UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ANUAR DAIAN DE MORAIS

FÓRMULA (-1): DESENVOLVENDO OBJETOS DIGITAIS DE APRENDIZAGEM PARA AS OPERAÇÕES COM NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS

Porto Alegre
2010

ANUAR DAIAN DE MORAIS

FÓRMULA (-1): DESENVOLVENDO OBJETOS DIGITAIS DE APRENDIZAGEM PARA AS OPERAÇÕES COM NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre
2010

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho ao meu pai Osmar e à minha mãe Nilce, em especial pelo exemplo de família, de amor e persistência para alcançar seus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Aos colegas da segunda turma do PPG-Ensimat, em especial ao Cristiano, ao Eduardo e à Liliane pela parceria em trabalhos e atividades e pelos divertidos grupos de estudo aos domingos.

Aos colegas das escolas onde trabalho que, de alguma forma, se interessaram e acompanharam esse meu processo de aprendizagem.

Aos meus queridos alunos que me ensinam e aprendem junto comigo todos os dias.

Aos amigos e familiares pela compreensão nos momentos em que não pude estar presente, presencialmente, em função deste trabalho.

Aos meu sogro Ivan e minha sogra Denise pelo apoio e confiança depositados em mim.

Aos colegas do Mídia Digitais em Matemática (MDMAT), pelo auxílio no desenvolvimento de objetos digitais de aprendizagem, em especial ao amigo e professor de *flash* Cristiano que é o principal desenvolvedor do *Fórmula (– 1)*.

Aos acadêmicos Bruno Feldman da Costa e Karine Zaniol pela ajuda durante a coleta de dados.

À minha filha Larissa, que sempre me deu muitas felicidades, por compreender a minha ausência em alguns momentos e por participar deste trabalho dando palpites sobre os jogos e expressando aquilo que pensava enquanto jogava.

À minha esposa Bianca, por sempre fazer me sentir ser amado, pelo apoio, pela compreensão e cumplicidade nas diferentes fases desse processo. Além disso pela parceria intelectual, estando disposta a ouvir minhas dúvidas e contribuindo com comentários que sempre me fizeram refletir sobre a educação.

Ao meu amigo e orientador Marcus, por sempre me indicar caminhos (sem direcioná-los), por fornecer diferentes parcerias que me ajudassem no desenvolvimento da pesquisa. Também por ser exemplo de professor feliz que faz a diferença na vida de seus alunos, de competência e de ética.

"Sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino."

Paulo Freire

Sumário

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Quadros

RESUMO

Essa dissertação apresenta um conjunto de Objetos Digitais de Aprendizagem (ODAs) que foram desenvolvidos com o objetivo de promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva da teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. Além disso, também foi desenvolvida uma proposta didática para auxiliar o professor que desejar utilizá-lo nas suas aulas. Nossa pesquisa ainda apresenta a construção histórica do conjunto dos números positivos e negativos, uma discussão sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação (TICs) em Educação e uma revisão de propostas voltadas para o ensino dos números positivos e negativos. De caráter experimental, nossa proposta foi aplicada em dois momentos diferentes: no final de 2008 numa turma de 6º série do Ensino Fundamental do Colégio de Aplicação da UFRGS e durante o primeiro semestre de 2010 numa escola da rede privada do município de Guaíba/RS. A análise dos resultados obtidos serviu como subsídio para a implementação de modificações no ODA e na proposta didática, bem como para a reflexão do desenvolvimento de ODAs que promovam o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo através de problemas que envolvam operações com números positivos e negativos.

Palavras-chave: campo aditivo, campo multiplicativo, operações com inteiros, objetos digitais de aprendizagem, matemática, jogos.

ABSTRACT

This master's research shows a set of Digital Learning Objects (DLO) which were developed to promote learning of operations with whole numbers through Vergnaud's theory of conceptual fields. Furthermore, a didactical proposal was also developed in order to aid the teacher who wishes to use it in the classroom. Our research also presents the historical construction of the set of positive and negative numbers, a discussion of the use of information and communication technologies (ICTs) in Education and a review of proposals aimed at whole numbers teaching. Having an experimental character, our proposal was applied on two different moments: in the end of 2008 on an 6th grade of *Colégio de Aplicação da UFRGS* in the city of *Porto Alegre* and during the first semester of 2010 in a private school in the district of *Guaíba/RS*. The analysis of the results gathered served as foundation to implement a few modifications on the DLO and on the didactical proposal, as well to reflect over the development of DLOs which can promote the development of the additive and multiplicative reasoning through problems involving operations with whole numbers.

Key words: additive field, multiplicative field, whole number operations, digitals learning objects, math, games.

INTRODUÇÃO

Este trabalho de pesquisa procura responder a seguinte questão: *Como objetos digitais de aprendizagem podem promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva dos Campos Conceituais de Vergnaud?* Mas antes de seguirmos adiante, pretendemos expor, de forma breve, quais foram os motivos e situações que despertaram nosso interesse sobre tal assunto e que, ao mesmo tempo, justificam a importância dessa pesquisa.

Consideramos o ensino das operações com números positivos e negativos um dos primeiros grandes desafios para o professor, já que (ao lecionar em diferentes séries do ensino básico) sempre chamavam a nossa atenção as dificuldades que alguns estudantes apresentavam ao utilizar a regra de sinais nas operações com números positivos e negativos. No início, nossa intervenção consistia em relembrar a regra através de alguns exemplos. Porém percebíamos que era ineficaz, pois a pergunta *"como é mesmo a regra de sinais, professor?"* reaparecia.

O que despertava nosso interesse em estudar tal fenômeno era a falta de estratégias (dos estudantes) para relembrar (ou re-construir) as regras de sinais, em consequência a sua utilização tornava-se mecânica e desprovida de significado. Motivados a desenvolver uma proposta didática que contribuísse para o desenvolvimento de tais estratégias, começamos a ensinar tais operações utilizando a reta numérica como ferramenta. Tínhamos a hipótese de que a utilização de uma representação geométrica para as operações contribuiria para a construção de tais significados. Por exemplo:

Exemplo 1:(+3) + (–12) =____

A primeira parcela (+3) indica a posição em que o sujeito se encontra, já a segunda parcela, o sentido que o sujeito deverá se movimentar (– 12). Neste caso, o sinal se refere ao sentido que ele caminha. Como nos mostra a Figura 01

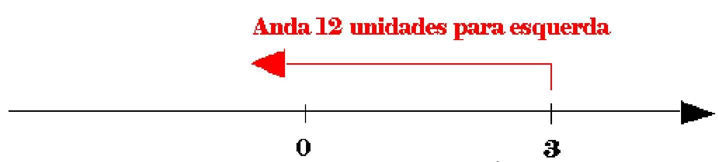


FIGURA 01 – Representação geométrica.

Sendo assim o sujeito "que caminha" sobre a reta, irá parar na posição – 9, Então

(+ 3) + (– 12) = –9.

Exemplo 2: (– 4) +(+ 7) = ___

A primeira parcela (– 4) indica a posição em que o sujeito se encontra, já a segunda parcela, o sentido que o sujeito deverá se movimentar (+ 7). Neste caso, o sinal se refere ao sentido que ele caminha. Como na Figura 02

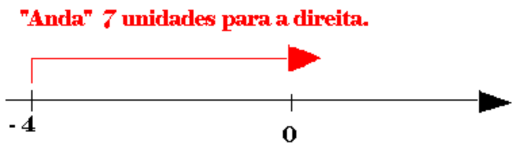


FIGURA 02 – Representação geométrica.

Desse modo o sujeito "que caminha" sobre a reta irá parar na posição + 3. Então:

(– 4) + (+ 7) = +3

Naquela época nosso principal objetivo era que, ao representar tais operações na reta numérica, os próprios alunos deduzissem as regras de sinais através da generalização dos movimentos realizados, já que poderiam resolver as operações de forma prática (ou seja, recorrendo à gestos, desenhos etc.). Durante a realização do trabalho realmente pudemos observar que os estudantes resolviam corretamente as operações de forma prática, estavam desenvolvendo estratégias e chegando em generalizações para adição e subtração de números positivos e negativos. No entanto alguns problemas persistiram e novos surgiram para os naturais a e b:

- Indiferenciação entre o significado do sinal da operação e o sinal dos números.
- Realização da subtração do tipo (+a) – (– b)para $a, b \in \mathbb{N}$
- O significado geométrico das multiplicações do tipo (– a).(b) para $a, b \in \mathbb{N}$ ofereceu grande resistência à assimilação por parte dos alunos.

Diante desse fato, com um olhar de pesquisador, as seguintes dúvidas surgiram: Estas dificuldades seriam específicas do modelo utilizado? Por que ocorreu esta diferença na aprendizagem da soma e multiplicação? Como podemos apresentar uma proposta didática que promova a aprendizagem das operações com números positivos e negativos?

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais "*o ensino dos números inteiros pode surgir como ampliação do campo aditivo, pela análise de situações em que esses números estejam presentes*" (p. 66). Então uma proposta de ensino baseada na resolução de situações-problemas e que envolva o deslocamentos de objetos inseridos num sistema referencial (a reta numérica) está de acordo com os PCNs, tendo em vista que necessitam de operações com números positivos e negativos na sua resolução. A teoria de Campos Conceituais de Gerard Vergnaud é amplamente referida nos PCNs de matemática, neles (tal teoria) é explorada através de propostas para o ensino das operações matemáticas a partir dos Campos Aditivo e Multiplicativo. Ao analisar esses documentos constatamos que a teoria de Campo Conceituais contemplava a abordagem que pretendíamos desenvolver e os princípios que nos levaram a essa conclusão apresentaremos no capítulo 3.

Por outro lado, no dia a dia acompanhamos como o uso das novas tecnologias estão transformando nossa sociedade e, consecutivamente, a Educação. Entre as diferentes formas de uso das novas tecnologias em educação, destacam-se aquelas que potencializam a comunicação entre indivíduos, ou seja, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), sendo a internet um dos melhores exemplos. Este crescimento é tão elevado que alguns pesquisadores, como Kaput, indicam uma futura onipresença das TICs na nossa sociedade e, portanto, educadores do mundo inteiro debruçam-se sobre este tema com o objetivo de potencializar o uso das TICs para aprender (2007, p. 175)

No Brasil podemos acompanhar tal transformação através do surgimento de cursos na modalidade à distância, e, pelo que tudo indica, é um movimento irreversível, já que *"A EAD existe para oportunizar cursos que atendam alunos indisponíveis no mesmo espaço e tempo de seus professores ou da instituição ao qual se vinculam como estudantes"* (Nevado, Carvalho e Menezes, 2005, p. 09). Numa primeira fase a EaD restringia-se aos curso de *Pós-Graduação Lato Sensu*, agora acompanhamos sua expansão aos cursos de Graduação e à Escola Básica, na modalidade EJA. Como professor da Educação Básica, emergem as seguintes dúvidas: Quais são os recursos disponíveis para esse "novo" tipo de ensino? Diante das dúvidas referentes à aprendizagem das operações com números positivos e negativos, que tipo de material está disponível na web? Eles atendem as necessidades desses estudantes? Como podemos colaborar nesse sentido? Embora, nesse trabalho, não pretendemos abordar a discussão da EaD, acreditamos que tais fatos justificam a importância desta pesquisa.

Diante desse cenário, tivemos a iniciativa de desenvolver objetos digitais para promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos. Tais objetos são constituídos por um conjunto de situações-problemas que envolvem deslocamentos de objetos e que necessitam de operações com números positivos e negativos na sua resolução, tendo em vista que estão inseridos num sistema referencial. Além disso, produzimos uma proposta didática para auxiliar aquele professor que deseja utilizá-lo em sala de aula. Tal material está disponível no endereço http://mdmat.mat.ufrgs.br/formula_1/

Este trabalho está organizado em cinco capítulos mais as considerações finais. No primeiro capítulo – com o objetivo de entendermos as dificuldades históricas envolvidas no desenvolvimento epistemológico da matemática – apresentamos a história da construção do conjunto dos números positivos e negativos e sua estrutura algébrica. No segundo capítulo selecionamos e analisamos algumas pesquisas e propostas didáticas (impressos e eletrônicos) que abordam o ensino das operações com números positivos e negativos que de alguma forma se relaciona com a nossa proposta. Além disso realizamos uma discussão a respeito da utilização das TICs em educação, bem como apresentamos ODAs que estão disponíveis na web.

A fundamentação teórica da nossa pesquisa está presente no terceiro capítulo deste trabalho, onde apresentamos e justificamos a escolha do Campo Aditivo e Multiplicativo de Vergnaud como base teórica do nosso trabalho. Já no quarto capítulo (intitulado *Técnicas e Materiais*) apresentamos os Objetos Digitais para a Aprendizagem (ODA) a proposta didática e a metodologia utilizada durante a coleta de dados. Logo em seguida realizamos a análise dos dados no quinto capítulo. Por último, apresentamos as considerações finais sobre a nossa pesquisa.

1 O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

1.1 HISTÓRIA DA CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Uma das contribuições do estudo da história da matemática é perceber que o conhecimento matemático é um produto do homem e, portanto, seu desenvolvimento se dá em função das necessidades culturais de seu tempo. No artigo *"Números Negativos: Uma história de Incertezas"* de Alexandre e Cleide Medeiros, podemos observar este fato na história dos números positivos e negativos, cujo desenvolvimento está repleto de controvérsias e discussões entre a comunidade matemática. Além disso a análise desse processo histórico nos indica possíveis dificuldades ou justificativas para os erros cometidos pelos alunos, pois ao aprendermos com os erros, dificuldades e descobertas da humanidade teremos maior cuidado ao elaborar a proposta didática ou o próprio experimento desta pesquisa.

A história dos números negativos desenvolveu-se mutuamente com o desenvolvimento da Álgebra, portanto no nosso texto é razoável que façamos alguns comentários referentes ao desenvolvimento da notação algébrica. Sabe-se que antes de Diofanto de Alexandria (250 a.C.) utilizava-se exclusivamente a *álgebra retórica*[1]. Na obra *Aritmética* (composto por treze livros, dos quais apenas seis remanesceram), Diofanto faz uma de suas maiores contribuições para a matemática ao criar a *álgebra sincopada*. Esses livros apresentam 130 problemas que, na sua resolução, levam a equações de primeiro e segundo graus. Desse modo é introduzida a idéia de incógnita e de raízes de uma equação. Abaixo temos um exemplo da nova álgebra apresentado por Howard Eves no livro *Introdução à história da matemática (p. 209)*.

ζ - Servia para representar uma incógnita, supõem-se que surgiu da junção das letras iniciais da palavra "*arithmos"*.

Δ^{Y} - Servia para representar a incógnita ao quadrado, utilizando como símbolo as duas primeiras letras da palavra "potência" (*dunamis:* ΔΥΝΑΜΙΣ).

---

[1] *" Em 1842, G.H.F. Nesselmann caracterizou três estágios para o desenvolvimento da notação algébrica, são eles:* ***Álgebra retórica:*** *é aquela onde os argumentos de resolução de um problema são feitos exclusivamente em prosa, sem abreviações ou símbolos específicos.* ***Álgebra sincopada:*** *é aquela onde se define símbolos para as operações e quantidades que são mais freqüentes.* ***Álgebra simbólica:*** *em que as resoluções são representadas numa espécie de "taquigrafia da matemática" formada por símbolos que aparentemente não tem nada a ver com os entes que representam."* (EVES, 2004, p. 200)

K^{Y} - Servia para representar a incógnita ao cubo, utilizando como símbolo as duas primeiras letras da palavra grega "*kubos*" (ΚΥΒΟΣ).

$\overset{\circ}{M}$ - representava uma constante, sendo a abreviação da palavra "unidade" (monades: ΜΟΝΑΔΕΣ).

⋔ - representava o sinal de menos, supõem-se que eram as duas letras da palavra *"leipis"* (ΛΕΙΠΙΣ)

Então a expressão x^3-5x^2+8x-1 se escreveria: $K^{Y}\alpha\varsigma\eta$ ⋔ $\Delta^{Y}\varepsilon\ \overset{\circ}{M}\ \alpha$

Lê-se: (incógnita ao cubo 1, incógnita 8) menos (incógnita ao quadrado 5, unidades 1)

Foi na determinação das raízes dessas equações indeterminadas que, pela primeira vez, surgem os números negativos, principalmente nas equações do tipo:

$$ax+b=0 \text{ para a e b positivos.}$$

Apesar de a regra de sinais já estar presente no trabalho de Diofanto, os gregos não consideravam os negativos como sendo números, já que eram incapazes de ajustá-los a sua geometria e Diofanto não era exceção; ele considerava apenas as raízes racionais positivas como sendo verdadeiras e se satisfazia ao encontrar uma solução, não se preocupando em encontrar todas as soluções possíveis.

Vimos que o primeiro registro dos números negativos aparecem na obra de Diofanto, mas a data histórica é incerta, pois sabe-se que os números negativos já estavam presentes na obra chinesa *"Nove capítulos sobre a Arte Matemática"*, publicado durante a Dinastia Han (cerca de 200 a.C). Dessa forma acredita-se que esse conhecimento é mais antigo. (EVES, p. 243, 2004).

No século VI a civilização hindu, procurou determinar todas as soluções possíveis para as equações $ax+by=0$ *e* atribuíram o significado de débito aos números negativos. de que se tem registro, essa foi a primeira vez que eles foram utilizados como uma aplicação prática. *"Na verdade eles formularam as operações aritméticas sobre os números negativos com essa aplicação"*. (KLINE, p. 93, 1953).

No entanto sua aceitação também não era unanimidade. No Séc. XII, Bhaskara encontrou as raízes $x = 50 \quad e \quad x = -5$ para equação $x^2 - 45x = 0$, entretanto, para ele, *"o segundo valor não devia ser tomado por ser inadequado, pois as pessoas não aceitam raízes negativas"* (REID, p.17, 1959). A dificuldade de aceitar a validade dos números negativos se devia, ainda, à tradição grega que considerava *boa matemática* aquilo que pudesse ser representado geometricamente e também pelo fato de ninguém visualizar a a quantidade *"menos 8 ovelhas"*.

Os árabes – grandes tradutores da matemática dos gregos – transmitiram aos europeus as descobertas feitas pelos gregos e hindus. Contudo, não deram continuidade à interpretação utilizada pelos hindus e retornaram à álgebra retórica, dispensando assim a algebrização sincopada de Diofanto.

Foi somente no século XIV que os matemáticos passaram a aceitar os negativos como números válidos: "*foi necessário esperar o surgimento de um sistema bancário com uma estrutura de crédito internacional, tal o que veio a aparecer nas cidades do norte da Itália (particularmente Florença e Veneza) durante o século XIV. A aparente absurda subtração 7 menos 5 tornou-se possível quando os novos banqueiros começaram a permitir aos seus clientes sacar 7 ducados de ouro enquanto seus depósitos eram apenas 5"* (SINGH apud MEDEIROS). Agora a subtração 5 -7 não parecia *mágica absurda,* porém – ainda no início do século XIX – havia matemáticos que não lhes atribuíam uma real existência. Por que isso ainda acontecia? Para ser aceito como boa matemática, além de ser amplamente utilizado, um conceito deve, principalmente, apresentar um elevado grau de fertilidade, conforme Wilder indica:

> *"Em particular, um conceito não será sempre rejeitado devido à sua origem ou sobre as bases de critérios metafísicos tais como irrealidade"(...) Um bom exemplo é a aceitação dos números negativos no corpo da matemática (...) Na medida em que estes números não eram indispensáveis, eles foram rejeitados sob a alegação de serem irreais ou fictícios" (WILDER apud MEDEIROS)*.

Por exemplo: Cardan (século XVI) chamava os negativos de "números fictícios", mas reconhecia a importância das raízes negativas; já para Nicolas Chuquet (séc. XV) e Michael Stifel (séc. XVI) os negativos eram apenas símbolos, chamando-os de "números absurdos".

Ultrapassado o obstáculo da utilização, os matemáticos passaram a discutir outros problemas que envolvia a aceitação dos números positivos e negativos. Uma delas envolvia o significado duplo do sinal de menos, que representava duas coisas diferentes: a operação de subtração e o inteiro negativo.

O matemático Viète (1540 – 1603), foi quem introduziu os símbolos +, **-** e =, entretanto *"o símbolo referia-se apenas à operação de subtração entre números "verdadeiros" e que os números negativos eram desprovidos do significado intuitivo e físico"*. (MEDEIROS, p. 53, 1992).

Já na fala de Tomas Harriot (1560 -1621) podemos observar quando a existência desse fato foi percebida, *"embora símbolos separados devessem ter sido usados porque um número negativo é um conceito independente enquanto a subtração é uma operação"* (KLINE, 1972 p. 253).

Contudo, mesmo com a ausência de uma explicação estrutural, os negativos passaram a ser utilizados em diferentes áreas da matemática. Por conseguinte as controvérsias aumentavam, alguns historiadores chegam a afirmar que – naquele momento – o problema dos negativos era maior que o dos números irracionais, logo muitos dos grandes matemáticos procuravam resolvê-lo. Mas os obstáculos eram ainda maiores quando se procurava uma metáfora ou representação geométrica à regra de sinais, vejamos alguns exemplos a seguir.

O fato de os números negativos serem *"menores que o nada"* foi a justificativa para que René Descartes considerasse como falsas as raízes negativas e como, consequência excluiu a parte negativa de seu plano. Na tentativa de contornar o problema, desenvolveu a transformação das raízes negativas em positivas. Foram seus sucessores os responsáveis pela introdução dos negativos no Plano Cartesiano.

Mas Descartes não era o único (e nem o último) a utilizar esse argumento, entre vários exemplos, citamos Willian Hamilton (1805 -1865) que, ainda em 1837, expressava sua desconfiança quanto aos negativos:

> (...) *não se requer nenhum peculiar ceticismo para duvidar, ou mesmo desacreditar a doutrina dos negativos (...) que uma quantidade maior possa ser subtraída de uma menor, e que o resultado seja menor do que nada; que dois números negativos, ou denotando quantidades menores que nada, possam ser multiplicados entre si, e que o produto seja uma número positiv*o" (HAMILTON apud KLINE,1972 p. 772)

Contudo, os números positivos e negativos tornavam-se cada vez mais um mal necessário, segundo relata KLINE, *"o matemático Arnaud (1612 – 1694), questionou que: –1:1 = 1:–1 " –1 é menor do que +1; daí, como poderia um menor estar para um maior assim como um maior está para um menor?"* No entanto, mesmo insatisfeito, Leibniz (1646 -1716) afirma que *"se poderia calcular com tais proporções* (–1:1=1: –1)*, uma vez que que "formalmente", equivalia a calcular com quantidades imaginárias, que já àquela época haviam sido introduzidas."(1972, p. 252).*

Como é de praxe, não podemos deixar de citar o grande e talentoso matemático Leonhard Euler (1701 – 1783), que na falta de uma fundamentação lógica, tentava remendar uma justificativa para as operações em Z. *"Euler enveredou por um argumento totalmente não convincente para mostrar que (–1).(– 1), deve ser igual a +1. Pois, como ele raciocinou, deve ser +1 ou -1, e não pode ser –1=(+1).(– 1) desde que – 1=(+1).(– 1)" (COURANT E ROBBINS apud MEDEIROS)*

No início do século XIX a matemática era amplamente utilizada com grande sucesso para modelar explicações de fenômenos físicos; no entanto não se tinha garantia que alguns conceitos estavam certos, e a "teoria" dos negativos estava entre eles. Seria somente durante o século XIX, com a emergência das estruturas algébricas que a controvérsia em torno dos números positivos e negativos seria superada. Uma visão moderna da álgebra surge quando a comunidade de matemáticos – após essas infrutíferas tentativas de utilizar metáforas ou representações geométricas para justificar operações com números negativos, imaginários e irracionais – percebe que algumas propriedades da adição e multiplicação dos naturais são aplicáveis a diferentes sistemas de elementos .

Para $a, b, c \in \mathbb{N}$ temos as seguintes propriedades:

i. $a+b=b+a$ - Propriedade comutativa da adição.
ii. $a \times b=b \times a$ - Propriedade comutativa da multiplicação
iii. $(a+b)+c=a+(b+c)$ - Propriedade associativa da adição.
iv. $(a \times b) \times c=a \times (b \times c)$ - Propriedade associativa da multiplicação.
v. $a \times (b+c)=(a \times b)+(a \times c)$ - Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Assim, matemáticos como Georg Peacock (1791-1858), assumiram estas leis básicas como sendo axiomas (assim como Euclides fez na geometria) e qualquer teorema que formalmente resultasse deles, seria considerado aplicável a diferentes situações e passível de interpretação. É através dessa emergência das ***Estruturas Algébricas*** que, segundo EVES *"cortam-se então os laços da álgebra com a aritmética, tornando-se aquela um campo de estudos puramente hipotético-dedutivo formal"*. (EVES, 2004). Dessa forma eliminava-se alguns problemas de aplicabilidade da *álgebra aritmética*[2], por exemplo: a subtração $a-b$ era limitada para tais $a, b \in \mathbb{N},\ em\ \ que\ \ a > b$. Já na *álgebra simbólica* de Peacock, utilizam-se as operações da *álgebra aritmética*, porém ignora suas restrições.

Após essa empreitada histórica, não parece tão absurdo que pessoas de 11 anos ou mais tenham dificuldade ao entender as operações com números positivos e negativos, já que grandes matemáticos (como próprio Euler) fracassaram ao tentá-lo. Embora este não seja um argumento novo em Educação Matemática, considero significativo apresentá-lo pensando naqueles colegas de profissão que, assim como eu, desconhecem a complexidade envolvida no desenvolvimento desse conhecimento e que hoje é, aparentemente, senso comum nas salas de aula.

No entanto as crianças de hoje já possuem uma certa vantagem em relação aos nossos antepassados, os números positivos e negativos estão disseminados na nossa sociedade e há uma imensa bibliografia sobre o assunto ao alcance de seus professores.

1.2 ESTRUTURA ALGÉBRICA DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Neste trabalho priorizamos tratar das questões de caráter pedagógico não deixando de apresentar, ainda que brevemente, a construção do conjunto dos números inteiros. Ao leitor que quiser aprofundar seus conhecimentos no assunto há uma abrangente bibliografia sobre o tema e podemos indicar a obra *"Introdução à Álgebra, Projeto Euclides"*[3]. Contudo, nesta seção vamos apresentar uma definição do conjunto de números inteiros que se ajusta, no nosso entendimento, à discussão e análise no contexto da escola básica.

Os números positivos e negativo formam um conjunto no qual podem ser definidas duas operações, que chamaremos de adição e multiplicação e denotaremos por "+" e " $\cdot$ ". Além disso, utilizaremos o símbolo $\mathbb{Z}$ para designá-lo. Em $(\mathbb{Z})$ está definida uma relação que permite ordenar os seus elementos, a relação "menor ou igual", que indicaremos por $\leq$.

O primeiro grupo de axiomas que descreverá algumas propriedades da soma e que serão úteis para descrever a estrutura algébrica do conjunto dos números inteiros são:

[2]**Álgebra Aritmética** era considerada como o estudo resultante do uso de símbolos para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios como o de adição e o de multiplicação, aos quais podem sujeitar esses números. Nela suas operações sempre tem sentido. **Álgebra Simbólica** é uma "álgebra aritmética" universal cujas operações são determinadas pela extensão das operações da "álgebra aritmética", essa extensão foi justificada pelo que Peacock chamou de "*princípio da permanência das formas equivalentes"* (hoje em desuso). (EVES, 2004, p.547).

[3]Gonçalves, A; Introdução à Álgebra, Projeto Euclides, Impa, 1979.

Garcia, A, Lequain, Y.; Álgebra: Um curso de introdução, Projeto Euclides, Impa, 1998.

A.1 Propriedade Associativa: Para toda terna *a,b,c* de inteiros tem-se que

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

A.2 Existência do Neutro: O número zero é *neutro aditivo* para a adição, isto é,

$$a+0=0+a=a \text{ para todo } a\in\mathbb{Z}.$$

E é o único número inteiro com esta propriedade.

A.3 Existência do Oposto: Para cada inteiro *a* existe um único elemento que chamaremos oposto de *a* e indicaremos por -*a*, tal que

$$a+(-a)=0.$$

A.4 Propriedade Comutativa: Para todo *a,b* de inteiros tem-se que

$$a+b=b+a.$$

A.5 Propriedade Associativa: *Para toda terna a,b,c* de inteiros tem-se que

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

A.6 Existência do Neutro: O número um é o *neutro multiplicativo*, para a operação de multiplicação, isto é,

$$a\cdot 1=1\cdot a=a \text{ para todo } a\in\mathbb{Z}.$$

E é o único número inteiro com esta propriedade.

A.7 Propriedade Cancelativa: Para toada terna a,b,c de inteiros, com $a\neq 0$, tem-se que,

se $a\cdot b=a\cdot c$, então $b=c$.

A.8 Propriedade Comutativa: Para todo par de inteiros tem-se que

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

A.9 Propriedade Distributiva: Para toda terna *a,b,c* de inteiros tem-se que

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c.$$

Uma das proposições que surgem a partir desses axiomas é justamente a Regra dos Sinais.

PROPOSIÇÃO (P.1): Sejam *a* e *b* inteiros. Então vale:

i. $-(-a)=a.$
ii. $0\cdot b=0.$
iii. $(-a)\cdot(b)=-(a\cdot b)=a(-b).$
iv. $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$

Demonstração

Notamos inicialmente que podemos interpretar o axioma **A.3** da seguinte forma: o oposto de um elemento *a* é o único inteiro que verifica a equação $a+x=0$.

Para provar (i) basta observar que a verifica a equação $(-a)+x=0$. Consequentemente, *a* é o oposto de $-a$ (que é o elemento indicado por $-(-a)$).

Para provar a primeira igualdade de (iii), basta observar que $(-a)\cdot(b)$ é solução da equação $(a\cdot b)+x=0$ já que

$$(a\cdot b)+[(-a)\cdot b] = [a+(-a)]\cdot b = 0\cdot b = 0$$

Para provar a segunda igualdade basta usar a comutatividade da multiplicação.

Para (iv), podemos observar que aplicando (ii) temos

$$(-a)\cdot(-b) = -(a\cdot(-b)) = -(-(a\cdot b)),$$

e usando (i) no último termo segue que

$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$$

Sendo assim podemos demostrar formalmente os seguintes fatos:

(1) $(-1)\cdot b=-b$ (2) $(-1)\cdot(-1)=+1$

Para provar a igualdade da expressão (1) vamos aplicar **A.3** para $a=1$ partir de $1+(-1)=0$ multiplicando os membros da equação por *b*, temos:

$1\cdot b+[(-1)\cdot b]=0\cdot b \overset{A.6}{\Rightarrow} b+[(-1)\cdot b]=0$, temos que $(-1)\cdot b$ é solução da equação $b+x=0$, e, conseqüentementepela unicidade em A.3 $(-1)\cdot b=-b$

Para provar a igualdade da expressão (2) vamos aplicar **A.3** para *a=1* partir de $1+(-1)=0$ multiplicando os membros da equação por *(-1)* temos:

$$1\cdot(-1)+[(-1)\cdot(-1)]=0\cdot(-1) \overset{Prop.(ii)}{\Rightarrow} (-1)+[(-1)\cdot(-1)]=0,$$

então temos que $(-1).(-1)$ é solução da equação $(-1)+x=0$, e, conseqüentemente, pela unicidade em **A.3**,

$$(-1).(-1)=-(-1) \ .$$

Usando (i) da proposição **P.1**, concluímos $(-1).(-1)=-(-1)=1$

Agora listaremos a *Relação de Ordem* nos números inteiros.

A.10 Propriedade Reflexiva: Para todo inteiro *a* tem-se que $a \leq a.$

A.11 Propriedade Anti-simétrica: Dados dois inteiros *a* e *b*, se $a \leq b$ e $b \leq a,$ então $a = b.$

A.12 Propridade Transitiva: Para toda terna *a,b* e *c* de inteiros tem-se que, se $a \leq b$ e $b \leq c,$ então $a \leq c.$

Para os inteiros *a* e *b,* dizemos que *"a é menor que b"* $(a < b)$ quando $a \leq b \;\; e \;\; a \neq b.$ Dessa forma chamaremos um número de "positivo" ou "negativo", quando esse for, respectivamente, maior ou menor que zero

A.13 Tricotomia: Dados dois inteiros quaisquer *a* e *b* tem-se que ou $a < b \;\; ou \;\; a = b \;\; ou \;\; b < a$

Devemos ainda introduzir algumas propriedades d que vinculem a relação de ordem com as operações:

A.14 Para toda terna *a,b,c* de inteiros, se $a \leq b,$ então $a + c \leq b + c.$

A.15 Para toda terna *a,b,c* de inteiros, se $a \leq b,$ então $a \cdot c \leq b \cdot c.$

Feitos esses comentários, acreditamos termos condições de examinar as questões pedagógicas que foram apresentadas no inicio deste trabalho e que constituem nosso principal foco de estudo. Todavia, durante a leitura deste capítulo, acreditamos que a seguinte dúvida pode emergir do nosso texto: será que uma proposta didática que utiliza a dinâmica sobre reta numérica como ferramenta para resolver as operações com números positivos e negativos é válida? Seria a alternativa mais adequada, já que foi através do abandono de tais metáforas que as principais confusões conceituais foram legitimadas?

Nossa resposta para esta pergunta é positiva, por motivos que também já foram citados na introdução deste trabalho e que vamos detalhar no terceiro capítulo.

2 PROPOSTAS SOBRE O ESTUDO DOS NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS

No âmbito do nosso trabalho não temos a pretensão de esgotar a discussão sobre o assunto, pois há uma variedade de pesquisas abordando tal tema. Observamos que no final da década de 60 as pesquisas de Jean Piaget, voltadas para a compreensão do pensamento infantil, desencadearam o interesse de pesquisadores do mundo inteiro pela adição e subtração. Confluindo com essa ideia, Fuson (1992) relata que na década de 80 essas pesquisas se intensificaram, pois ocorreram uma série de modificações no ensino de matemática, devido às seguintes necessidades:

a) existiam evidências de que as crianças utilizam diferentes estruturas conceituais para resolver um problema matemático, portanto isso deveria ser explicitamente considerado em Educação Matemática;

b) o processo de transição de uma sociedade industrial para a sociedade da informação iria provocar mudanças radicais na matemática escolar.

c) havia evidências de deficiências no ensino de matemática da rede escolar estadunidense em comparação com outros países;

Dessa forma, para Fuson, já que as crianças teriam acesso às "novas" tecnologias, então a tarefa dos professores seria a de apresentar uma série de situações problema aos estudantes e ajudá-los a aprender a utilizar calculadoras e outras ferramentas para resolver problemas que nunca tinham sido imaginados pelos adultos.

> *" ... ainda é importante que as crianças aprendam a somar e subtrair; no entanto, é preciso existir uma mudança de foco: ao invés de uma criança responder páginas de problemas numéricos estereotipados, elas poderiam discutir com sua classe soluções alternativas e procedimentos para resolver uma variedade de situações problema."* (FUSON, 1992, p.243, tradução nossa)

Desde então, no mundo inteiro, pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento: Educação Matemática, Psicologia do Desenvolvimento e Psicologia Cognitiva tem produzido pesquisas sobre a adição e subtração dos números inteiros.

Em função disso, na primeira seção deste capítulo, será apresentada a gênese do conceito de número pela criança, segundo Piaget, junto com os princípios teóricos da pesquisa (e proposta) de Reinvenção da Aritmética pelas Crianças desenvolvida pela pesquisadora Constance Kamii. Além disso, serão apresentadas algumas propostas que, de alguma forma, estão relacionadas à nossa. Pretendemos, nesta breve apresentação, indicar a forma como a nossa proposta se relaciona e se diferencia das demais. Para facilitar a análise dessas propostas, acrescentaremos a segunda seção onde serão apresentados trabalhos que não utilizam as chamadas *Tecnologias da Informação e Comunicação* (TICs) e, na terceira, as propostas que utilizam tais tecnologias.

2.1 A CONSTRUÇÃO DO NÚMERO NA CRIANÇA E A REINVENÇÃO DA ARITMÉTICA

As pesquisas de Piaget e seus colaboradores desvendaram o processo da gênese do conceito de número na criança e desencadearam uma série de estudos sobre a aprendizagem das operações matemáticas pela criança. Até então acreditava-se que a criança estava de posse do conceito de número quando sabia contar verbalmente uma coleção de objetos; no entanto, segundo Piaget "*Um sujeito de cinco anos pode muito bem, ser capaz de enumerar os elementos de uma fileira de cinco fichas e pensar que, se se repartir as cinco fichas em dois subconjuntos de 2 e 3 elementos, essas sub coleções não equivalem, em sua reunião, à coleção total inicial*" (1964, p. 15).

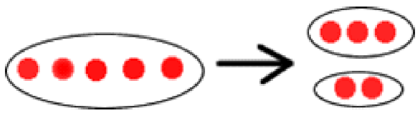


FIGURA 03 – Sub coleções de objetos

De acordo com esse autor, para que a criança construa o conceito de número é necessário que ela perceba que o número de elementos de um conjunto não varia, mesmo que o arranjo espacial seja modificado, tal ação mental é chamada de *Conservação da Quantidade*. Para que isso aconteça é necessário que a criança consiga fazer e desfazer mentalmente a mesma ação, ou melhor, para que a conservação seja possível, é necessário que a criança realize uma propriedade de pensamento chamada de *Reversibilidade*. Em outros termos, o sujeito torna-se capaz de pensar na equivalência da quantidade de fichas, quando ele refaz, em pensamento, a coleção total inicial a partir das duas sub coleções de 2 e 3 fichas.

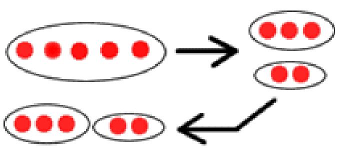


FIGURA 04 – Representação da reversibilidade

No entanto, para esse autor, essas não são as únicas ações mentais envolvidas. Ainda são necessárias: a *Relação de Ordem*, a *Inclusão Hierárquica*, a *Classificação* e a *Seriação*.

A *Relação de Ordem* e a *Inclusão Hierárquica*:

Consideremos a seguinte situação: apresenta-se uma coleção de fichas a uma criança e pede-se que ela determine o número de elementos desse conjunto. Numa determinada fase de seu desenvolvimento, a criança utiliza a relação de *Ordem* para organizar as fichas (muitas vezes formando fileiras), tal estratégia é utilizada para não correr o risco de contar o mesmo elemento duas vezes. No entanto, isso também não significa que a resposta da criança se refere à cardinalidade deste conjunto, mas ao "nome do último elemento" dessa fileira. ou melhor, para a criança cada elemento do coleção tem um nome e a palavra "cinco" serve para indicar o último membro da fila e não a cardinalidade do conjunto, como mostra a Figura 05, logo abaixo

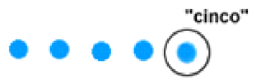


FIGURA 05 : O último elemento de uma coleção

Dessa forma, Piaget conclui que a contagem e a ordenação de elementos não são nem as únicas (e suficientes) ações mentais envolvidas na construção do conceito de número. Ainda é necessário que a criança se refira a todos os elementos como uma estrutura mental de *Inclusão Hierárquica*, ou seja: elas devem incluir mentalmente o "um" em "dois", o "dois" em "três", o "três" em "quatro" e o "quatro" em "cinco", como mostra a Figura 06 abaixo.

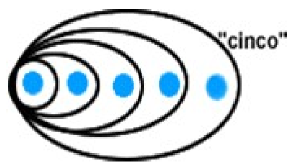


FIGURA 06 : Inclusão Hierárquica

Ou seja, a criança precisa "sintetizar" dois tipos de relações: de *Ordem* e de *Inclusão Hierárquica* (GRECO, GRIZE, PAPERT & PIAGET apud KAMII, 1992, p. 26).

A Classificação é a ação mental de agrupar um conjunto de elementos segundo um critério de semelhança, por exemplo: ao agruparmos objetos geométricos por seu tamanho, cor ou forma estamos definindo *Classes* de objetos. Além disso, para verificar se um objeto pertence ou não ao conjunto, estamos estabelecendo relações de pertinência e de inclusão de classes quando definimos sub coleções.

A *Seriação* é a necessidade lógica de organizar os objetos segundo suas diferenças ordenáveis, por exemplo: organizá-los do menor ao maior (e vice-versa), do mais claro ao mais escuro e etc. Dessa forma cada elemento possui uma posição definida e invariável em relação ao todo.

Para Piaget o número é a coordenação dos números cardinais e ordinais

> "*Um número cardinal é uma classe cujos elementos são concebidos como "unidades" equivalentes umas às outras e, no entanto, distintas, com suas diferenças consistindo então unicamente em que se pode seriá-las e, portanto, ordená-las. Inversamente, os números ordinais são uma série da qual os termos, ao mesmo tempo em que se sucedem segundo as relações de ordem que lhe são atribuídas por suas posições respectivas, constituem igualmente unidades equivalentes umas às outras e, consequentemente, suscetíveis de serem reunidas cardinalmente. Os números são, portanto, simultaneamente cardinais e ordinais, e isso resulta da própria natureza do número, que é um sistema de classes e de relações assimétricas fundidas num todo operatório*". (PIAGET, 1964, p. 219).

Como podemos ver, na concepção de Piaget, o número é uma relação que emerge da ação do sujeito sobre o mundo físico e das relações lógico-matemáticas estabelecidas mentalmente pelo indivíduo durante esse processo. Segundo Kamii (1992, p. 22), esse pesquisador estabelece três tipos diferentes de conhecimento:

O conhecimento físico é o conhecimento das propriedades da realidade externa. A cor vermelha e a forma circular das fichas são exemplos de propriedades físicas que estão nos objetos e podem ser percebidas empiricamente por meio da observação.

O conhecimento Lógico-matemático, por outro lado, consiste em relações criadas por cada indivíduo: em outros termos, as relações de comparação (A=B, A>B ou A<B) ou relações de pertinência não são propriedades extrínsecas à coleção de fichas, elas são propriedades interiorizadas criadas mentalmente pelo indivíduo, portanto não é um conhecimento empírico.

O conhecimento social são aquelas convenções estabelecidas pela sociedade e são arbitrários aos objetos. Por exemplo: utilizar o signo "5" para representar a cardinalidade "cinco" é um conhecimento social, historicamente sabemos os romanos utilizaram o signo

“V” para representar a mesma cardinalidade.

Tendo as pesquisas de Piaget como fundamentação teórica e levando em conta que o conceito de número como não é algo que pode ser ensinado, mas sim é construído individualmente a partir de relações estabelecidas quando uma criança explora uma situação que estimula a busca de soluções, Constance Kamii formula uma proposta de reinvenção da aritmética pela criança. Para defender essa ideia, apresentamos dois argumentos utilizados pela pesquisadora:

O primeiro argumento é de que o ensino tradicional (baseado nos algoritmos) não funciona, pois sua teoria de aprendizagem da aritmética é equivocada. Por exemplo, o valor posicional dos números só é entendido por metade das crianças da terceira série (que participaram de sua pesquisa), no entanto é amplamente ensinado desde a primeira série. Além disso, as técnicas algorítmicas não fazem sentido para as crianças pequenas, pois elas primeiro somam as dezenas para depois somar as unidades (20 + 20 e 1 + 1), já o algoritmo explora justamente o contrário (1 + 1 e 20 + 20).

Como segundo argumento, Kamii diz que ao reinventarem a aritmética torna-se muito mais competentes que crianças com instrução tradicional, visto que: ao invés de reproduzir e memorizar técnicas mecânicas de cálculo, as primeiras desenvolverão procedimentos que estão profundamente ligados à sua intuição e forma de pensar e com isso, terão maior fundamento cognitivo e maior confiança no seu raciocínio.

No entanto a pesquisadora não propõe o abandono dos conhecimentos desenvolvidos pela a humanidade, mas que eles sejam inseridos no ensino à medida que as crianças fiquem mais velhas “*Nas séries iniciais, no entanto, acredito firmemente que elas devam construir um nível após outro por elas mesmas para que possam ter fundamentos sólidos para posteriores aprendizagem. As crianças que se entusiasmam explicando suas próprias ideias irão, a longo prazo, muito mais longe que aquelas podem somente seguir regras de alguém.”* (KAMII, 1992, p. 33).

Gostaríamos de indicar que além de Piaget e Kamii, muitos outros pesquisadores debruçaram-se sobre as operações de números inteiros, entre eles destacamos as pesquisas de Gerárd Vergnaud e Terezinha Nunes, porém vamos aprofundar a discussão de suas ideias no próximo capitulo.

2.2 PROPOSTAS QUE NÃO UTILIZAM TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Adiantamos que a utilização das TICs no nosso trabalho, constitui o grande diferencial em relação às propostas apresentadas nesta secção. Apesar de acreditarmos que esse fato representa um aumento significativo nas possibilidades de interação entre o sujeito (criança) e o objeto (operações em $\mathbb{Z}$), de maneira alguma faremos algum juízo de valor ao comparar nossa proposta com aquelas que não utilizam.

Primeiramente vamos analisar uma proposta didática intitulada: *"Proposta para o estudo dos inteiros"* desenvolvida por professoras vinculadas ao laboratório de matemática da Universidade de Caxias do Sul (UCS) e coordenado pela professora Ana Cristina Possap Cesa.

2.2.1 Proposta Para o Estudo dos Números Positivos e Negativos

O principal objetivo dessa proposta é abordar o conteúdo "números inteiros" de forma lúdica e que desperte o interesse do aluno. Ao todo são 12 atividades divididas em dois grupos: o primeiro refere-se à construção do que elas designam ***Conceito*** de número inteiro; já o segundo grupo refere-se às ***Operações*** com esses números.

O Conceito: Nas atividades de 1 a 4 procura-se desenvolver a ideia de ponto de referência, bem como as relações de longe/perto e à esquerda/direita desse ponto. Vale lembrar que nestas atividades ainda não há preocupação em utilizar os símbolos "+" e "–".

Atividade 1: As relações citadas anteriormente são exploradas a partir de um mapa que representa o trajeto: Escola/Casa do aluno, cujo ponto de referência é a escola. Um dos pontos que consideramos relevante dessa atividade é que parte da experiência de cada aluno e, também, da atividade cognitiva de representação da experiência de ir até escola.

As *Atividades 2* e *3* são apresentadas na forma de jogos, onde as relações – citadas acima – são exploradas a partir do esquema da Figura 07, onde *"X" representa o ponto referencial e, cada "casa", o quanto cada jogador deve andar.*

					X					

FIGURA 07 – Esquema apresentado na atividade.

Na *atividade 2* os alunos caminham sempre no mesmo sentido (os alunos do grupo A andam sempre para a direita, já os alunos do grupo B andam para esquerda). Porém na atividade 3 os alunos jogam o dado duas vezes: na primeira vez andam para a direita e na segunda, para esquerda.

Além do aspecto lúdico, os alunos podem resolver a atividade recorrendo mental ou fisicamente à ação motora de andar e, assim, realizar as operações a partir da contagem dos passos de seus integrantes. Infelizmente Cesa não faz orientações sobre o registro das contas realizadas pelos alunos durante o jogo. Outra característica interessante é que um dos objetivos implícitos do jogo é diferenciar *deslocamento x distância percorrida*, ao propor dois tipos de vencedores: O vencedor da etapa refere-se ao deslocamento em relação à um ponto de referência (ponto de partida ou uma cadeira colocada sobre o esquema), já o vencedor da partida indica a distância percorrida pela equipe.

A partir da *Atividade 4* os jogos começam a utilizar o esquema da Figura 07 representando numa folha ou cartela (até então era desenhado no chão), dessa forma a proposta avança na representação das ações.

Os símbolos "+" e "–" são introduzidos na *Atividade 5* para indicar quando um aluno para à direita ou à esquerda da casa pintada. Note que, até o presente momento, não utiliza-se a segunda interpretação do zero: como ponto de referência.

A *Atividade 6* serve para que o professor – de forma expositiva e utilizando o quadro verde – introduza a reta numérica; defina o conjunto dos números inteiros e estabeleça relações do tipo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Da mesma forma solicita-se que o professor apresente e analise situações reais em que os números inteiros são utilizados, por exemplo: na Geografia temos a latitude, longitude, altitude, profundidade; na história, datas AC./DC.; nas ciências Físico-Química, temperatura, posição e na Economia são utilizadas para representar crédito e débito.

Além disso é definido o que é oposto ou simétrico.

A *Atividade 7* constitui-se num jogo de bingo, cujo principal objetivo é esclarecer eventuais dúvidas sobre a definição de número oposto. Já na *Atividade 8* determina-se o conceito de *Módulo* ou *Valor Absoluto* de um número e sua representação simbólica (|-6|), a partir de questões que envolvem a distância entre o ponto que representa o zero e outros pontos da reta numérica.

As Operações: Este grupo é constituído de quatro atividades que tem como principal objetivo apresentar um significado geométrico para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Na *Atividade 1* é apresentada a interpretação geométrica da adição, partindo do significado de "juntar" desta operação. Um dos exemplos citados é :

(–1) + (+4) = ____ é o mesmo que, *"andar 1 à esquerda do zero e, a partir daí, andar mais quatro à direita"* como nos mostra a Figura 08.

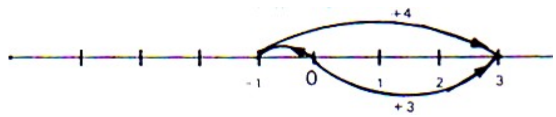


FIGURA 08: Adição em Z

Seria o equivalente de "andar 3 para direita", logo (–1)+ (+4) = +3

A partir de alguns exemplos sugere-se que a operação (+2) + (–3)= –1 pode ser representada por $2-3=-1$ sua justificativa: *"O sinal "+" que precede o 2 pode ser retirado, pois além de ser a primeira parcela, +2 é o número natural 2; o sinal "+" da operação poder eliminado devido ao significado da própria operação (juntar), permanecendo somente o "–" que precede o 3, pois indica apenas o sentido de deslocamento"*

No final dessa atividade Cesa propõe que seja realizada a adição de números grandes, como no exemplo: (–1573)+(–3727), com o objetivo de que seja construída um regrinha para somar números inteiros. Embora a proposta seja clara, acreditamos que as autoras poderiam ter dado maior atenção à este tipo de operação, pois nas pesquisas a repeito do Campo Aditivo de Vergnaud, sabemos que tais operações representam para as crianças um nível de complexidade maior. Na nossa proposta didática, estávamos atentos para tal fato e por isso desenvolvemos atividades para auxiliar neste processo.

Já na *Atividade 2* é definida a operação de subtração da seguinte maneira:

"Consideremos a seguinte situação: (+4)–(–3). Se lembrarmos que –(–3) significa o "oposto de –(–3)" que é +3. Com isso a operação de subtração de números inteiros passa a ser uma adição."

Novamente acreditamos que as autoras são sucintas em demasia ao tratar de tal operação com tanta brevidade. Partindo da nossa vivência como professor, sabemos que tal operação representa uma grande dificuldade para os alunos. Nesse ponto nossa proposta difere consideravelmente, pois são atribuídos dois significados para a subtração e que são atribuídos a partir da forma que uma criança resolve um problema do campo aditivo e que serão delineadas no próximo capítulo.

Na *Atividade 3* são apresentadas a interpretação geométrica para as operações que envolvam a multiplicação. Por exemplo:

<u>1º Exemplo:</u> 2 x (+3) = 3 +3, *"Ou seja significa andar duas vezes 3 para a direta do zero",* como é indicado na Figura 09.

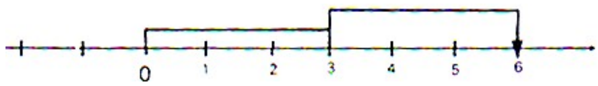


FIGURA 09: Multiplicação – positivo x positivo

<u>2º Exemplo:</u> 2 x (– 3) = (–3)+(–3), *"Ou seja significa andar duas vezes 3 para a esquerda do zero",* como é indicado na Figura 10.

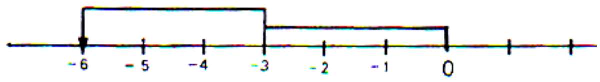


FIGURA 10: Multiplicação – positivo x negativo

Como você pode observar, nestas atividades entende-se a multiplicação como uma soma repetida. No nosso trabalho além dessa interpretação, trabalhamos com uma proposta que – ao resolver problemas do Campo Multiplicativo – as crianças trabalham com a transformação de operadores ou utilizam o raciocínio funcional e que será detalhado no próximo capítulo.

Para justificar a utilização de uma metáfora para o problema da multiplicação do tipo (–2)x(3), as pesquisadoras apresentam o seguinte conjunto de identidades para as crianças justifiquem se são verdadeiras ou falsas.

$0 + (-2) \times 3 = [-(2 \times 3) + (2 \times 3)] + (-2) \times 3.$ É verdadeiro ou falso? Por quê?

$-(2\times3)+[2\times3+(-2)\times3]=-(2\times3)+[(2-2)\times3]$. É verdadeiro ou falso? Por quê?

$-(2\times3)+[(2-2)\times3]=-(2\times3)+0.3$. É verdadeiro ou falso? Por quê?

$-(2\times3)+0.3=-(2\times3)+0$. É verdadeiro ou falso? Por quê?

$-(2x3)+0=-(2x3)$ É verdadeiro ou falso? Por quê?

Note que Cesa utiliza a raciocínio utilizado na demonstração de **P.1** no capítulo anterior. As autoras aconselham que esse procedimento seja utilizado com vários exemplos.

Dessa forma (–2) x (3)= –6 “Seria andar duas vezes 3 para a direita do zero e tomar o oposto”:

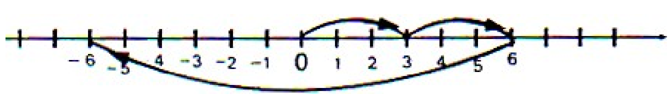


FIGURA 11: Multiplicação – *negativo x positivo*

Já (–2) x (–3)= – 6 *“Seria andar duas vezes 3 para a esquerda do zero e tomar o oposto”:*

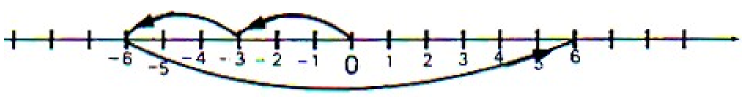


FIGURA 12: Multiplicação de dois números negativos

Ainda sugere-se que após a resolução de vários exercícios de fixação, se deve procurar determinar uma regra para tais operações.

Por último, na *Atividade 4* são exploradas operações que envolvam a divisão. E de forma, breve, as autoras exploram a ideia de que a divisão é a operação inversa da multiplicação. Por exemplo:

(–24):8= –3 pois 8x(–3)=(–4).

(–63):(–9)= +7, pois (–9)x(+7)=(–63).

Após realizar várias operações feitas, escreve=se uma “regra prática” para tais operações.

Procuramos expor em detalhes essa proposta, pois as semelhanças são maiores que as diferenças entre elas, muitas das definições apresentadas nesse trabalho serão utilizadas na nossa proposta. Também ressaltamos que tais diferenças surgem a partir do momento em que decidimos formular uma proposta à luz de uma teoria pedagógica, neste caso, a teoria de Campos Conceituais.

2.2. 2 A Dualidade do Zero na Transição da Arimética Para a Álgebra

O principal objetivo desse artigo é mostrar que o reconhecimento das dualidades presentes no sinal de igualdade (operador-equivalência), no sinal de menos (unário – binário) e no zero (nulidade – totalidade) constitui uma maneira possível para alcançar o conjunto dos números inteiros através da extensão do domínio dos números naturais por estudantes de 12 a 13 anos e que estão no processo de transição da aritmética para a álgebra . Para isso *Gallardo & Hernandez* aplicaram um questionário e realizaram entrevistas clínicas[4] individuais com 16 crianças da *8^TH grade level*. Com o objetivo de reconhecer suas concepções sobre os conceitos acima listados, tanto no questionário quanto na entrevista foi utilizado um material chamado *Blocos Algébricos (Figura 13)* e que serviu como recurso para exibir as diferentes concepções cognitivas dos estudantes quando estão em frente à novos conceitos e operações matemática.

O que são os *Blocos Algébricos*? É um material pedagógico que auxilia no ensino de álgebra, já que possibilita a representação gráfica de um arranjamento fixo de números, operações numéricas e expressões algébricas. Os blocos da cor preta representam termos positivos, já os da cor branca representam os termos negativos. Veja o exemplo abaixo.

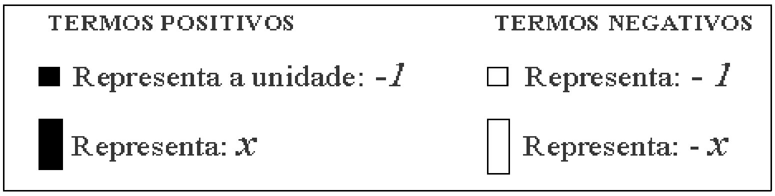


FIGURA 13: Blocos Algébricos

Assim as crianças podem representar as expressões algébricas da seguinte forma:

■ ■ ■ representa 3; ▯▯▯ ■ ■ representam (–3x) + (+2)

---

[4]É um método de entrevista onde, através de perguntas ou apresentando situações, o entrevistador interage com o entrevistado com o objetivo de entender suas concepções e hipóteses sobre algo. No decorrer da entrevista, caso seja necessário, o entrevistador pode apresentar situações que contraponha as afirmações do entrevistado.

No entanto, neste artigo, os autores apresentam e analisam os resultados de apenas uma aluna, aquela que apresentou o maior número de respostas corretas e que demonstrou maior habilidade na utilização dos Blocos Algébricos para justificar suas respostas.

Antes de realizarem as entrevistas e as atividades os autores citam que realizaram um estudo prévio e aprofundado sobre a epistemologia histórica de tal conceito. Abaixo apresentamos as suas questões norteadoras, observando que muitas delas são semelhantes as perguntas que formulamos e que fizeram/fazem parte do nosso trabalho.

a) Como o zero contribui para a extensão do domínio numérico dos números naturais aos inteiros?

b) Os estudantes consideram zero um número?

c) Eles estão cientes da natureza dual do zero?

e) A história da análise do zero como um número contribui para o entendimento dos conflitos apresentados pelos estudantes de hoje em dia?

f) Que mudanças cognitivas são provocadas nos estudantes pelo ensino dos inteiros através de ambientes providos de tecnologias ? (2005, p.17)

Seu trabalho apoia-se nas ideias de Piaget e Filloy: Piaget (1933 apud Gallardo & Hernandez) expressou que quando analisamos as explicações dadas por uma criança para um problema, podemos observar que seu pensamento é orientado por um conjunto de crenças íntimas, que chamamos de sistemas de tendências. Porém ela não é capaz de expressá-lo explicitamente, porque ela ainda não tomou consciência dele. Na mesma direção Filloy (1999 apud Gallardo & Hernandez) diz que a existência dessas tendencias são devidas às estruturas cognitivas do sujeito relativas a cada estágio de desenvolvimento e que privilegiam determinados mecanismos de ação, bem como diferentes maneiras de codificar e decodificar mensagens matemáticas. Segundo eles essas "tendências cognitivas" foram observadas em duas turmas e durante a entrevistas clínicas. Nesse trabalho, são apresentadas duas das oito tendências identificadas por Filloy. São elas:

Conferindo sentido intermediário: esta tendência surge nas soluções da adição e subtração de números inteiros quando as crianças – que se encontram num processo de transição da aritmética para a álgebra – atribuem múltiplos significados aos números negativos. Nesta etapa os estudantes apresentam alguns problemas, pois o significado atribuído a esses números depende do contexto em que eles aparecem, por exemplo: como coeficientes, constantes ou soluções de uma equação. A partir de um estudo empírico, Gallardo & Hernandez identificaram cinco níveis desses significados atribuídos pelas crianças e que provocam problemas na capacidade de operar com tais números.

Subtraendo (*Subtrahend*[5]): é quando o significado de número negativo surge a partir da subtração de dois números naturais, $a - b$ (e onde a é sempre maior que b), ou seja, se está subordinada à cardinalidade do número.

Número com Sinal (*Signed Number*): pode se dizer que é um número natural com sinal, ou seja, é quando se acrescenta o sinal de mais ou de menos ao um número, sem necessariamente representar uma extensão do noção de número ou da adição.

Número Relativo: é quando a criança utiliza a reta numérica para definir um número negativo ou positivo, através da simetria em relação ao zero dos pontos da reta numérica.

Número Isolado: é quando se obtém um número negativo como resultado de uma operação ou solução de um problema ou equação.

Número Negativo Formal: é a definição matemática dos números inteiros que abrange números positivos e negativos. Usualmente tal noção não é observada em crianças de 12-13 anos.

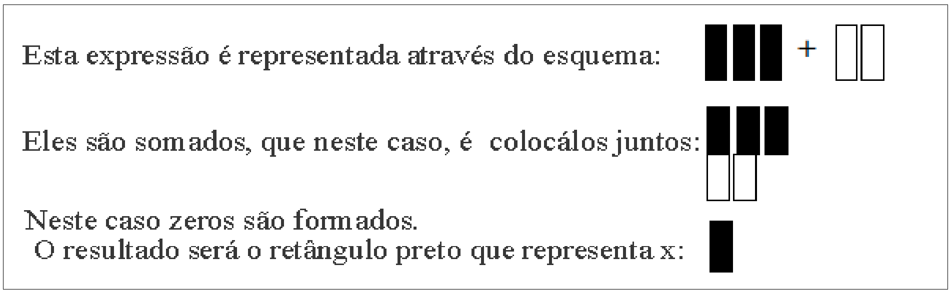
A presença do mecanismo inibitório: É quando ocorre o não reconhecimento da subtração de um número maior por um menor. Tal concepção prejudica o conceito geral de número em sentenças abertas. Também podemos identificar a presença de tal mecanismo quando a presença de uma solução negativa inibe ou atrapalha a aplicação das regras operatórias envolvidas na solução e já estão estavam "bem entendidas".

O INÍCIO: Os autores apresentam uma proposta de ensino para construir o conjunto dos números inteiros pela extensão de $\mathbb{N}$. Para isso utilizam os *Blocos Algébricos* como recurso pedagógico, partindo da dualidade do significado atribuído ao zero. A começar, tal dualidade foi explorada da seguinte forma: sendo o zero o elemento nulo da adição, temos: $a = a + 0 = a + 0 + 0 = \ldots$ Por outro lado, sabe-se que $a + (-a) = 0$, portanto a primeira expressão apresenta uma infinidade de duplas de números opostos que se anulam, ou seja, utiliza-se o zero como uma totalidade que se anula. Segundo os autores, um dos benefícios dos *Blocos Algébricos*[6] é que ele estende a contagem (propriedade dos números naturais) aos

[5] Como a tradução do artigo é nossa, optamos em apresentar a expressão em inglês designada por Gallardo & Hernandez.
[6] O nome em inglês desse material é *The Algebraic Blocks Model*, sua estrutura é muito similar a do Algeplan, que é um material que pretende dar um significado físico às expressões algébricas.

