Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Funtores Separáveis Aplicados a Anéis Graduados

por

Diego Zurawski Saldanha

Porto Alegre, 30 de novembro de 2010.

Dissertação submetida por Diego Zurawski Saldanha[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Wagner Oliveira Cortes

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'ana (IM-UFRGS)

Profª. Dr. Bárbara Seelig Pogorelsky (IM-UFRGS)

Prof. Dr. Dirceu Bagio (CCNE-UFSM)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Agradecimentos

A minha família, em especial aos meus pais, irmãos e a minha vó, pelo carinho e pelo incentivo durante todo esse percurso.

A todos meus amigos pelo apoio (em especial o Claiton, a Daiana, o Diego Lieban, a Glauber, o Gustavo, a Juliana, o Paulo, a Raquel Linhares, o Sandro, a Saradia, a Thaísa Tamusiunas e o Tiago).

A professora Guacira (CESS), o professor Osmar (UFSM) e o professor Ivo (UFSCar). Agradeço a todos eles, pelo exemplo (no sentido mais amplo da palavra) e pela amizade.

Ao professor Peneireiro e a sua esposa; o Peneireiro por ter me convidado, ainda no primeiro semestre da graduação, para estudar matemática, por ter sempre me incentivado, pelos conselhos, pelo exemplo que é, tanto como professor quanto ser humano, enfim sou muito feliz de ser seu amigo; a Regina pelo carinho e pela amizade.

A tia Raquel, ao Fabiano e ao Vini pelo apoio e paciência, em especial no período em que estive morando com eles. Ao Seu Renato e a Dona Rosângela pelo modo afetuoso que me acolheram em Viamão.

Ao professor Wagner por ter aceito orientar esse trabalho e por compreender as dificuldades de tempo para o desenvolvimento desse trabalho, principalmente na fase final.

A banca, em especial ao professor Alveri, pelas valiosas sugestões.

Ao CNPq pelo incentivo financeiro.

"Se podes olhar, vê.
Se podes ver, repara."

José Saramago

Resumo

Neste trabalho estudamos funtores separáveis e suas propriedades. Estudamos condições necessárias e suficientes para que os funtores restrição e indução, associados a um homomorfismo de anéis, sejam separáveis. No caso em que R é um anel fortemente graduado por um grupo G, mostramos que R é separável sobre R_e se, e somente se, G é finito e a função traço é sobrejetiva, onde e é o elemento neutro do grupo G. Estes resultados foram apresentados em 1989 por Năstăsescu, Van Den Bergh e Van Oystaeyen em [6].

Abstract

In this work we study separable functors and its properties. We study necessary and sufficient conditions for the restriction functor and the induction functor to be separable. When R is strongly graded by a group G we show that R is separable over R_e if and only if G is finite and the trace function is surjective, where e is the identity element of G. These results were presented in 1989 by Năstăsescu, Van Den Bergh e Van Oystaeyen em [6].

Sumário

Introdução

O conceito de separabilidade tem sido estensivamente estudado no contexto de álgebras de Hopf, co-álgebras, co-módulos, álgebras não-associativas, C^*-álgebras e temas relacionados. Nesta dissertação iremos estudar a separabilidade de anéis de um ponto de vista funtorial, e para isto, vamos estudar resultados obtidos em [6] referentes a funtores separáveis, em especial, para o contexto de categorias de módulos sobre anéis graduados.

No primeiro capítulo, apresentamos definições básicas, exemplos e resultados bem conhecidos na literatura sobre produto tensorial de módulos e sobre a linguagem categórica, os quais são utilizados no decorrer do trabalho.

Na seção 1 do capítulo 2 iremos apresentar o conceito de separabilidade para funtores, introduzida por [6]. Na seção 2, provamos para um funtor separável $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ que algumas propriedades válidas para objetos e morfismos da categoria $\mathcal{B}$ são preservadas para os correspondentes objetos e morfismo na categoria $\mathcal{A}$. Na seção 3 consideramos o funtor restrição, φ_*, e o funtor indução, φ^*, associados ao homomorfismo de anéis $\varphi : R \longrightarrow S$.

Os principais resultados deste capítulo relacionam a separabilidade de φ_* à separabilidade de S sobre R, a qual é definida em termos da cisão da aplicação canônica $\psi : S \otimes_R S \longrightarrow S$ como aplicação de (S, S)-bimódulos, e a separabilidade do funtor φ^* à cisão de φ como aplicação de (R, R)-bimódulos.

Funtores separáveis e suas propriedades tem várias aplicações, mas no capítulo 3 nos restringimos aos funtores indução e restrição no contexto da teoria de anéis graduados associados ao homomorfismo inclusão, $\varphi : R_e \longrightarrow R$, onde R é um anel fortemente graduado por um grupo G e e é o elemento neutro de G.

A separabilidade do funtor restrição para anéis graduados será vista no Teorema 3.2.1 que diz que se R for fortemente graduado por G então R é separável sobre R_e se, e somente se, G é finito e a função traço é sobrejetiva.

No presente trabalho, todos os anéis considerados são com unidade e $U(R)$ representa o conjunto dos elementos do anel R que são invertíveis.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados sobre produto tensorial entre módulos e categorias que serão utilizados nos capítulos posteriores. Estes resultados, apesar de serem bem conhecidos, são apresentados para a comodidade do leitor.

1.1 Produto Tensorial

Nesta seção construimos o produto tensorial entre módulos e estabelecemos algumas propriedades básicas. Assumimos aqui, e durante o decorrer do trabalho, um conhecimento elementar sobre anéis e módulos que pode ser encontrado nas referências [1] e [10].

Definição 1.1.1. Sejam M um grupo aditivo abeliano e R, S anéis. Então M é dito um (R, S)-bimódulo, e o denotamos por ${}_RM_S$, se M é um R-módulo à esquerda, um S-módulo à direita e se satisfaz a relação $(rm)s = r(ms)$ para todo $r \in R$, $s \in S$ e $m \in M$.

Definição 1.1.2. Sejam M, N ambos (R, S)-bimódulos. Então uma aplicação $\varphi : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de bimódulos se é simultaneamente homomorfismo de R-módulos à esquerda e S-módulos à direita.

Definição 1.1.3. Sejam R um anel, M um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo aditivo abeliano. Então, uma aplicação $\varphi : M \times N \longrightarrow G$ é dita bilinear se satisfaz as seguintes condições:

(*i*) $\varphi(m_1 + m_2, n) = \varphi(m_1, n) + \varphi(m_2, n)$, para todo $m_1, m_2 \in M$ e $n \in N$;

(*ii*) $\varphi(m, n_1 + n_2) = \varphi(m, n_1) + \varphi(m, n_2)$, para todo $m \in M$ e $n_1, n_2 \in N$;

(*iii*) $\varphi(mr, n) = \varphi(m, rn)$, para todo $m \in M$, $n \in N$ e $r \in R$.

Aplicações que satisfazem as condições (*i*) e (*ii*) são ditas biaditivas e aplicações cumprem a condição (*iii*) são ditas balanceadas.

Observação: É fácil ver que se $\varphi : M \times N \longrightarrow G$ é bilinear e $\alpha : G \longrightarrow G'$ é um homomorfismo de grupos aditivos abelianos, então a aplicação $\alpha \circ \varphi : M \times N \longrightarrow G'$ também é bilinear.

A observação acima é a base para a definição de produto tensorial que segue abaixo.

Definição 1.1.4. Sejam M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Um produto tensorial de M_R e ${}_RN$ é um grupo abeliano T com uma aplicação bilinear $\tau : M \times N \longrightarrow T$ tais que para todo grupo abeliano G e aplicação bilinear $\varphi : M \times N \longrightarrow G$ existe um único homomorfismo de grupos $\alpha : T \longrightarrow G$ satisfazendo $\alpha \circ \tau = \varphi$, isto é, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dd, dashed, "\alpha"] \\ M \times N \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Proposição 1.1.5. *Sejam M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Então, existe um produto tensorial de M_R e ${}_RN$.*

Demonstração. Seja o grupo abeliano livre $S = S(M, N)$, onde os geradores são os elementos do produto cartesiano $M \times N$, em outras palavras, todo elemento de S é uma soma finita da forma $\sum\limits_{(m,n)\in M\times N} z_{m,n}(m, n)$ com $z_{m,n} \in \mathbb{Z}$.

Além disso, seja $S_0 = S_0(M, N)$ o subgrupo de S gerado por todos os elementos da forma

$$(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$$

$$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$$

$$(mr, n) - (m, rn)$$

onde $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ e $r \in R$. A partir de agora chamamos o grupo aditivo abeliano S/S_0 de T. É fácil ver que $M \times N$ é uma $\mathbb{Z}$-base para S e com isto, a restrição do epimorfismo $\pi : S \longrightarrow S/S_0$ a $M \times N$ produz uma aplicação $\tau : M \times N \longrightarrow T$ e indicamos a imagem de (m, n) através τ por $m \otimes n$. Assim, qualquer elemento S_0 é levado por τ no zero de S/S_0 e segue da definição de S_0 que

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$$

$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$$

$$mr \otimes n = m \otimes rn$$

onde $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ e $r \in R$. Assim, τ é uma aplicação bilinear. Iremos mostrar que (T, τ) é um produto tensorial. De fato, seja $\varphi : M \times N \longrightarrow G$ uma aplicação bilinear e como os elementos (m, n) formam uma $\mathbb{Z}$-base para $S = S(M, N)$, então podemos definir um homomorfismo de grupos abelianos $\alpha' : S \longrightarrow G$ dado por

$$\alpha'\left(\sum_{(m,n)\in M\times N} z_{m,n}(m, n)\right) = \sum_{(m,n)\in M\times N} z_{m,n}\varphi(m, n).$$

Além disso, como φ é bilinear segue que α' leva os geradores de S_0 em zero e com isto, S_0 está contido no $\operatorname{Ker}(\alpha')$. Desta maneira, α' se fatora através de S/S_0, em outras palavras, existe um homomorfismo $\alpha : T \longrightarrow G$ tal que $\alpha(m \otimes n) = \varphi(m, n)$. Notamos que α é unicamente determinada, pois os elementos $m \otimes n$ geram T. Logo, (T, τ) é um produto tensorial de M_R por ${}_RN$. $\square$

Proposição 1.1.6. *Se (T, τ) e (T', τ') são produtos tensoriais de M_R e ${}_RN$, então existe um isomorfismo $\alpha : T \longrightarrow T'$ tal que $\alpha \circ \tau = \tau'$.*

Demonstração. Como (T, τ) é um produto tensorial de M_R e ${}_RN$ e τ' é bilinear, então existe $\alpha : T \longrightarrow T'$ tal que $\alpha \circ \tau = \tau'$. Analogamente, como (T', τ') é um produto tensorial de M_R e ${}_RN$, τ é bilinear, então existe $\alpha' : T' \longrightarrow T$ tal que $\alpha' \circ \tau' = \tau$. Assim, $\alpha' \circ \alpha \circ \tau = \alpha' \circ \tau' = \tau = id_T \circ \tau$ e pela unicidade da fatoração sobre τ temos que $\alpha' \circ \alpha = id_T$. De modo análogo, $\alpha \circ \alpha' = id_{T'}$, o que prova que α é um isomorfismo. $\square$

A partir de agora escrevemos $T = M \otimes_R N$ ou, simplesmente, $T = M \otimes N$ quando não tivermos dúvida do anel em que estamos trabalhando.

Proposição 1.1.7. *Sejam R um anel, M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Então, as seguintes propriedades são válidas:*

(i) $M \otimes_R R \simeq M$;

(ii) $R \otimes_R N \simeq N$.

