

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**DINÂMICA NÃO-LINEAR DA INSTABILIDADE FEIXE-PLASMA
BIDIMENSIONAL ¹**

JOEL PAVAN

Tese realizada sob a orientação do Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre

2011

¹Trabalho realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

À Professora Ruth de Souza Schneider[†].

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão desta etapa, em especial:

- Ao Peter H. Yoon, pela hospitalidade durante a estada na Universidade de Maryland;
- Ao Adolfo Figueroa-Viñas, pela hospitalidade durante a estada na NASA;
- Ao Professor Luiz F. Ziebell, pelo suporte constante.

Nos acontecimentos, sim, é que há destino: Nos homens, não - espuma de um segundo... Se Colombo morresse em pequenino, o Neves descobriria o Novo Mundo.

(Mário Quintana)

RESUMO

O presente trabalho desenvolve a abordagem bidimensional, tanto no espaço de velocidades como no espaço de número de onda, para determinar a evolução temporal dos modos eletrostáticos íon-sônico e de Langmuir, e das partículas (elétrons) em plasmas. A teoria empregada para o sistema feixe-plasma em questão usa a abordagem de turbulência fraca desenvolvida pelo Professor Peter H. Yoon, que se empenha em generalizar a teoria de turbulência fraca estabelecida até então. A análise numérica bidimensional permite abordar questões como isotropização da distribuição de partículas e dispersão angular de ondas, impraticável na simplificação unidimensional. De forma sumária, os resultados obtidos permitem (i) reconhecer a importância dos processos de espalhamento não-linear na produção de elétrons energéticos, (ii) sugerir que o chamado condensado de Langmuir decorre de um “efeito dimensional” ou decorre de efeitos não-lineares de ordem superior, ou mesmo de um tratamento mais acurado de efeitos não-lineares já contabilizados, mas de forma aproximada, (iii) reconhecer que um elevado grau de isotropização da distribuição eletrônica somente é alcançado para densidades do feixe suficientemente elevadas, (iv) identificar que um sistema com feixes antissimétricos é altamente eficaz na produção de oscilações íon-sônicas, quando comparado a um sistema de feixe único. Adicionalmente, estudam-se sistemas com inhomogeneidade espacial e uma ou duas dimensões em velocidade e número de onda; lineares e não-lineares. Os resultados permitem uma melhor compreensão do comportamento do sistema feixe-plasma ao longo do espaço. Por fim, determina-se uma nova ferramenta matemática que permite calcular a relação de dispersão para funções distribuição de velocidade arbitrárias. Ainda, uma nova abordagem numérica *semianalítica* é introduzida a qual resulta em reduzido tempo de processamento e estabilidade numérica aumentada.

ABSTRACT

The present work develops the bidimensional approach, both in velocity and wave number spaces, in order to establish the temporal evolution of ion-sound and Langmuir electrostatic modes, and particles (electrons) in plasmas. The framework for the beam-plasma system considered is the weak turbulence approach developed by Professor Peter H. Yoon, who has worked toward the generalization of the weak turbulence theory so far established. The bidimensional numerical analysis allows one to address issues such as isotropization of particle distributions and angular dispersion of waves, unfeasible within the unidimensional simplification. Briefly, the results obtained allow one to (i) recognize the importance of nonlinear scattering in the production of energetic electrons, (ii) suggest that the so called Langmuir condensate either stem from a "dimensional effect" or is due to higher order nonlinear effects, or even to a more accurate approach of nonlinear effects already accounted, but in an approximated form, (iii) recognize that a high degree of isotropization of electron distribution is only attained for sufficiently high beam densities, (iv) identify that a system with anti-symmetric beams is highly efficient in producing ion-sound waves, compared to a single beam system. In addition, systems with spatial inhomogeneities are studied either in one or two dimensions in velocity and wave number spaces; both linear and nonlinear. The results allow for a better understanding of the beam-plasma system along the space. Finally, a novel mathematical tool is devised which allows for the calculation of dispersion relations for arbitrary distribution functions. Still, a novel *semi-analytical* numerical approach is introduced which allows for reduced processing time and higher numerical stability.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Preâmbulo	9
1.2	O que é turbulência	11
1.3	Turbulência fraca e forte	13
1.4	Turbulência e coerência	14
1.5	Processos não-lineares	14
2	Formulação matemática	17
2.1	Hierarquia Klimontovich	17
2.2	Modelo físico	26
3	Resultados e aplicações	28
3.1	Condensado de Langmuir e o espalhamento não-linear	28
3.2	Feixes bidirecionais e isotropização eletrônica	29
3.3	Isotropização eletrônica e estrutura espectral fina	30
3.4	Feixes bidirecionais e incrementos íon-acústicos	31
3.5	Incrementos íon-acústicos ionosféricos	32
3.6	Instabilidade feixe-plasma bidimensional quasi-linear em meio inomogêneo	33
3.7	Instabilidade feixe-plasma unidimensional não-linear em meio inomogêneo .	33
3.8	Incrementos íon-acústicos em cavidade auroral	33
3.9	Relação de dispersão para função distribuição arbitrária/Instabilidade de Buneman	34
4	Trabalho corrente	35
A	Adaptação 2D	39

A.1	Considerações gerais	39
A.2	Condições de ressonância	40
A.2.1	Componentes A_i^{el}	40
A.2.2	Componentes D_{ij}^{el}	43
A.2.3	Decaimento onda-onda	46
A.3	Equações para os modos L e S	48
A.4	Equação para elétrons	51
B	Anexos	56
B.1	Ziebell et al. (2008)	56
B.2	Pavan et al. (2009a)	56
B.3	Pavan et al. (2010a)	57
B.4	Pavan et al. (2009b)	57
B.5	Pavan et al. (2010b)	57
B.6	Ziebell et al. (2011a)	58
B.7	Ziebell et al. (2011b)	58
B.8	Ziebell et al. (2011c)	58
B.9	Pavan et al. (2011)	59

Capítulo 1

Introdução

1.1 Preâmbulo

O presente trabalho está embasado na formulação matemática desenvolvida pelo Professor Peter H. Yoon, em colaboração com os Professores Luiz F. Ziebell e Rudi Gaelzer, a respeito de fenômenos turbulentos em plasmas. A formulação e os resultados obtidos são apresentados em diferentes publicações [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

De modo mais específico, a teoria diz respeito a fenômenos lineares e não-lineares em plasmas, considerados sob a abordagem de turbulência fraca. A formulação envolve a rederivação, a partir de primeiros princípios, das equações que determinam a dinâmica de ondas e partículas. A teoria utilizada no presente trabalho pode ser classificada como “clássica”; a motivação para rederivar as equações de interesse reside de fato numa extensão da teoria visando à contabilização de modos de oscilação não-lineares [11, 12, 13, 14, 10]. Essa formulação estendida busca uma explicação para a presença de harmônicos da frequência de plasma eletrônica, observados tanto em simulações quanto em medidas reais.

A esse respeito cabe um comentário. No trabalho de Gaelzer et al. (2003) [13], por exemplo, encontram-se algumas constatações, tais como (em tradução livre), “os espectros saturados dos harmônicos exibem uma dependência do tipo lei-de-potência entre os picos dos espectros individuais de cada harmônico”; “os resultados das simulações com uma variedade de diferentes condições iniciais, invariavelmente produzem espectros do tipo lei-de-potência no estágio final”; “a presença de um espectro do tipo lei-de-potência implica a existência das conhecidas estruturas fractais ou multi-escala, tanto no tempo quanto

no espaço”. É interessante notar que essas constatações remetem a uma relação com o que se passou a chamar, a partir do final dos anos 80, de *Criticalidade Auto-Organizada* (SOC) [15, 16, 17, 18, 19, 20]. Embora a conexão de turbulência com sistemas SOC já tenha sido sugerida [21], essa ainda incipiente teoria traz questões sobre sua utilidade como ferramenta preditiva, por não possuir uma base teórica sólida, e portanto, não é explorada aqui em maior profundidade.

Não é objetivo deste trabalho discutir turbulência na forma abrangente como tratado nas Refs. [22, 23], por exemplo. A ênfase do presente trabalho está voltada para a obtenção, dentro da teoria de turbulência fraca, de resultados numéricos nos espaços bidimensionais (2D) de velocidade e número de onda, bem como de sua interpretação e possível aplicação a sistemas reais. Tal objetivo se justifica pela escassez de trabalhos voltados para análise da teoria, exceto para o caso unidimensional (1D). Quando estudos acerca de turbulência fraca são feitos em 2D (e mesmo em 1D), invariavelmente envolvem a desconsideração de termos ou processos contemplados na presente teoria [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

Nota-se, ainda, que os trabalhos relacionados aos anexos B.6, B.7, B.8 e B.9, bem como o novo método numérico apresentado no capítulo 4, constituem uma extensão do objetivo inicial do presente trabalho.

Dentre os resultados obtidos pode-se ressaltar: (i) o estabelecimento de que feixes de elétrons contrapropagantes são capazes, via processos não-lineares, de gerar níveis elevados de ondas íon-acústicas, sem requerer para tanto a consideração de um elevado fluxo líquido de elétrons (anexos B.5 e B.8), (ii) o estabelecimento de uma ferramenta matemática que permite calcular as raízes da relação de dispersão para frequências complexas arbitrárias e funções distribuição arbitrárias (anexo B.9).

Por fim, é importante observar o formato de apresentação deste trabalho. Em lugar de discorrer sobre cada situação estudada a respeito de motivação, abordagem teórica, resultados e conclusões, na seção 3 são comentados aspectos básicos de cada estudo e, então, apontadas as respectivas publicações onde as informações pertinentes são encontradas na íntegra.

1.2 O que é turbulência

Segundo Tsytovich (1977) [31], o termo *turbulência* surgiu no estudo do movimento de fluidos. Devido aos avanços na física de plasmas, a visão sobre a natureza do estado turbulento foi largamente estendida. Os movimentos turbulentos em plasmas são mais variados do que em fluidos, o que torna possível estudar turbulência em maior detalhe em plasmas. Em alguns casos é possível seguir os processos pelos quais a turbulência se desenvolve, possibilitando entender a diferença entre movimentos turbulentos e os processos que originam a turbulência.

Usando fluidos como exemplo, podem-se discutir as noções físicas gerais relacionadas à natureza da turbulência. Considere-se um fluido movendo-se a grande velocidade em um tubo. Nesta situação o movimento individual de um elemento de fluido é bastante complexo. A velocidade do elemento de fluido em algum ponto especificado do tubo pode variar de uma maneira bastante complexa, variando sobre um largo espectro de diferentes valores, para um período de tempo suficientemente longo.

Tal movimento não pode ser considerado turbulento simplesmente porque o movimento individual de cada elemento de fluido é complexo, uma vez que o escoamento laminar de um fluido em volta de um obstáculo é também bastante complexo. O critério básico para turbulência é que medidas das velocidades instantâneas do fluido sejam *não-reprodutíveis*.

Em um experimento imaginário, a válvula do tubo é aberta e o fluido passa a escoar. Toma-se um tempo posterior em um ponto espacial onde as características médias do fluido estão estabelecidas. Nesse ponto a velocidade do fluido é medida como função do tempo. O experimento é repetido um número de vezes. Como resultado obtém-se a mesma dependência da velocidade com o tempo, ou dependências diferentes, ou seja, os resultados do experimento são não-reprodutíveis. No último caso o fluido é dito turbulento e as velocidades são randômicas e desordenadas.

A não-reprodutibilidade dos resultados nesse experimento podem ser explicadas da seguinte maneira. Caso as condições iniciais e de contorno para o escoamento do fluido sejam conhecidas exatamente, é possível determinar as velocidades em qualquer tempo subsequente em qualquer ponto espacial do tubo usando as equações que descrevem o movimento do fluido. Entretanto, as condições iniciais e de contorno exatas são desconhecidas. Apenas são conhecidas características médias do escoamento. É relevante que no estado turbulento pequenas alterações nas condições iniciais levam a grandes alterações

no movimento dos elementos de fluido. Portanto, a não-reprodutibilidade dos resultados surge porque o sistema pode ter diferentes condições iniciais para o escoamento, mesmo quando os parâmetros macroscópicos são especificados.

A situação recém-descrita é similar ao problema do movimento molecular das partículas que constituem um corpo macroscópico. Se as condições iniciais forem conhecidas para todas as partículas do corpo, pode-se prever o estado posterior. No entanto, não faz sentido propor tal problema, uma vez que é inviável a obtenção de tão detalhado conhecimento do estado inicial do sistema. Assim, ao atribuir parâmetros macroscópicos a um sistema, seu movimento molecular deve ser assumido randômico e desordenado.

A ideia usualmente embutida na noção de turbulência é essencialmente diferente da noção de movimento molecular. O movimento de um elemento de fluido implica a consideração do movimento de um volume macroscópico que contém um grande número de moléculas. Todas as partículas nesse volume têm a mesma velocidade e cada uma participa do movimento macroscópico, ou seja, todas estão envolvidas em *movimento coletivo*. De outro modo: o movimento hidrodinâmico do fluido corresponde a *graus de liberdade coletivos* específicos.

Generalizando as ideias que foram ilustradas com turbulência de fluidos, pode-se definir turbulência da seguinte maneira: *movimento turbulento de corpos macroscópicos é o movimento onde os graus de liberdade coletivos são randômicos e fortemente excitados*.

Deve-se notar que graus de liberdade coletivos são normalmente excitados mesmo em condições de equilíbrio estatístico, mas a energia envolvida é muito pequena. Para movimento turbulento a energia relacionada aos graus de liberdade coletivos deve ser muito maior que a correspondente energia presente no equilíbrio estatístico. É neste específico sentido que o conceito de graus de liberdade fortemente excitados deve ser entendido.

O conceito de turbulência também implica que o número de graus de liberdade coletivos fortemente excitados é muito grande. Caso apenas um grau de liberdade coletivo seja excitado, as condições iniciais prescritas determinariam completamente o comportamento subsequente do sistema e esse comportamento seria regular em vez de randômico. O estabelecimento de turbulência a partir de um único grau de liberdade coletivo é possível, em princípio, quando o grau de liberdade excitado passa a ser redistribuído entre outros modos. Outro caso ocorre quando vários graus de liberdade são excitados ao mesmo

tempo. No primeiro caso a turbulência não é excitada imediatamente e haverá um lapso de tempo finito durante o qual o sistema faz a transição para o estado turbulento.

A abordagem de turbulência em um plasma envolve o conhecimento de quais movimentos coletivos são possíveis no plasma, como são excitados e em que ponto o plasma fará a transição para o estado turbulento, no qual os graus de liberdade coletivos são quantidades randômicas cujos valores não são reprodutíveis de experimento para experimento.

Uma observação adicional a respeito da natureza dos pulsos turbulentos em plasmas se faz necessária. Plasma corresponde ao estado da matéria em que átomos ou moléculas são encontrados em estado ionizado. As interações entre elétrons e íons são determinadas por forças de longo alcance. As muitas formas de movimento coletivo em plasmas são resultado do acoplamento entre o movimento das partículas carregadas e o campo eletromagnético. Portanto, o campo eletromagnético que acompanha o movimento das partículas também é uma quantidade randômica não-reprodutível em plasmas turbulentos.

1.3 Turbulência fraca e forte

Segundo Sagdeev e Galeev (1969) [32], uma simplificação essencial da teoria linear de plasmas deriva do fato de que perturbações arbitrárias podem ser expressas como uma superposição de modos (“eigenmodes”), com cada modo evoluindo independentemente dos outros. Esta abordagem sistemática pode ser estendida para plasmas fracamente não-lineares. Perturbações arbitrárias são ainda expressas como uma superposição de modos, mas a não-linearidade provê interação (fraca) entre os modos. Consequentemente, os coeficientes envolvidos na superposição dos modos tornam-se quantidades que variam lentamente no tempo, podendo assumir valores bastante diferentes daquele preditos pela teoria linear.

Esta abordagem à teoria não-linear de plasmas é usualmente referida como *teoria de turbulência fraca*. Tal abordagem pode ser justificada por uma expansão perturbativa da equação de Vlasov quando a energia excitada no espectro de modos é pequena comparada com a energia total do plasma. Obviamente, a energia no espectro excitado deve ser maior que o ruído térmico para ser de algum interesse. Em outras palavras, a teoria de turbulência fraca pode descrever apropriadamente a evolução de um plasma inicialmente instável se a energia livre liberada pela instabilidade é pequena comparada com a energia

total do plasma, e grande comparada ao ruído térmico.

