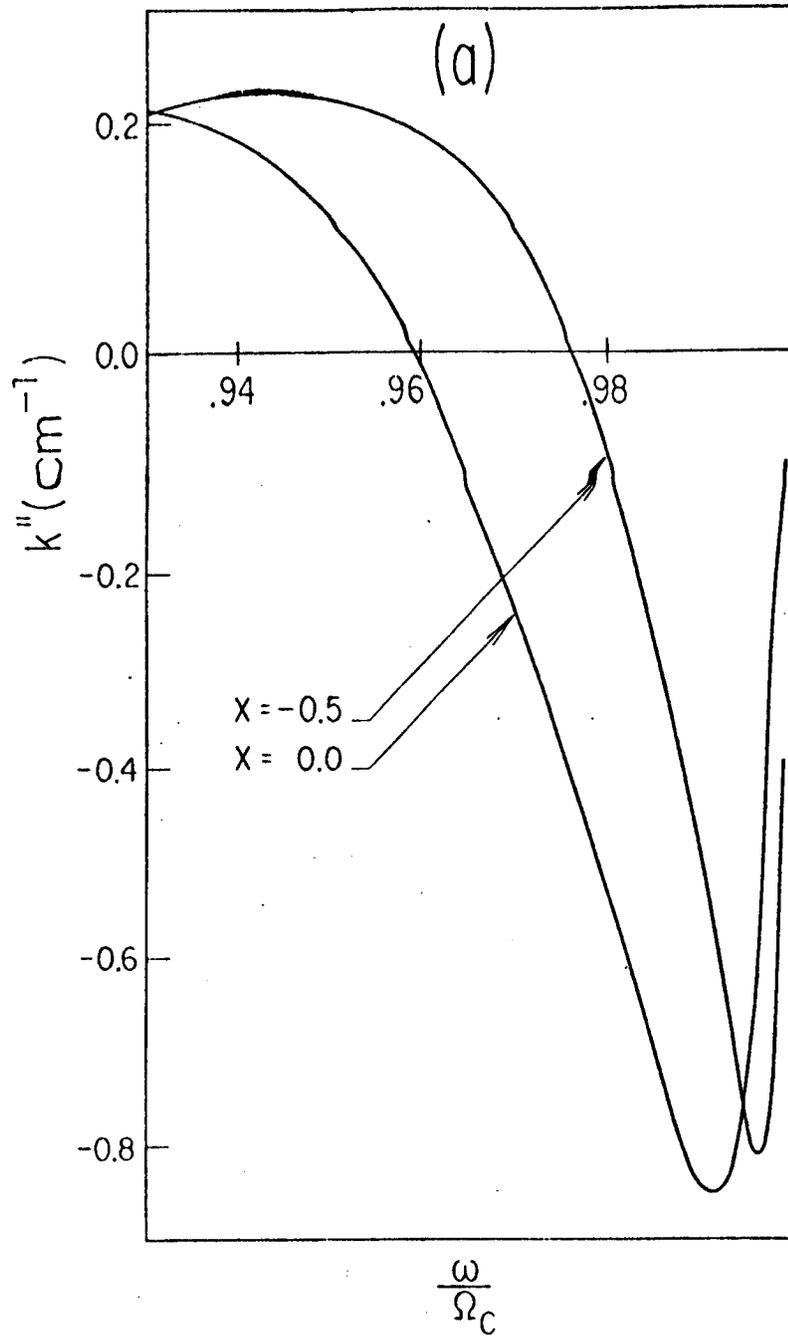


Figura IV.7 (a) - k'' como função de ω para diferentes valores de x e $\ell = 2$; $n_e(0) = 7 \times 10^{12} \text{cm}^{-3}$, $T_{\perp}(0) = 10 \text{ keV}$, $T_{\parallel}(0) = 5 \text{ keV}$, $B_0 = 1,5 \text{ T}$, $\delta = 0$.

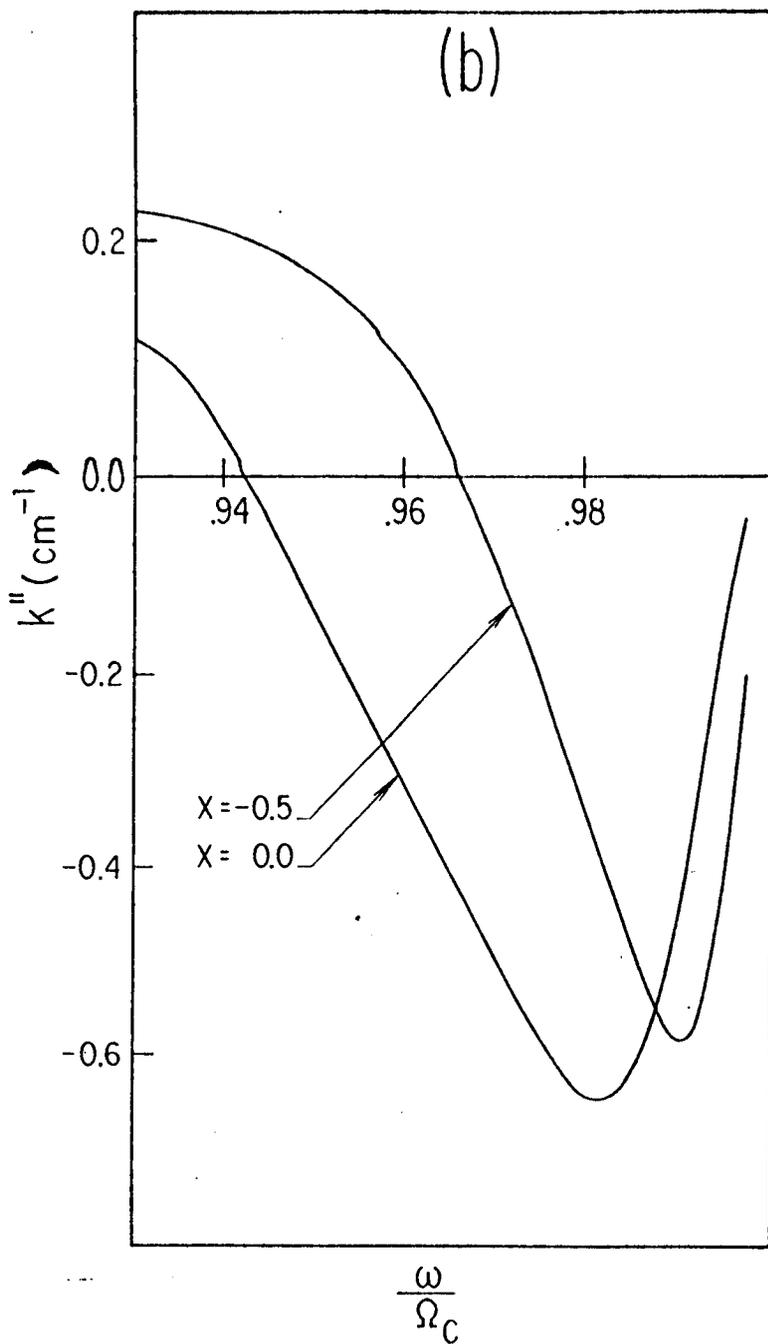


Figura IV.7 (b) - k'' como função de ω para diferentes valores de x e $\lambda = 3$; $n_e(0) = 7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, $T_{\perp}(0) = 10 \text{ keV}$, $T_{\parallel}(0) = 5 \text{ keV}$, $B_0 = 1,5 \text{ T}$, $\delta = 0$.

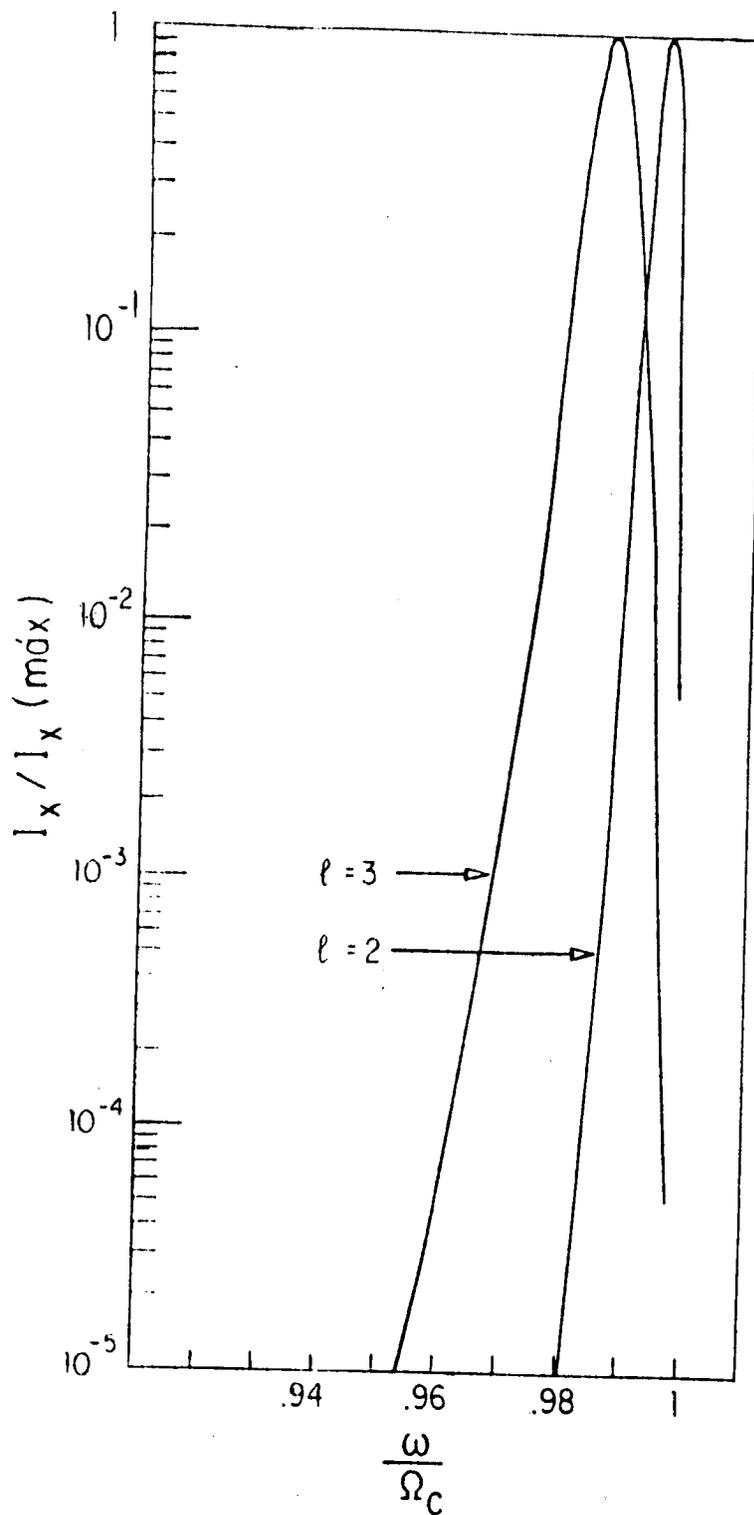


Figura IV.8 - $I_x(\omega)$ normalizado a seu valor máximo, como função de ω , para $l = 2$ e $l = 3$; outros parâmetros como na Figura IV.7.

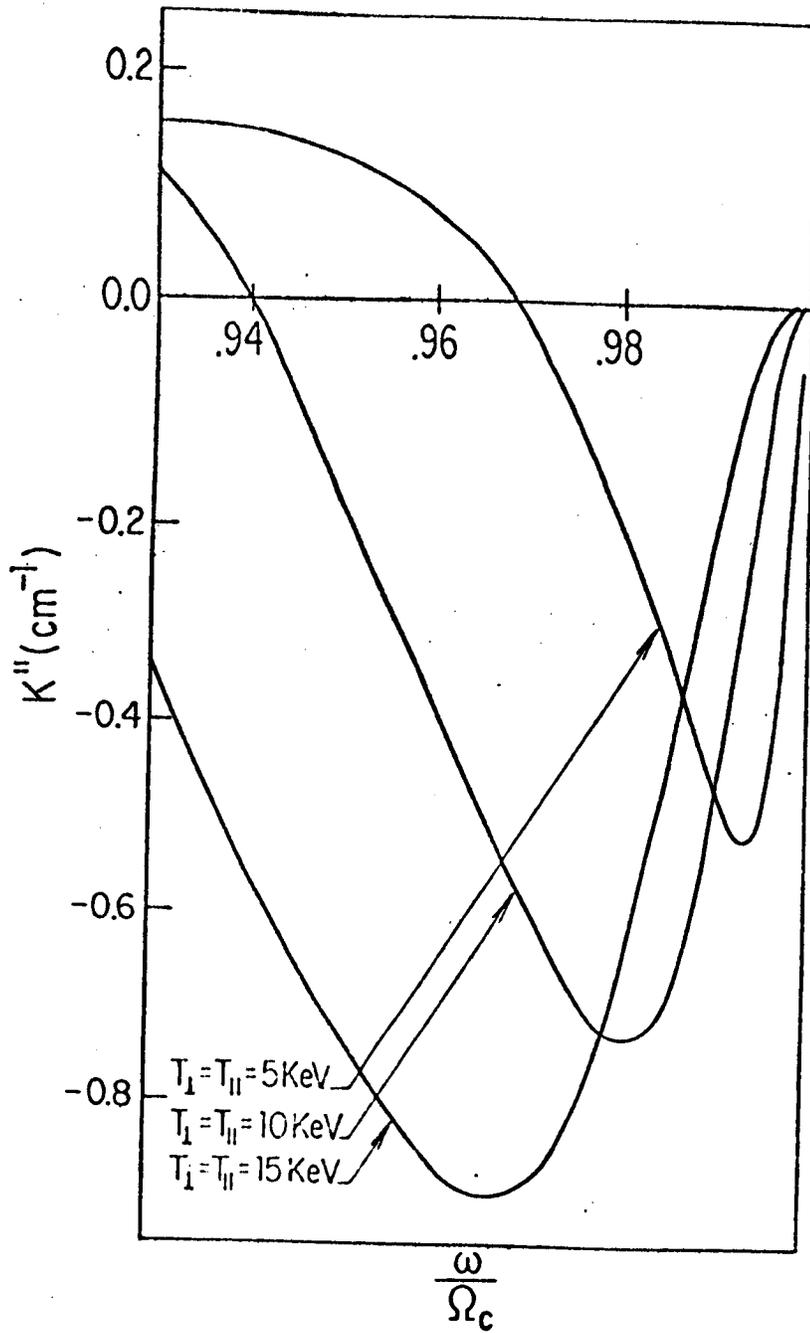


Figura IV.9 - k'' como função de ω , para diferentes valores de T , em $x = 0$; $\ell = 3$, $n_e(0) = 7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, $B_0(a) = 1,5 \text{ T}$, $\delta = 0$.

ções ao resultado, sem que se espere alguma mudança muito significativa. Além disso, o cálculo feito com $T_{\perp}(0) = 15 \text{ keV}$ foi apenas para dar uma idéia da dependência em temperatura, não tendo este valor de temperatura sido usado no restante do trabalho. Feito este comentário, voltemos à Figura IV.9. Vê-se claramente o alargamento da banda de frequências que sofre a amplificação e observa-se que a frequência de máxima amplificação se afasta de ω_c , com o aumento da temperatura perpendicular.

Uma outra dependência que pode ser analisada é a dependência em densidade. Evidentemente, esta já apareceu quando se estudou k'' como função de x , uma vez que a densidade cresce no sentido do centro da lâmina. Entretanto, ocorre também uma mudança na temperatura, com conseqüente alteração da posição do máximo da função distribuição. Já vimos os efeitos que isto pode acarretar. Para estudar isoladamente o efeito da densidade, mostramos na Figura IV.10 k'' como função de ω , em $x = 0 \text{ cm}$, para $\ell = 3$. Usamos 3 valores da densidade; o maior deles resulta em $\omega_p^2/\omega_c^2 \cong 0,46$, o que se aproxima do limite fixado em [BEL79], mas ainda não invalida nossas aproximações. Vê-se que para os parâmetros considerados, o coeficiente de amplificação do modo extraordinário diminui com o aumento da densidade, ao contrário do que se esperaria numa aproximação de partículas independentes. O mesmo tipo de efeito já foi reportado na absorção de ondas eletrociclôtrônicas em plasmas maxwellianos densos [FGRM78].