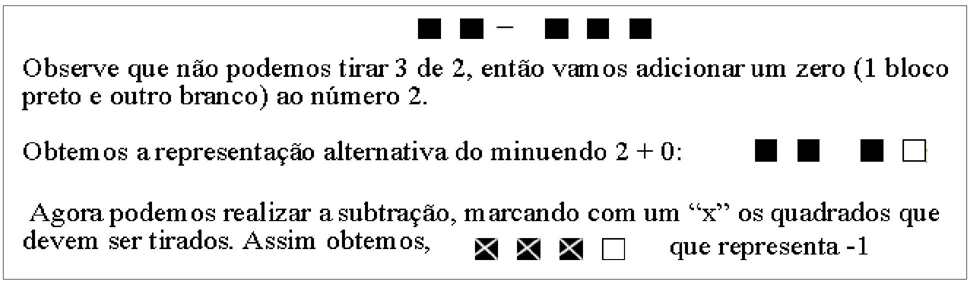
negativos. Assim tal característica deixa de ser exclusividade dos números positivos, já que essas "novas entidades" começam a possuí-la. Em função disso, passa existir outros tipos de números que, ao serem somados, se anularão mutuamente (os números simétricos).

Neste material a ação de somar é realizada a partir do chamado *"Princípio Fundamental dos Blocos"* que é agrupar blocos de cor opostas com o objetivo de formar zeros. Para isso os autores apresentam como exemplo a adição de $3x + (-2x) =$



QUADRO 01: Expressões Algébricas

Já a ação de subtração possui o significado de tirar do minuendo a quantidade de elementos do subtraendo. E quando o minuendo é maior que o subtraendo, marca-se com um *"x"* a quantidade subtraída, por exemplo: $2 - 3 =$



QUADRO 02: A subtração

As Entrevistas:

Foram realizadas entrevistas com 16 alunos de 8ª série que já haviam utilizado os B.A. aprender os seguintes tópicos:

1 Identificar e representar com B.A. números positivos e negativos.

2 Resolver as operações de adição e subtração representadas no B.A. utilizando a linguagem aritmética e algébrica.
3 Resolver adições e subtrações expressadas em aritmética e na linguagem algébrica.
4 Simplificar sentenças abertas.
5 Substituir qualquer valor numérico nas expressões algébricas.
6 Resolver equações lineares.

Note que nossas propostas se diferenciam neste aspecto, os autores procuram identificar as concepções cognitivas de estudantes que já aprenderam a realizar operações com números negativos e expressões algébricas. Enquanto que, na nossa proposta, o público alvo são estudantes que estão dando seus "primeiros passos" nesse tipo de operações. Sendo assim, ao ler tal artigo, nos questionamos:

Será que o desenvolvimento das concepções cognitivas – que permitem ultrapassar as dúvidas referentes as operações em Z – só ocorre na medida em que o raciocínio algébrico (não sei se posso usar essa expressão) também se desenvolve? Isso indica a necessidade de coordenação entre sistemas aritméticos e algébricos?

Se isso de fato ocorre, será que isso indica que a construção das operações em Z ocorre de forma tardia nos crianças?

Abaixo apresentamos a análise que os autores fizeram das resposta de uma única criança que melhor conseguiu explicar suas ações através dos *Blocos Algébricos*.

<u>1º Caso</u>: Para adição □□□ □□ MAIS ■■■■ ■■■ ela escreve – 5 + 7 = . e afirma que *"é o mesmo que fazer sete menos cinco igual a dois"* ela escreve a expressão correta à esquerda e transforma a adição em subtração (– 5) + (+ 7) = 7 – 5. No entanto a primeira é uma adição de números inteiros e a segunda é uma subtração de números naturais. Neste caso a criança expressa a tendencia cognitiva de *Subtraendo* para o número negativo – 5.

<u>2º Caso</u>: Diante da subtração ■■■■ ■■■■ – ■■ ■■ ela escreve: + *8* – + *4* , observa previamente a expressão e afirma *"é o mesmo que oito menos 4, porque o sinal de menos, porque menos com mais é menos"* Segundo os autores a criança aplica a regra de sinais da multiplicação de forma mecanicamente sem entendê-la. Esse fato indica que ela considera a subtração de números naturais e não a estende para a subtração de números positivos e negativos.

□□□□ – ■■■■
3º Caso: Para representar: □□□□ ■■■ ela escreve: – 8 – (+ 7)= – 1. Novamente observa a expressão e diz *“ isto é como se eu fizesse menos 8 mais 7, igual a menos 1”.* Ao ser questionada sobre o porquê que ela faz uma subtração, ela responde que: *“ e não não posso subtrair porque 7 é maior que o 8 negativo. Eu fiz uma adição.* Ela escreve

– 8 + 7 = – 1 = – 1 – 7 + 7 = – 1.

Este fato é devido à utilização do B.A. para desarranjar os números e “formar zeros”, assim ela transferiu o que aprendeu para a sintaxe ao formar zeros: – 7 + 7=0

Apesar de resolver incorretamente, para os autores isso indica que ela admite a soma de números com sinais: - 8 + 7 = -1 e que essa aceitação é que torna possível introduzir o zero como uma soma de simétricos. Assim a dualidade do zero contribui para extensão da adição para além dos números naturais. Para Gallardo & Hernández tais fatos levam a afirmação que a criança reconhece os números com sinais e indicam que ela possui a hipótese cognitiva 2 (“*Signed Number”*); uma vez que ela diz *“oito negativo”*; *“números relativos”* e escreve *“– 7 + 7”* e isola “*– 1”.*

■■■■ ■ – □□
4º Caso: Quanto à representação: ■■■■ ■ □□ ela escreve 10 – (– 4) =. e explica que *“ este sinal é uma operação e o outro sinal pertence ao número”*. Ela soma *“quando existe dois sinais como esses, é como se somasse”.* Isso significa que ela diferencia o sinal da número (unidade) e o sinal da operação (binário), assim então, ela reconhece os sinais, mas não o número negativo 4 em si. Como sua explicação baseia-se na sua ação sobre os B.A. e não da expressão sintática: 10 – (– 4) =. Ela aplica a lei dos sinais (–) (–) = (+), desaparecendo a subtração e, consequentemente, a possibilidade de estender o domínio numérico dos números naturais aos inteiros.

Para os autores o fato mais relevante sobre a performance da estudante é quando colocada em frente à expressão: (+8) – (+10)=___ . Ao resolvê-la, primeiro ela escreve que + 8 – 10 = 2. E diz*“Não! Isso é menos dois”*. Logo em seguida, corrige para: + 8 – 10 = – 2. Ela explica que “*Por que isso é como se fosse uma subtração, dez menos oito é dois, mas esse número (-10), é negativo e maior que 8, o resultado é negativo”*. Com isso é possível perceber que a estudante considera como uma subtração de números naturais ao expressar oralmente *“ 10 menos 8”* , simultaneamente, relaciona o sinal de menos ao número dez na sentença + 8 – 10 = – 2. Isso indica que ela leu a mesma expressão de duas maneiras, uma da direta para a esquerda da subtração *“dez menos oito”* e outra da esquerda para direita onde recupera o número 10 como um número negativo, ou seja, *“– 10”*.

Para os autores, isso indica uma *“dualidade incorreta para um único sinal”* e pode ser interpretada como um progresso, embora incipiente para a extensão do domínio numérico desde que ela foi capaz de subtrair um número maior em valor absoluto de um número menor de valor absoluto através de uma “concepção pessoal” da dualidade de um sinal.

Gallardo & Hernandez observaram que, ao resolver equações, a estudante utiliza sempre o mesmo método: adicionando ou subtraindo a forma aditiva inversa em ambos os lados da igualdade. Também constataram que ela resolveu as equações sempre com sucesso com o auxílio dos *Blocos Algébricos* e as transferiu para a linguagem algébrica sem dificuldade. Isso significa que ela reconhece a característica dual da igualdade (como uma igualdade numérica que a utilizamos para obter um resultado e como uma relação de equivalência entre ambos membros da igualdade.

Em contrapartida, a estudante comete erros quando as equações são apresentadas antes, por exemplo: Na equação 6 – x = 12, a estudante adicionou +6 em ambos os lados da igualdade: 6 + 6 – x = 12 + 6 e fala em seguida: “*Seria melhor resolver com os quadrados”*
Logo em seguida ela forma a seguinte configuração apresentada na Figura 14A e fala “*Eu tenho que modificar as cores dos quadrados”* e chega na configuração na Figura 14B . No entanto ela ficou desconfiada do resultado final e disse “*a resposta é – 6 ?”* ao ser questionada sobre sua dúvida, responde: “*Porque agora x é positivo, mas o seis ainda está negativo”*.

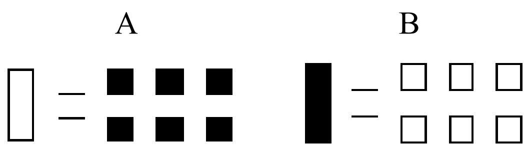


FIGURA 014: Operações com os Blocos Algébricos

Para os autores essa dificuldade em reconhecer um número negativo como solução de equação, (mesmo quando ela já havia reconhecido os números negativos como resultados de operações) indica que a estudante supunha que as soluções obtidas ao utilizar a igualdade como equivalência de expressões algébricas são positivas. Portanto, isso indica que os valores negativos ainda são um conhecimento que precisa ser consolidado por ela.

Discussão final

Em seu trabalho, Gallardo & Hernández apresentam uma análise e identificam as concepções de uma única aluna, no entanto vamos tomar a liberdade de apresentar suas conclusões de forma geral, portanto utilizaremos a expressão pessoa.

Segundo os autores, as dificuldades a respeito dos negativos continuam presentes em pessoas que estão em processo de transição da aritmética para álgebra, mas demonstram perspectivas de sucesso para a extensão numérica. No entanto, se a pessoa apresenta as hipóteses do nível *Subtraendo* ou não consegue aplicar a regra de sinais da multiplicação, ela não será capaz de chegar até os inteiros.

Por outro lado, para os autores, se as hipóteses da criança estão num nível de Número com Sinal (*Signed Number*), Número Relativo (Relative Number) ou Número Isolado, e realiza a extensão da operação de subtração (através da dualidade do sinal de menos: unário e binário), então ela conseguirá adicionar sinal aos números (através da dualidade do zero: nulidade e totalidade) e conhecer um método geral para a solução das equações (através da dualidade da igualdade: simbolo de operação – relação de equivalência).

Sendo assim, segundo eles, a entrevistada apresentou a possibilidade de aceitar outros números diferentes dos naturais, tal afirmação confirma três questões sobre a contribuição da dualidade do zero para a extensão do domínio numérico, através do B.A. e que foram apresentadas nas perguntas (*a*, *b* e *c*). Além disso, a entrevistada foi capaz de realizar operações com zero, este fato comprova que ela considera o zero um número.

Segundo os autores isso também foi observado na sua produção escrita, onde as três dualidades foram empregadas ao utilizar os B.A. e transferidas da linguagem aritmética para a algébrica. No entanto, Gallardo & Hernández alegam que não podem afirmar completamente que este fato é algo estável ou que a entrevistada está com suas hipóteses estáveis, nem que seja algo referente a uma fase de transição do conhecimento ou se está relacionado ao modelo de ensino que a entrevistada aprendeu. No entanto, eles observaram que a criança realiza com sucesso todas as operações que envolvem números positivos, porém os obstáculos persistem nas operações que envolvem os negativos e que inibem a operação de subtração, portanto uma noção mais ampla de número, já que as raízes negativas não foram aceitas.

Acreditamos que o fato de Gallardo & Hernández identificarem que os obstáculos referentes aos números negativos persistem em crianças que já estão realizando operações com expressões algébricas, mesmo com relativo sucesso, e um fato importante para a nossa pesquisa.

2.3 PROPOSTAS QUE UTILIZAM TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Nesta seção nos parece importante fazer uma breve discussão sobre no que a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) se diferenciam das propostas apresentadas na seção anterior. Afinal de contas: quais são os motivos e as vantagens de produzir uma proposta para um ambiente digital, quando essa poderia ser feita numa atividade prática de sala de aula?

Um desses motivos foi apresentado na introdução desse trabalho de pesquisa, onde apontamos que o uso das TICs estão transformando nossa sociedade e, consequentemente, a Educação. O mesmo ocorre com a Matemática e a Educação Matemática. Kaput comenta que existem diferentes tipos de Matemática (Álgebra, Geometria, Análise etc.) e há diferentes dimensões epistêmicas sobre elas (a matemática como um conjunto de regras; como uma linguagem; como forma e modos de validação), todas elas se relacionam com a tecnologia de diferentes maneiras (KAPUT, 2007, p. 171). Isso não poderia ser diferente na educação matemática, já que a reconhecemos como uma das áreas da matemática que, no contexto escolar, produz sua própria matemática (através da pesquisa em educação) e utiliza seus próprios modelos matemáticos, linguagens e materiais.

Dentre as diferentes TICs aplicadas à educação, no nosso entendimento a internet é a ferramenta tecnológica que se destaca. Através dela acompanhamos o surgimento de uma cultura em rede e, em função dessa nova forma de se organizar, pensamos que a cultura escolar também deve (ou deveria) se transformar para um modelo mais dinâmico e interativo: um modelo de aprendizagem em rede. Com o surgimento de cursos de EaD – gera-se uma demanda por objetos digitais que abordem os conteúdos da educação básica e que estejam disponíveis a esse público e, também, aos estudantes ou professores interessados em pesquisar sobre o assunto. Sendo assim, entendemos que a produção de materiais digitais é uma necessidade da sociedade.

Por consequência, torna-se importante pesquisar quais são os recursos disponíveis na web e analisar se eles atendem às necessidades dessa nova demanda. No entanto, antes disso teríamos que identificar quais são elas. Para identificá-las, utilizaremos alguns resultados das pesquisas em EaD como referência.

Segundo NEVADO, CARVALHO E MENEZES

> (…) a EaD pressupõe que pensar, experimentar, avaliar divulgar sejam ações que se realizam em todos os momentos da existência da pessoa e se, de um lado, prescinde de tempos e espaços fechados, de outro, é fundamental a troca entre os sujeitos que, em comunidades de aprendizagem, conferem sentido ao que se denomina conhecimento situado. (NEVADO, CARVALHO E MENEZES, 2005, p. 10)

Na nossa avaliação essa pressuposição não é exclusividade da EaD, mas da educação como um todo, pois a troca entre os sujeitos em comunidades de aprendizagem é fundamental, seja na modalidade à distância ou presencial. Essa ideia não é nova, Piaget (1947) afirmou que a interação social é indispensável para que a criança desenvolva uma lógica, já que " *A criança procura evitar contradizer-se em presença de outras pessoas*" (PIAGET apud KAMII, 1986, p. 51). Além disso, é a partir da interação social que qualquer pessoa entra em contato com diferentes pontos de vista que podem gerar o que Piaget chamou de *Conflito Cognitivo*. Portanto, é o contexto social que incentiva o sujeito a pensar sobre os outros pontos de vista em relação ao seu próprio, provacando um processo de descentração que é fundamental para o desenvolvimento lógico-matemático, moral e social.

Sendo assim, as TICs propõem um novo paradigma social e educacional. Para Fagundes "*estamos vivendo um processo de rápidas transformações nas formas de ser, viver, relacionar-se. (...) Torna-se quase impossível planejar e definir com antecedência o que deve ser aprendido e que competências são necessárias para habitar esse "mundo novo*" (1999, p. 13).

Já é senso comum (na mídia, nas escolas, em congressos, nas empresas, etc.) que a sociedade exige sujeitos criativos, autônomos, cooperativos, capazes de interpretar e resolver problemas em diferentes situações não previsíveis. Poderíamos questionar as razões pelas quais a sociedade está a exigir esse perfil de sujeitos, mas neste trabalho nos interessa saber quais são as transformações necessárias para que a escola corresponda a essas necessidades. Dessa forma, a escola precisa adequar-se a tal contexto e, portanto, passar de um modelo baseado na reprodução de conhecimento, para um modelo de produção de conhecimento.[7] Conforme Costa, Fagundes e Nevado

> (…) a educação não pode apenas ocupar o papel de transmissão de informações valores, nem o professor de agente dessa transmissão, nem as TICs podem ser vistas como ferramentas para "otimizar" a transmissão ou a gestão da informação. É necessário, portanto, uma proposta heurística e construtiva para expansão das capacidades individuais e grupais e um novo modelo na formação

[7] O leitor pode estar se perguntando: Por que o autor escolheu uma citação de 1947 ao invés de procurar pesquisas mais atuais? Nosso interesse é (re)afirmar que, desde 1947, Piaget não desconsidera a importância do contexto social, ao contrário do que é afirmado por inúmeros pesquisadores em diferentes congressos da área de educação.

> de professores (COSTA, FAGUNDES, NEVADO p. 02, 1998).

Acreditamos que a concepção construtivista atende às necessidades desse novo modelo, pois nessa perspectiva o conhecimento não é algo fixo e acabado, ele surge de um contexto de trocas e de um processo de reflexões sobre aquilo que se conhece e o que se quer conhecer. Por conseguinte, o papel do professor e do estudante deve se transformar, segundo Nevado, Carvalho e Menezes

> Ao professor cabe a função de promover a aprendizagem, estimular o diálogo, provocar a emergência de situações de dúvidas (desequilíbrios) e apoiar as reconstruções (novos conhecimentos. Ao aluno cabe uma postura ativa. A ele cabe experimentar, compartilhar, criar, interagir para compreender (NEVADO, CARVALHO e MENEZES, p.30, 2005).

Nessa perspectiva, os ambientes digitais devem constituir-se num espaço que propicie a interação e as trocas entre os sujeitos. Em relação aos objetos digitais, eles devem promover a ação do sujeito, através de situações que possibilitem a experimentação, o levantamento de hipóteses, para que o sujeito posso testá-las e (re)avaliar, levantar novas hipóteses e etc.

Com o aumento da facilidade de acesso à web, não podemos negar o seu grande potencial de divulgação e disseminação de ideias. Em função disso, pensamos que – ao construir um conjunto de objetos virtuais de aprendizagem segundo uma concepção construtivista – poderemos contribuir na formação continuada dos professores e que sirvam como instrumentos que permitam uma possível mudança de paradigma educacional. Sendo essa uma das vantagens de produzir uma proposta para um ambiente digital, ao invés de ser realizada como uma atividade prática da sala de aula.

No entanto não podemos ser ingênuos e acreditar que a simples confecção de um objeto e de uma proposta seja suficiente para transformar – sozinhas – as concepções dos professores. Segundo Basso *"Pensar que mudanças - necessárias – na Escola ocorrerão a partir da implantação de ambientes informatizados, com acesso a recursos de Educação à Distância, sem considerar como básico a formação de usuários e produtores de conhecimento, redunda no fracasso"*(p. 03, 1999).

Tal fracasso foi, historicamente, observado nas primeiras inserções do uso de computadores na escola, pesquisadores como Papert e Kaput, citam o exemplo da CAI (*Computer Aided Instruction – ou Instrução Auxiliada por Computador*) .

> Basicamente, estes programas davam instruções para os alunos e indicava o acerto (ou erro) do estudante nas questões propostas. Os tutoriais matemáticos tendem a se basear no ensino guiado de sistemas de notações, tanto aritméticos, algébricos ou geométricos. Designers transferiram o sistema tradicional de

> ensino para um novo meio usando a característica visual do computador, porém estes programas se mostram fracos em termos curriculares e pedagógicos. (KAPUT, 1992, p. 519)

Papert vai um pouco mais adiante e analisa esse fato, tendo como referência a teoria piagetiana: "*Todo funcionamento mental, disse ele* (referindo-se a Piaget)*, possui duas facetas, que ele chama de* ***assimilação*** *(mudar sua representação de mundo para encaixar-se aos seus modos de pensar) e* ***acomodação*** *(adaptar seus modos de pensar para encaixar-se ao mundo)"* (p. 43, 1992). Dessa forma Papert diz que a escola não se deixou mudar, mas adaptou os tradicionais exercícios de repetição e memorização ao computador, realizando uma uma assimilação dessa nova ferramenta.

Diante das dúvidas referentes à aprendizagem das operações com números positivos e negativos, da existência de uma demanda por objetos virtuais que abordem conteúdos da educação básica, sob uma concepção construtivista, e que contribuam na formação de professores para o abandono da perspectiva de *ensino em rede* para uma *aprendizagem em rede,* surge a necessidade de avaliar os tipos de materiais que estão disponíveis na web.

2.3.1 Objetos Digitais disponíveis na Web

A partir da nossa experiência – tanto na formação de professores quanto no convívio com colegas no ambiente escolar – observamos que muitos professores veem como empecilho a utilização de objetos digitais produzidos em línguas estrangeiras – em função disso restringimos nossa busca para objetos digitais em português. Aliado a esse fato, também tínhamos a impressão de que havia poucos jogos e materiais que contribuíssem para a construção de estratégias para as operações com números positivos e negativos e que estivessem disponíveis na internet.

Nessa busca encontramos uma série de materiais digitais na forma de textos (páginas html, pdf, relatos em blogs, exercícios de livros) e com sugestões de atividades ou jogos para que os professores apliquem em sala de aula. Outra característica desse material, é que a maioria desses textos são voltados para a preparação de concursos e vestibulares. Por outro lado, nosso interesse era encontrar objetos digitais (OD) do tipo jogos virtuais ou, pelo menos, outro tipo material que permitisse uma maior interação entre criança/máquina ou um ambiente em que os estudantes pudessem realizar suas próprias representações.

Feitas essas ressalvas, apresentamos os materiais encontrados. Porém já adiantamos que a maioria dos ODs se enquadram naqueles citados por Papert, são adaptações dos tradicionais exercícios de repetição e memorização ao computador.

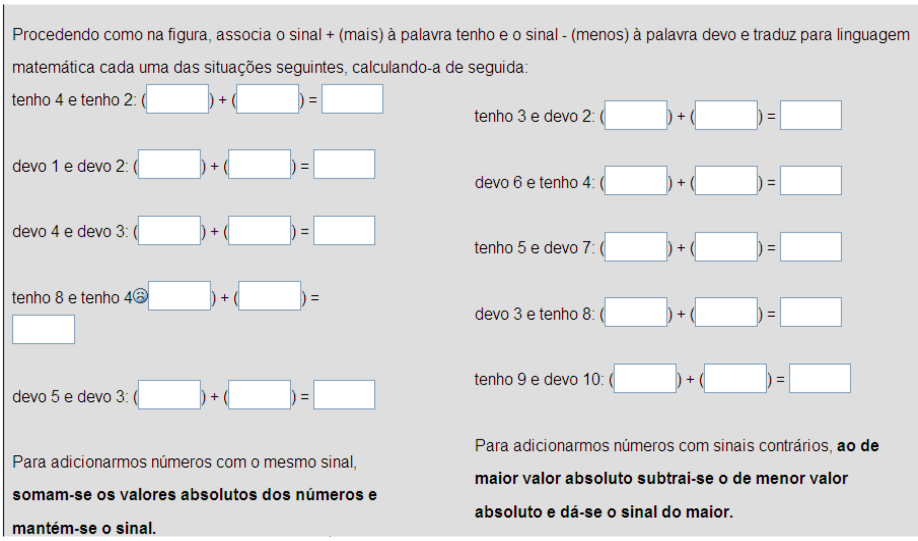
OBJETOS DO AGRUPAMENTO VERTICAL DAS ESCOLAS DE VILA D'ESTE

Encontramos dois objetos numa plataforma *Moodle,* no endereço: http://agvilaeste-m.ccems.pt/course/view.php?id=412 (acessado em 02/05/2010). Esse é um ambiente criado pelo *Agrupamento Vertical das Escolas de Vila D'Este*, que é um programa de formação continuada para os docentes de uma cidade portuguesa. Pode-se acessá-los como visitante. Nesse ambiente há uma lista de objetos digitais voltados par ao ensino de matemática, nessa lista dois objetos nos chamaram a atenção:

(a) Adição de Números Inteiros relativos:

Esse material está disponível no endereço http://agvilaeste-m.ccems.pt/file.php/412/4_Numeros_Racionais/adicao.htm e o motivo de o selecionarmos para estar nesse trabalhos, e porque ele é voltado para o estudante e não para o professor. Além disso, o objeto, apresentado na Figura 15 abaixo, permite certa interatividade por parte do estudante, já que os sujeitos podem colocar os valores para serem testados. No entanto é uma clássica reprodução de exercícios presentes em livros, onde há um exemplo de como representamos os problemas via uma equação numérica e logo em seguida o sujeito repetí-lo modelo acima.

Podemos identificar que o objetivo desse OD é introduzir a regra de sinais para a adição de números positivos e negativos, o que difere da nossa proposta de criar objetos que estão voltados para o desenvolvimento de estratégias. Um outro aspecto negativo desse objeto é o fato de mascarar uma abordagem de resolução de problemas, já que não há espaço para diferentes estratégias de resolução.



Procedendo como na figura, associa o sinal + (mais) à palavra tenho e o sinal - (menos) à palavra devo e traduz para linguagem matemática cada uma das situações seguintes, calculando-a de seguida:

tenho 4 e tenho 2: ( ) + ( ) =

devo 1 e devo 2: ( ) + ( ) =

devo 4 e devo 3: ( ) + ( ) =

tenho 8 e tenho 4( ) + ( ) =

devo 5 e devo 3: ( ) + ( ) =

Para adicionarmos números com o mesmo sinal, **somam-se os valores absolutos dos números e mantém-se o sinal.**

tenho 3 e devo 2: ( ) + ( ) =

devo 6 e tenho 4: ( ) + ( ) =

tenho 5 e devo 7: ( ) + ( ) =

devo 3 e tenho 8: ( ) + ( ) =

tenho 9 e devo 10: ( ) + ( ) =

Para adicionarmos números com sinais contrários, **ao de maior valor absoluto subtrai-se o de menor valor absoluto e dá-se o sinal do maior.**

FIGURA 015: Exercício online

(b) Ordenar Número Inteiros;

Nesse OD o estudante deve ordenar na ordem crescente alguns números inteiros na ordem crescente, arrastando os números na tela do computador.

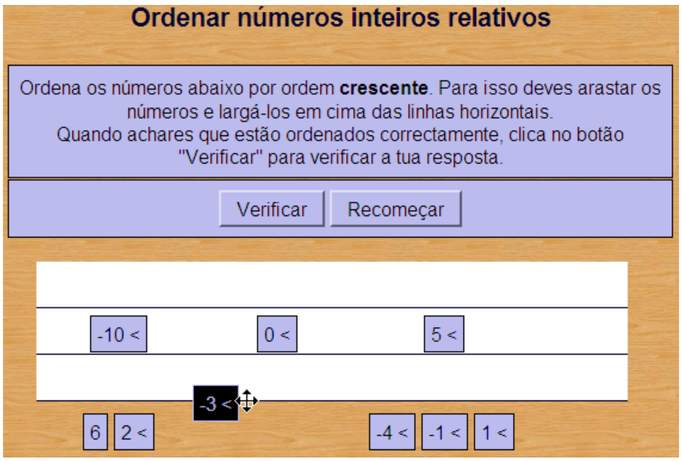


FIGURA 016: OD de Relação de ordem

Quando o estudante tiver terminado e quiser comprovar se acertou (ou não) basta clicar no botão *Verificar.* Abaixo podemos observar o *feedback* dado pelo computador.

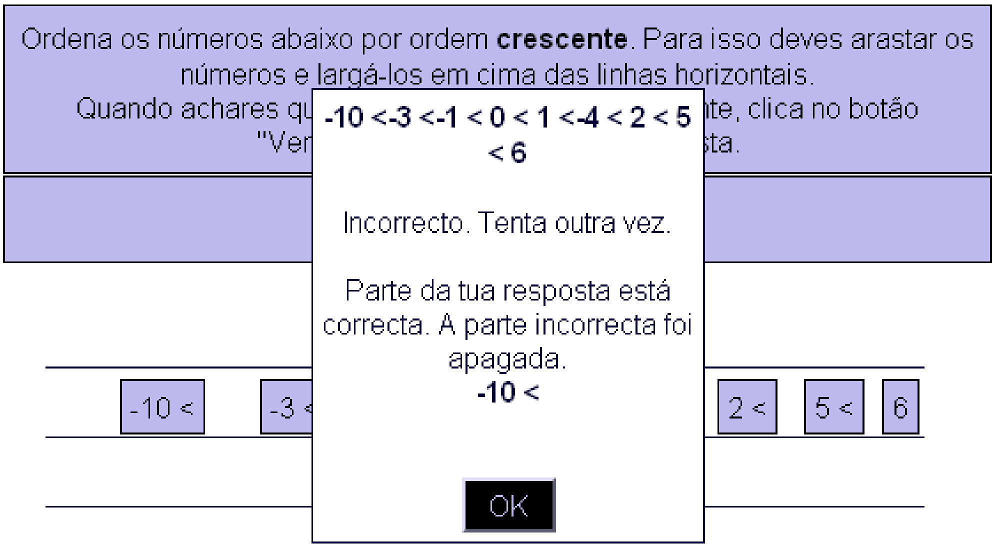


FIGURA 017: Aviso de erro

Outro aspecto negativo desse jogo é que ele inicia diretamente num nível simbólico, quando utiliza as inequações. Na nossa proposta, desenvolvemos um objeto digital similar a esse, porém é oferecida a reta numérica como ferramenta de apoio, onde o estudante poderá recorrer a ela para ajudá-lo na ordenação.

(c) *Operações em Z*

Esse Objeto Digital foi produzido com planilha eletrônica, cabe ao estudante resolver as operações proposta no jogo.

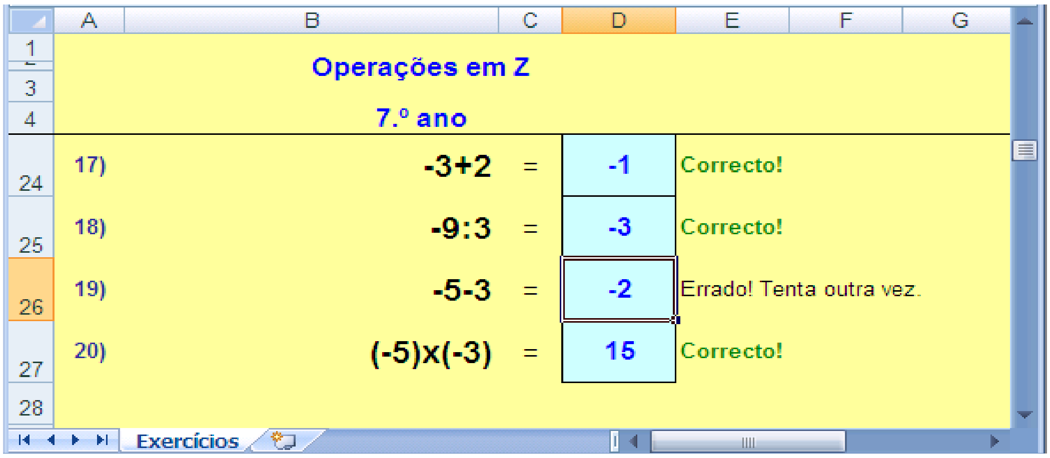


FIGURA 018: OD feito em planilha eletrônica

Mesmo que exista uma certa interatividade entre sujeito/máquina em ambos os Ods, porém podemos identificar a clássica reprodução de exercícios tradicionais.

Embora tais objetos apresentem uma concepção de reprodução de conhecimento, ressaltamos que tais objetos são produções de docentes pertencentes a uma comunidade escolar. Sendo assim tomamos o cuidado de ressaltar a importância desses materiais, pois são produtos de um grupo de profissionais, que estão produzindo e refletindo sobre a utilização das TICs no contexto escolar. Tal atitude é louvável, já que a própria construção desses objetos, pode ter sido um excelente objeto de aprendizagem para que os seus construtores tenham descoberto novas formas de ensinar/aprender matemática. Um indicativo desse fato, é que, das cinco propostas encontradas em língua português, três são desse grupo.

VIAJANDO NA MATEMÁTICA

O objeto virtual *Viajando na Matemática* está disponível no endereço http://rived.mec.gov.br/atividades/concurso2006/viajandomatematica/ (acessado em 03/05/2010) e é uma produção da *Rede Interativa Virtual de Educação* (RIVED). O RIVED é um programa da *Secretaria de Educação a Distância* (SEED) do MEC e que visa a produção de conteúdos pedagógicos digitais, na forma de objetos digitais de aprendizagem (ODA). O *Viajando na Matemática* apresenta uma proposta que aborda as operações com números negativos onde o estudante insere seu nome e é convidado a fazer uma "viagem" no mundo da matemática, como vemos na Figura 19.

FIGURA 019: ODA Viajando com a matemática

Esse ODA apresenta um conjunto de situações-problemas para que o estudante responda, tais problemas estão divididos em três assuntos: fuso horário, temperatura e saldo bancário, que são acessados quando o estudante escolhe o avião em que fará a viagem, como mostra a Figura 20.

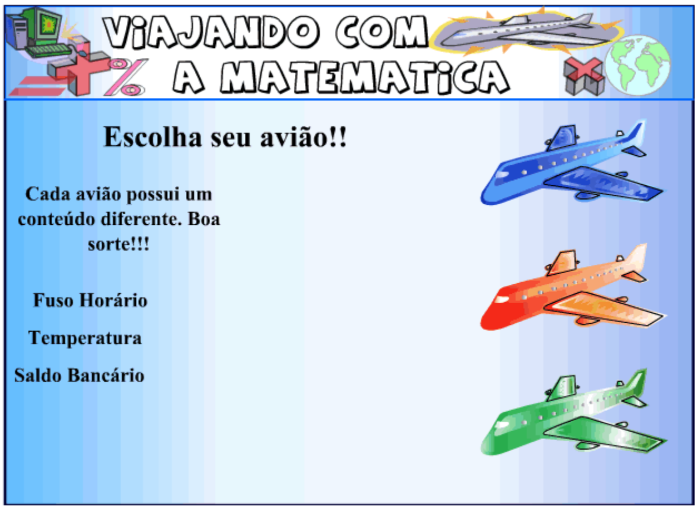


FIGURA 020: Proposta inicial

Acreditamos que o ODA se constitui num espaço que possibilita a interação e as trocas entre os sujeitos, já que a resolução de problemas é o foco principal dessa proposta. Sendo assim, tal objeto vai (em parte) ao encontro com aquilo que desejamos para a nossa proposta. No entanto temos as seguintes divergências em relação a ele:

a) Tal objeto não oferece aos estudantes alguma ferramenta de representação que contribua na resolução de situações-problemas. Seu *layout* e suas animações são meramente ilustrativas. Por exemplo: Na secção fuso horário, não há nenhuma informação ou definição sobre as zonas horárias. Talvez tal ODA pressupõem que os estudantes já conhecem as convenções de fuso horário ou então, que farão uma pesquisa sobre tal tema. Na nossa concepção, o ODA *cumpriria sua função* se oferecesse uma espécie de laboratório ao estudante, ou seja, um campo para a simulação de viagens, num mapa com os meridianos.

Sendo assim no problema apresentado nas Figuras 21A e B. O estudante poderia simular uma viagem de São Paulo à Buenos Aires.

A

B

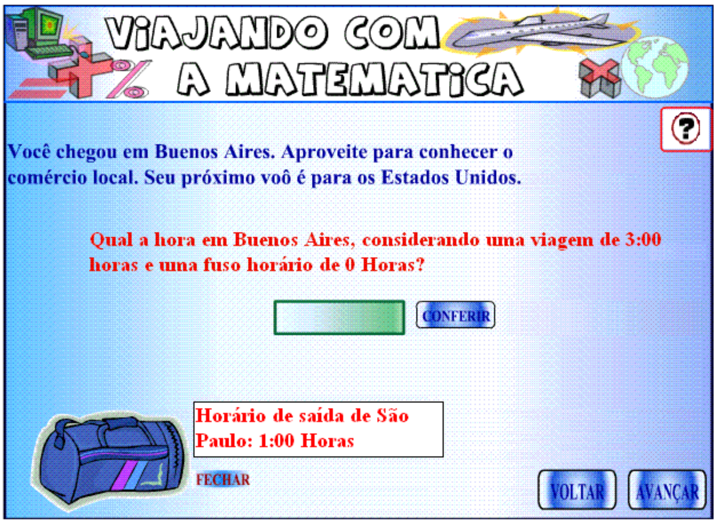


FIGURA 021: Simulação de Viagem

Com essa nossa sugestão, acreditamos que o ODA ajudaria na resolução de problemas, pois ofereceria uma ferramenta dinâmica de representação. Já para os problemas relacionados a temperatura, as simulações poderiam ser representadas por termômetros virtuais.

b) O objetivo do ODA é promover as operações com números inteiros; no entanto, nas situações-problemas apresentadas, poucas exploram a necessidade de utilizarmos números negativos. por exemplo, na Figura 22, ao registrar o total de despesas durante toda viagem, não é preciso a utilização do símbolo de *menos* (não é necessário utilizar *R$ -7.479,00*) . Além disso em nenhum momento o saldo fica negativo, portanto pensamos que esta é uma falha do ODA, pois historicamente essa foi a primeira utilidade prática atribuída aos números negativos.

A nossa sugestão de implementação para esta seção do ODA, é a criação de um banco virtual – sendo representado por uma de planilha eletrônica – assim o viajante puderia consultar seu extrato bancário. Outra possibilidade é sugerir ao estudante que utilize um outro software para construir uma planilha eletrônica. Dessa forma, tal planilha ajudaria o estudante a dar significado para aos símbolos de " + " e "– " nesse contexto e, também, serviria como uma ferramenta de cálculo e de representação. Além disso, não seria necessário relembrar todas as operações financeiras realizadas anteriormente a cada situação apresentada, fato que pode gerar confusão na interpretação dos problemas.

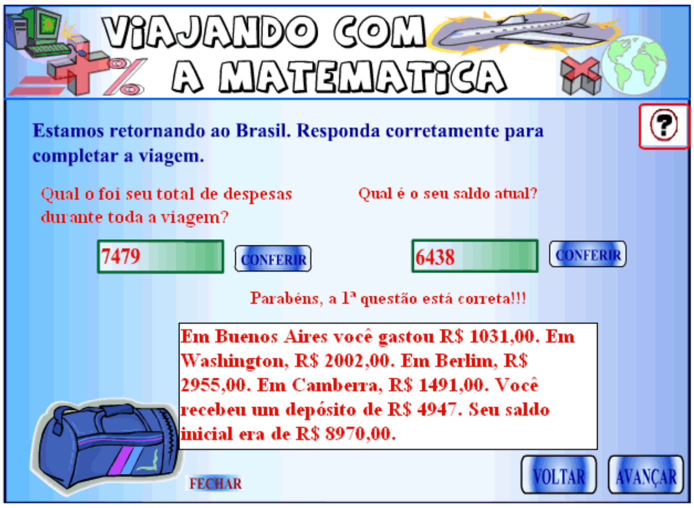


FIGURA 022: Atividade de saldo bancário

c)Identificamos que as situações-problemas apresentadas no *Viajando na Matemática,* apresentam níveis de dificuldade bem distintas, portanto sugerimos um certo cuidado na ordem de apresentação de tais problemas. Veremos, no terceiro capítulo, que operações com números grandes oferecem um grau de dificuldade maior para as crianças, portanto acreditamos que as situações problemas que abordam a temperatura seriam os mais adequadas para iniciar a discussão sobre operações com números inteiros. Logo em seguida os estudantes poderiam resolver os problemas sobre saldos bancários. Já que a intenção é utilizar valores próximo da realidade, portanto envolvem números grandes, sugerimos o uso da calculadora/planilhas eletrônicas para ajudar os estudantes nos cálculos. Por último, ficariam aquelas situações que abordam problemas sobre o fuso horário, pois exigem dos estudantes a coordenação de dois sistemas de representação complexos: o sistema de fuso horário e o novo sistema de representações e operações numéricas que envolvem as operações com números inteiros.

Para finalizar, ressaltamos que a proposta apresentada possibilita uma série de atividades interessantes para serem exploradas com os estudantes, porém o que criticamos é a forma como as TICs são utilizadas. Nela a função do ODA é apenas apresentar as situações como se fosse um mero datashow, sem contribuir como ferramenta de representação das ações executadas pelos estudantes.

SAMD - JOGO DA ADIÇÃO

Esse objeto pode ser encontrado no endereço http://www.rpedu.pintoricardo.com/ (acessado em 01/05/2010). Pelo site, podemos identificar que o OD foi produzido por um colega de profissão. Dos ODs voltados para as operações com números inteiros e que estão disponíveis na internet, esse é o único que realmente é um jogo. O caráter lúdico desse tipo de objeto é um grande aliado para despertar o interesse dos estudantes. O jogo SAMD possui três fases (duas de adição e uma com as quatro operações envolvidas)

O objetivo do jogo é clicar em dois quadrados cuja soma seja igual à que aparece do lado direito do ecrã. O jogo acaba quando não tem mais quadrados para carregar. Veja na Figura 23 abaixo, o jogador deve clicar em dois números cuja soma é igual a 10.

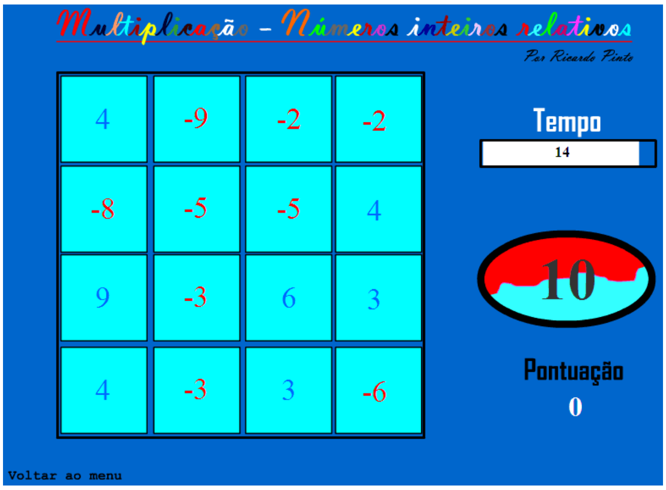


FIGURA 023: Jogo de Multiplicação em Z

Na Figura 24 apresentamos a terceira fase do jogo, a única alteração é que a tabela de números aumenta. Note que o jogador deve clicar em dois números cuja soma é igual a 0.

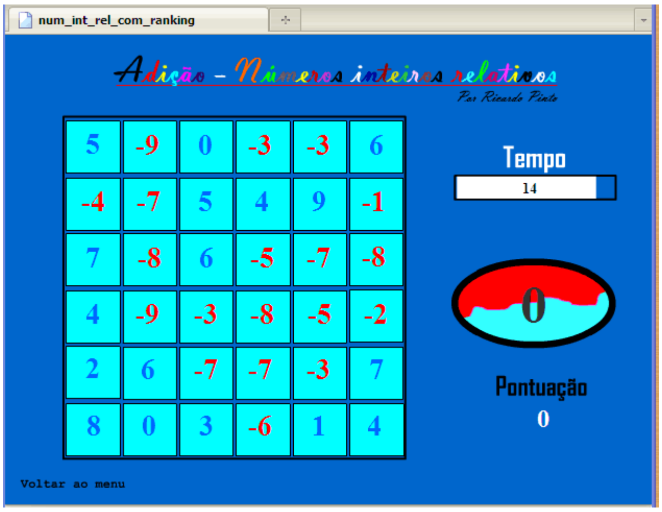


FIGURA 024: Jogo de adição em Z

http://www.rpedu.pintoricardo.com/jogos/Master/master_samd.html

Na última fase do SAMD, a operação a ser efetuada no jogo poder ser de Subtração, Adição, Multiplicação ou Divisão. Veja na Figura 25 abaixo, o jogador deve clicar em dois números cuja multiplicação é igual a -15.

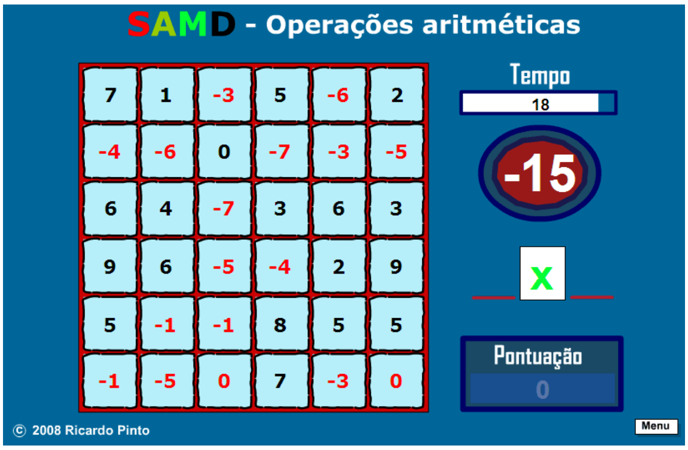


FIGURA 025: Jogo SAMD

http://www.rpedu.pintoricardo.com/jogos/Jogo_adicao_com_ranking_pronto/num_int_rel_com_ranking.html (acessado em 01/05/2010).

O aspecto negativo desse jogo é que o jogador tem15 segundos para efetuar a operação corretamente. Portanto, tal objeto serve como exercício de fixação, já que é voltado para aqueles estudantes que já estão operando relativamente bem com os números inteiros. Dessa forma tal objeto não é adequado para introduzir o problema das operações com números inteiros, nem oferece um laboratório rico para o desenvolvimento de estratégias na resolução dessas operações.

Como os objetos digitais em língua portuguesa encontrados na web seguem uma concepção de reprodução de conhecimento – caracterizada pela simples transferência de exercícios tradicionais presentes em livros didáticos para o contexto digital, sentimos a necessidade de apresentar propostas que utilizam as TICs e que possuem uma concepção construtivista presente na sua fundamentação teórica. Selecionamos duas propostas, uma de geometria dinâmica e outra que aborda problemas de operações do chamado Campo Multiplicativo. Embora ambas não explorem operações com números inteiros, acreditamos que são próximas daquilo que almejamos para a implementação de nossa proposta.

2.3.2 Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético Dedutivo

Na tese de doutorado *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo*, Gravina diz que, no aprendizado de geometria euclidiana, os estudantes de primeiro semestre da Licenciatura em Matemática da UFRGS vêem como um obstáculo a produção de conhecimento através de demonstrações. Segundo essa autora, tal dificuldade reside no processo de transição de um conhecimento de natureza empírica para aquele a ser aprendido: a geometria como um corpo teórico, organizado em axiomas e definições, teoremas e demonstrações. (2004, p. 108)

Com o desafio de promover o desenvolvimento da habilidade de realizar demonstrações de seus estudantes, Gravina desenvolve uma proposta didática que utiliza ambientes digitais de geometria dinâmica para favorecer o desenvolvimento de raciocínio sensorial e prático para raciocínios lógico dedutivos de seus estudantes. Para a pesquisadora, um das vantagens desse recurso é:

Conforme Gravina

> "os ambientes de geometria dinâmica: ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem. São micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso da geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador". (GRAVINA, pg. 114, 2004)

Sendo assim, sua proposta didática explora o dinamismo e a estabilidade de figuras (produzidas através do software *Cabri Géomètre II)* como fonte de exploração, para que o estudante estabeleça propriedades, definições e produza suas próprias demonstrações, mediante uma argumentação dedutiva. Um exemplo são as atividades que utilizam um recurso chamado de *caixas pretas*, como vemos na Figura 26 abaixo.

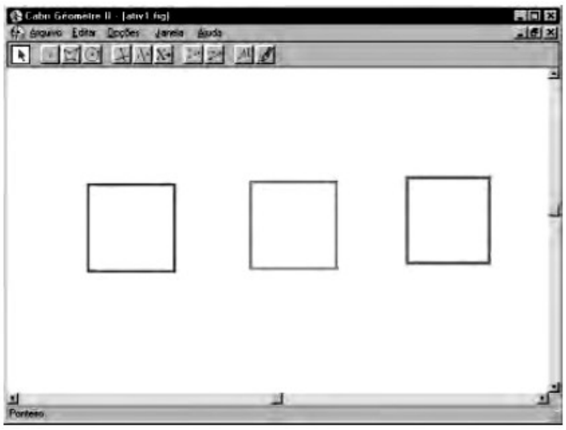


FIGURA 026: Caixas pretas

A *caixa preta* acima, apresenta três quadriláteros que podem ser manipulados através do movimento aplicado nos vértices. Os estudantes podem observar e estabelecer as diferenças entre os quadriláteros, sendo que tais diferenças são definidas pelo processo de construção geométrica e sem que os estudantes tenham acesso aos procedimentos de construção desses quadriláteros. A atividade do tipo *caixa preta* é o desafio de construir/reproduzir os três quadriláteros, conservando suas propriedades.

Para Gravina, esse tipo de proposta possibilita o desenvolvimento de posturas próprias do *pensar matemático*, já que podem incorporar ao meio da sala de aula, atitudes similares aos dos matemáticos no processo de construção do conhecimento, ou seja, uma postura investigativa, motivada pelo gosto e o prazer da descoberta. No entanto a pesquisadora chama a atenção para uma possível deformação de sua proposta, quando o professor tenta aplicar sua proposta com uma concepção de ensino tradicional:

> *"Quanto aos ambientes de geometria dinâmica, frequente é a sua subutilização, mercê de propostas que simplesmente refletem a transposição acrítica das aulas tradicionais ao novo ambiente: os alunos recebem instruções do professor - "faça isto, depois aquilo [...]" - e procedem, passo à passo, na realização de uma construção geométrica sem bem entender o propósito da atividade. Sob novas solicitações, usam o recursos de mediação do software para validar, empiricamente, propriedades geométricas pretendidas pelo professor. E assim termina a atividade"* (GRAVINA, p.128, 2004).

Mesmo que tal proposta não aborde o conteúdo das operações em Z, julgamos importante sua apresentação, pois é um exemplo significativo da utilização das TICs numa perspectiva construtivista e que favoreça a aprendizagem ao invés do ensino .

2.3.3 ICE – Uma Proposta Para o Campo Multiplicativo

No artigo *Creating Cybernetic and Psychological Ramps from the Concrete to the Abstract: Examples from Multiplicative Structures*, Kaput apresenta os resultados de um trabalho desenvolvido pelo grupo de pesquisa chamado ETC Multiplicative Structures/Word Problems Project. Um dos focos de sua investigação era a dificuldade que seus alunos apresentavam ao resolver problemas que envolviam multiplicação, divisão, razão, taxas e proporção. Tais problemas pertencem a uma rede de ideias chamadas *Estruturas Multiplicativas* – que Vergnaud definiria como Campo Multiplicativo – e que tem no centro a ideia de *Quantidades Intensivas*. (VERGNAUD apud KAPUT, pg. 130, 1995).

Kaput afirma que podemos identificar as *quantidades intensivas* como aquelas usadas para exprimir relações comparativas e que são representadas pela palavra *por.* Veja os exemplos: 6 doces por criança, 30 milhas por hora, 2 palmos por metro, 5.3 gramas por litro e assim por diante. Para ele, *"Essas relações envolvem razões, densidades e taxas bem como os operadores escalares. As quantidades intensivas são geralmente feitas de quantidades extensivas, que indicam "numero de" ou "medida de", por exemplo: 6 doces, 30 milhas ou 5.3 gramas"* (1995, pg. 131).

Além de Kaput, diferentes pesquisadores (como Nunes e Vergnaud) afirmam que esquemas de representações tais como: tabelas, gráficos e equações algébricas, são mais adequados para expressar as relações presentes nos problemas do Campo Multiplicativo. No Capítulo 3 desse trabalho, discutiremos essa questão mais detalhadamente e sob a luz da teoria de Campos Conceituais de Vergnaud.

Kaput acredita que a utilização das TICs pode colaborar para a disseminação dessas ideias no contexto escolar; nesse trabalho ele diz que um software deveria ajudar os estudantes a estenderem o que sabem de um contexto familiar para um menos familiar, de um contexto concreto para um contexto abstrato, onde a função de tal software é "linkar ciberneticamente as representações mais familiares dos estudantes para as menos familiares" (1995, pg. 133).

Este pesquisador ressalta que o computador não deve ser concebido como uma máquina que faz cálculos ou que dá feedbacks do tipo certo/errado, mas um ambiente de aprendizagem, cuja função é servir como uma espécie de *rampa ascendente ("ramping upward")*, onde os estudantes sejam envolvidos numa série de sistemas de representação num nível concreto e ascendem para um nível abstrato de representações. Dessa forma, Kaput propõe que a utilização das TICs deva ser concebida como um meio para desenvolver um raciocínio estruturado.

A partir dessa concepção de utilização das TICs e de suas pesquisas sobre o Campo Multiplicativo realizadas nos anos 80's, Kaput desenvolveu um software chamado ICE (*Icon Calculation Enviroments*). Tal objeto digital pretendia tirar proveito da rica experiência física de agrupar e contar objetos, que os estudantes já tinham, e com a contagem organizá-los em grupos. Dessa forma os estudantes poderiam recorrer a representações concretas – como manipular ícones na tela do computador – realizando multiplicações, divisões e relações com razões, onde esses ícones representam entidades da situação que está sendo modelada.

Na Figura 27 abaixo, podemos ver uma das interfaces do ICE, que ilustra a tela que apresenta os dados iniciais do seguinte problema e foi que apresentado aos estudantes:

S*uponha que Noé decide dar 3 guarda-chuvas para cada casal de animais que entra em sua arca (supondo que cada casal irá passar os próximos 40 dias e as 40 noites seguintes). Se ele deu 21 guarda-chuvas, quantos animais deveriam ter dentro de sua arca?*

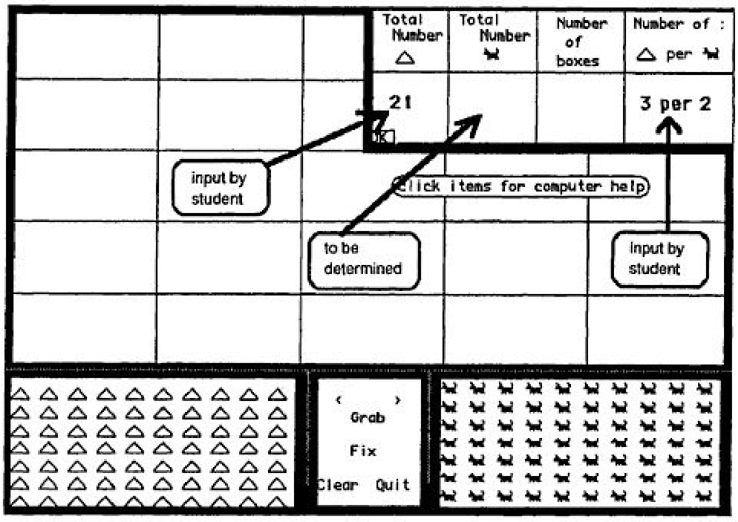


FIGURA 027: Interface do ICE

O ICE disponibiliza aos estudantes dois tipos de figuras: triângulos para representar a quantidade de guarda-chuvas e gatos para representar os animais. Assim ele pode representar concretamente tal problema ao clicar no botão *Grab* e para pegar os ícones no reservatório e arrastá-los até as células, formando grupos de 3 guarda-chuvas para 2 animais. Quando ele estiver certo de sua resolução ele pode clicar em *Fix* para que o software compute os dados, como indica a Figura 28. Note que os estudantes podem resolver o problema de forma prática, recorrendo a ações concretas de agrupar e contar.

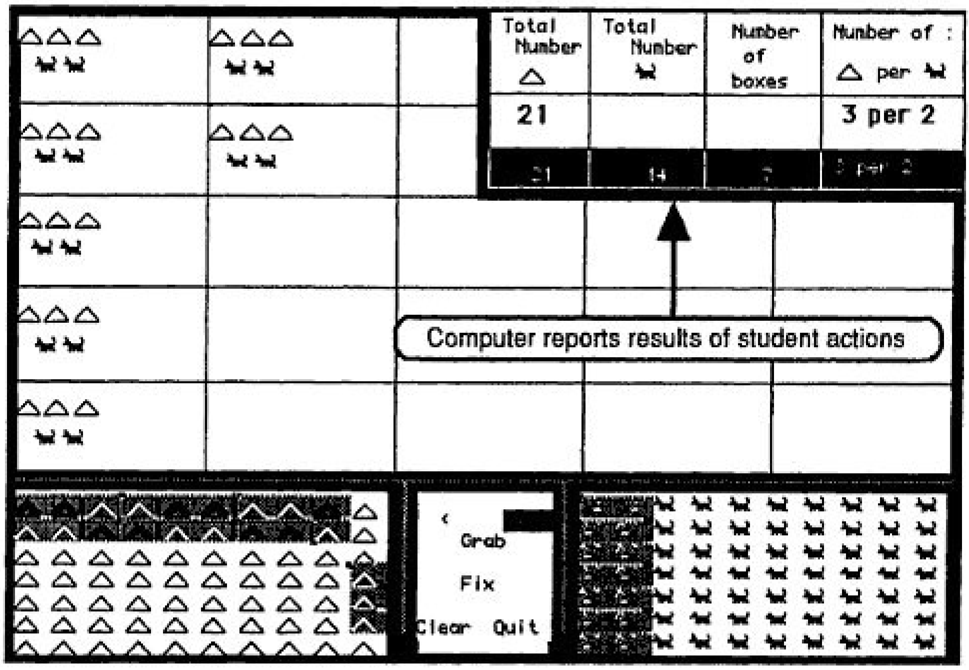


FIGURA 028: Problema explorado no ICE

Kaput comenta que as crianças utilizaram diferentes tipos de estratégias para realizar tal tarefa, são elas: uma minoria distribuiu seguindo a forma apresentada no parágrafo anterior; já as demais, geralmente distribuíam 3 guarda-chuvas para cada célula até fechar 21, para depois distribuir 2 animais para cada trio.

Nesse experimento de ensino, eles utilizaram o raciocínio proporcional que envolvia atividades simples de multiplicação e divisão, mas pode-se variar o problema ao perguntar quantos conjuntos de três guarda-chuvas podem ser formados com 21 guarda-chuvas.

Kaput diz que a maioria das crianças entrevistadas de 11 a 12 anos (*sixth grade*) foram capazes de resolver tal problema mentalmente (ao recorrer à distribuição dos ícones nas telas), mas um número considerável não foi capaz de resolvê-los de forma espontânea. Portanto os pesquisadores chamaram de *estratégia das caixas* essa forma de resolver apresentadas pelos estudantes:

a) (21 guarda-chuvas) dividido por (3 guarda-chuvas/caixa) = 7 caixas

b) (7 caixas) vezes (2 animais/caixa) = 14 animais.

Concordamos com o pesquisador quando ele afirma que esse raciocínio é mais transparente para o estudante do que aquele ensinado nas escolas, onde a proporção é uma igualdade de razões que multiplicamos em cruz e depois dividimos os valores.

Quando o estudante utiliza raciocínios abstratos na resolução desse tipo de problema, para Kaput já há uma evolução cognitiva, pois tal estudante está utilizando sistemas de representação abstratos além dos concretos. Então é importante que os estudantes utilizem o raciocínio proporcional em diferentes sistemas de notação e representação como formas algébricas, tabelas e gráficos. Na Figura 29 abaixo, vemos que o ambiente digital ICE utiliza quatro tipos de representação.

Para explorar cada uma dessas representações, os estudantes devem clicar no referente campo e introduzir os dados. Kaput afirma que se pode ligar e desligar qualquer um desses campos com um único clique do mouse.

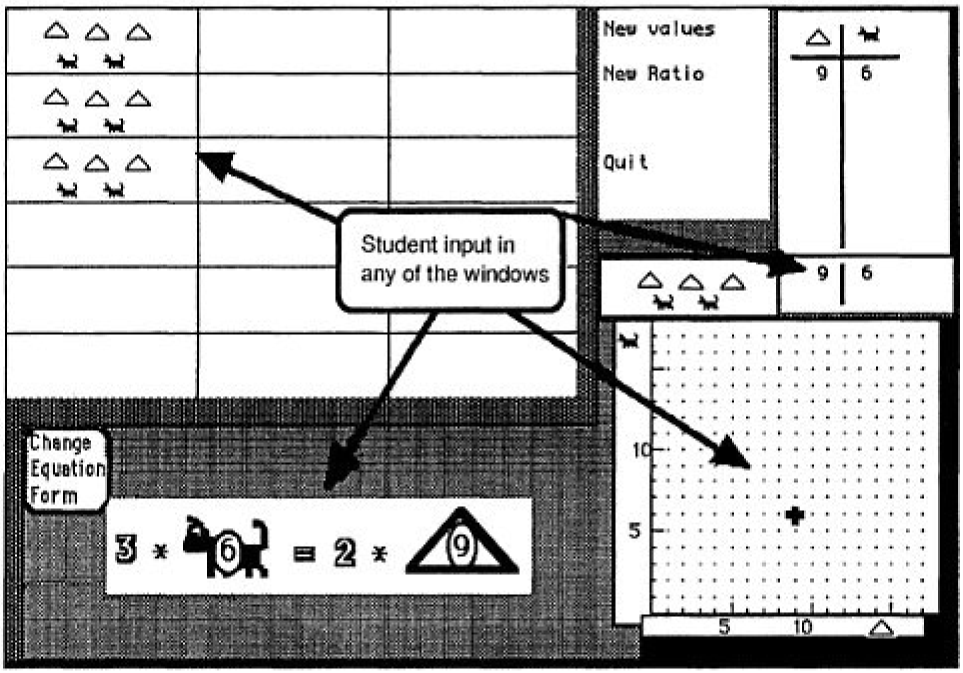


FIGURA 029: Modelos de representação do ICE

Kaput salienta que os estudantes precisam passar de um processo de familiarização com esses quatro tipos de representação, pois raramente elas são utilizadas em seu dia a dia. Por isso o pesquisador afirma que, para cada um desses sistemas de notações, tal familiarização pode levar meses (talvez anos). Além disso, deve-se respeitá-lo com um processo crescente: primeiro utilizam-se das tabelas de dados; segundo, os gráficos de sistemas coordenados e, por último, das diferentes relações algébricas.

Embora essa proposta não contemple as questões sobre as operações em Z, ela contém as principais ideias que havíamos imaginado para a nossa proposta que envolve problemas do Campo Multiplicativo. Na nossa concepção, a grande contribuição desse trabalho é a utilização de sistemas de notação mais adequados aos problemas que abrangem a multiplicação (como tabelas e gráficos) e que pretendemos explorar nos ODAs, por nós desenvolvidos.

Por outro lado, nossa proposta diferencia-se desta, à medida em que visa estender tais representações para os problemas que envolvam multiplicação e divisão de números positivos e negativos.

Além disso, outro mérito desse trabalho é a construção de um quadro teórico referente à utilização da tecnologia no Ensino de Matemática. Para Kaput, é útil para apontar as duas origens da estruturação da experiência.