Quando a energia nos modos excitados é da mesma ordem que a energia total do plasma, o plasma é dito *fortemente turbulento*, e a expansão perturbativa da turbulência fraca falha.

1.4 Turbulência e coerência

Davidson (1972) [33] faz observações adicionais a respeito da diferença entre fenômenos não-lineares coerentes e turbulentos em plasmas. O termo *coerente* se refere a circunstâncias em que o desenvolvimento não-linear do sistema é acompanhado com a devida consideração da informação de fase carregada pelas ondas. O termo *turbulento*, quando aplicado a um plasma, usualmente se refere a circunstâncias onde um grande número de oscilações coletivas randômicas são excitadas por alguma instabilidade. Isto é, há *muitas ondas* presentes no sistema e (assume-se) é permitido tratar as fases dessas ondas como sendo *randômicas* em algum sentido (“random phase approximation”). Investigações a esse respeito correspondem ao estudo de propriedades médias de um *conjunto estatístico* (“ensemble”) de sistemas.

1.5 Processos não-lineares

Ainda segundo Sagdeev e Galeev [32], a teoria de turbulência fraca pode ser discutida em termos de três interações básicas: a interação não-linear onda-onda, a interação linear (ou quase-linear) onda-partícula, e a interação não-linear onda-partícula.

A interação não-linear onda-onda é também conhecida por espalhamento onda-onda ou instabilidade de decaimento (“decay instability”). As condições de ressonância para esta interação podem ser escritas como $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$ e $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$, onde $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ e $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ são as frequências angulares e os vetores de onda das três ondas envolvidas na interação. Como pode ser deduzido das condições de ressonância, o mecanismo básico envolvido nesta interação é o acoplamento não-linear que ocorre quando o batimento de duas ondas é tal que a soma ou diferença de suas frequências e vetores de onda coincidem com a frequência e vetor de onda de uma terceira onda.

Interpretando ω e \mathbf{k} como a energia e *momentum* de um *quantum* associado à onda, percebe-se que as condições de ressonância para a interação meramente garantem con-

servação de energia e *momentum* para o processo elementar no qual um *quantum* decai em dois outros *quanta*, ou dois *quanta* combinam-se e formam um terceiro *quantum*. Conseqüentemente, não é surpreendente que esta interação conserva a energia total e *momentum* das ondas.

A interação linear (ou quase-linear) onda-partícula está associada à condição de ressonância $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, onde \mathbf{v} é a velocidade da partícula envolvida na interação. Quando partícula e onda satisfazem esta condição de ressonância, a partícula mantém uma fase constante relativa à onda e é eficientemente acelerada pelo campo elétrico essencialmente constante que a onda exerce sobre ela. De um ponto de vista quântico, a condição de ressonância para esta interação é uma condição necessária para conservação de energia e *momentum* no processo elementar em que uma partícula de velocidade \mathbf{v} emite ou absorve um *quantum* de energia ω e *momentum* \mathbf{k} . Conseqüentemente, não é surpreendente que esta interação conserve a energia total e *momentum* das ondas e partículas, e não das ondas isoladamente. A mudança na amplitude das ondas causada por esta interação é chamada amortecimento de Landau (“Landau damping/growth”), e a correspondente alteração na distribuição de partículas é chamada difusão quase-linear. A teoria quase-linear, que trata estes dois efeitos simultaneamente, é uma teoria não-linear, no sentido que a taxa de variação da amplitude das ondas depende da função-distribuição, e a taxa de variação da função-distribuição depende da amplitude das ondas.

A interação não-linear onda-partícula é também conhecida como amortecimento de Landau não-linear. Esta interação e a interação não-linear onda-onda são também referidas coletivamente como acoplamento de modos (“mode coupling”). A condição de ressonância associada com esta interação é $\omega_2 \pm \omega_1 = (\mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v}$, e o mecanismo básico envolvido é o mesmo da interação linear onda-partícula, exceto pelo fato de que agora a partícula mantém um fase constante em relação ao batimento de duas ondas. Tomada com o sinal positivo, esta condição de ressonância descreve o processo elementar em que uma partícula de velocidade \mathbf{v} simultaneamente emite ou absorve dois *quanta*, um de *momentum* e energia (\mathbf{k}_1, ω_1) e o outro de *momentum* e energia (\mathbf{k}_2, ω_2) . Tomada com o sinal negativo, esta condição de ressonância representa o processo elementar em que uma partícula emite um *quantum* e absorve outro (i.e., um processo de espalhamento). Tomada com qualquer das escolhas de sinal, a interação conserva a energia total e o *momentum* das ondas e partículas. Então, uma vez que a interação pode ser descrita como

um processo de espalhamento, pode-se também dizer que o número total de *quanta* das ondas será conservado.

Obviamente, em um plasma real as três interações ocorrem simultaneamente, e é seu efeito combinado que determina a evolução do plasma.

Capítulo 2

Formulação matemática

Neste capítulo são esboçados os cálculos envolvidos na derivação das equações utilizadas no presente trabalho. A exposição é baseada nos trabalhos que apresentam a generalização da teoria de turbulência fraca desenvolvida pelo Professor Peter H. Yoon, bem como em notas pessoais do mesmo autor [1, 2].

São dois os motivos para limitar a apresentação dos cálculos apenas a pontos básicos. Primeiro, a derivação completa das equações, a partir de primeiros princípios, como feita originalmente, é extremamente extensa e, portanto, impraticável pelos ditames de espaço. Segundo, o presente trabalho não busca desenvolver um novo sistema de equações, mas se ocupa primordialmente em obter resultados 2D a partir das equações já determinadas, interpretar esses resultados, e possivelmente aplicá-los a sistemas físicos reais.

Outros exemplos dos cálculos envolvidos são apresentados no apêndice A, onde é exposta a adaptação das equações ao caso bidimensional.

2.1 Hierarquia Klimontovich

Parte-se da equação de Klimontovich para a espécie a ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_a^M(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) N_a(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

onde a função de Klimontovich é dada por

$$N(x, t) = N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^N \delta[x - x'_i(t)] = \sum_{i=1}^N \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \delta[\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)], \quad (2.2)$$

e toma-se a média estatística,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \langle N_a(x, t) \rangle = - \left\langle \mathbf{F}_a^M(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} N_a(x, t) \right\rangle. \quad (2.3)$$

Em geral as forças microscópicas $\mathbf{F}^M(x, t)$ serão função de $N(x, t)$. Para um plasma uniforme não-magnetizado que interage primariamente através de força eletrostática a força microscópica é dada pela força Coulombiana,

$$\mathbf{F}_a^M(x, t) = e_a \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t), \quad (2.4)$$

onde o campo elétrico microscópico autoconsistente $\mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t)$ é determinado pela lei de Gauss,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_b e_b \int d\mathbf{p} N_b(x, t). \quad (2.5)$$

A quantidade $N_b(x, t)$ pode ser escrita como $N_b(x, t) = \langle N_b(x, t) \rangle + \delta N_b(x, t)$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_b e_b \int d\mathbf{p} [\langle N_b(x, t) \rangle + \delta N_b(x, t)] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot [\langle \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) \rangle + \delta \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t)], \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t)$ foi expresso como $\mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) \rangle + \delta \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t)$. Analogamente, $\mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \rangle + \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t)$. Assim,

$$\langle \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) N_a(x, t) \rangle = \langle \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \rangle \langle N_a(x, t) \rangle + \langle \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(x, t) \rangle, \quad (2.7)$$

onde foi feito uso da assunção de fase randômica. Então, a relação (2.3) pode ser escrita como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \langle \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \langle N_a(x, t) \rangle = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \langle \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(x, t) \rangle. \quad (2.8)$$

Subtraindo (2.8) de (2.1) resulta

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \langle \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta N_a(x, t) + \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \langle N_a(x, t) \rangle \\ & = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot [\langle \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(x, t) \rangle - \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(x, t)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A partir da relação (2.9) é possível determinar uma equação para a correlação de segunda ordem que envolve a solução da equação (2.3). A nova equação envolve correlações de terceira ordem, e assim por diante, gerando uma hierarquia de equações que podem ser expressas como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \langle N_a(x, t) \rangle = - \left\langle \mathbf{F}_a^M(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} N_a(x, t) \right\rangle; \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \langle \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \langle \mathbf{F}_b^M(\mathbf{r}', t) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \rangle \\
 & + \langle \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_b(x', t) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \langle N_a(x, t) \rangle + \langle \delta \mathbf{F}_b^M(\mathbf{r}', t) \delta N_a(x, t) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \langle N_b(x', t) \rangle \\
 & = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \langle \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \rangle - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \cdot \langle \delta \mathbf{F}_b^M(\mathbf{r}', t) \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \rangle; \\
 & \hspace{20em} \vdots \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Considerando que o campo médio é nulo (neutralidade de carga),

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \langle \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) \rangle = 4\pi \sum_b e_b \int d\mathbf{p} \langle N_b(x, t) \rangle = 0, \quad (2.12)$$

a equação (2.9) se reduz a

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \delta N_a(x, t) + \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \langle N_a(x, t) \rangle \\
 & = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot [\langle \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(x, t) \rangle - \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(x, t)]. \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

A equação (2.13) pode ser reexpressa como

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) [\delta N_a(x, t) - \delta N_a^0(x, t)] + \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \langle N_a(x, t) \rangle \\
 & = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot [\langle \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(x, t) \rangle - \delta \mathbf{F}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(x, t)], \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

onde $N_a^0(x, t)$ é a solução de partícula não-interagente. É possível continuar as considerações necessárias com o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = -e_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \langle \delta \mathbf{E}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rangle; \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) [\delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)] + e_a \delta \mathbf{E}_a^M(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} \\
 & = e_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot [\langle \delta \mathbf{E}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rangle - \delta \mathbf{E}_a^M(\mathbf{r}, t) \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)]; \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_a e_a \int d\mathbf{p} \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (2.17)$$

onde foi considerado que as quantidades médias não têm dependência espacial, e

$$\begin{aligned}
 \langle N_a(x, t) \rangle & = \int dx_1 \cdots dx_N \mathcal{D}(x_1 \cdots x_N; t) N_a(x, t) \\
 & = f_a(x, t) \equiv N \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \mathcal{D}(x_1 \cdots x_N; t), \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

onde \mathcal{D} é a função densidade de probabilidade de estados. As considerações adicionais de que o plasma é não-relativístico ($\mathbf{p} \rightarrow m\mathbf{v}$), $\delta\mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) \rightarrow \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ permitem reescrever (2.15)-(2.17) como

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = -\frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle; \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) [\delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] \\ &= -\frac{e_a}{m_a} \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [\langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle - \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)]; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_a e_a \int d\mathbf{v} \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (2.21)$$

Aplicando transformadas de Fourier espaço-temporais, com $q \equiv (\mathbf{k}, \omega)$, obtém-se

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = -\frac{ie_a}{m_a} \int dq' \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta E_{q'} \delta N_{-q'}^a \rangle; \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \right) (\delta N_q^a - \delta N_q^{a0}) \\ &= i \frac{e_a}{m_a} \delta E_q \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} + i \frac{e_a}{m_a} \int dq' \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\delta E_{q'} \delta N_{q-q'}^a - \langle \delta E_{q'} \delta N_{q-q'}^a \rangle); \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\delta E_q = \sum_a \frac{4\pi e_a}{k} \int d\mathbf{v} \delta N_q^a. \quad (2.24)$$

onde a transformada temporal foi aplicada apenas na escala rápida relacionada às flutuações. Absorvendo a derivada temporal de escala lenta na frequência, $\omega \rightarrow \omega + i\partial/\partial t$, e introduzindo a quantidade

$$\mathbf{g}_q^a = -\frac{e_a}{m_a} \frac{\partial/\partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0}, \quad (2.25)$$

a equação (2.23) pode ser compactamente escrita como

$$\delta N_q^a = \delta N_q^{a0} + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}_q^a f_a \delta E_q + \int dq' \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}_q^a (\delta E_{q'} \delta N_{q-q'}^a - \langle \delta E_{q'} \delta N_{q-q'}^a \rangle). \quad (2.26)$$

A fim de simplificar a notação abandona-se o símbolo “ δ ” nas quantidades que representam flutuações. Considerando a expansão da quantidade N_q^a como

$$N_q^a = N_q^{a(1)} + N_q^{a(2)} + N_q^{a(3)} + \dots, \quad (2.27)$$

pode-se identificar

$$N_q^{a(1)} = N_q^{a0} + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}_q^a f_a E_q \quad (2.28)$$

$$N_q^{a(2)} = \int dq' \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}_q^a \left(E_{q'} N_{q-q'}^{a(1)} - \langle E_{q'} N_{q-q'}^{a(1)} \rangle \right) \quad (2.29)$$

$$N_q^{a(3)} = \int dq' \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}_q^a \left(E_{q'} N_{q-q'}^{a(2)} - \langle E_{q'} N_{q-q'}^{a(2)} \rangle \right). \quad (2.30)$$

A solução iterativa de (2.28)-(2.30) produz, até terceira ordem,

$$\begin{aligned} N_q^a = & N_q^{a0} + \eta_a(q) f_a E_q + \sum_{q_1+q_2=q} \eta_a^{(2)}(q_1|q_2) f_a (E_{q_1} E_{q_2} - \langle E_{q_1} E_{q_2} \rangle) \\ & + \sum_{q_1+q_2+q_3=q} \eta_a^{(3)}(q_1|q_2|q_3) f_a (E_{q_1} E_{q_2} E_{q_3} - E_{q_1} \langle E_{q_2} E_{q_3} \rangle - \langle E_{q_1} E_{q_2} E_{q_3} \rangle), \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde foram desprezados termos não-lineares em N_q^{a0} . Também foi introduzida a notação

$$\eta_a(q) = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}_q^a \quad (2.32)$$

$$\eta_a^{(2)}(q_1|q_2) = \frac{1}{2} \left[\left(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \mathbf{g}_{q_1+q_2}^a \right) \left(\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_2}^a \right) + \left(\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_1+q_2}^a \right) \left(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \mathbf{g}_{q_1}^a \right) \right] \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \eta_a^{(3)}(q_1|q_2|q_3) = & \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \mathbf{g}_{q_1+q_2+q_3}^a \right) \left[\left(\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_2+q_3}^a \right) \left(\hat{\mathbf{k}}_3 \cdot \mathbf{g}_{q_3}^a \right) + \left(\hat{\mathbf{k}}_3 \cdot \mathbf{g}_{q_2+q_3}^a \right) \left(\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_2}^a \right) \right] \\ & (2.34) \end{aligned}$$

$$\sum_{q_1+q_2+\dots+q_N=q} \equiv \int dq_1 \int dq_2 \dots \int dq_N \delta(q_1 + q_2 + \dots + q_N - q). \quad (2.35)$$

Multiplicando (2.24) e (2.31) por $E_q^* = E_{-q}$ e tomando a média estatística obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon(q) \langle E^2 \rangle_q - i \sum_{q'} \chi^{(2)}(q'|q-q') \langle E_{q'} E_{q-q'} E_{-q} \rangle - 2 \sum_{q'} \bar{\chi}^{(3)}(q'|q-q') \langle E^2 \rangle_{q'} \langle E^2 \rangle_q \\ = \sum_a \frac{4\pi e_a}{k} \int d\mathbf{v} \langle E_{-q} N_q^{a0} \rangle, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde foram introduzidas as funções-resposta

$$\epsilon(q) = 1 + \chi(q), \quad (2.37)$$

$$\chi(q) = - \sum_a \frac{4\pi e_a}{k^2} \int d\mathbf{v} \eta_a(q) f_a, \quad (2.38)$$

$$\chi^{(2)}(q_1|q_2) = - \sum_a \frac{4\pi i e_a}{k_1 k_2 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \int d\mathbf{v} \eta_a^{(2)}(q_1|q_2) f_a, \quad (2.39)$$

$$\bar{\chi}^{(3)}(q_1|q_2|q_3) = \sum_a \frac{4\pi e_a}{k_1 k_2 k_3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|} \int d\mathbf{v} \eta_a^{(3)}(q_1|q_2|q_3) f_a. \quad (2.40)$$

A equação (2.36) requer o conhecimento de $\langle E_{-q} N_q^{a0} \rangle$. Essa quantidade pode ser determinada multiplicando (2.24) e (2.31) por $N_q^{a0*} = N_{-q}^{a0}$, o que produz

$$\begin{aligned} \langle E_{-q} N_q^{a0} \rangle = & \frac{4\pi e_a}{(2\pi)^3 k \epsilon^*(q)} \left(1 + \sum_{q'} \frac{2\bar{\chi}^{(3)*}(q'| - q'|q)}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q'} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a \\ & - \frac{i}{\epsilon^*(q)} \sum_{q'} \chi^{(2)*}(q'|q - q') \langle E_{-q'} E_{-q+q'} N_q^{a0} \rangle. \end{aligned} \quad (2.41)$$

A última equação, por sua vez, depende de correlações de terceira ordem, que são obtidas de forma análoga, gerando uma dependência em correlação de quarta ordem, e assim por diante. Assim, chega-se (contabilizando correlações até quarta ordem) à equação não-linear de balanço espectral,

$$\begin{aligned} \left[\epsilon(q) + 2 \int dq' T(q, q') \right] \langle E^2 \rangle_q - 2 \int dq' \frac{|\chi^{(2)}(q|q - q')|^2}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q'} \langle E^2 \rangle_{q-q'} \\ = \sum_a \frac{2e_a^2}{\pi} \int d\mathbf{v} \left[\frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 \epsilon^*(q)} - 2 \int dq' \left(\frac{\delta(\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})}{k'^2 |\epsilon(q')|^2} M(q, q') \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\delta[\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(q - q')|^2} M(q, q - q') \right) \right] f_a(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde

$$T(q, q') = [\chi^{(2)}(q'|q - q')]^2 \left[\frac{\langle E^2 \rangle_{q-q'}}{\epsilon(q')} + \frac{\langle E^2 \rangle_{q'}}{\epsilon(q - q')} \right] - \bar{\chi}^{(3)}(q'| - q'|q) \langle E^2 \rangle_{q'}, \quad (2.43)$$

$$M(q, q') = \frac{[\chi^{(2)}(q'|q - q')]^2}{\epsilon(q - q')} \langle E^2 \rangle_q - \frac{|\chi^{(2)}(q'|q - q')|^2}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q-q'}. \quad (2.44)$$

A parte real da equação (2.42) determina a relação de dispersão, enquanto a parte imaginária determina a equação cinética para as ondas. Toma-se apenas a contribuição linear usual para a relação de dispersão, $\text{Re } \epsilon(q) = 0$. Dessa forma, o presente estudo contempla a evolução linear e não-linear dos modos lineares do plasma.