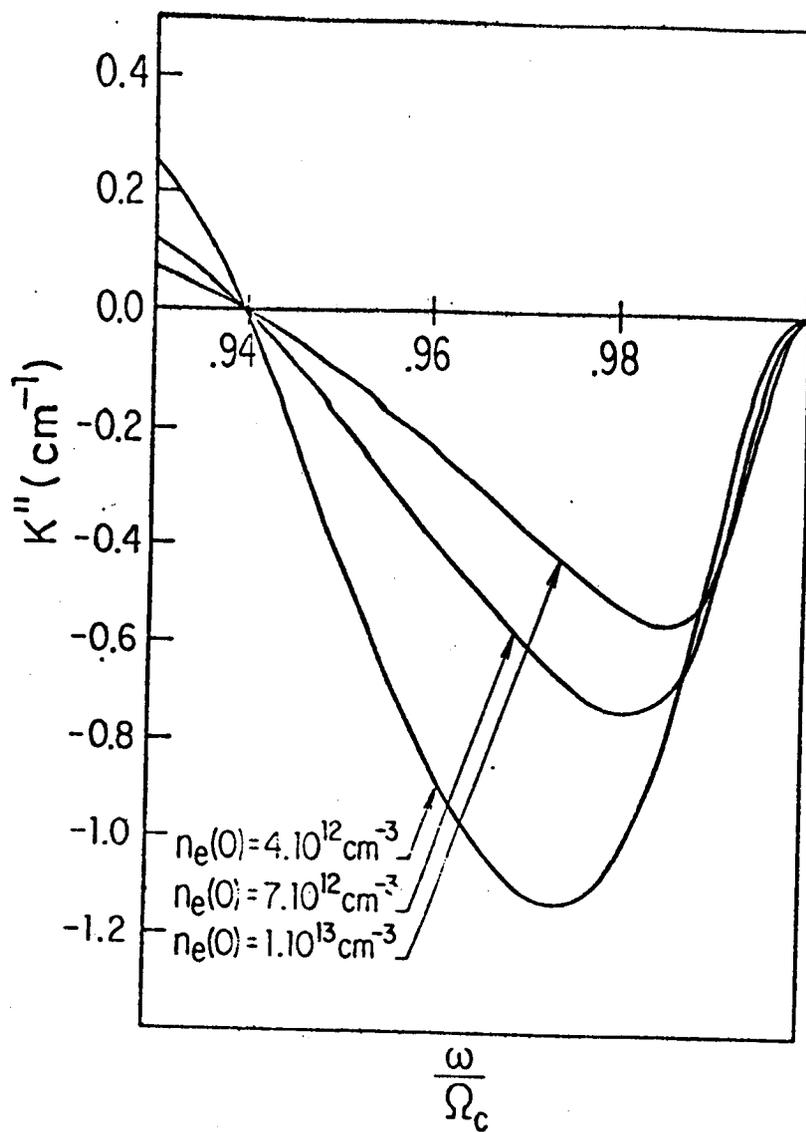


Figura IV.10 - k'' como função de ω , para diferentes valores de $n_e(0)$, em $x = 0$; $\ell = 3$, $T_{\perp}(0) = T_{\parallel}(0) = 10$ keV, $B_0(a) = 1,5$ T, $\delta = 0$.

V. ANÁLISE NUMÉRICA II

O aspecto fundamental da função de distribuição de velocidades das partículas que compõem o plasma em nosso modelo é a existência de uma inversão de população, que possibilita a cessão de energia das partículas para a amplificação de ondas eletromagnéticas. Elegemos para o modelo a função distribuição dada por (II.21), a qual apresenta além do aspecto de "cone de perda" uma anisotropia de temperaturas. No capítulo anterior, enfatizamos nossa análise no efeito da anisotropia de temperaturas e no efeito de inhomogeneidades do campo magnético. Aliada a esta ênfase, mostramos a dependência da amplificação em frequência, densidade e temperatura. O parâmetro λ da Eq. (II.21) permite uma certa mudança na forma da função distribuição, que também foi explorada até certo ponto. Entretanto, em situações mais realísticas podem ser visualizadas distribuições de tipos um tanto diferentes, dos quais consideramos duas, neste capítulo [ZD82b].

O primeiro tipo apresenta um cone de perda parcialmente preenchido. Tal distribuição poderia ser esperada como consequência de colisões e/ou instabilidades geradas por turbulência. O segundo tipo é uma superposição de uma componente Maxwelliana de baixa temperatura e uma componente tipo "cone de perda", de alta energia. Esta poderia descrever certos estados de equilíbrio não-termodinâmico de plasmas magneticamente confinados [LLT71], [KNY+78].

Estas funções distribuição têm em comum a forma

$$f = \rho_0 f_0 + (1 - \rho_0) f_1 \quad (V.1)$$

onde ρ_0 ($0 \leq \rho_0 \leq 1$) representa a fração de elétrons Maxwellianos ($l = 0$). O símbolo f_l refere-se à função distribuição dada pela Eq. (II.21). O primeiro tipo, f^I , é caracterizado por

$$f^I: \quad \mu_{10} = \mu_{1l} = \mu_{10} = \mu_{1l} ; \quad (V.2)$$

o outro, f^{II} , por

$$f^{II}: \quad \mu_{10} \gg \mu_{1l}, \quad \mu_{10} \gg \mu_{1l}, \quad \mu_{10} = \mu_{10}, \quad \mu_{1l} = \mu_{1l}. \quad (V.3)$$

As partes hermitianas de $\epsilon_{\alpha\beta}$ são dadas por

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= \rho_0 \epsilon'_{xx,0} + (1-\rho_0) \epsilon'_{xx,l} \\ \epsilon'_{xy} &= \rho_0 \epsilon'_{xy,0} + (1-\rho_0) \epsilon'_{xy,l} \\ \epsilon'_{zz} &= \rho_0 \epsilon'_{zz,0} + (1-\rho_0) \epsilon'_{zz,l} + N^2 [\rho_0 \chi'_{zz,0} + (1-\rho_0) \chi'_{zz,l}] \\ \epsilon'_{xy} &= -\epsilon'_{yx} \quad \epsilon'_{yy} \cong \epsilon'_{xx} \\ \epsilon'_{xz} &= \epsilon'_{zx} = 0 \quad \epsilon'_{yz} = \epsilon'_{zy} = 0 ; \end{aligned} \quad (V.4)$$

As partes anti-hermitianas são dadas por

$$\epsilon_{xx}'' = \beta_0 \epsilon_{xx,0}'' + (1-\beta_0) \epsilon_{xx,\ell}''$$

$$\epsilon_{zz}'' = N^2 \left[\beta_0 \chi_{zz,0}'' + (1-\beta_0) \chi_{zz,\ell}'' \right]$$

$$\epsilon_{yy}'' \cong \epsilon_{xx}'' \quad \epsilon_{xy}'' = -\epsilon_{yx}'' = -i \epsilon_{xx}'' \quad (V.5)$$

$$\epsilon_{xz}'' = \epsilon_{zx}'' = 0 \quad \epsilon_{yz}'' = -\epsilon_{zy}'' = i \epsilon_{xz}'' = 0.$$

Nas expressões $\epsilon'_{\alpha\beta,0}$, $\epsilon'_{\alpha\beta,\ell}$, $\epsilon''_{\alpha\beta,0}$ e $\epsilon''_{\alpha\beta,\ell}$, os subíndices 0 e ℓ indicam que elas são calculadas com a função distribuição dada por (II.21), com $\ell = 0$ e com $\ell \neq 0$, respectivamente. As expressões explícitas (para qualquer ℓ), podem ser diretamente obtidas do Capítulo III pela substituição de $\mu_{\perp\ell}$ e $\mu_{\parallel\ell}$ em lugar de μ_{\perp} e μ_{\parallel} .

Os elementos do tensor correlação de correntes são dados por

$$G_{xx} = \beta_0 G_{xx,0} + (1-\beta_0) G_{xx,\ell}$$

$$G_{zz} = \beta_0 G_{zz,0} + (1-\beta_0) G_{zz,\ell}$$

$$G_{yy} \cong G_{xx} \quad G_{xy} = -G_{yx} = -i G_{xx}$$

$$G_{xz} = G_{zx} = 0 \quad G_{yz} = -G_{zy} = i G_{xz} = 0.$$

(V.6)

Os subíndices 0 e ℓ em $G_{\alpha\beta}$ têm o mesmo significado que em $\epsilon_{\alpha\beta}$ e as expressões explícitas são similarmente obtidas a partir daquelas dadas no Capítulo III.

Para os parâmetros do plasma, escolhemos os seguintes perfis, no intervalo $-a < x < a$:

$$n_e(x) = n_e(0) (1 - x^2/a^2)$$

$$T_{\perp,e}(x) = T_{\perp,e}(0) (1 - x^2/a^2)^2$$

$$T_{\parallel,e}(x) = T_{\parallel,e}(0) (1 - x^2/a^2)^2$$

(V.7)

$$B_0(x) = B_0(\pm a) \equiv B_0,$$

onde $n_e(0) = 7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, $B_0 = 15 \text{ kG}$ e $a = 10 \text{ cm}$. Para as temperaturas tomamos:

$$\text{Em } f^I, \quad T_{\perp,e}(0) = T_{\parallel,e}(0) = 10 \text{ keV},$$

$$T_{\perp,o}(0) = T_{\parallel,o}(0) = 10 \text{ keV};$$

$$\text{em } f^{II}, \quad T_{\perp,e}(0) = T_{\parallel,e}(0) = 10 \text{ keV},$$

$$T_{\perp,o}(0) = T_{\parallel,o}(0) = 0,1 \text{ keV}.$$

O campo magnético é suposto homogêneo, por simplicidade. Mantemos neste estudo uma frequência fixa, tomando $\gamma = 1,01$; tomamos $\lambda = 3$.

V.1 - Distribuição com Cone de Perda Semi-Preenchido (tipo f^I)

Vamos começar considerando distribuições do tipo f^I . Na Figura V.1 mostramos f^I para diferentes valores do parâmetro ρ_0 ; à medida que ρ_0 passa de 0 a 1, a f^I evolui desde uma distribuição tipo "cone de perda" com $\lambda = 3$ para uma distribuição Maxwelliana. Será bom termos em mente a forma das curvas da Figura V.1, pa

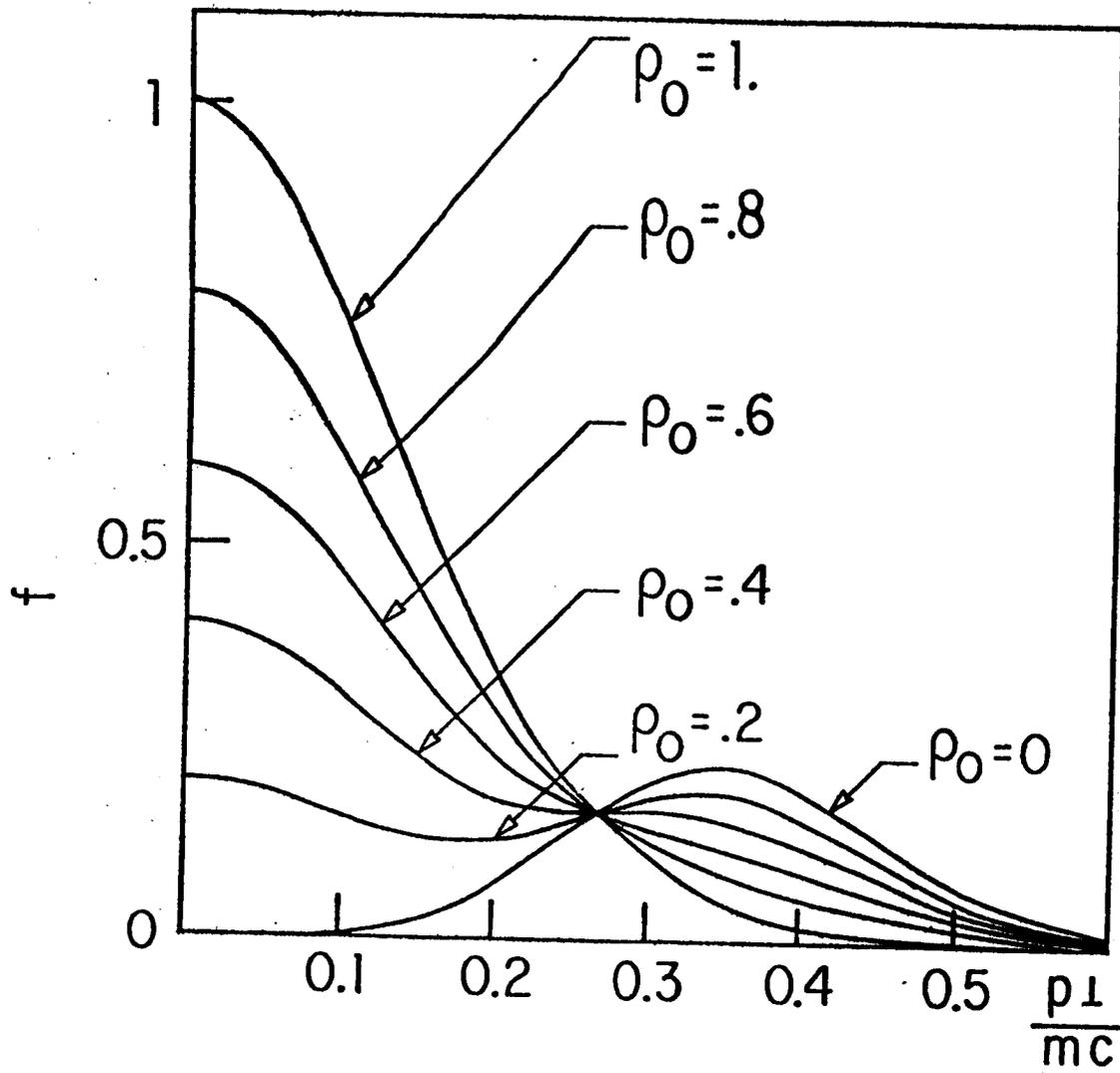


Figura V.1 - f^I como função do momentum perpendicular, para diferentes valores de ρ_0 .

ra algumas das análises que vêm a seguir. Nas Figuras V.2 e V.3 mostramos a dependência em x de k'' e k' . Observa-se da Figura V.2 que para $\rho_0 = 0$ ocorre amplificação sobre quase toda a largura da lâmina, excetuando as bordas. A presença de uma pequena fração de elétrons Maxwellianos dá origem a uma camada absorvente na região central da lâmina, como ilustrado com o caso $\rho_0 = 0,1$. Para $\rho_0 \geq 0,4$ há absorção sobre toda a lâmina, com uma tendência geral de k'' para decrescer quando ρ_0 tende a 1. A camada absorvente que surge para pequenos valores de ρ_0 se torna tão efetiva que toda a radiação amplificada em outros pontos da lâmina é completamente reabsorvida próximo da região central, como pode ser visto da curva que representa $n(x)$, na Figura V.4. Quando ρ_0 é tal que não há amplificação, toda a radiação é absorvida, sendo que o comprimento da região de deposição de energia aumenta com ρ_0 , como visto nos casos de $\rho_0 = 0,6$ e $\rho_0 = 1$, na Figura V.4.

É possível compreender qualitativamente estes resultados pela análise dos momentos ressonantes, que satisfazem a condição $\gamma - Y = 0$, junto com a derivada da função distribuição na ressonância, para cada posição na lâmina de plasma. O argumento já foi apresentado no Capítulo IV e não precisa ser repetido aqui. Um aspecto novo a ser notado no presente caso é que a derivada da f^I na ressonância pode adquirir valores negativos em duas regiões do espaço de velocidades, como pode ser visto a partir da Figura V.1.