Demonstração. Definimos $\tau : M \times R \longrightarrow M$ por $\tau(m, r) = mr$. A aplicação τ é bilinear, pois M é um R-módulo à direita. Iremos mostrar que (M, τ) é um produto tensorial de M por R sobre R. De fato, seja $\varphi : M \times R \longrightarrow G$ uma aplicação bilinear. Assim, φ pode ser fatorada sobre τ de modo único através de $\alpha : M \longrightarrow G$ definida por $\alpha(m) = \varphi(m, 1)$. Logo, (M, τ) é um produto tensorial de M por R sobre R. E pela unicidade do produto tensorial concluimos que $M \otimes_R R \simeq M$. De modo análogo, se prova o item (ii). $\square$

Proposição 1.1.8. *Sejam R um anel, M um R-módulo à direita e $(N_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de R-módulos à esquerda. Então $M\otimes_R(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} N_i)\simeq\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}(M\otimes_R N_i)$.*

Demonstração. Seja o homomorfismo de grupos abelianos

$$\alpha : M\otimes_R(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} N_i)\longrightarrow\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}(M\otimes_R N_i)$$

tal que $\alpha(m\otimes(n_i)_{i\in\mathcal{I}})=(m\otimes n_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Por outro lado, seja o homomorfismo de grupos abelianos

$$\beta : \bigoplus_{i\in\mathcal{I}}(M\otimes_R N_i)\longrightarrow M\otimes_R(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} N_i)$$

tal que $\beta((m_i\otimes n_i)_{i\in\mathcal{I}})=\sum_{i\in\mathcal{I}}(m_i\otimes\lambda_i(n_i))$, onde $\lambda_i : N_i\longrightarrow\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} N_i$ são as aplicações inclusões. É fácil ver que β é a inversa de α. Logo, α é um isomorfismo. O que prova o resultado. □

Proposição 1.1.9. *Sejam R um anel, $(M_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de R-módulos à direita e N um R-módulo à esquerda. Então $(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i)\otimes_R N\simeq\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}(M_i\otimes_R N)$.*

Demonstração. A prova é análoga a prova da proposição 1.1.8. □

Proposição 1.1.10. *Sejam M, M', M'' R-módulos à direita e N, N', N'' R-módulos à esquerda. Se $\alpha : M\longrightarrow M'$ e $\beta : N\longrightarrow N'$ são R-homomorfismos, então existe um homomorfismo natural de grupos abelianos $\alpha\otimes\beta : M\otimes_R N\longrightarrow M'\otimes_R N'$ tal que $(\alpha\otimes\beta)(m\otimes n)=\alpha(m)\otimes\beta(n)$ para todo $m\in M$, $n\in N$. Além disto, se $\alpha' : M'\longrightarrow M''$ e $\beta' : N'\longrightarrow N''$ são também R-homomorfismos, então $(\alpha'\otimes\beta')\circ(\alpha\otimes\beta)=(\alpha'\circ\alpha)\otimes(\beta'\circ\beta)$. Se α,β são R-isomorfismos, então $\alpha\otimes\beta$ também é um R-isomorfismo.*

Demonstração. Seja a aplicação $\varphi : M\times N\longrightarrow M'\otimes N'$ dada por $\varphi((m,n))=\alpha(m)\otimes\beta(n)$. Segue da definição que φ é bilinear. Assim, pela propriedade universal da definição de produto tensorial temos que existe um único homomorfismo de grupos abelianos γ tal que $\gamma\circ\tau=\varphi$. É fácil ver que $\gamma(m \otimes n) = \alpha(m) \otimes \beta(n)$ para todo $m \in M$ e $n \in N$ e, neste caso, γ é o homomorfismo $\alpha \otimes \beta$ do enunciado desta proposição.

As demais propriedades seguem facilmente através de definições apropriadas de aplicações no conjunto de geradores $\{m \otimes n | m \in M, n \in N\}$. $\square$

Lema 1.1.11. *Sejam M um R-módulo à direita, $r \in R$ e definimos $\theta_r : M \longrightarrow M$ por $\theta_r(m) = mr$. Então, $\theta : R \longrightarrow End(M)$ é um homomorfismo de anéis. Reciprocamente, suponhamos que M é um grupo aditivo abeliano e $\phi : R \longrightarrow End(M)$ é um homomorfismo de anéis. Se $mr = \phi_r(m)$ para todo $m \in M$ e $r \in R$, então M é um R-módulo à direita.*

Demonstração. Suponhamos que M um R-módulo à direita, então pelas propriedades que definem um R-módulo à direita segue claramente que θ é um homomorfismo de anéis.

Reciprocamente, suponhamos que M é um grupo aditivo abeliano e $\phi : R \longrightarrow End(M)$ é um homomorfismo de anéis. Assim, decorre das propridades de ϕ ser homomorfismo de anéis que M é um R-módulo à direita. $\square$

Lema 1.1.12. *Sejam R, S, T anéis, M um (T, R)-bimódulo e N um (R, S)-bimódulo. Então o produto tensorial $M \otimes_R N$ é um (T, S)-bimódulo com $t(m \otimes n)s = (tm) \otimes (ns)$. Além disso, se $\alpha : M \longrightarrow M'$ e $\beta : N \longrightarrow N'$ são homomorfismos de (T, R)-bimódulos e (R, S)-bimódulos, respectivamente, então $\alpha \otimes \beta : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ é um homomorfismo de (T, S)-bimódulos.*

Demonstração. Sejam $s \in S$ e id_M o automorfismo identidade de M. Então, pelo Proposição 1.1.10, $id_M \otimes s : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N$ dado por $id_M \otimes s(m \otimes n) = m \otimes ns$ é um endomorfismo do grupo abeliano $M \otimes_R N$. Além disso, a aplicação $\varphi : S \longrightarrow End(M \otimes N)$ dada por $\varphi(s) = id_M \otimes s$ é claramente um homomorfismo de anéis. Assim, pelo Lema 1.1.11, $M \otimes_R N$ é um S-módulo à direita. Analogamente, $M \otimes_R N$ é um T-módulo à esquerda. O restante é de fácil verificação. $\square$

Proposição 1.1.13. *Sejam R e S anéis, M um R-módulo à direita, N um (R,S)-bimódulo e P um S-módulo á esquerda. Então $(M \otimes_R N) \otimes_S P \simeq M \otimes_R (N \otimes_S P)$.*

Demonstração. Para cada $m \in M$, a aplicação $\psi : N \times P \longrightarrow (M \otimes N) \otimes P$ definida por $\psi(n,p) = (m \otimes n) \otimes p$ é bilinear, então, da propriedade universal da definição de produto tensorial, que existe um único homomorfismo de grupos aditivos abelianos $\theta_m : N \otimes P \longrightarrow (M \otimes N) \otimes P$. Além disso, a aplicação $\phi : M \times (N \otimes P) \longrightarrow (M \otimes N) \otimes P$ dada por $\phi(m,q) = \theta_m(q)$ é também bilinear e segue, da propriedade universal da definição de produto tensorial, que existe $\varphi : M \otimes (N \otimes P) \longrightarrow (M \otimes N) \otimes P$ tal que $\varphi(m \otimes (n \otimes p)) = (m \otimes n) \otimes p$. De modo análogo, construimos outra aplicação que é a inversa de φ. Logo, φ é um isomorfismo. $\square$

1.2 Categorias

Nesta seção iremos introduzir conceitos básicos em Teoria de Categorias, pois tal linguagem será amplamente utilizada no decorrer do trabalho. Para mais detalhes veja [2] e [5].

Definição 1.2.1. Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de uma classe de objetos, denotada por $\mathcal{OBJ}_{\mathcal{C}}$, tal que para cada par de objetos (A,B) de $\mathcal{C}$ associamos um conjunto de morfismos de A para B, denotado por $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, e para cada $A \in \mathcal{C}$ existe um morfismo identidade $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$. Além disso, para cada tripla A, B, C de objetos de $\mathcal{C}$, existe uma operação de composição de morfismos

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$;

(ii) $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$, para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$;

(iii) $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$, sempre que $(A, B) \neq (A', B')$.

Agora iremos exibir alguns exemplos de categorias.

Exemplos:

(1) A categoria dos conjuntos, isto é, a categoria onde os objetos são conjuntos e os morfismos são as funções. Denotamos esta categoria por Set;

(2) A categoria dos anéis, isto é, a categoria onde os objetos são anéis e os morfismos são os homomorfismos de anéis. Denotamos esta categoria por Ring;

(3) A categoria dos R-módulos, isto é, a categoria onde os objetos são R-módulos e os morfismos são os homomorfismos de R-módulos. Denotamos esta categoria por R-Mod, onde R é um anel;

(4) A categoria dos grupos, isto é, a categoria onde os objetos são grupos e os morfismos são os homomorfismos de grupos. Denotamos esta categoria por Grp;

(5) Um grupo G pode ser visto como uma categoria, onde o conjunto G é o único objeto, os seus elementos são os morfismos e a composição é induzida pela operação de G.

Definição 1.2.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que um morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ cinde se existe $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $g \circ f = 1_A$. Por outro lado, um morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ co-cinde se existe $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $f \circ g = 1_B$.

Definição 1.2.3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que um morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um isomorfismo se existe $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$. Neste caso, os objetos A e B são isomorfos e indicamos $A \simeq B$.

Definição 1.2.4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.

(i) Dizemos que um morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um monomorfismo se para quaisquer $g, h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A)$ tais que $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$;

(ii) Dizemos que um morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um epimorfismo se para quaisquer $g, h \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ tais que $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$.

Definição 1.2.5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto P de $\mathcal{C}$ é dito projetivo se para todo epimorfismo $e \in Hom_{\mathcal{C}}(M, N)$ e todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(P, N)$ existe um morfismo $\overline{f} \in Hom_{\mathcal{C}}(P, M)$ tal que $e \circ \overline{f} = f$, isto é, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "e"'] & N \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Definição 1.2.6. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto Q de $\mathcal{C}$ é dito injetivo se para todo monomorfismo $m \in Hom_{\mathcal{C}}(M, N)$ e todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(M, Q)$ existe um morfismo $\overline{f} \in Hom_{\mathcal{C}}(N, Q)$ tal que $\overline{f} \circ m = f$, isto é, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} Q & \\ M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "m"'] & N \arrow[ul, dashed, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Definição 1.2.7. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias. Um funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre as categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ associa a cada objeto A de $\mathcal{A}$ um objeto $F(A)$ de $\mathcal{B}$ e a cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ em $\mathcal{A}$ um morfismo $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ em $\mathcal{B}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$;

(ii) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Em muitos trabalhos a definição acima aparece como funtor covariante para diferenciar do conceito de funtor contravariante, mas no decorre do trabalho usaremos a palavra funtor como em [5].

Definição 1.2.8. Um funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é dito fiel (respectivamente, pleno) se para todo par de objetos A, B de $\mathcal{A}$ a aplicação

$$\begin{array}{rcccc} F & : & Hom_{\mathcal{A}}(A,B) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{B}}(F(A),F(B)) \\ & & f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

é injetiva (respectivamente, sobrejetiva).

Definição 1.2.9. Sejam $F, H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ funtores. Uma transformação natural (ou morfismo funtorial) $\eta : F \longrightarrow H$ é uma família de morfismos

$$(\eta_A : F(A) \longrightarrow H(A))_{A \in \mathcal{A}}$$

tais que, para cada morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ em $\mathcal{A}$ o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & H(A) \arrow[d, "H(\alpha)"] \\ F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & H(A') \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $H(\alpha) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ F(\alpha)$.

Definição 1.2.10. Sejam $F, H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ funtores. Uma transformação natural $\eta : F \longrightarrow H$ é uma equivalência natural (ou isomorfismo funtorial) se cada $\eta_A : F(A) \longrightarrow H(A)$ é um isomorfismo em $\mathcal{B}$, e escrevemos $F \simeq H$.

