Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

SOBRE OS TEOREMAS DE DUALIDADE DE COHEN E MONTGOMERY

Dissertação de Mestrado

ANDREA MORGADO

Porto Alegre, 25 de março de 2011

Dissertação submetida por Andrea Morgado[*] [†], como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana

Banca examinadora:
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (PPGMat - UFRGS, ORIENTADOR)
Prof. Dr. Antonio Paques (PPGMat - UFRGS)
Prof. Dr. Bárbara Seelig Pogorelsky (PPGMat - UFRGS)
Prof. Dr. Virgínia Silva Rodrigues (PGMCC - UFSC)

[*]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)
[†]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela excelente formação.

A todos os professores com quem tive o prazer de ter aula durante o curso, principalmente meu orientador, professor Alveri Sant'Ana, pela indicação do artigo que estudamos para a dissertação, por toda paciência (toda mesmo) ao responder minhas dúvidas, pelo incentivo nos momentos de desânimo e por ser o exemplo de professor que um dia quero seguir. Ao professor Antonio Paques, por ter me aceitado como mais nova membra da família das paquitas. Agradeço também a banca examinadora por todas as correções e sugestões feitas, pois contribuíram muito para o resultado final deste trabalho.

A TODOS os amigos da Pós-Graduação que contribuíram para que este trabalho fosse realizado, nem que seja com uma palavra de apoio ou com os bate-papos nos intervalos. Principalmente todas as Paquitas, companheiras de estudo e grandes amigas, a "leva 2009/01", Di, Féfi e Rene, afinal passamos por vários momentos nesses dois anos (histórias engraçadíssimas e de desespero completo com as cadeiras), Pati (nanica), pelas conversas e tantos conselhos, Thi, meu amigo querido, e a minha grande amiga Carol, por sempre poder contar com ela em todos os momentos não só do Mestrado como da vida.

Aos amigos Cami, Carol, Fran e Robertinho, pois juntos formamos o quínteto mais legal.

À Carol S. e sua família por sempre estarem presentes, mesmo nos momentos em que ficamos um pouco afastados.

Ao Márcio, por ter tanta paciência, estar sempre me incentivando, mesmo quando eu acho que tudo vai dar errado e me proporcionar momentos muito felizes. À Dudinha, minha bonequinha.

A Deus, por ser meu porto seguro.

À toda minha família.

Agradeço, principalmente, aos meus pais, por serem um exemplo pra mim e por me ensinarem que o conhecimento é um dos maiores tesouros que podemos ter. Obrigada por todas as oportunidades que me deram para que eu pudesse estudar.

À vózinha Edith, minha querida...

Resumo

Nessa dissertação, apresentamos os Teoremas de Dualidade de Cohen e Montgomery, [4]. Discutimos também a construção de um contexto de Morita para uma álgebra graduada por um grupo finito. Como aplicação dos resultados desenvolvidos no texto, estudamos a relação entre o radical de Jacobson e o radical de Jacobson graduado de álgebras graduadas, apresentando a solução de Cohen e Montgomery para uma conjectura de Bergman.

Abstract

In this work, we will present the Cohen and Montgomery's Duality Theorems, [4]. We also discuss the construction of a Morita context to an algebra graded by a finite group. As an application of the results developed in the text, we studied the relations between the Jacobson radical and the graded Jacobson radical of graded algebras, presenting to Cohen and Montgomery's solution for a Bergman's conjecture.

Índice

Introdução

Os Teoremas de Dualidade para ações e coações tem sua origem na álgebra de operadores, em trabalhos feitos por Takesaki, Landstad, Nakagami, [11], e também por Stratila-Voiculesu-Zsido. Nestes, são consideradas ações e coações de grupos localmente compactos em álgebras de von Neumann. Uma versão mais algébrica de tais teoremas pode ser encontrada em [4], sendo esta estendida para grupos infinitos em [17].

O principal objetivo desta dissertação é apresentar os Teoremas de Dualidade de M. Cohen e S. Montgomery, demonstrados em [4]. Para tal, necessitaremos de algumas propriedades de álgebras graduadas por um grupo finito G. Mais especificamente, sempre que uma K-álgebra A é graduada por um grupo finito G, nós podemos considerar o produto smash $A\#K[G]^*$. Sob certas condições, vamos estudar um contexto de Morita relacionado a A e, posteriormente, demonstrar os Teoremas de Dualidade.

Neste trabalho consideramos K um corpo e G um grupo finito, caso não seja dito nada em contrário. Salientamos também que todos os anéis trabalhados tem unidade.

No capítulo 1, vamos expor resultados básicos, os quais serão necessários para a teoria que segue. Apresentaremos alguns resultados bem conhecidos da Teoria de Anéis, Módulos, Categorias, Contexto de Morita e Álgebras de Hopf, dando destaque para a Proposição 1.1.7 e a Proposição 1.1.16, que são devidos a D.S. Passman e podem ser encontrados em [16] e [14]. Estes são de grande importância para a prova dos Teoremas de Dualidade, feita no Capítulo 4, e para duas aplicações que se seguirão no Capítulo 5.

Já no capítulo 2, começamos com os resultados iniciais do nosso trabalho. Mostraremos que uma ação de grupo finito G em uma K-álgebra A equivale a A ser um $K[G]$-módulo álgebra à esquerda. Mostraremos também que A ser graduada por G é equivalente a A ser um $K[G]^*$-módulo álgebra à esquerda. Seguirá então que, quando uma K-álgebra A é graduada por um grupo G, nós podemos construir o produto smash $A\#K[G]^*$. Por fim, demonstraremos que $A\#K[G]^*$ é um A-módulo à direita e à esquerda livre com base $\{p_g : g \in G\}$, um conjunto de idempotentes ortogonais cuja soma é 1.

No capítulo 3, consideraremos G um grupo finito de ordem n, $\alpha : G \to Aut(S)$, uma ação de G no anel S e R um anel graduado por G. Dessa maneira, podemos formar o skew anel de grupo $S * G$ e o produto smash $R\#K[G]^*$, onde $K[G]^*$ é o dual da álgebra de grupo $K[G]$. Sob estas condições, apresentaremos a prova dos Teoremas de Dualidade para Ações e Coações, os quais nos darão os isomorfismos $(S * G)\#K[G]^* \cong M_n(S)$ e $(R\#K[G]^*) * G \cong M_n(R)$, respectivamente.

No capítulo 4, estudaremos o contexto de Morita $[A_1, W, V, A\#K[G]^*]$, onde W é igual a A, com estrutura de $A\#K[G]^*$-módulo à esquerda e A_1-módulo à direita, e V é igual a A, com estrutura de A_1-módulo à esquerda e $A\#K[G]^*$-módulo à direita.

Para finalizar a dissertação, apresentaremos no Capítulo 5 uma aplicação dos resultados obtidos. Vamos mostrar a igualdade entre o radical de Jacobson $J(A\#K[G]^*)$ e $J_G(A)\#K[G]^*$, onde $J_G(A)$ é o radical de Jacobson graduado de A. A partir disso, mostramos que $J_G(A)$ está sempre contido em $J(A)$, valendo a igualdade quando $\mid G \mid^{-1} \in A$, apresentando assim, a resposta afirmativa de Cohen e Montgomery para a questão de Bergman.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo lembraremos alguns fatos básicos os quais serão necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Apresentaremos aqui resultados sobre Anéis, Módulos, Categorias, Contexto de Morita e Álgebras de Hopf, sendo que alguns destes serão citados sem demonstração. O leitor que possui familiaridade com estes conceitos pode começar sua leitura a partir do próximo capítulo.

1.1 Anéis, Módulos e Categorias

Da Teoria de Anéis, apresentaremos alguns resultados sobre Anéis Primos, Anéis Graduados, Radical de Jacobson e Skew Anel de Grupo. Daremos ênfase a duas proposições de resultados expostos por D.S. Passman em [15] e [16], os quais são essenciais para a prova dos Teoremas de Dualidade e para a aplicação que seguirá, sendo estas discutidas no decorrer deste trabalho.

Começaremos com algumas definições e resultados sobre Anéis Primos e Semiprimos que podem ser encontrados em [8]. Lembremos que todos os anéis trabalhados aqui tem unidade, a menos que seja dito algo em contrário.

Definição 1.1.1. *Um ideal P de um anel R é dito ideal primo, se $P \neq R$ e, para todos ideais $A, B \subseteq R$ tais que $AB \subseteq P$, então $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.*

Proposição 1.1.2. *Sejam R um anel e $P \subseteq R$ um ideal. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) P é primo;

(ii) Para $a, b \in R$, se $(a)(b) \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$, onde $(a) = RaR$ e $(b) = RbR$ são ideais gerados por a e b, respectivamente;

(iii) Para $a, b \in R$, se $aRb \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.

Definição 1.1.3. *Um ideal C de um anel R é dito ideal semiprimo se, $C \neq R$ e, para qualquer ideal $A \subseteq R$ tal que $A^2 \subseteq C$, então $A \subseteq C$.*

Proposição 1.1.4. *Sejam R um anel e $C \subseteq R$ um ideal. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) C é semiprimo;

(ii) Para $a \in R$, se $(a)^2 \subseteq C$, então $a \in C$, onde $(a) = RaR$ é o ideal gerado por a;

(iii) Para $a \in R$, se $aRa \subseteq C$, então $a \in C$.

Observemos que qualquer ideal maximal M de um anel R é primo, pois se escolhermos ideais A, B não contidos em M, como M é maximal temos $M + A = R = M + B$ e, portanto, $R = (M + A)(M + B) = M + AB$, ou seja, AB não está contido em M. Temos também que todo ideal primo é semiprimo.

Definição 1.1.5. *Um anel R é chamado primo (respec. semiprimo) se $\{0\}$ é um ideal primo (respec. semiprimo).*

Note que qualquer domínio D é um anel primo. Entretanto, não é verdade que todo anel primo é um domínio, para ver isso, basta notarmos que qualquer anel simples R (seus únicos ideais são $\{0\}$ e R) é um anel primo.

Nos direcionamos agora para a prova de uma das proposições mais importantes dessa seção. Esta pode ser encontrada em [16, Lemma 1.6] e foi sugerida por Passman à Cohen e Montgomery para a prova dos Teoremas de Dualidade. Para demonstrá-la necessitamos do próximo lema. Lembremos que dado um anel R e $X \subseteq R$ definimos o centralizador de X em R como sendo o conjunto:

$$C_R(X) = \{r \in R : rx = xr, \text{ para todo } x \in X\}$$

Lema 1.1.6. *Seja R um anel que contém um conjunto de elementos*

$$A = \{e_{ij} : i, j = 1, ..., n\}$$

satisfazendo:

$$e_{ij}e_{ab} = \begin{cases} 0, & se\ j \neq a, \\ e_{ib}, & se\ j = a \end{cases} \quad e \quad 1 = e_{11} + ... + e_{nn}$$

Se S é o centralizador em R de todos esses elementos, então $R \cong M_n(S)$ e $S \cong e_{11}Re_{11}$.

Demonstração: Seja $S = C_R(A)$. Consideremos $\phi : M_n(S) \to R$, dada por $\phi([s_{ij}]) = \sum_{ij} s_{ij}e_{ij}$. Vamos mostrar que ϕ é um isomorfismo de anéis.

(1) Escolhendo $[s_{ij}]$ e $[r_{ij}] \in M_n(S)$, claramente temos

$$\phi([s_{ij}] + [r_{ij}]) = \phi([s_{ij}]) + \phi([r_{ij}])$$

Além disso, $\phi([s_{ij}][r_{ij}]) = \phi([s_{ij}])\phi([r_{ij}])$, pois por um lado temos

$$\phi([s_{ij}][r_{ij}]) = \phi(\sum_k(\sum_{ij} s_{ik}r_{kj})) = \phi(\sum_k[s_{ik}r_{kj}]) = \sum_{i,j,k} s_{ik}r_{kj}e_{ij}$$

e por outro lado,

$$\phi([s_{ij}])\phi([r_{ab}]) = (\sum_{ij} s_{ij}e_{ij})(\sum_{ab} r_{ab}e_{ab}) = \sum_{i,j,a,b} s_{ij}e_{ij}r_{ab}e_{ab}$$
$$= \sum_{i,j,a,b} s_{ij}r_{ab}e_{ij}e_{ab} = \sum_{i,a,b} s_{ia}r_{ab}e_{ib}$$

(2) Seja $[s_{ij}] \in Ker\phi$. Temos

$$0 = \phi([s_{ij}]) = \sum_{ij} s_{ij}e_{ij}$$

Fixando a, b, então, para todo k, vale

$$0 = e_{ka}(\sum_{ij} s_{ij}e_{ij})e_{bk} = \sum_{ij} s_{ij}e_{ka}e_{ij}e_{bk} = \sum_{j} s_{aj}e_{kj}e_{bk} = s_{ab}e_{kk}$$

Logo,

$$0 = \sum_{k} s_{ab}e_{kk} = s_{ab}\sum_{k} e_{kk} = s_{ab}$$

Assim, $[s_{ij}] = 0$ e, portanto, ϕ é injetiva.

(3) Escolhemos agora $r \in R$ e definimos $r_{ij} = \sum_k e_{ki}re_{jk}$.

Assim, para todo e_{ab}, vale

$$e_{ab}r_{ij} = \sum_{k} e_{ab}e_{ki}re_{jk} = e_{ai}re_{jb}$$

e

$$r_{ij}e_{ab} = \sum_{k} e_{ki}re_{jk}e_{ab} = e_{ai}re_{jb}$$

ou seja, $r_{ij} \in S$.

Temos então

$$\phi([r_{ij}]) = \sum_{i,j} r_{ij}e_{ij} = \sum_{i,j,k} e_{ki}re_{jk}e_{ij} = \sum_{i,j} e_{ii}re_{jj} = (\sum_{i} e_{ii})r(\sum_{j} e_{jj}) = r$$

Logo, ϕ é sobrejetiva.

Portanto, por (1), (2) e (3), temos que ϕ é um isomorfismo de anéis e, assim, $R \cong M_n(S)$.

Resta agora mostrar que $S \cong e_{11}Re_{11}$. De fato, seja $e_{ij} \in R$, via ϕ, temos

$$e_{ij} \longleftrightarrow \sum_k e_{ka}e_{ij}e_{bk}$$

de onde vem que:

$$e_{ij} \longleftrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } i = a \text{ e } j = b, \\ 0 & \text{se } i \neq a \text{ ou } j \neq b \end{cases}$$

Assim, $e_{11}Re_{11} \cong e_{11}M_n(S)e_{11} \cong S$. ■

Podemos agora apresentar nossa proposição antes mencionada.

Proposição 1.1.7. *Sejam R um anel e $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$, uma decomposição de 1 em uma soma de idempotentes ortogonais. Seja G um subgrupo do grupo das unidades de R, e suponhamos que G permuta o conjunto $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ transitivamente por conjugação. Então $R \cong M_n(S)$, onde S é o anel $S = e_1Re_1$.*

Demonstração: Dados $i, j \in \{1, ..., n\}$, definimos, para todo $g_i \in G$, $g_i^{-1} \centerdot e_1 \centerdot g_i = g_i \centerdot e_1 = e_i$ e definimos também $\{e_{ij}\}$ como sendo $e_{ij} = g_i^{-1} \centerdot e_1 \centerdot g_j$ para quaisquer i, j. Vamos mostrar que tais elementos $\{e_{ij}\}$ satisfazem as hipóteses do lema anterior. Dividiremos a prova em duas etapas:

(1) Seja $a \in \{1, ..., n\}$:

(1.1) Se $j \neq a$:

Observemos que $g_j \centerdot e_1 = e_j \neq e_a = g_a \centerdot e_1$ o que implica que $(g_j \centerdot e_1)(g_a \centerdot e_1) = e_je_a = 0$. Notemos também que

$$g_j \centerdot (g_j \centerdot e_1) = g_j \centerdot (g_j^{-1} \centerdot e_1 \centerdot g_j) = e_1 \centerdot g_j$$

e

$$(g_a \centerdot e_1) \centerdot g_a^{-1} = (g_a^{-1} \centerdot e_1 \centerdot g_a) \centerdot g_a^{-1} = g_a^{-1} \centerdot e_1$$

Logo,

$$e_{ij}e_{ab} = (g_i^{-1} \cdot e_1 \cdot g_j)(g_a^{-1} \cdot e_1 \cdot g_b) = g_i^{-1}g_j \cdot (g_j \cdot e_1)(g_a \cdot e_1) \cdot g_a^{-1}g_b = 0$$

(1.2) Se $j = a$:

$$e_{ij}e_{ab} = g_i^{-1} \cdot e_1 \cdot g_j g_a^{-1} \cdot e_1 \cdot g_b = g_i^{-1} \cdot e_1 \cdot g_b = e_{ib}$$

(2) Temos também que $e_{ii} = g_i^{-1} \cdot e_1 \cdot g_i = e_i$, o que nos dá que $e_{11} + e_{22} + ... + e_{nn} = e_1 + e_2 + ... + e_n = 1$, por hipótese.