Para o modo de Langmuir para o qual valem as desigualdades $\omega_{\mathbf{k}}^L/kv_{te} \gg 1$ e $\omega_{\mathbf{k}}^L/kv_{ti} \gg 1$, obtém-se a forma aproximada

$$\chi_a(\mathbf{k}, \omega) \approx -\frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 T_a}{m_a \omega^2} \right) - i\pi \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (2.45)$$

que é aplicável tanto para elétrons como para íons. Para o modo íon-sônico, que satisfaz $\omega_{\mathbf{k}}^S/kv_{te} \ll 1$ e $\omega_{\mathbf{k}}^S/kv_{ti} \geq 1$, a aproximação (2.45) é aplicável apenas aos íons. Para os elétrons vale a expressão

$$\chi_e(\mathbf{k}, \omega) \approx \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2 v_{te}^2} - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (2.46)$$

Desta forma obtêm-se as conhecidas relações de dispersão, com $c_S^2 = T_e/m_i$,

$$\omega_{\mathbf{k}}^L = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right), \quad (2.47)$$

$$\omega_{\mathbf{k}}^S = kc_S \left(\frac{1 + 3T_i/T_e}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.48)$$

A intensidade das ondas para os modos lineares pode ser expressa como

$$\langle E^2 \rangle_q = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}), \quad (2.49)$$

onde σ indica o sinal da velocidade de fase da onda. Inserindo (2.49) na parte imaginária de (2.42), obtêm-se, após manipulação algébrica,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} &= \gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} + S_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sum_{\sigma'=\pm 1} \sum_{\beta=L,S} \int d\mathbf{k}' A_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \\ &\quad - \sum_{\sigma'=\pm 1} \sum_{\beta=L,S} \int d\mathbf{k}' B_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta} \left[\frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right] \\ &\quad - \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \sum_{\beta, \gamma=L,S} \int d\mathbf{k}' M_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta\gamma} \left[\frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} + \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right] \\ &\quad \times \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}), \quad (2.50) \end{aligned}$$

onde

$$\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}) = \frac{\partial \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma})}{\partial (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma})}, \quad (2.51)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} = -2 \operatorname{Im} \frac{\epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}, \quad (2.52)$$

$$S_{\mathbf{k}}^{\alpha} = \sum_a \frac{4e_a^2}{k^2 [\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma})]^2} \int d\mathbf{v} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}), \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta} &= \frac{4}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \operatorname{Im} \left[\frac{2 \left[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}) \right]^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} \right. \\ &\quad \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | -\mathbf{k}', -\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \right], \quad (2.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta} &= \sum_a \frac{16e_a^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \operatorname{Im} \frac{\left| \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}) \right|^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}) \right|^2} \\ &\quad \times \int d\mathbf{v} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] f_a(\mathbf{v}), \quad (2.55) \end{aligned}$$

$$M_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{4\pi}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} \int d\mathbf{k}' \left| \chi^{(2)} \left(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma \right) \right|^2. \quad (2.56)$$

Esta é a equação cinética formal da teoria de turbulência fraca convencional envolvendo apenas modos lineares, $\alpha = L, S$. No entanto, a menos que as susceptibilidades sejam explicitamente avaliadas, a equação não é muito informativa. Em Yoon (2000) [1], expressões aproximadas para $A_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\alpha\beta}$ são obtidas, bem como para as susceptibilidades de segunda ordem, o que permite escrever as equações de evolução espectral na forma final (com $f_\alpha = nF_\alpha$),

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} = & \underbrace{\frac{ne^2\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_e}_{\text{emissão espontânea}} \\ & + \underbrace{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}_{\text{emissão induzida}} \\ & + \underbrace{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{2T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}_{\text{decaimento espontâneo}} \\ & - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{2T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \\ & - \underbrace{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{2T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}_{\text{decaimento induzido}} \\ & - \underbrace{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{ne^4\lambda_{De}^4}{T_e^2} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \left(\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \right)}_{\text{espalhamento espontâneo}} \\ & \quad \times \delta \left[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right] F_i \\ & + \underbrace{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{m_e m_i \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2}}_{\text{espalhamento induzido}} \\ & \quad \times \delta \left[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right] (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}. \quad (2.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} = & \underbrace{\mu_{\mathbf{k}}^2 \frac{n e^2 \omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (F_e + F_i)}_{\text{emissão espontânea}} \\
 & + \underbrace{\mu_{\mathbf{k}} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi \omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(F_e + \frac{m_e}{m_i} F_i \right) I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}_{\text{emissão induzida}} \\
 & + \underbrace{\mu_{\mathbf{k}} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{4 T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^L) \mu_{\mathbf{k}} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{\sigma'' L}}_{\text{decaimento espontâneo}} \\
 & - \underbrace{\mu_{\mathbf{k}} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{4 T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^L) \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^{\sigma'' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}_{\text{decaimento induzido}} \\
 & - \underbrace{\mu_{\mathbf{k}} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{4 T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^L) \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}_{\text{decaimento induzido}}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Para as ondas S desconsidera-se o termo de espalhamento por constituir um processo extremamente lento.

Para obter a equação de evolução temporal da função distribuição, retoma-se (2.22) mantendo apenas termos lineares.

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \text{Re} \left[-\frac{i e_a}{m_a} \int dq \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\frac{4 \pi e_a}{(2 \pi)^3 k \epsilon^*(q)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a + \eta_a(q) f_a \langle E_q^2 \rangle \right] \right] \tag{2.59}$$

Os modos lineares satisfazem a relação $\epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha) \approx 0$. Neste caso,

$$\frac{1}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} = \wp \frac{1}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} + \sum_{\sigma = \pm 1} \sum_{\alpha = L, S} \frac{i \pi \delta(\omega - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha)}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha)}. \tag{2.60}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_e(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = & \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\frac{e^2}{4 \pi k m_e} \sum_{\sigma = \pm 1} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_e \right. \\
 & \left. + \frac{\pi e^2 \mathbf{k}}{m_e^2 k} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \sum_{\sigma = \pm 1} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right]. \tag{2.61}
 \end{aligned}$$

2.2 Modelo físico

As equações para a evolução dos modos eletrostáticos L e S , e da função distribuição dos elétrons são aplicadas a um sistema composto de um plasma de fundo e de feixes eletrônicos tênues. Os íons, por apresentarem uma dinâmica lenta em relação aos elétrons, são considerados estacionários, isto é, a forma da distribuição iônica não evolui temporalmente. Além de corresponderem a situações físicas reais, os feixes desempenham o papel de fonte de energia livre para o sistema.

A consideração de efeitos espontâneos, contemplados na presente teoria, permite determinar os níveis de intensidade espectral iniciais, não de forma arbitrária, mas de forma autoconsistente, tomando em conta as distribuições iônica e eletrônica de equilíbrio.

A relevância da consideração de tal sistema é tanto acadêmica quanto prática, já que a instabilidade produzida por feixes é um assunto permanentemente discutido na física de plasmas, além de um grande número de sistemas físicos poder ser caracterizado conforme o presente modelo [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40]. Processos de três ondas também são relevantes em aplicações tecnológicas como fusão a *laser*, mesmo que não envolvam a consideração de um feixe inicial [41].

Em 2D, a função-distribuição de íons é dada por $F_i = (m_i/2\pi T_i) \exp(-m_i v^2/2T_i)$, onde T_i e m_i são a temperatura iônica e a massa do próton, respectivamente.

A função-distribuição inicial de elétrons corresponde à combinação de um plasma de fundo Maxwelliano e componentes das populações dos feixes. Em 2D, a distribuição é dada por

$$F_e(\mathbf{v}, t = 0) = \frac{1 - n_b/n - n_f/n}{\pi v_{te}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{v_{te}^2} - \frac{(v_{\parallel} - v_e)^2}{v_{te}^2}\right) + \frac{n_b/n}{\pi v_{tb}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{v_{tb}^2} - \frac{(v_{\parallel} + v_b)^2}{v_{tb}^2}\right) + \frac{n_f/n}{\pi v_{tf}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{v_{tf}^2} - \frac{(v_{\parallel} - v_f)^2}{v_{tf}^2}\right).$$

Aqui $v_{te}^2 = 2T_e/m_e$, $v_{tb}^2 = 2T_b/m_e$ e $v_{tf}^2 = 2T_f/m_e$ correspondem aos valores quadráticos das velocidades térmicas associadas com os elétrons de fundo, feixes eletrônicos alinhado e antialinhado (com a direção z), respectivamente, e v_e , v_b e v_f são as velocidades de deriva dos elétrons de fundo e dos feixes alinhado e antialinhado, respectivamente. A velocidade

de deriva dos elétrons de fundo é definida de forma a garantir velocidade de deriva nula para a distribuição eletrônica, $v_e = (n_b v_b - n_f v_f) / (n - n_b - n_f)$.

Inicializam-se as intensidades das ondas pelo balanço entre as emissões espontâneas e induzidas, tomando em conta as distribuições de equilíbrio:

$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}(0) = \frac{T_e}{4\pi^2} \frac{1}{1 + 3k^2 \lambda_{De}^2},$$

$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}(0) = \frac{T_e}{4\pi^2} k^2 \lambda_{De}^2 \sqrt{\frac{1 + k^2 \lambda_{De}^2}{1 + 3k^2 \lambda_{De}^2}}$$

$$\times \frac{\int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (F_e + F_i)}{\int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) [F_e + (T_e/T_i) F_i]}.$$

As equações acopladas para as partículas (elétrons) e ondas são resolvidas no espaço 2D de número de onda e no espaço 2D de velocidade, numericamente, pelo emprego do procedimento Runge-Kutta para as equações das ondas, enquanto a equação para as partículas é resolvida pelo método implícito em direções alternadas (método ADI).

Nos trabalhos dos anexos B.6, B.7 e B.8, além da inclusão da dependência espacial nas grandezas pertinentes, é utilizado o método de *splitting* combinado com o método implícito, tanto para as partículas quanto para as ondas.

Capítulo 3

Resultados e aplicações

As equações obtidas para a evolução das ondas de Langmuir (L) e íon-sônicas (S) bem como da distribuição eletrônica são utilizadas para a obtenção de dados numéricos nos espaços bidimensionais de velocidade e número de onda. Aplicações dos resultados obtidos são apontadas e discutidas neste capítulo.

3.1 Condensado de Langmuir e o espalhamento não-linear

Um paradigma existente na área de estudos de turbulência em plasmas diz respeito à formação do chamado *condensado de Langmuir* [42, 28]. Considera-se que processos turbulentos geram transferência de energia espectral de comprimentos de onda curtos para comprimentos de onda longos através de um processo de “cascateamento inverso”. Este processo seria responsável pelo acúmulo de energia na região de longo comprimento de onda ($k \sim 0$), uma vez que cascadeamentos adicionais não seriam possíveis, o que daria início ao regime de turbulência forte.

Análises e simulações a esse respeito são usualmente feitas dentro da aproximação unidimensional. Em diversas áreas da Física o estudo de sistemas tomando em conta dimensões de maior ordem tem mostrado resultados não-triviais, e apontam, assim, para a importância de explorar possíveis “efeitos dimensionais”. Resultados anteriores indicavam a possibilidade de que o condensado de Langmuir fosse decorrente de um efeito dimensional [4]. Em Ziebell et al. (2008)* [43]¹ são reportados, pela primeira vez, resul-

¹As referências marcadas com “*” têm a participação do autor do presente trabalho e estão dispostas

tados da análise bidimensional envolvendo efeitos quase-lineares espontâneos e induzidos, bem como efeitos não-lineares, espontâneos e induzidos, de decaimento onda-onda e espalhamento onda-partícula. Esse trabalho reforça a tese de que a formação do condensado se deve à simplificação unidimensional. As figuras apresentadas no anexo B.1 esclarecem as considerações recém-expostas.

No entanto, simulações PIC recentes [44] mostram a formação do condensado em 2D, o que traz a possibilidade de que a formação do condensado se deva a efeitos não-lineares de ordem superior, ou mesmo a uma formulação mais acurada para a descrição de efeitos não-lineares levados em conta de forma aproximada nos estudos feitos até o momento.

Em Ziebell et al. (2008)* [43] também é analisada a importância relativa entre os termos de decaimento e espalhamento. O efeito de espalhamento é seguidamente desprezado *a priori* em comparação ao efeito de decaimento. No entanto, em Ziebell et al. (2008)* [43] verifica-se que ambos os termos têm importância análoga. A inclusão dos processos de espalhamento inclusive se mostra responsável pela geração de uma cauda na distribuição eletrônica, oposta ao feixe, em comparação ao caso em que esses processos são desconsiderados. Deve-se notar que a geração de uma cauda energética é de relevância para o entendimento da dinâmica envolvida no vento solar.

3.2 Feixes bidirecionais e isotropização eletrônica

Em Pavan et al. (2009a)* [45] são exploradas as características de um sistema feixe-plasma com feixes bidirecionais. A consideração de dois feixes eletrônicos em contrafluxo se justifica frente às medidas tomadas por satélites que detectam essa característica em distâncias próximas ao Sol, no vento solar, cujos parâmetros são reproduzidos nas simulações numéricas. Estruturas de campos magnético curvadas (“loops”) junto ao Sol também justificam a consideração de fluxo bidirecional.

Nesse trabalho, são mostrados resultados que indicam as características do espectro de Langmuir em 2D frente à transição para a situação de feixes bidirecionais, a partir da situação de monofeixe. Os dados revelam o desenvolvimento de uma estrutura em forma de arco complexa no espectro das ondas L , onde a região espectral com $k \sim 0$ permanece durante o processamento com a intensidade do nível térmico inicial, conforme mostram

como anexos no apêndice B.

as figuras no anexo B.2.