Definição 1.2.11. Um funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é uma equivalência de categorias se existe um funtor $H : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $H \circ F \simeq 1_{\mathcal{A}}$ e $F \circ H \simeq 1_{\mathcal{B}}$. No caso em que tivermos $H \circ F = 1_{\mathcal{A}}$ e $F \circ H = 1_{\mathcal{B}}$, então F é chamado um isomorfismo de categorias ou $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ditas isomorfas.

Proposição 1.2.12. *Um funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, valem as seguintes condições:*

(*i*) *F é pleno e fiel.*

(*ii*) *Para cada $Y \in \mathcal{B}$ existe um $X \in \mathcal{A}$ tal que $Y \simeq F(X)$.*

Demonstração. Suponhamos que F é uma equivalência de categorias, então existe um funtor $H : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $H \circ F \simeq 1_{\mathcal{A}}$ e $F \circ H \simeq 1_{\mathcal{B}}$. Assim, existe $\eta : 1_{\mathcal{A}} \longrightarrow H \circ F$ uma equivalência natural tal que para todo morfismo $\alpha : X \longrightarrow X'$ em $\mathcal{A}$ o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\alpha"'] & (H \circ F)(X) \arrow[d, "(H \circ F)(\alpha)"] \\ X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & (H \circ F)(X') \end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $\eta_{X'} \circ \alpha = (H \circ F)(\alpha) \circ \eta_X$. Como $\eta_{X'}$ é um isomorfismo podemos escrever $\alpha = \eta_{X'}^{-1} \circ (H \circ F)(\alpha) \circ \eta_X$.

Sejam $\alpha, \alpha' : X \longrightarrow X'$ morfismos em $\mathcal{A}$ tais que $F(\alpha) = F(\alpha')$. Aplicando, na última identidade, o funtor H obtemos $(H \circ F)(\alpha) = (H \circ F)(\alpha')$. Dessa maneira, $\alpha = \eta_{X'}^{-1} \circ (H \circ F)(\alpha) \circ \eta_X = \eta_{X'}^{-1} \circ (H \circ F)(\alpha') \circ \eta_X = \alpha'$.

Logo, F é fiel.

Analogamente, conclui-se que H também é fiel.

Agora, seja um morfismo $\beta : F(X) \longrightarrow F(X')$, considerando o morfismo $\alpha : X \longrightarrow X'$ dado por $\alpha = \eta_{X'}^{-1} \circ H(\beta) \circ \eta_X$ obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & (H \circ F)(X) \arrow[d, "H(\beta)"] \\ X' & (H \circ F)(X') \arrow[l, "\eta_{X'}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

comutativo, isto é, $\eta_{X'} \circ \alpha = H(\beta) \circ \eta_X$.

Como o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\alpha"'] & (H \circ F)(X) \arrow[d, "(H\circ F)(\alpha)"] \\ X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & (H \circ F)(X') \end{tikzcd}$$

também é comutativo, isto é, $\eta_{X'} \circ \alpha = (H \circ F)(\alpha) \circ \eta_X$ verificamos que $(H \circ F)(\alpha) = H(\beta)$ e, como H é fiel, obtemos que $F(\alpha) = \beta$. Assim, F é pleno.

Finalmente, como existe $\xi : 1_{\mathcal{B}} \longrightarrow F \circ H$ uma equivalência natural, assim para cada objeto Y em $\mathcal{B}$ existe o isomorfismo $\xi_Y : Y \longrightarrow F(H(Y))$, o que conclui uma parte da proposição.

Reciprocamente, suponhamos que F é pleno, fiel e que para cada objeto Y em $\mathcal{B}$ existe um objeto X em $\mathcal{A}$ tal que $Y \simeq F(X)$. Definindo $H : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ por $H(Y) = X$(temos os isomorfismos $\xi_Y : Y \longrightarrow (F \circ H)(Y)$) e para cada morfismo $\beta : Y \longrightarrow Y'$ consideremos o morfismo $\xi_{Y'} \circ \beta \circ \xi_Y^{-1}$ e obtemos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\xi_Y"] \arrow[d, "\beta"'] & (F \circ H)(Y) \arrow[d, "\xi_{Y'}\circ\beta\circ\xi_Y^{-1}"] \\ Y' \arrow[r, "\xi_{Y'}"'] & (F \circ H)(Y') \end{tikzcd}$$

é comutativo. Como F é pleno e fiel, então existe um único morfismo

$$H(\beta) : H(Y) \longrightarrow H(Y')$$

tal que $(F \circ H)(\beta) = \xi_{Y'} \circ \beta \circ \xi_Y^{-1}$. É fácil ver que $H : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ é um funtor e que $\xi : 1_{\mathcal{B}} \longrightarrow F \circ H$ é uma equivalência natural.

Finalmente, para encontrar $\eta : 1_{\mathcal{A}} \longrightarrow H \circ F$, aplicamos F em X e consideramos $\xi_{F(X)} : F(X) \longrightarrow (F \circ H \circ F)(X)$. Como F é pleno e fiel, então $\eta_X = F^{-1}_{X,(H \circ F)(X)}(\xi_{F(X)}) : X \longrightarrow (H \circ F)(X)$ é um isomorfismo, que é fácil ver que é natural, pois ξ é natural.

$\square$

Capítulo 2

Separabilidade de Funtores

Neste capítulo apresentamos o conceito de separabilidade de funtores. Além disto, iremos provar propriedades que são preservadas pelas aplicações que definem funtores separáveis e, finalizamos o capítulo caracterizando a separabilidade dos funtores restrição e indução, os quais são introduzidos a partir de um homomorfismo de anéis.

2.1 Funtor Separável

O objetivo desta seção é apresentar o conceito de sepabilidade de funtores que em 1989 foi introduzido por Năstăsescu, Van Den Bergh e Van Oystaeyen em [6].

Definição 2.1.1. Um funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é dito separável se para cada par de objetos M e N de $\mathcal{A}$ existe uma aplicação

$$\varphi^F_{M,N} : Hom_{\mathcal{B}}(F(M), F(N)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$$

satisfazendo as seguintes condições:

S.F. 1 Para cada $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$ temos que $\varphi^F_{M,N}(F(\alpha)) = \alpha$;

S.F. 2 Para cada par de objetos (M', N') de $\mathcal{A}$, $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, M')$, $\beta \in Hom_{\mathcal{A}}(N, N')$, $f \in Hom_{\mathcal{B}}(F(M), F(N))$ e $g \in Hom_{\mathcal{B}}(F(M'), F(N'))$ tais que se o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & F(N) \arrow[d, "F(\beta)"] \\ F(M') \arrow[r, "g"'] & F(N') \end{tikzcd}$$

é comutativo, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi^F_{M,N}(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\ M' \arrow[r, "\varphi^F_{M',N'}(g)"'] & N' \end{tikzcd}$$

também é comutativo.

Lema 2.1.2. *Seja $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor em que o item S.F. 1 da Definição 2.1.1 é válido. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*i*) *F satisfaz S.F. 2 da Definição 2.1.1.*

(*ii*) *Para quaisquer M, N, R objetos de $\mathcal{A}$, $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$, $\beta \in Hom_{\mathcal{A}}(N, R)$, $f \in Hom_{\mathcal{B}}(F(M), F(N)$ e $g \in Hom_{\mathcal{B}}(F(N), F(R))$ temos que $\varphi^F_{M,R}(g \circ F(\alpha)) = \varphi^F_{N,R}(g) \circ \alpha$ e $\varphi^F_{M,R}(F(\beta) \circ f) = \beta \circ \varphi^F_{M,N}(f)$.*

Demonstração. Suponhamos que F é separável. Aplicando a condição S.F. 2, da Definição 2.1.1, ao diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "g \circ F(\alpha)"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & F(R) \arrow[d, "F(1_R)"] \\ F(N) \arrow[r, "g"'] & F(R) \end{tikzcd}$$

obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi^F_{M,R}(g\circ F(\alpha))"] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[d, "1_R"] \\ N \arrow[r, "\varphi^F_{N,R}(g)"'] & R \end{tikzcd}$$

isto é, $1_R \circ \varphi^F_{M,R}(g \circ F(\alpha)) = \varphi^F_{N,R}(g) \circ \alpha$. Logo, $\varphi^F_{M,R}(g \circ F(\alpha)) = \varphi^F_{N,R}(g) \circ \alpha$. Por outro lado, aplicando a condição S.F. 2, da Definição 2.1.1, ao diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(1_M)"'] & F(N) \arrow[d, "F(\beta)"] \\ F(M) \arrow[r, "F(\beta)\circ f"'] & F(R) \end{tikzcd}$$

obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi^F_{M,N}(f)"] \arrow[d, "1_M"'] & N \arrow[d, "F(\beta)"] \\ M \arrow[r, "\varphi^F_{M,R}(F(\beta\circ f))"'] & R \end{tikzcd}$$

isto é, $\varphi^F_{M,R}(F(\beta) \circ f) \circ 1_M = \beta \circ \varphi^F_{M,N}(f)$. Logo, $\varphi^F_{M,R}(F(\beta) \circ f) = \beta \circ \varphi^F_{M,N}(f)$.

Reciprocamente, sejam $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, M')$, $\beta \in Hom_{\mathcal{A}}(N, N')$, $f \in Hom_{\mathcal{B}}(F(M), F(N))$ e $g \in Hom_{\mathcal{B}}(F(M'), F(N'))$ tais que $F(\beta) \circ f = g \circ F(\alpha)$. Assim, por hipótese temos que $\varphi^F_{M,N'}(g \circ F(\alpha)) = \varphi^F_{M',N'}(g) \circ \alpha$ e $\varphi^F_{M,N'}(F(\beta) \circ f) = \beta \circ \varphi^F_{M,N}(f)$. Logo, $\varphi^F_{M',N'}(g) \circ \alpha = \beta \circ \varphi^F_{M,N}(f)$. $\square$

O próximo resultado nos diz que, para funtores plenos, um funtor ser separável é equivalente a ser fiel.

Lema 2.1.3. *Seja $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor pleno. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) F é fiel.

(ii) F é separável.

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (i)$ Sejam $\alpha, \beta \in Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$ tais que $F(\alpha) = F(\beta)$. Então, $\alpha = \varphi^F_{M,N}(F(\alpha)) = \varphi^F_{M,N}(F(\beta)) = \beta$. Logo, F é fiel.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Por hipótese, temos que a aplicação $F_{M,N} : Hom_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow Hom_{\mathcal{B}}(F(M), F(N))$, dada por $F_{M,N}(\alpha) = F(\alpha)$, é bijetiva, para todo M, $N \in \mathcal{A}$. Assim, para cada par de objetos M e N de $\mathcal{A}$ definimos a aplicação $\varphi^F_{M,N} = F^{-1}_{M,N}$. Iremos verificar que as condições S.F. 1 e S.F. 2 são satisfeitas.

De fato, seja $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$, então $\varphi^F_{M,N}(F(\alpha)) = \alpha$ e vale S.F. 1. Agora, sejam $M, N, M', N' \in \mathcal{A}$, $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, M')$, $\beta \in Hom_{\mathcal{A}}(N, N')$, $f \in Hom_{\mathcal{B}}(F(M), F(N))$ e $g \in Hom_{\mathcal{B}}(F(M'), F(N'))$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & F(N) \arrow[d, "F(\beta)"] \\ F(M') \arrow[r, "g"'] & F(N') \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $F(\beta) \circ f = g \circ F(\alpha)$. Dessa maneira, $\varphi^F_{M,N'}(F(\beta) \circ f) = \varphi^F_{M,N'}(g \circ F(\alpha))$. Além disso, como $F_{M,N}$ e $F_{M',N'}$ são bijetivas, temos que existem únicos morfismos f', g' tais que $F(f') = f$ e $F(g') = g$ ou, em outras palavras, $f' = \varphi^F_{M,N}(f)$ e $g' = \varphi^F_{M',N'}(g)$.

