

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA

**Jogos evolutivos:
efeitos de difusão em redes complexas**

Gabriel Antônio Canova

*Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao curso de Bacharelado
em Física, do Instituto de Física, da
Universidade Federal do Rio Grande
do Sul, como um dos pré-requisitos
para a obtenção do grau de Bacharel
em Física.*

Orientador: Prof. Dr. Jeferson J. Arenzon

Porto Alegre

2011

Sumário

Resumo	3
Abstract	4
1 Introdução	5
2 O Modelo	7
2.1 Dilema do Prisioneiro	7
2.2 Redes	9
2.3 Dinâmica	10
2.3.1 Metodologia	10
2.4 Dilema do Prisioneiro em diferentes redes	10
2.4.1 Rede quadrada sem difusão: $\rho = 1, \varepsilon = 1$	10
2.4.2 Rede quadrada com difusão: $m \in [0, 1], \varepsilon = 1$	11
2.4.3 Rede aleatória: $\varepsilon = 0$	12
3 Resultados	14
3.1 Cooperação em função do tempo	14
3.2 Cooperação em função da densidade da rede	15
3.3 Cooperação em função da divisão de ganhos	17
4 Conclusões e Perspectivas	27

Resumo

Um problema fundamental na teoria de jogos é obter as condições mínimas para a sustentabilidade da cooperação entre os indivíduos de uma população. O modelo básico neste contexto é o Dilema do Prisioneiro.

Embora os indivíduos de uma população vivam e se movimentem no espaço euclidiano, suas redes de contatos podem ser muito mais complexas. Se os agentes são muito simples, incapazes de fazer conexões de longo alcance, ambas as redes se limitam à vizinhança imediata e, conseqüentemente, a rede de contatos coincide com o espaço euclidiano. Por outro lado, como as interações sociais são em geral mais intrincadas, as duas redes podem diferir e outras estruturas hierárquicas são possíveis, como por exemplo, redes do tipo mundo pequeno ou livres de escala, as quais podem ter também um elemento de aleatoriedade.

O caso de difusão aleatória quando as duas redes, de contato e movimento, coincidem foi previamente considerado na literatura. Neste trabalho, o objetivo é explorar o que ocorre quando ambas diferem. Assim, consideramos indivíduos com duas estratégias possíveis, cooperar ou não, dispostos em uma rede quadrada na qual podem interagir com seus vizinhos mais próximos. Além disso, na presença de mobilidade, os jogadores podem se deslocar para sítios vizinhos vazios. Por outro lado, a rede de interações, que inclui os vizinhos próximos, é mais complexa e inclui também conexões de longo alcance. Neste trabalho estudamos o caso em que estas interações de longo alcance são escolhidas aleatoriamente, mostrando que mesmo nesta situação simples o comportamento do sistema é bastante mais interessante do que o caso em que as redes coincidem.

Abstract

A fundamental problem in game theory is to obtain the minimum conditions for sustainable cooperation between individuals of a population. The basic model in this context is the Prisoner's Dilemma.

Although individuals of a population live and move around in the usual Euclidean space, their contact network may be much more complex. If agents are very simple, unable to do long-range connections, both diffusion and contacts are limited to the immediate neighbourhood and, consequently, the contact network and the diffusion space coincide. However, as social interactions are in general more intricate, the two networks may differ, and other hierarchical structures are possible, such as small world networks of the type or free scale, which may also have an element of randomness.

The case of random diffusion when the two networks, contact and movement, coincide was previously considered in the literature. In this work, the goal is to explore what happens when the two networks are disentangled. Thus, we consider individuals with two possible strategies, cooperate or not, arranged in a square lattice and interacting with their nearest neighbors. Moreover, when mobility is present, the players may move to neighbouring empty sites. On the other hand, the interaction network, that also includes nearest neighbours, is more complex and involves also long range connections. In this work we studied the case when the long range interactions are chosen at random, showing that even in this very simple situation the system behavior is much more interesting than the case of matching networks.

Capítulo 1

Introdução

A teoria evolutiva de jogos se propõe ao estudo da dinâmica evolutiva de uma população quando a adaptação de cada espécie, que denominamos por *fitness*, depende da sua frequência e da frequência das demais na população total [1]. Para lidar com situações onde existem decisões conflitantes a serem tomadas e que envolvem interesses individuais, consideramos um jogo, o qual, para estar completo, precisa definir três características: os jogadores participantes, as possíveis decisões que cada um pode tomar (estratégias) e o ganho oriundo da combinação de estratégias escolhidas (*payoff*) [2]. No contexto da teoria evolutiva de jogos, o *payoff* acumulado desses confrontos determina a capacidade reprodutiva de cada espécie. Estratégias que acumulam mais *payoff*, sendo portanto melhor adaptadas, se reproduzem mais rápido e em maior quantidade e terminam por substituir aquelas menos adaptadas.

Em particular, um problema relevante para o qual ainda não existe uma solução completa é a origem e manutenção da cooperação em populações biológicas, mesmo composta de indivíduos tão simples quanto vírus [3]. Vamos aqui considerar o caso em que as interações são entre pares de indivíduos e que estes possuem apenas duas estratégias, cooperar, C , ou não-cooperar, D . Nesse caso, os ganhos individuais são dados pela matriz (1.1):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \end{array} \quad (1.1)$$

Quando dois indivíduos escolhem C , ambos ganham uma recompensa R , se um joga D e outro C , o primeiro ganha T e o segundo S , e quando os dois jogam D , ambos ganham P . Dependendo da relação entre os valores dos elementos da matriz (1.1), diferentes tipos de jogos podem ser definidos. Em nosso trabalho estudamos um caso particular chamado de Dilema do Prisioneiro, onde $T > R > P > S$.

Em 1978, Robert Axelrod, um cientista político, criou um torneio para encontrar a melhor regra para o Dilema do Prisioneiro, aberto a vários cientistas do mundo todo. Cada um submetia sua própria estratégia, a qual era utilizada em repetidos jogos contra todas as outras estratégias e acumulavam seus respectivos *payoffs*. A estratégia campeã, a que acumulou o maior *payoff*, foi a chamada *Olho por olho, dente por dente* (*TFT*, *tit for tat*). Um indivíduo que joga *TFT*, independentemente do que seu oponente jogar, sempre começa cooperando e assim procede até que seu adversário faça o mesmo. Caso seu rival não-coopere, o jogador *TFT* retalia e passa a não-cooperar até que ele mude de ideia novamente. Este mecanismo da estratégia *TFT*, que envolve memória de encontros anteriores, cria uma forma de proteção contra a exploração por não-cooperadores e também um estímulo à cooperação. Apesar dessas regras da estratégia *TFT* serem relativamente simples, comportamento cooperativo é observado mesmo quando os indivíduos possuem estratégias ainda mais simples, como cooperar ou não-cooperar incondicionalmente, de modo que devemos procurar uma explicação que não envolva reciprocidade, direta ou indireta, ou relações de parentesco, pois tais mecanismos envolvem memória de encontros prévios [3–10]. Uma possibilidade é consideramos populações espacialmente estruturadas, ou seja, os jogadores não mais combatem todos entre si, mas apenas com seus vizinhos imediatos, definidos pelo tipo de estrutura em questão [11–27]). Sendo a população estruturada, um problema importante aparece na presença de agentes móveis: é possível ainda manter a cooperação [28, 29]?

Neste trabalho de conclusão tivemos como objetivo estudar quais são os efeitos sobre o comportamento cooperativo quando consideramos uma população de indivíduos disposta em uma rede euclidiana onde há difusão. Além disso, é possível aos indivíduos fazerem conexões de longo alcance entre si. Analisaremos como a cooperação é dependente dos parâmetros que definem o modelo, tais como a mobilidade dos indivíduos, a densidade da rede euclidiana e o peso relativo da vizinhança local em relação à não local.

