

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

CARACTERIZAÇÃO DE CAOS HOMOCLÍNICO

NUMA DESCARGA ELÉTRICA LUMINOSA *

Thomas Braun

Tese realizada sob a orientação do Dr. Ricardo E. Francke e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes Instituições: Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS).

Porto Alegre

1996

Ando devagar
porque já tive pressa
levo esse sorriso
porque já chorei demais.

...

Penso que cumprir a vida
seja simplesmente
compreender a marcha
ir tocando em frente.

...

Cada um de nós
compõe a sua história
cada ser em si carrega o dom de ser capaz
de ser feliz.

TOCANDO EM FRENTE

Almir Sater/Renato Teixeira

Dedico este trabalho à Tuna e a meus pais,
que muito me ensinaram, e a todos
meus professores.

Agradecimentos

Ao prof. Ricardo E. Francke por possibilitar que este trabalho fosse realizado;

Ao prof. Jorge A. Lisboa pelo valioso auxílio no trabalho de Laboratório;

Aos profs. Ricardo R. B. Correia, Sílvio L. S. Cunha e Hans Peter H. Grieneisen pelo apoio;

Aos profs. Paulo M. Mors e Ruth S. Schneider pelas discussões sobre este trabalho;

Em especial, aos colegas do grupo do Laser, pela colaboração, apoio e sugestões;

A Zuleika Berto pela colaboração e ordenação das referências;

A todos colegas e amigos pelo interesse demonstrado.

Resumo

Neste trabalho empregamos a descarga elétrica luminosa subnormal como sistema dinâmico. Caracterizamos esta descarga em termos de sua curva $V \times i$ e analisamos as oscilações que ela apresenta, para condições experimentais adequadas, na corrente elétrica que flui através dela. Fazemos considerações qualitativas sobre o funcionamento da descarga, visando explicar a fenomenologia observada. Encontramos evidências para explicar as complexas oscilações não periódicas, que são observadas experimentalmente nesta descarga, como sendo a manifestação de um processo determinístico.

Apresentamos os primeiros resultados da ocorrência de caos determinístico na descarga elétrica luminosa e, a partir deles, introduzimos alguns conceitos importantes (tais como: caos, rota para o caos, espaço de fase, órbitas periódicas instáveis) para a dinâmica caótica e que nos permitem compreender a ocorrência, na descarga elétrica luminosa subnormal, de caos homoclínico. Esse é um termo que sintetiza o comportamento caótico que um sistema pode apresentar quando a sua dinâmica é influenciada pela presença de uma órbita homoclínica.

Demonstramos que o caos homoclínico observado na descarga elétrica é facilmente caracterizado através de mapas de retorno. Mostramos como obter quatro tipos de mapas de retorno: o mapa do tempo de retorno, o mapa do tempo de vôo, o mapa da seção de Poincaré e o mapa das amplitudes máximas. Os três últimos apresentam uma estrutura ramificada. A análise dos mapas indica que eles são equivalentes e, portanto, todos fornecem a mesma informação dinâmica. Introduzimos os conceitos básicos da dinâmica simbólica aplicada a mapas unidimensionais, o que nos permite evidenciar a existência de uma órbita homoclínica na dinâmica da descarga elétrica analisada.

Após executarmos uma análise topológica da evolução da descarga luminosa no seu espaço de fase, apresentamos um modelo geométrico que dá conta dos mecanismos de estiramento e de dobradura desta evolução no espaço de fase: o molde topológico da ferradura. A presença da órbita homoclínica induz uma estrutura nesse molde, o que nos permite prever o comportamento qualitativo da descarga luminosa à medida que ela se aproxima da homoclinicidade.

Abstract

In this work we employ a subnormal glow discharge as a dynamical system. We characterize this discharge through its $V \times i$ graph and analyse the oscillations which appear under appropriate experimental conditions in the electrical current flowing through it. We make qualitative considerations about the discharge processes, aiming to explain the observed phenomenology. We find evidence to explain the complex non-periodic oscillations, which are observed experimentally in the discharge, as a manifestation of a deterministic process.

We show the first results of deterministic chaos in the electrical discharge and use them to present some important concepts (such as: chaos, route to chaos, phase space, unstable periodic orbits) for the chaotic dynamics, which permit us to understand the occurrence of homoclinic chaos in the subnormal electrical glow discharge. Homoclinic chaos is a short term for the chaotic behavior that may arise when the system's dynamics is influenced by the presence of a homoclinic orbit.

We show that the homoclinic chaos observed in the glow discharge is easily characterized through return maps. We derive four return maps: the return time map, the time-of-flight return map, the Poincaré section map, and the next maximal amplitude map. The last three maps have a multibranch structure. The map analysis shows that they are equivalent and therefore they furnish the same dynamical information. We introduce the basic concepts of symbolic dynamics applied to one-dimensional maps, enabling us to evidence a homoclinic orbit in the dynamics of the analysed electrical discharge.

After performing a topological analysis of the evolution of the glow discharge in its phase space, we derive a geometrical model accounting for the stretching and folding mechanisms of this evolution in the phase space. It results the horseshoe template. The presence of a homoclinic orbit induces a structure on this template, allowing us to predict the qualitative behavior of the glow discharge as it approaches homoclinicity.

Sumário

Introdução	8
1 - A Descarga Elétrica Luminosa Subnormal	11
1.1 Configuração Experimental	12
1.2 A Curva $V \times i$ Estática	16
1.3 Características Oscilatórias da Descarga Elétrica Subnormal	19
1.4 Modelagem por Circuito Equivalente	22
1.4.1 Circuito RC	23
1.4.2 Circuito RLC	28
1.5 Oscilações não Periódicas	29
2 - Dinâmica Caótica na Descarga Elétrica	35
2.1 A Descarga Elétrica como Sistema Dinâmico	36
2.2 Observação de Caos na Descarga Elétrica	37
2.2.1 Dobramento de Período	39
2.2.2 Sequência Periódico-Caótica Alternante	41
2.3 Reconstrução do Espaço de Fase	46
2.3.1 A Dinâmica do Espaço Reconstruído	48
2.3.2 O Esqueleto do Atrator Caótico: Órbitas Periódicas Instáveis	52
2.4 Caracterização Métrica do Caos	54
3 - Caracterização de Caos Homoclínico na Descarga Elétrica através de Mapas de Retorno	57
3.1 Obtenção dos Mapas de Retorno	58
3.1.1 Mapa do Tempo de Retorno	58
3.1.2 Mapa do Tempo de Vôo	60
3.1.3 Mapa da Seção de Poincaré	63
3.1.4 Mapa das Amplitudes Máximas	65
3.2 Análise dos Mapas	65
3.2.1 Caos Homoclínico	67
3.2.2 Equivalência dos Mapas de Retorno	68
3.2.3 Dinâmica Simbólica	71
4 - Caracterização Topológica de Caos Homoclínico na Descarga Elétrica	78
4.1 Análise Topológica do Atrator Caótico	79
4.2 Obtenção do Molde Topológico	84

4.3 Modelo Topológico de Caos Homoclínico	87
Conclusão	94
Referências Bibliográficas	98

Introdução

O termo descarga elétrica em um gás, de uma forma genérica, refere-se ao processo de condução de uma corrente elétrica por um meio gasoso situado entre dois eletrodos e entre os quais há um campo elétrico aplicado.

O primeiro contato do homem com descargas elétricas em gases certamente foi a descarga atmosférica (raio). As primeiras experiências com descargas elétricas foram realizadas no âmbito da eletrostática. A partir do início do século XIX iniciou-se um estudo mais intensivo das descargas elétricas. Em 1831–35, Faraday descobriu a descarga elétrica luminosa, que é o objeto de estudo deste trabalho.

Na virada do século XIX, ao se reconhecer que os portadores de carga na descarga elétrica eram predominantemente os elétrons, ela passou a ser um importante “laboratório” para o desenvolvimento do então incipiente campo da Física Atômica. Valiosas informações acerca da interação entre elétrons, íons, átomos e luz foram obtidas estudando-se a descarga elétrica.

Na primeira década do século XX, J. Townsend desenvolveu uma teoria explicando os mecanismos de ionização na descarga elétrica e como eles podem levar a descarga a conduzir uma corrente estável. Na década seguinte, I. Langmuir e L. Tonks introduziram o conceito de plasma para o gás, no seu estado condutor, situado entre os eletrodos da descarga.

É, pois, indiscutível que a descarga elétrica em gases teve uma importante participação no desenvolvimento da Física. É interessante (e gratificante) notar que a descarga elétrica gasosa, embora já tenha sido intensivamente estudada por mais de um século – o que gerou um grande número de aplicações práticas – continua sendo uma fonte de observação de intrigantes novos fenômenos no campo da Física. Como tal podemos citar a identificação de caos determinístico na descarga elétrica. Instabilidades na corrente da descarga, que se manifestam através de complexas oscilações, eram conhecidas há muito tempo. É um fato recente o reconhecimento de que esse comportamento pode ser a manifestação de caos determinístico. A facilidade de se observar esse comportamento na descarga elétrica faz dela um rico e interessante “laboratório” de estudos da dinâmica não linear.

A origem do que hoje denominamos de caos remonta aos tempos de Poincaré que, no fim do século XIX, ao estudar o problema de três corpos na mecânica celeste, percebeu que equações determinísticas de movimento podem originar complexas soluções não periódicas. Talvez o caos não tenha suscitado maior interesse no início do século XX, porque naquela época a comunidade física estava fascinada desvendando os segredos da mecânica quântica e porque não existiam computadores. De fato, é simultaneamente com o desenvolvimento dos computadores, a partir da década de 60, que o estudo da dinâmica caótica tomou ímpeto. Assim sendo, a investigação de sistemas físicos não lineares que exibem comportamento caótico determinístico está atraindo muita atenção nos últimos anos. Entre eles, podemos incluir a descarga elétrica.

No âmbito deste trabalho, exploramos e realçamos a descarga elétrica como sistema dinâmico não linear. Entre as várias formas de descarga possíveis, este trabalho focaliza uma: a descarga elétrica luminosa subnormal. Nela investiga-se a ocorrência de caos homoclínico, que é um particular tipo de comportamento caótico. Queremos alertar o leitor que este trabalho não é um compêndio de caos determinístico em sistemas dinâmicos. Nesse sentido, a abrangência deste trabalho é bastante restrita. A análise de caos em sistemas dinâmicos a partir de primeiros princípios pode ser encontrada na literatura especializada, como, por exemplo, o livro “Caos: uma Introdução” [FP94]. A concepção do presente trabalho se pautou pelo princípio de abordar o comportamento caótico em função da descarga elétrica. Assim, apresentamos alguns aspectos da dinâmica caótica, sempre no contexto da descarga elétrica investigada, que fundamentem a observação de caos determinístico neste sistema e possibilitem a caracterização do caos homoclínico. Para tanto, adotamos a seguinte seqüência:

No capítulo 1, caracterizamos a descarga elétrica luminosa subnormal em termos de sua curva tensão \times corrente ($V \times i$) e analisamos as oscilações que ela apresenta, para condições experimentais adequadas, na corrente elétrica que flui através dela. Fazemos considerações qualitativas sobre o funcionamento da descarga, visando explicar a fenomenologia observada. Encontramos evidências para explicar as complexas oscilações não periódicas, que são observadas experimentalmente nesta descarga, como sendo a manifestação de um processo determinístico.

No capítulo 2, apresentamos os primeiros resultados da ocorrência de caos determinístico na descarga elétrica luminosa e, a partir deles, introduzimos alguns conceitos importantes (tais como: caos, rota para o caos, espaço de fase, órbitas periódicas instáveis) para a dinâmica caótica e que nos permitam compreender a ocorrência, na descarga elétrica luminosa subnormal, de caos homoclínico. Esse é um termo que sintetiza o comportamento caótico que um sistema pode apresentar quando a sua dinâmica é influenciada pela presença de uma órbita homoclínica.

No capítulo 3, demonstramos que o caos homoclínico observado na descarga elétrica é facilmente caracterizado através de mapas de retorno. Mostramos como obter quatro tipos de mapas de retorno: o mapa do tempo de retorno, o mapa do tempo de vôo, o mapa da seção de Poincaré e o mapa das amplitudes máximas. Os três últimos apresentam uma estrutura ramificada. A análise dos mapas indica que eles são equivalentes e, portanto, todos fornecem a mesma informação dinâmica. Introduzimos os conceitos básicos da dinâmica simbólica aplicada a mapas unidimensionais, o que nos permite evidenciar a existência de uma órbita homoclínica na dinâmica da descarga elétrica analisada.

No capítulo 4, após executarmos uma análise topológica da evolução da descarga luminosa no seu espaço de fase, apresentamos um modelo geométrico que dá conta dos mecanismos de estiramento e de dobradura desta evolução no espaço de fase: o molde topológico da ferradura. A presença da órbita homoclínica induz uma estrutura nesse molde, o que nos permite prever o comportamento qualitativo da descarga luminosa à medida que ela se aproxima da órbita homoclínica.

Finalizamos com as conclusões. As principais contribuições deste trabalho podem ser encontradas nas referências [BLG92, BtL94, BBL+94, BCA95].

Capítulo 1

A Descarga Elétrica Luminosa Subnormal

Consideremos um meio gasoso a baixa pressão situado entre dois eletrodos aos quais está aplicado um campo elétrico. Inicialmente, as moléculas e átomos que constituem o gás são eletricamente neutros e, portanto, não são portadores de carga. Ainda assim os gases apresentam uma pequena condutividade elétrica devido à presença de cargas livres (elétrons), provenientes da ionização causada por: radioatividade natural, radiação cósmica, luz ultravioleta e outros mecanismos. Esta condutividade residual depende da natureza do gás e pode ser tão pequena que o gás ainda é considerado um isolante quase perfeito. Ao se aplicar um campo elétrico suficientemente intenso, essas cargas residuais ganham energia do campo e, se essa energia é suficiente para, em uma colisão com um átomo neutro, ionizá-lo, então gera-se uma avalanche de cargas. A quantidade de portadores de carga é tal que o gás vira um condutor quase perfeito. Nessa situação, a fração de íons em relação ao total de átomos e/ou moléculas do gás é da ordem de 10^{-6} [Ra91,p.2], o que caracteriza o gás como sendo um plasma de baixa temperatura.

Quando na descarga elétrica os processos de criação e neutralização de cargas operam conjuntamente de tal forma que haja um equilíbrio de cargas livres, então diz-se que se desenvolveu uma descarga elétrica autosustentada. Caso contrário, tem-se uma descarga que não se mantém estável.

Neste trabalho analisa-se um exemplo de descarga autosustentada: a descarga elétrica luminosa subnormal. O fato dessa descarga ser autosustentada não implica que a corrente que ela conduz seja estacionária. Porém, antes de discutir as características oscilatórias

da descarga elétrica subnormal, apresentaremos as diferentes montagens experimentais empregadas. Após, por intermédio da curva $V \times i$, caracteriza-se a descarga luminosa subnormal. Interpretam-se, então, os resultados obtidos modelando a descarga por um circuito elétrico equivalente. Finalmente, abordam-se as oscilações da corrente com características não periódicas. Neste capítulo, são feitas considerações que visam explicar a fenomenologia observada e que também procuram mostrar que as complexas oscilações não periódicas (caóticas), apresentadas pela descarga elétrica aqui analisada, são de natureza determinística.

1.1 Configuração Experimental

Para implementar uma descarga elétrica, usualmente, monta-se um circuito elétrico contendo uma fonte de tensão, um resistor de carga e uma célula de descarga; todos esses componentes são montados em série. A célula de descarga basicamente consiste de dois eletrodos, geralmente metálicos, separados por uma certa distância. Todo o conjunto é encapsulado, normalmente por um tubo de vidro, de tal forma que seja possível manter no interior da célula um gás à baixa pressão. As células de descarga são abertas ou seladas conforme se queira, respectivamente, mudar ou não a pressão do gás.

Dependendo da tensão existente entre os eletrodos, rompe-se o comportamento isolante do gás no interior da célula. Diz-se então que se estabeleceu uma descarga elétrica no meio entre os eletrodos. O resistor de carga tem a função de limitar a corrente i que flui no circuito enquanto a descarga se mantém ativa. Para se alterar as condições de operação da descarga elétrica, deve-se mudar a tensão aplicada V entre os eletrodos. Isto pode ser feito de duas formas: variando a tensão da fonte (V_F) ou variando o valor da resistência de carga (R_C). Neste trabalho manteve-se o valor dessa resistência fixo e variava-se a tensão fornecida pela fonte ao circuito.

Na figura 1.1 apresenta-se o circuito elétrico no qual a célula de descarga está inserida. O retângulo arredondado representa o encapsulamento da célula; K indica o catodo e A , o anodo da descarga. V_F é uma fonte de tensão contínua (CC), negativa e estabilizada (Ortec model 456). R_C é o resistor de carga. Através da queda de tensão V_i em R_i determina-se

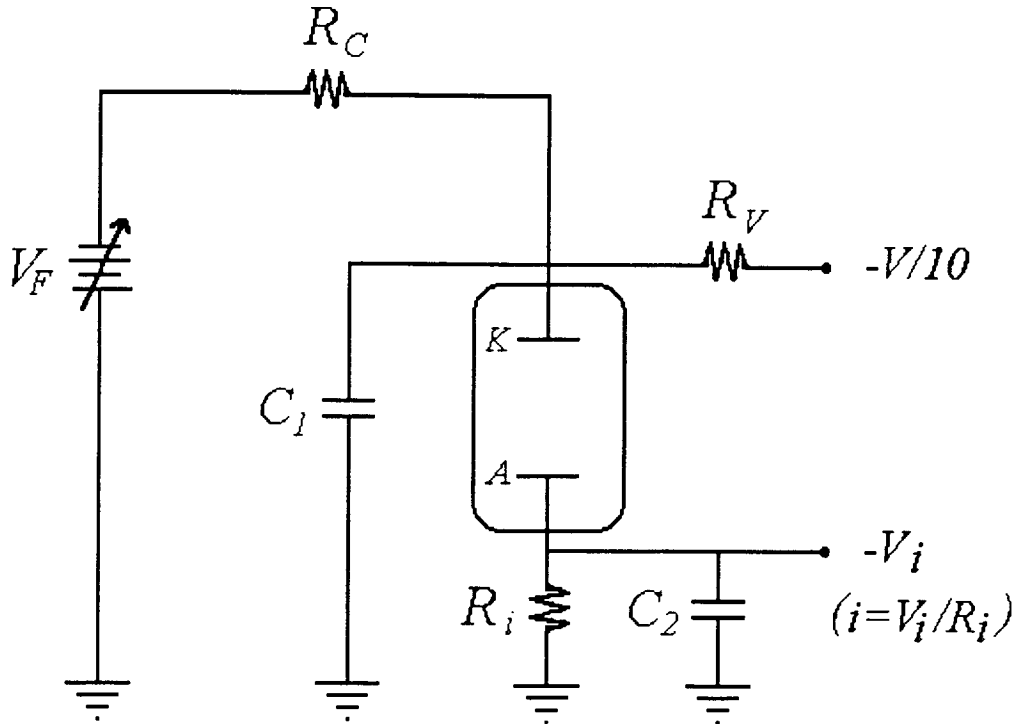


Figura 1.1: Esquema do arranjo experimental empregado.

$i (=V_i/R_i)$. V_i é medido com um osciloscópio. Ao se conectar o resistor R_V ($10\text{ M}\Omega$) ao osciloscópio, que tem uma impedância de entrada de $1\text{ M}\Omega$, forma-se um divisor de tensão tal que o osciloscópio mede $V/10$. Na realidade, V não é estritamente a tensão existente entre os eletrodos (V_{KA}), mas $V = V_{KA} + V_i$. Desde que $R_i \ll R_C$, nós podemos considerar $V = V_{KA}$. As medidas efetuadas (V e/ou V_i) são digitalizadas e armazenadas em arquivos para posterior análise. O papel de C_1 e C_2 na figura 1.1 será discutido a seguir ao descrevermos as várias montagens desse circuito e as respectivas células de descarga empregadas:

1. Montagem 1 [BLG92] – A célula foi montada a partir de um tubo de vidro de 75 mm de comprimento e com $23,8\text{ mm}$ de diâmetro interno. Nas extremidades desse tubo havia conexões metálicas para vácuo (32 KF). Por meio delas, uma extremidade do tubo era fechada com uma flange metálica, que também sustentava o catodo, e a outra extremidade do tubo conectava-se a uma estrutura metálica. Nessa estrutura estava preso o anodo de tal modo que era possível deslocá-lo. Assim, podia-se alterar a

distância entre os eletrodos (d_{KA}) sem romper o vácuo. Os eletrodos eram cilíndricos, confeccionados de latão e com diâmetros $\phi_K = 12 \text{ mm}$ e $\phi_A = 19,2 \text{ mm}$; eles estavam devidamente isolados das peças metálicas da célula. Na estrutura metálica da célula, tinha-se, frente a frente, as conexões de entrada e saída do gás. O compartimento da descarga, a entrada e a saída do gás estavam dispostos em forma de T de modo que o gás se difundia até a posição dos eletrodos. Junto da conexão de entrada do gás media-se a sua pressão (p) através de um Pirani (Edwards). O valor dessa pressão era controlado através de uma torneira de agulha (Nupro) instalada na admissão do gás. Na conexão de saída do gás estava ligada uma bomba rotativa de vácuo (Edwards ou Ibav; o vácuo atingido era da ordem de 10^{-2} mbar) que mantinha a circulação do gás pela célula. O gás empregado era argônio comercial puro. Devido as conexões de vácuo na célula, era fácil desmontá-la para limpar as impurezas acumuladas no seu interior provenientes principalmente do desgaste dos eletrodos. Mediu-se V_i com um digitalizador montado no laboratório com um microcomputador MSX e um conversor analógico-digital com resolução de 8 bits. Podia-se gravar 16000 dados espaçados por um tempo de amostragem $t_a = 4,3 \mu s$. Como veremos adiante em maior detalhe, V_i apresenta-se na forma de oscilações relaxadas com um tempo de subida da ordem de $1 \mu s$. Para obter uma melhor performance na digitalização, introduziu-se os capacitores C_1 e C_2 no circuito. C_1 tem a função de desviar as componentes de alta frequência do sinal para a terra. Essas componentes normalmente estão associadas à presença de ruído no circuito. C_2 tem o propósito de atenuar a acentuada subida da oscilação relaxada. Nessa montagem usamos $d_{KA} = 11 \text{ mm}$, $p = 2 \text{ mbar}$, $V_F \simeq 500 \text{ V}$, $R_C = 900 \text{ k}\Omega$, $R_V = 10 \text{ M}\Omega$, $R_i = 2 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 180 \text{ pF}$ e $C_2 = 5600 \text{ pF}$.

2. Montagem 2 [BtL94] – Utilizou-se a mesma célula de descarga descrita no item anterior, modificando-se apenas o diâmetro do anodo e a distância d_{KA} . Agora temos $\phi_K = \phi_A = 12 \text{ mm}$, $d_{KA} = 5,5 \text{ mm}$ e $p = 2,2 \text{ mbar}$. No circuito, excetuando-se $R_V = 10 \text{ M}\Omega$, alterou-se o valor dos outros componentes, a saber: $V_F \simeq 300 \text{ V}$, $R_C = 1 \text{ M}\Omega$, $R_i = 100 \Omega$, $C_1 = C_d$, que é a capacitância, sempre presente, existente entre os eletrodos da descarga ($C_d \sim \text{alguns pF}$)¹, e $C_2 = 0$. A alteração de C_1 e

¹ C_d é maior que a capacitância obtida a partir da configuração geométrica dos eletrodos porque leva em conta a contribuição devida à distribuição espacial do plasma da descarga [SG86b].

C_2 foi possível porque nessa montagem empregou-se uma placa digitalizadora (Sonix STR 825, resolução de 8 bits e memória de aquisição de 64kbytes) operando num microcomputador PC 8086. O tempo mínimo de amostragem agora era $t_a = 40 ns$. Nós usamos $t_a = 0,16 \mu s$. Assim, o tempo de amostragem menor permitiu, em relação à montagem anterior, reduzir as capacitâncias de C_1 e C_2 e obter uma melhor resolução na medida.

3. Montagem 3 – Nesta última montagem a célula de descarga era similar às anteriores, só que foi confeccionada evitando-se ao máximo o uso de metais, excetuando-se obviamente os eletrodos e conexões elétricas. Este procedimento foi adotado porque a proximidade de objetos metálicos pode influenciar a distribuição do campo elétrico entre os eletrodos e nesta montagem procuramos reduzir essas perturbações. Assim, a célula e suas conexões de vácuo foram feitas inteiramente de vidro. O corpo da célula foi confeccionado com um tubo de 270 mm de comprimento e 23,8 mm de diâmetro interno. As extremidades do tubo eram fechadas por peças de vidro que se encaixavam nas conexões de vácuo da célula. Essas peças também prendiam os eletrodos que eram cilíndricos, feitos de latão e com $\phi_K = \phi_A = 12 mm$. Nesta montagem, como nas anteriores, o anodo era móvel de modo que d_{KA} podia ser variado sem romper o vácuo. A célula também podia ser facilmente desmontada para limpeza. A limpeza dos eletrodos era feita com abrasivos e o interior da célula de vidro era limpo com ácido. A entrada e a saída do gás estavam próximas, respectivamente, do catodo e do anodo. Assim, a bomba de vácuo provocava um fluxo de gás através da célula, sendo que a pressão do gás era controlada por uma torneira de agulha na entrada e na saída media-se a sua pressão. Nesta montagem mediu-se V e V_i com um osciloscópio digital de dois canais (Lecroy 9310L, cada canal tem resolução de 8 bits e memória de aquisição de 1 Mbytes). O tempo mínimo entre aquisições era $t_a = 10 ns$; o osciloscópio selecionava o valor de t_a em função da extensão do sinal medido. Nesta montagem usamos $d_{KA} = 9 - 10 mm$, $p = 4 mbar$ de argônio, $V_F \approx 200 V$, $R_C = 1 M\Omega$, $R_V = 10 M\Omega$, $R_i = 100 \Omega$, $C_1 = C_d$ e $C_2 = 0$.

1.2 A Curva $V \times i$ Estática

Para os nossos propósitos é suficiente encarar a descarga elétrica num gás como componente macroscópico não linear de um circuito elétrico onde ela é submetida a uma certa tensão e conduz determinada corrente. Portanto, estamos interessados em saber qual é a corrente i conduzida pela descarga, quando é aplicada uma tensão V ao gás. Este tipo de informação constitui a característica $V \times i$ da descarga elétrica.

Deve-se levar em conta que é bastante comum uma descarga elétrica apresentar instabilidades que se traduzem em oscilações nos valores de V e i , embora a tensão V_F fornecida pela fonte seja estritamente constante. As publicações sobre esse assunto, anteriores a 1950, foram revisadas por Francis [Fr56]. A partir dessa época surgiram os primeiros estudos osciloscópicos das oscilações [DD51, Pi57]. Estudos mais recentes sobre oscilações, já considerando especificamente uma descarga elétrica luminosa subnormal, foram feitos por Zakharenko e Privalov [ZP71], Nema e Shrivastava [NS73], Singh e Shrivastava [SS85], Singh e Gour [SG86a], Melekhin *et al.* [MNT87], Braun *et al.* [BLF+87], Bosan *et al.* [BZM88], Singh *et al.* [SGC89], Braun *et al.* [BLG92], Braun e Lisboa [BIL94], Braun e Lisboa [BtL94], Braun *et al.* [BBL+94] e Braun *et al.* [BCA95].

Se V e i são variáveis dependentes do tempo, é difícil obter uma curva $V \times i$ estática para a descarga nessas condições. Essa curva normalmente tem a forma de um “S” deitado e invertido (isto é, “ \sim ”) quando V está no eixo das ordenadas e i , no eixo das abscissas [Fr56,p.54, Ra91,p.173]. A resistência dinâmica (R_d) da descarga em cada ponto (i, V) dessa curva é definida pela derivada dV/di . De acordo com o sinal de R_d (isto é, conforme a declividade da característica), classifica-se a operação da descarga em regimes distintos, como veremos a seguir.

Quando há flutuações nos valores a serem medidos, muitas vezes procura-se registrar valores médios para obter a curva característica $V \times i$ estática. No entanto, esse procedimento não é muito adequado porque a curva resultante dependerá da forma como foi obtida e poderá ter uma aparência um tanto quanto arbitrária. Além disso, o circuito externo (isto é, os valores de R_C e C_1 na figura 1.1) influi na forma da característica [MNT87]. Assim, na interpretação dessa curva, sempre se deve considerar a maneira utilizada para

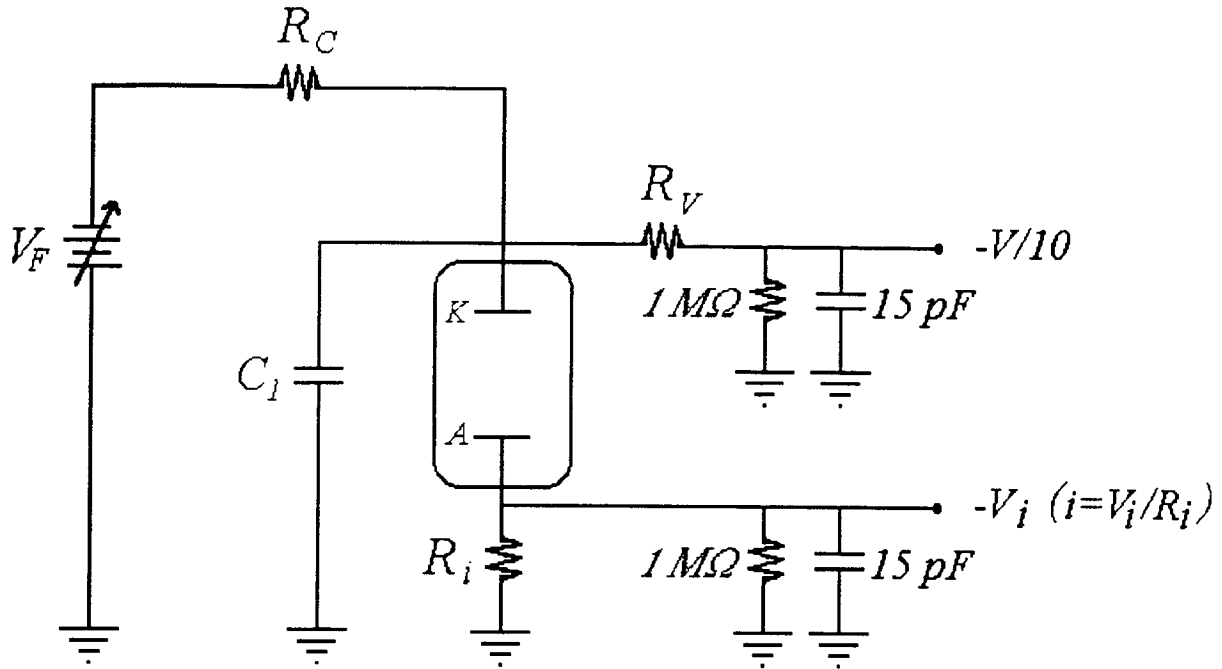


Figura 1.2: Circuito empregado para obter a curva $V \times i$ estática da descarga elétrica; $R_C = 2,5 \text{ k}\Omega$, $R_V = 10 \text{ M}\Omega$, $R_i = 100 \Omega$, $C_1 = C_d$. Os demais parâmetros da célula são similares à montagem 3.

obtê-la. Portanto, reproduz-se na figura 1.2 o circuito empregado para traçar essa curva, representando-se inclusive as resistências e capacitâncias de entrada do osciloscópio. Esse circuito difere do circuito da figura 1.1 no valor de R_C . Isso porque, conforme Melekhin *et al.* [MNT87], a descarga é instável² (isto é, apresenta oscilações) quando $R_C > |R_d|$. Numa descarga similar a nossa determinou-se que $R_d \sim 10 \text{ k}\Omega$ [BIL94], por isso escolhemos $R_C = 2,5 \text{ k}\Omega$ para eliminar as oscilações no circuito e dessa forma obter uma característica $V \times i$ estática da descarga elétrica empregada.