Logo,

$$\begin{aligned} \beta \circ f' &= \varphi^F_{M,N'}(F(\beta \circ f')) \\ &= \varphi^F_{M,N'}(F(\beta) \circ F(f')) \\ &= \varphi^F_{M,N'}(F(\beta) \circ f) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi^F_{M,N'}(g \circ F(\alpha)) \\
&= \varphi^F_{M,N'}(F(g') \circ F(\alpha)) \\
&= \varphi^F_{M,N'}(F(g' \circ \alpha)) \\
&= g' \circ \alpha,
\end{aligned}
$$

ou seja, $\beta \circ \varphi^F_{M,N}(f) = \varphi^F_{M',N'}(g) \circ \alpha$. Portanto, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi^F_{M,N}(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\
M' \arrow[r, "\varphi^F_{M',N'}(g)"'] & N'
\end{tikzcd}
$$

é comutativo, o que conclui a demonstração que F é separável. $\square$

2.2 Propriedades de Funtores Separáveis

Nesta seção vamos mostrar algumas propriedades que são preservadas pelas aplicações que definem funtores separáveis e que evidenciam a importância do conceito de separabilidade de funtores.

Proposição 2.2.1. *Sejam $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $H : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores. Então as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *Se F e H são separáveis, então $H \circ F$ é separável.*

(ii) *Se $H \circ F$ é separável, então F é separável.*

(iii) *Se F é uma equivalência de categorias, então F é separável.*

Demonstração. (i) Sejam $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $H : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores separáveis. Definimos

$$\varphi^{H\circ F}_{M,N} : Hom_{\mathcal{C}}((H \circ F)(M), (H \circ F)(N)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$$

por $\varphi^{H\circ F}_{M,N} = \varphi^{F}_{M,N} \circ \varphi^{H}_{F(M),F(N)}$, para cada par de objetos M, N de $\mathcal{A}$. Iremos mostrar que tais aplicações satisfazem as condições S.F. 1 e S.F. 2 da Definição 2.1.1. De fato, seja $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$, então $\varphi^{H\circ F}_{M,N}((H \circ F)(\alpha)) = \varphi^{F}_{M,N}(\varphi^{H}_{F(M),F(N)}(H(F(\alpha))) = \varphi^{F}_{M,N}(F(\alpha)) = \alpha$. Agora, sejam $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, M')$, $\beta \in Hom_{\mathcal{A}}(N, N')$, $f \in Hom_{\mathcal{C}}((H \circ F)(M), (H \circ F)(N))$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}((H \circ F)(M'), (H \circ F)(N'))$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(H \circ F)(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(H\circ F)(\alpha)"'] & (H \circ F)(N) \arrow[d, "(H\circ F)(\beta)"] \\
(H \circ F)(M') \arrow[r, "g"'] & (H \circ F)(N')
\end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $(H \circ F)(\beta) \circ f = g \circ (H \circ F)(\alpha)$.

Aplicando a condição S.F. 2 da Definição 2.1.1 ao funtor separável H obtemos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "\varphi^{H}_{F(M),F(N)}(f)"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & F(N) \arrow[d, "F(\beta)"] \\
F(M') \arrow[r, "\varphi^{H}_{F(M'),F(N')}(g)"'] & F(N')
\end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $F(\beta) \circ \varphi^{H}_{F(M),F(N)}(f) = \varphi^{H}_{F(M'),F(N')}(g) \circ F(\alpha)$. Aplicando a condição S.F. 2 da Definição 2.1.1 ao funtor separável F obtemos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi^{H\circ F}_{M,N}(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\ M' \arrow[r, "\varphi^{H\circ F}_{M',N'}(g)"'] & N' \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $\beta \circ \varphi^{H\circ F}_{M,N}(f) = \varphi^{H\circ F}_{M',N'}(g) \circ \alpha$, o que finaliza a demonstração do item (i).

(ii) Sejam $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $H : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores e $H \circ F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ um funtor separável. Definimos

$$\varphi^{F}_{M,N} : Hom_{\mathcal{B}}(F(M), F(N)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$$

por $\varphi^{F}_{M,N} = \varphi^{H\circ F}_{M,N} \circ H$, para cada par de objetos M, N de $\mathcal{A}$. Iremos mostrar que tais aplicações satisfazem as condições S.F. 1 e S.F. 2 da Definição 2.1.1. De fato, seja $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$, então $\varphi^{F}_{M,N}(F(\alpha)) = (\varphi^{H\circ F}_{M,N} \circ H)(F(\alpha)) = \varphi^{H\circ F}_{M,N}((H\circ F)(\alpha)) = \alpha$. Agora, sejam $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(M, M')$, $\beta \in Hom_{\mathcal{A}}(N, N')$, $f \in Hom_{\mathcal{B}}(F(M), F(N))$ e $g \in Hom_{\mathcal{B}}(F(M'), F(N'))$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & F(N) \arrow[d, "F(\beta)"] \\ F(M') \arrow[r, "g"'] & F(N') \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $F(\beta) \circ f = g \circ F(\alpha)$. Aplicando o funtor H ao diagrama acima obtemos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} (H \circ F)(M) \arrow[r, "H(f)"] \arrow[d, "(H\circ F)(\alpha)"'] & (H \circ F)(N) \arrow[d, "(H\circ F)(\beta)"] \\ (H \circ F)(M') \arrow[r, "H(g)"'] & (H \circ F)(N') \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $(H \circ F)(\beta) \circ H(f) = H(g) \circ (H \circ F)(\alpha)$.

Aplicando a condição S.F. 2 da Definição 2.1.1 ao funtor separável $H \circ F$ obtemos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi^F_{M,N}(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\ M' \arrow[r, "\varphi^F_{M',N'}(g)"'] & N' \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $\varphi^F_{M',N'}(g) \circ \alpha = \beta \circ \varphi^F_{M,N}(f)$, o que prova o item (ii).

(iii) Suponhamos que F é um equivalência de categorias. Assim, pela Proposição 1.2.12, temos que F é pleno e fiel. Logo, pelo Lema 2.1.3, F é separável, o que conclui a demonstração. □

A separabilidade de um funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ nos permite, em geral, deduzir propriedades de objetos ou morfismos da categoria $\mathcal{A}$ a partir de propriedades correspondentes de objetos ou morfismos na categoria $\mathcal{B}$. A próxima proposição mostra alguns exemplos de tais propriedades.

Proposição 2.2.2. *Sejam $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor separável e M, N objetos em $\mathcal{A}$. Então, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) Se $f \in Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$ e $F(f)$ cinde então f cinde.

(ii) Se $f \in Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$ e $F(f)$ co-cinde então f co-cinde.

(iii) Se F preserva epimorfismo e $F(M)$ é projetivo então M é projetivo.

(iv) Se F preserva monomorfismo e $F(M)$ é injetivo então M é injetivo.

Demonstração. (i) Suponhamos que $F(f)$ cinde, isto é, existe $g \in Hom_{\mathcal{A}}(F(N), F(M))$ tal que $g \circ F(f) = 1_{F(M)}$. Assim, segue que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "1_{F(M)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(M) \arrow[d, "F(1_M)"] \\ F(N) \arrow[r, "g"'] & F(M) \end{tikzcd}$$

é comutativo. Aplicando a condição S.F. 2 da Definição 2.1.1 no diagrama acima obtemos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "1_M"] \\ N \arrow[r, "\varphi^F_{N,M}(g)"'] & M \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $\varphi^F_{N,M}(g) \circ f = 1_M$. Logo, f cinde.

(ii) Suponhamos que $F(f)$ co-cinde, isto é, existe $g \in Hom_{\mathcal{A}}(F(N), F(M))$ tal que $F(f) \circ g = 1_{F(N)}$. Assim, segue que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} F(N) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F(1_N)"'] & F(M) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(N) \arrow[r, "1_{F(N)}"'] & F(N) \end{tikzcd}$$

é comutativo. Aplicando a condição S.F. 2 da Definição 2.1.1 no diagrama acima obtemos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\varphi^F_{N,M}(g)"] \arrow[d, "1_N"'] & M \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "1_N"'] & N \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $f \circ \varphi^F_{N,M}(g) = 1_N$. Logo, f co-cinde.

(iii) Suponhamos que F preserva epimorfismo e $F(M)$ é projetivo. Iremos mostrar que M é projetivo. De fato, sejam $f : P \longrightarrow Q$ um epimorfismo e $g : M \longrightarrow Q$ um morfismo na categoria $\mathcal{A}$. Como F preserva epimorfismo temos que $F(f) : F(P) \longrightarrow F(Q)$ é um epimorfismo e $F(g) : F(M) \longrightarrow F(Q)$ é um morfismo na categoria $\mathcal{B}$. Como $F(M)$ é projetivo, então existe um morfismo $h : F(M) \longrightarrow F(P)$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & F(M) \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "F(g)"] \\ F(P) \arrow[r, "F(f)"'] & F(Q) \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $F(f) \circ h = F(g)$. Dessa maneira, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "F(g)"'] & F(P) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(Q) \arrow[r, "F(1_Q)"'] & F(Q) \end{tikzcd}$$

é comutativo e aplicando a condição S.F. 2 da Definição 2.1.1 no diagrama acima obtemos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "\varphi^F_{M,P}(h)"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "f"] \\ Q \arrow[r, "1_Q"'] & Q \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $f \circ \varphi^F_{M,P}(h) = 1_Q \circ g = g$. Logo, M é projetivo.

(iv) Suponhamos que F preserva monomorfismo e $F(M)$ é injetivo. Iremos mostrar que M é injetivo. De fato, sejam $f : P \longrightarrow Q$ um monomorfismo e $g : P \longrightarrow M$ um morfismo na categoria $\mathcal{A}$. Assim, como F preserva monomorfismo temos que $F(f) : F(P) \longrightarrow F(Q)$ é um monomorfismo e $F(g) : F(P) \longrightarrow F(M)$ é um morfismo na categoria $\mathcal{B}$. Como $F(M)$ é injetivo, então existe um morfismo $h : F(Q) \longrightarrow F(M)$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) & \\ F(P) \arrow[u, "F(g)"] \arrow[r, "F(f)"'] & F(Q) \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $h \circ F(f) = F(g)$. Dessa maneira, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} F(P) \arrow[r, "F(1_P)"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(P) \arrow[d, "F(g)"] \\ F(Q) \arrow[r, dashed, "h"'] & F(M) \end{tikzcd}$$

é comutativo e aplicando a condição S.F. 2 da Definição 2.1.1 no diagrama acima obtemos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "1_P"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "g"] \\ Q \arrow[r, dashed, "\varphi^F_{Q,M}(h)"'] & M \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $\varphi^F_{Q,M}(h) \circ f = g \circ 1_P = g$. Logo, M é injetivo. $\square$

2.3 Funtores Indução e Restrição

Podemos estudar funtores separáveis em diversos contextos, mas a partir desta seção focaremos em dois funtores que aparecem na situação que começaremos a descrever abaixo.

Seja $\varphi : R \longrightarrow S$ um morfismo na categoria dos anéis. Então consideramos o funtor restrição

$$\varphi_* : S - Mod \longrightarrow R - Mod$$

definido por $\varphi_*(M) = M$ e $\varphi_*(f) = f$, onde a estrutura de R-Mod de M é a seguinte: adição em M continua a mesma e o produto por escalar é dado por $rm = \varphi(r)m$.

Além disso, consideramos o funtor indução

$$\varphi^* : R - Mod \longrightarrow S - Mod$$

definido por $\varphi^*(M) = S \otimes_R M$ e $\varphi^*(f) = id_S \otimes f$, onde a estrutura de S-Mod em $S \otimes_R M$ é dada por $s(s' \otimes m) = (ss') \otimes m$ e a estrutura de R-Mod de S é a seguinte: adição em S continua a mesma e o produto por escalar é dado por $sr = s\varphi(r)$.