Logo, por (1) e (2), $\{e_{ij}\}$ satisfaz as hipóteses do lema anterior e, portanto, $R \cong M_n(S)$, onde $S \cong e_{11}Re_{11} = e_1Re_1$. ■

Agora, nosso próximo passo é apresentar a definição do Radical de Jacobson de um anel R. Em seguida, enunciamos dois resultados conhecidos sobre radicais de Jacobson que podem ser encontrados em [7, Theorem 1.3.3] e [8, Lemma 4.22], respectivamente.

Definição 1.1.8. *Seja R um anel. O radical de Jacobson de R, denotado por $J(R)$, é o conjunto de todos elementos de R os quais anulam todos R-módulos simples.*

Note que podemos escrever

$$J(R) = \cap Ann(M)$$

onde M é R-módulo simples e $Ann(M) = \{r \in R / r \cdot M = 0\}$ é o anulador de M.

Lema 1.1.9. *Sejam R um anel qualquer e $e \in R$ um elemento idempotente de R. Então $J(eRe) = eJ(R)e$.*

Lema 1.1.10. (Lema de Nakayama) *Sejam R um anel $I \subseteq R$ um ideal à direita de R. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $I \subseteq J(R)$;

(ii) Para qualquer R-módulo à direita finitamente gerado M, se $MI = M$*, então* $M = 0$*;*

(iii) Para quaisquer R-módulos à direita $N \subseteq M$ *tais que* M/N *é finitamente gerado, se* $N + MI = M$*, então* $N = M$*.*

Lembremos que G age (por automorfismos) em um anel R, se existe um homomorfismo de grupos $\sigma : G \to Aut(R)$, onde $\sigma(g)$ denota a imagem de g por σ em $Aut(R)$. Estamos interessados em relacionar os radicais de Jacobson de R e do skew anel de grupo $R*G$. Começamos com a seguinte definição, que pode ser encontrada em [8, Example 1.11].

Definição 1.1.11. *Sejam* R *um anel e* G *um grupo agindo por automorfismos em* R*. O skew anel de grupo, denotado por* $R * G$*, é o conjunto das somas formais do tipo* $\sum_{g \in G} r_g g$*, com soma definida coordenada a coordenada e multiplicação dada por:*

$$(r_g g)(s_h h) = r_g (g \centerdot s_h)(gh), \text{ onde } g \centerdot s_h = \sigma(g)(s_h)$$

Podemos observar que um elemento $rg \in R * G$, pode ser escrito como $rg = g\sigma^{-1}(g)(r)$.

Para demonstrar a próxima proposição importante dessa seção, serão necessários uma série de resultados que podem ser vistos em [14], sendo estes demonstrados para o caso de produtos cruzados. Os mesmos podem ser aplicados para o skew anel de grupo, já que este é um caso particular, e é o que faremos aqui. Antes de enunciar os resultados apresentaremos algumas definições.

Definição 1.1.12. *Sejam* $R \subseteq S$*, anéis com mesma unidade.*

(1) Se V_S *é um S-módulo à direita, definimos* $V|_R$ *a restrição de* V *a* R*.*

(2) Se V_R *é um R-módulo à direita, definimos* $V|^S$*, o S-módulo induzido à direita, por* $V|^S = V_R \otimes_R S$*. Sua estrutura de S-módulo é dada por* $(v \otimes s) \centerdot t = v \otimes st$*,*

onde $v \in V$ e $s, t \in S$.

Definição 1.1.13. *Sejam $\sigma \in Aut(R)$ e V um R-módulo à direita. Dizemos que o R-módulo conjugado V^σ é o conjunto $V^\sigma = \{v^\sigma : v \in V\}$, com ação de R em V^σ definida por $v^\sigma \centerdot r^\sigma = (v \centerdot r)^\sigma$, onde $r^\sigma = \sigma(r)$.*

Considerando $S = R * G$ e V um R-módulo à direita, podemos caracterizar $V|^S$ através do próximo lema.

Lema 1.1.14. *Sejam $S = R * G$ e V um R-módulo à direita. Então $V|^S = \oplus_{g \in G} V \otimes g$, com $V \otimes g \cong V^{\sigma^{-1}(g)}$ como R-módulos, onde σ^{-1} denota uma ação de G em $Aut(R)$.*

Demonstração: Como $S = R * G$ é um R-módulo à esquerda livre com base G, segue que, para todo $v \in V$ e $\sum_{g \in G} r_g g$, vale

$$v \otimes_R \sum_{g \in G} r_g g = \sum_{g \in G} v \centerdot r_g \otimes_R g \in \sum_{g \in G} V \otimes_R g$$

A independência linear dos elementos g nos diz que esta soma é direta, logo $V|^S = \oplus_{g \in G} V \otimes g$, como queríamos.

Definimos agora a aplicação $\phi : V^{\sigma^{-1}(g)} \to V \otimes g$, por $\phi(v^{\sigma^{-1}(g)}) = v \otimes g$, para $v \in V$ e $g \in G$. Vamos mostrar que ϕ é um isomorfismo de anéis.

É fácil ver que ϕ é injetiva e sobrejetiva. Para mostrar que ϕ é um homomorfismo, notemos que, usando a estrutura de S-módulo de $V|^S$ e a definição de skew anel de grupo, temos

$$(v \otimes_R g) \centerdot r^{\sigma^{-1}(g)} = v \otimes_R g r^{\sigma^{-1}(g)} = v \otimes_R rg = v \centerdot r \otimes_R g$$

de onde segue que, usando a estrutura de R-módulo de $V^{\sigma^{-1}(g)}$,

$$\phi(v^{\sigma^{-1}(g)} r^{\sigma^{-1}(g)}) = \phi((v \centerdot r)^{\sigma^{-1}(g)}) = v \centerdot r \otimes g = (v \otimes g) \centerdot r^{\sigma^{-1}(g)} = \phi(v^{\sigma^{-1}(g)}) \centerdot r^{\sigma^{-1}(g)}$$

Portanto, ϕ é um isomorfismo e $V|^S = \oplus_{g \in G} V \otimes g$, com $V \otimes g \cong V^{\sigma^{-1}(g)}$. ■

Nosso próximo resultado é um análogo ao Teorema de Maschke.

Teorema 1.1.15. *Seja $S = R * G$, com G finito. Consideremos V um $R * G$-módulo à direita e $W \subseteq V$ um $R * G$-submódulo de V. Se V não tem $\mid G \mid$-torsão e $V = W \oplus U$, onde U é um R-submódulo complementar, então existe um $R * G$-submódulo U' de V com $V. \mid G \mid \subseteq W \oplus U'$.*

Demonstração: Primeiramente, notemos que G permuta os R-submódulos de V. De fato, se U é um R-submódulo de V e $g \in G$, então a fórmula $gr^{\sigma^{-1}(g)} = rg$, implica que Ug é um R-submódulo isomorfo ao módulo conjugado $U^{\sigma^{-1}(g)}$, via $\phi : Ug \to U^{\sigma^{-1}(g)}$, onde $\phi(ug) = u^{\sigma^{-1}(g)}$, para $u \in U$.

Consideremos $V = W \oplus U$. Então, para todo $g \in G$, temos $V \centerdot g = V = W \centerdot g \oplus U \centerdot g = W \oplus U \centerdot g$, pois V e W são $R * G$-módulos. Seja $\pi_g : V \to W$, o homomorfismo determinado por essa decomposição.

Notemos que se $v = w + u \centerdot g$, então $v \centerdot h = w \centerdot h + u \centerdot gh$, qualquer que seja $h \in G$. Assim,

$$\pi_{gh}(v \centerdot h) = \pi_{gh}(w \centerdot h + u \centerdot gh) = w \centerdot h = \pi_g(v) \centerdot h \tag{1.1}$$

Definimos $\pi : V \to W$, por $\pi = \sum_{g \in G} \pi_g$. Vamos mostrar que π, assim definida, é um $R * G$-homomorfismo.

De fato, escolhendo $v \in V$ e $h \in G$ e usando (1.1), temos

$$\pi(v \centerdot h) = \sum_{g \in G} \pi_g(v \centerdot h) = \sum_{g \in G} \pi_{gh}(v \centerdot h) = \sum_{g \in G} \pi_g(v) \centerdot h = \pi(v) \centerdot h$$

Seja agora $U' = Ker(\pi)$. Então U' é um $R * G$-submódulo de V. Se $w \in W \cap U'$, então $0 = \pi(w) = \sum_{g \in G} \pi_g(w) = w. \mid G \mid$. Como V não tem $\mid G \mid$-torsão, segue que $w = 0$. Logo, $W \cap U' = 0$.

Escolhendo $v \in V$, com $w = \pi(v)$, temos que $v. \mid G \mid - w \in Ker(\pi)$. De fato,

$$\pi(v. \mid G \mid - w) = \pi(v). \mid G \mid - \pi(w) = \pi(v). \mid G \mid - w. \mid G \mid = 0$$

Assim, $V \centerdot \mid G \mid \subseteq W \oplus U'$. $\blacksquare$

Pelo teorema acima, podemos observar que se $V \centerdot \mid G \mid = V$, então $V = W \oplus U'$. Temos também que se $V \centerdot \mid G \mid = V$ e V é completamente redutível como R-módulo, então V é completamente redutível como $R * G$-módulo.

Estamos prontos para demonstrar a próxima proposição a qual será usada em uma das aplicações do Capítulo 5. Para sua prova, notemos que $\mid G \mid^{-1} \in V$ implica que $V \centerdot \mid G \mid = V$.

Proposição 1.1.16. *Seja $R * G$ o skew anel de grupo, com G finito. Então:*

$$J(R * G)^{|G|} \subseteq J(R) * G \subseteq J(R * G)$$

Além disso, se $\mid G \mid^{-1} \in R$, então $J(R * G) = J(R) * G$.

Demonstração: Primeiramente, seja V um $R*G$-módulo à direita simples. Então V é um $R * G$-módulo cíclico e $V|_R$ é finitamente gerado. Por 1.1.10, segue que $VJ(R) \neq V$. Como $VJ(R)$ é um $R * G$-submódulo de V segue da simplicidade de V que $VJ(R) = 0$. Logo, $J(R) \subseteq J(R * G)$ e, assim, $J(R) * G \subseteq J(R * G)$.

Supomos agora W um R-módulo simples e construímos o $R*G$-módulo induzido $V = W|^{R*G} = W \otimes (R * G)$. Pelo Lema 1.1.14, segue que $V|^S = \oplus_{g \in G} W \otimes g$ e, então, V possui uma decomposição de comprimento menor ou igual a $\mid G \mid = n$ e $VJ(R * G)^n = 0$.

Seja $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g \in J(R * G)^n$. Então, para qualquer $w \in W$, temos

$$0 = (w \otimes 1) \centerdot \alpha = (w \otimes 1) \centerdot \sum_{g \in G} r_g g = \sum_{g \in G} w \centerdot r_g \otimes g$$

o que nos dá que $W \centerdot r_g = 0$, qualquer que seja $g \in G$. Logo, $r_g \in J(R)$, para todo $g \in G$.

Assim, $J(R * G)^{|G|} \subseteq J(R) * G$.

Finalmente, se $\mid G \mid^{-1} \in R$ e $V|_R$ é completamente redutível, segue do Teorema 1.1.15 que V é completamente redutível como $R*G$-módulo e, então $VJ(R*G) = 0$ qualquer que seja W. Procedendo de maneira análoga, podemos escolher $\alpha = \sum_{g\in G} r_g g \in J(R*G)$, logo, qualquer que seja $w \in W$, temos

$$0 = (w \otimes 1) \centerdot \alpha = \sum_{g\in G} w \centerdot r_g \otimes g$$

de onde segue que $r_g \in J(R)$, para todo $g \in G$.

Sendo assim, $J(R*G) \subseteq J(R)*G$.

Portanto, se $\mid G \mid^{-1} \in R$, então $J(R*G) = J(R)*G$. ∎

Trataremos agora de Anéis Graduados. Seja G um grupo com elemento identidade $e \in G$. A próxima definição pode ser vista em [12].

Definição 1.1.17. *Um anel R é graduado por um grupo G, se existe uma família $\{R_g : g \in G\}$ de subgrupos aditivos R_g de R tal que $R = \oplus_{g\in G} R_g$, com $R_g R_h \subseteq R_{gh}$, quaisquer que sejam $g, h \in G$.*

Notemos que o anel dos polinômios $R = K[X]$ é $\mathbb{Z}$-graduado, com graduação dada por $R_n = 0$, para $n < 0$, $R_0 = R$ e $R_n = \{p(X) \in K[X] : \partial(p(X)) = n\}$, para $n > 0$.

Para um anel graduado $R = \oplus_{g\in G} R_g$, definiremos o conjunto

$$supR = \{g \in G : R_g \neq 0\}$$

como sendo o suporte de R.

Se I é um ideal de $R = \oplus_{g\in G} R_g$, denotamos $I_G = \oplus_{g\in G}(I \cap R_g)$, onde cada componente I_g de I_G é dada por $I_g = I \cap R_g$.

Observemos ainda que o fato de R ser graduado por um grupo G é equivalente a existência de uma aplicação $\beta : G \to End_R(R)$, onde denotamos $\beta(g) = \beta_g$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Para quaisquer $g, h \in G$, $\beta_g \circ \beta_h = 0$ se $g \neq h$ e $\beta_g \circ \beta_g = \beta_g$;

(2) $\sum_{g \in G} \beta_g = I$, a função identidade;

(3) Para todo $g \in G$ e $r, s \in R$, $\beta_g(rs) = \sum_{h \in G} \beta_{gh^{-1}}(r)\beta_h(s)$.

De fato, se escolhermos R um anel graduado, podemos definir $\beta : G \to End_R(R)$, dada por $\beta(g) = \beta_g : R \to R$, onde $\beta_g(r) = r_g$. A verificação das propriedades citadas acima é trivial. Reciprocamente, se existe $\beta : G \to End_R(R)$, dada por $\beta(g) = \beta_g : R \to R$, satisfazendo as propriedades acima, definimos a graduação em R por $R_g = \{\beta_g(r) : r \in R\}$. Note que $R = \oplus R_g$ e, se escolhermos $x \in R_g R_h$, temos que $x = \beta_g(r)\beta_h(s)$, para $r, s \in R$. Logo,

$$\beta_{gh}(x) = \beta_{gh}(\beta_g(r)\beta_h(s)) = \sum_{l \in G} \beta_{ghl^{-1}}(\beta_g(r))\beta_l(\beta_h(s)) = \beta_g(r)\beta_h(s) = x$$

ou seja, $x \in R_{gh}$, o que implica que $R_g R_h \subseteq R_{gh}$.

Uma propriedade importante de anéis graduados será dada no nosso próximo lema, a qual segue de [3, Proposition 1.2]. Os argumentos aqui apresentados são devidos a M. Dokuchaev, [6].

Lema 1.1.18. *Seja R um anel graduado por G, tal que G tem ordem finita. Se $J \subseteq R$ é um ideal graduado, então J é um ideal nilpotente de R se, e somente se, J_1 é um ideal nilpotente de R_1, onde $J_1 = J \cap R_1$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Trivial.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que J_1 é um ideal nilpotente de R_1, ou seja, existe m tal que $J_1^m = 0$. Seja $s = \mid G \mid m$ e consideremos $J_{g_1}J_{g_2}...J_{g_s}$, com $g_i's \in G$.

Vamos definir $h_0 = 1$, $h_1 = g_1$, $h_2 = g_1g_2$,..., $h_s = g_1g_2...g_s$. Dessa maneira, obteremos $s+1 = \mid G \mid m+1$ valores de $h_i's$. Como $s+1$ é maior que $\mid G \mid$, existem pelo menos $m+1$ valores de $h_i's$ iguais, digamos $h_{i_0} = h_{i_1} = ... = h_{i_m}$.

Então, para $0 \leq k \leq m-1$, temos

$$g_1 g_2 ... g_{i_k} = (g_1 g_2 ... g_{i_k}) g_{i_k+1} ... g_{i_{k+1}}$$

de onde segue que $g_{i_k+1} ... g_{i_{k+1}} = 1$ para $0 \leq k \leq m-1$.

Logo,

$$\begin{aligned} J_{g_1} J_{g_2} ... J_{g_s} &= J_{g_1} J_{g_2} ... J_{g_{i_0}} J_{g_{i_0+1}} ... J_{g_{i_1}} J_{g_{i_1+1}} ... J_{g_{i_2}} ... J_{g_{i_m}} ... J_{g_s} \\ &\subseteq J_{g_1} J_{g_2} ... J_{g_{i_0}} J_1^m ... J_{g_s} = 0 \end{aligned}$$

Assim, J é um ideal nilpotente de R. ■

Apresentaremos agora algumas definições, as quais são básicas para a Teoria de Categorias, sendo estas usadas em alguns resultados do Capítulo 3. As definições a seguir podem ser vistas em [18] e [19].