O procedimento adotado na obtenção da curva foi o seguinte: estando a descarga “desligada” (ou seja, o gás é isolante; $i = 0$), aumenta-se linearmente a tensão da fonte V_F até um valor $V_F > V_R$. Em V_R a descarga “dispara” (o gás se torna condutor; $i \neq 0$). Depois diminui-se linearmente V_F até o valor inicial. Durante esse procedimento registra-se a tensão na descarga (V) e sua corrente (i). A curva resultante está na figura 1.3. Ela mostra a existência de um ciclo de histerese nesse processo de primeiro aumentar e depois

²Veja as considerações sobre a estabilidade da descarga na próxima seção.

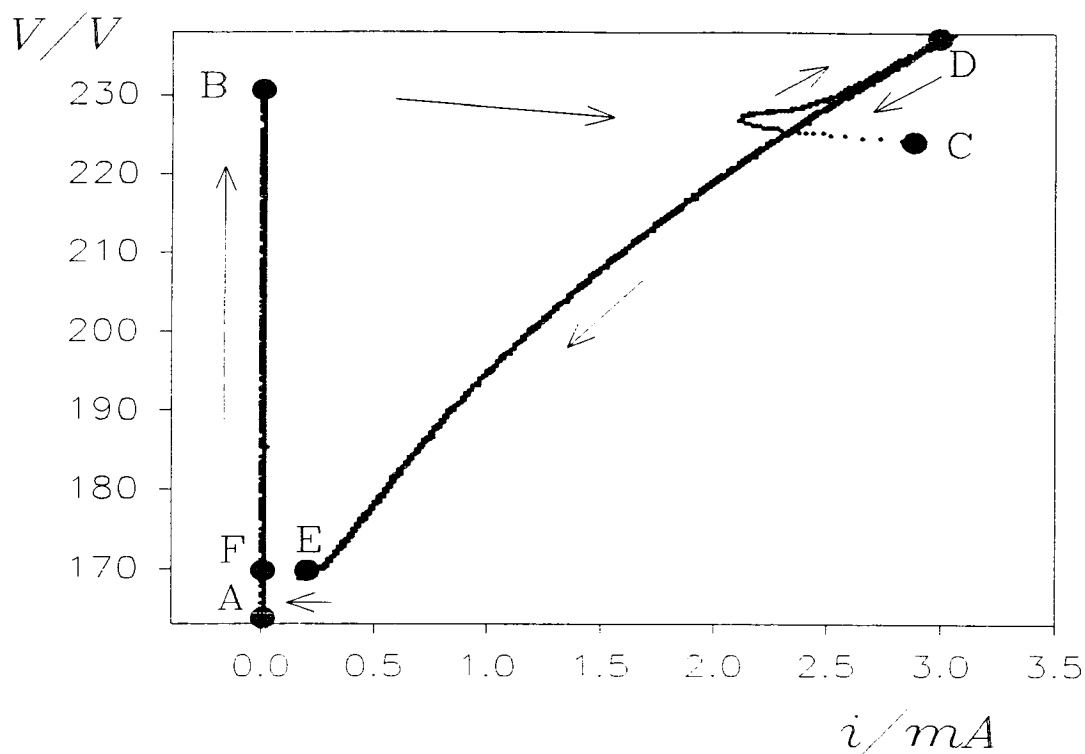


Figura 1.3: Curva característica $V \times i$ estática obtida para a descarga da montagem 3.

diminuir V_F . Quando se aumenta V_F , enquanto a descarga está desligada, tem-se $V = V_F$ e $i = 0$. O ponto de operação da descarga, que é especificado pelo par ordenado (i, V) correspondendo à corrente e tensão na descarga, desloca-se de A até B na característica. Para $V = V_R$ ocorre a ruptura do comportamento isolante do gás e ele se torna condutor. O ponto de operação pula de B para C, onde $i \neq 0$ e $V < V_R$ ³. Continuando a aumentar V_F , V e i crescem e o ponto de operação vai de C a D. Agora, diminuindo V_F , o ponto (i, V) caminha de D até E. Neste instante, para um decréscimo adicional de V_F , a descarga desliga ($i = 0$) e o ponto de operação pula de E para F. Depois, diminuindo mais V_F , esse ponto se desloca de F a A.

Devido a presença da histerese, essa curva se apresenta descontínua. Na realidade, ela é contínua e podemos considerar que a seção BE ausente da curva tenha a forma de um ramo de parábola com vértice em E. Assim, seguindo a nomenclatura normalmente adotada [Fr56,p.55], a seção BE da curva identifica o regime de operação **subnormal** e a seção ED

³Em C, $V < V_R$ porque, depois da ruptura, os mecanismos de produção de cargas livres se tornam mais eficientes de modo que a descarga pode funcionar com uma tensão menor. Também se observa uma “sobrecrista” (overshoot) no comportamento de i .

corresponde ao regime **anormal**. Entre ambos, há um terceiro regime que é chamado de **normal** e ao qual deveria corresponder um patamar (isto é, i aumenta mas V se mantém constante). No nosso caso esse patamar é praticamente inexistente e o regime normal se reduz a uma pequena região em torno do ponto E.

A histerese indica que a descarga do circuito da figura 1.2 não opera no regime subnormal (BE). Já a descarga do circuito da figura 1.1 pode funcionar nesse regime – situação na qual ela apresenta oscilações que serão analisadas na próxima seção. Tendo-se o conhecimento da característica $V \times i$ estática da descarga elétrica empregada, obtida com o circuito da figura 1.2, pode-se determinar o ponto de operação (i, V) dessa descarga que corresponde à tensão V_F utilizada no circuito da figura 1.1. Para tanto, aplicando a conservação da energia à malha principal do circuito da figura 1.1, obtém-se

$$V = -(R_C + R_i)i + V_F \quad (1.1)$$

que é a chamada reta de carga do circuito. A intersecção dessa reta com a característica $V \times i$ estática da descarga elétrica,

$$V = f(i), \quad (1.2)$$

determina o ponto de operação (i, V) . No nosso caso o ponto de operação é deslocado alterando-se V_F , o que implica que se muda a posição da reta de carga, mas não a sua declividade.

1.3 Características Oscilatórias da Descarga Elétrica Subnormal

Na característica $V \times i$ estática, correspondente ao regime de operação subnormal da descarga elétrica, a curva apresenta uma declividade negativa (ou seja: $R_d < 0$). Essa resistência negativa pode ser interpretada como uma fonte de energia [AVK66,p.50] alimentando instabilidades (oscilações) auto geradas e sustentadas pela descarga nesse regime.

O fato de que há oscilações na descarga quando o ponto de operação está no regime subnormal indica que, nessa situação, esse ponto corresponde a um ponto de equilíbrio instável. Para entender isso, suponhamos que, para uma certa tensão V_F , esse ponto seja

dado por (i_0, V_0) e vejamos o que acontece para pequenas variações $\delta i \equiv i - i_0$ na corrente. Se $\delta i > 0$, uma tensão $V < V_0$ pode manter a corrente $i_0 + \delta i$; dessa forma, a corrente tende a crescer. Se $\delta i < 0$, a tensão existente V_0 será menor que a tensão necessária para sustentar a descarga para $i_0 - |\delta i|$ e, em função disso, a corrente i tende a se extinguir. Vê-se, assim, que qualquer flutuação afastará a operação da descarga de (i_0, V_0) e, por isso, dizemos que esse ponto é instável. Para uma análise mais precisa, deve-se considerar que, conforme foi descrito por Melekhin e Naumov [MN84], não se pode usar a característica $V \times i$ estática para analisar a estabilidade do ponto de operação quando esse se situa no ramo correspondente ao regime subnormal (declividade negativa!) da curva. Mesmo as condições derivadas por Andronov et al. [AVK66,p.239], considerando o tempo característico dos processos na descarga ser bem menor que o tempo característico $(R_C C_1)$ do circuito externo ⁴, não são estritamente válidas.

Embora não conheçamos exatamente o formato da curva característica no regime subnormal, é razoável supor que as oscilações se dão em torno do ponto de operação (i, V) . Para entender isso, suponhamos que a descarga opere nesse ponto (i, V) . Devido à instabilidade desse ponto, a operação da descarga se afasta dele, alimentada pela energia da “fonte” R_d . Durante esse processo, mecanismos de perda começam a influir até que haja um equilíbrio entre ganhos e perdas. Nessa situação as evoluções de V e i , parametrizadas pelo tempo, estabelecem um ciclo fechado no plano iV que é denominado de ciclo limite. Esse ciclo corresponde a uma situação de equilíbrio estável e por isso observam-se as oscilações periódicas na corrente i como a figura 1.4 indica. Nessa figura, a) e b) representam evoluções periódicas, enquanto que em c) temos uma evolução não periódica. A mudança do comportamento das oscilações está associada a valores distintos da tensão V_F . Em d) e e) os ciclos são estáveis, mas em f), devido a não periodicidade, o ciclo deve ser instável. Sobreposto aos ciclos estáveis [d) e e)] e instável [f)], está a característica estática da figura 1.3 (linha pontilhada) e a reta de carga correspondente ao V_F considerado. Procuramos explicar a origem das oscilações periódicas na próxima seção, enquanto que o comportamento não periódico será analisado na última seção.

⁴ Isso implica que para uma pequena variação nas condições do circuito externo, V_F por exemplo, os processos na descarga atingem “instantaneamente” uma situação de equilíbrio.

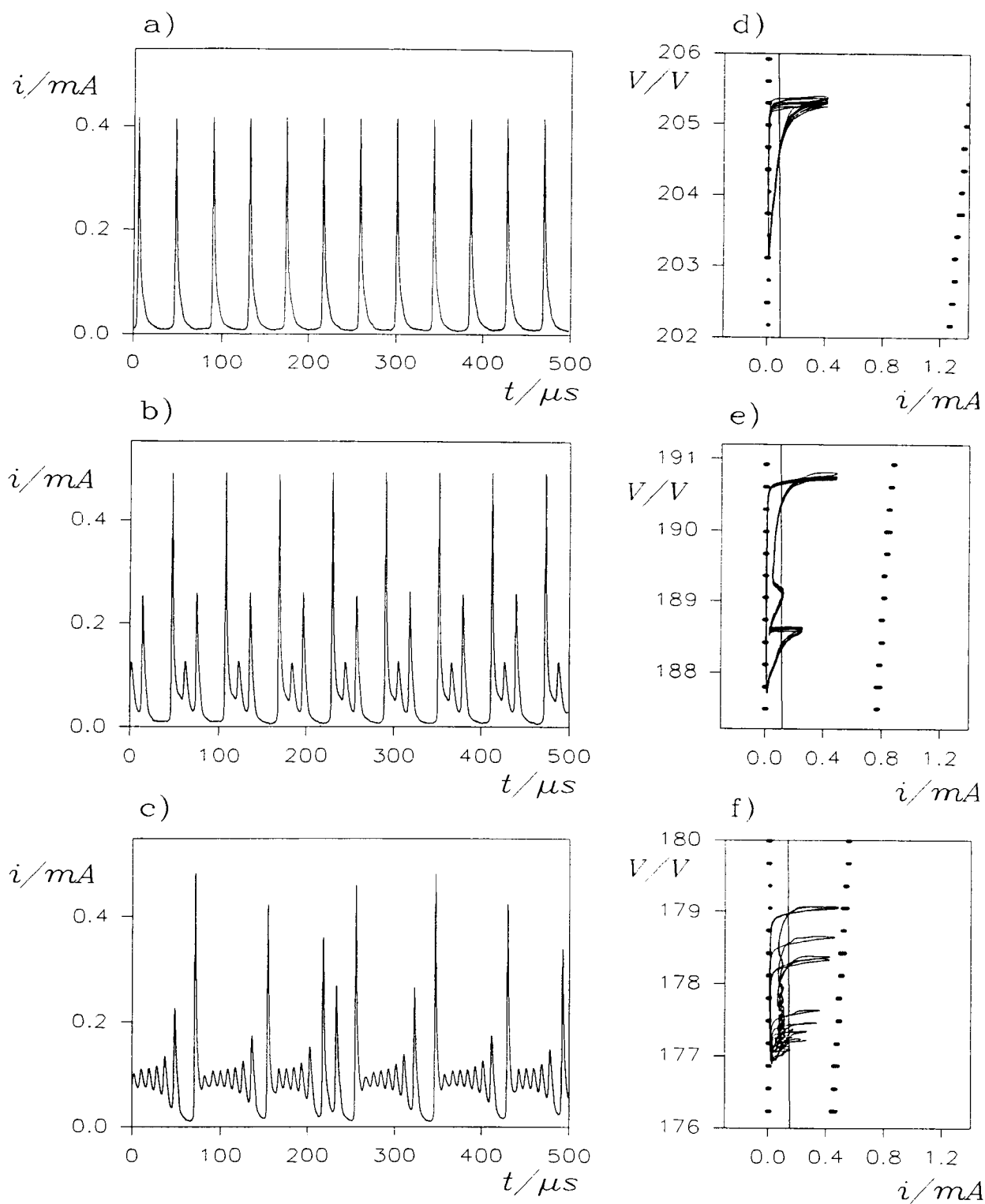


Figura 1.4: Oscilações observadas na descarga elétrica luminosa subnormal. Em a), b) e c) estão as evoluções temporais da corrente i correspondendo, respectivamente, a tensões V_F de 339 V, 345 V e 355 V. Em d), e) e f) temos as correspondentes características $V \times i$ oscilatórias. A linha pontilhada é a característica estática e a reta é a reta de carga. Esses resultados foram obtidos com a montagem 3.

1.4 Modelagem por Circuito Equivalente

Uma inspeção visual da descarga elétrica luminosa mostra a presença de zonas claras e escuras distribuídas de uma forma característica na região entre os eletrodos (veja-se, por exemplo, [Fr56,p.56,Ra91,p.169]). Isso indica que ali a densidade de carga espacial não é uniforme e que o campo elétrico entre os eletrodos também não é homogêneo. Em função disso, se quisermos analisar a condutibilidade elétrica do plasma da descarga a um nível microscópico, certamente teremos que considerar equações com variáveis dependentes espaciais e temporais (tais como as equações de transporte de momento e de energia para elétrons, íons e espécies neutras, além das equações da continuidade, da difusão, de Poisson, entre outras). Resultará, obviamente, um problema de difícil solução. Por outro lado, se estamos interessados apenas na capacidade da descarga conduzir uma corrente elétrica, podemos adotar uma caracterização macroscópica do plasma da descarga. Isso pode ser feito considerando um circuito elétrico equivalente no lugar desse plasma. A ação conjunta dos componentes desse circuito tem o mesmo efeito que os complexos mecanismos operando no plasma no que se refere à condutibilidade elétrica da descarga. Uma vantagem dessa abordagem é que não se considera mais a dependência espacial dos processos ocorrendo no plasma pois, ao se adotar um circuito com componentes discretos, é como se fosse efetuada uma média espacial das variáveis relevantes nesses processos. Assim, a título de ilustração, se tivermos uma aglomeração de cargas positivas numa região da descarga e uma concentração de cargas negativas noutra região, essa distribuição de cargas será simulada por um capacitor no modelo do circuito equivalente. Ao se considerar um capacitor discreto, eliminou-se a dependência espacial dessa distribuição de cargas. Portanto, na modelagem por circuito equivalente, considera-se apenas a dependência temporal das variáveis.

A descarga elétrica, como componente de um circuito elétrico, fica plenamente caracterizada pela tensão V existente entre seus eletrodos e pela corrente i que flui através dela, relacionadas por $V = f(i)$. Há outras variáveis, tais como a pressão e a temperatura, que também podem influir na descarga e que seriam consideradas em $V = f(i)$ como parâmetros externos. Nós desprezamos essa dependência. Portanto, V e i serão as variáveis relevantes nessa caracterização macroscópica. Já sabemos que no regime subnormal da descarga essas variáveis apresentam oscilações que, à medida que V_F aumenta, podem

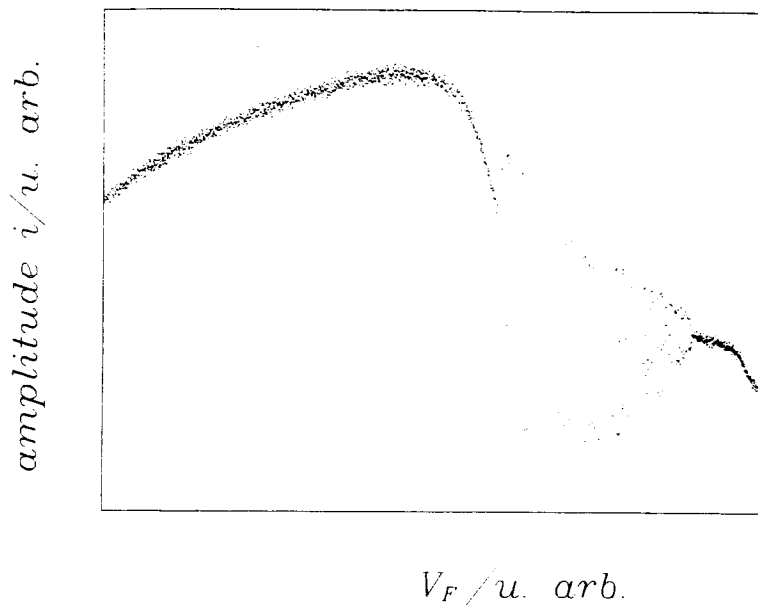


Figura 1.5: Evolução da amplitude das oscilações em i observadas na descarga elétrica luminosa subnormal à medida que se aumenta V_F . O resultado foi obtido com a montagem 1.

mudar a sua forma, inclusive se tornar aperiódicas. Para explicar esse comportamento, analisaremos a evolução da amplitude das oscilações à medida que se incrementa V_F a partir de V_R , como mostra a figura 1.5. Nota-se dessa figura que, inicialmente, a amplitude das oscilações cresce para depois diminuir. Essa mudança será explicada em termos de dois circuitos, um RC e outro RLC , conforme as amplitude sejam, respectivamente, crescentes ou decrescentes ao se aumentar V_F .

1.4.1 Circuito RC

Para tensões da fonte próximas da ruptura ($V_F \gtrsim V_R$) observam-se oscilações em V e i como as mostradas na figura 1.6a. Da análise dessa figura conclui-se que essas oscilações correspondem ao processo de carga e descarga de um capacitor. Assim, propõe-se que a descarga possa ser modelada pelo circuito RC com uma chave controlada pela tensão dado na figura 1.7a. A descarga comporta-se essencialmente como uma chave. Quando ela está aberta, o capacitor C_1 é carregado e a tensão V da descarga (capacitor) cresce exponencialmente até atingir o valor $V_{max} = V_R$. Nessa situação se dá a ruptura da descarga

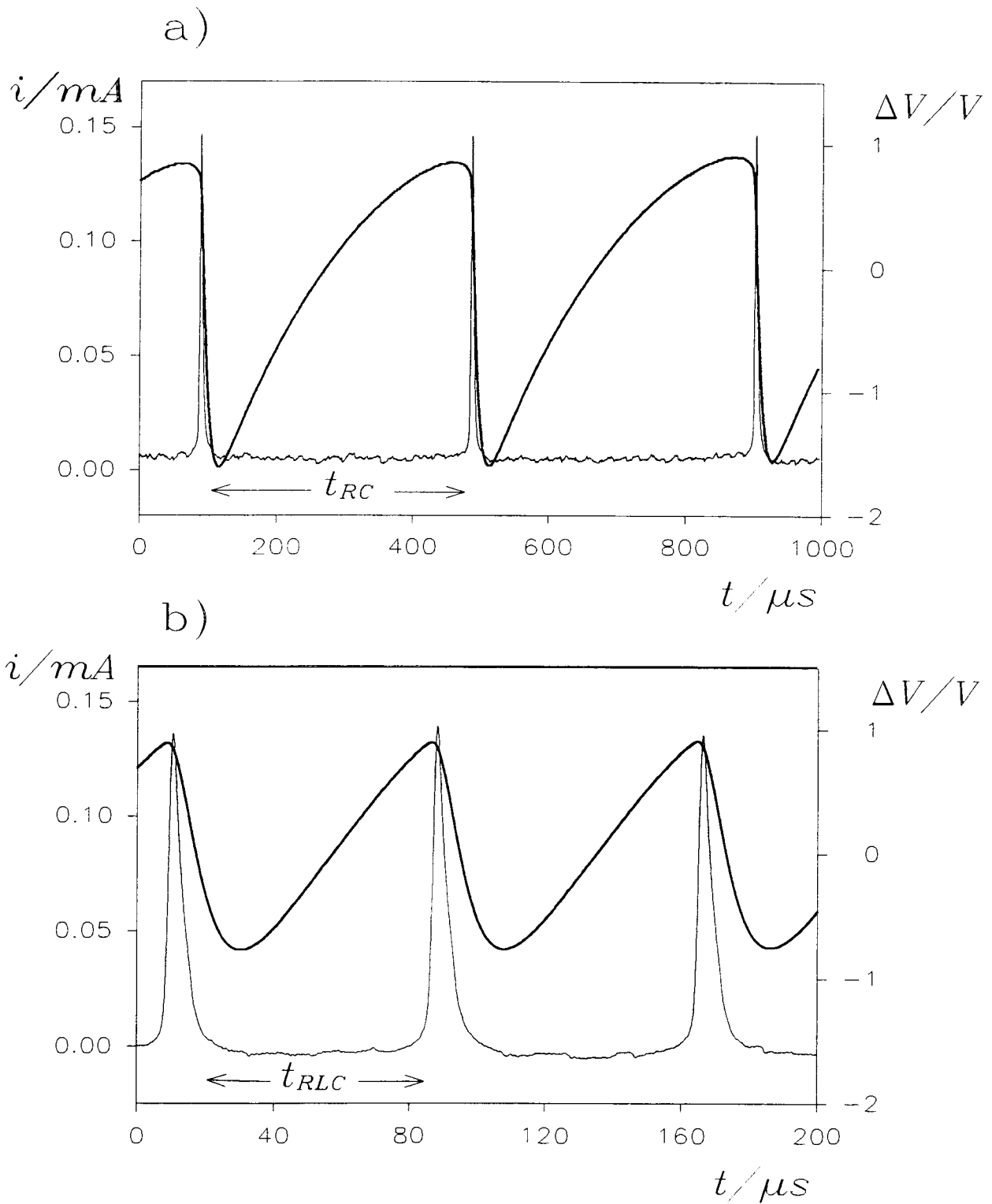


Figura 1.6: Superposição das oscilações em i (traço fraco) e em V (traço forte) correspondentes às situações: a) $V_F \approx V_R$ e b) $V_F > V_R$. Esses resultados foram obtidos com a montagem 3; ΔV é o sinal ca observado que se sobrepõe à tensão cc V .

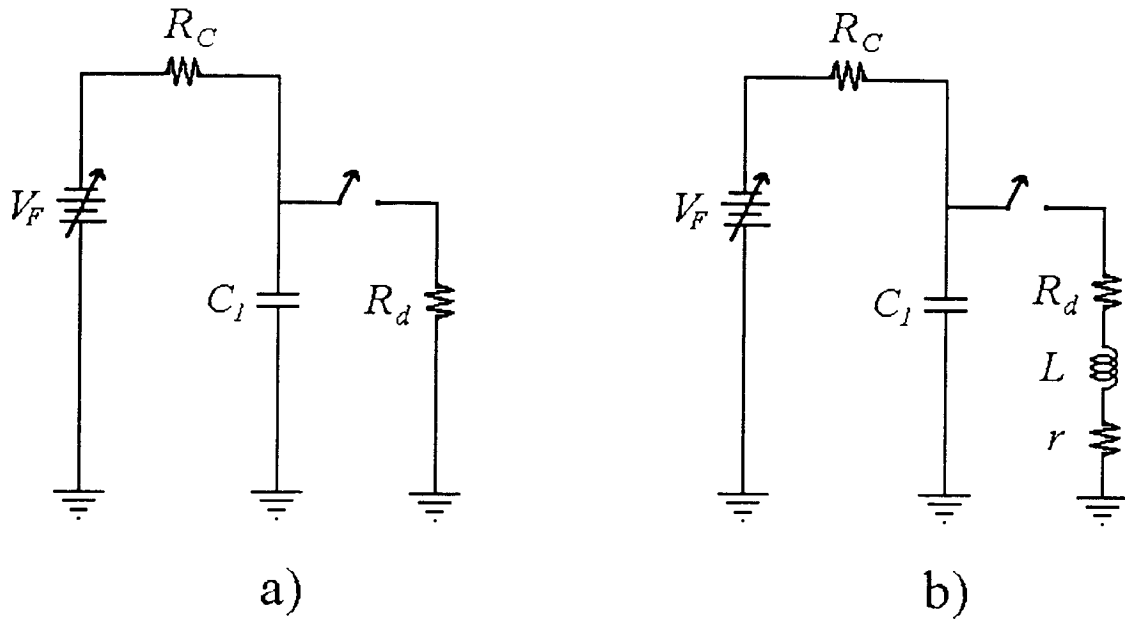


Figura 1.7: Circuitos empregados para modelar a descarga: (a) RC e (b) RLC . A situação (a) corresponde à primeira metade da figura 1.5 e (b) corresponde à segunda metade. $R_d = (dV/di)_{est}$ é a resistência dinâmica da descarga; a derivada é calculada sobre a curva $V \times i$ estática.

e ela passa a ser condutora – o que implica a chave estar fechada agora. Enquanto ela permanece fechada o capacitor se descarrega e, conseqüentemente, a tensão V diminui até um valor V_{min} . Esse é o valor mínimo de tensão necessário para a descarga funcionar; para valores de tensão menores o correspondente campo elétrico entre os eletrodos não é mais suficiente para sustentar os mecanismos de multiplicação de cargas elétricas na descarga. Portanto, para $V < V_{min}$, a descarga cessa e a chave se abre. O capacitor C_1 começa a ser carregado novamente pela fonte e o ciclo se repete. Sempre que o capacitor se descarrega, flui um pulso de corrente i pelo circuito. A sucessão desses pulsos se apresenta na forma de oscilações relaxadas. Essas representam um processo de ruptura repetitivo da descarga elétrica. Através da ruptura é criado um plasma na descarga elétrica que se mantém ativo enquanto durar o pulso de corrente. Cessando a corrente, esse plasma sobrevive ainda um certo tempo até se recombinar completamente. Esse tempo denominamos de tempo de vida do plasma (τ_{plasma}).

Ao se incrementar a tensão da fonte (V_F), o capacitor atinge mais rapidamente V_R e, portanto, o período das oscilações diminui. A forma dos picos de corrente permanece a mesma, apenas o tempo entre os picos diminui e a amplitude deles aumenta, uma vez que essa é proporcional à V_F/R_C no circuito RC . Assim, o circuito RC dá conta do crescimento das amplitudes dos pulsos de corrente à medida que se aumenta V_F , como é observado na primeira metade da figura 1.5. Como a frequência desses pulsos cresce com o aumento de V_F , é natural que a corrente média (\bar{i}) na descarga também cresça com o aumento de V_F .

Na realidade, à medida que se aumenta V_F ($V_F > V_R$), a tensão V sobre a descarga diminui ($V < V_R$), porque o ponto de operação no regime subnormal se desloca na característica $V \times i$ no sentido decrescente de V . A escala de tensão na figura 1.6 mostra a variação de voltagem (ΔV) que fica sobreposta ao valor contínuo V determinado pelo ponto de operação na curva $V \times i$. Aumentando V_F , cresce também a corrente média \bar{i} na descarga e, portanto, os processos de criação de cargas livres (ionização) tornam-se mais eficientes. Em consequência, a descarga pode se manter ativa em tensões menores que V_R . Assim, temos $V_{max} < V_R$ mas, apesar disso, ainda é instrutivo considerar V_{max} como uma tensão de ruptura [BBL+94], como justificaremos a seguir.

Para correntes muito baixas o campo elétrico entre os eletrodos é uniforme, mas para as correntes correspondentes ao regime de operação subnormal o campo entre os eletrodos não é uniforme. Devido a uma redistribuição da carga espacial na descarga, forma-se perto do catodo uma concentração de carga positiva. Em consequência, o campo elétrico próximo do catodo é muito mais intenso comparativamente às outras regiões da descarga. Por causa desse grande gradiente do campo elétrico perto do catodo, a eficiência do processo de multiplicação de cargas é maior ⁵. A intensificação do campo na proximidade do catodo é o mecanismo empregado pela descarga para operar numa tensão $V < V_R$, já que as cargas necessárias para a manutenção da corrente são agora produzidas a tensões menores. Quando a corrente \bar{i} aumenta, a concentração de carga positiva se aproxima mais do catodo. Podemos considerar essa concentração de carga como sendo um anodo virtual que dista d do catodo ($d < d_{KA}$, onde d_{KA} é o espaçamento entre os eletrodos da descarga). Portanto, à

⁵É mais fácil para um elétron ganhar a energia necessária para ionizar um átomo quando ele é acelerado por um campo elétrico intenso durante um caminho curto, pois nessa situação ele fará um menor número de colisões que dificultam a sua aceleração.

medida que \bar{i} cresce, d diminui. A diferença de potencial V_c entre o catodo e o anodo virtual é praticamente toda a tensão V existente entre os eletrodos. Para simplificar a análise, vamos supor que $V_c = E_c d$. O campo E_c deveria manter um fluxo regular de cargas que resultasse na corrente correspondente ao ponto de operação no regime subnormal. Porém, como no nosso caso esse ponto é instável, o fluxo não é regular e a corrente apresenta instabilidades (oscilações). É conveniente considerar essa corrente formada por duas contribuições: uma associada a um fluxo estacionário de carga que dá a corrente I_{est} correspondente ao ponto de operação da descarga e outra associada às instabilidades originando uma corrente Δi . Assim, a corrente total na descarga será $i = i_{est} + \Delta i$ ⁶.

A impossibilidade de atingir um equilíbrio estacionário para o ponto de operação na curva $V \times i$ implica que, correspondendo ao d determinado por \bar{i} e, portanto, V_F , há uma instabilidade na distribuição da carga espacial positiva perto do catodo. Supomos que essa instabilidade se manifesta através de uma oscilação na concentração dessa carga positiva em d . Dependendo das condições, essa oscilação pode representar um equilíbrio dinâmico, dando origem às oscilações periódicas na figura 1.4. Um possível cenário para essa instabilidade é o seguinte: há uma tendência de aumentar a concentração de carga positiva em d e, portanto, aumentam E e V_c . A maior intensidade do campo começa a extrair mais elétrons do catodo que, ao serem atraídos para o anodo virtual, produzem mais cargas quando ionizam átomos neutros por colisão. Para $V_c \sim V_{max}$ resulta uma avalanche de cargas que se expressa na forma de um pulso de corrente Δi . Assim, interpretamos Δi como sendo resultante de um processo de ruptura que ocorre entre o catodo e o anodo virtual. Os elétrons originados pelo pulso de corrente interagem com o excesso de carga positiva em d , neutralizando-o. Nessas condições, Δi decresce e V_c diminui até um valor V_{min} a partir do qual $\Delta i = 0$ ⁷. Então, carga positiva novamente se acumula em d e o processo se repete. Dessa forma, oscilações como a da figura 1.4a também são explicadas pelo modelo do circuito RC , só que o capacitor (C_1 nas figuras 1.1 e 1.7) não é mais formado pelos eletrodos da descarga mas pelo catodo e o anodo virtual. Assim pode-se entender porque o valor da capacitância C_1 aumenta, como já foi mencionado antes, eis

⁶Dependendo dos valores dos componentes do circuito da figura 1.1 [MNT87], a descarga pode não apresentar instabilidades e, portanto, $\Delta i = 0$.

⁷Deve-se lembrar que $i_{est} \neq 0$ nessa situação.

que a distância entre as placas do capacitor diminui. A carga e descarga do capacitor C_1 correspondem a um processo de ruptura repetitivo entre o catodo e o anodo virtual.