O trabalho é dividido como segue. Após este capítulo de introdução, no Cap. 2, definimos o Dilema do Prisioneiro, a estrutura do espaço de interações e mobilidade, bem como o método de simulação empregado. No Cap. 3, discutimos os resultados obtidos nas simulações em diferentes regiões do espaço de parâmetros. Finalmente, no Cap. 4, apresentamos as conclusões parciais obtidas até o momento sobre o comportamento cooperativo em nosso modelo e as perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

O Modelo

2.1 Dilema do Prisioneiro

Dada a matriz (1.1), o jogo em questão é o Dilema do Prisioneiro se $T > R > P > S$. A tentação em não cooperar, T , é maior que a recompensa por cooperação mútua, R , que é maior que a punição, P , por não cooperação mútua, que supera o *payoff* do perdedor, S . Para complementar a definição do jogo é necessário que $R > (T + S)/2$. Do contrário, em um jogo repetitivo, se um jogador alternasse entre cooperar e não-cooperar ganharia um *payoff* maior do que se apenas cooperasse. Podemos simplificar a matriz (1.1), $T = b, R = 1$ e $P = S = 0$, ficando com apenas um parâmetro, a tentação $b > 1$. Assim temos

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad (2.1)$$

Logo, se o oponente escolhe C , é melhor para um indivíduo ser D , pois $b > 1$. Porém, seu adversário pode pensar da mesma forma e jogar D . No final, ambos não ganham nada, mas se tivessem cooperado, teriam ganho mais. O paradoxo vem porque é claro que a melhor estratégia é D , mas assim ambos perdem mais do que se cooperassem! O problema é então tentar entender o que permite que a cooperatividade exista em uma população. Em nosso modelo consideramos jogadores incondicionais e sem qualquer tipo de memória ou conhecimento prévio da estratégia de seu adversário. Cada indivíduo interage com todos os seus vizinhos e acumula um *payoff* que será então comparado aos *payoffs* de seus vizinhos. Assim, na etapa de reprodução, o indivíduo mais bem sucedido na vizinhança imediata do sítio i , coloca ali um seu descendente.

Para uma população de indivíduos infinitamente grande onde todos interagem entre si (campo médio) e com n estratégias presentes, a densidade de cada espécie obedece à equação diferencial conhecida como equação do replicador:

$$\dot{\rho}_i = \rho_i \left(f_i - \sum_{i=1}^n \rho_i f_i \right) \quad (2.2)$$

onde $f_i = \sum_j \rho_j a_{ij}$ é o *fitness* da estratégia i e a_{ij} são os elementos da matriz de *payoff*. O segundo termo do lado direito da equação representa o *fitness* médio da população. Também é necessário que $\sum_i \rho_i = 1$. A eq. 2.2 nos diz que a taxa de variação na densidade de uma espécie é proporcional a sua quantidade na população, com um coeficiente proporcional à diferença entre o *fitness* da espécie e o *fitness* médio da população. Assim, espécies cujo *fitness* é maior (menor) do que a média aumentarão (diminuirão) sua presença na população. O *fitness* para as estratégias C e D é

$$\begin{aligned} f_C &= R\rho_C + S\rho_D \\ f_D &= T\rho_C + P\rho_D. \end{aligned}$$

Logo

$$f_D - f_C = (T - R)\rho_C + (P - S)\rho_D > 0$$

pois $T > R$ e $P > S$, e concluímos que o *fitness* dos não-cooperadores é sempre maior do que o dos cooperadores. Além disso, o *fitness* médio é

$$\sum_{i=1}^n \rho_i f_i = \rho_C(R\rho_C + S\rho_D) + \rho_D(T\rho_C + P\rho_D)$$

logo a eq. 2.2 pode ser escrita como

$$\dot{\rho}_C = -\rho_C\rho_D [\rho_C(T - R) + \rho_D(P - S)]. \quad (2.3)$$

Seguindo o mesmo raciocínio feito anteriormente, observamos que o termo entre colchetes é sempre positivo, então $\dot{\rho}_C < 0$. Analogamente, repetindo o cálculo para a estratégia D , obtemos $\dot{\rho}_D > 0$. Portanto, concluímos que a densidade de não-cooperadores cresce, enquanto que a de cooperadores decresce. Este resultado, relativo à predominância de não-cooperadores, é válido quando não levamos em conta possíveis correlações espaciais entre os indivíduos da população. Todavia, quando levamos em conta esses efeitos, por exemplo, em jogos em redes onde os indivíduos interagem somente com alguns vizinhos, a existência de cooperadores se torna possível [1].

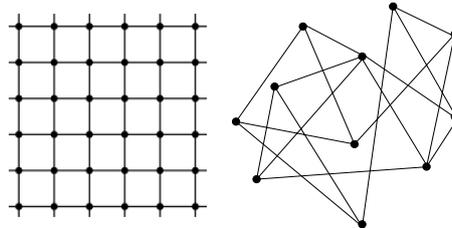
2.2 Redes

No mundo real, as interações entre indivíduos de uma população podem ser de considerável complexidade. Não se limitam apenas ao espaço euclidiano onde vivem e se movimentam, pois há, certamente, outras formas de interação que não estão relacionadas com proximidade geográfica. Portanto, neste trabalho, tivemos como objetivo estudar o que ocorre quando adicionamos conexões de longo alcance entre agentes além daquelas já existentes no espaço local próximo. Estas conexões não-locais poderiam ser entendidas como um tipo de grau de parentesco entre indivíduos, redes sociais, etc. Dessa maneira, diferentemente dos trabalhos anteriores [28, 29], as redes de contatos e movimento não mais coincidem.

A rede local onde os indivíduos estão dispostos, com ocupação máxima de um agente por sítio da rede, e se movimentam é uma rede quadrada de lado L . Para diminuirmos os efeitos de borda utilizamos condições de contorno periódicas, ou seja, a rede é um toro. Assim, não há ponto preferencial, todos os sítios são equivalentes.

As interações locais ocorrem entre agentes que possam estar localizados nos sítios vizinhos mais próximos entre si. Como o número total de jogadores, N , pode não preencher totalmente a rede, definimos a densidade como $\rho = N/L^2$. Enquanto isso, a densidade de cooperadores é definida como $\rho_C = N_C/N$, onde N_C é número de cooperadores presentes na população. A existência de espaços vazios permite estudar os efeitos da mobilidade dos indivíduos: em cada passo de tempo um indivíduo escolhe aleatoriamente um de seus sítios vizinhos, e se este estiver vazio, então o jogador migrará para ele com probabilidade m . Quando $\rho = 1$ não há difusão, pois todos os sítios estão ocupados.

A rede não-local é constituída por conexões aleatórias de longo alcance entre os indivíduos. Para construí-la partimos de uma rede unidimensional com condições periódicas de contorno (anel) e N sítios. Cada sítio conecta-se, tanto à esquerda como à direita, com seus primeiro e segundo vizinhos, formando, portanto, 4 conexões. Para criarmos as conexões aleatórias, tomamos as conexões existentes entre pares de sítios e as reconectamos em outros sítios escolhidos de forma aleatória. Dessa maneira, garantimos que a rede não se torne desconexa e seja regular, ou seja, todos os sítios possuem o mesmo número de ligações. Abaixo temos exemplos das duas redes: rede quadrada à esquerda e rede aleatória à direita.



2.3 Dinâmica

Como os indivíduos realizam combates nas duas redes, há um *payoff* proveniente de cada uma delas. Definimos o *payoff* total por jogador, P_i , como uma média ponderada da contribuição das duas redes

$$P_i = \varepsilon p_i^L + (1 - \varepsilon) p_i^{NL} \quad (2.4)$$

onde $\varepsilon \in [0, 1]$ nos dá o peso relativo das conexões locais e não-locais, p_i^L e p_i^{NL} são os *payoffs* devidos às conexões locais e não-locais, respectivamente. O parâmetro ε também é importante na etapa de reprodução: com probabilidade ε , um jogador compara seu *payoff* com seus vizinhos da rede quadrada e com probabilidade $1 - \varepsilon$, com seus vizinhos da aleatória. Então, quando $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = 0$, obtemos, respectivamente, os resultados para somente a rede quadrada ou aleatória. Resumindo, ε é o percentual de participação da rede quadrada no jogo.

2.3.1 Metodologia

O estado inicial é preparado dispondo aleatoriamente cooperadores e não-cooperadores em igual quantidade nos sítios da rede quadrada, de modo que a densidade total de jogadores seja ρ . Utilizamos nas simulações tamanhos entre $L = 300$ e 500 , pois a partir desses valores os efeitos da rede finita são pequenos. Um passo de tempo corresponde à realização, tomando todos os agentes em paralelo, das etapas de combate, acúmulo do *payoff* e reprodução (atualização) das estratégias e, em seguida, tomando os agentes serialmente, da etapa de difusão. O transiente inicial (20000 passos) é descartado e, após o sistema atingir o estado estacionário, as medidas são realizadas. Para reduzirmos os efeitos das flutuações, o valor médio da densidade de cooperadores foi obtido pela média das amostragens de 10^5 passos.