Definição 1.1.19. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de uma classe de objetos, denotados $\mathcal{OBJ}_{\mathcal{C}}$, onde para qualquer par (A, B) de objetos de $\mathcal{C}$ associamos um conjunto de morfismos de A para B, denotado $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e, para qualquer $A \in \mathcal{C}$, existe um morfismo identidade $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$. Além disso, para qualquer tripla A, B, C de objetos de $\mathcal{C}$, existe uma operação de composição de morfismos*

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C), \text{ onde } (f, g) \mapsto g \circ f$$

satisfazendo as seguintes propriedades, para $A, B, C, D \in \mathcal{C}$:

(1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, para quaisquer $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$;

(2) $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$, para qualquer $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$;

(3) $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A', B') = \varnothing$, sempre que $(A, B) \neq (A', B')$.

Como um exemplo de categorias, podemos considerar a categoria dos conjuntos, onde seus objetos são dados por conjuntos e seus morfimos são as funções. Em nosso trabalho, consideraremos a categoria dos R-módulos, denotada $Mod(R)$, onde seus objetos são R-módulos e seus morfismos são os homomorfismos de R-módulos.

Definição 1.1.20. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é uma aplicação que associa, para qualquer objeto $A \in \mathcal{A}$, um objeto $F(A)$ em $\mathcal{B}$ e, para qualquer morfismo $f : A \to B$ em $Hom(A, B)$, um morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ em $Hom(F(A), F(B))$, satisfazendo as seguintes condições:*

(1) *$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, para $f, g \in \mathcal{A}$;*

(2) *$F(1_A) = 1_{F(A)}$.*

Definição 1.1.21. *Sejam F e G funtores de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Uma transformação natural $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é uma aplicação que associa para qualquer objeto $A \in \mathcal{A}$ um morfismo $\eta_A : F(A) \to G(A)$ em $Hom(F(A), G(A))$, de maneira que, para todo morfismo $f : A \to A'$ em $Hom(A, A')$, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_C"'] & F(C') \arrow[d, "\eta_{C'}"] \\
G(C) \arrow[r, "G(f)"'] & G(C')
\end{tikzcd}$$

Se, para qualquer objeto $A \in \mathcal{A}$, temos que η_A é um isomorfismo, dizemos que η é um isomorfismo natural ou uma equivalência natural. Se existe uma equivalência natural entre os funtores F e G, os mesmos são ditos naturalmente equivalentes e denotamos $F \cong G$.

Definição 1.1.22. *Dizemos que duas categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfas, se existem funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tais que $I_{\mathcal{A}} \cong G \circ F$ e $I_{\mathcal{B}} \cong F \circ G$, onde $I_{\mathcal{A}}$ e $I_{\mathcal{B}}$ são os funtores identidade nas respectivas categorias, ou seja, $I_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é tal que $I_{\mathcal{A}}(A) = A$, para qualquer objeto $A \in \mathcal{A}$ e, para qualquer morfismo $f : A \to A'$ em $\mathcal{A}$, temos $I_{\mathcal{A}}(f) = f$ e da mesma forma tem-se $I_{\mathcal{B}}$.*

1.2 Contexto de Morita

Nosso objetivo nessa seção é estudar o contexto de Morita relacionado a P, onde P é um R-módulo à direita. Os resultados iniciais dessa seção podem ser encontrados em [9].

Vamos começar com a seguinte definição.

Definição 1.2.1. *Sejam R, S anéis e P um R-módulo à direita. Dizemos que $[R, P, Q, S, \alpha, \beta]$ é um contexto de Morita associado a P_R, se P é um (S, R)-bimódulo, Q é um (R, S)-bimódulo e α e β são aplicações tais que:*

(1) *$\alpha : Q \otimes_S P \to R$ é um homomorfismo de R-bimódulos;*

(2) *$\beta : P \otimes_R Q \to S$ é um homomorfismo de S-bimódulos;*

(3) *Quaisquer que sejam $p, p' \in P$ e $q, q' \in Q$, temos $\beta(p, q)p' = p\alpha(q, p')$ e $q\beta(p, q') = \alpha(q, p)q'$.*

Observemos que dado um contexto de Morita $[R, P, Q, S, \alpha, \beta]$, podemos formar um anel de matrizes C dado por:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} R & Q \\ P & S \end{pmatrix}$$

onde as condições (1), (2) e (3) da definição acima nos dão a associatividade deste anel. Este anel é chamado o Anel de Morita para o contexto $[R, P, Q, S, \alpha, \beta]$.

Seja R um anel e escolhemos P um R-módulo à direita. Assim, podemos considerar $Q = Hom_R(P, R)$ e $S = End_R(P)$. Temos que P é S-módulo à esquerda com ação definida por $f \centerdot p = f(p)$, para $f \in S$ e $p \in P$. Com ação assim definida, P é (S, R)-bimódulo. Podemos também definir uma ação à esquerda de R em Q por $(r \centerdot q)(p) = rq(p)$, para $r \in R$, $q \in Q$ e $p \in P$, e uma ação à direita de S em Q por $(q \centerdot g)(p) = q(g(p))$, para $q \in Q$, $g \in S$ e $p \in P$. Dessa maneira, temos que Q é um (R,S)-bimódulo. Se escolhermos $\alpha : Q \otimes_S P \to R$ como sendo $\alpha(q,p) = q(p)$ e $\beta : P \otimes_R Q \to S$ como sendo $\beta(p,q) = pq$, para $q \in Q$ e $p \in P$, então $[R,P,Q,S,\alpha,\beta]$ é um contexto de Morita associado a P_R. O leitor que deseja maiores detalhes dessa construção pode encontrá-la em [9] ou [19].

Definição 1.2.2. *Sejam R, S anéis. Dizemos que R e S são Morita equivalentes, e denotamos $R \approx S$, se existe um isomorfismo de categorias $F : Mod(R) \to Mod(S)$, onde $Mod(R)$, $Mod(S)$ denotam as categorias do R-módulos e S-módulos à direita, respectivamente.*

Dos resultados apresentados em [9], segue que R e S são Morita equivalentes se, e somente se, as aplicações α e β do contexto de Morita $[R,P,Q,S,\alpha,\beta]$ são sobrejetivas.

Vamos enunciar agora uma propriedade relacionada ao contexto de Morita, a qual está demonstrada em [13, Proposition 3], mas antes segue uma definição.

Definição 1.2.3. *O contexto de Morita $[R,_S W_R,_R V_S, S]$ é chamado primo se C é um anel primo.*

Proposição 1.2.4. *Seja $[R,W,V,S]$ um contexto de Morita com $R \neq 0$. Então o contexto de Morita é primo se, e somente se,*

(i) R é um anel primo;

(ii) $VsW = 0$, $s \in S \Rightarrow s = 0$;

(iii) $Vw = 0$, $w \in W \Rightarrow w = 0$;

(iv) $vW = 0$, $v \in V \Rightarrow v = 0$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que C é um anel primo.

(i) Sejam $x, y \in R$, com $x \neq 0$, tais que $xRy = 0$. Então

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & V \\ W & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xRy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como C é primo e $x \neq 0$, segue que $y = 0$. Portanto, R é um anel primo.

(ii) Como C é um anel primo para cada $0 \neq v \in V$ e $0 \neq w \in W$, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & V \\ W & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vSw & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, $vSw \neq 0$, o que implica que dados $0 \neq v \in V$ e $0 \neq w \in W$, existe $s = s_{v,w} \in S$ tal que $vsw \neq 0$. Portanto, se $VsW = 0$ para $s \in S$, então $s = 0$.

(iii) Seja $Vw = 0$, para $w \in W$. Temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & V \\ W & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Vw & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como C é primo, segue que $w = 0$.

(iv) Segue de maneira análoga a (iii).

$(\Leftarrow)$ Vamos mostrar que C é um anel primo. Sejam $c_1, c_2 \in C$, dados por

$$\mathbf{c_1} = \begin{pmatrix} r_1 & v_1 \\ w_1 & s_1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{c_2} = \begin{pmatrix} r_2 & v_2 \\ w_2 & s_2 \end{pmatrix}$$

tais que $c_1 \neq 0$ e $c_1 C c_2 = 0$.

Vamos mostrar que $c_2 = 0$. Dividiremos a prova em casos:

(1) $r_1 \neq 0$:

Nesse caso,

$$\begin{pmatrix} r_1 & v_1 \\ w_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & v_2 \\ w_2 & s_2 \end{pmatrix} \subseteq c_1 C c_2 = 0$$

o que implica que

$$\begin{pmatrix} r_1 & v_1 \\ w_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & v_2 \\ w_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1Rr_2 & r_1Rv_2 \\ w_1Rr_2 & w_1Rv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de onde segue que $r_1Rr_2 = 0$ e $r_1Rv_2 = 0$.

De (i), temos que R é um anel primo, logo se $r_1Rr_2 = 0$ e $r_1 \neq 0$, então $r_2 = 0$.

Temos também que se $r_1Rv_2 = 0$, então $r_1Rv_2W = 0$ (note que pela definição de contexto de Morita $v_2W \in R$). Novamente, como R é anel primo e $r_1 \neq 0$, temos $v_2W = 0$ e por (iv), $v_2 = 0$.

Novamente,

$$\begin{pmatrix} r_1 & v_1 \\ w_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w_2 & s_2 \end{pmatrix} \subseteq c_1Cc_2 = 0$$

o que implica que

$$\begin{pmatrix} r_1 & v_1 \\ w_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1Vw_2 & r_1Vs_2 \\ w_1Vw_2 & w_1Vs_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de onde segue que $r_1Vw_2 = 0$ e $r_1Vs_2 = 0$.

Temos que $r_1RVw_2 \subseteq r_1Vw_2 = 0$, logo $r_1RVw_2 = 0$ e como R é um anel primo e $r_1 \neq 0$, temos que $Vw_2 = 0$, de onde segue por (iii) que $w_2 = 0$.

Além disso, se $r_1Vs_2 = 0$, então $r_1Vs_2W = 0$. Como $r_1RVs_2W \subset r_1Vs_2W = 0$, temos $r_1RVs_2W = 0$. Novamente, usando que R é primo e $r_1 \neq 0$, temos $Vs_2W = 0$, o que nos dá por (ii) que $s_2 = 0$.

Logo, $c_2 = 0$, como queríamos mostrar.

Os casos $r_1 = 0$ e $w_1 \neq 0$, $r_1 = w_1 = 0$ e $v_1 \neq 0$, $r_1 = w_1 = v_1 = 0$ e $s_1 \neq 0$ são tratados de maneira análoga.

Sendo assim, se $c_1Cc_2 = 0$ com $c_1 \neq 0$, então $c_2 = 0$ e, portanto, C é um anel primo. ■

1.3 Álgebras de Hopf

Seja K um corpo e consideremos todos os produtos tensoriais sobre K. O objetivo dessa seção é introduzir o produto smash $A\#H$, onde H é uma biálgebra e A é um H-módulo álgebra. As definições e resultados a seguir podem ser encontrados em [5]. Vamos começar a seção com as seguintes definições.

Definição 1.3.1. *Uma K-álgebra é uma tripla (A, M, u), onde A é um K-espaço vetorial, $M : A \otimes A \to A$ e $u : K \to A$ são morfismos de K-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes M"] \arrow[d, "M \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\ A \otimes A \arrow[r, "M"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "M"] & \\ K \otimes A \arrow[ur, "u \otimes I_A"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \otimes K \arrow[ul, "I_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\tilde{\varphi}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

onde $\varphi : K \otimes A \to A$ e $\tilde{\varphi} : A \otimes K \to A$ são os isomorfismos canônicos.

Dualizando os diagramas acima, obtemos a noção de uma K-coálgebra, o que é feito na próxima definição.

Definição 1.3.2. *Uma K-coálgebra é uma tripla (C, Δ, ε), onde C é um K-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to K$ são morfismos de K-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes I_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "I_C \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ K \otimes C & & C \otimes K \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes I_C"] \arrow[ur, "I_C \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

onde $\varphi : C \to K \otimes C$ e $\tilde{\varphi} : C \to C \otimes K$ são os isomorfismos canônicos.

Faremos agora uma pequena observação sobre a Notação de Sweedler. Note que se (C, Δ, ε) é uma coálgebra, então, para um elemento $c \in C$, nas notações usuais de soma, teríamos $\Delta(c) = \sum_{i=1,\ldots,n} c_{i1} \otimes c_{i2}$. A Notação de Sweedler omitirá o índice i, ou seja, nós poderemos escrever $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$. Essa é uma maneira para escrever $\Delta(c)$ e é muito usada para escrever composições longas envolvendo a comultiplicação. O leitor que deseja uma explicação mais rigorosa, pode encontrá-la em [5].

Nossa próxima definição reunirá em apenas uma estrutura as estruturas de K-álgebra e K-coálgebra.

Definição 1.3.3. *Uma K-biálgebra é uma quíntupla $(H, M, u, \Delta, \varepsilon)$, onde H possui uma estrutura de K-álgebra (H, M, u) e uma estrutura de K-coálgebra (H, Δ, ε) tal que $\Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g)$, $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, $\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$ e $\varepsilon(1_H) = 1_K$ para todos $h, g \in H$ (nesse caso, dizemos que Δ e ε são morfismos de álgebras, vide [5]).*

Exemplo 1.3.4. *Seja $K[G]$ o K-espaço vetorial com base $\{g : g \in G\}$. Então $K[G]$ é uma biálgebra com multiplicação induzida pela multiplicação de G, unidade 1_G, comultiplicação dada por $\Delta(g) = g \otimes g$ e counidade dada por $\varepsilon(g) = 1$, para todo $g \in G$.*

Demonstração: É fácil ver que $K[G]$ é uma K-álgebra com multiplicação induzida pela multiplicação do grupo G e unidade 1_G. Vamos mostrar que $K[G]$ é uma K-coálgebra via Δ e ε dados como acima. Seja $g \in G$, temos

$$(\Delta \otimes I_H) \circ \Delta(g) = (\Delta \otimes I_H)(g \otimes g) = g \otimes g \otimes g = (I_H \otimes \Delta)(g \otimes g) = (I_H \otimes \Delta) \circ \Delta(g)$$

E mais

$$g\varepsilon(g) = g1 = g = 1g = \varepsilon(g)g$$

Resta apenas mostrar agora que Δ e ε são homomorfismos de álgebras.

De fato, para $g, g' \in G$,

$$\Delta(g)\Delta(g') = (g \otimes g)(g' \otimes g') = gg' \otimes gg' = \Delta(gg')$$

e

$$\varepsilon(g)\varepsilon(g') = 1.1 = 1 = \varepsilon(gg')$$

E mais, $\Delta(1_G) = 1_G \otimes 1_G$ e $\varepsilon(1_G) = 1_K$.

■

Definição 1.3.5. *Dizemos que A é H-módulo álgebra à esquerda, onde A é uma K-álgebra e H uma K-biálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε, se existe uma aplicação $\psi : H \otimes A \to A$, com $h \otimes a \mapsto \psi(h \otimes a) = h \centerdot a$ tal que, para todos $a, b \in A$, $h, g \in H$, vale:*

(1) A é H-módulo à esquerda via ψ (equivalentemente, H age na K-álgebra A via ψ), ou seja:

(1.1) $h \centerdot (g \centerdot a) = (hg) \centerdot a$;

(1.2) $1_H \centerdot a = a$;

(2) $h \centerdot (ab) = \sum (h_1 \centerdot a)(h_2 \centerdot b)$, onde $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$;

(3) $h \centerdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$.

A partir dessas definições podemos construir o produto smash $A\#H$. Seja A um H-módulo álgebra, definimos o produto smash $A\#H$ como sendo o K-espaço vetorial $A \otimes H$, onde seus elementos $a \otimes h$ são escritos como $a\#h$ e a multiplicação é definida por:

$$(a\#g)(b\#h) = \sum a(g_1 \centerdot b)\#(g_2 h)$$

onde $\Delta(g) = \sum g_1 \otimes g_2$

Proposição 1.3.6. *Nas notações acima, temos que $A\#H$ é uma K-álgebra com unidade dada por $1 = 1_A\#1_H$.*

Demonstração: Vamos mostrar a associatividade da multiplicação e a existência de um elemento unidade. As demais propriedades de uma K-álgebra são imediatas.

Sejam $a, b, c \in A$ e $e, g, h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}((a\#e)(b\#g))(c\#h) &= \sum (a(e_1 \centerdot b)\#(e_2 g))(c\#h) = \sum a(e_1 \centerdot b)(e_2 g_1 \centerdot c)\#e_3 g_2 h \\ &= \sum a(e_1 \centerdot (b(g_1 \centerdot c)))\#e_2 g_2 h = (a\#e) \sum b(g_1 \centerdot c)\#g_2 h \\ &= (a\#e)((b\#g)(c\#h))\end{aligned}$$

Logo, a multiplicação é associativa. E mais, dado $a\#h \in A\#H$ temos

$$(a\#h)(1_A\#1_H) = \sum a(h_1 \centerdot 1_A)\#h_2 1_H = \sum a(\varepsilon(h_1)1_A)\#h_2 = \sum a\#\varepsilon(h_1)h_2 = a\#h$$

De modo análogo, $(1_A\#1_H)(a\#h) = (a\#h)$.