1.4.2 Circuito RLC

A partir de um dado V_F a amplitude dos pulsos de corrente começa a diminuir. Isso é claramente visível na segunda metade da figura 1.5. Nessas condições, obteve-se a oscilação da figura 1.6b. Comparando-se essa figura com a anterior (a), é evidente que em (b) o período das oscilações é menor do que em (a) [Note a diferença da escala em (a) e (b)]. A mudança no período é gradual à medida que se incrementa V_F . O decréscimo das amplitudes desses pulsos em função do aumento de V_F indica que o circuito RC não é mais adequado para descrever o comportamento da descarga. Deve-se introduzir uma(s) modificação(ões) nesse circuito para levar em conta processos na descarga que antes não eram significativos. A alteração que fizemos foi introduzir uma indutância L no circuito, transformando-o num circuito RLC (figura 1.7b). A presença da indutância pode provocar a diminuição da amplitude dos pulsos de corrente, pois com ela a impedância Z da descarga pode aumentar e, assim, $i = V/Z$ diminui.

A origem da indutância L no circuito pode ser atribuída a dois fatores: à indutância parasítica da fiação do circuito e a processos que ocorrem no meio da descarga. A contribuição desses processos para a indutância L está associada à energia armazenada no campo magnético da descarga e à maior inércia dos íons relativamente aos elétrons [AVK66,p.222]. Essa última contribuição é a predominante para estabelecer o valor de L ⁸, por isso desprezamos a indutância parasítica da fiação. Como os processos de ionização são mais eficientes à medida que \bar{i} aumenta, é evidente que $L = f(\bar{i})$. Por isso, quando \bar{i} é pequeno (isto é, $V_F \gtrsim V_R$) L é desprezível e temos o circuito RC . Por outro lado, quando \bar{i} aumenta, deve-se considerar L e o circuito equivalente se transforma num RLC . Estabelecer a dependência funcional de L e C com \bar{i} não é trivial, mas certamente será uma dependência não linear.

⁸Note-se que esse conceito de indutância envolve aspectos elétricos e mecânicos do plasma da descarga.

Essa transição do modelo de circuito RC para o RLC está associada com a redistribuição da carga espacial dentro da descarga. Para $V_F \gtrsim V_R$, a distribuição ainda é muito próxima da situação homogênea. Isso equivale a dizer que ainda não se formou o anodo virtual e, portanto, $d \sim d_{KA}$. Agora, à medida que \bar{i} aumenta, cresce a concentração iônica e aparece o anodo virtual ($d < d_{KA}$). A existência desse anodo virtual, além de alterar C_1 , também é considerada no modelo de circuito equivalente pela presença da indutância L , o que acontece quando a desigualdade $V > V_R$ é grande.

Quando as oscilações relaxadas em i começam a diminuir de amplitude, elas assumem um comportamento mais complexo. Por exemplo, elas podem continuar sendo periódicas só que o padrão que se repete não consiste de apenas um pico mas de uma sucessão de picos de amplitudes diferentes (figura 1.4b). Elas podem até se tornar aperiódicas (figura 1.4c), situação que abordaremos a seguir mais detalhadamente.

1.5 Oscilações não Periódicas

O mecanismo responsável pela mudança do comportamento das oscilações pode ser explicado comparando (a) o seu período T , que é decrescente à medida que V_F sobe, com (b) o tempo de vida do plasma formado pelas cargas geradas nas oscilações Δi . Convém enfatizar que doravante consideramos o tempo de vida das cargas criadas pelos pulsos de corrente Δi . Além dessas cargas, há as que são responsáveis pela componente i_{est} da corrente. Como para essas últimas há um equilíbrio entre produção e recombinação tal que se mantém uma concentração estável compatível com o valor de V_F , não as levaremos em conta na análise que se segue, já que procuramos explicar o comportamento das variações na corrente. Assim, quando nos referimos a um plasma, consideramos apenas aquele gerado pelas oscilações Δi e não o gerado pela componente i_{est} . Essa distinção é artificial e é feita por conveniência para poder estender o mecanismo de ruptura, apresentado na seção anterior, às condições correspondentes à figura 1.4c. É dessa forma que procuramos entender a dinâmica qualitativa das oscilações não periódicas da descarga.

Consideremos as oscilações retratadas na figura 1.6. Cada pulso de corrente gera entre o catodo e o anodo virtual uma determinada concentração de cargas. Após o término do

pico no pulso de corrente ($\Delta i \simeq 0$), essas cargas ainda sobrevivem por um tempo τ_{plasma} . Denominamos o tempo durante o qual $\Delta i \simeq 0$ como t_{RC} ou t_{RLC} , dependendo do circuito considerado. Nas condições correspondentes à modelagem pelo circuito RC temos que $\tau_{plasma} < t_{RC}$ e, portanto, no início de cada pulso Δi não há cargas remanescentes do pulso anterior. Porém, assim que a amplitude das oscilações começa a diminuir, situação em que usamos o modelo RLC , o período T delas diminuiu tanto que agora $t_{RLC} \lesssim \tau_{plasma}$. Nessas condições, quando inicia um pulso Δi com duração T ainda há cargas remanescentes do pulso anterior. Assim fica uma memória do pulso anterior na forma de uma “semente” de plasma e que certamente influenciará o desenvolvimento do próximo pulso. Podemos descrever a interação de um pulso (T_n) com o pulso seguinte (T_{n+1}) através de uma relação iterativa da forma:

$$T_{n+1} = F(T_n; V_F). \quad (1.3)$$

F é a expressão matemática dessa interação e V_F é o seu parâmetro de controle tal que, especificando-se um V_F , essa relação deve ser capaz de prever o padrão de oscilação dos pulsos T_n . Assim, considerando a figura 1.4, em (a) [$V_F = 339V$] há um padrão T_n periódico com uma amplitude, em (b) [$V_F = 345V$] há um outro T_n periódico com três amplitudes diferentes e, finalmente, em (c) [$V_F = 355V$] os pulsos T_n possuem um número variável de amplitudes diferentes, alternando os valores de uma forma aparentemente aleatória dentro de um intervalo.

Iremos, agora, analisar em maior detalhe a dinâmica qualitativa de uma oscilação não periódica. Para tanto, reproduzimos na figura 1.8 o Δi correspondente à oscilação não periódica da figura 1.4c e o respectivo ΔV . Nesse último observam-se pulsações na tensão que apresentam a seguinte sistemática: a tensão sobe rapidamente a um valor V_{max} (que não necessariamente é o mesmo para cada pulso) e depois cai a um valor V_{min} ⁹. A amplitude máxima e a duração de cada pulso são variáveis, mas, em relação a qualquer pulso, há duas regularidades importantes a destacar: (a) o tempo de subida de ΔV é menor que o tempo de descida e (b) quando a tensão cai, há pequenas oscilações na tensão que se sobrepõem à queda de tensão.

⁹Os dois valores marcados com setas na figura 1.8 são um pouco maiores que V_{min} , o que atribuímos à presença de ruído.

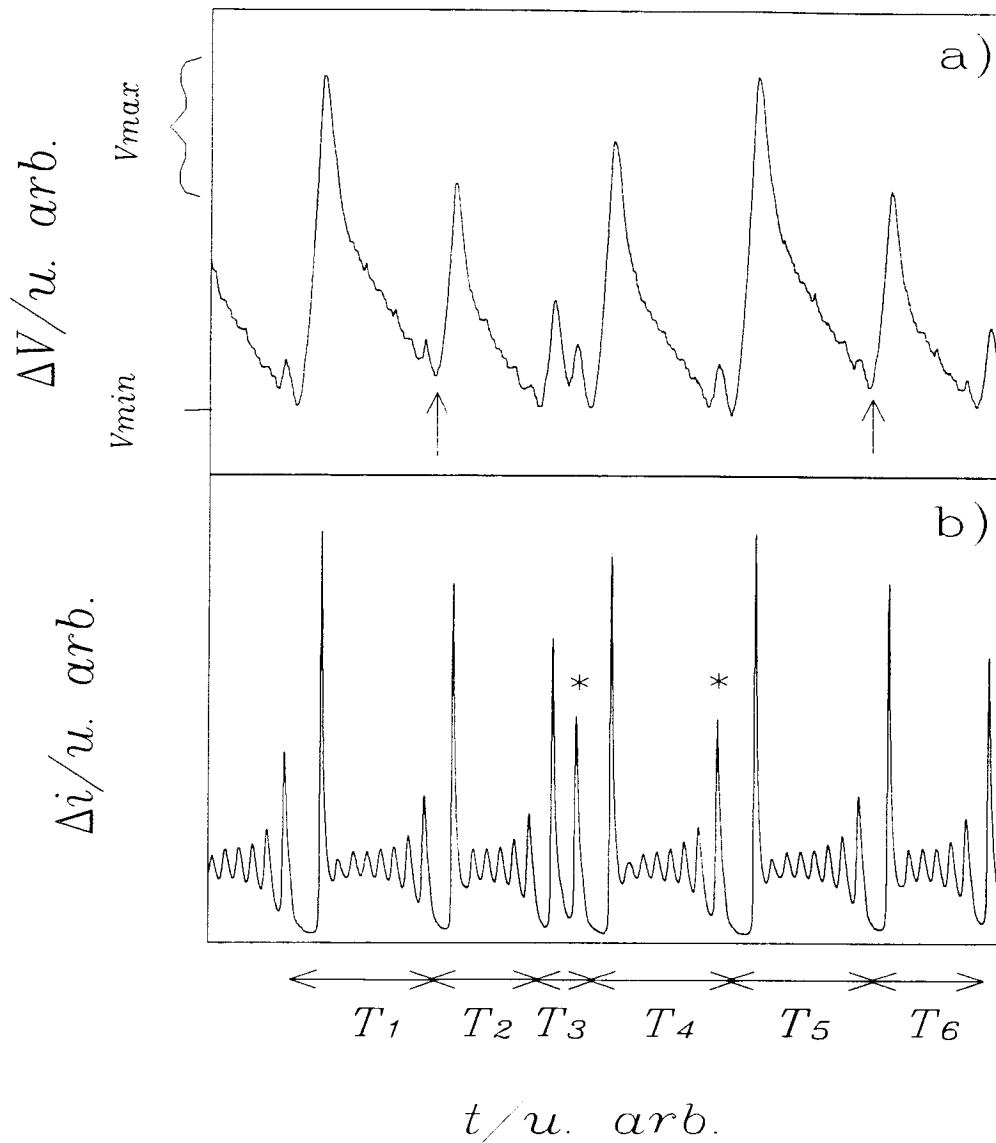


Figura 1.8: Variações (a) ΔV e (b) Δi das oscilações não periódicas da figura 1.4c.

Esse comportamento em ΔV reflete-se na evolução temporal Δi e, assim, podemos notar as seguintes correspondências: quando ΔV cresce, $\Delta i \simeq 0$. Lembrando o modelo de circuito RLC (figura 1.7b), temos que o capacitor formado pelo catodo e o anodo virtual está sendo carregado até atingir V_{max} , que funciona como uma “tensão de ruptura”. Assim, quando $\Delta V = V_{max}$ se dá a ruptura (isso significa que na figura 1.7b a chave se fecha) e surge um pico muito intenso de corrente. A partir desse momento, a tensão ΔV diminui até V_{min} quando então a chave se abre novamente e o ciclo de carga recomeça. Os tempos correspondentes à carga e à descarga do capacitor não são iguais porque o circuito não é o mesmo nos dois processos: na carga a chave na figura 1.7b está aberta e na descarga

ela está fechada e, assim, se acrescenta mais uma malha ao circuito. Enquanto a chave está fechada, a resistência dinâmica R_d está conectada em série com a indutância L e o capacitor C_1 , formando uma malha RLC através da qual o capacitor se descarrega. Como R_d se comporta como uma fonte de energia, está sendo introduzida energia nessa malha RLC e, portanto, ela sustenta uma oscilação LC cuja amplitude crece exponencialmente até um valor máximo (marcado com * na figura 1.8b). Por analogia ao comportamento de um circuito RLC , consideramos o incremento exponencial na amplitude da corrente dado por $\exp(R/2L)$. A presença dessa oscilação ocasiona as pequenas variações na tensão ΔV quando ela cai de V_{max} a V_{min} .

Dessa forma, explicamos a origem dos pulsos de corrente T_n na figura 1.8b: cada pulso é formado por um pico intenso que representa a “ruptura” do capacitor, seguindo-se um número variável de pequenas ondulações que ocorrem durante a descarga do capacitor. Observa-se que, quanto mais intenso o pico inicial, tanto maior é o número dessas ondulações. Para explicar isso, notamos que, conforme a figura 1.8, a um pico intenso corresponde um valor V_{max} igualmente elevado. Isso implica que, nessa situação, o capacitor leva um tempo maior até se descarregar ao valor V_{min} e, conseqüentemente, o pulso de corrente tem uma duração longa, apresentando várias ondulações. Por outro lado, se V_{max} é pequeno, então o pulso de corrente é curto e comporta poucas ondulações.

O fato de que, para cada pulso, o V_{max} associado é diferente, e, portanto, também a amplitude do correspondente pico de corrente, está relacionado ao efeito da carga residual do pulso anterior. Caso haja uma grande quantidade de carga residual entre as “placas” do capacitor, a ruptura é facilitada e assim V_{max} não precisa atingir um valor elevado. Caso contrário, para pouca carga residual, V_{max} deve crescer mais para provocar a ruptura. A quantidade de carga residual depende do pulso anterior e é determinada nesse pela amplitude da última ondulação de corrente antes que $\Delta i \simeq 0$. Essa última ondulação, se for intensa, coleta praticamente toda a carga existente entre as placas do capacitor antes que a chave (figura 1.7b) se abra. Então o capacitor deve ser carregado por um tempo prolongado até atingir um V_{max} elevado, necessário para a ruptura, uma vez que essa é dificultada pela ausência de carga residual.

Adicionamos esse efeito importante da carga residual no modelo do circuito, incluindo

um termo resistivo r que simule a maior ou menor presença de carga residual entre as placas do capacitor. Assim, se a última ondulação de corrente num pulso T_n for pequena(grande), então para a formação do pulso T_{n+1} há muita(pouca) carga residual disponível e, portanto, r terá um valor pequeno(elevado). Para ilustrar isso, veja-se na figura 1.8 as últimas ondulações de corrente, marcadas com *, pertencentes a dois pulsos (denominados na figura por T_3 e T_4) completamente diferentes. As intensidades dessas duas ondulações são equivalentes e assim o efeito da carga residual para os respectivos pulsos seguintes (T_4 e T_5) deve ser similar. Efetivamente, é o que se verifica, uma vez que T_4 e T_5 têm uma estrutura muito semelhante: os picos iniciais dos pulsos de corrente têm praticamente a mesma amplitude e o número das ondulações subseqüentes é o mesmo.

Do ponto de vista do circuito, temos que a resistência resultante na malha RLC (figura 1.7b) é

$$- |R| = -|R_d| + r ; \quad (1.4)$$

r é um termo dissipativo e, portanto, positivo. Assim, r acaba alterando a amplificação $[\exp(R/2L)]$ das ondulações de corrente. Se r é grande(pequeno), a amplificação será mais lenta(rápida) e as ondulações começam com uma amplitude mínima(maior que a mínima). Esse efeito também pode ser visualizado na figura 1.8, lembrando que, se V_{max} é elevado(pequeno), então igualmente r será elevado(pequeno). Todos os pulsos de corrente T_n que correspondem a um V_{max} elevado(pequeno) possuem um pico inicial de corrente intenso(menos intenso) e a amplitude da primeira ondulação de corrente pequena(grande). É interessante notar que essa variação na amplificação das ondulações nos sucessivos pulsos T_n se ajusta de tal forma que a amplitude da última ondulação nunca ultrapasse um valor máximo (marcado com * na figura 1.8b).

A análise anterior se referiu a uma situação em que V_F é constante e os pulsos de corrente T_n variam “aleatoriamente”. Por outro lado, quando se incrementa V_F , observa-se que, possivelmente devido à alteração dos valores de R_d , r , L e C_1 com o aumento de \bar{i} (V_F), o tempo de descarga do capacitor aumenta progressivamente em relação ao tempo de carga. Isso possibilita, nessa situação, a existência de um número crescente de ondulações num pulso de corrente. É o que se verifica, por exemplo, na passagem da figura 1.4a (nenhuma ondulação) para a figura 1.4b (duas ondulações). Associado ao incremento em

V_F , para aumentar o número de ondulações, a amplificação delas deve se tornar mais lenta. Podemos explicar isso, supondo que R_d seja dado pela declividade da curva característica $V \times i$ estática no ponto de operação e que essa curva possa ser aproximada por um ramo de parábola. Obtemos, então, que, à medida que V_F aumenta, o ponto de operação desce na curva (veja figura 1.3) e sua respectiva declividade diminui. Portanto, ao incremento em V_F corresponde uma diminuição em módulo no valor de R_d . Supondo que r e L não mudem muito em comparação à variação de R_d , teremos que $R \propto |R_d|$. Assim, $|R_d|$ decrescendo, implica que a amplificação das ondulações se torne mais lenta.

Finalizamos este capítulo ressaltando que o modelo desenvolvido aqui é fenomenológico e que de forma nenhuma ele contempla toda a complexidade dinâmica que a descarga elétrica luminosa subnormal apresenta. Como exemplo dessa complexidade, mencionamos que, na evolução da amplitude dos pulsos de corrente à medida que se aumenta V_F (figura 1.5), pode haver uma alternância de padrões periódicos e não periódicos que o presente modelo só explicaria conhecendo-se detalhadamente F na equação (1.3). O modelo desenvolvido expressa um razoável conhecimento qualitativo dos processos relevantes para o aparecimento de oscilações na descarga subnormal. Não procuramos uma tradução quantitativa para esse modelo. Dessa forma, não se tem um conjunto de equações diferenciais para modelar o sistema. De uma forma equivalente, podemos dizer que conseguimos intuir a existência de um processo iterativo, representado na expressão (1.3), mas não somos capazes de especificá-lo matematicamente. Em vista disso, surge a seguinte questão: como podemos então garantir que as observadas oscilações não periódicas têm origem determinística? Essa questão é pertinente, pois uma descarga elétrica é um sistema sob influência de ruído, que é um processo de natureza estocástica. A questão formulada acima procuramos responder nos próximos capítulos. Iniciamos apresentando no capítulo 2 as primeiras observações de caos determinístico na descarga elétrica.

Capítulo 2

Dinâmica Caótica na Descarga Elétrica

Um sistema dinâmico é chamado determinístico quando a sua evolução é descrita por uma regra bem definida. Ele será, então, caracterizado pela especificação a) do estado do sistema, que contém toda informação essencial acerca dele, e b) da sua dinâmica, que fornece a regra segundo a qual um estado evolui com o passar do tempo. Como veremos, o tempo aqui pode ser uma variável contínua ou discreta.

No estudo da evolução temporal de um sistema dinâmico determinístico consideramos dois tipos de variáveis quando expressamos matematicamente a “regra dinâmica” em termos de uma ou mais equações. As variáveis dinâmicas são aquelas que podem variar a cada instante e os seus respectivos valores são determinados solucionando as equações. Por sua vez, as variáveis estáticas, usualmente denominadas de parâmetros, são ajustadas quando se determinam as equações do sistema e depois não são mais alteradas, excetuando-se talvez uma ou duas e que serão chamadas de parâmetros de controle.

Ao se analisar um sistema dinâmico, é comum se proceder à seguinte investigação: altera-se o valor de um parâmetro de controle e verifica-se que mudança essa variação provoca sobre a solução, ou seja, sobre o comportamento dinâmico do sistema. Em relação a esse aspecto, dentre a imensa gama de sistemas dinâmicos determinísticos possíveis, nos últimos anos especial atenção foi devotada a um particular subconjunto desses sistemas: são aqueles descritos por equações não lineares e que, para certos valores apropriados dos parâmetros, apresentam um comportamento complicado, não periódico, errático. O interesse nos sistemas não lineares justifica-se pela seguinte comparação. Num sistema linear

uma variação num de seus parâmetros altera a escala do seu comportamento, mas não provoca uma mudança qualitativa desse. Assim, se o sistema linear apresenta uma solução estacionária, com a variação do parâmetro a solução permanece estacionária. Por outro lado, num sistema não linear, uma pequena variação de um parâmetro além da mudança quantitativa pode induzir mudanças bruscas e dramáticas no seu comportamento qualitativo. Por exemplo, ele pode apresentar uma evolução errática, totalmente aperiódica. Essa riqueza em comportamentos dinâmicos diferentes tornou o sistema não linear um alvo privilegiado das pesquisas recentes. A dinâmica determinística que descreve o comportamento errático desses sistemas é denominada de dinâmica caótica.

Neste capítulo pretendemos caracterizar a dinâmica caótica da descarga elétrica luminosa. Para tanto, inicialmente estabeleceremos a ocorrência de caos determinístico na descarga em termos da análise da evolução temporal de um sinal medido no sistema: a corrente elétrica. Nesse contexto mostram-se os resultados de duas rotas para o caos: dobramento de período e seqüência periódico-caótica alternante. Após, expandimos a análise para o espaço de fase do sistema e tratamos do importante problema de se “reconstruir” esse espaço. Também identificamos a existência de órbitas periódicas instáveis. Finalizamos apresentando os resultados de uma caracterização métrica do caos observado na descarga elétrica.

2.1 A Descarga Elétrica como Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico de interesse aqui é a descarga elétrica subnormal descrita no capítulo anterior. Adotando uma caracterização macroscópica para o plasma da descarga, temos como variáveis dinâmicas conhecidas a tensão V entre seus eletrodos e a corrente i que flui através dela. Além dessas, devem existir outras. Como variáveis estáticas ou parâmetros temos a pressão p no interior da célula e a tensão V_F da fonte de alimentação. Essas são as variáveis experimentalmente acessíveis. As características $V \times i$ oscilatórias obtidas na figura 1.4 demonstram que há uma relação não linear entre elas, atestando que a descarga elétrica é um sistema dinâmico não linear. Ademais, esse sistema também é dissipativo pois a energia fornecida à descarga pela fonte de tensão é dissipada nos processos de criação e

neutralização das cargas que constituem o plasma da descarga. Em regime estacionário, os processos de criação e neutralização de cargas operam conjuntamente de tal forma que haja um equilíbrio de cargas livres. Na verdade, numa descarga elétrica não é todo o gás que se ioniza, apenas uma pequena fração dele porque o respectivo plasma é de baixa temperatura.

A dinâmica da descarga elétrica luminosa pode ser especificada em termos de um conjunto de equações diferenciais acopladas que poderiam ser obtidas, por exemplo, analisando os mecanismos operando no plasma da descarga luminosa. Nesse caso, o tempo é uma variável contínua. Por outro lado, a dinâmica também pode ser dada por uma equação similar à equação (1.3) que é uma relação iterativa válida para um regime oscilatório na descarga e que descreve a interação de um pulso de corrente com o próximo. Agora, o tempo é uma variável discreta. A equação (1.3) é um exemplo da descrição dinâmica de um sistema através de uma regra que matematicamente é denominada de aplicação discreta ou mapa.

Como mencionamos no capítulo anterior, determinar as equações diferenciais que modelam o comportamento dinâmico exibido pela descarga elétrica como, por exemplo, na figura 1.4 é um problema de difícil solução. Por outro lado, quando apresentou-se a equação (1.3), fomos capazes de inferir a existência de um mapa para descrever a dinâmica dos pulsos de corrente; mas não conseguimos estabelecer a expressão matemática desse mapa. Portanto, no atual estágio de conhecimento da descarga elétrica luminosa, ainda não somos capazes de modelar precisamente a dinâmica das suas oscilações não periódicas em termos de equações diferenciais ou mapas, mas sabemos que essas oscilações são a manifestação de um sistema determinístico. Felizmente, a ignorância acerca da descrição matemática precisa não nos impede de caracterizar a dinâmica caótica da descarga elétrica, o que será o tema das próximas seções.

2.2 Observação de Caos na Descarga Elétrica

A ocorrência de instabilidades na corrente de uma descarga elétrica é um fato conhecido desde as primeiras investigações nesse sistema dinâmico. Inicialmente, procurou-se evitar regimes instáveis na operação da descarga e as pesquisas envolvendo essas instabilidades tinham como objetivo maior desenvolver métodos para saber como evitá-las. Recente-

mente, com o nosso trabalho, identificamos que esse comportamento instável pode ser a manifestação de caos determinístico. Assim, do ponto de vista dinâmico, essas instabilidades não devem ser desprezadas e a sua ocorrência na descarga elétrica fazem dela um rico “laboratório” de estudos da dinâmica não linear.

Não há uma definição final e única para caos determinístico. A diferença entre as várias definições encontradas na literatura reside no enfoque que se dá ao problema. Para os nossos propósitos é suficiente considerar que caos determinístico é um movimento irregular, aperiódico proveniente de equações determinísticas. Na evolução caótica de um sistema dinâmico, o seu movimento é caracterizado pelas seguintes propriedades:

- é limitado;
- é completamente aperiódico;
- é sensível a pequenas variações nas variáveis dinâmicas.

O comportamento caótico é essencialmente devido a essa sensibilidade a pequenas variações que, quando existe, resulta da não-linearidade do sistema dinâmico.

As variáveis dinâmicas (i e V) que usamos para a descarga elétrica luminosa não incorporam uma dependência espacial explícita em relação ao meio da descarga ¹⁰. Dessa maneira, no estudo da evolução dinâmica da descarga, estamos priorizando a sua dependência temporal. Quando essa evolução apresenta-se caótica, temos um exemplo do que se convencionou chamar caos temporal. Quando também levamos em conta a dependência espacial das variáveis dinâmicas, pode resultar uma análise que se denomina de caos espaço-temporal. A caracterização de caos determinístico na descarga elétrica, feita neste trabalho, refere-se ao caos temporal.

A forma mais simples de se identificar caos determinístico consiste em observar a evolução temporal de uma das variáveis dinâmicas à medida que se altera um parâmetro de controle do sistema. Por exemplo, na descarga elétrica monitoramos o comportamento da sua corrente i em função da tensão V_F . Variando-se V_F , duas coisas podem acontecer: uma

¹⁰Veja-se a seção 1.4.

alteração quantitativa e/ou uma alteração qualitativa da corrente i . A mudança qualitativa do comportamento da corrente, induzida pela variação do parâmetro de controle, consideramos neste trabalho como sendo uma bifurcação na descarga. Um exemplo de bifurcação seria a corrente passar de um comportamento estacionário para um padrão oscilatório. Uma mudança quantitativa corresponde a uma alteração na amplitude da corrente, mas “estruturalmente” ela permanece a mesma. Estamos primordialmente interessados em observar bifurcações na descarga. Assim, tendo-se obtido uma solução oscilatória, queremos saber se, para uma variação do parâmetro de controle a solução continua ou não oscilatória. Esse tipo de problema é abordado pela teoria qualitativa das equações diferenciais [GH83, Wi90].

A identificação do comportamento caótico determinístico é feita caracterizando a transição de um comportamento ordenado (periódico) a um comportamento desordenado (caótico). Um comportamento periódico certamente provém de um sistema dinâmico determinístico e, então, o comportamento caótico, oriundo do mesmo sistema, também é uma manifestação determinística. A evolução da ordem para o caos se dá através de sucessivas bifurcações e, seguindo-se esse caminho, obtemos a correspondente rota para o caos. Essas rotas podem ser caracterizadas por diagramas de bifurcação, onde se plota o comportamento de uma variável dinâmica em função do parâmetro de controle. Um exemplo desses diagramas está representado na figura 1.5. Há várias rotas para o caos possíveis e, a seguir, apresentamos os resultados referentes à observação de duas delas na descarga luminosa: dobramento de período e seqüência periódico-caótica alternante.

2.2.1 Dobramento de Período

Das rotas para o caos mais investigadas [Ec81, Sw83], a mais conhecida e freqüente é a de dobramento de período. A título de ilustração, reproduzimos na figura 2.1 os resultados obtidos por Braun *et al.* [BLF+87] numa descarga elétrica luminosa. Esses resultados constituem a primeira observação experimental de caos determinístico num plasma. Maiores detalhes podem ser vistos na referência [BLF+87]. Nesse trabalho, inicialmente a descarga operava em regime estacionário. Então, aumentando-se a tensão da fonte (V_F , que é o parâmetro de controle) observa-se que à corrente estacionária CC superpõe-se uma pequena

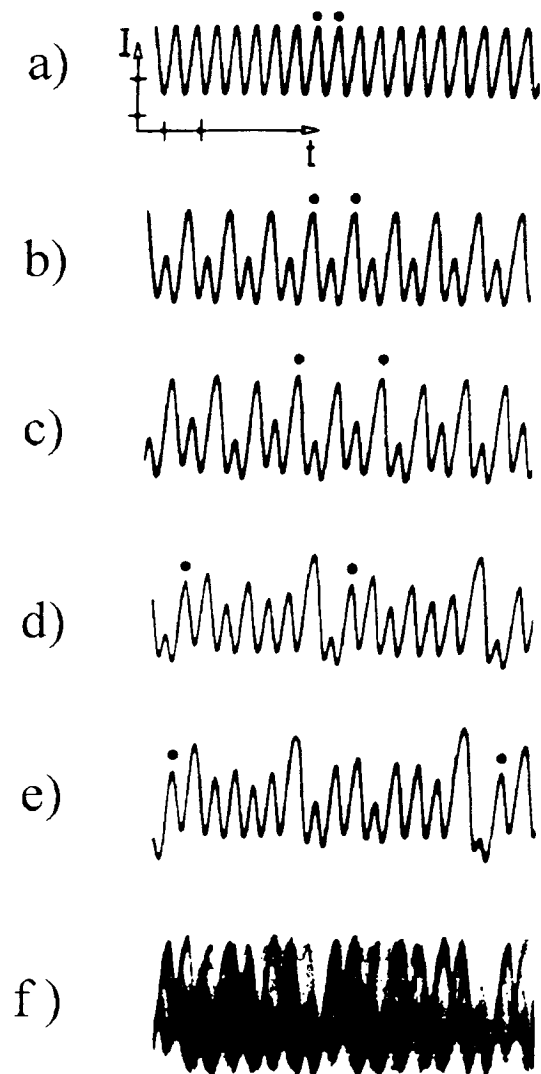


Figura 2.1: A rota de dobramento de período observada na descarga elétrica luminosa. Os pontos indicam o período de cada oscilação. A corrente aumenta de a) até f). As escalas para $i(t)$ e t são, respectivamente, $0,04 \text{ mA/divisão}$ e $10 \mu\text{s/divisão}$.

componente oscilatória autogerada pela descarga. A sua evolução temporal está na figura 2.1 a). À medida que V_F segue aumentando, identifica-se claramente a ocorrência de quatro dobramentos de período nessa oscilação (figura 2.1b) \rightarrow e). Há toda uma métrica para as sucessivas bifurcações na rota de dobramento de período [Ec81]; por exemplo: a seqüência dos valores de V_F correspondentes aos infinitos subseqüentes dobramentos de período converge geometricamente para um dado valor de V_F . Após esse, a oscilação se torna caótica e, imersas no comportamento caótico, podem existir janelas de comportamento regular - também observadas na descarga elétrica [BLF+87]. Nela, devido à presença de ruído, é impossível resolver os dobramentos de período subseqüentes à figura 2.1e) e o que se apresenta é a oscilação da figura 2.1f). A aparência borrada na figura é devida a que as repetidas varreduras do sinal medido pelo osciloscópio não coincidem - o que atesta que essa evolução não é periódica e, portanto, caótica. Poder-se-ia argumentar que essa evolução ainda não é caótica, mas representativa de um sinal periódico de período muito grande. Essa questão não é relevante para se comprovar a existência de caos na descarga elétrica luminosa pois, se a referida evolução ainda não é caótica, a evolução correspondente a uma pequena variação adicional do parâmetro de controle certamente o será. Podemos expressar essa certeza em função da descarga seguir uma seqüência de bifurcações que culminam com uma evolução caótica, conforme a rota de dobramento de período.

2.2.2 Seqüência Periódico-Caótica Alternante

Como o nome indica, essa seqüência de bifurcações consiste de uma alternância entre padrões periódicos e caóticos de oscilações com amplitudes grandes e pequenas. Tipicamente, um estado periódico é composto de uma oscilação de amplitude grande seguida por n oscilações com amplitudes menores e é denominado de padrão $P^{(n)}$. Na seqüência periódico-caótica alternante os estados periódicos são uma sucessão de padrões $P^{(n)}$, onde $n= 1,2,3, \dots$. Entre os estados periódicos $P^{(n)}$ e $P^{(n+1)}$ sempre há um estado caótico $C^{(n)}$ formado por uma mistura não periódica de padrões predominantemente $P^{(n)}$ e $P^{(n+1)}$. Diz-se então que o sistema hesita aleatoriamente entre $P^{(n)}$ e $P^{(n+1)}$. A evolução caótica $C^{(n)}$ é atingida a partir do estado periódico $P^{(n)}$ através de uma seqüência de dobramen-

tos de período. A transição de comportamento caótico a periódico se dá através de uma bifurcação tangente [Wi90p.540-52].

