

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**EMISSÃO, PROPAGAÇÃO E AMPLIFICAÇÃO DA
RADIAÇÃO QUILOMÉTRICA DAS AURORAS NAS
SUBCAVIDADES AURORAIS †**

Cláudio José de H. Cavalcanti

Tese realizada sob a orientação dos Drs. Luiz Fernando Ziebell e Ruth de Souza Schneider e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre

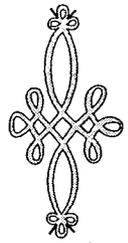
janeiro de 2001

†Trabalho parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS).

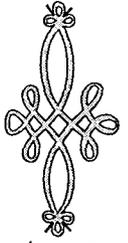


Dedico este trabalho:

Ao meu pai, Wagner Cavalcanti (em memória) e à minha mãe Maria Rachel Cavalcanti, por terem me dado todo o apoio, amor e atenção que me proporcionaram plenas condições de enfrentar e vencer todos os obstáculos para chegar até aqui.



A Maria Nazaré & Jorge, Antônio Carlos & Neida, Ricardo & Leila e à sobrinha Laura. Pelo companheirismo, afeto, amizade e pela simples presença, os quais contribuem muito para fazer da minha casa um lugar muito agradável de se viver.



A minha tia, Maria Angélica (em memória) pelo amor e pela torcida; desde criança me incentivando. Idem para a minha avó Diva (em memória).



Agradecimentos

- Primeiramente, gostaria de agradecer aos professores Luiz Fernando Ziebell e Ruth de Souza Schneider pela segura e competente orientação, e também pelas discussões que me proporcionaram uma enorme experiência de aprendizagem, ao longo de todo o doutorado.
 - Agradecimentos a todos os professores de Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior que, por amarem a profissão, souberam como me transmitir conhecimentos em conjunto com valores humanos e éticos. Sem estas pessoas, eu teria desistido antes de chegar até aqui.
 - Um agradecimento muitíssimo especial para a Terezinha (há mais de vinte anos convivendo comigo e minha família), Fernanda Ostermann & Eduardo Grossmann, Jorge Moraes & Marly, Leticie Mendonça Ferreira, Susane Garrido, Lilian Lemos Timm & Edio Kischlat e Luiz Carlos Wainstein & Dóris Fialcoff. Por todo o apoio moral, merecem um agradecimento especial. Tal agradecimento é extensivo ao Maxwell e ao Thiago, meus sobrinhos postíços. Agradeço, antecipadamente, ao filhinho da Fernanda (ele já está chegando e, até a data do término da versão final desta tese, ainda não tinha nome escolhido). Sendo filho da Fernanda, certamente será meu amigo.
 - Também é impossível esquecer outras pessoas que me proporcionaram momentos muito agradáveis e que direta ou indiretamente me ajudaram na conclusão deste trabalho: Idília, Betânia e Cristiano, todas as pessoas que são (ou foram) do Centro Universitário La Salle e que *realmente* torcem por mim, o pessoal da banda - Motta, Arnaldo e Evandro (incluindo o Sandro, o Grilo e o Tiago, que já saíram) - que me dão motivo para dar boas risadas e para me aprimorar ainda mais musicalmente, a família do Motta - Nikolas (outro sobrinho postíço) e Suely, a excelente equipe com quem trabalho na Província Lassalista de Porto Alegre e seus correlatos - Ana Margô Mantovani & Gabriel, Eunice Santos da Silva & Antônio e Irmão Marcos Corbellini.
 - Um agradecimento muitíssimo especial à Lissandra que, mesmo ultimamente afastada, sempre traz paz e um crescimento espiritual enorme quando conversamos. Isso certamente contribuiu para o final feliz deste trabalho.
 - Aos colegas que ao longo de todo ou parte do doutorado foram ótimas companhias. Em especial, os do grupo de Física de Plasmas, com os quais tive a oportunidade de me divertir muito no 3^o EBF, em 1995: Felipe, Darcy, Renato, Glaucius, Fernando, Rudi e Giba.
 - À Zuleika Berto, pela (para variar) competente, detalhada e incansável revisão e orientação na versão final das referências bibliográficas.
 - Agradecimentos às seguintes bandas, músicos e compositores: Emerson, Lake & Palmer (genial!!), Yes (há mais de trinta anos em forma!!), Jethro Tull (idem!!), Genesis (com Peter Gabriel), Rush (genial!!), King Crimson, Triumvirat, Rick Wakeman (genial!!), Yanni (idem!!), Enya, Marillion, Fish (grande vocalista e compositor!!), Steve Hackett, Chick Corea, Dave Weckl (um dos bateristas no qual eu, descaradamente, baseio o meu estilo de tocar!!), Dream Theater, Premiata Forneria Marconi, Deep Purple, Led Zeppelin, Beethoven, Mozart, Tchaikovski e outros. Sem uma excelente música tocando, fica difícil ficar meses em frente a um computador para fazer um doutorado em física teórica.
-

Resumo

O presente trabalho investiga a propagação e amplificação de ondas eletromagnéticas no plasma localizado nas proximidades dos pólos geomagnéticos, a altitudes não muito superiores a três vezes o raio da Terra. O fenômeno estudado é conhecido como Radiação Quilométrica das Auroras (AKR - Auroral Kilometric Radiation), a mais intensa das várias emissões que podem surgir em decorrência da interação entre o vento solar e a magnetosfera terrestre. Inicialmente são abordadas algumas das principais características conhecidas dessa emissão, através de uma revisão observacional do fenômeno. O maser de elétron-cíclotron é então discutido como um possível mecanismo gerador da AKR. Faz-se uso deste mecanismo para o estudo da propagação e amplificação da Radiação Quilométrica das Auroras, sendo os parâmetros físicos necessários para esse estudo obtidos de um modelo físico baseado no trabalho de Chiu & Shulz (1978) [1] que reproduz aproximadamente as condições do plasma na região fonte. Inclui-se no modelo os gradientes perpendiculares ao campo magnético ambiente, com variações em curta escala para a densidade, chamadas de subcavidades aurorais. As componentes do tensor dielétrico do plasma são calculadas para uma distribuição que consiste em uma soma de uma Maxwelliana, que descreve os elétrons frios, e uma cone-de-perda do tipo DGH relativística para os elétrons energéticos, sendo utilizada a aproximação localmente homogênea. É feito um estudo de traçado de raios por meio das equações da ótica geométrica e em cada ponto da trajetória da onda é calculada a emissividade espectral. Através da equação de transferência, obtém-se o fator de amplificação da onda enquanto ela se propaga pela região fonte. Se constata que a inclusão da emissividade do meio no estudo de traçado de raios aumenta o fator de amplificação. Porém, esse aumento não é suficiente para explicar os níveis de amplificação normalmente observados. Em contraponto, conclui-se que a inclusão de variações de curta escala (na direção perpendicular ao campo magnético) na densidade e demais parâmetros do plasma da região fonte, pode ser um fator muito importante na explicação desses níveis de amplificação.

Abstract

The present work investigates the propagation and amplification of electromagnetic waves in a plasma localized in the vicinity of the geomagnetic poles, at heights not much greater than three times the Earth's radius. The phenomena studied is known as the Auroral Kilometric Radiation (AKR), the strongest of the various types of emission that can occur as a consequence of the interaction of the solar wind and the terrestrial magnetosphere. Initially some of the main known characteristics of this emission are discussed, including a review of the literature on the observational features of the phenomena. The electron cyclotron maser mechanism is then discussed as a possible generator mechanism for the AKR. This mechanism is then utilized in order to study the propagation and amplification of the Auroral Kilometric Radiation, the physical parameters necessary for this study being obtained from a physical model based in the work of Chiu & Schultz (1978), which approximately reproduces the plasma conditions in the source region. The model includes the gradients perpendicular to the ambient magnetic field, with small scale variations of the density, called auroral subcavities. The components of the plasma dielectric tensor are calculated for one distribution which consists in a summation of a Maxwellian, which describes cold electrons, and a relativistic DGH distribution for the energetic loss-cone electrons, being used the locally homogeneous approximation. A ray-tracing study is done using the geometrical optics equations, and at each point along the wave trajectory the spectral emissivity is calculated. By means of the transfer equation, the wave amplification factor is obtained for as long as the wave propagates in the source region. It is verified that the inclusion of the emissivity of the medium in the ray tracing calculation enhances the amplification factor. However, the increase obtained is not sufficient to explain the amplification levels currently observed. On the other hand, it is concluded that the inclusion of small scale variations (in the direction perpendicular to the magnetic field) in the density and other plasma parameters in the source region, may be an important factor in the explanation of the observed amplification levels.

Índice

1	Introdução	7
2	Características Principais da Radiação Quilométrica das Auroras	11
2.1	Introdução	11
2.2	Primeiros dados obtidos sobre a Radiação Quilométrica das Auroras	14
2.3	Distribuição angular e espectral da Radiação Quilométrica das Auroras	17
2.4	Posição da fonte da Radiação Quilométrica das Auroras	22
2.5	Estrutura da fonte da Radiação Quilométrica das Auroras	25
2.5.1	Correlação da AKR com eventos de precipitação de elétrons	25
2.5.2	A cavidade auroral	28
2.5.3	A distribuição de partículas na região fonte da Radiação Quilométrica das Auroras	32
2.5.4	O espelhamento magnético e as populações de partículas	35
2.6	Os modos de propagação e a direção da Radiação Quilométrica das Auroras	41
3	Ondas de Elétron-Cíclotron	48
3.1	Introdução	48
3.2	Sistema de equações de Vlasov-Maxwell e o tensor dielétrico	49
3.2.1	Descrição estatística de um plasma	50
3.2.2	A equação de Vlasov	56
3.2.3	Linearização do sistema de Vlasov-Maxwell	58
3.2.4	O tensor dielétrico e a relação de dispersão	63
3.3	Expansões em raio de Larmor para o tensor dielétrico	68
3.4	A condição de ressonância	69
3.5	A função distribuição e o surgimento de instabilidades	72

4 Propagação da Radiação em Plasmas	78
4.1 Introdução	78
4.2 Aspectos gerais da propagação da radiação em plasmas	78
4.2.1 A direção da velocidade de grupo e do escoamento de energia	79
4.2.2 A equação de transferência	82
4.2.3 O cálculo da emissividade	87
4.2.4 As equações de traçado de raios	93
5 O Modelo Físico para a Região Fonte da Radiação Quilométrica das Auroras	96
5.1 Introdução	96
5.2 Modelo físico para a região fonte	97
5.2.1 Plasma quente de origem magnetosférica	98
5.2.2 Elétrons frios de origem ionosférica	105
5.2.3 Íons de origem ionosférica	106
5.3 A função distribuição modelo	107
5.4 As componentes do tensor dielétrico	110
5.5 A lâmina de plasma e a expressão para a emissividade	115
6 Análise Numérica e Discussão dos Resultados	119
6.1 Introdução	119
6.2 O procedimento de traçado de raios	119
6.3 Discussão dos resultados	123
6.3.1 O efeito da emissividade do meio na propagação, amplificação e absorção da Radiação Quilométrica das Auroras	124
6.3.2 A inclusão das subcavidades no perfil de densidade	154
7 Sumário e Conclusões	179
Referências Bibliográficas	185

Relação de Figuras

2.1	A magnetosfera terrestre.	12
2.2	Intensidade de campo elétrico.	14
2.3	Relação $ \vec{E} = c \vec{B} $	15
2.4	Espectro de potência da AKR.	16
2.5	Correlação entre a AKR e a aurora discreta.	17
2.6	Porcentagem de ocorrência da AKR em função da latitude magnética λ_m e do tempo local magnético MLT.	18
2.7	Porcentagem de ocorrência da AKR.	19
2.8	Vista do pólo norte do cone de emissão da AKR em função da latitude λ_m e do tempo local magnético (MLT).	20
2.9	Densidade espectral de potência em função da frequência medida pelo satélite DE1.	21
2.10	Posições prováveis de fontes da AKR em três diferentes sistemas de coordenadas.	23
2.11	Posições das fontes da AKR projetadas no meridiano meio dia/meia noite.	24
2.12	Forma típica do espectrograma energia-tempo para um evento de precipitação tipo "V-invertido".	26
2.13	Correlação entre AKR e eventos de precipitação de elétrons.	27
2.14	Densidade em função da latitude magnética.	28
2.15	Densidade em função da latitude magnética e da distância radial.	29
2.16	A razão entre a frequência de plasma ($f_N \equiv \omega_{pe}/2\pi$) e a frequência de ciclotron dos elétrons ($f_H \equiv \Omega_e/2\pi$) na cavidade auroral.	30
2.17	A densidade na região fonte em função do tempo universal UT.	31
2.18	A coordenada curvilínea s	33
2.19	O cone-de-perda.	36
2.20	As hipérboles-de-perda para elétrons e íons.	37
2.21	As regiões do espaço de fase ocupadas pelas diversas populações de elétrons.	38

2.22	Função distribuição observada pelo satélite S3-3.	39
2.23	Cortes da função distribuição observada pelo satélite Viking.	40
2.24	Quadrado do índice de refração em função da frequência para um plasma frio cuja presença de íons foi desprezada.	42
2.25	A frequência em função da altitude para quatro modos de propagação de ondas em um plasma frio.	43
2.26	Espectrograma de intensidade de campo elétrico em função de UT, R (em R_{\oplus}), λ_m e MLT.	44
2.27	Espectro de intensidade de campo elétrico em função da frequência relativo ao espectrograma da figura 2.11.	45
2.28	Espectro de intensidade de campo elétrico em função da frequência para uma passagem do DE 1.	46
3.1	O sistema de coordenadas adotado no trabalho.	60
3.2	A elipse ressonante.	71
3.3	A elipse ressonante e o cone de perda.	75
4.1	O vetor de onda \vec{k} e a correspondente velocidade de grupo \vec{w}	80
4.2	Radiação proveniente de uma fonte pequena e que cruza um elemento de área da	82
4.3	Radiação penetrando em um pequeno elemento de volume, sofrendo uma pequena refração na saída.	83
5.1	A elipse e a hipérbole correspondentes aos elétrons magnetosféricos.	100
5.2	O perfil de densidades da cavidade auroral.	108
5.3	Mapa de contornos de $\partial f_{e0}(\vec{u})/\partial u_{\perp}$	110
5.4	A lâmina de plasma.	115
6.1	Parte imaginária de N_{\perp} para $\omega = 1,008 \Omega_e$	125
6.2	Fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,008 \Omega_e$	126
6.3	Mapa de contornos para o fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,008 \Omega_e$	127
6.4	A emissividade espectral $\eta_n(\omega, N_{\parallel})$ para $\omega = 1,008 \Omega_e$	128
6.5	Parte imaginária de N_{\perp} para $\omega = 1,005 \Omega_e$	129
6.6	Fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,005 \Omega_e$	130

6.7 Mapa de contornos para o fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,005 \Omega_e$. . . 131

6.8 A emissividade espectral $\eta_N(\omega, N_{||})$ para $\omega = 1,005 \Omega_e$ 132

6.9 Parte imaginária de N_{\perp} para $\omega = 1,011 \Omega_e$ 133

6.10 Fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,011 \Omega_e$ 134

6.11 Mapa de contornos para o fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,011 \Omega_e$. . . 135

6.12 A emissividade espectral $\eta_N(\omega, N_{||})$ para $\omega = 1,011 \Omega_e$ 136

6.13 Parte imaginária para a componente perpendicular do índice de refração para $\omega =$
 $1,008 \Omega_e, \omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$ 137

6.14 Fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,008 \Omega_e, \omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. 138

6.15 Emissividade espectral para $\omega = 1,008 \Omega_e, \omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$ 139

6.16 O efeito percentual da emissividade na amplificação e absorção da onda para $\omega =$
 $1,008 \Omega_e, \omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$ 140

6.17 A trajetória da onda para $\omega = 1,008 \Omega_e, \omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$ 141

6.18 Gráfico de $\cos\beta$ para $\omega = 1,008 \Omega_e, \omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$ 142

6.19 Parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração para $L_1 =$
 $500\text{km}, L_1 = 400\text{km}, L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$ 144

6.20 Fator de amplificação g_D para $L_1 = 500\text{km}, L_1 = 400\text{km}, L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$. 145

6.21 Emissividade espectral para $L_1 = 500\text{km}, L_1 = 400\text{km}, L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$. 146

6.22 O efeito percentual da emissividade na amplificação e absorção da onda para $L_1 =$
 $500\text{km}, L_1 = 400\text{km}, L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$ 147

6.23 A trajetória da onda para $L_1 = 500\text{km}, L_1 = 400\text{km}, L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$. . . 148

6.24 A quantidade $\varrho_{\omega} = \omega_{pe}^2/\Omega_e^2$ para $L_1 = 500\text{km}, L_1 = 400\text{km}, L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$. 149

6.25 Parte imaginária para a componente perpendicular do índice de refração para $\Delta =$
 $10, \Delta = 12$ e $\Delta = 14$ 150

6.26 Fator de amplificação g_D para $\Delta = 10, \Delta = 12$ e $\Delta = 14$ 151

6.27 Emissividade espectral para $\Delta = 10, \Delta = 12$ e $\Delta = 14$ 152

6.28 O efeito percentual da emissividade na amplificação e absorção da onda para $\Delta =$
 $10, \Delta = 12$ e $\Delta = 14$ 153

6.29 A variação de λ_{AKR}/L_x com a posição x na cavidade auroral ($L_2 = 50\text{km}$). 155

6.30 A variação de λ_{AKR}/L_x com a posição x na cavidade auroral ($L_2 = 100\text{km}$). 156

6.31 Fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,008 \Omega_e, a = 1$ e $b = 0,01$ 157

6.32 Mapa de contornos para o fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,008\Omega_e$,
 $a = 1$ e $b = 0,01$ 158

6.33 Fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,008\Omega_e$, $a = 1$ e $b = 0,1$ 159

6.34 Mapa de contornos para o fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,008\Omega_e$,
 $a = 1$ e $b = 0,1$ 160

6.35 Fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,008\Omega_e$, $a = 1$ e $b = 0,3$ 161

6.36 Mapa de contornos para o fator de amplificação (em decibéis) para $\omega = 1,008\Omega_e$,
 $a = 1$ e $b = 0,3$ 162

6.37 O perfil de densidades da cavidade auroral para $a = 0,8$ e $a = 1,2$ 163

6.38 Mapa de contornos para o fator de amplificação (em decibéis) para $b = 0,01$ e a
variável. 164

6.39 Mapa de contornos para o fator de amplificação (em decibéis) para $b = 0,1$ e a
variável. 165

6.40 Mapa de contornos para o fator de amplificação (em decibéis) para $b = 0,3$ e a
variável. 166

6.41 Parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração N''_{\perp} para dife-
rentes valores de b 167

6.42 Fator de amplificação g_b para diferentes valores de b 168

6.43 Emissividade espectral para diferentes valores de b 169

6.44 A trajetória da onda para diferentes valores de b 170

6.45 A parte real da componente perpendicular (N'_{\perp}) e a componente paralela (N'_{\parallel}) do
índice de refração para diferentes valores de b 171

6.46 Gráfico de $\cos\beta$ para diferentes valores de b 172

6.47 A quantidade $\rho_{\omega} = \omega_{pe}^2/\Omega_e^2$ para diferentes valores de b 173

6.48 O efeito percentual da emissividade na amplificação e absorção para diferentes
valores de b 174

6.49 Parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração N''_{\perp} para $b =$
 $0,1$, $a = 0,8$ e diferentes valores de L_2 175

6.50 Fator de amplificação g_b para $b = 0,1$, $a = 0,8$ e diferentes valores de L_2 176

6.51 Trajetória da onda para $b = 0,1$, $a = 0,8$ e diferentes valores de L_2 177

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos quarenta anos a física de plasmas tem despertado enorme interesse na comunidade científica, não apenas pelas aplicações tecnológicas decorrentes do estudo sobre os processos físicos que ocorrem no plasma, mas pela própria compreensão desses fenômenos. Os plasmas aparecem em abundância na natureza: estrelas, atmosferas ou magnetosferas planetárias e pulsares, são apenas alguns exemplos onde plasmas são encontrados. A pesquisa em plasmas de laboratório, seja através dos conhecidos TOKAMAK's ou de equipamentos mais modestos é de extrema importância para o entendimento dos processos físicos que ocorrem em plasmas.

O estudo de plasmas astrofísicos é também de grande importância para o desenvolvimento da Física de Plasmas e da Astrofísica. As condições em que se encontram os plasmas que preenchem o espaço interplanetário normalmente não podem ser reproduzidas em laboratório, seja pelas dimensões do mesmo ou pelas complexas geometrias dos campos elétrico e magnético aos quais o plasma nesse caso está sujeito. Assim, o estudo dos plasmas astrofísicos também traz um enorme aprendizado para a comunidade científica.

A partir da década de cinquenta, o estudo dos fenômenos que ocorrem no Sol e nas magnetosferas e ionosferas planetárias tem servido como base para ajudar a entender fenômenos que ocorrem em objetos astrofísicos mais remotos, como pulsares ou estrelas distantes. Nesses casos, é obviamente inviável a análise através do envio de satélites, a exemplo do que é feito no nosso sistema solar.

A magnetosfera terrestre é composta por diversas regiões, cada uma com características próprias no que se refere a campo magnético ou elétrico, densidade de partículas e temperatura do plasma. É dele que se originam os vários tipos de emissão de ondas da magnetosfera terrestre.

A mais intensa dessas emissões é a Radiação Quilométrica das Auroras, cuja sigla é conhecida por AKR (do inglês Auroral Kilometric Radiation) e é nessa emissão que este trabalho se focalizará. Serão analisadas com destaque as regiões que estão relacionadas mais fortemente com a geração e propagação da Radiação Quilométrica das Auroras. Na literatura existem informações sobre outros tipos de emissão originadas pela interação do Vento Solar com a magnetosfera e ionosfera terrestre [2, 3, 4].