2.4 Dilema do Prisioneiro em diferentes redes

2.4.1 Rede quadrada sem difusão: $\rho = 1$, $\varepsilon = 1$

Os resultados para a cooperação na rede quadrada, obtidos através de nossos programas, são mostrados na figura 2.1. Expressamos a densidade de cooperadores como função da tentação (b). Vemos que existem três regiões delimitadas por b , associadas aos possíveis valores de *payoff* para indivíduos C e D . Os possíveis valores para um indivíduo D são $\{0, b, 2b, 3b, 4b\}$, enquanto para um indivíduo C são $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Como os valores são discretos, as transições ocorrem para determinados valores de b , quando $P_D = P_C$. Por exemplo, se um jogador D tiver 3 vizinhos C , seu *payoff*

será $3b$. Se um jogador C tiver 4 vizinhos C , então seu *payoff* será 4. Para que $P_D > P_C$, temos que ter $3b > 4$, logo $b > 4/3$. Vemos que a primeira transição ocorre em $b = 4/3$ e a segunda em $b = 3/2$. Em nosso trabalho utilizamos $b = 1.4$, que corresponde à região II. Assim, quando $\rho = 1$ e $\varepsilon = 1$, obtemos $\rho_C \approx 0.39$ [11]. A região II é a única que possui uma fração considerável de sítios ativos, ou seja, sítios que trocam de estratégia ao longo do tempo. Para as demais regiões, I e III, após passado o tempo transiente, o sistema se estabiliza e sobram pouquíssimos sítios que oscilam suas estratégias a cada passo.

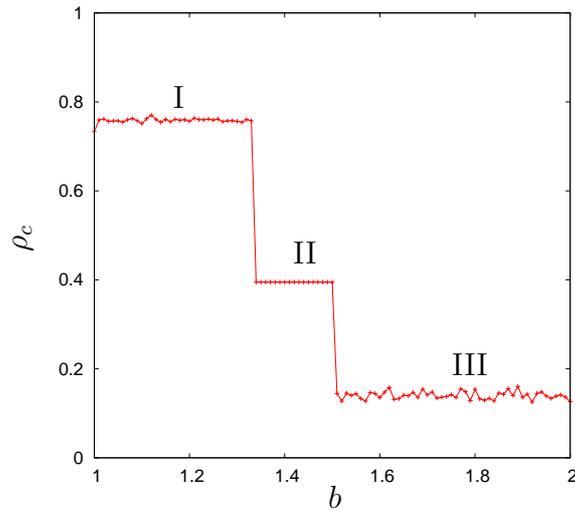


Figura 2.1: Densidade de cooperadores em função da tentação b . A fração de cooperadores diminui a medida que a tentação aumenta.

2.4.2 Rede quadrada com difusão: $m \in [0, 1]$, $\varepsilon = 1$

Anteriormente, Vainstein et al [28,29] estudaram o caso onde a rede de contatos coincide com a rede local na presença de difusão. Como controle de nossos programas, reproduzimos os principais resultados, mostrados na figura 2.2.

Para diferentes valores da mobilidade m , a figura 2.2 mostra como a densidade de cooperadores (ρ_C) varia com a densidade total da rede (ρ), após o sistema atingir o estado estacionário. Também há comparação com o caso de extrema viscosidade $m = 0$ [20]. Podemos ver que a cooperação aparece acima de um mínimo que é dependente da mobilidade e da densidade da rede. Abaixo desse mínimo, os não-cooperadores dominam ($\rho_C = 0$). Para baixas densidades, qualquer valor de

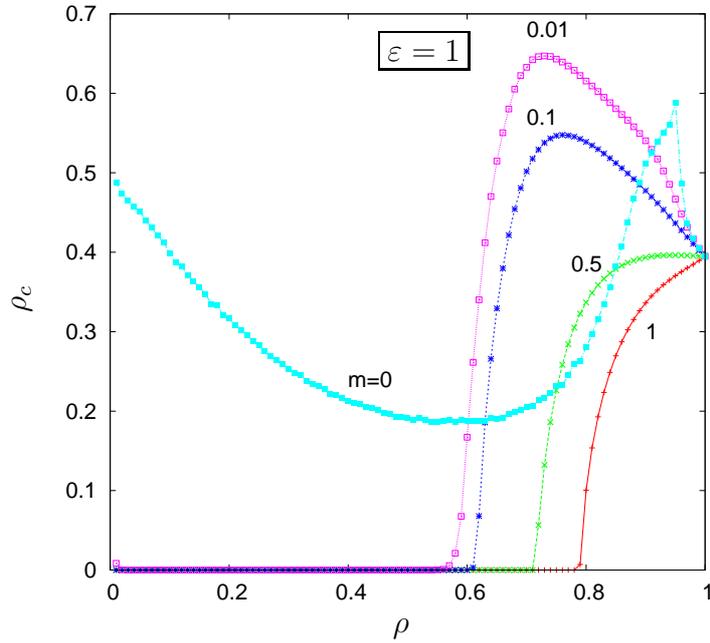


Figura 2.2: Densidade de cooperadores em função da densidade da rede para diferentes valores da mobilidade [28].

mobilidade destrói a cooperação. Quando $m = 0$, clusters isolados de cooperadores formados pela condição inicial conseguem sobreviver, mas a medida que m aumenta, caminhantes aleatórios começam a invadir esses pequenos grupos, destruindo assim a cooperação. Apesar disso, há cooperação para grandes valores de m (por exemplo $m = 1$). Para qualquer densidade, $\rho_c(m = 0) > \rho_c(m = 1)$. Interessantemente, para valores intermediários de mobilidade a cooperação é reforçada quando comparada ao caso viscoso. Portanto, as principais conclusões são: primeira, é possível existir cooperação na presença de mobilidade quando o espaço disponível da rede for um pouco reduzido, segundo, para valores intermediários de mobilidade, a cooperação é reforçada.

2.4.3 Rede aleatória: $\varepsilon = 0$

Na fig. 2.3 mostramos como a densidade de cooperadores varia com a tentação. Novamente, há três regiões com diferentes valores para a cooperação. As transições ocorrem para os mesmos valores de b do caso anterior para rede quadrada. Isso deve-se ao fato de que a rede aleatória é regular como a quadrada, ou seja, cada

indivíduo possui quatro vizinhos. Então, as configurações de vizinhança são as mesmas. Mas ao contrário da rede quadrada, a aleatória não possui estrutura, diminuindo a cooperação, a qual depende da formação de grupos para evitar a exploração por não-cooperadores. Dessa maneira, quando $\varepsilon = 0$, obtemos $\rho_C \approx 0.023$ na região II [27].

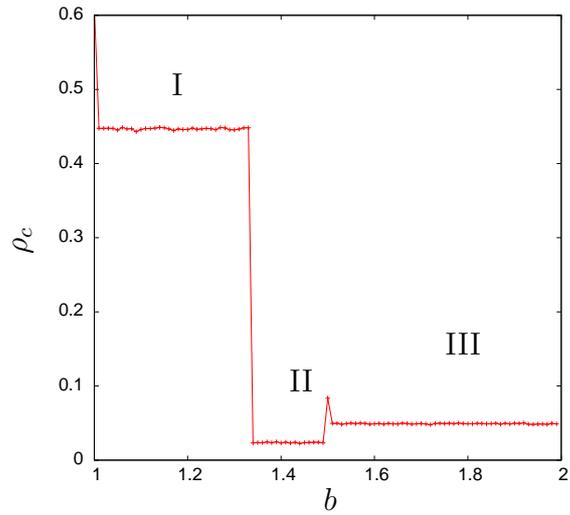


Figura 2.3: Densidade de cooperadores em função da tentação b . Nos pontos de transição ocorre um empate entre os possíveis *payoffs* de C e D , podendo o valor de ρ_C ser diferente das regiões vizinhas. Note que ρ_C não é monotônica com b .

Capítulo 3

Resultados

3.1 Cooperação em função do tempo

No gráfico 3.1 mostramos a densidade média de cooperadores como função do tempo para diferentes mobilidades, enquanto mantivemos $\varepsilon = 0.5$ e $\rho = 0.5$.