- Concepções Mentais, as estruturas de organização da mente são usados para selecionar, analisar e estruturar a experiência;
- Os sistemas de notação quando são realizados materialmente: (a) contribuem para a estruturação da experiência, fornecendo meios para a formação de conceituação/conceitos, e (b) apoiam a comunicação entre conceitos e indivíduos;

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 CAMPO ADITIVO

Acreditamos que é a partir da ação sobre o objeto (a conhecer) que o aluno aprende, pois é através da sua ação que ele estabelece relações, abstrai propriedades e faz implicações. Sabemos que este é um dos princípios centrais da teoria construtivista de Jean Piaget, *"Nossos conhecimentos não provêm nem da sensação, nem da percepção somente, mas da ação inteira, cuja percepção constitui apenas função de sinalização [...] Não se conhece, realmente, um objeto senão agindo sobre ele ou transformando-o".* (PIAGET, 1973, p.73)

Para esse autor, é através da experiência *Física* e *Lógico-Matemática* que o sujeito transforma o objeto a partir das suas ações. Ao agir sobre o objeto, o sujeito retira o que é mais geral na ação e pode transpor de uma situação para outra. A esse produto da ação ele denominou de e*squemas das ações*.

Sendo assim, segundo a Epistemologia Genética de Piaget *"conhecer é organizar, estruturar e explicar a partir do vivido (...) conhecer não é somente explicar; e não é somente viver; é algo que se dá a partir da vivência para que esse objeto seja imerso em um sistema de relações"* (CHIAROTTINO, 1987 p.3).

Ao assumirmos tal postura, torna-se necessário utilizar uma teoria pedagógica que valorize a ação do sujeito sobre o objeto no processo de aprendizagem. No entanto as pesquisas de Piaget são de caráter epistemológico e não pedagógico, dito de outra forma, ele estava preocupado em entender como uma criança constrói o conhecimento, mas não como podemos ensiná-la, ao conhecer tal processo de construção. Contudo, foi no trabalho do psicólogo francês Gerard Vergnaud (discípulo de Piaget) que encontramos a teoria que procurávamos. Na teoria de Campos Conceituais, Vergnaud propõe a utilização das principais contribuições de Piaget e Vigotsky para formular uma teoria pedagógica e que, na nossa opinião, é útil no dia-a-dia do professor; sendo o Campo Aditivo um exemplo.

No livro *Introdução à Educação Matemática: operações numéricas*, Terezinha Nunes sintetiza algumas dessas contribuições de Piaget (esquemas de ação) e Vigotsky (instrumento simbólico) no desenvolvimento do raciocínio aditivo; segundo ela, a criança utiliza os esquemas de ação de *juntar* e *tirar* ao resolver problemas que necessitam de soma ou subtração na sua resolução. Esses esquemas permitem que as crianças resolvam os problemas de forma prática e podem ser observados a partir de uma afirmação, pequenos movimentos com dedos ou olhos e etc. Por outro lado, tais esquemas de ação precisam estar coordenados com o sistema simbólico, ou seja, a utilização de símbolos como ferramenta para registrar e quantificar as operações realizadas na prática, o instrumento simbólico. Por exemplo: Uma criança que se encontra no início do ensino fundamental, já realizou várias coordenações desse tipo, pois conseguem coordenar os esquemas de ação com o sistema decimal, com a utilização dos algoritmos, tanto no campo aditivo como no multiplicativo. No entanto ao realizar operações com números inteiros, ela deve coordenar os novos significados para os símbolos com o seu sistema de ação e simbólicos. Portanto estenderá o raciocínio aditivo, bem como sua noção matemática de número. (NUNES 2001, pg.45)

O Campo Aditivo é definido como um conjunto de problemas e situações que envolvem soma ou subtração na sua resolução. Embora sejam operações distintas, ambas referem-se à relação parte/todo e é esse invariante conceitual que relaciona soma e subtração a uma mesma estrutura de raciocínio, o raciocínio Aditivo. Portanto soma e subtração são definidas como operações irmãs, já que podemos resolver o mesmo problema utilizando uma ou outra. Abaixo apresentamos três variações deste problema.

Transformação Direta	**Transformação Indireta**	**Comparação entre medidas**
1) Nilce tem sete pares de brincos, no seu aniversário ganhou mais quatro pares. Com quantos pares ela ficou? $\boxed{7} \xrightarrow{+4} \boxed{?}$	2) Nilce ganhou quatro pares de brincos no seu aniversário e ficou com um total de 11 pares. Quantos pares possuía antes? $\boxed{?} \xrightarrow{+4} \boxed{11}$	3) Nilce tinha sete pares de brincos; após seu aniversário ficou com 11 pares. Quantos pares ganhou? $\boxed{7} \xrightarrow{?} \boxed{11}$

QUADRO 03: Tipos de problemas do Campo Aditivo

Perceba que muitas vezes a operação utilizada na resolução depende do lugar onde a incógnita está localizada, no entanto as três variações do problema se referem à mesma relação parte/todo. Para resolver o primeiro exemplo é comum que as crianças realizem a adição: 7 + 4 = 11. Já a subtração será utilizada na resolução do segundo e terceiro problemas. Embora a operação utilizada seja a mesma , os problemas são de categorias diferentes: no segundo problema a subtração refere-se a uma transformação, já no terceiro, à comparação entre duas medidas de dois conjuntos de objetos concretos.

No livro "*El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la ensenhanza de las matemáticas en la escuela primaria*", Vergnaud apresenta as principais categorias de problemas que envolvem o raciocínio aditivo. O autor comenta que existem números que expressam a medida de conjuntos de objetos concretos, porém ao utilizar o raciocínio aditivo para resolver problemas, surgem números que expressam transformações de medidas. Sendo assim, estamos diante de dois tipos diferentes de números: os primeiros são chamados de números naturais e expressam a cardinalidade de conjuntos (portanto não são positivos nem negativos); já os números do segundo tipo são chamados de números inteiros e expressam transformações (ganho ou perda) e, portanto, são dotados dos sinais positivo e negativo.

Abaixo descrevemos as seis categorias apresentadas por Vergnaud.

1º Categoria: São problemas onde duas medidas se compõem para dar lugar a uma terceira medida.

Ex: Osmar tem 6 canecas de vidro e 8 de metal. Quantas canecas têm no total?

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{6}\\ \boxed{8}\end{array}\right\}\boxed{14}$$

$$6 + 8 = 14$$

$+$ - É a lei de composição que corresponde à adição de medidas, é decidir sobre a soma de dois números naturais.

2º Categoria: São problemas onde uma transformação opera sobre uma medida para dar lugar a outra medida.

Exemplo A. Antes de começar a jogar Nilce tem 7 moedas de 1 real . Durante o jogo ganhou 4 moedas. Com quantas moedas ela ficou?

$$\boxed{7}\xrightarrow{+4}\boxed{11}$$

$$7 + (+4) = 11$$

$+$ É a lei de composição que corresponde a aplicação de uma transformação sobre uma medida, é realizar a adição de um número natural (7) e de um número relativo (+4).

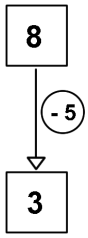
<u>Exemplo B:</u> Osmar tem 7 moedas de 1 real antes de começar a jogar. Perdeu 4 moedas, agora tem?

$$\boxed{7}\xrightarrow{-4}\boxed{3}$$

$$7 + (-4) = 3$$

<u>3º Categoria:</u> São problemas onde uma relação une duas medidas.

Ex: Osmar tem 8 moedas. Nilce tem 5 moedas a menos que Osmar. Quantas moedas têm Nilce?

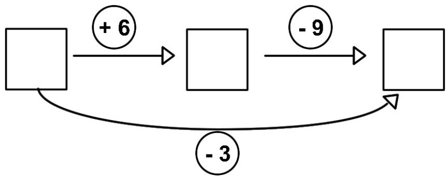


$$8 + (-5) = 3$$

Vergnaud lembra que este exemplo é uma relação estática e não uma transformação.

<u>4º Categoria:</u> São problemas onde duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação.

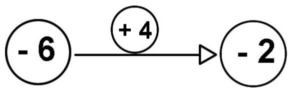
Ex: Osmar ganhou 6 canecas, mas em seguida perdeu 9. No total perdeu?.



$$(+6) + (-9) = (-3)$$

<u>5º Categoria:</u> São problemas onde uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para dar lugar a um estado relativo.

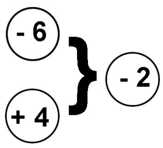
Ex: Osmar devia 6 moedas a Nilce. Devolveu-lhe quatro, quanto ficou devendo?



$$(-6) + (+4) = (-2)$$

<u>6º Categoria:</u> São problemas onde dois estados relativos (relações) se compõem para dar lugar a um estado relativo.

Ex: Nilce deve seis moedas a Osmar, porém Osmar deve quatro moedas a Nilce. Na realidade, quanto Nilce deve a Osmar?



$$(-6) + (+4) = (-2)$$

$+$ Esta lei de transformação que corresponde à operação de uma transformação de um estado relativo a outro. Rigorosamente falando, é diferente da adição das transformações que acabamos de ver na quarta categoria, tanto num estado relativo como numa transformação são representados por números relativos. Esta lei de composição representa uma adição de estados relativos. Por causa disso não precisa utilizar símbolos diferentes.

Sendo assim, acreditamos que a teoria de Campo Aditivo nos oferece subsídios teóricos para tentarmos entender algumas das dificuldades apresentadas pelos estudantes e que foram listadas na apresentação deste trabalho:

1) Indiferenciação entre o sinal da operação e dos números: Vergnaud utilizou o esquema de flechas para diferenciar as composições entre medidas ou estados relativos. Ao estudarmos o Campo Aditivo, visualizamos o esquema de flechas como um instrumento pedagógico com o objetivo de promover a coordenação entre os esquemas de ação e o sistema simbólico.
2) Realização da subtração do tipo ***(+a) – (+b)***: ao definir a soma e subtração como operações irmãs (já que fazem parte da mesma estrutura de raciocínio), o Campo Aditivo nos oferece uma justificativa pedagógica para equivalência entre as operações:

$$(+a)-(+b)=(+a)+(-b) \text{ para } \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Tal equivalência seria favorecida pela forma como os problemas aditivos são apresentados, já que a operação utilizada na resolução depende do lugar onde a incógnita está localizada: Transformação Direta ou Indireta.

3.1.1 Esquema de Flechas

Como vimos, adotaremos o Esquema de Flechas como um instrumento pedagógico de representação que compõe a nossa proposta didática e a ideia de incorporá-lo surgiu durante a aplicação do experimento dessa pesquisa, mas deixaremos para apresentar os motivos que nos levaram a tomar tal decisão na análise dos dados (p. 147) . Como tal esquema de representação ganhou um lugar de destaque na nossa proposta, achamos conveniente apresentá-lo com mais detalhes.

Os problemas do Campo Aditivo envolvem relações ternárias, ou seja, relações entre três elementos. No estudo desse tipo de relações, Vergnaud apresenta os dois modelos de representação mais utilizados:

O Primeiro modelo é a *Lei de Composição Binária:* são aqueles modelos em que dois elementos se compõem para formar um terceiro, veja os exemplos:

Nove é quatro unidades maior que 5.
Representação:

9 = 4 + 5 ou 4 +5 = 9

9 – 4 = 5 ou 9 – 5 = 4

Quatro multiplicado por seis é vinte quatro.
Representação:

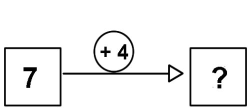
4 x 6 = 24

Esse tipo de representação é bastante rica, através dela podemos estabelecer propriedades fundamentais das operações, tais como: Associativa, Comutativa, Existência de Elemento Neutro, Existência de Elemento Inverso, Distributiva de uma Operação e relação a outra etc. No entanto, segundo Vergnaud *"A noção de relação ternária é mais ampla que a composição binária (...) e nem toda relação ternária pode ser representada por uma Lei de Composição Binária e, às vezes, é mais adequado representá-las por uma relação ternária."* (p. 45, 1991). Vejamos o segundo modelo:

Elemento, Relação-Elemento, Elemento: nesse modelo coloca-se em evidência que dois elementos estão ligados por uma relação e essa relação também é considerada como um elemento. Para Vergnaud *" retomamos a ideia de que esta Relação-Elemento opera sobre o primeiro elemento para gerar o segundo elemento".* Ou seja, nesse modelo há a ideia de **Transformação,** já que *"numerosas relações da realidade são de fato relações "dinâmicas", no sentido de que ligam estados sucessivos da realidade e não elementos simultâneos de uma dita realidade".* (1991, p. 46). Essas relações "dinâmicas" são transformações que ocorrem num período de tempo, portanto o Esquema de Flechas surge como a representação gráfica ideal para esse tipo de relação, já que evidencia a Transformação que leva de um Estado (inicial) a outro Estado (final).

Veja os exemplos:

1) Nilce tem sete pares de brincos, no seu aniversário ganhou mais quatro pares. Quantos pares têm?



Note que é uma relação dinâmica, já que num primeiro momento ela tem 7 pares, ganha 4 pares (sofre uma transformação) e fica com 11 pares de brincos.

2) Nilce tem sete pares de brincos, numa viagem perdeu quatro pares. Quantos pares têm?

$$\boxed{7} \xrightarrow{-4} \boxed{?}$$

Note que é uma relação dinâmica, já que num primeiro momento ela tem 7 pares, perde 4 pares (sofre uma transformação) e fica com 3 pares de brincos.

Na nossa pesquisa constatamos que tal modelo pode favorecer a coordenação entre os esquemas de ação e o sistema simbólico, além disso, podemos perceber nos exemplos anteriores, que o Esquema de Flechas apresenta a ideia de incógnita, portanto pode servir como uma introdução ao desenvolvimento do raciocínio algébrico. Dessa forma, pensamos que ele estabelece um vínculo com a pré álgebra utilizada na descoberta das raízes de equações diofantinas e, ao desenvolver uma proposta didática que valorize sua utilização, também estaríamos estabelecendo uma ponte com a própria história da matemática e dos números positivos e negativos. Embora não fazem parte da intenção dessa pesquisa abordaremos o desenvolvimento do Raciocínio Algébrico, fazemos esses comentários para estabelecer as possíveis conexões da nossa proposta com outros conteúdos de matemática.

3.2 CAMPO MULTIPLICATIVO

O Campo Multiplicativo é definido como um conjunto de problemas e situações que envolvem multiplicação ou divisão na sua resolução. É comum que o ensino da multiplicação seja a partir da ideia de adição repetida de parcelas iguais. No entanto, tais operações são distintas. Como vimos, os problemas do Campo Aditivo envolvem o mesmo tipo de grandeza e geralmente referem-se à invariante conceitual parte/todo (conhece-se as partes e pretende-se descobrir o todo ou sabe-se o todo e uma parte e se quer saber a outra). Todavia, o invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é, segundo Nunes (2001, p. 78), a existência de uma relação fixa entre duas variáveis de grandezas (ou quantidades) diferentes.

> “Ao resolver problemas de raciocínio multiplicativo, estamos buscando um valor numa variável que corresponda a um valor dado na outra variável. A relação constante entre as duas variáveis é que possibilita a dedução na resolução de problemas do raciocínio multiplicativo.” (NUNES, p. 79, 2001)

Sendo assim os problemas do Campo Multiplicativo envolvem relações quaternárias (duas medidas de um tipo e duas de outro) ao invés das relações ternárias presentes na adição.

Em função disso, no livro "*El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la ensenanza de las matemáticas en la escuela primaria"*, Vergnaud afirma que a representação $a \times b = c$ é inadequada para representar as correspondências entre as quantidades envolvidas na multiplicação, "*pois não comporta mais que três termos"* (1991, p.197). Portanto se deve-se utilizar um esquema que deixe explícito essas relações quaternárias, ou seja, algo que torne visível as quatro quantidades envolvidas nos problemas do Campo Multiplicativo e, esse esquema, nada mais é do que uma tabela. O autor diz que o uso de tabelas não é um empecilho para as crianças já que na sua organização (da tabela) os dois tipos de variáveis e a correspondência existente entre as quantidades são identificadas facilmente. E isso só é possível, porque as tabelas traduzem o isomorfismos das medidas, ou seja, as operações realizadas num tipo de variável são equivalentes às operações do segundo tipo de variável envolvida no problema.

Segundo Vergnaud, para analisar os esquemas de pensamento para os quais os alunos recorrem ao resolver problemas do campo multiplicativo, é importante partir do conceito de proporcionalidade, já que as relações de grandezas diferentes são quocientes de dimensão diferentes (2008, p. 46). Em função disso, o autor apresenta sete exemplos de problemas de diferentes níveis de complexidade e que serão reapresentados logo abaixo:

Exemplo1: Tenho 6 sacos de balas. Há 4 balas em cada saco, quantas balas tenho?

Exemplo2: Minha mãe quer comprar um tecido que custa R$16,80 o metro para fazer um vestido. Ela necessita de quatro metros e meio. Quanto deverá pagar?

Exemplo3: Paguei R$18,00 por 6 garrafas de suco. Quanto custa uma garrafa?

Exemplo 4: Pedro tem R$12,00 e quer comprar alguns pacotes de caramelo que custam R$4,00 cada. Quantos pacotes pode comprar?

Exemplo 5: Uma carreata de carros cobre um trecho de 247.760 km. Um carro consome 6.785 litros de álcool a cada 100 quilômetros. Quanto consumirá este carro durante a carreata?

Exemplo 6: Comprei 12 garrafas de água, cada caixa de três garrafas custa R$19,50. Quanto devo pagar?

Exemplo 7: Três latas de tintas pesam 400 gramas. Para pintar um quadro são necessárias 8 latas. Quanto pesam as 8 latas?

Como vimos, a multiplicação e a divisão são definidas como operações irmãs, já que dizem respeito à mesma relação fixa, onde uma é a operação inversa da outra. No quadro abaixo, perceba que a operação utilizada na resolução do problema depende do lugar onde a incógnita está localizada.

<table>
<tr><th>Transformação Direta</th><th>Transformação Inversa</th></tr>
<tr><td>Tenho 6 sacos de balas. Há 4 balas em cada saco, quantas balas tenho?


Utiliza-se a multiplicação.</td><td>Paguei R$18,00 por 6 garrafas de suco. Quanto custa uma garrafa?


Utiliza-se a divisão.</td></tr>
</table>

QUADRO 04: Problemas do Campo Multiplicativo

A Multiplicação:

Os exemplos 1 e 2 são problemas cuja solução envolve a operação da multiplicação e a diferença entre eles é que o exemplo 1 envolve quantidades discretas e o exemplo 2, quantidade contínuas. O autor ressalta que utilizar a ideia da multiplicação como uma adição repetida de parcelas iguais é conveniente para operações com números positivos e negativos, mas para as operações com números decimais surge a necessidade de explicações adicionais.

Analisando o exemplo 1 para apresentar alguns dos benefícios de utilizar tabelas para representar e resolver problemas do campo multiplicativo. Neste problema 1 e 6 são números que representam a quantidade de sacos, são medidas; 4 e **X** são números que representam quantidades de balas, são medidas de outra natureza. Podemos determinar a solução deste problema utilizando dois procedimentos diferentes para achar **X**: empregando a relação vertical ou horizontal da tabela.

A Relação Vertical:

Na relação vertical realizam-se operações entre as grandezas de mesmo tipo (que estão na mesma coluna) e são estendidas às grandezas da outra coluna. Como podemos observar na Tabela 01, para determinar o valor de **X** balas realizamos a multiplicação de 4 pelo operador (x6), isso nada mais é do que aplicar – na coluna das balas – a operação que expressa a passagem de 1 para 6 sacos da primeira coluna.

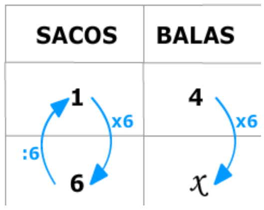


Tabela 1: Relação Vertical

Note que os operadores verticais (x6) e (:6) não possuem dimensão (são um operador). Além disso são operadores inversos: o operador (:6) representa o operador inverso do operador (x6) que fez passar de um saco para seis sacos. Vergnaud afirma que as crianças não apresentam dificuldades em relação às operações verticais.

A Relação Horizontal:

Diferentemente da relação anterior, os operadores horizontais possuem dimensão, já que, segundo Vergnaud, "*são funções que expressam a relação entre medidas de categorias diferentes*" (1991, p.203); tanto é que tal fato nos obriga a utilizar a relação verbal "*balas por sacos".*

Como podemos observar na Tabela 2, para determinar o valor de **X** balas, aplicamos a função (*X4 balas por saco*) à quantidade de 6 sacos.

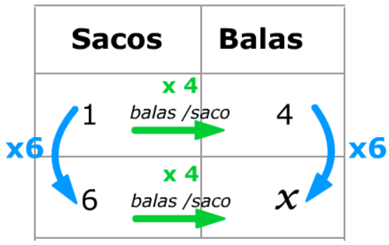
Tabela 2: Relação Vertical

Note que (*:4 balas por saco*) é sua função inversa, pois "desfaz" a transformação realizada por *(X4 balas por saco)*.

Sinteticamente, existem dois procedimentos para encontrar **X**:

1º- Aplicando operador escalar (x6) na quantidade de 4 balas

2º - Aplicar a função (X4 *balas por saco*) à quantidade de 6 sacos.



Vergnaud chama a atenção para o fato de que os dois procedimentos são equivalentes, mas distintos e por isso não podemos confundi-los e é só esta análise que permite compreender que, ao fazer 6x4 ou 4x6, não se multiplica sacos por balas ou balas por sacos, mas aplica-se a noção de proporção. Concordamos com tal afirmação, pois identificamos que as crianças apresentam algumas dificuldades quando utilizam o segundo procedimento, e concluímos que tal dificuldade deriva da presença da proporcionalidade nessas funções e que pode ser reconhecida em perguntas do tipo: *como podemos encontrar balas se 6 é o número de pacotes?*

Para Vergnaud a compreensão desse fato só é possível quando realizamos a chamada análise dimensional – amplamente utilizada na Física – pois é através dela que identificaremos os diferentes tipos de relações envolvidas na multiplicação. Todavia o autor avisa que esse tipo de análise é útil para o esclarecimento dos professores e não aconselha sua utilização para os alunos, já que a noção de proporção está no limite da capacidade cognitiva das crianças que cursam as séries finais do ensino fundamental.

A Análise Dimensional

Como estamos falando de uma relação quaternária que utiliza a noção de proporção, podemos realizar a análise de duas formas:

1º Formulação: **X** balas estão para 4 balas, assim como 6 sacos estão para 1 sacos:

$$\frac{x \;\; balas}{4 \;\; balas} = \frac{6 \;\; sacos}{1 \;\; sacos}$$

Multiplicando os dois termos por *"4 balas"* temos:

$$x \;\; balas = \frac{6 \;\; sacos \times 4 \;\; balas}{1 \;\; sacos}$$

Como o denominador é 1 ao simplificarmos a dimensão *"sacos"*, teremos:

$$x \;\; balas = \frac{6 \;\; \cancel{sacos} \times 4 \;\; balas}{1 \;\; \cancel{sacos}} = 6 \times 4 \;\; balas$$

Logo reaparece o primeiro procedimento utilizado para encontrar **X**.

<u>2º Formulação</u>: **X** balas estão para 6 sacos, assim como 4 balas estão para 1 sacos.
Fazendo a análise dimensional teremos:

$$\frac{x \ \ balas}{6 \ \ sacos}=\frac{4 \ \ balas}{1 \ \ sacos}$$

Multiplicando os dois termos por *"6 sacos"* temos:

$$x \ \ balas = 6 \ \ sacos \times \frac{4 \ \ balas}{1 \ \ sacos}$$

$$= 6 \ \ sacos \times 4 \ \ \frac{balas}{sacos}$$

Neste passo intermediário podemos identificar o segundo procedimento, que utiliza função na sua resolução. Mas também podemos continuar e simplificar a dimensão *"sacos",* obtendo:

$$x \ \ balas \ = \frac{6 \ \ sacos \ \times \ 4 \ \ balas}{1 \ \ sacos} = 6 \ \times \ 4 \ \ balas$$

Essa análise nos permite perceber que, nos tipos mais elementares, de multiplicação já intervém o cálculo relacional de quatro quantidades.

A Divisão:

Os exemplos 3 e 4 são problemas cuja solução envolve a divisão, no entanto representam diferentes níveis de dificuldade. No exemplo três procura-se encontrar o valor unitário da garrafa e deve-se determiná-lo ao conhecer um vínculo de correspondência entre grandezas de diferentes tipos (preço por garrafa).

Exemplo3: Paguei R$18,00 por 6 garrafas de suco. Quanto custa uma garrafa?

	Garrafas	Preço	
	1	x	
:6	6	18	:6

Neste exemplo, para encontrar o valor **X**, é necessário dividir 18 reais entre 6 tal qual na representação vertical. O operador :6 é um operador sem dimensão (um escalar) que fará reproduzir na coluna da direita o que foi expresso na passagem de 6 garrafas para 1 garrafa e que expressa a passagem de 6 garrafas para uma garrafa.

Desta maneira, o operador (:6) é operador inverso do operador (X6) que faz passar de uma garrafa por 6 garrafas

Já no exemplo 4, se conhece o valor unitário e é necessário determinar o número de unidades do primeiro tipo, correspondente à quantidade dada no segundo tipo.

Exemplo 4: Pedro tem R$12,00 e quer comprar alguns pacotes de caramelo que custam R$4,00 cada. Quantos pacotes pode comprar?

Pacotes	Preço
1 $\xrightarrow{\times 4}$	4
x $\xleftarrow{:4}$	12

A operação *(:4 reais por pacote)* é a função inversa da função direta *(X4 reais por pacote)*, que faz passar, na linha de cima, o preço de um pacote a partir de uma unidade (valor unitário).

Vergnaud comenta que este tipo de divisão é mais delicada que a primeira, supomos que isso se deve aos obstáculos cognitivos impostos pela aplicação de raciocínio inverso e que estão presentes neste tipo questão.

Da mesma maneira que no exemplo 1, podemos resolver os dois problemas utilizando tanto a relação vertical, quanto a horizontal, além disso podemos realizar a mesma análise dimensional.

A proporcionalidade:

Os exemplos 5, 6 e 7 são problemas com ilustrações mais complexas das relações quaternárias vistas até então. Nos problemas anteriores conhecíamos o valor da unidade, ou o seu valor correspondente, portanto a novidade (nos problemas 5, 6, e 7) é que não há a relação com a unidade em nenhum dos quatro valores apresentados neles; sendo assim, para resolvê-los teremos que empregar a proporcionalidade. Apesar de ambos exigirem a aplicação da proporcionalidade, o nível de dificuldade é diferente, sendo o exemplo 7 o mais complexo, já que é a combinação das operações utilizadas na resolução dos problemas 5 e 6. Sendo assim vamos diretamente ao problema 7.

Exemplo 7: Três latas de tintas pesam 400 gramas. Para pintar um quadro são necessárias 8 latas. Quanto pesam as 8 latas?

Latas	Gramas
3	400
8	x

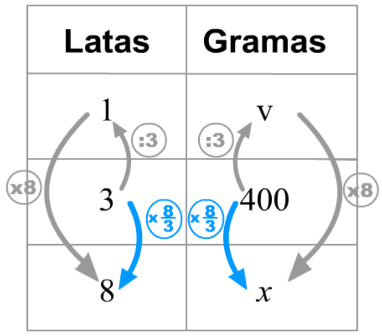
Primeiro vamos resolver utilizando a Relação vertical, essa relação se concentra na noção de operador escalar que faz passar de uma linha para outra (na mesma categoria de medida). A primeira etapa é aplicar o operador (:3) na segunda linha, que faz passar de três latas para uma lata e, consequentemente, descobrir o peso de uma lata (*v*).

Latas	Gramas
1	v
3	400
8	x

A segunda etapa consiste em aplicar o operador (X8), que faz passar de uma para oito latas e, assim, o peso de oito latas.

Latas	Gramas
1	v
3	400
8	x

Será através da aplicação sucessiva de operadores que se chega num operador fracionário que resolverá o problema de forma direta e sintética. Para encontrar o valor de *x*, basta aplicar o operador (X8/3) na segunda linha, que faz passar de três latas para oito e, consequentemente, descobrir quanto pesam oito latas.



A aplicação direta de um operador fracionário é a principal diferença na resolução dos exemplos 5 e 6.

Vergnaud sugere a aplicação sucessiva de operadores multiplicativos como uma boa forma de introdução à operação de multiplicação de frações. Ainda cita que podemos representar o operador fracionário através da razão:

$$\frac{Ponto\,de\,Chegada}{Ponto\,de\,Partida}$$

Dessa maneira, podemos perceber que o problema traz consigo uma proporção (igualdade de razões):

$$\frac{8\,latas}{3\,latas} = \frac{peso\,de\,8\,latas}{peso\,de\,3\,latas} = \frac{x\,gramas}{400\,gramas}$$

No entanto, temos consciência que a análise vertical não é simples e, em função disso Vergnaud faz as seguintes recomendações:

> "A noção de razão, a de razão-operador e a proporção são difíceis, a maioria das crianças de 9 e 10 anos não as compreendem. Não devemos concluir, no entanto, que os professores não devem incluir situações e explicações envolvendo essas noções, mas devem fazê-las de forma prudente de tendo-se em cada etapa e apoiando-se ao máximo nas noções mais evidentes para as crianças, como a de operador." (VERGNAUD, p.207, 1991)

Análise Horizontal

Como já vimos, na análise horizontal exploramos a noção de função que faz passar de uma categoria a outra diferente.

Latas	Gramas
3 $\xrightarrow{f}$	400
8 $\xrightarrow{f}$	x

Primeira etapa: O mesmo operador ou função que faz passar de três latas para 400 gramas é o mesmo que faz passar oito latas para x gramas. Segunda etapa, definimos o operador função utilizando a seguinte razão:

$$\frac{Ponto\,de\,Chegada}{Ponto\,de\,Partida} = \frac{400\,gramas}{3\,latas}$$

Sendo assim aplicamos o operador $\left(X\,\frac{400}{3}\right)$ *gramas/ latas* na tabela:

Latas	Gramas
3 $\xrightarrow{x\frac{400}{3}\ \text{gramas / lata}}$	400
8 $\xrightarrow{x\frac{400}{3}\ \text{gramas / lata}}$	x

Para Vergnaud a análise horizontal se situa num nível conceitual muito elaborado e essa seria uma das justificativas para as dificuldades que as crianças têm para compreender o conceito de função e ainda diz que

> *"Se a noção de correspondência não representa nenhuma dificuldade, nem sua representação na forma de tabela, a análise de correspondência em termos de função é muito delicada, porque envolve não só o conceito da relação numérica, mas também a relação de dimensões"* (VERGNAUD, P. 210, 1991).

Imaginamos que um leitor, imbuído de um senso de praticidade, possa estar se perguntando: *"Se o objetivo dessa pergunta é explorar as operações com números negativos, qual a necessidade de fazer uma discussão tão aprofundada ao ponto de examinar a noção de proporção e função?"* Lembre-se que temos como objetivo auxiliar no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo dos nossos alunos. Para isso é importante possibilitar uma diversidade de experiências que contribuam para que (as crianças) atribuam novos e diferentes sentidos e significados para os diferentes sistemas simbólicos.

No livro *"Atividade Humana e Conceituação"* Vergnaud apresenta o seguinte exemplo esclarecedor e que iremos transcrever (2008, p. 29):

A fórmula ***V=S.H*** representa as relações entre o volume, a superfície da base e altura de um prisma reto. Podemos ler esta fórmula da seguinte maneira.

Para uso direto: O cálculo do volume, quando conhecemos a superfície da base e a altura.

Para uso indireto: O cálculo da altura, quando conhecemos o volume e a superfície da base; ou ainda para o cálculo da superfície da base, quando conhecemos o volume e sua altura.

Através de proporção (maneira mais sofisticada): o volume é proporcional à superfície da base, quando a altura se mantém constante; e proporcional à altura, quando a superfície da base se mantém constante.

Para ele (e concordamos), o sentido atribuído aos signos depende de várias conceituações que não estão contidas nos significados dos símbolos. Além disso é através de sua atividade que o aluno desenvolverá diferentes categorias de pensamento que lhe permitirão ter maiores condições de compreender uma fórmula, enunciados ou situações problema. A terceira interpretação da fórmula (apresentada logo acima) é praticamente ausente da escola básica, segundo Vergnaud.

Portanto concluímos que a relação horizontal utilizada para resolver problemas do campo multiplicativo, contribui para o desenvolvimento da noção da proporcionalidade e de função. Tendo consciência disso, poderemos contribuir na aprendizagem desses conceitos ao desenvolver os Objetos Virtuais de Aprendizagem e uma proposta didática que estejam de acordo com essa concepção. Vale apena ressaltar que essas considerações também valem para o Campo Aditivo, sendo assim pretendemos possibilitar uma diversidade de experiências que contribuam no desenvolvimento do raciocínio aditivo.

4 TÉCNICAS E MATERIAIS

Nesta secção apresentaremos o material desenvolvido durante a pesquisa, ele é constituído dos seguintes Objetos Digitais para a Aprendizagem (ODAs): *Calculando*, *Collins, Collinus, Formula (–1), Praia, Varal dos Inteiros* e de um conjunto de atividades (virtuais ou não) que fazem parte de uma proposta didática para utilização dos ODAs. É importante citar que, para o desenvolvimento de alguns ODAs, tivemos a felicidade de contar com a colaboração da equipe de desenvolvimento do MDMat – Mídias Digitais para Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS.

Temos a certeza de que, ao descrevermos o processo do desenvolvimento dos Objetos Digitais para a Aprendizagem, estamos respondendo (mesmo que parcialmente) a pergunta proposta nessa pesquisa: *Como objetos digitais de aprendizagem podem promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva dos Campos Conceituais de Vergnaud?* Entretanto esse processo, ocorrerá no "mundo das idéias" e – apesar de ter como fundamentação teórica os resultados das pesquisas de Vergnaud e Nunes e que, por sua vez, baseiam-se em dados empíricos – é fundamental que esses objetos sejam confrontados com a realidade de uma sala de aula. Pensamos que; assim, nossa proposta de ODAs, se aproxime das necessidades de estudantes e professores da escola básica. Por trás disso reside o desejo de que esses objetos sejam efetivamente utilizados pela comunidade escolar.

Em função do que foi mencionado no parágrafo anterior é importante pensarmos na maneira em que esses ODAs podem ser utilizados em sala de aula e que expressamos através da seguinte pergunta: *Como seria uma proposta didática que estivesse de acordo com a proposta teórica utilizada e que contribuísse para a finalidade a qual esses ODAs foram idealizados?* Nesse sentindo a nossa pesquisa assume um caráter experimental, pois iremos desenvolver e aplicar um experimento para verificar e avaliar a validade de nossas hipóteses a respeito dos ODAs, sendo a proposta didática o próprio experimento.

Por outro lado sabemos que cada profissional tem a liberdade de utilizar os ODAs de acordo com suas convicções teóricas – um colega pode aproveitar o caráter lúdico do *Fórmula (–1)* para utilizá-lo como exercício de fixação, por exemplo – e vemos nessa liberdade de escolha um dos pontos positivos das TICs. No entanto gostaríamos que nossa proposta didática servisse como material de apoio para aquele professor que estiver interessado em entender e acompanhar o desenvolvimento de estratégias de resolução de seus estudantes e, assim, promover o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo.

Nosso experimento foi aplicado em dois momentos diferentes: o primeiro, no final de 2008 numa turma de 6º série do Ensino Fundamental do Colégio de Aplicação da UFRGS e o segundo, numa escola da rede privada do município de Guaíba/RS no primeiro semestre de 2010. É importante ressaltar que a maior parte dos dados presentes nessa pesquisa foram coletados em 2008 e são referentes aos problemas do campo aditivo; já os dados coletados em 2010 são referentes ao Campo Multiplicativo e não foram explorados na primeira coleta de dados.

Consideramos esse fato relevante de ser mencionado nessa seção, pois a proposta didática que apresentamos aqui foi desenvolvida durante a realização do experimento e foi orientada pelas dúvidas e dificuldades que foram surgindo durante sua aplicação. É importante ressaltar que, após a análise dos dados da pesquisa, faremos as modificações e o fechamento da proposta didática que será o produto final desta dissertação de mestrado. Tais observações fazem parte do próximo capítulo.

Tanto a proposta didática quanto os ODAs estão disponíveis para consulta no endereço: http://mdmat.mat.ufrgs.br/formula_1.

Ainda gostaríamos de ressaltar que nesta secção incluímos objetos que não fizeram parte do experimento aplicado em estudantes do Ensino Fundamental.

4.1 O JOGO *FÓRMULA (–1)*

Podemos ressaltar que o Objeto Digital para a Aprendizagem (ODA) *Fórmula (–1)* é a peça central de nossa proposta, já que ele apresenta um conjunto de características que servirão de base para o desenvolvimento de estratégias utilizadas nas operações com números positivos e negativos. Desenvolvemos a primeira versão do *Fórmula (–1)* num estágio em 2003 – quando éramos graduandos do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS – para utilizar com uma turma de estudantes do Escola Municipal de Ensino Fundamental Monte Cristo, no município de Porto Alegre. No início o ODA só abordava problemas de soma e subtração de números positivos e negativos e foi inspirada num exemplo citado no livro que hoje nos é desconhecido. Nele o autor abordava as operações em $\mathbb{Z}$ tendo como referência os postes de luz de uma rua. Como todo projeto inicial, o uso do jogo não foi satisfatório, pois havia alguns bugs e problemas na forma como os problemas eram apresentados. Com o passar dos anos, fomos aprimorando o jogo: criando novas fases e corrigindo os bugs. Além disso, o amadurecimento das nossas concepções matemáticas e pedagógicas nos permitiram identificar os problemas conceituais da nossa proposta inicial. No entanto, foi ao conhecer a Teoria do Campo Aditivo de Vergnaud que conseguimos modificar a forma como os problemas eram apresentados no *Fórmula (– 1)*, dando-lhe maior coerência com o modelo físico utilizado e, assim, ampliá-lo aos problemas do Campo Multiplicativo.

O *Fórmula (– 1)* é um jogo que visa promover o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo, através da ampliação e construção de novos significados para as operações com números positivos e negativos.

Mas como se dá essa ampliação de significados?

Como vimos no capítulo anterior, o sujeito constrói o seu conhecimento transformando o objeto a partir de sua ação. Segundo Piaget, isso se dá de duas maneiras diferentes, a experiência

> "FÍSICA: agir sobre os objetos e retirar deles qualidades que lhes são próprias; modificar as posições, os movimentos ou as propriedades dos objetos para explorar-lhes a natureza... (b) LÓGICO-MATEMÁTICA: agir sobre os objetos e retirar, não mais deles mas da ação e da coordenação das ações qualidades que lhes são próprias. Ou, "enriquecer o objeto de propriedades ou relações novas, que conservam as propriedades ou relações anteriores, mas completando-as por sistemas de classificações, de ordenações, de colocações em correspondência, de enumerações ou medidas, etc.(...)" (PIAGET, p. 173, 1973).

No jogo, dois personagens disputam uma corrida tendo como referência uma reta numérica, como mostra a Figura 30 abaixo. Para determinar o deslocamento dos personagens, os jogadores terão que realizar operações com números positivos e negativos, já que estão inseridas num sistema referencial. Dessa maneira, acreditamos que as situações-problemas apresentadas no ODA pertencem à quinta e sexta categorias de problemas do Campo Aditivo definidas por Vergnaud, já que os *deslocamentos* dos personagens são transformações sofridas pelas medidas de distâncias e a *posição* são estados relativos de um sistema referencial. Vale ressaltar que, embora Vergnaud tenha apresentado tal definição de números relativos na seção do Campo Aditivo, estendemos tal significado para os problemas do Campo Multiplicativo, pois estão inseridos no mesmo contexto.

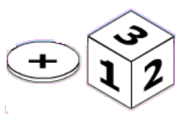
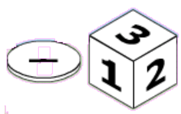
Inicialmente o jogo possuía apenas duas fases que abordavam problemas do campo aditivo; no entanto, durante a aplicação da proposta didática o jogo "cresceu" para três fases e, após o experimento da pesquisa, foram desenvolvidas mais duas fases que contemplam uma proposta para o campo multiplicativo.

FIGURA 030: Primeira fase do Fórmula (–1)

O Jogo Fórmula (– 1): Campo Aditivo

Nesta secção pretendemos apresentar as duas primeiras fases do jogo, deixando para o quinto capítulo a apresentação das modificações finais do jogo.

A primeira fase do ODA serve como uma introdução ao Fórmula (– 1), para que o jogador entenda o objetivo do jogo, suas convenções e regras nesse contexto. Vejamos alguns exemplos: O primeiro jogador deverá clicar no dado para que seja sorteado um número, assim será apresentado o seguinte problema: *"Lesma verde, você está na posição __ e deverá deslizar __ posições para direita/esquerda!"*

Exemplo 1: 	Sendo assim a lesma deverá deslizar 3 posições para direita (sentido positivo). Se a lesma estiver na posição +1 podemos representar seu deslocamento pela expressão: (+1) + (+3) = (+4) (esquema de ação de juntar)
Exemplo 2: 	Já neste caso, deve deslizar 3 posições para a esquerda (sentido negativo). Se a lesma estiver na posição +1 podemos representar seu deslocamento pela expressão: (+1) + (–3) = (–2) (esquema de ação de retirar)

Observe que resolver o problema significa definir a posição final para a qual a lesma deve deslizar (clicando com o mouse) e isso a criança pode resolver utilizando a contagem com esquema de ação, sem a necessidade de realizar operações mentais de adição ou subtração na resolução. Diante disso, temos como hipótese que as crianças conseguirão jogar esta fase sem dificuldade, inclusive crianças de séries anteriores à 6º série.

Supomos que a partir dessa interação com o ODA, as crianças poderão estabelecer relações e generalizações a respeito das operações envolvidas, já que ao utilizar esquemas de ação, conseguirão resolver problemas de modo prático, ampliando, assim, seus sistemas de ações para resolver tais problemas. Cabe ao educador(a) fomentar a coordenação entre os sistemas de ação e os sistemas simbólicos, através de uma proposta didática que contribua para esta sistematização. Segundo Piaget, ao estudar o desenvolvimento das crianças, "*diz que é através da coordenação dos **Sistemas de Ação** e **Sistemas Simbólico** que as crianças desenvolvem o raciocínio Aditivo e Multiplicativo" (2001 apud NUNES)*

Na segunda fase aumentamos o nível de dificuldade ao inserir uma reta numérica maior (com variação de -90 a 90) e ao apresentar uma equação como modelo de representação das operações realizadas. Portanto para realizar o deslocamento das lemas, além da utilização dos esquemas de ação, torna-se necessário entender e interpretar o sistema simbólico representado pela equação, como indica a Figura 31 e os exemplos abaixo.

FIGURA 031: Antiga segunda fase do Fórmula (–1)

Exemplo 1: 0 + -15 = ?	Note que a lesma verde está na posição inicial (zero) e deverá deslizar 15 posições para esquerda (sentido negativo).
Exemplo 2: -5 + 10 = ?	A posição inicial da lesma verde é de cinco posições à esquerda de zero (-5) e ela deve deslizar 10 posições para direita (sentido positivo).
Exemplo 3: -5 – 10 = ?	A posição inicial da lesma verde é de cinco posições à esquerda de zero (-5) e ela deve deslizar O CONTRÁRIO de 10 posições para direita, ou seja, 10 posições para a esquerda (sentido negativo).
Exemplo 4: 5 – -10 = ?	A posição inicial da lesma verde é de cinco posições à direita de zero (+5) e ela deve deslizar O CONTRÁRIO de 10 posições para esquerda, ou seja, 10 posições para a direita (sentido positivo).

Note que a criança continua com a possibilidade de resolver os problemas utilizando a contagem, no entanto isso fica mais difícil, por dois motivos:

(i) ao envolver operações com números grandes, privilegia-se o desenvolvimento de estratégias do tipo: *"se estou numa posição negativa e devo andar para esquerda, a posição final será negativa e devo somar as distâncias"*.

(ii) na expressão ***(a) + (b) = ?*** para $a, b \in \mathbb{Z}$ a criança deve entender e interpretar que o primeiro termo da equação admite o significado de posição inicial da lesma, já o segundo termo se refere ao deslocamento realizado pela mesma.

Até esse momento do planejamento acreditávamos que isso seria suficiente para desenvolvermos a nossa proposta, no entanto, durante a aplicação do experimento percebemos que não, e deveríamos mudar o foco da nossa atenção: para coordenação entre os Sistemas de Ação e Simbólico.

O Jogo Fórmula (–1): Campo Multiplicativo

Infelizmente o *Fórmula (–1): Campo Multiplicativo*, não fez parte do conjunto de objetos que foram testados durante o experimento realizado em 2008, pois não ficou pronto a tempo. No entanto, tendo consciência de que o contexto proposto no *Fórmula (–1)* permitia a exploração de situações problemas do Campo Multiplicativo, durante o ano de 2009 desenvolvemos novas fases do ODA que contemplassem esse tipo de situações e que serão apresentadas neste trabalho. Felizmente, em 2010, surgiu a oportunidade de testá-lo no contexto escolar e que serão inseridos nesse trabalho.

Como vimos, o contexto virtual proposto no *Fórmula (–1)* permite estender as operações do campo multiplicativo que envolvam o conjunto dos números Naturais ao contexto do conjunto dos números positivos e negativos e que foram apresentadas no terceiro capítulo. Sendo assim, mantemos a crença de que, ao resolver situações-problemas que envolvam a simulação de deslocamentos de objetos inseridos num sistema referencial, a criança realizará operações que envolvam multiplicação com números positivos e negativos, pois se tratam de transformações sofridas pelas medidas de distâncias de estados relativos, as posições.

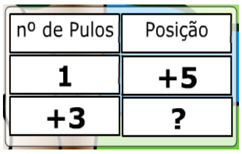
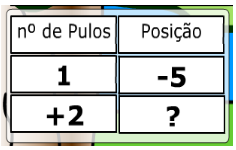
Também sustentamos o princípio, assumido na secção anterior, de que um ODA deve priorizar a coordenação dos sistemas de ação e a representação simbólica por parte dos sujeitos que venham a utilizá-lo. Portanto, o *Fórmula (–1)* deve sugerir a utilização de tabelas para resolver situações-problema do Campo Multiplicativo, visto que Vergnaud diz ser o mais adequado à este tipo de problemas.

Poderíamos aproveitar esse contexto para abordar os problemas do Campo Multiplicativo de duas maneiras, a primeira seria utilizando a noção de velocidade: a lesma desloca-se 4 posições a cada segundo (ou minuto); a segunda opção seria explorar a ideia de pulos: desloca-se 5 posições a cada pulo. Reconhecemos que os problemas que envolvam a noção de velocidade são mais ricos, pois permitem apresentar situações com operações de números decimais – isso se deve ao fato de o tempo ser uma variável contínua – como, por exemplo, "a lesma desloca-se 10 posições a cada 1,5 segundos" ou "a lesma desloca-se 3,25 posições a cada 2,5 segundos". No entanto, recorrendo à nossa experiência como professor, é comum identificarmos uma certa dificuldade inicial ao trabalharmos o conceito de velocidade com alunos do Ensino Médio, portanto optamos em utilizar a ideia dos pulos, pois a noção de proporção está no limite da capacidade cognitiva das crianças que cursam as séries finais do ensino fundamental. Visto que os saltos pertencem a um conjunto discreto de números, esse modelo nos parece mais ilustrativo.

Sendo assim, para as novas fases do *Fórmula (–1)* criamos novos personagens, ao invés de lesmas, duas pulgas disputam a corrida que tem como referência a reta numérica, como mostra a Figura 32.

FIGURA 032: Primeira fase do Fórmula (–1) Campo Multiplicativo

Como se joga: A Pulga verde inicia o jogo. O primeiro jogador deve clicar no botão OK e será apresentado o seguinte problema: *Você se desloca (+7) posições por pulo, Qual será sua posição após (+5) pulos?* Veja os exemplos:

Exemplo 1:  	Significa que a pulga deve dar 3 pulos de 5 posições (em cada salto) para a direita.
Exemplo 2:  	Significa que a pulga deve dar 2 pulos de 5 posições (em cada salto) para a esquerda.

Então, cabe ao jogador descobrir qual será a posição final da pulga. Para conferir sua resposta, basta digitá-la na caixa “ **?** ” e clicar no botão “ **=** ”, como mostrou a Figura 32. Se a resposta estiver correta a distância pulada será somada ao placar que fica na parte inferior do canto esquerdo da tela.

O objetivo do Jogo: Ganha a corrida a pulga que, com seus pulos, somar uma distância superior a 100 no placar.

Ainda é importante ressaltar: para que a posição final da pulga coincida com a calculada na multiplicação, os pulos devem ser dados sempre a partir da posição zero, pois nossa interpretação geométrica baseia-se na seguinte justificativa matemática para a multiplicação de a e b naturais:

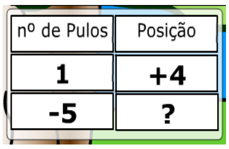
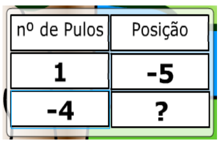
(+a) x (+b) para $a,b \in \mathbb{N}$ é o mesmo que somar *a vezes* a quantidade *b*

$$(+a)\,x\,(b) = \overbrace{0+(+b)+(+b)+...+(+b)}^{a\,vezes}$$

(+a) x (–b) para $a,b \in \mathbb{N}$ é o mesmo que somar *a vezes* a quantidade *–b*

$$(+a)\,x\,(-b) = \overbrace{0+(-b)+(-b)+...+(-b)}^{a\ vezes}$$

Na segunda fase do jogo além das duas situações anteriores será atribuído um significado geométrico para multiplicações do tipo: *(–a) x (b)* e *(–a) x (–b*) para $a,b \in \mathbb{N}$. Veja os exemplos abaix o:

<table>
<tr><td>Exemplo 1:

</td><td>Significa que a pulga deve dar 5 pulos de 4 posições (em cada salto) para o CONTRÁRIO da direita.</td></tr>
<tr><td>Exemplo 2:

</td><td>Significa que a pulga deve dar 4 pulos de 5 posições (em cada salto) para o CONTRÁRIO da esquerda.</td></tr>
</table>

Chamamos a atenção de que é este tipo de multiplicação que gera uma certa polêmica na utilização de modelos físicos, já que "*– 5 pulos*" não tem sentido prático. No entanto ao trabalharmos sob a perspectiva dos Campos Conceituais, sabemos que a subtração é a operação inversa da adição, então podemos utilizar a seguinte interpretação matemática para a multiplicação de a e b naturais.

(i) *(–a) x (b)*para $a,b \in \mathbb{N}$ é o mesmo que subtrair *a vezes* a quantidade *b*

$$(-a)\,x\,(b) = \overbrace{0-(+b)-(+b)-...-(b)}^{a\,vezes}$$

(ii) *(–a) x (–b)* para $a,b \in \mathbb{N}$ é o mesmo que subtrair *a vezes* a quantidade *–b*

$$(-a)\,x\,(-b)=\overbrace{0-(-b)-(-b)-\ldots-(-b)}^{a\ vezes}$$

Gostaríamos de ressaltar que essa justificativa matemática foi apresentada num dos fóruns de discussão sobre o tema do curso de mestrado da Pós-Graduação em Ensino da Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS. Curiosamente, primeiro conhecíamos a interpretação geométrica, para depois encontrarmos uma justificativa matemática. A discussão a respeito da utilização de modelos físicos no ensino de números positivos e negativos foi assunto de dois fóruns.

Voltando à questão de qual pulga ganha o jogo *Fórmula (–1),* como vimos, a vencedora será aquela que somar uma distância superior a 100 no placar. Ao definir tal objetivo, pensamos que o *Fórmula (–1)* gera mais uma situação que pode contribuir para a diferenciação entre dois tipos de números: aqueles que expressam a posição da Pulga em relação a um ponto de referência (é dotado de sinal positivo ou negativo, portanto um número inteiro) e os que representam a distância percorrida nos seus saltos (representam medidas, ou seja, são números naturais, já que não são positivos, nem negativos). Ainda destacamos que é importante que o professor esteja ciente dessa possibilidade quando for utilizá-lo.

Como nossa intenção é promover o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, não pretendemos abandonar a exploração da noção de velocidade, pois será através dela que esse objeto poderá contribuir de forma mais efetiva para o desenvolvimento de tal raciocínio. Além do mais, cremos que se os alunos tiverem contato com a noção desse conceito desde o Ensino Fundamental (respeitando o desenvolvimento cognitivo das crianças), talvez, estaremos contribuindo para o desenvolvimento de conceitos abordados pela disciplina de Física, ao ingressarem no Ensino Médio.

Gostaríamos de ressaltar que o ODA *Fórmula (–1*) não apresenta (diretamente) problemas que envolvam a divisão com números positivos e negativos, mas ele serve de ponto de partida para que esse tipo de problema seja apresentado e explorado em sala aula. Lembramos que cabe ao professor desenvolver esse raciocínio inverso através de uma proposta didática que complemente o *Fórmula (–1).*

Também vale ressaltar que não se trata de acreditamos que esse ODA, sozinho, oferece a garantia da aprendizagem das operações com números positivos e negativos. A rigor, estamos investigando a possibilidade que seu uso oferece em termos de contribuição para tais aprendizagens, o que implica na continuidade da pesquisa citada nesse trabalho.

4.2 O JOGO *VARAL DOS INTEIROS*

O ODA *Varal dos Inteiros* foi idealizado e desenvolvido por Milena Wollmann, acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, a partir de uma atividade desenvolvida em ambiente escolar e pelas discussões ocorridas em parceria com a equipe de desenvolvimento de objetos digitais de Matemática do Núcleo MDMat do Instituto de Matemática da UFRGS. Este objeto pretende favorecer o desenvolvimento da relação de ordem no conjunto dos números positivos e negativos. Nele o jogador deve pendurar num varal um conjunto de toalhas numeradas, tendo o cuidado de colocá-las na ordem crescente. Veja na Figura 33 abaixo.

FIGURA 033: Interface do ODA Varal dos Inteiros

O jogo possui três níveis de dificuldades: básico, intermediário e avançado. Cada nível difere em relação ao outro através da quantidade de prendedores, ou melhor, pela quantidade números a serem ordenados. Na nossa avaliação o *Varal dos Inteiros* é um ODA adequado para introduzir a relação de ordem, visto que as informações contidas no botão "*Ajuda*" são suficientes para jogar e decidir qual número é maior ou menor. A nossa colaboração para esse jogo está nas orientações presentes neste botão, vejamos: para decidir se um número é maior ou menor que outro utilizamos a reta numérica, pois ela será amplamente utilizada no *Fórmula (–1)*. Dessa forma, para decidir se um número é maior que o outro, basta representá-los na reta numérica, por exemplo: –3 é maior que o –10, pois está à direita de –10 na reta numérica.

Uma característica interessante, presente no *Varal dos Inteiros,* é que a distância entre os prendedores é uniforme (possui uma unidade de medida), no entanto essa distância não corresponde à diferença entre os números "impressos" nas toalhas. Por exemplo, na Figura 33 acima, os números 8 e 1 estão à mesma distância do 3 (dois prendedores), só que $3-1\neq 8-3$. Na nossa opinião isso evidencia ainda mais o fato que, para estabelecer relação de ordem entre dois números, basta comparar quem está a direita ou esquerda na reta numérica.

Hoje temos consciência que a relação de ordem não é fundamental para que as crianças tenham êxito nas atividades propostas no *Fórmula (–1)*, no entanto quando um dos nossos objetivos é que as crianças desenvolvam estratégias para que formulem e entendam a regra de sinais, a relação de ordem é uma questão é importante e merece nossa atenção nesse processo de ensino/aprendizagem.

4.3 O JOGO *PRAIA*

Também explorando a relação de ordem, o Objeto Virtual para a Aprendizagem *Praia* foi idealizado e inicialmente desenvolvido pelo Prof. Rodrigo Orestes Feijó, sendo finalizado pelo Prof. Eduardo Melloni Lucchesi. Nele um siri procura chegar à sua toca, para isso ele deve passar por um tipo diferente de labirinto (Figura 34), ao invés de paredes ele deve movimentar-se seguindo uma sequência crescente de números. O siri sempre parte do inteiro – 50 e sua toca é o 50.

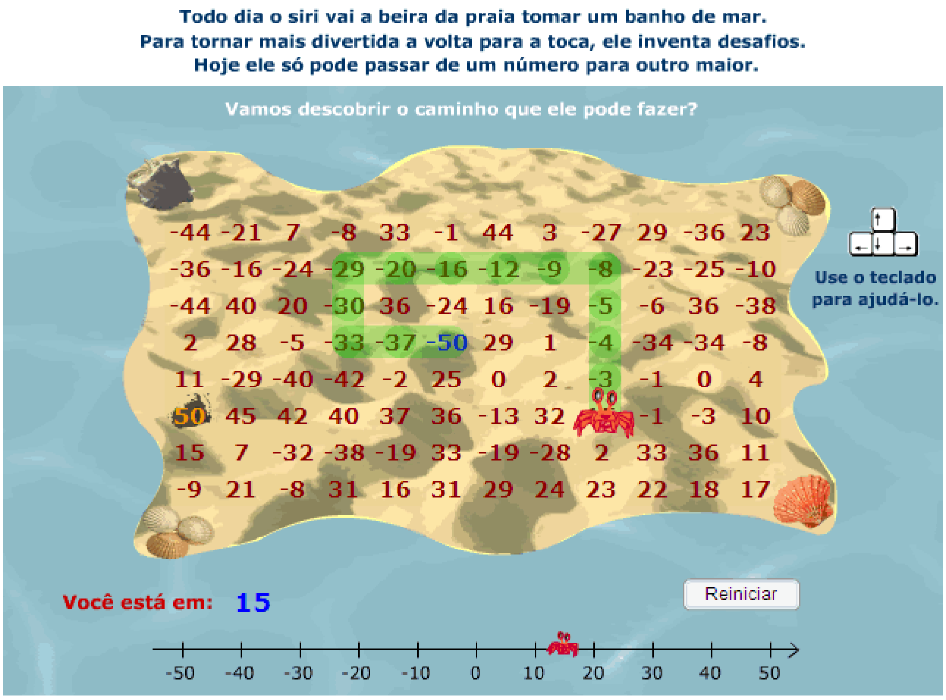


FIGURA 034: Interface do ODA Praia

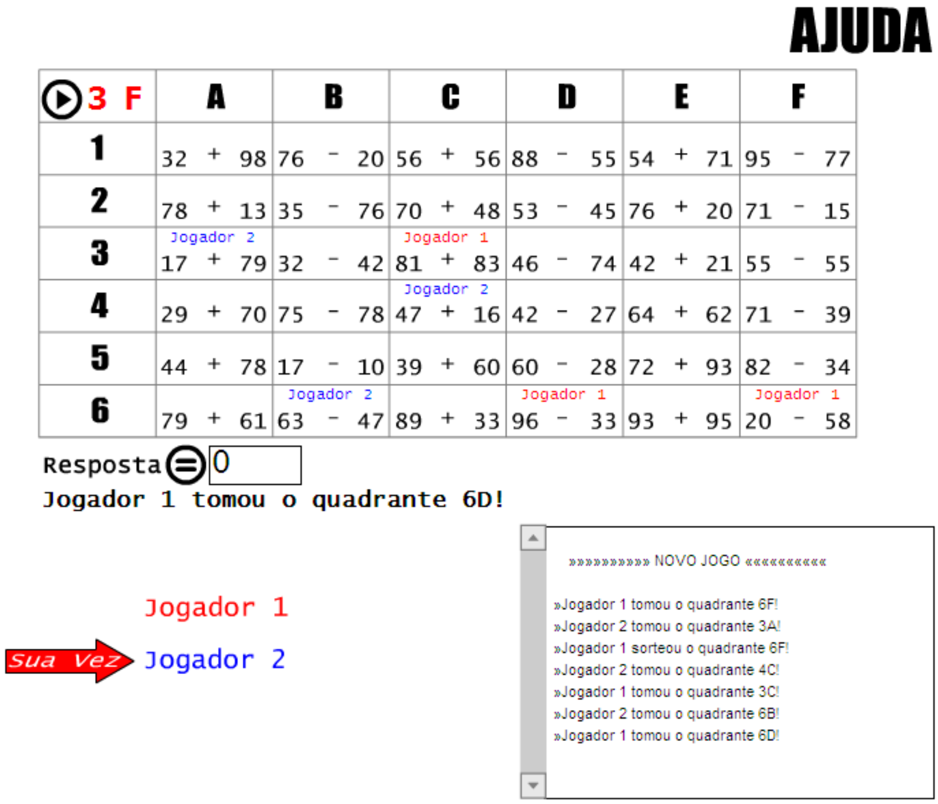
A presença da reta numérica para auxiliar na comparação entre os números foi a nossa sugestão para o jogo do Rodrigo e do Eduardo. À medida que o Siri se move na praia, há uma reta que mostra a posição do siri na reta numérica, isso ajuda o jogador na decisão de qual será o caminho que o siri deve seguir. Sugerimos que o ODA *Praia* seja utilizado após o *Varal dos Inteiros*, pois os números envolvidos nele são maiores e supomos que isso represente um grau de dificuldade maior.

4.4 O JOGO *CALCULANDO*

O *Calculando* é um jogo que foi desenvolvido desde 2003 pelo colega Cristiano Lopes Lima, acadêmico do curso de Bacharelado em Matemática Aplicada da UFRGS. Para nossa proposta esse objeto serve como exercício, já que, para jogá-lo, o estudante já deve estar habituado ao sistema simbólico presente nas operações com números positivos e negativos.

O objetivo do jogo: ganha o jogo aquele jogador que "tomar" toda uma fila (linha ou coluna) da tabela.

Como se joga: ao clicar no botão será sorteado um quadrante (uma célula da tabela), na Figura 35, por exemplo, foi sorteado o quadrante **3F**. Para que o jogador tome esse quadrante, ele deve acertar a conta que está dentro dela (55 – 55). O jogador deve digitar a resposta na caixa de resposta e clicar no botão ⊜, para conferir sua resposta. Se o jogador acertar a conta, seu nome será estampado nela.