Definição 2.3.1. Nas condições acima, dizemos que S/R é separável (ou que S é separável sobre R) se a aplicação

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & S \otimes_R S & \longrightarrow & S \\ & & s \otimes s' & \longmapsto & s.s' \end{array}$$

cinde como morfismo de (S, S)-bimódulos, isto é, existe um morfismo de (S, S)-bimódulos $\varphi : S \longrightarrow S \otimes_R S$ tal que $\psi \circ \varphi = id_S$.

Seja S é um anel, então denotamos por S^{op} o anel que mantém a adição de S e que inverte a multiplicação, isto é, $s.s' = s's$, $\forall s, s' \in S$. Assim, se S é comutativo temos que $S^{op} = S$.

A próxima proposição mostra que a definição 2.3.1 é compatível com a definição de separabilidade para extensões de anéis.

Proposição 2.3.2. *Sejam S um anel e R um subanel de S com mesma unidade. São equivalentes:*

(i) *O homomorfismo de (S,S)-bimódulos $\psi : S \otimes_R S \longrightarrow S$ dado por $\psi(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ cinde;*

(ii) *Existe $e = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in S \otimes_R S^{op}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} a a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i a$, para todo $a \in S$.*

Demonstração. Suponhamos que o homomorfismo de (S,S)-bimódulos $\psi : S \otimes_R S \longrightarrow S$ cinde, isto é, existe um homomorfismo de (S,S)-bimódulos $\varphi : S \longrightarrow S \otimes_R S$ tal que $\psi \circ \varphi = id_S$. Seja $e = \varphi(1_S) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$, então $1_S = \psi(\varphi(1_S)) = \psi(e) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ e para qualquer $a \in S$, $ae = a\varphi(1_S) = \varphi(a1_S) = \varphi(1_S a) = \varphi(1_S)a = ea$. Portanto, e satisfaz as condições requeridas em (ii).

Reciprocamente, definindo $\varphi : S \longrightarrow S \otimes_R S$ por $\varphi(a) = ea$. Notamos que φ é homomorfismo de (S,S)-bimódulos, pois $\varphi(a) = ea = ae$, $\forall a \in S$. Além disso, $\psi(\varphi(a)) = \psi(ae) = a\psi(e) = a\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a1_S = a$, $\forall a \in S$. Logo, $\psi \circ \varphi = id_S$, e desta forma o homomorfismo de (S,S)-bimódulos $\psi : S \otimes_R S \longrightarrow S$ cinde. $\square$

Observação: No âmbito da teoria de extensões de anéis se um anel S satisfaz uma das condições da proposição anterior dizemos que S é separável sobre R. Qualquer elemento $e \in S \otimes_R S$ que satisfaça o item (ii) é idempotente, sendo chamado de um idempotente de separabilidade de S sobre R. Para anéis comutativos existe um único idempotente de separabilidade de S sobre R, as demonstrações desses fatos são encontradas na página 22 de [9].

O próximo teorema faz a conexão entre o conceito de separabilidade para o funtor restrição e a separabilidade de S sobre R.

Teorema 2.3.3. *Seja a situação descrita no início desta seção. Então, φ_* é separável se, e somente se, S/R é separável.*

Demonstração. Suponhamos que φ_* é separável. Sejam M, N (S,S)-bimódulos e $f : M \longrightarrow N$ um morfismo de (R,S)-bimódulos. Como φ_* é separável, então existe uma aplicação

$$\varphi_{M,N} : Hom_{R-Mod}(\varphi_*(M), \varphi_*(N)) \longrightarrow Hom_{S-Mod}(M,N)$$

satisfazendo as condições S.F. 1 e S.F. 2 da Definição 2.1.1. Consideramos $g = \varphi_{M,N}(f) \in Hom_{S-Mod}(M,N)$. Iremos mostrar que g é um morfismo de (S,S)-bimódulos. Para isto, basta mostrar que g é um homomorfismo de S-módulos à direita. De fato, para cada $s \in S$ definimos os morfismos de R-módulos $\alpha_s^M(x) = xs$, $\forall x \in M$ e $\alpha_s^N(x) = xs$, $\forall x \in N$. Então, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} {}_RM \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_s^M"'] & {}_RN \arrow[d, "\alpha_s^N"] \\ {}_RM \arrow[r, "f"] & {}_RN \end{tikzcd}$$

é comutativo, pois $(f \circ \alpha_s^M)(x) = f(\alpha_s^M(x)) = f(xs) = f(x)s = \alpha_s^N(f(x)) = (\alpha_s^N \circ f)(x)$ e, como $\alpha_s^M = \varphi_*(\alpha_s^M)$ e $\alpha_s^N = \varphi_*(\alpha_s^N)$, a condição S.F. 2 da Definição 2.1.1 produz o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} {}_SM \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_s^M"'] & {}_SN \arrow[d, "\alpha_s^N"] \\ {}_SM \arrow[r, "g"] & {}_SN \end{tikzcd}$$

comutativo. Desta maneira, $g(xs) = g(\alpha_s^M(x)) = (g \circ \alpha_s^M)(x) = (\alpha_s^N \circ g)(x) = \alpha_s^N(g(x)) = g(x)s$, para todo $x \in M$. Assim, g é um homomorfismo de S-módulos à direita.

Agora, ao morfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi : & S \otimes_R S & \longrightarrow & S \\ & s \otimes s' & \longmapsto & s.s' \end{array}$$

associamos o morfismo

$$\begin{array}{rcl} \psi' : S & \longrightarrow & S \otimes_R S \\ s & \longmapsto & 1 \otimes s \end{array}$$

de (R, S)-bimódulos e, claramente, $\psi \circ \psi' = id_S$. Seja $\psi_1 = \varphi_{S, S\otimes_R S}(\psi')$ que é um morfismo de (S, S)-bimódulos como vimos na primeira etapa desta demonstração. Além disso, $\psi \circ \psi_1 = id_S$, isto é, ψ cinde como um morfismo de (S, S)-bimódulos. De fato,

$$\begin{aligned} \psi \circ \psi_1 &= \psi \circ \varphi_{S, S\otimes_R S}(\psi') \\ &= \varphi_{S,S}(\varphi_*(\psi) \circ \psi') \\ &= \varphi_{S,S}(\psi \circ \psi') \\ &= \varphi_{S,S}(id_S) \\ &= \varphi_{S,S}(\varphi_*(id_S)) \\ &= id_S. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que ψ cinde, isto é, existe um morfismo θ de (S, S)-bimódulos tal que $\psi \circ \theta = id_S$. Sejam ${}_SM$, ${}_SN$ módulos e $f \in Hom_{R-Mod}(\varphi_*(M), \varphi_*(N))$. Para cada par M, N de S-módulos à esquerda definimos a aplicação

$$\varphi_{M,N} : Hom_{R-Mod}(\varphi_*(M), \varphi_*(N)) \longrightarrow Hom_{S-Mod}(M, N)$$

por $\varphi_{M,N}(f) = \tilde{f}$, onde $\tilde{f}$ fica definida pelo diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd}
S \otimes_R M \arrow[r, "id_S \otimes f"] & S \otimes_R N \arrow[d, "\simeq"] \arrow[ddd, bend left, "v_N"] \\
S \otimes_R S \otimes_S M \arrow[u, "\simeq"] & S \otimes_R S \otimes_S N \arrow[d, "\psi \otimes id_N"] \\
S \otimes_S M \arrow[u, "\theta \otimes id_M"] & S \otimes_S N \arrow[d, "\simeq"] \\
M \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[uuu, bend left, "u_M"] & N
\end{tikzcd}$$

Do diagrama acima é fácil deduzir que $\tilde{f} = f$ no caso em que f é S-linear, assim $\varphi_{M,N}(\varphi_*(f)) = \varphi_{M,N}(f) = \tilde{f} = f$ o que verifica a condição S.F. 1 da Definição 2.1.1.

Agora, sejam $u_M : M \longrightarrow S \otimes_R M$, $v_N : S \otimes_R N \longrightarrow N$ as composições verticais respectivamente aos lados esquerdo e direito do diagrama acima.

Dados os S-módulos M', N' e $\alpha \in Hom_{S-Mod}(M, M')$, $\beta \in Hom_{S-Mod}(N, N')$, $g \in Hom_{R-Mod}(M', N')$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varphi_*(M) = M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_*(\alpha)=\alpha"'] & \varphi_*(N) = N \arrow[d, "\varphi_*(\beta)=\beta"] \\
\varphi_*(M') = M' \arrow[r, "g"'] & \varphi_*(N') = N'
\end{tikzcd}$$

seja comutativo. É imediato que a comutatividade do diagrama acima produz a comutatividade do quadrado externo do diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
S \otimes_R M \arrow[rrr, "id_S \otimes f"] \arrow[dddd, "id_S \otimes \alpha"'] \arrow[dr, shift left, "v_M"] & & & S \otimes_R N \arrow[dddd, "id_S \otimes \beta"] \arrow[dl, shift left, "v_N"] \\
& M \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ul, shift left, "u_M"] & N \arrow[d, "\beta"] \arrow[ur, shift left, "u_N"] & \\
& M' \arrow[r, "\tilde{g}"'] \arrow[dl, shift left, "u_{M'}"] & N' \arrow[dr, shift left, "u_{N'}"] & \\
& & & \\
S \otimes_R M' \arrow[rrr, "id_S \otimes g"'] \arrow[uur, shift left, "v_{M'}"] & & & S \otimes_R N' \arrow[uul, shift left, "v_{N'}"]
\end{tikzcd}
$$

Assim, como no diagrama acima as aplicações diagonais cindem (basta observar o diagrama da página anterior e lembrar que θ cinde ψ) obtemos que o quadrado interno do diagrama é comutativo uma vez que o quadrado externo do diagrama é comutativo. De fato,

$$
\begin{aligned}
\beta \circ \tilde{f} &= (v_{N'} \circ (id_S \otimes \beta) \circ u_N) \circ (v_N \circ (id_S \otimes f) \circ u_M) \\
&= v_{N'} \circ (id_S \otimes \beta) \circ (id_S \otimes f) \circ u_M \\
&= v_{N'} \circ (id_S \otimes g) \circ (id_S \otimes \alpha) \circ u_M \\
&= (v_{N'} \circ (id_S \otimes g) \circ u_{M'}) \circ (v_{M'} \circ (id_S \otimes \alpha) \circ u_M) \\
&= \tilde{g} \circ \alpha
\end{aligned}
$$

Portanto, φ_* é separável. □

Teorema 2.3.4. *Seja a situação descrita no início desta seção. Então, φ^* é separável se, e somente se, φ cinde como morfismo entre (R, R)-bimódulos.*

Demonstração. Suponhamos que $\varphi^* = S \otimes_R -$ é separável. Consideramos $\gamma : S \otimes_R S \longrightarrow S \otimes_R R$ dada por $\gamma(s \otimes s') = s.s' \otimes 1$.

Dessa maneira, temos que

$$\begin{aligned}(\gamma \circ (id_S \otimes \varphi))(s \otimes r) &= \gamma((id_S \otimes \varphi)(s \otimes r))\\ &= \gamma(s \otimes \varphi(r))\\ &= s\varphi(r) \otimes 1\\ &= sr \otimes 1\\ &= s \otimes r,\end{aligned}$$

isto é, a aplicação $id_S \otimes \varphi = \varphi^*(\varphi)$ cinde e, pela Proposição 2.2.2, obtemos que φ cinde como morfismo entre (R, R)-bimódulos.

Reciprocamente, suponhamos que φ cinde, isto é, existe uma aplicação ψ R-linear tal que $\psi \circ \varphi = id_R$. Sejam ${}_RM$, ${}_RN$ módulos e $f \in Hom_{S-Mod}(\varphi^*(M), \varphi^*(N))$.