Diversos mecanismos têm sido propostos na tentativa de explicar os níveis de amplificação da energia da Radiação Quilométrica das Auroras durante a sua propagação a partir da região onde ela é gerada [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. No entanto, há um consenso da comunidade científica de que o maser de elétron-ciclotron desempenha um papel preponderante na amplificação do modo extraordinário rápido da Radiação Quilométrica das Auroras, mesmo não explicando totalmente alguns aspectos do dito fenômeno. Um exemplo disso é a emissão desta radiação detectada em regimes de frequências maiores do que 1,2 vezes o valor local da frequência de ciclotron do elétron (definida no capítulo 2). Para explicar este fenômeno satisfatoriamente, é necessário o uso de uma teoria alternativa [12, 13]. A geração e amplificação da AKR é provavelmente fruto de um conjunto de processos simultâneos. No entanto, há fortes indícios de que o maser de elétron-ciclotron pode ser o processo preponderante, pois ele é baseado apenas na interação onda-partícula e permite a amplificação direta da onda decorrente desta interação.

O maser de elétron-ciclotron foi proposto por Melrose para explicar a Radiação Decamétrica de Júpiter [14] e foi posteriormente adotado em vários outros trabalhos [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21], destacando-se os trabalhos de Wu et al [22, 23, 24, 25, 26] onde, entre outras coisas, previu-se a existência de um campo elétrico ascendente paralelo ao campo magnético na região fonte da AKR, que remove elétrons de baixa energia da região auroral¹, criando uma cavidade (chamada cavidade auroral) e favorecendo a amplificação do modo extraordinário rápido. Uma pequena revisão sobre a amplificação de radiação a partir de instabilidades em plasmas astrofísicos pode ser encontrada em Melrose, 1998 [27].

Estudos de traçado de raios têm sido feito nos últimos anos para tentar reproduzir alguns dos aspectos mais característicos da AKR. Embora a maioria dos trabalhos tenha corroborado o maser de elétron-ciclotron como o principal mecanismo gerador da AKR poucos reproduziram por este método os níveis de amplificação tipicamente observados dessa radiação. Alguns trabalhos

¹Veja o capítulo 2 para uma explicação mais detalhada.

nessa linha utilizaram o método de Poverlein usando a relação de dispersão de plasma frio [28] e posteriormente com a inclusão de efeitos térmicos e relativísticos [29, 30]. Um estudo posterior, feito por Gaelzer, Schneider & Ziebell [31] utiliza as equações da óptica geométrica para o cálculo da trajetória, permitindo uma análise mais acurada da trajetória da onda. Como a amplificação da onda é muito sensível à trajetória na região auroral, o procedimento nesse trabalho permite fazer um estudo mais realista da amplificação da onda do que aqueles que utilizam-se do método de Poverlein.

Nesses trabalhos, no entanto, a amplificação é apenas estimada através da integração da taxa espacial de amplificação ao longo da trajetória. Uma abordagem mais apurada exigiria o uso da equação de transferência [32], onde aparece a contribuição explícita da emissividade do meio, que deve ser calculada ao longo da trajetória da onda. Os perfis dos parâmetros do plasma da região fonte também devem refletir as características medidas por satélites artificiais, como por exemplo, a existência das subcavidades aurorais, proposta inicialmente por Calvert em 1981 [33]. A existência dessas subcavidades pode contribuir no processo de amplificação da AKR, uma vez que elas provocam decréscimos súbitos no valor local da densidade de partículas do plasma na região auroral.

Este trabalho tem como objetivo estudar a amplificação da AKR a partir de sua geração na região fonte. Para tal, foram refeitos os perfis dos parâmetros nessa região, com a inclusão das subcavidades aurorais. Além disso, o fator de amplificação não mais será estimado através da integração da taxa espacial de amplificação. Será calculado através da equação de transferência onde, como já foi dito, há contribuição explícita da emissividade do meio. Serão apresentados aqui os efeitos da emissividade e da inclusão das subcavidades aurorais na amplificação da AKR ao longo da propagação da mesma. Os resultados obtidos nesta tese estão publicados na literatura [34, 35] para consulta, em caso de interesse do leitor.

O conteúdo deste trabalho foi subdividido da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos as principais características conhecidas da AKR, com base nas medições feitas por satélites artificiais, desde os primeiros trabalhos no início da década de setenta. Esse capítulo é de extrema importância para a compreensão do que será feito ao longo dos capítulos finais deste trabalho.

No capítulo 3 apresentamos as aproximações que levam à equação de Vlasov que, juntamente com as equações de Maxwell, é usada para descrever o plasma não colisional. Serão deduzidas

ainda a transformada de Fourier das componentes do tensor dielétrico, para um plasma magnetizado e homogêneo, na aproximação linear da equação de Vlasov. Será dado especial destaque à relação de dispersão, à condição de ressonância e à influência da forma da função distribuição no surgimento de instabilidades, mecanismo que é denominado de maser de elétron cíclotron.

No capítulo 4 é feita uma revisão sobre a propagação de radiação em plasmas, abordando temas como a equação de transferência, o cálculo da emissividade de um plasma magnetizado e homogêneo e as equações de traçado de raios.

No capítulo 5 é apresentado o modelo físico para a região fonte da AKR, a partir do qual são calculadas, ao longo das linhas geomagnéticas, grandezas como a densidade de partículas, temperatura e velocidade de deriva. Mostramos então a função distribuição modelo, consistindo em uma soma de uma função distribuição DGH relativística para os elétrons energéticos e uma Maxwelliana relativística, representando o "background" de elétrons frios.

No capítulo 6 é dada primeiramente uma rápida explicação sobre o procedimento de traçado de raios e do método numérico utilizado nos cálculos computacionais, sendo após, feito o estudo quantitativo da amplificação da AKR e de sua propagação na cavidade auroral, com o uso do modelo físico apresentado no capítulo anterior. O fator de amplificação será calculado através da equação de transferência, onde aparece a contribuição da emissividade do meio.

Ao final, no capítulo 7, é apresentado um breve sumário do trabalho, juntamente com as conclusões obtidas do tratamento numérico, feito no capítulo 6.

Capítulo 2

Características Principais da Radiação Quilométrica das Auroras

2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo, além de dar uma visão geral sobre as principais características da Radiação Quilométrica das Auroras, favorecer a compreensão dos aspectos físicos relevantes para um estudo quantitativo deste tipo de radiação. Com o uso de modelos físicos para os diversos parâmetros envolvidos, pode-se fazer um estudo quantitativo da geração da Radiação Quilométrica das Auroras através do mecanismo do maser de elétron-cíclotron. Como tais modelos são fundamentados em observações feitas por satélites artificiais e estudos teóricos, alguns aspectos provenientes desses estudos e/ou observações serão abordados aqui.

Uma revisão bastante completa cobrindo vários trabalhos até o início do ano de 1991 foi feita por Rudi Gaelzer em sua dissertação de mestrado [36], sendo boa parte dessa revisão incluída neste capítulo, já que ela é bastante clara e essencial para introduzir o fenômeno.

A Radiação Quilométrica das Auroras é um fenômeno natural, cuja descoberta data do final dos anos sessenta, época na qual foram enviados os primeiros satélites artificiais cujo objetivo era estudar a magnetosfera terrestre¹. Através dos dados colhidos por estes satélites, se descobriu que a Terra é uma intensa fonte de emissão de ondas de rádio, com uma potência total entre 10^7 W e 10^9 W. Tal intensidade é comparável à potência emitida por Júpiter². Entretanto, enquanto a frequência da emissão de Júpiter fica em algumas dezenas de MHz, a da Terra não excede a ordem de centenas de kHz. Essa radiação não pode ser detectada do solo, pois é constituída basicamente de modos de propagação com frequências típicas se situando abaixo do limite crítico

¹A uma distância maior do que cinco raios terrestres

²Já era conhecido, cerca de vinte anos antes, que Júpiter é também um intenso emissor de ondas de rádio cuja potência total chega à ordem de 10^9 W.

de frequências da ionosfera. No caso de Júpiter, a radiação tem frequência suficientemente alta para ultrapassar a barreira natural imposta pela ionosfera terrestre, sendo detectável do solo.

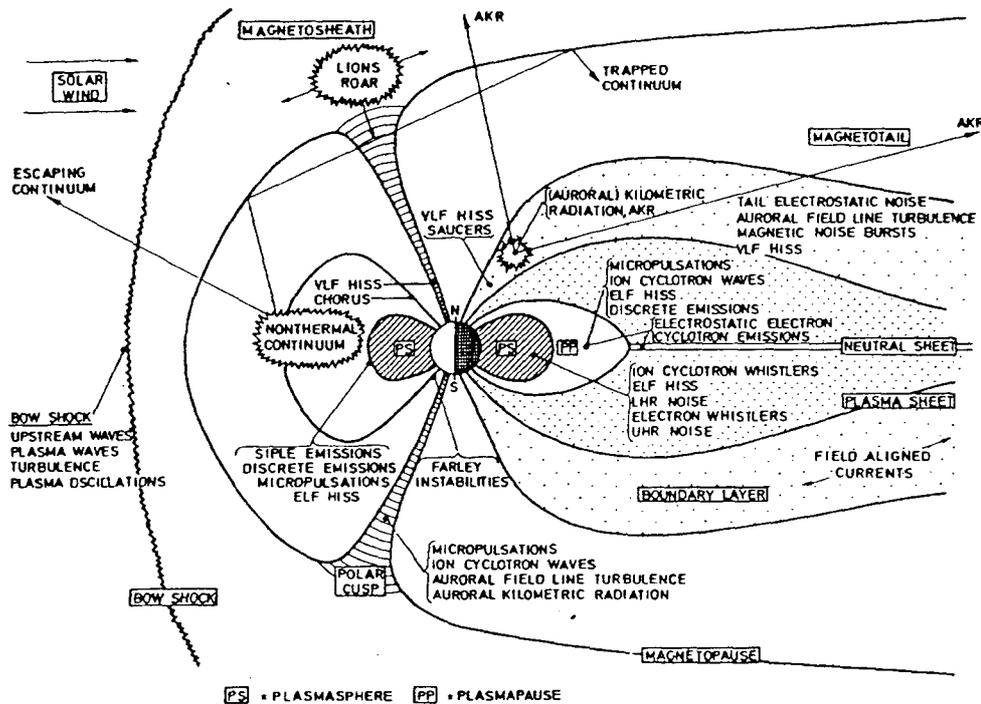


FIGURA 2.1: Visão da seção reta do meridiano diurno-noturno (12h-24h) da magnetosfera terrestre e os tipos de radiação característicos de cada uma das regiões [4].

O nome Radiação Quilométrica das Auroras é relativo à ordem de grandeza da frequência da radiação terrestre (centenas de kHz), o que acarreta um comprimento de onda da ordem de quilômetros. Na literatura usa-se a sigla em inglês AKR (Auroral Kilometric Radiation), que será adotada neste trabalho. No caso de Júpiter, onde a frequência chega à ordem de dezenas de MHz, o comprimento de onda é da ordem de decâmetros. A emissão de ondas de rádio de Júpiter recebe então o nome de Radiação Decamétrica Joviana (Jovian Decametric Radiation). Depois das missões da Voyager 1 e 2, viu-se que Saturno, Urano e Netuno são também intensas fontes de rádio [37, 38, 39]. Um estudo mais recente mostra ainda que o movimento do satélite Io no campo magnético de Júpiter resulta em intensos arcos aurorais na magnetosfera de Io [40].

A primeira proposta de que o mecanismo de maser de elétron-ciclotron podia explicar a AKR foi feita por Melrose [14]. Tal mecanismo pode ser usado para explicar a radiação decamétrica

de Júpiter e possivelmente dos outros planetas jovianos, sendo o mais aceito como o responsável pela geração do modo X (modo extraordinário rápido) da AKR. Esta teoria se baseia no fato de que a fonte de energia reside nas possíveis anisotropias da função distribuição de elétrons que se precipitam na magnetosfera.

Como veremos mais adiante, a existência da AKR está correlacionada com as auroras polares. Os dois fenômenos são originários da interação do vento solar com a magnetosfera e a ionosfera terrestre. O início do processo reside na liberação de energia na cauda geomagnética, as chamadas sub-tormentas magnetosféricas, que acontecem no lado noturno a uma distância que pode chegar a quinze raios terrestres³. A AKR em si ocorre principalmente em altitudes que podem variar entre um e cinco raios terrestres.

Na figura 2.1 vemos um corte da magnetosfera terrestre. Nota-se que a forma das linhas de indução magnética se desvia bastante daquela de um campo dipolar devido à interação com o vento solar e do acoplamento com o campo magnético interplanetário, ao qual nos referiremos usando a sigla CMI. Vê-se que a AKR não é o único tipo de radiação presente na magnetosfera. Existem vários outros tipos que, embora tenham também a sua origem na interação vento solar-CMI-magnetosfera, diferem entre si em vários aspectos, pois as regiões que constituem nossa magnetosfera podem diferir muito umas das outras no que se refere à densidade de partículas, campo magnético, temperatura etc. Porém, a AKR mereceu uma atenção especial por parte da comunidade científica nos últimos vinte e cinco anos, em parte por ser o mais intenso tipo de radiação que acontece na magnetosfera terrestre⁴.

Este capítulo terá a seguinte estrutura: na seção 2.2 veremos os primeiros dados obtidos por satélites e o trabalho de Gurnett [41], que por si só já lançou bases amplas para estudos posteriores. Na seção 2.3, abordaremos características importantes como a distribuição angular e espectral da AKR. Na seção 2.4, mostraremos alguns dados experimentais que permitiram estimar as mais prováveis posições para a fonte da AKR. Na seção 2.5, focalizaremos a correlação da existência da AKR com outros fenômenos decorrentes das subtormentas magnetosféricas, a cavidade auroral, a função distribuição na região fonte e possíveis fontes de energia para geração da AKR. Por fim, veremos na seção 2.6 os modos de propagação das ondas na região fonte.

³A região denotada por "magnetotail" na figura 2.1. Note no entanto, que somente o início da cauda geomagnética aparece na figura.

⁴O presente trabalho enfocará apenas a AKR, não tendo como objetivo fazer um estudo detalhado da magnetosfera como um todo, ou de todos os tipos de onda que nela podem ocorrer.

2.2 Primeiros dados obtidos sobre a Radiação Quilométrica das Auroras

No final da década de sessenta e início da de setenta, foram registradas as primeiras observações da AKR. Através dessas observações [42] se percebeu que tal radiação tem uma correlação com eventos de precipitação de partículas nas regiões aurorais.

O primeiro trabalho a fazer um estudo detalhado do fenômeno tem como autor Donald Gurnett [41], e foi publicado em 1974. Seu trabalho se baseia em dados obtidos pelos satélites Imp 6 e Imp 8, mostrando que a AKR tem períodos de ocorrência que podem variar bastante em duração, como mostra a figura 2.2. Nessa figura mostram-se as medições de intensidade de campo elétrico realizadas pelo Imp 6 em um período de 24 horas, mostrando claramente que a AKR apresenta interrupções que podem durar várias horas.

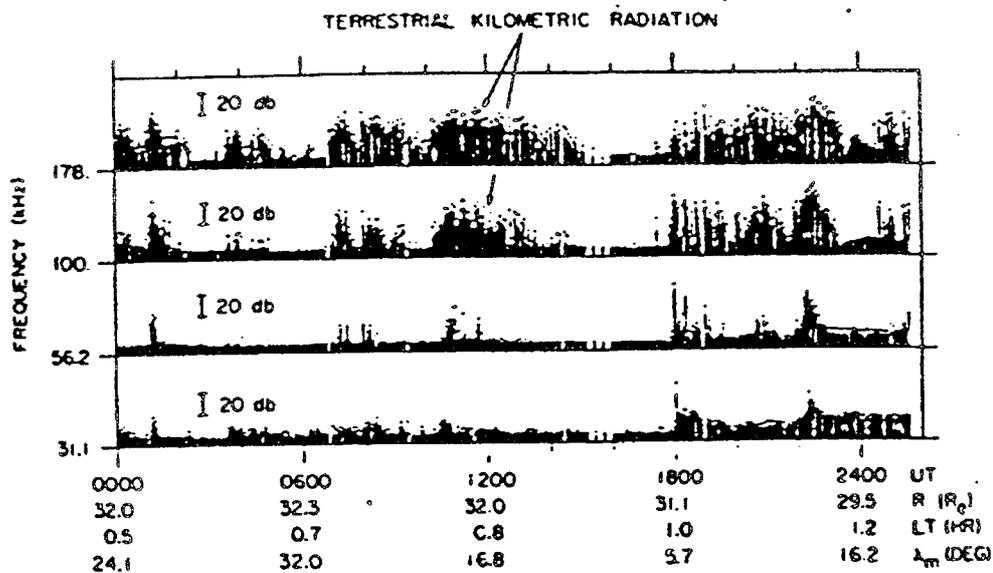


FIGURA 2.2: Medições da intensidade do campo elétrico feitas pelo satélite Imp 6 em função do tempo universal (UT), distância da Terra (R_0), tempo local (horas) e latitude magnética (λ_m) [41]. Vê-se que a variação do sinal medido em relação ao ruído de fundo é da ordem de 20dB.

Quanto à natureza dessa radiação, pode-se ver claramente na figura 2.3 que ela é eletromagnética, pois existe uma relação $|\vec{E}| = c |\vec{B}|$ facilmente observada na mesma. Tal relação não é nada mais do que a relação entre os campos elétrico e magnético para ondas eletromagnéticas

que se propagam no vácuo.

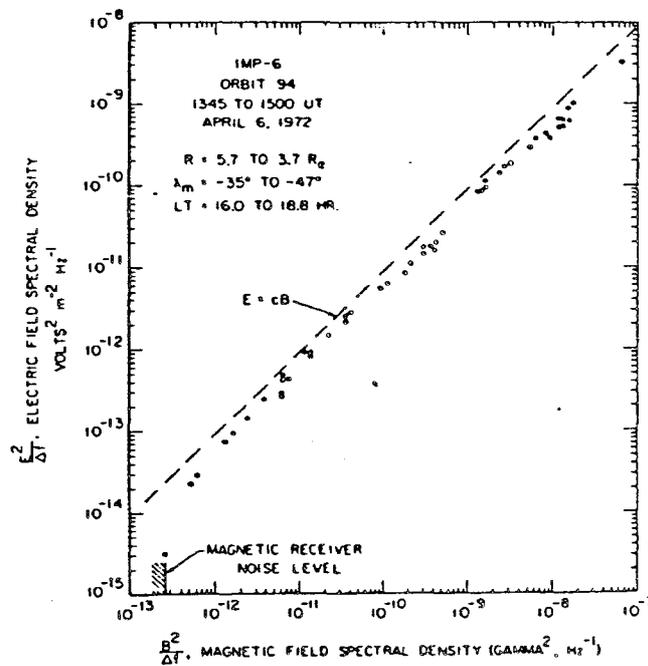


FIGURA 2.3: Medidas simultâneas dos campos elétrico e magnético da AKR, evidenciando uma relação linear entre ambos bastante próxima a $|\vec{E}| = c |\vec{B}|$ [41].

Outra característica importante é o espectro de potência da AKR, obtido pelo satélite Imp 8, a cerca de $25R_{\oplus}$, mostrando que o nível máximo de potência de radiação emitida se dá no intervalo entre 100 kHz e 300 kHz, decaindo bastante para frequências muito fora deste intervalo, como mostra a figura 2.4. Além disso, a figura mostra o espectro de potência do ruído de fundo e da radiação galáctica, para fins de comparação. Gurnett ainda estimou, a partir dos dados, que a fonte da AKR deveria estar distante da Terra aproximadamente $3R_{\oplus}$, e além disso, na proximidade dos pólos geomagnéticos. Logo, ela parece se localizar a baixas altitudes e altas latitudes⁵. Baseado nisso, fez-se um estudo da possível correlação entre a AKR e as subtormentas magnetosféricas, utilizando-se dados obtidos simultaneamente pelos satélites Imp 6 e Dapp, além de redes de magnetômetros no solo, em latitudes polares.

Na figura 2.5 vemos os dados obtidos pelos satélites e pelos magnetômetros. O gráfico (a)

⁵Referimo-nos à latitude magnética λ_m , que é o ângulo tomado em relação ao plano que passa pelo centro da Terra e que é perpendicular à linha que une os pólos geomagnéticos. Este ângulo aumenta na direção do pólo norte geográfico.

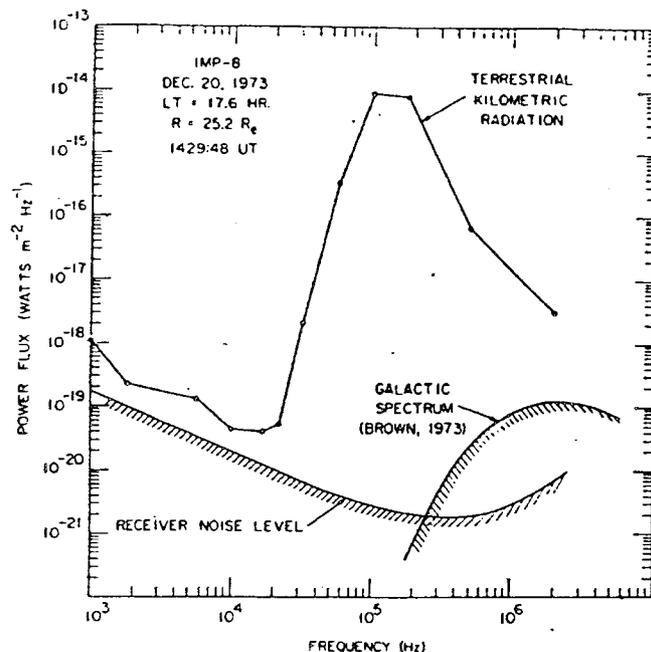


FIGURA 2.4: Espectro de potência da AKR, sobreposto ao ruído de fundo e à emissão galáctica [41].

mostra a quantidade A_E , chamada de índice do eletrojato auroral, cuja unidade de medida é o *gama* ($1\gamma = 10^{-4}G$)⁶. O índice do eletrojato auroral pode, em conjunto com eventos correlacionados de AKR, ser usado como uma medida da atividade de uma subtormenta magnetosférica [43, 44]. Olhando-se o gráfico (b), vemos claramente uma forte relação entre a atividade de uma subtormenta magnetosférica e o surgimento da AKR, pois os picos no fluxo de potência da AKR coincidem com os valores maiores de A_E ⁷.