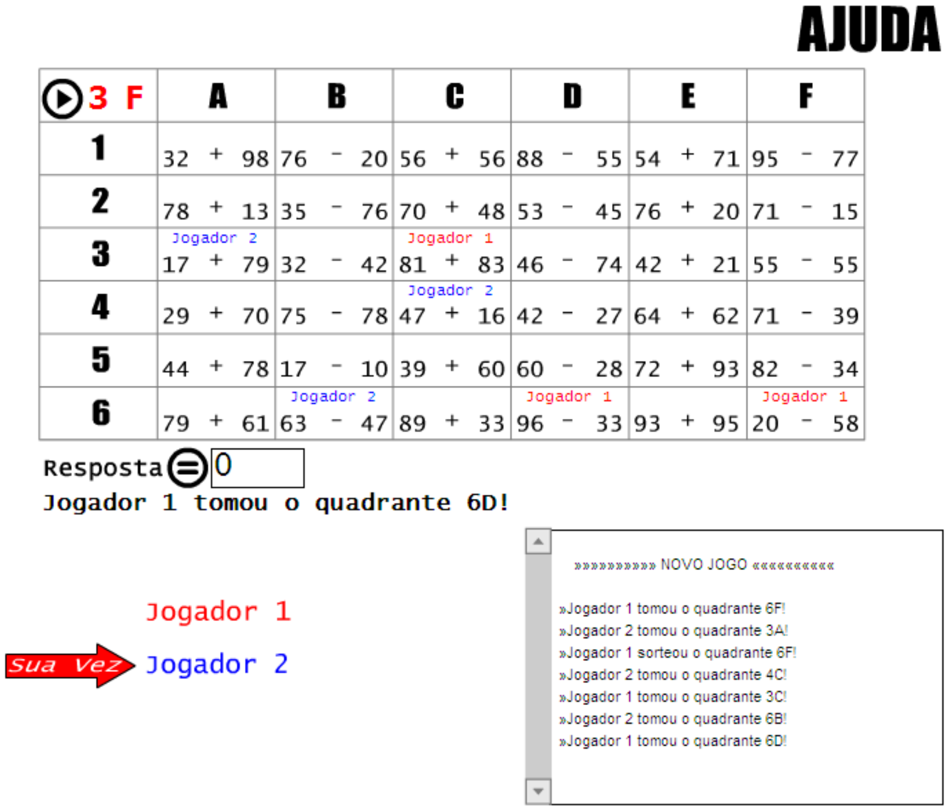


FIGURA 035: Interface do ODA Calculando

O *Calculando* possui três níveis de dificuldade: *Fácil*, com operações de soma e subtração; *Normal*: com operações de soma, subtração, multiplicação e divisão e *Difícil*, com operações com números grandes e a presença de raízes quadradas e cúbicas.

O sistema de localização alfa/numérico utilizado no sorteio dos quadrantes é uma das características interessantes e presentes no jogo, sendo assim esse ODA também contribui para desenvolver a noção de Plano Cartesiano. Embora não seja diretamente explorado, sabemos que esse tipo de atividade contribui para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo.

4.5 OS JOGOS *COLLINS e COLLINUS*

Esses jogos foram idealizados e desenvolvidos por Gabriel Wolf Flores e Taís Aline Azevedo, acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. O nome dos ODAs é a junção das palavras *Col*unas e *Lin*has: o *Collins* envolve a operação de soma de números positivos e negativos, já o *Collinus*, a subtração de números positivos e negativos.

O objetivo do jogo: Vence o jogo aquele jogador que, ao final das jogadas possíveis, obtiver a maior soma de pontos. Como se joga: o primeiro jogador escolhe (clicando com o mouse) um dos valores da fila (linha ou coluna) que estiver em destaque. No exemplo da Figura 36 abaixo temos uma coluna em destaque.

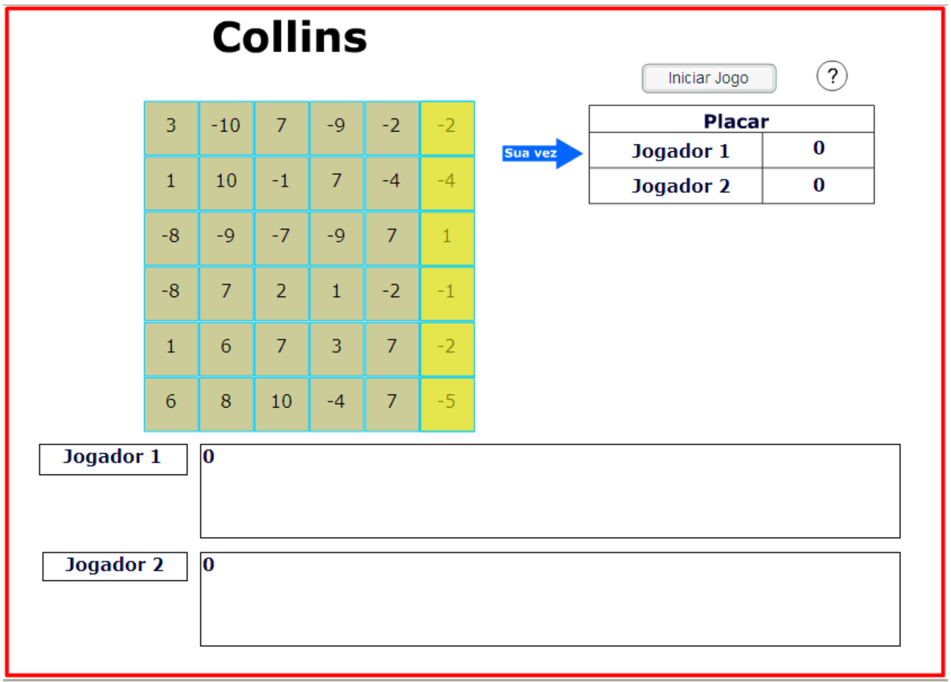


FIGURA 036: Interface do ODA Collins

O valor escolhido será somado ao total de pontos do jogador 1 e libera uma fila para o jogador 2. Por exemplo, se o jogador 1 escolher o valor "1", esse valor será somado ao seu placar, como mostra a Figura 37 abaixo. Como esse valor é o terceiro elemento da coluna, a terceira linha será liberada para o jogador 2. Sendo assim o jogador 2 poderá escolher um outro valor que pertence à linha em destaque. Ao escolher, esse valor será somado ao seu placar e irá liberar uma coluna para o jogador 1.

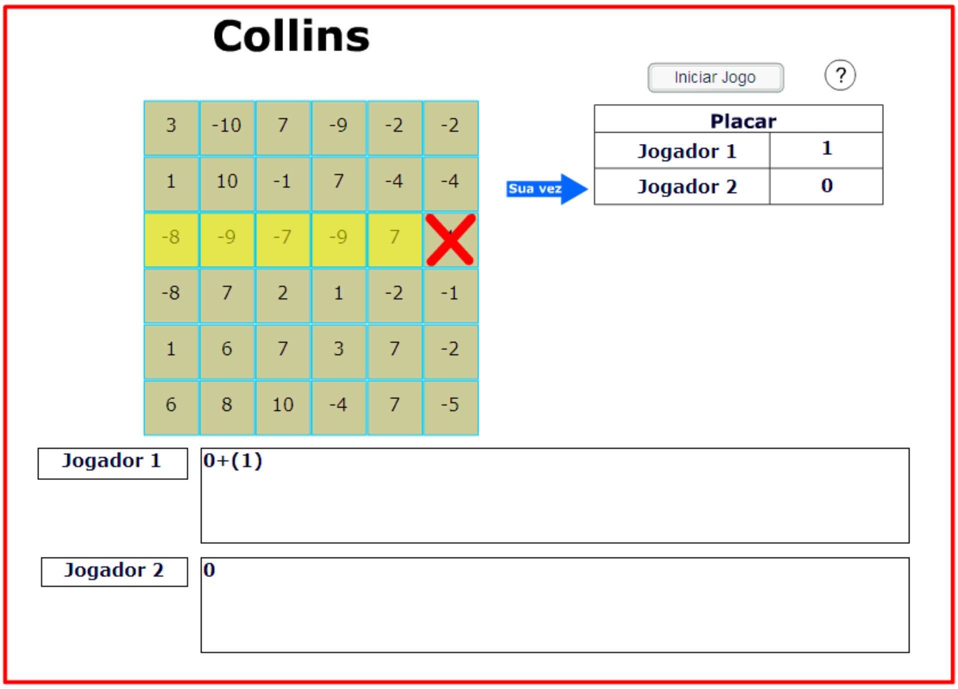


FIGURA 037: Primeiro passo no Collins

O *Collinus* é a versão do jogo para a subtração de números positivos e negativos, portanto a organização do *Collinus* é a mesma do *Collins*, veja na Figura 38 abaixo, a diferença é que os valores escolhidos serão subtraídos ao invés de somados. O objetivo do jogo é o mesmo, vence aquele que possui a maior pontuação no placar.

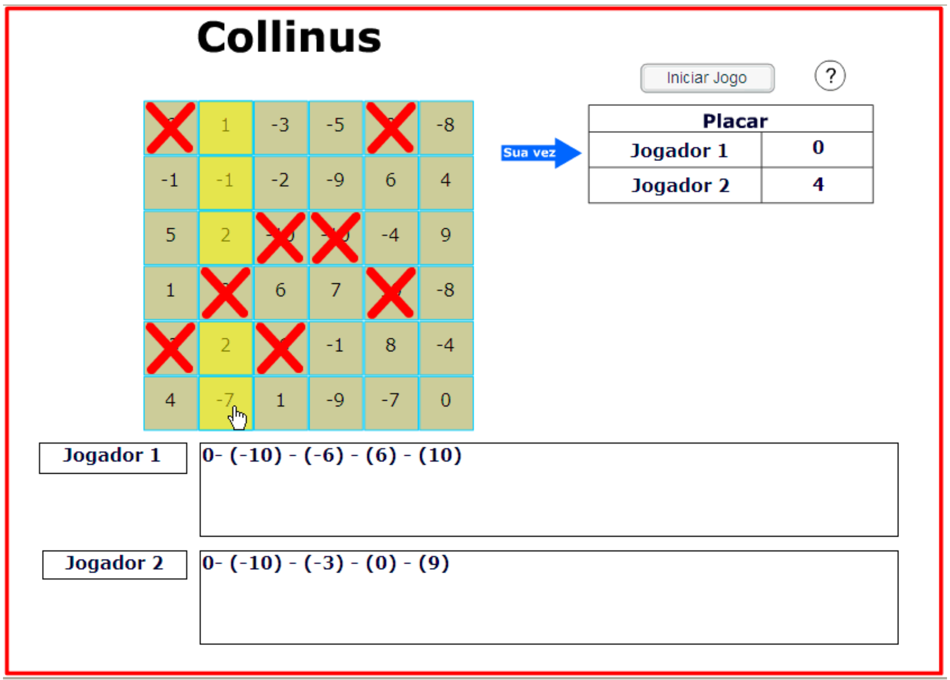


FIGURA 038: Segundo passo no Collins

Observe que tanto o *Collins* quanto o *Collinus* sugerem uma representação simbólica diferente do *Fórmula (*–1), utilizam expressões numéricas para representar as operações realizadas mentalmente pelos jogadores.

No mesmo caso do ODA *Calculando*, na nossa proposta didática esses objetos foram aproveitados como exercício, tendo como objetivo a sistematização das estratégias desenvolvidas com o *Fórmula (–1)*. Até porque, para jogá-los, os estudantes precisam estar habituados ao sistema simbólico inerente a esses conhecimentos. No caso do *Collinus* a concepção de subtração como operação inversa da soma já deve ter sido explorada.

4.6 A PROPOSTA DIDÁTICA

Já mencionamos que nossa proposta didática foi desenvolvida durante o experimento, então é importante mencionar que as turmas foram divididas em dois um grupos. Enquanto um grupo desenvolvia atividades no laboratório de informática da escola o outro grupo desenvolvia atividades na sala de aula, utilizando os recursos que são normalmente utilizados nessa situação. Portanto apresentaremos um conjunto com dois tipos de atividades, aquelas que utilizam recursos digitais e as que não utilizam, conforme a necessidade de seus respectivos contextos.

4.6.1 Aplicação de Pré-testes

Terezinha Nunes sugere a utilização de pré e pós-teste como uma ferramenta, à disposição do professor, para avaliar a aprendizagem de um grupo de estudantes ao longo do ano (2001, p. 54), e que deve ser aplicado em diferentes momentos. Sendo assim desenvolvemos dois testes para o Campo Aditivo. Nosso objetivo com eles era coletar dados que permitissem identificar as estratégias, as representações utilizadas ao resolver as situações-problemas ou aquelas dificuldades que citamos na introdução desta pesquisa. Como esse pré-teste iria acontecer antes de os alunos entrarem em contato com o *Fórmula (–1)*, esses dados serviriam como subsídios para realizarmos alguma modificação no ODA.

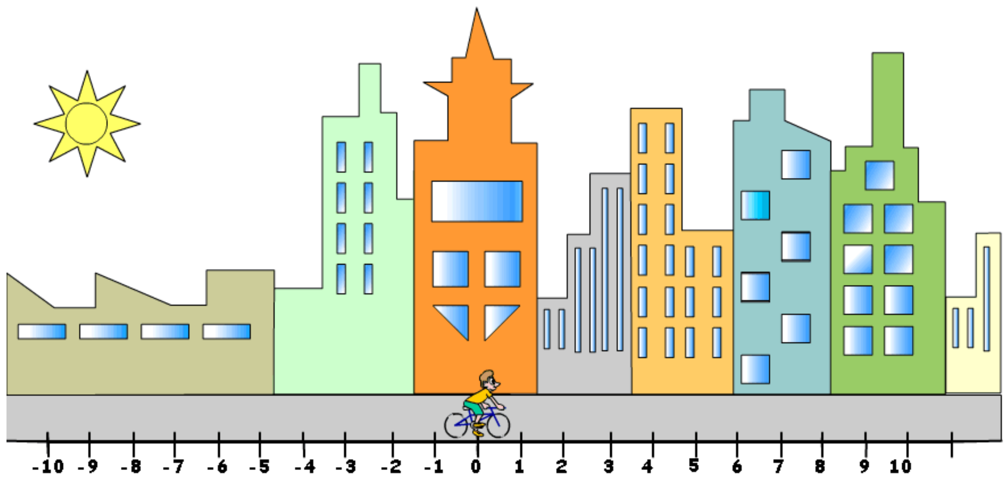
<u>Pré-teste: Campo Aditivo</u>

Cada aluno recebeu uma folha com dezoito situações-problemas para serem resolvidos e lhes foi solicitado que apresentassem uma justificativa para cada resposta encontrada, seja via desenho, explicação escrita ou conta. Vamos a ele:

Material 01

Na figura abaixo temos Flávio, um atleta que pratica caminhada, corrida e ciclismo. Nesta avenida, Flávio movimenta-se em linha reta em apenas dois sentidos: para direita (→) ou para esquerda (←).

Na pista em que pratica exercícios fez marcações a cada metro a partir do prédio em que mora (posição 0).



1. Partindo da posição +3 Flávio movimenta-se 5 metros para direita. Qual será sua posição?
2. Partindo da posição -2 o atleta anda 8 metros para esquerda. Qual será sua posição?
3. Partindo da posição -7 Flávio movimenta-se 10 metros para direita. Qual será sua posição?
4. Partindo da posição +6 o atleta anda 11 metros para esquerda. Qual será sua posição?
5. Agora Flávio caminhou 12 metros para direita e encontrou uma amiga que estava na posição +5. Qual foi sua posição de partida?
6. Tal atleta partiu da posição 10 e parou na posição -7, qual foi o deslocamento realizado por ele?
7. Partindo da posição 0, nosso atleta anda 4 metros para esquerda e para ao encontrar um amigo. Logo em seguida anda 6 metros para esquerda. Qual será sua posição final?

8. Qual será a posição do atleta após movimentar-se 4 metros para direita e 5 metros para esquerda, sabendo que partiu da posição 0?
   a) Qual foi a distância percorrida por ele?
9. Partindo da posição 0 Flávio anda 8 metros para esquerda e para ao encontrar um amigo. Logo em seguida anda 6 metros para direita.
   a) Qual será sua posição após terminar este trajeto? b) Qual foi a distância percorrida por ele?
10. Partindo da posição -7 o atleta movimenta-se 10 metros para direita. Qual será sua posição?
11. Ao se locomover 12 metros para esquerda o andarilho, Flávio, tropeça numa pedra, e mesmo envergonhado continua o trajeto por mais 6 metros parando na posição -8.
    a) A pedra estava em qual posição? b) Qual foi seu ponto de Partida?
12. Após andar 13 metros para esquerda Flávio lembrou que deveria comprar frutas para fazer um suco, sendo assim ele para e anda 7 metros para direita até uma fruteira que fica na posição + 2. Qual foi era sua posição:
    a) ao lembrar-se das frutas? b)da partida? c) Qual o total da distância que ele percorreu?
13. Partindo da posição 0, o atleta anda 4 metros para esquerda e para ao encontrar um amigo. Logo em seguida anda 6 metros para esquerda. Qual será sua posição?
14. Após fazer seu alongamento Flávio corre 512 metros para direita. Qual será a sua posição sabendo que partiu da posição -213.
15. Num outro dia correu 635 para esquerda e parou na posição -218. Qual foi seu ponto de partida?
16. Partindo da posição +2,5 metros, Flávio caminha 6,7 metros para direita. Qual é sua posição?
17. Flávio caminha 6,7 metros para direita e para na posição +5,8. Qual foi sua posição de partida?
18. Flávio estava muito cansado e resolveu voltar para casa, estava na posição -20, após caminhar 15,8 metros para direita quanto falta para chegar em casa?

A discussão sobre a seleção das questões presentes neste pré-teste, bem como a forma como o mesmo está estruturado será feita na seção 5.1.

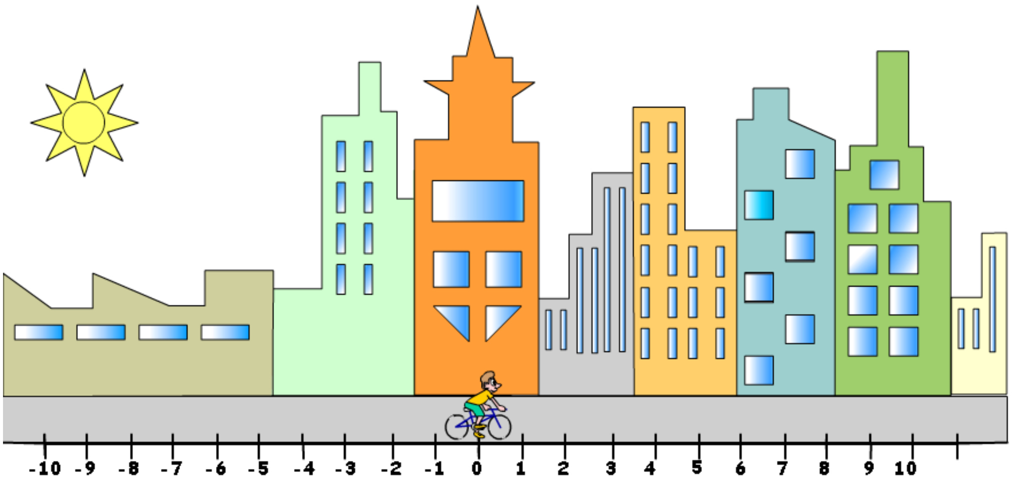
Pré-teste: Campo Multiplicativo

Este material é um conjunto de dezesseis situações-problemas para serem resolvidos pelos estudantes. Vale ressaltar que foi solicitado aos alunos que apresentassem uma justificativa para cada resposta encontrada, seja via desenho, explicação escrita ou conta.

Material 02

Na figura abaixo temos Flávio, um atleta que pratica caminhada, corrida e ciclismo. Nesta avenida, Flávio movimenta-se em linha reta em apenas dois sentidos: para direita (→) ou para esquerda **(←).**

Na pista em que pratica exercícios fez marcações a cada metro a partir do prédio em que mora. Portanto a posição 0 é a origem do sistema de referência.



1) Partindo da posição 0, Flávio movimenta-se 2 metros a cada segundo, para direita. Qual será sua posição após pedalar durante 5 segundos?
2) Partindo da posição 0, o atleta anda 3 metros, para esquerda, por segundo. Qual será sua posição após 4 segundos?
3) Partindo da posição 5, o atleta anda 5 metros para direita a cada segundo. Qual será sua posição após 6 segundos?
4) Partindo da posição - 4, o atleta anda 10 metros por segundo. Qual será sua posição após 5 segundos?
5) Flávio parou na posição +18 ao movimentar-se 3 metros por segundo para direita. Sabendo que partiu da origem do sistema, quanto tempo ele levou?
6) Flávio parou na posição -24 ao movimentar-se 4 metros por segundo para direita.

Sabendo que partiu da origem do sistema, quanto tempo ele levou?

7) Flávio parou na posição –12,6 ao movimentar-se 3 metros por segundo para

esquerda. Sabendo que partiu da origem do sistema, quanto tempo ele levou?

8) Partindo da posição 0, o atleta anda 1,2 metros para esquerda por segundo. Qual será sua posição após 4 segundos?
9) Partindo da origem, Flávio levou 7 segundos para chegar até a posição –28. Como foi o movimento realizado por ele?
10) Partindo da posição 0, Flávio chegou na posição –24 em 8 segundos. Como foi o movimento realizado por ele?
11) Partindo da posição 0, Flávio movimenta-se 2 metros por segundo no sentido contrário da direita. Qual será sua posição após pedalar durante 7 segundos?
12) Partindo da posição 0, Flávio movimenta-se 2 metros por segundo no sentido contrário da esquerda. Qual será sua posição após pedalar durante 7 segundos?
13) Partindo da posição 0, Flávio movimenta-se o contrário de 3 metros por segundo ao contrário da direita. Qual será sua posição após pedalar durante 6 segundos?
14) Partindo da posição 0, Flávio movimenta-se o contrário de 3 metros por segundo ao contrário da direita. Qual será sua posição após pedalar durante 6 segundos?
15) Partindo da posição 0, Flávio movimenta-se 4 metros para direita a cada segundo. Qual será sua posição após pedalar durante uma hora?
16) Partindo da posição 0, Flávio movimenta-se 5 metros para esquerda a cada segundo. Qual será sua posição após pedalar durante duas hora?

Agora vamos apresentar a forma como esse pré-teste foi organizado. Nele formamos 6 grupos de problemas, com diferentes níveis de dificuldades. Os grupos 1, 2 e 3 representam as situações que permitem uma compreensão inicial do raciocínio multiplicativo que envolvem operações com números positivos e negativos. Já os problemas dos grupos 4, 5 e 6 envolvem situações mais complexas, como operações com números grandes, racionais ou que contenham transformações compostas. Também é importante ressaltar que as questões não foram dispostas num nível crescente de dificuldade, pois não há uma hierarquia entre os problemas.

GRUPO 1 – é formado pelos problemas 1, 2, 5 e 6 sua resolução está na forma direta, ou seja, a incógnita está localizada na parte final da transformação. Neste tipo de problema utiliza-se a multiplicação.

Tempo	Posição
1	*2*
5	***x***

ou

Tempo	Posição
1	*– 4*
x	*– 24*

Nos problemas 1 e 2 se conhece o valor unitário da transformação, portanto para determinar a posição final utiliza-se a multiplicação, no <u>problema 1</u> a justificativa geométrica para a operação é: "*A posição final será positiva já que o sujeito movimenta-se para direita e parte do 0. Como a cada segundo ele se desloca 2 posições durante 5 segundos andará 10 posições, parando na posição +10."*

No <u>problema 2</u> a justificativa geométrica é a situação análoga para esquerda: "*A posição final será negativa, já que o sujeito movimenta-se para esquerda e parte do 0. Como a cada segundo ele se desloca 3 posições durante 4 segundos andará 12 posições, parando na posição – 12."*

No <u>problema 5</u> a justificativa geométrica para a operação é: "*como o sujeito parte do zero, ele levará 6 segundos para chegar até a posição 18, pois 6x 3 = 18, a posição final será positiva, pois ele se desloca para a direita*.

No <u>problema 6</u> é a justificativa análoga: "*a posição final será negativa, pois ele se desloca para a esquerda; como o sujeito parte do zero, ele levará 6 segundos para chegar até a posição – 24, pois 6x4 = 24*."

Nas respostas dos problemas 5 e 6, supomos que acontecerão duas coisas: os estudantes poderão utilizar a divisão para justificar a resposta final: *"ele levará 6 segundos para chegar até a posição 18, pois 18:3 = 6"* e alguns não vão se preocupar com o sinal, pois ainda não atribuiram significado prático para tempo negativo.

GRUPO 2 – é formado por aqueles problemas que necessitam do raciocínio inverso utilizado no grupo 1. Podemos dizer que o problema 9 é o melhor exemplo, nele procura-se encontrar o valor unitário do movimento realizado pelo sujeito, veja no esquema abaixo.

Tempo	Posição
1	***x***
7	*– 28*

O valor unitário do movimento será encontrado ao conhecer o vínculo de correspondência entre o tempo e a posição final do sujeito, sua justificativa geométrica: "*Como ele partiu do zero e parou no -28, o sujeito andou para a esquerda, se ele levou 7* *segundos para chegar nessa posição, em cada segundo ele se deslocava -7 posições."*

Como já havíamos comentado no grupo 1, pode-se utilizar a divisão para resolvermos os problemas 5 e 6, por conseguinte, também pertencem a esse grupo. No entanto o tipo de divisão é diferente, essa parte de um relação horizontal (entre grandezas de mesmo tipo), portanto ela se dá através de um operador escalar. Por exemplo no problema 5 temos:

Tempo	**Posição**
1	*3*
x	*18*

Note que 18 e 3 são grandezas do mesmo tipo e entre elas existe uma relação fixa: o operador *(x6)* ou *(:6)*. Justificativa geométrica: *"ele levará 6 segundos para chegar até a posição 18, pois 18:6 = 3".* Nesse sentido acreditamos que o problema 9 é mais sofisticado, pois é preciso descobrir uma relação entre grandezas de tipos diferentes. O pré-teste aplicado, portanto, pode ser melhorado ao incluirmos mais situações-problemas similares a ele e não apenas um único, visto que o nível de dificuldade aumenta ao envolver números negativos.

O GRUPO 3 apresenta aqueles problemas onde, segundo a convenção que será estabelecida no *Fórmula (–1),* utilizaremos o sinal de "–" para a expressar "*o contrário*". O que nos permite estabelecer um significado geométrico para o tempo negativo presente nos problemas 11, 12, 13 e 14.

Problema 11

Tempo	**Posição**
1	*– 2*
– 7	***x***

No <u>problema 11</u> a justificativa geométrica: "*A posição final será positiva, já que o sujeito movimenta-se para o contrário da esquerda, ou seja, para a direita. Como a cada segundo ele se desloca 2 posições para a direita, durante 4 segundos ele andará 12 posições, parando na posição + 12."*

Os problemas 13 e 14 apresentam situações análogas.

Ainda gostaríamos de registrar: não esperamos que as crianças utilizem o sinal "–" para expressar "*o contrário*" ao resolver os problemas desse grupo, pois isso é um meio artificial e que surge de uma necessidade teórica ao utilizar o modelo físico do deslocamento. Imaginamos que as crianças resolverão da mesma forma que os problemas do grupo 1, interpretando da seguinte maneira: *"andar 2 metros por segundo no sentido contrário da direita é o mesmo que andar 2 metros por segundo para esquerda"*

Problema 11

Tempo	**Posição**
1	*– 2*
7	***x***

Partindo da posição 0, Flávio pedala 2 metros por segundo no sentido contrário da direita. Qual será sua posição após pedalar durante 7 segundos?

O GRUPO 4 é formado pelas situações-problema que envolvem operações com números decimais e os problemas 7 e 8 são os que apresentam tal nível de dificuldade. Veja nas tabelas abaixo.

Problema 7

Tempo	**Posição**
1	*– 3*
x	*– 12,6*

ou

Problema 8

Tempo	**Posição**
1	*1,2*
4	***x***

Como sabemos o valor unitário da transformação, a justificativa geométrica do <u>problema 8</u> é: "*A posição final será positiva já que o sujeito movimenta-se para direita e parte do 0. Como a cada segundo ele se desloca 1,2 posições durante 4 segundos andará 4,8 posições, parando na posição +4,8."*

Acreditamos que no problema 7 o nível de dificuldade é maior, pois o operador será racional; no entanto a justificativa geométrica é análoga ao problema anterior: "*A posição final será negativa já que o sujeito movimenta-se para esquerda e parte do 0. Como a cada segundo ele se desloca 3 posições, para chegar na posição -12,6 ele levará 4,2 segundos."*

Os problemas do GRUPO 5 são aqueles que envolvem números "grandes"(considerando seu valor absoluto), ou melhor: formado por operações que envolvam números que não estão representados na reta numérica, como é o caso dos problemas 15 e 16.

Problema 15

Tempo	Posição
1	*4*
60	***x***

ou

Problema 16

Tempo	Posição
1	*– 5*
120	***x***

No <u>problema 15</u> a justificativa geométrica: "*A posição final será positiva, já que o sujeito movimenta-se para direita e parte do 0. Como a cada segundo ele se desloca 4 posições durante 60 segundos andará 240 posições".*

No <u>problema 16</u> a justificativa geométrica: "*A posição final será negativa, já que o sujeito movimenta-se para esquerda e parte do 0. Como a cada segundo ele se desloca 4 posições durante 60 segundos andará 240 posições".*

Já os problemas do GRUPO 6 são os mais complexos para as crianças, pois envolvem composições de operações (Vergnaud, pg. 63). Nesse tipo de problema as crianças devem executar primeiro a multiplicação de positivos e negativos e depois a adição. Veja os problemas 3 e 4.

No <u>problema 3</u> a justificativa geométrica seria a seguinte: " *Como a cada segundo ele se desloca 5 posições, em 6 segundos ele se deslocará 30 posições, como ele parte da posição + 5 e anda para direita, sua posição final +35".*

Problema 3

Tempo	Posição
1	*4*
60	***x***

No <u>problema 4</u> a justificativa geométrica seria a seguinte: "*Como a cada segundo ele se desloca 10 posições, em 5 segundos ele se deslocará 50 posições, como ele parte da posição – 4 e anda para direita, sua posição final +46".*

Problema 4

Tempo	Posição
1	*10*
5	***x***

4.6.2 Construção da Reta Numérica pela Turma

Após a aplicação do pré-teste foi realizada uma introdução aos números positivos e negativos, com a finalidade de apresentar e construir uma reta numérica de papel pardo para ser fixada na parede da sala de aula. Assim, tal reta servirá como uma ferramenta tangível para auxiliar (professores e alunos) na discussão de dúvidas, problemas e estratégias. Tal introdução pode ser feita através de uma conversa informal, perguntando quem conhecia tal números e em quais situações esses números aparecem. No site da proposta estava disponível o seguinte texto, que utiliza a temperatura como um exemplo de discussão.

Atividade 1:

Números Negativos

As imagens abaixo indicam a previsão do tempo nas cidades de Porto Alegre, Brasil e Ottawa, Canadá. Compare as previsões das temperaturas de terça a sábado nas duas cidades.

Os números negativos estão presentes em vários momentos do nosso dia a dia: na previsão de tempo, nos extratos das contas bancárias, em mapas geográficos e etc. Estão tão disseminados que sua utilização não nos causa surpresas. No entanto a humanidade levou cerca de 1000 anos para entendê-los e conseguir realizar cálculos com eles.

Depois dessa introdução começamos a construção da reta propriamente dita. Sugerimos que a construção da reta seja feita pelos alunos, pois acreditamos que durante o ato da construção eles poderão refletir a respeito de algumas características importantes, tais como: unidade de medida, ordem dos números negativos (qual número escrevo primeiro?), posição do zero. Além disso, apresentamos tal atividade como um desafio a ser resolvido:

Material necessário:

- Folhas de papel pardo (o suficiente para preencher a largura da sala).
- Pincéis atômicos

- Lápis, borracha
- Régua (pode ser 30 cm ou 100 cm)

Construção da reta:

Divida as turmas em grupos, onde cada um ficará responsável pela construção de uma parte da reta numérica da turma. Para orientá-los na construção escreva no quadro as seguintes regras:

- Em cada folha de papel pardo deve ter a mesma quantidade de números e a quantidade de números negativos e positivos deve ser igual (aproveite para decidir com seus alunos um intervalo, por exemplo a reta irá de -20 a 20).
- Ao colar as folhas lado a lado, os segmentos de reta devem estar alinhados.
- A distância entre os números deve ser a mesma (eles terão que criar uma unidade de medida).

Note que dessa maneira a atividade de construção da reta numérica também serve como uma atividade que promove a cooperação, já que os grupos terão que coordenar suas ações com as dos outros grupos.

4.6.3 A Relação de Ordem

A relação de ordem pode ser explorada através de perguntas e exemplos, logo após a construção da reta numérica da turma. Porém, para o aprofundamento dessa discussão, desenvolvemos um material de apoio e que está disponível no site, no link "Lavando a roupa Suja" e que utiliza os ODAs *Varal dos Inteiros* e *Praia*. Veja abaixo o material:

Material 03

Quem é maior ?

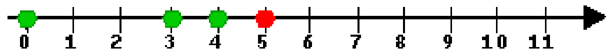
O número 8 é maior ou menor que 3? O número -8 é maior ou menor que -3?

Se você não teve dúvidas, então é um grande conhecedor dos números negativos, porém se você as teve... Mas não se preocupe que se tornará um "expert" no assunto!

Para isso vamos utilizar a reta numérica para nos ajudar.

Positivos x Positivos:

Não temos dificuldade em decidir se os números 9, 8 ou 6 são maiores que 5. Ao representá-los na reta numérica podemos observar o seguinte fato.



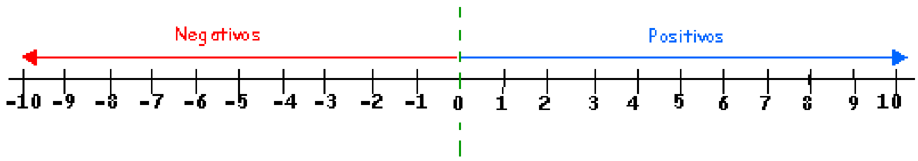
Observe que, na reta numérica, todos os números à direita de 5 são maiores que ele, portanto: **5< 6 < 8 <9**

Da mesma forma, aqueles números que estão à sua esquerda são menores. Portanto:

0 < 3 < 4 < 5

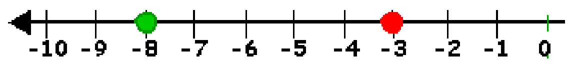
Negativos x Positivos:

Um número positivo SEMPRE será maior que um número negativo, pois na reta numérica os negativos estão à esquerda de Zero e os positivos à sua direita.



Negativos x Negativos:

Então para responder se o número –8 é maior ou menor que –3, basta verificar se –8 está à direita ou esquerda de –3 na reta numérica.



Logo -8 é menor que –3, Portanto: **–8 < –3**

Lavando a roupa suja!

Quero ver se você ficou um "expert" no assunto, Temos dois objetos com desafios para você:

VARAL DOS INTEIROS PRAIA

Cabe ao professor decidir a ordem de utilização dos ODAs e da leitura do material de apoio. Acreditamos que a forma mais interessante e divertida é iniciar através do jogo *Varal dos Inteiros*, pois assim os estudantes consultarão o material de apoio com esse objetivo prático.

Logo após interagirem com os dois ODAs e lerem o material de apoio, propomos dois conjuntos de questões para os estudantes. Nelas exploramos situações que utilizam os números negativos e que, na nossa opinião, fazem parte do dia a dia dos estudantes. O primeiro conjunto de questões explora os negativos na temperatura de um termômetro (veja Figura 39) e o segundo conjunto de questões faz referência à tabela de classificação do campeonato brasileiro de 2008, veja Figura 40 abaixo. Os objetivos das perguntas em ambos conjuntos de questões são: definir em cada situação a parte negativa e positiva da reta numérica (e o que representam) e estabelecer a relação de ordem entre vários números (colocando os números na ordem crescente ou decrescente). No experimento dessa pesquisa os estudantes responderam essas questões numa folha de papel.

Material 04

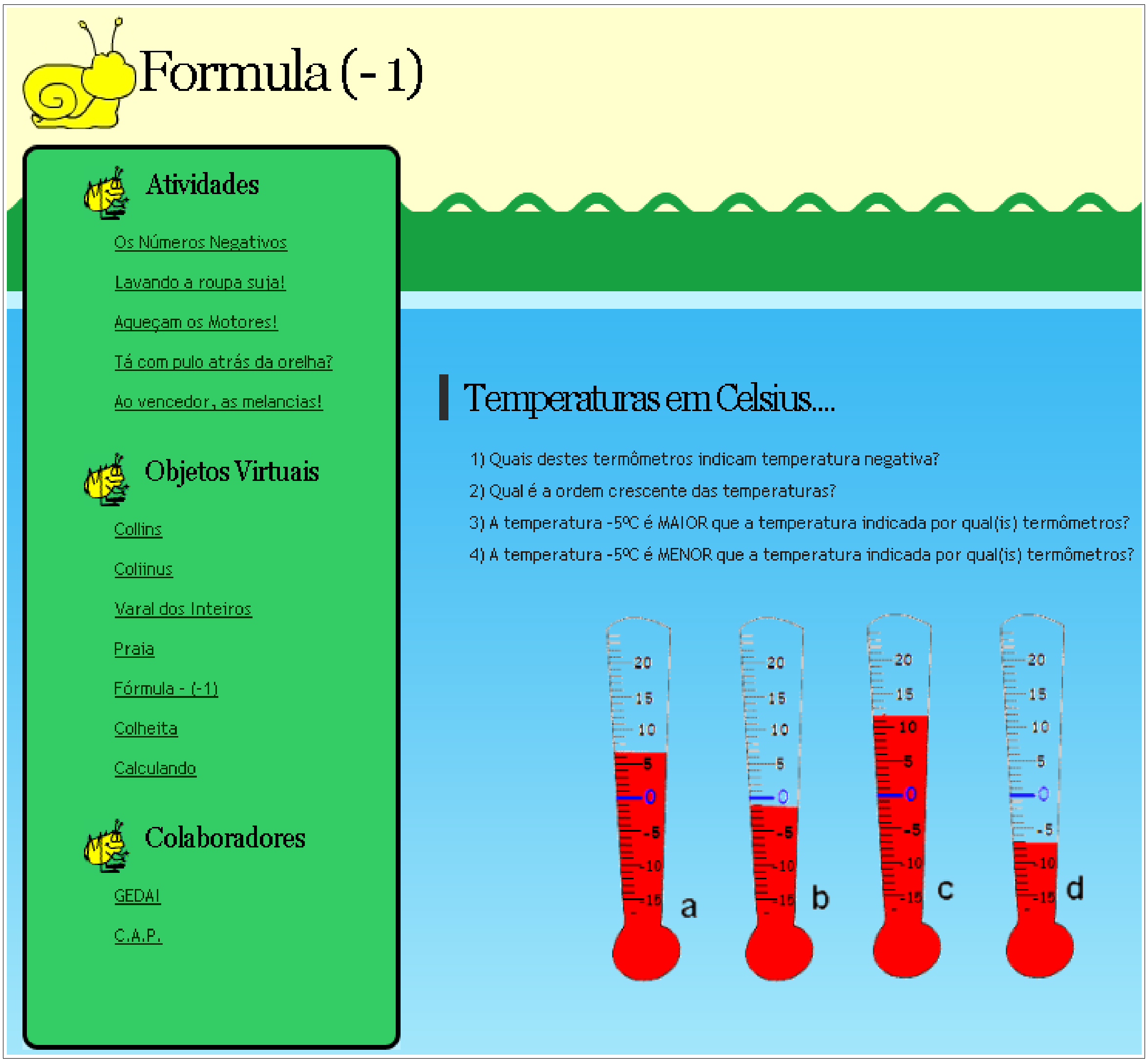


FIGURA 039: Atividade de temperatura

Campeonato brasileiro

1)Qual é o saldo de gols do líder do campeonato?

2) Coloque na ordem crescente os time que possuem saldo de gols negativos

3) Quando um time possui saldo de gols positivo?

4) **Quando um time possui saldo de gols negativo?**

5) **Quando um time possui saldo de gols igual a zero?**

6)Quantos gols o Vasco têm que fazer para igualar ao SG do Internacional?

7) Quantos gols o Grêmio têm que levar para igualar ao SG do Internacional?

CLASSIFICAÇÃO

Colocação	Time	PG	J	V	E	D	GP	GC	SG	%
1º	Grêmio	59	31	17	8	6	47	25	22	63%
2º	São Paulo	56	31	15	11	5	51	30	21	60%
3º	Cruzeiro	55	31	17	4	10	46	32	14	59%
	Flamengo	55	31	16	7	8	51	33	18	59%
	Palmeiras	55	31	16	7	8	48	37	11	59%
6º	Botafogo	49	31	14	7	10	44	31	13	53%
7º	Internacional	47	31	13	8	10	41	37	4	51%

FIGURA 040: Atividade sobre o campeonato brasileiro

Com essas duas atividades esperamos que os estudantes já estejam familiarizados com a utilização da reta numérica para estabelecer a relação de ordem entre números positivos e negativos quaisquer. Sendo assim propomos uma folha com um novo conjunto de atividades.

Material 05

ATIVIDADE 1 – Leia as reportagens abaixo (Acessadas em 04/11/2008)

A) Notícia do site Zero Hora (04/11/2008)

Rio Uruguai segue baixando em São Borja

Em Itaqui e Uruguaiana, a previsão é de que o rio recue nos próximos dias

Ronan Dannenberg, Santana do Livramento | ronan.dannenberg@zerohora.com.br

O nível do Rio Uruguai segue baixando em São Borja, um dos principais municípios atingidos pelas cheias na Fronteira Oeste. No final da tarde de ontem, as águas estavam 11m90cm acima do normal. Hoje pela manhã, a última medição feita registrava 11m66cm acima.

Já em Itaqui e em Uruguaiana, municípios geograficamente posicionados abaixo de São Borja, ocorre uma lenta elevação dos níveis de água, que devem baixar nos próximos dias. Em Itaqui, o Rio Uruguai estava 10m80cm acima, enquanto que em Uruguaiana, o rio estava 10m28cm além do normal.

Água do Rio Uruguai invadiu bairros e casas
Foto:Vilson Winkler, Divulgação

Comente esta matéria

B) Notícia do site ClickPB: ***"Rios põem Estado em alerta"*** *(Quarta, 28/12/05)*

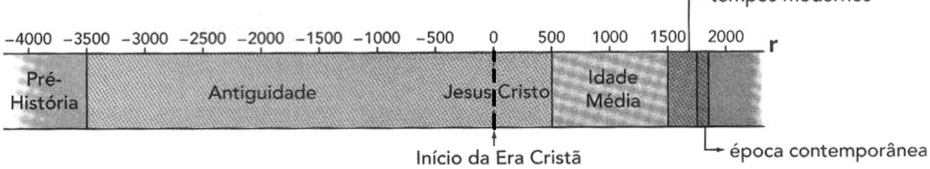
"A falta de chuva ainda não ameaça o abastecimento de água no Estado, mas o nível baixo dos rios começa a preocupar prefeituras, principalmente nas regiões Sul e Oeste. Em Uruguaiana, o Rio Uruguai dá indícios da situação: com 1m20cm abaixo do nível normal - o nível se mantém desde o dia 24 em 1m60cm -, o curso d'água já deixa à mostra a base dos pilares de concreto da ponte que liga o Brasil à Argentina.

A Delegacia Fluvial da Marinha desaconselha a navegação de embarcações com mais de cinco metros ou com motores acima de 30 HPs devido ao risco de encalhe. A média para este período do ano é de 2m80cm - com até dois metros o canal ainda permite a navegação. (...)"

Utilize a reta numérica para representar os níveis da água.

ATIVIDADE 2 - No Calendário cristão, o nascimento de Cristo é considerado o marco zero (0). Os fatos acontecidos antes de Cristo têm os anos indicados pela sigla a.C. ou com o sinal (-). São, por isso considerados números negativos. Já os fatos acontecidos depois de Cristo têm os anos indicados com d.C. Ou com o sinal (+), ou sem sigla de sinal.

Examine este diagrama, conhecido por linha do tempo:



Copie a reta graduada **r** em seu caderno e coloque os seguintes pontos que indicam algumas datas importantes da época do império Romano:

a) A: +325 – O cristianismo torna-se religião oficial.

b) B: -509 – Fundação da República.

c) C: +395 – Divisão do império Romano do Oriente (capital: Constantinopla).

d) D: -750 – Fundação de Roma.

ATIVIDADE 3 - Em cada item diga qual o número correspondente: se é positivo ou negativo.

a) 20 m acima do nível do mar.

b) Uma dívida de R$100,00

c) 40 m a direita de zero.

e) 25 anos antes de Cristo.

f) 12 graus abaixo de Zero.

g) Ganhar R$ 300,00.

h) Dívida de R$ 400,00.

i) 34 metros abaixo do solo.

ATIVIDADE 4 - Ordene os números abaixo:

a) -2 e +1

b) -4 e -2

c) 0 e -3

d) +2 e +3

e) +3 e -3

f) +4 e 0

g) -21 e +18

h) +30 e +27

i) -16 e 0

j) -22 e -29

l) -5,5 e 4,5

m) 2,5 e 1,5

ATIVIDADE 5 - Para cada afirmação abaixo coloque AV, S ou N se ela acontece, respectivamente, às vezes, sempre ou nunca. Em seguida apresente uma justificativa:

a) (_____) Um número inteiro negativo é menor do que um inteiro positivo.

b) (_____) Um número inteiro negativo é menor do que outro inteiro negativo.

c) (_____) Um número inteiro negativo é menor do que zero.

d) (_____) Um número inteiro positivo é menor do que zero. *(No material que as crianças receberam, o item d era igual ao item c.)*

e) (_____) Um número inteiro positivo é menor do que outro inteiro positivo.

Nossos objetivos ao propor tais atividades são:

(i) apresentar novas situações em que os negativos são utilizados (atividade 1 à 3);

(ii) utilizar a reta numérica para representar essas situações (atividade 1 à 3);

(iii) desenvolver a habilidade de interpretar e utilizar os símbolos $<$ e $>$ para representar a relação de ordem (atividade 4);

(iv) interpretar e discutir definições mais genéricas sobre a relação de ordem (atividade 5);

(v) discutir com os alunos o "novo" significado atribuído ao zero (em todas atividades);

4.6.4 Campo Aditivo: o *Fórmula (–1)*

De acordo com a nossa proposta didática agora é o momento para utilizar as duas primeiras fases do *Fórmula (–1)*, pois acreditamos que os estudantes já estão mais preparados para refletirem sobre as operações envolvidas num sistema referencial, visto que estão mais familiarizados com os números negativos e com a reta numérica.

Pensamos que a discussão sobre as operações com números positivos e negativos deve partir da utilização do *Fórmula (–1)*, já que este visa promover a coordenação entre os sistemas de ação e sistemas simbólicos, bem como o desenvolvimento de estratégias para realização de tais operações. A apresentação do ODA junto com uma atividade está disponível no link *"Aqueçam os motores"*, Figura 41.

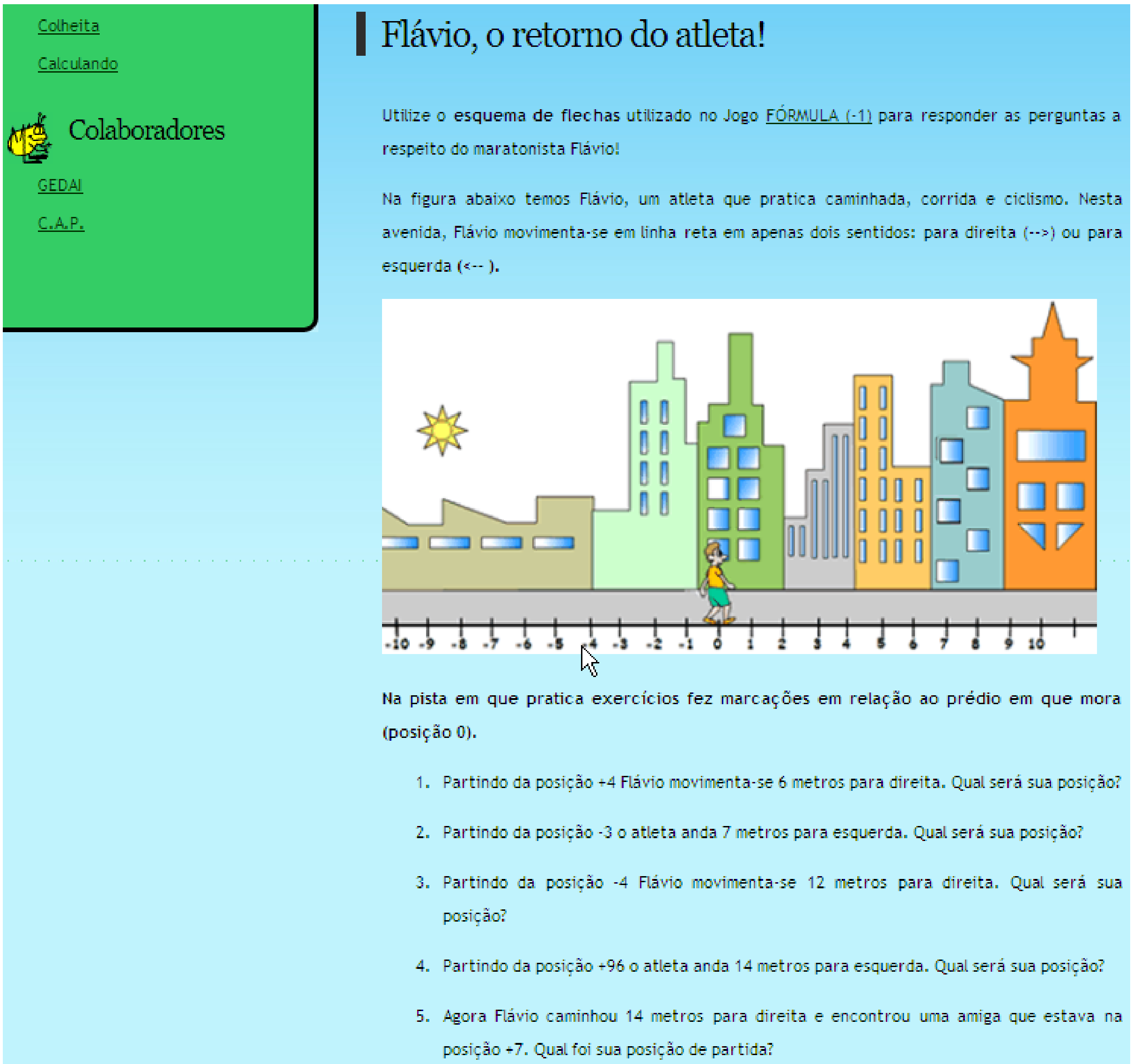


FIGURA 041: Atividade aqueçam os motores

Resolvemos apresentar aqui algumas questões semelhantes às do pré-teste, pois gostaríamos de observar se a utilização do *Fórmula (*–1), já influenciaria nas estratégias ou nas representações utilizadas pelas crianças, ou seja, utilizariam o esquema de flechas. Quanto ao nível de dificuldade das questões, todas pertencem ao grupo 1 ou 2 do pré-teste.

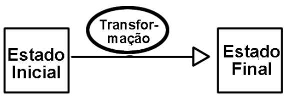
4.6.5 Esquema de Flechas

Como veremos na capítulo cinco, afirmamos que os resultados obtidos com a aplicação do pré-teste modificaram a nossa concepção a respeito do objeto, antes ele priorizava a promoção dos esquemas de ação e agora prioriza a coordenação dos sistemas de ação e representação simbólica. Diante disso, concluímos que o esquema de flechas seria o caminho intermediário que possibilitaria o entendimento da representação da operação inversa da adição (a subtração) de números positivos e negativos que, além de ser ensinada de forma mecânica, representa uma dificuldade para os nossos estudantes. Sendo assim era fundamental desenvolver uma atividade que explorasse a utilização do esquema de flechas como ferramenta para entender e representar as situações-problemas apresentadas. Para isso propomos a seguinte atividade:

Material 06

Esquema de flechas

Utilizamos o esquema de flechas para representarmos os cálculos realizados ao resolver uma situação-problema:



Exemplo:

Partindo da posição +12 o carro A movimenta-se 7 Km para a direita. Qual será sua posição?

O carro B parte da posição +12 e anda 7 Km para a esquerda. Qual será sua posição?

Responda:

a) Qual carro andou mais?

b) Qual a diferença entre os movimentos realizados pelos carros?

Nestes exemplos a distância percorrida pelos automóveis é o valor absoluto (não possui sinal).

Já seus deslocamentos são valores relativos, possuem sinal, pois estão num sistema de referência.

Utilize o esquema de flechas para representar os problemas abaixo, identificando se a pergunta do problema situa-se no estado inicial, final ou na transformação.

Flávio saiu de casa para ir à escola às 7 horas e retornou às 12 horas e 30 minutos.

a) Quando ele saiu a temperatura era 17°. Desde quando ele saiu até o momento em que ele retornou, a temperatura aumentou 12°. Qual era a temperatura quando Flávio chegou em casa?

b) Se quando Flávio saiu de casa o termômetro marcava a temperatura de 21° e quando ele retornou 27°. Qual foi a modificação na temperatura?

c) Desde o momento em que Flávio saiu de casa até o momento em que ele retornou a temperatura subiu 4°. Se quando Flávio retornou à sua casa o termômetro indicava a temperatura de 17°, qual era a temperatura quando ele saiu de casa?

Flávio saiu para passear no shopping com os pais domingo à tarde.

a) Quando ele saiu o termômetro indicava a temperatura de 30° Celsius e quando ele retornou o termômetro indicava 9° a menos. Quantos graus fazia quando Flávio retornou a sua casa?

b) Quando Flávio saiu de casa a temperatura era 31°, quando ele retornou a temperatura era de 23°. Qual foi a varaiação de temperatura?

3) Flávio, e seus pais, foram viajar para Moscou nas férias.

a) Quando eles chegaram a Moscou, fazia muito frio, o termômetro marcava -3° Celsius, 10 horas depois eles notaram que já não estava mais tão frio, a temperatura tinha elevado 5° Celsius. Quantos graus fazia 10 horas depois que eles chegaram a Moscou?

4) Resolva as operações indicadas nos esquemas de flecha abaixo.

a) $\boxed{+15} \xrightarrow{+8} \boxed{}$ b) $\boxed{-7} \xrightarrow{+15} \boxed{}$

c) $\boxed{-7} \xrightarrow{-9} \boxed{}$ d) $\boxed{+5} \xrightarrow{-7} \boxed{}$

e) $\boxed{+13} \xrightarrow{+4} \boxed{}$ f) $\boxed{-10} \xrightarrow{-4} \boxed{}$

g) $\boxed{+11} \xrightarrow{-8} \boxed{}$ h) $\boxed{-17} \xrightarrow{+12} \boxed{}$

5) Para resolver as operações da atividade anterior, em quais é necessário realizar:

a) uma SOMA dos valores absolutos?

b) uma SUBTRAÇÃO dos valores absolutos

6) Estabeleça critérios para decidir quando é necessário *Somar* ou *Subtrair* os valores absolutos nas operações dos itens a e b da questão 5.

Estabeleça critérios para decidir quando a resposta será *Positiva* ou *Negativa* para as operações do item a e b da questão 2.

Note que até a atividade 3 o nosso objetivo é que os estudantes interpretem o problema e construam o esquema de flechas, já na atividade 4 eles devem interpretar vários esquemas de flechas dados. Na atividade 5 são apresentadas questões que servem para a reflexão e discussão de algumas propriedades nas operações realizadas pelos estudantes.

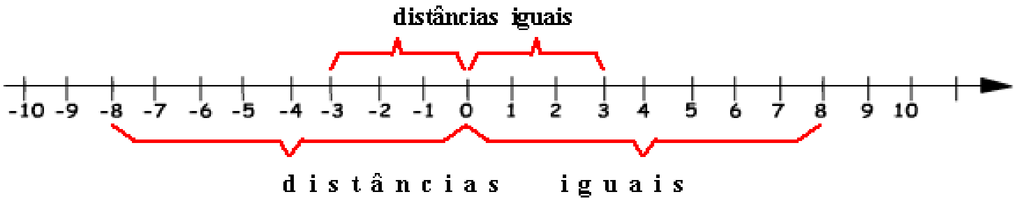
4.6.6 Números Simétricos e Expressões Numéricas

Para discutirmos a subtração dos números positivos e negativos, é importante explorarmos a definição de números simétricos, já que a sua existência é uma das principais diferenças entre a estruturas algébrica do conjunto dos números inteiros e a dos naturais. Além disso, no próximo grupo de atividades, também faremos uso das expressões numéricas para representar a adição e a subtração dos números positivos e negativos e que aparecem em qualquer livro didático.

Material 07

Números simétricos:

Na reta numérica abaixo, os números –3 e 3, 8 e –8, etc. estão em pontos simétricos em relação ao ponto zero. Por isso, dizemos que -3 e 3 são números simétricos ou opostos.



1) Determine:

a) ____ é simétrico de – 5.

b) ____ é oposto de + 9.

c) ____ é oposto de – 10.

d) ____ é simétrico de 37 .

e) Qual é o oposto do oposto de – 4?

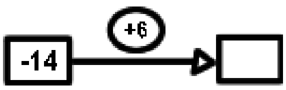
f) Qual é o oposto do oposto de +15?

g) Qual é o oposto do oposto de – 46?

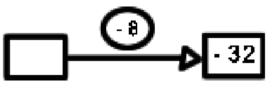
h) Qual é o oposto do oposto de +355?

Relembrando:

A partir do esquema de fechas podemos representar as operações através de equações:



(- 14) + (+ 6) = ?



? + (- 8) = - 32

2) Descubra os valores de **?**

a) (+ 12) + ? = 0 ? = ____

b) (- 34) + ? = 0 ? =____

c) ? + (+ 51) = 0 ? = ____

d) ? + (- 150) = 0 ? = ____

e) (- 30) + ? = - 21 ? = _____

f) (- 42) + ? = - 53 ? = _____

g) ? + (+ 700) = - 340 ? = _____

h) ? + (- 35) = 10 ? = ____

3) Explique com suas palavras quando a soma de dois números inteiros é igual a zero.

Sugestão: utilize o esquema de flechas:

A nossa intenção com a primeira atividade é que os estudantes reconheçam os simétricos de alguns números. Já em 2 e 3 foram apresentadas para que a seguinte propriedade: *"a soma de dois números simétricos é igual a zero"* seja um observável para os estudantes.

Na capítulo três expomos que nosso interesse com esta proposta é promover o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo e não nos restringir à construção das regras de sinais. No entanto a construção de tal regra não deixou de ser um dos objetivos, pois ela representa uma conquista da humanidade e deve ser aprendida, pois é amplamente utilizada nas escolas. Dessa forma propomos uma atividade que permite (para não dizer induz) a dedução de tal regra. Tal atividade é interativa e está disponível no item *Esquema de Flechas,* no link *Ao contrário* do site da nossa proposta, abaixo veja as Figuras 42, 43 e 44 que referem-se à primeira de parte de perguntas.

Acreditamos que a maioria dos estudantes já deve ter percebido tais relações, entretanto acrescentamos tal atividade pensando naqueles que, por um acaso, ainda não tenham percebido tais propriedades. Apesar do "tom" indutivo de nossas perguntas, pensamos que os estudantes têm mais condições para estabelecer tais relações, já que resolveram diferentes problemas desse tipo utilizando diferentes esquemas de representação.

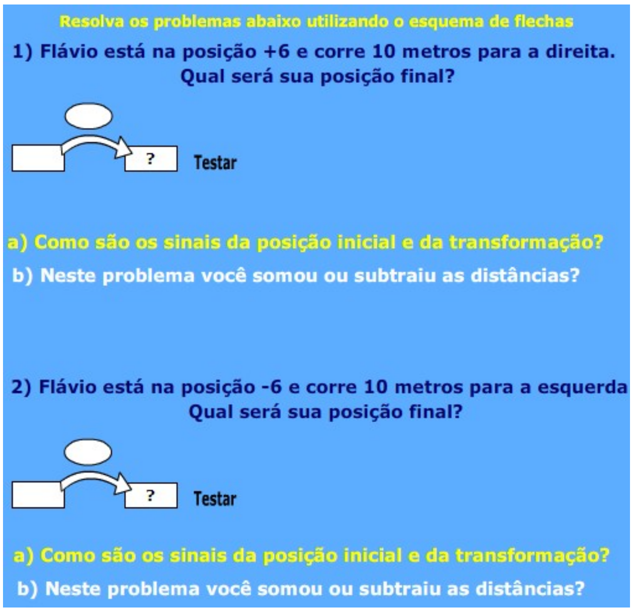


FIGURA 042: Adição de números de sinais iguais

Note que em ambas situações devemos somar as distâncias, pois o sinal da posição final e da transformação são iguais.

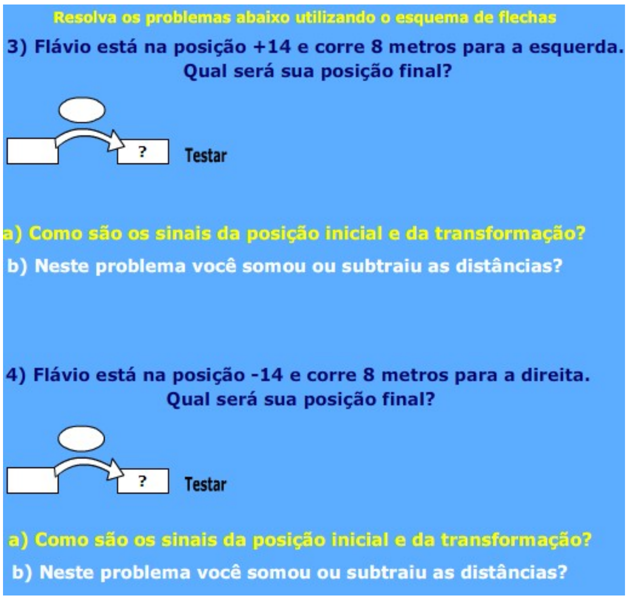


FIGURA 043: Adição de números de sinais diferentes

Aqui devemos subtrair as distâncias em ambas situações, pois o sinal da posição final e da transformação são diferentes. Com o objetivo de provocar uma generalização das situações observadas pelos estudantes, fizemos perguntas mais gerais, não especificando um valor para a sua posição inicial e para a transformação realizada.

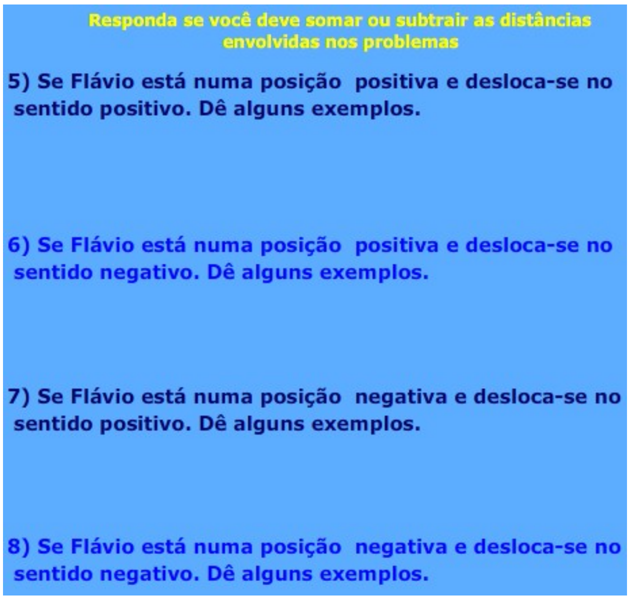


FIGURA 044: Generalização da Adição

A segunda parte das perguntas são situações análogas aos problemas 3 e 4, portanto nosso interesse é que os estudantes concluam que: *"quando os sinais são diferentes, o sinal do resultado final será igual ao sinal do número de maior valor"*.