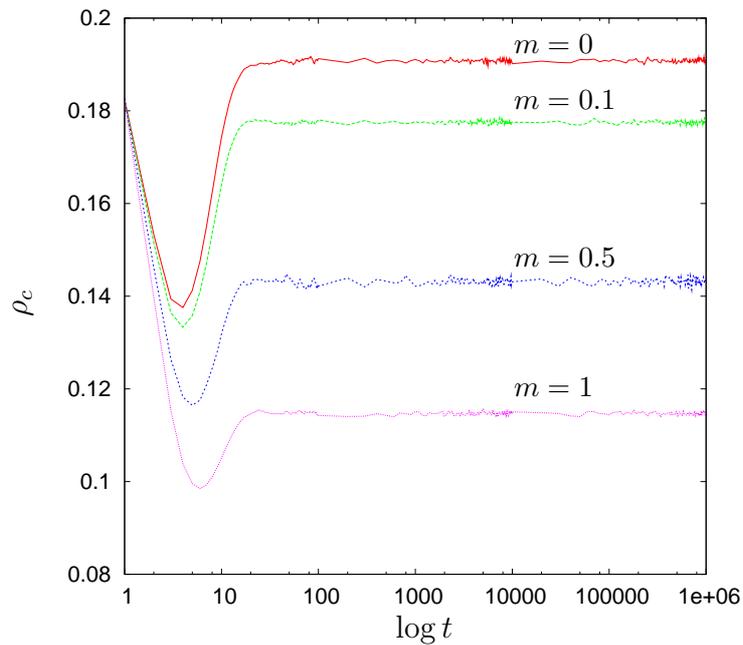


Figura 3.1: Densidade de cooperadores em função do tempo.

Vemos que o sistema, quase independentemente de m , atinge o estado esta-

cionário em torno de 100 passos. A queda inicial na cooperação deve-se ao fato de que a configuração inicial é randômica, de modo que os cooperadores formam ainda pequenos grupos, o que não previne de serem explorados por vizinhos não-cooperadores.

3.2 Cooperação em função da densidade da rede

Nas figuras 3.2 e 3.3, podemos ter uma ideia de como a densidade de cooperadores se comporta em função da densidade total da rede. Para determinados valores de ε , comparamos os resultados para diferentes mobilidades. Para facilitar a comparação, também incluímos o caso $\varepsilon = 1$, já discutido anteriormente.

Para $\varepsilon = 0.9$ podemos ver que o nível de cooperação é sempre maior na ausência de mobilidade ($m = 0$), diferentemente do caso $\varepsilon = 1$. Neste caso, existem dois máximos, um em $\rho = 0.48$ ($\rho_c \approx 0.48$) e outro em $\rho = 0.03$ ($\rho_c \approx 0.54$). Além disso, a cooperação volta a existir para pequenas densidades e mobilidades. Por exemplo, para $m = 0.01$, vemos que há cooperação numa pequena região com $\rho \leq 0.04$. Ainda comparando com o caso $\varepsilon = 1$, vemos que há transições descontínuas entre o estado cooperativo e o totalmente não-cooperativo para as curvas com $m = 0.01$ e 0.1 , o que não ocorria anteriormente para nenhuma mobilidade.

Com $\varepsilon = 0.8$, novamente a cooperação é máxima quando $m = 0$. Entretanto, o comportamento de ρ_c para mobilidade nula é modificado. Há somente um máximo e esse ocorre para $\rho = 0.05$, com $\rho_c \approx 0.62$. Para $m = 0.01$ a lacuna diminui, ou seja, há um maior suporte para a cooperação e a transição ocorre a uma densidade menor. A pequena região de cooperação em baixas densidades que antes existia para $\varepsilon = 0.9$, torna-se ainda maior.

As curvas para $\varepsilon = 0.7$ e $\varepsilon = 0.6$ (figura 3.3) têm comportamentos semelhantes, o máximo na cooperação continua ocorrendo para $m = 0$ e em torno de $\rho = 0.05$, mas conforme vamos diminuindo ε , a amplitude desse máximo decresce. Para $\varepsilon = 0.7$ e $m = 0.01$, a cooperação passa a existir para todo o intervalo de densidades e assume uma forma semelhante a de $m = 0$. Quando $m = 0.1$, uma nova lacuna na cooperação aparece em $0.05 \leq \rho \leq 0.25$. O que antes ocorria para uma mobilidade menor e um valor de ε maior, passa a ocorrer para mobilidades cada vez maiores a medida que ε diminui. Quando $\varepsilon = 0.6$, vemos que a curva com $m = 0.1$ também passa a abranger todo o intervalo de densidades, há uma queda na cooperação onde antes havia uma lacuna. Comportamento similar começa a existir para $m = 0.5$ e $m = 1$.

Para $\varepsilon = 0.5$, existe cooperação para qualquer densidade e mobilidade. Onde antes não havia cooperação para $m = 0.5$ e $m = 1$, passa a existir um mínimo. Para

$m = 1$, esse mínimo ocorre em $\rho = 0.43$ e corresponde a $\rho_C \approx 0.086$.

Para $\varepsilon = 0.3$ e $\varepsilon = 0.1$, fizemos curvas apenas para três mobilidades, pois conforme ε diminui, os efeitos da rede quadrada passam a ser menos relevantes, logo não há muita variação em ρ_C para diferentes mobilidades. Com $\varepsilon = 0.3$, vemos que a cooperação decresce com a densidade atingindo seu mínimo em $\rho = 1$.

Quando $\varepsilon = 0.1$, algo totalmente diferente aparece. Há uma transição descontínua que ocorre para qualquer mobilidade em torno de $\rho = 0.28$. Para $\rho < 0.28$, a densidade de cooperadores aproxima-se do valor obtido quando há somente combates na rede aleatória ($\varepsilon = 0$), sendo $\rho_C \approx 0.024$. Para $\rho > 0.28$, ρ_C permanece em torno de 0.3, com pequenas diferenças para cada mobilidade, contudo é levemente maior para $m = 0$. Para compreendermos essa brusca transição devemos observar que quando a densidade da rede é pequena, conjuntamente com um valor de ε pequeno, as interações via rede quadrada tornam-se mais raras. Logo, abaixo de um valor crítico de densidade, a cooperação é predominantemente dominada pelas interações via rede aleatória. Assim como há um valor crítico de densidade para cada ε , também há um valor crítico de ε para cada densidade como mostraremos mais adiante na figura 3.7. Omitimos a curva com $\varepsilon = 0$, pois, logicamente, o valor de ρ_C não depende da densidade e é o mesmo obtido para a região II na figura 2.3.

O que podemos constatar para todas as curvas com $\varepsilon < 1$, é que a condição mais favorável à cooperação é não haver mobilidade, pois todas as curvas com $m = 0$ são as que possuem o maior valor para ρ_C em todo o intervalo de densidades. Além disso, para pequenas densidades a mobilidade continua destruindo a cooperação, mas conforme ε decresce e as conexões de longo alcance passam a ter mais significância, a cooperação passa a existir em todo o intervalo de densidades. Processo que emerge para pequenas mobilidades e segue gradualmente aparecendo para mobilidades maiores a medida que ε diminui. Podemos concluir que o maior valor atingido pela densidade de cooperadores, para qualquer mobilidade, se enfraquece quando ε diminui.

Na figura 3.4 comparamos, para o caso de extrema viscosidade ($m = 0$), diferentes valores de ε . Podemos visualizar de forma mais detalhada como o máximo e o mínimo na cooperação se deslocam para densidades menores a medida que ε diminui. Já para pequenas perturbações em ε , por exemplo $\varepsilon = 0.999$, o comportamento cooperativo é significativamente alterado. As amplitudes dos máximos na cooperação dependem de ρ e ε . O maior valor atingido por ρ_C está em $\rho = 0.58$ para $\varepsilon = 0.99$ e corresponde aproximadamente a $\rho_C = 0.85$. Enquanto o menor ocorre em $\rho = 0.21$ para $\varepsilon = 0.93$ e corresponde a $\rho_C \approx 0.15$. Comparando as figuras 3.4 e 3.5, vemos que há uma mudança no comportamento de ρ_C entre $\varepsilon = 0.88$ e 0.8. O máximo na densidade de cooperadores se desloca ainda mais para valores menores de ρ e o mínimo que antes existia desaparece. Um novo máximo aparece para

$\rho = 0.05$ e $\varepsilon = 0.8$, com $\rho_C \approx 0.62$. Entre $\varepsilon = 0.8$ e 0.2 , o mínimo na cooperação passa a ocorrer quando $\rho = 1$.

De $\varepsilon = 1$ a $\varepsilon \approx 0.5$, podemos notar que ρ_C converge para 0.5 quando $\rho \rightarrow 0$, o que corresponde justamente à condição inicial. Por outro lado, quando $\varepsilon < 0.5$, o valor de ρ_C nesse limite de baixa densidade atinge um valor menor uma vez que a rede aleatória agora domina e os poucos sítios ocupados não estão mais isolados.