Definimos a aplicação

$$\varphi_{M,N} : Hom_{S-Mod}(\varphi^*(M), \varphi^*(N)) \longrightarrow Hom_{R-Mod}(M, N)$$

por $\varphi_{M,N}(f) = \tilde{f}$, onde $\tilde{f}$ fica definida pelo diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R M \arrow[r, "f"] & S \otimes_R N \arrow[d, "\psi \otimes id_N"] \arrow[dd, bend right, "v_N"'] \\ R \otimes_R M \arrow[u, "\varphi \otimes id_M"] & R \otimes_R N \arrow[d, "\simeq"] \\ M \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[uu, bend right, "u_M"'] & N \end{tikzcd}$$

Do diagrama acima é fácil deduzir que $\tilde{f} = f$ no caso em que f é R-linear. Assim, $\varphi_{M,N}(\varphi^*(f)) = \varphi_{M,N}(f) = \tilde{f} = f$ o que verifica a condição S.F. 1 da Definição 2.1.1.

Sejam $u_M : M \longrightarrow S \otimes_R M$, $v_N : S \otimes_R N \longrightarrow N$ as composições verticais respectivamente aos lados esquerdo e direito do diagrama acima.

Dados os S-módulos M', N' e $\alpha \in Hom_{R-Mod}(M, M')$, $\beta \in Hom_{R-Mod}(N, N')$,

$g \in Hom_{S-Mod}(M', N')$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varphi^*(M) = S \otimes_R M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi^*(\alpha) = id_S \otimes \alpha"'] & \varphi^*(N) = S \otimes_R N \arrow[d, "\varphi^*(\beta) = id_S \otimes \beta"] \\
\varphi^*(M') = S \otimes_R M' \arrow[r, "g"'] & \varphi^*(N') = S \otimes_R N'
\end{tikzcd}$$

seja comutativo.

Agora, consideramos o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
S \otimes_R M \arrow[rrr, "f"] \arrow[ddd, "id_S \otimes \alpha"'] \arrow[dr, shift left, "v_M"] & & & S \otimes_R N \arrow[ddd, "id_S \otimes \beta"] \arrow[dl, shift left, "v_N"] \\
& M \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ul, shift left, "u_M"] & N \arrow[d, "\beta"] \arrow[ur, shift left, "u_N"] & \\
& M' \arrow[r, "\tilde{g}"'] \arrow[dl, shift left, "u_{M'}"] & N' \arrow[dr, shift left, "u_{N'}"] & \\
S \otimes_R M' \arrow[rrr, "g"'] \arrow[ur, shift left, "v_{M'}"] & & & S \otimes_R N' \arrow[ul, shift left, "v_{N'}"]
\end{tikzcd}$$

Como no diagrama acima as aplicações diagonais cindem (basta observar o diagrama da página anterior e lembrar ψ cinde φ) obtemos que o quadrado interno do diagrama é comutativo uma vez que, por hipótese, o quadrado externo do diagrama é comutativo. De fato,

$$\begin{aligned}
\beta \circ \tilde{f} &= (v_{N'} \circ (id_S \otimes \beta) \circ u_N) \circ (v_N \circ f \circ u_M) \\
&= v_{N'} \circ (id_S \otimes \beta) \circ f \circ u_M \\
&= v_{N'} \circ g \circ (id_S \otimes \alpha) \circ u_M \\
&= (v_{N'} \circ g \circ u_{M'}) \circ (v_{M'} \circ (id_S \otimes \alpha) \circ u_M) \\
&= \tilde{g} \circ \alpha
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi^* = S \otimes_R -$ é separável.

□

O próximo lema é uma adaptação da Proposição 1.2 do Capítulo XI, que encontra-se na página 226, de [12].

Lema 2.3.5. *As seguintes propriedades de um homomorfismo de anéis* $\varphi : R \longrightarrow S$ *são equivalentes:*

(i) φ *é um epimorfismo na categoria dos anéis.*

(ii) *A aplicação* $\psi : S \otimes_R S \longrightarrow S$*, dada por* $\psi(s \otimes s') = s.s'$*, é um isomorfismo na categoria dos* (S, S)*-bimódulos.*

Corolário 2.3.6. *Se* $\varphi : R \longrightarrow S$ *é um epimorfismo na categoria dos anéis então* φ_* *é um funtor separável.*

Demonstração. Como φ é um epimorfimo, então, pelo Lema 2.3.5, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi : & S \otimes_R S & \longrightarrow & S \\ & s \otimes s' & \longmapsto & s.s' \end{array}$$

é isomorfismo de (S, S)-bimódulos e assim ψ cinde como (S, S)-bimódulos, ou seja, S/R é separável. Logo, pelo Teorema 2.3.3, o funtor φ_* é separável. $\square$

Capítulo 3

Caso Graduado

Neste capítulo analisamos os funtores indução e restrição no caso em que R é um anel fortemente graduado por G e, em seguida, as condições necessárias e suficientes para que R seja separável sobre R_e, onde e é o elemento neutro do grupo G.

3.1 Anéis Graduados

Iremos fazer uma breve introdução a anéis graduados e fortemente graduados por um grupo G, maiores detalhes sobre graduação em anéis podem ser encontrados em [7].

Definição 3.1.1. Seja G um grupo. Um anel R é dito graduado por G se existe uma família de subgrupos aditivos R_σ de R tal que $R = \bigoplus_{\sigma \in G} R_\sigma$ e $R_\sigma R_\tau \subseteq R_{\sigma\tau}$, para todo σ, $\tau \in G$.

Definição 3.1.2. Sejam G um grupo e R um anel graduado por G. Um elemento $x \in R_\sigma$ é dito homogêneo de grau σ.

Definição 3.1.3. Seja G um grupo. Um anel R graduado por G é dito fortemente graduado por G se $R_\sigma R_\tau = R_{\sigma\tau}$, para todo σ, $\tau \in G$.

Agora iremos exibir alguns exemplos de anéis graduados e anéis fortemente graduados.

Exemplos:

(1) Seja R um anel. Então o anel de polinômios $R[X]$ é um anel $\mathbb{Z}$-graduado pela graduação $R_n = RX^n$ se $n \geq 0$ e $R_n = 0$ se $n < 0$. Assim $R[X] = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$. É fácil ver que $R[X]$ não é fortemente graduado.

(2) Seja R um anel. Então o anel de polinômios de Laurent $R[X, X^{-1}]$ é um anel $\mathbb{Z}$-graduado pela graduação $R_n = RX^n$. Assim $R[X, X^{-1}] = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} RX^n$. Além disso, $R[X, X^{-1}]$ é fortemente graduado.

(3) Seja $K \subseteq E$ uma extensão de corpos, e suponhamos que $E = K(\alpha)$, onde α é algébrico sobre K, com polinômio minimal da forma $X^n - a$, $a \in K$. Então, os elementos $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ formam uma base de E sobre K. Assim, $E = \bigoplus_{i=0}^{n-1} K\alpha^i$, ou seja, E é $\mathbb{Z}_n$-graduado.

(4) O anel de grupo $R[G] = \bigoplus_{g\in G} Rg$ é claramente fortemente graduado pelo grupo G.

Proposição 3.1.4. *Seja $R = \bigoplus_{\sigma\in G} R_\sigma$ graduado pelo grupo G. Então valem as seguintes afirmações:*

(*i*) *$1 \in R_e$ e R_e é um subanel de R, onde e é o elemento neutro de G.*

(*ii*) *O inverso r^{-1} de um elemento homogêneo $r \in U(R)$ também é homogêneo, onde $U(R)$ é o grupo dos elementos invertíveis em R.*

(*iii*) *R é um anel fortemente graduado se, e somente se, $1 \in R_\sigma R_{\sigma^{-1}}$ para todo $\sigma \in G$.*

Demonstração. (*i*) Como $R_e R_e \subseteq R_e$, basta provar que $1 \in R_e$. De fato, temos que $1 = \sum_{\sigma\in G} r_\sigma$ com $r_\sigma \in R_\sigma$. Assim, para todo $s_\lambda \in R_\lambda$ ($\lambda \in G$), temos que $s_\lambda = s_\lambda 1 = \sum\limits_{\sigma\in G} s_\lambda r_\sigma$, e $s_\lambda r_\sigma \in R_{\lambda\sigma}$. Consequentemente $s_\lambda r_\sigma = 0$ para $\sigma \neq e$. Logo, $sr_\sigma = 0$ para todo $\sigma \neq e$ e todo $s \in R$. Em particular para $s = 1$ obtemos que $r_\sigma = 0$, para todo $\sigma \neq e$. Portanto, $1 = r_e \in R_e$.

(ii) Assumimos que $r \in U(R) \cap R_\lambda$. Se $r^{-1} = \sum\limits_{\sigma\in G} (r^{-1})_\sigma$ com $(r^{-1})_\sigma \in R_\sigma$, então $1 = rr^{-1} = \sum\limits_{\sigma\in G} r(r^{-1})_\sigma$. Como $1 \in R_e$ e $r(r^{-1})_\sigma \subseteq R_{\lambda\sigma}$, temos que $r(r^{-1})_\sigma = 0$ para todo $\sigma \neq \lambda^{-1}$. Como $r \in U(R)$, então $(r^{-1})_\sigma = 0$ para todo $\sigma \neq \lambda^{-1}$. Logo $r^{-1} = (r^{-1})_{\lambda^{-1}} \in R_{\lambda^{-1}}$.

(iii) Suponhamos que $1 \in R_\sigma R_{\sigma^{-1}}$ para todo $\sigma \in G$. Então para $\sigma, \tau \in G$ temos que

$$R_{\sigma\tau} = R_e R_{\sigma\tau} = (R_\sigma R_{\sigma^{-1}}) R_{\sigma\tau} = R_\sigma (R_{\sigma^{-1}} R_{\sigma\tau}) \subseteq R_\sigma R_\tau.$$

e assim segue que $R_\sigma R_\tau = R_{\sigma\tau}$, ou seja, R é fortemente graduado. A recíproca é imediata por (i). $\square$

Observação: Como $R_e R_\sigma = R_\sigma R_e = R_\sigma$ temos que R_σ é um (R_e, R_e)-bimódulo.

Lema 3.1.5. *Seja $R = \bigoplus\limits_{\sigma\in G} R_\sigma$ fortemente graduado pelo grupo G. Se $a \in R$ é tal que*

$$a\,R_\sigma = \{0\} \quad \text{ou} \quad R_\sigma\, a = \{0\}$$

para algum $\sigma \in G$, então $a = 0$.

Demonstração. Suponhamos que $a\,R_\sigma = \{0\}$ para algum $\sigma \in G$, $a \in R$.

Assim, $\{0\} = \{0\}R_{\sigma^{-1}} = (a\,R_\sigma)R_{\sigma^{-1}} = a\,(R_\sigma R_{\sigma^{-1}}) = a\,R_e$. Da proposição anterior temos que $1 \in R_e$, então $a = a\,1 = 0$.

Analogamente, mostra-se o outro lado. $\square$

Observação: Decorre do lema anterior que $R_\sigma \neq \{0\}$, para todo $\sigma \in G$.

Definição 3.1.6. Seja S um subconjunto de anel R. O comutador de S em R é dado pelo conjunto $C_R(S) = \{a \in R \mid a\,b = b\,a, \forall b \in S\}$.

Observação: Seja S um subconjunto de anel R, então:

(i) $C_R(S)$ é um subanel de R;

(ii) O centro de R, isto é $C_R(R)$, é denotado por $Z(R)$;

(iii) Se S é um subanel de R, então $Z(S) \subseteq C_R(S)$.