Outra questão abordada nesse trabalho diz respeito à isotropização da distribuição eletrônica. A pertinência de investigar o grau de isotropização dos elétrons decorre das observações a esse respeito que mostram a distribuição eletrônica do vento solar largamente isotrópica na região de alta energia. Mais precisamente, as observações revelam que a distribuição de elétrons pode frequentemente ser identificada em partes, formando um núcleo térmico de baixa energia, seguido de um halo na região mais externa e, eventualmente, uma população energética alinhada com o campo magnético (“strahl”), além de um super-halo aproximadamente isotrópico na região de alta energia [46, 47]. No entanto, os resultados obtidos em Pavan et al. (2009a)* [45] mostram a distribuição de elétrons bastante anisotrópica, como revelam as figuras do anexo B.2. Esses resultados concorrem com a tese de que mecanismos adicionais devem agir concomitantemente para produzir os aspectos observados [48, 46, 49, 50]. Deve-se notar ainda que não é possível abordar a questão da isotropização eletrônica na aproximação unidimensional; o que permite essa análise é a extensão bidimensional implementada no presente trabalho.

3.3 Isotropização eletrônica e estrutura espectral fina

Em Pavan et al. (2010a)* [51] a questão relativa à isotropização dos elétrons é retomada. Nesse trabalho são analisados feixes com densidades significativamente maiores do que aqueles considerados em Pavan et al. (2009a)* [45]. São avaliadas as situações com apenas um feixe e também com dois feixes simétricos em contrafluxo. Os resultados mostram que para densidades dos feixes suficientemente altas a distribuição eletrônica resultante exibe um elevado grau de isotropização, sendo possível identificar regiões correspondentes a um núcleo térmico de baixa energia e a um halo energético. O trabalho revela que tal grau de isotropização somente é alcançado quando o sistema é iniciado com apenas um feixe; quando iniciado com feixes simétricos a distribuição resultante mantém um grau de anisotropia elevado. A importância dos resultados que mostram grau elevado de isotropização reside no fato de que a teoria utilizada oferece uma explicação para a forma das distribuições eletrônicas frequentemente observadas no vento solar sem a necessidade de invocar mecanismos adicionais.

Cabe observar que a distribuição eletrônica do vento solar pode ser modelada por

funções kappa. De fato, a chamada entropia não-extensiva produz distribuições kappa como distribuições de equilíbrio para sistemas com interações de longo alcance, e pode eventualmente constituir uma explicação alternativa para a forma das distribuições eletrônicas do vento solar [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58]. Interessante notar que Leubner (2004) [55] faz referência explícita, ainda que breve, à possibilidade de um sistema SOC (ver seção 1.1) ser responsável pela separação da distribuição eletrônica em um núcleo Maxwelliano e uma cauda energética do tipo lei-de-potência.

Outra origem possível da distribuição eletrônica típica (núcleo térmico e halo) pode ser apontada considerando colisões Coulombianas e inhomogeneidades do meio, de forma que distribuições com cauda estendida podem ser obtidas sem que nenhum processo de interação onda-partícula seja tomado em conta [59, 60].

Em Pavan et al. (2010a)* [51] também é observada a formação de uma “estrutura fina” nos espectros das ondas de Langmuir e íon-sônicas. Estruturas desse tipo já haviam sido detectadas em simulações 1D [30, 29, 47], sendo que nenhuma relação com outro fenômeno foi sugerida. No entanto, não se deve descartar a possibilidade de que tais estruturas estejam relacionadas à modulação de ondas de Langmuir por ondas íon-sônicas, observadas em plasmas espaciais [61]. As figuras apresentadas no anexo B.3 exemplificam os resultados obtidos.

3.4 Feixes bidirecionais e incrementos íon-acústicos

Em Pavan et al. (2009b)* [62] avalia-se a dinâmica das ondas íon-sônicas (ou íon-acústicas) em um sistema com feixes bidirecionais. Nesse trabalho analisa-se a influência da variação de parâmetros que caracterizam os feixes, densidade e velocidade de deriva, bem como a influência específica dos processos de espalhamento não-linear e decaimento [63, 64].

A dinâmica das ondas íon-sônicas, no contexto dos processos turbulentos, não tem sido explorada tanto quanto a dinâmica das ondas de Langmuir. Por vezes a evolução do espectro íon-sônico é desconsiderada. No entanto, os resultados apresentados em Pavan et al. (2009b)* [62] revelam que a intensidade espectral íon-sônica pode ser significativamente aumentada em um sistema com feixes simétricos, em relação ao caso de feixe único. O estudo também revela que os incrementos íon-sônicos têm característica transiente, conforme mostram as figuras do anexo B.4.

3.5 Incrementos íon-acústicos ionosféricos

Enquanto os estudos de Pavan et al. (2009b)* [62] foram motivados pela aplicação relativa ao vento solar, e os parâmetros escolhidos de acordo, em Pavan et al. (2010b)* [65] a motivação e a escolha de parâmetros visam à aplicação ao ambiente da alta ionosfera terrestre. De fato, nesse ambiente são observados incrementos nos níveis das ondas íon-sônicas com intensidades $\sim 1 - 2$ ordens de magnitude acima do nível térmico, podendo em algumas situações alcançar valores $\sim 4 - 5$ ordens de magnitude acima do nível térmico [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88]. A análise envolve a comparação entre feixes com diferentes graus de simetria, onde se obtém novamente um crescimento acentuado para o sistema com dois feixes em comparação ao sistema de feixe único. A consideração de feixes eletrônicos em contrafluxo é especialmente pertinente na ionosfera, já que há um número de mecanismos capazes de gerar tal característica. A decorrente redução no valor da corrente líquida necessária para produzir os incrementos na intensidade das ondas íon-sônicas é um aspecto a favor dessa teoria, uma vez que a consideração isolada da instabilidade do tipo “two-stream instability” se mostra restritiva nesse aspecto [78].

Outra questão relevante abordada nesse trabalho diz respeito à dispersão angular observada nos referidos eventos envolvendo as ondas íon-sônicas. Nesses eventos as ondas parecem mostrar um limite angular $\lesssim 15^\circ$ em relação à direção do feixe (ou do campo magnético). Os resultados obtidos permitem sugerir uma restrição nas possíveis combinações que formam o produto entre densidade do feixe e sua velocidade de deriva; deve-se notar que este produto define a corrente associada aos feixes. Cabe ressaltar que essa análise de dispersão, a exemplo da isotropização, não é possível na aproximação 1D, mas deve-se à abordagem 2D utilizada no presente trabalho.

Em Pavan et al. (2010b)* [65] também é avaliada a influência dos termos de emissão espontânea linear e de espalhamento espontâneo. Essa análise equivale à determinação da influência do parâmetro de plasma na dinâmica das ondas íon-sônicas, que revela um aumento significativo dos incrementos para valores reduzidos do parâmetro de plasma. Esses estudos ainda confirmam o caráter transiente dos incrementos das ondas íon-sônicas, característica proeminente das observações. As figuras do anexo B.5 exemplificam os resultados.

3.6 Instabilidade feixe-plasma bidimensional quasi-linear em meio inomogêneo

Em Ziebell et al. (2011a)* [89] (anexo B.6) trabalhos anteriores são generalizados pela inclusão de efeitos convectivos e dispersivos nas equações de ondas e partículas, decorrente da inclusão da dimensão espacial no sistema. Devido à disparidade entre as escalas, quando comparadas à escala difusiva, esses efeitos são pequenos. A importância dos resultados está em prover a percepção integrada da evolução das ondas e partículas ao longo da direção da inomogeneidade, sem a necessidade de considerar diferentes cálculos locais em separado. O resultados também são relevantes como teste de performance um procedimento analítico e numérico que passa a estar disponível para estudo de outros sistemas onde os efeitos mencionados passam a ser significativos, como no caso de sistemas com inomogeneidades acentuadas.

3.7 Instabilidade feixe-plasma unidimensional não-linear em meio inomogêneo

Devido à complexidade adicional decorrente da inclusão de efeitos não-lineares, concomitante com a inclusão da dimensão espacial [90], em Ziebell et al. (2011b)* [91] (anexo B.7) considera-se um sistema unidimensional nos espaços de velocidade e número de onda. Os resultados obtidos constituem uma base sobre a qual o problema de emissão de radiação em plasmas pode ser investigada [92]. Esse trabalho, além de prover a percepção integrada da evolução das ondas e partículas ao longo da direção da inomogeneidade, reforça conclusão anterior de que a contribuição do processo de decaimento é análoga à do processo de espalhamento não-linear, não sendo, portanto, justificável refutar a contabilização de um desses processos.

3.8 Incrementos íon-acústicos em cavidade auroral

Em Ziebell et al. (2011c)* [93] (anexo B.8) retoma-se a análise da geração de incrementos íon-acústicos anteriormente abordada. Nesse trabalho, é incluída a dimensão espacial e o sistema é modelado pela consideração de uma cavidade auroral. Os resultados corroboram

conclusão anterior de Pavan et al. (2010b)* [65], obtida para um sistema localizado no espaço, de que feixes antissimétricos são altamente eficientes na geração de ondas iônicas, em comparação com sistemas de feixe único.

3.9 Relação de dispersão para função distribuição arbitrária/Instabilidade de Buneman

Em Pavan et al. (2011)* [94] (anexo B.9) um nova ferramenta matemática é estabelecida. Em primeira instância, ela constitui uma forma de calcular pólos de ordem arbitrária, para funções arbitrárias. O esquema é, então, aplicado ao cálculo da relação de dispersão num sistema em que os elétrons apresentam velocidade de deriva inicial em relação aos íons. Esse sistema suporta a chamada instabilidade de Buneman [95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102]. Os resultados mostram uma boa concordância entre esta simulação e a de Vlasov, usada como referência, demonstrando a performance da ferramenta. Esse novo esquema também é revelante por permitir (especialmente se estendido para dimensões maiores) a determinação da potencial atividade de ondas produzida por uma distribuição real, sem a necessidade de modelar a distribuição, já que o esquema permite a determinação das raízes da relação de dispersão para distribuições arbitrárias.

Capítulo 4

Trabalho corrente

Entre as questões correntemente sob estudo está a determinação dos efeitos de grande e pequena escala responsáveis pela forma observada da distribuição de elétrons no vento solar. Os processos considerados relevantes são: convexão, espelhamento magnético, campo elétrico ambipolar, colisões Coulombianas e interação onda-partícula. A equação (4.1) descreve os efeitos convectivo e de espelhamento magnético.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{v_{\perp}}{2B} \frac{\partial B}{\partial s} \left(v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \right) = 0 \quad (4.1)$$

A figura 4.1 mostra o estado estacionário resultante da solução numérica da Eq. (4.1), para um sistema/modelo "Terra-Sol". O sistema é inicializado considerando uma distribuição Maxwelliana em todos os pontos do espaço, obedecendo a um perfil de densidade, temperatura e velocidade de deriva. A distribuição resultante mostra a formação de uma população alinhada à direção do campo magnético (strahl), focada pelo efeito de espelhamento magnético. Como esperado, o focamento é maior para maior distanciamento do "Sol".

As figuras 4.2 e 4.3 apresentam exemplos de distribuição de elétrons no vento solar. O contraste com a figura 4.1, no que diz respeito à dispersão angular da população de strahl, revela uma questão atual sobre qual é o mecanismo responsável pela dispersão na distribuição real. Um processo capaz de gerar dispersão do strahl é a interação onda-partícula. (A questão de qual modo de oscilação é responsável pelos efeitos observados também é relevante no que diz respeito à região de dissipação da distribuição espectral observada no vento solar [103, 104].) A figura 4.4 mostra outro comportamento que sugere que a interação onda-partícula desempenha papel fundamental. Neste caso, produzindo

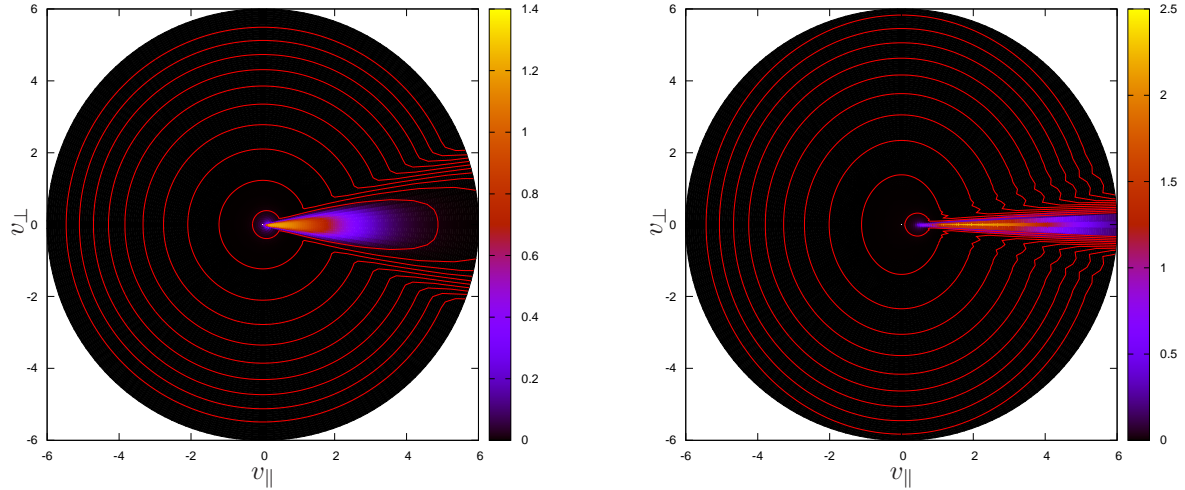


Figura 4.1: Esquerda: $40 R_{\odot}$. Direita: $170 R_{\odot}$. Distâncias consideradas a partir do Sol. (R_{\odot} : raio solar.) Linhas de contorno em 10^{-20} , 10^{-18} , 10^{-16} , ..., 10^{-6} , 10^{-4} e 10^{-2} .

espalhamento das população de strahl para a população de halo à medida em que a distância ao Sol aumenta. (Referências pertinentes: [105, 106, 107, 108, 109, 110].)

A abordagem numérica da equação (4.1) quando são consideradas interações onda-partícula ou colisões passa a ser complexa devido à disparidade de escalas temporais envolvidas nos processos. Como recurso, desenvolveu-se uma abordagem *semianalítica*. Ela deriva do fato de que o método de *splitting* [111, 112] envolve o particionamento de uma equação em um número de equações mais simples. A questão é que, agora, essas equações mais simples podem ser passíveis de ter sua solução analítica obtida, de modo a se poder avançar a equação numericamente utilizando a solução *analítica* da equação. Por exemplo, a parte convectiva da equação (4.1) tem como solução $f = f(s - v_{\parallel}t)$. Como pode-se ver, não é preciso calcular derivadas nem utilizar algum método numérico especial. Os resultados mostrados na figura 4.1 foram obtidos com esse método. Essa abordagem semianalítica incrementa a estabilidade numérica e reduz o tempo de processamento.

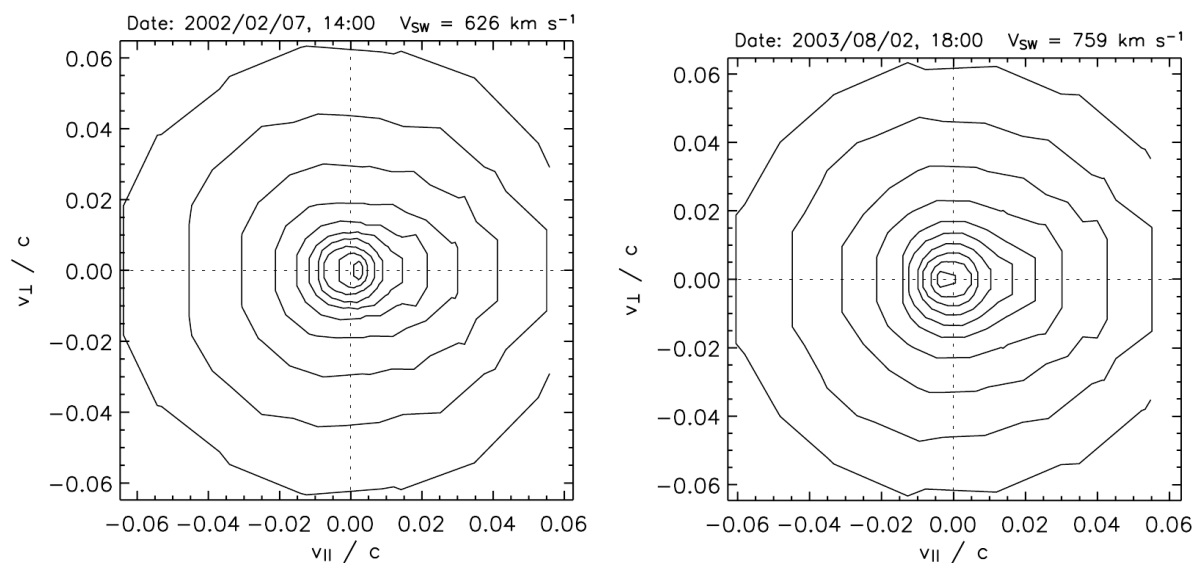


Figura 4.2: Distribuição de elétrons no vento solar em diferentes datas [46].