Agora na figura 3.6, para mobilidades não nulas, podemos comparar de forma mais evidente como a cooperação consegue se manter para intervalos cada vez maiores de ρ . O que constatamos, de um modo geral, é que menores valores de ε atenuam os picos na cooperação para pequenas mobilidades e, para qualquer mobilidade, tornam as curvas mais rasas, porém permite a existência de cooperação para baixas densidades. Entretanto, uma fraca exceção à regra, pelo menos para os tamanhos de rede considerados neste trabalho, ocorre para $m = 1$ e $m = 0.5$, para as curvas com $\varepsilon = 0.9$, ρ_C cai a zero para um valor de densidade maior se comparado quando $\varepsilon = 1$, mas essa diferença é pequena.

3.3 Cooperação em função da divisão de ganhos

Nas figuras 3.7 e 3.8 podemos ver como ρ_C varia com ε . Em 3.7 mantivemos a mobilidade nula e comparamos os resultados usando diferentes valores para a densidade.

Os saltos e descontinuidades devem-se às transições dinâmicas, que não dependem de ρ nem de m , a não ser em amplitude, e serão explicadas mais adiante. Como já mencionamos anteriormente, há transições descontínuas para certos valores de ρ e ε onde as interações via rede aleatória passam a ser dominantes. Em 3.7 podemos comparar para diferentes densidades quais são os valores de ε onde ocorrem as transições. O menor valor possível de ε onde ocorre transição é, logicamente, para $\rho = 1$ e corresponde a 0.062 . Em $\varepsilon = 0.062$ a densidade de cooperadores salta de aproximadamente 0.038 para 0.24 . Conforme aumentamos ε , novas transições vão aparecendo para densidades menores. De uma forma geral, excetuando a região de valores pequenos de ε , notamos que a cooperação é tanto maior quanto menor for a densidade da rede, a não ser para $\rho = 0.2$, onde curiosamente para $\varepsilon > 0.833$, ρ_C sofre uma queda e torna-se menor em comparação com outras densidades. Outra exceção a essa regra ocorre quando $\rho = 0.5$, após ρ_C atingir aproximadamente 0.9 em $\varepsilon = 0.974$, um máximo na cooperação que não observamos para outras densidades, decai bruscamente para 0.2 .

Na figura 3.8 apresentamos a densidade de cooperadores para $\rho = 0.5$ e diferentes mobilidades. Observando as transições que ocorrem em $\rho = 0.09$ para todas curvas, constatamos que elas não dependem de m . Para mobilidades não nulas vemos que

há uma suavização na transição, além de uma convergência mais rápida para $\rho_c(\varepsilon = 0) \approx 0.023$. Observamos que a cooperação é maior quanto menor for a mobilidade. Ela se mantém para todo intervalo ε apenas para $m = 0$. Anteriormente, para $m > 0$, vimos como a cooperação se mantinha para densidades cada vez menores a medida que diminuíamos ε . Agora, para $\rho = 0.5$, podemos ver como ela se mantém quando ε aumenta. Notamos que quanto maior for a mobilidade, menor será o valor de ε no qual a densidade de cooperadores é não nula. Para $m = 1$, interessantemente, há uma pequena região de cooperação entre $0.584 \leq \varepsilon \leq 0.587$.

Para encontrarmos as transições ao longo de todo o intervalo de ε , devemos calcular os possíveis valores de *payoff* para um jogador C e outro D , como feito na seção 2.4.1. Entretanto, agora devemos considerar as possíveis combinações de vizinhos nas duas redes. O *payoff* total para um cooperador é dado por

$$P_C = R\varepsilon n_{cc}^L + R(1 - \varepsilon)n_{cc}^{NL} \quad (3.1)$$

onde n_{cc}^L (n_{cc}^{NL}) é o número de possíveis vizinhos locais (não-locais) C de um indivíduo C local (não-local). Por outro lado, para um não-cooperador é

$$P_D = T\varepsilon n_{cd}^L + T(1 - \varepsilon)n_{cd}^{NL} \quad (3.2)$$

onde, neste caso, n_{cd} é o número de vizinhos C de um indivíduo D . Haverá transições quando $P_C = P_D$, ou seja,

$$R\varepsilon n_{cc}^L + R(1 - \varepsilon)n_{cc}^{NL} = T\varepsilon n_{cd}^L + T(1 - \varepsilon)n_{cd}^{NL} \quad (3.3)$$

Isolando ε obtemos

$$\varepsilon = \frac{T n_{cd}^{NL} - R n_{cc}^{NL}}{R (n_{cc}^L - n_{cc}^{NL}) - T (n_{cd}^L - n_{cd}^{NL})} \quad (3.4)$$

Para $T = b$ e $R = 1$ temos

$$\varepsilon = \frac{b n_{cd}^{NL} - n_{cc}^{NL}}{n_{cc}^L - n_{cc}^{NL} - b (n_{cd}^L - n_{cd}^{NL})} \quad (3.5)$$

Testando todas as possíveis combinações dos n , assumindo os valores $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, encontramos 183 transições. Porém, é possível que algumas delas não existam ou sejam muito improváveis.

Na figura 3.9 mostramos de forma detalhada o intervalo $0.5 \leq \varepsilon \leq 0.6$ da figura 3.7. Juntamente colocamos linhas que representam os valores para as transições calculadas a partir da equação 3.5.

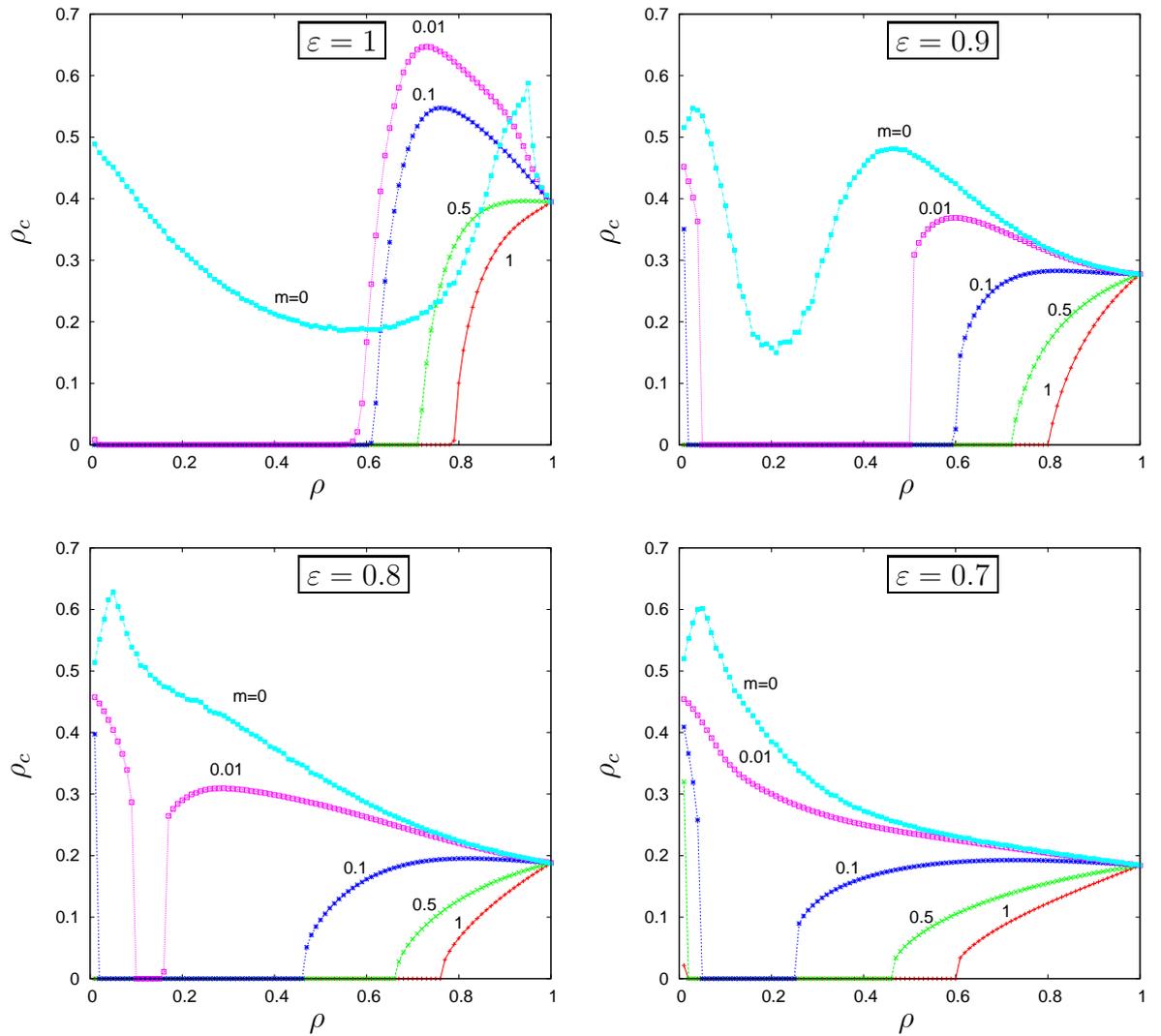


Figura 3.2: Densidade de cooperadores em função da densidade da rede para diferentes valores de ε e m .