Daqui para frente $R = \bigoplus_{\sigma \in G} R_\sigma$ será um anel fortemente graduado por G. Assim, $1 \in R_e = R_\sigma R_{\sigma^{-1}}$ para cada $\sigma \in G$ e para cada $\sigma \in G$ existe um inteiro positivo n_σ e elementos $a_\sigma^{(i)} \in R_\sigma$, $b_{\sigma^{-1}}^{(i)} \in R_{\sigma^{-1}}$, onde $i \in \{1, \cdots, n_\sigma\}$, tais que

$$\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} = 1.$$

Para todo $z \in C_R(R_e)$, e em particular para todo $z \in Z(R_e) \subseteq C_R(R_e)$, e $\sigma \in G$ definimos

$$f_\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)}.$$

Observação: A definição de f_σ é independente da escolha dos $a_\sigma^{(i)}$'s, $b_{\sigma^{-1}}^{(i)}$'s. De fato, dados inteiros positivos n_σ, n'_σ e elementos $a_\sigma^{(i)}, c_\sigma^{(j)} \in R_\sigma$, $b_{\sigma^{-1}}^{(i)}, d_{\sigma^{-1}}^{(j)} \in R_{\sigma^{-1}}$, onde $i \in \{1, \cdots, n_\sigma\}$ e $j \in \{1, \cdots, n'_\sigma\}$, tais que

$$\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} = 1 \quad e \quad \sum_{j=1}^{n'_\sigma} c_\sigma^{(j)}\, d_{\sigma^{-1}}^{(j)} = 1,$$

então para cada $z \in C_R(R_e)$ temos que

$$
\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n_\sigma^{'}} c_\sigma^{(j)}\, z\, d_{\sigma^{-1}}^{(j)}\right) \\
= \;& 1 \left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n_\sigma^{'}} c_\sigma^{(j)}\, z\, d_{\sigma^{-1}}^{(j)}\right) 1 \\
= \;& \sum_{j=1}^{n_\sigma^{'}} \sum_{i=1}^{n_\sigma} c_\sigma^{(j)}\, \underbrace{d_{\sigma^{-1}}^{(j)}\, a_\sigma^{(i)}}_{\in R_e}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} - \sum_{j=1}^{n_\sigma^{'}} \sum_{i=1}^{n_\sigma} c_\sigma^{(j)}\, z\, d_{\sigma^{-1}}^{(j)} a_\sigma^{(i)}\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} \\
= \;& \sum_{j=1}^{n_\sigma^{'}} \sum_{i=1}^{n_\sigma} c_\sigma^{(j)}\, z\, d_{\sigma^{-1}}^{(j)}\, a_\sigma^{(i)}\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} - \sum_{j=1}^{n_\sigma^{'}} \sum_{i=1}^{n_\sigma} c_\sigma^{(j)}\, z\, d_{\sigma^{-1}}^{(j)} a_\sigma^{(i)}\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} = 0.
\end{aligned}
$$

Lema 3.1.7. *Sejam* $R = \bigoplus_{\sigma \in G} R_\sigma$ *um anel fortemente graduado por* G, *e escrevendo* $\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} = 1$ *para algum* $n_\sigma > 0$ *e* $a_\sigma^{(i)} \in R_\sigma$, $b_{\sigma^{-1}}^{(i)} \in R_{\sigma^{-1}}$ *para* $i \in \{1, \cdots, n_\sigma\}$. *Além disso, para todo* $z \in C_R(R_e)$ *define-se* $f_\sigma(z)$ *por* $f_\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)}$, *para cada* $\sigma \in G$.

Então, as seguintes propridades são válidas:

(*i*) $f_\sigma(z)$ *é o único elemento de* R *satisfazendo* $r_\sigma\, z = f_\sigma(z)\, r_\sigma, \forall r_\sigma \in R_\sigma$.

(*ii*) *O grupo* G *age por automorfismos nos anéis* $C_R(R_e)$ *e* $Z(R_e)$, *com cada* $\sigma \in G$ *enviando cada* $z \in C_R(R_e)$ *ou* $z \in Z(R_e)$ *em* $f_\sigma(z)$.

(*iii*) $Z(R) = \{z \in C_R(R_e) \,|\, f_\sigma(z) = z, \forall \sigma \in G\}$, *isto é,* $Z(R)$ *é o subanel fixo* $C_R(R_e)^G$ *de* $C_R(R_e)$ *com respeito a ação de* G.

Demonstração. (*i*) Seja $\sigma \in G$. Se $r_\sigma \in R_\sigma$, então $r_\sigma\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} \in R_\sigma R_{\sigma^{-1}} = R_e$. Assim, $r_\sigma\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)}$ comuta com $z \in C_R(R_e)$ para cada $i \in \{1, \cdots, n_\sigma\}$ e segue que

$$
f_\sigma(z)\, r_\sigma = \sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)}\, r_\sigma = \sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)}\, r_\sigma\, z = r_\sigma\, z.
$$

Sejam $z \in C_R(R_e)$ e $x \in R$ um elemento satisfazendo $a_\sigma^{(i)}\, z = x\, a_\sigma^{(i)}$ para todo $i \in \{1, \cdots, n_\sigma\}$. Dessa maneira,

$$f_\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^{(i)}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n_\sigma} x\, a_\sigma^{(i)}\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} = x$$

o que mostra que $f_\sigma(z)$ é o único elemento que satisfaz a relação do item (i) desse lema. Como R é fortemente graduado segue que se $z \in R_e$, então $f_\sigma(z) \in R_e$. Em particular se $z \in Z(R_e) \subseteq C_R(R_e)$, então $f_\sigma(z) \in Z(R_e)$. De fato, para $z \in Z(R_e)$ e $c \in R_e$ temos que

$$\begin{aligned} c\, f_\sigma(z) &= 1\, c\, f_\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n_\sigma} \sum_{j=1}^{n_\sigma'} a_\sigma^{'(j)}\, \underbrace{b_{\sigma^{-1}}^{'(j)}\, c\, a_\sigma^{(i)}}_{\in R_e}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n_\sigma} \sum_{j=1}^{n_\sigma'} a_\sigma^{'(j)}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{'(j)}\, c\, a_\sigma^{(i)}\, b_{\sigma^{-1}}^{(i)} = f_\sigma(z)\, c\, 1 = f_\sigma(z)\, c, \end{aligned}$$

onde $\sum\limits_{j=1}^{n_\sigma'} a_\sigma^{'(j)}\, z\, b_{\sigma^{-1}}^{'(j)} = 1$. Com isto, somente resta verificar que $f_\sigma(z) \in C_R(R_e)$ para qualquer $z \in C_R(R_e)$. Com efeito, se $r_\sigma \in R_\sigma$ e $y \in R_e$, então $y\, r_\sigma \in R_e R_\sigma = R_\sigma$ e, assim

$$\begin{aligned} (f_\sigma(z)\, y)\, r_\sigma &= f_\sigma(z)\, (y\, r_\sigma) = (y\, r_\sigma)\, z \\ &= y\, (r_\sigma\, z) = y\, (f_\sigma(z)\, r_\sigma) = (y\, f_\sigma(z))\, r_\sigma \end{aligned}$$

que é o mesmo que $(f_\sigma(z)\, y - y\, f_\sigma(z))R_\sigma = \{0\}$. Pelo Lema 3.1.5, concluímos que $f_\sigma(z)\, y = y\, f_\sigma(z)$. Logo, $f_\sigma(z) \in C_R(R_e)$.

(ii) Como $1 \in R_e$, temos para cada $z \in C_R(R_e)$ que

$$z = 1\, z = f_e(z) 1 = f_e(z).$$

Se $\sigma, \tau \in G$, $r_\sigma \in R_\sigma$ e $r_\tau \in R_\tau$, então $r_\sigma\, r_\tau \in R_{\sigma\tau}$ e para $z \in C_R(R_e)$ temos que

$$
\begin{aligned}
f_{\sigma\tau}(z)\,(r_\sigma\, r_\tau) &= (r_\sigma\, r_\tau)\, z = r_\sigma\,(r_\tau\, z) = r_\sigma\,(f_\tau(z)\, r_\tau)\\
&= (r_\sigma\, f_\tau(z))\, r_\tau = (f_\sigma(f_\tau(z))\, r_\sigma)\, r_\tau = f_\sigma(f_\tau(z))\,(r_\sigma\, r_\tau).
\end{aligned}
$$

Os produtos da forma $r_\sigma r_\tau$ geram o submódulo $R_{\sigma\tau}$ e pelo Lema 3.1.5 concluímos que

$$f_\sigma(f_\tau(z)) = f_{\sigma\tau}(z)$$

provando que $(\sigma, z) \mapsto f_\sigma(z)$ é uma ação de G no conjunto $C_R(R_e)$. Seja $\sigma \in G$ e o fixamos. Pela definição de $f_\sigma(z)$, a aplicação $z \mapsto f_\sigma(z)$ é claramente aditiva. Para algum inteiro positivo $n_{\sigma^{-1}}$ sejam $c^{(j)}_{\sigma^{-1}} \in R_{\sigma^{-1}}$ e $d^{(j)}_\sigma \in R_\sigma$, onde $j \in \{1, \cdots, n_{\sigma^{-1}}\}$, tais que $1 = \sum\limits_{j=1}^{n_{\sigma^{-1}}} c^{(j)}_{\sigma^{-1}}\, d^{(j)}_\sigma$ e definimos $f_{\sigma^{-1}}$ por $f_{\sigma^{-1}}(z) = \sum\limits_{j=1}^{n_{\sigma^{-1}}} c^{(j)}_{\sigma^{-1}}\, z\, d^{(j)}_\sigma$. Então, para cada $z \in C_R(R_e)$, temos que

$$
\begin{aligned}
f_{\sigma^{-1}}(f_\sigma(z)) &= \sum_{j=1}^{n_{\sigma^{-1}}} c^{(j)}_{\sigma^{-1}} \left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a^{(i)}_\sigma\, z\, b^{(i)}_{\sigma^{-1}}\right) d^{(j)}_\sigma\\
&= \sum_{j=1}^{n_{\sigma^{-1}}} c^{(j)}_{\sigma^{-1}} \left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a^{(i)}_\sigma\, z\, \underbrace{b^{(i)}_{\sigma^{-1}}\, d^{(j)}_\sigma}_{\in R_e}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n_{\sigma^{-1}}} c^{(j)}_{\sigma^{-1}} \left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a^{(i)}_\sigma\, b^{(i)}_{\sigma^{-1}}\, d^{(j)}_\sigma\, z\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n_{\sigma^{-1}}} c^{(j)}_{\sigma^{-1}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a^{(i)}_\sigma\, b^{(i)}_{\sigma^{-1}}\right)}_{=1} d^{(j)}_\sigma\, z = \underbrace{\sum_{j=1}^{n_{\sigma^{-1}}} c^{(j)}_{\sigma^{-1}}\, d^{(j)}_\sigma}_{=1}\, z = z
\end{aligned}
$$

e com isto $f_{\sigma^{-1}}$ é a inversa de f_σ. Para qualquer $z, t \in C_R(R_e)$ e $r_\sigma \in R_\sigma$, temos que

$$\begin{aligned} f_\sigma(z\,t)\,r_\sigma &= r_\sigma\,(z\,t) = (r_\sigma\,z)\,t = (f_\sigma(z)\,r_\sigma)\,t \\ &= f_\sigma(z)\,(r_\sigma\,t) = f_\sigma(z)\,(f_\sigma(t)\,r_\sigma) = (f_\sigma(z)\,f_\sigma(t))\,r_\sigma). \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.5 temos que $f_\sigma(z\,t) = f_\sigma(z)\,f_\sigma(t)$. Logo, para cada $\sigma \in G$, a aplicação $z \mapsto f_\sigma(z)$ é um automorfismo do anel $C_R(R_e)$.
(iii) Como $R = \bigoplus\limits_{\sigma \in G} R_\sigma$ é um anel fortemente graduado por G, temos que

$$Z(R) = \bigcap_{\sigma \in G} C_R(R_\sigma) = \{z \in C_R(R_e) \,|\, z \in C_R(R_\sigma), \forall \sigma \in G\}$$

e o resultado segue do fato que um elemento $z \in C_R(R_e)$ é R_σ-centralizante, $\sigma \in G$, se e somente se, $f_\sigma(z) = z$. De fato, se $f_\sigma(z) = z$ para algum $z \in C_R(R_e)$, então claramente z é R_σ-centralizante. Reciprocamente, suponhamos que $z \in C_R(R_e)$ é R_σ-centralizante, então $(f_\sigma(z) - z)R_\sigma = \{0\}$ e assim pelo Lema 3.1.5 temos que $f_\sigma(z) = z$.