4.6.7 Campo Aditivo: Subtração dos números

Já comentamos que a subtração dos positivos e negativos é mais uma necessidade teórica – ou melhor: a necessidade de preservar as propriedades presentes no conjunto dos números naturais no conjunto dos positivos e negativos – do que um processo natural que surge ao representarmos as operações utilizadas para resolver um conjunto de situações problemas. Em função disso, cogitamos a hipótese de que é por esse motivo que os alunos têm maior dificuldade com as operações do tipo $a - b = x \quad para \quad a, b \in \mathbb{Z}$. A ideia de olhar para a subtração como operação irmã da adição foi um dos principais motivos que nos levaram a utilizar a teoria de campos conceituais de Vergnaud como base teórica para essa pesquisa. Pois supomos que isso nos possibilitaria uma nova forma de abordar e justificar a subtração de números inteiros aos nossos estudantes através do esquema de flechas.

Iniciamos a discussão com a terceira fase do *Fórmula (–1)* e que está disponível no site através do link "*Ao contrário"*. Esperamos que as justificativas apresentadas pelos estudantes nas atividades propostas logo após o jogo, sejam intuitivas e influenciadas pelas regras propostas no próprio ODA, veja Figura 45 abaixo.

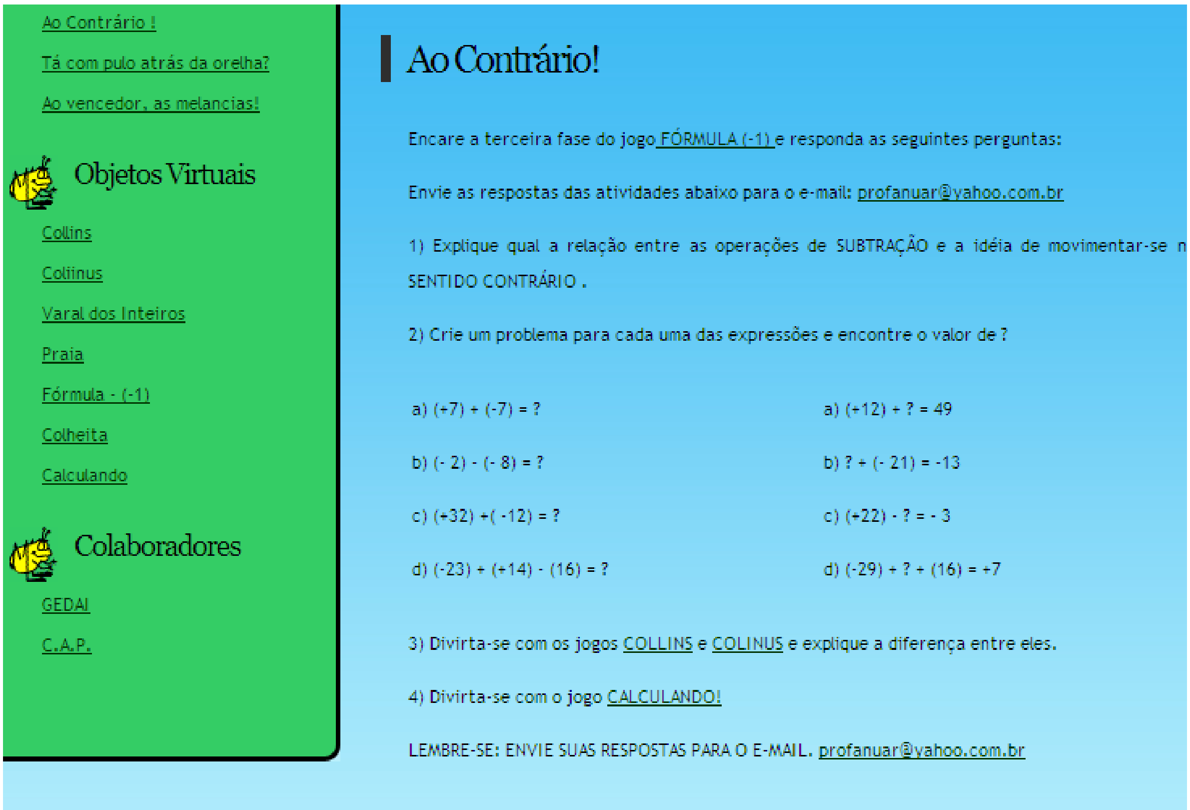


FIGURA 045: Atividade – *Ao contrário*

Logo após essa introdução intuitiva possibilitada pelo *Fórmula (–1)*, apresentamos duas atividades em que os estudantes devem explicar como realizaram as subtrações e, a seguir, pedimos que resolvessem algumas operações na forma em que comumente aparecem nas atividades escolares. Nossa intenção (na atividade 1) é possibilitar que o estudante, através do registro escrito, estabeleça relações entre a operação de subtração e sua interpretação geométrica a partir do jogo e que serão confirmadas ou confrontadas na resolução da segunda atividade. Como a subtração de números inteiros já havia sido explorada, aproveitamos o caráter lúdico dos ODAs *Collins*, *Collinus* e *Calculando* para que os alunos exercitassem tais operações. No entanto pode-se deixar para um momento posterior a utilização desses ODAs de acordo com o critério do professor.

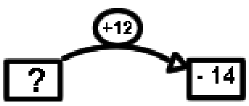
Vale ressaltar que as atividades anteriores servem como uma introdução intuitiva à subtração, já que parte das ações e observações dos estudantes. Logo em seguida propomos um material para ser utilizado na sala de aula, assim, o professor poderá conduzir uma discussão com a turma e apresentar de forma expositiva a subtração.

Subtração de números positivos e negativos

Veja o seguinte problema:

Clávio andou 12 metros para direita e parou na posição – 14.Qual era sua posição inicial?

Representando através do esquema de flechas temos:

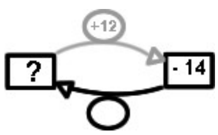


Representando através de uma soma de números inteiros, temos a seguinte equação:

? + (+ 12) = – 14

Para resolver este tipo de problema alguns alunos pensaram na situação inversa: "Clávio parte da posição – 14 e anda 12 metros no sentido oposto da direita. Qual será sua posição?"

Representando através do esquema de flechas temos:



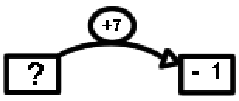
Note que a segunda flecha representa a transformação inversa!

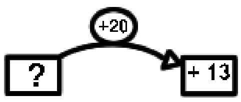
Como a subtração é a operação inversa da soma, podemos representá-la como uma subtração de números inteiros:

(– 14) – (+ 12) =

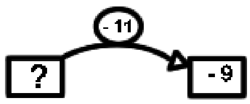
Solução:

1) Descubra o valor de ? através da operação inversa de cada esquema de flechas. Logo em seguida represente tal operação através de uma subtração de números inteiros.

a)


b)


c)


d)


e)


f)

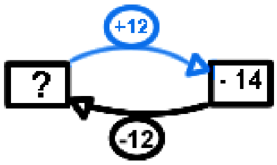

2) Resolva as operações abaixo e utilize o esquema de flechas para representá-las.

a) **(– 6) – (+ 7) =**

c) **(– 12) – (– 31) =**

b) **(+ 40) – (– 10) =** d) **(+ 14) – (+ 21) =**

De acordo com a nossa proposta, nessas questões trabalhamos com as seguintes equivalências e que foram estabelecidas com o auxílio do esquema de flechas:



? + (+ 12) = – 14 é equivalente à adição (– 14) **+ (– 12) = ?**. Como admitimos a subtração como operação inversa da adição, podemos representar a operação:

(– 14) **+ (– 12) = ?** como a subtração equivalente: (– 14) **– (+ 12) = ?**

Pensando na reta numérica, podemos "ler" a expressão numérica (– 14) – (+ 12) da seguinte maneira. *"Clávio está na posição – 14 e se desloca para o* ***contrário*** *de 12 posições para a direita"*.

Diante disso, a atividade 1 serve para que os alunos exercitem essas equivalências e realizem a transição das representações (*esquema de flechas* x *expressão numérica*). E, só depois de feito esse processo, pedimos para os estudantes resolverem a operação de subtração a partir de expressões numéricas que aparecem na atividade 2.

Assim concluímos a nossa proposta didática para o Campo Aditivo e que fez parte do experimento previsto para essa pesquisa. No entanto, é importante ressaltar que tal proposta, é uma sugestão aos professores e que devem adequar tais atividades ao contexto de cada turma e aos seus princípios pedagógicos, até porque não consideramos tal proposta como finalizada, mas sim o primeiro passo de uma construção baseada num conjunto de dados experimentais.

4.6.8 Campo Multiplicativo: O Fórmula (-1)

Durante o desenvolvimento das fases do campo multiplicativo uma dúvida surgiu: será que as crianças iriam entender as regras do jogo, bem como os sistemas simbólicos presentes no *Fórmula (–1)* sem a necessidade de intervenção do professor? Com o objetivo de observar tal fato a primeira atividade proposta era a seguinte:

ATIVIDADE 1: O estudante deve jogar a primeira fase do *Fórmula (–1)*: Campo

Multiplicativo e através do botão AJUDA procurar entender as regras do jogo.

ATIVIDADE 2: O aluno deveria mandar um e-mail para o professor (profanuar@yahoo.com.br) explicando as regras do jogo, dando exemplos.

Nosso objetivo era observar e avaliar:

- quais aspectos do ODA são mais intuitivos aos estudantes dessa faixa etária;
- se o objetivo do jogo seria de fácil entendimento;
- como os estudantes iriam interpretar e utilizar as informações ali presentes;
- se os estudantes identificariam que os problemas envolviam multiplicação;

4.6.9 Campo Multiplicativo: Problemas envolvendo tempo x deslocamento

Como vimos os problemas explorados no *Fórmula (–1)* envolvem grandezas extensivas – já que número de pulos de uma pulga é uma quantidade discreta – e privilegiam a ideia da multiplicação como uma soma repetida. Porém gostaríamos que nossa proposta envolvesse problemas que envolvam quantidades intensivas, já que elas privilegiam o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo ao explorar a noção de proporcionalidade. Sendo assim, no segundo encontro apresentamos problemas que envolvam as variáveis de tempo e deslocamento, pois acreditamos que essa situação-problema é adequada para esse tipo de discussão. Além do mais, acreditamos que eles apresentam situações que dão outro significado físico para a regra da multiplicação com números negativos.

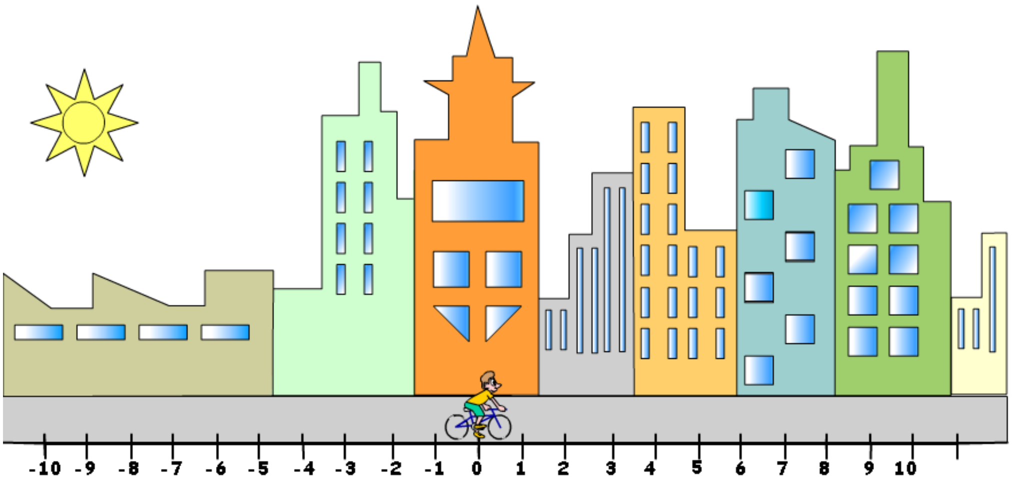
Após a utilização do jogo *Fórmula (–1)* ficamos curiosos para avaliar se tal experiência influenciaria na resolução de problemas do campo multiplicativo. Sendo assim, ao invés de utilizar os problemas do pré-teste do campo multiplicativo (material 02), desenvolvemos o material 09 com um número menor de questões.

Material 09

Na figura abaixo temos Flávio, um atleta que pratica caminhada, corrida e ciclismo. Nesta avenida, Flávio movimenta-se em linha reta em apenas dois sentidos: para direita (→) ou para esquerda **(←).**

Na pista em que pratica exercícios fez marcações em relação ao prédio em que mora.

Portanto a posição 0 é a origem do sistema de referência.



1) A cada minuto Flávio desloca-se 3 posições para direita. Qual será sua posição se pedalar durante seis minutos, sabendo que ele partiu do zero?
2) Flávio andou 11 minutos depois que partiu de sua casa. Qual será sua posição sabendo que ele movimenta-se 10 posições para a esquerda a cada minuto?
3) Flávio saiu de sua casa e parou na posição –56 deslocando-se 7 posições por segundo. Quanto tempo ele levou para percorrer tal distância?
4) Nosso atleta movimenta-se 6 posições ao contrário da direita (a cada segundo). Quanto tempo ele andou sabendo que parou na posição –360?
5) Flávio levou 20 minutos para chegar na posição +140. Quanto ele andou a cada segundo?
6) O ciclista parou na posição –39, após andar durante 13 minutos. Qual foi o seu deslocamento por segundo?
7) Esse ciclista já conseguia deslocamento de 16 posições para a esquerda por minuto. Qual será a sua posição após pedalar uma hora nesse ritmo?
8) Flávio está na posição +12, qual será sua posição final, sabendo que ele anda 4 posições para a esquerda por segundo, durante doze segundos?
9) Ao pedalar durante 15 segundos e deslocar-se 6 posições para a direita a cada segundo, qual será sua posição, sabendo que partiu da posição –7?
10) Crie uma situação desse tipo e apresente sua solução.

Os problemas 1, 2 e 3 pertencem ao GRUPO 1 descrito no pré-teste do campo multiplicativo, ou seja, são situações que envolvem o raciocínio direto da multiplicação, já que se conhece o valor unitário da transformação.

Já nos problemas 5 e 6 a relação da transformação é conhecida e a incógnita está justamente no valor da unidade, portanto envolvem o raciocínio indireto do campo multiplicativo e pertencem ao GRUPO 2.

Os problemas do GRUPO 3 são aqueles que envolvem o raciocínio de "ao contrário de" e foram representados pela questão 4. A princípio este grupo representaria aquelas situações-problemas que justificariam a multiplicação do tipo (–a).(+b) $para\ \ a,b \in \mathbb{N},$.

O problema 7 representa aquelas situações que envolvem números grandes, nesse caso os estudantes terão que realizar transformação de minutos para segundos antes de realizar o cálculo.

Já os problemas mais complexos segundo Vergnaud são aqueles que envolvem a composição das operações de adição e multiplicação e são representados nos problemas 8 e 9 e pertencem ao GRUPO 6 dos problemas apresentados no pré-teste.

4.6.10 Utilizando tabelas nos problemas do Campo Multiplicativo

Desenvolvemos o material 10, pois durante o experimento, percebemos que o raciocínio de "*ao contrário*", porque o raciocínio de "ao contrário" não promoveu (nos estudantes) a necessidade de representá-la na forma *(-a).(+b)* $para\ \ a,b \in \mathbb{N},$ *c*onfirmando a suspeita que havíamos descrito no pré-teste do campo multiplicativo, na seção 4.6.1. Todavia, percebemos que poderíamos alcançar nosso objetivo ao explorar outro significado para tempo negativo.

Material 10

1) Flávio já andava de bicicleta, quando resolveu marcar o tempo e zera seu cronômetro. Complete a tabela abaixo que representa o tempo e a posição de Flávio enquanto andava de bicicleta

Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)													5	8	11	14

Responda as perguntas abaixo tendo uma reta numérica como referência.

a)Qual era a sua posição quando ele resolveu marcar o tempo?

b) Qual era a sua posição em 3 segundos?

c) Qual era a sua posição um segundo antes de começar a marcar o tempo?

d) Qual era a sua posição dois segundos antes de começar a marcar o tempo?

e)Qual era a sua posição três segundos antes de começar a marcar o tempo?

f) Explique como era o movimento realizado por Flávio? (Para qual lado ele andava? Quantos metros a cada segundo)

2) Flávio já andava de bicicleta, quando resolveu marcar o tempo e zera seu cronômetro. Complete a tabela abaixo que representa o tempo e a posição de Flávio enquanto andava de bicicleta

Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)													-8	-10	-12	

a) Qual era a sua posição quando ele resolveu marcar o tempo?

b) Qual será a sua posição em 30 segundos?

c) Qual era a sua posição um segundo antes de começar a marcar o tempo?

d) Qual era a sua posição 20 segundo antes de começar a marcar o tempo?

e) Qual era a sua posição um minuto antes de começar a marcar o tempo?

f)Tendo uma reta numérica como referência, explique como era o movimento realizado por Flávio? (Para qual lado ele andava? Quantos metros a cada segundo)

Multiplicação de números inteiros

3. Complete a tabela de multiplicação seguinte

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
+5											
+4											
+3											
+2											
+1											
0											
-1											
-2											
-3											
-4											
-5											

De um mondo geral, na Atividade 01 deste material nossa intenção era introduzir a utilização de tabelas para representar esse tipo de problema e, também, que o estudante atribuísse o significado para tempo igual a zero (momento em que o Flávio começa a marcar o tempo) e tempo negativo (movimento realizado por Flávio antes de zerar o cronômetro). Para completar a tabela ele utilizaria a relação vertical – onde realiza-se operações entre as grandezas de mesmo tipo (que estão na mesma fila) – e são estendidas às grandezas da outra fila. Na primeira situação, como o ciclista movimenta-se 3 posições a cada segundo, basta diminuir os valores da segunda linha da tabela, de três em três para completá-la e, assim, responder as perguntas seguintes. Acreditávamos que os estudantes utilizariam apenas a ideia de somar ou subtrair os valores apresentados na tabela abaixo.

Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)	-30	-27	-24	-21	-19	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14

Supomos que após os estudantes completarem tal tabela, responderiam as questões com facilidade.

Já na segunda situação, o ciclista movimenta-se 2 posições para esquerda a cada segundo Portanto bastava somar os valores da segunda linha da tabela, de dois em dois para completá-la e, assim, responder as perguntas seguintes.

Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)	16	14	12	10	8	6	4	2	0	-2	- 4	-6	-8	-10	-12	-14

Acreditamos que essa é uma situação-problema onde existe um significado prático para a multiplicação do tipo *(-a).(+b)* $para\ a, b \in \mathbb{N}$, e, com ela, pretendemos discutir e observar as respostas e estratégias apresentadas pelos estudantes. Abaixo apresentamos as soluções que imaginávamos observar.

2a) Qual era a sua posição em 30 segundos?
Como Flávio movimenta-se duas posições para esquerda a cada segundo, então 30. (-2) = -60.

2b) Qual era a sua posição um segundo antes de começar a marcar o tempo?
Pela tabela, sua posição será +2. Como Flávio movimenta-se duas posições para esquerda a cada segundo e no instante zero ele está na posição zero, um segundo antes ele estará em +2.

2c) Qual era a sua posição vinte segundos antes de começar a marcar o tempo?
A resposta final será positiva, pois antes de marcar com o cronômetro ele estava na parte positiva da reta. Como Flávio movimenta-se duas posições para esquerda a cada segundo ele terá se deslocado 40 posições antes do zero. Logo a resposta é +40.

2d)Qual era a sua posição um minuto antes de começar a marcar o tempo?
Como Flávio movimenta-se duas posições para esquerda a cada segundo em 60 segundos ele se deslocará 60 . 2 = 120 posições. A resposta final será +120, pois antes de marcar com o cronômetro ele estava na parte positiva da reta.

2e) Tendo uma reta numérica como referência, explique como era o movimento realizado por Flávio? (Para qual lado ele andava? Quantos metros a cada segundo?)
Flávio andava duas posições no sentido negativo a cada segundo.

Logo em seguida, no quadro, pretendíamos discutir diferentes formas de representar tais operações. Quando envolviam tempos positivos:

$$3. (-2) = - 6$$

Quando envolviam tempos negativos:

$(-3). (-2) = +6$ ou a equivalente $3. (+2)= +6$

A terceira atividade presente no material 10 é justamente um exercício de preenchimento de tabela a partir da aplicação de um operador escalar numa determinada fila. Nosso objetivo é que, após o preenchimento da tabela, poderíamos analisar geometricamente os sinais das respostas encontradas.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
+5	*-25*	*-20*	*-15*	*-10*	*-5*	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*
+4	*-20*	*-16*	*-12*	*-8*	*-4*	*0*	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*
+3	*-15*	*-12*	*-9*	*-6*	*-3*	*0*	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*
+2	*-10*	*-8*	*-6*	*-4*	*-2*	*0*	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*
+1	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
-1	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*-1*	*-2*	*-3*	*-4*	*-5*
-2	*10*	*8*	*6*	*4*	*2*	*0*	*-2*	*-4*	*-6*	*-8*	*-10*
-3	*15*	*12*	*9*	*6*	*3*	*0*	*-3*	*-6*	*-9*	*-12*	*-15*
-4	*20*	*16*	*12*	*8*	*4*	*0*	*-4*	*-8*	*-12*	*-16*	*-20*
-5	*25*	*20*	*15*	*10*	*5*	*0*	*-5*	*-10*	*-15*	*-20*	*-25*

Características observadas:

- duas filas de zero;
- no I e III quadrantes as respostas são todas positivas;
- no II e IV quadrantes as respostas são todas negativas;

Acreditamos que essas atividades fornecerão dados suficientes para refletirmos sobre os a nossa proposta didática e sobre alguma possível modificação no *Fórmula (–1)*. Tais modificações, se necessárias, serão relatadas no próximo capítulo e nas considerações finais dessa pesquisa.

5 ANÁLISE DOS DADOS

Nosso experimento foi aplicado em dois momentos diferentes: o primeiro no final de 2008 numa turma de 6º série do Ensino Fundamental do Colégio de Aplicação da UFRGS e o segundo numa escola da rede privada do município de Guaíba/RS, durante o primeiro semestre de 2010. É importante ressaltar que a maior parte dos dados presentes nessa pesquisa foram coletados em 2008 e são referentes aos problemas do campo aditivo, já os dados coletados em 2010 são referentes ao Campo Multiplicativo e não foram explorados na primeira coleta de dados.

No Colégio de Aplicação a 6ª série integra o Projeto AMORA, junto com a 5ª série do Ensino Fundamental. Nele os estudantes têm uma experiência escolar diferenciada, pois desenvolvem Projetos de Aprendizagem, ou seja, eles desenvolvem uma pesquisa a partir de uma questão norteadora (um problema, uma curiosidade) formulada por eles próprios, segundo Fagundes

> "Um projeto para aprender vai ser gerado pelos conflitos, pelas perturbações nesse sistema de significações, que constituem o conhecimento particular do aprendiz (…) o aprendiz é desafiado a questionar, quando ele se perturba e necessita pensar para expressar suas dúvidas, quando lhe é permitido formular questões que tenham significação para ele, emergindo de sua história de vida, de seus interesses, seus valores e condições pessoais, passa a desenvolver a competência para formular e equacionar problemas.(FAGUNDES, p. 16, 1999)

Para auxiliá-los na pesquisa dos estudantes o grupo de professores desenvolve um conjunto de atividades diferenciadas (experiências científicas, pesquisas, saídas de campo, orientação da pesquisa etc.) com o objetivo de enriquecê-la. Nesse contexto as aulas das disciplinas específicas tem uma carga horária menor e equivalente entre elas; no caso da matemática, são dois períodos por semana, como foram 10 encontros com a 6ª série, nosso experimento teve um total de 20hs/aula. O leitor pode se perguntar: Por que aplicar o experimento nessa escola e não em outra com uma carga horária normal? Além de nos identificarmos com a proposta do AMORA, a coleta de dados ocorreu no fim do segundo semestre de 2008, portanto, na nossa concepção, o CAP/UFRGS oferecia um ambiente adequado para a aplicação do experimento por dois motivos: (i) esse tipo de atividade faz parte do cotidiano dos estudantes, já que a escola se dedica historicamente à pesquisa em educação; (ii) os alunos ainda não haviam aprendido operações com números inteiros e, para avaliar o impacto da nossa proposta, considerávamos importante o desconhecimento da regra de sinais por parte dos alunos e nessa "altura" do ano tal conteúdo já teria sido trabalhado nas outras escolas.

Como os laboratórios de informática da escola têm capacidade para atender metade da turma, era necessário dividir a turma em duas. Portanto, durante a coleta dos dados, contei com a parceria de dois voluntários, Bruno Feldman da Costa e Karine Zaniol, ambos graduandos do 3º semestre do curso de Licenciatura em matemática da UFRGS na época. Dessa forma, nossos encontros ocorriam da seguinte maneira: no primeiro período metade da turma desenvolvia as atividades propostas no laboratório de informática, utilizando recursos virtuais; enquanto a outra metade realizava as atividades em sala de aula, sob a orientação do Bruno e da Karine; no segundo período alternávamos as atividades, inclusive os professores.

Apresentamos os dados obtidos nas próximas quatro seções; na secção 5.1 analisaremos as estratégias utilizadas pelos estudantes antes de entrar em contato com a nossa proposta (tanto os ODA's, como as atividades); na secção 5.2 mostraremos o segundo conjunto de dados em que vamos procurar observar se já houve influência do ODA Fórmula (– 1) e da proposta didática; na secção 5.3, serão apresentados os dados que se referem à subtração de números inteiros – onde iremos confrontar com aqueles dados apresentados no primeiro momento, e na última seção apresentaremos os dados sobre os problemas do campo multiplicativo e que foram coletados em 2010.

5.1 *PRÉ – FÓRMULA (– 1)*

No 1º encontro, nossa intenção era nos apresentarmos para os alunos, falar um pouco da nossa pesquisa e entregar o pedido de autorização para a utilização dos dados na pesquisa; imaginávamos que isso levaria uns 30 minutos. No entanto ao chegarmos na escola para a apresentação, fomos informados (para nossa surpresa) que tínhamos dois períodos para desenvolver e iniciar o trabalho com a turma da 6ª série. Sendo assim, após a nossa apresentação realizamos uma conversa com a turma sobre os números negativos, perguntamos se eles os conheciam e em quais situações eles apareciam no dia a dia.

Os exemplos citados pelos alunos foram: temperatura, dívida e saldo de gols em campeonatos de futebol. Logo em seguida comentamos que a primeira utilização prática dos números negativos tinha sido para representar a dívida de uma pessoa, pois tais números surgiram a partir da subtração de um número de outro menor do que ele. Apesar disso, as subtrações do tipo 5 – 7 não foram bem aceitas pela comunidade matemática, levando mais de 1000 anos para a humanidade entender e aceitar tais números. Logo em seguida citei a reta numérica como uma ferramenta para nos ajudar a entender essas operações. Então pedi que eles resolvessem as seguintes situações-problema e que foram escritos no quadro.

1) Um ciclista movimenta-se 4 metros para a direita, pára para descansar e anda mais 7 metros para a direita. Qual será sua posição final?
2) Após andar 8 metros para direita, o ciclista anda 5 metros para esquerda. Qual será sua posição final?
3) Um corredor corre 3 metros em um segundo. Qual será a sua posição após vinte segundos?
4) Num outro dia este mesmo corredor parou à 33 metros de distância do onde iniciou a corrida. Quanto tempo ele correu?

Embora essa atividade tenha sido formulada de improviso, meu objetivo ao propô-la era oportunizar aos estudantes o primeiro contato com a reta numérica, pois se trata de um novo modelo de representação. Tal ação é baseada numa série de atividades apresentadas por NUNES, em que ela diz que é importante que o professor desenvolva diferentes atividades com o objetivo de os estudantes aprenderem a utilizar uma régua. Além disso tomei o cuidado para que essas operações pertencessem ao conjunto dos números naturais, para que o (suposto) primeiro contato com os negativos fosse com pré-teste proposto.

Ao resolvê-las a maioria dos estudantes registravam apenas a resposta final, então pedíamos que justificassem como chegaram a tal resultado, através de uma conta, desenho ou explicação. Geralmente os estudantes apresentaram o próprio algoritmo como tal justificativa, tanto nos problemas do campo aditivo, quanto do multiplicativo. Veja as respostas da estudante CM.

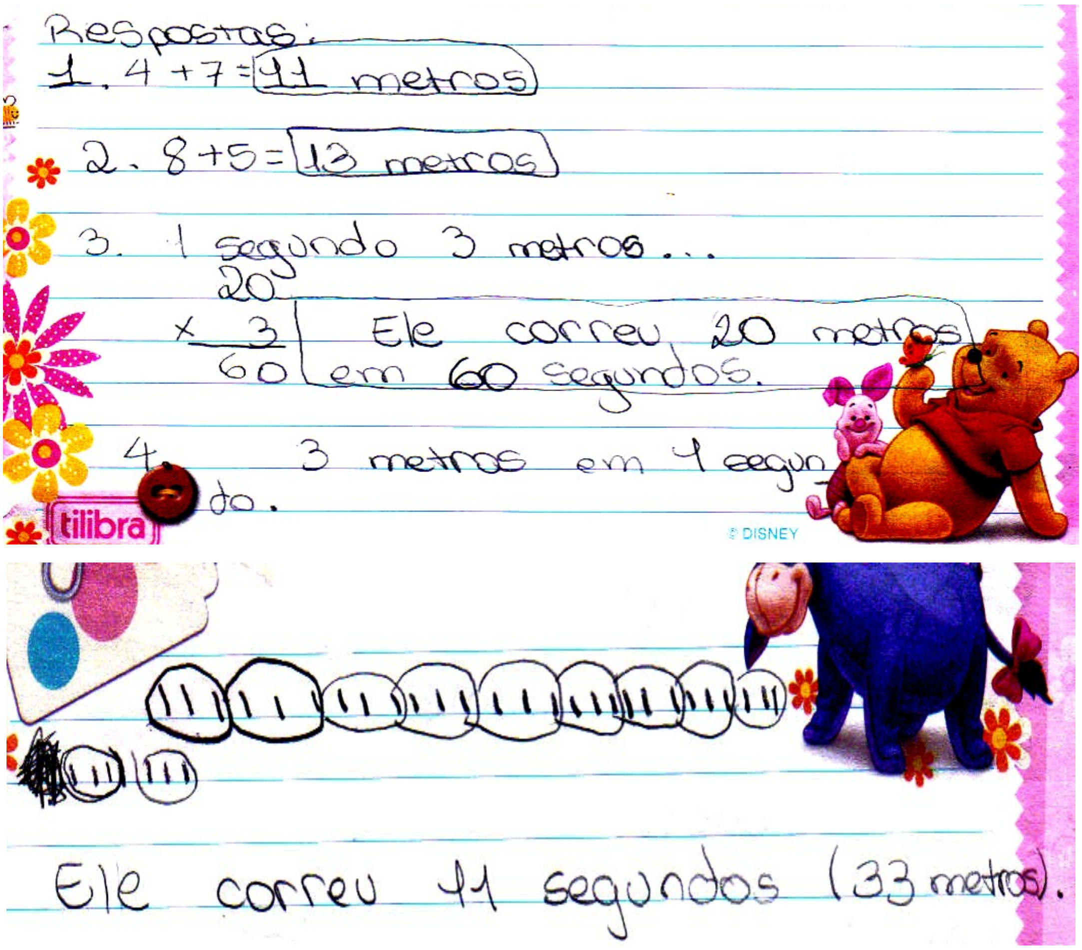
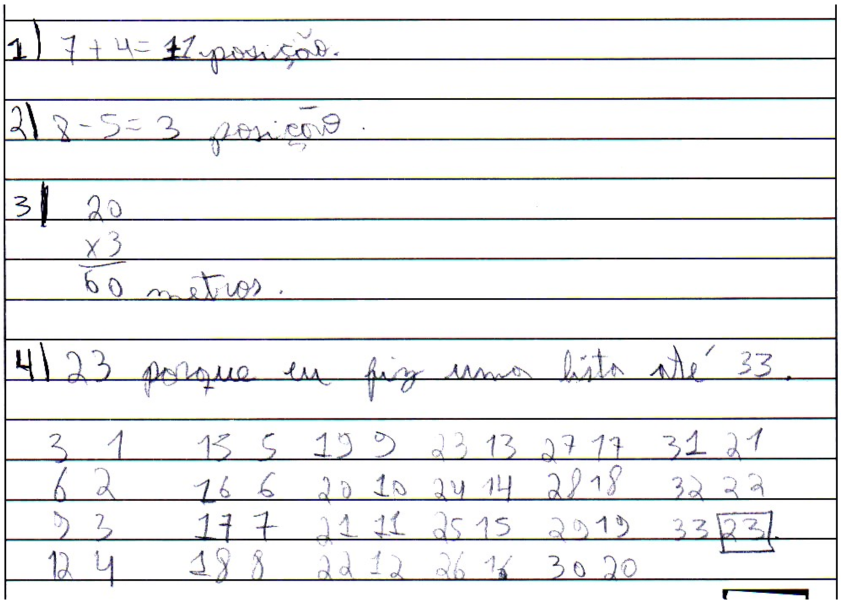


FIGURA 046: problemas do campo aditivo estudante CM

Além da utilização do algoritmo, podemos observar que ela apresenta uma indiferenciação entre os significados de posição e deslocamento (o quanto andou), pois na resposta da segunda pergunta nos fornece o deslocamento total e não a posição final do ciclista. Já na questão 3 ela resolve a operação corretamente, mas atrapalha-se na resposta, invertendo as variáveis envolvidas, onde 60 é a posição final e 20 o tempo. Também podemos observar que na questão 4 ela não utiliza o algoritmo da divisão, mas resolve o problema corretamente agrupando a distância percorrida de 3 em 3.

Podemos observar as mesmas estratégias na respostas do DL.


1) 7 + 4 = 11 posição.
2) 8 - 5 = 3 posição.
3) 20
x3
60 metros.
4) 23 porque eu fiz uma lista até 33.

3 1	15 5	19 9	23 13	27 17	31 21
6 2	16 6	20 10	24 14	28 18	32 22
9 3	17 7	21 11	25 15	29 19	33 $\boxed{23}$
12 4	18 8	22 12	26 16	30 20	

FIGURA 047: problemas do campo aditivo estudante DL

DL resolveu os problemas rapidamente e ao resolver demonstrou que possui a diferenciação entre deslocamentos e posição ao perguntar: *"a resposta é o quanto ele andou ou aonde ele parou no final? senão vai ter duas resposta!"* Após a confirmação, respondeu as três primeiras corretamente sem se confundir. Na resposta da questão 4 procurou fazer uma tabela (ou lista), no entanto erra a questão, pois atrapalhou-se durante a confecção. Ao ser questionado percebe o erro, mas não se interessa em modificá-la.

Ainda há aqueles que justificam o resultado descrevendo os movimentos realizados e não utilizam a reta numérica como ferramenta, como podemos ver nas respostas da JD.

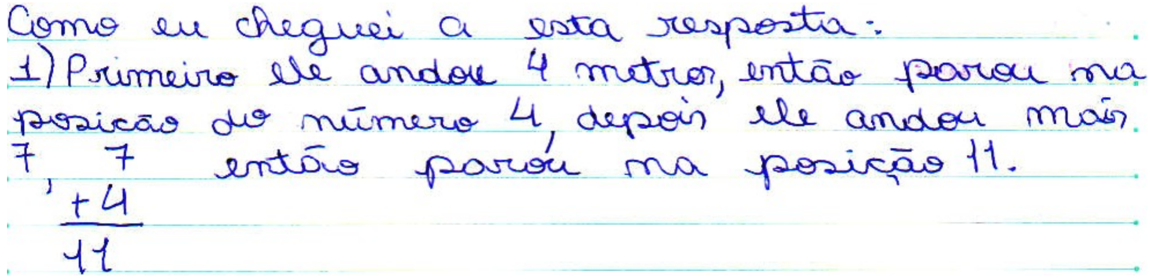
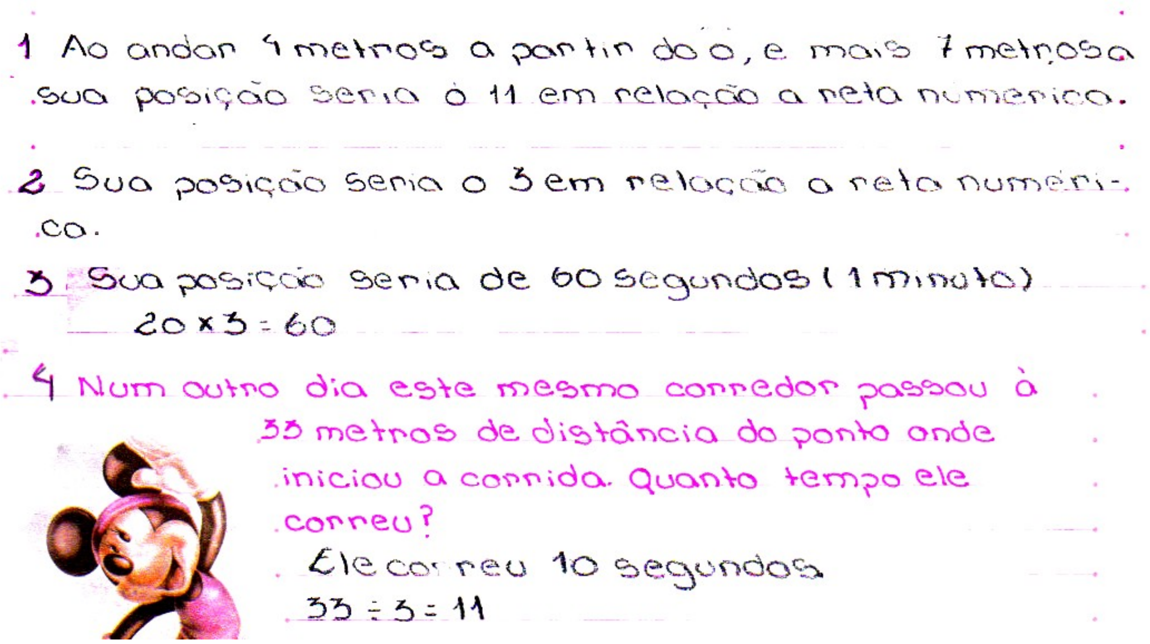

Como eu cheguei a esta resposta:
1) Primeiro ele andou 4 metros, então parou na posição do número 4, depois ele andou mais 7, então parou na posição 11.
7
+4
11

FIGURA 048: problemas do campo aditivo estudante JD

Nessa mesma linha apresentamos as respostas da RG,


1 Ao andar 4 metros a partir do 0, e mais 7 metros a sua posição seria ó 11 em relação a reta numerica.

2 Sua posição seria o 3 em relação a reta numéri-co.

3 Sua posição seria de 60 segundos (1 minuto)

$20 \times 3 = 60$

4 Num outro dia este mesmo corredor passou à 33 metros de distância do ponto onde iniciou a corrida. Quanto tempo ele correu?

Ele correu 10 segundos

$33 \div 3 = 11$

FIGURA 049: problemas do campo aditivo estudante RG

Ao ser questionada sobre o que ela quis dizer com “em relação a reta numérica”, a estudante disse: “*na verdade ele andou 13, primeiro 8 e depois 5, mas na reta ele parou no 3”*. Também podemos perceber que ela também se confundiu na utilização das variáveis envolvidas tempo e posição.

Nestes primeiros dados podemos observar que a diferenciação entre deslocamento e posição, realmente é um dos primeiros conceitos a ser desenvolvido, já que é intrínseca à nossa proposta e representou confusão na resolução dos problemas. Com exceção desse aspecto, os estudantes resolveram os problemas recorrendo a diversas estratégias e utilizaram diferentes formas de representação que já lhes eram familiares. No entanto, em nenhum momento, eles sentiram a necessidade de utilizar a reta numérica como forma de representação. Talvez isso tenha acontecido pelo fato desses problemas não se constituírem numa novidade, já que nas operações de números naturais são explorados desde a séries iniciais.

Análise dos Resultados do Pré- Teste

Vamos analisar os resultados formando 5 grupos de problemas com diferentes níveis de dificuldades. Os grupos 1 e 2 representam as situações que permitem uma compreensão inicial do raciocínio aditivo e que envolve operações com números inteiros e que teriam maior influência nas modificações no ODA *Fórmula (–1)*. Já os problemas dos grupos 3, 4 e 5 envolvem situações mais complexas, já que envolvem operações com números grandes, racionais ou que contenham transformações sucessivas.

GRUPO 1 – Problemas que envolvem resolução na forma direta, ou seja, a incógnita está localizada na parte final da transformação.

$$7 \xrightarrow{+4} ? \qquad \text{e} \qquad 7 \xrightarrow{-4} ?$$

Nos problemas 1 e 2 utiliza-se o esquema de ação de juntar, no problema 1 a justificativa geométrica para a operação é: "*A resposta final será positiva já que o sujeito movimenta-se para direita ao partir de uma posição positiva (a direita de zero), logo somamos seus deslocamentos para determinar sua posição final.*"

No problema 2 a justificativa geométrica é a situação análoga para esquerda: "*A resposta final será negativa, pois o sujeito parte de uma posição negativa (à esquerda de zero) e movimenta-se para esquerda*".

Os problemas 3 e 4 utilizam o esquema de tirar na sua resolução. No problema 3 a justificativa geométrica é: "*A resposta final será positiva, pois o sujeito está 7 metros à esquerda de zero (parte negativa) e ao andar 10 metros para direita irá parar 3 metros à direita do zero, logo subtraímos essas distâncias*".

Já no problema 4 a justificativa consiste na situação geométrica análoga: "*A resposta final será negativa, pois o sujeito está 6 metros à direita de zero (parte positiva da reta) e ao andar 11 metros para esquerda irá parar 5 metros à esquerda do zero,portanto subtraímos essas distâncias*".

Observe que neste grupo temos a primeira interpretação para a subtração, já que é realizada através de um operador e possui o significado geométrico de andar para esquerda.

$$+6 \xrightarrow{-11} ?$$

Podemos observar que os alunos da 6º série tiveram uma porcentagem alta de acertos nas quatro primeiras questões. Porém, observa-se que o número de acertos nos problemas 2 e 4 é menor, justamente as situações cuja resposta final é negativa.

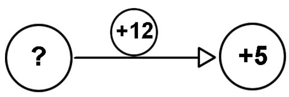
Questões	Acertos	Acertos (%)
1	24	**96**
2	18	**72**
3	21	**84**
4	19	**76**

Tabela 3: Número de acertos questões do grupo 1

É importante relembrar que havia 25 alunos no total.

Por outro lado observamos que, apesar de resolver corretamente, as crianças se "atrapalham" para explicar ou representar suas contas, visto que é necessário realizar coordenação entre os esquemas de ação - que permitem a resolução correta – com a novidade dos sinais positivos e negativos incorporados ao sistema simbólico. Frequentemente as crianças registram suas respostas da seguinte forma "*ele parou na posição 3-*", reproduzindo na escrita a forma falada.

GRUPO 2 – Tal grupo é formado por problemas que envolvem resolução na forma inversa, ou seja, a incógnita está localizada na parte inicial da transformação. Por exemplo:



Expressão numérica

(+5) - (+12)=?

Observe que é apresentada uma interpretação diferente para a subtração, ou seja, como operação inversa da soma, geometricamente apresenta a ideia de *"o contrário de andar para direita.*"

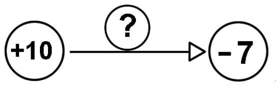
Tal interpretação foi representada nos problemas 5, 8 e 11. Como estudante das ideias desenvolvidas por Piaget é muito interessante observar e reconfirmar que o raciocínio inverso é sempre mais difícil para os aprendizes. Veja na tabela 4 abaixo. Infelizmente temos apenas os resultados para os 25 alunos da 6º série.

Podemos observar que a quantidade de acertos diminui consideravelmente. Observe que 84% daqueles que resolveram a questão 8b, responderam corretamente. Para respondê-la bastava somar as distâncias apresentadas no enunciado do problema.

Questões	Acertos	Acertos (%)	N.F. (%)
5	16	64	4
6	5	20	4
8a	13	52	12
8b	21	84	16
11a	10	40	24
11b	9	36	4

Tabela 4: Número de acertos nas questões do grupo 2

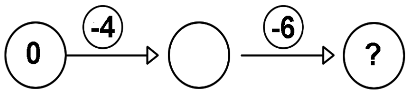
No entanto nas questões onde a incógnita era a posição de partida (5, 8a e 11) apresentaram um média de acertos de 48%.. É importante registrar que as questões mais difíceis do pré-teste eram as questões 8a e 11 já que representam a intersecção entre os grupos 2 e 3. Porém a surpresa deste grupo foi a questão 6, cujo o objetivo era definir a representação do deslocamento para esquerda como negativo (definindo uma das interpretações da subtração).



No entanto a resposta mais apresentada foi +17, ou seja, as crianças não diferenciaram o significado de deslocar-se 17 metros para esquerda é diferente de deslocar-se 17 metros para direita.

GRUPO 3 – Tal grupo é formado pelos problemas (7, 9 e 12) que apresentam transformações sucessivas e compostas. Como exemplo, apresentamos o esquema de flechas do problema 7.

Partindo da posição 0, nosso atleta anda 4 metros para esquerda e para ao encontrar um amigo. Logo em seguida anda 6 metros para esquerda. Qual será sua posição?



Podemos observar que a maior porcentagem de acertos está concentrada nas questões cuja posição inicial é o zero, no entanto a média de acertos é inferior aos acertos do grupo 1 assemelhando-se aos resultados do grupo 2.

Já a porcentagem de acertos diminui consideravelmente naquelas questões que envolvem transformações sucessivas sendo que a posição inicial é diferente de zero.

Questões	Acertos	Acertos (%)
7	12	**48**
9a	18	**72**
9b	19	**76**
10	17	**68**
12a	7	**28**
12b	6	**24**
12c	6	**24**

Tabela 5: Número de acertos das questões do grupo 3

Foram nessas questões e nas do grupo 4 que as crianças tinham maior dificuldade em entender aquilo que estava sendo perguntado.

GRUPO 4 – Problemas que Envolvem Operações com Números Grandes

Este grupo é formado pelos problemas 14 e 15, tais problemas apresentam um grau de dificuldade maior já que envolvem números grandes, isto é, valores que excedem as distâncias apresentadas na reta numérica do pré-teste. Minha hipótese é que para resolvê-los a criança deverá ter coordenado as relações estabelecidas ao utilizar os esquemas de ações (andar direita/esquerda) e simbólico (diferenciação entre deslocamento, distância e posição relativa) nos problemas do grupo 1 ou representando-os numa reta numérica com escala maior.

Podemos observar que 36% das crianças não fizeram o problema 14 e, daqueles que fizeram, apenas 32% responderam corretamente.

Questões	Acertos	Acertos %	N.F. %
14	8	**32**	**36**
15	6	**24**	**44**

Tabela 6: Números de acertos nas questões do grupo 4

Já no problema 15, 44% não fizeram e apenas 24 % acertaram sua resposta. Tal resultado confirma minha hipótese? Ainda não é possível fazer tal afirmação, pois temos dúvidas se os alunos não conseguiram realizá-lo por falta de tempo. No entanto, podemos concluir que os alunos da 6º série não conseguem resolver problemas que envolvam números positivos e negativos elevados. Para além disso, levantamos uma questão adicional: será que a dificuldade de representação simbólica apresentada nas questões do GRUPO 1 contribuem para o insucesso desses estudantes?

GRUPO 5 – Problemas que Envolvem Operações com Números Racionais não Inteiros

Os problemas de 16 a 18 integram este grupo que apresentam situações que necessitam operações com números racionais não inteiros negativos e positivos. Tais problemas apresentam um grau de dificuldade maior, pois é necessária coordenação entre o sistema posicional decimal, bem como a representação dos números racionais na reta numérica. Além disso, a relação de ordem torna-se fundamental, já que é sutil determinar se -0,5 é maior ou menor que -0,4. Tenho como hipótese que a 7º série terá maior facilidade para resolver tais problemas.

Observamos que 40% dos alunos não resolveram as situações-problemas 16 e 17, e 36% dos alunos não fizeram o problema 18. Entre aqueles alunos que resolveram, a grande maioria errou as operações que envolviam números decimais.

Questões	**Acertos**	**Acertos %**
16	**0**	**0**
17	**0**	**0**
18	**0**	**0**

Tabela 7: Número de acertos nas questões do grupo 5

Algumas crianças realizaram a soma ou subtração corretamente. No entanto, erravam o sinal da resposta final.

O gráfico geral da porcentagem de acertos do pré-teste da 6º série.

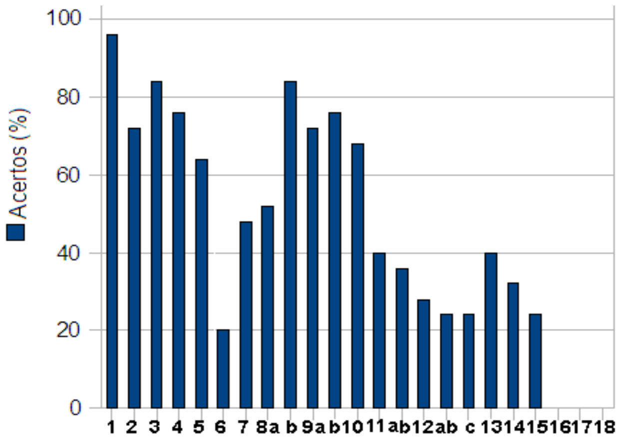


FIGURA 050: Gráfico geral de acertos no pré-teste

Ao analisarmos os resultados apresentados pelas crianças nos problemas dos grupos 1 e 2, ficou claro que as crianças conseguem resolver problemas ao utilizar seus esquemas de ação de forma prática, no entanto demonstram dificuldades para representá-los através da escrita. Esse resultado confirma a falta de coordenação entre os sistemas de ação e simbólicos apresentada nas pesquisas de Nunes e Vergnaud. No entanto, a oportunidade de testar e observar tal fenômeno, deixou evidente que era necessário realizar algumas modificações no Objeto Digital para a Aprendizagem (ODA) já que sua principal contribuição seria "sugerir" novas formas de representar as contas realizadas pelos alunos. Com certeza a facilidade apresentada pela interação presentes num jogo virtual contribui para o desenvolvimento dos esquemas de ação das crianças. No entanto o jogo *Fórmula (– 1)* pode oferecer melhores representações simbólicas e que promovam a coordenação dos sistemas envolvidos.

Nesse sentido a segunda fase do *Fórmula (– 1)* utiliza o modelo de representação por flechas que, segundo Vergnaud, representa muito bem as relações ternárias, visto que deixa explícita a transformação sofrida pelos elementos envolvidos e que podem ser observados na Figura 51 abaixo.

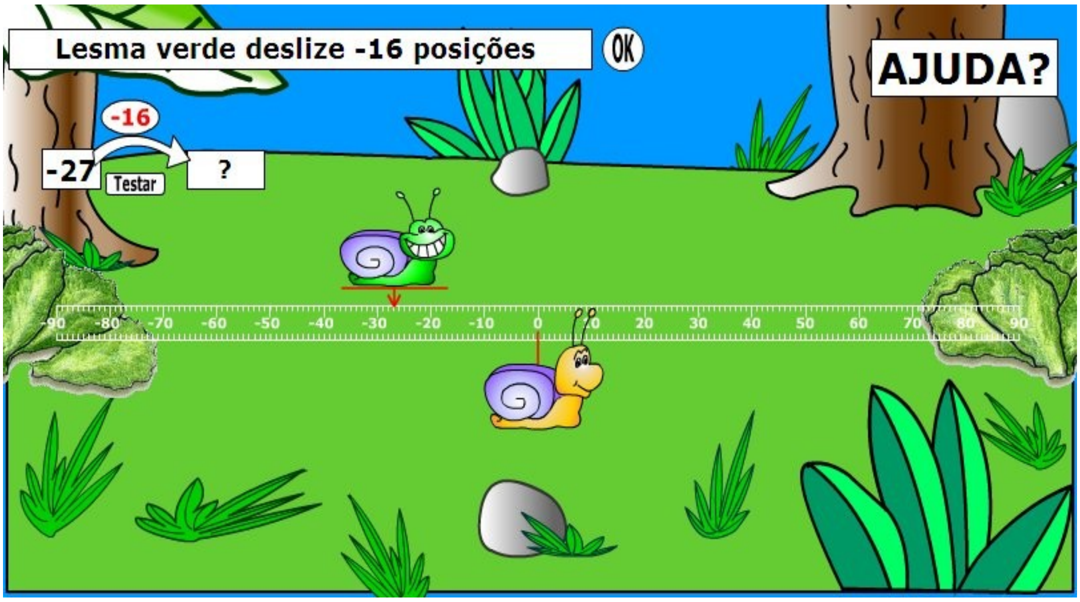
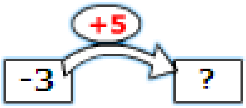
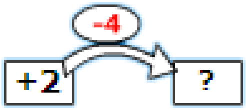


FIGURA 051: Segunda fase do ODA Fórmula (–1)

Além disso decidimos suprimir a subtração de números positivos e negativos, sendo assim, nesta fase são exploradas situações problemas ainda na forma direta; acompanhe com os seguintes exemplos:

Exemplo 1: 	Significa que a lesma está na posição -3 (estado inicial) e deve deslizar 5 posições para direita. (uma transformação no sentido positivo) e a incógnita localiza-se na estado final do esquema de flechas.
Exemplo 2: 	Significa que a lesma está na posição +2 e deve deslizar 4 posições para esquerda. (sentido negativo).

Lembramos que cabe ao professor promover o desenvolvimento desse raciocínio inverso através de uma proposta didática que complemente o *Fórmula (– 1)* a partir do esquema de flechas, visto que na terceira fase a subtração de números positivos e negativos será explorada.

Mesmo que este esquema seja amplamente utilizado por Vergnaud e tenha nos ajudado a entender a teoria dos Campos Conceituais, inicialmente não havíamos considerado sua a importância na utilização do ODA aqui considerado.

Os resultados obtidos tanto nos problemas com números naturais, como na aplicação do pré-teste modificaram a nossa concepção a respeito do objeto: antes ele priorizava a promoção dos esquemas de ação e agora prioriza a coordenação dos sistemas de ação e representação simbólica por parte dos sujeitos que venham a utilizá-lo. O que constitui uma grande mudança na forma de como iríamos avaliar as interações dos estudantes.

Assim confiamos que o ODA *Fórmula (– 1)* deve servir como mais uma alternativa para fomentar a coordenação entre Sistemas de Ação e Sistemas Simbólicos, possibilitando, assim, extensão do raciocínio aditivo para operações que envolvem operações com números negativos.

5.2 A RELAÇÃO DE ORDEM

A construção da reta numérica:

Como a turma estava dividida pela metade, formamos 4 grupos de 4 alunos. Para a realização da atividade, pedi que cada grupo elegesse um representante e esses decidiram que: a reta deveria estar na metade da folha; o intervalo seria de -20 a 20; cada grupo ficaria responsável de fazer 10 marcações; a unidade de medida (mediram o comprimento da folha e dividirão por 10) e distribuíram os intervalos numéricos. Logo os grupos perceberam que deveriam deixar uma margem para unir as folhas, apenas um não fez a margem exigida, mas o problema foi resolvido, já que o outro grupo (que confeccionou a folha anterior) havia construído as margens necessárias.

Durante a construção ficou evidente que a atividade é mais interessante para aqueles grupos que ficaram responsáveis pelo intervalo dos números negativos e que envolve o zero. Primeiramente um desses grupos desenhou a reta a lápis e confundiu a ordem dos números negativos escrevendo o intervalo [-10, -20] na ordem decrescente da esquerda para a direita e só percebeu o erro quando um colega disse *"ô meu tá errado, o -20 tem que tá pra lá* (extremidade esquerda) *aqui vai colá o -9* (extremidade direita)*"* e lhe mostrou o segmento de reta do outro grupo:

-10, -11, -12, … - 19, -20	-9, -8, -7 , …, - 1, 0

Após a construção fixamos a reta numérica no quadro e através de exemplos e perguntas discutimos qual número era maior ou menor, quando a comparação era entre dois números positivos ou entre um positivo e outro negativo a resposta era imediata e sem dúvidas, quando eram entre dois números negativos alguns estudantes, a princípio, ficavam indecisos. A primeira estratégia citada por eles para decidir se um -4 é maior ou menor que -2, foi a relação entre temperaturas, ao questioná-lo sobre como sabia que – 4° < – 2° ele disse *"ah, –4° é mais frio que –2°, então é menor"*. Explorando outros exemplos apresentamos a definição de que o número menor é aquele que se encontra à direita do outro na reta numérica.

Os ODA's Varal dos Inteiros e Praia

Agora vamos nos deter nas atividades do *Material 03* da secção 4.6.3. Como a turma estava dividida, metade teve contato com os ODA's antes da construção da reta numérica. Para a turma que não tinha construído a reta numérica, no link "lavando a roupa suja" há um texto para introduzir a discussão sobre "quem é maior", no entanto a grande maioria dos estudantes acessaram os jogos antes de ler, portanto o texto serviu como leitura de apoio. Na leitura a maior dificuldade era entender a representação da relação de ordem, quando mais de dois números estavam sendo comparados. Por exemplo: **0 < 3 < 4 < 5** (muitos entenderam tal expressão somente com o meu auxílio).

A respeito da utilização do ODA Varal dos Inteiros, no experimento pudemos observar que os estudantes, num primeiro momento, imaginavam que o número de toalhas era igual ao número de prendedores, tal interpretação tornou-se um obstáculo a ser ultrapassado, já que sua primeira estratégia era de deixar prendedores reservados entre as toalhas, como vemos na figura abaixo, por exemplo:

FIGURA 052: Exemplo de atividade no Varal dos Inteiros

Para alguns alunos essa situação era impossível, deveria vir apenas a toalha -2, pois é a única opção entre entre -3 e o -1. No entanto, tal dúvida desaparecia quando ele percebia que a sequencia -8, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4 é crescente e será aceita pelo jogo. Quanto à jogabilidade do jogo, alguns estudantes reclamaram da dificuldade para colocar as toalhas nos prendedores, visto que é necessário alinhar o dedo indicador do mouse com a largura do prendedor" e quando "deixavam cair a toalha, não conseguiam recuperá-la de volta.

Um aspecto do ODA que não ficou claro para os jogadores é a possibilidade de pendurar duas toalhas com números distintos no mesmo prendedor e acrescentar essa orientação é uma melhoria necessária no objeto. Enquanto jogavam, os estudantes utilizavam duas janelas abertas: uma com o jogo e outra com a reta numérica para ajudar na comparação entre dois números, dessa forma poucos consultaram o botão *Ajuda* presente no jogo, no entanto ressaltamos que é preciso arrumar o layout desse espaço.

Já a utilização do jogo Praia foi, na nossa opinião, mais dinâmica, pois a representação do siri se movimentando na reta numérica, na parte inferior da tela, é um facilitador na hora da comparação e este recurso foi amplamente utilizado pelos jogadores. Como eles estavam sentados em duplas, algumas vezes a seguinte estratégia era oralizada *"ele* (o siri) *não pode voltar, só pode andar para direita".* Quanto a sua *jogabilidade*, os estudantes tiveram dificuldade de identificar onde estava a toca em que o Siri devia chegar e que ele sempre partia da posição –50 . Outra coisa que causava uma irritação nos jogadores é a sensibilidade do teclado, com apenas um toque o Siri andava mais de uma posição. Um bug que o ODA apresenta em algumas máquinas ao acessá-lo pela primeira vez, ele não funciona ou os números não aprecem; neste caso, é necessário clicar em reiniciar.

Cabe registrar que as atividades do *Material 04* da secção 4.6.3, propostas para serem feitas após a utilização dos ODAs, foram realizadas sem muitas dificuldades; podemos dizer que a maior dificuldade (para nossa surpresa) foi saber ler o termômetro, interpretar que o nível vermelho indicava a temperatura; depois que isso era entendido a relação de ordem era estabelecida com facilidade.

Os alunos ainda tiveram mais uma aula sobre a relação de ordem; nessa aula eles desenvolveram as atividades propostas no *Material 05* apresentado na seção 4.6.3.