Seqüências periódico-caóticas alternantes já foram observadas em diversos sistemas [Sw83], principalmente aqueles relacionados com reações químicas. Para as seqüências observadas nesses sistemas há diversas características comuns, mas não necessariamente as suas origens e descrições matemáticas são as mesmas. Aqui focalizamos um tipo de seqüência periódico-caótica alternante que está relacionada com o assim denominado caos homoclínico, cujas propriedades exploraremos em maior detalhe nos próximos capítulos.

Relatamos a seguir a ocorrência de uma seqüência periódico-caótica alternante no plasma de uma descarga elétrica luminosa subnormal conforme apresentado na referência [BLG92]. O arranjo experimental empregado foi relatado na montagem 1 do capítulo anterior. Na célula de descarga manteve-se uma pressão constante de 2 *mbar* de argônio e alterou-se a tensão da fonte (V_F). Para $V_F < 500V$ não havia descarga. Para uma tensão maior que essa, apareciam picos de corrente na forma de uma oscilação relaxada [ZP71]. Inicialmente os picos estão muito espaçados temporalmente entre si e o intervalo de tempo entre eles sofre pequenas flutuações. A amplitude dos picos é da ordem de 285 μA e entre os picos a corrente é praticamente nula. Aumentando mais V_F , a separação temporal dos picos de corrente diminui e a oscilação assume um padrão regular no tempo. Concomitantemente, a amplitude dos picos não muda significativamente durante esse incremento em V_F . O padrão de oscilação típico desse regime está ilustrado na figura 2.2 a). Continuando a incrementar V_F , observa-se uma sucessão de bifurcações que estão de acordo com a seqüência periódico-caótica alternante, como mostra a figura 2.2. Nessa figura os padrões periódicos e caóticos são identificados ao lado da respectiva evolução temporal da corrente da descarga. Assim, a oscilação inicial do padrão $P^{(0)}$ sofre uma bifurcação para o padrão $P^{(1)}$ (figura 2.2b). Agora, aumentando mais a tensão V_F , a amplitude da oscilação com amplitude menor diminui continuamente (figura 2.2c) até que ocorra a segunda bifurcação: um dobramento de período de $P^{(1)}$, estabelecendo-se o padrão $2P^{(1)}$ como mostra a figura 2.2d. Dobramentos de período adicionais não foram observados devido às limitações sobre a resolução das mudanças em V_F . Portanto, depois de $2P^{(1)}$ observa-se a primeira janela de comportamento caótico, $C^{(1)}$. Incrementando V_F , o padrão caótico $C^{(1)}$ estabiliza-se

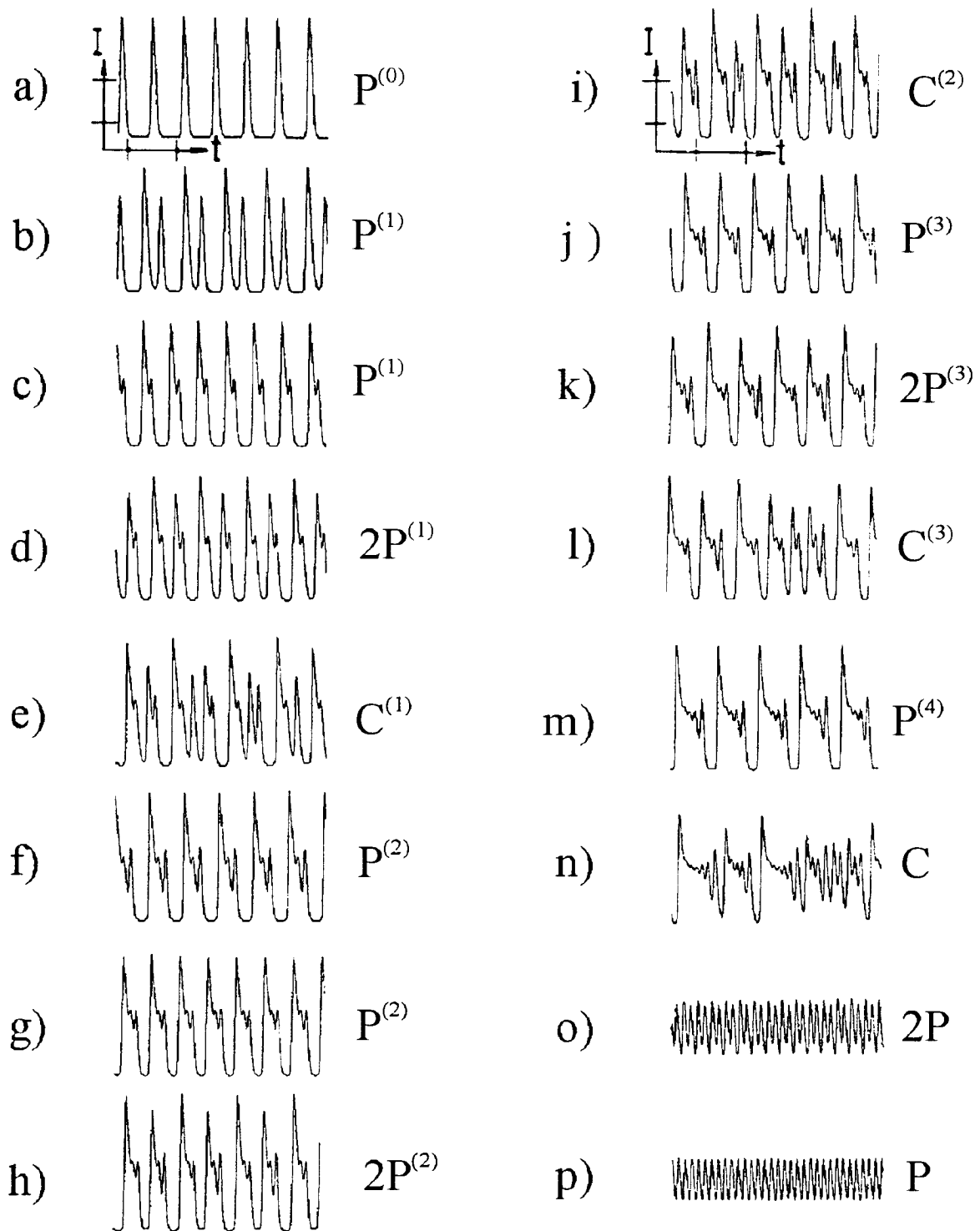


Figura 2.2: A seqüência periódico-caótica alternante observada na descarga elétrica luminosa utilizando a montagem 1 da seção 1.1. Os diversos padrões periódicos e caóticos dessa seqüência estão identificados na figura. V_F aumenta de a) até p). Os intervalos de corrente e de tempo indicados correspondem, respectivamente, a $100 \mu A$ e $500 \mu s$.

abruptamente num padrão periódico $P^{(2)}$ (figura 2.2f). As bifurcações restantes (figura 2.2g \rightarrow m) seguem a mesma regra anterior: aumentando V_F a amplitude das n oscilações com amplitude menor decresce até que ocorra um dobramento de período $2P^{(n)}$; depois disso, a oscilação torna-se caótica de padrão $C^{(n)}$ até que abruptamente ela passa a ser periódica de padrão $P^{(n+1)}$ e assim por diante. A repetição dessa seqüência foi observada até o padrão $P^{(4)}$ (figura 2.2m). Depois desse veio um padrão caótico (figura 2.2n) e em seguida a oscilação drasticamente mudou a sua forma: deixam de existir os padrões com amplitudes grandes e pequenas para se estabelecer uma oscilação quase senoidal $2P$ (figura 2.2o). Essa oscilação ainda sofre um dobramento de período reverso (figura 2.2p) e continuando a incrementar V_F a oscilação resultante P somente diminui a sua amplitude até que para $V_F = 673 V$ ela desaparece, permanecendo apenas uma corrente estacionária cc na descarga.

A sucessão de bifurcações descrita acima [da figura 2.2 a) até m)] segue estritamente o padrão da seqüência periódico-caótica alternante [Wi90,540-52] e inclusive observou-se que, conforme dita esse padrão, a largura das janelas periódicas $P^{(n)}$ torna-se mais estreita à medida que n cresce. Esse fato explica porque experimentalmente é difícil observar padrões $P^{(n)}$ com elevado n : a largura da janela $P^{(n)}$ e o ruído experimental têm a mesma ordem de grandeza e daí só se observa um comportamento caótico.

Uma melhor visualização da seqüência periódico-caótica alternante, bem como de qualquer outra rota para o caos, é evidenciada através de um diagrama de bifurcação, onde se plota o comportamento de uma variável dinâmica em função do parâmetro de controle. No presente caso, é conveniente relacionar a amplitude das oscilações de corrente com a tensão V_F . A figura 2.3 ilustra um diagrama de bifurcação para uma seqüência periódico-caótica alternante parcial, obtida na descarga elétrica luminosa subnormal da montagem 2 do capítulo anterior. Esse diagrama evidencia a ocorrência das bifurcações iniciais que compõem a seqüência. Nesse diagrama, nas janelas correspondentes aos padrões periódicos, o ramo superior do diagrama de bifurcações corresponde às oscilações com amplitude grande e os ramos inferiores evidenciam as n oscilações de amplitude menor seguindo a maior. Quando a evolução é caótica, as amplitudes das oscilações de corrente, tanto as grandes quanto as menores, não guardam uma proporção definida entre si e conseqüentemente

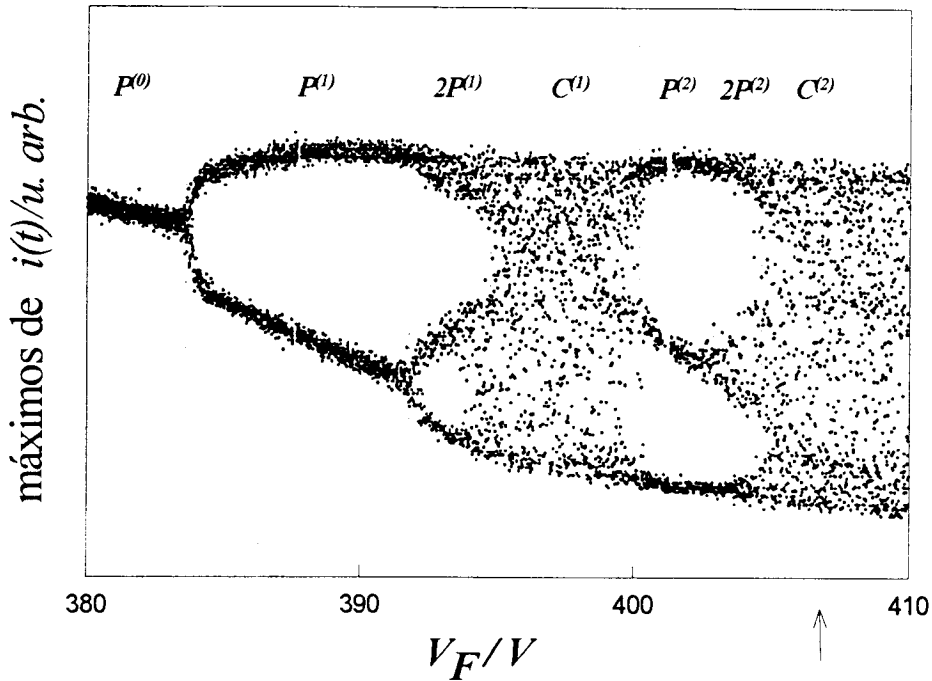


Figura 2.3: Diagrama de bifurcação experimental ilustrando a seqüência periódico-caótica alternante na descarga elétrica luminosa. Todos os padrões periódicos e caóticos visíveis são identificados no topo do diagrama. Dobramentos de período adicionais depois de $2P^{(1)}$ e $2P^{(2)}$ são impossíveis de resolver experimentalmente.

elas variam, aparentemente de forma aleatória, entre dois extremos. Portanto, as janelas caóticas $C^{(n)}$ ficam preenchidas de forma “pontilhada”.

A seqüência periódico-caótica alternante observada na descarga elétrica é uma manifestação do caos homoclínico. Esse termo sintetiza a complexa dinâmica [Wi88,p.171-333, GH83,p.318-31, Wi90,p.540-91] que pode surgir quando um sistema, relativamente à sua descrição no espaço de fase, está próximo a uma órbita homoclínica. Essa órbita é bastante peculiar; como veremos no próximo capítulo, ela tem um período infinito. A sua presença tende a promover um comportamento complexo (caótico) no sistema, como foi

pioneiramente observado por Poincaré ao se deparar com o emaranhado homoclínico ¹¹ no estudo do problema de três corpos na mecânica celeste [Po1899].

Em sistemas experimentais é impossível atingir uma órbita homoclínica devido à presença de ruído. Mesmo assim, se o sistema estiver próximo da órbita homoclínica, pode ocorrer um comportamento caótico, como foi demonstrado teoricamente por Gavrilov e Shilnikov ¹² [GS72, GS73]. Sistemas experimentais em que a dinâmica possa ser fortemente influenciada pela proximidade de uma órbita homoclínica, como foi analisado por Gavrilov e Shilnikov nas referências [GS72, GS73] são, por exemplo, o laser com absorvedor saturável [LHD91, PFA91] e a descarga elétrica luminosa subnormal [BLG92, BtL94, BBL+94, BCA95]. A caracterização do comportamento caótico homoclínico nessa descarga será o tema dos próximos capítulos.

Por fim, queremos mencionar que existem outras rotas para o caos e o que elas têm em comum com a análise anterior é que o comportamento caótico é atingido por uma seqüência de bifurcações.

2.3 Reconstrução do Espaço de Fase

Usualmente, na análise da dinâmica de um sistema, o seu estado é representado por um ponto num espaço constituído por todas as variáveis dinâmicas necessárias para especificar o estado. Esse espaço denominamos de espaço de fase do sistema investigado. Quando o sistema evolui no tempo, ele ocupa seqüencialmente outros pontos do espaço de fase, cada ponto correspondendo a um tempo diferente. Os pontos visitados sucessivamente pelo sistema constituem a sua trajetória ou órbita ¹³ no espaço de fase. As propriedades dinâmicas do sistema ficam codificadas na geometria das possíveis trajetórias no espaço de fase. Dissecar as propriedades geométricas dessas órbitas é uma das metas da análise dinâmica do sistema. Em princípio, essa técnica tacitamente pressupõe o conhecimento de

¹¹No capítulo 4 descreveremos brevemente o emaranhado homoclínico.

¹²Antes disso, para uma outra configuração de órbita homoclínica, Shilnikov já identificara a presença de caos homoclínico, também já observado experimentalmente.

¹³Não faremos distinção entre órbita e trajetória, embora alguns autores a façam num contexto matemático mais rigoroso.

todas as variáveis dinâmicas que compõem o espaço de fase. E quando isso não acontece, como proceder? Nesse caso precisamos construir um espaço equivalente, contendo a mesma informação dinâmica, mas consistindo de outras variáveis e que possam ser determinadas.

Para se obter um espaço reconstruído equivalente ao “verdadeiro” existem várias técnicas [FP94]. O “método dos atrasos temporais”, idealizado por F. Takens [Ta81], é o mais comumente empregado para dados experimentais. Dispondo-se apenas da evolução temporal de uma variável dinâmica $x(t)$ do sistema, Takens mostrou que o estado dinâmico do sistema num instante t pode ser representado num espaço composto pelas variáveis:

$$\{x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)\}.$$

onde m é a chamada dimensão de imersão e τ é o passo da reconstrução. A sucessão temporal dos estados nessa representação constitui a trajetória do sistema no espaço reconstruído. Essa trajetória não será idêntica àquela que seria obtida no espaço de fase “real”, mas Takens demonstrou que as trajetórias nos dois espaços são topologicamente equivalentes. Em vista disso, a informação dinâmica extraída do espaço reconstruído será a mesma que a obtida do espaço de fase.

Em princípio, na reconstrução de Takens o valor de τ é arbitrário, desde que se tenha registrado a variável dinâmica $x(t)$ por um tempo infinito. Na prática, isso não é verdade e há a necessidade de se proceder à melhor escolha do valor do passo, como exemplificaremos a seguir. O valor de m depende do sistema dinâmico em estudo. Como veremos na seção 2.4, na evolução caótica, trajetórias inicialmente próximas devem se afastar exponencialmente; além disso, essas mesmas trajetórias também devem ser limitadas. Essas condições só podem ser atendidas se a trajetória estiver representada num espaço de fase com pelo menos três dimensões. Pode-se entender isso reconhecendo que, para satisfazer as condições anteriores, as trajetórias devem ser capazes de se dobrar (sem se interceptar). Para isso devemos ter $m \geq 3$. Assim, as trajetórias podem se aproximar numa direção, afastar-se em outra e ainda permanecer numa região finita. Esse ponto será abordado novamente no capítulo 4. Supomos que a dinâmica caótica da descarga elétrica possa ser modelada num espaço tridimensional. Afirmamos isso baseados no fato de que, em sistemas dissipativos com várias variáveis dinâmicas, para a caracterização do comportamento caótico

é necessário acompanhar a evolução de apenas algumas dessas variáveis. Diz-se então que essas variáveis estão “escravizando”, isto é, ditando o comportamento das demais. Dessa forma, assumimos que a dimensão m do espaço reconstruído seja a menor possível compatível com um comportamento caótico, ou seja: $m = 3$. Segundo a demonstração do método de Takens, deveríamos ter $m > d$, onde d é a dimensão do espaço de fase “real”, para garantir que o espaço reconstruído tenha a mesma informação dinâmica do espaço real. Porém, dependendo das características do sistema em análise, isso não é necessário e é exatamente isso que supomos acontecer para a descarga elétrica luminosa.

A veracidade das suposições feitas e, portanto, a qualidade do espaço reconstruído serão testadas através de uma análise autoconsistente: os resultados que advêm do espaço reconstruído devem ser coerentes com aqueles obtidos de uma forma independente. Esse ponto será explorado no próximo capítulo onde se abordam diferentes formas de se obter experimentalmente um mapa para a descarga elétrica.

2.3.1 A Dinâmica no Espaço Reconstruído

Exemplificamos a seguir a reconstrução do espaço de fase da descarga elétrica luminosa a partir da evolução temporal da corrente $i(t)$, correspondente a um regime caótico $C^{(2)}$ indicado pela flecha na figura 2.3. Como já mencionamos antes, assumimos que um espaço tridimensional seja suficiente para descrever a dinâmica da descarga elétrica luminosa. Portanto, $m = 3$. A evolução temporal da corrente $i(t)$ é digitalizada por um microcomputador/osciloscópio, de forma que a medida é uma amostragem do sinal dada pela seqüência $\{i_i\}$ onde $i_i = i(t_i)$ com $i = 1, \dots, N$ (N é o número total de dados digitalizados; o seu valor é o maior compatível com o equipamento usado) e $t_{i+1} - t_i \equiv \Delta t_i$ é o tempo entre digitalizações consecutivas ¹⁴. Dessa seqüência constroem-se as ternas ordenadas $\{x_i = i(t_i), y_i = i(t_i + \tau), z_i = i(t_i + 2\tau)\}$. Segundo o método de Takens, cada terna será um ponto no espaço reconstruído e unindo-se as sucessivas ternas obtém-se a representação da trajetória da descarga elétrica.

O ponto a considerar a seguir é a escolha do passo de imersão τ . Existem vários critérios

¹⁴ Δt_i é o mesmo que t_a utilizado na seção 1.2.

para tanto [FP94]. Além disso, devemos lembrar que estamos limitados a escolher um τ que seja múltiplo de Δt_i . Assim, nós implementamos empiricamente o chamado fator de forma [BRP90]. Ilustramos isso através da figura 2.4, onde são representadas três projeções $\{x_i = i(t_i), y_i = i(t_i + \tau)\}$ para diferentes escolhas de τ . Na figura 2.4a τ é muito pequeno e, em função disso, $i(t_i)$ e $i(t_i + \tau)$ estão correlacionados numa dependência quase linear e, portanto, agrupam-se ao longo da diagonal $y = x$. A figura 2.4b apresenta um valor muito grande para τ e, assim, $i(t_i)$ e $i(t_i + \tau)$ deixam de ser correlacionados e, em vista disso, aparecem rugas e dobras abruptas no diagrama que não representam informação dinâmica sobre a descarga elétrica. Por sua vez, a figura 2.4c apresenta uma adequada escolha para τ . Nota-se que para essa escolha a trajetória reconstruída ocupa mais homoganeamente o espaço – exatamente esse é o critério para a implementação empírica do fator de forma.

Como a descarga elétrica é um sistema dissipativo, aplica-se o teorema de Liouville para a evolução no espaço de fase (reconstruído). Em consequência, o volume ocupado pela descarga elétrica luminosa nesse espaço deve contrair com o passar do tempo, de modo que as trajetórias convergem a uma região, denominada de atrator. Num sistema experimental dissipativo, o tempo necessário para as órbitas convergirem para o atrator, também chamado de transiente, é normalmente muito pequeno. Assim, ao se “ligar” a descarga elétrica, a evolução observada já corresponde ao estado assintótico compatível com as condições iniciais. Quando a evolução da descarga for caótica, temos então o exemplo de um atrator caótico. O atrator (reconstruído) caótico correspondente ao regime $C^{(2)}$ está ilustrado na figura 2.5. Ao se desvendar a estrutura desse atrator, obtém-se as informações acerca da dinâmica caótica da descarga elétrica.

Analisemos agora os mecanismos presentes nessa evolução. Identificamos a presença de dois processos básicos. Primeiro, há um comportamento espiral instável que se dá em torno do “buraco” existente no atrator. A trajetória, quando próxima desse “buraco”, começa a espiralar afastando-se dessa região e finaliza o escape através de uma laçada grande no espaço de fase. As não linearidades presentes na descarga fazem com que essa laçada retorne às proximidades do “buraco”, estabelecendo um mecanismo de reinjeção para as trajetórias. A distribuição espacial dessas órbitas no atrator se assemelha a uma superfície suave. Justificamos isso através da figura 2.5 em que um plano Σ corta o atrator e se

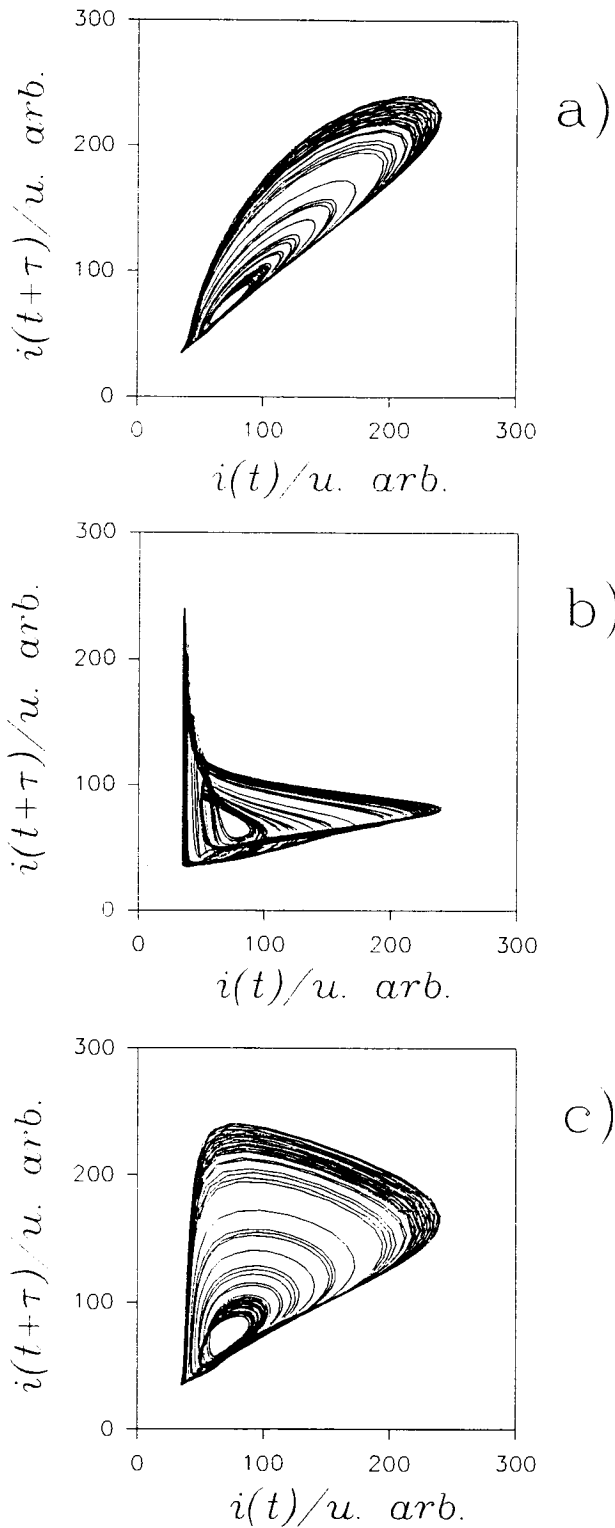


Figura 2.4: Projeções bidimensionais do atrator caótico $C^{(2)}$ (correspondente à seta na figura 2.3) obtidas para diferentes τ : a) $\tau = 2\Delta t_i$; b) $\tau = 18\Delta t_i$ e c) $\tau = 6\Delta t_i$.

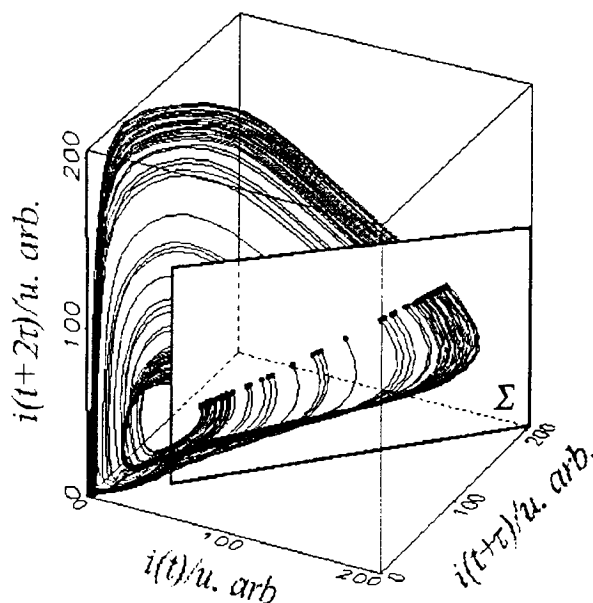


Figura 2.5: Representação do atrator caótico da descarga elétrica no espaço reconstruído $(i(t), i(t + \tau), i(t + 2\tau))$. A evolução corresponde ao regime $C^{(2)}$ marcado com a seta na figura 2.3. A trajetória circula no sentido horário no atrator.

verifica então que a interseção do atrator com o plano constitui em boa aproximação uma linha. Doravante consideramos ser essa superfície uma variedade diferenciável bidimensional. Observa-se que a região interior do “buraco” acima mencionado nunca é visitada pelas trajetórias e, em vista disso, nós associamos esse “buraco” com a existência de um ciclo limite instável no espaço de fase da descarga elétrica. Denominamos esse ciclo como tipo sela porque, se considerarmos um plano que o intercepta transversalmente, teremos duas direções ortogonais nesse plano, cruzando-se no ponto em que o ciclo intercepta o plano, ao longo das quais as trajetórias próximas, respectivamente, se aproximam ou se afastam do ciclo instável – esse ponto será retomado no capítulo 4. Portanto, a dinâmica no espaço de fase se resume ao seguinte: as trajetórias escapam do ciclo tipo sela espiralando sobre a variedade bidimensional. Continuando a evoluir sobre essa variedade, as trajetórias se aproximam de novo do ciclo através das laçadas grandes. Assim, temos um ciclo tipo sela conectado a um mecanismo de reinjeção. Esse é o aspecto fundamental da dinâmica da descarga elétrica e que determina as propriedades da sua evolução caótica. Mostraremos isso pela análise com os mapas de retorno, efetuada no próximo capítulo.

Vale ressaltar que Rössler [Ro76, Ro79] já percebera que um mecanismo de reinjeção como o acima é capaz de gerar um comportamento caótico. No nosso caso, o tempo que o sistema evolui perto do ciclo tipo sela depende das coordenadas de reinjeção. Para uma pequena mudança nessas coordenadas, o tempo despendido na vizinhança do ciclo varia muito. Essa sensibilidade a pequenas variações é uma propriedade marcante de um sistema caótico e, como já foi mencionado, a sua presença é usada para identificar a ocorrência de caos num sistema dinâmico.

2.3.2 O Esqueleto do Atrator Caótico: Órbitas Periódicas Instáveis

Como já mencionamos antes, o comportamento caótico é atingido, normalmente, por intermédio de uma sucessão de infinitas bifurcações a partir de um comportamento periódico. Numa bifurcação o sistema dinâmico perde a sua estabilidade estrutural e a sua solução, que determina a órbita no espaço de fase, muda qualitativamente: novas soluções (estável e instável) podem aparecer ou outras anteriormente estáveis podem se tornar instáveis e vice-versa. Dessa forma, após infinitas bifurcações, ao se estabelecer o comportamento caótico, quando então não há mais solução estável, existe uma infinidade de soluções instáveis. Elas constituem as chamadas órbitas periódicas instáveis embutidas no atrator [ACE+87]. A superposição de todas as órbitas periódicas instáveis presentes no atrator resulta numa figura que se confunde com o próprio atrator. É por isso que se afirma que as órbitas periódicas instáveis constituem o esqueleto do atrator caótico.

Em virtude do comportamento caótico, a trajetória no espaço de fase não pode se reproduzir depois de algum tempo, pois deve representar um movimento totalmente aperiódico. Por outro lado, essa mesma trajetória acaba por visitar todos os pontos do atrator num tempo suficientemente longo. Isso é devido a uma propriedade dos sistemas caóticos chamada de recorrência. Em função disso, a trajetória caótica passa arbitrariamente perto de todas as órbitas periódicas instáveis em tempos distintos. Na descarga elétrica as possíveis órbitas periódicas instáveis são do tipo sela pois, conforme a seção anterior, elas consistem de uma laçada grande (reinjeção) seguida de um número variável de voltas em torno do ciclo tipo sela ou elas consistem de combinações desse padrão. Em vista disso, as órbitas periódicas instáveis possuem direções ao longo das quais elas atraem a trajetória

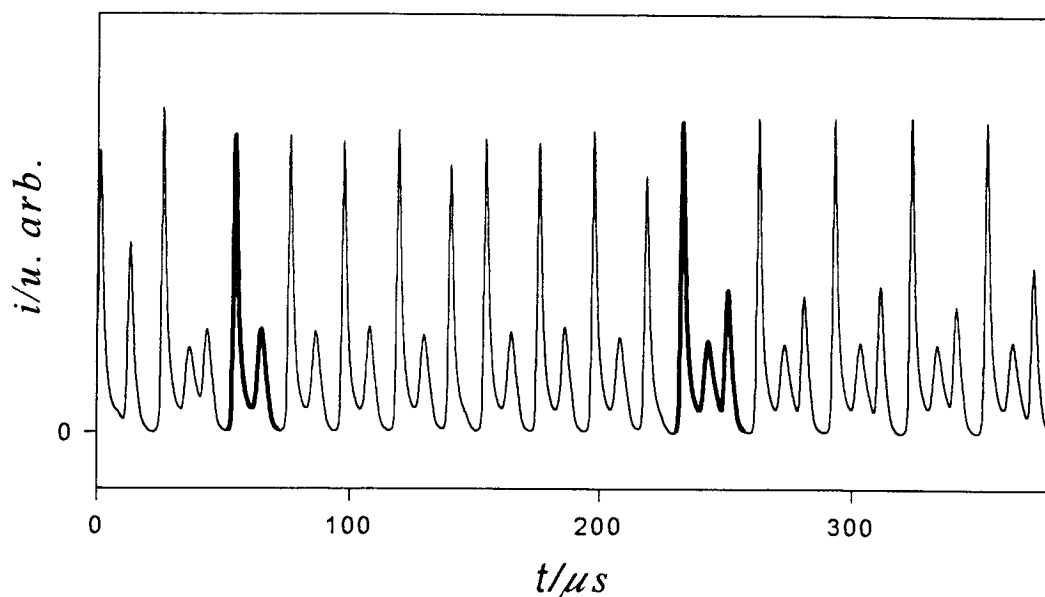


Figura 2.6: Identificação de duas órbitas periódicas instáveis no regime $C^{(2)}$: a primeira com padrão $P^{(1)}$ e a segunda com padrão $P^{(2)}$. Elas estão marcadas com o traço mais forte.

caótica e pelo menos uma direção onde repelem a trajetória caótica. Portanto, num dado tempo, a trajetória se aproxima arbitrariamente de uma órbita periódica instável e então a reproduz com uma pequena imprecisão ϵ , se a repulsão não for muito forte. Nesse caso diz-se que a trajetória está “sombreamento” a órbita instável embutida no atrator caótico; este processo de “sombreamento” permite a visualização das órbitas periódicas instáveis, como exemplificaremos a seguir.