A figura também mostra uma certa correlação entre a AKR e as auroras, como se pode ver no gráfico (c). Nele são mostradas fotos obtidas pelo satélite Dapp, com os números das órbitas correspondentes. Se olharmos por exemplo, a fotografia correspondente à órbita 1093, esta não apresenta quase nenhuma aurora⁸ e, na órbita correspondente indicada no gráfico (b) não há ocorrência de AKR. Porém, se olharmos as órbitas rotuladas pelos números 1094 e 1096, vemos que além da aurora difusa, aparecem os chamados arcos aurorais (*chamados de aurora discreta*).

⁶Para ter uma idéia em ordem de grandeza. $A_E < 75\gamma$ indica baixa atividade magnética, $75\gamma < A_E < 200\gamma$ indica atividade moderada e $A_E > 200\gamma$ indica alta atividade magnética.

⁷Estudos posteriores revelaram que esta correlação diminui quando o satélite se encontra fora do fecho principal da radiação, entre 16 e 4 horas MLT (ver figura 2.8) [45].

⁸Existe na figura a ocorrência de aurora difusa, raramente visível do solo.

Tais arcos possuem uma largura de algumas dezenas de quilômetros e uma extensão de alguns milhares, sendo mais intensos do que a aurora difusa. Vê-se então que a AKR está realmente correlacionada com as auroras e esta correlação se evidencia muito mais em relação à aurora discreta do que em relação à aurora difusa, como mostra a figura 2.5.

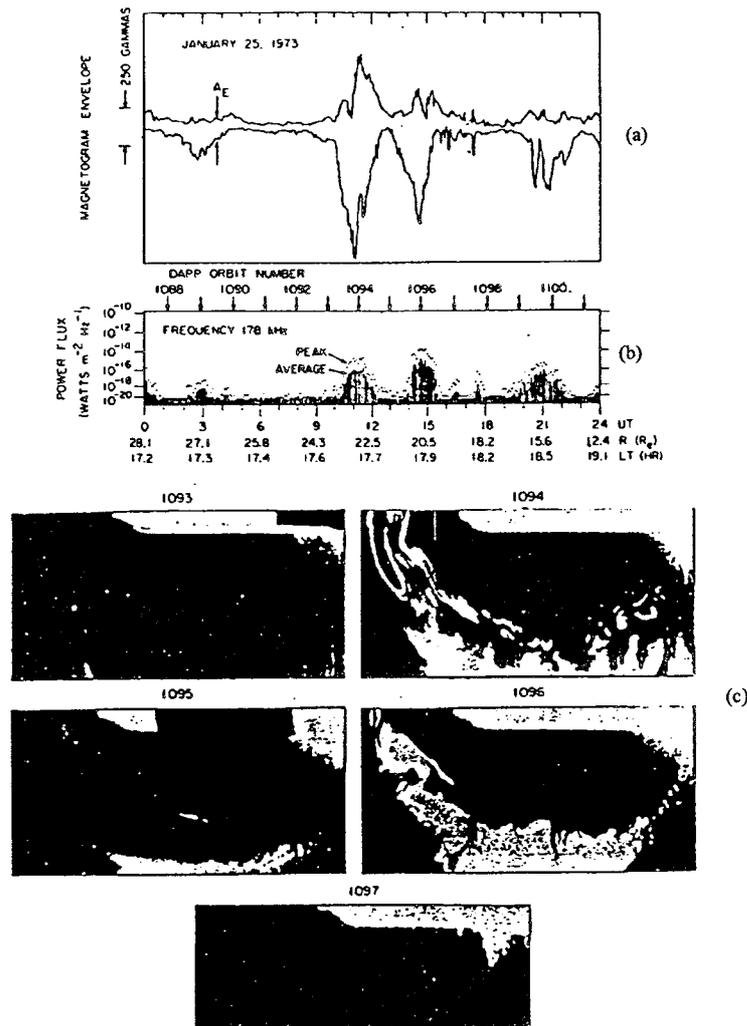


FIGURA 2.5: (a) Valor do índice do eletrojato auroral em função do tempo universal UT. (b) Fluxo de potência em função de UT, R_{\oplus} e tempo local LT. (c) Fotografias obtidas pelo satélite Dapp, mostrando o surgimento de auroras. Em cada fotografia está indicado o número da órbita correspondente. Este número está também indicado no gráfico (b) [41, 46].

2.3 Distribuição angular e espectral da Radiação Quilométrica das Auroras

O artigo de Gurnett [41] abordado na seção 2.2 também estudou a distribuição angular da AKR. Nele, o autor constata que a probabilidade de ocorrência da AKR é mais acentuada entre 18 e

4 horas MLT⁹, ou seja, no lado noturno (*noite local*). No lado diurno a AKR ocorre com mais freqüência para valores mais altos de latitude magnética. A figura 2.6 mostra com clareza o que foi dito acima.

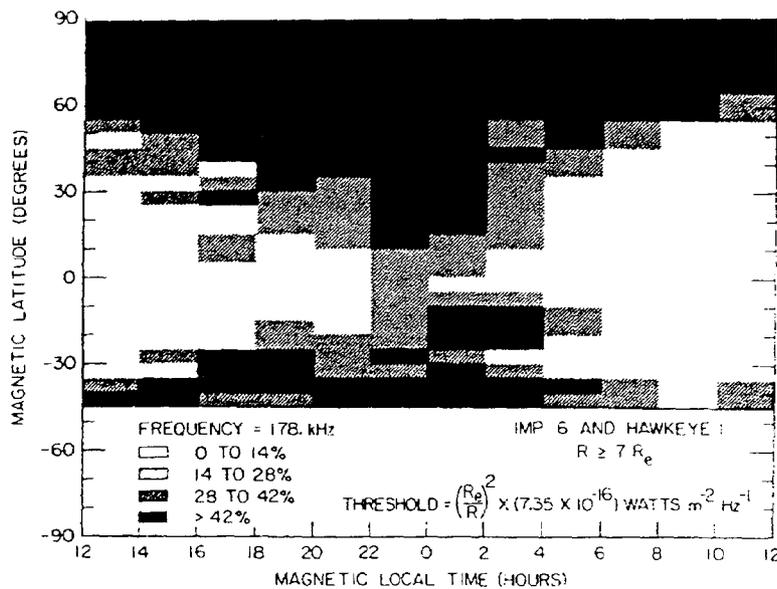


FIGURA 2.6: Porcentagem de ocorrência da AKR em função da latitude magnética λ_m e do tempo local magnético MLT [41].

Após o primeiro estudo feito por Gurnett, outros autores fizeram estudos mais detalhados sobre a distribuição angular da AKR. Um trabalho bastante detalhado foi feito por Green, Gurnett e Shawhan [47]. Nesse artigo, os autores usaram dados obtidos simultaneamente pelos satélites Imp 6 e Imp 8 e Hawkeye 1¹⁰. Na figura 2.7 vemos porcentagens normalizadas da ocorrência da AKR em função da latitude magnética, tomadas para as freqüências 178, 100 e 56.2 kHz. Estes dados foram obtidos para duas regiões do meridiano magnético: de 8 a 12 horas MLT e de 20 a 24 horas MLT. Nota-se claramente que, independente da freqüência, a porcentagem normalizada tende a decrescer para baixas latitudes magnéticas, tanto no lado diurno como no lado noturno.

⁹A sigla MLT significa *tempo local magnético* (Magnetic Local Time) e é o ângulo entre uma dada linha de campo geomagnético e a linha que une a Terra ao Sol. Um valor de MLT de zero horas significa que estamos na linha em oposição ao Sol.

¹⁰O uso do Hawkeye 1 tornou possível a obtenção de dados para qualquer valor de latitude magnética. Para o uso simultâneo desses satélites foi necessário fazer uma calibração na sensibilidade dos instrumentos do Hawkeye 1 e do Imp 6. Tal calibração foi feita com observações simultâneas de radiações solares (*Type III solar radio bursts*) [47].

Porém, vê-se que no lado diurno este decréscimo é quase um corte, mostrando que neste lado a AKR tem uma probabilidade de ocorrência apreciável somente para altas latitudes magnéticas. Isto está de acordo com os dados expostos na figura 2.6.

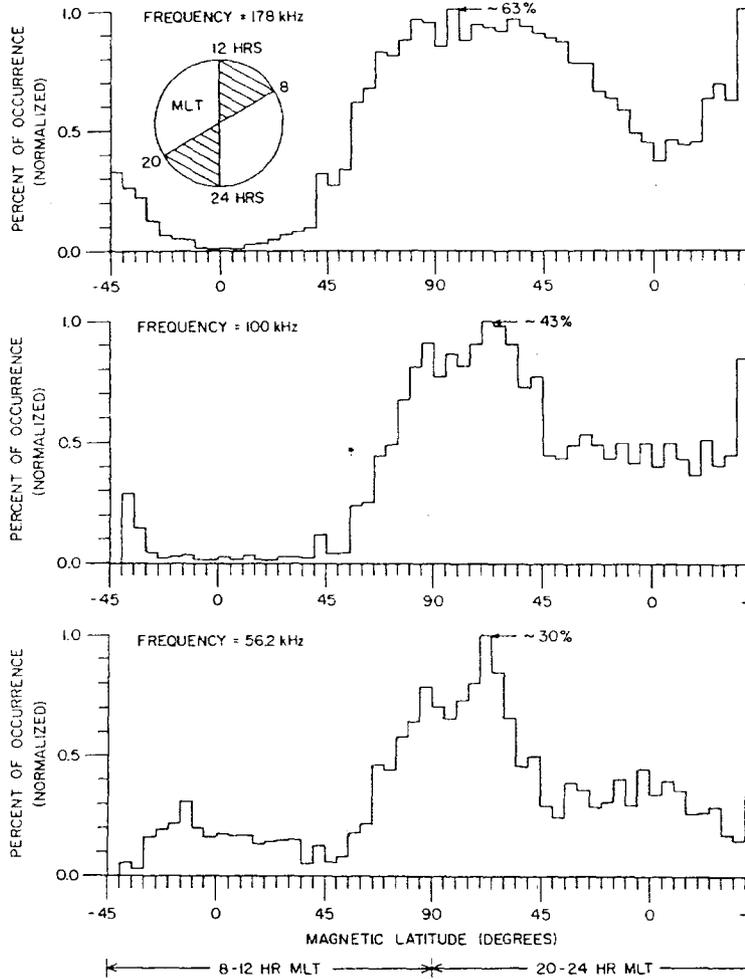


FIGURA 2.7: Porcentagem de ocorrência da AKR em função da latitude magnética λ_m para as regiões 8-12 horas MLT e 20-24 horas MLT e para as frequências 178, 100 e 56.2 kHz [47].

A figura 2.7 sugere ainda que o ângulo sólido de emissão da AKR aumenta para frequências maiores, pois a "largura" da região cuja porcentagem normalizada de ocorrência é maior aumenta para tais frequências. Tal comportamento é confirmado na figura 2.8, onde se tem uma visão do pólo norte do cone de emissão da AKR, mostrando claramente que o ângulo sólido da emissão da AKR aumenta para frequências maiores. As frequências com as quais foram obtidas estas figuras são as mesmas citadas na figura 2.7. Entretanto, estudos posteriores mostraram que o

cone de emissão pode se tornar mais estreito para frequências superiores a 300 kHz [48]. Além disso, nesse mesmo regime de frequências, dados obtidos pelo satélite GEOTAIL sugerem que os eventos de AKR possuem uma assimetria, sendo mais intensos no hemisfério de inverno do que no hemisfério de verão [48, 49].

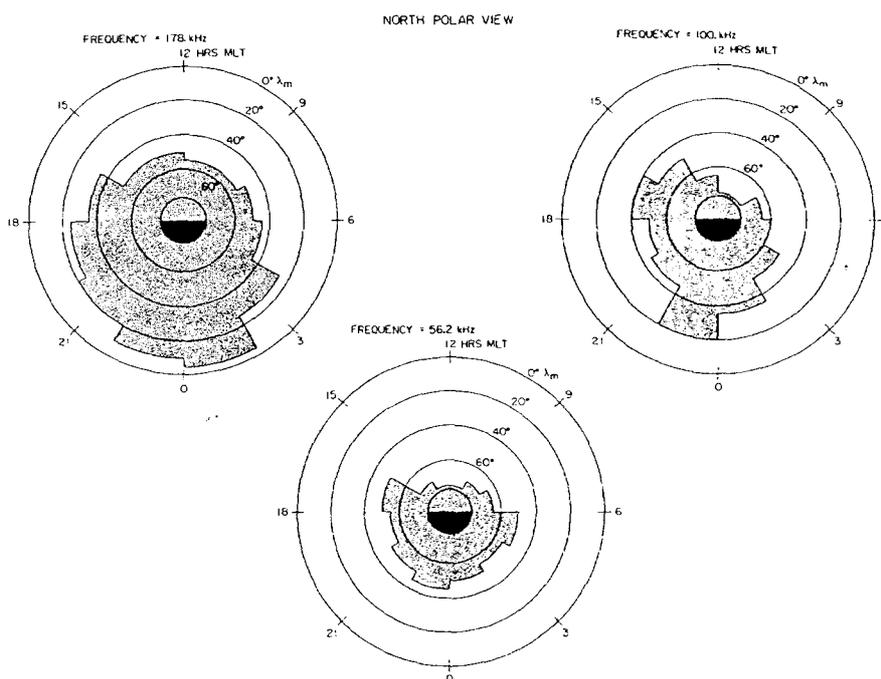


FIGURA 2.8: Vista tomada do pólo norte do cone de emissão da AKR em função da latitude λ_m e do tempo local magnético (MLT) para as frequências 178, 100 e 56.2 kHz [47].

A distribuição espectral da AKR foi estudada em detalhe por Kaiser e Alexander [50] em função do tempo local do satélite Imp 6. Neste artigo, os autores fizeram uma correlação entre a distribuição espectral e o valor do índice do eletrojato auroral, mostrando que existe uma relação entre ele e a densidade de fluxo de radiação¹¹, pois esta aumenta com a quantidade A_E . Além disso mostra-se que, independentemente do tempo local, o espectro de frequências está entre 100 e 800 kHz, aproximadamente. Outro aspecto relevante apontado pelo artigo é o fato de que o valor de frequência para o qual a densidade de fluxo de radiação é máxima diminui com o aumento do valor de A_E , ou seja, eventos de AKR oriundos de períodos de intensa perturbação magnética parecem ter um máximo de frequência no seu espectro menor do que os oriundos de baixa atividade magnética.

¹¹ Cujas unidade de medida é $W/(m^2Hz)$.

Existem ainda trabalhos que mostram que a AKR tem uma frequência de corte inferior, sendo esta próxima à frequência de ciclotron dos elétrons [51, 52, 53, 54]. Logo, a frequência da radiação está em geral acima do valor local¹² da frequência de ciclotron eletrônica $\Omega_e = eB/m_e c$, onde e é o módulo da carga do elétron, B o valor local da indução magnética, m_e a massa do elétron e c a velocidade da luz no vácuo. A figura 2.9 ilustra este aspecto.

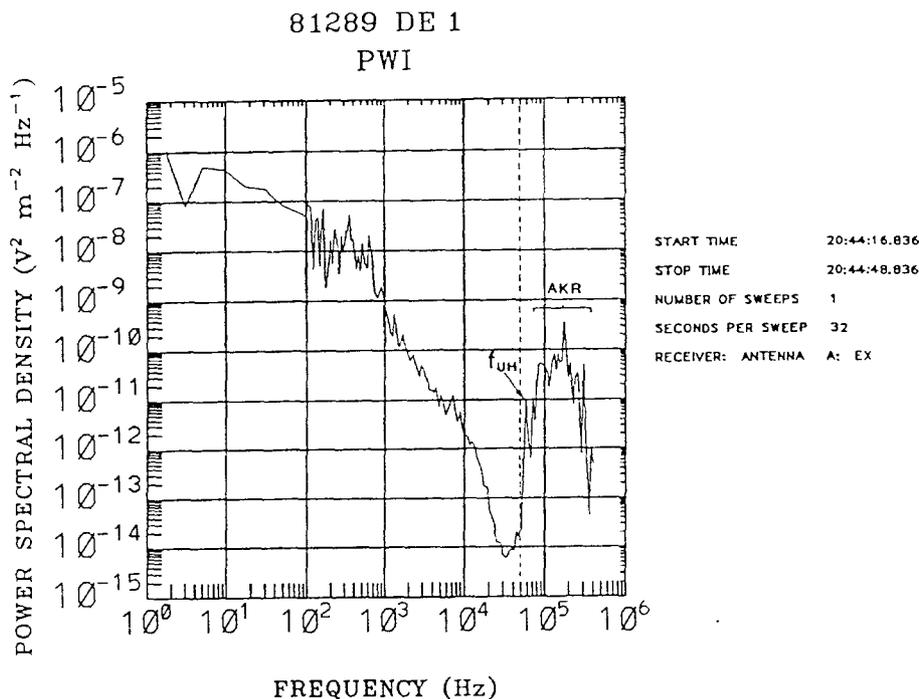


FIGURA 2.9: Densidade espectral de potência em função da frequência medida pelo satélite DE1. A linha pontilhada indica onde está a frequência de ciclotron dos elétrons [55].

Tal frequência de corte é um indicio de que a AKR é composta basicamente do modo X pois, no caso em que a geração da radiação se dá em uma região de baixa densidade de partículas (o que realmente acontece, como veremos na subseção 2.5.2), a frequência de corte para o modo X é, segundo a teoria de plasma frio, pouco superior à frequência de ciclotron eletrônica. Isto concorda com o que é observado nos espectros de emissão. Entretanto, outros modos podem contribuir, tendo frequências de corte menores do que a frequência de ciclotron eletrônica como veremos na seção 2.6. Estudos estatísticos feitos por Hilgers *et al.* (1991) [53] mostram ainda que em média, a frequência de pico do espectro de emissão da AKR é aproximadamente 8% maior

¹²Valor no local onde a radiação foi gerada.

do que o valor local da frequência de ciclotron do elétron. Além disso, mostram que a frequência de corte inferior da AKR é em média igual ao valor local da frequência de ciclotron eletrônica. Tal estudo foi feito utilizando-se dados obtidos pelo satélite Viking durante 49 travessias da região fonte. No entanto, como existem casos em que a radiação é gerada pouco abaixo do valor local da frequência de ciclotron eletrônica Ω_e para o modo X , veremos mais adiante que este aspecto pode ser compreendido se forem considerados os efeitos térmicos e relativísticos.

Estudos feitos por Hanasz *et al.* (1998) [56] reportam ainda a existência de uma frequência de corte superior, que pode residir no intervalo entre 300 kHz e 700 kHz. Os autores sugerem que tal aspecto pode ser associado a uma mudança abrupta do mecanismo gerador da AKR quando a densidade de elétrons se torna suficientemente baixa, o que, segundo os autores, pode sugerir que exista um processo não linear de geração da AKR nas condições citadas. Esse aspecto, no entanto, não será abordado neste trabalho.

2.4 Posição da fonte da Radiação Quilométrica das Auroras

O primeiro autor a fazer uma estimativa da posição da fonte da AKR foi Gurnett [41], no seu trabalho de 1974. Essa estimativa previa que a fonte devia estar a uma altitude de no máximo $3R_\oplus$, como já foi dito na seção 2.2.

Posteriormente, Alexander e Kaiser [57] estudaram a posição da fonte da AKR com mais profundidade, utilizando dados do satélite RAE 2¹³ e uma técnica que determina as posições das fontes da AKR projetadas em um plano. O método está descrito em detalhe no artigo [57].

Na figura 2.10 vemos as posições das fontes obtidas entre 15 e 18 horas MLT para três sistemas de coordenadas: (a) sistema geocêntrico magnetosférico solar, onde o eixo X' é paralelo ao plano que define a eclíptica e a direção $+Z$ está no hemisfério norte (*em relação à eclíptica*), (b) sistema geocêntrico magnético solar, onde o eixo Z é paralelo ao eixo de dipolo geomagnético, com sentido positivo na direção norte e (c) o eixo Z é também paralelo ao eixo de dipolo geomagnético, mas a direção $+Z$ inclui sempre o pólo geomagnético localizado no lado iluminado pelo sol, ou seja, o pólo diurno. Conseqüentemente, na parte (c) da figura 2.10 o pólo norte está mais freqüentemente alinhado na direção $-Z$ entre abril e setembro. O pólo sul se alinha nessa direção entre outubro e março.

Note que, independente do sistema de referência adotado, há muito mais ocorrência de AKR

¹³Sigla que significa *Radio Astronomy Explorer 2*. Este satélite está em órbita ao redor da Lua.