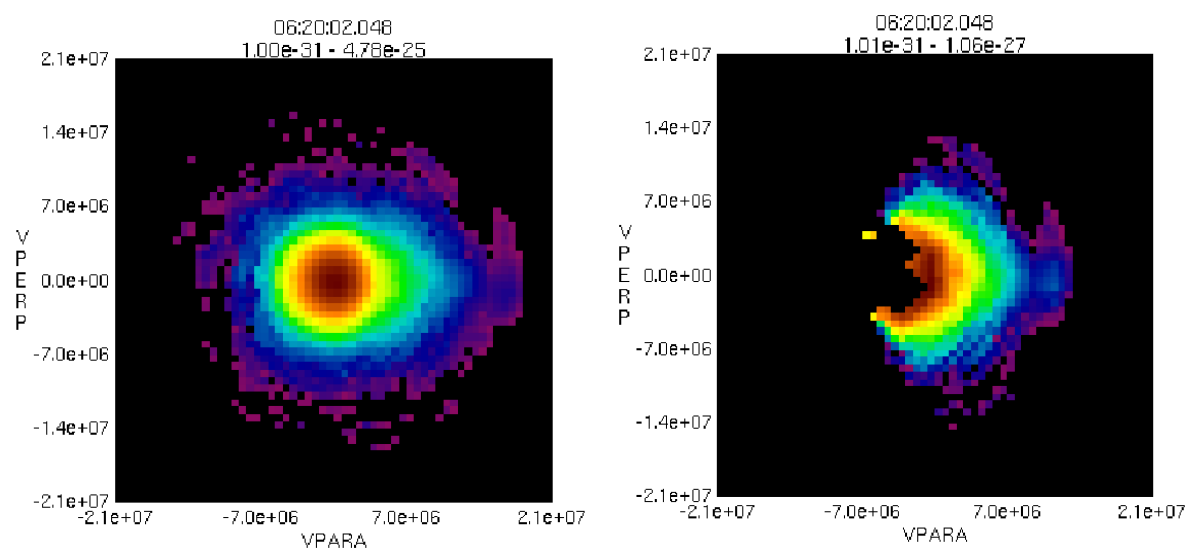


Figura 4.3: Esquerda: Distribuição de elétrons no vento solar. Direita: Componente de strahl da distribuição [113].

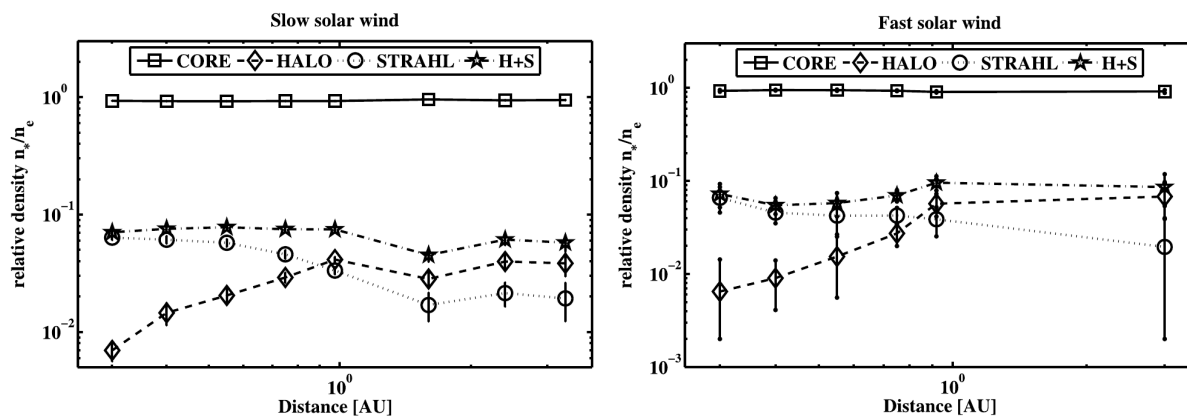


Figura 4.4: Componente de strahl diminui à medida que a componente de halo aumenta; no vento solar lento e rápido [114].

Apêndice A

Adaptação 2D

A.1 Considerações gerais

A equação de evolução eletrônica (2.61) pode ser reescrita na forma seguinte:

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(A_i^{\text{el}} F_e + D_{ij}^{\text{el}} \frac{\partial F_e}{\partial v_j} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$A_i^{\text{el}} = \frac{e^2}{4\pi m_e} \int d\mathbf{k} \frac{k_i}{k^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (\text{A.2})$$

$$D_{ij}^{\text{el}} = \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}. \quad (\text{A.3})$$

Para a implementação numérica são definidas as quantidades adimensionais seguintes:

$$z \equiv \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \quad \tau \equiv t\omega_{pe}, \quad \mathbf{q} \equiv \frac{\mathbf{k}v_e}{\omega_{pe}}, \quad \mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v_e}. \quad (\text{A.4})$$

As relações de dispersão para as ondas L e S podem ser reescritas,

$$\omega_{\mathbf{k}}^L = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right), \quad \omega_{-\mathbf{k}}^L = -\omega_{\mathbf{k}}^L, \quad \rightarrow \quad z_{\mathbf{q}}^L = \left(1 + \frac{3}{4} q^2 \right), \quad (\text{A.5})$$

$$\omega_{\mathbf{k}}^S = kc_S \frac{(1 + 3T_i/T_e)^{1/2}}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)^{1/2}}, \quad \omega_{-\mathbf{k}}^S = -\omega_{\mathbf{k}}^S, \quad (\text{A.6})$$

$$\rightarrow \quad z_{\mathbf{q}}^S = \frac{q}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{(1 + 3T_i/T_e)^{1/2}}{(1 + q^2/2)^{1/2}} = \frac{q A}{(1 + q^2/2)^{1/2}}, \quad (\text{A.7})$$

onde

$$c_S^2 = \frac{T_e}{m_i}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + 3 \frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.8})$$

Em várias situações, uma vez que é assumido que as ondas S (e L) são significativas apenas na região onde $q \ll 1$, é possível usar a seguinte aproximação,

$$z_{\mathbf{q}}^S \simeq q A \left(1 - \frac{q^2}{4} \right). \quad (\text{A.9})$$

A condição de simetria a ser obedecida pelas ondas é a seguinte,

$$z_{-\mathbf{q}}^{L,S} = -z_{\mathbf{q}}^{L,S}. \quad (\text{A.10})$$

Ainda as seguintes condições de simetria são assumidas,

$$z_{q_{\perp}, -q_z}^{L,S} = -z_{q_{\perp}, q_z}^{L,S}. \quad (\text{A.11})$$

$$I_{-\mathbf{q}} = I_{\mathbf{q}}, \quad I_{\mathbf{q}_{\perp}, -q_{\parallel}} = I_{\mathbf{q}_{\perp}, q_{\parallel}} = I_{\mathbf{q}}, \quad I_{-\mathbf{q}_{\perp}, q_{\parallel}} = I_{\mathbf{q}_{\perp}, q_{\parallel}} = I_{\mathbf{q}}. \quad (\text{A.12})$$

A.2 Condições de ressonância

A.2.1 Componentes A_i^{el}

As componentes A_i^{el} podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} A_i^{\text{el}} = & g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^0 dq_z \frac{q_i}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ & + g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{q_i}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} = & g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^0 dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ & + g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Substituindo $-q_z$ por q_z no primeiro termo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} = & g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^0 (-dq_z) \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ -q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{(q_x, -q_z)}^L \delta(\sigma z_{(q_x, -q_z)}^L - q_x u_x + q_z u_z) \\ & + g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Invertendo o sentido de integração em z no primeiro termo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} &= g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ -q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{(q_x, -q_z)}^L \delta(\sigma z_{(q_x, -q_z)}^L - q_x u_x + q_z u_z) \\ &\quad + g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Da relação de dispersão para o modo L e usando Eq. (A.11),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} &= g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ -q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} (-\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \delta(-\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x + q_z u_z) \\ &\quad + g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Usando propriedades da função δ (e invertendo a ordem dos dois termos),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} &= g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ &\quad + g \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} -q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

o qual pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} &= g \int_{-\infty}^0 dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ &\quad + g \int_{-\infty}^0 dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} -q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z) \\ &\quad + g \int_0^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ &\quad + g \int_0^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} -q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Substituindo $-q_x$ por q_x nas primeiras duas integrais,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} &= g \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} -q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z) \\
 &+ g \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\
 &+ g \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\
 &+ g \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} -q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z), \quad (\text{A.20})
 \end{aligned}$$

onde foram usadas as propriedades de simetria de $z_{\mathbf{q}}^L$. Reunindo as integrais que são iguais e invertendo a ordem do dois termos,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} &2g \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\
 &+ 2g \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} -q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z). \quad (\text{A.21})
 \end{aligned}$$

A condição de ressonância no primeiro termo é a seguinte,

$$\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma \left(1 + \frac{3}{4} q^2 \right) - q_x u_x - q_z u_z \simeq \sigma - q_x u_x - q_z u_z = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$q_1 = \frac{\sigma - q_x u_x}{u_z} \quad (\text{A.24})$$

Portanto,

$$\delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \simeq \delta(\sigma - q_x u_x - q_z u_z) = \frac{1}{|u_z|} \delta(q_z - q_1) \quad (\text{A.25})$$

A condição de ressonância de ressonância no segundo termo é a seguinte,

$$\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\sigma \left(1 + \frac{3}{4} q^2 \right) + q_x u_x - q_z u_z \simeq \sigma + q_x u_x - q_z u_z = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$q_2 = \frac{\sigma + q_x u_x}{u_z}. \quad (\text{A.28})$$

Portanto,

$$\delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z) \simeq \delta(\sigma + q_x u_x - q_z u_z) = \frac{1}{|u_z|} \delta(q_z - q_2). \quad (\text{A.29})$$

Retornando à expressão para A_i^{el} ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} &= 2g \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{q_x u_x + q_z u_z}{|u_z|} \delta(q_z - q_1) \\ &+ 2g \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} -q_x \\ q_z \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{-q_x u_x + q_z u_z}{|u_z|} \delta(q_z - q_2), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_x^{\text{el}} \\ A_z^{\text{el}} \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^\infty \frac{2g dq_x}{|u_z|} \left[\Theta(q_1) \frac{q_x u_x + q_1 u_z}{q_x^2 + q_1^2} \begin{pmatrix} q_x \\ q_1 \end{pmatrix} - \Theta(q_2) \frac{q_x u_x - q_2 u_z}{q_x^2 + q_2^2} \begin{pmatrix} -q_x \\ q_2 \end{pmatrix} \right], \\ q_1 &= \frac{\sigma - q_x u_x}{u_z}, \quad q_2 = \frac{\sigma + q_x u_x}{u_z}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

A.2.2 Componentes D_{ij}^{el}

As componentes D_{ij}^{el} podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} D_{ij}^{\text{el}} &= \int_{-\infty}^\infty dq_x \int_{-\infty}^0 dq_z \frac{q_i q_j}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ &+ \int_{-\infty}^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{q_i q_j}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= \int_{-\infty}^\infty dq_x \int_{-\infty}^0 dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ &+ \int_{-\infty}^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Substituindo $-q_z$ por q_z no primeiro termo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= \int_{-\infty}^\infty dq_x \int_{-\infty}^0 (-dq_z) \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{q_x, -q_z}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{q_x, -q_z}^L - q_x u_x + q_z u_z) \\ &+ \int_{-\infty}^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Invertendo a ordem da integração em z no primeiro termo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{q_x, -q_z}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{q_x, -q_z}^L - q_x u_x + q_z u_z) \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \quad (\text{A.35}) \end{aligned}$$

Usando Eqs. (A.11) e (A.12),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(-\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x + q_z u_z) \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \quad (\text{A.36}) \end{aligned}$$

Usando propriedade da função δ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z) \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \quad (\text{A.37}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= \int_{-\infty}^0 dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z) \\
 &+ \int_{-\infty}^0 dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \\
 &+ \int_0^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z) \\
 &+ \int_0^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \quad (\text{A.38})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= \int_0^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\
 &+ \int_0^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z), \\
 &+ \int_0^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z) \\
 &+ \int_0^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z), \quad (\text{A.39})
 \end{aligned}$$

onde foram usadas as propriedades de simetria de $z_{\mathbf{q}}^L$ e $I_{\mathbf{q}}^{\sigma L}$, em relação à dependência em q_x . Reunindo os termos que são iguais,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= 2 \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \\ &+ 2 \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z). \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Como já visto,

$$\delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x - q_z u_z) \simeq \delta(\sigma - q_x u_x - q_z u_z) = \frac{1}{|u_z|} \delta(q_z - q_1), \quad (\text{A.41})$$

onde q_1 é dado pela Eq. (A.24). Ainda,

$$\delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x - q_z u_z) \simeq \delta(\sigma + q_x u_x - q_z u_z) = \frac{1}{|u_z|} \delta(q_z - q_2), \quad (\text{A.42})$$

onde q_2 é dado pela Eq. (A.28). Retornando à expressão para D_{ij}^{el} ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= 2 \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \frac{1}{|u_z|} \delta(q_z - q_1) \\ &+ 2 \int_0^\infty dq_x \int_0^\infty dq_z \frac{1}{q_x^2 + q_z^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_z \\ q_z^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} I_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \frac{1}{|u_z|} \delta(q_z - q_2), \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{xx}^{\text{el}} \\ D_{xz}^{\text{el}} \\ D_{zz}^{\text{el}} \end{pmatrix} &= \frac{2}{|u_z|} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^\infty dq_x \left[\frac{\Theta(q_1)}{q_x^2 + q_1^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ q_x q_1 \\ q_1^2 \end{pmatrix} I_{q_x, q_1}^{\sigma L} + \frac{\Theta(q_2)}{q_x^2 + q_2^2} \begin{pmatrix} q_x^2 \\ -q_x q_2 \\ q_2^2 \end{pmatrix} I_{q_x, q_2}^{\sigma L} \right], \\ q_1 &= \frac{\sigma - q_x u_x}{u_z}, \quad q_2 = \frac{\sigma + q_x u_x}{u_z}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

A.2.3 Decaimento onda-onda

O desmembramento 2D da condição de ressonância para os processos de três ondas produz uma série de diferentes combinações ressonantes (ou não) para os números de onda. Para

as ondas L :

$$\delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \pm z_{q'_x, q'_z}^L \pm z_{q_x \pm q'_x, q_z \pm q'_z}^S). \quad (\text{A.45})$$

Exemplo 1:

$$\begin{aligned} \delta(z_{\mathbf{q}}^L + z_{q'_x, q'_z}^L - z_{q_x + q'_x, q_z + q'_z}^S) &= \delta \left[\left(1 + \frac{3}{4}q^2\right) + \left(1 + \frac{3}{4}(q_x'^2 + q_z'^2)\right) \right. \\ &\quad \left. - A \left((q_x + q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2 \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4} \left((q_x + q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2 \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Como $A \ll 1$, a condição de ressonância não pode ser satisfeita para $q < 1.0$ e este termo não contribui para a equação. O mesmo ocorre em todos os casos em que ambos os valores z^L têm o mesmo sinal.