Extraímos as órbitas periódicas instáveis diretamente da evolução temporal $i(t)$. Para tanto, tiramos proveito da forma particular desse sinal: conforme a figura 2.6, em $i(t)$ as oscilações sempre iniciam com um pulso de elevada amplitude. Antes desse pulso a intensidade é praticamente nula. O pulso inicial é seguido por um número variável de oscilações com amplitude menor. O pulso de amplitude grande corresponde à laçada de reinjeção no atrator e as oscilações de amplitude menor correspondem às voltas em torno do ciclo tipo sela. É conveniente considerar uma órbita periódica instável sempre principiando com um pulso de amplitude elevada. Assim sendo, definimos um limiar com um valor

um pouco maior que a intensidade mínima do sinal e pesquisamos na evolução temporal digitalizada $\{i_i\}$ a ocorrência da seguinte condição:

$$\frac{|i_{k+j} - i_{(k+p)+j}|}{i_{max} - i_{min}} < \epsilon$$

onde i_k e i_{k+p} são valores em que a corrente ultrapassa o limiar, $p\Delta t_i$ é o período da órbita pesquisada ($1 < j < p$) e i_{max} e i_{min} são, respectivamente, os valores máximo e mínimo da corrente. Ilustramos na figura 2.6 a identificação de duas órbitas periódicas instáveis: uma com duas oscilações (período 2; padrão $P^{(1)}$) e outra com três oscilações (período 3; padrão $P^{(2)}$). Como se vê, a idéia básica é procurar porções do sinal que se duplicam com uma dada imprecisão ϵ , geralmente menor que 10 %.

Finalizamos, enfatizando que é importante identificar órbitas periódicas instáveis na evolução de um sistema dinâmico, pois a sua presença é um forte indicativo de que o comportamento caótico tem origem determinística e não é gerado por ruído. Além disso, as órbitas periódicas instáveis são valiosas ferramentas para se proceder uma caracterização topológica do atrator caótico, com se mostra no capítulo 4.

2.4 Caracterização Métrica do Caos

A caracterização métrica do caos é facilitada quando se conhecem as equações (diferenciais ou mapas) do sistema dinâmico. Inferir as características métricas apenas a partir de dados experimentais é um problema mais complexo e desafiador. Existem várias técnicas e algoritmos implementados com esse fim. Apresentaremos, a título de ilustração, os resultados de três técnicas aplicadas nas janelas caóticas $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ e $C^{(4)}$ da descarga elétrica luminosa na montagem II da seção 1.1 [OF95]. Para cada técnica, fazemos uma breve explicação e depois tabelamos os resultados. Maiores detalhes acerca da metodologia de cálculo podem ser encontrados nas referências [FP94, Oi94].

- Dimensão de correlação: num sistema dissipativo, o volume ocupado pelo sistema no espaço de fase deve se contrair com o passar do tempo. Por outro lado, num sistema caótico, trajetórias inicialmente próximas devem divergir exponencialmente no tempo.

Essas duas exigências, aparentemente antagônicas, fazem com que as trajetórias no atrator caótico formem uma estrutura muito complexa em que há estiramento e dobramento das trajetórias. Tipicamente, um atrator caótico é constituído por uma superfície cheia de dobras e rugas com área infinita e que encerra um volume nulo; ele é um objeto fractal. Como algumas regiões do atrator estranho são mais densas e visitadas com maior frequência, ele não é um fractal homogêneo. Assim, para caracterizar essa complexa estrutura, emprega-se a dimensão de correlação, calculada pelo algoritmo de Grassberger-Procaccia [GP83]. Para sistemas caóticos obtém-se uma dimensão fracionária.

- Expoentes de Lyapunov: representam uma medida da estabilidade da solução das equações (diferenciais ou mapas) do sistema dinâmico. Esse tem tantos expoentes de Lyapunov quantas variáveis dinâmicas ele possuir. Para se entender o significado desses expoentes, considere-se um pequeno volume no espaço de fase. A evolução dinâmica do sistema deformará esse volume: em algumas direções ele será comprimido, em outras ele será estendido. A taxa de expansão ou compressão ao longo dessas direções é quantificada pelos expoentes de Lyapunov: a uma expansão (compressão) corresponde um expoente positivo (negativo). Assim, a direção à qual corresponde a maior expansão será a mais instável do sistema e a ela está associado o maior expoente de Lyapunov do sistema. A imprevisibilidade de um sistema caótico determinístico ou, de outra forma, a extrema sensibilidade a pequenas variações referida anteriormente é devida à presença de um expoente de Lyapunov positivo no sistema. Ele é responsável pelo fato de que trajetórias inicialmente próximas divergem exponencialmente. Portanto, um sistema caótico tem pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Vale ressaltar a seguinte diferença entre a dimensão e os expoentes de Lyapunov do sistema: a dimensão caracteriza a distribuição dos pontos (estados) no espaço de fase, enquanto que os expoentes de Lyapunov nos informam sobre a estrutura da seqüência temporal desses pontos (a seqüência é uma trajetória). O maior expoente de Lyapunov que consta na tabela que segue é a média de três resultados, respectivamente, obtidos pelo métodos de Sano-Sawada, Eckmann-Ruelle e Brown-Bryant-Abarbanel. Maiores detalhes sobre esses métodos podem ser encontrados na referência [Oi94].

- Entropia de Kolmogorov-Sinai: é uma propriedade dinâmica do atrator estranho e que está relacionada com a taxa de produção de informação no sistema. Ela pode ser usada para quantificar a “intensidade do caos”. Considerando a evolução no espaço de fase, temos que para um sistema regular dois pontos inicialmente próximos evoluem mantendo o mesmo afastamento e, portanto, $K = 0$. Num sistema randômico (estocástico), dois pontos inicialmente próximos são redistribuídos de forma aleatória e, assim, gera-se informação assintoticamente infinita no sistema. Em consequência, $K \rightarrow \infty$. Por sua vez, num sistema caótico determinístico dois pontos inicialmente próximos evoluem mantendo entre si um afastamento que cresce exponencialmente devido ao expoente de Lyapunov positivo. Desse modo, há geração de informação no sistema ¹⁵ finita e positiva.

Janela	Dimensão de correlação	Expoente de Lyapunov	Entropia de Kolmogorov-Sinai
$C^{(1)}$	sinal ruidoso	sinal ruidoso	não converge
$C^{(2)}$	$D_2 = 1,57 \pm 0,08$	$\lambda_{max} = 0,24 \pm 0,15$	$K = 0,34 \pm 0,04$
$C^{(3)}$	$D_2 = 1,80 \pm 0,08$	$\lambda_{max} = 0,21 \pm 0,14$	$K = 0,27 \pm 0,03$
$C^{(4)}$	$D_2 = 1,83 \pm 0,16$	$\lambda_{max} = 0,19 \pm 0,09$	$K = 0,27 \pm 0,06$

Da tabela anterior verifica-se que a análise métrica feita nas janelas $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ e $C^{(4)}$ indica a ocorrência de caos determinístico na descarga elétrica. Para a janela $C^{(1)}$ a análise não foi conclusiva, aparentemente devido à presença de um maior nível de ruído. Comentaremos esse ponto depois de procedermos à análise topológica do caos da descarga luminosa. Antes, porém, caracterizaremos esse comportamento caótico em termos de mapas de retorno - o que é o tema do próximo capítulo.

¹⁵Do ponto de vista de um observador do sistema, a sua informação sobre ele diminui.

Capítulo 3

Caracterização de Caos Homoclínico na Descarga Elétrica através de Mapas de Retorno

Quando nos deparamos com um problema não linear, muitas vezes devemos adaptar as ferramentas de investigação usuais, fornecidas pela teoria de sistemas dinâmicos não lineares, às particularidades do sistema em investigação. É o objetivo deste capítulo aplicar e adaptar o método de obter mapas, idealizado por Poincaré, para um sistema experimental próximo de uma órbita homoclínica. O comportamento homoclínico da descarga elétrica subnormal, como já mencionamos, é evidenciado pelas oscilações na corrente que apresentam uma seqüência periódico-caótica. Nós propomos que a caracterização de caos homoclínico pode ser efetuada por três tipos de mapas de retorno, obtidos para as janelas caóticas dessa seqüência. São eles: o mapa do tempo de vôo; o mapa da seção de Poincaré e o mapa das amplitudes máximas. Como veremos, pela facilidade de implementação da técnica, mapas de retorno são uma maneira muito conveniente de se extrair informação dinâmica sobre um sistema, mesmo quando não se tem um conhecimento das equações para modelar o sistema.

Descrevemos, a seguir, como obter os mapas para depois analisá-los e mostrar a sua equivalência.

3.1 Obtenção dos Mapas de Retorno

Ao invés de analisar a dinâmica da descarga elétrica no espaço de fase em toda sua complexidade, é desejável empregar métodos mais simples e diretos que capturem as características essenciais dessa dinâmica. Para tanto, adotamos a idéia introduzida pioneiramente por Poincaré e que consiste em reduzir o estudo de sistemas dependentes de forma contínua do tempo a sistemas que dependam de forma discreta do tempo [Wi90,p.64]. Os primeiros geram fluxos no espaço de fase enquanto que os últimos originam mapas. Qualquer transformação que seguir essa idéia podemos considerar como sendo um mapa de Poincaré. Depois de efetuar adequadamente uma transformação dessas, a análise da dinâmica fica reduzida à análise de um mapeamento iterativo (usualmente unidimensional) da forma $x_{i+1} = f(x_i)$. Esses mapas iterativos são conhecidos como mapas de retorno. O termo retorno é ilustrativo do processo de sua obtenção. Para obter um mapa a partir de um fluxo no espaço de fase, nós amostramos o fluxo quando ele transpõe uma condição pré-definida, tal como: uma particular posição no espaço de fase (por exemplo, um plano de corte); um limiar na evolução temporal do sistema, etc. Ou seja, nós registramos os sucessivos retornos do sistema a essa condição pré-definida e a partir desses registros construímos os mapas de retorno. Iniciamos descrevendo o mapa do tempo de retorno. Tanto esse quanto os demais mapas descritos nesta seção foram obtidos a partir de dados experimentais empregando-se a montagem II da seção 1.1 e explorando o regime $C^{(2)}$ marcado com a seta na figura 2.3.

3.1.1 Mapa do Tempo de Retorno

Esse mapa foi introduzido por Arecchi *et al.* [ALM+88] ao investigar as instabilidades de um laser modulado, particularmente, as flutuações temporais do sinal medido. Na descarga elétrica sujeita ao caos homoclínico, o aspecto relevante que o mapa do tempo de retorno pode capturar é a flutuação no tempo necessário para a trajetória caótica se afastar e retornar ao ciclo instável tipo sela. Para obter o mapa do tempo de retorno, definimos um limiar de corrente constante I_l na evolução temporal da corrente da descarga, como ilustra a figura 3.1a para um regime caótico $C^{(2)}$. Esse limiar é muito próximo da intensidade nula e

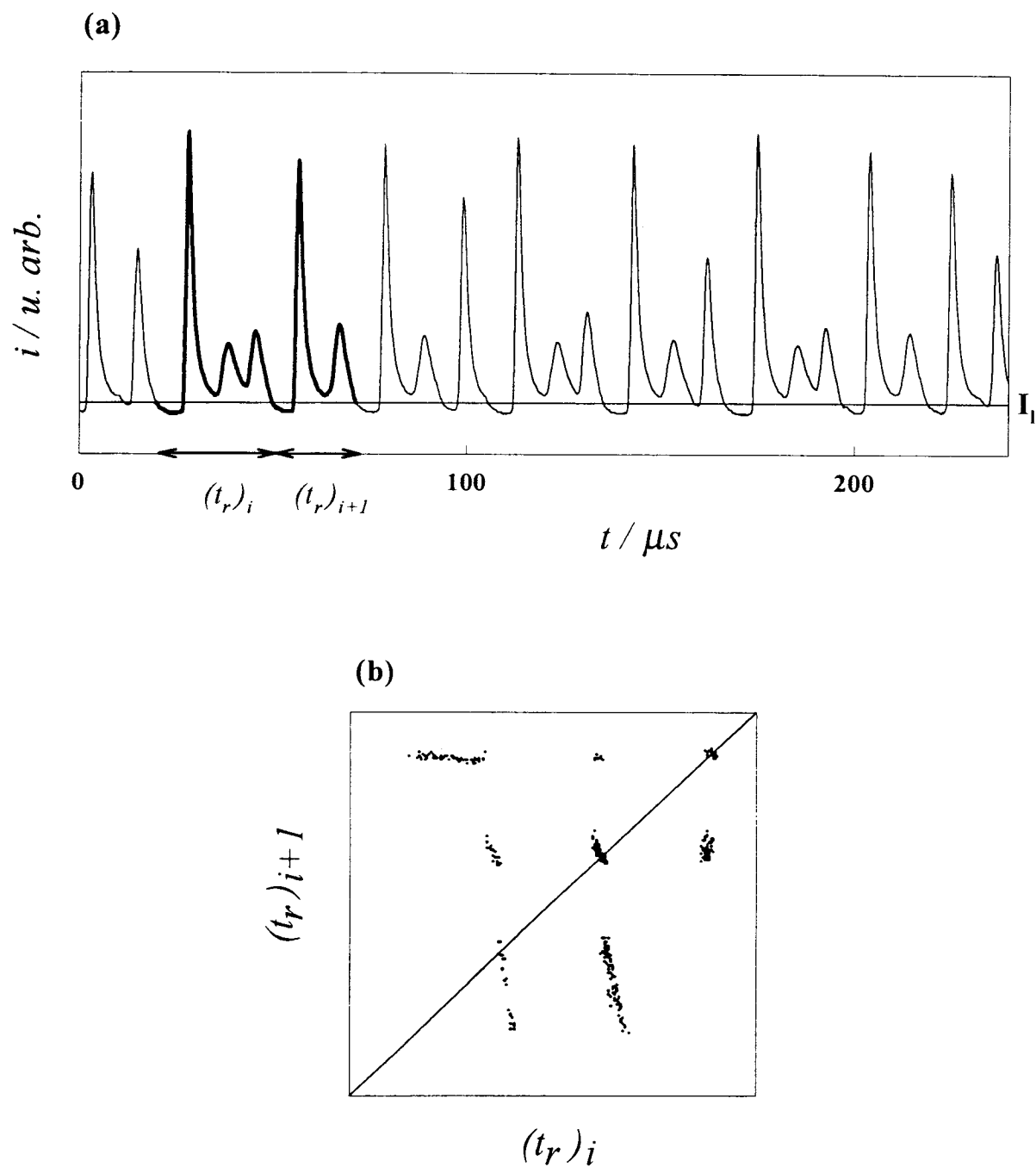


Figura 3.1: (a) Evolução temporal da corrente para o regime $C^{(2)}$. I_l é o limiar usado para determinar os tempos de retorno. Dois tempos de retorno sucessivos, $(t_r)_i$ e $(t_r)_{i+1}$, estão indicados pelo traço mais forte. (b) Mapa do tempo de retorno.

é cruzado pela corrente no início de cada padrão consistindo de uma oscilação de amplitude grande seguida de um número variável n de oscilações de amplitudes menores. Registra-se como tempo de retorno (t_r) o tempo necessário para a corrente, tendo cruzado o limiar (vindo de cima), voltar a cruzar o limiar (vindo de cima). Uma outra forma de visualizá-lo é no espaço de fase reconstruído da figura 3.2a. Nesse caso, o tempo de retorno t_r é o tempo para a trajetória, tendo cruzado o plano de corte Σ_l (que corresponde ao limiar I_l da figura 3.1a), voltar ao mesmo plano. Nesse percurso a trajetória pode dar um número variável de voltas em torno do ciclo instável. Nós medimos os sucessivos tempos de retorno $(t_r)_i$ diretamente da evolução temporal da corrente como é indicado na figura 3.1a. Arranjando os dados assim obtidos em um gráfico $(t_r)_i \times (t_r)_{i+1}$, obtemos o mapa do tempo de retorno, representado na figura 3.1b. Esse mapa apresenta uma estrutura de muitos ramos que evidencia grandes flutuações no tempo de retorno. Há dois fatores distintos que originam essas flutuações. Um fator está relacionado com o número de voltas que a trajetória faz em redor do ciclo instável tipo sela (que é igual ao número $0, 1, \dots, n$ de oscilações de amplitudes menores do padrão $C^{(n)}$). Esse fator é responsável pelas descontinuidades nos ramos do mapa. O outro fator está relacionado com o tempo de duração da reinjeção (t_R). Verifica-se que esse tempo é maior quanto maior for n . Além disso, para padrões de oscilação com o mesmo n , observa-se que há pequenas variações em t_R . Essas propriedades, como veremos, estão associadas ao comportamento de caos homoclínico da descarga elétrica e, para melhor caracterizá-lo, construímos um outro mapa que captura apenas as variações de tempo na reinjeção, apresentado a seguir.

3.1.2 Mapa do Tempo de Vôo

Para se obter uma medida associada ao tempo de duração da reinjeção, definimos dois limiares (I_u e I_l) na evolução temporal da corrente como está indicado na figura 3.3a. Os limiares são escolhidos de tal forma que I_l é um pouco menor do que o mínimo das oscilações de amplitude pequena e I_u é um pouco maior que o máximo dessas mesmas oscilações. O tempo necessário para a corrente ir de I_l (vindo de cima) para I_u (vindo de cima) é definido como o tempo de vôo T . Na figura 3.2a, os limiares I_u e I_l correspondem, respectivamente aos planos de corte Σ_u e Σ_l . Assim, o tempo de vôo também pode ser definido como sendo o

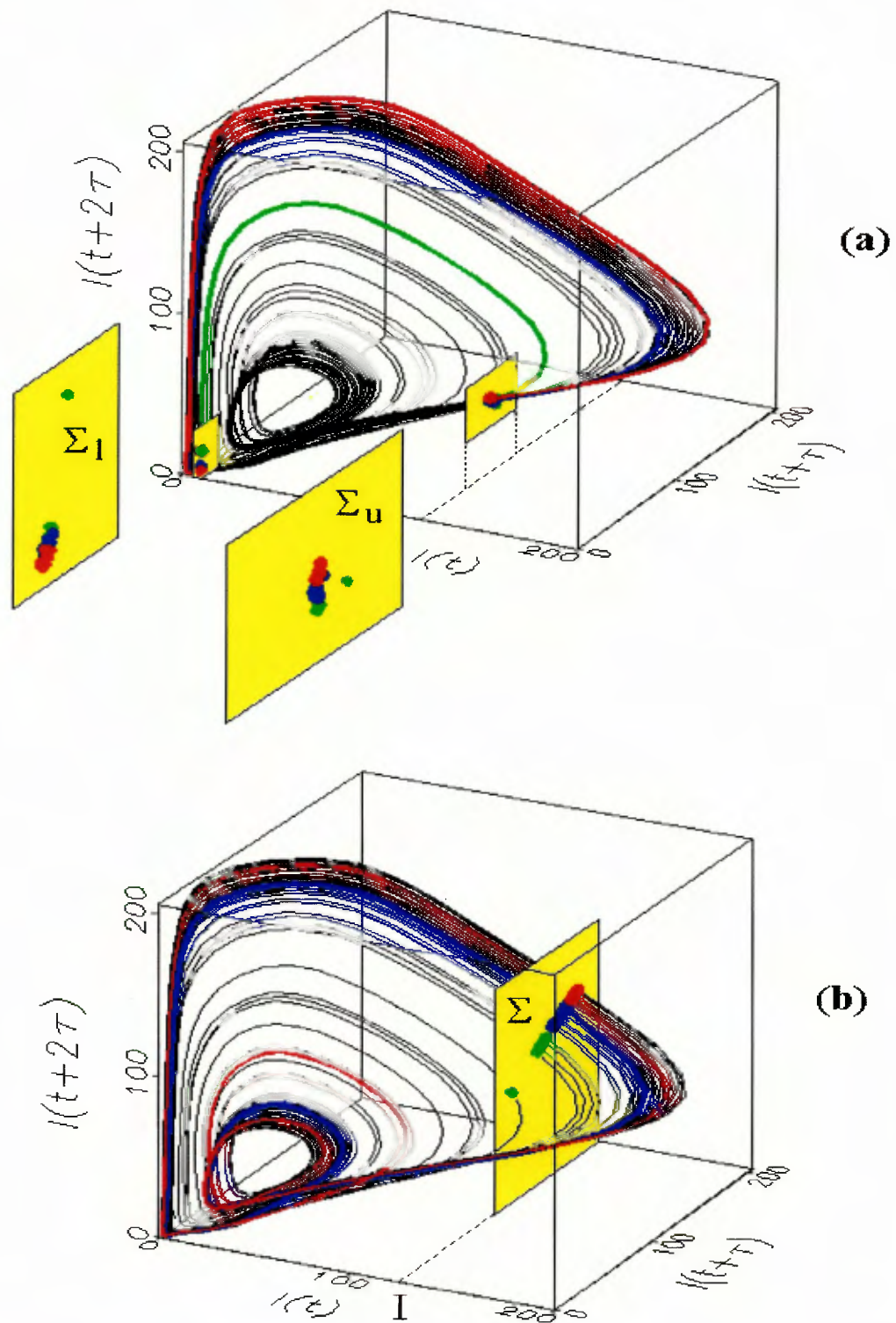


Figura 3.2: Representação em (a) e (b) do espaço de fase reconstruído da descarga elétrica. O significado dos planos de corte e dos trechos de trajetória coloridos são dados no texto. Os dois retângulos amarelos à esquerda em (a) são vistas ampliadas dos planos de corte Σ_l e Σ_u dentro da figura.

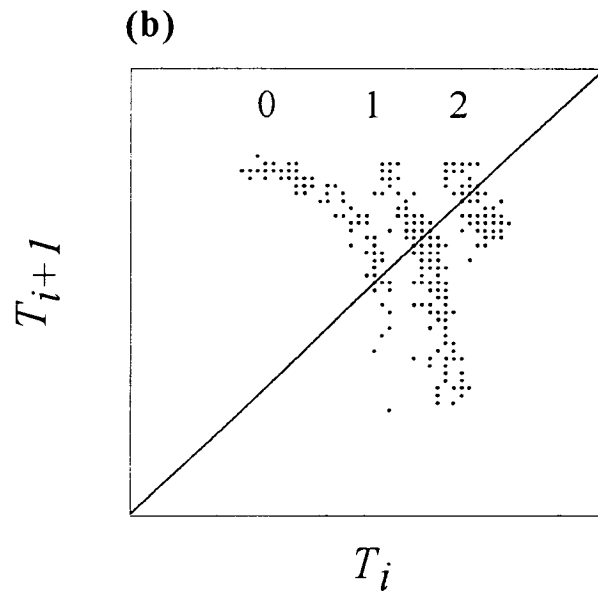
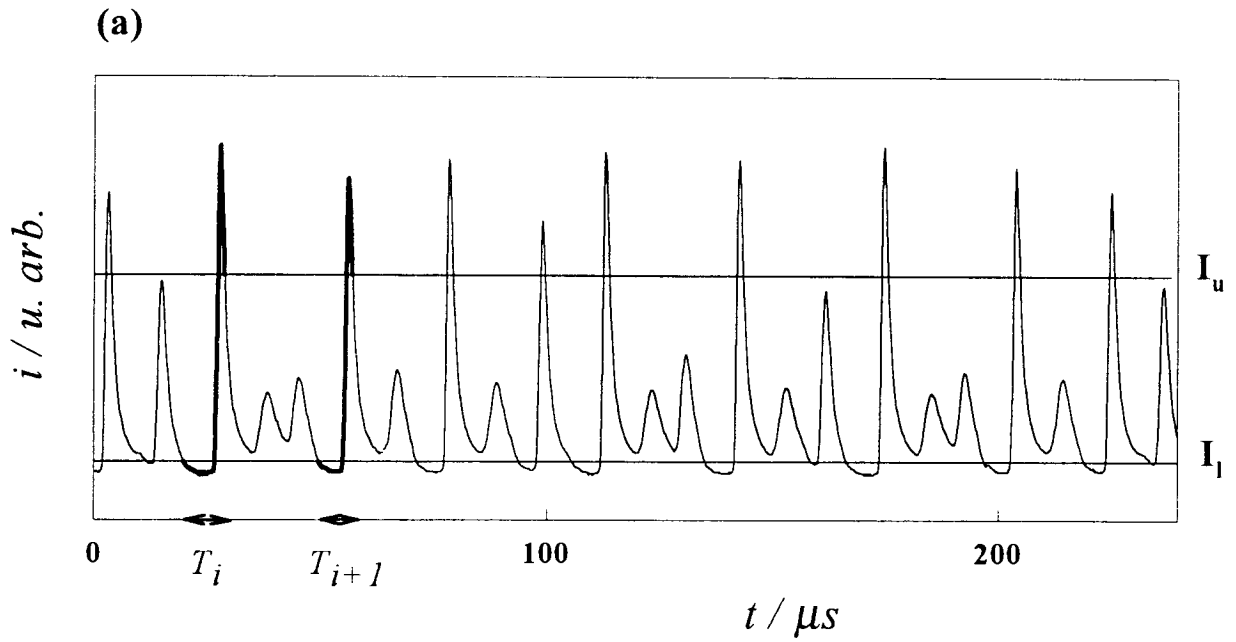


Figura 3.3: (a) Evolução da corrente para o regime $C^{(2)}$. I_l e I_u são os limiares usados para determinar os tempos de voo. Dois tempos de voo sucessivos, T_i e T_{i+1} , estão indicados pelo traço mais forte. (b) Mapa do tempo de voo. O significado dos símbolos $n=0,1$ ou 2 é dado no texto.

tempo para a trajetória no espaço de fase ir da seção Σ_u para a seção Σ_l (fazendo nenhuma volta em torno do ciclo instável). Como o trajeto percorrido entre os dois planos de corte não corresponde a toda reinjeção, denominamos o tempo correspondente a esse percurso de tempo de vôo T , para diferenciá-lo do tempo da reinjeção t_R ¹⁶. As trajetórias percorridas durante três tempos de vôo distintos estão ilustradas na figura 3.2a pelas linhas coloridas unindo Σ_u e Σ_l . Dos sucessivos tempos de vôo T_i , construímos o mapa do tempo de vôo $T_i \times T_{i+1}$, mostrado na figura 3.3b, e que apresenta uma singular estrutura ramificada. Um resultado similar foi obtido para o caso de um laser com absorvedor saturável por Papoff *et al.* [PFA91].

3.1.3 Mapa da Seção de Poincaré

Esse mapa é obtido a partir do espaço de fase reconstruído, interceptando a trajetória caótica transversalmente com um plano de corte Σ , como se mostra na figura 3.2b, a uma corrente constante I (indicada pela linha I na figura 3.4a.) e que tem uma intensidade correspondente à metade da lâçada de reinjeção. Para sistemas dissipativos, como é o caso da descarga elétrica, é usual que, devido à forte dissipação, as interseções da trajetória caótica com o plano de corte se acumulem numa linha praticamente unidimensional como é ilustrado na figura 3.4b. Pode-se parametrizar a posição dos pontos de interseção nessa linha por uma distância z medida ao longo da mesma¹⁷. A partir das sucessivas interseções, obtém-se o mapa da seção de Poincaré, mostrado na figura 3.4c, e que também apresenta uma estrutura ramificada. Esse tipo de mapa de Poincaré é muito empregado no estudo de sistemas caóticos. Um interessante e ilustrativo exemplo de sua aplicação a um sistema de reação química, apresentando caos homoclínico, é dado por Argoul *et al.* [AAR87].

¹⁶Trabalhamos com T porque não é trivial estabelecer a posição dos planos Σ_l e Σ_u que delimitem exatamente a reinjeção e, portanto, t_R .

¹⁷O sentido crescente de z foi considerado coincidente com o eixo $i(t + \tau)$.

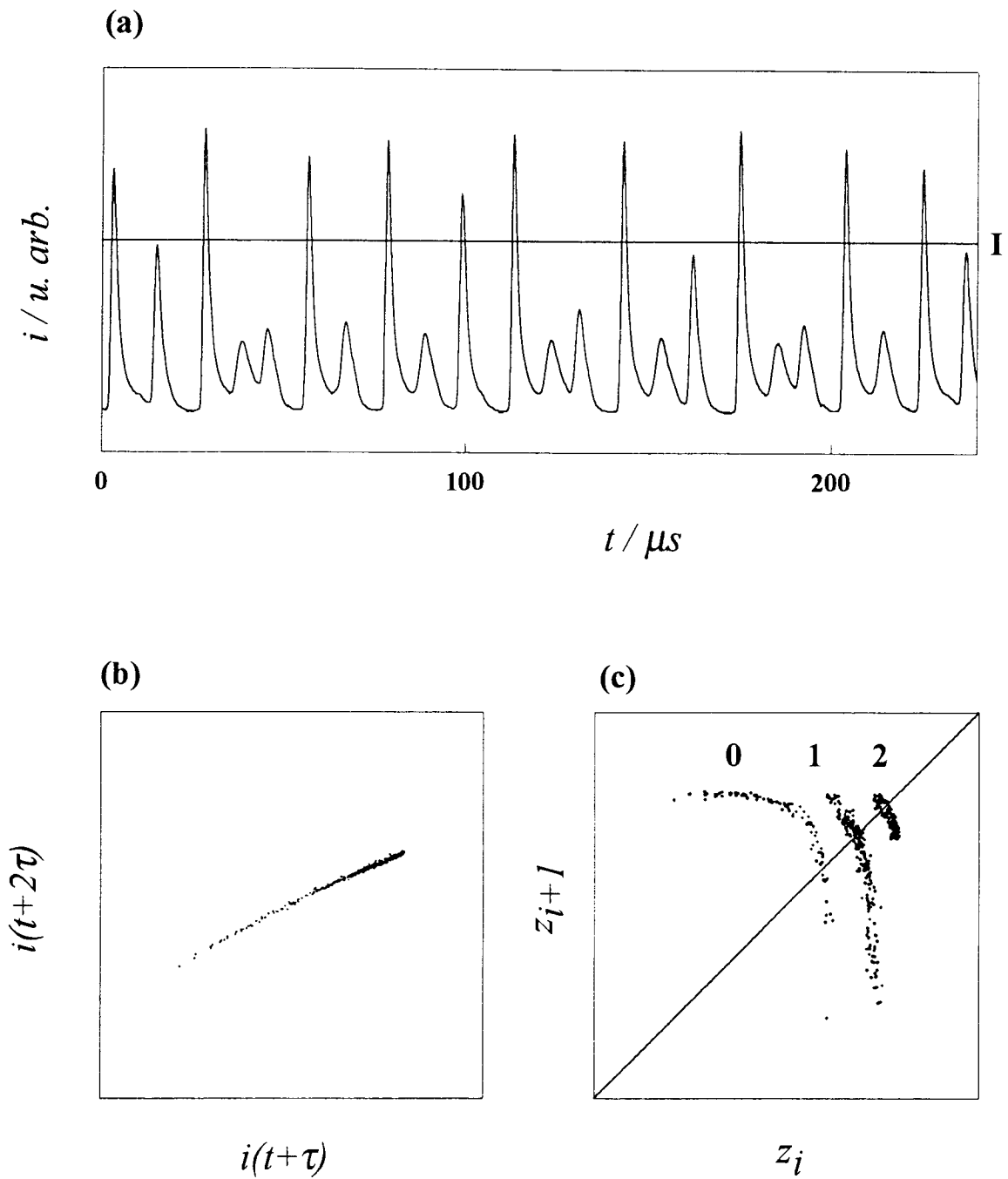


Figura 3.4: (a) Evolução temporal $C^{(2)}$ da corrente. (b) seção de corte do atrator, também representada na figura 3.2b, executada a uma corrente constante I indicada pela linha em (a). (c) Mapa da seção de Poincaré obtido de (b).