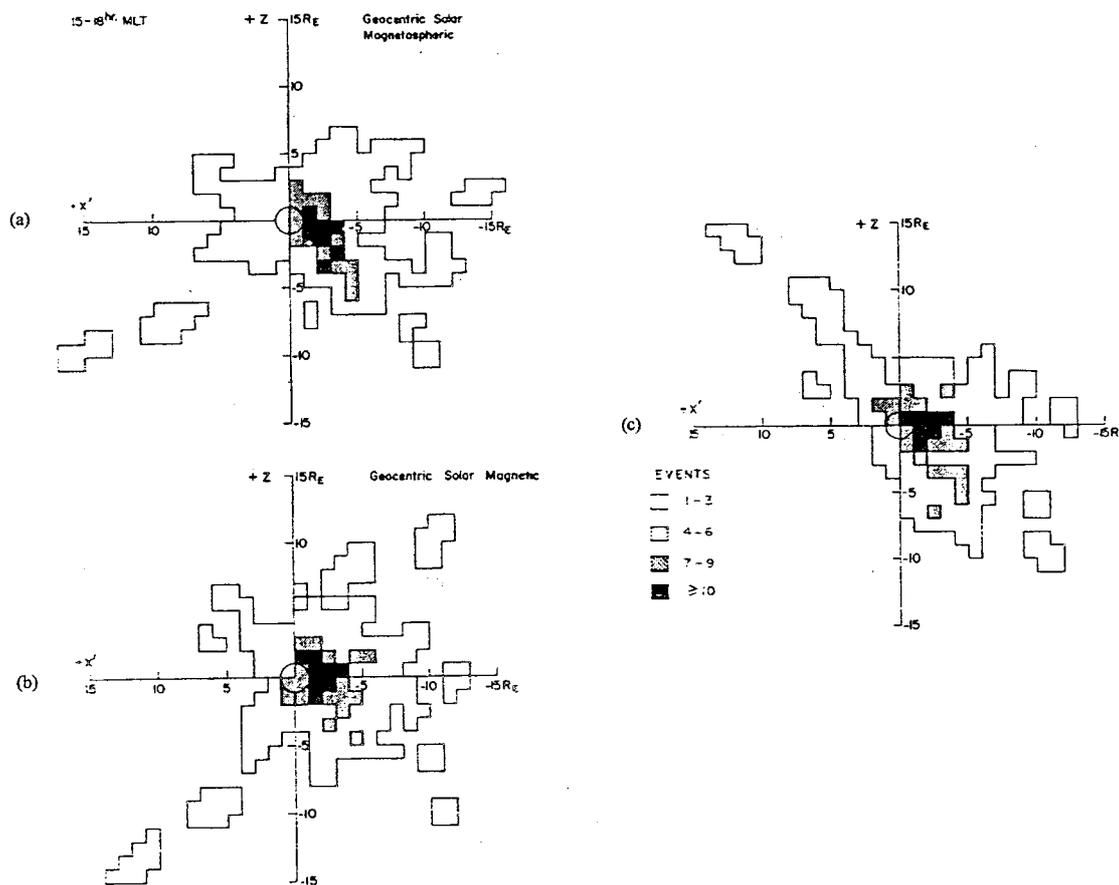


FIGURA 2.10: Posições prováveis de fontes da AKR em três diferentes sistemas de coordenadas: (a) $+Z$ na direção do hemisfério eclíptica-norte e X' paralelo ao plano da eclíptica, sendo o sentido positivo na direção do sol (*lado diurno*), (b) eixo Z paralelo ao eixo de dipolo geomagnético ($+Z$ na direção norte) e (c) similar a (b), com a direção $+Z$ apontando para a extremidade do eixo geomagnético que está inclinado na direção do sol [57].

no lado noturno ($-X'$) do que no diurno ($+X'$). Além disso, existe uma dispersão maior de ocorrências de AKR quando são usados os sistemas de coordenadas (a) e (b). Os dados referentes às posições das fontes são mais organizadamente (menor dispersão) dispostos no sistema (c), sendo este portanto, o sistema de coordenadas adotado pelos autores. Note ainda que a maioria das ocorrências de AKR acontece até $5R_{\oplus}$ de altitude. Existem, entretanto, ocorrências em $15R_{\oplus}$ ou mais. Estudos feitos posteriormente a este artigo mostram porém, que posições situadas a altitudes a partir de aproximadamente $5R_{\oplus}$ podem não ter confiabilidade [58].

A figura 2.11 mostra as posições das fontes da AKR projetadas no meridiano meio dia/meia noite. Estes dados foram obtidos durante dois anos pelo satélite RAE 2 em intervalos de 16 a 22 horas MLT e 4 a 8 horas MLT. O sistema de coordenadas desta figura é tal que $+Z$ aponta

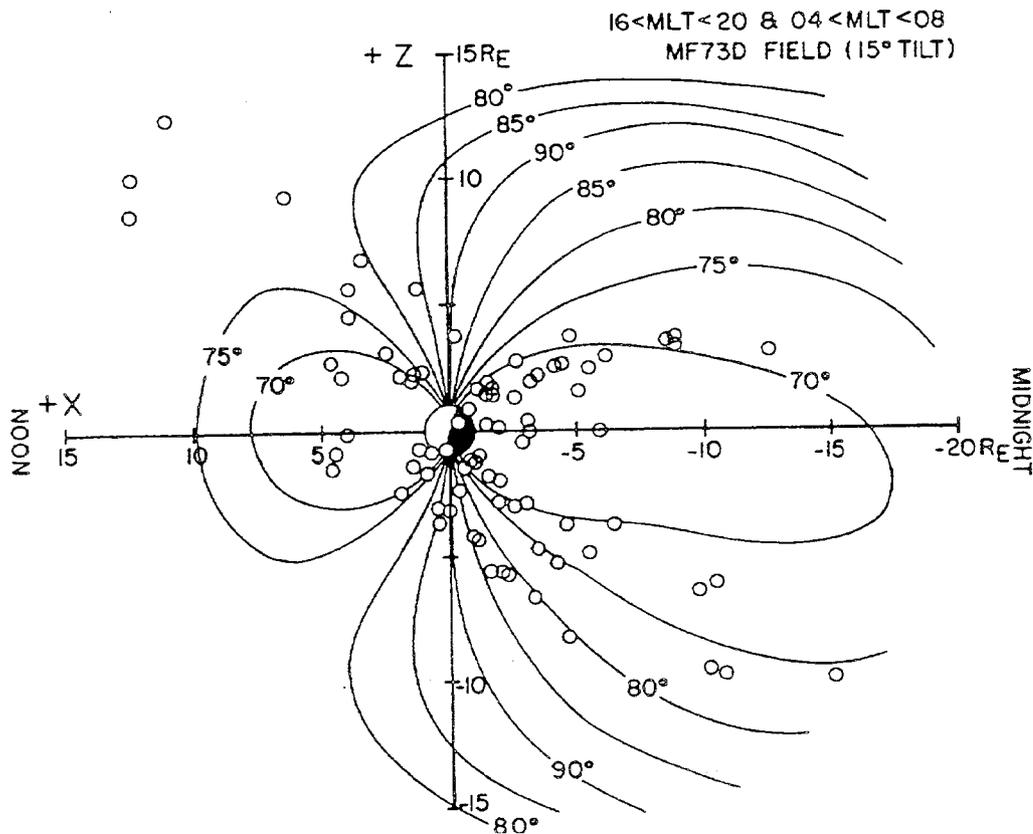


FIGURA 2.11: Posições das fontes da AKR projetadas no plano do meridiano meio dia/meia noite (onde +Z aponta na direção do pólo geomagnético inclinado na direção do sol) [57].

na direção do pólo geomagnético que está inclinado na direção do sol. As linhas de indução foram obtidas do artigo de Mead e Fairfield [59]. Note novamente que as fontes aparecem com mais frequência no lado noturno, a uma distância de aproximadamente $5R_{\oplus}$. Além disso, a grande maioria das fontes do lado noturno no hemisfério +Z está localizada na linha de latitude magnética invariante¹⁴ Λ igual a 70° , ao passo que no hemisfério -Z estão aparentemente associadas às linhas entre 70° e 80° em latitude invariante. Vê-se ainda que a maioria das fontes de emissão está no pólo (geográfico) inclinado na direção do Sol, como é de se esperar¹⁵.

Estes dados estão de acordo com estudos de traçado de raios feitos por Green *et al.* [47] que mostraram que a fonte deveria se situar entre $2R_{\oplus}$ e $3R_{\oplus}$. Outros estudos concluíram que a posição mais provável da fonte da AKR deveria realmente ser no mesmo intervalo de latitude magnética invariante (entre 68° e 80°) e altitude (entre $2R_{\oplus}$ e $5R_{\oplus}$) [60, 51, 33, 61].

¹⁴Valor do ângulo (*latitude*) que uma determinada linha de indução possui no pólo.

¹⁵A injeção de partículas oriundas do vento solar é maior no pólo que está inclinado na direção do Sol.

2.5 Estrutura da fonte da Radiação Quilométrica das Auroras

A presente seção abordará algumas características da região fonte da AKR que são importantes não só para tentar entender como a AKR é gerada, mas também para que possamos ter algo como ponto de referência quando quisermos usar um modelo físico para a mesma. Na primeira subseção veremos a correlação da ocorrência da AKR com eventos de precipitação de elétrons. Na segunda e na terceira, será focalizada a estrutura propriamente dita, procurando relacionar a geração da AKR com as possíveis anisotropias que possam existir na distribuição de partículas ou nos parâmetros que descrevem o plasma da região fonte.

2.5.1 Correlação da AKR com eventos de precipitação de elétrons

Como já foi dito na seção 2.2, existe uma forte relação entre a ocorrência da AKR e a aurora discreta, como demonstrado por Gurnett em 1974 [41]. Ackerson e Frank em 1972 [62] mostraram também que eventos de precipitação do tipo "V-invertido"¹⁶ estão correlacionados com a aurora discreta. Em 1979, baseados nessas evidências, Green e Gurnett [63] relacionaram então a ocorrência da AKR com os eventos de precipitação de elétrons tipo "V-invertido", utilizando dados obtidos pelo satélite Hawkeye e o AE-D (*Atmosphere Explorer D*), o último sendo capaz de medir fluxos de elétrons de baixa energia. Em 2000, Imhof *et al.* [64] confirmaram a forte correlação entre eventos de precipitação tipo "V-invertido" e eventos da AKR, utilizando-se de medições feitas pelo satélite Polar.

Na figura 2.12 mostramos a forma típica de um espectrograma energia-tempo para este tipo de precipitação de elétrons. Este tipo de evento de precipitação se caracteriza por um fluxo de elétrons cuja energia cinética aumenta de uma quantidade da ordem de centenas de eV para algo em torno de keV , retornando para a casa dos eV na medida em que o satélite cruza a faixa de elétrons precipitantes.

Na figura 2.13 mostramos uma comparação de dados obtidos do Hawkeye com dados de precipitação de elétrons obtidos pelo AE-D. O painel à esquerda na figura mostra o fluxo de potência coletado pelo Hawkeye a uma frequência de 178 kHz, enquanto ele estava dentro do cone de emissão da AKR (ver figura 2.8). Durante o período em que o Hawkeye coletava dados, o AE-D cruzava a região auroral noturna do hemisfério norte em três passagens consecutivas. Os espectrogramas energia-tempo para estas três passagens são mostrados nos três painéis à

¹⁶Tal nome se deve à forma do espectrograma energia-tempo que o satélite obtém quando passa pelo fluxo de partículas.

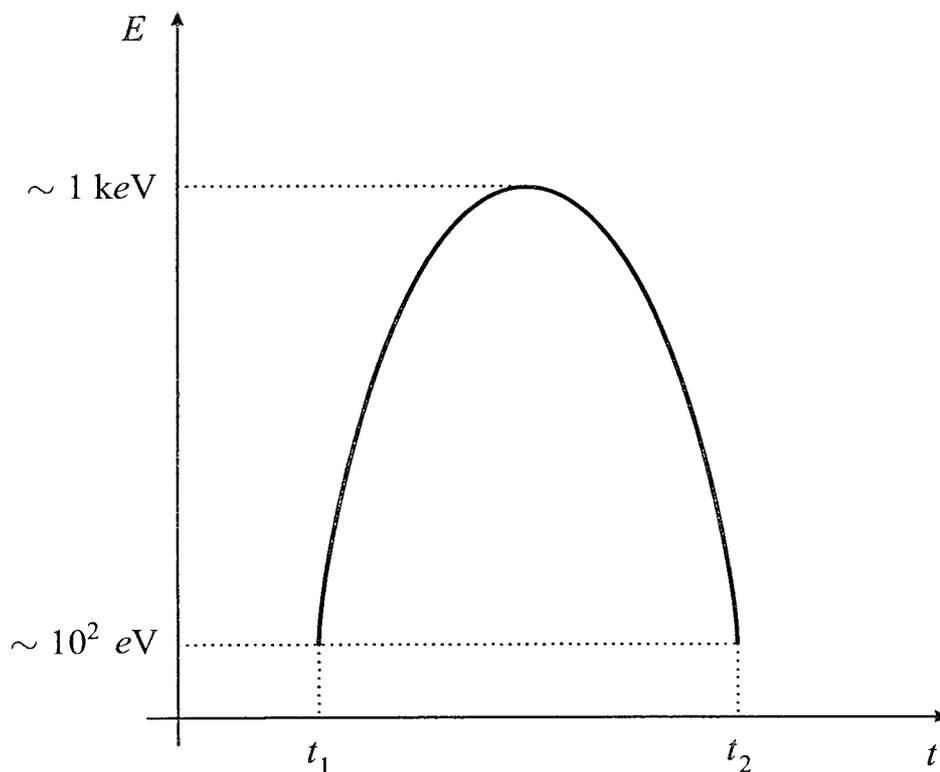


FIGURA 2.12: Forma típica do espectrograma energia-tempo para um evento de precipitação tipo "V-invertido". Os instantes de tempo t_1 e t_2 são, respectivamente, os instantes em que o satélite entra e sai da faixa dos elétrons precipitantes.

direita da medição do Hawkeye, rotulados pelo número correspondente à órbita do AE-D: 698, 699 e 700. Tais números estão também mostrados no painel relativo aos dados obtidos pelo Hawkeye.

Na órbita 698, o AE-D mediu três eventos tipo "V-invertido" com picos de energia da ordem de 1,9, 1,38 e 13,1 keV, assinalados na figura. Aproximadamente duas horas mais tarde (órbita 699), mediu mais dois eventos do mesmo tipo com picos de energia em 6.88 e 3.62 keV além de um outro fenômeno de precipitação de elétrons denominado *precipitação da camada de plasma*¹⁷. Simultaneamente, o Hawkeye mediu moderadas ocorrências de AKR a 178 kHz, como mostram os rótulos 698 e 699 no painel à esquerda. Na órbita 700, o AE-D observou novamente a precipitação da camada de plasma, sem nenhuma evidência de eventos tipo "V-invertido". Note que neste caso, nenhuma ocorrência de AKR foi registrada pelo Hawkeye, como mostra o rótulo

¹⁷Este tipo de precipitação de elétrons se distingue do evento de "V-invertido" por ser muito mais estendido em latitude, como mostra a figura.

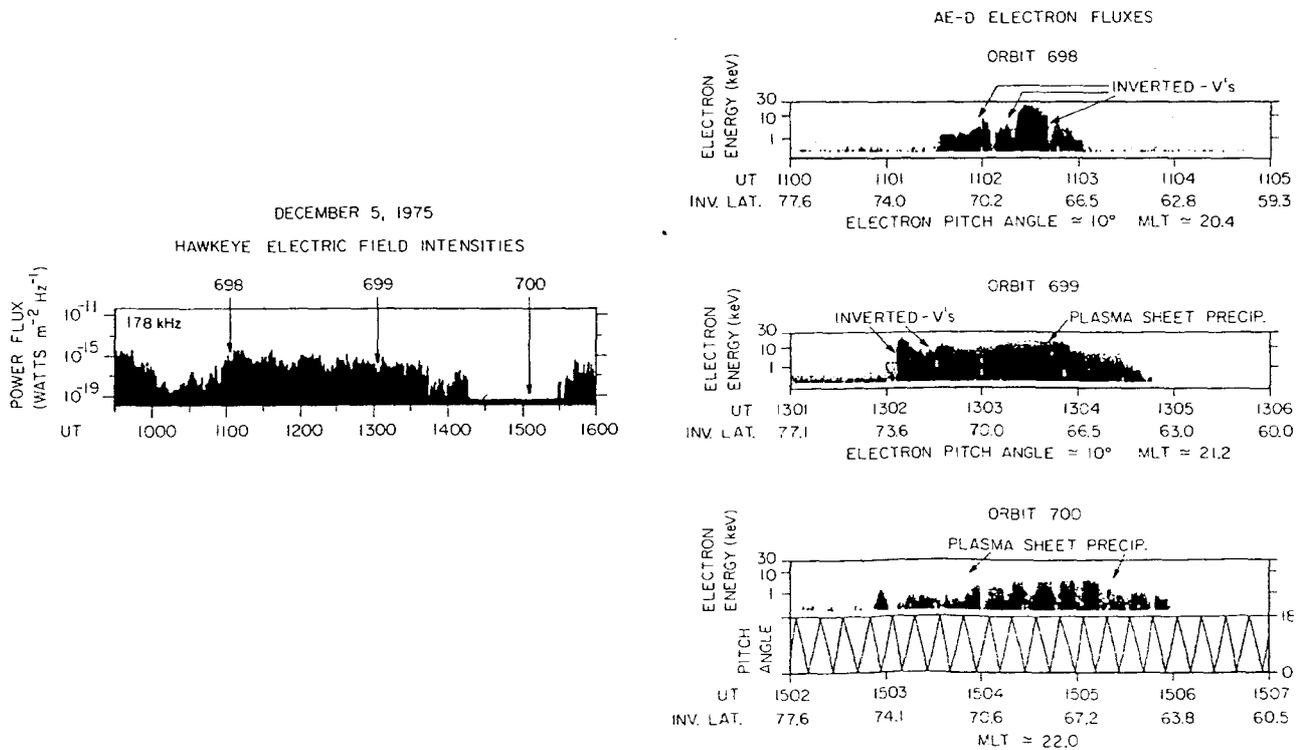


FIGURA 2.13: Espectrogramas energia-tempo obtidos em três passagens consecutivas do AE-D através da região auroral noturna do hemisfério norte. À esquerda vemos medições simultâneas da AKR obtidas pelo Hawkeye [63].

700 no painel superior. Do conjunto das observações, obteve-se que a AKR parece estar bastante mais correlacionada com eventos de precipitação do tipo "V-invertido" do que com precipitação da camada de plasma.

No referido trabalho foi feito um estudo detalhado dessa correlação, mostrando que eventos do tipo "V-invertido" com alta potência liberada ($\geq 10^{10}W$) não necessariamente levam a ocorrências de AKR com potências de mesma ordem. Logo, o evento de "V-invertido" não pode por si só ser a única fonte de energia para a geração da AKR, sendo necessário assumir que a AKR deve ser sensível a outros parâmetros do plasma na região fonte ou a anisotropias na função distribuição das partículas precipitantes.

2.5.2 A cavidade auroral

A primeira evidência de que a AKR se origina em uma região onde há um decréscimo de densidade foi fornecida por dados obtidos pelo satélite ISIS-1 [51]. Embora tais medições nem sempre sejam confiáveis [65], mostrou-se que existe uma região onde há um decréscimo de densidade, chamada de cavidade auroral, na verdade composta por várias microcavidades, com regiões de variação súbita de até duas ordens de grandeza no valor local de densidade.

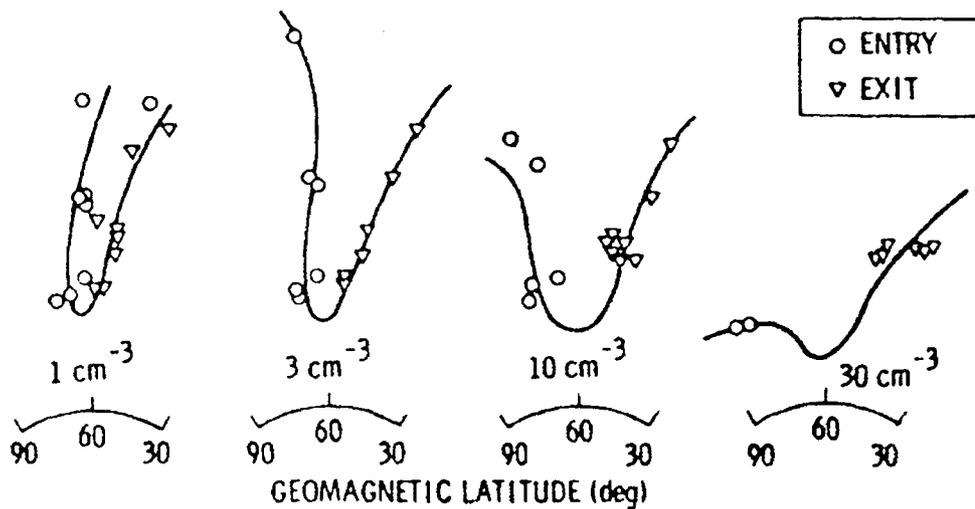


FIGURA 2.14: Contornos de densidade constante tais como foram estimados a partir de dados obtidos pelo Hawkeye. A figura mostra a latitude magnética e o respectivo valor de densidade da região fonte. Os círculos indicam a entrada do satélite na cavidade e os triângulos a saída [33].

A técnica utilizada pelo satélite ISIS-1 para realizar tais medições consistia em emitir sinais contínuos com frequência acima de 1MHz, testando a sua reflexão na ionosfera. Este método possui um limite inferior de 30 partículas/ cm^3 abaixo do qual a medição não é mais possível.