Para ρ_0 em torno de 0,3 os cálculos mostram um aspecto inesperado que merece mais alguma análise. Na Figura V.3 vemos que k' apresenta uma variação forte, bastante localizada próxima ao ponto $x = -6$ cm na lâmina de plasma. Na Figura V.2 vemos que ocor

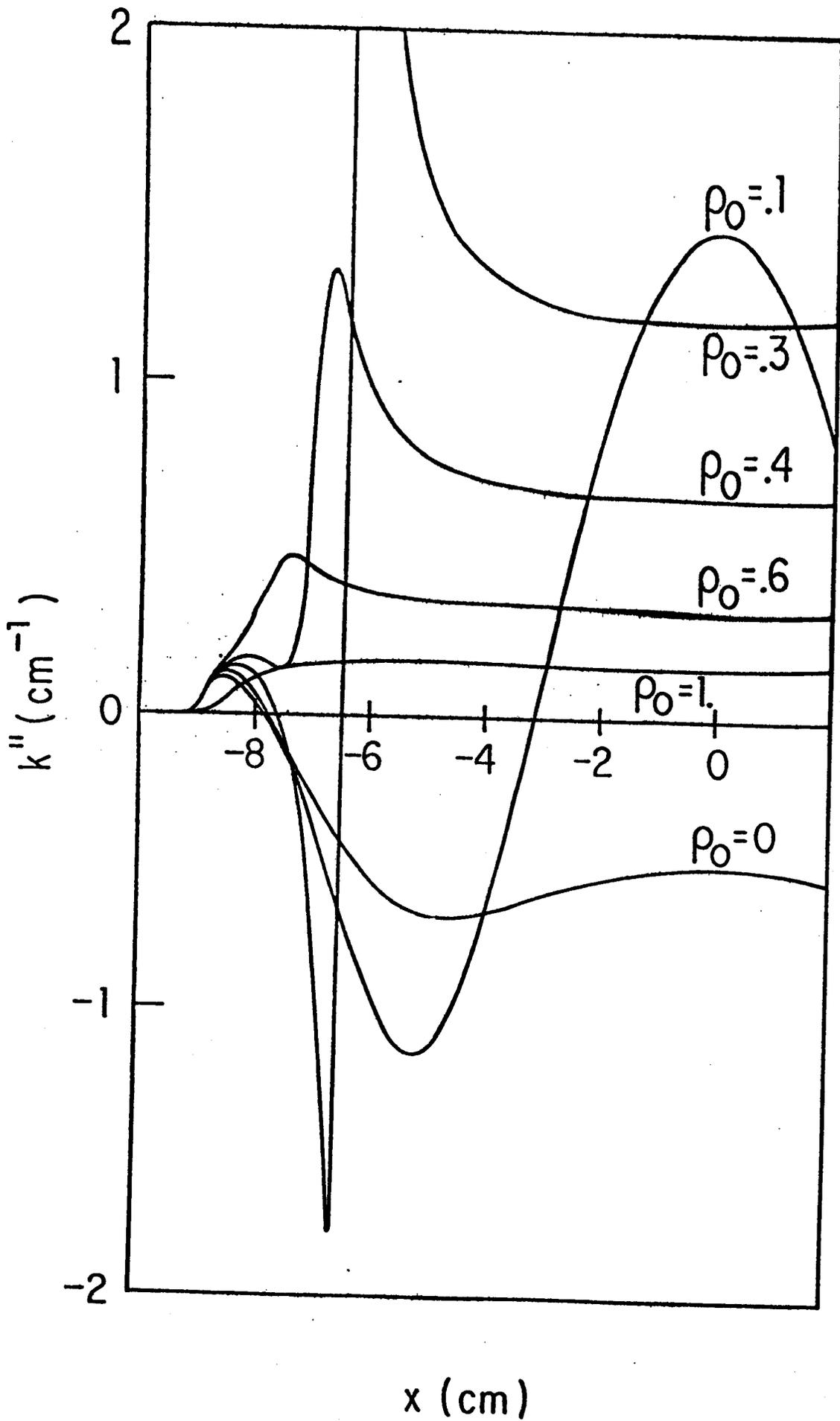


Figura V.2 - k'' como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f^I .

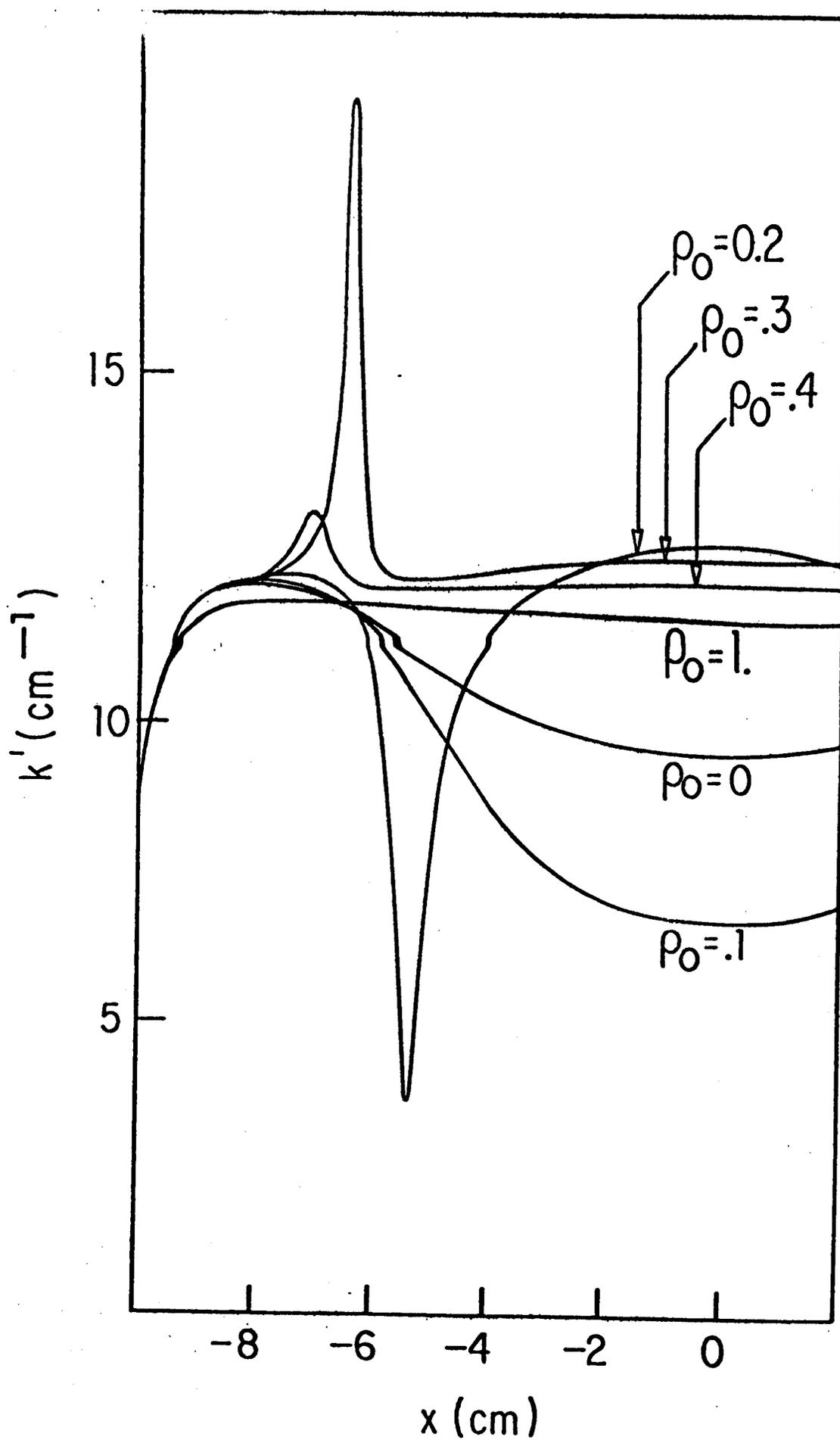


Figura V.3 - k' como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f^I .

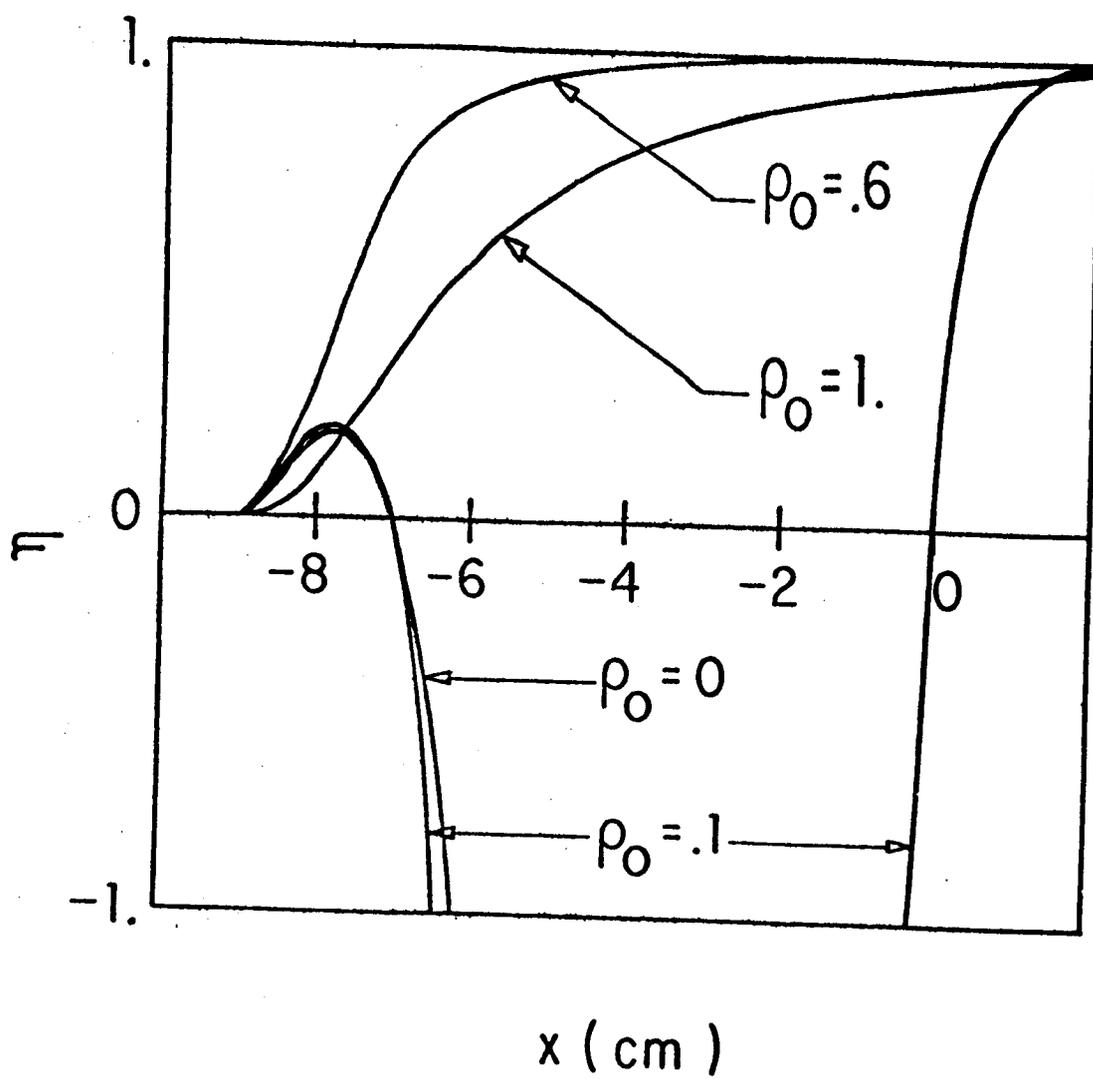


Figura V.4 - $\eta(x)$ como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f^I .

rem valores grandes de k'' , com sinais opostos, próximo ao mesmo ponto. À primeira vista, poder-se-ia esperar um desaparecimento gradual dos valores negativos de k'' , à medida que ρ_0 cresce de $\rho_0 = 0$ até $\rho_0 = 0,4$, devido ao desaparecimento da região de derivada positiva na função distribuição (ver Figura V.1); ao invés disso, há variações violentas em torno do ponto onde k'' é zero. Para ver porque isto acontece, consideremos a expressão

$$N_x'' = \left(\frac{1}{2} N_x' \right) \left(\epsilon_{xx}' - i \epsilon_{xy}' \right)^2 \epsilon_{xx}'' / |\epsilon_{xx}'|^2 ;$$

esta expressão resulta de tomarmos a parte imaginária da expressão para N_x^2 , em (II.12). Olhemos também para a dependência espacial de ϵ_{xx}' e ϵ_{xx}'' , mostrada nas Figuras V.5 e V.6. Mesmo para uma distribuição Maxwelliana ($\rho_0 = 1$) ϵ_{xx}' pode mudar de sinal dentro da lâmina, como consequência do efeito de giroressonância relativística. Também ϵ_{xx}'' pode mudar de sinal, correspondendo ao fato de que há ressonâncias nas regiões de derivada positiva e negativa da função distribuição. Como consequência, tanto ϵ_{xx}' quanto ϵ_{xx}'' podem tornar-se simultaneamente zero no mesmo ponto da lâmina de plasma. Em nosso caso, isto acontece próximo ao ponto $x = -6,2$ cm, quando $\rho_0 = 0,27$. A razão $\epsilon_{xx}'' / |\epsilon_{xx}'|^2$ pode neste caso tornar-se muito grande, com sinal positivo ou negativo, o que explica a variação rápida de k'' . Este comportamento poderia também ocorrer no caso de um meio homogêneo, para a escolha apropriada de parâmetros. Chamamos a atenção para o fato de que próximo à região onde acontece o fenômeno, o comportamento de k'' e de k' é tal que coloca em perigo a validade da solução WKB e a expressão para a intensidade da emissão (ver Capítulo II). Particularmente, a condição

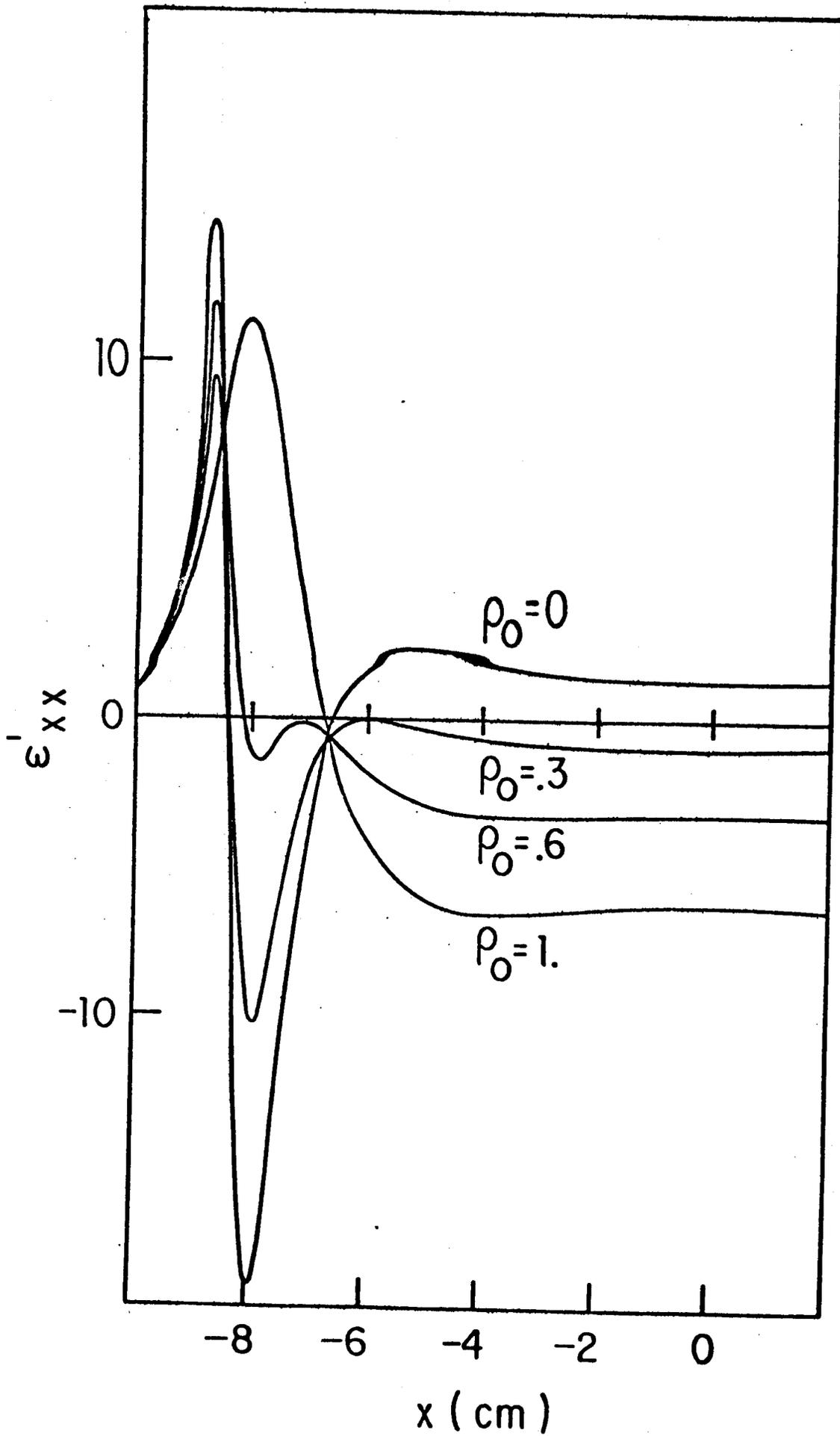


Figura V.5 - ϵ'_{xx} como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f^I .