Na nossa avaliação a primeira atividade foi proposta prematuramente, pois os alunos tiveram muita dificuldade com a interpretação dos textos apresentados; eles não conseguiram retirar as informações necessárias para desenhar a reta, portanto muitos desistiram da atividade (concentrando-se nas atividades seguintes) e outros a realizaram, mas somente com o nosso auxílio conseguiram entenderam o que era para ser feito. Nas retas desenhadas podemos observar que a dificuldade em relação à ordem de números negativos persiste, como podemos observar nas retas dos estudantes CP, do JP e da NM nas Figuras 53, 54 e 55 respectivamente:

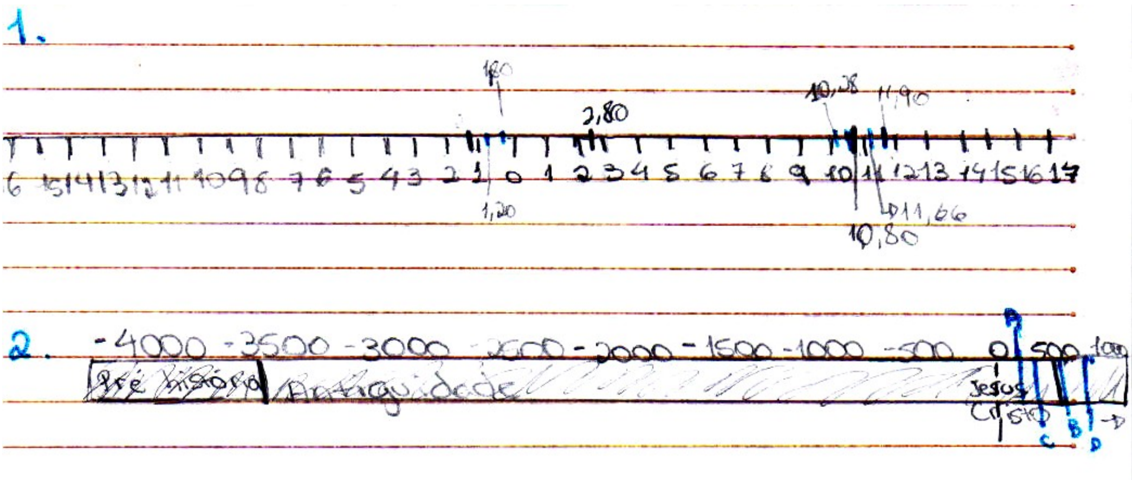


FIGURA 053: Reta numérica estudante CP

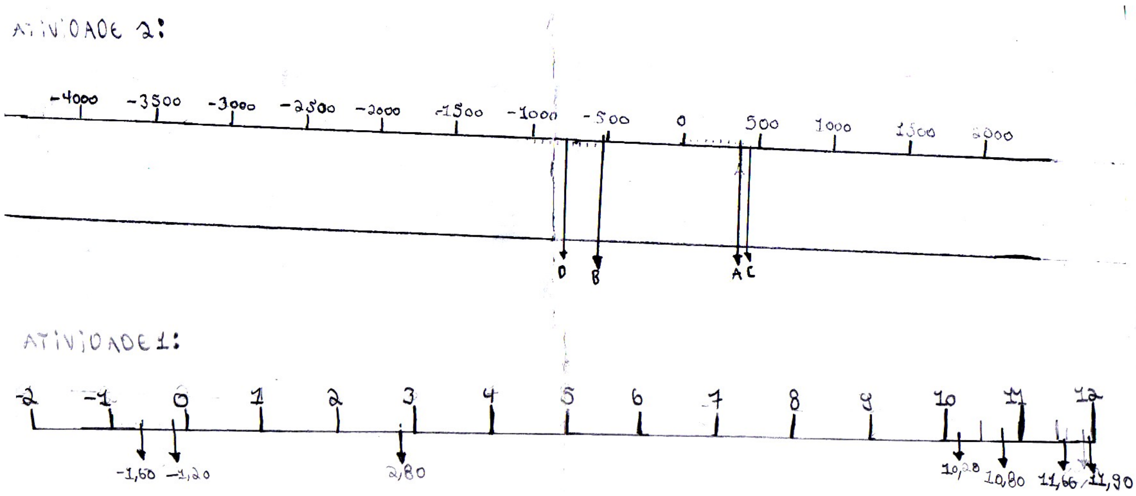


FIGURA 054: Reta numérica estudante JP

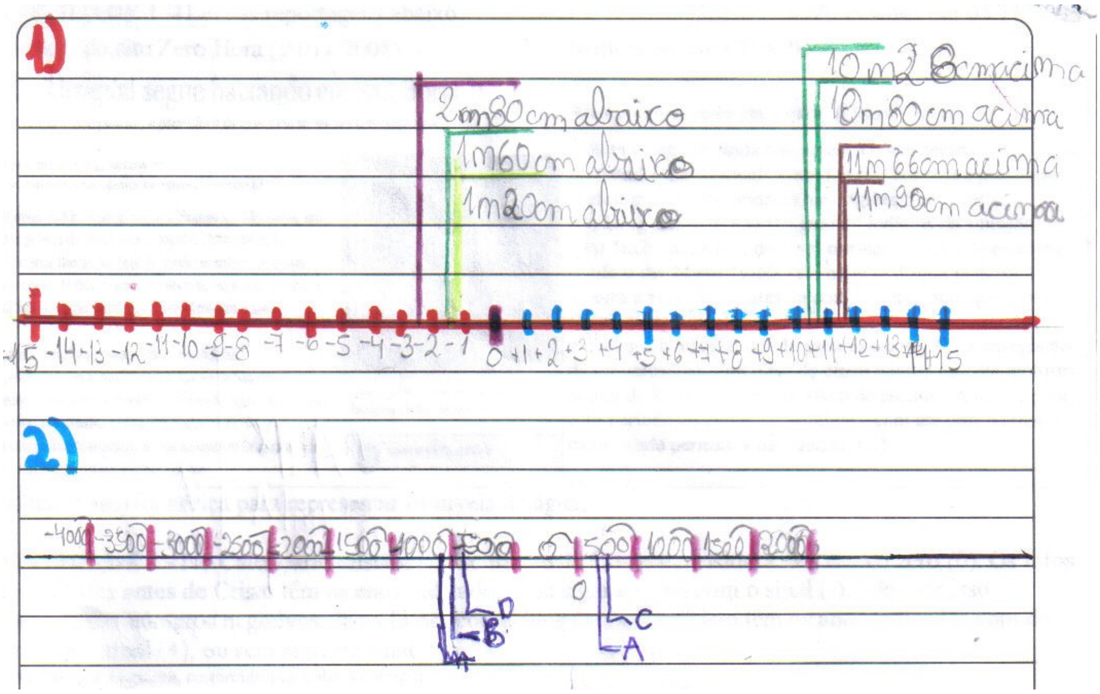


FIGURA 055: Reta numérica estudante NM

Note que ambos posicionaram as marcações -1,2m e -1,6m entre 0 e -1. Como contraexemplo apresentamos a representação correta da NM, que as posicionou corretamente. Nos três casos os estudantes não identificaram que 2,8 metros é o nível normal e é representado pelo zero. É importante ressaltar que essa comparação é de um grau de dificuldade muito maior, pois envolve a utilização de números decimais e que não havia sido explorada anteriormente. Além disso pudemos observar a mesma dificuldade quando estão envolvidos números grandes, como nos indica a segunda atividade. Observe que dessa vez o JP responde corretamente, mas a NM confunde-se ao marcar as datas negativas na reta numérica, já erra CP ao considerar todas positivas.

Mas esse fato também ocorreu na relação de ordem entre números positivos e negativos menores? Nas demais atividades os estudantes resolveram com maior facilidade e um dos resultados esperados era que, para resolver as questões mais gerais que foram apresentadas na atividade 5, era necessário entender bem as atividades 3 e 4. A atividade 3 não representou dificuldade para nenhum dos estudantes. Nossos dados sugerem que aqueles estudantes que tiveram dificuldade já na atividade 4, não conseguiram desenvolver a atividade 5. Já aqueles que responderam corretamente todos os itens da questão 4 não tiveram problemas na questão 5, como vemos nas respostas da RG e EW.

ATIVIDADE 4 - **Compare os números abaixo:**

a) -2 e +1 -2 menor que +1
b) -4 e -2 -4 menor que -2
c) 0 e -3 -3 menor que 0
d) +2 e +3 +3 maior que +2
e) +3 e -3 +3 > -3
f) +4 e 0 +4 > 0
g) -21 e +18 -21 < +18
h) +30 e +27 +30 > +27
i) -16 e 0 -16 < 0
j) -22 e -29 -22 < -29
l) -5,5 e 4,5 -5,5 < 4,5
m) 2,5 e 1,5 2,5 > 1,5

ATIVIDADE 5 - **Para cada afirmação abaixo coloque AS, S ou N se ela acontece, respectivamente, às vezes, sempre ou nunca. Em seguida apresente uma justificativa:**

a) (AS) Um número inteiro negativo é menor do que um inteiro positivo.
b) (N) Um número inteiro negativo é menor do que outro inteiro negativo.
c) (S) Um número inteiro negativo é menor do que zero.
d) (N) Um número inteiro negativo é menor do que zero.
e) (AS) Um número inteiro positivo é menor do que outro inteiro positivo.

FIGURA 056: Respostas do material 05 da estudante RG

ATIVIDADE 4 - **Compare os números abaixo:**

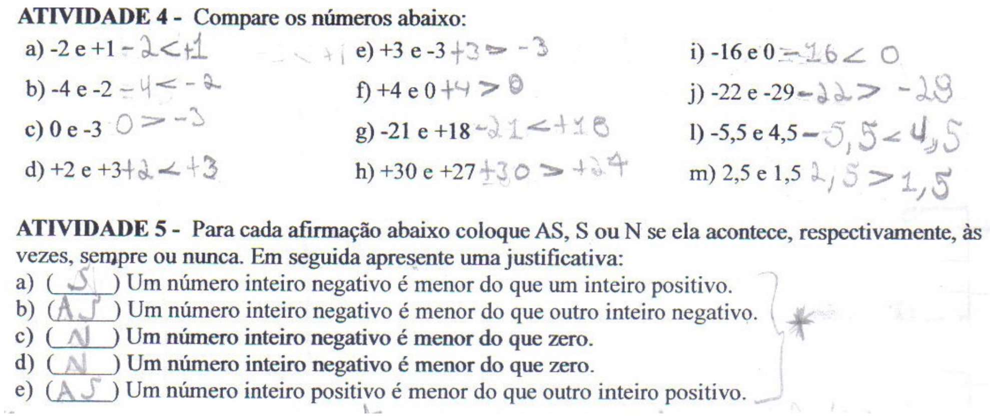
a) -2 e +1 -2 < +1
b) -4 e -2 -4 < 2
c) 0 e -3 0 > -3
d) +2 e +3 +2 < +3
e) +3 e -3 +3 > -3
f) +4 e 0 +4 > 0
g) -21 e +18 +18 > 21
h) +30 e +27 +30 > +27
i) -16 e 0 0 > -16
j) -22 e -29 -22 < 29
l) -5,5 e 4,5 -5,5 < 45
m) 2,5 e 1,5 2,5 > 1,5

ATIVIDADE 5 - **Para cada afirmação abaixo coloque AS, S ou N se ela acontece, respectivamente, às vezes, sempre ou nunca. Em seguida apresente uma justificativa:**

a) (S) Um número inteiro negativo é menor do que um inteiro positivo.
b) (AS) Um número inteiro negativo é menor do que outro inteiro negativo.
c) (S) Um número inteiro negativo é menor do que zero.
d) (N) Um número inteiro ~~negativo~~ positivo é menor do que zero.
e) (AS) Um número inteiro positivo é menor do que outro inteiro positivo.

FIGURA 057: Respostas do material 05 do estudante EW

Ainda há aqueles estudantes que apresentam erros parciais na parte da generalização, como é o caso do JM, que acertou todos os itens da atividade 4 e sugere ter dúvidas na questão 5.



ATIVIDADE 4 - Compare os números abaixo:

a) -2 e +1 -2<+1 e) +3 e -3 +3 > -3 i) -16 e 0 -16 < 0

b) -4 e -2 -4 < -2 f) +4 e 0 +4 > 0 j) -22 e -29 -22 > -29

c) 0 e -3 0 > -3 g) -21 e +18 -21 < +18 l) -5,5 e 4,5 -5,5 < 4,5

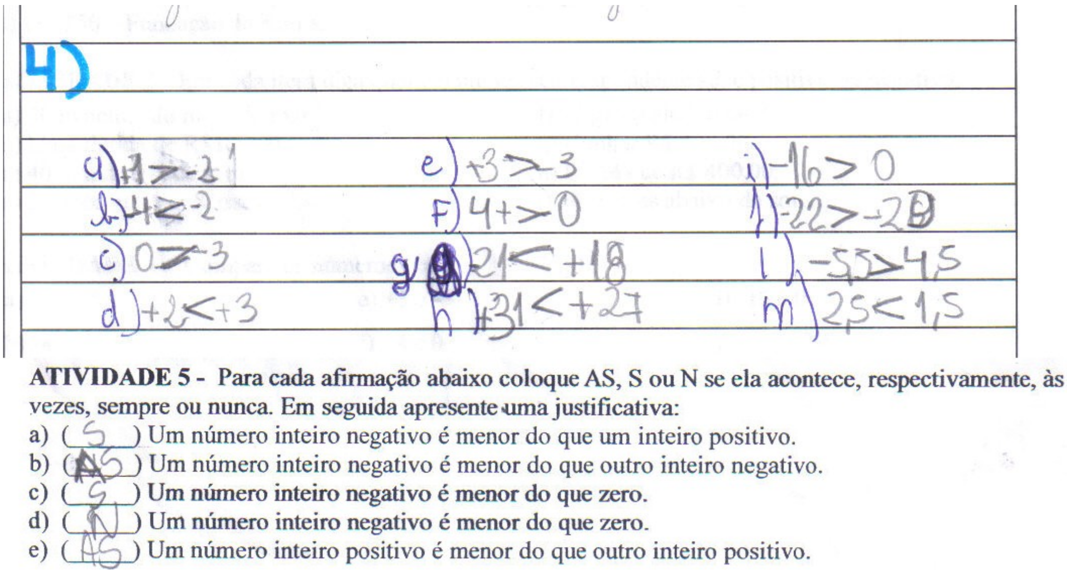
d) +2 e +3 +2 < +3 h) +30 e +27 +30 > +27 m) 2,5 e 1,5 2,5 > 1,5

ATIVIDADE 5 - Para cada afirmação abaixo coloque AS, S ou N se ela acontece, respectivamente, às vezes, sempre ou nunca. Em seguida apresente uma justificativa:

a) (S) Um número inteiro negativo é menor do que um inteiro positivo.
b) (AS) Um número inteiro negativo é menor do que outro inteiro negativo.
c) (N) Um número inteiro negativo é menor do que zero.
d) (N) Um número inteiro negativo é menor do que zero.
e) (AS) Um número inteiro positivo é menor do que outro inteiro positivo.

FIGURA 058: Respostas do material 05 do estudante JM

No entanto houve alguns estudantes que resolveram corretamente as questões mais gerais da atividade 5 e não resolveram corretamente as perguntas específicas da atividade 4, como é o caso da NM.



4)

a) +1 > -2 e) +3 > -3 i) -16 > 0

b) 4 > -2 f) 4+ > 0 j) -22 > -29

c) 0 > -3 g) -21 < +18 l) -5,5 > 4,5

d) +2 < +3 h) +31 < +27 m) 2,5 < 1,5

ATIVIDADE 5 - Para cada afirmação abaixo coloque AS, S ou N se ela acontece, respectivamente, às vezes, sempre ou nunca. Em seguida apresente uma justificativa:

a) (S) Um número inteiro negativo é menor do que um inteiro positivo.
b) (AS) Um número inteiro negativo é menor do que outro inteiro negativo.
c) (S) Um número inteiro negativo é menor do que zero.
d) (N) Um número inteiro negativo é menor do que zero.
e) (AS) Um número inteiro positivo é menor do que outro inteiro positivo.

FIGURA 059: Respostas do material 05 da estudante NM

Fica difícil obter resultados conclusivos com apenas dois encontros, sendo necessário desenvolver um trabalho sistemático durante período mais longo para obtermos resultados mais significativos. No entanto, podemos observar que os estudantes não têm problemas ao estabelecer a relação de ordem naquelas situações mais próximas dos estudantes (como aquelas do link *lavando a roupa suja*) .

Em relação aos ODAs *Varal dos Inteiros* e *Praia,* constatamos que eles atingem seus objetivos, promovendo o estabelecimento da relação de ordem dentro de seu contexto específico. Todavia, a partir da nossa análise de dados obtidos nas atividades, sugerimos o desenvolvimento de novas fases que envolvam números grandes e números decimais. Além disso, tendo como desejo fomentar a coordenação entre os sistemas de ação e simbólicos, sugerimos o desenvolvimento de novos ODA's que promovam a utilização dos símbolos < e >.

5.3 FÓRMULA (– 1)

Finalmente vamos analisar os dados obtidos a partir da interação dos estudantes com ODA *Fórmula (–1)*. Como o jogo é para dois participantes os estudantes sentaram em duplas. Também já comentamos que sua primeira fase serve como uma introdução ao Fórmula (–1), para que o jogador entenda o objetivo do jogo, suas convenções e regras nesse contexto.

As dificuldades existentes são, num primeiro momento, entender como se inicia o jogo, ou seja, não ficou claro que era necessário clicar no dado para sortear um número a ser deslizado e perceber que a moeda sorteia o sinal do número. Essas dificuldades são rapidamente resolvidas ao ler as instruções presentes no botão *Ajuda*, visto que esses adolescentes jogam Games muito avançados e com regras mais complexas que as dos ODAs propostos. Contudo, com o objetivo de melhorar sua jogabilidade, inserimos a instrução *"Clique no dado para iniciar o jogo"* na página inicial; pensamos que isso facilitaria o entendimento do jogo.

FIGURA 060: Estudantes jogando o Fórmula (-1)

Como vimos, essa fase prioriza o esquema de ação da contagem; os estudantes jogam sem dificuldades utilizando este esquema, até porque não há necessidade de operações mentais, visto que o intervalo presente na reta numérica é pequeno para essa faixa etária. Ganhar o jogo dependia praticamente da sorte no sorteio, pois eles quase não erram, apenas por falta de atenção. Para auxiliar na reflexão das operações nós fazíamos perguntas do tipo: *"quanto a lesma deve deslizar para chegar na posição__"* ou *"a lesma deslizou -10 posições e parou na posição -4, onde ela estava?"* Alguns alunos recorriam a contagem, como foi o caso das estudantes BB e JM , no entanto outros procuravam responder através de cálculos mentais,recorrendo à contagem quando tinham dúvidas.

Vale ressaltar que dois estudantes acharam o jogo com o visual infantil e sugeriram *"uma coisa mais radical"*.

5.3.1 A utilização do esquema de flechas

Na segunda fase o estranhamento para iniciar o jogo repetiu-se, então modificamos o ODA inserindo a frase: *"Clique em OK para iniciar o jogo"*. A presença do esquema de flechas também contribuiu para tal estranhamento, mesmo após apertar o botão *OK, veja o* *exemplo abaixo:*

FIGURA 061: O esquema de flechas no ODA Fórmula (-1)

Mesmo com alguns valores numéricos determinados, os estudantes só foram entender que a primeira caixa expressa a posição inicial da lesma e que *–10* representa o quanto ela deve andar com o auxílio das instruções presentes no botão *Ajuda.* Ainda sobre a sua jogabilidade, observamos que inicialmente é confuso para os jogadores saber onde se coloca a resposta e que se deve clicar no botão *Testar* para conferir a resposta. Surge como sugestão incluir os comandos do botão *Testar* no botão *OK*, assim, já testará o resultado e sorteará os próximos valores.

Quanto à interação dos estudantes com o ODA, podemos dizer que aconteceu aquilo que prevíamos: a segunda fase privilegia o desenvolvimento de estratégias, pois o ato de contar é dificultado devido à escala utilizada na reta numérica. Logo ficou claro para os jogadores, que o jogo não dependeria apenas de sorte, mas também exigia a habilidade de cálculo mental.

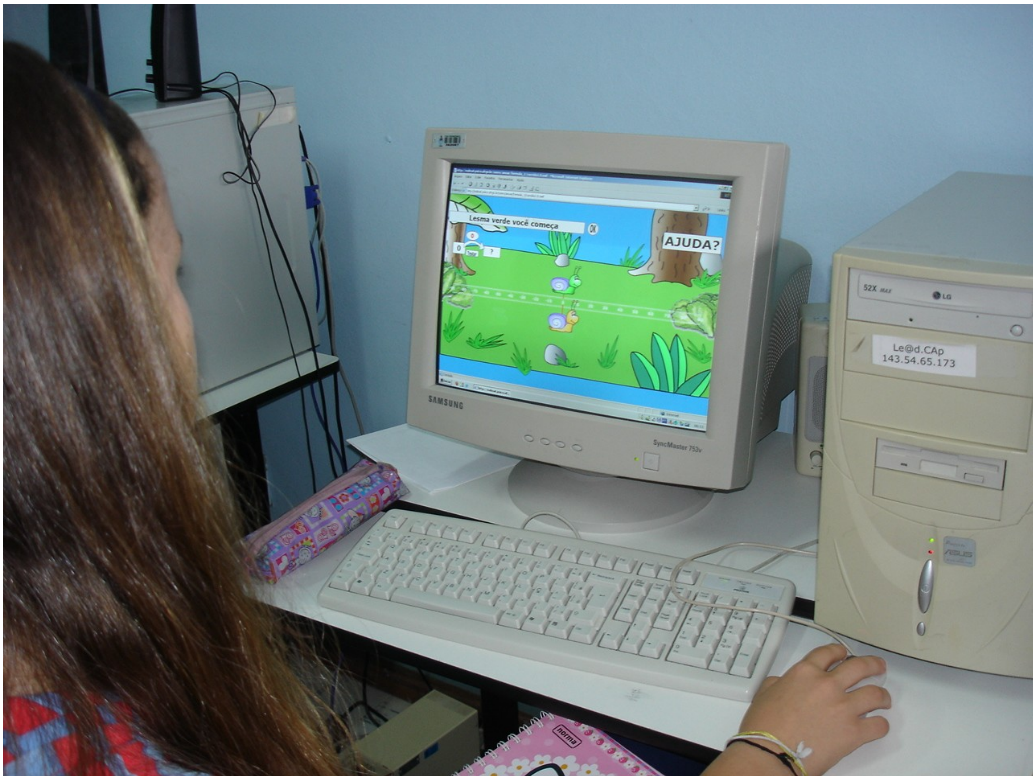


FIGURA 062: Estudante jogando a segunda fase do Fórmula (-1)

Também observamos que os alunos que tiveram maior dificuldade foram aqueles que insistiam em contar. Por outro lado as experiências mais ricas para a nossa observação era quando a dupla era formada por um estudante que utilizava o esquema de ação de contar e outro que já não recorria a essa estratégia. Nesses casos podemos observar as estratégias utilizadas, quando o colega colocava-se na posição de ensinar. Uma das estratégias utilizadas por eles era voltar para a primeira fase para explicar ao colega utilizando os números menores.

Abaixo vamos transcrever algumas explicações feitas nessas condições, no entanto modificamos os valores para ilustrá-los como exemplo:

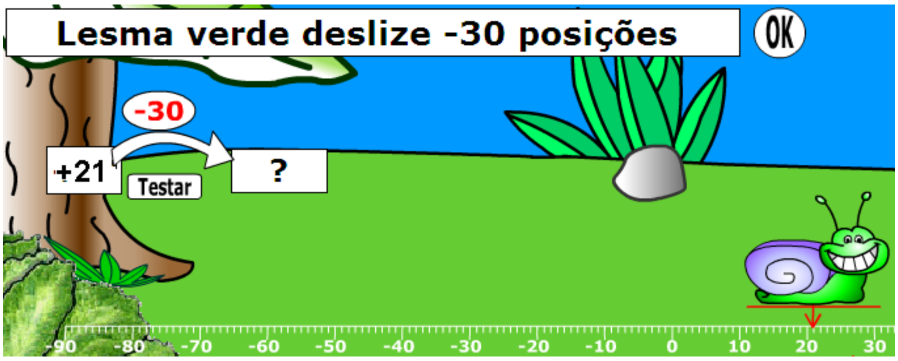


FIGURA 063: Exemplo 1 de situação explorada no Fórmula (-1)

Estudante A: *"Olha só é que nem os problemas do Flávio, ele está aqui no +21, ele deve andar 30 pro lado negativo, entendeu?"*

Estudante B: *Sim*

Estudante A: *"ele vai andá 21 só pra chegá no zero e vai parar no -9"*

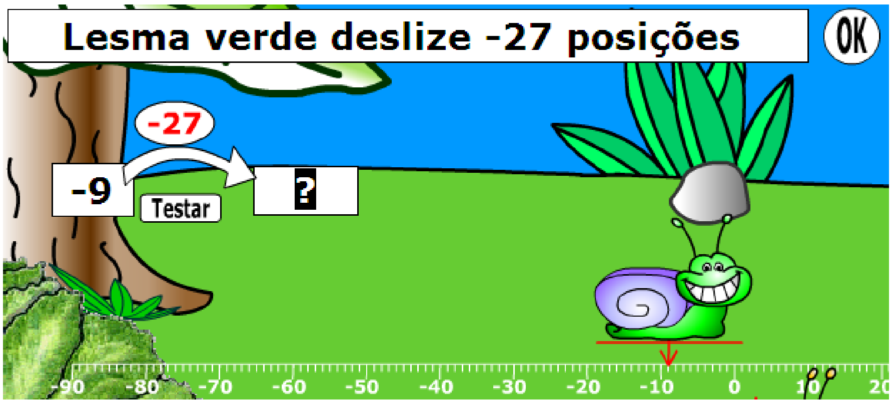


FIGURA 064: Exemplo 2 de situação explorada no Fórmula (-1)

Estudante C: *"tu tem que soma 27 e 9, porque tu tá num -9 e tem que andar para direita (sentido negativo) daí tu soma e a a resposta vai ser negativa."*

FIGURA 065: Exemplo 3 de situação explorada no Fórmula (-1)

Estudante D: *"ela tá parada no -36 e deve andá 10 no sentido positivo, onde ela vai pará?*

Estudante E: *"No 26"*

Estudante D: *"Não!!! ela vai pará no menos 26, a resposta vai sê negativa, pois ela não vai passá pelo zero"*

Estudante E: *"isso, só me enganei!"*

Ainda com o objetivo de auxiliar no estabelecimento de relações, faziámos a seguinte pergunta: *Tu sabe me dizer em que situações devemos somar ou subtrair os números?* Ou então fazia os problemas do tipo: *"quanto a lesma deve deslizar para chegar na posição__"* ou *"a lesma deslizou -10 posições e parou na posição -4, onde ela estava?"*

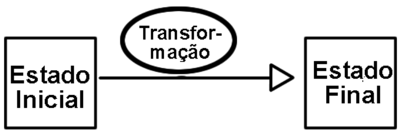
Algo positivo de relatar é que, apesar de ser um jogo, nessas situações os estudantes assumem uma postura de cooperação, onde um ajuda o outro, sem competir. A situação de jogo era estabelecida quando a dupla formada estava no mesmo nível de compreensão, portanto competiam de forma saudável, ou melhor, brincavam enquanto aprendiam matemática.

Logo após jogarem as duas primeiras fases do *Fórmula (– 1)* os alunos deveriam resolver alguns problemas parecidos com aqueles apresentados no pré-teste e que estão disponíveis no link *Aqueçam os Motores*. Ao resolvê-los os estudantes não recorreram ao esquema de flechas; na época esse fato foi uma surpresa, entretanto, hoje, percebemos que nossas expectativas eram exageradas: no fundo tínhamos a crença de que eles iriam incorporar tal esquema de imediato, quando na verdade sabemos que a construção de um conhecimento é processo mais longo.

Agora vamos apresentar e analisar os dados obtidos nas atividades do *Material 06* na página 118 apresentado na seção 4.6.5, tal material procura promover a utilização do esquema de flechas como uma ferramenta para auxiliar na interpretação e resolução dos problemas do campo aditivo.

Primeiro escrevi no quadro o conteúdo da caixa (abaixo) e realizamos uma discussão sobre o esquema de flechas presente no ODA *Fórmula (– 1)* e foi escrito no quadro verde :

Utilizamos o esquema de flechas para representarmos os cálculos realizados ao resolver uma situação-problema:



Exemplos:

1) Partindo da posição +12 o carro A movimenta-se 7 Km para a direita. Qual será sua posição?

2) O carro B parte da posição +12 e anda 7 Km para a esquerda. Qual será sua posição?

A partir do exemplo, expliquei o que é o estado inicial e final e qual é o significado da

transformação e que era importante identificar num problema esses dados. Além disso utilizei outros exemplos, de um alpinista escalando uma montanha, envolvendo dinheiro etc.
Além disso aproveitamos a situação para discutir sobre o que é valor absoluto e relativo, pois tais conceitos serão importantes na discussão de números simétricos.

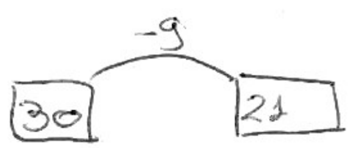
Feita a discussão, os estudantes receberam uma folha com o Material 06. Nele as três primeiras atividades são compostas por problemas do campo aditivo envolvendo a variação da temperatura. Nosso objetivo com a atividade 3 é que os estudantes interpretem o problema e construam o esquema de flechas.

Na análise dos dados, o esquema de flecha nos revelou um pouco da forma como os estudantes interpretam o problemas e quais são as informações do problema que eles elegem como relevantes.

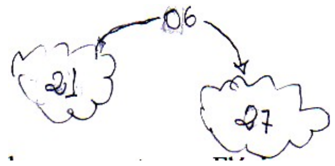
Um fato observado é que nenhum dos alunos sentiu a necessidade de localizar no esquema de flechas o local da incógnita (se estava no estado final, inicial ou na transformação), desse modo, resolver o problema significava escrever o esquema completo.

Também foi constatado que alguns estudantes não viam a necessidade de indicar o sentido da seta da transformação, mesmo quando questionado, como é o caso da GM. A situação inversa também ocorreu, quando o estudante utilizava uma seta dupla para representar a transformação, como é o caso da CMa:

Estudante GM

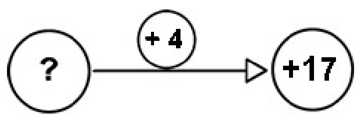


Estudante CMa



Quando o estudante me mostrava seu esquema devolvíamos da seguinte forma: “ *se eu ler nesse sentido* (esq./dir.) *diz que 21 – 9 é igual a 30, mas se ler no sentido inverso* (dir./esq.) *tenho que 30 – 9 é igual a 21, qual delas você pretendia expressar?”*

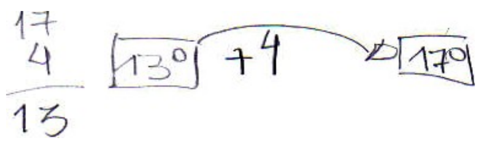
Para resolver o problema 1c era preciso encontrar o valor do estado inicial, e no esquema de flechas podemos representá-lo da seguinte maneira:



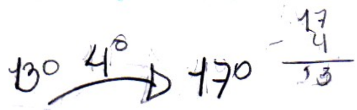
Na resolução, os alunos utilizaram o raciocínio inverso, subtraindo 4 de 17, no entanto no momento montar o esquema de flechas, observamos duas maneiras de registro: O estudante DL representa o esquema de flechas da situação no sentido inverso, já a estudante JD representa o esquema de flecha de acordo na sentido direto.

Estudante DL

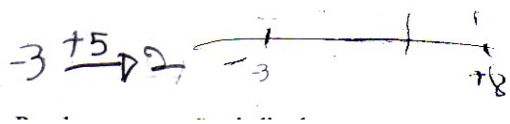
Estudante JD



No entanto são nos registros de BB que podemos identificar a utilização de diferentes esquemas de representação que formam o seu sistema simbólico. Neles podemos identificar que ela utiliza o esquema de flecha para organizar as informações, mas para encontrar a resposta utiliza o esquema que lhe é mais familiar, do algoritmo da soma e subtração.

1a)  1b)  1c) 

No entanto é interessante observar que na questão três – único problema em que há um número negativo no estado inicial – a estudante recorre à reta numérica para descobrir a resposta. Talvez ela tenha utilizado tal estratégia, pois no algoritmo da subtração não faz sentido diminuir um número menor por outro maior.

3) 

Como mencionamos, as atividades 5, 6 e 7, foram propostas com a finalidade de que os estudantes formulassem a regra de sinais da adição, a partir da reflexão e discussão sobre as operações realizadas. É importante ressaltar que, foi justamente nesse momento que resolvemos não utilizar os dados obtidos com a sétima série, pois como metade da turma já conhecia a regra de sinais, seus comentários eram referentes à aplicação direta da regra e, portanto, não conseguíamos identificar ou analisar a influência da nossa proposta didática ou do ODA.

Abaixo mostraremos algumas das respostas que, na nossa avaliação, já indicam influência da nossa proposta. Podemos observar que ainda nessa altura, há alunos que não conseguem perceber regularidades nas operações realizadas, como podemos observar nos comentários da estudante AA:

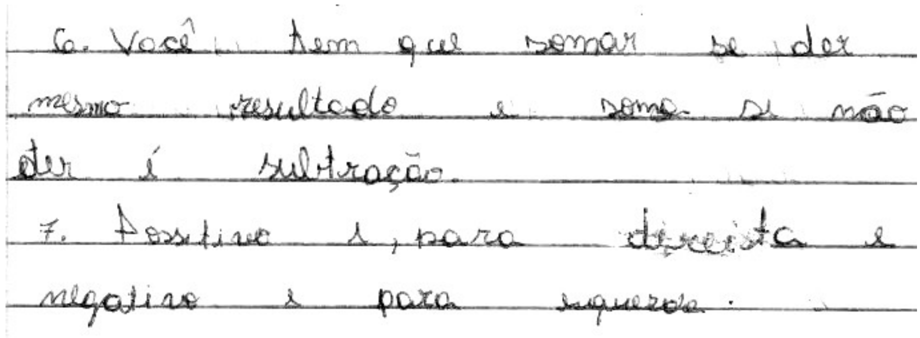

6. Você tem que somar se der mesmo resultado e soma se não der é subtração.
7. Positivo é para direita e negativo é para esquerda.

FIGURA 066: Generalização de AA para as operações do campo aditivo

Apesar de a AA não identificar regularidades para decidir quando se soma ou se subtrai, podemos observar que ela utiliza a reta para decidir se a resposta final é positiva. O curioso é que ela acertou todas as operações das atividades 4 e 5 e foi mal na resolução dos problemas anteriores.

Uma das primeiras hipóteses levantadas pelos estudantes é que o sinal da transformação decide se devemos somar ou subtrair os valores absolutos, com o desenvolver das diferentes situações, tal hipótese é desestabilizada e o estudante fica em dúvida, como podemos identificar no comentário de CMa.

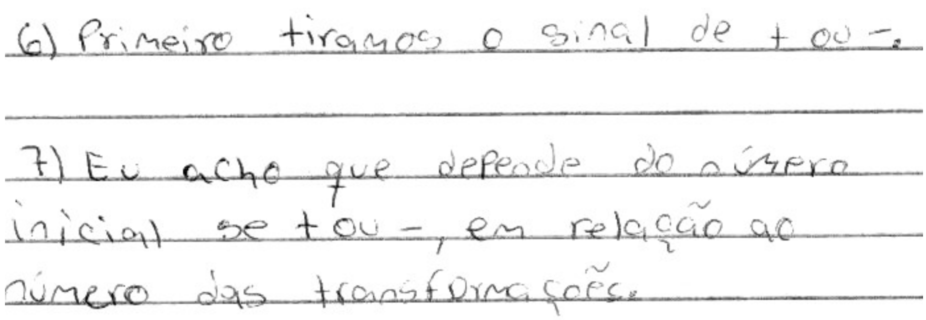

6) Primeiro tiramos o sinal de + ou -.
7) Eu acho que depende do número inicial se + ou -, em relação ao número das transformações.

FIGURA 067: Generalização de CMa para as operações do campo aditivo

Ao ser questionada sobre sua resposta na atividade 6, disse: *“não utilizamos os sinais para somar e subtrair”*, supomos que ela se referia ao cálculo dos números absolutos, todavia não se refere à importância dos sinais para decidir se somamos ou subtraímos tais valores absolutos.

Ainda há estudantes que demonstram que estariam num nível intermediário, onde eles conseguem estabelecer relações parciais sobre a soma de números positivos e negativos. Como podemos identificar nas resposta do estudante LS.

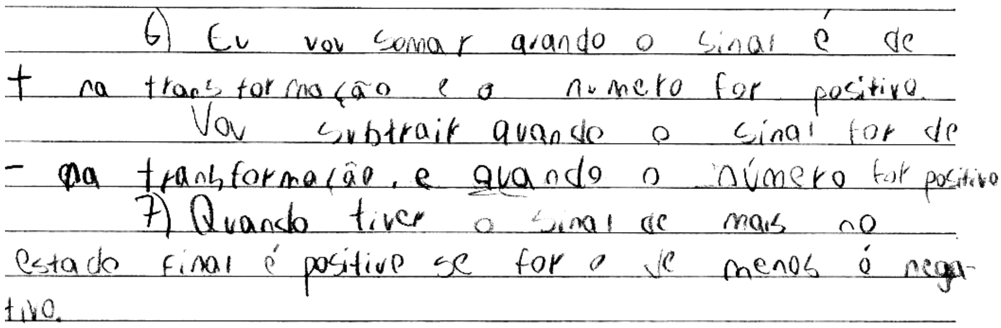

6) Eu vou somar quando o sinal é de + na transformação e o número for positivo. Vou subtrair quando o sinal for de - na transformação, e quando o número for positivo
7) Quando tiver o sinal de mais no estado final é positivo se for o de menos é negativo.

FIGURA 068: Generalização de LS para as operações do campo aditivo

O LC consegue identificar as situações em que subtraímos os valores absolutos dos números inteiros, entretanto não se refere à soma de tais valores quando se trata deentre dois números negativos. Pela sua resposta, podemos supor que ele não percebeu alguma regularidade que o ajude na decisão sobre o sinal da resposta final; então fomos verificar suas respostas na questão 4 e constatamos que ele acertou a grande maioria das questões.

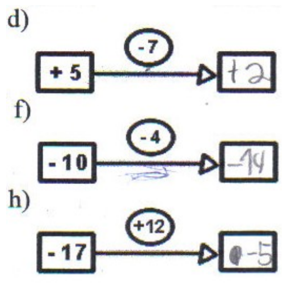
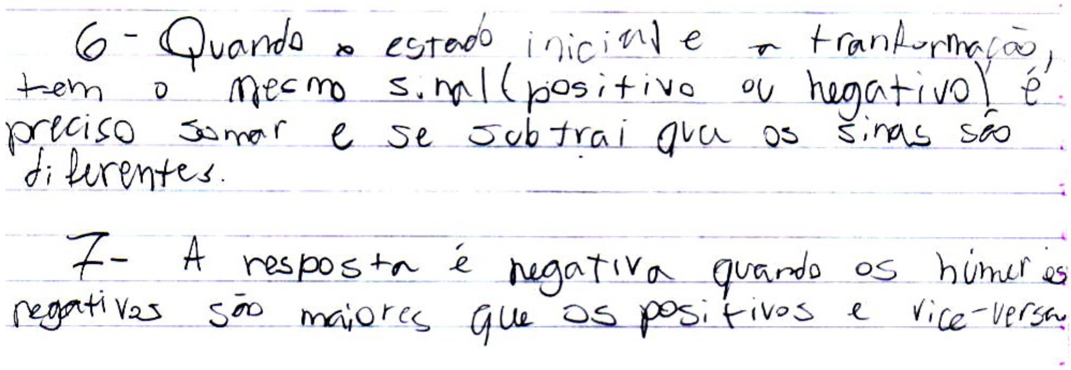


FIGURA 069: Resolução correta apresentada por LC

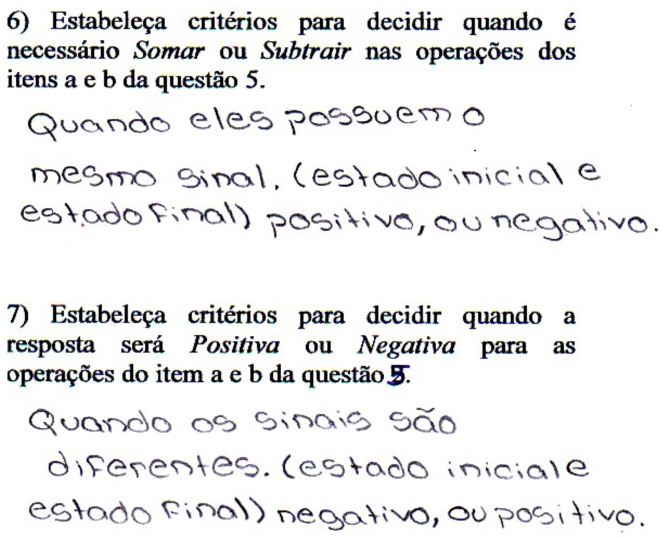
Note que ele erra o sinal do item d e ficou em dúvida no item h, confirmando assim a nossa hipótese.

Por último apresentamos as respostas de duas estudantes que, a partir das relações estabelecidas, já conseguem descrever a regra de sinais da soma propriamente dita. OS registros são, respectivamente, das estudantes GP e RG:


6 - Quando o estado inicial e a tranformação, tem o mesmo sinal (positivo ou negativo) é preciso somar e se subtrai qua os sinais são diferentes.

7- A resposta é negativa quando os númeres negativos são maiores que os positivos e vice-versa

FIGURA 070: Generalização de GP para as operações do campo aditivo


6) Estabeleça critérios para decidir quando é necessário *Somar* ou *Subtrair* nas operações dos itens a e b da questão 5.

Quando eles possuem o mesmo sinal. (estado inicial e estado final) positivo, ou negativo.

7) Estabeleça critérios para decidir quando a resposta será *Positiva* ou *Negativa* para as operações do item a e b da questão 5.

Quando os sinais são diferentes. (estado inicial e estado final) negativo, ou positivo.

FIGURA 071: Generalização de RG para as operações do campo aditivo

O leitor deve estar se perguntando: *Ok, mas como está a turma de um modo geral?* Na época avaliamos que a maior parte da turma se encontrava no estágio intermediário descrito acima. Eles conseguiam identificar quando se soma ou subtrai os valores absolutos, no entanto não conseguiam estabelecer critérios para decidir qual seria o sinal da resposta final, mesmo que alguns deles resolviam os problemas corretamente com o auxílio da reta numérica.

Sendo assim, desenvolvemos um material digital para retomar essas questões (num outro momento) e no encontro seguinte prosseguimos com a aplicação da proposta. Esse material está disponível no link *Ao contrário* e apesar do "tom" indutivo de nossas perguntas, sugerimos que o mesmo objeto seja aplicado em diferentes momentos ao longo do ano. Pretendemos continuar a desenvolvê-lo, pois desejamos que esse material seja uma ferramenta efetiva (tanto para o professor como para o estudante) na avaliação do progresso do estudante. Já podemos adiantar que, infelizmente, perdemos todos os dados obtidos na coleta desse material.

Acreditamos que com esses dados já podemos constatar a influência da nossa proposta didática bem como a forma como utilizamos os ODAs com o objetivo de desenvolver estratégias para a resolução de operações com números positivos e negativos.

5.3.2 Números Simétricos

Como apresentamos na seção 4.6.6, acreditamos que é importante definir o que são números simétricos antes de explorar a subtração dos números positivos e negativos; em vista disso apresentaremos os dados obtidos com a aplicação do *Material 07* na página 120. Além de tal conteúdo, aproveitamos a atividade para fazer uso das expressões numéricas para representar a adição de números positivos e negativos, sendo uma espécie de transição entre o esquema de flechas e as expressões numéricas.

A introdução à definição de números simétricos iniciou de forma expositiva, primeiro fixamos a reta numérica construída por eles no quadro verde. Então abordava da seguinte maneira:

> Circulava o número 8 e perguntava:, "*qual número está a 8 unidades de distância do zero?*"
> os alunos respondiam: *"o menos oito!"*
> ainda perguntava: "*Qual a diferença entre eles?*"
> Então um aluno respondeu: *"eles estão em lados opostos"*
> E escrevendo no quadro, dizia: *"então dizemos que o -8 é oposto ao 8 em relação ao zero"*
> Circulei o número -12 e perguntava:, "*qual número está a mesma de distância do*

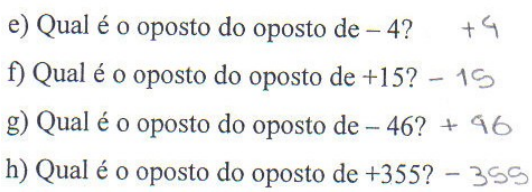
zero?”*

os alunos respondiam: *“o doze positivo!”*

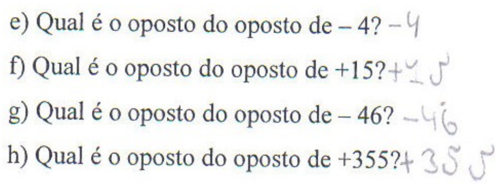
E escrevendo no quadro, dizia: *“então dizemos que o +12 é oposto de -12 em relação ao zero”*

Logo em seguida distribuímos a folha com o *Material 07* aos os estudantes e foram bem sucedidos na primeira atividade, onde era necessário determinar os números simétricos de alguns exemplos. Já as questões onde os alunos deviam determinar o elemento *“oposto do oposto de....”* geraram muitas dúvidas, dividindo as opiniões dos estudantes, como vemos nas respostas de RG e JP:

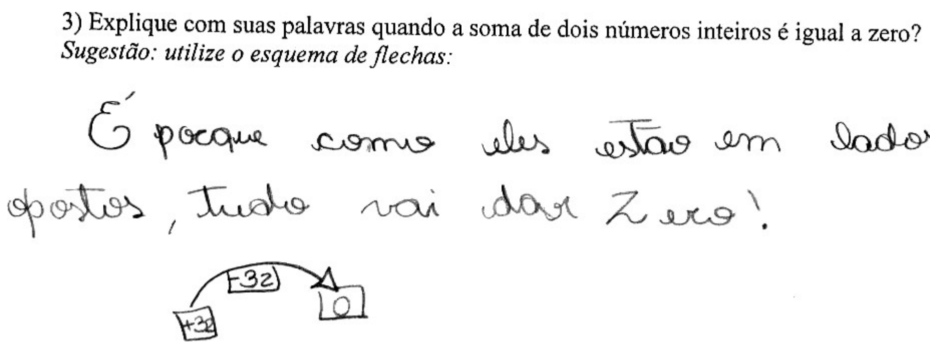
Estudante RG


e) Qual é o oposto do oposto de – 4? +4
f) Qual é o oposto do oposto de +15? – 15
g) Qual é o oposto do oposto de – 46? + 46
h) Qual é o oposto do oposto de +355? – 355

Estudante JP


e) Qual é o oposto do oposto de – 4? –4
f) Qual é o oposto do oposto de +15? +15
g) Qual é o oposto do oposto de – 46? –46
h) Qual é o oposto do oposto de +355? +355

Quanto às questões em que se devia determinar o valor da incógnita em operações do tipo *(a) + x = 0:* os estudantes as resolveram com certa facilidade; sobre elas gostaríamos de apresentar algumas respostas dos estudantes.


3) Explique com suas palavras quando a soma de dois números inteiros é igual a zero?
Sugestão: utilize o esquema de flechas:

É porque como eles estão em lados opostos, tudo vai dar Zero!

FIGURA 072: Estudante BB utilizando o esquema de flechas

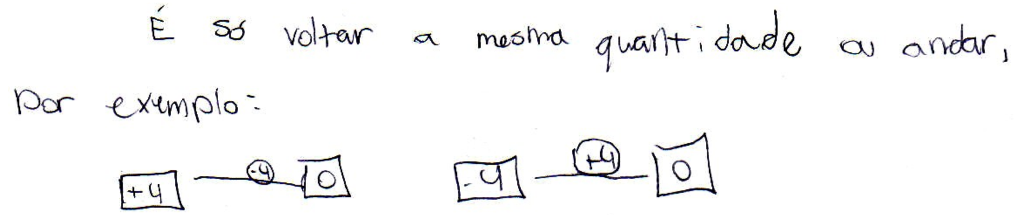


FIGURA 073: Estudante GP utilizando o esquema de flechas

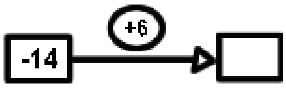
Note ao utilizar as expressões *voltar* e andar, a GP faz referência à utilização do uso da reta numérica em sua resolução.

Ainda houve estudantes que responderam da seguinte forma: *"é quando os números são simétricos ou opostos*, como é o caso do estudante ER,*"*

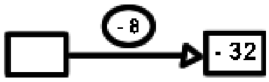
À medida que eles concluíam, já iniciavam a segunda atividade e, quando todos já estavam resolvendo os problemas, copiei o esquema (abaixo) no quadro e expliquei as expressões numéricas como se fossem uma transcrição do esquema de flechas.

Relembrando:

A partir do esquema de fechas podemos representar as operações através de equações:



(- 14) + (+ 6) = ?



? + (- 8) = - 32

Primeira coisa que fiz foi traduzir o esquema de flechas para uma situação na reta numérica (que ainda estava fixada no quadro verde) , através do seguinte diálogo:

" esse esquema representa os movimentos do Flávio; o que isso significa?"

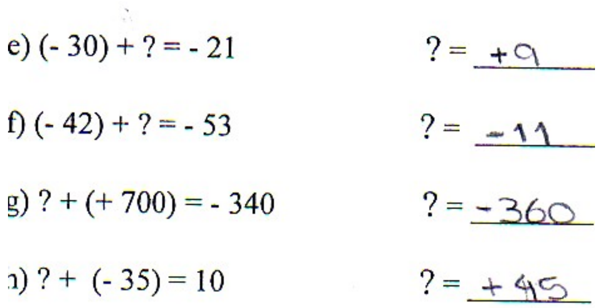
os estudantes responderam: *"que o chato do Flávio, está no –14 e tem que andar 6 para direita e vai parar no – 8 "*

e complementei: *"Então significa que* ? *É igual – 8, Mas podemos descrever essa situação através de uma expressão numérica..."*

Repeti o mesmo processo e ainda discutimos as estratégias que eles utilizam para resolver tal tipo de problema (na ordem inversa e direta), mas não nos aprofundamos nessa discussão, pois a retomaríamos nas atividades da subtração.

Agora vamos analisar os dados obtidos na realização dessa atividade. Como já nos referimos antes, os alunos tiveram um bom desempenho nesse tipo de questão quando a mesma envolvia a soma de números simétricos; no entanto, esse fato não se repetiu nos outros itens da atividade 2. Durante a resolução dessas questões, observamos que uma das estratégias utilizadas pelos estudantes era a seguinte:

Se o valor absoluto da resposta final era maior, significava que os sinais eram iguais, mas se tal valor fosse menor, então os números eram de sinais diferentes. Provavelmente esse foi a estratégia utilizada pela RG.


e) (- 30) + ? = - 21 ? = +9

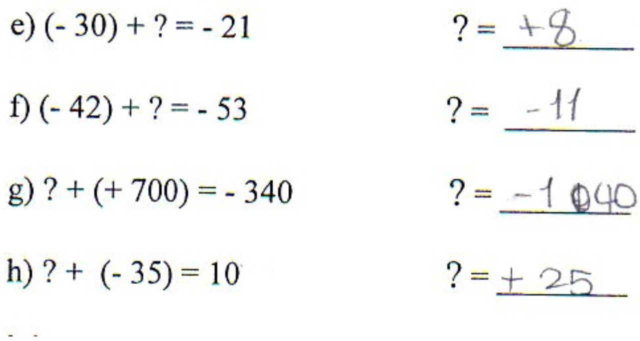
f) (- 42) + ? = - 53 ? = -11

g) ? + (+ 700) = - 340 ? = -360

h) ? + (- 35) = 10 ? = +45

FIGURA 074: Estudante RG resolvendo equações

Assim como a RG muitos não conseguiram determinar o valor correto do item g, se eles tivessem percebido que -360 +700 = +340, descobririam que $?=-1040$. Observamos o mesmo erro na resposta do item h da GPa.


e) (- 30) + ? = - 21 ? = +8

f) (- 42) + ? = - 53 ? = -11

g) ? + (+ 700) = - 340 ? = -1 040

h) ? + (- 35) = 10 ? = + 25

FIGURA 075: Estudante GP resolvendo equações

Queremos ressaltar que, para desenvolver tal estratégia, é necessário que antes o estudante tenha estabelecido as relações exigidas nas atividade da seção anterior, caso contrário não teria êxito.

No entanto essa não é a única forma de resolver tais problemas: também pudemos constatar que os estudantes – que acertaram todos os itens – resolveram os problemas substituindo o valor numérico no local da incógnita, ER é um exemplo.

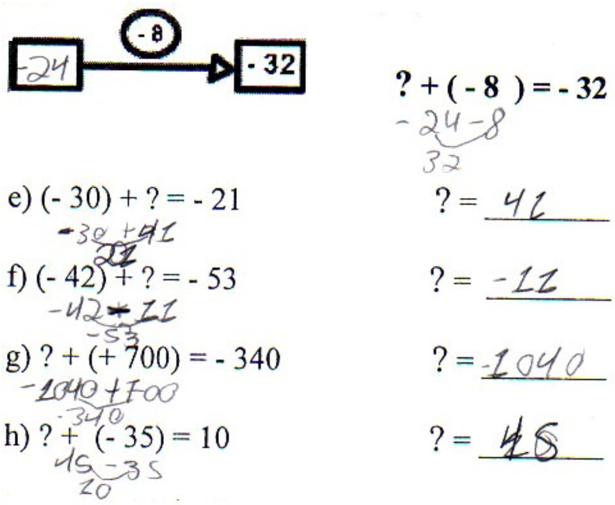


FIGURA 076: Estudante ER resolvendo equações

Ainda pudemos observar que alguns estudantes resolviam as questões com diferentes estratégias, que nos pareceriam ser escolhidas aleatoriamente e que não lhes possibilitavam o êxito na resolução das atividades.

Durante o desenvolvimento da atividade o estudante PV perguntou se poderia utilizar o x no lugar de ?:

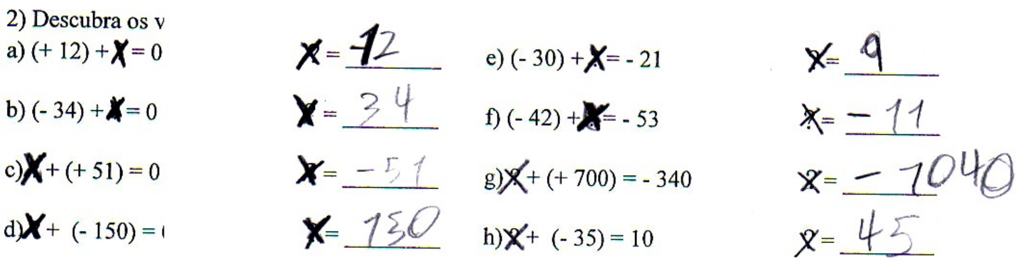


FIGURA 077: Estudante PV resolvendo equações

Interpretamos tal fato como mais uma evidência de que o desenvolvimento das operações com números positivos e negativos se confunde com o desenvolvimento da álgebra, o que nos leva a crer que o raciocínio algébrico pode ser desenvolvido como a extensão do raciocínio aditivo e multiplicativo. Pensamos, portanto, que nossa proposta está de acordo com essa ideia, quando explora esse tipo de atividade a partir das operações em Z.

Lembramos que tal postura, contraria aquilo que acompanhamos na nossa experiência profissional, onde primeiro se ensina o conteúdo de números inteiro, para só depois iniciar o conteúdo de álgebra.

5.3.3 A Subtração

Agora analisaremos os dados obtidos com a aplicação das atividades apresentadas na seção 4.6.7, ainda salientamos que abordar e justificar a subtração de números positivos e negativos através do esquema de flechas, constitui uma "nova" forma de ensinar e aprender tais operações e está pautada na ideia de olhar para a subtração como operação irmã da adição, já que são *"as duas faces de uma mesma moeda"*.

No link *Ao Contrário* os estudantes jogaram a terceira e última fase do *Fórmula (- 1)* (naquela época); além da presença da subtração, a novidade era a utilização de expressões numéricas para representar as operações com números. No entanto, não tiveram muita dificuldade de entender como funcionava essa nova fase, pois eles já conheciam a dinâmica do Fórmula (-1) e já haviam trabalhado com as expressões numéricas em aula; dessa forma, jogaram sem grandes dificuldades. Muitos estudantes nem perceberam a presença da subtração e aqueles que a notaram, tiraram suas dúvidas através dos exemplos presentes no botão *Ajuda*. É claro que ficamos satisfeitos com essa atitude, pois demonstra a apropriação das regras e do contexto virtual criado através do ODA.

Como vimos no contexto do Fórmula (-1), a subtração é interpretada da seguinte forma:

<u>Exemplo 1:</u> (–7) – (+5) = __; significa que a lesma está na posição –7 e deve deslizar 5 posições *AO CONTRÁRIO* da direita.

<u>Exemplo 2:</u> (–12) – (– 13) = __; significa que a lesma está na posição –12 e deve deslizar 13 posições *AO CONTRÁRIO* da esquerda.

Pudemos observar que, de um modo geral, os estudantes trabalharam muito bem com a ideia de *"deslizar ao contrário de"* – quando alguns deles ficava com dúvidas, sua dupla o ajudava com diálogos similares aos que apresentamos na *seção 5.3.1* – no entanto algumas duplas jogaram o tempo todo sem sentir a necessidade de recorrer a essa estratégia, tal fato nos causou bastante surpresa, afinal... o que teria acontecido?

Para nos ajudar a entender, na Figura 78 , apresentamos a simulação de uma situação:

Para a expressão (– 26) – (8) = ?, esses estudantes interpretavam como sendo equivalente à (– 26) + (– 8) = ? , ou seja, neste caso o símbolo *menos* ainda representa um *estado relativo* ao invés de *operador* inverso da adição. Para nós (professores) é óbvio que a equivalência está correta, mas considerando a nossa experiência profissional, para as crianças dessa faixa etária não é uma conclusão imediata, muito pelo contrário. Então como eles não desconfiaram de tal expressão?

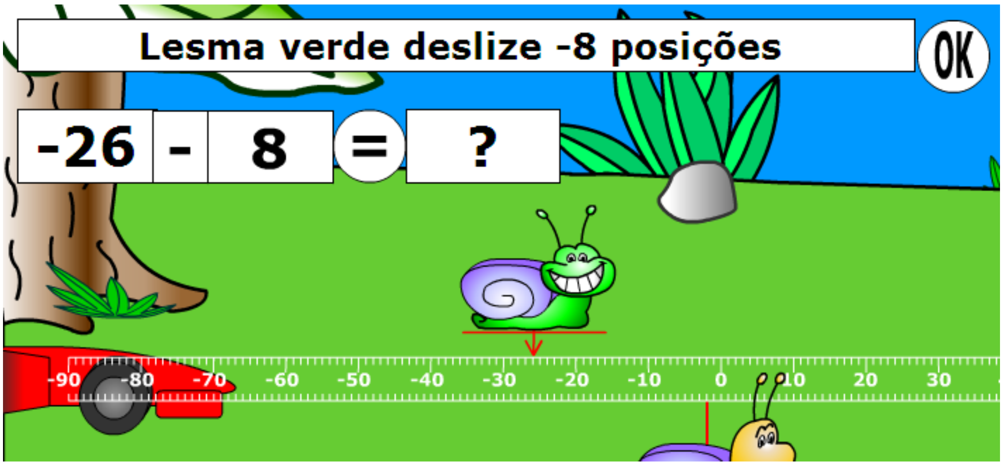


FIGURA 078: Terceira fase do ODA Fórmula (–1)

Com essa *"lesma atrás da orelha"* fomos procurar uma explicação e concluímos que o problema estaria na forma como o *Fórmula (–1)* apresentava as operações. Até então, não tínhamos percebido que o ODA estava suprimindo o sinal do segundo termo da operação e, consequentemente, todos os valores sorteados eram positivos. Acreditamos que esse fato contribuiu para a validação da estratégia utilizada por esses estudantes. Pois tal estratégia seria colocada em "xeque" com o surgimento de expressões do tipo: (– 26) – (– 8) = ? Realizando essas modificações acreditamos que o ODA promoveria o significado de operador para o símbolo de *menos*.

Logo após a utilização do jogo, os estudantes deveriam responder algumas perguntas sobre a subtração de números positivos e negativos; infelizmente esses registros foram perdidos junto com os dados mencionados na secção anterior.

À medida que as duplas iam concluindo as atividades, eles poderiam jogar os ODAs Calculando, Collins e Collinus. Somente algumas duplas tiveram tempo para jogá-los e, nos três objetos, tivemos que explicar como funcionava, pois eles não conseguiram abstrair as informações presentes no botão *Ajuda*.

Calculando:

Para facilitar, vamos descrever as dificuldades encontradas pelos estudantes em itens:

• Não identificaram que, para iniciar o jogo, deveriam clicar no botão ;

• Quanto ao sistema alpha/numérico, por exemplo, não entenderam que **5C** representava as coordenadas de um quadrante, nem que deveriam realizar a conta dentro dele;

• Não identificaram que deveriam clicar no botão para testar a resposta;

No entanto, depois que eles entendiam as regras, jogaram sem dificuldades, fazendo duas críticas: as partidas eram muito demoradas e que as fases *Normal* e *Difícil* eram mais fáceis que a fase *Fácil*. Acreditamos que as informações presentes no botão *Ajuda* devem ser reformuladas e, que para atender as críticas feitas, se diminuirmos o tamanho da tabela, diminuiremos o tempo da partida.

Collin e Collinus:

Assim como no Calculando, depois que explicamos como eram as regras, os estudantes jogaram sem dificuldade. Durante as partidas pudemos observar a utilização de uma única estratégia: escolher o valor mais alto da fila disponível, veja a Figura 79 por exemplo:

Nesse momento o Placar era o seguinte:

Jogador 1: 13 pontos

Jogador 2: 23pontos

É a vez do *Jogador 1* , seguindo a regra observadas nas ações dos estudantes, ele escolheria o número maior (9) sem procurar antecipar a jogada seguinte de seu adversário.

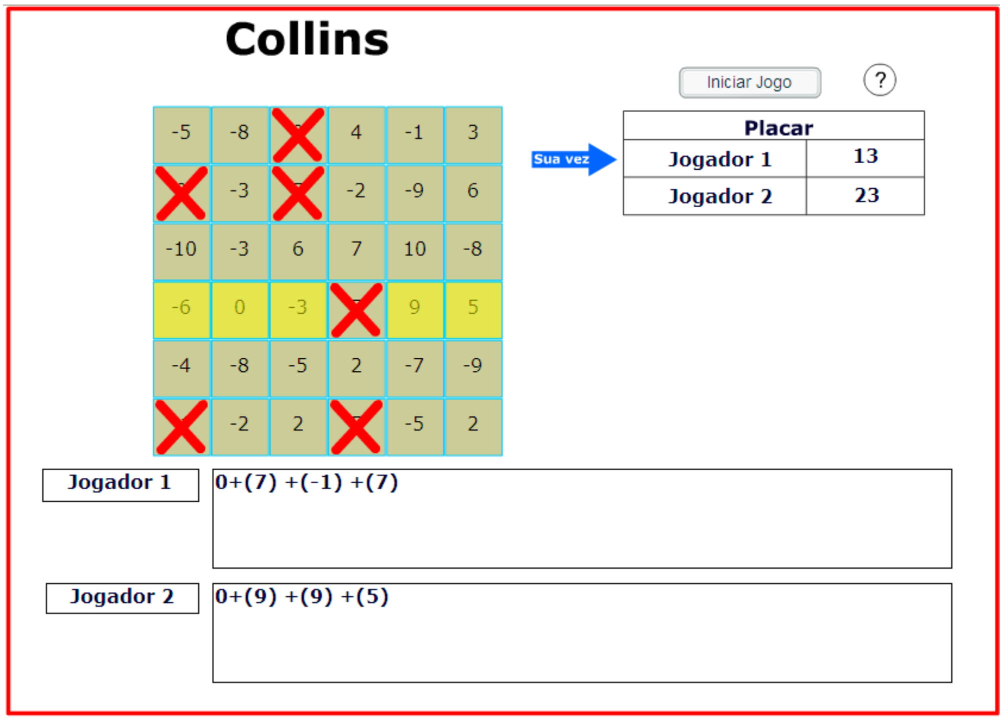


FIGURA 079: Exemplo de situação no ODA Collins

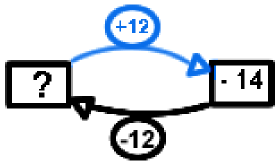
Note que, nessa situação, é mais vantajoso para o *Jogador 1*, escolher o zero, pois na jogada seguinte obrigaria seu seu adversário a escolher um número negativo. No entanto o uso de tal antecipação não foi observada como uma estratégia para vencer o jogo.

Como o estabelecimento da relação de ordem era a única habilidade que estava sendo utilizada, comecei a perguntar aos estudantes: *"quem está ganhando?" "Qual de vocês tem a maior pontuação?"* , durante o jogo ou no final da partida pedia para descobrirem o somatório dos pontos. Meu objetivo com essa intervenção era fomentar a operação de adição com os números positivos e negativos. Depois dessa intervenção, enquanto jogavam, eles próprios iam calculando os resultados parciais.