Medições de densidade na cavidade auroral também foram feitas pelo Hawkeye que, embora não fosse equipado para medições diretas de densidade, pôde estimá-la através dos sinais (ondas) que recebia, através das frequências de corte e ressonâncias que os diferentes tipos de ondas recebidas pelo satélite exibem. Embora este tipo de técnica possua limitações [65], ainda assim

fornece informações sobre a densidade na região fonte sem que o satélite perturbe o meio e, em alguns casos, permite obter dados em regiões onde não há forma de se realizarem medições diretas de densidade, por esta ser muito pequena. O Hawkeye revelou que existem regiões dentro da cavidade que podem ter densidade da ordem de 1 partícula/cm³ ou menos, como mostram as figuras 2.14 e 2.15. Medições mais atuais e precisas confirmaram as observações feitas pelo Hawkeye [66].

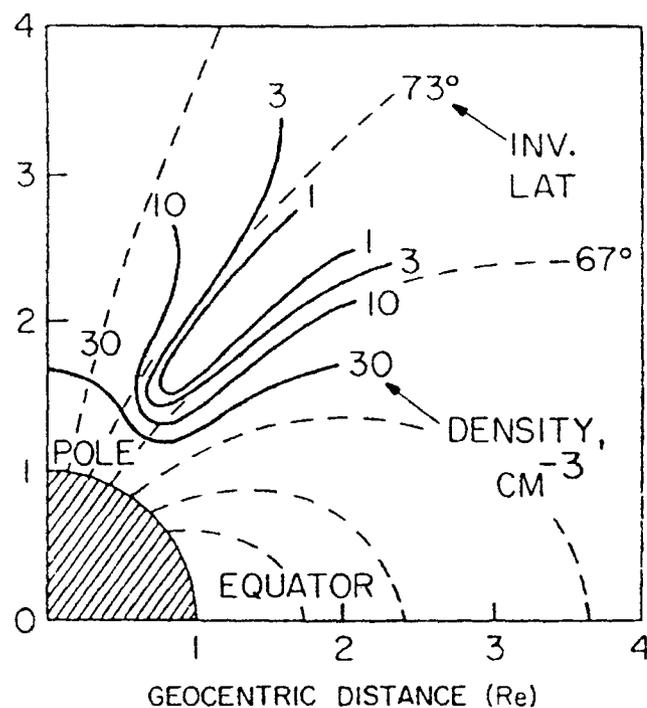


FIGURA 2.15: Os contornos de densidade constante da figura 2.14, em função da latitude magnética e da distância radial [33].

Na figura 2.14 vemos alguns contornos de densidade constante obtidos ao longo de três anos pelo Hawkeye. Os círculos indicam a entrada do satélite na cavidade auroral e os triângulos indicam a saída, todos em função da latitude magnética. Note que os contornos com maior densidade são mais largos em latitude do que os de menor densidade.

Na figura 2.15 vemos a cavidade auroral em função da latitude magnética e da distância radial (*altitude, em raios terrestres*) indicando que as paredes da cavidade estão localizadas entre 67° e 73° em latitude magnética invariante, como já foi dito na seção 2.4. O quarto de círculo unitário

(em raios terrestres) centrado na origem é uma representação da Terra. Vemos claramente que se nos movermos em direção aproximadamente perpendicular a uma dada linha de indução na região onde existe a cavidade, veremos a densidade diminuir quando nos afastamos das bordas em direção ao centro da mesma. Quando se pretende construir um modelo físico para a densidade na região fonte, é essencial ter isso em mente.

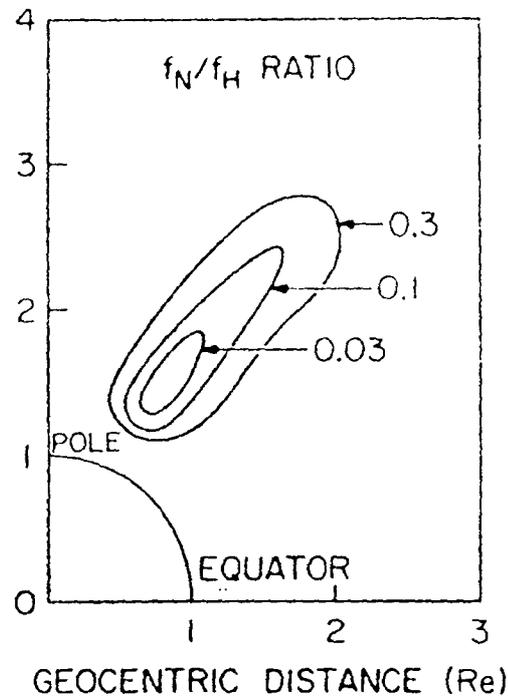


FIGURA 2.16: A razão entre a frequência de plasma ($f_N \equiv \omega_{pe}/2\pi$) e a frequência de ciclotron dos elétrons ($f_H \equiv \Omega_e/2\pi$) na cavidade auroral em função da distância radial [33].

Na figura 2.16 vemos a razão entre o valor local da frequência de plasma de elétrons $f_N \equiv \omega_{pe}/2\pi$ ($\omega_{pe} = (4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2}$), onde n_e é o valor local da densidade de elétrons, e o valor local da frequência de ciclotron eletrônica, $f_H \equiv \Omega_e/2\pi$, em função da distância ao centro da Terra (dada em raios terrestres). Na região menos densa esta razão pode ser da ordem de 0,03, a aproximadamente $1,8R_\oplus$ de altitude. Este mínimo corresponde a uma frequência de aproximadamente 250 kHz, que por sua vez corresponde ao pico do espectro de emissão observado nesta região ¹⁸.

¹⁸O valor da frequência de pico do espectro da AKR é próximo do valor local da frequência de ciclotron [53]. Dessa forma, vemos que para valores locais maiores de frequência de ciclotron (em baixas altitudes) também teremos frequências de pico maiores no espectro. Podemos então ver que, quanto maior a altitude, menor a frequência de pico no espectro de emissão da AKR.

Além disso, o contorno de taxa 0,1 se estende entre $1,3R_{\oplus}$ e $3,3R_{\oplus}$, onde a frequência de ciclotron é concordante com os limites de frequência observados no espectro da AKR. Isto sugere que a cavidade auroral desempenha um papel preponderante na geração da AKR.

Na subseção 2.5.3 veremos que esta razão entre os valores locais da frequência de plasma e da frequência de ciclotron eletrônicas serve como um critério qualitativo para avaliar o quanto a amplificação de radiação no modo X , gerada em uma certa região caracterizada por um dado valor de $f_N/f_H \equiv \omega_{pe}/\Omega_e$, pode ser significativa.

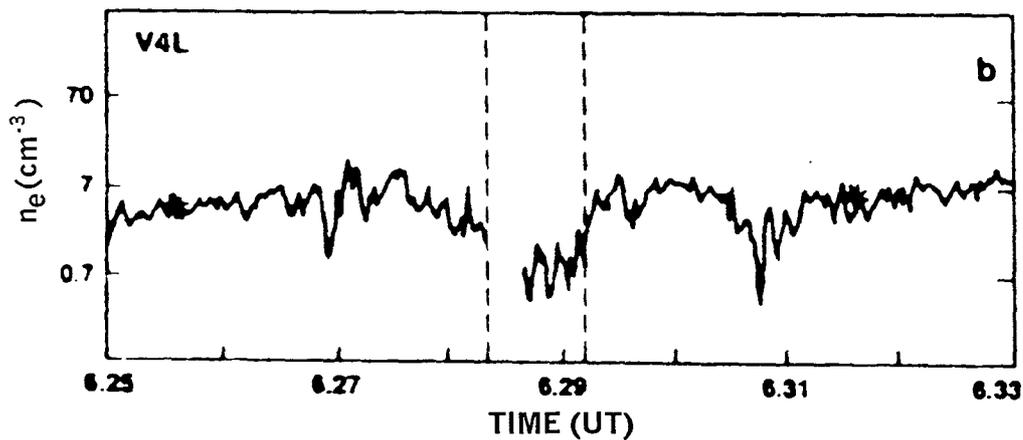


FIGURA 2.17: A densidade na região fonte em função do tempo universal UT [54].

As medições de densidade realizadas pelo satélite ISIS-1 ou as feitas pelo Hawkeye, através de frequências de corte e ressonâncias, não são as únicas formas de se medir a densidade na região fonte da AKR. Também não são as mais precisas. Existe uma técnica chamada em inglês de *Langmuir Probe* (ou *Sonda de Langmuir*), que é bastante precisa [54]. O satélite Viking continha seis dessas sondas, duas das quais podiam ser usadas para medições de densidade. Tais sondas eram cascas esféricas de alumínio de cinco centímetros de diâmetro cobertas com um material especial. A técnica consistia em usar as duas sondas para medir a corrente originada por elétrons térmicos, e usar a lei clássica de Langmuir para calcular a densidade. A técnica permite medir valores bastante baixos de densidade e está descrita em Hilgers *et al.* (1992) [67]. A relação entre a densidade e a corrente devida aos elétrons térmicos é

$$n_e = \frac{I_e}{4\pi a^2 \sqrt{\frac{e V_p}{2\pi m_e}}}, \quad (2.1)$$

onde a é o raio da sonda (5 cm), V_p o potencial da sonda em relação ao plasma circundante (20 V no caso) e I_e a corrente devida aos elétrons térmicos. A figura 2.17 mostra a densidade obtida por este método em função do tempo universal. Note que a densidade pode ter valores bastante baixos ($0,5 \text{ cm}^{-3}$), da mesma ordem de grandeza prevista por Calvert [33]. Além disso, pode-se visualizar a estrutura de microcavidades, como foi citado anteriormente.

Recentemente, o satélite FAST (**F**ast **A**uroral **S**napsho**T**) realizou medições bastante precisas de densidade eletrônica na região fonte, fornecendo detalhes também sobre a distribuição de partículas nessa região [68, 69, 70, 71, 72, 73]. Essas medições confirmam a existência das subcavidades aurorais.

2.5.3 A distribuição de partículas na região fonte da Radiação Quilométrica das Auroras

A existência de eventos de precipitação de elétrons, como descrito na subseção anterior, sugere que existam campos elétricos ascendentes paralelos ao campo geomagnético. Observou-se, além da precipitação de elétrons, aceleração de ions a partir da ionosfera [65], reforçando ainda mais esta hipótese. Wu e Lee (1979) [22] sugerem que tal campo elétrico pode remover elétrons de baixa energia da cavidade, reduzindo o valor local da densidade e conseqüentemente, o valor local da frequência de plasma. Isto pode levar a uma maior amplificação da radiação do modo extraordinário rápido X , como prevê a teoria do maser de elétron-ciclotron. Na seção 3.5 veremos que isto pode acontecer quando a função de distribuição eletrônica possuir um caráter cone-de-perda¹⁹ e quando o critério [26]

$$\frac{\alpha_{te}^2}{c^2} \gtrsim 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \quad (2.2)$$

é satisfeito.

A quantidade α_{te} que aparece na equação (2.2) está relacionada com a dispersão em momentum (temperatura) da função distribuição dos elétrons. Por exemplo, elétrons que participam do evento de "V-invertido" que têm uma energia de pico em 5 keV, terão $m_e \alpha_{te}^2/2 = 8 \text{ keV}$, ou seja, $\alpha_{te}^2/c^2 \approx 0,02$. Logo, segundo este critério, se temos $\alpha_{te}^2/c^2 \approx 0,02$ na região onde a radiação se

¹⁹Como indicam as medições feitas por satélite, realmente a função distribuição dos elétrons apresenta uma característica semelhante, como veremos nesta subseção.

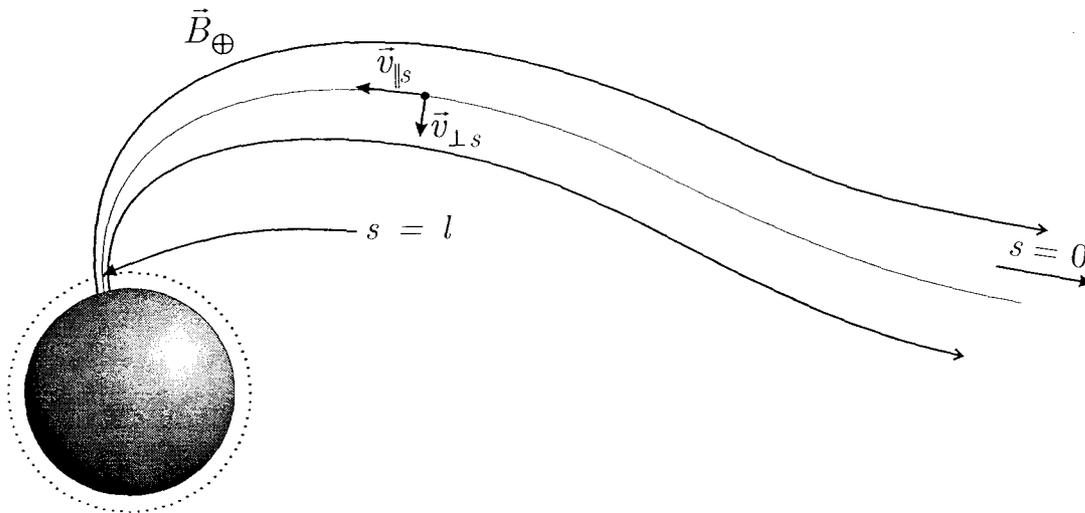


FIGURA 2.18: A coordenada curvilínea s . Também aparecem aqui as componentes paralela e perpendicular ao campo geomagnético da velocidade da partícula. A linha pontilhada em torno da Terra representa o topo da ionosfera.

propaga, a razão ω_{pe}/Ω_e nessa mesma região deve ser menor do que 0,1 para que a amplificação da onda possa ser significativa²⁰. Vê-se então que o parâmetro ω_{pe}/Ω_e desempenha um papel importante na teoria do maser de elétron-ciclotron quando se trata de estudar a amplificação do modo X .

Para começar a abordar as principais características da função distribuição das partículas que constituem o meio onde é gerada a AKR, é necessário fazer algumas considerações baseadas no artigo de Chiu e Shulz (1978) [1]. Primeiramente define-se a posição ao longo de uma dada linha de campo geomagnético s (como mostra a figura 2.18), cujos extremos são $s = 0$, que se situa no equador magnético (região onde o campo magnético terrestre se conecta com o CMI (Campo Magnético Interplanetário) e $s = l$, que se situa no topo da ionosfera em uma região caracterizada por ter a frequência de colisões entre as partículas (de carga q) igual à frequência

²⁰Obviamente estamos nos referindo à emissão no primeiro harmônico, ou seja $\omega \approx \Omega_e$. Note ainda que uma região da cavidade auroral que satisfaça a condição de que ω_{pe}/Ω_e seja menor do que 0,1, pode ser bastante extensa, como mostra a figura 2.16.

de ciclotron $\Omega_q = |q| B_l / m_q c$ das mesmas.

Na região definida por $0 \leq s \leq l$ (figura 2.18) é assumido que, por ser muito rarefeito, o plasma é não-colisional. Além disso, é importante ressaltar que o valor do campo magnético é obviamente maior em $s = l$ do que em $s = 0$, pois como mostram as figuras 2.1 e 2.18, as linhas de campo se aproximam mais entre si quanto mais próximas estiverem dos pólos geomagnéticos. Note também que a altitude em $s = l$ é menor do que a altitude em $s = 0$.

Sendo a região definida acima não colisional, a energia E e o momento magnético μ_q de uma dada partícula de carga q se mantêm constantes ao longo do trajeto $0 \leq s \leq l$. Logo

$$E = \frac{m_q}{2} (v_{\parallel s}^2 + v_{\perp s}^2) + qV_s = \text{cte} \quad (2.3)$$

$$\mu_q = \frac{m_q v_{\perp s}^2}{2 B_s} = \text{cte} , \quad (2.4)$$

onde $v_{\parallel s}$ e $v_{\perp s}$ são, respectivamente, as componentes paralela e perpendicular às linhas de campo da velocidade da partícula no ponto s (figura 2.18), m_q é a massa da partícula, q a sua carga, B_s é o módulo do campo magnético no ponto s , V_s é o valor do potencial elétrico no mesmo ponto e μ_q é o momento magnético da partícula. Consideraremos que $v_{\parallel} > 0$ corresponde aos elétrons descendentes.

Sejam dois pontos s' e s da linha geomagnética situados na região $0 \leq s \leq l$. Pela conservação do momento magnético da partícula, pode-se obter a relação $v_{\perp s'}^2 / B_{s'} = v_{\perp s}^2 / B_s$. Usando a mesma na equação de conservação de energia, obtemos uma relação entre as componentes paralelas da velocidade no ponto s e no ponto s'

$$v_{\parallel s'}^2 = v_{\parallel s}^2 - \beta_{s's} v_{\perp s}^2 \pm v_{s's}^{q,2} \quad (s < s') \quad (2.5)$$

$$v_{\parallel s'}^2 = v_{\parallel s}^2 + \beta_{s's} v_{\perp s}^2 \pm v_{s's}^{q,2} \quad (s > s') , \quad (2.6)$$

onde:

$$\beta_{s's} = \left| \frac{B_{s'}}{B_s} - 1 \right| . \quad (2.7)$$

$$v_{s's}^{q,2} = \frac{2}{m_q} |q(V_{s'} - V_s)| . \quad (2.8)$$

Na equação (2.5) os sinais positivo e negativo se referem a elétrons e íons respectivamente. Temos que $B_{s'} > B_s$ e, como o campo elétrico paralelo ao campo magnético é ascendente, $V_{s'} > V_s$. Na equação (2.6) temos exatamente o oposto: o sinal positivo passa a se referir aos íons, o negativo aos elétrons e, como $s > s'$, teremos que $B_{s'} < B_s$ e $V_{s'} < V_s$.

Escrevendo as equações (2.5) e (2.6) para $s' = l$ e para $s' = 0$, obtemos:

$$v_{\parallel l}^2 = \underbrace{v_{\parallel s}^2 - \beta_{ls} v_{\perp s}^2}_{+ \rightarrow \text{elétrons, } - \rightarrow \text{íons}} \pm v_{ls}^q \quad (2.9)$$

$$v_{\parallel 0}^2 = \underbrace{v_{\parallel s}^2 + \beta_{0s} v_{\perp s}^2}_{- \rightarrow \text{elétrons, } + \rightarrow \text{íons}} \pm v_{0s}^q \quad (2.10)$$

2.5.4 O espelhamento magnético e as populações de partículas

Na figura 2.18, notamos que em $s = l$ há uma aproximação entre as linhas de campo geomagnético. Este tipo de configuração de campo pode levar a um fenômeno chamado espelhamento magnético. Uma dada partícula será espelhada no ponto $s = l$, por exemplo, se a componente paralela de sua velocidade neste ponto, $v_{\parallel l}$, for nula. Entretanto se $v_{\parallel l}^2 < 0$, significa que a partícula foi espelhada em um ponto qualquer $s < l$. Logo, uma dada partícula tem acesso a um certo ponto s se $v_{\parallel s}^2 \geq 0$. No caso oposto ($v_{\parallel s}^2 < 0$) a partícula não tem acesso ao ponto s .

Desconsideremos por enquanto a existência do campo elétrico paralelo e, supondo que a partícula seja espelhada em um ponto s_{esp} tal que $l \geq s_{esp} > 0$, teremos $v_{\parallel l}^2 \leq 0$. Se analisarmos o movimento da partícula a partir de um ponto $s < s_0$, obtemos da equação (2.9), com $v_{ls}^q = 0$:

$$v_{\perp s}^2 \geq \frac{v_{\parallel s}^2}{\beta_{ls}} \quad (2.11)$$

A expressão (2.11) mostra a condição para que uma partícula sofra espelhamento no ponto s_{esp} . Esta condição define um cone no espaço de velocidades, como mostra a figura 2.19. Tal cone é chamado de *cone-de-perda* e partículas que não estão contidas neste cone sofrerão espelhamento pelo campo magnético no máximo²¹ no ponto l . O ângulo $\theta_c = \tan^{-1}(1/\beta_{ls})$ que este cone faz com o eixo v_{\parallel} depende da razão dos valores de campo magnético no início da trajetória (s) e no ponto máximo em que, por hipótese, as partículas podem sofrer espelhamento (l). Note ainda que sem a presença de campo elétrico tanto íons quanto elétrons são espelhados da mesma

²¹As partículas que estão exatamente sobre a reta que delimita o cone são as que sofreram espelhamento exatamente no ponto l .