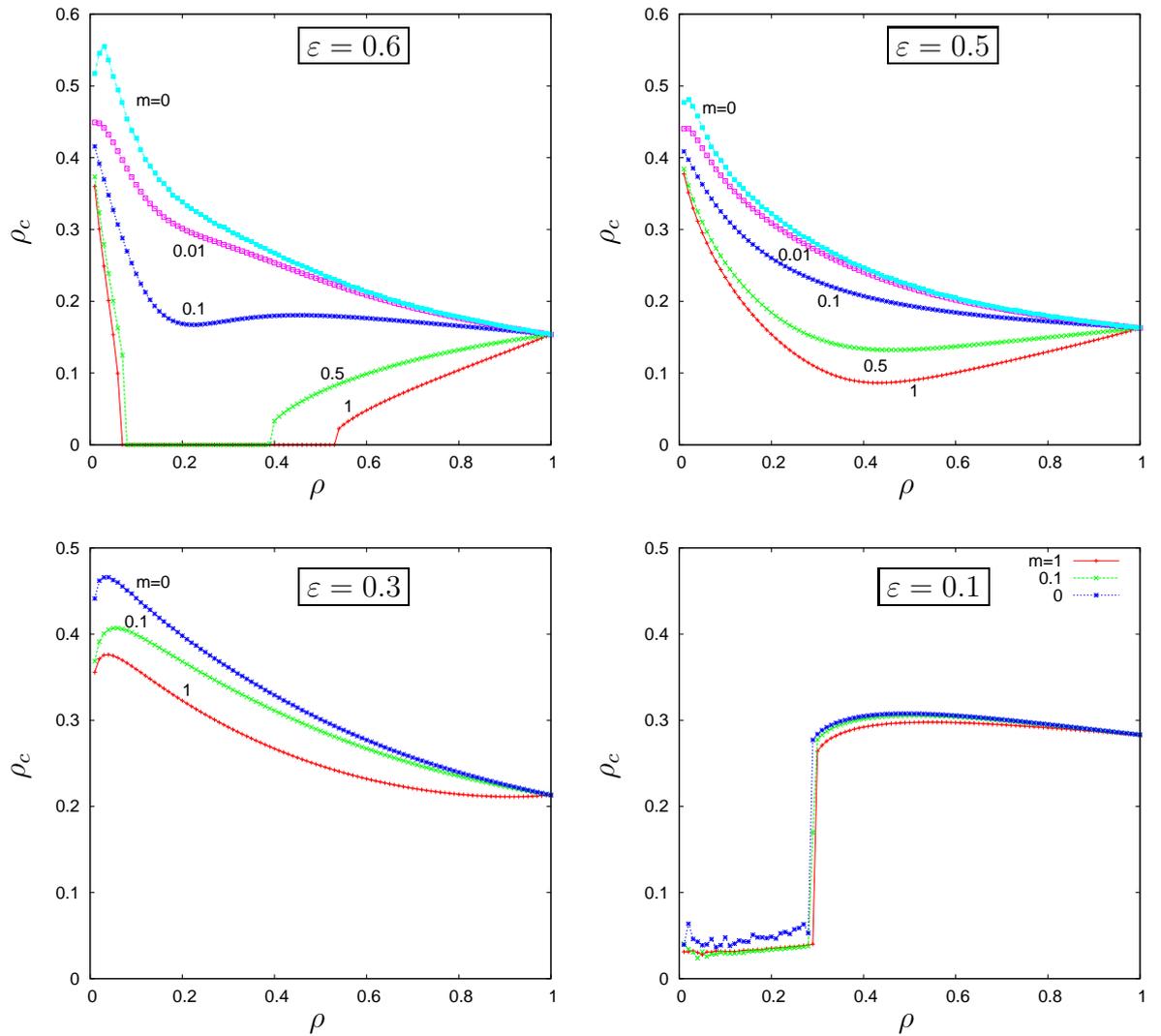


Figura 3.3: Densidade de cooperadores em função da densidade da rede para diferentes valores de ε e m .

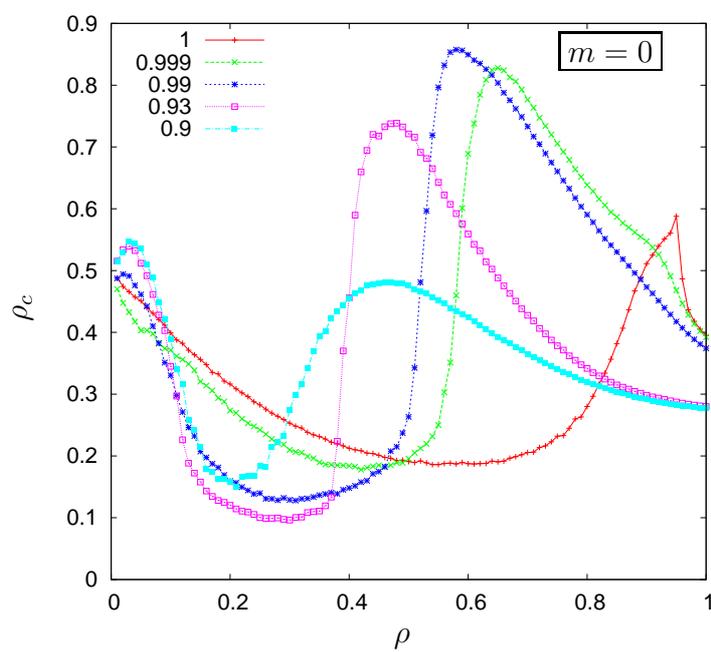


Figura 3.4: Densidade de cooperadores em função da densidade da rede para diferentes valores de ε próximos de 1 e $m = 0$.

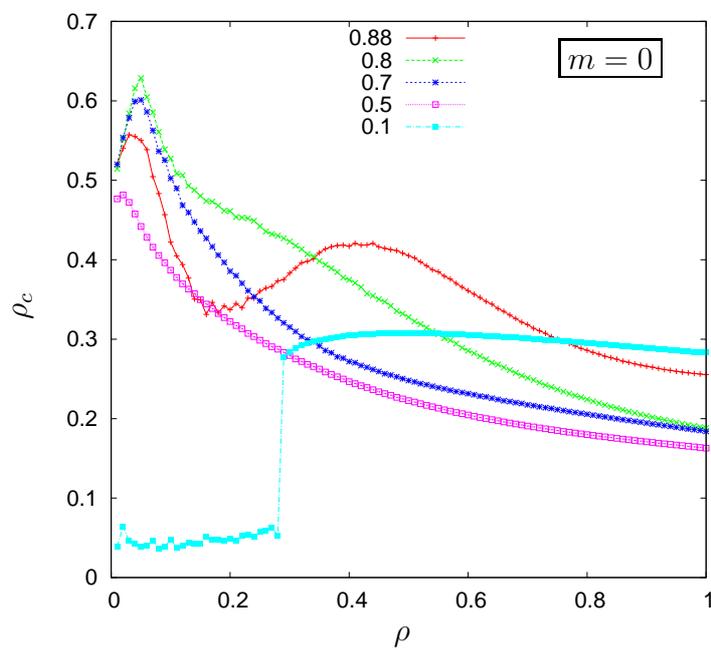


Figura 3.5: Densidade de cooperadores em função da densidade da rede para diferentes valores de ε e com $m = 0$.