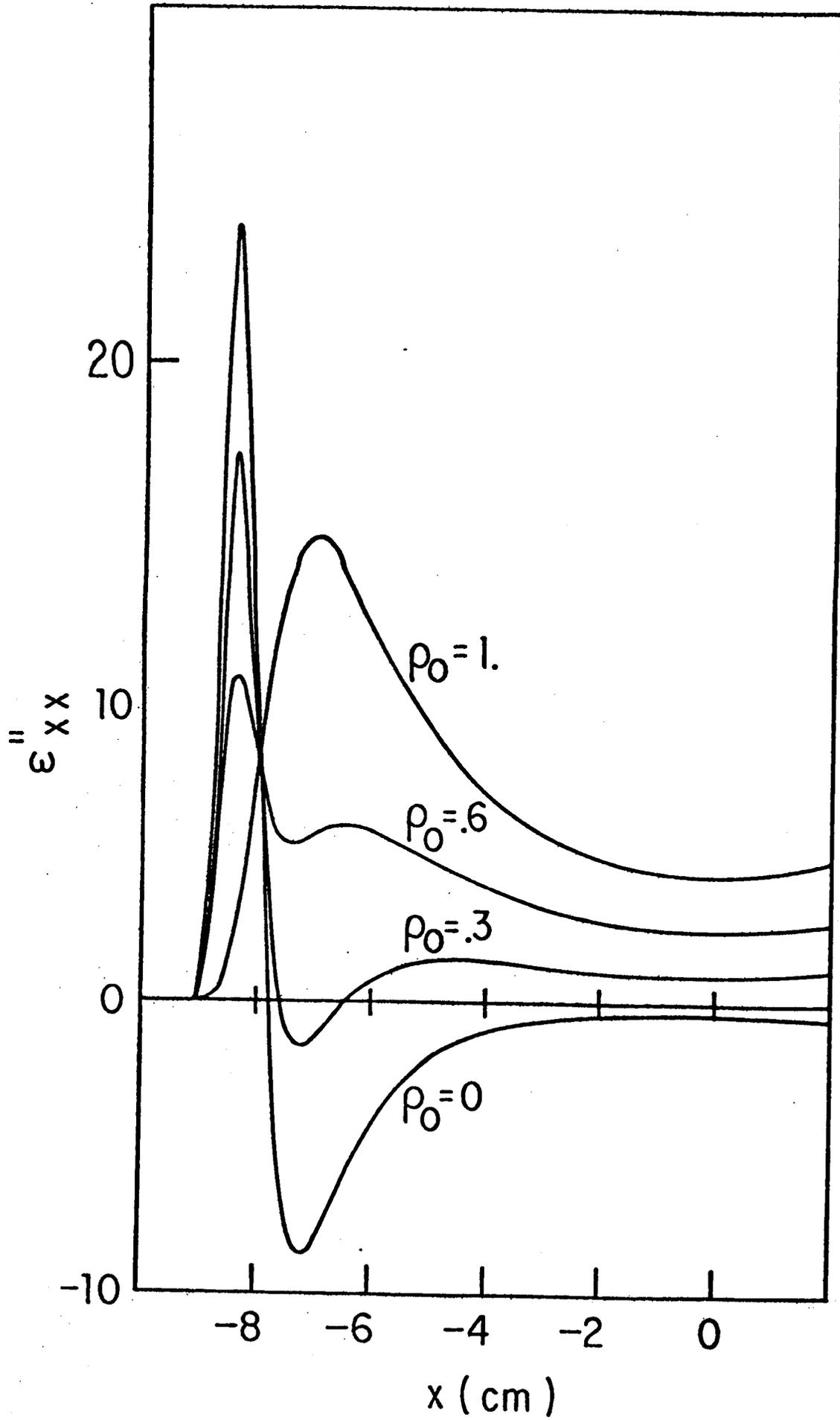


Figura V.6 - ϵ''_{xx} como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f^I .

$|k''| \ll |k'|$ pode ser violada. Lembramos também que ao avaliarmos a validade da aproximação de pequeno raio de Larmor (ver Capítulo IV) tomamos $N^2 \approx 1,3$, deixando este valor para justificar posteriormente. Em nosso caso, $\omega/c \approx 8,7$, de modo que a Figura V.3 nos mostra que a estimativa de N^2 estava correta, perigando apenas para os valores críticos de ρ_0 .

Na Tabela V.1 damos a amplificação da emissão em $x = a$, para diferentes valores de ρ_0 , definida como $A_{\rho_0} = 10 \log(I_{x,\rho_0}/I_{x,0})$, onde I_{x,ρ_0} refere-se à Eq. (II.20) para um dado valor ρ_0 . O cálculo está limitado a valores de ρ_0 para os quais k' e k'' mostram o comportamento requerido. Observa-se que para pequenos valores de ρ_0 a emissão é primeiro aumentada e logo grandemente reduzida, enquanto torna-se bastante insensível a ρ_0 à medida que este parâmetro se aproxima de 1. Isto ocorre essencialmente porque neste caso a profundidade ótica é muito menor do que a largura da lâmina.

V.2 - Distribuição de Cone de Perda mais Componente Térmica de Temperatura muito Menor (tipo f^{II})

Em seguida, analisamos os resultados para uma distribuição do tipo f^{II}. Neste caso temos uma Maxwelliana de baixa temperatura adicionada a uma distribuição tipo "cone de perda" com $\lambda = 3$, resultando em uma distribuição que é difícil de desenhar numa escala conveniente. Como a Figura V.7 mostra, o meio não se torna absorvente nesta situação, para a frequência considerada, exceto próximo à superfície. A razão é que a segunda região de derivada negativa da função distribuição ocorre somente para valores muito

TABELA V.1 - A_{ρ_0} para diversos valores de ρ_0 ; função distribuição f^I .

ρ_0	A_{ρ_0}
0	0.0
0.05	4.3
0.1	-28.4
0.6	-68.9
0.8	-69.9
1.0	-69.4

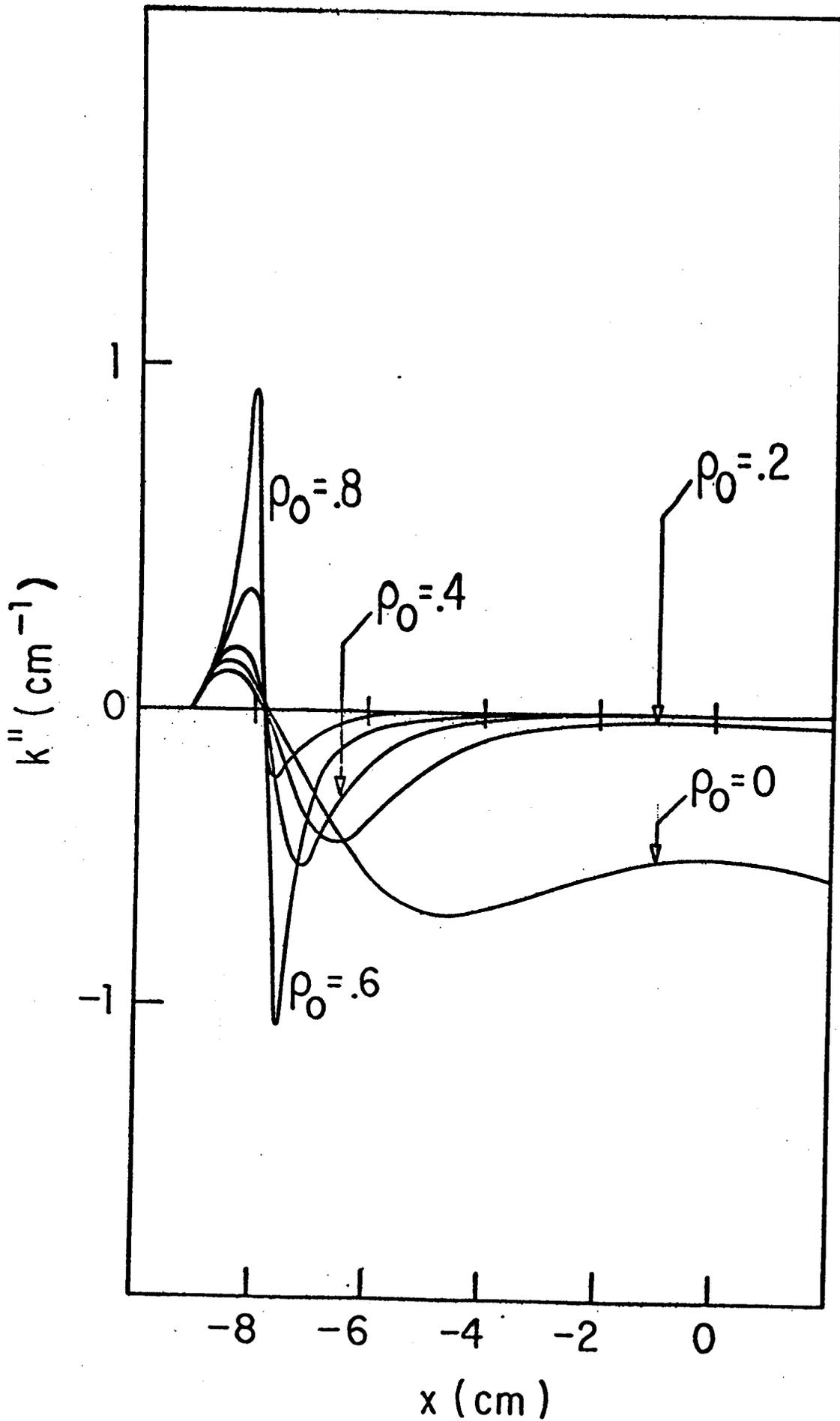


Figura V.7 - k'' como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f'' ; para $\rho_0 = 1$, a curva é indistinguível do eixo.

pequenos de p_{\perp} , para os quais não há ressonância significativa. No vamente é evidente uma grande variação de k'' , ocorrendo próximo ao ponto $x = -7,8$ cm para $\rho_0 \approx 0,7$, enquanto k' muda relativamente pouco (Figura V.8) mas mostra o aparecimento de "picos" para cima e para baixo, quando ρ_0 se aproxima de $\rho_0 \approx 0,7$. A razão é aparente, do comportamento de ϵ'_{xx} e ϵ''_{xx} como função de x , mostrado nas Figuras V.9 e V.10. Tanto ϵ'_{xx} e ϵ''_{xx} podem tornar-se simultaneamente zero próximo ao ponto $x = -7,8$ cm, quando $\rho_0 \approx 0,7$; o argumento se desenvolve da maneira já apresentada no caso de f^I .

Outro aspecto que deveria ser notado no comportamento de k'' (Figura V.7) é a grande redução do seu valor sobre a maior parte da lâmina, mesmo para valores pequenos de ρ_0 . Poder-se-ia esperar que uma pequena redução na densidade de partículas "cone-de-perda" e sua substituição por partículas Maxwellianas de temperatura muito menor fosse quase irrelevante. Deve-se notar, entretanto, que os parâmetros e perfis escolhidos para as partículas Maxwellianas garantem que a condição $X > \frac{v_e}{c}$ é satisfeita em toda a lâmina, de modo que os efeitos dielétricos são importantes [FGM+80]. Esses efeitos são levados em conta através da multiplicação da expressão de k'' obtida na aproximação de partículas independentes [Be66] pelo fator $\left| \frac{\epsilon_{xx} - i \epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} \right|^2 / N_x'$ [FGM+80]. A parte anti-hermitiana de ϵ_{xx} , graças à função δ indicadora da ressonância, contém o fator $\exp\left[\frac{\mu_{\perp,0}}{2} (1 - \gamma^2)\right]$, não mudando apreciavelmente com a mistura de partículas Maxwellianas, pois $\mu_{\perp,0} \gg \mu_{\perp,3}$; essencialmente, a parte anti-hermitiana mostra-se proporcional à densidade de partículas "cone-de-perda" (Figura V.10). As partes hermitianas de ϵ_{xx} (Figura V.9) e ϵ_{xy} , as quais não contêm no integrando a função δ referida acima, são muito mais sensíveis à mudança de ρ_0 ,

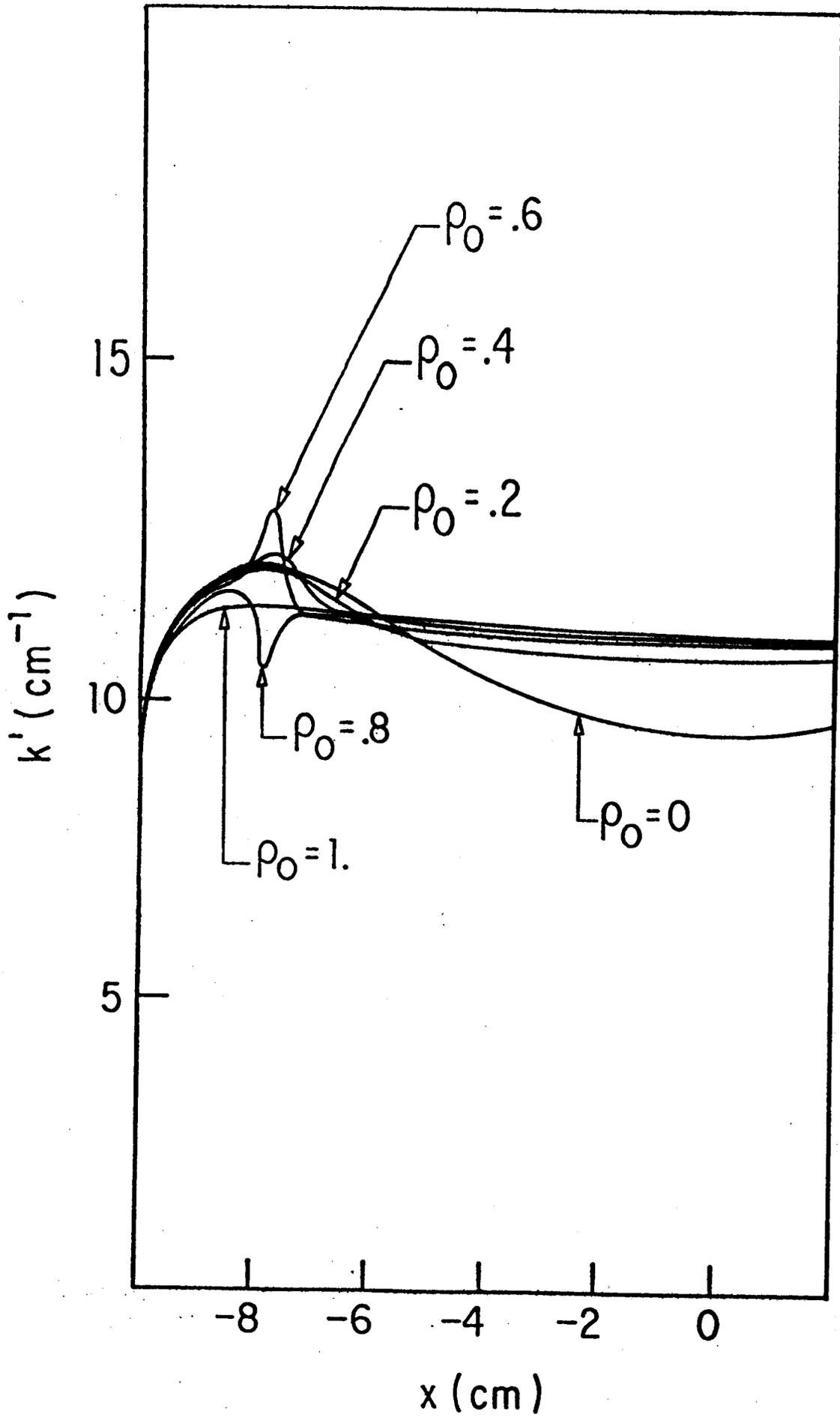


Figura V.8 - k' como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f^{II} .