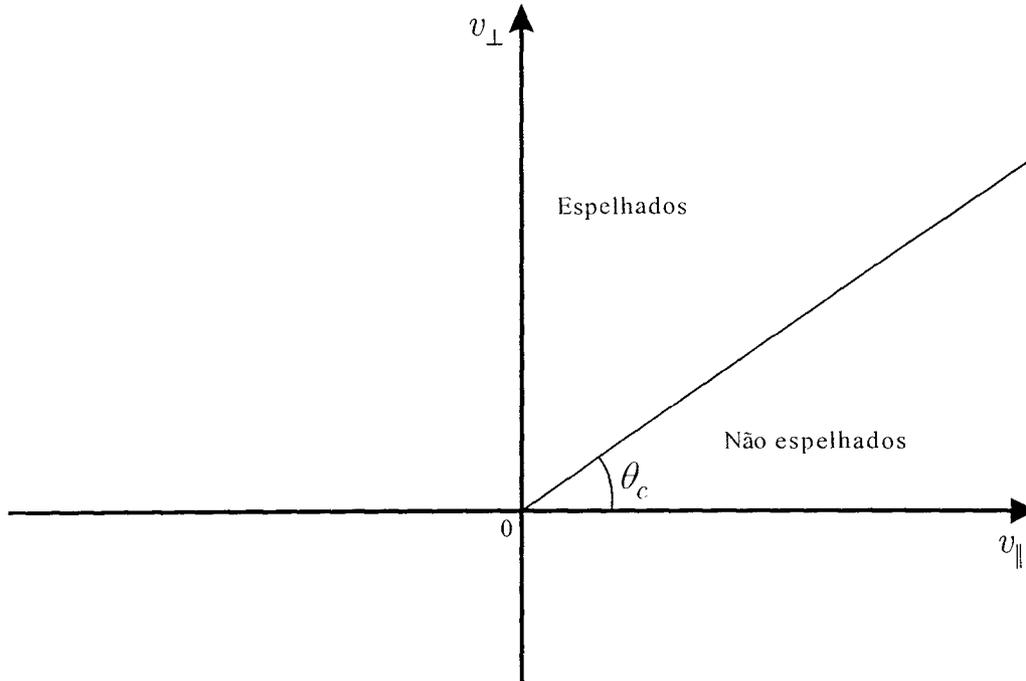


FIGURA 2.19: O cone-de-perda: partículas que têm velocidades cujo ângulo com o eixo $v_{||}$ seja menor do que o ângulo θ_c , não serão refletidas e formarão no espaço de velocidades o que se chama de cone-de-perda.

forma. Obviamente somente serão espelhadas as partículas que se moverem no sentido em que o campo magnético aumenta, ou seja, no sentido descendente ($v_{||} > 0$).

A presença do campo elétrico paralelo muda a condição de espelhamento. Novamente utilizando-se a equação (2.9) e a mesma condição anterior de que $v_{||i}^2 \leq 0$:

$$v_{\perp s}^2 - \frac{v_{|| s}^2}{\beta_{ls}} \geq \frac{v_{ls}^e{}^2}{\beta_{ls}} \text{ para elétrons,} \quad (2.12)$$

$$\frac{v_{|| s}^2}{\beta_{ls}} - v_{\perp s}^2 \leq \frac{v_{ls}^g{}^2}{\beta_{ls}} \text{ para íons.} \quad (2.13)$$

Como mostra a figura 2.20, o cone-de-perda foi transformado em uma hipérbole-de-perda para os elétrons e outra para os íons, devido à presença do campo elétrico. Íons e elétrons não mais são espelhados da mesma forma, pois reagem diferentemente na presença de um mesmo campo elétrico. Considerando os elétrons, vê-se na figura que o campo elétrico favorece o não espelhamento de elétrons de baixa energia (*baixos valores de $v_{||}$ e v_{\perp}*), ou seja, o campo

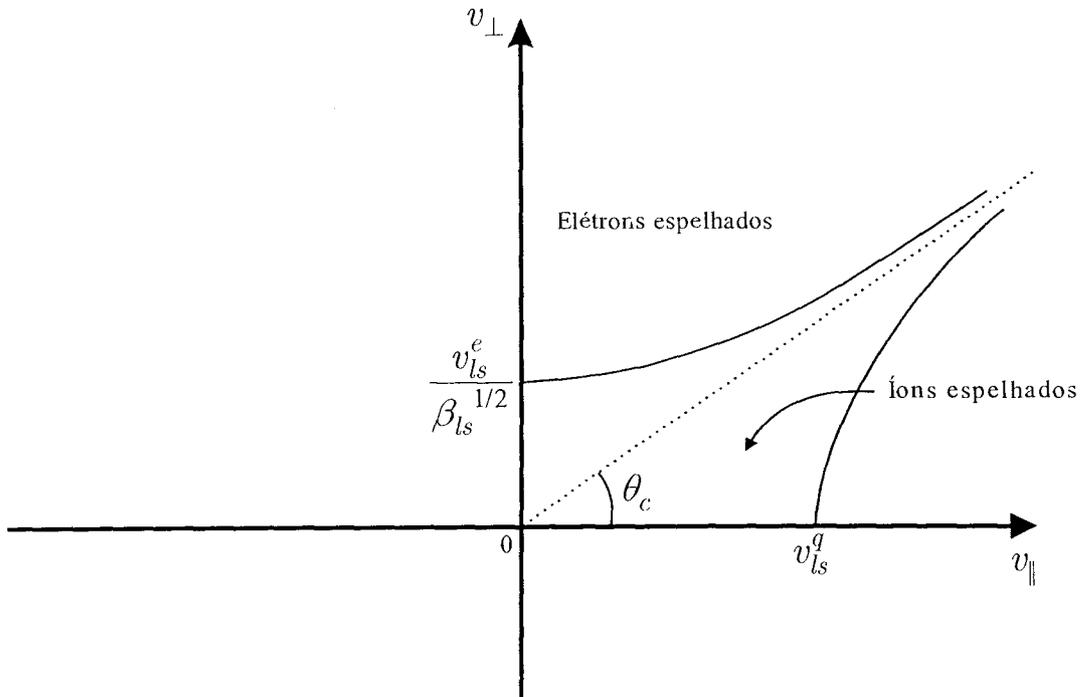


FIGURA 2.20: As hipérboles-de-perda para elétrons e íons. Para partículas muito energéticas (*grandes valores de v_{\parallel} e v_{\perp}*) as hipérboles se aproximam assintoticamente do cone da figura 2.19. Neste caso, como a sua energia cinética é muito maior do que a energia potencial elétrica, tais partículas tendem a não "sentir" o campo elétrico.

elétrico ajuda a remover estes elétrons da região $l \geq s \geq 0$, acelerando-os na direção descendente e diminuindo ainda mais a densidade nessa região o que, como já foi dito no início desta seção, pode favorecer a amplificação de ondas. No caso dos íons acontece o contrário: o campo elétrico ascendente dificulta ainda mais a passagem dos mesmos pelo estreitamento das linhas de campo magnético, aumentando a região no espaço de velocidades onde eles são espelhados e acelerando-os na direção ascendente.

Utilizando (2.9) e (2.10), podemos encontrar condições que são satisfeitas pelos diversos tipos de populações presentes na região fonte. Por exemplo, os elétrons que formam o plasma quente de origem magnetosférica, que são supostamente a fonte principal de energia para a AKR, podem ser classificados como precipitantes ($v_{\parallel i}^2 > 0$), tendo acesso a regiões de altitude inferior a $s = l$, e espelhantes ($v_{\parallel i}^2 < 0$), sendo refletidos pelo estreitamento das linhas do campo magnético acima ou próximo de $s = l$. Para essa população é suposto que o equador magnético ($s = 0$)

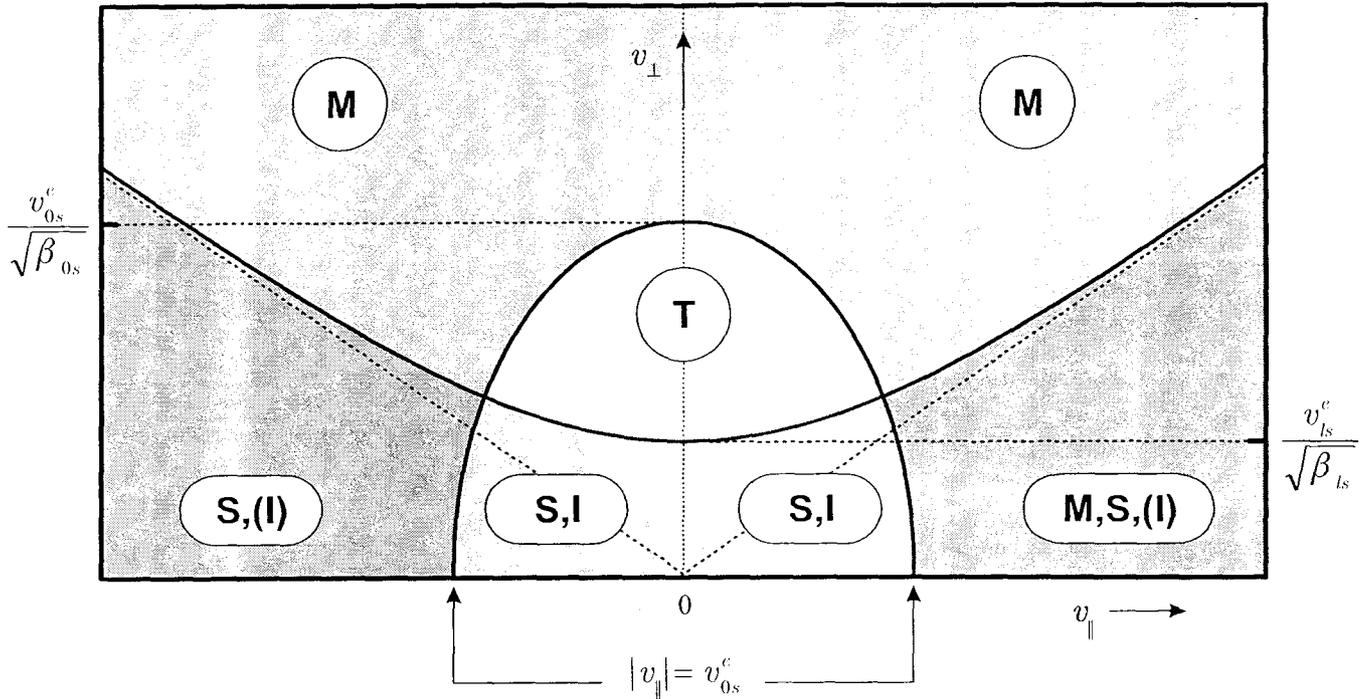


FIGURA 2.21: As regiões do espaço de fase ocupadas pelas diversas populações de elétrons [1]. As curvas são obtidas das condições (2.19), (2.14), (2.15), (2.16) e (2.17).

é acessível ($v_{\parallel 0}^2 > 0$). No caso dos elétrons espelhados, isto indica que os mesmos têm energia suficiente para vencer o campo elétrico e cruzar o equador magnético. De (2.9) e (2.10), usando as condições de acessibilidade $v_{\parallel l}^2 \leq 0$ e $v_{\parallel 0}^2 \geq 0$, obtemos:

$$v_{\perp s}^2 - \frac{v_{\parallel s}^2}{\beta_{ls}} \geq \frac{v_{ls}^c{}^2}{\beta_{ls}} \tag{2.14}$$

$$v_{\perp s}^2 + \frac{v_{\parallel s}^2}{\beta_{0s}} \geq \frac{v_{0s}^c{}^2}{\beta_{0s}} \tag{2.15}$$

Logo, para a população acima citada, a função distribuição deve estar restrita à região definida pelas relações (2.14) e (2.15).

Podemos ter ainda elétrons de baixa energia que, refletidos em altitudes superiores a $s = l$, não têm energia suficiente para acessar o equador magnético, ficando aprisionados em uma região da linha geomagnética tal que $l > s > 0$. Para estes elétrons, as condições de acessibilidade são $v_{\parallel l}^2 \leq 0$ e $v_{\parallel 0}^2 \leq 0$, e portanto

$$v_{\perp s}^2 - \frac{v_{\parallel s}^2}{\beta_{ls}} \geq \frac{v_{ls}^c{}^2}{\beta_{ls}} \quad (2.16)$$

$$v_{\perp s}^2 + \frac{v_{\parallel s}^2}{\beta_{0s}} \leq \frac{v_{0s}^c{}^2}{\beta_{0s}} \quad (2.17)$$

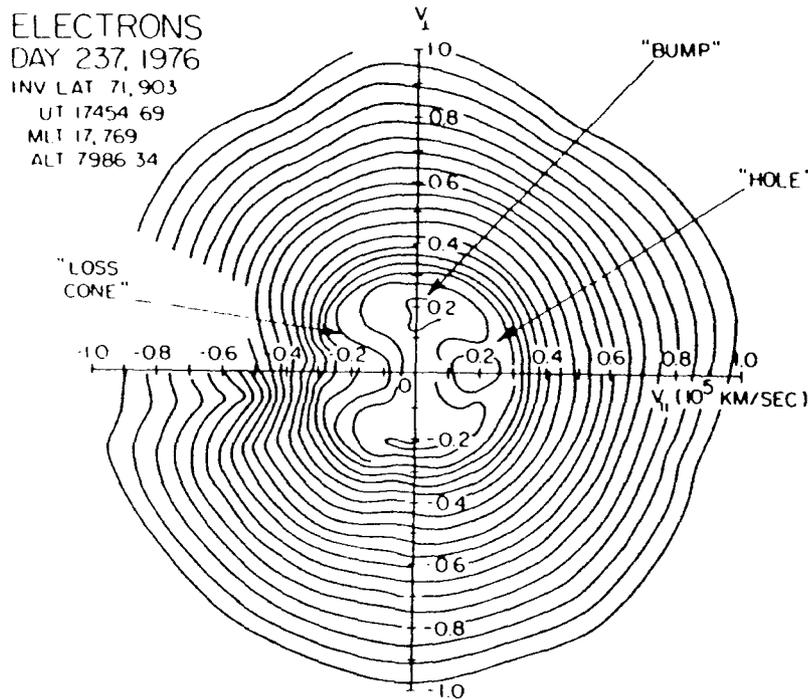


FIGURA 2.22: Função distribuição observada pelo satélite S3-3. Aqui estão mostradas as principais características da função distribuição, tais como o cone-de-perda, o "bump" (corcova) e o "hole" (buraco), que podem servir como fonte de energia livre para a amplificação de ondas [74].

Com base nestas considerações, pode-se discutir a figura 2.21, que mostra as regiões do espaço de fase ocupadas pelas diversas populações de elétrons. Os rótulos M, I, S e T indicam, respectivamente, partículas de origem magnetosférica, partículas de origem ionosférica, elétrons espelhados e elétrons aprisionados. Considerando que a região em que $v_{\parallel} > 0$ corresponde aos elétrons descendentes, a região com o rótulo M,S,(I) corresponde aos elétrons de origem magnetosférica que, injetados nessa região com a ajuda do campo elétrico, participam dos eventos de "V-invertido". Além disso, podem estar presentes nesta região elétrons originários da ionosfera do hemisfério conjugado. A região M, para $v_{\parallel} < 0$ corresponde aos elétrons que são espelhados pelo campo magnético a altitudes maiores ou iguais a $s = l$. A região S,(I) é relativa aos elétrons

magnetosféricos espelhados a uma altitude inferior a $s = l$ ou de origem ionosférica, com energia suficiente para vencer a ação do campo elétrico. A região S,I corresponde aos elétrons que foram espelhados a uma altitude inferior a $s = l$ ou também de origem ionosférica, mas sem energia suficiente para superar a barreira de potencial existente graças à presença do campo elétrico. Finalmente, o rótulo T indica a região correspondente aos elétrons espelhados em altitudes superiores a $s = l$ e que não têm energia suficiente para vencer o campo elétrico e ter acesso ao equador magnético, ficando aprisionados em uma região onde $v_{\perp} > 0$ em torno de $v_{\parallel} \approx 0$.

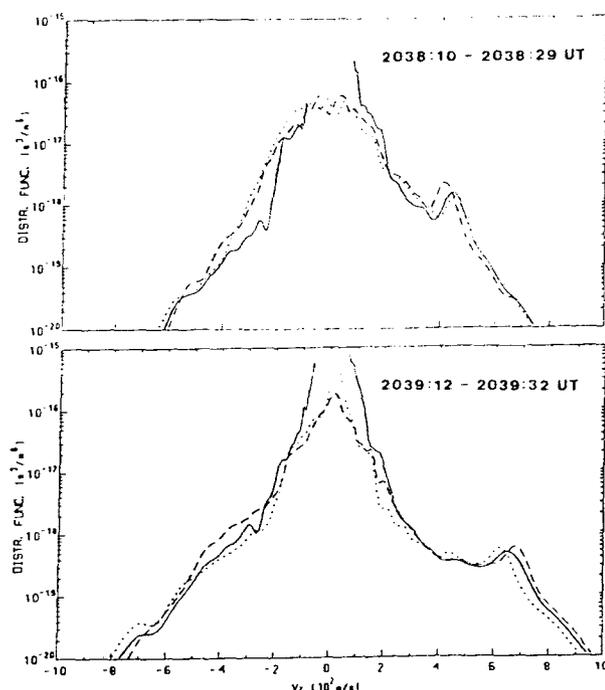


FIGURA 2.23: Cortes da função distribuição observada pelo satélite Viking para diferentes v_{\perp} (v_x) em função de v_{\parallel} (v_z). As linhas sólida, tracejada e pontilhada se referem, respectivamente, a $v_x = 0$, $v_x = 10^7$ m/s e $v_x = -10^7$ m/s. No painel superior o pico indica um potencial de ~ 5.5 kV e no inferior esse potencial é de ~ 12 kV. No painel inferior o satélite está mais próximo da região fonte da AKR do que estava no painel superior [75].

Funções distribuição foram medidas na região auroral e, na figura 2.22, mostramos o resultado de uma observação feita pelo satélite S3-3. Nesta figura estão indicados o cone-de-perda, na direção dos elétrons ascendentes, o "bump" (corcova), uma saliência correspondente aos elétrons aprisionados e o "hole" (buraco), um decréscimo abrupto na região $v_{\parallel} > 0$. Todas estas carac-

terísticas podem servir como uma provável fonte de energia livre para a amplificação de ondas. Medidas de função distribuição podem ainda fornecer dados sobre a ordem de grandeza do potencial elétrico que acelera os elétrons precipitantes.

Na figura 2.23 estão mostrados cortes da função distribuição para valores fixos de v_{\perp} , obtidos pelo satélite Viking em março de 1986, quando o satélite se encontrava mais próximo da região fonte da AKR [75]. No painel superior, o pico está aproximadamente em $v_{\parallel} = 4.4 \times 10^7 \text{ m/s}$ e no painel inferior aproximadamente em $v_{\parallel} = 6.5 \times 10^7 \text{ m/s}$. Estima-se então que os valores de potencial são respectivamente 5.5kV e 12kV.

O que foi discutido nesta subseção será retomado posteriormente, sendo utilizado para construir um modelo físico para a região fonte da AKR.

2.6 Os modos de propagação e a direção da Radiação Quilométrica das Auroras

Um dos aspectos onde existem mais dúvidas em relação à AKR é sem dúvida na determinação dos seus modos de propagação. Os estudos existentes não fornecem dados muito conclusivos a respeito e, na presente seção, tentaremos expor a parte do assunto sobre a qual existe maior consenso na literatura. O estudo dos modos de propagação da AKR pode ser feito baseando-se na relação de dispersão obtida para um plasma frio, a partir de um modelo de fluido, homogêneo, infinito e em presença de um campo magnético externo. Sempre que a frequência característica da radiação for muito maior do que a frequência de ciclotron dos íons, podemos desprezar os efeitos destes no cálculo das componentes do tensor dielétrico que ocorrem na relação de dispersão. Porém, quando o interesse é estudar modos de baixa frequência a presença dos íons não pode mais ser desprezada. Neste caso, o tratamento de fluido apresenta um certo número de modos permitidos. Na figura 2.24 vemos um gráfico do quadrado do índice de refração ($N^2 = k^2 c^2 / \omega^2$) em função da frequência ($f = \omega / 2\pi$), válido para um plasma frio onde a contribuição dos íons pode ser desprezada e quando o vetor de onda faz um ângulo $\theta = \pi/4$ com o campo magnético ambiente. Nesta figura W indica o modo "whistler", Z o modo extraordinário lento, O o modo ordinário e X o modo extraordinário rápido.

A propagação se dá quando o valor do quadrado do índice de refração for positivo. Na figura 2.24 vemos que os modos Z , O e X são delimitados pelas frequências de corte

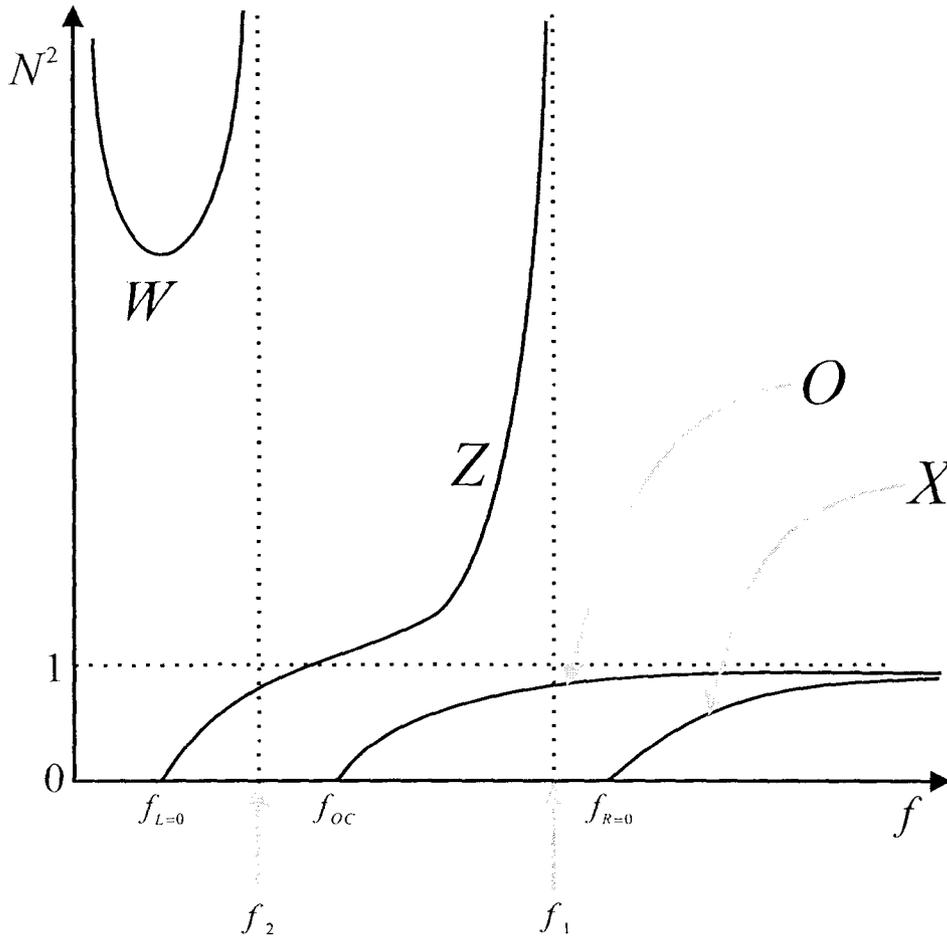


FIGURA 2.24: Quadrado do índice de refração em função da frequência para um plasma frio onde foi desprezada a contribuição de íons [36]. Esta figura foi feita para o caso em que o vetor de onda faz um ângulo $\theta = \pi/4$ com o campo magnético ambiente.

$$f_{L=0} = \left[\left(\frac{f_{ce}}{2} \right)^2 + f_{pe}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{f_{ce}}{2} \quad (\text{modo Z}) \quad (2.18)$$

$$f_{OC} = f_{pe} \quad (\text{modo O}) \quad (2.19)$$

$$f_{R=0} = \left[\left(\frac{f_{ce}}{2} \right)^2 + f_{pe}^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{f_{ce}}{2} \quad (\text{modo X}), \quad (2.20)$$

onde $f_{pe} = \omega_{pe}/2\pi$ e $f_{ce} = \Omega_e/2\pi$. Abaixo dessas frequências de corte os respectivos modos não se propagam, segundo o modelo de plasma frio.