Portanto, $A\#H$ é uma K-álgebra com unidade, cuja a unidade é dada por $1 = 1_A\#1_H$. ■

Notemos que dadas uma K-álgebra (A, M, u) e uma K-coálgebra (C, Δ, ε) nós podemos considerar o K-espaço vetorial dos K-homomorfismos de C em A, denotado $Hom_K(C, A)$. É fácil verificar que $Hom_K(C, A)$ é uma K-álgebra com multiplicação dada pelo produto convolução, onde, escolhendo $f, g \in Hom_K(C, A)$, este é definido por

$$f * g = M \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

e unidade dada por $u \circ \varepsilon$.

Em particular, se considerarmos $(H, M, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra, então $Hom_K(H, H)$ é uma K-álgebra com produto convolução $*$ e unidade $u \circ \varepsilon$. Nestas notações, podemos definir uma antípoda para H como sendo uma aplicação $S : H \to H$ tal que S é a inversa de I_H em relação ao produto convolução, ou seja,

$$S * I_H = u \circ \varepsilon = I_H * S \Leftrightarrow \forall h \in H, \sum S(h_1)h_2 = u(\varepsilon(h)) = \varepsilon(h)1_H = \sum h_1 S(h_2)$$

onde $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$. Quando a antípoda S existir, ela é única.

A partir dessas observações, temos nossa próxima definição.

Definição 1.3.7. *Uma Álgebra de Hopf é uma biálgebra* $(H, M, u, \Delta, \varepsilon)$ *que possui antípoda* S*.*

Note que $K[G]$ é uma álgebra de Hopf, onde sua antípoda é dada por $S(g) = g^{-1}$.

Capítulo 2

O Produto Smash $A\#K[G]^*$

Consideremos G um grupo finito e K um corpo. Estamos interessados em analisar ações de grupo e $K[G]$-módulos álgebra, onde $K[G]$ é o K-espaço vetorial com base $\{g : g \in G\}$. Após isso, consideraremos A uma álgebra graduada por G e estabeleceremos relações entre A e $K[G]^*$-módulos álgebra. Por fim, veremos que dada uma álgebra A graduada por G, podemos estudar o caso particular em que o produto smash é dado por $A\#K[G]^*$.

2.1 Ações de Grupo e o Produto Smash $A\#K[G]$

Vamos aqui relacionar ações de grupo e $K[G]$-módulos álgebra.

Vamos denotar por $\alpha : G \to Aut(A)$, onde $\alpha(g) = \alpha_g$, a ação de G, por automorfismos, em uma K-álgebra A.

Proposição 2.1.1. *Com estas notações, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe uma ação de G em A.*

(ii) *A é um $K[G]$-módulo álgebra à esquerda.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $\alpha : G \to Aut(A)$ uma ação de G em A. Vamos mostrar que $\psi : K[G] \otimes A \to A$, onde $\psi(g \otimes a) = \alpha_g(a)$, faz de A um $K[G]$-módulo álgebra à esquerda.

De fato,

(1) Dados $g, g^{'} \in G$ e $a \in A$,

$$\begin{aligned} g \centerdot (g^{'} \centerdot a) &= \psi(g \otimes \psi(g^{'} \otimes a)) = \psi(g \otimes \alpha_{g'}(a)) \\ &= \alpha_g(\alpha_{g'}(a)) = \alpha_{gg'}(a) = \psi(gg^{'} \otimes a) = (gg^{'}) \centerdot a \end{aligned}$$

e

$$1_G \centerdot a = \psi(1_G \otimes a) = \alpha_{1_G}(a) = I_A(a) = a$$

(2) Dados $a, b \in A$ e $g \in G$,

$$g \centerdot (ab) = \psi(g \otimes ab) = \alpha_g(ab) = \alpha_g(a)\alpha_g(b) = \psi(g \otimes a)\psi(g \otimes b) = (g \centerdot a)(g \centerdot b)$$

(3) Dado $g \in G$,

$$g \centerdot 1_A = \psi(g \otimes 1_A) = \alpha_g(1_A) = 1_A = 1_K 1_A = \varepsilon(g)1_A$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja agora A um $K[G]$-módulo álgebra com ação $\psi : K[G] \otimes A \to A$, onde $\psi(g \otimes a) = g \centerdot a$.

Escolhemos $a, b \in A$ e $g \in G$, temos

$$a = 1_G \centerdot a = g^{-1}g \centerdot a = g^{-1} \centerdot (g \centerdot a) = g \centerdot (g^{-1} \centerdot a)$$

e

$$g \centerdot (a + b) = g \centerdot a + g \centerdot b$$

Assim, definindo $\alpha_g : A \to A$, por $\alpha_g(a) = g \centerdot a$ para todo $a \in A$ e $g \in G$, obtemos que α_g é uma bijeção e é aditiva.

Além disso, como $\Delta(g) = g \otimes g$ e $g \centerdot (ab) = (g \centerdot a)(g \centerdot b)$, temos

$$\alpha_g(ab) = g \centerdot (ab) = (g \centerdot a)(g \centerdot b) = \alpha_g(a)\alpha_g(b)$$

e segue que $\alpha_g \in Aut(A)$ para todo $g \in G$.

Temos também que a aplicação $\alpha : G \to Aut(A)$, onde $\alpha(g) = \alpha_g$, é um homomorfismo de grupos. De fato, dados $g, h \in G$ e $a \in A$, temos

$$\alpha(gh)(a) = \alpha_{gh}(a) = (gh) \centerdot (a) = g \centerdot (h \centerdot a) = \alpha_g(\alpha_h(a)) = \alpha(g)\alpha(h)(a)$$

Portanto, α define uma ação de G em A. ■

Pela proposição anterior, se G é um grupo agindo numa K-álgebra A, então A é um $K[G]$-módulo álgebra à esquerda e, sendo assim, podemos considerar o produto smash $A\#K[G]$, onde a multiplicação é dada por

$$(a\#g)(b\#h) = a(g \centerdot b)\#gh, \text{ onde } g \centerdot b = \alpha_g(b)$$

de onde segue que o produto smash nesse caso nada mais é do que o skew anel de grupo, o qual costumamos denotar por $A * G$.

2.2 Álgebras Graduadas e o Produto Smash $A\#K[G]^*$

Vamos considerar A uma álgebra graduada e $K[G]^*$ o dual de $K[G]$. Sabemos que uma K-base para $K[G]^*$ é dada pelo conjunto de projeções $\{p_g : g \in G\}$, onde para qualquer $g \in G$ e $x = \sum_{h \in G} \alpha_h h \in K[G]$, tem-se $p_g(x) = \alpha_g \in K$. Tal conjunto $\{p_g : g \in G\}$ consiste de idempotentes ortogonais cuja soma é 1, como é fácil ver.

Com essas notações enunciamos a próxima proposição.

Proposição 2.2.1. *Nas notações acima, $K[G]^*$ é uma biálgebra com multiplicação dada pelo produto convolução, $1_{K[G]^*} = \sum_{g\in G} p_g$, comultiplicação*

$$\Delta(p_g) = \sum_{h\in G} p_{gh^{-1}} \otimes p_h$$

e counidade

$$\varepsilon(p_g) = \delta_{1,g} = \begin{cases} 1, & se\ g = 1 \\ 0, & se\ g \neq 1 \end{cases}$$

Demonstração: É fácil ver que $K[G]^*$ é uma K-álgebra via produto convolução e unidade $1_{K[G]^*} = \sum_{g\in G} p_g$.

Verifiquemos que $K[G]^*$ é uma K-coálgebra com as aplicações Δ e ε definidas acima. Seja $p_g \in K[G]^*$, por um lado segue que

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes I_{K[G]^*}) \circ \Delta(p_g) &= (\Delta \otimes I_{K[G]^*})(\sum_h p_{gh^{-1}} \otimes p_h) = \sum_h \Delta(p_{gh^{-1}}) \otimes p_h \\ &= \sum_h \sum_l p_{gh^{-1}l^{-1}} \otimes p_l \otimes p_h = \sum_h \sum_l p_{g(lh)^{-1}} \otimes p_l \otimes p_h\end{aligned}$$

Por outro, temos

$$\begin{aligned}(I_{K[G]^*} \otimes \Delta) \circ \Delta(p_g) &= (I_{K[G]^*} \otimes \Delta)(\sum_h p_{gh^{-1}} \otimes p_h) = \sum_h p_{gh^{-1}} \otimes \Delta(p_h) \\ &= \sum_h \sum_t p_{gh^{-1}} \otimes p_{ht^{-1}} \otimes p_t\end{aligned}$$

onde, se fizermos $t = h$ e $l = ht^{-1}$, a igualdade segue.

Temos também que, para todos $p_h, p_g \in K[G]^*$ e para todo $g \in G$, vale

$$(\sum_g p_g * p_h)(l) = \sum_g p_g(l) p_h(l) = \delta_{h,l} = p_h(l)$$

(análogo para $p_h * \sum_g p_g$).

Resta apenas verificar que Δ e ε são morfismos de álgebras.

Observemos que a aplicação $\rho : K[G]^* \otimes K[G]^* \to (K[G] \otimes K[G])^*$, definida por $\rho(p_g \otimes p_h)(l \otimes t) = p_g(l)p_h(t)$, para todos $p_g, p_h \in K[G]^*$ e $l, t \in G$, é injetiva. Vamos usar a aplicação ρ assim definida, para mostrar que Δ é um morfismo de álgebras.

De fato, sejam $p_g, p_h \in K[G]^*$ e $l, t \in G$, por um lado segue que

$$
\begin{aligned}
\rho(\Delta(p_g p_h))(l \otimes t) = \rho(\Delta(p_g))(l \otimes t) &= \sum_{k \in G} p_{gk^{-1}}(l) p_k(t) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } gk^{-1} = l \text{ e } k = t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por outro, temos

$$
\begin{aligned}
\rho(\Delta(p_g)\Delta(p_h))(l \otimes t) &= \rho((\sum_{k \in G} p_{gk^{-1}} \otimes p_k)(\sum_{f \in G} p_{hf^{-1}} \otimes p_f))(l \otimes t) \\
&= \rho(\sum_k \sum_f p_{gk^{-1}} p_{hf^{-1}} \otimes p_k p_f)(l \otimes t) \\
&= \rho(\sum_k p_{gk^{-1}} p_{hk^{-1}} \otimes p_k)(l \otimes t) \\
&= \sum_k p_{gk^{-1}}(l) p_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } gk^{-1} = l \text{ e } k = t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Como ρ é injetiva, segue que $\Delta(p_g p_h) = \Delta(p_g)\Delta(p_h)$.

É fácil verificar que ε é um morfismo de álgebras.

Portanto, $K[G]^*$ é uma biálgebra. ■

Nossa próxima proposição nos permite construir o produto smash $A \# K[G]^*$, sempre que uma K-álgebra A é graduada por um grupo finito G.

Proposição 2.2.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é graduada por G.

(ii) A é $K[G]^*$-módulo álgebra à esquerda.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Por hipótese, A é graduada por G, logo $A = \oplus_{g\in G} A_g$, com $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, quaisquer que sejam $g, h \in G$. Então, qualquer elemento $a \in A$ pode ser escrito de maneira única como $a = \sum_{g\in G} a_g$, com $a_g \in A_g$. Nós definimos a ação de $K[G]^*$ em A por $\varphi : K[G]^* \otimes A \to A$, onde $\varphi(p_g \otimes a) = p_g \cdot a = a_g$. Mostraremos que A é $K[G]^*$-módulo álgebra à esquerda via φ. Assim,

(1) A é $K[G]^*$-módulo à esquerda via φ.

De fato, pois dados $g, h \in G$ e $a \in A$, temos

$$p_g \cdot (p_h \cdot a) = p_g \cdot a_h = \begin{cases} a_g, & \text{se } g = h \\ 0, & \text{se } g \neq h \end{cases}$$

e, por outro lado,

$$p_g p_h \cdot a = \begin{cases} p_g \cdot a = a_g, & \text{se } g = h \\ 0 \cdot a = 0, & \text{se } g \neq h \end{cases}$$

Além disso,

$$1_{K[G]^*} \cdot a = (\sum_{g\in G} p_g) \cdot a = \sum_{g\in G} (p_g \cdot a) = \sum_{g\in G} a_g = a$$

(2) Sejam $g \in G$ e $a, b \in A$, sabemos que $\Delta(p_g) = \sum_{h\in G} p_{gh^{-1}} \otimes p_h$, logo

$$p_g \cdot (ab) = (ab)_g = \sum_{h\in G} a_{gh^{-1}} b_h = \sum_{h\in G} (p_{gh^{-1}} \cdot a)(p_h \cdot b)$$

(3) Seja $g \in G$, temos

$$p_g \cdot 1_A = (1_A)_g = \begin{cases} 1_A, & \text{se } g = 1 \\ 0, & \text{se } g \neq 1 \end{cases} = \varepsilon(p_g) 1_A$$

Portanto, A é $K[G]^*$-módulo álgebra à esquerda via φ.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos agora A um $K[G]^*$-módulo álgebra à esquerda. Denotaremos a ação de $K[G]^*$ em A por $p_g \cdot a$, para todo $a \in A$ e $g \in G$.

Seja $A_g = \{p_g \cdot a : a \in A\}$, então $A = \oplus_{g\in G} A_g$.

De fato, pois escolhendo $a \in A$, temos $a = 1_{K[G]^*} \cdot a = \sum_{g\in G} p_g \cdot a \in \sum_{g\in G} A_g$. E mais, se $x \in A_g \cap \sum_{h\neq g} A_h$, então $x = p_g \cdot a = \sum_{h\neq g} p_h \cdot a$. Aplicando p_g em ambos os lados dessa última igualdade temos $x = 0$, logo $A_g \cap \sum_{h\neq g} A_h = 0$, o que nos dá $A = \oplus_{g\in G} A_g$.

Como $\Delta(p_g) = \sum_{h\in G} p_{gh^{-1}} \otimes p_h$ e A é um $K[G]^*$-módulo álgebra, segue que $p_g \cdot (ab) = \sum_{h\in G} (p_{gh^{-1}} \cdot a)(p_h \cdot b)$, para $a, b \in A$. Assim, se $x \in A_g A_h$, temos $x = (p_g \cdot a)(p_h \cdot b)$, para certos $a, b \in A$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} p_{gh} \cdot x = p_{gh} \cdot ((p_g \cdot a)(p_h \cdot b)) &= \sum_{l\in G} (p_{ghl^{-1}} \cdot (p_g \cdot a))(p_l \cdot (p_h \cdot b)) \\ &= (p_g \cdot (p_g \cdot a))(p_h \cdot (p_h \cdot b)) = (p_g \cdot a)(p_h \cdot b) = x \end{aligned}$$

ou seja, $x \in A_{gh}$. Logo $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ quaisquer que sejam $g, h \in G$.

Portanto, A é graduada por G. ■

Observemos então que, para o caso de uma álgebra A, graduada por um grupo G, nós podemos construir o produto smash $A\#K[G]^*$. Para $a, b \in A$ e $p_g, p_h \in K[G]^*$, a multiplicação no produto smash será dada por:

$$(a\#p_g)(b\#p_h) = \sum_{l\in G} a(p_{gl^{-1}} \cdot b)\#p_l p_h = a(b_{gh^{-1}})\#p_h \tag{2.1}$$

pois $\Delta(p_g) = \sum_{l\in G} p_{gl^{-1}} \otimes p_l$, $\{p_l\}_{l\in G}$ é uma família de idempotentes ortogonais e $p_{gh^{-1}} \cdot b = b_{gh^{-1}}$.

Podemos agora descrever $A\#K[G]^*$ através da próxima proposição.

Proposição 2.2.3. *Seja A graduada por um grupo finito G. Então $A\#K[G]^*$ é um A-módulo à esquerda e à direita livre, com base $\{1_A\#p_g : g \in G\}$, onde este é um conjunto de idempotentes ortogonais cuja soma é 1, e com multiplicação dada por* (2.1). *Em particular:*

(i) Para $a \in A$, $(1_A\#p_h) \centerdot a = \sum_{g\in G} a_{hg^{-1}}\#p_g$;

(ii) Para $a_g \in A_g$, $(1_A\#p_h) \centerdot a_g = a_g\#p_{g^{-1}h}$;

(iii) Cada $1_A\#p_h$ centraliza A_1.

Demonstração: É fácil ver que $\{1_A\#p_g : g \in G\}$ é uma família de idempotentes ortogonais cuja soma é 1. Vamos definir a ação de A em $A\#K[G]^*$ à esquerda e à direita para mostrar que $\{1_A\#p_g : g \in G\}$ é uma A-base para $A\#K[G]^*$.

Definimos a ação à esquerda por $a \centerdot (1_A\#p_g) = (a\#1_{K[G]^*})(1_A\#p_g) = a\#p_g$, para $a \in A$, $p_g \in K[G]^*$. Temos que $A\#K[G]^*$ é A-módulo à esquerda com essa ação.