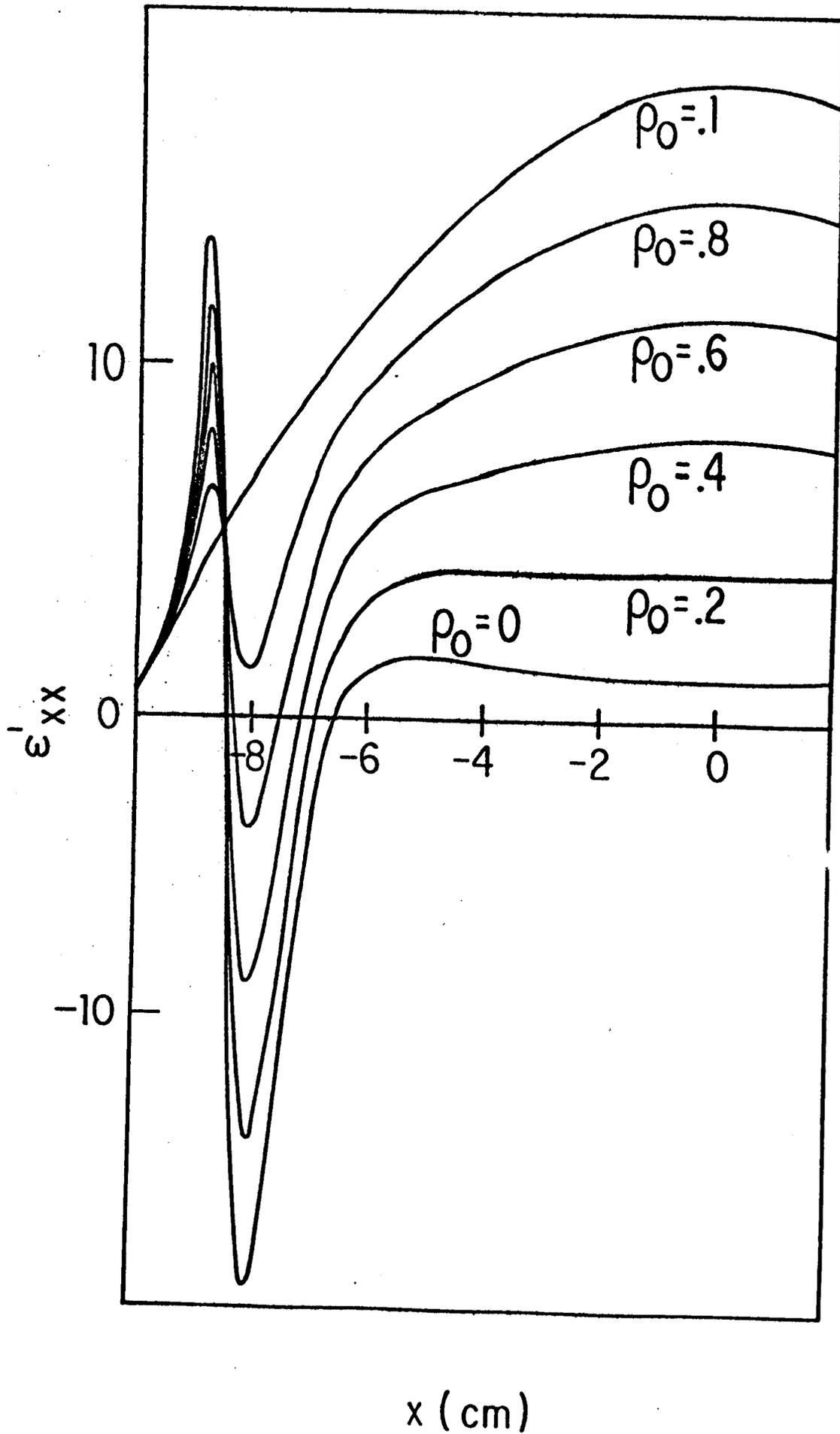


Figura V.9 - ϵ'_{xx} como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f^{II} .

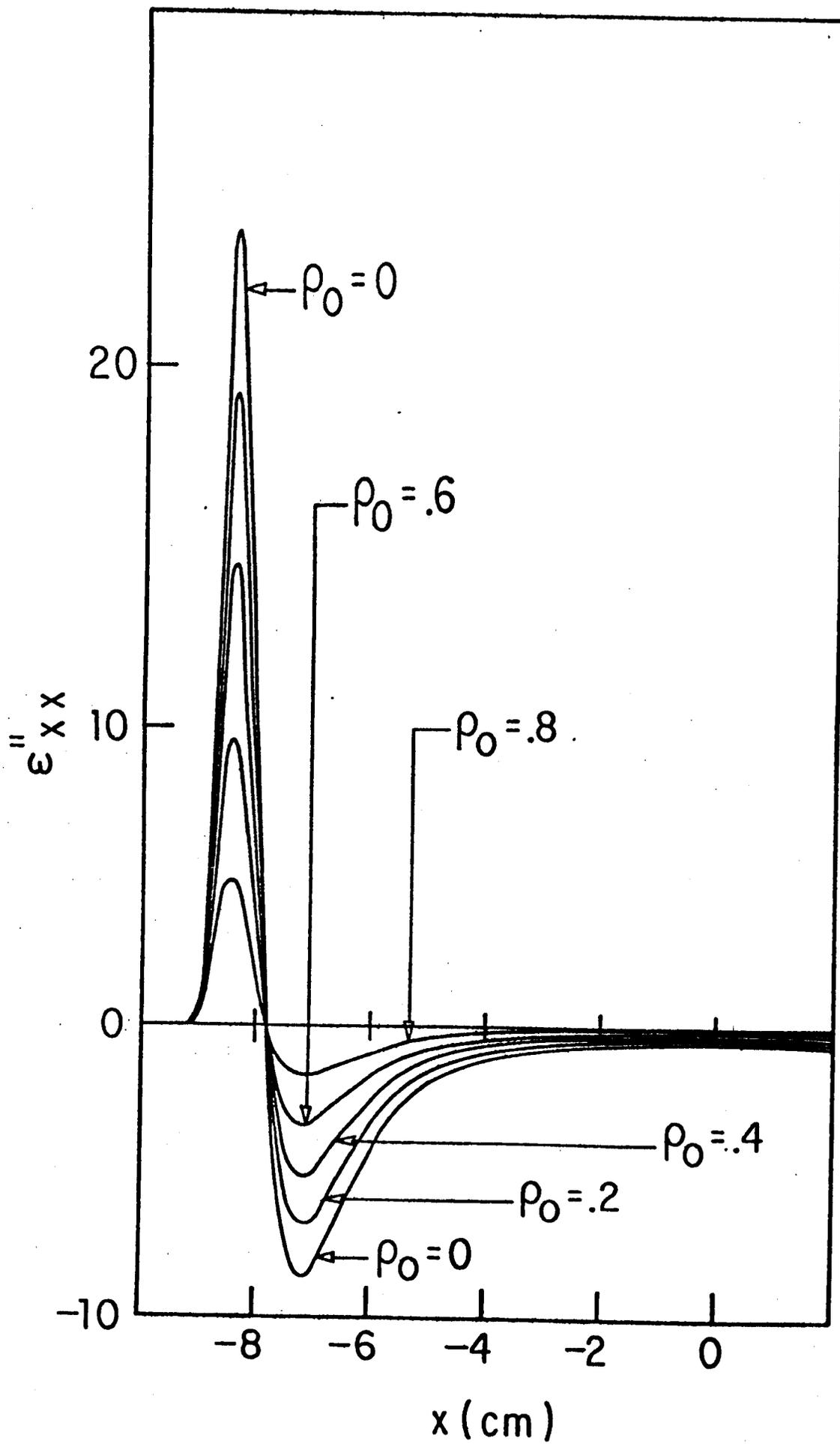


Figura V.10 - ϵ''_{xx} como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f^{II} ; para $\rho_0 = 1$, a curva não se distingue do eixo.

resultando um efeito notável em k'' .

A Tabela V.2 mostra alguns valores da amplificação A_{ρ_0} . A redução da emissão é evidente também aqui. À medida que ρ_0 tende a 1, a distribuição se torna tão fria que a emissão fica desprezível na frequência considerada (Devemos lembrar que o intervalo de frequências amplificadas ou absorvidas se afasta da frequência de cíclotron quando a temperatura aumenta e que a largura deste intervalo também cresce com a temperatura).

V.3 - O Comportamento de k'

Finalmente, discutimos um aspecto aparente em ambos os tipos de distribuições consideradas, que é a ocorrência de variações marcantes de k' para certos valores de ρ_0 (Figuras V.3 e V.8). Isto contradiz a crença usual de que k' é quase insensível à forma da função distribuição de momentum e que portanto o resultado da aproximação de plasma frio é bom para k' quando a frequência não é muito próxima da frequência híbrida superior. Nossos resultados mostram esses aspectos sobre um grande intervalo de valores de ρ_0 , mas para as situações em que ϵ_{XX} tende a zero (isto é, para valores de ρ_0 tais que ϵ'_{XX} e ϵ''_{XX} mudam de sinal nas imediações do mesmo ponto na lâmina de plasma) o valor de k' varia apreciavelmente com ρ_0 , ou seja, com a forma da $f(p)$ (Podemos acrescentar, à guisa de comentário, que $\epsilon_{XX} = 0$ é a condição de ressonância para propagação perpendicular do modo extraordinário, na aproximação de plasma frio). Como ilustração, o comportamento de k'

TABELA V.2 - A_{ρ_0} para diversos valores de ρ_0 ; função distribuição f^{II} .

ρ_0	A_{ρ_0}
0	0.0
0.1	-39.5
0.2	-49.3
0.9	-70.7
0.95	-74.5
0.98	-78.8
0.99	-82.2

para a f^I , na Figura V.3, pode ser verificado de forma simples pela consideração de um ponto onde ε''_{xx} (e portanto também ε''_{xy}) é zero. Nesse caso temos, a partir da Eq.(II.12), $k' = \frac{\omega}{c} \left| \frac{\varepsilon'^2_{xx} - |\varepsilon'_{xy}|^2}{\varepsilon'_{xx}} \right|^{1/2}$. Portanto, se ε'_{xx} é negativo e tende a zero, com $|\varepsilon'_{xx}| < |\varepsilon'_{xy}|$, k' pode tornar-se grande; se ε'_{xx} tem um valor positivo pequeno, com $|\varepsilon'_{xx}| > |\varepsilon'_{xy}|$, k' pode tornar-se pequeno. O primeiro caso ocorre para $\rho_0 = 0,3$ próximo ao ponto $x = 6,4$ cm, onde $\varepsilon'_{xx} = -0,3$ e $\varepsilon'_{xy} = 1,2 i$ (como pode ser visto nas Figuras V.5 e V.11); o segundo caso ocorre para $\rho_0 = 0,2$ próximo ao ponto $x = -5,4$ cm, onde $\varepsilon'_{xx} = 0,49$ e $\varepsilon'_{xy} = 0,39 i$.

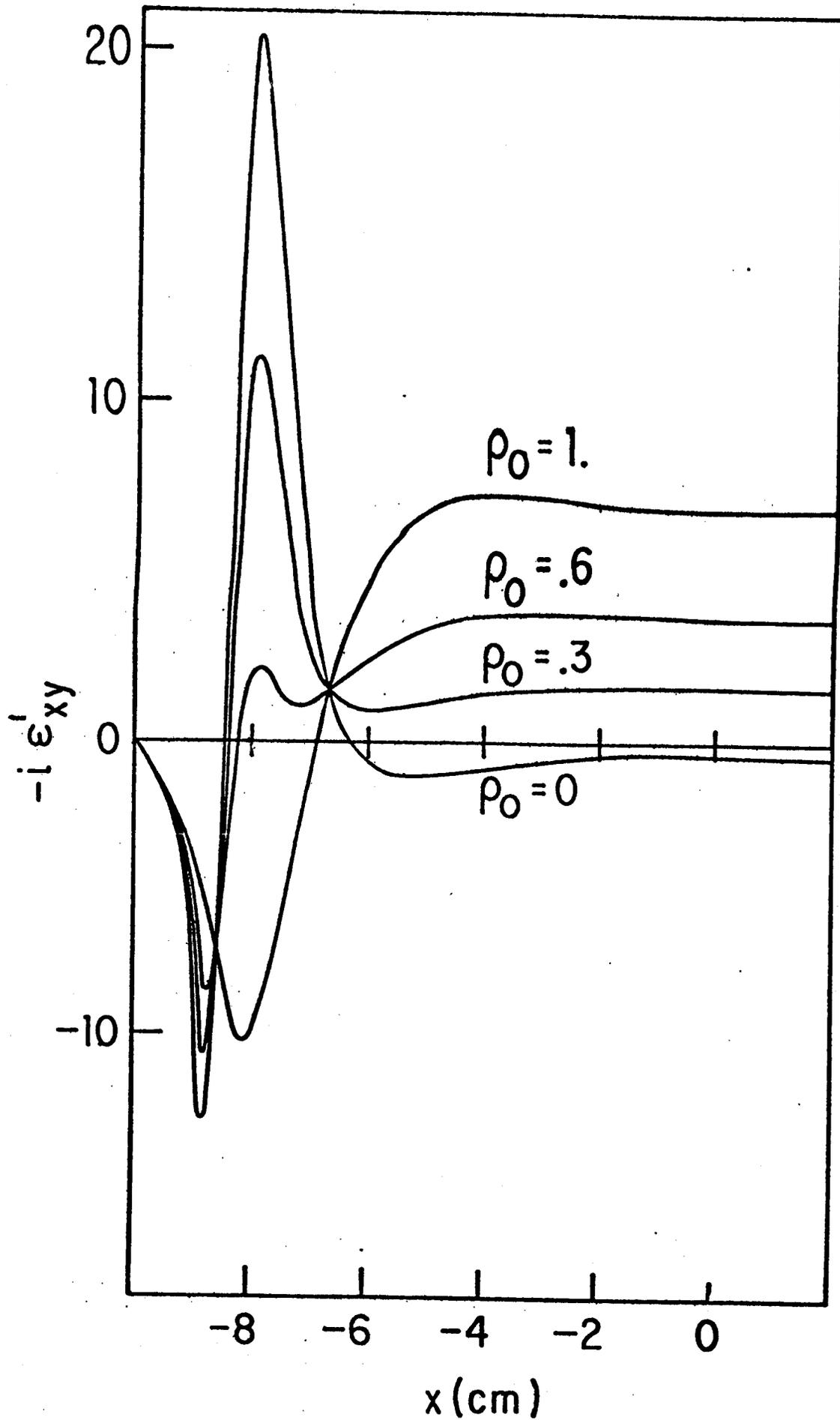


Figura V.11 - ϵ'_{xy} como função de x para diferentes valores de ρ_0 ; função distribuição f^I .

VI - CONCLUSÕES

Neste trabalho nos propusemos a estudar a ocorrência de radiação induzida na frequência de cíclotron dos elétrons, em um plasma finito e não homogêneo. A inhomogeneidade foi suposta suave, o que nos permitiu obter os campos \vec{E} e \vec{B} da radiação através de uma aproximação WKB. O coeficiente de absorção do plasma, proporcional à parte imaginária do vetor de onda, foi calculado a partir da relação de dispersão, sendo a intensidade da emissão na superfície do plasma obtida através de uma média de ensemble do vetor de Poynting. Em todo o trabalho o plasma foi suposto levemente relativístico, tendo sido mantidos apenas os termos de mais baixa ordem da expansão em potências do raio de Larmor, ao serem escritos os elementos do tensor dielétrico e do tensor correlação de correntes. A função distribuição foi escolhida de forma a apresentar uma inversão de população, que pudesse propiciar a transfêrência de energia das partículas para as ondas. Usamos uma função distribuição com deficiência de elétrons com pequenos valores de velocidade perpendicular ao campo magnético (tipo cone de perda), havendo um parâmetro livre (λ) que permitiu variar sua forma. Mantivemos uma anisotropia de temperaturas, o que possibilitou estudar o efeito da variação de T_{\parallel}/T_{\perp} .

Quanto à geometria do plasma, adotamos como modelo uma lâmina, finita na direção de propagação da onda e infinita nas direções perpendiculares. O campo magnético foi suposto paralelo às faces da lâmina, portanto perpendicular à direção de propagação. Para uma análise numérica, escolhemos perfis de densidade e tempe

ratura cujo aspecto fundamental é mostrarem valores crescentes no sentido do centro da lâmina, comportamento que nos pareceu típico de plasmas finitos. Ao campo magnético permitiu-se uma leve inhomogeneidade, de grau muito menor do que a apresentada pelos perfis de densidade e temperatura.

A análise numérica a que nos referimos foi dividida em duas partes, apresentadas nos Capítulos IV e V. Em ambas nos limitamos a apresentar resultados referentes ao modo extraordinário, que apresentou efeitos mais notáveis, para os parâmetros escolhidos. Primeiramente, analisamos o efeito de $T_{||}/T_{\perp}$ e do parâmetro λ , mostrando a tendência geral da emissão de crescer com $T_{||}/T_{\perp}$. Analisamos também o efeito de T_{\perp} e da densidade; mostramos que a faixa de frequências que sofrem amplificação se alarga e se afasta de Ω_c à medida que aumenta T_{\perp} , o mesmo efeito sendo observado com o aumento de λ . Quanto à dependência em densidade, vimos que o módulo da parte imaginária do vetor de onda (k'') diminui com o aumento da densidade, para uma dada frequência, ao contrário do que se esperaria na aproximação de partículas independentes. Admitindo que o campo magnético possa ser inhomogêneo, mostrou-se que mesmo inhomogeneidades muito pequenas do campo podem afetar fortemente a emissão, devido à pequena largura da faixa de frequências amplificadas; à medida que uma onda viaja dentro do plasma, pode encontrar condições de amplificação muito diferentes, bastando para isso mudanças muito pequenas na intensidade do campo magnético. Mostramos que esses efeitos podem ser interpretados fisicamente em termos dos momentos ressonantes e da derivada da função de distribuição.