Nota-se ainda que a propagação dos modos é limitada pelas ressonâncias f_1 e f_2 , dependentes do ângulo de propagação θ . A frequência f_1 é chamada frequência híbrida superior (f_{UHR}) que, no caso $\theta = \pi/2$, é dada por $f_1 = (f_{pe}^2 + f_{ce}^2)^{1/2}$. A frequência f_2 é tal que $f_2 = \min(f_{pe}, f_{ce})$.

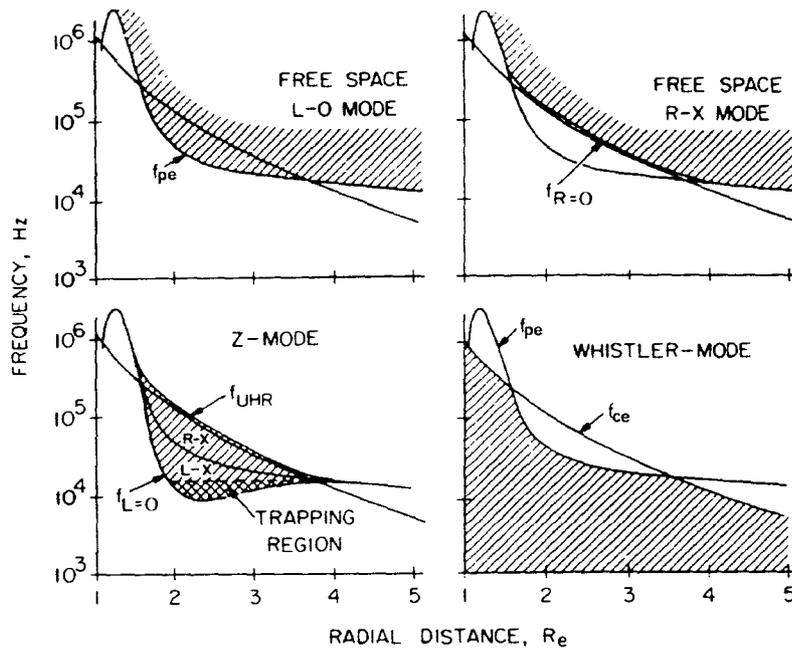


FIGURA 2.25: A frequência em função da altitude para os os quatro modos de propagação de ondas em um plasma frio. Foi usado aqui um modelo para a densidade eletrônica [76]. A sigla R indica polarização RH (Right Hand), onde o sentido de rotação do vetor campo elétrico da onda é anti-horário (no caso da onda se propagando perpendicularmente à página, saindo da mesma). A sigla L indica a polarização LH (Left Hand), onde o sentido de rotação do vetor campo elétrico é oposto ao caso da polarização RH.

O modo "whistler" (W) tem polarização circular e consiste em ondas que se propagam paralelas ao campo magnético ambiente (no caso \vec{B}_\oplus) com frequências menores do que a frequência de ressonância f_2 . Convém dizer que a ressonância em $f = 0$ não é correta na figura 2.24 pois, como já foi mencionado, para frequências baixas os íons passam a ter um papel importante na relação de dispersão. De fato, com a inclusão da contribuição dos íons, tal ressonância não aparece.

No caso $\theta = \pi/2$, o modo Z é limitado por $f = f_{L=0}$ e pela frequência correspondente à ressonância híbrida superior $f_1 = (f_{pe}^2 + f_{ce}^2)^{1/2}$. Sua polarização é linear e o campo elétrico

da onda é perpendicular ao campo magnético. O modo X tem a mesma polarização do modo Z , porém se propaga com frequências maiores do que $f_{R=0}$. Já o modo O se propaga com frequências maiores do que f_{OC} , com polarização também linear. O campo elétrico da onda é paralelo ao campo magnético ambiente, neste caso. Se a propagação da onda for tal que $\theta \neq \pi/2$ (propagação oblíqua), a polarização do modo X não mais será linear, mas sim elíptica.

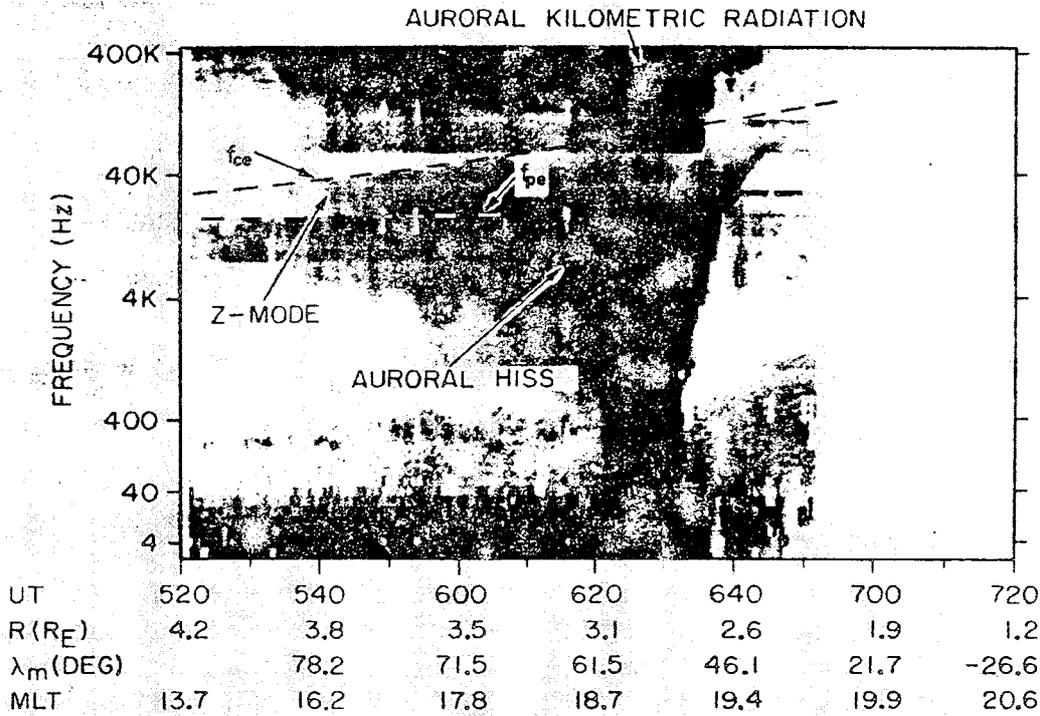


FIGURA 2.26: Espectrograma de intensidade de campo elétrico para um evento típico de AKR em função de UT, R (em R_E), λ_m e MLT onde vemos os cortes dos modos Z e W (auroral hiss) nas linhas que indicam as frequências de ciclotron (f_{ce}) e de plasma (f_{pe}) [76].

Além dos possíveis modos de propagação na região auroral, a direção inicial de propagação da AKR foi estudada dentro da cavidade auroral por Benson e Calvert (1979) [51]. Neste artigo, os autores sugerem que tal direção para o modo X é próxima à perpendicular em relação ao campo geomagnético. Estudos posteriores de traçado de raios inferem que para o modo X , a direção inicial de propagação em relação ao campo geomagnético se situa no intervalo $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ [77].

Na figura 2.25 vemos os intervalos de frequência para os quatro modos citados acima e suas

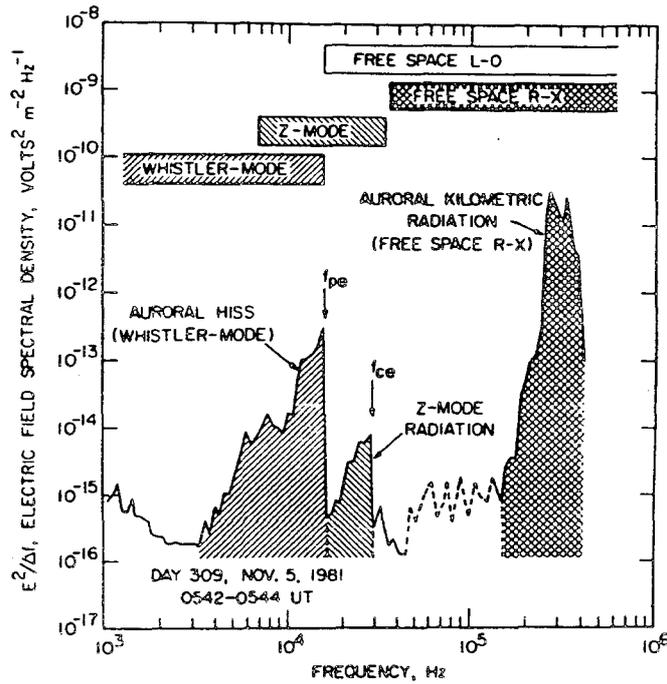


FIGURA 2.27: Espectro de intensidade de campo elétrico em função da frequência, relativo ao espectrograma da figura 2.26 [76].

respectivas frequências de corte, em função da altitude [76]. Foi usado na obtenção desta figura um modelo dipolar para o campo magnético, que permitiu calcular a frequência de cíclotron, e um modelo para o perfil de densidade eletrônica na região auroral. Vê-se claramente da figura, que somente os modos ordinário *O* e o extraordinário rápido *X* podem ser observados a altas altitudes com frequências características da AKR. Os outros modos, *Z* e *W*, estão permanentemente aprisionados na magnetosfera. Além disso, o modo *Z* está limitado superiormente pela ressonância híbrida superior f_{UHR} e o modo *W* limitado superiormente por f_{ce} ou f_{pe} , a menor entre as duas.

Na figura 2.26 está mostrado um espectrograma de intensidade de campo elétrico para um evento típico de AKR obtido pelo DE 1 em função de UT, R (em R_ϕ), λ_m e MLT, onde vemos os cortes dos modos *Z* e *W* (auroral hiss) nas linhas que indicam as frequências de cíclotron (f_{ce}) e de plasma (f_{pe}), respectivamente. Como nesta região temos uma razão $\omega_{pe}/\Omega_e = f_{pe}/f_{ce}$ relativamente baixa, teremos que $f_2 = f_{pe}$ e $f_1 \approx f_{R=0} \approx f_{ce}$.

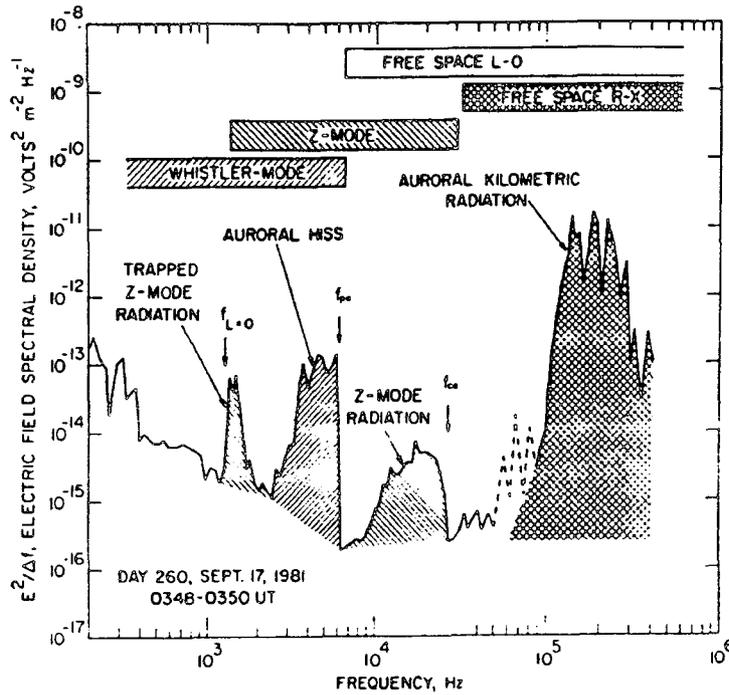


FIGURA 2.28: Espectro de intensidade de campo elétrico em função da frequência para uma passagem do DE 1 [76].

A intensidade relativa dos três diferentes modos está mostrada na figura 2.27. A parte pontilhada da figura indica o intervalo de frequência em que o receptor de sinais do satélite apresentou problemas de saturação devido a uma intensa ocorrência de AKR. O valor real da densidade espectral de campo elétrico neste intervalo de frequência está abaixo da linha pontilhada. Nesta figura, os cortes na frequência de plasma e na frequência de ciclotron são claros. Além disso, as barras rotuladas com os modos, no topo da figura, indicam o intervalo de frequências onde cada um dos modos ocorre. Note que na frequência inferior de corte para o modo Z ($f_{L=0}$) não há mudança brusca na densidade espectral. Isto leva a crer que para este evento, o modo W "mascara" a radiação Z que acontece em frequências entre $f_{L=0}$ e f_{pe} . Vê-se ainda na figura, que o modo X (que é basicamente a AKR) realmente é o mais intenso²². A figura 2.28 é similar à figura 2.27, referente a uma outra medição do DE 1. No entanto, vê-se que nesta passagem a radiação no modo W é fraca o suficiente para não "mascarar" o modo Z , permitindo que seja visto o corte na frequência $f_{L=0}$ do último.

²²Sabe-se que em ordem crescente de intensidade temos o modo W , o modo Z , o modo O e o modo X .

Medições diretas da polarização das ondas na região fonte feitas pelo DE 1 mostram que embora a AKR seja composta basicamente pelo modo X , o modo ordinário também está presente [78, 79]. No entanto, os resultados reforçam a hipótese de que apenas a radiação no modo X tem sua geração direta, via interação onda-partícula, na cavidade auroral. É suposto que ondas no modo O sejam geradas a partir de ondas de Bernstein que gradualmente convertem-se em ondas do modo Z que, via conversão linear de modos, se converteria em uma onda O [11].

Com o que foi visto neste capítulo é possível ter uma noção básica sobre a AKR, nos permitindo daqui para frente, construir um modelo físico para a região fonte, o que é fundamental para qualquer estudo quantitativo da AKR.

Capítulo 3

Ondas de Elétron-Cíclotron

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar o tratamento formal dos processos de interação entre a radiação eletromagnética e as partículas constituintes do plasma, que levam à absorção ou à amplificação de ondas que se propagam através deste.

Um dos tipos mais importantes de onda é a de elétron-cíclotron, a qual pode ser definida como uma onda eletromagnética que se propaga em um plasma imerso em um campo magnético ambiente \vec{B}_0 e cuja frequência está contida em um intervalo estreito em torno da frequência de cíclotron eletrônica (definida no capítulo anterior).

O estudo deste tipo de onda tem sido feito não apenas na análise dos processos que levam à emissão de ondas de rádio pela magnetosfera da Terra e de outros objetos astrofísicos, mas também no campo dos plasmas de laboratório, no que se refere ao aquecimento dos mesmos em tokamaks [80, 81, 82]. O processo de amplificação ou absorção da energia das ondas que se propagam no plasma descrito acima é governado pela interação entre a onda, e as partículas que constituem o mesmo. Tal interação depende da frequência da onda e da forma da função distribuição dos elétrons do plasma. Se o plasma estiver em uma região onde existe uma aproximação maior entre as linhas de campo magnético, a estatística das partículas poderá ser descrita por uma função distribuição do tipo cone-de-perda, como foi dito no capítulo anterior. Neste caso, pode surgir uma instabilidade que amplifica a energia das ondas em detrimento da energia do plasma.

Este capítulo está dividido nas seguintes seções: na seção 3.2, é introduzida a função distribuição das N partículas do plasma e obtém-se a equação diferencial para a distribuição de uma partícula, conhecida como equação de Vlasov que, juntamente com as equações de Maxwell, pode forne-

cer uma descrição dos processos que acontecem no plasma. Nesta mesma seção abordaremos o tratamento linear para o sistema de equações de Vlasov-Maxwell, válido no caso em que as perturbações nas quantidades físicas envolvidas tenham amplitudes muito pequenas se comparadas às amplitudes que estas quantidades possuem no equilíbrio. Com base nisso, pode-se linearizar o sistema de equações, obtendo-se a partir desse sistema de equações linearizado, a transformada de Fourier das componentes do tensor dielétrico do plasma. Estas componentes aparecem na relação de dispersão, que tem um papel fundamental na descrição dos modos possíveis de oscilação do plasma.

Na seção 3.3 serão apresentadas expansões das componentes do tensor dielétrico no parâmetro adimensional $b = k_{\perp} r_L$ onde k_{\perp} é a componente do vetor de onda \vec{k} , perpendicular ao campo magnético ambiente, e r_L é o raio de Larmor da partícula¹. As expressões para as componentes do tensor dielétrico, quando escritas nessa forma, se tornam mais adequadas para uma análise numérica da relação de dispersão, como veremos posteriormente.

Na seção 3.4 estudaremos a condição de ressonância, que comparece nas expressões das componentes do tensor dielétrico. Na seção seguinte, 3.5, veremos como a forma da função distribuição de equilíbrio pode influir no surgimento de instabilidades. Nesta seção ainda veremos alguns aspectos básicos da teoria do maser de elétron-ciclotron, os quais serão necessários quando se quiser obter resultados quantitativos da propagação de uma dada onda na cavidade auroral.

3.2 Sistema de equações de Vlasov-Maxwell e o tensor dielétrico

Um plasma é um sistema complexo onde pode haver a princípio, uma variedade de populações de partículas carregadas (como por exemplo íons, elétrons e pósitrons), sendo que cada população pode ter um valor de densidade de partículas, temperatura e carga diferente das demais. O número de partículas é muito grande, tornando inviável uma descrição por equações de movimento Newtonianas. É possível entretanto, construir uma abordagem estatística do problema, como será mostrado a seguir. Esta abordagem está baseada em Krall & Trivelpiece (1973) [83].

¹Uma partícula carregada, quando em presença de um campo magnético uniforme, descreve uma órbita helicoidal em torno das linhas de campo. A projeção dessa hélice em um plano perpendicular ao campo magnético é uma circunferência cujo raio é o raio de Larmor.

3.2.1 Descrição estatística de um plasma

Uma completa (e como dito acima, inviável) descrição do plasma envolveria o conhecimento das coordenadas de posição $\vec{r}(t)$ e momenta $\vec{p}(t)$ em função do tempo, de cada partícula que o constitui. Dessa forma, a função

$$N_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sum_{1 \leq i \leq N_\alpha^T} \delta[\vec{r} - \vec{r}_i(t)] \delta[\vec{p} - \vec{p}_i(t)] , \quad (3.1)$$

descreve o sistema microscópico de partículas da espécie α . Temos ainda que a quantidade $N_\alpha^T = \int N_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3r d^3p$ é o número total de partículas da espécie α no sistema. Definindo a coordenada do espaço de fase hexadimensional $\vec{X} = (\vec{r}, \vec{p})$, escrevemos a equação (3.1) como $N_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sum_i \delta[\vec{X} - \vec{X}_i(t)]$ e o elemento de volume como $d^6X = d^3r d^3p$. Os campos elétrico e magnético devido às partículas se relacionam pelas equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E}^M = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int N_\alpha(\vec{X}, t) d^6X \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}^M = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{E}^M = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^M}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \vec{B}^M = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^M}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int \frac{\vec{p}}{\gamma} N_\alpha(\vec{X}, t) d^6X , \quad (3.5)$$

onde m_α e q_α são, respectivamente, a massa e a carga da partícula de espécie α , e $\gamma = (1 + \frac{p^2}{m_\alpha^2 c^2})^{1/2}$ é o fator relativístico. O superíndice M serve para enfatizar que os campos elétrico e magnético que estão nas equações de Maxwell acima são campos microscópicos. Os campos macroscópicos são obtidos através de uma média dos campos microscópicos.