□

3.2 Separabilidade de R/R_e

Finalizamos este trabalho dando uma caracterização para a separabilidade de R sobre R_e em função da sobrejetividade do traço e da finitude do grupo G, quando R é fortemente graduado por G.

Sejam R um anel graduado por G e $\varphi : R_e \longrightarrow R$ o morfismo inclusão na categoria dos anéis. O funtor restrição

$$\varphi_* : R - Mod \longrightarrow R_e - Mod$$

é definido por $\varphi_*(M) = M$ e $\varphi_*(f) = f$, como foi definido no início da Seção 2.3.

O funtor indução

$$\varphi^* : R_e - Mod \longrightarrow R - Mod$$

é definido por $\varphi^*(M) = R \otimes_{R_e} M$ e $\varphi^*(f) = id_R \otimes f$, como foi definido no início da Seção 2.3.

Teorema 3.2.1. *(Uma outra versão do Teorema de Maschke) Seja R fortemente graduado por G. Então, R/R_e é separável se, e somente se, o traço $tr : Z(R_e) \longrightarrow Z(R_e)$ definido por $tr(x) = \sum\limits_{\sigma \in G} f_\sigma(x)$ é sobrejetivo e G é finito.*

Demonstração. Primeiramente, pela Proposição 2.3.2 temos que R/R_e é separável se, e somente se, existe um elemento $s \in R \otimes_{R_e} R$ tal que $\psi(s) = 1$ e $\lambda_\tau s = s\lambda_\tau$ para quaisquer $\lambda_\tau \in R_\tau$ e $\tau \in G$.

Suponhamos que R/R_e seja separável, isto é, existe uma aplicação de (R,R)-bimódulos $\phi : R \longrightarrow R \otimes_{R_e} R$ tal que $\phi \circ \psi = id_R$, onde ψ é definida por $\psi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Como R é fortemente graduado por G podemos considerar o isomorfismo canônico de (R_e, R_e)-bimódulos α dado por

$$\begin{array}{rcccc} \alpha & : & R \otimes_{R_e} R & \longrightarrow & R \\ & & a \otimes b & \longmapsto & \sum\limits_{\sigma,\tau \in G} a_\sigma \otimes b_\tau \end{array}.$$

Além disso, também podemos considerar para cada par de elementos $\sigma, \tau \in G$ o isomorfismo canônico de (R_e, R_e)-bimódulos $\beta_{\sigma,\tau}$ dado por

$$\begin{array}{rcccc} \beta_{\sigma,\tau} & : & R_\sigma \otimes_{R_e} R_\tau & \longrightarrow & R \\ & & a \otimes b & \longmapsto & a_\sigma \, b_\tau \end{array}.$$

Consideramos as aplicações de (R,R)-bimódulos ϕ', ψ' dadas pelo seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & R \otimes_{R_e} R \arrow[dd, "\alpha"', "\simeq"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
R \arrow[ur, "\phi"] \arrow[dr, "\phi'"'] & & R \\
 & \bigoplus\limits_{\sigma,\tau \in G} R_\sigma \otimes_{R_e} R_\tau \arrow[ur, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}$$

isto é, $\phi' = \alpha \circ \phi$ e $\psi' = \psi \circ \alpha^{-1}$.

Claramente temos que $\phi'(1) = \alpha(s) = s' = \sum_{\sigma \in S} \sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^i \otimes b_{\sigma^{-1}}^i$ para algum subconjunto finito S de G e seja $c_{\sigma,\sigma^{-1}} = \psi' \left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^i \otimes b_{\sigma^{-1}}^i \right)$ para cada $\sigma \in S$.

Notamos que $c_{\sigma,\sigma^{-1}} \in R_e$ (uma vez que $R_\sigma R_{\sigma^{-1}} = R_e$ para cada $\sigma \in S$) e além disso temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in S} c_{\sigma,\sigma^{-1}} &= \sum_{\sigma \in S} \psi' \left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^i \otimes b_{\sigma^{-1}}^i \right) \\
&= \psi' \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in S} \sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^i \otimes b_{\sigma^{-1}}^i \right)}_{=\alpha(s)} \\
&= (\psi' \circ \alpha)(s) \\
&= \psi(s) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como s' é R_e-centralizante (de fato, $rs' = \alpha(rs) = \alpha(sr) = s'r$, para todo $r \in R_e$) obtemos que $c_{\sigma,\sigma^{-1}} \in Z(R_e)$ para cada σ em S. Com efeito, sejam $r \in R_e$ e $\sigma \in S$. Dessa maneira,

$$
\begin{aligned}
r\, c_{\sigma,\sigma^{-1}} &= r\psi'\left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^i \otimes b_{\sigma^{-1}}^i\right)\\
&= \psi'\left(r\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^i \otimes b_{\sigma^{-1}}^i\right)\\
&= \psi'\left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} (r\, a_\sigma^i) \otimes b_{\sigma^{-1}}^i\right)\\
&= \psi'\left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} (a_\sigma^i\, r) \otimes b_{\sigma^{-1}}^i\right)\\
&= \psi'\left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^i \otimes (r\, b_{\sigma^{-1}}^i)\right)\\
&= \psi'\left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^i \otimes (b_{\sigma^{-1}}^i\, r)\right)\\
&= \psi'\left(\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_\sigma^i \otimes b_{\sigma^{-1}}^i\right) r\\
&= c_{\sigma,\sigma^{-1}}\, r
\end{aligned}
$$

Sejam $\lambda_\tau \in R_\tau$ e $\tau \in G$. Então $\lambda_\tau s' = s'\lambda_\tau$ produz (por comparação da parte homogênea da igualdade dos graus) $\sum \lambda_\tau a_\sigma \otimes b_{\sigma^{-1}} = \sum a_{\tau\sigma} \otimes b_{\sigma^{-1}\tau^{-1}}\lambda_\tau$. Assim, obtemos que $\lambda_\tau c_{\sigma,\sigma^{-1}} = c_{\tau\sigma,\sigma^{-1}\tau^{-1}}\lambda_\tau$. Agora, iremos mostrar que $(f_\tau(c_{\sigma,\sigma^{-1}}) - c_{\tau\sigma,\sigma^{-1}\tau^{-1}})\, \lambda_\tau = 0$, para todo $\lambda_\tau \in R_\tau$, onde $f_\tau(c_{\sigma,\sigma^{-1}}) = \sum\limits_{i=1}^{n_\tau} a_\tau^i c_{\sigma,\sigma^{-1}} b_{\tau^{-1}}^i$.

De fato, sejam $\sigma, \tau \in G$, então temos que

$$
f_\tau(c_{\sigma,\sigma^{-1}})\, \lambda_\tau = \left(\sum_{i=1}^{n_\tau} a_\tau^i\, c_{\sigma,\sigma^{-1}}\, b_{\tau^{-1}}^i\right)\lambda_\tau
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n_\tau}\left(a_\tau^i\, c_{\sigma,\sigma^{-1}}\, \underbrace{b_{\tau^{-1}}^i\, \lambda_\tau}_{\in R_e}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n_\tau}(a_\tau^i\, b_{\tau^{-1}}^i\, \lambda_\tau\, c_{\sigma,\sigma^{-1}})\\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_\tau} a_\tau^i\, b_{\tau^{-1}}^i\right)}_{=1} \lambda_\tau\, c_{\sigma,\sigma^{-1}}\\
&= \lambda_\tau\, c_{\sigma,\sigma^{-1}}\\
&= c_{\tau\sigma,\sigma^{-1}\tau^{-1}}\, \lambda_\tau.
\end{aligned}
$$

Assim, $f_\tau(c_{\sigma,\sigma^{-1}}) = c_{\tau\sigma,\sigma^{-1}\tau^{-1}}$. Em particular para $\sigma = e$, obtemos que $c_{\tau,\tau^{-1}} = f_\tau(c_{e,e})$.

Desta maneira, $tr(c_{e,e}) = \sum\limits_{\sigma\in S} f_\sigma(c_{e,e}) = \sum\limits_{\sigma\in S} c_{\sigma,\sigma^{-1}} = 1$ e com isto obtemos um elemento cujo traço igual a 1.

Além disto, G é finito, pois se G fosse infinito então existiria um $\tau \in G$ tal que $\tau\sigma \notin S$. Desta maneira, $c_{\tau\sigma,\sigma^{-1}\tau^{-1}} = 0$ e segue que $yc_{\sigma,\sigma^{-1}} = 0$ para todo $y \in R_\tau$. Logo, $c_{\sigma,\sigma^{-1}} = 0$, uma contradição (escolha de $c_{\sigma,\sigma^{-1}}$!).

Reciprocamente, se existe um elemento $u \in Z(R_e)$ tal que $tr(u) = 1$ e G é finito, então podemos definir uma aplicação de bimódulos $\phi : R \longrightarrow R \otimes_{R_e} R$ por $\phi(r) = rs$, onde $s = \sum\limits_{\sigma\in G}(a_\sigma^i u \otimes b_{\sigma^{-1}}^i)$ e $\sum\limits_{i=1}^{n} a_\sigma^i b_{\sigma^{-1}}^i = 1$. Assim, $(\psi\circ\phi)(r) = r\,\psi(s) = r\,tr(u) = r\cdot 1 = r$, $\forall r \in R$.

Portanto, R/R_e é separável. $\square$

Em 2006, publicou-se uma generalização do Teorema 3.2.1 para anéis graduados por grupóides, essa generalização foi obtido por Patrik Lundström em [4].

Corolário 3.2.2. *Seja G um grupo finito de ordem n. Então, $R[G]$ é separável sobre R se, e somente se, n é invertível em R.*

Demonstração. Notamos que $1 = (1g) \cdot (1g^{-1})$, $f_g(x) = 1 \cdot x \cdot 1 = x$, para todo $g \in G$ e $tr(x) = \sum_{g \in G} f_g(x) = \sum_{g \in G} x = |G| \cdot x = n \cdot x$. Assim, aplicando o Teorema 3.2.1 ao anel graduado $R[G]$ (já que $R_e \simeq R$) obtemos o resultado desejado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] F. W. Anderson e K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag (1992).

[2] S. Awodey, *Category Theory*, New York: Oxford Univerty (2006).

[3] J. S. Golan, *Modules and their structure of rings*, New York: Marcel Dekker (1991).

[4] P. Lundström, *Separable groupoid rings*, Communications in Algebra 34, 3029-3041 (2006).

[5] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag (1997).

[6] C. Năstăsescu, M. Van Den Bergh e F. Van Oystaeyen, *Separable functors applied to graded rings*, Journal of Algebra 123, 397-413 (1989).

[7] C. Năstăsescu e F. Van Oystaeyen, *Methods of Graded Rings*, New York: Springer-Verlag (2004).

[8] J. Öinert *Ideals and Maximal Commutative Subrings of Graded Rings*, Doctoral Thesis, Lund University, Lund (Sweden) (2009).

[9] A. Paques, *Teoría de Galois sobre Anillos Conmutativos*, Venezuela: CEDEPRE da Universidade de los Andes (1999).

[10] C. P. Milies, *Anéis e Módulos*, São Paulo: IME-USP (1972).

[11] C. P. Milies, *Anéis com divisão: uma introdução através da história*, XVIII Escola de Álgebra, Campinas: IMECC-UNICAMP (2004).

[12] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Berlin: Springer-Verlag (1975).