Foi interessante observar que, ao jogar o Collinus pela primeira vez, uma dupla aplicou a mesma estratégia empregada no Collins (escolher o número maior), não percebendo que, ao invés de somar, subtraía-se os valores. No final do jogo eles nos chamaram para avisar que "o jogo havia errado", quando começamos a conferir o placar final, um deles logo percebeu seu engano e disse *"Preste atenção: é uma subtração! Então temos que somar o contrário desse número!* (apontando para o segundo termo)". Daí em diante a estratégia utilizada foi escolher o número menor.

Agora vamos analisar os dados obtidos com a aplicação do *Material 08* e que foram apresentados na seção 4.6.7. Nossa intervenção seguiu no mesmo estilo dos encontros anteriores, primeiro fixamos a reta numérica no quadro verde e, de forma expositiva, resolvemos o problema acompanhando a discussão proposta no material:

Primeiro discutimos as formas equivalentes de resolver o problema com o auxílio do esquema de flechas:



Logo em seguida fizemos a transição esquema de flechas/expressões numéricas para depois intervir da seguinte maneira:

"No encontro passado, como vocês resolveram as contas de subtração no jogo Fórmula (– 1) ?"

" então (– 14) – (+ 12), significa que ele (Clávio) *está na posição – 14 e se desloca* ***ao contrário*** *de 12 posições para a direita".*

E, através desse *link* com o encontro anterior, apresentamos a solução para esse tipo de subtração, através da equivalência entre as expressões

(– 14) – (+ 12) e ***(– 14) + (– 12)***

Isto é: expressam as mesmas quantidades.

A análise dos dados obtidos indica que a subtração de números positivos é algo bastante complexo para os estudantes, ao menos nessa faixa etária. Por exemplo, nas respostas de DL (Figura 80) podemos identificar que ele resolve corretamente a maioria das operações do esquema de flechas (com exceção do item a). No entanto acha desnecessário representá-los através de expressões numéricas e nem pareceu motivado a resolver os problemas da segunda atividade. Talvez isso indique que o modelo utilizado não faça sentido algum para ele.

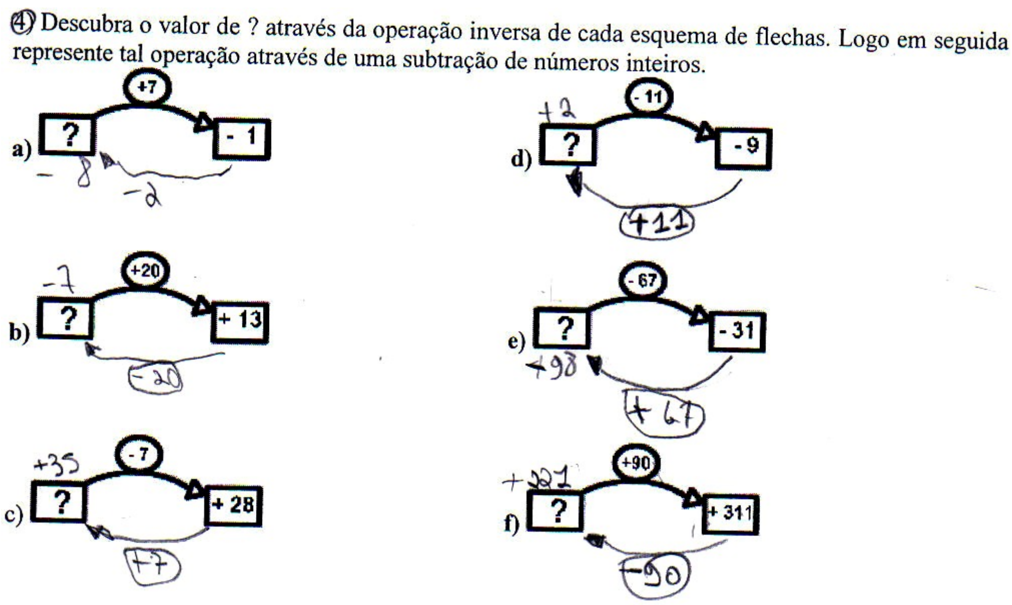


FIGURA 080: Estudante DL resolvendo a subtração

Também concluímos que a proposta não fez sentido para a BB. De acordo com suas respostas, constatamos que ela conseguiu resolver a maior parte dos esquemas de flechas corretamente, mas errou ao representá-los através de expressões numéricas. Note que em nenhum momento ela pensou em representá-los através da subtração, pois estão na forma direta.

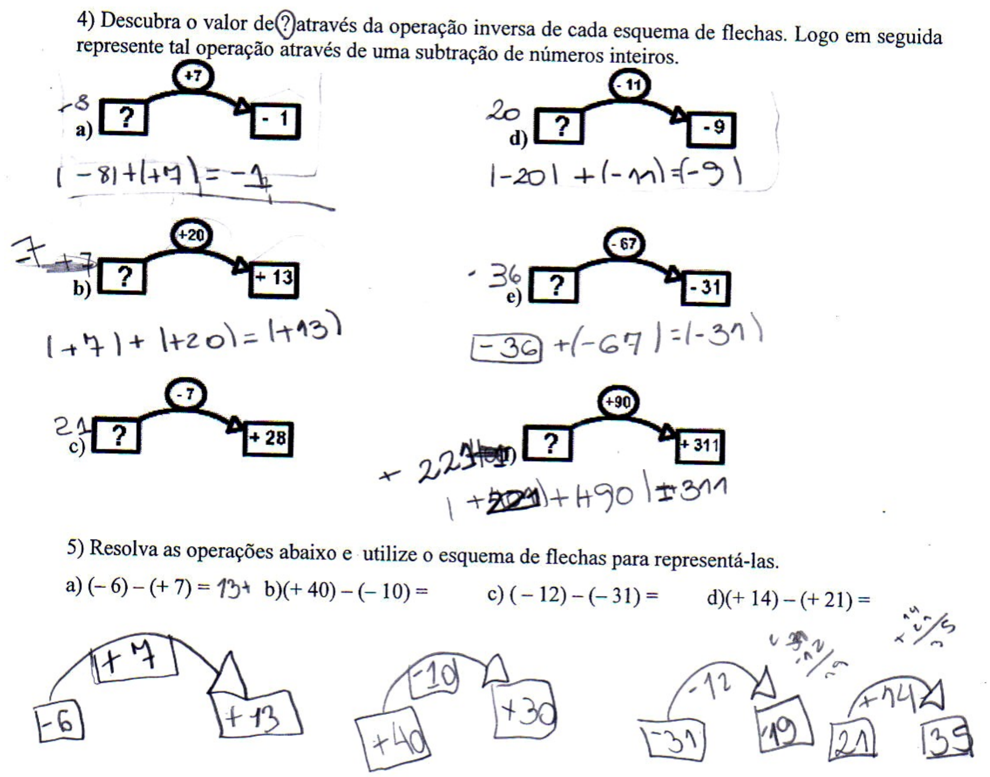


FIGURA 081: Estudante BB resolvendo a subtração

Pelas suas expressões numéricas, podemos identificar que a BB ainda não consegue resolver os problemas de adição de números positivos e negativos. Em consequência desse fato, na atividade seguinte, podemos identificar que essa dificuldade vai interferir nos problemas de subtração, já que ela ignora a subtração, resolvendo como se fossem de adição.

FIGURA 082: Imagem da coleta de dados

O mesmo ocorre com a RG, que acrescenta o sinal de *menos* em alguns itens, mas não muda sua interpretação, numa tentativa de não ignorar a subtração totalmente.

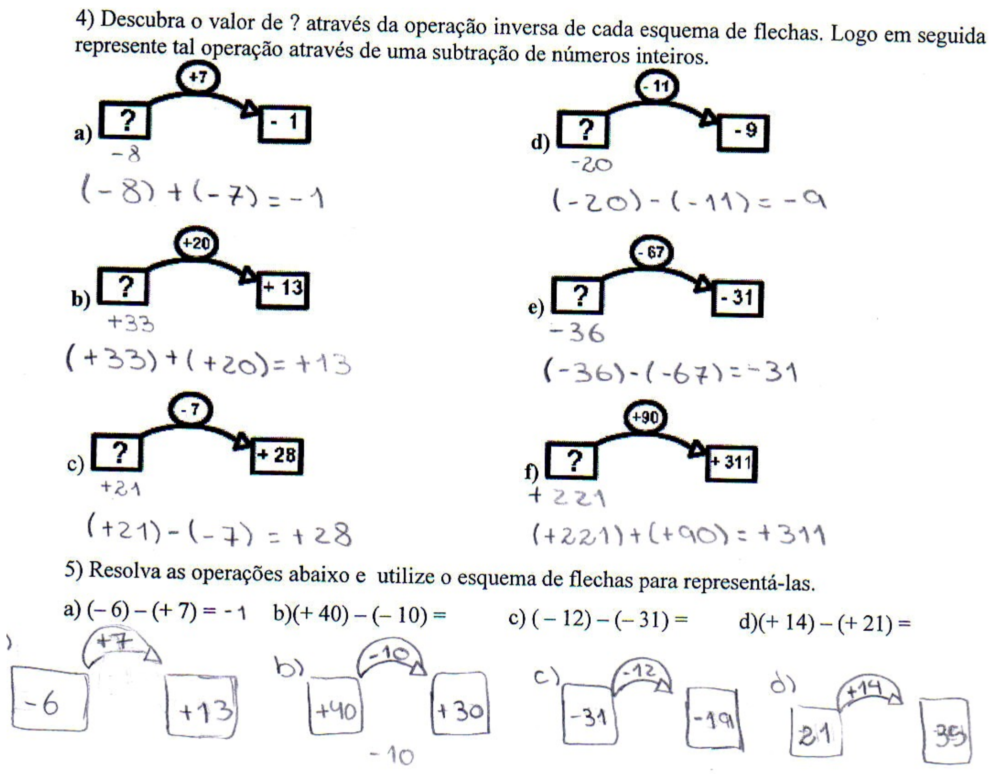


FIGURA 083: Estudante RG resolvendo a subtração

Abaixo apresentamos as respostas do ER (Figura 84) nelas podemos identificar que, no esquema de flechas, representa corretamente o caminho inverso da transformação; no entanto, ele erra todas as questões onde o o módulo do número negativo é maior.

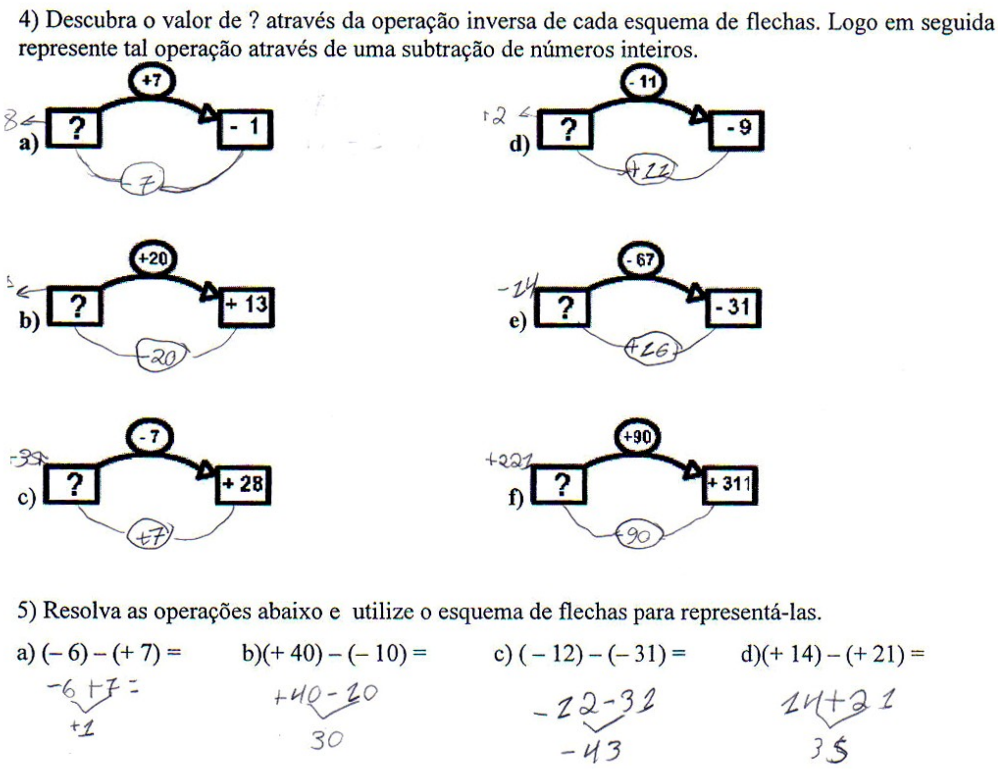


FIGURA 084: Estudante ER resolvendo a subtração

Como vimos na atividade da seção anterior, o estudante ER resolveu todos os problemas corretamente, utilizando a estratégia da substituição; no entanto, uma semana depois, não conseguiu resolver o mesmo tipo de operações presentes no esquema flechas. Na época do experimento esse tipo de acontecimento nos causou um sentimento de frustração, apesar de ter consciência de que essa instabilidade faz parte do processo de aprendizagem.

Quanto à segunda atividade, ele apresenta um comportamento similar ao de BB: ignora a subtração e resolve as operações utilizando a sua estratégia, através da substituição, nesse caso não acerta nenhuma das alternativas.

Durante a análise das respostas do JP (Figura 85) , podemos identificar uma de suas estratégias e que nos fizeram reavaliar a nossa proposta. Note que ele acerta a maioria das operações com o esquema de flechas e, apesar de não utilizar a subtração, representa corretamente através de equações (transformação indireta).

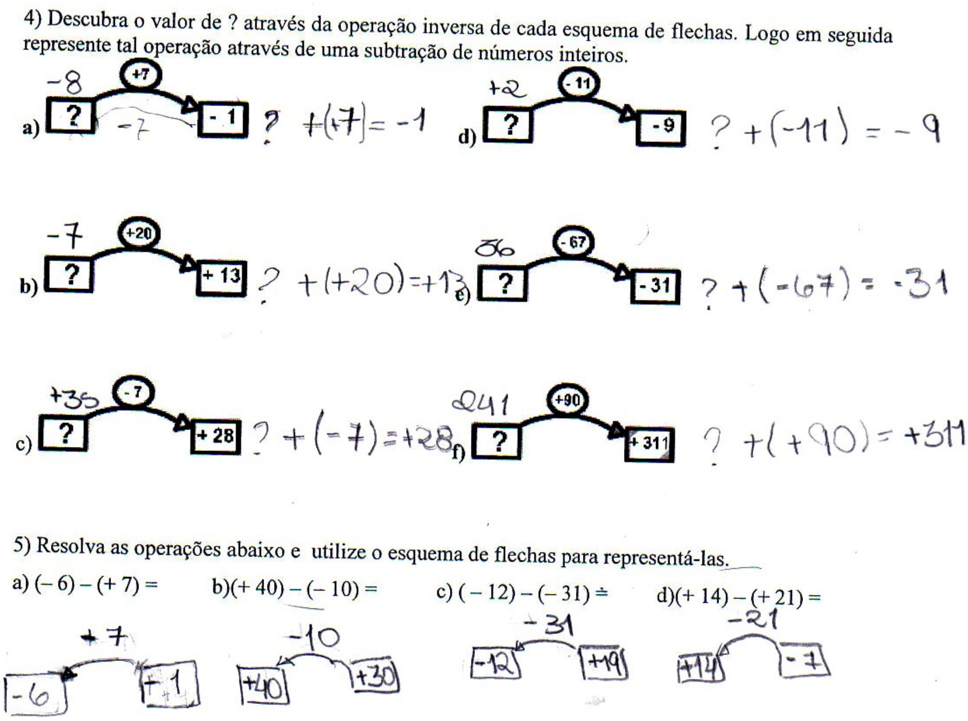


FIGURA 085: Estudante JP resolvendo a subtração

Na segunda atividade, JP resolveu as operações; ao analisar os esquemas, perguntei a ele como havia resolvido: ele disse que fez o esquema inverso, pois "*a subtração é o inverso adição"*. Repare que o esquema apresentado por ele é equivalente ao modelo apresentado por nós, tanto é que na Figura 86 abaixo a elipse indica a resposta correta para as operações.

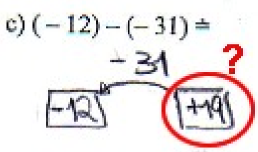
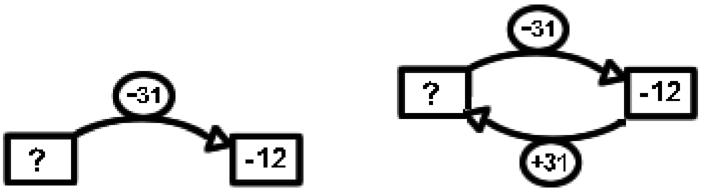


FIGURA 086: Detalhe das respostas do estudante JP

O que o JP não percebeu é que ele não utilizou o esquema inverso, apenas inverteu o sentido do esquema, mas não as relações envolvidas, como mostra a Figura 87A abaixo.

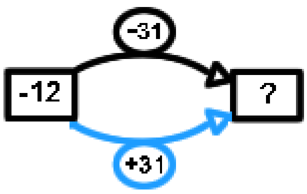


A B

FIGURA 087: Relação direta e inversa no esquema de flechas

Na verdade, nesse sentido o JP continuou a trabalhar com a resolução de uma adição de números positivos e negativos ao invés da subtração, pois a representação da operação inversa está representada na Figura 87B.

Diante dessa situação, nos questionamos: Será que essa confusão não foi causada pela forma como apresentamos nossa proposta? Pensando nisso, sugerimos a seguinte alternativa: Pela nossa interpretação, a expressão (– 12) – (– 31) = ? indica que o – 12 deve sofrer uma transformação ao contrário de – 31, ou seja, sofrer a transformação +13. Portanto a subtração deveria ser representada da forma como está indicada na figura abaixo.



Por enquanto não sabemos se esta é a maneira mais adequada, porém é mais uma alternativa que precisa ser testada.

Salientamos que estamos analisando as respostas dos estudantes que adotaram um modelo de representação sugerido por nós; no entanto isso não significa que eles o tenham aceitado sem hesitar. A estudante GP, por exemplo, durante essa aula, veio me dizer que essas contas não eram lógicas, que não fazia sentido; sendo assim pedi a ela que me explicasse o que não fazia sentido para ela. Veja seu exemplo abaixo:

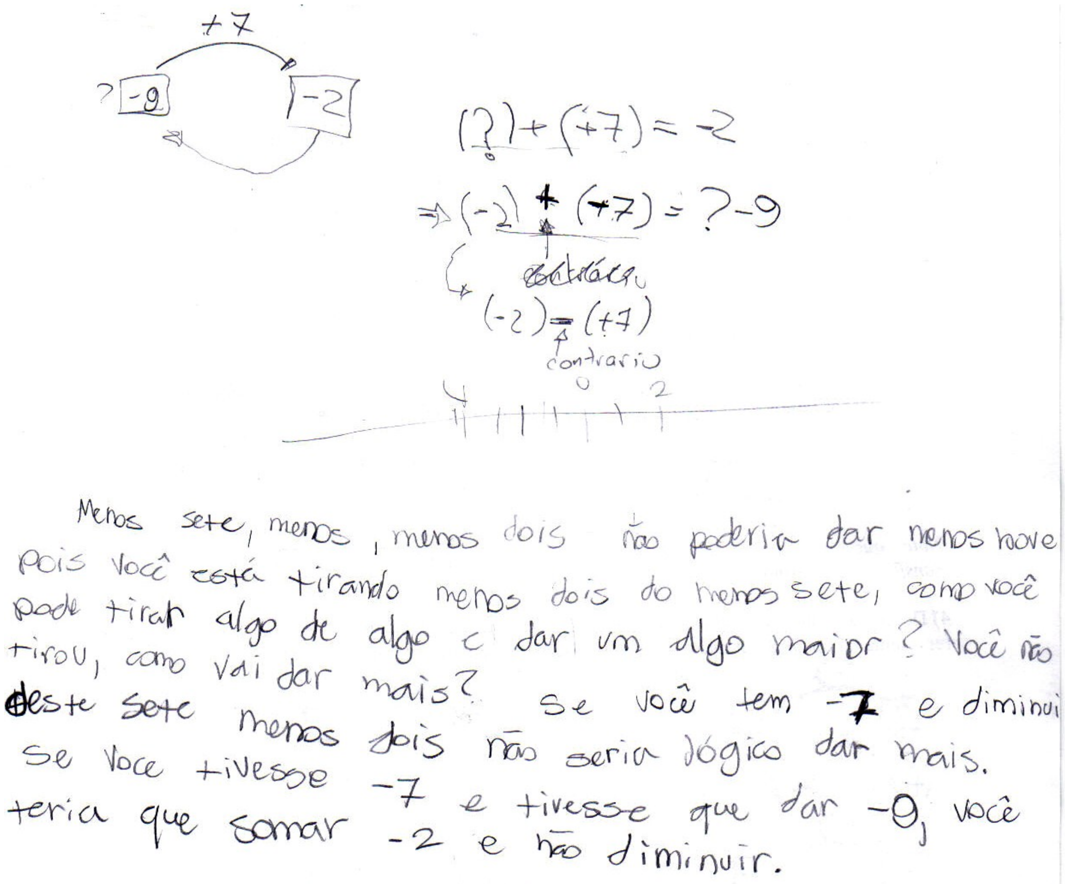


FIGURA 088: Argumentação da estudante GP

Não tenho certeza se esse exemplo foi copiado do quadro ou se ela mesma o criou, no entanto podemos identificar que o significado de que *subtrair é tirar* (é ficar menor) está atrapalhando GP. Ainda identificamos outros dois fatores que podem estar contribuindo para tal conflito: a *relação de ordem* (ao negar que -9<-7) ou não está fazendo a diferenciação entre *valores absolutos x valores relativos*?

Infelizmente esse foi o nosso último encontro, portanto não tivemos a oportunidade de desenvolver ainda mais a nossa proposta e, principalmente, obter mais dados para investigar as estratégias utilizadas pelos estudantes. No entanto, de acordo com os registros analisados, parece que a subtração foi explorada precocemente e que os estudantes tinham dúvidas em relação a conceitos anteriores.

Por outro lado temos consciência de que a instabilidade apresentada pelos estudantes ao realizar as operações com números positivos e negativos não é uma exclusividade da nossa pesquisa – além do exemplo histórico da gênese do conjunto dos números positivos e negativos e da nossa própria experiência profissional – no artigo *A Dualidade do Zero na*

Transição da Arimética Para a Álgebra (apresentado na seção 2.1.1), Hernandez & Gallardo também indicam que *" os obstáculos persistem nas operações que envolvem os negativos e que: inibem a operação de subtração e uma noção mais ampla de número, já que as raízes negativas não foram aceitas"* (p. 23, 2006). Diante desses fatos e do desafio que assumimos, resta-nos buscar novas alternativas para implementar os ODAs para que contribuam de forma mais eficaz nesse processo de desenvolvimento.

5.4 ATIVIDADES DO CAMPO MULTIPLICATIVO

Como já mencionamos, tanto o ODA quanto as atividades sobre o campo multiplicativo foram aplicadas no primeiro semestre de 2010 com 16 estudantes de uma turma da 6º série do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada do município de Guaíba/RS. O *Fórmula (–1)*: Campo Multiplicativo não fez parte da primeira coleta de dados, pois não ficou pronto a tempo; além disso novas fases foram desenvolvidas o ano de 2009. Como em 2010, casualmente, eu estava lecionando numa turma de 6º série, resolvi apresentar aqui algumas atividades que realizamos. Abaixo apresentamos os dados obtidos na realização da proposta.

5.4.1 Aplicação do Fórmula (–1): Campo Multiplicativo

O primeiro contato que os estudantes tiveram com os problemas do Campo Multiplicativo envolvendo números negativos, foi direto no ODA *Fórmula (–1)*. A primeira atividade que eles deveriam realizar era justamente aprender sozinhos como se jogava tal jogo. Nossa intenção era observar a forma como eles iriam interagir com o objeto virtual e analisar os aspectos positivos ou negativos do *layout* do ODA.

Durante a realização da atividade observamos que os estudantes não tiveram dificuldade em identificar qual era o problema proposto; imaginamos que isso se deveu ao fato de estarem acostumados com as fases anteriores do jogo. Além disso, observamos que eles perceberam com facilidade de que se tratava de problemas do campo multiplicativo, manifestando tal conclusão com frases do tipo: *"Mas esse jogo é sobre multiplicação!"*. Ao ser questionado sobre tal afirmação o estudante argumentou: *"se a pulga anda 3 posições por pulo, basta multiplicar por 2 que vai dar onde ela vai parar, mas onde eu coloco a resposta?"*

A partir dessa fala observamos que o layout do jogo não é intuitivo, a presença da tabela, num primeiro momento, causou estranheza aos estudantes e isso influenciou na identificação do local onde a resposta deveria ser digitada. Nossa intervenção era indicar a exploração do botão AJUDA, para esclarecer as demais dúvidas sobre as regras do jogo. A maioria dos estudantes entendeu as regras do jogo lendo as instruções e os exemplos presentes no botão, sem recorrer ao auxílio do professor.

Quanto à utilização das tabelas, ao analisarmos as mensagens que os estudantes enviaram durante a realização da segunda atividade, vemos que a maioria não sentiu a necessidade de utilizá-las na representação da resolução ou para explicar como essa fase do *Fórmula (–1)* funciona. Abaixo apresentamos a mensagem apresentada por BL.

> *" BL e LI jogavam o jogo das pulgas. BL era o Verde e LI o laranja. Ainda não sabíamos o que fazer, logo depois descobrimos. Na tabela estava:4x-5,mas não entendemos. Daí,eu descobri que, multiplicando os dois,dava alguma resposta (destino no qual a pulga deveria ir). Então,tiramos o menos para facilitar a conta...Colocamos o menos na resposta da conta e deu certo,DESCOBRÍMOS O JEITO CERTO!!!!"*

QUADRO 05: E-mail enviado por BL

É interessante observar que na tabela não há a expressão numérica 4 x (– 5), essa conclusão, já representa uma operação mental realizada pelo estudante a partir da resolução do problema apresentado ou pela leitura e interpretação da tabela presente no ODA. Já que a tabela apresentada no jogo era algo do tipo:

Nº de Pulos	**Posição**
1	*– 5*
4	***?***

Tabela 8: Exemplo de tabela apresentada no ODA Fórmula (-1)

Ainda podemos constatar que BL determina a posição final através de duas ações distintas: primeiro realiza o cálculo aritmético e depois define qual o sinal da resposta. Note que isso é feito intencionalmente, sob a justificativa de que isso simplifica os cálculos:

“*Então, tiramos o menos para facilitar a conta”.* Embora sejam duas ações distintas, será que já podemos dizer que ele realiza a coordenação entre dois sistema simbólicos: da operação e do números com sinal? Supomos que isso já indica uma coordenação dos sistemas simbólicos.

Além de BL, podemos observar outros estudantes que não fizeram o uso das tabelas, como é o caso da estudante AS

o jogo é assim, o computador diz um numero que a pulga anda por pulo
exemplo
pulga verde anda (3) por pulo
5 X 3 = 15
_0__1_2_3_4_5_6_7_8_9_10_11_12_13_14_15
a pulga amarela anda (-2) por pulo
1 x -2 = -2
___-5__-4_-3_-2_-1_0_________
”

QUADRO 06: E-mail enviado por AS

Pelo que pudemos observar durante a interação de AS com o jogo, para ela são essenciais duas características fundamentais para se jogar o *Fórmula (–1)*: o invariante conceitual (presente nos problemas do campo multiplicativo) e a reta numérica. Tanto é que ela não menciona que a pulga deve “dar cinco pulos”, e sim que ela movimenta-se 3 posições por pulo e representa o resultado final através da reta numérica. A tabela também não era relevante, apenas servia como o local onde se devia colocar a resposta a ser testada, AS não a via como uma outra forma de representação do problema. Além disso, salientamos que, ao contrário de BL, ela não exclui o sinal do número para facilitar as contas (ou apenas não menciona).

Outro fato que nos chamou a atenção é que este foi o primeiro contato dos estudantes com problemas do campo multiplicativo utilizando números negativos e isso não se mostrou um empecilho, mesmo quando o invariante conceitual era negativo. Até então todos os estudantes utilizaram a representação do tipo $(+a)\ .\ (-\ b)\ \ para\ \ a,b \in \mathbb{N},$ como podemos notar na mensagem do estudante MP.

O jogo se baseia em operações matemáticas simples,o numero que cai,vezes o numero de pulos,Por exemplo:

-9 casas em 6 pulos, 6 x -9 = -54

Assim é o jogo todo,até chegar a 100 casas andadas,o jogo é bom para pensar e raciocinar usando matemática.

QUADRO 07: E-mail enviado por MP

Acreditamos que esse é um dos benefícios da nossa proposta, já que foi a utilização da reta numérica como ferramenta de cálculo que possibilitou aos estudantes estabelecerem tal significado físico para a operação.

Abaixo apresentamos a mensagem do estudante FR, que foi o único a fazer uso de tabelas para explicar as regras do jogo.

Explique com as suas palavras como funciona o jogo dando exemplos:

O jogo é com a multiplicação de números negativos. exemplo

Numero de pulos	*Casas que pulou*
1	*-20*
4	*?*

Daí se usa um tipo diferente de regra dos 3.

1=20

4=?

4x20=80 então:

Numero de pulos	*Casas que pulou*
1	*-20*
4	*-80*

QUADRO 08: E-mail enviado por FR

Por algum motivo FR estabelece uma relação entre a utilização da tabela com o raciocínio proporcional, e acreditamos que é justamente esse fato que permite a utilização das tabelas como forma de representação. Novamente temos a impressão de que a nossa proposta auxilia no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo dos nossos estudantes. Já que essa diversidade de experiências estão contribuindo para que (as crianças) atribuam diferentes sentidos e significados para os diferentes sistemas simbólicos.

Também vale ressaltar que, assim como BS, FR desconsidera o sinal para realizar o cálculo, mas acrescenta-o na resposta final.

A partir dessa interação com o *Fórmula (–1)*, pensamos em realizar a seguinte implementação para o ODA: muitas vezes os estudantes não observaram que a pulga havia se movimentado, portanto não identificavam se haviam acertado a conta ou não. Uma solução interessante é criar uma animação que simule o número de saltos realizados pelas pulgas durante a verificação da resposta colocada pelo jogador. No momento as pulas ficam saltando apenas para indicar de quem é a vez de jogar.

5.4.2 Problemas do Campo Multiplicativo envolvendo as grandezas tempo x posição

Nesta seção, apresentamos as estratégias utilizadas por alguns estudantes que de alguma maneira representam aquilo que conseguimos observar nesse grupo de estudantes. No capítulo anterior, afirmamos que tínhamos dois aspectos gerais para observar ao aplicarmos tais atividades. Primeiro, queríamos explorar problemas que envolvessem grandezas intensivas como tempo x posição. Segundo, verificar se após a utilização do *Fórmula (–1)* os estudantes utilizariam tabelas como forma de representar a relação envolvida nesse tipo de problema.

Todavia, após a análise dos dados obtidos com o desenvolvimento da atividade anterior, qualquer esperança que tínhamos de utilização de tabelas foi por terra. Durante a realização dos problemas envolvendo *tempo x posição* nenhum estudante utilizou tabelas na resolução dos problemas. Sendo assim, sentimos a necessidade de desenvolver outras atividades que promovessem sua utilização e os benefícios almejados pela nossa proposta.

Por outro lado, a aplicação da atividade permitiu que analisássemos as estratégias utilizadas pelos estudantes quando se depararam com tais situações-problemas.

Podemos identificar uma ação assimilativa em alguns estudantes, ou seja, modificam o objeto de acordo com seus esquemas mentais; apresentamos um exemplo na Figura 89 abaixo.

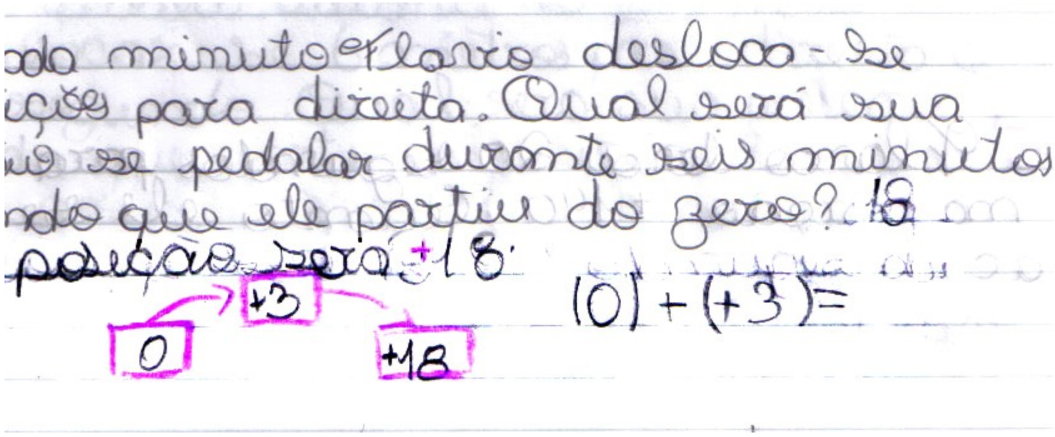


FIGURA 089: Estudante AD utiliza esquema de flechas com incoerência

AD resolve corretamente o problema realizando a multiplicação, mas atrapalha-se ao representar a solução através do esquema de flechas. Note que ela segue o modelo aprendido nas atividades anteriores: colocando corretamente os valores da posição inicial, da transformação e da posição final. Porém ela percebe que algo está incoerente, já que "*0 x (+3) ≠ 18*" e na dúvida escreve na forma de soma "*0 + (+3) =* ___" No entanto AD resolve esse impasse ao resolver as questões seguintes, construindo esquemas de flechas coerentes.

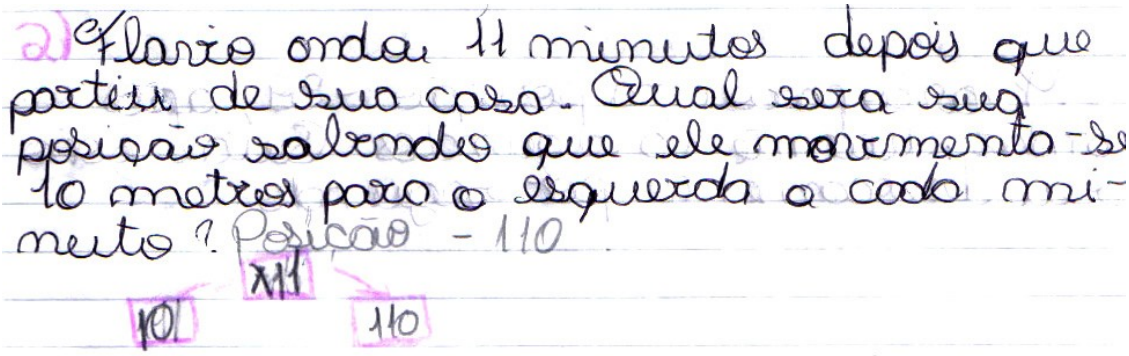


FIGURA 090: Estudante AD utiliza esquema de flechas com coerência

Observe que ela faz a seguinte adaptação: no primeiro espaço coloca o valor da relação invariante e na transformação o tempo transcorrido e, por fim, a posição final. Além disso, podemos identificar dois aspectos: primeiro ela utiliza o esquema de flecha no lugar do algoritmo, segundo também "tira o sinal de menos para facilitar a conta".

Nas questões de 03 a 07 AD resolve corretamente apresentando apenas a resposta final. Porém nos problemas 08 e 09 a estudante parece confundir-se novamente – vale lembrar que estes são os problemas mais difíceis, pois envolvem a combinação entre o raciocínio aditivo e multiplicativo – já que resolve os problemas parcialmente.

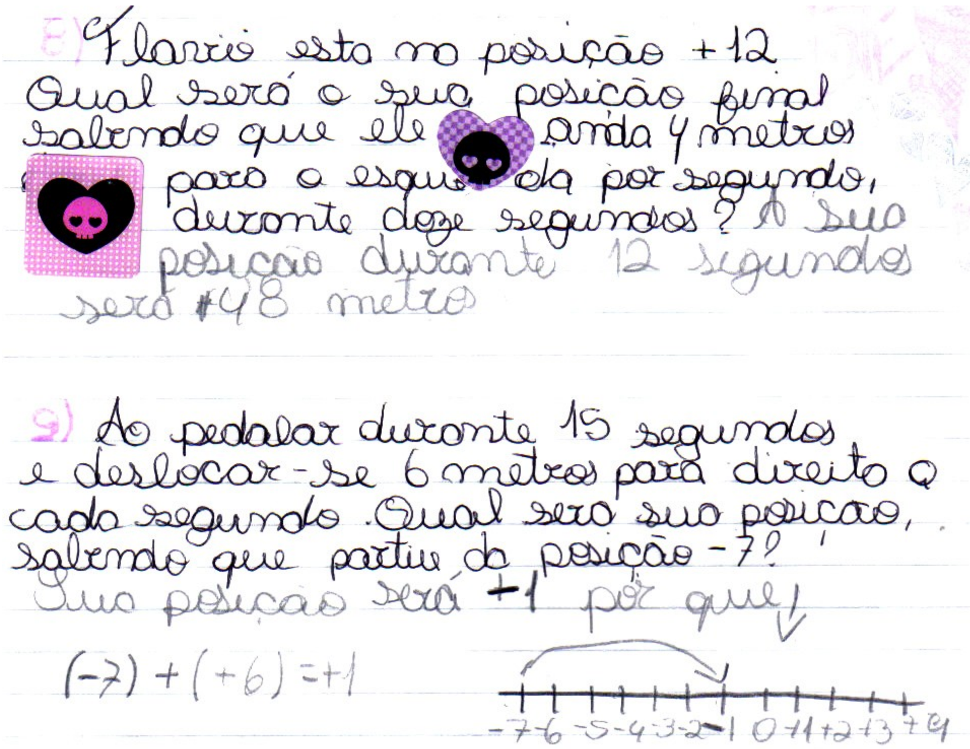


FIGURA 091: Estudante AD utiliza diferentes sistemas simbólicos

A estudante o classifica o problema 08 como sendo do campo multiplicativo e não identifica que também era necessário realizar uma adição, já que Flávio não parte do zero. No problema seguinte acontece o inverso: ela não reconhece que 6 é o invariante conceitual do problema e o classifica como sendo um problema do campo aditivo. É interessante observar que tal interpretação a conduz a uma representação distante da correta.

A partir desses dados, podemos identificar que a estudante procura realizar a coordenação entre os diferentes sistemas simbólicos que tenha entrado em contato (esquema de flechas, expressão numérica, números com sinais, reta numérica). No entanto tal coordenação não se realiza de forma eficaz, pois a estudante demonstra uma certa indiferenciação entre os tipos de operações aritméticas envolvidas em cada situação problema.

Tal fato fica evidente quando analisamos o problema criado por AD, veja figura baixo:

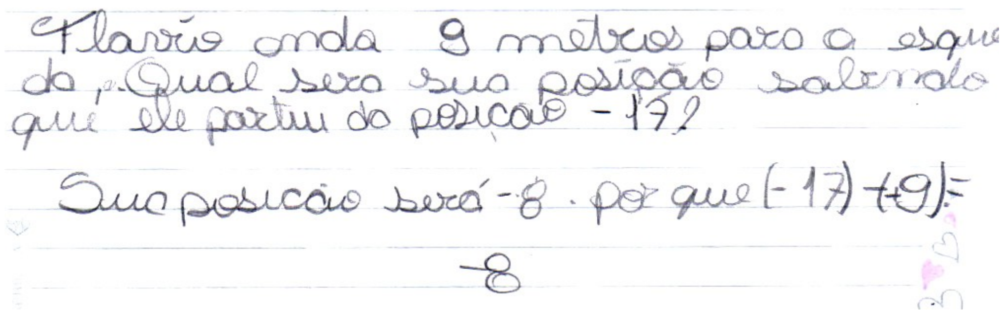
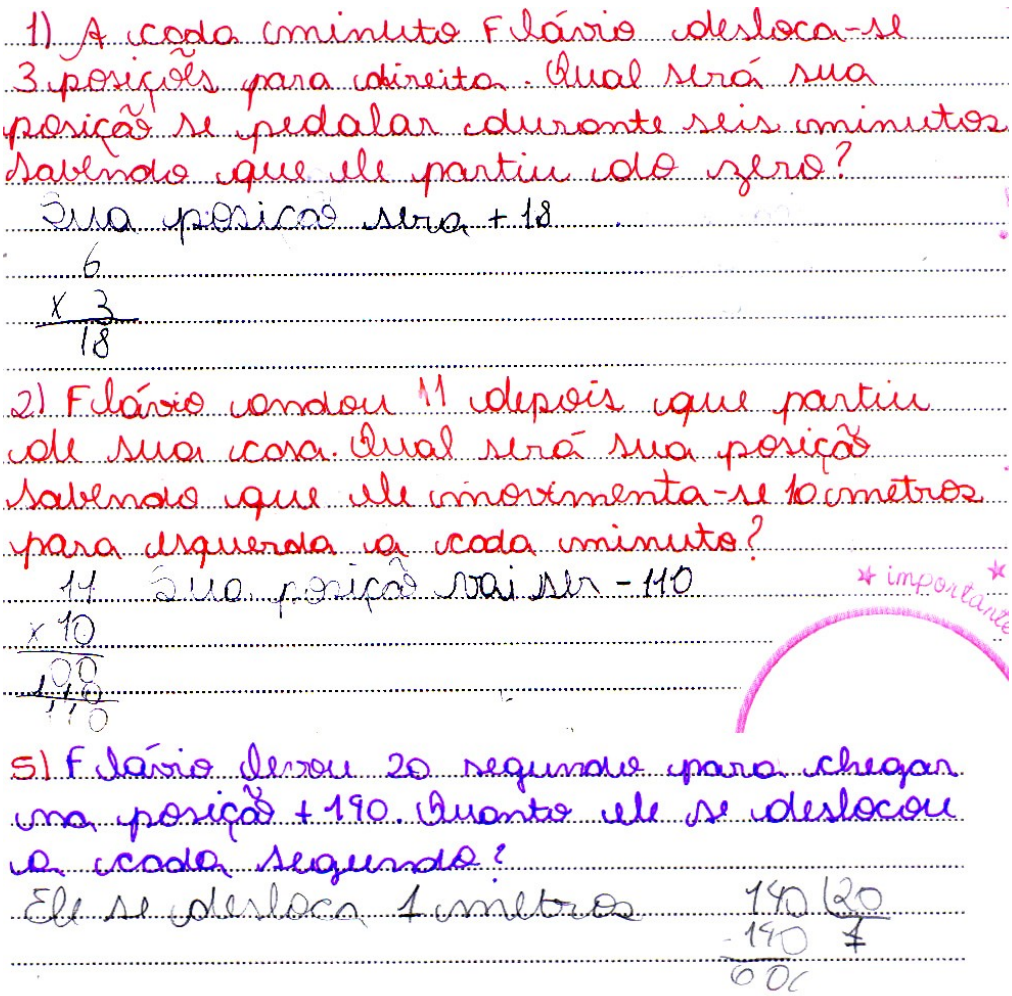

Flavio anda 9 metros para a esque
da ,. Qual sera sua posição sabendo
que ele partiu da posição - 17?
Sua posição será -8 . por que (-17)+(+9)=
-8

FIGURA 092: Solução do problema 08 da estudante AD

Observe que a estudante cria um problema do campo aditivo, logo após ter resolvido diferentes problemas do campo multiplicativo. Talvez ela tenha sido influenciada pelos dois últimos problemas.

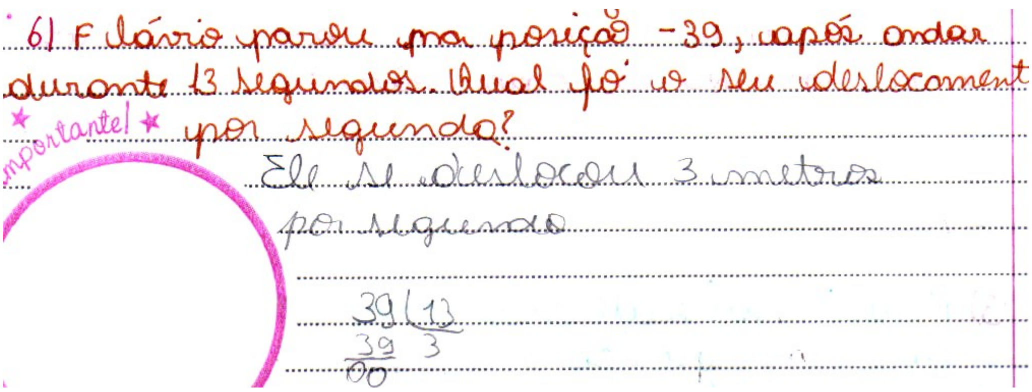
Ao contrário de AD, a estudante AS utiliza apenas o algoritmo da multiplicação e divisão para representar a solução dos problemas. Ela utiliza a operação adequada nas situações de 01 a 06 e no problema 08. No entanto não realizou os problemas 07 e 09. Assim como a maioria dos estudantes, AS coloca o sinal apenas na resposta final; como podemos observar nas Figuras 93 abaixo.


1) A cada minuto Flávio desloca-se 3 posições para direita. Qual será sua posição se pedalar durante seis minutos sabendo que ele partiu do zero?
Sua posição será +18
6
x 3
18
2) Flávio andou 11 depois que partiu de sua casa. Qual será sua posição sabendo que ele movimenta-se 10 metros para esquerda a cada minuto?
11 Sua posição vai ser -110
x 10
00
110
110

5) Flávio levou 20 segundos para chegar na posição +190. Quanto ele se deslocou a cada segundo?
Ele se desloca 1 metros
140 | 20
-140 7
00

FIGURA 093: Resoluções apresentadas pela estudante AS

Embora AS tenha resolvido a maior parte dos problemas corretamente, podemos identificar sua dificuldade para definir o invariante conceitual negativo presente nos problemas.


6) Flávio parou na posição -39, após andar durante 13 segundos. Qual foi o seu deslocament por segundo?

Ele se deslocou 3 metros por segundo
39 | 13
39 3
00

FIGURA 094: Resolução apresentada pela estudante AS

Identificamos a intervenção de dois aspectos que podem justificar tal dificuldade: primeiro o fato de tais problemas envolverem uma relação funcional (*posição por segundo*) e que segundo Vergnaud situa-se num nível conceitual muito elaborado (p. 210, 1991), segundo a presença de números negativos no invariante conceitual é mais um fator de complexidade. Também podemos observar tal fato no problema criado por AS

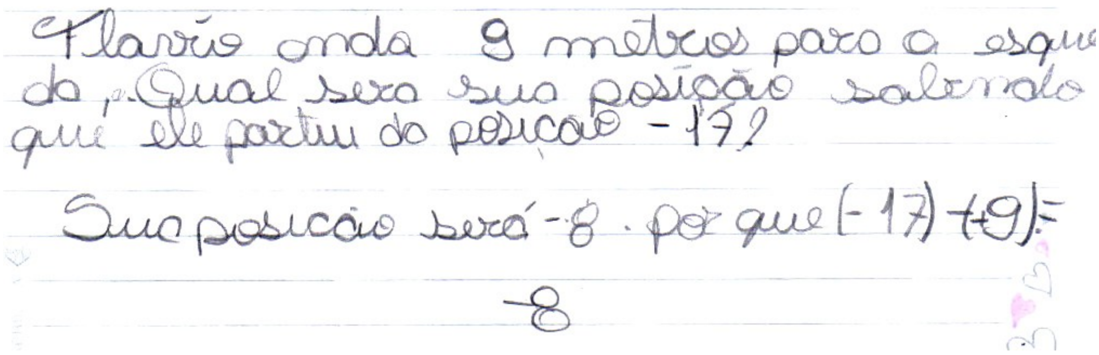


FIGURA 095: Dificuldade com invariante conceitual negativo - estudante AS

Pela resolução apresentada, podemos concluir que o problema idealizado por ela seria *"Luciana está na posição zero, ela se desloca 3 metros para direita por minuto, qual será sua posição após 5 minutos?"*.

O problema 04 envolve o raciocínio de ao contrário – que na nossa concepção seria um exemplo físico para a multiplicação do tipo *(-a) x (b) = c* – no entanto, mesmo após explorar a segunda fase do jogo das pulgas, a estudante AS não sente a necessidade de utilizar tal representação, veja na Figura 96 abaixo.

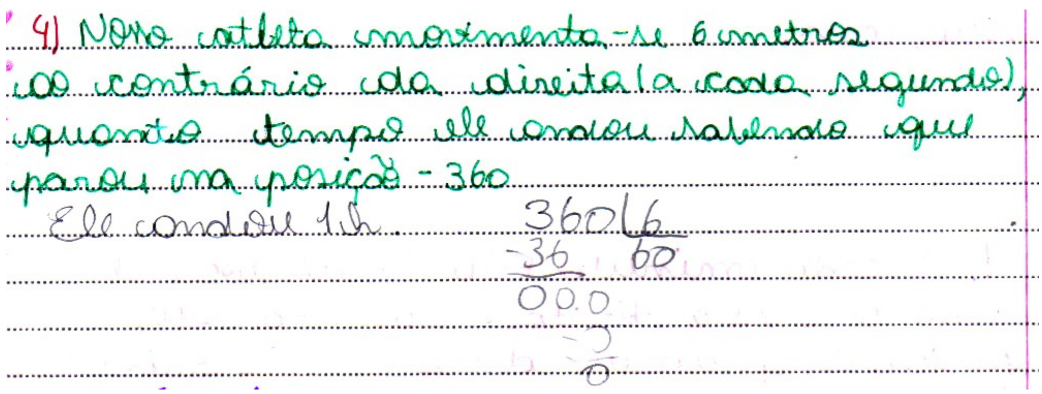


FIGURA 096: Resolução apresentada pela estudante AS

Ao ser questionada sobre tal fato, ela alegou que isso não importava já que a pergunta "*é sobre o tempo e não pra que lado ele anda*".

Ao refletir um pouco sobre essa afirmação, vimos que a estudante tinha razão, que a palavra ao contrário iria influenciar apenas no segundo termo do produto. Por exemplo:

a) Partindo do zero, Lucas anda 5 posições para a direita a cada minuto, qual será sua posição após 7 minutos?

Solução: $7 \times (+5) = 35$

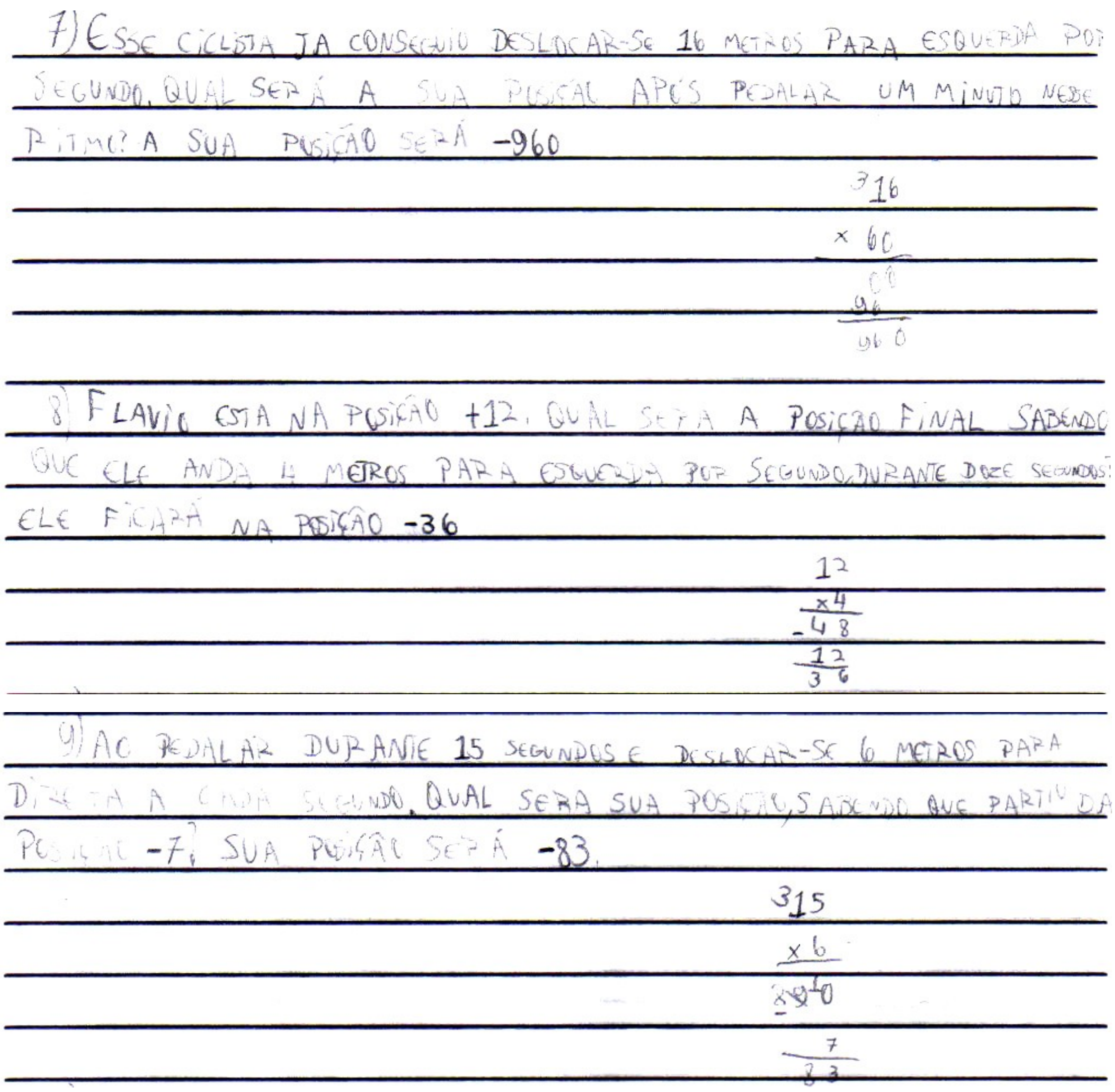
b) Partindo do zero, Lucas anda 5 posições ***ao contrário*** *da direita a cada minuto, qual será sua posição após 7 minutos?*

Neste caso, para a criança faz mais sentido representar a solução por: $7 \times (-5) = -35$ do que $(-7) \times (+5) = -35$.

Para o adulto alfabetizado em matemática, sabe-se que a prova da equivalência dessas expressões se dá pela propriedade comutativa da multiplicação e não pelo significado físico apresentado no problema. Depois disso, a ideia de "*ao contrário de"* para a multiplicação envolvendo a grandeza tempo, nos pareceu artificial demais para as crianças, porque "*– 7 minutos"* não admite tal significado. Afinal de contas, para tempo negativo atribuímos o significado de fatos ocorridos antes de um marco inicial de tempo, as expressões AC e DC da era Cristã são os melhores exemplos para tal significado. Dessa forma, percebemos que deveríamos propor problemas explorando tal significado para tempo negativo. Tais problemas foram desenvolvidos e estão inseridos no material 10, cujo dados serão analisados na próxima seção.

Gostaríamos de ressaltar que na nossa avaliação não foi preciso realizar alterações no *Fórmula (–1)*, como não há significado físico para "*– n pulos"*, o contexto virtual e simbólico presente no ODA, nos permite atribuir o significado "*ao contrário de*" para "pulo negativo". Embora artificial, ainda assim acreditamos que essa estratégia promove o desenvolvimento de raciocínio multiplicativo.

Dos dezesseis sujeitos da turma, apenas FR acertou todos os problemas propostos, justamente o estudante que, na atividade anterior, estabeleceu relação entre a utilização das tabelas e a proporcionalidade. Assim como seus colegas, FR utilizou apenas o algoritmo da multiplicação e da divisão para representar os cálculos, excluindo o sinal do número e incorporando-o na resposta final. Abaixo apresentaremos a resolução, apresentada por ele, para as situações-problema de 07 a 09.


7) ESSE CICLISTA JA CONSEGUIO DESLOCAR-SE 16 METROS PARA ESQUERDA POR SEGUNDO, QUAL SERÁ A SUA POSIÇÃO APÓS PEDALAR UM MINUTO NESSE RITMO? A SUA POSIÇÃO SERÁ -960

16
× 60
00
96
960

8) FLAVIO ESTA NA POSIÇÃO +12, QUAL SERÁ A POSIÇÃO FINAL SABENDO QUE ELE ANDA 4 METROS PARA ESQUERDA POR SEGUNDO, DURANTE DOZE SEGUNDOS? ELE FICARÁ NA POSIÇÃO -36

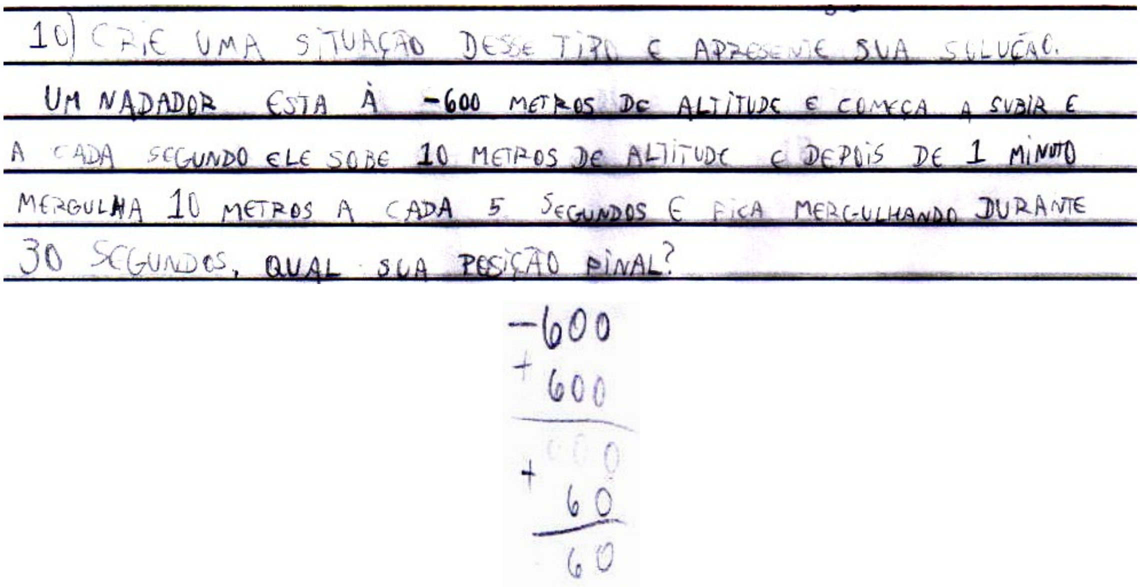
12
×4
-48
12
36

9) AO PEDALAR DURANTE 15 SEGUNDOS E DESLOCAR-SE 6 METROS PARA DIREITA A CADA SEGUNDO, QUAL SERÁ SUA POSIÇÃO, SABENDO QUE PARTIU DA POSIÇÃO -7? SUA POSIÇÃO SERÁ -83.

15
× 6
90
7
83

FIGURA 097: Questões 07 a 09 apresentada pelo estudante FR

A forma sintética de utilizar o algoritmo é o fato que chamou nossa atenção, observe que FR aproveita a resultado obtido no algoritmo da multiplicação para depois realizar a subtração. Dessa forma ele representa a composição das operações. Ao observá-lo, durante a realização da atividade, o estudante prevê as operações que deve realizar: Na questão 08 ele primeiro percebeu que Flávio não parte do zero e expressa isso através da seguinte fala: “*Mas ele não parte do zero!”* e pergunta para si *“Como é que eu faço?*”. Após pensar um pouco, me pergunta: *“Sôr, primeiro faço a multiplicação e depois tiro os doze, né?”,* ao questioná-lo sobre por que ele deveria descontar o doze, o estudante afirma *“por que ele anda para a* *esquerda e parte do mais doze”*. No problema seguinte ele realiza diretamente, sem a necessidade de conversar sobre o problema.


10) CRIE UMA SITUAÇÃO DESSE TIPO E APRESENTE SUA SOLUÇÃO.
UM NADADOR ESTA À -600 METROS DE ALTITUDE E COMEÇA A SUBIR E A CADA SEGUNDO ELE SOBE 10 METROS DE ALTITUDE E DEPOIS DE 1 MINUTO MERGULHA 10 METROS A CADA 5 SEGUNDOS E FICA MERGULHANDO DURANTE 30 SEGUNDOS, QUAL SUA POSIÇÃO FINAL?

$$\begin{array}{r} -600 \\ +\ 600 \\ \hline 000 \\ +\ \ 60 \\ \hline 60 \end{array}$$

FIGURA 098: Questão elaborada pelo estudante FR

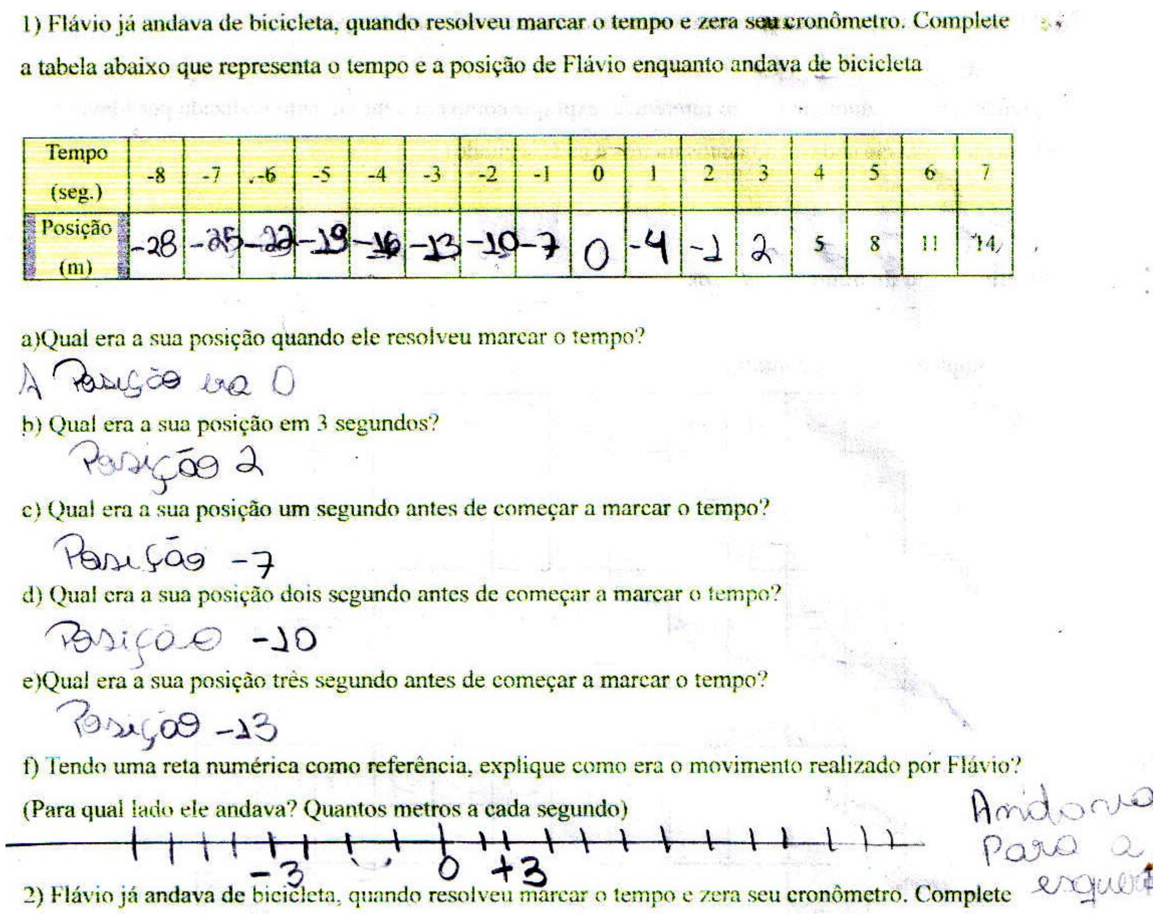
Podemos observar que FR se empenha em criar um problema complexo do campo multiplicativo, composto de duas partes. Na primeira etapa o mergulhador não parte do zero, mas ao deslocar-se chega até o nível do mar. Logo em seguida, na tentativa de confundir o leitor ele diz que o nadador mergulha 10 metros a cada 5 segundos. FR diz que fez um “*pega ratão*” já que “*na verdade o nadador se desloca 2 metros por segundo*”. Na sua resolução o estudante não se preocupa em demonstrar as multiplicação envolvidas, apenas o deslocamento total, de 600 metros e de - 60metros.