De fato,

(1) Para $a, b \in A$ e $p_g \in K[G]^*$,

$$a \centerdot (b \centerdot (1_A\#p_g)) = a \centerdot (b\#p_g) = ab\#p_g = (ab) \centerdot (1_A\#p_g)$$

(2) Para $1_A \in A$ e $p_g \in K[G]^*$,

$$1_A \centerdot (1_A\#p_g) = 1_A\#p_g$$

Observemos que o conjunto $\{1_A\#p_g : g \in G\}$ é linearmente independente, pois usando o isomorfismo $\phi : A\#K[G]^* \to A^{|G|}$, onde $\phi(\sum_i a_i\#p_{g_i}) = (a_1, a_2, ..., a_{|G|})$, se $\sum_i a_i\#p_{g_i} = 0$, então $a_i = 0$, para todo i. Mais ainda, dado $x = \sum_i a_i\#p_{g_i} \in A\#K[G]^*$ temos que $x = \sum_i a_i \centerdot (1_A\#p_{g_i})$, portanto $\{1_A\#p_g : g \in G\}$ gera $A\#K[G]^*$, sendo assim uma A-base para $A\#K[G]^*$.

Definimos agora a ação à direita por:

$$(1_A\#p_g) \centerdot a = (1_A\#p_g)(a\#1_{K[G]^*}) = (1_A\#p_g)(a\#\sum_{h\in G} p_h) = \sum_{h\in G} a_{gh^{-1}}\#p_h$$

onde a última igualdade segue de (2.1). Temos que $A\#K[G]^*$ é A-módulo à direita com essa ação.

De fato,

(1)Para $a, b \in A$ e $p_g \in K[G]^*$, temos

$$\begin{aligned}((1_A\#p_g) \centerdot a) \centerdot b &= \sum_{h\in G}(a_{gh^{-1}}\#p_h) \centerdot b = (\sum_{h\in G} a_{gh^{-1}}\#p_h)(b\#1)\\ &= (\sum_{h\in G} a_{gh^{-1}}\#p_h)(b\#\sum_{l\in G} p_l) = \sum_{h,l\in G} a_{gh^{-1}}(b_{hl^{-1}})\#p_l\\ &= \sum_{l\in G}(ab)_{gl^{-1}}\#p_l = (1_A\#p_g) \centerdot (ab)\end{aligned}$$

(2) Para $1_A \in A$ e $p_g \in K[G]^*$, temos

$$(1_A\#p_g) \centerdot 1_A = \sum_{h\in G} 1_{gh^{-1}}\#p_h = \sum_{h\in G}\delta_{g,h}\#p_h = 1_A\#p_g$$

Já vimos que $\{1_A\#p_g : g \in G\}$ é um conjunto linearmente independente via o isomorfismo ϕ. Usando a definição de ação à direita, temos $(1_A\#p_h) \centerdot a_g = \sum_{l\in G}(a_g)_{hl^{-1}}\#p_l$, mas $(a_g)_{hl^{-1}} = 0$, a menos que $g = hl^{-1}$ e, neste caso, $l = g^{-1}h$, portanto $(1_A\#p_h) \centerdot a_g = a_g\#p_{g^{-1}h}$. Logo, se escolhermos $x \in A\#K[G]^*$, podemos fixar $h \in G$ e escrever $x = \sum_i a_g\#p_{hg}$. Então, $x = \sum_{g,h}(1_A\#p_{ghg}) \centerdot a_g$, ou seja, $\{1_A\#p_g : g \in G\}$ gera $A\#K[G]^*$. Portanto $\{1_A\#p_g : g \in G\}$ é uma A-base para $A\#K[G]^*$.

Logo,

(i) Segue direto da definição de ação à direita de A em $A\#k[G]^*$.

(ii) Segue dos cálculos feitas acima.

(iii) Se $g = 1$, por (ii) temos $(1_A\#p_h) \centerdot a_1 = a_1 \centerdot (1_A\#p_h)$. ∎

Corolário 2.2.4. *Consideremos A uma álgebra graduada por G, $A\#K[G]^*$ e $\{1_A\#p_g : g \in G\}$ como na proposição anterior. Seja I um ideal graduado de A. Então:*

(i) $(1_A\#p_h)(I\#K[G]^*)(1_A\#p_g) = I_{hg^{-1}} \centerdot (1_A\#p_g) = (1_A\#p_h)(I\#p_g)$;

(ii) $(1_A\#p_1)(I\#K[G]^*)(1_A\#p_1) = I_1\#p_1$, o qual é isomorfo como um anel à I_1.

Demonstração: (i) Escolhemos $a \in I$ e $p_s \in K[G]^*$, então $(1_A\#p_h)(a\#p_s)(1_A\#p_g) = (1_A\#p_h)(a \centerdot (1_A\#p_s))(1_A\#p_g) = 0$, a menos que $s = g$. Neste caso, usando (2.1), temos

$$(1_A\#p_h)(a\#p_g)(1_A\#p_g) = (1_A\#p_h)(a\#p_g) = a_{hg^{-1}}\#p_g = a_{hg^{-1}} \centerdot (1_A\#p_g)$$

Logo, $(1_A\#p_h)(I\#K[G]^*)(1_A\#p_g) \subseteq I_{hg^{-1}} \centerdot (1_A\#p_g)$.

Seja agora $a_{gh^{-1}} \in I_{gh^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned} a_{gh^{-1}} \centerdot (1_A\#p_g) &= a_{gh^{-1}}\#p_g = (1_A\#p_h)(a\#p_g) \\ &= (1_A\#p_h)(a\#p_g)(1_A\#p_g) \\ &= (1_A\#p_h)(a\#p_s)(1_A\#p_g) \end{aligned}$$

Logo, $I_{hg^{-1}} \centerdot (1_A\#p_g) \subseteq (1_A\#p_h)(I\#K[G]^*)(1_A\#p_g)$.

Portanto, $(1_A\#p_h)(I\#K[G]^*)(1\#p_g) = I_{hg^{-1}} \centerdot (1_A\#p_g)$.

(ii) Fazendo $g = h = 1$ em (i), a igualdade segue. Considerando a aplicação $\varphi : I_1 \to I_1\#p_1$, dada por $\varphi(a) = a\#p_1$, temos que esta é bijetiva. Usando o fato que $1_A\#p_1$ centraliza A_1 temos $\varphi(ab) = ab\#p_1 = ab \centerdot (1_A\#p_1)(1_A\#p_1) = a \centerdot (1_A\#p_1) \centerdot b \centerdot (1_A\#p_1) = (a\#p_1)(b\#p_1) = \varphi(a)\varphi(b)$, ou seja, φ é isomorfismo.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Os Teoremas de Dualidade

Nosso principal objetivo neste capítulo é apresentar os Teoremas de Dualidade de M. Cohen e S. Montgomery, [4]. Vamos sempre supor que G é um grupo finito de ordem n.

3.1 Dualidade para Ações

Seja $\alpha : G \to Aut(S)$ uma ação de G no anel S. Dessa maneira, podemos formar o skew anel de grupo $R = S * G$, onde R é G-graduado com graduação dada por $R_g = Sg$. Logo, pela Proposição 2.2.2, podemos considerar $(S * G)\#K[G]^*$. Temos então o primeiro resultado importante deste capítulo, onde para sua prova é indispensável o uso da Proposição 1.1.7.

Teorema 3.1.1. (Dualidade para Ações) *Nas condições acima, temos*

$$(S * G)\#K[G]^* \cong M_n(S)$$

Demonstração: Afirmamos que G age transitivamente por conjugação nos idempotentes $\{1\#p_h : h \in G\}$. De fato, para qualquer $s \in S$, $sg \in (S * G)_g$ e, então, pela Proposição 2.2.3 (ii), $(1\#p_h) \centerdot (sg) = (sg)\#p_{g^{-1}h}$. Escolhendo $s = 1$, obtemos $(1\#p_h) \centerdot g = g\#p_{g^{-1}h} = g \centerdot (1\#p_{g^{-1}h})$, de onde segue que $g^{-1} \centerdot (1\#p_h) \centerdot g = 1\#p_{g^{-1}h}$

Logo, pela Proposição 1.1.7, temos

$$(S * G)\#K[G]^* \cong M_n((1\#p_1)((S * G)\#K[G]^*)(1\#p_1))$$

e, então, o teorema estará demonstrado se nós mostrarmos que

$$(1\#p_1)((S * G)\#K[G]^*)(1\#p_1) \cong S$$

Pelo Corolário 2.2.4 (ii), temos

$$(1\#p_1)((S * G)\#K[G]^*)(1\#p_1) \cong (S * G)_1\#p_1 = S\#p_1$$

Notemos que $S \cong S\#p_1$ via o isomorfismo $\varphi : S \to S\#p_1$, onde $\varphi(s) = s\#p_1$, para $s \in S$. Portanto,

$$(1\#p_1)((S * G)\#K[G]^*)(1\#p_1) \cong S$$

E, consequentemente, temos

$$(S * G)\#K[G]^* \cong M_n((1\#p_1)((S * G)\#K[G]^*)(1\#p_1)) \cong M_n(S)$$

■

3.2 Dualidade para Coações

Seja R um anel graduado por um grupo G de ordem n. Podemos assim considerar $S = R\#K[G]^*$, pela Proposição 2.2.2. Para demonstrar o segundo teorema importante deste capítulo necessitamos dos próximos lemas.

Lema 3.2.1. *Nas condições acima, uma ação de G em $R\#K[G]^*$ é dada por:*

$$(r\#p_h) \cdot g = r\#p_{hg^{-1}}$$

onde $r\#p_h \in R\#K[G]^*$ e $g \in G$.

Demonstração: Vamos definir a ação por $\alpha : G \to Aut(R\#K[G]^*)$, onde temos $\alpha(g)(r\#p_h) = \alpha_g(r\#p_h) = r\#p_{hg^{-1}}$.

Primeiramente, mostremos que $\alpha_g \in Aut(R\#K[G]^*)$. De fato,

(1) Seja $\sum_{h\in G} r_h\#p_h \in Ker(\alpha_g)$, então

$$0 = \alpha_g(\sum_{h\in G} r_h\#p_h) = \sum_{h\in G} r_h\#p_{hg^{-1}} = \sum_{h\in G} r_h \cdot (1\#p_{hg^{-1}})$$

Como $\{1\#p_g : g \in G\}$ são linearmente independentes, segue que $r_h = 0$, para todo $h \in G$. Logo, $\sum_{h\in G} r_h\#p_h = 0$. Assim, $Ker(\alpha_g) = 0$ e, portanto, α_g é injetiva.

(2) Seja $\sum_{h\in G} r_h\#p_h \in R\#K[G]^*$, escolhendo $\sum_{h\in G} r_h\#p_{hg} \in R\#K[G]^*$, segue que $\alpha_g(\sum_{h\in G} r_h\#p_{hg}) = \sum_{h\in G} r_h\#p_{hgg^{-1}} = \sum_{h\in G} r_h\#p_h$, ou seja, α_g é sobrejetiva.

(3) Escolhemos $x = r\#p_h$, $y = s\#p_k \in R\#K[G]^*$. Então

$$\begin{aligned}\alpha_g(xy) &= \alpha_g((r\#p_h)(s\#p_k)) = \alpha_g(rs_{hk^{-1}}\#p_k) \\ &= rs_{hk^{-1}}\#p_{kg^{-1}} = rs_{hg^{-1}(kg^{-1})^{-1}}\#p_{kg^{-1}} \\ &= (r\#p_{hg^{-1}})(s\#p_{kg^{-1}}) = \alpha_g(x)\alpha_g(y)\end{aligned}$$

Logo, por (1), (2) e (3) temos $\alpha_g \in Aut(R\#K[G]^*)$.

Para completar a prova, precisamos mostrar que α é um homomorfismo de grupos, mas para $g, h \in G$ e $r\#p_k \in R\#K[G]^*$, temos

$$\begin{aligned}\alpha(gh)(r\#p_k) &= \alpha_{gh}(r\#p_k) = (r\#p_k) \cdot (gh) = r\#p_{k(gh)^{-1}} = r\#p_{kh^{-1}g^{-1}} \\ &= (r\#p_{kh^{-1}}) \cdot g = ((r\#p_k) \cdot h) \cdot g = \alpha(g)(\alpha(h)(r\#p_k))\end{aligned}$$

ou seja, $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$.

Portanto, α define uma ação de G em $R\#K[G]^*$. ■

Pelo lema anterior, consideremos o skew anel de grupo $S * G = (R\#K[G]^*) * G$, onde, para $g \in G$ e $r\#p_h \in R\#K[G]^*$, vale

$$g^{-1}(r\#p_h)g = (1_S g^{-1})((r\#p_h)1_G)(1_S g) = 1_S((r\#p_h) \cdot g^{-1})(g^{-1}1_G)(1_S g)$$
$$= ((r\#p_{hg})g^{-1})(1_S g) = (r\#p_{hg})(1_S \cdot g^{-1})(g^{-1}g) = r\#p_{hg}$$

ou seja, $g^{-1}(r\#p_h)g = r\#p_{hg}$ se, e somente se, $(r\#p_h)g = g(r\#p_{hg})$. Esta propriedade se fará necessária para a prova do próximo lema.

Lema 3.2.2. *Nas condições acima, temos*

$$(1\#p_1)((R\#K[G]^*) * G)(1\#p_1) = \oplus_{g\in G} R_g g(1\#p_1) \cong R.$$

Demonstração: A observação acima nos diz que $(r\#p_h)g = g(r\#p_{hg})$, logo escolhendo $r = 1$ e $h = g^{-1}$, vale $(1\#p_{g^{-1}})g = g(1\#p_1)$. Usando isso e o fato que $\{1\#p_g : g \in G\}$ é uma família de idempotentes ortogonais, temos que

$$(1\#p_1)((R\#K[G]^*) * G)(1\#p_1) = (1\#p_1)(\sum_{g\in G}(R\#p_{g^{-1}})g)$$

De fato, escolhendo $\sum_g(\sum_h r_h\#p_h)g \in (R\#K[G]^*) * G$, temos

$$(1\#p_1)(\sum_g(\sum_h r_h\#p_h)g)(1\#p_1) = (1\#p_1)(\sum_g(\sum_h r_h\#p_h)(1\#p_{g^{-1}})g)$$
$$= ((1\#p_1)(\sum_g(\sum_h r_h 1_{hg}\#p_{g^{-1}})g) = (1\#p_1)(\sum_g(r_{g^{-1}}\#p_{g^{-1}})g)$$

Assim, temos

$$(1\#p_1)((R\#K[G]^*) * G)(1\#p_1) = (1\#p_1)(\sum_g R\#p_{g^{-1}}g) = \sum_g(1\#p_1)(R\#p_{g^{-1}})g$$
$$= \sum_g(R_g\#p_{g^{-1}})g = \sum_g R_g \cdot (1\#p_{g^{-1}})g$$
$$= \sum_g R_g g(1\#p_1)$$

Observemos que as somas acima são somas diretas, pois $\{1\#p_g : g \in G\}$ é uma família linearmente independente. Logo,

$$(1\#p_1)((R\#K[G]^*) * G)(1\#p_1) = \oplus_{g\in G} R_g g(1\#p_1)$$

Resta mostrar que $\oplus_g R_g g(1\#p_1) \cong R$. Note que se $r \in R$, então $r = \sum_{g\in G} r_g$, assim, definimos $\phi : R \to \oplus_g R_g g(1\#p_1)$ por $\phi(r) = \sum_{g\in G} r_g g(1\#p_1)$. Mostraremos que ϕ é um isomorfismo. De fato,

(1) Seja $r = \sum_{g\in G} r_g \in Ker(\phi)$, então

$$0 = \phi(r) = \phi(\sum_{g\in G} r_g) = \sum_{g\in G} r_g g(1\#p_1)$$

Como, $\{1\#p_g : g \in G\}$ é um conjunto linearmente independente, temos $r_g = 0$, para todo $g \in G$, ou seja, $r = 0$. Assim, $Ker(\phi) = 0$ e, portanto, ϕ é injetiva.

(2) Temos que ϕ é claramente sobrejetiva.

(3) Sejam r_g, $r_h \in R = \oplus_{g\in G} R_g$, então

$$\begin{aligned}\phi(r_g)\phi(r_h) &= (r_g g(1\#p_1))(s_h h(1\#p_1)) = (r_g \cdot (1\#p_{g^{-1}})g)(s_h \cdot (1\#p_{h^{-1}})h) \\ &= ((r_g\#p_{g^{-1}})g)((s_h\#p_{h^{-1}})h) = (r_g\#p_{g^{-1}})((s_h\#p_{h^{-1}}) \cdot g)gh \\ &= (r_g\#p_{g^{-1}})((s_h\#p_{h^{-1}g^{-1}})gh = (r_g(s_h)_{g^{-1}(h^{-1}g^{-1})^{-1}}\#p_{h^{-1}g^{-1}})gh \\ &= (r_g s_h\#p_{(gh)^{-1}})gh = r_g s_h \cdot (1\#p_{(gh)^{-1}})gh = r_g s_h gh(1\#p_1) = \phi(r_g s_h)\end{aligned}$$

Por (1), (2) e (3), temos que ϕ é isomorfismo e, assim, $\oplus_{g\in G} R_g g(1\#p_1) \cong R$. ■

Agora, estamos prontos para apresentar o segundo teorema de dualidade.