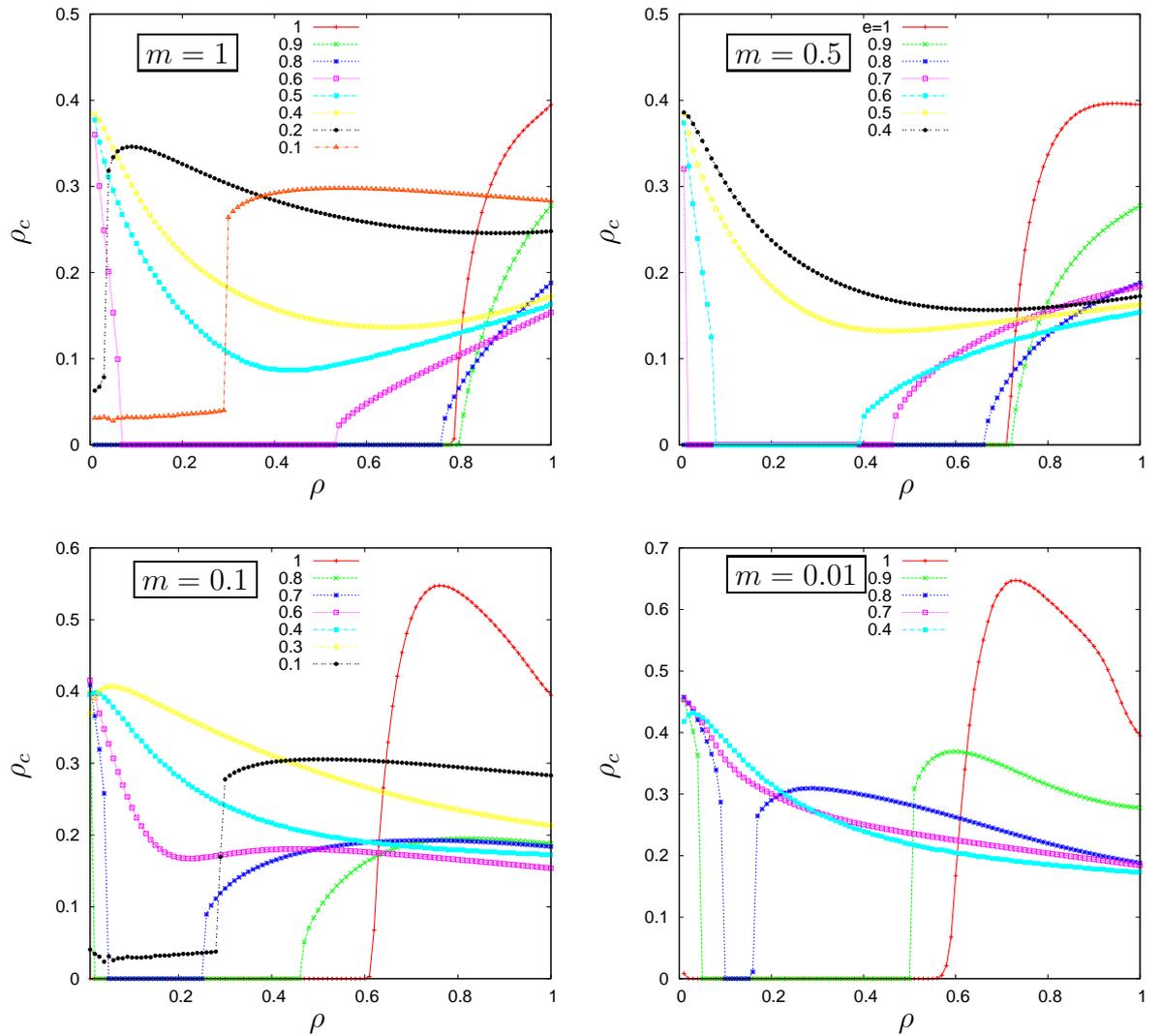


Figura 3.6: Densidade de cooperadores em função da densidade da rede para diferentes valores de ϵ e diferentes m . Note a diferente escala nos eixos verticais.

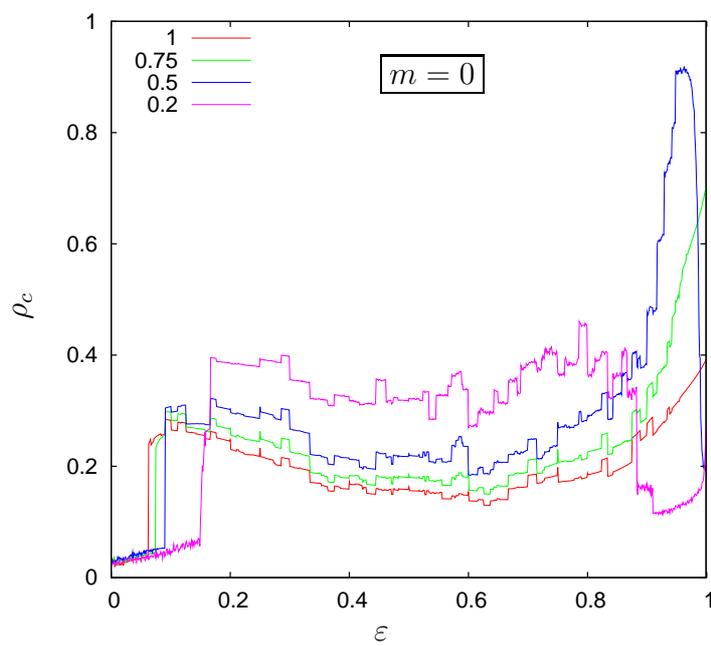


Figura 3.7: Densidade de cooperadores em função de ε para diferentes densidades e mobilidade nula.

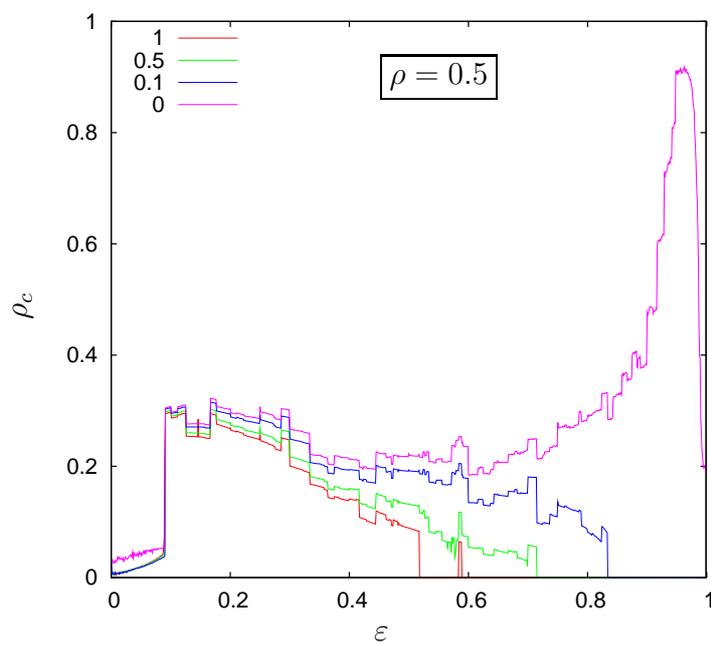


Figura 3.8: Densidade de cooperadores em função de ε para diferentes mobilidades, $\rho = 0.5$.

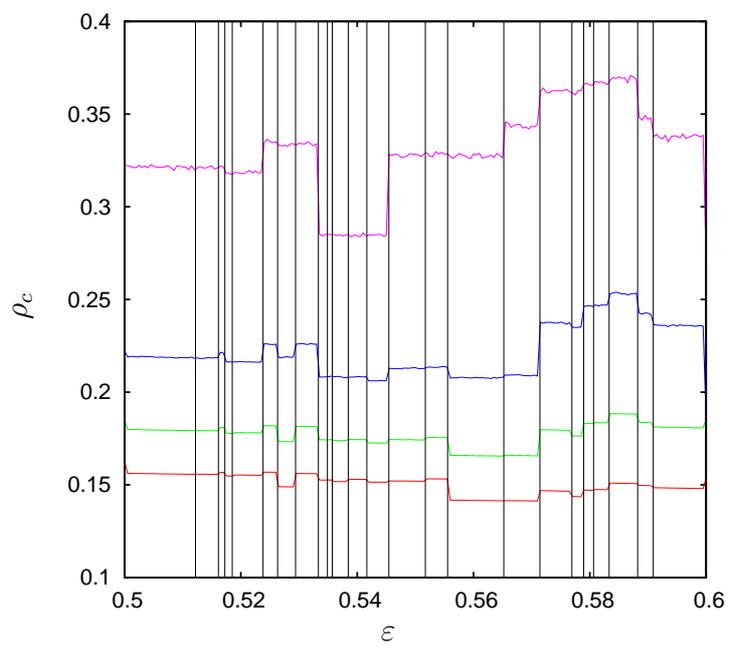


Figura 3.9: Densidade de cooperadores em função de ε para diferentes densidades (de cima para baixo: $\rho = 0.2, 0.5, 0.75, 1$) e $m = 0$.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho estudamos um cenário básico para o problema da cooperação na presença de agentes móveis. Em particular, tentamos manter as opções mais simples possíveis. Por exemplo, além dos indivíduos terem estratégias C e D incondicionais, a regra de mobilidade é a difusão aleatória. Isso, além de minimizar o número de parâmetros envolvidos também auxilia a responder a pergunta fundamental sobre quais são os mecanismos essenciais para o aparecimento e manutenção da cooperação.