De um modo geral, pudemos identificar que a maioria dos estudantes identificaram que os problemas envolviam operações de multiplicação ou divisão e realizaram os cálculos corretamente; no entanto cometem alguns erros quando envolvem números negativos. Tal fato é compreensível, pois se trata de seus primeiros contatos com esse tipo de operação no campo multiplicativo.

Também tivemos a oportunidade de constatar que os estudantes tiveram grandes dificuldades para resolver os problemas do GRUPO 6, confirmando os resultados apresentados por Vergnaud. Nossos dados nos levam a crer que a grande dificuldade está na diferenciação e na composição dos raciocínio aditivo e multiplicativo. Além disso os problemas apresentados na nossa proposta, são mais complexos que aqueles utilizados por Vergnaud, já que envolvem mais um sistema simbólico em função dos números negativos. Ainda sobre isso, talvez os estudantes resolveriam com sucesso, se tais problemas envolvessem apenas números positivos. Infelizmente não realizamos problemas desse tipo para confirmar tal avaliação.

5.4.3 Utilizando tabelas para compreender o significado de tempo negativo.

Retomando, analisaremos dados fornecidos pelos estudantes ao resolver as atividades do Material 10 apresentado na seção 4.6.10. Tais atividades exploram a utilização de tabelas na resolução de problemas que exploram o significado para "tempo negativo" com objetivo de desenvolver o raciocínio multiplicativo em problemas com números positivos e negativos. Abaixo analisaremos as respostas fornecidas pelo estudante BL ao resolver as atividades do material 10.


1) Flávio já andava de bicicleta, quando resolveu marcar o tempo e zera seu cronômetro. Complete a tabela abaixo que representa o tempo e a posição de Flávio enquanto andava de bicicleta

Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)	-28	-25	-22	-19	-16	-13	-10	-7	0	-4	-1	2	5	8	11	14

a)Qual era a sua posição quando ele resolveu marcar o tempo?

A Posição era 0

b) Qual era a sua posição em 3 segundos?

Posição 2

c) Qual era a sua posição um segundo antes de começar a marcar o tempo?

Posição -7

d) Qual era a sua posição dois segundo antes de começar a marcar o tempo?

Posição -10

e)Qual era a sua posição três segundo antes de começar a marcar o tempo?

Posição -13

f) Tendo uma reta numérica como referência, explique como era o movimento realizado por Flávio? (Para qual lado ele andava? Quantos metros a cada segundo)

-3 0 +3

Andava Para a esquerd

2) Flávio já andava de bicicleta, quando resolveu marcar o tempo e zera seu cronômetro. Complete

FIGURA 099: Resolução do material 10 - estudante BL

O estudante BL percebeu com facilidade que Flávio deslocava-se de três em três posições a cada segundo e concluiu que se tratava da tabuada do três. Sendo assim completou a parte positiva com facilidade e perguntou-me. "*não entendi, quando ele começou a marcar o tempo?*" Com o objetivo de que ele entendesse o que estava sendo perguntado, expliquei "*Flávio está andando de bicicleta com a mesma velocidade, num determinado momento ele zera o cronômetro e começa a marcar a sua posição, sabendo disso, te pergunto: qual era a sua posição nesse momento?*" Olhando para a tabela ele responde: "*é – 8*" (referindo-se ao primeiro valor da tabela). Então disse que aqueles valores não se referiam ao momento que Flávio havia começado a medir as posições, mas eram uma parte da tabela preenchida pelo ciclista. Essa segunda explicação foi suficiente para que BL entendesse o problema proposto. E em pouco tempo concluiu que a posição era zero, pois, segundo ele, se tratava da tabuada do três e 3x0=0. Dessa forma ele não acerta as demais perguntas sobre a tabela.

Nesse momento identificamos um equívoco no material 10, percebemos que esse problema não poderia ser o primeiro a ser apresentado aos estudantes. Como a posição inicial de Flávio é diferente de zero, sua resolução necessita da composição de duas operações diferentes, portanto o nível de complexidade desse problema é bastante alto. Abaixo apresentamos nossa sugestão de modificação:

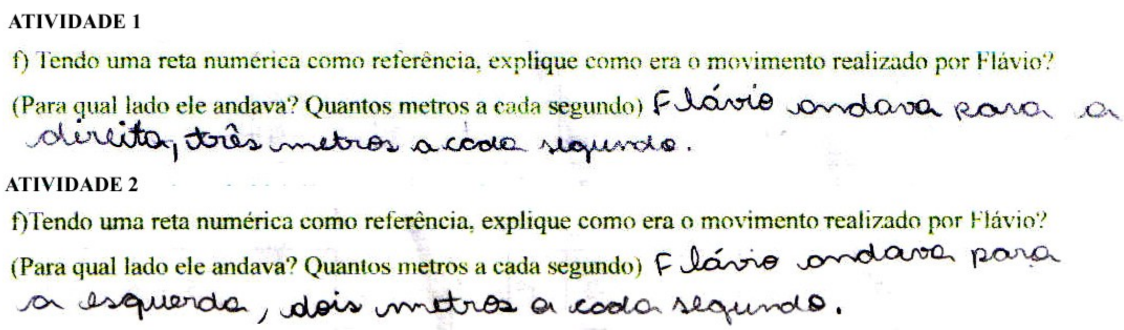
Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)													12	15	18	21

Ao ler a tabela, a primeira reação de BL foi dizer que não existe tempo negativo, mas após uma discussão sobre o assunto concordou que podíamos entender como um segundo antes de ter começado a marcar o tempo (citando o exemplo AC e DC). Sendo assim, completou a parte negativa da tabela diminuindo de três em três. O fato curioso é que ele não partiu do zero, mas a partir da posição registrada no instante de *+1* segundo.

BL acerta todos os itens da segunda atividade, isso indica que a primeira atividade era realmente inadequada, visto que o estudante não demonstra dificuldade ao resolver o problema, quando a posição inicial é zero.

Ao analisarmos o item f dos dois problemas, podemos identificar que, para BL e para a maioria dos estudantes, Flávio realiza dois movimentos distintos: movimenta-se para a direita no intervalo de tempo negativo e para a esquerda, no positivo. Eles não "percebiam" o deslocamento como um movimento contínuo e num único sentido (da direita para a esquerda). Mesmo que essa interpretação não corresponda ao fenômeno físico, ela foi suficiente para que os estudantes desenvolvessem estratégias corretas para as operações envolvidas.

Em contrapartida, a estudante AS apresenta a hipótese de que Flávio realizava um movimento único, como podemos observar na Figura 101 abaixo:


ATIVIDADE 1

f) Tendo uma reta numérica como referência, explique como era o movimento realizado por Flávio? (Para qual lado ele andava? Quantos metros a cada segundo) Flávio andava para a direita, três metros a cada segundo.

ATIVIDADE 2

f)Tendo uma reta numérica como referência, explique como era o movimento realizado por Flávio? (Para qual lado ele andava? Quantos metros a cada segundo) Flávio andava para a esquerda, dois metros a cada segundo.

FIGURA 101: Resolução do material 10 - estudante AS

Ao receber a atividade a estudante afirma que "*não havia entendido nada*", sendo assim minha intervenção foi explicar a organização de uma tabela e dizer que ela precisava completá-la a partir da interpretação dos dados fornecidos. Isso foi o suficiente para que AS resolvesse os problemas. A estudante utilizou a reta numérica para entender o movimento realizado pelo personagem do problema e afirmou que era parecido com o jogo das pulgas. Assim como os demais, ela completou as tabelas diminuindo de três em três (na atividade 01) e aumentando de dois em dois (na atividade 02), como podemos ver na Figura 102 abaixo. Porém AS vai um pouco além, após completar a tabela, AS simula o movimento na reta numérica com o objetivo de confirmar suas respostas.

Sendo assim podemos afirmar que ao utilizar duas estratégias para resolver a situação-problema – a utilização da relação vertical citada por Vergnaud a representação física do problema através da reta numérica – AS está estabelecendo a equivalência entre os dois sistemas simbólicos e, de certa forma, coordenando-os. Nesse caso, podemos ver que nossa proposta contribui para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, visto que fomenta o desenvolvimento de outras estratégias de resolução.

Ainda nesse sentido, durante aplicação das atividades do campo multiplicativo, pudemos identificar que os estudantes (assim como AS) utilizam a reta numérica para decidir qual será o sinal final da resposta e o algoritmo tradicional da multiplicação para realizar o cálculo.

Durante a realização da atividade 01, AS comete o seguinte equívoco na sua interpretação da tabela: para responder a questão sobre qual era a posição de Flávio quando começou marcar o tempo, a estudante diz que é no primeiro valor da tabela, ou seja, em –8 segundos. Note que ela ela confunde-se ainda mais e responde que a posição é –8. Tal equívoco a leva aos erros dos itens *c, d* e *e.* No entanto elas são coerentes com sua interpretação.

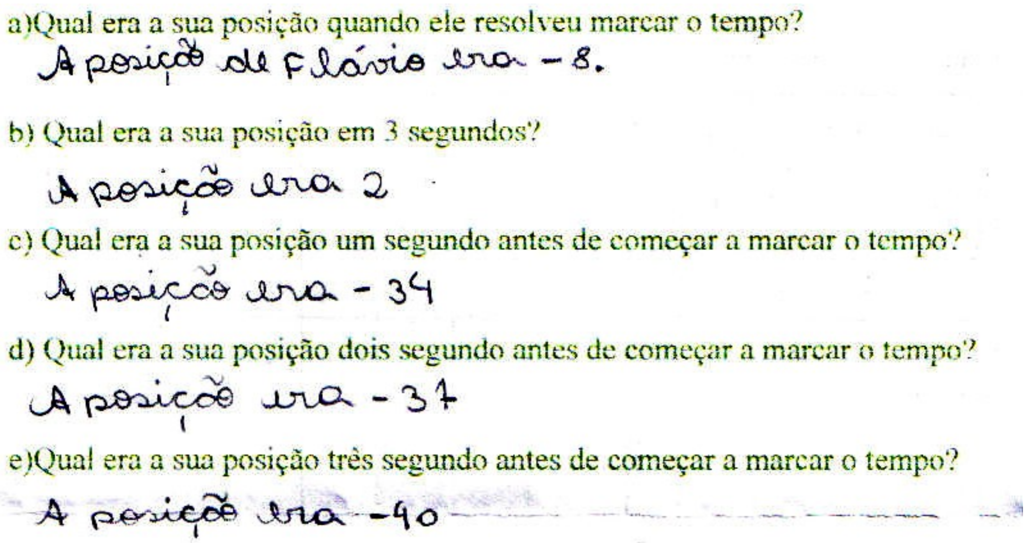
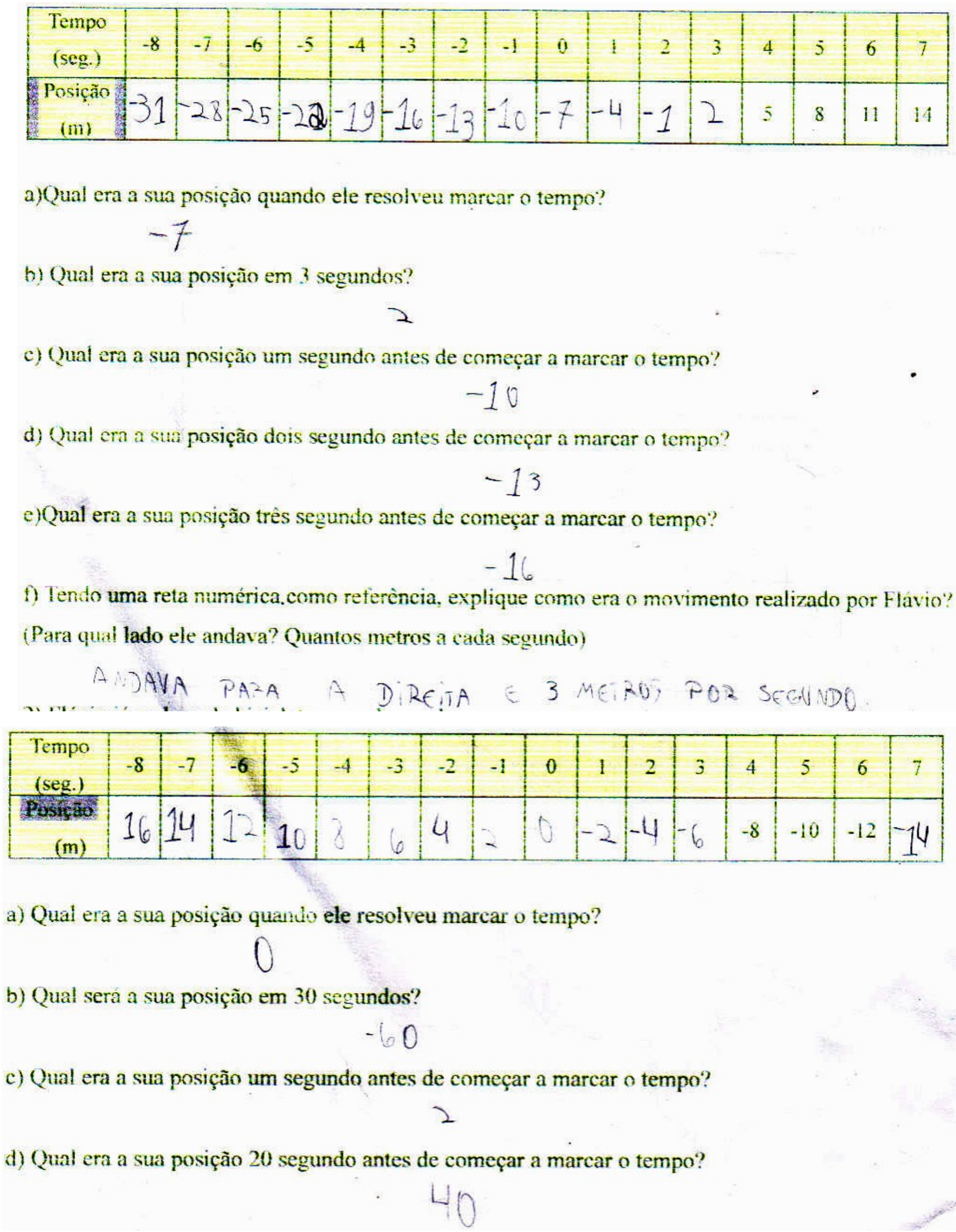

a)Qual era a sua posição quando ele resolveu marcar o tempo?
A posição de Flávio era -8.
b) Qual era a sua posição em 3 segundos?
A posição era 2
c) Qual era a sua posição um segundo antes de começar a marcar o tempo?
A posição era - 34
d) Qual era a sua posição dois segundo antes de começar a marcar o tempo?
A posição era - 37
e)Qual era a sua posição três segundo antes de começar a marcar o tempo?
A posição era -40

FIGURA 102: Resolução material 10 - estudante AS

O mesmo ocorre na resolução da atividade 02, como podemos observar na Figura 103 abaixo. Note que AS, a partir de sua interpretação, resolve um problema complexo – que pode ser classificado como pertencente ao GRUPO 06 do pré-teste – já que ela resolve separadamente *2x20 + 16 = 56*. Ressaltamos o seguinte fato interessante, a mesma estudante não teve êxito nesse mesmo tipo de problema na resolução do Material 09. Na nossa opinião esse fato não indica que essa proposta é melhor que a outra, ou não. Apenas fazemos esse apontamento, pois isso indica outro aspecto da nossa proposta que deve ser investigado com mais rigor, num outro momento.

Ainda vale ressaltar que FR foi o único aluno que resolveu todas as atividades corretamente.



Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)	-31	-28	-25	-22	-19	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14

a)Qual era a sua posição quando ele resolveu marcar o tempo?

-7

b) Qual era a sua posição em 3 segundos?

2

c) Qual era a sua posição um segundo antes de começar a marcar o tempo?

-10

d) Qual era a sua posição dois segundo antes de começar a marcar o tempo?

-13

e)Qual era a sua posição três segundo antes de começar a marcar o tempo?

-16

f) Tendo uma reta numérica,como referência, explique como era o movimento realizado por Flávio? (Para qual lado ele andava? Quantos metros a cada segundo)

ANDAVA PARA A DIREITA E 3 METROS POR SEGUNDO.

Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)	16	14	12	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14

a) Qual era a sua posição quando ele resolveu marcar o tempo?

0

b) Qual será a sua posição em 30 segundos?

-60

c) Qual era a sua posição um segundo antes de começar a marcar o tempo?

2

d) Qual era a sua posição 20 segundo antes de começar a marcar o tempo?

40

FIGURA 103: Resolução do material 10 - estudante FR

Durante o desenvolvimento da atividade sentimos a necessidade de mostrar como poderíamos representar as multiplicações presentes nos dois problemas anteriores, antes da resolução da atividade 03. Talvez fosse mais interessante para o nosso estudo que os estudantes preenchessem a tabela de forma espontânea, mas naquele momento não conseguimos controlar a impressão de que, se não intervíssemos, alguns estudantes iriam confundir-se ainda mais na resolução da terceira atividade. Sendo assim, no quadro verde escrevi duas situações:

1) Flávio, partindo do zero, movimenta-se dois metros por segundo para a direita. Na tabela abaixo, complete a coluna da posição de Flávio em:

Tempo	Posição
3	
2	
1	
0	
– 1	
– 2	
– 3	

2) Flávio, partindo do zero, movimenta-se dois metros por segundo para a esquerda. Na tabela abaixo, complete a coluna da posição de Flávio em:

Tempo	Posição
3	
2	
1	
0	
–1	
–2	
–3	

Para completar a tabela, fiz as seguintes perguntas:

"*Qual é a posição de Flávio em 3 segundos?, Por que ele parou numa posição negativa/positiva?* e *Qual foi a conta que vocês realizaram?"* Logo em seguida , concluía: "*Então podemos representar os cálculos da seguinte forma: TEMPO x DESLOCAMENTO"*

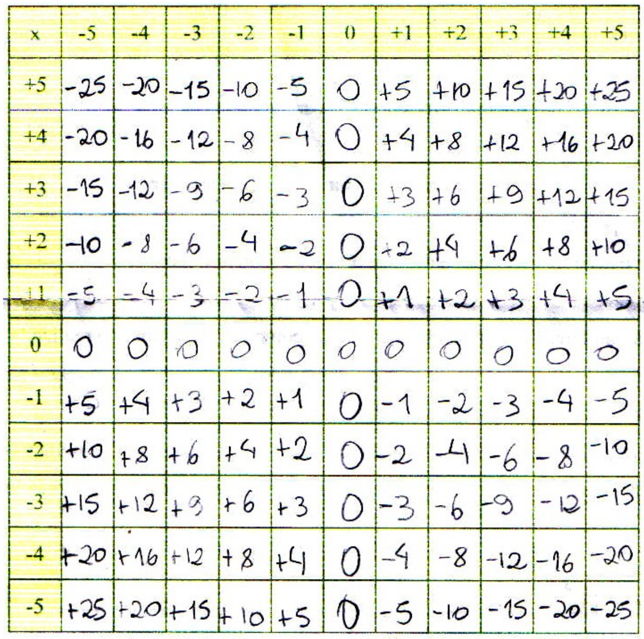
Tempo	Posição
3	*3 x (+2) = +6*
2	*2 x (+2) = +4*
1	*1 x (+2) = +2*
0	*0 x (+2) = 0*
– 1	*(– 1) x (+2) = – 2*
– 2	*(– 2) x (+2) = – 4*
– 3	*(– 3) x (+2) = – 6*

Tempo	Posição
3	*3 x (–2) = – 6*
2	*2 x (–2) = – 4*
1	*1 x (–2) = – 2*
0	*0 x (–2) = 0*
–1	*(– 1) x (–2) = + 2*
–2	*(– 2) x (–2) = + 4*
–3	*(– 3) x (–2) = + 6*

QUADRO 09: Discussão realizada no quadro verde

A partir desse exemplo, pedi que eles observassem como era a resposta quando multiplicávamos: dois números positivos, dois números negativos e quando um é positivo e o outro é negativo. Após tal indução, eles construíram a regra de sinais da multiplicação, tal qual a conhecemos. Após tal intervenção, os estudantes realizaram a atividade 03.

A maioria dos estudantes completou a tabela corretamente e sem dificuldade, aplicando aquilo que eles haviam concluído na discussão anterior. No entanto um pequeno grupo colocou resultados negativos para o II, III e IV quadrantes. Um desses estudantes, me procurou e disse *"Sor, na verdade ainda não entendi porque um número negativo vezes outro negativo dá positivo"*. Na tentativa de explicar, exploramos situações análogas às apresentadas nas atividades 01e 02 e também a ideia de *contrário do contrário* presente no *Fórmula (–1)*: Pulgas. Durante a conversa pude observar que o estudante apresentava a hipótese de que se há um número negativo presente na multiplicação, o resultado será negativo. Logo após a intervenção, MPe alterou a sua tabela e me disse: "*Sor, olha o que eu descobri: tu viu que a resposta é positiva nesses dois quadrados* (indicando o I e o III quadrantes) *e nos outros será negativa* ? (indicando o II e o IV quadrantes)".



x	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
+5	-25	-20	-15	-10	-5	0	+5	+10	+15	+20	+25
+4	-20	-16	-12	-8	-4	0	+4	+8	+12	+16	+20
+3	-15	-12	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9	+12	+15
+2	-10	-8	-6	-4	-2	0	+2	+4	+6	+8	+10
+1	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	+5	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4	-5
-2	+10	+8	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6	-8	-10
-3	+15	+12	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9	-12	-15
-4	+20	+16	+12	+8	+4	0	-4	-8	-12	-16	-20
-5	+25	+20	+15	+10	+5	0	-5	-10	-15	-20	-25

FIGURA 104: Tabela preenchida pelo estudante Mpe

Ao refletirmos sobre essa afirmação de MPe, percebemos que o fato de analisar a multiplicação de números positivos e negativos através dos quadrantes é uma estratégia interessante,já que essa seria a representação geométrica da regra de sinais. Tal reflexão nos motiva a desenvolver outros ODAs que utilizem operações através de tabelas e, principalmente, do plano cartesiano.

Neste capítulo, pudemos ver que a nossa proposta contribui para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo das crianças, visto que ela fomenta o desenvolvimento de diferentes estratégias de resolução e sistemas simbólicos. No entanto temos consciência de que essas poucas atividades servem apenas como um trampolim para novas e numerosas investigações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como anunciamos na introdução desse trabalho, nossa pesquisa procurou responder a seguinte questão: *Como objetos digitais de aprendizagem podem promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva dos Campos Conceituais de Vergnaud?* Para respondê-la organizamos o texto em três tópicos: No primeiro abordaremos as questões relativas ao desenvolvimento do ODA *Fórmula (–1),* bem como as impressões dos estudantes durante a aplicação do experimento dessa pesquisa; no segundo tópico nossa discussão versará sobre a aplicação da proposta didática e as estratégias apresentadas pelos sujeitos dessa pesquisa e, por último, apresentaremos novas perspectivas de continuidade desse estudos sobre esse tema.

Mas antes disso gostaríamos de refletir sobre a seguinte questão. Muitas vezes ao lermos artigos sobre a utilização das TICs em educação, identificamos a crença empirista de que é a utilização do ODA que permite ao estudante a aprendizagem e a construção de conhecimento. Dessa forma – tentando evitar que tal impressão seja atribuída ao nosso texto – reafirmamos que, na nossa avaliação, a função de um ODA em educação é fomentar o desenvolvimento de estratégias. Mas essas são aplicadas e criadas pelo sujeito através da ação, portanto não podem ser ensinadas, já que é o próprio sujeito que constrói o conhecimento e desenvolve o seu raciocínio aditivo e/ou multiplicativo.

Sendo assim o *Fórmula (–1)* foi concebido "*como um objeto para pensar com*" , ou seja, uma espécie de micromundo que tem como objetivo incitar diferentes tomadas de consciência por parte dos estudantes. E será a partir desse processo que os sujeitos desenvolverão estratégias de resolução de problemas, representações e propriedades aritméticas com números positivos e negativos. Nesse sentido, acreditamos que a nossa proposta se alinha à ideia apresentada por Kaput, onde ele afirma que um software deve ajudar os estudantes a estenderem o que sabem de um contexto familiar para um menos familiar, de um contexto concreto para um contexto abstrato (1995, pg. 133).

O Fórmula (–1)

Temos a certeza de que, ao descrevermos o processo de desenvolvimento do *Fórmula (–1),* estamos respondendo a pergunta proposta nessa pesquisa por duas razões:

A primeira é que durante a descrição de tal processo apresentamos as justificativas teóricas – fundamentadas na teoria de Campos Conceituais de VERGNAUD - e que nos levaram à construção do ODA.

Como já comentamos, criamos o ODA *Fórmula (– 1)* durante o nosso curso graduação, no entanto a utilização do modelo físico com estudantes da escola básica gerava benefícios no desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças, mas também muitas dúvidas e conflitos didáticos, que na época, nos pareciam insolúveis. No entanto foi através da teoria de Campos Conceituais de Vergnaud, que começamos a entender o que observávamos na nossa prática e (também) vislumbrar novas estratégias didáticas que contribuíssem para a aprendizagem.

A teoria de Campos conceituais nos possibilitou uma nova concepção de ensino de aritmética, pois ao invés de procurar explicar apenas a regra de sinais, como educadores, deveríamos priorizar o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo das crianças a partir da resolução de problemas. Além disso, tal teoria pedagógica apresentava os princípios construtivistas que almejávamos e que já estavam presentes na nossa proposta de ODA.

Ao definir o Campo Aditivo como um conjunto de problemas e situações que envolvem soma ou subtração na sua resolução, Vergnaud consegue apresentar as categorias mais gerais de raciocínio aditivo e que estão presentes nesses problemas. Sendo assim, conseguimos identificar os problemas presentes no *Fórmula (– 1)*, como aqueles presentes na quinta e sexta categorias do Campo Aditivo, em que os deslocamentos das lesmas são transformações sofridas pelas medidas de distancias e a posição das lesmas são estados relativos de um sistema referencial. Logo, os problemas do *Fórmula (– 1)* são uma extensão das operações em $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

Através do invariante conceitual do Campo Aditivo conseguimos refletir a subtração de números positivos e negativos sobre uma nova perspectiva: ao autor apresentar a soma e a subtração como operações irmãs – em que a operação utilizada para resolver um problema depende da posição onde a incógnita se encontra – tal definição nos motivou desenvolver novas proposta didáticas que explorassem a representação do raciocínio inverso de qualquer problema do Campo Aditivo.

Já o invariante conceitual do Campo Multiplicativo – onde é empregada a mesma ideia de que multiplicação/divisão são operações irmãs – associado ao deslocamento de objetos num sistema referencial, justificou teoricamente a utilização do *Fórmula (– 1),* como uma alternativa interessante para desenvolver o raciocínio multiplicativo através da extensão das operações em $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

A segunda razão é que uma das etapas fundamentais da nossa proposta é seu caráter experimental, pois acreditamos que ao utilizar o ODA numa situação prática de sala de aula temos a oportunidade de analisar outros aspectos que são observáveis pelos estudantes, mas que não fomos capazes de prever ou imaginar. Acreditamos que se não há esse momento no desenvolvimento de um ODA, existe o perigo de desenvolver uma proposta idealizada que não corresponda às intenções e hipóteses iniciais de quem o produz.

Como já relatamos, a utilização do *Fórmula (– 1)* numa situação de sala de aula produziu uma série de questões que nos ajudaram (e ainda ajudam) a repensar a nossa proposta e a realizar algumas implementações no ODA. Vejamos quais foram:

A principal modificação em relação a nossa concepção do *Fórmula (– 1)*, é que sua função é servir como mais uma alternativa para fomentar a *coordenação entre Sistemas de Ação e Simbólicos*, possibilitando, assim, extensão do raciocínio aditivo e multiplicativo para operações que envolvem operações com números negativos. Nesse sentido, procuramos explorar diferentes tipos de representação simbólica através do ODA, o que nos levou a incorporar ao objeto duas formas de representação: o esquema de flechas para os problemas do Campo Aditivo e a utilização de tabelas para o Campo Multiplicativo. Em ambos os casos, tais representações simbólicas foram abordadas com maior profundidade na realização da proposta didática.

A respeito da presença do esquema de flechas na segunda fase do Fórmula (– 1), de início constatamos que os estudantes ficam confusos em relação a tal representação, mas ao recorrer ao botão ajuda conseguem esclarecer suas dúvidas. Além disso, verificamos que precisamos pensar em modificações para melhorar a jogabilidade de tal fase, pois de início os estudantes não identificaram onde deveriam colocar a resposta e como fazê-la para testá-la. Nossa intenção é incluir os comandos do botão *Testar* no botão *OK*, assim ao clicá-lo, as duas ações serão realizadas. testará o resultado e sorteará os próximos valores.

Quanto à interação com a utilização dos esquema de flechas na segunda fase do ODA, percebemos que ela privilegia o desenvolvimento de estratégias, pois o ato de contar é dificultado devido à escala utilizada reta na numérica. Logo ficou claro para os jogadores, que o jogo não dependeria apenas de sorte, mas também exigia a habilidade de cálculo mental. Outro aspecto observado foi que os alunos o que tiveram maior dificuldade foram aqueles que insistiam em utilizar o esquema de ação de contar.

Também percebemos que a situação de jogo era estabelecida quando a dupla formada estava no mesmo nível de compreensão, portanto competiam de forma saudável, ou melhor, brincavam enquanto aprendiam matemática. Quando isso não ocorria os estudantes assumiam uma postura de cooperação, onde um ajuda o outro, sem competir. No entanto as experiências mais ricas para a nossa observação foram quando um dos estudantes colocava-se na posição de ensinar o colega. Nesses casos, pudemos observar que uma das estratégias utilizadas por eles era recorrer à primeira fase do jogo, para explicar com números pequenos.

Em relação a subtração de números positivos e negativos, presente na terceira fase do *Fórmula (–1)* a noção de *"ao contrário"* foi uma estratégia didática interessante para os estudantes, sendo assim não apresentaram grandes dificuldades de entender como funcionava esse novo significado. De início a maioria dos estudantes nem percebeu a presença da subtração e quando identificava recorreria ao botão Ajuda com o objetivo de sanar suas dúvidas. É importante ressaltar que tal facilidade não foi observada quando os estudantes realizavam as atividades escritas em sala de aula e que serão discutidas mais adiante.

A partir de agora apresentaremos as considerações feitas a respeito das que envolviam o campo multiplicativo no *Fórmula (– 1)*:

Na nossa avaliação a experiência com as fases anteriores do ODA auxiliou os estudantes a utilizar as fases do jogo que envolviam a multiplicação, já que eles entendiam que o jogo apresentava um problema e a reta numérica como ferramenta de cálculo. Também observamos que os estudantes identificaram com facilidade que se tratavam de problemas do campo multiplicativo, manifestando tal conclusão com frases do tipo: *"Mas esse jogo é sobre multiplicação!"*.

Quanto à sua jogabilidade, percebemos que o layout do jogo não é intuitivo, pois as crianças precisam acessar o botão Ajuda para entender como se joga, porém todos estudantes conseguiram entendê-lo quando assim o fizeram. É importante que o educador que pretende utilizá-lo tenha consciência desse fato. Por outro lado acreditamos que esse é um momento interessante para realizar discussão e intervenção.

Durante a interação com o ODA pudemos observar que os estudantes realizam os cálculos através de duas ações: 1ª decisão do sinal da resposta final e 2ª realizavam o cálculo da multiplicação envolvida através do algoritmo ou utilizando a reta numérica. Para nós foi interessante observar que esse também é um aspecto da regra de sinais e parece ser consequência de um comportamento espontâneo do sujeito.

Outro fato observado é que, enquanto os estudantes jogavam, eles não tiveram dificuldade em realizar operações do tipo *(+a) . (- b)* para $a, b \in \mathbb{N}$, mesmo sendo o seu primeiro contato. É importante ressaltarmos aqui que, nas atividades escritas, o número de acertos nesse tipo de multiplicação era menor. Na nossa avaliação esse é um dos benefícios do contexto virtual e simbólico do *Fórmula (–1)* e que também nos justifica atribuir o significado de “ao contrário de” para “– n pulos”. Embora artificial, ainda assim acreditamos que essa é uma estratégia que promove o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo com números positivos e negativos.

Temos consciência que a nossa proposta tem que avançar consideravelmente em relação aos problemas do campo multiplicativo. No entanto, a partir dessa pequena coleta de dados, observamos que o ODA contribuiu para que (as crianças) atribuam diferentes sentidos e significados para os diferentes sistemas simbólicos (algoritmo da multiplicação, sinal dos números, a reta numérica e a proporcionalidade). Novamente temos a impressão de que a nossa proposta auxilia no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo dos nossos estudantes; já que promove a coordenação dos Sistemas de Ação e Simbólicos. Além disso, o *Fórmula (-1)* já se constitui em uma alternativa para o trabalho do professor e estudantes no ensino-aprendizagem das operações com números positivos e negativos.

A Proposta Didática

Nesse momento faremos uma síntese das estratégias apresentadas pelos estudantes, das nossas conclusões e das dificuldades que encontramos ao aplicar a nossa proposta didática para o uso do objeto virtual de aprendizagem *Fórmula (– 1).* Acreditamos que o conjunto de dados obtidos não nos permite discriminar o processo de desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo dos sujeitos envolvidos na pesquisa e que era uma das nossas intenções. Para que isso fosse possível, teríamos que ter realizado um acompanhamento individualizado de alguns estudantes; no entanto isso não ocorreu.

Nossa justificativa para tal fato é que, durante a coleta de dados, a figura do professor se sobrepunha à do pesquisador. Em muitos momentos, nossa preocupação voltava-se para o ensino de números positivos e negativos e – surgia a preocupação para que todos estudantes entendessem aquilo que discutíamos – a pesquisa ficava em segundo plano. Porém achamos que tal fato é natural quando almejamos que nossos educadores realizem pesquisa em sala de aula, afinal de contas estão incluídos nesse contexto.

Por outro lado, a partir dos dados coletados, pudemos observar e interpretar as estratégias realizadas pelos estudantes, levantar novas hipóteses e realizar conclusões que podem (e devem) ser testadas e confirmadas em estudos futuros. Sendo assim temos a certeza de que a nossa pesquisa contribuiu para o ensino e aprendizagem deste conteúdo, mas temos consciência da limitação da nossa análise.

No quarto capítulo desse trabalho apresentamos a seguinte questão a respeito da nossa proposta didática: *Como seria uma proposta didática que estivesse de acordo com a proposta teórica utilizada e que contribuísse para a finalidade para a qual esses ODAs foram idealizados?* Seguindo a mesma linha de argumentação, acreditamos que respondemos essa pergunta ao criar e descrever a proposta didática, no entanto precisamos confrontar nossas hipótese com o conjunto de dados obtidos no experimento e é o que faremos agora.

A Relação de Ordem

Fica difícil obter resultados conclusivos com apenas dois encontros, sendo necessário desenvolver um trabalho sistemático durante um período mais longo para obtermos resultados mais significativos. Observamos que, durante a situação de jogo, os estudantes não tem dificuldades para decidir qual é o número maior ou menor, principalmente quando é uma situação física conhecida (por exemplo a temperatura) ou quando utilizam a reta numérica como referência.

No entanto os estudantes apresentam dúvidas quando há a presença de decimais ou quando é necessário utilizar os símbolos > e <. Acreditamos que esses problemas ocorrem, pois o nível de complexidade que envolvem os números decimais é maior e, no segundo caso, é que a compreensão envolve uma coordenação entre os sistemas de ação e simbólicos. Dessa forma, sugerimos o desenvolvimento de novas ODAs que explorem tais relações.

O Raciocínio Aditivo e a Regra de Sinais

Como já afirmamos algumas vezes, a teoria de Campos Conceituais de Vergnaud nos possibilitou uma nova concepção de ensino de aritmética, pois ao invés de apenas explicar apenas a regra de sinais, como educadores, deveríamos priorizar o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo das crianças a partir da resolução de problemas.

Infelizmente tais convicções não estavam suficientemente claras em boa parte da nossa pesquisa. Durante a análise de dados ficamos angustiados ao perceber que não conseguiríamos discriminar o desenvolvimento da raciocínio aditivo das crianças. Já que, em muitos momentos, ficamos mais preocupados que os estudantes desenvolvessem as estratégias criadas por nós, ao invés de observarmos aquelas que eles propunham.

Diante desse dilema, a busca por respostas nos conduziram aos trabalhos de Papert e Kamii. Ao defender o uso do computador em educação Papert afirma

> "(...) Tentar aplicar regras heurísticas refreia os estudantes na pressa de terminarem um problema e iniciarem o seguinte. Ela os faz dispender mais tempo com os problemas, e minha posição matética é simplesmente que dispender tempo relaxado com um problema leva a vir a conhecê-lo e, através disso, a pessoa melhora sua capacidade de lidar com os outros problemas semelhantes. Não é usar a regra que resolve o problema; é pensar sobre o problema que promove a aprendizagem" (PAPERT, p. 81, 1994)

Assim como eles, temos a convicção de que o ensino fundamentado na aplicação da regra de sinais não é suficiente para o desenvolvimento do raciocínio aditivo. Para desenvolvê-lo é necessário oferecer aos nossos estudantes uma educação que promova o pensar sobre o problema, a proposição de estratégias de resolução e a análise das mesmas. Acreditamos que uma educação nesses moldes prioriza muito mais a discussão e definição das propriedades numéricas (comutativa, associativa, distributiva e etc.) do que naquelas propostas fundamentadas na aplicação de regras e algoritmos. Sendo assim, acreditamos que nosso equívoco foi procurar transformar algumas estratégias como algorítimos a serem aplicados pelos estudantes. Tal concepção nos levou, em alguns momentos, a desviar da intenção de nossa proposta.

Apesar de cometermos esse equívoco, acreditamos que nossa proposta permitiu que os sujeitos da pesquisa construíssem a regra de sinais da soma a partir da resolução de problemas e da estratégias desenvolvidas por eles. Nesse processo a utilização do esquema de flechas serviu como uma estrategia didática interessante, pois representa uma forma de representação intermediária, já que elimina necessidade diferenciação do sinal da operação e o sinal do número. A partir da nossa prática de sala de aula, sabemos que tal diferenciação é algo complexo para os estudantes.

Como já apresentamos no Material 06, após realizarem uma série de problemas e atividades sobre o Campo Aditivo, desenvolvemos atividades com o objetivo de observar se os estudantes descreveriam a regra de sinais a partir do esquema de flechas.

Todos os esquemas de flechas estavam na forma direta: Eram conhecidos os valores do estado inicial e da transformação e queríamos saber o estado final. Tendo posse desses dados, conseguimos classificar suas respostas em três níveis cognitivos diferentes.

NÍVEL I: *Indiferenciação*

Nesse nível o sujeito resolve os problemas corretamente através da reta numérica, mas não identifica regularidades, afirmando que cada caso é um caso. Um exemplo é o sujeito AA que não conseguiu identificar regularidades para decidir quando se soma ou se subtrai, podemos observar que ela utiliza a reta para decidir se a resposta final é positiva.

NÍVEL II: *A Soma/Subtração dos Valores Absolutos*

Fase A: Nesse nível o sujeito apresenta suas primeiras hipóteses. Por exemplo, uma dessas hipóteses levantadas é que o sinal da transformação decide se devemos somar ou subtrair os valores absolutos. No entanto ao resolver situações-problemas, tal hipótese é desestabilizada, um conflito que o sujeito não consegue resolver. Um exemplo foi a resposta da estudante CMa.

Fase B: Nesse nível o sujeito estabelece relações parciais sobre a soma de números positivos e negativos. Por exemplo, consegue generalizar que devemos subtrair os valores absolutos quando o sinal da posição inicial e da transformações são diferentes e somá-los quando são iguais. Entretanto o sujeito não consegue fazer uma previsão de qual será o do estado final. Um exemplo dessa fase é o sujeito LS. Além disso, nesse nível, alguns estudantes não generalizaram a soma soma dos valores absolutos para aquelas situações que envolviam números negativos na posição inicial e na transformação.

NÍVEL III*: A regra de sinais:*

Nesse nível o sujeito consegue, através de uma generalização, discriminar as condições necessárias para somar ou subtrair os valores absolutos e também as condições para decidir qual será o sinal do estado final. A estudantes GP é um exemplo, como vimos no capítulo 5 ela conseguiu descrever a regra de sinais da soma propriamente dita.

A partir disso podemos constatar que a nossa proposta didática e a utilização dos ODAs contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio aditivo dos estudantes, a ponto de eles próprios definirem a regra de sinais.

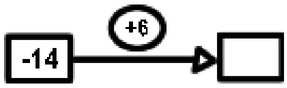
Números Simétricos

Sobre esse conceito nenhum sujeito da pesquisa apresentou dificuldades , nem no fato de que a soma de números simétricos é igual a zero, onde eles utilizavam o movimento na reta para responder.

A Resolução de Equações do Tipo $x+a=b$

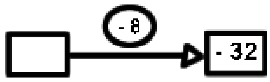
Ao trabalharmos com a ordem inversa do esquema de flechas, estaríamos explorando situações problemas que exploram a operação inversa e, implicitamente, a resolução de equações do tipo $x+a=b \quad para \quad a,b\in\mathbb{Z}$. Como podemos observar no esquema abaixo.

Ordem Direta



(- 14) + (+ 6) = ?

Ordem Inversa



? + (- 8) = - 32

Como já nos referimos antes, os estudantes tiveram um bom desempenho nesse tipo de questão quando estas envolviam a soma de números simétricos; no entanto, esse fato não se repetiu nos outros itens casos. Durante a resolução dessas questões, observamos duas estratégias utilizadas pelos estudantes: é resolver a equação pelo método da substituição. Pudemos constatar que os estudantes que acertaram todos os itens resolveram os problemas substituindo o valor numérico no local da incógnita, ER é um exemplo. A segunda estratégia utilizada era:

Se o valor absoluto da resposta final era maior, significava que os sinais eram iguais, mas se tal valor fosse menor, então os números eram de sinais diferentes. Provavelmente foi a estratégia utilizada pela RG (Figura 74, p. 170) .

Assim como a RG, muitos não conseguiram determinar o valor correto do item g, se eles tivessem percebido que -360 +700 = +340, descobririam que $?=-1040$. Observamos o mesmo erro na resposta do item h da GPa (Figura 075, p. 170).

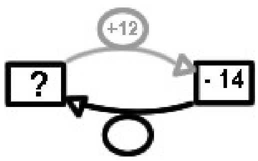
Queremos ressaltar que, para desenvolver tal estratégia, é necessário que antes o estudante tenha estabelecido as relações exigidas nas atividade da seção anterior, caso contrário não teria êxito.

Após analisar as atividades realizadas até o momento da proposta didática, interpretamos tais dados como evidências que apontam para a confirmação da nossa crença de que o desenvolvimento do raciocínio aditivo dos sujeitos segue as etapas do desenvolvimento epistemológico da matemática. Ou seja, observamos que o desenvolvimento das operações com números positivos e negativos se confunde com o desenvolvimento da álgebra, o que nos leva a crer que o raciocínio algébrico pode ser desenvolvido como a extensão raciocínio aditivo e multiplicativo. Pensamos, portanto, que nossa proposta está de acordo com essa ideia, quando explora esse tipo de atividade a partir das operações em Z e que pode ser tema de estudos futuros.

A Subtração & o Esquema de Flechas

A estratégia didática de explorar a subtração de números positivos e negativos através do esquema de flechas é o melhor exemplo de quando nos desviamos da intenção da nossa proposta por utilizá-la como num algoritmo a ser aplicados pelos estudantes. Reveja a estratégia:

Podemos representar com linguagem matemática o esquema de flechas abaixo de dua formas:



A flecha superior através de uma soma de números positivos e negativos: **? + (+ 12) = – 14**	A flecha inferior através de uma subtração números positivos e negativos visto que uma é o inverso da outra: **(– 14) – (+ 12) = ?**

Mesmo que, na nossa avaliação, esse modelo seja teoricamente coerente, durante sua aplicação não tivemos a resposta esperada. Durante a coleta de dados constatamos que, para alguns estudantes, nossa proposta não fez sentido e continuaram a resolver os problemas desconsiderando a subtração, portanto não acertaram as atividades propostas. Outros apenas colocaram (equivocadamente) o sinal de *menos* entre os números positivos e negativos: **? – (+ 12) = – 14**

Outro estudante resolveu corretamente as operações, mas utiliza a transformação direta ao invés da inversa.

O dado mais interessante foi apresentado pela estudante GP (Figura 88, p. 183), na tentativa de mostrar que as operações realizadas não eram lógicas e não faziam sentido.

Pudemos identificar que o significado de que *subtrair é tirar* (é ficar menor) está atrapalhando a estudante. Além disso, suspeitamos que outros dois fatores poderiam estar contribuindo para tal conflito: a *relação de ordem* (ao negar que $-9 < -7$) ou não está fazendo a diferenciação entre *valores absolutos x valores relativos*?

Por outro lado temos consciência de que a instabilidade apresentada pelos estudantes ao realizar as operações com números positivos e negativos não é uma exclusividade da nossa pesquisa – além do exemplo histórico da gênese do conjunto dos números positivos e negativos e da nossa própria experiência profissional – no artigo *A Dualidade do Zero na Transição da Arimética Para a Álgebra* (apresentado na Capítulo 2), Hernandez & Gallardo também indicam que *"os obstáculos persistem nas operações que envolvem os negativos e que: inibem a operação de subtração e uma noção mais ampla de número, já que as raízes negativas não foram aceitas"* (2005, p.22).

Como já afirmamos, esse foi o nosso último encontro, portanto não tivemos a oportunidade de desenvolver ainda mais a nossa proposta e, principalmente, obter mais dados para investigar as estratégias utilizadas pelos estudantes. No entanto, de acordo com os registros analisados, parece que a subtração foi explorada precocemente e que os estudantes tinham dúvidas em relação a conceitos anteriores.

Diante desses fatos e do desafio que assumimos, resta-nos dar continuidade aos nossos estudos, buscando outras alternativas e criando novos ODAs para que contribuam de forma mais eficaz nesse processo de desenvolvimento.

O Raciocínio Multiplicativo

Como já comentamos anteriormente, são poucos os dados obtidos sobre problemas do Campo Multiplicativo. No entanto eles foram importantes para refletirmos sobre a nossa proposta e fazer implementações no *Fórmula (– 1): Pulgas* ou indicar a construção de novos ODAs.

As Tabelas

A partir dos dados obtidos observamos que o simples fato de aprender jogando o *Fórmula (–1): Pulgas* não significa que os estudantes irão incorporar o uso das tabelas para resolver problemas do Campo Multiplicativo. Pudemos constatar tal fato ao analisarmos as mensagens que os estudantes enviaram durante a realização da segunda atividade do material .

Nelas onde a maioria não sentiu a necessidade de utilizá-las na representação da resolução ou para explicar como essa fase do *Fórmula (– 1)* funciona.

Nessa atividade, tivemos a oportunidade de observar um fato interessante e que para nós, como educadores, não era observável. A maior parte dos estudantes realizam o cálculo através de duas ações distintas: primeiro realizam o cálculo aritmético e depois define qual o sinal da resposta ou vice-versa. Nas falas dos alunos podemos perceber que tal fato é feito intencionalmente, sob a justificativa de que isso simplifica os cálculos. Como eles não conheciam a regra de sinais da multiplicação, os estudantes utilizavam a reta numérica como ferramenta para decidir qual era o sinal da resposta final. Isso ocorreu durante a realização da maioria das atividades do Campo Multiplicativo. Tal fato é, para nós, mais uma evidência do sucesso de nossa proposta.

Embora sejam duas ações distintas, será que já podemos dizer que ele realiza a coordenação entre dois sistema simbólicos: da operação e dos números com sinal? Supomos que isso já indica uma coordenação dos sistemas simbólicos. Refletindo sobre nossa prática é possível identificar vários exemplos de estudantes que realizam as atividades corretamente, mas "*esquecem de colocar o sinal*". Na verdade não é uma questão de memória ou de falta de atenção (como muitos professores afirmam), mas de coordenação de dois sistemas simbólicos distintos, portanto não é algo que seja natural para os sujeitos e sim um processo de construção.

Problemas envolvendo Tempo x Posição

No contexto do *Fórmula (–1)* as crianças utilizaram espontaneamente a representação da multiplicação $(+a) . (-b)$ onde $a, b \in \mathbb{N}$, sem terem tido contato com tal representação. Imaginamos que tal ação assimilativa da soma repetida de números negativos. Isso não significa que os estudantes não tiveram dificuldades para resolver operações com números negativos. Retomaremos tais exemplos a seguir.

Naqueles problemas em que a posição final e o tempo do deslocamento são conhecidos e se deseja descobrir o invariante conceitual do problema, pudemos observar a dificuldade dos estudantes para identificar quando o mesmo era negativo. Um exemplo é a resposta do problema 06 do Material 09 do sujeito AS. Identificamos a intervenção de três aspectos que podem justificar tal dificuldade. O primeiro é o fato de tais problemas envolverem uma relação funcional (*posição por segundo*) e que segundo Vergnaud situa-se num nível conceitual muito elaborado (1991, p. 210). O segundo são problemas que envolvem a relação inversa da multiplicação. Já o terceiro aspecto é a presença de números negativos no invariante conceitual é mais um fator de complexidade, visto que é necessário que o estudante realize a coordenação entre os sistemas simbólicos presentes no cálculo aritmético e com aqueles que dizem respeito ao sinal do número.

Vale ressaltarmos que, de um modo geral, pudemos identificar que a maioria dos estudantes identificaram que os problemas envolviam operações de multiplicação ou divisão e realizaram os cálculos corretamente. No entanto cometem alguns erros quando envolvem números negativos. Gostaríamos de relembrar que as situações- problemas presentes no ODA exploram apenas a relação direta, sendo assim achamos importante que outros ODAs sejam desenvolvidos com o objetivo de suprir essa carência.

Sobre os problemas que exigiam a composição entre os Campos Aditivo e Multiplicativo, pudemos constatar que os estudantes tiveram grandes dificuldades para resolvê-los. Esse fato era esperado, já que confirmam os resultados apresentados por Vergnaud. Além disso os problemas apresentados na nossa proposta, são mais complexos que aqueles utilizados por Vergnaud, já que envolvem mais um sistema simbólico em função dos números negativos.

Os Problemas do Tipo $(-a) \times (+b) = c$

Quando começamos a explorar os problemas que envolviam tempo negativo, não percebemos que seria melhor trabalhar com este significado. Primeiro centramos nossa atenção numa proposta que estendia a ideia de ao contrário para tempo negativo. No entanto tal tentativa redundou em fracasso.

Acreditamos que a ideia de explorar situações-problemas que envolvam a noção de tempo negativo é uma boa estratégia para exploramos a multiplicação do tipo $(-a) \times (+b)$ e $(-a) \times (-b)$ para $a, b \in \mathbb{N}$. Porém hoje utilizaríamos outra estratégia para inciar a discussão: Ao invés de explorar diretamente a tabela 9, antes utilizaríamos a tabela 10.

Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)													-8	-10	-12	

Tabela 9: Atividade proposta

Tempo (seg.)	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Posição (m)	16	14	12													

Tabela 10: Atividade modificada

Ao analisarmos os dados obtidos pudemos identificar que a maioria dos estudantes, pensavam que Flávio realiza dois movimentos distintos: num sentido no tempo negativo e no tempo positivo, o personagem se movimentava para o sentido inverso. Eles não compreendiam que o deslocamento como um movimento contínuo e num único sentido (da direita para a esquerda). Mesmo que essa interpretação não corresponda ao fenômeno físico, ela foi suficiente para que os estudantes desenvolvessem estratégias corretas para as operações envolvidas.

A maior parte dos estudantes completou a tabela "diminuindo de três em três (na atividade 01) e aumentando de dois em dois (na atividade 02) e, alguns, utilizaram a reta numérica para entender o movimento realizado pelo personagem do problema ou confirmar sua resposta. Sendo assim afirmamos que ao utilizar duas estratégias para resolver a situação-problema – a utilização da relação vertical citada por Vergnaud e a representação física do problema através da reta numérica – os estudantes estão estabelecendo a equivalência entre os dois sistemas simbólicos e, de certa forma, coordenando-os. Nesse caso, podemos ver que nossa proposta contribui para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, visto que fomenta o desenvolvimento de outras estratégias de resolução.

A partir desses exemplos e realizando uma discussão com aquele grupo de estudantes definimos que poderíamos representar tais cálculos com expressões do tipo $(-a) \times (+b)$ e $(-a) \times (-b)$ para $a, b \in \mathbb{N}$ e definimos a regra de sinais.

Embora a utilização de tabelas no Fórmula (– 1) não tenha correspondido às nossas expectativas, durante a exploração das atividades sobre *Tempo x Posição* foram fundamentais para que os sujeitos da pesquisa entendessem os conceitos discutidos. Além desse caso, o preenchimento da tabela apresentada na página 204 (Figura 104) também representou uma estratégia didática interessante.

Através dela constatamos que, quando os estudantes identificam a existência dos quadrantes, ela se constitui como um modelo de representação da multiplicação de números positivos e negativos, já que constitui um modelo geométrico da regra de sinais. Tal reflexão nos motiva a desenvolver outros ODAs que utilizem operações através de tabelas e, principalmente, do plano cartesiano.

Por último, vale citar que em todas atividades do Campo Multiplicativo realizadas, observamos que os estudantes realizaram algum tipo de coordenação entre diferentes sistemas simbólicos: a reta numérica para determinar o sinal final da resposta, os tradicionais algorítimos de multiplicação e divisão e a utilização de tabelas para organizar os dados. O que nos leva a crer que nossa proposta fomentou, também, a coordenação entre diferentes Sistemas Simbólicos.

Fechamento e Novas Perspectivas de Continuidade da Pesquisa

Nessa etapa final da pesquisa estamos convencidos de que um objeto digital de aprendizagem pode promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva dos Campos Conceituais de Vergnaud na medida em que ele contribua para a coordenação entre os Sistemas de Ação e Simbólico, no entanto esse fato isolado não é suficiente. Durante a apresentação da nossa proposta tivemos inúmeros exemplos de situações em que, no contexto do ODA, os sujeitos da pesquisa não tiveram muitas dificuldades (ou eram menores) em realizar as operações com números positivos e negativos. Porém tal fato não se repetia no desenvolvimento das atividades da nossa proposta didática. Os motivos desse fato podem ser:

1) O caráter lúdico da nossa proposta;
2) As situações-problema presentes no *Fórmula (–1)* exploram apenas as relações diretas;
3) Apesar de fomentar a coordenação do Sistemas de Ação e Simbólico, no contexto do jogo os sistemas de ação são privilegiados, enquanto nas atividades da nossa proposta didática os diferentes Sistemas de Representação Simbólicos são priorizados;

Na nossa opinião, o terceiro aspecto é o que tem maior influência (talvez seja o determinante) na aprendizagem das operações com números positivos e negativos. Isso significa que – para que se promova a coordenação entre os Sistemas de Ação e Simbólico –

seja necessário utilizar uma proposta didática adequada aos princípios teóricos que fundamentaram a construção do *Fórmula (–1)*. Na nossa concepção nosso ODA prioriza a construção do conhecimento a partir do *Fazer* (propiciando a coordenação de diferentes esquemas de ação), enquanto que a proposta didática deve estar comprometida com o *Compreender* (propiciando a coordenação de diferentes sistemas simbólicos).

Estamos convencidos que, através dessa investigação, realizamos avanços significativos na direção do desenvolvimento de um objeto digital de aprendizagem que promova o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo que envolva operações com números positivos e negativos sob a perspectiva de Campos Conceituais de Vergnaud. Já que ele nos foi fecundo tanto na definição de certezas e convicções teóricas, quanto no estabelecimento de dúvidas e questões que devem ser respondidas em novos estudos.

Além das perspectivas já mencionadas anteriormente, as questões que envolvem o Campo Multiplicativo são aquelas que temos interesse em investigar para dar continuidade a essa pesquisa. Sendo mais específicos, pretendemos desenvolver um ODA que contemple as operações com números negativos e que envolva quantidades intensivas. Nele serão exploradas situações-problema através do Plano Cartesiano. Nossa intenção é produzir um objeto virtual de aprendizagem que fomente o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Podemos adiantar que é um objeto nos moldes do software ICE, desenvolvido por Kaput e apresentado no capítulo 2 desse trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BASSO, Marcus Vinicius de A. et al.; **Educação Tecnológica e/ na Educação Matemática: Aplicações da Matemática Elementar na Sala de Aula.** Revista Informática na Educação – Teoria e Prática. Universidade do Rio Grande do Sul. Porto Algre. Outubro. 1999.
2. CESA, Ana Cristina Possapp. ARTIGO: **Proposta de Estudo dos inteiros.** UCS**.** p.43-47.
3. CHIAROTTINO, Zélia Ramozzi: **Psicologia e epistemologia genética de Jean Piaget**. EPU, São paulo, 1988.
4. COSTA, I. T.; FAGUNDES, L. C.; NEVADO, R. A.: **Projeto TecLec: Modelo de uma Nova Tecnologia em EaD incorporando os Recursos da Telemática"** . Em: *Informática na Educação: Teoria & Sociedade,* v. 63, p. 105 -111, 1998.
5. FAGUNDES, L, ; SATO L. S.; MAÇADA, D. L. **Aprendizes do futuro: as inovações começaram.** Brasília: MEC, 1999**.** Coleção Informática para a Mudança em Educação/Mec/Seed/Proinfo.
6. FUSON, K. C.: **Research on whole number addition an subtraction**. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (p. 243-275). New York. Macmillan, 1992.
7. GALLARDO, A y HERNÁNDEZ, A.: The Duality of Zero in the Transition from Arithmetic to Algebra. Helen L. Chick and Jill L. Vincet (eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Melbourne, Australia, University of Melbourne, V.3 pp. 17–24, 2005.
8. GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica e argumentação dedutiva. In: FRANCO, S. R. K. (Org.) **Informática na Educação: estudos interdisciplinares** (p. 105-132). Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2004.
9. KAMII, Constance; **Aritmética : novas perspectivas : implicações da teoria de Piaget**. 6.ed. Campinas: Papirus, 1997.
10. KAMII, Constance; **Reinventando a aritmética : implicações da teoria de Piaget.** Campinas: Papirus, 1986.
11. KAPUT, J. James; **Creating cybernetic and psychological ramps from the concrete to the abstract: Examples from multiplicative structures.** In **Software goes to school: Teaching for understanding with new technologies**, D. PERKINS, J.

SCHWARTZz, M. WEST, and M. WISKE. Capítulo 8, p. 173 – 191. Oxford University Press. New York. 1995.

12. KAPUT, J. James; HEGEDUS, Stephen; LESH, Richard. **Technology Becoming Infrastructural in Mathematics Education.** In **Foundations for the Guture in Mathematics education.** Capítulo 8, p. 173 – 191. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. New Jersey. 2007.
13. KIMURA, Cecília F. Kamei. TESE: **Jogo como ferramenta no trabalho com números negativos: um estudo sob a perspectiva da epistemologia genética de Jean Piaget.** PUC/SP, 2005.
14. KLINE, Morris: **Mathematics in Western Culture**. New York, Oxford Universty, 1953.
15. KLINE, Morris: **Mathematics Thought from Ancient to Modern Times**. New York, Oxford Universty, 1972.
16. MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide. ARTIGO: **Número negativos uma história de incertezas.** Bolema, Ano 7, nº8, pp49 a59, 1992.
17. MILES, Francisco C.P. *Números: uma introdução à matemática,* 3ºed., 248p. São Paulo, Editora da USP, 2003.
18. MOREIRA, Marco Antônio. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área**. Investigações em Ensino de Ciências – V7(1), pp. 7-29, 2002, Disponível em : < http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf > Acesso em: 1 set. 2008.
19. NEVADO, Rosane Aragón; CARVALHO, Marie Jane Soares; MENEZES, Crediné Silva. **Aprendizagem em rede na educação a distância: estudos e recursos para a formação de professores** - 1. ed.- Porto Alegre, Ricado Lenz, 2007.
20. NUNES, Terezinha. **Introdução à Educação Matemática: operações numéricas.** / Terezinha Nunes, Tânia M. M. Campos, Sandra Magina, Peter Bryant. - 1 ed, - São Paulo: Proem, 2001.
21. PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.
22. PAPERT, Seymour M.: **Logo: Computadores e Educação**. São Paulo, Editora, Brasiliense, 1985.

23. PIAGET, Jean, SZEMINSKA, Alina. **A gênese do número na criança**. Editora Zahar, Riode Janeiro, 1975.
24. PIAGET, Jean, INHELDER, Bärbel. **Gênese das Estruturas Lógicas Elementares**. Editora Zahar, Riode Janeiro, 1975.
25. PIAGET, Jean. **Psicologia e epistemologia genética**. Editora Forense, Rio de Janeiro, 1973.
26. REID, Constance. **Introduction to Higher Mathematics for the General Reader**. Cornwall Press, New York, 1959.
27. VERGNAUD, Gérard. **Atividade humana e conceituação.** Editora GEEMPA, Porto Alegre, 2008.
28. VERGNAUD, Gérard. **El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la ensenhanza de las matemáticas em la escuela primaria.** 1ed. México: Trillas, 1991. Tradução de: L'enfant, la mathématique et la realité.