Numa segunda etapa, investigamos a influência da forma

da função distribuição, tendo em vista o aspecto da supressão do caráter de cone de perda; usamos dois tipos de função distribuição neste estudo: uma, chamada f^I , formada por superposição da função de cone de perda e uma Maxwelliana de mesma dispersão térmica; outra, chamada f^{II} , formada pela função de cone de perda adicionada a uma Maxwelliana de temperatura muito menor. Para distribuições do tipo f^I , verificou-se a possibilidade de formação de uma região muito efetiva de absorção na parte central da lâmina, capaz de absorver toda a radiação amplificada no restante. Aumentando o caráter Maxwelliano da distribuição, desaparece a amplificação e ocorre absorção em quase toda a lâmina. Para distribuições do tipo f^{II} a presença da componente Maxwelliana fria reduz a amplificação sem produzir absorção apreciável, na frequência considerada, de modo que a emissão se torna desprezível quando a componente fria é dominante. Para ambos os tipos de distribuição mostrou-se que a transição para o estado Maxwelliano pode ser acompanhada por comportamentos peculiares dos elementos do tensor dielétrico, resultando grandes variações localizadas do vetor de onda. Estas variações podem invalidar o uso das aproximações da ótica geométrica e apontam para a necessidade de algum cuidado ao supor, como é feito frequentemente, que a parte real do índice de refração é independente da função distribuição, se a frequência não é próxima demais da frequência híbrida superior.

Tendo apresentado um resumo do que foi feito, mencionamos alguns pontos que nos parecem caminhos naturais de extensão deste trabalho:

Ao longo do texto, afirmamos repetidas vezes que o modo ordinário mostrava resultados pouco significativos, em matéria de

magnitude, quando comparado ao modo extraordinário, sendo por esta razão deixado à parte na análise numérica. Além disto, no estudo feito no Capítulo V não observamos a ocorrência de comportamentos peculiares do índice de refração do modo ordinário, ao contrário do que ocorreu no caso do modo extraordinário. Fizemos sempre a ressalva de que tal comportamento acontece para os parâmetros considerados. Já foi mostrado que para altas densidades em um plasma Maxwelliano o modo ordinário pode ser mais absorvido do que o modo extraordinário [FGRM78]; no Capítulo IV, vimos a parte imaginária do índice de refração do modo extraordinário diminuir em magnitude com o aumento da densidade (enquanto a quantidade correspondente do modo ordinário, não apresentada, mostrava crescimento). Essas considerações mostram que um estudo da interação do modo ordinário com um plasma mais denso do que o usado no presente trabalho tem um interesse potencial. Evidentemente, o modo extraordinário também poderia ser estudado em densidades maiores, se incluídos termos de mais alta ordem nas expressões dos elementos do tensor dielétrico [BEL79].

Citamos também o estudo das propriedades de emissão e absorção em harmônicos mais elevados da frequência de cíclotron e o estudo da dependência angular da emissão. Este último item adquire maior relevância se levarmos em conta os aspectos peculiares do comportamento do índice de refração observados no Capítulo V. Em especial, poderia ser de interesse um estudo das propriedades da velocidade de grupo de ondas com propagação perpendicular e oblíqua em relação ao campo magnético [TFI81], [MP81].

Finalmente, mencionamos um tema de caráter mais geral, envolvendo a própria filosofia de abordagem do problema da emis-

são induzida de cíclotron. Em nosso tratamento, assim como nos demais mencionados na Introdução, a função distribuição usada para calcular as propriedades do plasma foi suposta conhecida e constante. Em outras palavras, tratou-se de forma estática uma situação intrinsecamente dinâmica, admitindo-se implicitamente a existência de mecanismos capazes de assegurar a manutenção de um estado de equilíbrio não termodinâmico. Uma alternativa seria o estudo da evolução temporal da função distribuição por meio de uma abordagem quase-linear, eventualmente com a inclusão de colisões. Um programa de pesquisas desse gênero, embora certamente bastante complexo em matéria computacional, seria sob certos aspectos mais realista e poderia levar a uma melhor compreensão do problema das instabilidades de cíclotron em plasmas confinados por espelhos magnéticos.

APÊNDICE: OS ELEMENTOS DO TENSOR DIELÉTRICO E DO TENSOR CORRELAÇÃO DE CORRENTES

1. Elementos de $\epsilon_{\alpha\beta}$

No capítulo III, encontramos uma expressão para os elementos do tensor dielétrico de um plasma magnetizado, no caso de oscilações eletromagnéticas de alta frequência (Eq.(III.1)). Particularizando esta expressão para o caso de propagação perpendicular ao campo magnético e considerando apenas os termos com $n = -1, 0$ e 1 , obtemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} = & \delta_{\alpha\beta} + X \int d^3p \frac{p_{\perp} \pi_{\alpha 0}^* \pi_{\beta 0}}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f + X \sum_{n=1,-1} \int d^3p \frac{p_{\perp} \pi_{\alpha n}^* \pi_{\beta n}}{\gamma + nY} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f \\ & + X \delta_{\alpha z} \delta_{\beta z} \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} - \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \right) f \quad , \end{aligned} \quad (1)$$

onde $\pi_{xn} = n J_n(\rho)/\rho$, $\pi_{yn} = i J_n'(\rho)$, $\pi_{zn} = p_{\parallel} J_n(\rho)/p_{\perp}$ e $\rho = -Np_{\perp}/mcy$. Se for válida a condição $\rho^2 \ll 1$, podemos expandir as expressões de $\epsilon_{\alpha\beta}$ em potências de ρ^2 e tomar o primeiro termo relevante desta expansão, para cada harmônico:

$$\epsilon_{xx} \cong 1 + \frac{X}{4} \int d^3p \frac{p_{\perp}}{\gamma - Y} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f + \frac{X}{4} \int d^3p \frac{p_{\perp}}{\gamma + Y} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f \quad (2)$$

$$\epsilon_{xy} \cong -i \frac{X}{4} \int d^3p \frac{p_{\perp}}{\gamma - Y} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f + i \frac{X}{4} \int d^3p \frac{p_{\perp}}{\gamma + Y} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f$$

$$\epsilon_{xz} \cong -\frac{\chi}{4} \int d^3p \frac{p_{\parallel} p}{\gamma - \gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f + \frac{\chi}{4} \int d^3p \frac{p_{\parallel} p}{\gamma + \gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f$$

$$\epsilon_{yy} \cong \epsilon_{xx} + \frac{\chi}{4} \int d^3p \frac{p_{\perp} p^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f$$

$$\epsilon_{yz} \cong i \frac{\chi}{2} \int d^3p \frac{p_{\parallel} p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f - i \frac{\chi}{4} \int d^3p \frac{p_{\parallel} p}{\gamma - \gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f$$

$$- i \frac{\chi}{4} \int d^3p \frac{p_{\parallel} p}{\gamma + \gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f \quad (2)$$

$$\epsilon_{zz} \cong 1 + \chi \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f + \frac{\chi}{4} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^2 p^2}{\gamma - \gamma} \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f$$

$$+ \frac{\chi}{4} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^2 p^2}{\gamma + \gamma} \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f$$

$$\epsilon_{yx} = -\epsilon_{xy} \quad \epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} \quad \epsilon_{zy} = -\epsilon_{yz} \quad .$$

Neste trabalho, tratamos sempre de funções distribuição pares em p_{\parallel} ; neste caso, os elementos ϵ_{xz} e ϵ_{yz} são nulos, de forma que ficam reduzidos a cinco os elementos do tensor dielétrico que devem ser calculados. Além disto, podemos simplificar o cálculo desprezando, em ϵ_{yy} o termo que veio da contribuição de $n=0$; este termo é da ordem ρ^2 e não possui denominador ressonante, de maneira que não contribui para a parte anti-hermitiana do tensor dielétrico, não se devendo esperar uma contribuição significativa para a parte hermitiana. Portanto, as expressões para $\epsilon_{\alpha\beta}$ são:

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_{\sigma=\pm 1} \varepsilon_{xx,\sigma}, \quad \text{onde} \quad \varepsilon_{xx,\sigma} = \frac{X}{4} \int d^3p \frac{p_{\perp}}{\gamma - \sigma\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f;$$

$$\varepsilon_{xy} = -i \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \varepsilon_{xx,\sigma} = -\varepsilon_{yx},$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx},$$

(3)

$$\varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} = 0,$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz0} + N^2 \sum_{\sigma=\pm 1} \chi_{zz,\sigma},$$

onde
$$\varepsilon_{zz0} = 1 + X \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f$$

$$\chi_{zz,\sigma} = \frac{X}{4} \frac{1}{m^2 c^2 \gamma^2} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^2 p_{\perp}}{\gamma - \sigma\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f.$$

As funções de distribuição de momentum usadas neste trabalho apresentam simetria cilíndrica no espaço de momentum; neste caso nas expressões (3) temos termos do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \frac{F(p_{\parallel}, p_{\perp})}{\gamma - \sigma\gamma},$$

que podem ser escritos como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dx \frac{\hat{F}(p_{\parallel}, x) (\gamma + \sigma\gamma)}{x - (\gamma^2 - 1 - p_{\parallel}^2/m^2 c^2)};$$

Acima introduzimos a variável $x = p_{\perp}^2/m^2 c^2$; esta expres

são pode ser separada em parte principal e parte ressonante, através da fórmula de Plemelj, usando-se a prescrição de Landau para a passagem por baixo do pólo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dx \frac{\hat{F}(p_{\parallel}, x) (\gamma + \sigma \gamma)}{x - (\gamma^2 - 1 - p_{\parallel}^2/m^2 c^2)} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dx \frac{\hat{F}(p_{\parallel}, x)}{\gamma - \sigma \gamma} - \delta_{\sigma, 1} i\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dx \hat{F}(p_{\parallel}, x) \delta(\gamma - \gamma) . \quad (4)$$

Definimos as partes hermitiana e anti-hermitiana de $\epsilon_{\alpha\beta}$ respectivamente como $\epsilon'_{\alpha\beta} = (\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}^*)/2$ e $\epsilon''_{\alpha\beta} = (\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*)/2i$; com o uso da expressão (4), temos

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= 1 + \sum_{\sigma=\pm 1} \epsilon'_{xx, \sigma} \\ \epsilon'_{xy} &= -i \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \epsilon'_{xx, \sigma} = -\epsilon'_{yx} \\ \epsilon'_{xz} &= \epsilon'_{zx} = 0 \quad \epsilon'_{yy} = \epsilon'_{xx} \quad \epsilon'_{yz} = -\epsilon'_{zy} \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\epsilon'_{zz} = \epsilon'_{zz0} + N^2 \sum_{\sigma=\pm 1} \chi'_{zz, \sigma} ,$$

onde

$$\epsilon'_{xx, \sigma} = (\pi X/2) \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}^2}{\gamma - \sigma \gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f$$

$$\chi'_{zz, \sigma} = (\pi X/2 m^2 c^2 \gamma^2) \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\parallel}^2 p_{\perp}^2}{\gamma - \sigma \gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f ;$$

$$\epsilon_{xx}'' = -(\pi^2 X/2) \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp}^2 \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f \delta(\delta - \gamma),$$

$$\epsilon_{xy}'' = -\epsilon_{yx}'' = -i \epsilon_{xx}'',$$

$$\epsilon_{xz}'' = \epsilon_{zx}'' = 0, \quad \epsilon_{yy}'' = \epsilon_{xx}'', \quad \epsilon_{yz}'' = -\epsilon_{zy}'' = i \epsilon_{xz}'' = 0, \quad (5b)$$

$$\epsilon_{zz}'' = N^2 \chi_{zz}'',$$

onde

$$\chi_{zz}'' = -(\pi^2 X/2 m^2 c^2 \gamma^2) \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\parallel}^2 p_{\perp}^2 \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f \delta(\delta - \gamma).$$

1a - Distribuição com $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$:

A função distribuição a ser usada está definida pela expressão (II.21), de modo que suas derivadas são

$$p_{\perp}^2 \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f = [2(1 - (2\mu_{\perp}/b) p_{\perp}^2)] p_{\perp} f,$$

(6)

$$p_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f = - (2\mu_{\parallel}/b) p_{\parallel}^2 f ;$$

Com isto estamos prontos para o cálculo explícito dos elementos do tensor dielétrico. De acordo com as expressões (5), são precisamos calcular cinco quantidades, $\epsilon'_{xx,\sigma}$, ϵ_{zz0} , $\chi'_{zz,\sigma}$, ϵ''_{xx} e χ''_{zz} .

Cálculo de ϵ''_{XX} :

O integrando que aparece nas partes anti-hermitianas das expressões (5) pode ser modificado com o uso de uma propriedade da função delta:

$$\delta(\gamma - Y) = \sum_i \frac{\delta(p_{\perp} - p_{\perp i})}{\left| \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} (\gamma - Y) \right|_{p_{\perp} = p_{\perp i}}},$$

onde a soma é sobre todos os valores de p_{\perp} que satisfazem a condição $\gamma - Y = 0$. $\gamma - Y = 0 \rightarrow \gamma^2 = Y^2 \rightarrow p_{\perp}^2 = m^2 c^2 (\gamma^2 - 1 - r^2)$, onde introduzimos a variável $r = p_{\parallel} / mc$. Assim, haveria dois valores de p_{\perp} satisfazendo a condição $\gamma - Y = 0$ (se $Y \geq 1$), que são $p_{\perp \pm} = \pm mc (-\beta_1 - r^2)^{1/2}$, onde $\beta_1 = 1 - \gamma^2$. Como p_{\perp} deve ser positivo, a única raiz é $p_{\perp +}$.

$$\left. \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} (\gamma - Y) \right|_{p_{\perp} = p_{\perp i}} = \frac{1}{\gamma} \left. \frac{p_{\perp}}{m^2 c^2} \right|_{p_{\perp} = p_{\perp i}} = \frac{p_{\perp i}}{\gamma m^2 c^2}$$

Portanto,

$$\delta(\gamma - Y) = \gamma m^2 c^2 \left[\frac{\delta(p_{\perp} - p_{\perp +})}{p_{\perp +}} \right] = \left[\gamma (mc)^2 / p_{\perp} \right] \delta \left[p_{\perp} - mc (-\beta_1 - r^2)^{1/2} \right]. \quad (7)$$

A expressão para ϵ''_{XX} fica (com o uso de (6))

$$\mathcal{E}_{xx}'' = - (\pi^2 \chi \gamma / 2) (mc)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_{\parallel} \int_0^{\infty} d\rho_{\perp} \left[2l - (2\mu_{\perp}/b) \rho_{\perp}^2 \right] f$$

$$\cdot \delta \left[\rho_{\perp} - mc (-\beta_1 - r^2)^{1/2} \right]$$

$$\mathcal{E}_{xx}'' = - (\pi^2 \chi \gamma / 2) (mc)^3 \int_{r_-}^{r_+} dr \left[2l + \mu_{\perp} (\beta_1 + r^2) \right] f_+ , \quad (8)$$

onde $f_+ = A (mc)^{2l} [-\beta_1 - r^2]^l \exp \left[- \frac{\mu_{\perp}}{2} (-\beta_1 - r^2) - \frac{\mu_{\parallel}}{2} r^2 \right] ,$

$r_+ = (-\beta_1)^{1/2}$, $r_- = -r_+$ (os limites da integral são r_+ e r_- porque $\rho_{\perp+}$ deve ser real).

Na expressão (8) temos

$$\left[-2l - \mu_{\perp} \beta_1 - \mu_{\perp} r^2 \right] (-\beta_1 - r^2)^l = \mu_{\perp} (-1)^{l+1} (\eta_{\perp} + r^2) (\beta_1 + r^2)^l ,$$

onde definimos a quantidade $\eta_{\perp} \equiv (2l/\mu_{\perp}) + \beta_1$; esta expressão pode ser escrita como

$$\mu_{\perp} (-1)^{l+1} (\eta_{\perp} + r^2) \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \beta_1^{l-k} r^{2k} , \quad (9)$$

onde $\binom{l}{k}$ é o coeficiente binomial, $\binom{l}{k} = [l!/k!(l-k)!]$.