De uma forma geral, vimos que a medida que permitimos uma maior participação das conexões de longo alcance no jogo, a fração de cooperadores presente na população é reduzida, justamente o que esperávamos, já que a medida que ε diminui, nos aproximamos do resultado obtido quando há somente a rede aleatória, onde a densidade de cooperadores é consideravelmente menor se comparada ao caso da rede quadrada pura. Apesar disso, como observamos nas figuras 3.7 e 3.8, o comportamento de ρ_C como função de ε não é monotônico, sendo isso uma característica geral do sistema, independente dos valores de outros parâmetros do modelo (ρ, m) . Além disso, para valores de ε próximos a 1 e em determinadas situações, essa pequena participação das conexões não-locais cria um ambiente altamente propício à cooperação, gerando máximos na fração de cooperadores bastante superiores às densidades de não-cooperadores (Fig. 3.7 com $\varepsilon = 0.974$, $\rho = 0.5$ e $m = 0$; Fig 3.4 com $\rho = 0.58$, $\varepsilon = 0.99$ e $m = 0$).

É interessante notar que em alguns casos, o sistema retoma a cooperação quando $\rho \rightarrow 0$, situação na qual normalmente qualquer mobilidade levava à sua extinção. Associado a isso observamos lacunas de cooperação, que se tornam cada vez menores a medida que ε diminui. Notamos também que valores pequenos de ε permitem uma fração finita de cooperadores em maiores intervalos de densidade. Observamos também que há uma grande quantidade de transições dinâmicas no valor da

densidade de cooperadores, algumas contínuas e outras descontínuas, relacionadas à competição tanto entre as redes local e não local quanto entre as possíveis vizinhanças dos sítios.

Quando comparamos os novos resultados com os obtidos anteriormente ($\varepsilon = 1$ [28]), vemos o surgimento de um rico comportamento. Anteriormente para pequenas densidades e mobilidades não nulas observamos que a cooperação deixa de existir. Entretanto, quando introduzimos conexões de longo alcance ponderadas por ε , descobrimos que é possível a existência de cooperação nessas condições. Além disso, quando olhamos para o caso viscoso $m = 0$, observamos o aparecimento de muitos máximos cooperativos que dependem, tanto em amplitude como em local de ocorrência na densidade, de ε . Também através de ε , introduzimos no sistema uma série transições dinâmicas, que antes só eram possíveis se mudássemos os valores da matriz de *payoff* 1.1. Além disso, observamos uma série de transições descontínuas na cooperação ligadas aos efeitos de rede.

Neste trabalho apresentamos apenas uma descrição mais qualitativa a respeito dos efeitos causados sobre o comportamento cooperativo quando adicionamos conexões de longo alcance aos agentes móveis. Portanto, como um trabalho futuro pretendemos nos aprofundar nos mecanismos que explicam todo o rico comportamento observado. Também pretendemos estudar o efeito sobre a cooperação quando a topologia da rede complexa é modificada. Além disso, ao invés de difusão aleatória, podemos estabelecer regras dirigidas para a mobilidade, nas quais os cooperadores tentam se deslocar para regiões onde há uma maior concentração dos mesmos.

Referências Bibliográficas

- [1] NOWAK, M. A. *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*. [S.l.]: Belknap Press, 2006.
- [2] SZABÓ, G.; FATH, G. Evolutionary games on graphs. *Phys. Rep.*, v. 446, p. 97–216, 2007.
- [3] TURNER, P. E.; CHAO, L. Prisoner’s dilemma in an RNA virus. *Nature*, v. 398, p. 441–443, April 1999.
- [4] VULIC, M.; KOLTER, R. Evolutionary cheating in *escherichia coli* stationary phase cultures. *Genetics*, v. 158, p. 519–526, 2001.
- [5] FRICK, T.; SCHUSTER, S. An example of the prisoner’s dilemma in biochemistry. *Naturwissenschaften*, v. 90, p. 327–331, 2003.
- [6] RAINEY, P. B.; RAINEY, K. Evolution of cooperation and conflict in experimental bacterial populations. *Nature*, v. 425, p. 72–74, 2003.
- [7] VELICER, G. J.; YU, Y. N. Evolution of novel cooperation swarming in the bacterium *Myxococcus xanthus*. *Nature*, v. 425, p. 75–78, 2003.
- [8] GRIFFIN, A. S.; WEST, S. A.; BUCKLING, A. Cooperation and competition in pathogenic bacteria. *Nature*, v. 430, p. 1024–1027, 2004.
- [9] GREIG, D.; TRAVISANO, M. The prisoner’s dilemma and polymorphism in yeast SUC genes. *Proc. R. Soc. London B (Suppl.)*, v. 271, p. S25–S26, 2004.
- [10] WOLF, D. M.; VAZIRANI, V. V.; ARKIN, A. P. A microbial modified prisoner’s dilemma game: how frequency-dependent selection can lead to random phase variation. *J. Theor. Biol.*, v. 234, p. 255–262, 2005.
- [11] NOWAK, M. A.; MAY, R. M. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, v. 246, p. 15–18, 1992.

- [12] NOWAK, M. A.; BONHOEFFER, S.; MAY, R. M. More spatial games. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, v. 4, p. 33–56, 1994.
- [13] NOWAK, M. A.; BONHOEFFER, S.; MAY, R. M. Spatial games and the maintenance of cooperation. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, v. 91, p. 4877–4881, maio 1994.
- [14] KILLINGBACK, T.; DOEBELI, M. Spatial evolutionary game theory: hawks and doves revisited. *Proc. R. Soc. Lond. B*, v. 263, p. 1135–1144, 1996.
- [15] NAKAMARU, M.; MATSUDA, H.; IWASA, Y. The evolution of cooperation in a lattice-structured population. *J. Theor. Biol.*, v. 184, p. 65–81, 1997.
- [16] SZABÓ, G.; TÖKE, C. Evolutionary prisoner’s dilemma game on a square lattice. *Phys. Rev. E*, v. 58, n. 1, p. 69–73, July 1998.
- [17] BRAUCHLI, K.; KILLINGBACK, T.; DOEBELI, M. Evolution of cooperation in spatially structured populations. *J. Theor. Biol.*, v. 200, p. 405–417, 1999.
- [18] KILLINGBACK, T.; DOEBELI, M.; KNOWLTON, N. Variable investment, the continuous prisoner’s dilemma, and the origin of cooperation. *Proc. R. Soc. B*, v. 266, p. 1723–1728, 1999.
- [19] SZABÓ, G. et al. Spatial evolutionary prisoner’s dilemma game with three strategies and external constraints. *Phys. Rev. E*, v. 62, n. 1, p. 1095–1103, jul. 2000.
- [20] VAINSTEIN, M. H.; ARENZON, J. J. Disordered environments in spatial games. *Phys. Rev. E*, v. 64, p. 051905, 2001.
- [21] ABRAMSON, G.; KUPERMAN, M. Social games in a social network. *Phys. Rev. E*, v. 63, p. 030901, 2001.
- [22] HAUERT, C. Effects of space in 2×2 games. *Int. J. Bif. Chaos*, v. 12, p. 1531–1548, 2002.
- [23] KIM, B. J. et al. Dynamic instabilities induced by asymmetric influence: Prisoner’s dilemma game on small-world networks. *Phys. Rev. E*, v. 66, p. 021907, 2002.
- [24] AKTIPIS, C. A. Know when to walk away: contingent movement and the evolution of cooperation. *J. Theor. Biol.*, v. 231, p. 249–260, 2004.

- [25] HAUERT, C.; DOEBELI, M. Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game. *Nature*, v. 428, p. 643–646, 2004.
- [26] SANTOS, F. C.; PACHECO, J. M. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, n. 9, p. 098104, 2005.
- [27] DURÁN, O.; MULET, R. Evolutionary prisoner’s dilemma in random graphs. *Physica D*, v. 208, p. 257–265, 2005.
- [28] VAINSTEIN, M. H.; SILVA, A. T. C.; ARENZON, J. J. Does mobility decrease cooperation? *J. Theor. Biol.*, v. 244, p. 722–728, 2007.
- [29] SICARDI, E. A. et al. Random mobility and spatial structure often enhance cooperation. *J. Theor. Biol.*, v. 256, n. 2, p. 240–246, 2009.