Teorema 3.2.3. (Dualidade para Coações) *Nas hipóteses dessa seção, temos*

$$(R\#K[G]^*) * G \cong M_n(R).$$

Demonstração: Pelo Lema 3.2.1, segue que G age transitivamente por conjugação nos idempotentes $\{1\#p_g : g \in G\}$. Aplicando a Proposição 1.1.7 e o Lema 3.2.2, temos

$$(R\#K[G]^*) * G \cong M_n((1\#p_1)((R\#K[G]^*) * G)(1\#p_1)) \cong M_n(R)$$

■

Capítulo 4

Um Contexto de Morita para Anéis Graduados

Neste capítulo, relacionaremos A, A_1 e $A\#K[G]^*$-módulos. Vamos estabelecer um isomorfismo de categorias entre $A\#K[G]^*$-módulos e A-módulos graduados. Obteremos também um análogo ao Teorema de Maschke para $A\#K[G]^*$. Após isso, provaremos que, denotando V como sendo A com estrutura de A_1-módulo à esquerda e $A\#K[G]^*$-módulo à direita e W como sendo A com estrutura de $A\#K[G]^*$-módulo à esquerda e A_1-módulo à direita, $[A_1, W, V, A\#K[G]^*]$ é um contexto de Morita juntamente com as aplicações $[,]$ e $(,)$, as quais serão definidas ao longo do texto. A seguir, definiremos graduações e, a partir do contexto de Morita, provaremos algumas de suas propriedades. Caso não seja dito nada em contrário, os módulos e ideais que trataremos aqui são todos à direita.

4.1 Módulos Graduados e Contexto de Morita

Para qualquer anel R, nós denotaremos $Mod(R)$ a categoria de todos R-módulos à direita unitários e seus R-homomorfismos.

Definição 4.1.1. *Sejam A um anel graduado por um grupo G e V um A-módulo à direita. Dizemos que V é graduado, se existe uma família $\{V_g : g \in G\}$ de subgrupos aditivos V_g de V tal que $V = \oplus_{g\in G} V_g$, com $V_g A_h \subseteq V_{gh}$ (uma definição análoga se dá para A-módulos à esquerda).*

Assim, podemos considerar a categoria $GrMod(A)$, onde os objetos são A-módulos graduados e os homomorfismos $f : V \to W$ são homomorfismos em $Mod(A)$ tais que $f(V_g) \subseteq W_g$.

Vamos agora obter uma relação entre $GrMod(A)$ e $Mod(A\#K[G]^*)$.

Lema 4.1.2. (1) *Seja $V \in Mod(A\#K[G]^*)$. Então V é um A-módulo graduado com graduação dada por $V_g = V \centerdot (1\#p_{g^{-1}})$.*

(2) *Seja $V \in GrMod(A)$. Então V é um $A\#K[G]^*$-módulo, onde para todos $v \in V$, $a \in A$ e $p_h \in K[G]^*$, temos $v \centerdot (a\#p_h) = (v \centerdot a)_{h^{-1}}$.*

Demonstração:

(1) Seja $V \in Mod(A\#K[G]^*)$. Escolhendo $v \in V$, temos

$$v = v \centerdot 1 = v \centerdot \sum_{g\in G}(1\#p_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G} v \centerdot (1\#p_{g^{-1}}) \in \sum_{g\in G} V_g$$

E mais, se $v \in V_g \cap \sum_{h\neq g} V_h$, então $v = v_1 \centerdot (1\#p_{g^{-1}})$ e $v = \sum_{h\neq g} v_h \centerdot (1\#p_{h^{-1}})$, para certos $v_1, v_h \in V$, com $h \in G$. Logo,

$$v = v_1 \centerdot (1\#p_{g^{-1}}) \centerdot (1\#p_{g^{-1}}) = \sum_{h\neq g} v_h \centerdot (1\#p_{h^{-1}}) \centerdot (1\#p_{g^{-1}}) = 0$$

ou seja, $V_g \cap \sum_{h\neq g} V_h = 0$. Assim, $V = \oplus_{g\in G} V_g$.

Temos que V é A-módulo à direita via a ação $v \centerdot a = v \centerdot (a\#1)$, onde $v \in V$ e $a \in A$, pois $V \in Mod(A\#K[G]^*)$.

Resta apenas mostrar que $V_gA_h \subseteq V_{gh}$. De fato, escolhendo $v_g \in V_g$, temos que $v_g = v \centerdot (1\#p_{g^{-1}})$, para algum $v \in V$. Seja $a_h \in A_h$, usando a Proposição 2.2.3 (ii), segue que

$$\begin{aligned} v_g \centerdot a_h &= (v \centerdot (1\#p_{g^{-1}})) \centerdot (a_h\#1) = v \centerdot ((1\#p_{g^{-1}})(a_h\#1)) \\ &= v \centerdot (a_h\#p_{h^{-1}g^{-1}}) = v \centerdot (a_h\#1)(1\#p_{(gh)^{-1}}) \\ &= (v \centerdot a_h) \centerdot (1\#p_{(gh)^{-1}}) \end{aligned}$$

Logo, $v_g \centerdot a_h \in V_{gh} = V \centerdot (1\#p_{(gh)^{-1}})$.

Portanto, $V \in GrMod(A)$.

(2) Seja agora $V \in GrMod(A)$. Escolhendo $a, b \in A$, $p_h, p_g \in K[G]^*$ e $v \in V$, temos:

$$\begin{aligned} v \centerdot ((a\#p_h)(b\#p_g)) &= v \centerdot (ab_{hg^{-1}}\#p_g) = (v \centerdot ab_{hg^{-1}})_{g^{-1}} \\ &= (v \centerdot a)_{h^{-1}}(b_{hg^{-1}})_{hg^{-1}} = (v \centerdot a)_{h^{-1}}b_{hg^{-1}} \\ &= ((v \centerdot a)_{h^{-1}})_{h^{-1}}b_{hg^{-1}} = ((v \centerdot a)_{h^{-1}}b)_{g^{-1}} \\ &= (v \centerdot a)_{h^{-1}} \centerdot (b\#p_g) = (v \centerdot (a\#p_h)) \centerdot (b\#p_g) \end{aligned}$$

Além disso, $v \centerdot 1 = v \centerdot (1\# \sum_{g\in G} p_g) = \sum_{g \in G} v_{g^{-1}} = v$.

Portanto, $V \in Mod(A\#K[G]^*)$. ■

Pelo Lema 4.1.2, dado $V \in GrMod(A)$, nós definimos $V^{\#}$ como sendo V, considerado como $A\#K[G]^*$-módulo. Para qualquer homomorfismo $f : V \to W$ em $GrMod(A)$, consideramos $f^{\#} : V^{\#} \to W^{\#}$ como sendo $f^{\#} = f$. Analogamente, dado $V \in Mod(A\#K[G]^*)$, definimos V_{Gr} como sendo V considerado como A-módulo graduado e para um homomorfismo $f : V \to W$ em $Mod(A\#K[G]^*)$, consideramos $f_{Gr} : V_{Gr} \to W_{Gr}$ como sendo $f_{Gr} = f$. Temos então nosso próximo resultado.

Teorema 4.1.3. *Seja A graduada por G. Então existe um isomorfismo de categorias entre $GrMod(A)$ e $Mod(A\#K[G]^*)$, dada pelos funtores:*

$$()_{Gr} : Mod(A\#K[G]^*) \to GrMod(A), \text{ tal que } V \mapsto V_{Gr} \text{ e } f \mapsto f_{Gr}$$

$$()^{\#} : GrMod(A) \to Mod(A\#K[G]^*), \text{ tal que } V \mapsto V^{\#} \text{ e } f \mapsto f^{\#}$$

Demonstração: Para vermos que $()_{Gr}$ e $()^{\#}$ são de fato funtores, basta observar se estes comportam-se bem em relação aos homomorfismos.

Seja $f : V \to W$ um homomorfismo em $Mod(A\#K[G]^*)$. Escolhendo $v_g \in V_g$, por definição, temos $v_g = v_g \centerdot (1\#p_{g^{-1}})$. Logo,

$$f(v_g) = f(v_g \centerdot (1\#p_{g^{-1}})) = f(v_g) \centerdot (1\#p_{g^{-1}}) \in W_g$$

ou seja, f_{Gr} é um homomorfismo graduado.

Analogamente, se $f : V \to W$ é um homomorfismo em $GrMod(A)$, então escolhemos $v_g \in V_g$ e $a\#p_h \in A\#K[G]^*$, temos

$$f(v_g \centerdot (a\#p_h)) = f((v_g \centerdot a)_{h^{-1}}) = (f(v_g \centerdot a))_{h^{-1}} = (f(v_g) \centerdot a)_{h^{-1}} = f(v_g) \centerdot (a\#p_h)$$

ou seja, $f^{\#}$ é um homomorfismo de $A\#K[G]^*$-módulos.

Vamos mostrar agora que esses funtores definem um isomorfismo de categorias.

Primeiro, consideramos $V \in Mod(A\#K[G]^*)$. Em V_{Gr}, podemos escolher $v_g = v_g \centerdot (1\#p_{g^{-1}})$ e seja $a\#p_h \in A\#K[G]^*$. Então, em $(V_{Gr})^{\#}$, temos

$$v_g(a\#p_h) = (v_g \centerdot a)_{h^{-1}} = (v_g \centerdot a) \centerdot (1\#p_h) = (v_g \centerdot (a\#1)) \centerdot (1\#p_h) = v_g \centerdot (a\#p_h)$$

a ação usual em $Mod(A\#K[G]^*)$. Logo, $(()_{Gr})^{\#} = I_{Mod(A\#K[G]^*)}$.

Agora, consideramos $V \in GrMod(A)$. Então, em $((V)^{\#})_{Gr}$, a graduação é dada por $V^{\#}_g = V^{\#} \centerdot (1\#p_{g^{-1}})$, mas se $v^{\#}_g \in V^{\#}_g$, então

$$v^{\#}_g = v^{\#}(1\#p_{g^{-1}}) = v \centerdot (1\#p_{g^{-1}}) = v_g \in V_g$$

a graduação de $V \in GrMod(A)$. Logo, $(()^{\#})_{Gr} = I_{GrMod(A)}$. ■

Podemos observar que, para módulos à esquerda, obtemos um resultado análogo ao Lema 4.1.2. Se V é um $A\#K[G]^*$-módulo à esquerda, então V é um A-módulo graduado à esquerda com graduação dada por $V_g = (1\#p_g) \centerdot V$, reciprocamente, se V é um A-módulo graduado à esquerda, então V é um $A\#K[G]^*$-módulo à esquerda com ação definida por $(a\#p_h) \centerdot v = a \centerdot v_h$, onde $a\#p_h \in A\#K[G]^*$ e $v \in V$, e, assim, obtemos também um resultado semelhante ao Teorema 4.1.3.

Provaremos agora um análogo ao Teorema de Maschke.

Teorema 4.1.4. *Sejam V um $A\#K[G]^*$-módulo à direita (ou à esquerda) e W um $A\#K[G]^*$-submódulo de V o qual é um A-somando direto de V. Então W é um $A\#K[G]^*$-somando direto de V.*

Demonstração: Consideremos primeiro módulos à direita. Seja $\pi : V \to W$ a projeção natural de A-módulos de V em W. Vamos definir $\lambda : V \to W$, por $\lambda(v) = \sum_{h \in G} \pi(v \centerdot (1\#p_h)) \centerdot (1\#p_h)$.

Temos que $\lambda|_W = I_W$. De fato, se $w \in W$, então $w \centerdot (1\#p_h) \in W$, para qualquer $h \in G$. Logo, $\pi(w \centerdot (1\#p_h)) = w \centerdot (1\#p_h)$, portanto

$$\lambda(w) = \sum_{h \in G} w \centerdot (1\#p_h)(1\#p_h) = \sum_{h \in G} w \centerdot (1\#p_h) = w \centerdot \sum_{h \in G} (1\#p_h) = w \centerdot 1 = w$$

Temos também que λ é um homomorfismo de $A\#K[G]^*$-módulos, pois dados

$v \in V$ e $a\#p_g \in A\#K[G]^*$, usando a Proposição 2.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda(v)\centerdot(a\#p_g) &= (\sum_{h\in G}\pi(v\centerdot(1\#p_h))\centerdot(1\#p_h))\centerdot(a\#p_g) = \sum_{h\in G}(\pi(v\centerdot(1\#p_h)))\centerdot(1\#p_h)(a\#p_g)\\
&= \sum_{h\in G}\pi(v\centerdot(1\#p_h))\centerdot(a_{hg^{-1}}\#p_g) = \sum_{h\in G}\pi(v\centerdot(1\#p_h))\centerdot a_{hg^{-1}}\centerdot(1\#p_g)\\
&= \sum_{h\in G}\pi(v\centerdot(1\#p_h)\centerdot a_{hg^{-1}})\centerdot(1\#p_g) = \sum_{h\in G}\pi(v\centerdot(a_{hg^{-1}}\#p_g))\centerdot(1\#p_g)\\
&= \pi(v\centerdot\sum_{h\in G}a_{hg^{-1}}\centerdot(1\#p_g))\centerdot(1\#p_g) = \pi(v\centerdot(a\#p_g))\centerdot(1\#p_g)\\
&= \sum_{h\in G}\pi(v\centerdot(a\#p_g)(1\#p_h))\centerdot(1\#p_h) = \lambda(v\centerdot(a\#p_g))
\end{aligned}$$

Assim, λ é uma $A\#K[G]^*$-projeção de V em W. Logo, escolhendo $v \in V$, podemos escrever $v = (v-\lambda(v)) + \lambda(v)$, onde $v - \lambda(v) \in Ker(\lambda)$ e $\lambda(v) \in W$. É fácil ver que $Ker(\lambda)\cap W = 0$. Sendo assim, temos que $V = Ker(\lambda)\oplus W$, ou seja, W é um $A\#K[G]^*$-somando direto de V.

Para módulos à esquerda, usamos um argumento similar. Definimos $\lambda : V \to W$ como $\lambda(v) = \sum_{h\in G}(1\#p_h)\centerdot\pi((1\#p_h)\centerdot v)$. ■

Pelo Lema 4.1.2, o Teorema 4.1.4 é equivalente ao seguinte resultado.

Teorema 4.1.5. *Seja V um A-módulo graduado à direita e W um A-submódulo graduado de V, o qual tem como complemento um A-submódulo de V. Então W tem complemento graduado.*

Demonstração: Pelo Lema 4.1.2, se V é A-módulo graduado à direita, então V é um $A\#K[G]^*$-módulo à direita e, consequentemente, W é um $A\#K[G]^*$-submódulo de V. Pelo Teorema 4.1.4, W é um $A\#K[G]^*$-somando direto de V, ou seja, temos que $V = W \oplus W'$, com W' um $A\#K[G]^*$-submódulo de V. Novamente por 4.1.2, temos que W' é A-módulo graduado e, assim, W tem complemento graduado. ■

Seja A um anel graduado por G, onde G é grupo finito. Então pelo Lema 4.1.2, A é um $A\#K[G]^*$-módulo à direita via $a\centerdot(b\#p_h) = (ab)_{h^{-1}}$ e, pela observação posterior ao Teorema 4.1.3, A é um $A\#K[G]^*$-módulo à esquerda via $(b\#p_h) \centerdot a = ba_h$. Observemos também que A é um A_1-módulo à direita e à esquerda via multiplicação. É fácil verificar que essas ações são compatíveis, portanto, podemos considerar os dois bimódulos:

$$V =_{A_1} A_{A\#K[G]^*} \text{ e } W =_{A\#K[G]^*} A_{A_1}$$

Definimos:

$[,] : W \otimes_{A_1} V \to A\#K[G]^*$, por $[w, v] = w \centerdot (1\#p_1) \centerdot v$;

$(,) : V \otimes_{A\#K[G]^*} W \to A_1$, por $(v, w) = (vw)_1$.

Nessas condições, podemos enunciar nosso primeiro resultado referente ao contexto de Morita $[A_1, W, V, A\#K[G]^*]$.

Proposição 4.1.6. *Seja A um anel graduado por G. Então $[A_1, W, V, A\#K[G]^*]$, é um contexto de Morita, onde V, W, $[,]$ e $(,)$ são definidos como acima.*

Demonstração: Para mostrar que $[A_1, W, V, A\#K[G]^*]$ é um contexto de Morita dividiremos a prova em três partes:

(1) $[,]$ é um homomorfismo de $A\#K[G]^*$-bimódulos o qual é A_1- balanceado.