Agora, definimos algumas quantidades e mudanças de variável:

$$d \equiv \mu_{\perp} - \mu_{\parallel} , \quad s \equiv -d/|d| , \quad t \equiv (|d|/2)^{1/2} , \quad q \equiv tr ; \quad (10)$$

Com o uso destas grandezas, escrevemos ϵ''_{XX} :

$$\epsilon''_{XX} = (\pi^2 XY) (mc)^{2l+3} A_{\mu_L} (-1)^{l+1} \exp(\mu_L \beta_1 / 2) \sum_{k=0}^l \frac{\binom{l}{k} \beta_1^{l-k}}{t^{1+2k}} \int_0^{q_+} dq (\eta_L + q^2/t^2) q^{2k} e^{-sq^2} \quad (11)$$

Apresentamos agora duas integrais de forma similar; a primeira delas vai ser usada em ϵ''_{XX} e ϵ''_{ZZ} , enquanto a segunda tem aplicação em ϵ''_{XZ} e ϵ''_{ZX} , caso já não tivéssemos verificado por argumentos de simetria que estas quantidades são nulas em nosso caso.

$$\int_{q_-}^{q_+} dq q^{2n} e^{-sq^2} = (1 - \delta_{n,0}) \left[-\frac{q^{2n-1}}{2s} e^{-sq^2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-1-2j)!!} \frac{1}{(2sq^2)^j} - \frac{(2n-1)!!}{2(2s)^n} (\pi/s)^{1/2} \operatorname{erfc}(s^{1/2}q) \right]_{q_-}^{q_+} + \delta_{n,0} \left[-\frac{1}{2} (\pi/s)^{1/2} \operatorname{erfc}(s^{1/2}q) \right]_{q_-}^{q_+} \quad (12)$$

$$\int_{q_-}^{q_+} dq q^{2n+1} e^{-sq^2} = \left[-\frac{q^{2n}}{2s} e^{-sq^2} \sum_{j=0}^n \frac{(2n)!!}{(2n-2j)!!} \frac{1}{(2sq^2)^j} \right]_{q_-}^{q_+}$$

$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, onde $\operatorname{erf}(x)$ é a função erro [AS72], definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Seja $K_1 = \frac{\pi^2 X}{2} \frac{\mu_1^{\ell+2} \mu_1^{1/2}}{2^\ell (2\pi)^{3/2} \ell!} \exp(\mu_1 \beta_1 / 2)$; a expressão (11) fica

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}'' = & K_1 Y (-1)^{\ell+1} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \frac{2\beta_1^{\ell-k}}{t^{1+2k}} \frac{1}{2s} \left\{ -e^{-sq_+^2} \left[(1-\delta_{k,0}) \eta_{\perp} \right. \right. \\ & \times q_+^{2k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k-1-2j)!!} \frac{1}{(2sq_+^2)^j} + \frac{1}{t^2} q_+^{2k+1} \sum_{j=0}^k \frac{(2k+1)!!}{(2k+1-2j)!!} \\ & \times \left. \frac{1}{(2sq_+^2)^j} \right] + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) \left[(1-\delta_{k,0}) \eta_{\perp} \frac{(2k-1)!!}{(2s)^k} \right. \\ & \left. \left. + \delta_{k,0} \eta_{\perp} + \frac{1}{t^2} \frac{(2k+1)!!}{(2s)^{k+1}} \right] \right\} ; \end{aligned}$$

Seja $\phi_m \equiv \frac{(2m-1)!!}{(2s)^m}$

$$\theta_m \equiv q_+^{2m} \sum_{j=0}^m \frac{(2m+1)!!}{(2m+1-2j)!!} \frac{1}{(2sq_+^2)^j} ; \quad \text{Logo,}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}'' = & K_1 Y \frac{(-1)^{\ell+1}}{s} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \frac{\beta_1^{\ell-k}}{t^{1+2k}} \left\{ -q_+ e^{-sq_+^2} \left[(1-\delta_{k,0}) \eta_{\perp} \theta_{k-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \theta_k / t^2 \right] + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) \left[(1-\delta_{k,0}) \eta_{\perp} \phi_k + \delta_{k,0} \eta_{\perp} + \phi_{k+1} / t^2 \right] \right\} . \quad (13) \end{aligned}$$

Cálculo de χ''_{zz} :

Tomamos χ''_{zz} , das Eq. (15); usando (6) e (7), ficamos com:

$$\chi''_{zz} = - (\pi^2 \chi / 2 \gamma) (mc)^3 \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 [2\ell + \mu_{\perp} (\beta_1 + r^2)] f_r \quad (14)$$

Usando (9) e as definições dadas por (10), χ''_{zz} fica da da por:

$$\chi''_{zz} = (\pi^2 \chi / \gamma) (mc)^{2\ell+3} A \mu_{\perp} (-1)^{\ell+1} \exp(\mu_{\perp} \beta_1 / 2)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\binom{\ell}{k} \beta_1^{\ell-k}}{t^{3+2k}} \int_0^{q_+} dq (\eta_{\perp} + q^2/t^2) q^{2(k+1)} e^{-sq^2}$$

Novamente, usando a primeira das integrais (12), temos

$$\begin{aligned} \chi''_{zz} = & \frac{K_1}{\gamma} (-1)^{\ell+1} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \frac{2\beta_1^{\ell-k}}{t^{3+2k}} \frac{1}{2s} \left\{ -e^{-sq_+^2} \left[\eta_{\perp} q_+^{2k+1} \right. \right. \\ & \times \sum_{j=0}^k \frac{(2k+1)!!}{(2k+1-2j)!!} \frac{1}{(2sq_+^2)^j} + \frac{1}{t^2} q_+^{2k+3} \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(2k+3)!!}{(2k+3-2j)!!} \frac{1}{(2sq_+^2)^j} \\ & \left. \left. + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) \left[\eta_{\perp} \frac{(2k+1)!!}{(2s)^{k+1}} + \frac{1}{t^2} \frac{(2k+3)!!}{(2s)^{k+2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Usando as definições de ϕ_m e θ_m , ficamos com:

$$\chi''_{zz} = \frac{K_1}{Y} \frac{(-1)^{l+1}}{S} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \frac{\beta_1^{\ell-k}}{t^{3+2k}} \left\{ -q_+ e^{-sq_+^2} \left[\eta_{\perp} \theta_k + \theta_{k+1} / t^2 \right] \right. \\ \left. + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) \left[\eta_{\perp} \phi_{k+1} + \phi_{k+2} / t^2 \right] \right\} \quad (15)$$

Cálculo de $\epsilon'_{XX,\sigma}$:

Com o uso de (5), (6) e a função distribuição (II.21), es crevemos

$$\epsilon'_{XX,\sigma} = \pi X A 2^l (mc)^{2l+3} \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\infty} du \frac{[l - \mu_{\perp} u] u^l}{\sqrt{1+r^2+2u} - \sigma\gamma} \exp(-\mu_{\perp} u - \mu_{\parallel} r^2/2),$$

onde definimos $u \equiv p_{\perp}^2/b$. Na aproximação de plasma fracamente relativístico, podemos expandir γ :

$$\epsilon'_{XX,\sigma} = \pi X A 2^l (mc)^{2l+3} \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\infty} du \frac{[l - \mu_{\perp} u] u^l}{\alpha_{\sigma} + u} \exp(-\mu_{\perp} u - \mu_{\parallel} r^2/2), \quad (16)$$

onde $\alpha_{\sigma} \equiv 1 + (r^2/2) - \sigma\gamma$.

Vamos nos dedicar primeiramente a resolver a integral em u que aparece em (16); de forma genérica, temos (para $m \neq 0$):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} dx \frac{x^m e^{-\mu x}}{x+\alpha} &= \int_0^{\infty} dx \frac{x^{m-1}}{x+\alpha} (x+\alpha-\alpha) e^{-\mu x} \\
&= \int_0^{\infty} dx x^{m-1} e^{-\mu x} - \alpha \int_0^{\infty} dx \frac{x^{m-2}}{x+\alpha} (x+\alpha-\alpha) e^{-\mu x} = \dots \\
&= \int_0^{\infty} dx x^{m-1} e^{-\mu x} - \alpha \int_0^{\infty} dx x^{m-2} e^{-\mu x} + \alpha^2 \int_0^{\infty} dx x^{m-3} e^{-\mu x} \\
&\quad + \dots + (-\alpha)^{m-1} \int_0^{\infty} dx e^{-\mu x} + (-\alpha)^m I,
\end{aligned}$$

onde $I \equiv \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-\mu x}}{x+\alpha}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} dx \frac{x^m e^{-\mu x}}{x+\alpha} &= \frac{(m-1)!}{\mu^m} - \alpha \frac{(m-2)!}{\mu^{m-1}} + \alpha^2 \frac{(m-3)!}{\mu^{m-2}} - \dots \\
&\quad \dots + \frac{(-\alpha)^{m-1}}{\mu} + (-\alpha)^m I = (-\alpha)^m \left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j!}{(-\mu\alpha)^{j+1}} + I \right].
\end{aligned}$$

Se $m = 0$, $\int_0^{\infty} dx \frac{x^m e^{-\mu x}}{x+\alpha} = I$; logo:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^m e^{-\mu x}}{x+\alpha} = (-\alpha)^m I + (1-\delta_{m,0}) (-\alpha)^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j!}{(-\mu\alpha)^{j+1}} \quad (17)$$

Portanto a integral em u fica:

$$\int_0^{\infty} du \frac{(l - \mu_{\perp} u) u^l e^{-\mu_{\perp} u}}{\alpha_{\sigma} + u} = l (-\alpha_{\sigma})^l \left[\sum_{j=0}^{l-1} \frac{j!}{(-\mu_{\perp} \alpha_{\sigma})^{j+1}} + I \right]$$

$$- \mu_{\perp} (-\alpha_{\sigma})^{l+1} \left[\sum_{j=0}^l \frac{j!}{(-\mu_{\perp} \alpha_{\sigma})^{j+1}} + I \right].$$

Seja $x_{\sigma} \equiv -\mu_{\perp} \alpha_{\sigma}$; nesse caso,

$$\int_0^{\infty} du \frac{(l - \mu_{\perp} u) u^l e^{-\mu_{\perp} u}}{\alpha_{\sigma} + u} = \frac{1}{\mu_{\perp}^l} \left[(1 - \delta_{l,0}) (l - x_{\sigma}) x_{\sigma}^l \sum_{j=0}^{l-1} \frac{j!}{x_{\sigma}^{j+1}} \right.$$

$$\left. - l! + (l - x_{\sigma}) x_{\sigma}^l I \right]. \quad (18)$$

Passemos agora ao cálculo de I:

$$I = \int_0^{\infty} du \frac{e^{-\mu_{\perp} u}}{\alpha_{\sigma} + u} = e^{\mu_{\perp} \alpha_{\sigma}} \int_0^{\infty} du \frac{e^{-\mu_{\perp} (u + \alpha_{\sigma})}}{u + \alpha_{\sigma}}$$

Seja $x = \mu_{\perp} (u + \alpha_{\sigma})$;

$$I = e^{\mu_{\perp} \alpha_{\sigma}} \int_{\mu_{\perp} \alpha_{\sigma}}^{\infty} dx \frac{e^{-x}}{x}.$$

Vamos considerar dois casos, $\alpha_{\sigma} < 0$ e $\alpha_{\sigma} > 0$; quando $\alpha_{\sigma} < 0$, temos [AS72]:

$$I = -e^{\mu_{\perp} \alpha_{\sigma}} E_i(\mu_{\perp} |\alpha_{\sigma}|) = -e^{\mu_{\perp} \alpha_{\sigma}} E_i(-\mu_{\perp} \alpha_{\sigma})$$

No caso de $\alpha_\sigma > 0$,

$$I = e^{\mu_\perp \alpha_\sigma} E_i(\mu_\perp \alpha_\sigma) = -e^{\mu_\perp \alpha_\sigma} E_i(-\mu_\perp \alpha_\sigma)$$

Portanto, $I = -e^{\mu_\perp \alpha_\sigma} E_i(-\mu_\perp \alpha_\sigma)$. (19)

Inserindo (19) em (18) e voltando a (16), ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{xx,\sigma} = & \frac{\pi X A \mu_\perp^l (mc)^{2l+3}}{\mu_\perp^l} \int_{-\infty}^{\infty} dr \exp(-\mu_\parallel r^2/2) \left[(1-\delta_{l,0})(l-x_\sigma) x_\sigma^{l-1} \right. \\ & \left. \times \sum_{j=0}^{l-1} \frac{j!}{x_\sigma^j} - l! - (l-x_\sigma) x_\sigma^l e^{-x_\sigma} E_i(x_\sigma) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

seja $h_\sigma(r) \equiv -l! + (l-x_\sigma) \left[(1-\delta_{l,0}) \sum_{m=0}^{l-1} (l-1-m)! x_\sigma^m - x_\sigma^l e^{-x_\sigma} E_i(x_\sigma) \right]$;

$h_\sigma(r)$ é uma função par em r ; com o uso de A, dado em (II.21), temos:

$$\mathcal{E}'_{xx,\sigma} = B \int_0^\infty dr \exp(-\mu_\parallel r^2/2) h_\sigma(r), \quad (21)$$

onde $B \equiv X \mu_\perp (\mu_\parallel/2\pi)^{1/2} / l!$.

Cálculo de $\chi'_{zz,\sigma}$:

Conforme se vê a partir de (5), a expressão de $\chi'_{zz,\sigma}$ é

similar $\bar{\alpha}$ de $\epsilon'_{xx,\sigma}$, bastando que se multiplique o integrando desta por $(p_{||}^2/m^2 c^2 \gamma^2)$:

$$\chi'_{zz,\sigma} = \frac{B}{\gamma^2} \int_0^{\infty} dr \exp(-\mu_{||} r^2/2) r^2 h_0(r) \quad (22)$$

Cálculo de ϵ_{zz0} :

Com o uso das Eqs. (3) e (6), escrevemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz0} &= 1 - (2\mu_{||} X/b) 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_{||} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp} p_{||}^2 f}{\gamma} \\ \epsilon_{zz0} &= 1 - \frac{2X\mu_{\perp}^{\ell+1} \mu_{||} (\mu_{||}/2\pi)^{1/2}}{\ell!} \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} du r^2 \exp(-\mu_{||} r^2/2) \\ &\quad \times \frac{u^{\ell} \exp(-\mu_{\perp} u)}{\alpha_0 + u}, \end{aligned} \quad (23)$$

onde $\alpha_0 \equiv 1 + r^2/2$; ao escrevermos a Eq. (23) fizemos uso da expansão de γ , válida em um plasma fracamente relativístico. A integral em u que aparece na Eq. (23) pode ser resolvida com o uso de (17) e (19), resultando

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz0} &= 1 - \frac{2X\mu_{\perp}^{\ell+1} \mu_{||} (\mu_{||}/2\pi)^{1/2}}{\ell!} \int_0^{\infty} dr \exp(-\mu_{||} r^2/2) r^2 \\ &\quad \times \left[-x_0^{\ell} \exp(-x_0) E_i(x_0) + (1 - \delta_{\ell,0}) x_0^{\ell-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{j!}{x_0^j} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Seja } h_0(r) \equiv (1 - \delta_{l,0}) \sum_{m=0}^{l-1} (l-1-m)! x_0^m - x_0^l e^{-x_0} E_l(x_0);$$

com o uso de $h_0(r)$, a expressão para ϵ_{zz0} fica:

$$\epsilon_{zz0} = 1 - 2 \mu_{||} \beta \int_0^{\infty} dr \exp(-\mu_{||} r^2/2) r^2 h_0(r). \quad (24)$$

Cabe notar que o denominador de ϵ_{zz0} não é ressonante (Ver Eq.(23)) de maneira que a correção relativística em γ não é fundamental; uma boa aproximação para ϵ_{zz0} poderia ser o uso de $\gamma = 1$, com o que as integrais são facilmente executáveis, restando:

$$\epsilon_{zz0} = 1 - X \quad (25)$$

1b - Distribuição com $T_{||} = T_{\perp}$:

Quando a função distribuição apresenta isotropia de temperatura, alguns elementos do tensor dielétrico ficam consideravelmente simplificados; os elementos da parte hermitiana são obtidos de forma trivial, bastando colocar $T_{||} = T_{\perp}$ nas expressões apresentadas na seção 1. Quanto aos elementos da parte anti-hermitiana, a tentativa de fazer o mesmo resulta numa indeterminação, porque tanto q_+ quanto t se tornam nulos. Ao invés de fazermos o limite para $T_{||} \rightarrow T_{\perp}$, vamos recalcular os elementos da parte anti-hermitiana, operação quase imediata. Valem ainda as expressões (5), de modo que só precisamos calcular ϵ''_{xx} e χ''_{zz} .

Cálculo de ϵ''_{xx} :

Vamos partir da Eq. (8), com $T_{\perp} = T_{\parallel} = T$;

$$\epsilon''_{xx} = -(\pi^2 X Y / 2) (mc)^3 \int_{r_-}^{r_+} dr [2\ell + \mu(\beta_1 + v^2)] f_+, \quad (26)$$

onde $f_+ = A (mc)^{2\ell} [-\beta_1^2 - v^2]^{\ell} \exp(\mu_{\perp} \beta_1 / 2)$.

Com o uso de (9) e da definição de K_1 , escrevemos esta expressão como:

$$\epsilon''_{xx} = K_1 Y (-1)^{\ell+1} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \beta_1^{\ell-k} \int_{r_-}^{r_+} dr (\eta_{\perp} + v^2) v^{2k}$$

$$\epsilon''_{xx} = K_1 Y (-1)^{\ell+1} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \beta_1^{\ell-k} \left[\eta_{\perp} \frac{v^{2k+1}}{2k+1} + \frac{v^{2k+3}}{2k+3} \right]_{r_-}^{r_+}$$

Como $r_+ = (-\beta_1)^{1/2}$ e $r_- = -r_+$, ficamos com:

$$\epsilon''_{xx} = -K_1 (2Y) (-\beta_1)^{\ell+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} \left[\frac{\eta_{\perp}}{2k+1} - \frac{\beta_1}{2k+3} \right] \quad (27)$$

Cálculo de χ''_{zz} :

Um cálculo similar nos leva a:

$$\chi''_{zz} = -K_1 \left(\frac{2}{Y}\right) (-\beta_1)^{\ell+\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \left[\frac{\eta_{\perp}}{2k+3} - \frac{\beta_1}{2k+5} \right] \quad (28)$$

1c - Distribuição com $T_{||} = 0, T_{\perp} \neq 0$:

Neste caso a função distribuição, normalizada à unidade, fica dada por:

$$f(p) = A_0 \delta(p_{||}) p_{\perp}^{2\ell} \exp(-\mu_{\perp} p_{\perp}^2/b), \quad (29)$$

onde $A_0 = (\mu_{\perp}/b)^{\ell+1} / (\pi \ell!)$.