Exemplo 2:

$$\begin{aligned} \delta(z_{\mathbf{q}}^L - z_{q'_x, q'_z}^L - z_{q_x + q'_x, q_z + q'_z}^S) &= \delta \left[\left(1 + \frac{3}{4}q^2\right) - \left(1 + \frac{3}{4}(q_x'^2 + q_z'^2)\right) \right. \\ &\quad \left. - A \left((q_x + q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2 \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4} \left((q_x + q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2 \right) \right) \right] \\ &\simeq \delta \left[\frac{3}{4} (q_x^2 + q_z^2 - q_x'^2 - q_z'^2) - A \left((q_x + q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2 \right)^{1/2} \right] \\ &= \frac{4}{3} \delta \left[(q_x^2 + q_z^2 - q_x'^2 - q_z'^2) - \frac{4}{3} A \left((q_x + q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2 \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Pode-se obter uma expressão aproximada para o número de onda que satisfaz a função δ , uma vez que o segundo fator (multiplicado por A) é muito menor que o primeiro,

$$q'_z = q_{d1}, \quad q_{d1} \simeq (q_x^2 + q_z^2 - q_x'^2)^{1/2}. \quad (\text{A.48})$$

A derivada do argumento da função δ é dada como segue,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q'_z} \left[(q_x^2 + q_z^2 - q_x'^2 - q_z'^2) - \frac{4}{3} A \left((q_x + q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2 \right)^{1/2} \right] \\ = \left[-2q'_z - \frac{4}{3} \frac{1}{2} A \left((q_x + q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2 \right)^{-1/2} 2(q_z - q'_z)(-1) \right] \\ = \left[-2q'_z + \frac{4}{3} A \frac{q_z - q'_z}{\left((q_x + q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2 \right)^{1/2}} \right] \simeq (-2q'_z). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Portanto,

$$\delta(z_{\mathbf{q}}^L - z_{q'_x, q'_z}^L - z_{q_x + q'_x, q_z + q'_z}^S) \simeq \delta(z_{\mathbf{q}}^L - z_{q'_x, q'_z}^L) = \frac{2}{3} \frac{1}{|q'_z|} \delta(q'_z - q_{d1}) \Theta(q_x^2 + q_z^2 - q_x'^2). \quad (\text{A.50})$$

A.3 Equações para os modos L e S

No termo de espalhamento não-linear é contabilizada apenas a contribuição dos íons. Por constituírem uma população estacionária (Maxwelliana), o termo de espalhamento não-linear pode ser parcialmente resolvido de forma algébrica. Seguindo estas considerações é possível expressar as equações adimensionais de evolução para os modos L e S na forma seguinte.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2 |q_z|} \int_0^\infty du_x \left[g \Phi_e - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + q_x u_x) / q_z} \\
 &+ \frac{\pi}{q^2 |q_z|} \int_0^\infty du_x \left[g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - q_x u_x) / q_z} \\
 &\quad + \frac{2\sqrt{2}}{3} A \frac{(z_{\mathbf{q}}^L)^2}{q^4} \int_0^\infty dq'_x \frac{\Theta(q^2 - q_x'^2)}{(q^2 - q_x'^2)^{1/2}} \\
 &\times \left\{ (q^2 + q_x q'_x - q_z q'_z)^{1/2} (q_x q'_x - q_z q'_z)^2 \left[\left(\mathcal{E}_{q_x+q'_x, q_z-q'_z}^{\sigma S} + \mathcal{E}_{q_x+q'_x, q_z-q'_z}^{-\sigma S} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\mathcal{E}_{q_x+q'_x, q_z-q'_z}^{\sigma S} + \mathcal{E}_{q_x+q'_x, q_z-q'_z}^{-\sigma S} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \right. \\
 &\quad + (q^2 - q_x q'_x - q_z q'_z)^{1/2} (q_x q'_x + q_z q'_z)^2 \left[\left(\mathcal{E}_{q_x-q'_x, q_z-q'_z}^{\sigma S} + \mathcal{E}_{q_x-q'_x, q_z-q'_z}^{-\sigma S} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\mathcal{E}_{q_x-q'_x, q_z-q'_z}^{\sigma S} + \mathcal{E}_{q_x-q'_x, q_z-q'_z}^{-\sigma S} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \\
 &\quad + (q^2 + q_x q'_x + q_z q'_z)^{1/2} (q_x q'_x + q_z q'_z)^2 \left[\left(\mathcal{E}_{q_x+q'_x, q_z+q'_z}^{\sigma S} + \mathcal{E}_{q_x+q'_x, q_z+q'_z}^{-\sigma S} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\mathcal{E}_{q_x+q'_x, q_z+q'_z}^{\sigma S} + \mathcal{E}_{q_x+q'_x, q_z+q'_z}^{-\sigma S} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \\
 &\quad \left. + (q^2 - q_x q'_x + q_z q'_z)^{1/2} (q_x q'_x - q_z q'_z)^2 \left[\left(\mathcal{E}_{q_x-q'_x, q_z+q'_z}^{\sigma S} + \mathcal{E}_{q_x-q'_x, q_z+q'_z}^{-\sigma S} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\mathcal{E}_{q_x-q'_x, q_z+q'_z}^{\sigma S} + \mathcal{E}_{q_x-q'_x, q_z+q'_z}^{-\sigma S} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right] \right\}_{q'_z = q_{d1}} \\
 &\quad - (z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} \int_0^\infty dq'_x \int_0^\infty dq'_z \frac{(q_x q'_x + q_z q'_z)^2}{q^2 (q_x'^2 + q_z'^2)} \left\{ \right. \\
 &\quad \left. \left[g (z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^L) 2 \frac{T_e}{T_i} \right] \right. \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp \left(- \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \frac{(z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2} \right) \\
 &\quad \left. + \left[g (z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^L) 2 \frac{T_e}{T_i} \right] \right. \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{(q_x + q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2}} \exp \left(- \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \frac{(z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{(q_x + q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2} \right) \left\{ \right. \\
 &\quad \left. - (z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} \int_0^\infty dq'_x \int_0^\infty dq'_z \frac{(q_x q'_x - q_z q'_z)^2}{q^2 (q_x'^2 + q_z'^2)} \left\{ \right. \\
 &\quad \left. \left[g (z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^L) 2 \frac{T_e}{T_i} \right] \right. \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{(q_x + q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp \left(- \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \frac{(z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{(q_x + q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2} \right) \\
 &\quad \left. + \left[g (z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^L) 2 \frac{T_e}{T_i} \right] \right. \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2}} \exp \left(- \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \frac{(z_{\mathbf{q}}^L - z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2} \right) \left. \right\}. \quad (\text{A.51})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} = & \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}}{q^2 |q_z|} \int_0^\infty du_x \left[g(\Phi_e) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left(-q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^S + q_x u_x) / q_z} \\
 & + \frac{\pi \mu_{\mathbf{q}}}{q^2 |q_z|} \int_0^\infty du_x \left[g(\Phi_e) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \left(q_x \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + q_z \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^S - q_x u_x) / q_z} \\
 & + \frac{\sqrt{\pi} \mu_{\mathbf{q}}}{q^3} \left(g - 2 \frac{T_e}{T_i} \sigma^2 z_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^S \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \frac{(z_{\mathbf{q}}^S)^2}{q^2} \right] \\
 & + \frac{A}{3} \frac{q}{|q_z|} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \int_0^\infty dq'_x \left\{ \left[\frac{[q_x'^2 (q_x - q'_x)^2 + q_z'^2 (q_z + q'_z)^2]}{(q_x'^2 + q_z'^2)[(q_x - q'_x)^2 + (q_z + q'_z)^2]} \right. \right. \\
 & \times \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z + q'_z}^{+L} - \left(-z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z + q'_z}^{+L} + z_{q_x - q'_x, q_z + q'_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right. \\
 & \left. \left. + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z + q'_z}^{-L} - \left(z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z + q'_z}^{-L} - z_{q_x - q'_x, q_z + q'_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \right]_{q_{sd,p}} \Big\} \\
 & + \frac{A}{3} \frac{q}{|q_z|} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \int_0^\infty dq'_x \left\{ \Theta(-q_{sd,m}) \left[\Theta(q_z - q'_z) \frac{[q_x'^2 (q_x + q'_x)^2 + q_z'^2 (q_z - q'_z)^2]}{(q_x'^2 + q_z'^2)[(q_x + q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2]} \right. \right. \\
 & \times \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \mathcal{E}_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^{-L} - \left(z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^{-L} - z_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right. \\
 & \left. \left. + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \mathcal{E}_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^{+L} - \left(-z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^{+L} + z_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \right. \\
 & \left. \left. + \Theta(q'_z - q_z) \frac{[q_x'^2 (q_x + q'_x)^2 + q_z'^2 (q_z - q'_z)^2]}{(q_x'^2 + q_z'^2)[(q_x + q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2]} \right. \right. \\
 & \times \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \mathcal{E}_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^{+L} - \left(z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^{+L} - z_{q_x + q'_x, q'_z - q_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right. \\
 & \left. \left. + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \mathcal{E}_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^{-L} - \left(-z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x + q'_x, q_z - q'_z}^{-L} + z_{q_x + q'_x, q'_z - q_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \right]_{-q_{sd,m}} \Big\} \\
 & + \Theta(q_{sd,m}) \left[\Theta(q_z - q'_z) \frac{[q_x'^2 (q_x - q'_x)^2 + q_z'^2 (q_z - q'_z)^2]}{(q_x'^2 + q_z'^2)[(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2]} \right. \\
 & \times \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^{-L} - \left(z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^{-L} - z_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right. \\
 & \left. \left. + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^{+L} - \left(-z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^{+L} + z_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \right. \\
 & \left. \left. + \Theta(q'_z - q_z) \frac{[q_x'^2 (q_x - q'_x)^2 + q_z'^2 (q_z - q'_z)^2]}{(q_x'^2 + q_z'^2)[(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2]} \right. \right. \\
 & \times \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^{-L} - \left(-z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^{-L} + z_{q_x - q'_x, q'_z - q_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{-L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right. \\
 & \left. \left. + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^{+L} - \left(z_{q'_x, q'_z}^L \mathcal{E}_{q_x - q'_x, q_z - q'_z}^{+L} - z_{q_x - q'_x, q'_z - q_z}^L \mathcal{E}_{q'_x, q'_z}^{+L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) \right]_{q_{sd,m}} \Big\}. \quad (\text{A.52})
 \end{aligned}$$

A.4 Equação para elétrons

Segue-se a partir da equação adimensional de evolução para os elétrons,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial u_x} (A_x^{\text{el}} \Phi_e) + \frac{\partial}{\partial u_z} (A_z^{\text{el}} \Phi_e) + \frac{\partial}{\partial u_x} \left(D_{xx}^{\text{el}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{xz}^{\text{el}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial u_z} \left(D_{zx}^{\text{el}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x} + D_{zz}^{\text{el}} \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Assume-se o índice i para a coordenada u_x , com $1 \leq i \leq n_i$, k para a coordenada u_z , com $1 \leq k \leq n_k$. Para o tempo normalizado τ usa-se o índice n , e um intervalo de tempo $\Delta\tau$. Considerando derivadas centradas, a equação para os pontos $2 \leq i \leq n_i - 1$ e $2 \leq k \leq n_k - 1$ pode ser expressa como,

$$\begin{aligned} ((\Phi_e)_{i,k}^{n+1} - (\Phi_e)_{i,k}^n) \frac{1}{\Delta\tau} = & \left[(A_x)_{i+1,k} (\Phi_e)_{i+1,k} - (A_x)_{i-1,k} (\Phi_e)_{i-1,k} \right] \frac{1}{2\Delta u_x} \\ & + \left[(A_z)_{i,k+1} (\Phi_e)_{i,k+1} - (A_z)_{i,k-1} (\Phi_e)_{i,k-1} \right] \frac{1}{2\Delta u_z} \\ & + \left[(D_{xx}^{\text{el}})_{i+1/2,k} \left((\Phi_e)_{i+1,k} - (\Phi_e)_{i,k} \right) \frac{1}{\Delta u_x} - (D_{xx}^{\text{el}})_{i-1/2,k} \left((\Phi_e)_{i,k} - (\Phi_e)_{i-1,k} \right) \frac{1}{\Delta u_x} \right. \\ & \left. + (D_{xz}^{\text{el}})_{i+1,k} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1} - (\Phi_e)_{i+1,k-1} \right) \frac{1}{4\Delta u_z} - (D_{xz}^{\text{el}})_{i-1,k} \left((\Phi_e)_{i-1,k+1} - (\Phi_e)_{i-1,k-1} \right) \frac{1}{4\Delta u_z} \right] \frac{1}{\Delta u_x} \\ & + \left[(D_{zx}^{\text{el}})_{i,k+1} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1} - (\Phi_e)_{i-1,k+1} \right) \frac{1}{4\Delta u_x} - (D_{zx}^{\text{el}})_{i,k-1} \left((\Phi_e)_{i+1,k-1} - (\Phi_e)_{i-1,k-1} \right) \frac{1}{4\Delta u_x} \right. \\ & \left. + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k+1/2} \left((\Phi_e)_{i,k+1} - (\Phi_e)_{i,k} \right) \frac{1}{\Delta u_z} - (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k-1/2} \left((\Phi_e)_{i,k} - (\Phi_e)_{i,k-1} \right) \frac{1}{\Delta u_z} \right] \frac{1}{\Delta u_z}, \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

A seguir considera-se

$$D_{i+1/2,k} = \frac{1}{2} [D_{i,k} + D_{i+1,k}], \quad (\text{A.55})$$

e de modo análogo para os outros termos. Desta forma obtém-se,

$$\begin{aligned}
 ((\Phi_e)_{i,k}^{n+1} - (\Phi_e)_{i,k}^n) \frac{1}{\Delta\tau} = & \left[(A_x)_{i+1,k}(\Phi_e)_{i+1,k} - (A_x)_{i-1,k}(\Phi_e)_{i-1,k} \right] \frac{1}{2\Delta u_x} \\
 & + \left[(A_z)_{i,k+1}(\Phi_e)_{i,k+1} - (A_z)_{i,k-1}(\Phi_e)_{i,k-1} \right] \frac{1}{2\Delta u_z} \\
 & + \left[((D_{xx}^{\text{el}})_{i,k} + (D_{xx}^{\text{el}})_{i+1,k}) \left((\Phi_e)_{i+1,k} - (\Phi_e)_{i,k} \right) \frac{1}{2\Delta u_x} \right. \\
 & - \left. ((D_{xx}^{\text{el}})_{i-1,k} + (D_{xx}^{\text{el}})_{i,k}) \left((\Phi_e)_{i,k} - (\Phi_e)_{i-1,k} \right) \frac{1}{2\Delta u_x} \right. \\
 & + (D_{xz}^{\text{el}})_{i+1,k} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1} - (\Phi_e)_{i+1,k-1} \right) \frac{1}{4\Delta u_z} \\
 & - (D_{xz}^{\text{el}})_{i-1,k} \left((\Phi_e)_{i-1,k+1} - (\Phi_e)_{i-1,k-1} \right) \frac{1}{4\Delta u_z} \left. \right] \frac{1}{\Delta u_x} \\
 & + \left[(D_{zx}^{\text{el}})_{i,k+1} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1} - (\Phi_e)_{i-1,k+1} \right) \frac{1}{4\Delta u_x} \right. \\
 & - (D_{zx}^{\text{el}})_{i,k-1} \left((\Phi_e)_{i+1,k-1} - (\Phi_e)_{i-1,k-1} \right) \frac{1}{4\Delta u_x} \\
 & + \left. \left((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k} + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k+1} \right) \left((\Phi_e)_{i,k+1} - (\Phi_e)_{i,k} \right) \frac{1}{2\Delta u_z} \right. \\
 & \left. - \left((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k-1} + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k} \right) \left((\Phi_e)_{i,k} - (\Phi_e)_{i,k-1} \right) \frac{1}{2\Delta u_z} \right] \frac{1}{\Delta u_z}, \quad (\text{A.56})
 \end{aligned}$$

Não foi indicado se o lado direito da equação é avaliado implicitamente ou explicitamente. Segue-se considerando que cada intervalo $\Delta\tau$ pode ser dividido em dois subintervalos $\Delta\tau/2$. Em cada subintervalo, o termo com derivada relacionada a uma das variáveis é implícito, e o outro é explícito. Os coeficientes de cada termo são sempre assumidos como explícitos.