Sejam $a\#p_h \in A\#K[G]^*$, $v \in V$ e $w \in W$. Então temos

$$(a\#p_h)[w, v] = (a\#p_h) \centerdot w \centerdot (1\#p_1) \centerdot v = aw_h \centerdot (1\#p_1) \centerdot v = [aw_h, v] = [(a\#p_h) \centerdot w, v]$$

e

$$[w, v] \centerdot (a\#p_h) = w \centerdot (1\#p_1) \centerdot v \centerdot (a\#p_h) = w \centerdot (1\#p_1) \centerdot (va)_{h^{-1}} = [w, (va)_{h^{-1}}] = [w, v \centerdot (a\#p_h)]$$

Logo, $[,]$ é um homomorfismo de $A\#K[G]^*$-bimódulos. Para mostrar que $[,]$ é A_1-balanceado, lembremos que $1\#p_1$ comuta com os elementos de A_1 pela Proposição 2.2.3 (iii), então, dado $a_1 \in A_1$, temos

$$[wa_1, v] = wa_1 \centerdot (1\#p_1) \centerdot v = w \centerdot (1\#p_1) \centerdot a_1 v = [w, a_1 v]$$

como queríamos mostrar.

(2) $(,)$ é um homomorfismo de A_1-bimódulos o qual é $A\#K[G]^*$- balanceado.

Sejam $a_1 \in A_1$, $v \in V$ e $w \in W$. Temos

$$a_1(v,w) = a_1(vw)_1 = (a_1vw)_1 = (a_1v,w)$$

e

$$(v,w)a_1 = (vw)_1a_1 = (vwa_1)_1 = (v,wa_1)$$

Logo, $(,)$ é um homomorfismo de A_1-bimódulos. Para mostrar que $(,)$ é $A\#K[G]^*$-balanceado, escolhemos $a\#p_h \in A\#K[G]^*$, $v \in V$ e $w \in W$. Assim,

$$\begin{aligned}(v \centerdot (a\#p_h), w) &= ((va)_{h^{-1}}, w) = ((va)_{h^{-1}}w)_1 = ((va)_{h^{-1}})_{h^{-1}}w_h = (va)_{h^{-1}}w_h \\ &= (va)_{h^{-1}}(w_h)_h = (vaw_h)_1 = (v, aw_h) = (v, (a\#p_h) \centerdot w)\end{aligned}$$

Portanto, $(,)$ é $A\#K[G]^*$- balanceado.

(3) As condições de associatividade são válidas para $[,]$ e $(,)$.

Sejam $v, v' \in V$ e $w, w' \in W$, temos

$$v \centerdot [w, v'] = v \centerdot w \centerdot (1\#p_1) \centerdot v' = (vw)_1 \centerdot v' = (v,w) \centerdot v'$$

e

$$[w,v] \centerdot w' = w \centerdot (1\#p_1) \centerdot vw' = w(vw')_1 = w \centerdot (v,w')$$

Portanto, por (1), (2) e (3), seque que $[A_1, W, V, A\#K[G]^*]$ é um contexto de Morita associado a $W =_{A\#K[G]^*} A_{A_1}$. ■

4.2 Graduações

Sejam R e S anéis, A um (R,S)-bimódulo e B um (S,R)-bimódulo. A aplicação $\phi : A \otimes B \to R$ é dita não-degenerada, sempre que $\phi(a,B) = 0$ ou $\phi(A,b) = 0$ implicar $a = 0$ ou $b = 0$, respectivamente. Consideremos agora a não-degeneração das formas $[,]$ e $(,)$. Como A tem unidade, temos que $[,]: W \otimes V \to A\#K[G]^*$ é sempre não-degenerada, pois fixado $w \in W$ tal que $[w, V] = 0$ segue que $w(1\#p_1)V = 0$ e então $w(1\#p_1)1 = 0$. Assim, $w = 0$. Entretanto, $(,)$ pode não ser, bastando tomar $A = K[X]$ com a graduação usual, pois se escolhermos $p(X) = X \in K[X]$, dado qualquer $q(X) \in K[X]$, temos $(p(X), q(X)) = 0$.

Vamos agora definir três propriedades que a graduação pode ter relacionadas ao contexto de Morita.

Definição 4.2.1. *Seja A um anel graduado por um grupo G. Dizemos que:*

(1) *A graduação é não-degenerada, se $(,)$ é não degenerada;*

(2) *A graduação é fiel, se A é fiel como $A\#K[G]^*$-módulo à direita e à esquerda;*

(3) *A é fortemente G-graduado, se $A_g A_{g^{-1}} = A_1$, para todo $g \in G$.*

Daremos uma interpretação mais concreta para (1) e (2):

Lema 4.2.2. *Nas condições acima:*

(i) Uma graduação em A é não degenerada se, e somente se, dado $0 \neq a_g \in A_g$, sempre temos $a_g A_{g^{-1}} \neq 0$ e $A_{g^{-1}} a_g \neq 0$;

(ii) Uma graduação em A é fiel se, e somente se, dado $0 \neq a_g \in A_g$, sempre temos $a_g A_h \neq 0$ e $A_h a_g \neq 0$, com $h, g \in G$.

Demonstração:

(i) $(\Rightarrow)$ Suponhamos que a graduação em A é não-degenerada. Seja $a_g A_{g^{-1}} = 0$, para algum $a_g \in A_g$. Então

$$(a_g, A) = (a_g A)_1 = (a_g \sum_{h \in G} A_h)_1 = a_g A_{g^{-1}} = 0$$

Logo, $(a_g, A) = 0$. Por hipótese, $(,)$ é não-degenerada, assim, $a_g = 0$. Analogamente para $A_{g^{-1}} a_g$.

($\Leftarrow$) Por hipótese, temos que, dado $0 \neq a_g \in A_g$, $a_g A_{g^{-1}} \neq 0$ e $A_{g^{-1}} a_g \neq 0$. Suponha que $0 = (a, A) = (aA)_1$, para algum $a \in A$. Escrevemos $a = \sum_{g \in G} a_g$, para $a_g \in A_g$. Se $a \neq 0$, então $a_h \neq 0$, para algum $h \in G$. Como $(aA)_1 = 0$, temos $(aA_{h^{-1}})_1 = 0$. Logo, $0 = (aA_{h^{-1}})_1 = a_h (A_{h^{-1}})_{h^{-1}} = a_h A_{h^{-1}}$, o que é uma contradição. Assim, $a = 0$ e $(,)$ é não-degenerada. Portanto, a graduação em A é não-degenerada.

(ii) ($\Rightarrow$) Suponhamos que a graduação em A é fiel. Então A é um $A \# K[G]^*$-módulo à direita fiel (podemos fazer um argumento análogo para módulos à esquerda). Suponhamos ainda que $A_h a_g = 0$, para algum $0 \neq a_g \in A_g$. Então

$$(Aa_g)_{hg} = (A_h a_g)_{hg} = 0$$

De onde segue que

$$A \centerdot (a_g \# p_{(hg)^{-1}}) = (Aa_g)_{hg} = 0$$

o que é uma contradição, pois A é $A \# K[G]^*$-módulo à direita fiel. Logo, $a_g = 0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que, para qualquer $0 \neq a_g \in A_g$, $a_g A_h \neq 0$ e $A_h a_g \neq 0$ com $h, g \in G$. Suponhamos também $A \centerdot x = 0$, para algum $x \in A \# K[G]^*$. Escrevemos $x = \sum_i a_i \# p_{g_i}$, onde $g_i \neq g_j$ se $i \neq j$ para todo $a_i \neq 0$. Suponhamos $x \neq 0$, logo existe $a_j \neq 0$ e, então $(a_j)_k \neq 0$ para algum $k \in G$. Seja $h = g_j^{-1} k^{-1}$. Como $A \centerdot x = 0$, temos

$$0 = A_h \centerdot x = A_h \centerdot (\sum_i a_i \# p_{g_i}) = \sum_i (A_h a_i)_{g_i^{-1}}$$

Temos que $g_i's$ são distintos, então $(A_h a_j)_{g_j^{-1}} = 0$. Como $h = g_j^{-1} k^{-1}$ temos

$$0 = (A_h a_j)_{g_j^{-1}} = (A_h a_j)_{hk} = A_h (a_j)_k$$

o que é uma contradição. Assim, $x = 0$ e A é um $A \# K[G]^*$-módulo à direita fiel.

Um raciocínio análogo se faz para quando A é um $A \# K[G]^*$-módulo à esquerda fiel .

Portanto, a graduação em A é fiel. ■

Pelo lema acima, é fácil ver que na Definição 4.2.1, (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Veremos alguns exemplos que mostram que as três definições são distintas.

Exemplo 4.2.3. *Uma graduação não-degenerada a qual não é fiel:*

Sejam $A = M_2(R)$, o anel das matrizes 2×2 com entradas no anel com unidade R, e $G = \langle g \rangle$ um grupo cíclico de ordem 3. Consideremos:

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A_g} = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A_{g^{-1}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que, de fato, $A = \oplus_g A_g$. Escolhendo $0 \neq a_g \in A_g$, temos $a_g A_{g^{-1}} \neq 0$ e $A_{g^{-1}} a_g \neq 0$, assim, pelo Lema 4.2.2 (i), a graduação é não-degenerada.

Entretanto, também pelo Lema 4.2.2 (ii), escolhendo:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temos $IA_g = 0$, o que nos mostra que a graduação não é fiel.

Exemplo 4.2.4. *Uma graduação fiel que não é fortemente graduada:*

Sejam $A = \mathbb{Q}[X]$, o anel dos polinômios sobre os racionais e $G = \langle g \rangle$ um grupo cíclico de ordem 2. Consideremos $A_1 = \mathbb{Q}[X^2]$ e $A_g = \{\sum_i a_i X^i : i$ é ímpar$\}$.

Temos que $\mathbb{Q}[X] = A_1 \oplus A_g$ e, pelo Lema 4.2.2 (ii), a graduação em A é fiel. Entretanto, $1 \notin A_g A_g = A_g A_{g^{-1}}$, sendo assim, A não é fortemente graduado.

O próximo resultado trata do comportamento de ideais de A, quando a graduação é não-degenerada ou fiel.

Lema 4.2.5. *Nas condições acima:*

(i) Se a graduação em A é não degenerada e I é um ideal à direita (à esquerda) de A com $I \cap A_1 = 0$, então $I \cap A_g = 0$, para todo $g \in G$;

(ii) Se a graduação em A é fiel e I é um ideal à direita (à esquerda) de A com $I \cap A_h = 0$, para algum $h \in G$, então $I \cap A_g = 0$, para todo $g \in G$.

Demonstração:

(i) Se I é um ideal à direita de A (um argumento análogo serve para ideais à esquerda), então

$$(I \cap A_g)A_{g^{-1}} \subseteq I \cap A_1 = 0$$

Logo, pelo Lema 4.2.2 (i), $I \cap A_g = 0$.

(ii) Analogamente, se I é um ideal à direita de A (um argumento análogo serve para ideais à esquerda), então:

$$(I \cap A_g)A_{g^{-1}h} \subseteq I \cap A_h = 0$$

Logo, pelo Lema 4.2.2 (ii), $I \cap A_g = 0$. ■

Para o nosso próximo resultado precisamos da seguinte definição.

Definição 4.2.6. *Um anel graduado A é dito graduado semiprimo se este não tem ideais graduados nilpotentes não nulos.*

Teorema 4.2.7. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é graduado semiprimo;

(ii) A_1 é semiprimo e a graduação em A é não-degenerada;

(iii) $A\#K[G]^*$ é semiprimo.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Primeiramente, mostraremos que a graduação em A é não-degenerada. Seja $a_g \in A_g$, tal que $a_g \neq 0$. Escolhemos o ideal à direita graduado de A dado por $J = a_gA$. Por hipótese, A é graduado semiprimo, então J

não é nilpotente. Pelo Lema 1.1.18, temos que $J_1 = (a_g A)_1$ não é nilpotente. Logo, $0 \neq J_1 = (a_g A)_1 = a_g A_{g^{-1}}$. Considerando ideais à esquerda, obtemos $A_{g^{-1}} a_g \neq 0$. Portanto, pelo Lema 4.2.2 (i), temos que a graduação em A é não-degenerada.

Vamos mostrar agora que A_1 é semiprimo. Seja $I \neq 0$ um ideal nilpotente de A_1. Consideremos o ideal à direita graduado de A dado por $J = IA$. Então, $J_1 = (IA)_1 = IA_1 = I$, ou seja, J_1 é um ideal graduado nilpotente A_1. Pelo Lema 1.1.18, temos que J é um ideal graduado nilpotente de A, o que é um absurdo, pois A é graduado semiprimo. Portanto, A_1 é semiprimo.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponhamos que $A\#K[G]^*$ não é semiprimo, então temos que existe $0 \neq x \in A\#K[G]^*$, tal que $x(A\#K[G]^*)x = 0$. Escolhemos g no suporte de x, logo $x(1\#p_g) = a\#p_g \neq 0$, $a \in A$. Então $(a\#p_g)(A\#K[G]^*)(a\#p_g) = 0$. Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
0 &= (a\#p_g)((1\#p_g) \centerdot A)(a\#p_g) = a \centerdot (1\#p_g)((1\#p_g) \centerdot A)(a\#p_g) \\
&= a \centerdot ((1\#p_g) \centerdot Aa \centerdot (1\#p_g)) = a \centerdot ((Aa)_{gg^{-1}} \centerdot (1\#p_g)) = a(Aa)_1\#p_g
\end{aligned}
$$

usando o Corolário 2.2.4 (i).

Logo, $Aa(Aa)_1 = 0$, assim $(Aa)_1^2 = 0$. Como A_1 é semiprimo por hipótese e $(Aa)_1$ é um ideal de A_1, temos $(Aa)_1 = 0$, mas $(,)$ é não-degenerada e então $a = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $A\#K[G]^*$ é semiprimo.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Por hipótese, $A\#K[G]^*$ é semiprimo, logo $\{0\}$ é um ideal semiprimo de $A\#K[G]^*$. Seja I um ideal graduado de A. Primeiramente, vamos mostrar que $I\#K[G]^*$ é um ideal de $A\#K[G]^*$ via multiplicação.

De fato, dados $a\#p_g \in A\#K[G]^*$ e $b\#p_h \in I\#K[G]^*$ temos

$$(b\#p_h)(a\#p_g) = ba_{hg^{-1}}\#p_g \in I\#K[G]^*$$

ou seja, $I\#K[G]^*$ é um ideal à direita de $A\#K[G]^*$. Analogamente, $I\#K[G]^*$ é um ideal à esquerda de $A\#K[G]^*$. Assim, $I\#K[G]^*$ é um ideal de $A\#K[G]^*$.

Suponhamos que $I^n = 0$ para algum n. Escolhendo $a_i\#p_{g_i} \in I\#K[G]^*$ com $i \in \{1, ..., n\}$ temos por indução que

$$(a_1\#p_{g_1})(a_2\#p_{g_2})...(a_n\#p_{g_n}) = a_1 a_{2g_1g_2^{-1}}...a_{ng_{n-1}g_n^{-1}}\#p_{g_n} = 0$$

ou seja, $(I\#K[G]^*)^n = 0$. Como $A\#K[G]^*$ é semiprimo, temos $I\#K[G]^* = 0$, de onde segue que $I = 0$, ou seja, A não possui ideais graduados nilpotentes não nulos. Portanto, A é graduado semiprimo. ■

Um resultado similar ao teorema anterior vale se $A\#K[G]^*$ for um anel primo.

Teorema 4.2.8. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A_1 *é primo e* A *é graduado semiprimo com* $A_g \neq 0$ *para todo* $g \in G$*;*

(ii) A_1 *é primo e a graduação em* A *é não-degenerada com* $A_g \neq 0$ *para* $g \in G$*;*

(iii) A_1 *é primo e a graduação em* A *é fiel;*

(iv) $A\#K[G]^*$ *primo.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Segue do teorema anterior.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponhamos que a graduação em A não é fiel. Isso implica, pelo Lema 4.2.2 (ii), $a_gA_h = 0$, para certos $h \in G$ e $a_g \in A_g$. Como a graduação é não-degenerada segue que $I = A_hA_{h^{-1}}$ é um ideal à direita não-nulo de A_1 e também $A_{g^{-1}}a_g \subseteq A_1$ é um ideal não-nulo de A_1. Mas, $(A_{g^{-1}}a_g)I = A_{g^{-1}}a_gA_hA_{h^{-1}} = 0$, o que contradiz o fato de A_1 ser primo. Portanto, a graduação em A é fiel.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Suponhamos que $A\#K[G]^*$ não é primo. Então existem $x, y \in A\#K[G]^*$, com $x, y \neq 0$, tais que $x(A\#K[G]^*)y = 0$. Escolhendo g, h no suporte de x e y, respectivamente, nós podemos assumir $x = a\#p_g$ e $y = b\#p_h$, $a, b \in A$. Segue então que

$$0 = (a\#p_g) \centerdot (A \centerdot (1\#p_h) \centerdot A) \centerdot (b\#p_h) = a \centerdot ((1\#p_g) \centerdot A \centerdot (1\#p_h)) \centerdot Ab \centerdot (1\#p_h)$$
$$= aA_{gh^{-1}} \centerdot (1\#p_h) \centerdot Ab \centerdot (1\#p_h) = aA_{gh^{-1}}(Ab)_1 \centerdot (1\#p_h) = aA_{gh^{-1}}(Ab)_1\#p_h$$

pelo Corolário 2.2.4 (i).