3.1.4 Mapa das Amplitudes Máximas

Finalmente, ainda um outro modo de obter um mapa da evolução temporal da corrente (figura 3.5a) consiste em registrar as amplitudes A das oscilações e com elas construir o gráfico $A_i \times A_{i+1}$ (figura 3.5b). Resulta um mapa de amplitudes. Esse mapa apresenta um formato de “sino”, característico de mapeamentos unidimensionais, de tal forma que a dinâmica das oscilações é descrita, de forma discreta, pelas sucessivas iterações do mapa. Agora, se somente considerarmos as amplitudes maiores do que um limiar I , registramos as amplitudes máximas A_m (veja-se a figura 3.5a). A partir delas, obtém-se o mapa das amplitudes máximas $A_m \times A_{m+1}$, ilustrado na figura 3.5c, e que novamente apresenta uma estrutura ramificada.

3.2 Análise dos Mapas

É um fato marcante que os três últimos mapas de retorno apresentam a mesma estrutura ramificada. Note-se que os limiares I e I_u são equivalentes. Os ramos nos correspondentes mapas $x_i \times x_{i+1}$ (onde $x = T, z$, ou A_m) são rotulados com diferentes símbolos ($n=0,1$ ou 2) que estão associados com o número de voltas que a trajetória faz no espaço de fase em torno do ciclo tipo sela entre a ocorrência de x_i e a de x_{i+1} .

Seguindo a seqüência de símbolos (n) enquanto o sistema evolui no tempo, temos uma descrição qualitativa da dinâmica do sistema: a seqüência de oscilações de amplitudes grandes e pequenas (recorde-se que n dá o número de oscilações de amplitude pequena e que antes de um trem de n oscilações de amplitude pequena há sempre uma com amplitude grande). Assim, a sucessão dos símbolos está em relação direta com a dinâmica do sistema e exatamente essa é a idéia central de estudar as propriedades dinâmicas de um sistema através da dinâmica simbólica [Ha89].

Antes de fornecer maiores detalhes sobre essa abordagem dinâmica, analisaremos um pouco mais as implicações de uma órbita homoclínica no espaço de fase da descarga elétrica luminosa. Depois, analisaremos a equivalência dos mapas.

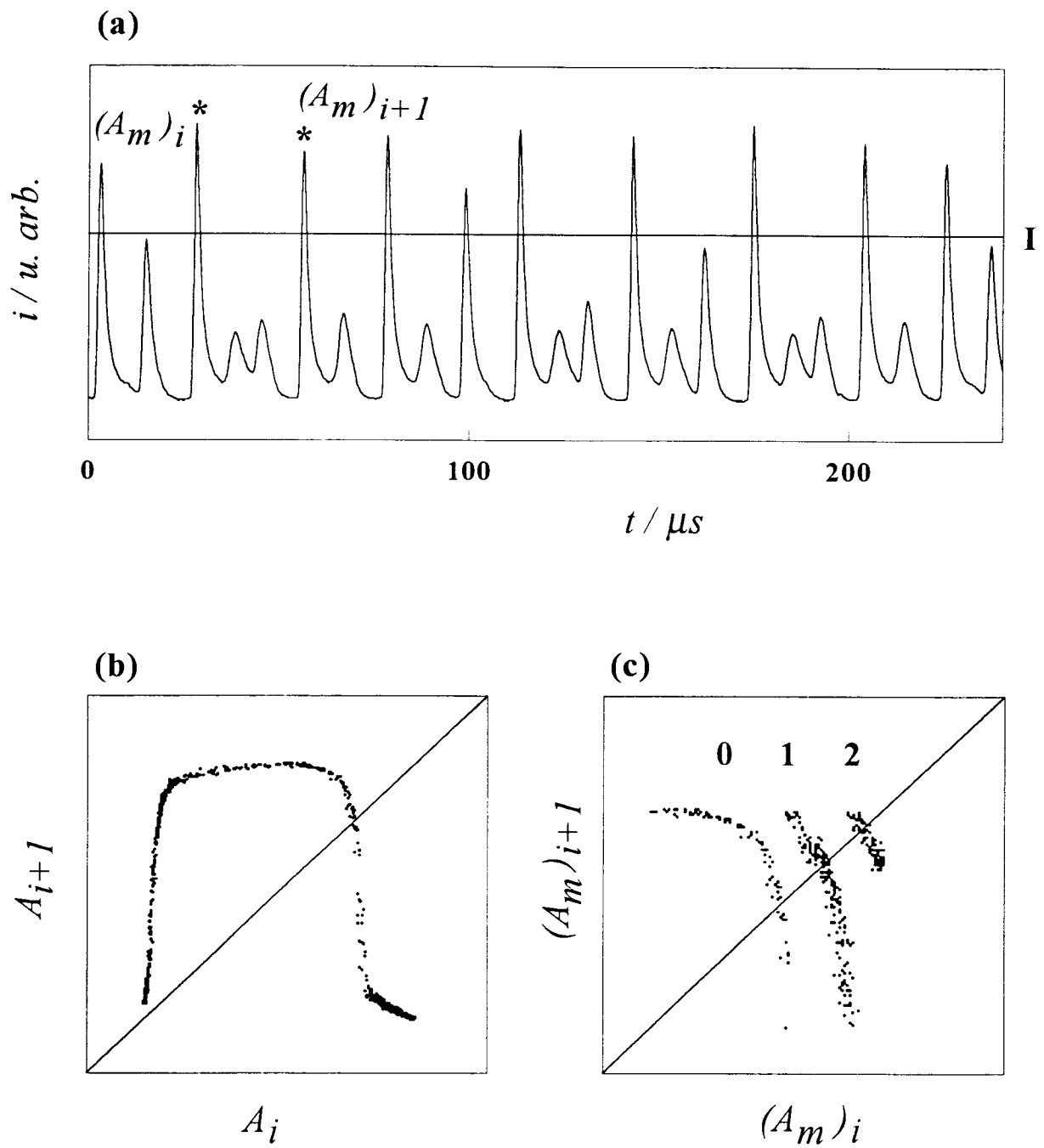


Figura 3.5: (a) Evolução temporal $C^{(2)}$ da corrente. Duas amplitudes máximas sucessivas, $(A_m)_i$ e $(A_m)_{i+1}$, são indicadas pelos asteriscos. (b) Mapa das amplitudes obtido de (a). (c) O correspondente mapa das amplitudes máximas.

3.2.1 Caos Homoclínico

O ponto central na caracterização de caos homoclínico é estabelecer a presença da órbita homoclínica no espaço de fase. Mostraremos no fim deste capítulo como se pode inferir isso na descarga elétrica luminosa. Entrementes faremos algumas considerações sobre a visualização da órbita homoclínica no espaço de fase. De início, devemos dizer que, experimentalmente, é impossível atingir precisamente órbitas homoclínicas devido a inevitáveis pequenas flutuações (ruído), mas, à medida que um sistema dinâmico se aproxima de uma órbita homoclínica, ele exhibe complicadas seqüências de bifurcações, denominadas coletivamente como uma bifurcação homoclínica [De85]. Essas bifurcações são experimentalmente acessíveis e, no exemplo da descarga elétrica em questão, correspondem à seqüência periódico-caótica alternante ilustrada na seção 2.2.2. A órbita homoclínica seria a órbita culminante dessa seqüência, ou seja: corresponderia a um $C^{(n)}$ com um $n = \infty$ associado. Nessa situação, a trajetória no espaço de fase consistiria de uma laçada grande de reinjeção que faria a trajetória “encostar” no ciclo instável tipo sela para, em seguida, ela se afastar desse fazendo infinitas voltas em torno do ciclo. Segundo a definição de órbita homoclínica [Wi88,p.181], para a configuração aqui analisada, ela é uma órbita biassintótica ao ciclo instável tipo sela para $t \rightarrow \pm\infty$.

A dinâmica no espaço de fase (figura 3.2) é determinada pelo casamento de um comportamento instável (o movimento espiralado em torno do ciclo instável) com uma ação estabilizante (o laço de reinjeção), conforme vimos na seção 2.3.1. Ambos são conectados ao ciclo instável tipo sela. Pode-se visualizar isso levando-se em conta que ao ciclo tipo sela estão associados uma variedade estável (s) e outra instável (u)¹⁸. Essas variedades são uma generalização das direções estável e instável que introduzimos na seção 2.3.1 quando analisamos a estabilidade do ciclo tipo sela. Assim, a trajetória caótica atinge a região de domínio do ciclo tipo sela pela laçada de reinjeção, o que se dá, próximo ao ciclo, ao longo da sua variedade estável¹⁹ e se afasta desse domínio sobre a variedade instável, ou seja: a superfície onde se dá o comportamento espiralado. Nesse contexto, o complexo com-

¹⁸Os índices s e u são originários do inglês “stable” e “unstable”.

¹⁹Veremos no próximo capítulo que a particular situação em que a reinjeção toca no ciclo tipo sela corresponde à órbita homoclínica.

portamento observado, visualizado através da seqüência periódico-caótica alternante, está relacionado com a situação em que ambas variedades se aproximam uma da outra tangencialmente, ocasionando uma posterior interseção das mesmas. Esse ponto será abordado novamente no próximo capítulo. Essa situação já foi investigada num modelo termocinético para oxidação de hidrocarbonetos [GW87] e num laser com absorvedor saturável [PFA91].

A fim de revelar as propriedades relacionadas à interseção das variedades estável e instável, a análise, usualmente, não é feita no espaço de fase, mas num associado sistema a tempo discreto (mapa), obtido seguindo a sugestão de Poincaré. Isso pode ser implementado de diversas maneiras e a escolha adequada depende muito do problema em questão. No mapa que resulta dessa transformação, as interseções (tangências) das variedades estável e instável definem os assim chamados pontos homoclínicos. A identificação de um ponto homoclínico no mapa assegura a presença de uma órbita homoclínica e, em conseqüência, de uma muito rica dinâmica complexa (caos) [De85]. Poder-se-ia supor que o mapa resultante deve ser pelo menos bidimensional (2D) a fim de conseguir distinguir entre as variedades (direções) estável e instável. No nosso caso, entretanto, se escolhermos a transformação de passagem de tempo contínuo para tempo discreto como sendo amostrar o sinal medido somente nos máximos das oscilações, então resulta o mapa da figura 3.5b – notadamente um mapa unidimensional (1D). Mostraremos, a seguir, quando apresentarmos a dinâmica simbólica, como aplicar os conceitos de ponto homoclínico e variedades estável e instável para o caso de um mapa 1D [Bl78]. Nesse caso, as variedades não estão mais associadas ao ciclo instável mas à figura equivalente no mapa, denominada de ponto fixo e que também será instável. Antes, porém, discutimos a questão da equivalência dos mapas.

3.2.2 Equivalência dos Mapas de Retorno

A codificação da dinâmica da descarga elétrica em termos da seqüência de símbolos fornece um termo de comparação para os mapas de muitos ramos das figuras 3.3b, 3.4c e 3.5c. Se esses três mapas são equivalentes, então as respectivas seqüências de símbolos que eles geram devem ser as mesmas. De fato, como a estrutura dos três mapas de retorno é a mesma, obtém-se uma única seqüência de símbolos dos três mapas, como por exemplo a

seqüência correspondente à figura 3.3a (que é a mesma das figuras 3.4a e 3.5a):

$$\dots 1211022211 \dots \quad (3.1)$$

atestando a equivalência dos mapas.

Não é nosso propósito aqui provar literalmente a equivalência dos referidos mapas. Ao invés disso, apresentaremos argumentos geométricos, obtidos do espaço de fase (figura 3.2), que sustentem essa equivalência.

A fim de facilitar a nossa análise geométrica, representamos na figura 3.2b duas órbitas periódicas instáveis no atrator caótico: o traço azul representa uma órbita de período dois ($P^{(1)}$) enquanto que o traço vermelho representa uma órbita de período três ($P^{(2)}$). Essas órbitas foram identificadas conforme foi descrito na seção 2.3.2 e a evolução temporal correspondente a essas órbitas está mostrada na figura 2.6. A inspeção da figura 3.2b sugere que órbitas periódicas com período maior têm um laço de reinjeção maior. Também se nota da figura que a trajetória caótica, quando cruza o plano Σ mais perto da borda externa do atrator, dá um número maior de voltas em torno do ciclo instável tipo sela antes de retornar ao plano Σ . Para ilustrar esse comportamento, marcamos com cores diferentes os pontos de interseção da trajetória caótica com Σ : vermelho significa duas voltas em torno do ciclo tipo sela, azul significa uma volta e verde significa nenhuma volta em torno do ciclo. Essa configuração geométrica é uma consequência direta da presença da órbita homoclínica no espaço de fase da descarga elétrica e ela faz com que o mapa da seção de Poincaré apresente a estrutura ramificada da figura 3.4c.

Na figura 3.2a os pontos de interseção dos laços (grandes) de reinjeção com os planos de corte Σ_l e Σ_u também são coloridos. As cores têm o seguinte significado: vermelho – a laçada de reinjeção é seguida por duas voltas em torno do ciclo tipo sela; azul – há uma volta em torno do ciclo depois do laço de reinjeção e verde – após o laço de reinjeção não há voltas em torno do ciclo tipo sela. Os trechos da trajetória caótica marcados com verde, azul e vermelho originam tempos de vôo que correspondem, respectivamente, aos ramos $n=0$, $n=1$ e $n=2$ na figura 3.3b.

A representação, no espaço de fase, das laçadas de reinjeção entre Σ_l e Σ_u , situa-se sobre uma superfície (variedade bidimensional) “bem comportada”, ou seja: sem dobras.

Essa conclusão pode ser obtida da figura 3.2a. Assim, por exemplo, os pontos vermelhos em Σ_l , que estão na borda externa do atrator, permanecem na borda externa em Σ_u . Consideração similar vale para os pontos azuis e verdes e, portanto, não se verifica inversões no ordenamento dos laços de reinjeção sobre a superfície do atrator entre Σ_l e Σ_u . Essa geometria suporta a seguinte conclusão: um maior(menor) tempo de vôo implica uma laçada de reinjeção mais distante(próxima) do ciclo tipo sela. Como a velocidade ao longo das diferentes laçadas de reinjeção é praticamente a mesma ²⁰, para dar conta de um tempo de vôo maior(menor), a distância (ou a trajetória) entre Σ_l e Σ_u deve ser necessariamente maior(menor). Portanto, um tempo de vôo T grande(pequeno) corresponde a um ponto de interseção em Σ (figura 3.2b) parametrizado com um valor de z grande(pequeno) e, também, a uma amplitude máxima A_m grande(pequena) na evolução temporal da corrente. Isso leva à equivalência entre o mapa do tempo de vôo, o mapa da seção de Poincaré e o mapa das amplitudes máximas. O fato do mapa da seção de Poincaré (figura 3.4c), obtido do espaço de fase reconstruído, ser equivalente aos demais, obtidos de forma independente, atesta a boa qualidade desse espaço reconstruído (veja-se a seção 2.3).

Finalmente, para entender essa equivalência, relembremos que a órbita homoclínica presente na dinâmica conecta o ciclo tipo sela a ele mesmo através de um grande laço de reinjeção. Desse modo, propriedades locais do fluxo no espaço de fase (por exemplo: o tempo dispendido nas proximidades do ciclo tipo sela) são também conectadas a propriedades globais do fluxo (por exemplo: as amplitudes máximas da oscilação). Em conseqüência, a mesma informação está codificada em aspectos globais e locais do fluxo. Portanto, concluindo, a presença da órbita homoclínica no espaço de fase da descarga elétrica é responsável pela equivalência dos mapas de retorno analisados (figuras 3.3b, 3.4c e 3.5c).

Eis que a conformação geométrica do atrator é determinada pela influência da proximidade da órbita homoclínica e como os mapas de retorno ramificados, conforme analisamos, são resultantes dessa conformação, podemos afirmar que a estrutura ramificada dos

²⁰A corrente da descarga é digitalizada com uma taxa de amostragem constante. Portanto, os intervalos de tempo entre os sucessivos pontos no espaço reconstruído são constantes. Como esses pontos têm aproximadamente a mesma separação ao longo dos laços de reinjeção, a velocidade nesses trechos é praticamente a mesma.

mapas de retorno, caracterizada pelos símbolos n , é uma assinatura do comportamento homoclínico da descarga luminosa.

3.2.3 Dinâmica Simbólica

Abordaremos, agora, a questão de atribuir símbolos à dinâmica da descarga luminosa de modo que a seqüência de símbolos forneça uma descrição qualitativa da evolução do sistema. Para esse propósito, parece adequado adotar os símbolos (n) que aparecem nos mapas de retorno ramificados (figuras 3.3b, 3.4c e 3.5c). Entretanto, essa escolha não é conveniente porque, quando nos aproximamos da homoclinicidade (isso significa: alcançar janelas caóticas $C^{(n)}$ com $n \rightarrow \infty$), devemos tratar com um número crescente de símbolos n . É desejável ter um número reduzido de símbolos e que esse número permaneça constante para variações do parâmetro de controle, mesmo se o sistema está próximo da homoclinicidade. A seguir, mostramos como se pode conseguir isso a partir do mapa de amplitudes (figura 3.5b) para o exemplo da descarga elétrica.

Suponha-se que tenhamos um sistema dinâmico que pode ser modelado por um mapa 1D como

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n), \quad x \in I,$$

onde f é definido sobre um intervalo I e μ é um parâmetro de controle que engloba as mudanças dinâmicas do sistema. A representação gráfica de f poderia ser, por exemplo, o mapa representado na figura 3.5b. Então as iteradas ²¹ de f nos dão as sucessivas amplitudes das oscilações de corrente na descarga. O gráfico de f apresenta um formato de sino que essencialmente possui dois ramos: um ascendente (isto é, com inclinação positiva) à esquerda e outro descendente (isto é, com inclinação negativa) à direita. Assim, podemos classificar as iteradas de f de acordo: ou elas caem no ramo esquerdo (L de “left”) ou elas caem no ramo direito (R de “right”). Portanto, as iteradas podem ser rotuladas com os símbolos: R e L ²². Nesse sentido, as possíveis seqüências de dois símbolos (R e L) devem

²¹Denominamos de iterada o que em inglês equivale a “iterate”.

²²Um símbolo também poderia ser associado ao ponto crítico que une os dois ramos de f , mas, como

estar em acordo com as leis dinâmicas que regem o comportamento do sistema analisado. Em outras palavras, a dinâmica da descarga luminosa é agora representada como uma “gramática” que determina as possíveis seqüências de símbolos: a dinâmica simbólica.

As figuras 3.6a e b mostram os mapas de amplitude correspondendo, respectivamente, aos regimes $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$, cada um para uma distinta tensão V_F constante. Nota-se que não há alterações significativas na forma dos mapas quando o parâmetro de controle é variado. Desse modo, podemos esperar que, enquanto a descarga luminosa se aproxima da homoclinicidade, o seu mapa de amplitudes continua apresentando dois ramos. Portanto, dois símbolos (R e L) são suficientes para descrever o comportamento homoclínico. No que se refere à dinâmica no espaço de fase, os símbolos R e L têm a seguinte interpretação: cada iterada rotulada por L corresponde a uma volta em torno do ciclo tipo sela, enquanto que uma iterada R está associada a um laçada de reinjeção.

Anteriormente, codificamos a dinâmica da descarga com os símbolos (n), obtendo, por exemplo, a seqüência (3.1). Essa seqüência pode ser traduzida para outra consistindo somente de dois símbolos (R e L), resultando:

$$\dots RLRLLL(RL)^2R(RLL)^3(RL)^2\dots, \quad (3.2)$$

onde $0 \rightarrow R$, $1 \rightarrow RL$ e $2 \rightarrow RLL$.

Uma das vantagens de se empregar a dinâmica simbólica é que o comportamento do sistema pode ser dissecado pelas ferramentas e resultados desenvolvidos pelos matemáticos em seus estudos de seqüências simbólicas. Isso é possível sempre que se é capaz de mostrar que a dinâmica (isto é, a iteração do mapa) é conjugada a um tipo “especial” de seqüência simbólica. Então, temos como consequência que as propriedades dessa seqüência simbólica são também as propriedades do sistema dinâmico.

Sabe-se desde os primeiros desenvolvimentos da dinâmica simbólica que uma seqüência RL^∞ formada por duas letras (R e L) representa uma órbita homoclínica [UN47]. Mostraremos, agora, que, no nosso caso, a existência de uma órbita homoclínica na dinâmica da descarga luminosa implica uma seqüência simbólica RL^∞ .

não é trivial localizá-lo no mapa experimental, por uma questão de simplicidade, não o levamos em conta.

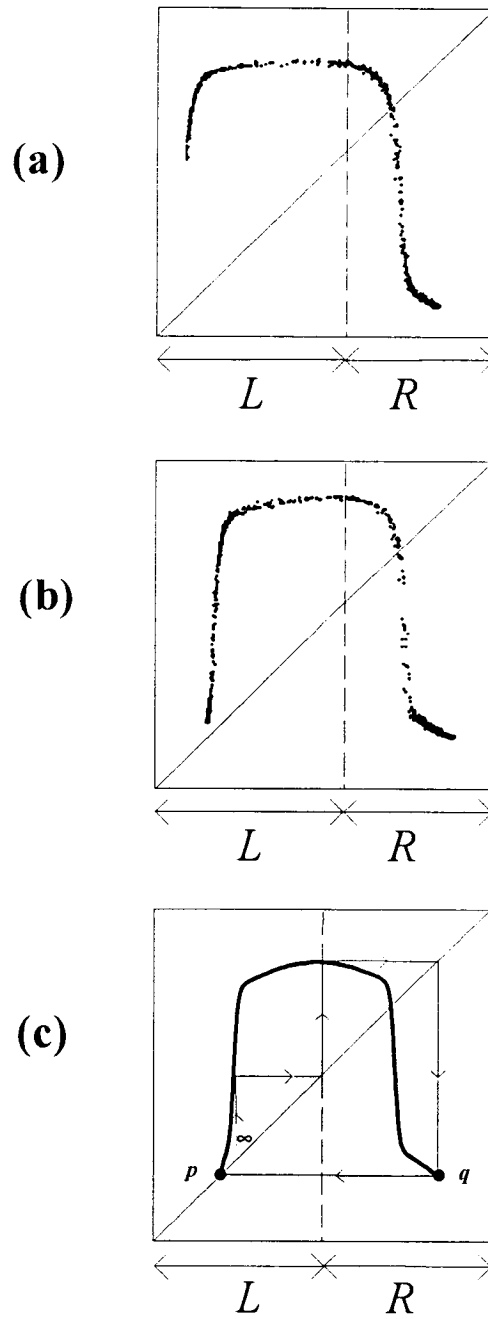


Figura 3.6: Mapas de amplitude correspondendo, respectivamente, ao regime $C^{(1)}$ (a), ao regime $C^{(2)}$ (b) e, em (c), à representação da órbita homoclínica associada à seqüência simbólica RL^∞ .

Já mencionamos que as bifurcações da seqüência periódico-caótica culminam numa órbita homoclínica. Agora podemos ilustrar esse ponto usando os mapas da figura 3.6. À medida que o ramo esquerdo de f desce em direção à diagonal, o que acontece para n continuamente crescente nas janelas $C^{(n)}$, o ramo L acaba por tocar, finalmente, a diagonal, estabelecendo ali um ponto fixo p (isto é, $f(p) = p$) do mapeamento (figura 3.6c). Nota-se que p é um ponto fixo instável uma vez que $f'(p) > 1$. De fato, $f(p)$ é um ponto fixo repulsor porque valores x contidos numa vizinhança próxima de p são iterados sucessivamente para posições mais distantes de p . Esses x constituem a variedade instável de p [$W^u(p)$] que é definida mais precisamente como segue: $x \in W^u(p)$ se, para qualquer vizinhança V de p , $x \in f^n(V)$ ²³ para algum inteiro positivo n [Bl78]. A variedade estável de p [$W^s(p)$] consiste de valores de x cujas iteradas para frente (isso corresponde ao sentido positivo do tempo discreto) caem em p , isto é: $f^n(x) = p$ para algum inteiro finito e positivo n . Assim, podemos estabelecer o seguinte:

Definição: Seja $f(p) = p$ e $f'(p) > 1$. Um ponto q ($q \neq p$) é homoclínico a p se $q \in W^u(p)$ e há algum inteiro finito e positivo n tal que $f^n(q) = p$.

A afirmação acima implica que q está contido tanto em $W^s(p)$ como em $W^u(p)$. Desse modo, as iteradas para trás (isso corresponde ao sentido negativo do tempo discreto) de q convergem para p assim como as iteradas para frente de q também convergem para p . Portanto, o ponto homoclínico q mais as suas iteradas para trás e para frente constituem uma órbita homoclínica. Exatamente essa é a situação ilustrada na figura 3.6c.

Assim, podemos concluir que, à medida que a descarga elétrica luminosa se aproxima da homoclinicidade através da seqüência periódico-caótica alternante, o mapa de amplitudes associado desenvolve um ponto homoclínico q – o que evidencia a presença de uma órbita homoclínica. Essa órbita, na respectiva descrição no espaço de fase, é representada por um número infinito de voltas em torno do ciclo tipo sela (e que divergem desse) mais um laço de reinjeção. No mapa das amplitudes, o ciclo tipo sela corresponde ao ponto fixo p e a órbita homoclínica está associada a infinitas iteradas L do mapa, divergindo de p , mais a uma iterada R , convergindo para p . A figura 3.6c mostra as últimas duas das infinitas iteradas L que levam a q e a única iterada R indo de q para p . Portanto, a existência de

²³ $f^n(x)$ representa a n -ésima iterada de x .

uma órbita homoclínica na descarga luminosa implica uma seqüência simbólica RL^∞ .

A fim de complementar esta análise, obteremos um mapa do tempo de retorno similar ao mapa de amplitude da figura 3.5b. Para tanto, deslocamos o limiar I_l de tal forma que ele corte todas as oscilações, como mostra a figura 3.7a. Assim teremos igual número de tempos de retorno (t_r) e de pulsos (amplitudes A) na corrente da descarga. O mapa $(t_r)_i \times (t_r)_{i+1}$ resultante não apresenta estrutura ramificada e tem formato parecido ao mapa de amplitudes. Portanto, no que se refere ao desenvolvimento do ponto homoclínico q no mapa de amplitudes – conforme foi apresentado antes, podemos aplicar o mesmo raciocínio para este mapa do tempo de retorno, como ilustra a figura 3.7c. Agora, o fato de que as variáveis do mapa são coordenadas temporais permite uma interpretação de p e q . O valor de p corresponderá ao período t_0 do ciclo instável tipo sela ($p = t_0$), enquanto que t_R é um tempo máximo (finito) associado à reinjeção da órbita homoclínica. Além disso, é oportuno computar a trajetória ao longo das variedades instável e estável de p nessa situação. Isso corresponde a somar, na figura 3.7c, respectivamente, os segmentos horizontais com a flecha apontando para à direita e os segmentos horizontais com a flecha apontando para à esquerda. No primeiro caso $[W^u(p)]$ há infinitos segmentos nessa soma enquanto que no segundo caso $[W^s(p)]$ há apenas um segmento. É fácil de verificar que ambos resultados são iguais a $t_R - t_0$, que é um valor finito. Essa situação corresponde à descrição da órbita homoclínica pelo mapa. Queremos, agora, traduzir esse resultado para o espaço de fase. O movimento sobre as variedades instável e estável no mapa corresponde, respectivamente, ao movimento sobre as variedades instável e estável associados ao ciclo tipo sela. No espaço de fase, o tempo que a trajetória permanece sobre a variedade instável, na órbita homoclínica, é infinito, pois a órbita faz infinitas voltas em torno do ciclo tipo sela e cada uma delas dura um tempo maior que t_0 - o período do ciclo tipo sela (isso se infere da evolução temporal do sinal). Assim, ao somar-se a duração de todas as infinitas voltas em torno do ciclo, tem-se uma contribuição

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_0 = \infty,$$

evidenciando que o tempo da órbita homoclínica se afastando do ciclo tipo sela no espaço de fase é infinito. Agora, baseando-se na análise do mapa, onde os tempos de afastamento e aproximação de p são iguais, infere-se que o tempo que a órbita homoclínica leva para

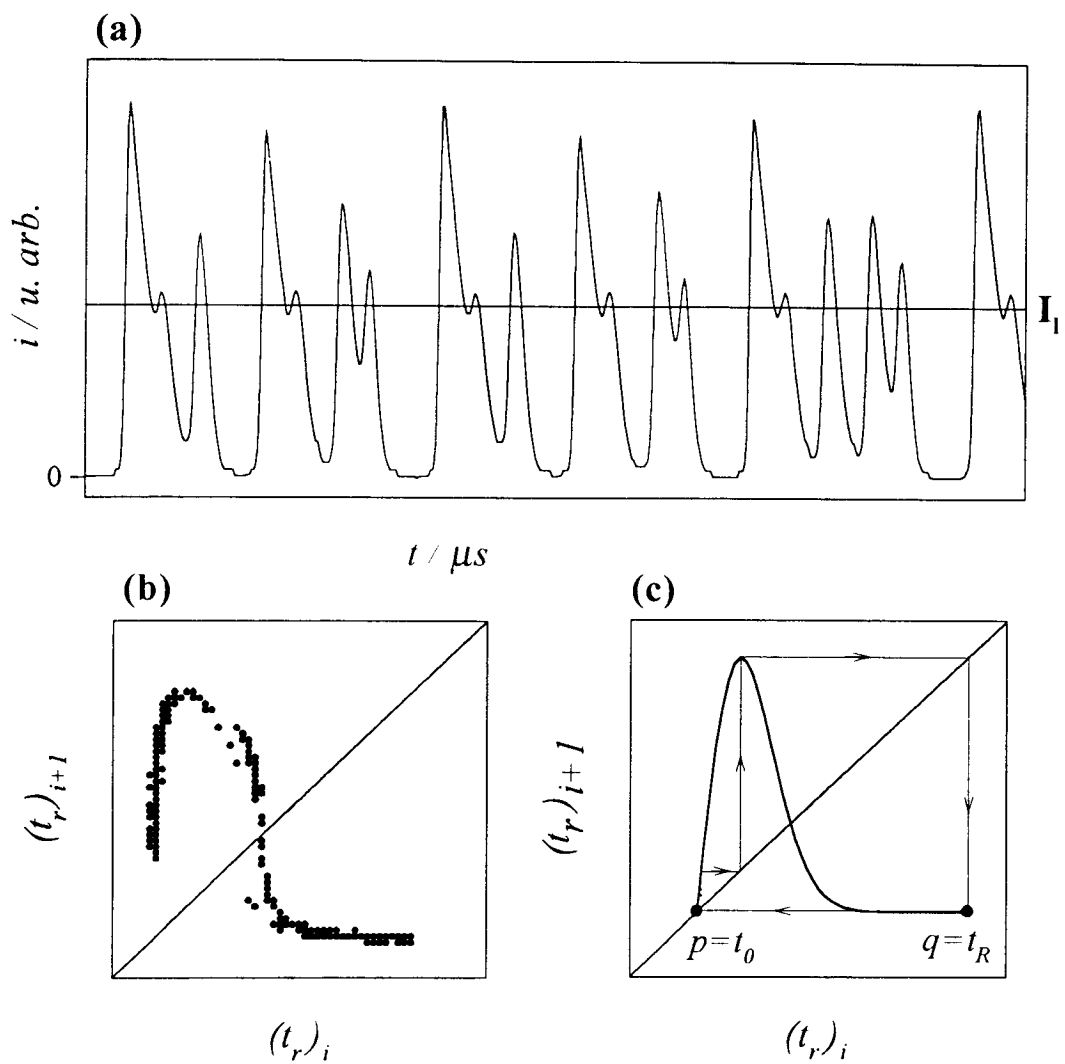


Figura 3.7: (a) Evolução temporal com um limiar I_l cortando todas as oscilações. (b) Mapa do tempo de retorno correspondente a (a). (c) Representação da órbita homoclínica. Os resultados dessa figura foram obtidos com dados experimentais empregando a montagem I da seção 1.1 e explorando um regime $C^{(1)}$.

se aproximar no espaço de fase do ciclo tipo sela seja igual ao tempo que ela leva para se afastar dele, ou seja: infinito. Assim podemos evidenciar a presença da órbita homoclínica em termos da sua definição: uma órbita que se aproxima assintoticamente do ciclo instável tipo sela para $t \rightarrow \pm\infty$ é dita ser homoclínica ao ciclo tipo sela [Wi88,p.181]. Para $t \rightarrow +\infty$ essa órbita se aproxima do ciclo sobre a sua variedade estável e para $t \rightarrow -\infty$ ela se aproxima sobre a sua variedade instável.