Primeiro subintervalo

No primeiro subintervalo, assume-se que a derivada em x é implícita. Multiplicando

a expressão por $\Delta\tau/2$,

$$\begin{aligned}
 \left((\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i,k}^n \right) &= \left[(A_x)_{i+1,k} (\Phi_e)_{i+1,k}^{n+1/2} - (A_x)_{i-1,k} (\Phi_e)_{i-1,k}^{n+1/2} \right] \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} \\
 &\quad + \left[(A_z)_{i,k+1} (\Phi_e)_{i,k+1}^n - (A_z)_{i,k-1} (\Phi_e)_{i,k-1}^n \right] \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_z} \\
 &\quad + \left[((D_{xx}^{\text{el}})_{i,k} + (D_{xx}^{\text{el}})_{i+1,k}) \left((\Phi_e)_{i+1,k}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} \right) \frac{1}{2\Delta u_x} \right. \\
 &\quad \left. - ((D_{xx}^{\text{el}})_{i-1,k} + (D_{xx}^{\text{el}})_{i,k}) \left((\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i-1,k}^{n+1/2} \right) \frac{1}{2\Delta u_x} \right. \\
 &\quad \left. + (D_{xz}^{\text{el}})_{i+1,k} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i+1,k-1}^n \right) \frac{1}{4\Delta u_z} \right. \\
 &\quad \left. - (D_{xz}^{\text{el}})_{i-1,k} \left((\Phi_e)_{i-1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i-1,k-1}^n \right) \frac{1}{4\Delta u_z} \right] \frac{\Delta\tau}{2\Delta u_x} \\
 &\quad + \left[(D_{zx}^{\text{el}})_{i,k+1} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i-1,k+1}^{n+1/2} \right) \frac{1}{4\Delta u_x} \right. \\
 &\quad \left. - (D_{zx}^{\text{el}})_{i,k-1} \left((\Phi_e)_{i+1,k-1}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i-1,k-1}^{n+1/2} \right) \frac{1}{4\Delta u_x} \right. \\
 &\quad \left. + ((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k} + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k+1}) \left((\Phi_e)_{i,k+1}^n - (\Phi_e)_{i,k}^n \right) \frac{1}{2\Delta u_z} \right. \\
 &\quad \left. - ((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k-1} + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k}) \left((\Phi_e)_{i,k}^n - (\Phi_e)_{i,k-1}^n \right) \frac{1}{2\Delta u_z} \right] \frac{\Delta\tau}{2\Delta u_z}. \quad (\text{A.57})
 \end{aligned}$$

A seguir, coletam-se no lado esquerdo da equação todos os termos que são avaliados em $n + 1/2$ e k ,

$$\begin{aligned}
 (\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} &- \left[(A_x)_{i+1,k} (\Phi_e)_{i+1,k}^{n+1/2} - (A_x)_{i-1,k} (\Phi_e)_{i-1,k}^{n+1/2} \right] \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} \\
 &\quad - \left[((D_{xx}^{\text{el}})_{i,k} + (D_{xx}^{\text{el}})_{i+1,k}) \left((\Phi_e)_{i+1,k}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - ((D_{xx}^{\text{el}})_{i-1,k} + (D_{xx}^{\text{el}})_{i,k}) \left((\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i-1,k}^{n+1/2} \right) \right] \frac{\Delta\tau}{4(\Delta u_x)^2} \\
 &= (\Phi_e)_{i,k}^n + \left[(A_z)_{i,k+1} (\Phi_e)_{i,k+1}^n - (A_z)_{i,k-1} (\Phi_e)_{i,k-1}^n \right] \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_z} \\
 &\quad + \left[(D_{xz}^{\text{el}})_{i+1,k} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i+1,k-1}^n \right) - (D_{xz}^{\text{el}})_{i-1,k} \left((\Phi_e)_{i-1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i-1,k-1}^n \right) \right] \frac{\Delta\tau}{8\Delta u_x \Delta u_z} \\
 &\quad + \left[(D_{zx}^{\text{el}})_{i,k+1} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i-1,k+1}^{n+1/2} \right) - (D_{zx}^{\text{el}})_{i,k-1} \left((\Phi_e)_{i+1,k-1}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i-1,k-1}^{n+1/2} \right) \right] \frac{\Delta\tau}{8\Delta u_x \Delta u_z} \\
 &\quad + \left[((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k} + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k+1}) \left((\Phi_e)_{i,k+1}^n - (\Phi_e)_{i,k}^n \right) \right. \\
 &\quad \left. - ((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k-1} + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k}) \left((\Phi_e)_{i,k}^n - (\Phi_e)_{i,k-1}^n \right) \right] \frac{\Delta\tau}{4(\Delta u_z)^2}. \quad (\text{A.58})
 \end{aligned}$$

Introduz-se a aproximação seguinte. Quando avaliando a equação para um dado k , a função distribuição em $k - 1$ já será conhecida. Deste modo, os termos avaliados em

$k - 1$ e $n + 1/2$ permanecem do lado direito. Por outro lado, os termos avaliados em $k + 1$ são tratados como explícitos, avaliados no tempo n . Isto é, o termo com derivada mista é tratado como parcialmente explícito e parcialmente implícito,

$$\begin{aligned}
 & (\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} - \left[(A_x)_{i+1,k} (\Phi_e)_{i+1,k}^{n+1/2} - (A_x)_{i-1,k} (\Phi_e)_{i-1,k}^{n+1/2} \right] \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} \\
 & \quad - \left[((D_{xx}^{\text{el}})_{i,k} + (D_{xx}^{\text{el}})_{i+1,k}) \left((\Phi_e)_{i+1,k}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - ((D_{xx}^{\text{el}})_{i-1,k} + (D_{xx}^{\text{el}})_{i,k}) \left((\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i-1,k}^{n+1/2} \right) \right] \frac{\Delta\tau}{4(\Delta u_x)^2} \\
 & = (\Phi_e)_{i,k}^n + \left[(A_z)_{i,k+1} (\Phi_e)_{i,k+1}^n - (A_z)_{i,k-1} (\Phi_e)_{i,k-1}^n \right] \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_z} \\
 & + \left[(D_{xz}^{\text{el}})_{i+1,k} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i+1,k-1}^n \right) - (D_{xz}^{\text{el}})_{i-1,k} \left((\Phi_e)_{i-1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i-1,k-1}^n \right) \right] \frac{\Delta\tau}{8\Delta u_x \Delta u_z} \\
 & + \left[(D_{zx}^{\text{el}})_{i,k+1} \left((\Phi_e)_{i+1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i-1,k+1}^n \right) - (D_{zx}^{\text{el}})_{i,k-1} \left((\Phi_e)_{i+1,k-1}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i-1,k-1}^{n+1/2} \right) \right] \frac{\Delta\tau}{8\Delta u_x \Delta u_z} \\
 & \quad + \left[((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k} + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k+1}) \left((\Phi_e)_{i,k+1}^n - (\Phi_e)_{i,k}^n \right) \right. \\
 & \quad \left. - ((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k-1} + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k}) \left((\Phi_e)_{i,k}^n - (\Phi_e)_{i,k-1}^n \right) \right] \frac{\Delta\tau}{4(\Delta u_z)^2}. \quad (\text{A.59})
 \end{aligned}$$

Define-se

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \left[(A_x)_{i-1,k}^n \right] \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} - \left[(D_{xx}^{\text{el}})_{i-1,k}^n + (D_{xx}^{\text{el}})_{i,k}^n \right] \frac{\Delta\tau}{4(\Delta u_x)^2} \\
 \beta_1 &= 1 + \left[(D_{xx}^{\text{el}})_{i-1,k}^n + 2(D_{xx}^{\text{el}})_{i,k}^n + (D_{xx}^{\text{el}})_{i+1,k}^n \right] \frac{\Delta\tau}{4(\Delta u_x)^2} \\
 \gamma_1 &= - \left[(A_x)_{i+1,k}^n \right] \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_x} - \left[(D_{xx}^{\text{el}})_{i,k}^n + (D_{xx}^{\text{el}})_{i+1,k}^n \right] \frac{\Delta\tau}{4(\Delta u_x)^2} \\
 \psi_1 &= (\Phi_e)_{i,k}^n + \left[(A_z)_{i,k+1}^n (\Phi_e)_{i,k+1}^n - (A_z)_{i,k-1}^n (\Phi_e)_{i,k-1}^n \right] \frac{\Delta\tau}{4\Delta u_z} \quad (\text{A.60}) \\
 & + \left[(D_{xz}^{\text{el}})_{i+1,k}^n \left((\Phi_e)_{i+1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i+1,k-1}^n \right) - (D_{xz}^{\text{el}})_{i-1,k}^n \left((\Phi_e)_{i-1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i-1,k-1}^n \right) \right] \frac{\Delta\tau}{8\Delta u_x \Delta u_z} \\
 & + \left[(D_{zx}^{\text{el}})_{i,k+1}^n \left((\Phi_e)_{i+1,k+1}^n - (\Phi_e)_{i-1,k+1}^n \right) - (D_{zx}^{\text{el}})_{i,k-1}^n \left((\Phi_e)_{i+1,k-1}^{n+1/2} - (\Phi_e)_{i-1,k-1}^{n+1/2} \right) \right] \frac{\Delta\tau}{8\Delta u_x \Delta u_z} \\
 & \quad + \left[((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k}^n + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k+1}^n) \left((\Phi_e)_{i,k+1}^n - (\Phi_e)_{i,k}^n \right) \right. \\
 & \quad \left. - ((D_{zz}^{\text{el}})_{i,k-1}^n + (D_{zz}^{\text{el}})_{i,k}^n) \left((\Phi_e)_{i,k}^n - (\Phi_e)_{i,k-1}^n \right) \right] \frac{\Delta\tau}{4(\Delta u_z)^2},
 \end{aligned}$$

onde claramente indicou-se que os coeficientes são avaliados no tempo n , e obtém-se

$$\alpha_1 (\Phi_e)_{i-1,k}^{n+1/2} + \beta_1 (\Phi_e)_{i,k}^{n+1/2} + \gamma_1 (\Phi_e)_{i+1,k}^{n+1/2} = \psi_1, \quad (\text{A.61})$$

para $2 \leq i \leq n_i - 1$ e $2 \leq k \leq n_k - 1$. Como condições de borda, assume-se

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial u_z}(u_x, \pm u_{z,lim}) = \text{constante}, \quad \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x}(u_{x,lim}, u_z) = \text{constante}, \quad \frac{\partial \Phi_e}{\partial u_x}(u_x = 0, u_z) = 0.$$

A motivação para esta escolha de condições de borda em $u_{x,lim}$ e $u_{z,lim}$ é a seguinte. Considera-se que as bordas estão suficientemente distantes da região mais populada, de modo que a distribuição não será alterada de modo significativo junto às bordas. Desta forma, as derivadas permanecem com os mesmos valores iniciais. Outra opção é considerar valores constantes para a distribuição nas bordas; o que constitui uma condição mais restritiva.

O passo seguinte é análogo ao recém-exposto, onde repete-se o processo para o segundo subintervalo, agora invertendo o papel das derivadas, definindo novos coeficientes α_2 , β_2 , γ_2 e ψ_2 .

Quando considera-se a dimensão espacial, o processo seguido é essencialmente o mesmo exposto neste apêndice, e portanto, não é mostrado.

Apêndice B

Anexos

Devido a regras de *copyright* não são mostradas aqui os trabalhos publicados, mas apenas dados que os identificam.

B.1 Ziebell et al. (2008)

Título Two-dimensional nonlinear dynamics of beam-plasma instability

Autoria L. F. Ziebell, R. Gaelzer, J. Pavan, P. H. Yoon

Publicação Plasma Physics and Controlled Fusion, **50**, 085011

Ano 2008

DOI 10.1088/0741-3335/50/8/085011

B.2 Pavan et al. (2009a)

Título Two-dimensional nonlinear dynamics of bidirectional beam-plasma instability

Autoria J. Pavan, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, P. H. Yoon

Publicação Journal of Geophysical Research, **114**, A01106

Ano 2009

DOI 10.1029/2008JA013557

B.3 Pavan et al. (2010a)

Título Generation of quasi-isotropic electron population during nonlinear beam-plasma interaction

Autoria J. Pavan, L. F. Ziebell, P. H. Yoon, R. Gaelzer

Publicação Journal of Geophysical Research, **115**, A01103

Ano 2010

DOI 10.1029/2009JA014447

B.4 Pavan et al. (2009b)

Título Decay of beam-driven Langmuir wave into ion-acoustic turbulence in two dimensions

Autoria J. Pavan, L. F. Ziebell, P. H. Yoon, R. Gaelzer

Publicação Plasma Physics and Controlled Fusion, **51**, 095011

Ano 2009

DOI 10.1088/0741-3335/51/9/095011

B.5 Pavan et al. (2010b)

Título Ionospheric ion-acoustic enhancements by turbulent counterstreaming electron beam-plasma interaction

Autoria J. Pavan, L. F. Ziebell, P. H. Yoon, R. Gaelzer

Publicação Journal of Geophysical Research, **115**, A02310

Ano 2010

DOI 10.1029/2009JA014448

B.6 Ziebell et al. (2011a)

Título Ion-acoustic enhancements generated by beam-plasma instability in an auroral cavity

Autoria L. F. Ziebell, P. H. Yoon, J. Pavan, R. Gaelzer

Publicação Journal of Geophysical Research, **116**, A03320

Ano 2011

DOI 10.1029/2010JA016147

B.7 Ziebell et al. (2011b)

Título Nonlinear evolution of beam-plasma instability in inhomogeneous medium

Autoria L. F. Ziebell, P. H. Yoon, J. Pavan, R. Gaelzer

Publicação The Astrophysical Journal, 727:16

Ano 2011

DOI 10.1088/0004-637X/727/1/16

B.8 Ziebell et al. (2011c)

Título Two-dimensional quasilinear beam-plasma instability in inhomogeneous media

Autoria L. F. Ziebell, P. H. Yoon, J. Pavan, R. Gaelzer

Publicação Plasma Physics and Controlled Fusion, **53**, 085004

Ano 2011

DOI 10.1088/0741-3335/53/8/085004

B.9 Pavan et al. (2011)

Título Quasilinear theory and simulation of Buneman instability

Autoria J. Pavan, P. H. Yoon, T. Umeda

Publicação Physics of Plasmas, **18**, 042307

Ano 2011

DOI 10.1063/1.3574359

Referências Bibliográficas

- [1] YOON, P. H. Generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas*, 7(12):4858–4871, 2000.
- [2] YOON, P. H. Effects of spontaneous fluctuations on the generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas*, 12:042306, 2005.
- [3] ZIEBELL, L. F.; GAELZER, R.; YOON, P. H. Nonlinear development of weak beam-plasma instability. *Physics of Plasmas*, 8(9):3982–3995, 2001.
- [4] ZIEBELL, L. F.; GAELZER, R.; YOON, P. H. Dynamics of Langmuir wave decay in two dimensions. *Physics of Plasmas*, 15:032303, 2008.
- [5] DAVIDSON, R. C. Statistical frameworks for weak plasma turbulence. *The Physics of Fluids*, 10(8):1707–1713, 1967.
- [6] DAVIDSON, R. C. Resonant four-wave interaction of electron-plasma oscillations. *Physical Review*, 176(1):344–350, 1968.
- [7] DAVIDSON, R. C. General weak turbulence theory of resonant four-wave processes. *The Physics of Fluids*, 12(1):149–161, 1969.
- [8] CAPONI, M. E.; DAVIDSON, R. C. Self-consistent weak turbulence theory of resonant three-wave processes. *The Physics of Fluids*, 14(7):1463–1472, 1971.
- [9] YOON, P. H. Statistical theory of electromagnetic weak turbulence. *Physics of Plasmas*, 13:022302, 2006.
- [10] YOON, P. H. Progress in the kinetic theory of electrostatic harmonics of plasma waves. *Physics of Plasmas*, 12:052313, 2005.

- [11] GAELZER, R.; ZIEBELL, L. F.; YOON, P. H. Generation of harmonic Langmuir mode by beam-plasma instability. *Physics of Plasmas*, 9(1):96–110, 2002.
- [12] YOON, P. H. et al. Harmonic Langmuir waves. I. Nonlinear dispersion relation. *Physics of Plasmas*, 10(2):364–372, 2003.
- [13] GAELZER, R. et al. Harmonic Langmuir waves. II. Turbulence spectrum. *Physics of Plasmas*, 10(2):373–381, 2003.
- [14] UMEDA, T. et al. Harmonic Langmuir waves. III. Vlasov simulation. *Physics of Plasmas*, 10(2):382–391, 2003.
- [15] BAK, P. *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*. Springer, 1996.
- [16] JENSEN, H. J. *Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems*. Cambridge lectures notes in physics. Cambridge University Press, 1998.
- [17] BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality: An explanation of $1/f$ noise. *Physical Review Letters*, 59(4):381–384, 1987.
- [18] BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality. *Physical Review A*, 38(1):364–374, 1988.
- [19] TANG, C.; BAK, P. Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena. *Physical Review Letters*, 60(23):2347–2350, 1988.
- [20] CHRISTENSEN, K.; OLAMI, Z.; BAK, P. Deterministic $1/f$ noise in nonconservative models of self-organized criticality. *Physical Review Letters*, 68(16):2417–2420, 1992.
- [21] SATTIN, F.; BAIESI, M. Self-organized-criticality model consistent with statistical properties of edge turbulence in a fusion plasma. *Physical Review Letters*, 96:105005, 2006.
- [22] FRISH, U. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995.