Então $aA_{gh^{-1}}(Ab)_1 = 0$, o que implica que $AaA_{gh^{-1}}(Ab)_1A_{hg^{-1}} = 0$ e, portanto, $(Aa)_1A_{gh^{-1}}(Ab)_1A_{hg^{-1}} = 0$. Como a graduação em A é nao degenerada, pelo Lema 4.2.2, temos que $A_{gh^{-1}}(Ab)_1A_{hg^{-1}} \neq 0$. Temos também que $A_{gh^{-1}}(Ab)_1A_{hg^{-1}}$ é um ideal de A_1. Como A_1 é primo, segue que $(Aa)_1 = 0$ e, pela não-degeneração de $(,)$, temos $a = 0$, uma contradição. Portanto, $A\#K[G]^*$ é primo.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Se $A\#K[G]^*$ é primo, então $A\#K[G]^*$ é semiprimo. Pelo teorema anterior, A é graduado semiprimo. Além disso, pelo Corolário 2.2.3 (ii), $A_1 \cong (1\#p_1)(A\#K[G]^*)(1\#p_1)$, sendo assim um anel primo. Resta mostrar que $A_g \neq 0$ para todo $g \in G$, mas de fato, suponhamos $A_h = 0$ para algum $h \in G$, então $(1\#p_h)(A\#K[G]^*)(1\#p_1) = (1\#p_h) \centerdot A \centerdot (1\#p_1) = A_h\#p_1 = 0$, o que contraria $A\#K[G]^*$ ser primo. ■

Uma outra interpretação do teorema anterior pode ser dada em termos do contexto de Morita.

Corolário 4.2.9. *Se A é um anel graduado por G, o contexto de Morita C dado por $[A_1, A, A, A\#K[G]^*]$ é primo se, e somente se, qualquer uma das condições do Teorema 4.2.8 valem.*

Demonstração: Lembremos que o contexto de Morita $[A_1, A, A, A\#K[G]^*]$ é dito primo se, e somente se, o anel de Morita associado a este contexto é primo.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que C é primo e seja

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que eCe também é primo. Mas $eCe \cong A\#K[G]^*$, ou seja, $A\#K[G]^*$ é primo e, assim, todas as condições do Teorema 4.2.8 são satisfeitas.

$(\Leftarrow)$ Se uma (e então todas) as condições do Teorema 4.2.8 valem, então as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da Proposição 1.2.4 são verificadas e, assim, C é um anel primo. ■

Vamos agora caracterizar anéis fortemente G-graduados em termos do contexto de Morita.

Teorema 4.2.10. *Seja A um anel G-graduado e consideremos o contexto de Morita da Proposição 4.1.6. Então $A\#K[G]^*$ é Morita equivalente a A_1 se, e somente se, A é fortemente G-graduado.*

Demonstração: Temos que $A\#K[G]^*$ é Morita equivalente a A_1 se, e somente se, $[,]$ e $(,)$ são sobrejetivas. A sobrejetividade de $(,)$ é facilmente verificada. Temos então que mostrar que $[,]$ é sobrejetiva, ou seja, $A \centerdot (1\#p_1) \centerdot A = A\#K[G]^*$.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos então $A \centerdot (1\#p_1) \centerdot A = A\#K[G]^*$. Assim, pelo Corolário 2.2.4 (i), temos

$$\begin{aligned} A_1 \centerdot (1\#p_g) &= (1\#p_g)(A\#K[G]^*)(1\#p_g) \\ &= ((1\#p_g) \centerdot A \centerdot (1\#p_1)(1\#p_1) \centerdot A \centerdot (1\#p_g)) = A_g A_{g^{-1}} \centerdot (1\#p_g) \end{aligned}$$

Segue então que $A_1 = A_g A_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$ e, portanto, A é fortemente G-graduado.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos A fortemente G-graduado, ou seja, $A_1 = A_g A_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$. Provando que $1_{A\#K[G]^*} \in A \centerdot (1\#p_1) \centerdot A$, teremos mostrado a sobrejetividade de $[,]$. Note que basta mostrar que $1\#p_g \in A \centerdot (1\#p_1) \centerdot A$, para todo $g \in G$.

De fato, para um elemento $g \in G$ fixado, $A_1 = A_g A_{g^{-1}}$ implica que existem $\{a_i\} \subseteq A_g$ e $\{b_i\} \subseteq A_{g^{-1}}$ tais que $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$. Usando o fato de que $(b_l)_{h^{-1}} = \delta_{g,h} b_l$, temos

$$1\#p_g = \sum_{i=1}^n a_i b_i \#p_g = \sum_{i=1}^n a_i (\sum_{h\in G} (b_i)_{h^{-1}} \#p_h) = \sum_{i=1}^n a_i \centerdot (1\#p_1) \centerdot b_i \in A \centerdot (1\#p_1) \centerdot A$$

usando a Proposição 2.2.3 (i).

Logo, $[,]$ é sobrejetiva, e, portanto, $A\#K[G]^*$ é Morita equivalente a A_1. ■

Capítulo 5

Aplicações

Apresentaremos aqui algumas aplicações dos resultados obtidos ao longo dessa dissertação. Novamente, consideraremos A uma álgebra graduada por um grupo finito G. Denotamos por $J(A)$ o radical de Jacobson de A e $J_G(A)$ o radical de Jacobson graduado de A. Em [2], Bergman conjecturou que $J_G(A) \subseteq J(A)$. Esta conjectura foi complementada pela questão de saber se $J_G(A) = J(A)$, quando $\mid G \mid^{-1} \in A$. Estas duas questões foram resolvidas afirmativamente por M. Cohen e S. Montgomery em [4] e passamos a discutir seus argumentos aqui.

5.1 Radical de Jacobson e Radical de Jacobson Graduado de Álgebras Graduadas

Seja A uma álgebra graduada por um grupo finito G.

Definição 5.1.1. *O radical de Jacobson graduado $J_G(A)$ é a interseção de todos os anuladores dos A-módulos graduados à direita simples.*

O próximo teorema caracteriza o radical de Jacobson do produto smash $A\#K[G]^*$.

Teorema 5.1.2. *Nas hipóteses dessa seção, temos*

$$J(A\#K[G]^*) = J_G(A)\#K[G]^*$$

Demonstração: Seja $x = \sum_i a_i\#p_{g_i} \in J(A\#K[G]^*)$, onde $a_i \in A$ e $g_i \in G$, para todo i. Dado V um A-módulo graduado à direita simples, pelo Lema 4.1.2, temos que V é um $A\#K[G]^*$-módulo o qual é simples como $A\#K[G]^*$-módulo e, assim, $V \centerdot x = 0$. Vamos mostrar agora que $a_i \in J_G(A)$, para todo i, ou seja, $V \centerdot a_i = 0$, para todo i.

Notemos que $J(A\#K[G]^*)$ é um ideal de $A\#K[G]^*$. Assim,

$$x(1\#p_{g_i}) = (\sum_i a_i\#p_{g_i})(1\#p_{g_i}) = a_i\#p_{g_i} \in J(A\#K[G]^*)$$

Pela ação de grupo definida no Lema 3.2.1, temos que $J(A\#K[G]^*)$ é G-estável. De fato, seja $\sum_i a_i\#p_{g_i} \in J(A\#K[G]^*)$, então

$$0 = V \centerdot \sum_i a_i\#p_{g_i} = \sum_i (V \centerdot a_i)_{g_i^{-1}}$$

onde $g_i \in G$, para todo i.

Se escolhermos $h \in G$, temos $(\sum_i a_i\#p_{g_i}) \centerdot h = \sum_i a_i\#p_{g_ih^{-1}}$. Logo,

$$V \centerdot (\sum_i a_i\#p_{g_ih^{-1}}) = \sum_i (V \centerdot a_i)_{hg_i^{-1}} = 0$$

onde $hg_i^{-1} \in G$, para todo i, ou seja, $\sum_i a_i\#p_{g_ih^{-1}} \in J(A\#K[G]^*)$.

Assim, $(a_i\#p_{g_i}) \centerdot h = a_i\#p_{g_ih^{-1}} \in J(A\#K[G]^*)$, para qualquer $h \in G$ e então

$$a_i = a_i \centerdot 1 = a_i \centerdot (\sum_{h\in G} 1\#p_{g_ih^{-1}}) = \sum_{h\in G} a_i\#p_{g_ih^{-1}} \in J(A\#K[G]^*)$$

o que implica que

$$V \centerdot a_i = V \centerdot (\sum_{h\in G} a_i\#p_{g_ih^{-1}}) = 0$$

ou seja, $a_i \in J_G(A)$ e, consequentemente, $x = \sum_i a_i \# p_{g_i} \in J_G(A)\#K[G]^*$. Isto mostra que $J(A\#K[G]^*) \subseteq J_G(A)\#K[G]^*$.

Reciprocamente, seja W um $A\#K[G]^*$-módulo à direita simples. Novamente, pelo Lema 4.1.2, temos que W é um A-módulo graduado com graduação dada por $W_g = W \centerdot (1\#p_{g^{-1}})$, e mais, W é simples como A-módulo graduado. Logo, $W \centerdot J_G(A) = 0$ e, assim, $J_G(A) \subseteq J(A\#K[G]^*)$.

Portanto, $J(A\#K[G]^*) = J_G(A)\#K[G]^*$. ∎

Corolário 5.1.3. *Se A é graduada por um grupo finito G, então*

$$J(A_1) = J_G(A) \cap A_1$$

Demonstração: É fácil ver que $J(A_1) \centerdot (1\#p_1) = J(A_1 \centerdot (1\#p_1))$. Usando o Lema 1.1.9, para $R = A\#K[G]^*$ e $e = 1\#p_1$, o Corolário 2.2.4 (*ii*) e o Teorema 5.1.2, temos

$$\begin{aligned} J(A_1) \centerdot (1\#p_1) &= J(A_1 \centerdot (1\#p_1)) = J(A_1\#p_1) = J((1\#p_1)(A\#K[G]^*)(1\#p_1)) \\ &= (1\#p_1)J(A\#K[G]^*)(1\#p_1) = (1\#p_1)(J_G(A)\#K[G]^*)(1\#p_1) \\ &= (J_G(A))_1\#p_1 = (J_G(A) \cap A_1)\#p_1 = (J_G(A) \cap A_1) \centerdot (1\#p_1) \end{aligned}$$

de onde segue que $J(A_1) = J_G(A) \cap A_1$. ∎

Estamos agora prontos para demonstrar nosso segundo resultado, o qual responde as questões de Bergman.

Teorema 5.1.4. *Seja A graduada por um grupo finito G. Então:*

(*i*) $J_G(A) \subseteq J(A)$ *e* $J_G(A) = J(A)_G$*;*

(*ii*) $J(A)^{|G|} \subseteq J_G(A)$*;*

(*iii*) $|G|^{-1} \in A \Rightarrow J_G(A) = J(A)$*.*

Demonstração:

(i) Usando o Lema 3.2.1, podemos considerar $(A\#K[G]^*) * G$. Pela Proposição 1.1.16 e pelo Teorema 5.1.2, segue que

$$J((A\#K[G]^*) * G) \supseteq J(A\#K[G]^*) * G = (J_G(A)\#K[G]^*) * G$$

com igualdade se $\mid G \mid^{-1} \in A$.

Logo, usando o Lema 1.1.9, temos

$$\begin{aligned} J((1\#p_1)((A\#K[G]^*) * G)(1\#p_1)) &= (1\#p_1)J((A\#K[G]^*) * G)(1\#p_1) \\ &\supseteq (1\#p_1)(J_G(A)\#K[G]^*) * G)(1\#p_1) \end{aligned}$$

De onde segue, pelo Lema 3.2.2,

$$J(\sum_g A_g g(1\#p_1)) \supseteq \sum_g (J_G(A))_g g(1\#p_1)$$

e como $\sum_g A_g g(1\#p_1)) \cong A$ e $\sum_g (J_G(A))_g g(1\#p_1) \cong J_G(A)$, temos $J(A) \supseteq J_G(A)$. Isto mostra a primeira afirmação de (i).

Como $J_G(A) \subseteq J(A)$ é fácil ver que $J_G(A) \subseteq J(A)_G$. A inclusão contrária segue do fato de que todo ideal graduado L contido em $J(A)$ também está contido em $J_G(A)$, pois, nestas condições, se V é um A-módulo graduado simples, então V é cíclico e, assim, segue do Lema 1.1.10, que $VL \neq V$. Mas como VL é um A-módulo graduado devemos ter $VL = 0$ e, consequentemente, $L \subseteq J_G(A)$. Como $J(A)_G$ é um ideal graduado contido em $J(A)$ segue que $J(A)_G \subseteq J_G(A)$.

Portanto, $J_G(A) = J(A)_G$.

(ii) Usando a Proposição 1.1.16 e o Teorema 5.1.2 temos

$$J((A\#K[G]^*) * G)^{|G|} \subseteq J(A\#K[G]^*) * G = (J_G(A)\#K[G]^*) * G$$

Então, usando o fato de que para qualquer ideal I de $(A\#K[G]^*) * G$ vale

$((1\#p_1)I(1\#p_1))^{|G|} = (1\#p_1)I^{|G|}(1\#p_1)$, juntamente com o Lema 1.1.9, temos

$$\begin{aligned} J((1\#p_1)((A\#K[G]^*) * G)(1\#p_1))^{|G|} &= ((1\#p_1)J((A\#K[G]^*) * G)(1\#p_1))^{|G|} \\ &= (1\#p_1)J((A\#K[G]^*) * G)^{|G|}(1\#p_1) \\ &\subseteq (1\#p_1)((J_G(A)\#K[G]^*) * G)(1\#p_1) \end{aligned}$$

De onde segue, pelo Lema 3.2.2,

$$J(\sum_g A_g g(1\#p_1))^{|G|} \subseteq \sum_g (J_G(A))_g g(1\#p_1)$$

e como $J(\sum_g A_g g(1\#p_1))^{|G|} \cong J(A)^{|G|}$ e $\sum_g (J_G(A))_g g(1\#p_1) \cong J_G(A)$, temos $J(A)^{|G|} \subseteq J_G(A)$.

(iii) Todas as igualdades de (i) se verificam se $\mid G \mid^{-1} \in A$.

■

Referências Bibliográficas

[1] Anderson, F.W.; Fuller, K.R., *"Rings and Categories of Modules"*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] Bergman, G., *On Jacobson Radicals of Graded Rings*, Notas não publicadas.

[3] Cohen, M., *Group Graded Rings*, Communications in Algebra, 11(11), 1983, 1253-1270.

[4] Cohen, M.; Montgomery, S., *Group-Graded Rings, Smash Products and Group Actions*, Transactions of the American Mathematical Society, 282(1), 1984, 237-258.

[5] Dascalescu, S.; Nastasescu, C.; Raianu, S., *"Hopf Algebras - An Introduction"*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[6] Dokuchaev, M., *Alguns Tópicos sobre Anéis Graduados*, Notas de minicurso não publicadas, Escola de Verão 2009, UFSC, Florianópolis.

[7] Herstein, I.N., *"Noncommutative Rings"*, The Mathematical Association of America, New York, 1968.

[8] Lam, T.Y., *"A First Course in Noncommutative Rings"*, Springer, New York, 2001.

[9] Lam, T. Y., *"Lectures on Modules and Rings"*, Springer, New York, 1999.

[10] Montgomery, S., *“Hopf Algebras and Their Actions on Rings”*, American Mathematical Society, 1993.

[11] Nakagami Y.; Takesaki M., *“Duality for Crossed Products of von Neumann Algebras”*, LNM, vol. 731, Springer, Berlin, 1979.

[12] Nastasescu, C.; Oystaeyen, F.V., *“Methods of Graded Rings”*, Springer, 2004.

[13] Nicholson, W.K.; Waters J.F, *Normal Radicals and Normal Classes of Rings*, Journal of Algebra, 59, 1979, 5-15.

[14] Passman, D.S., *“ Infinite Crossed Products”*, Academic Press, Inc., San Diego, 1989.

[15] Passman, D.S., *It’s Essentially Maschke’s Theorem*, Rocky Mountain J. Math., 13, 1978, 37-54.

[16] Passman, D.S., *“ The Algebraic Structure of Group Rings”*, Wiley-Interscience, New York, 1977.

[17] Quinn, D., *Group-Graded Rings and Duality*, Trans. AMS, 292, 1985, 155-167.

[18] Saldanha, D.Z., *Funtores Separáveis Aplicados a Anéis Graduados*, dissertação de mestrado, UFRGS-PPGMat, Porto Alegre, 2010.

[19] Santos, E.R, *Ações Parciais: sobre a associatividade do skew anel de grupo parcial, ação envolvente e contexto de Morita*, dissertação de mestrado, UFSC-PGMCC, Florianópolis, 2010.