Com isso findamos a análise de caos homoclínico na descarga elétrica luminosa subnormal empregando mapas de retorno. No próximo capítulo empreendemos a caracterização topológica do caos homoclínico no espaço de fase reconstruído da descarga elétrica.

Capítulo 4

Caracterização Topológica de Caos Homoclínico na Descarga Elétrica

A origem do que hoje denominamos de caos remonta aos tempos de Poincaré que, no fim do século XIX, ao estudar o problema de três corpos na mecânica celeste, percebeu que equações determinísticas de movimento podem originar complexas soluções não periódicas. No âmago dessa questão está uma figura geométrica, denominada de emaranhado homoclínico [Po1899], que Poincaré declarou não atrever-se a descrevê-la tal a sua complexidade. No nosso caso, o processo de formação do emaranhado homoclínico é responsável pelo caos homoclínico observado na descarga elétrica através da seqüência periódico-caótica alternante. Para visualizar isso, procuramos, neste capítulo, dissecar a estrutura topológica do espaço de fase da descarga elétrica.

No espaço de fase reconstruído da descarga elétrica, o emaranhado homoclínico se forma quando as variedades estável e instável originadas no ciclo instável tipo sela (que doravante denominamos de γ) se aproximam de uma interseção. O fato de que o ciclo γ é do tipo sela força a trajetória caótica a se aproximar ou a se afastar de γ . Assim, no fluxo no espaço de fase, a variedade estável $W^s(\gamma)$ é a coleção de todas as trajetórias que se aproximam do ciclo instável γ , enquanto que a variedade instável $W^u(\gamma)$ é a coleção de todas as trajetórias que divergem de γ . A tangência(interseção) dessas variedades estável e instável no espaço de fase define uma órbita muito peculiar: como ela pertence a ambas variedades, essa órbita deve se aproximar do ciclo tipo sela para $t \rightarrow \pm\infty$. Esse tipo de órbita é chamada de órbita homoclínica e a sua presença no espaço de fase tende a promover nesse um comportamento

errático denominado de caos homoclínico [Wi88,p171-333, GH83,p.318-31, Wi90,540-91].

Atualmente, a caracterização de caos a partir da análise de um conjunto de dados caóticos segue, basicamente, duas abordagens [ABS+93]. A abordagem métrica extrai quantidades invariantes da dinâmica (são quantidades médias calculadas sobre o atrator; veja-se a seção 2.4) e a abordagem topológica preocupa-se com as quantidades invariantes obtidas da topologia do atrator caótico. Ambos os invariantes, métricos e topológicos, são independentes de mudanças nas coordenadas do espaço de fase, mas apenas os invariantes topológicos se mantêm invariantes para pequenas variações nos parâmetros do sistema dinâmico. A figura principal na abordagem topológica é o molde topológico [BW83, HW85, Ho88 e para uma introdução sobre o assunto: MG92, TAR92] que, essencialmente, é um modelo geométrico da dinâmica caótica, obtido a partir da organização das órbitas periódicas instáveis embutidas no atrator. Nós estamos interessados em aspectos topológicos da trajetória caótica no espaço de fase, originados pelo comportamento homoclínico da descarga elétrica reportado nos dois capítulos anteriores. Especificamente, o nosso objetivo é duplo: em primeiro lugar, queremos determinar o molde topológico da dinâmica caótica da descarga elétrica e, em segundo lugar, analisar a estrutura que se estabelece nesse molde devido à presença da órbita homoclínica na dinâmica. A partir daí, podemos obter um modelo topológico que nos permita prever a dinâmica da descarga elétrica à medida que se varia o parâmetro de controle. Essa previsão se refere a, por exemplo, regras de seleção para a seqüência simbólica quando se usa a dinâmica simbólica. Nesse contexto, poderemos entender porque existe a “poda”²⁴ de certas órbitas periódicas instáveis.

4.1 Análise Topológica do Atrator Caótico

A fim de executar essa análise, consideramos duas evoluções caóticas na descarga elétrica: uma associada a um regime $C^{(1)}$ e a outra, ao regime $C^{(2)}$ da figura 2.3. Analisamos, então, a estrutura dos correspondentes atratores no espaço de fase. O resultado é mostrado na figura 4.1 para o regime $C^{(1)}$ e na figura 4.2 para o regime $C^{(2)}$. No

²⁴Denominamos de poda o que em inglês equivale a “pruning”; significa que certas órbitas, embora permitidas pelo molde topológico, estão ausentes da dinâmica.

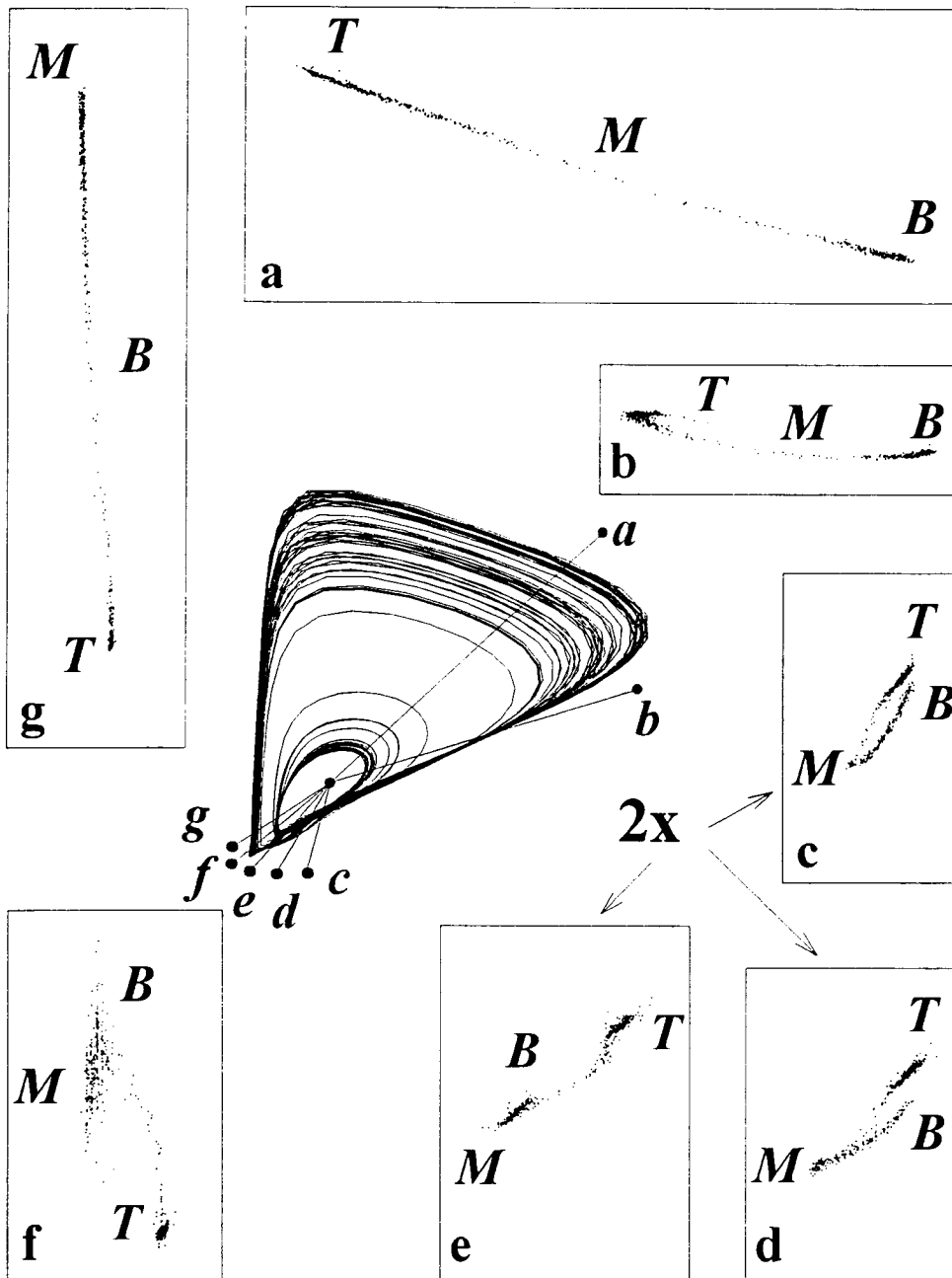


Figura 4.1: Diagrama do atrator $C^{(1)}$ (no centro) para a descarga elétrica, circundada por seções de corte executadas no espaço de fase ao longo das linhas a, b, \dots, f, g . As seções c, d, e estão ampliadas $2\times$. A posição das letras a, b, \dots nas caixas indicam a borda externa do atrator.

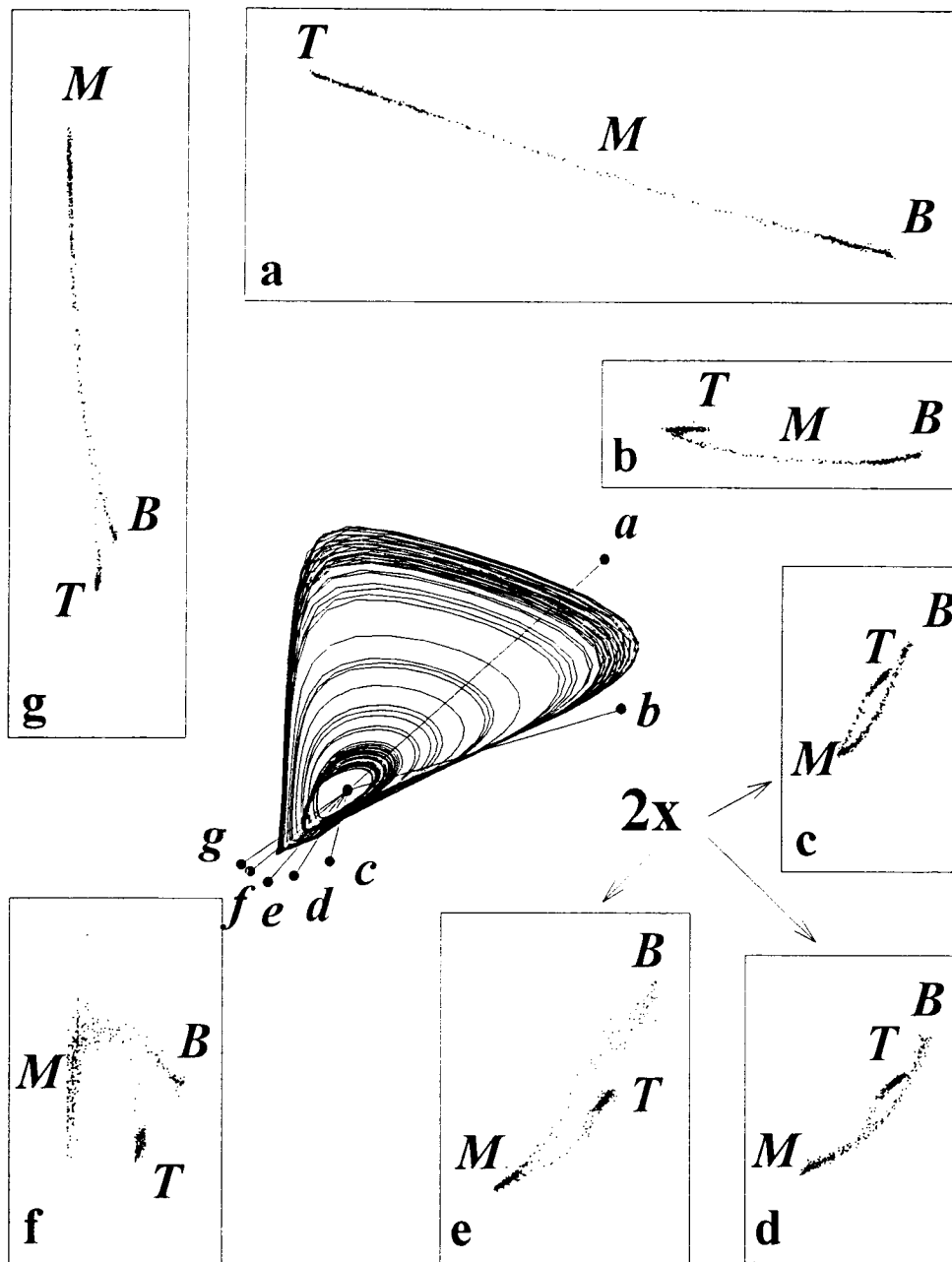


Figura 4.2: Diagrama do atrator $C^{(2)}$ (no centro) para a descarga elétrica, circundada por seções de corte executadas no espaço de fase ao longo das linhas *a*, *b*, ..., *f*, *g*. As seções *c*, *d*, e estão ampliadas 2x.

centro dessas figuras se mostra uma projeção XY ($X = i(t)$, $Y = i(t + \tau)$) dos respectivos atratores; o fluxo tem orientação horária. Como já analisamos na seção 2.3.1, as características básicas da dinâmica consistem de um comportamento espiralado instável, próximo do buraco no centro do diagrama onde se localiza um ciclo tipo sela (γ), conectado a um mecanismo de reinjeção. Assim, no que se refere às variedades estável e instável, a trajetória caótica se aproxima do ciclo ao longo de $W^s(\gamma)$, em seguida ela começa a espiralar sobre $W^u(\gamma)$, afastando-se de γ , até que o mecanismo de reinjeção, que é devido às não linearidades presentes no fluxo, traz a trajetória novamente para bem próximo do ciclo γ .

Aproveitamo-nos do fato de que, de acordo com as figuras 4.1 e 4.2, há um buraco no interior de cada atrator e definimos um eixo de rotação centrado nesse buraco e paralelo ao eixo $Z = i(t + 2\tau)$. Depois consideramos um plano de corte Σ com uma de suas bordas coincidente com o eixo de rotação (essa situação está ilustrada na figura 2.5) e então rotamos Σ , no sentido horário, uma revolução completa através do atrator. Nos diagramas no centro das figuras 4.1 e 4.2 as linhas rotuladas por a, b, \dots, f, g indicam seções de corte transversais ao fluxo, obtidas seguindo-se a sistemática descrita. Na figura 2.5 a posição de Σ corresponde à linha a na figura 4.2. Os pontos de interseção do fluxo com as seções de corte são mostrados nas caixas circundando a projeção do atrator. Em todas elas percebe-se que as interseções da trajetória caótica com as seções de corte se distribuem ao longo de uma linha, indicando que o atrator se reduz praticamente a uma superfície. Usualmente, isso é o que acontece em sistemas dissipativos. Tal como nos atratores de Duffing e Lorenz [GH83,p.82-102], conjecturamos que essa superfície é limitada por uma variedade instável, no nosso caso: $W^u(\gamma)$. Portanto, considerando as seções de Poincaré (a) das figuras 4.1 e 4.2, o ciclo tipo sela γ fica reduzido a um ponto fixo de sela p do mapeamento bidimensional que define os sucessivos retornos da trajetória caótica à mesma seção. As variedades estável e instável de p , $W^s(p)$ e $W^u(p)$, são formadas pelas interseções de Σ com, respectivamente, $W^s(\gamma)$ e $W^u(\gamma)$. Desse modo, o segmento retilíneo TB nas figuras 4.1a e 4.2a situa-se sobre $W^u(p)$; p está localizado à direita de B . Não temos como visualizar $W^s(p)$, só sabemos que, nas proximidades de p , $W^s(p)$ deve ser ortogonal a $W^u(p)$. O mapa bidimensional é suposto estar na forma $f(x, y; \mu)$. Assumimos ainda que a dinâmica seja tal que as variedades de p estão na iminência de estabelecer uma tangência (isto é: um ponto homoclínico em f)

como analisado por Gavrilov e Shilnikov [GS72, GS73]. O parâmetro $\mu = 0$ corresponde à tangência homoclínica, enquanto que os valores $\mu > 0$ quantificam a distância a essa tangência.

Agora pretendemos seguir a transformação do segmento TB das figuras 4.1a e 4.2a sob a ação de f , ou seja, estabelecer como ele retorna a essa seção “a”, respectivamente, para os regimes $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$. Para esse propósito analisamos detalhadamente a sucessão de seções de Poincaré nessas figuras, começando em “a”. Identifica-se claramente o estiramento e a dobradura da superfície do atrator. Para melhor perceber essa geometria, marcamos na seção (a) das figuras 4.1 e 4.2 três pontos: um no topo (T), outro no meio (M) e o último em baixo (B). Seguindo a localização desses pontos nas sucessivas seções de corte em ambas as figuras, observa-se que, após uma revolução, o segmento retilíneo inicial TB é transformado num segmento curvilíneo com formato de “ferradura”. Note-se que para a figura 4.1 as duas extremidades da ferradura (B e T) estão mais afastadas do que na figura 4.2. Tanto num caso como no outro, a nova conformação do segmento TB após a transformação também deve situar-se em $W^u(p)$ porque o resultado da transformação do segmento retilíneo inicial TB , sob a ação de f , deve permanecer em $W^u(p)$ pela razão de que uma variedade é invariante ²⁵. Portanto, essa transformação pode ser resumida na representação feita na figura 4.3, onde se mostra o início do emaranhamento de $W^u(p)$ ao se aproximar da tangência homoclínica [GH83,p.325]. O segmento retilíneo TB nessa figura corresponde à seção (a) da figura 4.2 (regime $C^{(2)}$). O ponto fixo de sela p está localizado na origem. Após aplicar $f(x, y; \mu)$ sobre os pontos (x, y) do segmento retilíneo TB , eles se transformam na linha estirada e dobrada de traço mais forte sobre $W^u(p)$ na figura 4.3 e que acompanha a curvatura de $W^u(p)$ à medida que essa se aproxima de $W^s(p)$ e de p . Como a descarga é fortemente dissipativa, o segmento TB é mapeado sobre sua posição retilínea original de imediato, ou seja, já na primeira iteração de f . Pela sucessiva aplicação de f a TB , depreendemos que resultará uma estrutura multifoliada, porém fortemente empacotada e aparentando ser uma linha. Devido a essa estrutura, o atrator não é exatamente uma superfície, mas tem uma dimensão um pouco maior e que assume um valor fracionário. Assim se explica porque o atrator é um objeto fractal. A ação de f se traduz num comportamento recorrente, envolvendo as operações de esticar

²⁵ Isso quer dizer que se $x \in W(p)$ então $f^n(x) \in W(p)$ para qualquer n .

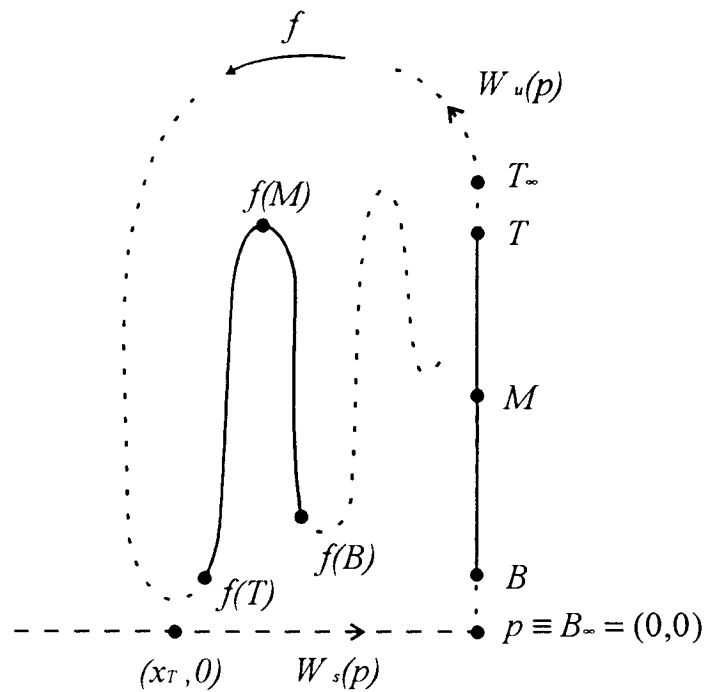


Figura 4.3: Geometria da formação de uma tangência homoclínica. A presente situação corresponde ao regime $C^{(2)}$ da figura 4.2. Para o regime $C^{(1)}$ da figura 4.1, a linha pontilhada $[W^u(p)]$ fica mais distante da linha tracejada $[W^s(p)]$ de tal modo que $f(B)$ e $f(T)$ estejam mais afastados entre si.

e dobrar, e que é responsável pela dinâmica caótica e, desse modo, pela conformação geométrica do atrator caótico. As órbitas periódicas instáveis embutidas no atrator [LK89] devem acompanhar essa conformação; capturar a intrincada organização que se estabelece entre elas é o objetivo do molde topológico, como veremos na próxima seção.

4.2 Obtenção do Molde Topológico

A análise topológica de um conjunto de dados caóticos permite, em contraste com a mais usual análise métrica, distinguir entre fluxos caóticos no espaço de fase que tenham distintas organizações topológicas. Isso se consegue determinando o molde topológico associado a cada fluxo caótico e comparando-os então.

O molde topológico é construído a partir da organização geométrica existente entre as órbitas periódicas instáveis no atrator caótico. Qualquer órbita periódica de um sistema

dinâmico é uma curva fechada ou laço no espaço de fase. Dependendo da geometria do atrator caótico, esse laço tem estrutura diferente. Considerando as infinitas órbitas periódicas instáveis presentes num atrator caótico, os correspondentes laços se entrelaçam sobre o atrator, criando elos característicos entre eles ²⁶. A dinâmica do sistema está codificada na estrutura dos laços e elos que se formam e essa estrutura se mantém constante enquanto as órbitas existirem. A partir dos laços e elos podem ser definidas quantidades topológicas invariantes [MG92, TAR92] que não mudam inclusive para variações no parâmetro de controle do sistema. Usualmente o molde topológico de um sistema dinâmico é obtido [MG92, TAR92] derivando essas quantidades invariantes a partir das órbitas periódicas instáveis extraídas diretamente da evolução temporal de uma variável dinâmica do sistema. Conhecendo essas quantidades invariantes, o molde topológico pode ser determinado. Ao invés disso, para obter o molde, procedemos de modo diferente. Capturamos a organização global das órbitas periódicas instáveis analisando o suporte delas: o atrator caótico. O molde topológico pode ser construído acompanhando uma revolução completa de uma seção de corte no atrator [MG93]. A sucessão das seções de corte evidencia os mecanismos de estiramento e dobradura do atrator caótico e como o fluxo no espaço de fase é reinjetado nele mesmo. Essencialmente é isso o que o molde topológico deve mostrar. Começamos com a seção (a) das figuras 4.1 e 4.2 e consideramos o segmento TB constituído por dois segmentos menores: TM e MB . Associamos TM e TB a duas tiras elásticas e que constituirão os ramos do molde topológico. Agora, a tira TM sofre uma meia torção e então as duas tiras (TM e MB), após serem estendidas lateralmente, são coladas uma na outra ao longo de uma linha que, finalmente, é conectada com o segmento inicial TB . A implementação geométrica dessa transformação resulta no molde topológico da ferradura [Ho88, HW85], cuja representação, adaptada à situação da descarga elétrica, está na figura 4.4. Nessa figura, observe-se que, seguindo as linhas sobre as quais estão os pontos B , M e T (posição correspondente à seção (a) das figuras 4.1 e 4.2) no sentido indicado pela flecha, eles retornam ao ponto de partida ²⁷ como a análise do espaço de fase (figuras 4.1 e 4.2) demonstrou, validando a nossa construção do molde. De um ponto de vista mais formal, o molde topológico resulta da projeção do fluxo no espaço de fase ao longo da variedade

²⁶No final deste capítulo mostramos os laços e o elo que as órbitas $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ formam.

²⁷No fim desta seção retomamos esse ponto.

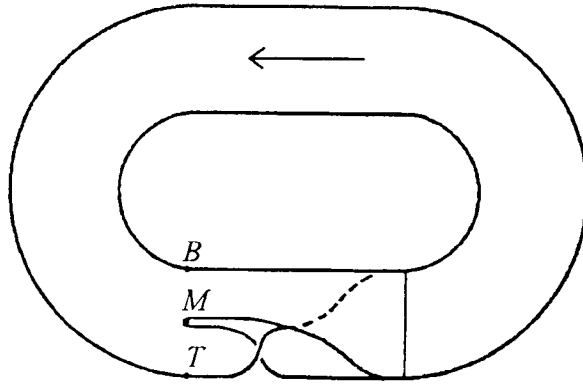


Figura 4.4: Molde topológico da ferradura. Ele recebe essa denominação porque a linha que une os pontos B , M e T (à esquerda) é transformada de tal modo que chega na junção dos ramos (à direita) dobrada em forma de ferradura.

estável $W^s(\gamma)$ sobre a variedade instável $W^u(\gamma)$, conforme é descrito por Holmes [Ho88] e Holmes e Williams [HW85]. As órbitas são, então projetadas sobre o molde, preservando a sua organização topológica. Portanto, de uma forma mais precisa, o molde topológico é um semifluxo (porque órbitas inversas não são únicas na linha que une os dois ramos do molde) sobre uma variedade bidimensional (2D) ramificada.

O procedimento acima descrito para obter o molde topológico já foi aplicado, por exemplo, numa investigação numérica do oscilador de Duffing [MG93] e no estudo experimental de uma laser modulado [LG93]. Ambos sistemas referidos são forçados, o que facilita bastante a análise topológica. A descarga elétrica luminosa aqui analisada não está sujeita a uma força externa. O molde topológico que obtivemos também foi confirmado [AeM95] numa análise da estrutura dos laços e elos formados pelas órbitas periódicas instáveis identificadas na evolução temporal da corrente $i(t)$ da descarga. Essa análise seguiu os mesmos passos adotados na obtenção do molde da ferradura associado à dinâmica de um laser com absorvedor saturável [PFA+92].

Dentre os vários usos do molde topológico, queremos destacar os seguintes:

- em primeiro lugar, o molde topológico representa uma caracterização topológica de um comportamento caótico, a qual complementa a sua caracterização métrica. O molde topológico, além de ser invariante frente a mudanças de coordenadas do sis-

tema, também é invariante a variações no parâmetro de controle do sistema. Uma caracterização mais abrangente de caos determinístico num sistema dinâmico certamente requer uma dissecação da organização topológica do atrator caótico para depois “vestí-la” com a estrutura métrica do atrator. Na próxima seção mencionaremos brevemente como se pode associar ao molde topológico a caracterização métrica;

- O molde topológico permite classificar sistemas dinâmicos diferentes (isto é, gerados por conjuntos distintos de equações) como sendo “afins” se ambos originam um mesmo tipo de molde. Por exemplo, o laser com absorvedor saturável acima referido [PFA+92] e a descarga luminosa são sistemas diversos, mas ambos geram o molde da ferradura. Isso significa que ambos têm um comportamento dinâmico similar. Reconhecer semelhanças entre sistemas distintos é muito útil quando se quer caracterizar o comportamento de um sistema particular;
- O molde topológico também permite estabelecer se resultados experimentais são “compatíveis” com um modelo teórico. Assim, dados obtidos da integração numérica de um modelo são compatíveis com os dados experimentais se ambos originam o mesmo tipo de molde.

Para finalizar, queremos ressaltar que o molde topológico da figura 4.4 não corresponde exatamente às situações das figuras 4.1 [$C^{(1)}$] e 4.2 [$C^{(2)}$], mas, como veremos na próxima seção, a uma situação $C^{(n)}$ com $n \rightarrow \infty$. É nessa condição que os pontos M e T serão transportados sobre o molde, respectivamente, para as posições de T e B , como mostra a figura 4.4.

4.3 Modelo Topológico de Caos Homoclínico

O molde da figura 4.4 nos dá uma boa idéia sobre a organização das órbitas periódicas instáveis nos regimes caóticos que antecedem a órbita homoclínica, mas pouco informa sobre as mudanças qualitativas no comportamento da descarga quando ela se aproxima da homoclinicidade. Para incorporar essa informação no molde, procuramos agora estabelecer um modelo topológico para o caos homoclínico. Para tanto, notamos nas figuras 4.1a e

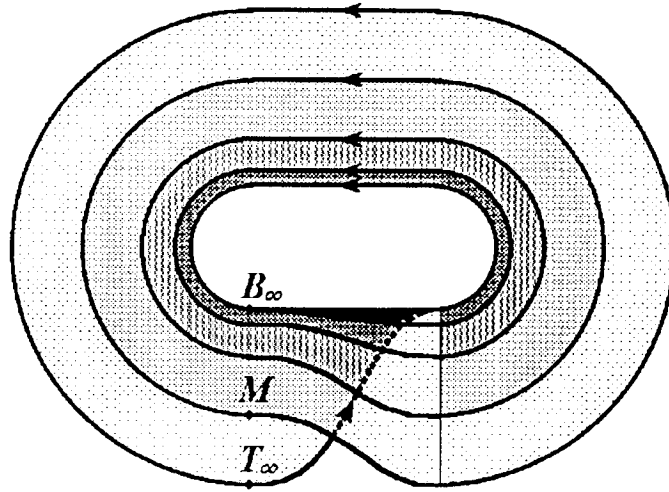


Figura 4.5: Representação da órbita homoclínica no molde topológico da ferradura. Mostram-se apenas as quatro últimas voltas em torno do ciclo tipo sela e mais a laçada de reinjeção.

4.2a que a localização de M em TB não é arbitrária. Verifica-se que M é a fronteira entre duas regiões no espaço de fase. Uma (TM) está associada ao mecanismo de reinjeção, enquanto que a outra (MB) corresponde às voltas em torno do ciclo tipo sela. Esses dois processos distintos nos permitem, a exemplo da seção 3.2.3, codificar a dinâmica da descarga elétrica com dois símbolos: R (de reinjeção) ou L (de “loops”, isto é: voltas). Usa-se R quando o fluxo no espaço de fase cruza TM e emprega-se L quando ele passa por MB . Como vimos no capítulo anterior, a órbita homoclínica corresponde no espaço de fase a uma laçada de reinjeção seguida por um número infinito de voltas em torno do ciclo tipo sela e, em consequência, é representada pela seqüência simbólica RL^∞ . A representação da órbita homoclínica no molde topológico é feita na figura 4.5. Essa situação corresponde à tangência homoclínica ($\mu=0$). Nesse caso o atrator caótico ainda não é hiperbólico [Ot93,p.125-9] devido à coincidência das direções estável e instável no ponto de tangência ²⁸. O regime completamente hiperbólico se estabelece após a ocorrência da última tangência entre $W^s(p)$ e $W^u(p)$, quando então todas as possíveis órbitas periódicas são descritas por uma dinâmica simbólica baseada numa árvore binária (R ou L) completa

²⁸De uma forma simplificada, podemos dizer que um atrator é hiperbólico se todos os seus pontos são do tipo sela, ou seja: com direções estável e instável distintas (veja-se a discussão sobre o ciclo tipo sela na seção 2.3.1).

[HW85]. Para valores de parâmetros μ anteriores à tangência homoclínica, a descarga elétrica provavelmente não é hiperbólica e, portanto, nem todas as possíveis combinações de R e L têm correspondência nas órbitas periódicas observadas. Diz-se, então, que as órbitas não observadas, embora permitidas, foram podadas.