Cálculo de ε''_{xx} :

Podemos partir da Eq. (8), com a função distribuição (29).

$$\varepsilon''_{xx} = -(\pi^2 X Y / 2) (m c)^{2\ell+3} A_0 \exp(\mu_{\perp} \beta_1 / 2) \int_{r_-}^{r_+} dr [\eta_{\perp} + r^2] (-\beta_1 - r^2)^{\ell} \delta(p_{||})$$

$$\varepsilon''_{xx} = -(\pi X Y / 4) (\mu_{\perp}^{\ell+2} / 2^{\ell} \ell!) \eta_{\perp} (-\beta_1)^{\ell} \exp(\mu_{\perp} \beta_1 / 2). \quad (30)$$

Cálculo de χ''_{zz} :

Como se pode ver a partir da Eq. (14) este elemento se rá nulo, devido ao termo $r^2 \delta(p_{||})$ no integrando; portanto,

$$\chi''_{zz} = 0. \quad (31)$$

Cálculo de $\varepsilon'_{xx,\sigma}$:

Analogamente à expressão (16), podemos escrever

$$\varepsilon'_{xx,\sigma} = \pi X A_0 2^l (mc)^{2l+3} \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\infty} du \frac{(1-u^2)u^l}{\alpha_{0\sigma} + r^2/2 + u} \exp(-M_{\perp}u) \delta(r), \quad (32)$$

onde $\alpha_{0\sigma} \equiv 1 - \sigma Y$.

Realizando a integração em r e com o uso de (18) e (19), ficamos com:

$$\varepsilon'_{xx,\sigma} = \frac{\pi X A_0 2^l (mc)^{2l+2}}{u_{\perp}^l} \left[(1-\delta_{l,0})(1-x_{0\sigma}) x_{0\sigma}^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{j!}{x_{0\sigma}^j} - l! - (1-x_{0\sigma}) x_{0\sigma}^l e^{-x_{0\sigma}} E_i(x_{0\sigma}) \right].$$

Usando a expressão de A_0 e rearranjando os termos, resulta

$$\varepsilon'_{xx,\sigma} = (X M_{\perp} / 2 l!) \left\{ -l! + (1-x_{0\sigma}) \left[(1-\delta_{l,0}) \sum_{m=0}^{l-1} (l-1-m)! x_{0\sigma}^m - x_{0\sigma}^l e^{-x_{0\sigma}} E_i(x_{0\sigma}) \right] \right\} \quad (33)$$

Cálculo de $\chi'_{zz,\sigma}$:

Do mesmo modo que no caso de χ''_{zz} , a presença do termo

$r^2 \delta(p_{\parallel})$ no integrando torna nulo o elemento $\chi'_{ZZ,\sigma}$; logo,

$$\chi'_{ZZ,\sigma} = 0. \quad (34)$$

Cálculo de ϵ_{ZZ0} :

A expressão (3), com o uso da função distribuição (29), fornece:

$$\epsilon_{ZZ0} = 1 + \chi A_0 2\pi \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp}^{2\ell+1} \exp(-\mu_{\perp} p_{\perp}^2/b) \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{p_{\parallel}}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} [\delta(p_{\parallel})] \quad (35)$$

Usamos agora uma propriedade da função delta:

$\int f(x) \delta'(x-a) dx = -f'(a)$, onde ' indica derivada em relação ao argumento; portanto, em nosso caso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{p_{\parallel}}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} [\delta(p_{\parallel})] = \left[-\frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \left(\frac{p_{\parallel}}{\gamma} \right) \right]_{p_{\parallel}=0} = - \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{p_{\parallel}^2}{\gamma^3} \right]_{p_{\parallel}=0} = -\frac{1}{\gamma_0},$$

onde $\gamma_0 = \sqrt{1 + p_{\perp}^2/m^2 c^2}$; portanto,

$$\epsilon_{ZZ0} = 1 - 2\pi \chi A_0 \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}^{2\ell+1}}{\gamma_0} \exp(-\mu_{\perp} p_{\perp}^2/b). \quad (36)$$

Evidentemente, a integral em p_{\perp} pode ser resolvida com o uso da aproximação de γ usada anteriormente [Ver Eq.(16)]. Entretanto, como já apontamos, é bastante razoável tomar $\gamma_0 \approx 1$, de modo que resulta:

$$\epsilon_{zz0} = 1 - \chi \quad (37)$$

2 - Elementos de $G_{\alpha\beta}$

Uma vez obtidos os elementos do tensor dielétrico, resta-nos fazer o mesmo para o tensor correlação de correntes. Considerando na Eq. (III.6) apenas a contribuição referente ao harmônico fundamental da frequência de cíclotron, tomando apenas o primeiro termo relevante da expansão em potências de ρ^2 e supondo uma função distribuição par em p_{\parallel} e com simetria cilíndrica no espaço de momentum, obtemos

$$G_{xx} = (\omega/m\gamma(2\pi)^5) (\pi^2\chi/2) \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp}^3 f \delta(\gamma - \gamma'),$$

$$G_{xy} = -G_{yx} = -i G_{xx}, \quad G_{xz} = G_{zx} = 0,$$

$$G_{yy} = G_{xx}, \quad G_{yz} = -G_{zy} = i G_{xz} = 0, \quad (38)$$

$$G_{zz} = N^2 (\omega/m\gamma(2\pi)^5) (\pi^2\chi/2 m^2 c^2 \gamma^2) \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\parallel}^2 p_{\perp}^3 f \delta(\gamma - \gamma').$$

Estas expressões são similares àquelas obtidas para os

elementos da parte anti-hermitiana do tensor dielétrico [Ver Eq. (5)]. De fato, as Eqs. (5) podem ser reduzidas às Eq. (38) com a substituição do operador $\frac{\partial}{\partial p_{\perp}}$ por $[-\omega p_{\perp} / mY(2\pi)^5]$. O desenvolvimento subsequente é portanto análogo ao já empregado, resultando expressões similares às Eq. (13) e (15):

$$\begin{aligned}
 G_{xx} = g K_1 \frac{(-1)^{\ell+1}}{s} \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{k} \frac{\beta_1^{\ell+1-k}}{t^{1+2k}} \left\{ -q_+ e^{-sq_+^2} (1-\delta_{k,0}) \theta_{k-1} \right. \\
 \left. + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) [\delta_{k,0} + (1-\delta_{k,0}) \phi_k] \right\}, \\
 G_{zz} = N^2 g \frac{K_1}{Y^2} \frac{(-1)^{\ell+1}}{s} \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{k} \frac{\beta_1^{\ell+1-k}}{t^{3+2k}} \left\{ -q_+ e^{-sq_+^2} \theta_k \right. \\
 \left. + (\pi s)^{1/2} \operatorname{erf}(s^{1/2} q_+) \phi_{k+1} \right\},
 \end{aligned} \tag{39}$$

onde $g \equiv [\omega mc^2 / \mu_{\perp} (2\pi)^5]$.

No caso de isotropia de temperaturas, temos expressões simplificadas para os elementos $G_{\alpha\beta}$ [Ver Eq. (27) e (28)]:

$$\begin{aligned}
 G_{xx} = g K_1 2 (-\beta_1)^{\ell+\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\ell+1} \frac{(-1)^k \binom{\ell+1}{k}}{2k+1} \\
 G_{zz} = N^2 g \frac{K_1}{Y^2} 2 (-\beta_1)^{\ell+\frac{5}{2}} \sum_{k=0}^{\ell+1} \frac{(-1)^k \binom{\ell+1}{k}}{2k+3}
 \end{aligned} \tag{40}$$

Finalmente, apresentamos expressões para $G_{\alpha\beta}$ quando $T_{\parallel} = 0$ e $T_{\perp} \neq 0$ [Ver Eq. (30) e (31)]:

$$G_{xx} = g (\pi x/4) (u_1^{l+2}/2^l l!) (-\beta_1)^{l+1} \exp(u_1 \beta_1/2)$$

$$G_{zz} = 0.$$

(41)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AS72 ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. ed. Handbook of mathematical functions. New York, Dover, 1972.
- BB61 BEKEFI, G. & BROWN, S.C. Emission of radio-frequency waves from plasmas. American Journal of Physics, New York, 29(7):404-28, July, 1961.
- Be66 BEKEFI, G. Radiation processes in plasmas. New York, John Wiley, 1966.
- BEL79 BORNATICI, M.; ENGELMANN, F.; LISTER, G.G. Finite Larmor radius effects in the absorption of electromagnetic waves around the electron cyclotron frequency. The Physics of Fluids, New York, 22(9):1664-6, Sept. 1979.
- BH66 BEKEFI, G.; HIRSCHFIELD, J.L.; BROWN, S.C. Cyclotron emission from plasmas with non-maxwellian distributions. Physical Review, New York, 122(4):1037-42, May, 1961.
- DGH65 DORY, R.A.; GUEST, G.E.; HARRIS, E.G. Unstable electrostatic plasma waves propagating perpendicular to a magnetic field. Physical Review Letters, New York, 14(5):131-3, Feb. 1965.
- FG79 FIDONE, I. & GRANATA, G. Electron cyclotron emission from thermal plasmas. Plasma Physics, Oxford, 21(4): 315-29, Apr. 1979.
- FGM+80 FIDONE, I.; GRANATA, G.; MEYER, R.L.; JORNADA, E.H.; SCHNEIDER, R.S.; ZIEBELL, L.F. Electron cyclotron emission from tokamak plasmas with mildly superthermal electrons. The Physics of Fluids, New York, 23(7):1336-47, July, 1980.

- FGMR78 FIDONE, I.; GRANATA, G.; MEYER, R.L.; RAMPONI, G.
Electron cyclotron emission from non-maxwellian plasmas.
Fontenay-aux-Roses, Association Euratom-CEA sur la
Fusion, 1978. (EUR-CEA-FC-956).
- FGRM78 FIDONE, I.; GRANATA, G.; RAMPONI, G.; MEYER, R.L. Wave
absorption near the electron cyclotron frequency. The
Physics of Fluids, New York, 21(4):645-52, Apr. 1978.
- FW76 FREUND, H.P. & WU, C.S. Excitation of the ordinary
electromagnetic mode in low- β plasmas. The Physics of
Fluids, New York, 19(2):299-304, Feb. 1976.
- FW77 FREUND, H.P. & WU, C.S. Induced gyroresonant emission of
extraordinary mode radiation. The Physics of Fluids,
New York, 20(4):619-27, Apr. 1977.
- KNY+75 KUBO, H.; NAKAMURA, S.; YUYAMA, T.; MITANI, K.; AIHARA, S.;
HOSOKAWA, M.; IKEGAMI, H. Amplification of extraordinary
waves through relativistic magnetized plasma. Physical
Review Letters, New York, 35(15):998-1000, Oct. 1975.
- KNY+78 KUBO, H.; NAKAMURA, S.; YUYAMA, T.; HOSOKAWA, M.; AIHARA,
S.; IKEGAMI, H. Negative absorption and energy
distribution of hot electrons in relativistic magnetized
plasma. Journal of the Physical Society of Japan,
Tokyo, 45(4):1372-9, Oct. 1978.
- LKW80 LEE, L.C.; KAN, J.R.; WU, C.S. Generation of auroral
kilometric radiation and the structure of auroral
acceleration region. Planetary and Space Science,
Oxford, 28(7):703-11, July, 1980.

- LLT71 LIEBERMAN, M.A.; LICHTENBERG, A.J.; TAKESHITA, T.
Verification of a classical, self-consistent theory of particle loss in a hot electron, magnetic mirror compression experiment. Plasma Physics, Oxford, 13(2): 141-57, Feb. 1971.
- LSL71 LICHTENBERG, A.J.; SCHWARTZ, M.J.; LIEBERMAN, M.A.
Diagnostics for hot-electron magnetically confined plasmas. Plasma Physics, Oxford, 13(2):89-112, Feb. 1971.
- LW80 LEE, L.C. & WU, C.S. Amplification of radiation near cyclotron frequency due to electron population inversion. The Physics of Fluids, New York, 23(7):1348-54, July, 1980.
- Mc66 McCRAY, R. Possibility of maser action in cosmic radio sources. Science, Washington, 154:1320-3, Dec. 1966.
- MP81 MAROLI, C. & PETRILLO, V. Anomalous behaviour of the group velocity for ordinary waves in the electron-cyclotron region. Plasma Physics, Oxford, 23(7):671-5, July, 1981.
- NS74 NICHOLSON, D.R. & SCHWARTZ, M.J. Synchrotron radiation from a weakly relativistic electron plasma. Plasma Physics, Oxford, 16(3):275-82, Mar. 1974.
- Sc59 SCHNEIDER, J. Stimulated emission of radiation by relativistic electrons in a magnetic field. Physical Review Letters, New York, 2(12):504-5, June, 1959.
- Sh66 SHKAROFSKY, I.P. Dielectric tensor in Vlasov plasmas near cyclotron harmonics. The Physics of Fluids, New York, 9(3):561-70, Mar. 1966.

- Sh67 SHAFRANOV, V.D. Electromagnetic waves in a plasma. In: LEONTOVICH, M.A. ed. Review of plasma physics. New York, Consultants Bureau, 1967. v. 3, p. 75.
- TFI81 TANAKA, M.; FUJIWARA, M.; IKEGAMI, H. Finite temperature effect on ray tracing near the electron cyclotron resonance. Journal of the Physical Society of Japan, Tokyo, 50(4):1358-65, Apr. 1981.
- Tr58 TRUBNIKOV, B.A. Magnetic emission of high temperature plasma. Transl. U.S. Atomic Energy Commission, Technical Information Service. s.l. 1958. Thesis.
- Tw58 TWISS, R.Q. Radiation transfer and the possibility of negative absorption in radio astronomy. Australian Journal of Physics, Victoria, 11:564-79, 1958.
- TWVK81 TSAI, S.T.; WU, C.S.; WANG, Y.D.; KANG, S.W. Dielectric tensor of a weakly relativistic, nonequilibrium, and magnetized plasma. The Physics of Fluids, New York, 24(12):2186-90, Dec. 1981.
- WF77 WU, C.S. & FREUND, H.P. Induced emission of Jupiter's decametric radiation by Io-accelerated electrons. The Astrophysical Journal, Chicago, 213(2):575-87, Apr. 1977.
- WL79 WU, C.S. & LEE, L.C. A theory of the terrestrial kilometric radiation. The Astrophysical Journal, Chicago, 230(2):621-6, June, 1979.
- WLW+81 WU, C.S.; LIN, C.S.; WONG, H.K.; TSAI, S.T.; ZHOU, R.L. Absorption and emission of extraordinary-mode electromagnetic waves near cyclotron frequency in nonequilibrium plasmas. The Physics of Fluids, New York, 24(12):2191-6, Dec. 1981.

- WSW63 WILD, J.P.; SMERD, S.F.; WEISS, A.A. Solar Bursts. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Palo Alto, 1:291-366, 1963.
- WWK+82 WONG, H.K.; WU, C.S.; KE, F.J.; SCHNEIDER, R.S.; ZIEBELL, L.F. Electromagnetic cyclotron-loss-cone instability associated with weakly relativistic electrons. Journal of Plasma Physics, Cambridge, 28(3):503-25, Dec. 1982.
- ZD82a ZIEBELL, L.F. & DILLENBURG, D. Amplificação de radiação de cíclotron eletrônica em plasmas não-homogêneos e não-Maxwellianos. Revista Brasileira de Física, São Paulo, Vol. especial I: 3-9, Fev. 1982.
- ZD82b _____. Momentum distribution dependence of induced electron-cyclotron emission (enviado para publicação).
- ZD83 _____. Induced electron-cyclotron emission from inhomogeneous, anisotropic plasmas with electron population inversion. The Physics of Fluids, New York, 26(1):80-6, Jan. 1983.
- Zh67 ZHELESNYAKOV, V.V. Negative reabsorption of synchrotron radiation. Soviet Physics JETP, New York, 24(2):381-6, Feb. 1967.
- Zi79 ZIEBELL, L.F. Teoria da emissão de cíclotron em plasmas magnetizados. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Física da UFRGS, 1979. Diss. Mestr. Física.
- ZS68 ZHELESNYAKOV, V.V. & SUVOROV, E.V. Kinetic theory of the synchrotron instability of a system of relativistic electrons in plasma. Soviet Physics JETP, New York, 27(2):335-41, Aug. 1968.