- [23] KROMMES, J. A. Fundamental statistical descriptions of plasma turbulence in magnetic fields. *Physics Reports*, 360, 2002.
- [24] APPERT, K.; TRAN, T. M.; VACLAVIK, J. Two-dimensional quasi-linear evolution of the electron-beam-plasma instability. *Physical Review Letters*, 37(9):502–504, 1976.
- [25] ISHIHARA, O.; HIROSE, A. Quasilinear mechanism of high-energy ion-tail formation in the ion-acoustic instability. *Physical Review Letters*, 46(12):771–774, 1981.
- [26] ISHIHARA, O.; HIROSE, A. Quasilinear evolution of current-driven ion-acoustic instability in a magnetic field. *Physical Review Letters*, 50(22):1783–1786, 1983.
- [27] HANSSEN, A. et al. Numerical test of the weak turbulence approximation to ionospheric Langmuir turbulence. *Journal of Geophysical Research*, 97(A8):12073–12091, 1992.
- [28] ROBINSON, P. A. Nonlinear wave collapse and strong turbulence. *Reviews of Modern Physics*, 69(2):507–553, 1997.
- [29] KONTAR, E. P.; PÉCSELI, H. L. Nonlinear development of electron-beam-driven weak turbulence in an inhomogeneous plasma. *Physical Review E*, 65:066408, 2002.
- [30] LI, B. et al. Dynamics of beam-driven langmuir and ion-acoustic waves including electrostatic decay. *Physics of Plasmas*, v10(n7), 2003.
- [31] TSYTOVICH, V. N. *Theory of turbulent plasma*. Studies in soviet science. Consultants Bureau, 1977.
- [32] SAGDEEV, R. Z.; GALEEV, A. A. *Nonlinear plasma theory*. Frontiers in Physics. W. A. Benjamin, Inc., 1969.
- [33] DAVIDSON, R. C. *Methods in nonlinear plasma theory*. Academic Press, 1972.
- [34] ALEXEFF, I. et al. Hot-electron plasma by beam-plasma interaction. *Physical Review Letters*, 10(7), 1963.
- [35] GROGNARD, R. J.- M. Numerical simulation of the weak turbulence excited by a beam of electrons in the interplanetary plasma. *Solar Physics*, 81:173–180, 1982.

- [36] WHELAN, D. A.; STENZEL, R. L. Electromagnetic radiation and nonlinear energy flow in an electron beam-plasma system. *Physics of Fluids*, 28(3):958–970, 1985.
- [37] CAIRNS, I. H. Electrostatic wave generation above and below the plasma frequency by electron beams. *Physics of Fluids B*, 1(1):204–213, 1989.
- [38] THEJAPPA, G.; MACDOWALL, R. J. Evidence for strong and weak turbulent processes in the source region of a local type III radio burst. *The Astrophysical Journal*, 498:465–478, 1998.
- [39] ALVES, M. V. et al. A theory of the fundamental plasma emission of type-III solar radio bursts. *Astronomy and Astrophysics*, 390:351–357, 2002.
- [40] RIZZATO, F. B. et al. Langmuir turbulence and solar radio bursts. *Space Science Reviews*, 107:507–514, 2003.
- [41] MIZUNO, K. et al. Investigation of ion-acoustic-decay-instability thresholds in laser-plasma interactions. *Physical Review Letters*, 65(4):428–431, 1990.
- [42] ZAKHAROV, V. E. Collapse of Langmuir waves. *Soviet Physics JETP*, 35(5):908–914, 1972.
- [43] * ZIEBELL, L. F. et al. Two-dimensional nonlinear dynamics of beam-plasma instability. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 50:085011, 2008.
- [44] Yi, S. et al. Simulation and theory for two-dimensional beam-plasma instability. *Physics of Plasmas*, 17(122318), 2010.
- [45] * PAVAN, J. et al. Two-dimensional nonlinear dynamics of bidirectional beam-plasma instability. *Journal of Geophysical Research*, 114:A01106, 2009a.
- [46] VOCKS, C. et al. Electron halo and strahl formation in the solar wind by resonant interaction with whistler waves. *The Astrophysical Journal*, 627:540–549, 2005.
- [47] GAELZER, R. et al. Asymmetric solar wind electron superthermal distributions. *The Astrophysical Journal*, 677:676–682, 2008.
- [48] LEUBNER, M. P. Wave induced suprathermal tail generation of electron velocity space distributions. *Planetary and Space Science*, 48:133–141, 2000.

- [49] YOON, P. H.; RHEE, T.; RYU, C-. M. Self-consistent generation of superthermal electrons by beam-plasma interaction. *Physical Review Letters*, 95:215003, 2005.
- [50] RYU, C-. M. et al. Turbulent acceleration of superthermal electrons. *Physics of Plasmas*, 14:100701, 2007.
- [51] * PAVAN, J. et al. Generation of quasi-isotropic electron population during non-linear beam-plasma interaction. *Journal of Geophysical Research*, 115(A01103), 2010a.
- [52] TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1/2), 1988.
- [53] LEUBNER, M. P. A nonextensive entropy approach to kappa-distributions. *Astrophysics and Space Science*, 282:573–579, 2002.
- [54] LEUBNER, M. P. Fundamental issues on kappa-distributions in space plasmas and interplanetary proton distributions. *Physics of Plasmas*, 11(4):1308–1316, 2004.
- [55] LEUBNER, M. P. Core-halo distribution functions: A natural equilibrium state in generalized thermostatics. *The Astrophysical Journal*, 604:469–478, 2004.
- [56] LEUBNER, M. P.; VÖRÖS, Z. A nonextensive entropy path to probability distributions in solar wind turbulence. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 12:171–180, 2005.
- [57] RYU, C. M. et al. Simulation of asymmetric solar wind electron distributions. *Physics of Plasmas*, 16(062902), 2009.
- [58] CHINCHILLA, T. N.; VINÃS, A. F. Solar wind electron distribution functions inside magnetic clouds. *Journal of Geophysical Research*, 113(A02105), 2008.
- [59] SCUDDER, J. D.; OLBERT, S. A theory of local and global processes which affect solar wind electrons 1. The origin of typical 1 AU velocity distribution functions - Steady state theory. *Journal of Geophysical Research*, 84(A6):2755–2772, 1979.
- [60] DORELLI, J. C.; SCUDDER, J. D. Electron heat flow in the solar corona: Implications of non-Maxwellian velocity distributions, the solar gravitational field, and Coulomb collisions. *Journal of Geophysical Research*, 108(A7):1294, 2003.

- [61] CHIAN, A. C.-L.; ABALDE, J. R. Nonlinear modulation of Langmuir waves by ion-acoustic waves in the interplanetary medium and planetary foreshocks. *Astronomy and Astrophysics*, 298:L9–L12, 1995.
- [62] * PAVAN, J. et al. Decay of beam-driven Langmuir wave into ion-acoustic turbulence in two dimensions. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51(095011), 2009b.
- [63] HENRI, P. et al. Evidence for wave coupling in type III emissions. *Journal of Geophysical Research*, 114(A03103), 2009.
- [64] L'vov, V. S. et al. Statistical description of acoustic turbulence. *Physical Review B*, 56(1), 1997.
- [65] * PAVAN, J. et al. Ionospheric ion-acoustic enhancements by turbulent counter-streaming electron beam-plasma interaction. *Journal of Geophysical Research*, 115(A02310), 2010b.
- [66] KONTAR, E. P.; PÉCSELI, H. L. Nonlinear wave interactions as a model for naturally enhanced ion acoustic lines in the ionosphere. *Geophysical Research Letters*, 32(L05110), 2005.
- [67] EDNEY, S. D.; ROBINSON, P. A. Analytic treatment of weak-turbulence Langmuir wave electrostatic decay. *Physics of Plasmas*, 8(2), 2001.
- [68] BURKE, W. J.; SILENVITCH, M.; HARDY, D. A. Observations of small-scale auroral vortices by the S3-2 satellite. *Journal of Geophysical Research*, 88(A4), 1983.
- [69] SHULTHESS, F. S.-; MAURICE, J.-P. St-. Naturally enhanced ion-acoustic spectra and their interpretation. *Surveys in Geophysics*, 22:55–92, 2001.
- [70] RIETVELD, M. T.; COLLIS, P. N.; MAURICE, J.-P. St-. Naturally enhanced ion acoustic waves in the auroral ionosphere observed with the EISCAT 933-MHz radar. *Journal of Geophysical Research*, 96(A11):19291–19305, 1991.
- [71] FOSTER, J. C. et al. Radar observations of the onset of current driven instabilities in the topside ionosphere. *Geophysical Research Letters*, 15(2):160–163, 1988.

- [72] BLOCK, L. P.; FÄLTHAMMAR, C. -G. The role of magnetic-field-aligned electric fields in auroral acceleration. *Journal of Geophysical Research*, 95(A5):5877–5888, 1990.
- [73] FORME, F. R. E.; FONTAINE, D.; WAHLUND, J. E. Two different types of enhanced ion acoustic fluctuations observed in the upper ionosphere. *Journal of Geophysical Research*, 100(A8):14625–14636, 1995.
- [74] FORME, F. R. E. A new interpretation of the origin of enhanced ion acoustic fluctuations in the upper ionosphere. *Geophysical Research Letters*, 20(21):2347–2350, 1993.
- [75] FORME, F. R. E. Parametric decay of beam-driven Langmuir wave and enhanced ion-acoustic fluctuations in the ionosphere: A weak turbulence approach. *Annales Geophysicae*, 17:1171–1181, 1999.
- [76] FORME, F. R. E.; FONTAINE, D. Enhanced ion acoustic fluctuations and ion outflows. *Annales Geophysicae*, 17:182–189, 1999.
- [77] GUIO, P.; FORME, F. Zakharov simulations of Langmuir turbulence: Effects on the ion-acoustic waves in incoherent scattering. *Physics of Plasmas*, 13:122902, 2006.
- [78] COLLIS, P. N. et al. EISCAT radar observations of enhanced incoherent scatter spectra: Their relation to red aurora and field-aligned currents. *Geophysical Research Letters*, 18(6):1031–1034, 1991.
- [79] BLIXT, E. M. et al. Dynamic rayed aurora and enhanced ion-acoustic radar echoes. *Annales Geophysicae*, 23:3–11, 2005.
- [80] MCFADDEN, J. P.; CARLSON, C. W.; ERGUN, R. E. Microstructure of the auroral acceleration region as observed by FAST. *Journal of Geophysical Research*, 104(A7):14453–14480, 1999.
- [81] WAHLUND, J. E. et al. Scattering of electromagnetic waves from a plasma: Enhanced ion acoustic fluctuations due to ion-ion two-stream instabilities. *Geophysical Research Letters*, 19(19):1919–1922, 1992.

- [82] NEUBERT, T.; CHRISTIANSEN, F. Small-scale, field-aligned currents at the top-side ionosphere. *Geophysical Research Letters*, 30(19):2010, 2003.
- [83] CABRIT, B.; OPGENOORTH, H.; KOFMAN, W. Comparison between EISCAT UHF and VHF backscattering. *Journal of Geophysical Research*, 101(A2):2369–2376, 1996.
- [84] BYTHROW, P. F. et al. Earthward directed high-density Birkeland currents observed by HILAT. *Journal of Geophysical Research*, 89(A10):9114–9118, 1984.
- [85] DUBOIS, D. F.; ROSE, H. A.; RUSSELL, D. Coexistence of parametric decay cascades and caviton collapse at subcritical densities. *Physical Review Letters*, 66(15), 1991.
- [86] GRYDELAND, T. et al. Interferometric observations of filamentary structures associated with plasma instability in the auroral ionosphere. *Geophysical Research Letters*, 30(6):1338, 2003.
- [87] BUCHERT, S. C. et al. Naturally enhanced ion-acoustic lines seen with the EISCAT Svalbard radar. *Advances in Space Research*, 23(10):1699–1704, 1999.
- [88] FORME, F.; OGAWA, Y.; BUCHERT, S. C. Naturally enhanced ion acoustic fluctuations seen at different wavelengths. *Journal of Geophysical Research*, 106(A10):21503–21515, 2001.
- [89] * ZIEBELL, L. F. et al. Two-dimensional quasilinear beam-plasma instability in inhomogeneous medium. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2011a, accepted.
- [90] KONTAR, E. P. Dynamics of electron beams in the inhomogeneous solar corona plasma. *Solar Physics*, 202, 2001.
- [91] * ZIEBELL, L. F. et al. Nonlinear evolution of beam-plasma instability in inhomogeneous medium. *The Astrophysical Journal*, 727(16), 2011b.
- [92] MELROSE, D. B. Fundamental emission for type III bursts in the interplanetary medium: The role of ion-sound turbulence. *Solar Physics*, 79, 1982.

- [93] * ZIEBELL, L. F. et al. Ion-acoustic enhancements generated by beam-plasma instability in an auroral cavity. *Journal of Geophysical Research*, 116(A03320), 2011c.
- [94] * PAVAN, J.; YOON, P. H.; UMEDA, T. Quasilinear theory and simulation of Buneman instability. *Physics of Plasmas*, 2011, in press.
- [95] AMANO, T.; HOSHINO, M. Nonlinear evolution of Buneman instability and its implication for electron acceleration in high Mach number collisionless perpendicular shocks. *Physics of Plasmas*, 16(102901), 2009.
- [96] CHE, H. et al. Nonlinear development of streaming instabilities in strongly magnetized plasma. *Physical Review Letters*, 102(145004), 2009.
- [97] DAVIDSON, R. C. et al. Electron heating by electron-ion beam instabilities. *Physical Review Letters*, 24(11), 1970.
- [98] ISHIHARA, O.; HIROSE, A.; LANGDON, A. B. Nonlinear evolution of Buneman instability. *Physics of Fluids*, 24(3), 1981.
- [99] MELROSE, D. B. *Instabilities in space and laboratory plasmas*. Cambridge University Press, 1986.
- [100] LAMPE, M. et al. Two-dimensional study of electron-ion streaming instabilities. *The Physics of Fluids*, 17(2), 1974.
- [101] NAKAMURA, T. K.; HOSHINO, M. One-over-polynomial approximation for linear kinetic dispersion and its application to relativistic cyclotron resonance. *Physics of Plasmas*, 5(10), 1998.
- [102] TJULIN, A.; ERIKSSON, A. I.; ANDRÉ, M. Physical interpretation of the Padé approximation of the plasma dispersion function. *Journal of Plasma Physics*, 64(3), 2000.
- [103] ALEXANDROVA, O. et al. Universality of solar-wind turbulent spectrum from MHD to electron scales. *Physical Review Letters*, 103(165003), 2009.
- [104] SAHRAOUI, F. et al. Evidence of cascade and dissipation of solar-wind turbulence at the electron gyroscale. *Physical Review Letters*, 102(231102), 2009.

- [105] LEMAIRE, J. F. et al. History of kinetic polar wind models and early observations. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 69, 2007.
- [106] MARSCH, E. Kinetic physics of the solar corona and solar wind. *Living Reviews in Solar Physics*, 3(1), 2006.
- [107] PIERRARD, V.; MAKSIMOVIC, M.; LEMAIRE, J. Core, halo and strahl electrons in the solar wind. *Astrophysics and Space Science*, 277, 2001.
- [108] PIERRARD, V.; MAKSIMOVIC, M.; LEMAIRE, J. Electron velocity distribution functions from the solar wind to the corona. *Journal of Geophysical Research*, 104(A8), 1999.
- [109] VOCKS, C. A kinetic model for ions in the solar corona including wave-particle interactions and Coulomb collisions. *The Astrophysical Journal*, 568, 2002.
- [110] VOCKS, C.; MANN, G. Generation of suprathermal electrons by resonant wave-particle interaction in the solar corona and wind. *The Astrophysical Journal*, 593, 2003.
- [111] FARAGÓ, I., GNANDT, B.; HAVASI, Á. Additive and iterative operator splitting methods and their numerical investigation. *Computers and Mathematics with Applications*, 55, 2008.
- [112] HAMILTON, R. J.; LU, E. T.; PETROSIAN, V. Numerical solution of the time-dependent kinetic equation for electrons in magnetized plasmas. *The Astrophysical Journal*, 354, 1990.
- [113] VINÃS, A. F. et al. Whistler waves driven by anisotropic strahl velocity distributions: Cluster observations. *AIP Conference Proceedings*, 1216(1), 2010.
- [114] ŠTVERÁK, Š. et al. Radial evolution of nonthermal electron populations in the low-latitude solar wind: Helios, Cluster, and Ulysses observations. *Journal of Geophysical Research*, 114(A05104), 2009.