A fundamentação matemática da abordagem topológica rigorosamente só vale para atratores hiperbólicos. Acontece que a maioria (se não todos) os exemplos de atratores caóticos de interesse para a Física são não hiperbólicos. Então, a “filosofia” de aplicação da análise topológica consiste em obter a caracterização topológica (molde) correspondente ao limite hiperbólico de um sistema dinâmico, conhecendo-se o seu comportamento para um valor do parâmetro de controle para o qual ele é, provavelmente, não hiperbólico. Uma vez que se conhece o comportamento topológico no limite hiperbólico, onde se pode usar todo ferramental matemático, então, assume-se que essa informação também seja válida para regimes correspondentes a outros valores do parâmetro de controle, possivelmente não hiperbólicos, porque os invariantes topológicos (baseados na estrutura dos laços, elos, etc. das órbitas) são robustos frente a variações do parâmetro de controle. A obtenção do molde da ferradura (figura 4.4) seguiu essa diretriz. Queremos, agora, analisar o comportamento dos regimes $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$ sobre esse molde e a questão da poda das órbitas. Essa análise levará ao modelo topológico de caos homoclínico.

Quando μ assume valores positivos, a descarga elétrica se afasta mais da hiperbolicidade e, portanto, para dar conta do associado processo de poda das órbitas, assumimos que as órbitas periódicas instáveis ficam restritas a apenas uma parte do molde da figura 4.5. Assim, à medida que $\mu \rightarrow 0$, a dinâmica qualitativa da descarga é modelada assumindo que uma fatia maior do molde é visitada pelas órbitas, permitindo, então, um maior número de combinações entre R e L . Baseados em observações experimentais (figuras 4.1 e 4.2), implementamos essa idéia na figura 4.6 para os regimes caóticos $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$. Essa figura representa geometricamente o modelo topológico para a homoclinicidade. Seguindo o procedimento de construção do molde topológico (figura 4.4), na figura 4.6 são representadas as ações dos mecanismos de estiramento e de dobradura para os atratores $C^{(1)}$ (desenho claro) e $C^{(2)}$ (desenho escuro). É importante notar que, pela atuação de f (veja-se a figura 4.3), a dobradura dos segmentos T_1B_1 e T_2B_2 , correspondendo, respectivamente,

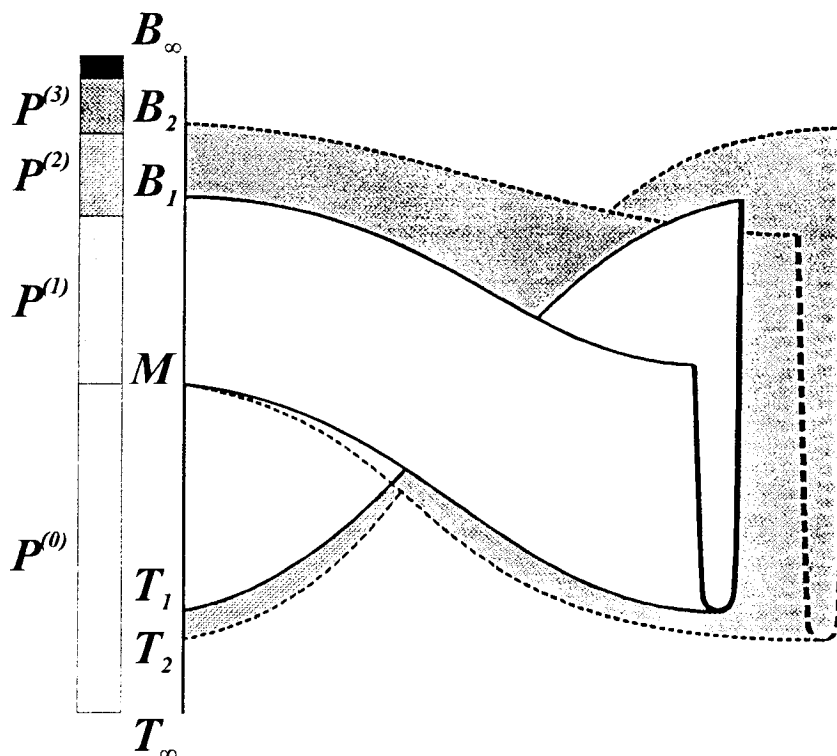


Figura 4.6: Implementação do modelo topológico de caos homoclínico. São mostrados os estiramentos e as dobraduras correspondentes, respectivamente, aos regimes $C^{(1)}$ (desenho claro) e $C^{(2)}$ (desenho escuro).

às janelas $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$, é assimétrica porque $f(T_n M) > f(M B_n)$ (n é o índice de $C^{(n)}$). Para o regime $C^{(1)}$ isso está evidente na figura 4.1g e para o regime $C^{(2)}$, na figura 4.2g; nota-se que a inequação é mais pronunciada para o regime $C^{(1)}$ e tornar-se-á menor para regimes $C^{(n)}$ quando $n \rightarrow \infty$. Isso está em acordo com o fato de que, conforme a figura 4.3, as dobras em forma de parábola de $W^u(p)$ afastam-se exponencialmente de $W^s(p)$ à medida que μ cresce (isto é; $n \rightarrow 0$) [GH83,p.330], o que origina a inequação crescente $f(T_n M) > f(M B_n)$. Por outro lado, na tangência homoclínica ($\mu = 0$; $n = \infty$) tem-se que $f(T_{\infty} M) = f(M B_{\infty})$, o que implica que na figura 4.3 a localização de $f(T_{\infty})$ será então $(x_T, 0)$. O molde topológico das figuras 4.4 e 4.5 corresponde exatamente a essa situação. Em relação à figura 4.5, observa-se que a órbita homoclínica divide o molde em faixas $P^{(n)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$; elas correspondem às áreas hachuradas delimitadas pela órbita homoclínica na figura 4.5 e também são representadas à esquerda da figura 4.6). O índice n fornece o número de voltas em torno do ciclo tipo sela que acontecem entre duas reinjeções consecutivas para uma trajetória partindo de uma faixa $P^{(n)}$. Quando $\mu \rightarrow 0$,

o segmento retilíneo TB se estende para $T_\infty B_\infty$ e, assim, simultaneamente, um número cada vez maior de faixas $P^{(n)}$ fica disponível para as órbitas. Esse processo determina as seqüências simbólicas permitidas. Por exemplo, para o regime $C^{(2)}$ considerado na figura 4.6, MB_2 abrange as faixas $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ e parte da $P^{(3)}$; portanto uma seqüência simbólica $R(L)^4$ é incompatível com essa situação.

Na linha de junção dos dois ramos do molde topológico, o semifluxo do molde induz um mapa de retorno 1D [Ho88, HW85, BtL94]. Para obtê-lo, parametrizamos a passagem das trajetórias provenientes dos dois ramos (TM e MB) pela linha de junção dos ramos com uma distância l ao longo dessa linha (consideramos $l = 0$ na borda interna do molde). Dos sucessivos cruzamentos l_i , obtém-se um mapa de retorno 1D $l_i \times l_{i+1}$ equivalente ao mapa das amplitudes e que, para o regime $C^{(2)}$, está ilustrado na figura 3.5b. O mapa $l_i \times l_{i+1}$ reflete a métrica do atrator à medida que $\mu \rightarrow 0$. É nesse contexto que podemos vestir o molde topológico com a caracterização métrica do atrator, como mencionamos quando comentamos os usos do molde na seção anterior. A transformação desse mapa 1D sob a variação de μ dá conta das bifurcações que compõem a seqüência periódico-caótica alternante, descrita na seção 2.2.2. Conforme $\mu \rightarrow 0$, são geradas órbitas periódicas do tipo $P^{(n)}$ com o período e o índice n cada vez maiores, possuindo correspondentemente uma ordenada de reinjeção maior [BtL94] (isso pode ser entendido a partir da análise da seção 3.2.2) na figura 4.3. Essas ordenadas se acumulam em T_∞ , que, a exemplo de $(x_T, 0)|_{\mu=0}$, também é um ponto homoclínico porque $T_\infty = f_{\mu=0}^{-1}(x_T, 0)$. Assim, o ponto homoclínico T_∞ é um ponto de acumulação para uma família de infinitas órbitas periódicas, de acordo com um teorema de Birkhoff e Smith [AS88]. Essas são as órbitas periódicas $P^{(n)}$ que constituem a seqüência periódico-caótica alternante.

A presença dos pontos homoclínicos $(x_t, 0)|_{\mu=0}$ e $f_{\mu=0}^{-1}(x_T, 0)$ garante a existência da órbita homoclínica na descarga elétrica e, nesse caso, o desenho das variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$ da figura 4.3 representa uma parte do emaranhado homoclínico. O processo de formação desse emaranhado homoclínico na descarga elétrica é responsável pelo seu comportamento caótico, denominado de caos homoclínico. No nosso caso, ele é observado através da seqüência periódico-caótica alternante. O modelo topológico para o caos homoclínico da descarga elétrica consiste em considerar o molde topológico formado por tiras

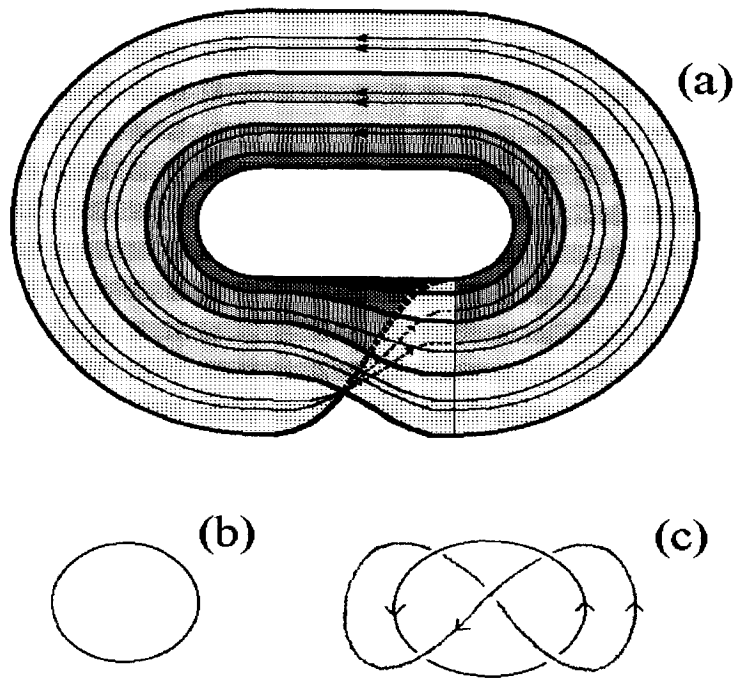


Figura 4.7: (a) Órbitas instáveis $P^{(1)}$ (azul) e $P^{(2)}$ (vermelho) no molde da ferradura. (b) O laço (trivial) correspondente a cada uma delas. (c) O elo formado pelas duas órbitas.

elásticas que, à medida que se varia o parâmetro de controle, são deformadas como indica a figura 4.6 para as regimes $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$. Para o parâmetro de controle correspondente à órbita homoclínica o molde assume o formato das figuras 4.4 e 4.5. Consideramos que a estrutura de faixas induzida pela órbita homoclínica nesse molde (figura 4.5) permanece subjacente nas situações anteriores a essa órbita. Assim, à medida que se estabelece a homoclinicidade, o molde se estende mais lateralmente, englobando um número maior de faixas (isso se indica à esquerda da figura 4.6). Em função disso, fica disponível um maior número de combinações dos símbolos R e L e, desse modo, pode-se prever a estrutura das possíveis órbitas compatíveis com o valor considerado do parâmetro de controle. Essas considerações permitem também analisar a questão da poda de órbitas.

Para finalizar, a título de ilustração, exibimos na figura 4.7 como ficam inseridas as órbitas instáveis tipo $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ (mostradas nas figuras 2.6 e 3.2b) no molde topológico da figura 4.5. Se “desenrolarmos” os laços correspondentes às órbitas $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ da figura 4.7, obtemos um laço em forma de anel (figura 4.7b), que é chamado de laço trivial. Por outro

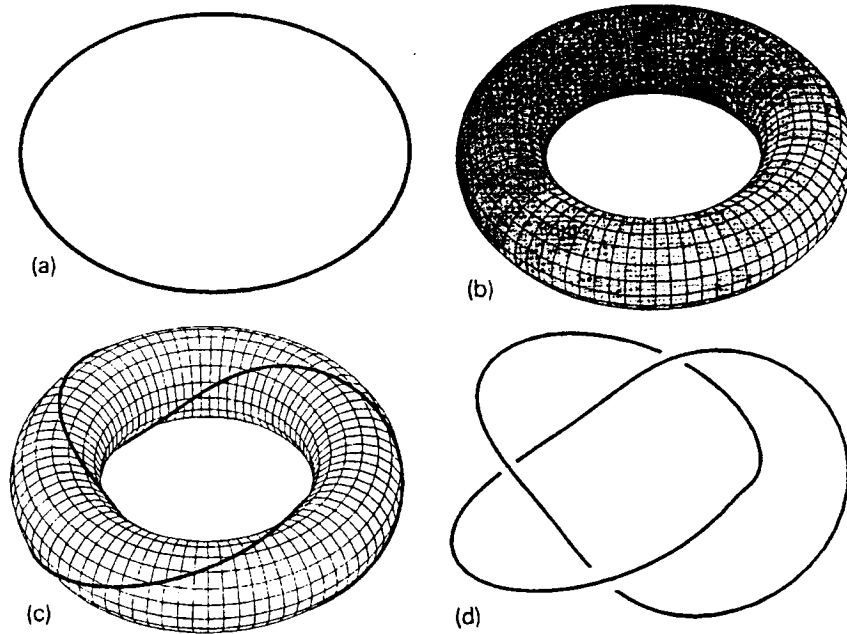


Figura 4.8: Transformação de um laço trivial através de um dobramento de período. Adaptado de [AtM95].

lado, os laços triviais $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$, devido a conformação geométrica do molde topológico, entrelaçam-se formando o elo representado na figura 4.7c.

A figura 4.8 indica como um laço trivial se transforma através de uma bifurcação que origina um dobramento de período. Considera-se que o laço (a), através da bifurcação, transforma-se num toro (b) em cuja superfície se situa o laço correspondente à nova órbita (c): esse é um laço “trifoliar” (d). Esse exemplo permite-nos afirmar que a bifurcação de $P^{(0)}$ para $P^{(1)}$ no diagrama de bifurcações da figura 2.3 não é um dobramento de período, pois tanto $P^{(0)}$ quanto $P^{(1)}$ são laços triviais. Por outro lado, se desenharmos uma órbita $2P^{(1)}$ (que é resultado do dobramento de período de $P^{(1)}$) sobre o molde da figura 4.5, notaremos que ela possui um laço trifoliar.

Conclusão

Através deste trabalho, logramos êxito na caracterização de caos homoclínico na descarga elétrica luminosa subnormal, fazendo uma análise integralmente baseada num conjunto de dados coletados experimentalmente: a evolução temporal da corrente da descarga luminosa. Isso demonstra que, para obter a caracterização do comportamento caótico de um sistema dinâmico, não é essencial conhecer as suas equações de movimento. Esse fato é alentador, levando-se em conta as dificuldades inerentes de se “manusear” essas equações (quando são conhecidas) em sistemas não lineares. A multiplicidade de comportamentos possíveis para sistemas caóticos, obtida a partir de pequenas variações nos seus parâmetros de controle, é uma característica importante que certamente vai suscitar, em breve, um grande número de aplicações práticas. Para esse fim, é essencial obter uma identificação rápida e segura das propriedades caóticas de um sistema dinâmico. O presente trabalho almejou contribuir nessa direção.

A caracterização de caos homoclínico na descarga elétrica, objetivo maior deste trabalho, foi efetuada de três formas; para cada uma delas a fonte de informação é distinta:

1. Evolução temporal da corrente da descarga elétrica – A descarga elétrica luminosa é um dispositivo de plasma de baixa temperatura em que, alterando-se um parâmetro de controle e para condições experimentais adequadas, a variável dinâmica medida (no caso, a corrente elétrica fluindo através da descarga) evolui de um comportamento regular (periódico) para um comportamento irregular (não periódico, ou seja: caótico). Esse caminho para “complexidade” é caracterizado por seqüências de bifurcações, constituindo uma sucessão de mudanças qualitativas no comportamento da corrente. Assim, caracterizamos o comportamento caótico em termos do caminho que a descarga segue ao evoluir de um comportamento regular a um caótico. Uma seqüência de bifurcações que observamos consistiu de oscilações na corrente da descarga elétrica e que, variando-se o parâmetro de controle, apresentam alternadamente padrões de oscilação periódicos e caóticos. Essa é a denominada seqüência periódico-caótica e ela evidencia um comportamento de caos homoclínico na descarga elétrica. O termo caos homoclínico engloba toda a complexa dinâmica que aparece

quando um sistema dinâmico está próximo de uma órbita homoclínica.

2. Mapas de retorno – Mostramos que mapas de retorno são poderosas ferramentas de diagnóstico para implementar a caracterização de caos homoclínico. Embora tenhamos explorado o exemplo da descarga elétrica, o procedimento exposto neste trabalho é geral, funciona com dados numéricos ou experimentais e, portanto, pode ser aplicado em outros sistemas dinâmicos. Ilustramos quatro métodos de obter mapas a partir da evolução temporal da corrente da descarga elétrica; são eles: o mapa do tempo de retorno, o mapa do tempo de vôo, o mapa da seção de Poincaré e o mapa das amplitudes máximas. Evidenciamos que os três últimos, no que se refere ao comportamento homoclínico, são equivalentes entre si. É justamente a presença da órbita homoclínica no espaço de fase da descarga elétrica a responsável por essa equivalência. Desse modo, podemos escolher qualquer um deles para obter as propriedades do comportamento caótico. O uso dos mapas do tempo de vôo e das amplitudes máximas apresenta a vantagem que, para a sua obtenção, não é necessário reconstruir o espaço de fase. Além disso, esses mapas são obtidos diretamente da evolução temporal da corrente com menor esforço do que o mapa da seção de Poincaré é obtido do espaço de fase. Em suma, a estrutura de muitos ramos que se apresenta nesses mapas é a assinatura do comportamento homoclínico da descarga. Além disso, obtivemos mapas unidimensionais (o mapa de amplitude e o mapa de tempo de retorno), dos quais pudemos inferir a presença da órbita homoclínica.
3. Estrutura topológica – A dinâmica da descarga elétrica pode ser descrita num espaço de fase reconstruído a partir do registro temporal da sua corrente. Podemos assumir que a equivalência do mapa da seção de Poincaré com os demais, obtidos diretamente da evolução temporal de uma variável dinâmica, atesta a boa qualidade da reconstrução que fizemos do espaço de fase. A presença da órbita homoclínica nesse espaço induz a descarga a ter um determinado comportamento dinâmico. Esse é modelado pelo molde da ferradura que é, essencialmente, uma descrição topológica da dinâmica da descarga. O molde foi obtido diretamente da geometria do fluxo no espaço de fase, levando-se em conta os mecanismos de estiramento e de dobradura presentes no atrator caótico. O molde também poderia ser obtido a partir de invariantes topológicos derivados diretamente da evolução da corrente da descarga. No entanto, enfatizamos

que a obtenção do molde que adotamos permite estabelecer o modelo topológico para a homoclinicidade. Esse modelo topológico informa a estrutura das possíveis órbitas, à medida que a descarga se aproxima da órbita homoclínica. Uma observação final importante é que a análise topológica é robusta em relação ao ruído. Para exemplificar isso, relembramos que a análise métrica não pode dar resultados confiáveis para o regime $C^{(1)}$ devido a contaminação do sinal medido pelo ruído (veja-se a seção 2.4); no entanto, para o mesmo regime, realizamos a análise topológica sem maiores problemas.

Em suma, reunindo-se todos os resultados acima referidos, obtivemos uma análise autoconsistente, eis que, empregando várias técnicas distintas, sempre evidenciamos o comportamento homoclínico da descarga elétrica luminosa.

Para finalizar, apresentamos, a seguir, algumas possíveis extensões deste trabalho:

- Os resultados analisados foram obtidos em descargas em argônio. Já verificamos que o comportamento caótico na descarga persiste, quando ela é operada com outros gases; mas há diferenças. Investigá-las é uma interessante extensão deste trabalho. Um outro ponto importante é estabelecer o papel desempenhado pelas impurezas presentes no gás em relação ao comportamento caótico. É muito provável que a existência de impurezas seja decisiva para a ocorrência de caos na descarga.
- Uma perspectiva que merece consideração é, existindo a possibilidade do registro simultâneo de três sinais experimentais, medir a tensão da descarga (V), a sua corrente (i) e a emissão luminosa (I). Se essas variáveis forem independentes, poder-se-ia constituir um espaço de fase “verdadeiro” $V \times i \times I$. A comparação desse espaço de fase com um espaço reconstruído a partir de uma variável remete-nos à questão da equivalência entre eles e suscitaria outras importantes questões de análise da dinâmica caótica. A equivalência pode ser demonstrada pela análise topológica se as duas descrições gerarem o mesmo molde topológico.
- Desenvolver um modelo em termos de um conjunto de equações que explique o comportamento observado. Essa certamente é a tarefa mais ambiciosa. A consistência do

modelo desenvolvido pode ser testada com a análise topológica: o molde topológico obtido do modelo deve ser o mesmo que aquele obtido diretamente das medidas experimentais.

Referências Bibliográficas

- AAR87 ARGOUL, F., ARNEODO, A., RICHETTI, P. *Dynamique symbolique dans la réaction de Belousov-Zhabotinskii: une illustration expérimentale de la théorie de Shil'nikov des orbites homoclines.* **J. Chim. Phys.**, **84**, 1367, 1987.
- ABS+93 ABARBANEL, H. D. I, BROWN, R., SIDOROWICH, J. J., TSIMRING, L. S. *The analysis of observed chaotic data in physical systems.* **Rev. Mod. Phys.**, **65**, 1331, 1993.
- ACE+87 AUERBACH, D., CVITANOVIĆ, P., ECKMANN, J.-P., GUNARATNE, G., PROCACCIA, I. *Exploring chaotic motion through periodic orbits.* **Phys. Rev. Lett.**, **58**, 2387, 1987.
- ALM+88 ARECCHI, F. T., LAPUCCI, A., MEUCCI, R., ROVERSI, J. A., COULLET, P. H. *Experimental characterization of Shil'nikov chaos by statistics of return times.* **Europhys. Lett.**, **6**, 677, 1988.
- AeM95 ARIMONDO, E., MOLESTI, F. *Informe particular.* 1995.
- AtM95 ARIMITSU, T., MOTOIKE, T. *A universality of period doubling bifurcations.* **Physica D**, **84**, 290, 1995.
- AS88 ABRAHAM, R., SHAW, C. **Dynamics: the geometry of behavior.** Santa Cruz: Aerial Press, 1988. v.3.
- AVK66 ANDRONOV, A. A., VITT, A. A., KHAIKIN, S. E. **Theory of oscillators.** Oxford: Pergamon Press, 1966.
- BBL+94 BRAUN, T., BRAUN, L. F. M., LISBOA, J. A., CORREIA, R. R. B. *What can be learnt from the chaotic dynamics in a glow discharge?* In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF PLASMA PHYSICS, 1994, Foz do Iguaçu, PR. SAKANAKA, P. H. et al. (Eds.) **Proceedings.** São José dos Campos: INPE, 1994. v.3, p.13.

- BCA95 BRAUN, T., CORREIA, R. R. B., ALTMANN, N. *Topological model of homoclinic chaos in a glow discharge.* **Phys. Rev. E**, **51**, 4165, 1995.
- Bl78 BLOCK, L. *Homoclinic points of mappings of the Interval.* **Proc. Amer. Math. Soc.**, **72**, 567, 1978.
- BIL94 BRAUN, L. F. M., LISBOA, J. A. *Observation of damped oscillations in the optogalvanic effect in a subnormal glow discharge.* **Opt. Comm.**, **108**, 302, 1994.
- BtL94 BRAUN, T., LISBOA, J. A. *Characterization of homoclinic chaos in a glow discharge through return maps.* **Int. J. Bifurc. Chaos**, **4**, 1483, 1994.
- BLF+87 BRAUN, T., LISBOA, J. A., FRANCKE, R. E., GALLAS, J. A. C. *Observation of deterministic chaos in electrical discharges in gases.* **Phys. Rev. Lett.**, **59**, 613, 1987.
- BLG92 BRAUN, T., LISBOA, J. A., GALLAS, J. A. C. *Evidence of homoclinic chaos in the plasma of a glow discharge.* **Phys. Rev. Lett.**, **68**, 2770, 1992.
- BRP90 BUZUG, Th., REIMERS, T., PFISTER, G. *Optimal reconstruction of strange attractors from purely geometric arguments.* **Europhys. Lett.**, **13**, 605, 1990.
- BW83 BIRMAN, J. S., WILLIAMS, R. F. *Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz's equations.* **Topology**, **22**, 47, 1983.
- BZM88 BOSAN, Dj. A., ZLATIC, V. Z., MIJOVIC, B. J. *Current oscillations in gas-filled diodes in subnormal glow discharge.* **J. Phys. D: Appl. Phys.**, **21**, 1462, 1988.
- DD51 DONAHUE, T., DIEKE, G. H. *Oscillatory phenomena in direct current glow discharges.* **Phys. Rev.**, **81**, 248, 1951.

- De85 DEVANEY, R. L. **An introduction to chaotic dynamical systems.** Menlo Park: Benjamin/Cummings, 1985.
- Ec81 ECKMANN, J.-P. *Roads to turbulence in dissipative dynamical systems.* **Rev. Mod. Phys.**, **53**, 643 (1981).
- FP94 FIEDLER-FERRARA, N., PRADO, C. C. do **Caos: uma introdução.** São Paulo: Edgard Blücher, 1994.
- Fr56 FRANCIS, G. *The glow discharge at low pressure.* In: FLÜGGE, S. (Ed.) **Handbuch der physik.** Berlin: Springer Verlag, 1956. v.22, p. 53.
- GH83 GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields.** New York: Springer-Verlag, 1983.
- GP83 GRASSBERGER, P., PROCACCIA, I. *Measuring the strangeness of strange attractors.* **Physica D**, **9**, 189, 1983.
- GS72 GAVRILOV, N. K., SHILNIKOV, L. P. *On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve I.* **Math. USSR Sbornik**, **17**, 467, 1972.
- GS73 GAVRILOV, N. K., SHILNIKOV, L. P. *On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve II.* **Math. USSR Sbornik**, **19**, 139, 1973.
- GW87 GASPARD, P., WANG, X.-J., *Homoclinic orbits and mixed-mode oscillations in far-from equilibrium systems.* **J. Stat. Phys.**, **48**, 151, 1987.
- Ha89 HAO, B.-L. **Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems.** Singapore: World Scientific, 1989.
- Ho88 HOLMES, P. *Knots and orbit genealogies in nonlinear oscillators.* In: BEDFORD, T. , SWIFT, J.(Eds.) **New directions in dynamical systems.** Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p. 150.

- HW85 HOLMES, P., WILLIAMS, R. F. *Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: torus knots and bifurcation sequences.* **Arch. Ration. Mech. Anal.**, **90**, 115, 1985.
- LG93 LEFRANC, M., GLORIEUX, P. *Topological analysis of chaotic signals from a CO₂ laser with modulated losses.* **Int. J. Bifurc. Chaos**, **3**, 643, 1993.
- LHD91 LEFRANC, M., HENNEQUIN, D., DANGOISSE, D. *Homoclinic chaos in a laser containing a saturable absorber.* **J. Opt. Soc. Am. B**, **8**, 239, 1991.
- LK89 LATHROP, D. P., KOSTELICH, E. J. *Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits.* **Phys. Rev. A**, **40**, 4028, 1989.
- MG92 MINDLIN, G. B., GILMORE, R. *Topological analysis and synthesis of chaotic time series.* **Physica D**, **58**, 229, 1992.
- MG93 McCALLUM, J. W. L., GILMORE, R. *A geometric model for the Duffing oscillator.* **Int. J. Bifurc. Chaos**, **3**, 685, 1993.
- MN84 MELEKHIN, V. N., NAUMOV, N. Yu. *Critical current measurement and dynamic theory of Townsend discharge stability.* **Sov. Phys. Tech. Phys.**, **29**, 888, 1984.
- MNT87 MELEKHIN, V. N., NAUMOV, N. Yu., TKACHENKO, N. P. *Effect of the external circuit on the characteristics of the transition from a Townsend to a normal glow discharge.* **Sov. Phys. Tech. Phys.**, **32**, 274, 1987.
- NS73 NEMA, R. S., SHRIVASTAVA, R. K. *Oscillatory characteristics of a low-pressure DC discharge in air.* **J. Phys. D: Appl. Phys.**, **6**, 1958, 1973.

- Oi94 OIWA, N. N. **Comparação de algoritmos para estimativa de expoentes de Lyapunov.** São Paulo: Curso de Pós-Graduação em Física da USP, 1994. 138 p. Diss. maestr. Física.
- OF95 OIWA, N. N., FIEDLER-FERRARA, N. *Informe particular.* 1995.
- Ot93 OTT, E. **Chaos in dynamical systems.** Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- Pi57 PILON, A. M. *Oscillations in direct current glow discharges.* **Phys. Rev.**, **107**, 25, 1957.
- Po1899 POINCARÉ, H. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.** Paris: Gauthier-Villars, 1899. 3v.
- PFA91 PAPOFF, F., FIORETTI, A., ARIMONDO, E. *Return maps for intensity and time in a homoclinic chaos model applied to a laser with saturable absorber.* **Phys. Rev. A**, **44**, 4639, 1991.
- PFA+92 PAPOFF, F., FIORETTI, A., ARIMONDO, E., MINDLIN, G., SOLARI, H. G., GILMORE, R. *Structure of chaos in the laser with saturable absorber.* **Phys. Rev. Lett.**, **68**, 1128, 1992.
- Ra91 RAIZER, Y. P. **Gas discharge physics.** Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- Ro76 RÖSSLER, O. *Chaotic behavior in simple reaction systems.* **Z. Naturforsch.**, **31a**, 259, 1976.
- Ro79 RÖSSLER, O. *Continuous chaos – four prototype equations.* **Ann. N. Y. Acad. Sci**, **316**, 376, 1979.
- SG86a SINGH, G., GOUR, L. S. *Equivalent capacity model of a discharge tube.* **Int. J. Electron.**, **60**, 753, 1986.
- SG86b SINGH, G., GOUR, L. S. *Measurement of the equivalent capacity of a discharge tube in its active state.* **Int. J. Electron.**, **61**, 683, 1986.

- SGC89 SINGH, G., GOUR, L. S., CHAMADIYA, P. K. *Subnormal DC glow discharge oscillations explained on the basis of the equivalent capacity model. Int. J. Electron.*, **66**, 311, 1989.
- SS85 SINGH, G., SHRIVASTAVA, R. K. *On the presence of residual current in a subnormal glow discharge in air. J. Phys. D: Appl. Phys.*, **18**, 1125, 1985.
- Sw83 SWINNEY, H. L. *Observation of order and chaos in nonlinear systems. Physica D*, **7**, 3, 1983.
- Ta81 TAKENS, F. *Detecting strange attractors in turbulence.* In: RAND, D. A. et al. (Eds) **Dynamical systems and turbulence.** New York: Springer Verlag, 1981. p. 366. (Lecture Notes in Mathematics **898**).
- TAR92 TUFILLARO, N. B., ABBOTT, T. A., REILLY, J. P. **An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos.** New York: Addison-Wesley, 1992.
- UN47 ULAM, S. M., von NEUMANN, J. *On combinations of stochastic and deterministic processes. Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**, 1120, 1947.
- Wi88 WIGGINS, S. **Global bifurcations and chaos: analytical methods.** New York: Springer Verlag, 1988.
- Wi90 WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.** New York: Springer-Verlag, 1990.
- ZP71 ZAKHARENKO, Yu. G., PRIVALOV, V. E. *Oscillations in a gas discharge. Sov. Phys. Tech. Phys.*, **16**, 429, 1971.