As equações de movimento para cada partícula da população α são

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\vec{p}_i}{m_\alpha \gamma^{(i)}} \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{p}_i}{dt} = q_\alpha \left(\vec{E}^M + \frac{\vec{p}_i \times \vec{B}^M}{m_\alpha \gamma^{(i)} c} \right) , \quad (3.6)$$

onde $\gamma^{(i)} = (1 + \frac{p_i^2}{m_\alpha^2 c^2})^{1/2}$ e $i = 1, \dots, N_\alpha^T$. Se a conservação do número de partículas no espaço de fase for satisfeita, teremos:

$$\frac{dN_\alpha(\vec{X}, t)}{dt} = \frac{\partial N_\alpha(\vec{X}, t)}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha \gamma} \cdot \nabla_{\vec{r}} N_\alpha(\vec{X}, t) + q_\alpha \left(\vec{E}^M + \frac{\vec{p} \times \vec{B}^M}{m_\alpha \gamma c} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} N_\alpha(\vec{X}, t) = 0, \quad (3.7)$$

que é a chamada equação de *Klimontovich-Dupree*. Como esta descrição não é muito útil quando se trata de aplicá-la a um sistema com um grande número de partículas, é adequado que se faça uma descrição estatística desse sistema. Note que a função $N_\alpha(\vec{X}, t)$ não é uma função estatística, uma vez que ela diz onde todas as partículas do sistema se localizam no espaço de fase. Uma descrição mais viável seria dada por uma função que fornecesse a *probabilidade* de encontrar as partículas em uma dada região infinitesimal do espaço de fase. Podemos definir uma função distribuição f_N , que contém toda a informação estatística do sistema, incluindo todas as possíveis populações de partículas. Dessa forma,

$$f_N(\vec{X}_{\alpha 1}, \dots, \vec{X}_{\alpha N_\alpha^T}; \vec{X}_{\beta 1}, \dots, \vec{X}_{\beta N_\beta^T}, \dots, t) \prod_{\xi} d^6 X_{\xi 1} \dots d^6 X_{\xi N_\xi^T} \quad (3.8)$$

será a probabilidade de que no instante t , as partículas das populações α, β, \dots do sistema estejam em torno dos pontos $\vec{X}_{\alpha 1}, \dots, \vec{X}_{\alpha N_\alpha^T}; \vec{X}_{\beta 1}, \dots, \vec{X}_{\beta N_\beta^T}, \dots$ no espaço de fase. O número total de partículas do sistema é a soma do número total de partículas de cada população, ou seja, $N = \sum_{\xi} N_{\xi}^T$. Temos também, que a normalização de f_N é dada por

$$\int f_N \prod_{\xi} d^6 X_{\xi 1} \dots d^6 X_{\xi N_\xi^T} = 1 \quad (3.9)$$

Como já foi dito, a distribuição f_N nos fornece o conhecimento estatístico completo do sistema. A probabilidade de se encontrar uma certa partícula de uma dada população α em um ponto do espaço de fase entre \vec{X}_α e $\vec{X}_\alpha + d\vec{X}_\alpha$ sofre a influência de *todas* as demais partículas do meio. Em outras palavras, a descrição estatística do sistema por meio de uma distribuição completa, exigiria o conhecimento de todas as correlações² (de qualquer ordem) entre as partículas.

Distribuições reduzidas podem ser obtidas a partir da f_N . Por exemplo, podemos obter a distribuição de uma única partícula da espécie α integrando a distribuição completa em todas as

²Definidas no decorrer deste capítulo.

coordenadas exceto a da partícula em questão. Definimos a distribuição de uma única partícula como

$$f_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, t) = V \int f_N d^6 X_{\alpha 2} \dots d^6 X_{\alpha N_{\alpha}^T} \prod_{\beta} d^6 X_{\beta 1} \dots d^6 X_{\beta N_{\beta}^T}, \quad (3.10)$$

onde V é o volume total do sistema. Dessa forma teremos que a quantidade

$$\frac{1}{V} f_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, t) d^6 X_{\alpha 1}$$

fornece a probabilidade de encontrar uma dada partícula da população α em um ponto do espaço de fase entre $(\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1})$ e $(\vec{r}_{\alpha 1} + d\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1} + d\vec{p}_{\alpha 1})$. No entanto, como sabemos, a probabilidade de encontrarmos a partícula nessa região pode ser alterada pela presença de uma segunda partícula próxima. A distribuição definida em (3.10) não leva em conta essa interação, que correlaciona o movimento dessas partículas no espaço de fase. Para incluir esse efeito devemos utilizar uma distribuição para duas partículas (de populações α e β), que pode ser definida analogamente à distribuição de partícula única, escrevendo-se

$$f_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, \vec{r}_{\beta 1}, \vec{p}_{\beta 1}, t) = V^2 \int f_N d^6 X_{\alpha 2} \dots d^6 X_{\alpha N_{\alpha}^T} d^6 X_{\beta 2} \dots d^6 X_{\beta N_{\beta}^T} \prod_{\xi} d^6 X_{\xi 1} \dots d^6 X_{\xi N_{\xi}^T}, \quad (3.11)$$

onde analogamente temos que

$$\frac{1}{V^2} f_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1}, \vec{r}_{\beta 1}, \vec{p}_{\beta 1}, t) d^6 X_{\alpha 1} d^6 X_{\beta 1}$$

é a probabilidade de encontrarmos uma partícula da população α entre $(\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1})$ e $(\vec{r}_{\alpha 1} + d\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1} + d\vec{p}_{\alpha 1})$ e simultaneamente uma partícula da população β entre $(\vec{r}_{\beta 1}, \vec{p}_{\beta 1})$ e $(\vec{r}_{\beta 1} + d\vec{r}_{\beta 1}, \vec{p}_{\beta 1} + d\vec{p}_{\beta 1})$. Podemos com esse tipo de raciocínio, obter as distribuições para 3 ou mais partículas.

O valor médio (média de ensemble) de $N_{\alpha}(\vec{X}, t)$ pode ser obtido de f_N através da relação [83]

$$\begin{aligned} \langle N_{\alpha}(\vec{X}, t) \rangle &= \int f_N N_{\alpha}(\vec{X}, t) d^{6N} X \\ &= n_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t), \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $n_\alpha = \frac{N_\alpha^T}{V}$ é a densidade de partículas da espécie α e $d^{6N} X$ o elemento de volume dado por $\prod_\xi d^6 X_{\xi 1} \dots d^6 X_{\xi N_\xi^T}$. Para a média conjunta $\langle N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) \rangle$ podemos demonstrar que

$$\langle N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) \rangle = n_\alpha n_\beta f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) + \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{X} - \vec{X}') f_\alpha(\vec{X}, t), \quad (3.13)$$

onde foi tomado o limite termodinâmico ($V \rightarrow \infty$).

As médias das equações de Maxwell (3.2) a (3.5) são feitas utilizando-se as médias dos campos microscópicos

$$\vec{E} = \langle \vec{E}^M \rangle = \int f_N \vec{E}^M d^{6N} X \quad (3.14)$$

$$\vec{B} = \langle \vec{B}^M \rangle = \int f_N \vec{B}^M d^{6N} X .$$

Logo, quando feita a média nas equações de Maxwell, estas fornecem equações para os campos macroscópicos \vec{E} e \vec{B} em termos da função distribuição de uma única partícula, $f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t)$.

O sistema como um todo é descrito pela distribuição completa f_N , cuja evolução temporal é dada pela equação de *Liouville* (conservação de probabilidade no espaço de fase). No entanto, é muito difícil na prática saber que valor inicial, $f_N|_{t=0}$, tomar para esta distribuição, o que para a função distribuição reduzida de partícula única, por exemplo, normalmente é possível. Portanto, é de interesse prático procurar por uma equação que descreva a evolução temporal das funções distribuição reduzidas. Podemos, uma vez que f_α está relacionada com a média de N_α , tomar a média da equação (3.7), obtendo:

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha \gamma} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) + \frac{q_\alpha}{n_\alpha} \left\langle \left(\vec{E}^M + \frac{\vec{p} \times \vec{B}^M}{m_\alpha \gamma c} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} N_\alpha(\vec{X}, t) \right\rangle = 0 . \quad (3.15)$$

Na equação acima, embora não esteja realmente explícito, está presente a interação entre as partículas do plasma. Essa interação é que leva à existência de correlações entre as partículas. Se as partículas são completamente independentes (não há interação entre elas), a probabilidade de se encontrar uma partícula da população α em um ponto do espaço de fase entre $(\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1})$

e $(\vec{r}_{\alpha 1} + d\vec{r}_{\alpha 1}, \vec{p}_{\alpha 1} + d\vec{p}_{\alpha 1})$ e simultaneamente uma partícula da população β em um ponto entre $(\vec{r}_{\beta 1}, \vec{p}_{\beta 1})$ e $(\vec{r}_{\beta 1} + d\vec{r}_{\beta 1}, \vec{p}_{\beta 1} + d\vec{p}_{\beta 1})$, dada por $\frac{1}{V^2} f_{\alpha\beta}$, pode ser escrita como o produto das probabilidades $\frac{1}{V} f_{\alpha} \frac{1}{V} f_{\beta}$. Neste caso, teremos que $\langle N_{\alpha} N_{\beta} \rangle = \langle N_{\alpha} \rangle \langle N_{\beta} \rangle$. Para melhor visualizarmos a presença da interação entre as partículas na equação (3.15), adiciona-se em ambos os lados da mesma a quantidade $q_{\alpha} \left(\vec{E} + \frac{\vec{p} \times \vec{B}}{m_{\alpha} \gamma c} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{\alpha}$, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} \gamma} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_{\alpha} + q_{\alpha} \left(\vec{E} + \frac{\vec{p} \times \vec{B}}{m_{\alpha} \gamma c} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{\alpha} = & -q_{\alpha} \left[\left\langle \left(\vec{E}^M + \frac{\vec{p} \times \vec{B}^M}{m_{\alpha} \gamma} \right) \cdot \frac{\nabla_{\vec{p}} N_{\alpha}}{n_{\alpha}} \right\rangle \right. \\ & \left. - \left(\vec{E} + \frac{\vec{p} \times \vec{B}}{m_{\alpha} \gamma c} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{\alpha} \right] . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pode-se mostrar que, no caso em que a interação entre as partículas pode ser desprezada, o termo do lado direito de (3.16) é nulo [83]. Na aproximação eletrostática ($\vec{B}^M = 0$) pode-se escrever $\vec{E}^M = -\nabla\varphi^M$. Utilizando-se a equação (3.2), obtemos

$$\varphi^M(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{N_{\alpha}(\vec{r}', \vec{p}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' d^3p' . \quad (3.17)$$

Pode-se mostrar a partir de (3.16) e (3.17) que a equação para f_{α} não é uma equação independente, pois comparece nela a distribuição conjunta $f_{\alpha\beta}$ [83]. Deve-se então procurar obter uma equação de evolução temporal para $f_{\alpha\beta}$. Mostra-se que esta equação também não é independente, comparecendo nela a distribuição de três partículas. Pode-se mostrar mais genericamente que, na equação de evolução temporal para a distribuição reduzida de $n - 1$ ($n < N$) partículas, comparecerá a distribuição reduzida para n partículas, formando uma hierarquia de equações chamada de hierarquia BBGKY (Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon) [84].

Podemos expressar as distribuições de mais de uma partícula em termos de produtos de funções distribuição de partícula única e de correlações, procedimento bastante usual na mecânica estatística [85]. Por exemplo, as distribuições de duas e três partículas podem ser, respectivamente, escritas como:

$$f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) = f_{\alpha}(\vec{X}, t) f_{\beta}(\vec{X}', t) + g_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta\gamma}(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'', t) = & f_{\alpha}(\vec{X}, t) f_{\beta}(\vec{X}', t) f_{\gamma}(\vec{X}'', t) \\ & + f_{\alpha}(\vec{X}, t) g_{\beta\gamma}(\vec{X}', \vec{X}'', t) + f_{\beta}(\vec{X}', t) g_{\alpha\gamma}(\vec{X}, \vec{X}'', t) \\ & + f_{\gamma}(\vec{X}'', t) g_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) + g_{\alpha\beta\gamma}(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'', t) . \end{aligned} \quad (3.19)$$

As quantidades $g_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta\gamma}$ são as correlações dupla e tripla, respectivamente. Em um sistema composto por partículas estatisticamente independentes, todas as correlações de qualquer ordem são nulas.

Assim como é inviável trabalhar diretamente com uma distribuição completa f_N , também o é tentar uma solução de uma cadeia infinita de equações estatísticas, tal como a hierarquia BBGKY. No entanto, existem aproximações que podem ser feitas para as correlações, de forma que se possa obter um conjunto fechado de equações para as distribuições reduzidas. Por exemplo, em um gás neutro e rarefeito, existe um comprimento característico r_0 dentro do qual é obrigatório considerar a interação entre as partículas do gás. No entanto, sendo o gás suficientemente rarefeito, o comprimento r_0 será muito menor do que a distância média entre as partículas do gás, dada por $n^{-1/3}$, onde n é o número de partículas por unidade de volume (densidade de partículas). É razoável supor que as correlações nesse caso são da ordem de $(nr_0^3)^{k-1}$, onde k é a ordem da correlação. Por exemplo, teríamos $g_{\alpha\beta} \sim nr_0^3$ e $g_{\alpha\beta\gamma} \sim (nr_0^3)^2$, o que mostra que em (3.18) e (3.19) teremos (sendo $nr_0^3 \ll 1$) as distribuições conjuntas dadas pelo produto das distribuições independentes, mais os termos relativos às correlações, considerados pequenos. Podemos fechar a cadeia de equações estatísticas desprezando o efeito da correlação ternária $g_{\alpha\beta\gamma}$, por exemplo.

Em um plasma também é possível desprezar o efeito das correlações e fechar a cadeia de equações estatísticas. Para melhor visualizar isso, inicialmente imaginemos um plasma composto por elétrons e íons. Supondo que possamos considerar os íons como fixos, um determinado íon gerará um potencial de forma a atrair os elétrons que o circundam. Pode-se mostrar [83] que os elétrons que estão a uma distância deste íon muito superior a um dado comprimento λ_D , não "sentirão" a presença do mesmo. Isto ocorre devido à blindagem da carga do íon que gera o potencial atrativo, feita pelos elétrons que estão mais próximos dele. O comprimento λ_D é chamado de comprimento de *Debye* dos elétrons, dado por

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_e e^2}}, \quad (3.20)$$

onde n_e é a densidade de elétrons e k_B é a constante de Boltzmann. Esse comprimento em torno do íon define uma esfera, centrada no mesmo, cujo raio é o comprimento de Debye. Essa esfera

é chamada *esfera de Debye*.

No caso em que a energia térmica do elétron é muito maior do que a energia de interação Coulombiana entre ele e os outros componentes do plasma, podemos tratá-lo como sendo aproximadamente uma partícula livre. Podemos escrever que

$$\frac{\text{Módulo da energia média de interação entre dois elétrons}}{\text{Energia cinética média dos elétrons}} \propto \frac{(1/n_e^{-1/3})}{T_e} \ll 1 \quad (3.21)$$

Logo, podemos desconsiderar a interação entre os elétrons quando $\frac{n_e^{1/3}}{T_e} \ll 1$. Definimos então a quantidade $N_D = \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 n_e \propto T_e^{3/2} / n_e^{1/2}$ como o número de elétrons dentro da respectiva esfera de Debye e o parâmetro σ_e como sendo

$$\sigma_e = \frac{1}{N_D} \sim \frac{n_e^{1/2}}{T_e^{3/2}} \quad (3.22)$$

Se a condição (3.21) é satisfeita, podemos escrever que

$$\frac{n_e^{1/3}}{T_e} = \sigma_e^{2/3} \ll 1,$$

ou seja, o fato de existirem muitos elétrons dentro de uma esfera de Debye, não é inconsistente com a afirmação de que podemos desprezar a interação entre eles se comparada à sua alta energia térmica. Logo, ao contrário do gás neutro citado anteriormente, se o plasma for suficientemente "quente", mesmo que a distância média entre os elétrons seja apreciavelmente menor do que o seu comprimento de Debye, podemos desprezar as interações entre eles. Neste caso, podemos supor, em analogia com o caso do gás neutro, que as correlações de k elétrons serão da ordem de $(\sigma_e)^{k-1}$. Sendo $\sigma_e \ll 1$, podemos fechar a cadeia de equações estatísticas desprezando as correlações de mais alta ordem. Na próxima subseção, será introduzida a equação de *Vlasov*, que é a equação cinética de ordem zero, onde são desprezados as colisões e os efeitos de todas as correlações.

3.2.2 A equação de Vlasov

A mais simples aproximação que pode ser feita na cadeia de equações estatísticas é aquela em que desprezamos todas as possíveis correlações entre as partículas. Neste caso, a equação cinética do plasma, chamada equação de *Vlasov*, pode ser escrita como

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha \gamma} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_\alpha + q_\alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{p} \times \vec{B}}{m_\alpha \gamma c} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_\alpha = 0 . \quad (3.23)$$

A aproximação seguinte é aquela em que é levada em conta a correlação entre duas partículas, que aparece em um termo adicionado à equação (3.23), conhecido como *termo de colisões* [83]. A equação resultante é chamada de equação de Boltzmann. Se uma perturbação é feita no plasma em equilíbrio (através da injeção de uma onda, por exemplo), haverá, após cessar a perturbação, um tempo necessário para o mesmo relaxar novamente para o equilíbrio (tempo de relaxação), através das colisões que ocorrerão entre as partículas. Se o plasma for "quente" e rarefeito o suficiente, o tempo de relaxação será bastante maior do que o inverso da frequência das oscilações características do plasma. Neste caso podemos desprezar o efeito de colisões e a equação de Vlasov se torna uma boa aproximação estatística para o plasma. Em outras palavras, se o período típico das oscilações do plasma for muito menor do que o tempo de relaxação, e se estivermos investigando eventos que ocorrem em escalas de tempo da ordem desse período de oscilações do plasma, podemos dizer que tais eventos ocorrem antes que as partículas do plasma possam colidir.

Juntamente com as equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p \quad (3.24)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.25)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.26)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int \frac{\vec{p}}{\gamma} f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p , \quad (3.27)$$

a equação (3.23) forma o sistema *Vlasov-Maxwell* de equações. As densidades de corrente e carga estão presentes nas equações acima, escritas em termos da função distribuição de uma partícula, ou seja

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{\vec{p}}{\gamma m_{\alpha}} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p \quad (3.28)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p . \quad (3.29)$$

O sistema de equações de Vlasov-Maxwell, quando puder ser linearizado, pode ser abordado utilizando-se transformadas de Fourier. Isto é o que será feito na próxima subseção.

3.2.3 Linearização do sistema de Vlasov-Maxwell

Consideremos um plasma composto por duas populações distintas de partículas: elétrons e íons. Nesse caso, as equações (3.23) a (3.27) formarão um conjunto acoplado e não linear de equações para $\alpha = e$ (elétrons) e para $\alpha = i$ (íons). No entanto, o estudo que faremos se restringe a um intervalo de frequências estreito em torno da frequência de cíclotron eletrônica Ω_e . Como $\Omega_e \approx 2000 \Omega_i$, durante o tempo típico de duração dos eventos em que estamos interessados ($\approx \Omega_e^{-1}$), os íons praticamente não se movem. Logo, podemos considerar apenas $\alpha = e$ em (3.23), ou seja, pode-se fazer uma boa aproximação do problema desprezando a dinâmica dos íons. Embora eles garantam a quase-neutralidade do plasma, em tempos da ordem de Ω_e^{-1} eles podem ser considerados apenas como um pano de fundo no processo que gera a onda de elétron-cíclotron.

Escrevendo f_e , \vec{E} e \vec{B} como uma soma de seus valores no equilíbrio mais uma perturbação,

$$f_e(\vec{r}, \vec{p}, t) = n_{e0} f_{e0}(\vec{p}) + \epsilon f_{e1}(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (3.30)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 + \epsilon \vec{E}_1(\vec{r}, t) \quad (3.31)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 + \epsilon \vec{B}_1(\vec{r}, t) , \quad (3.32)$$

onde $\epsilon \ll 1$ é um parâmetro usado para indicar que a perturbação tem módulo bem menor do que a parte não perturbada³. O índice "0" indica o valor da grandeza no equilíbrio e o índice "1" a perturbação. As grandezas no equilíbrio devem satisfazer as equações de ordem zero em ϵ , obtidas inserindo-se (3.30) a (3.32) em (3.23) a (3.27) e separando o sistema de equações de acordo com os termos de ordem ϵ^0 e ϵ^1 . Na aproximação linear não serão considerados os termos

³Caso em que a teoria linear pode ser usada como uma boa aproximação.

de ordem ϵ^2 ou superior, pois estes podem ser considerados muito pequenos em relação ao termo de ordem zero. Nessa aproximação então, apenas teremos termos lineares na perturbação.

Obtemos então, da forma dita acima, a equação de Vlasov em ordem ϵ^0

$$\underbrace{\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_e \gamma} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_{e0}}_0 - e \left(\vec{E}_0 + \frac{\vec{p} \times \vec{B}_0}{m_e \gamma c} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e0} = 0, \quad (3.33)$$

juntamente com as equações de Maxwell na mesma ordem

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 = -4\pi e (n_{e0} - n_{i0}) \quad (3.34)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (3.35)$$

$$\nabla \times \vec{E}_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \quad (3.36)$$

$$\nabla \times \vec{B}_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} - \underbrace{\frac{4\pi e n_{e0}}{m_e c} \int \frac{\vec{p}}{\gamma} f_{e0} d^3 p}_{\frac{4\pi}{c} \vec{J}_{e0}} + \underbrace{\frac{4\pi e n_{i0}}{m_i c} \int \frac{\vec{p}}{\gamma_i} f_{i0} d^3 p}_{\frac{4\pi}{c} \vec{J}_{i0}}. \quad (3.37)$$

Na equação (3.33) os dois primeiros termos são cada um nulos, já que a função distribuição de equilíbrio apenas depende do momentum \vec{p} da partícula.

Como já foi dito anteriormente, aqui aparece explicitamente a contribuição dos íons para a quase-neutralidade do plasma ($n_{i0} = n_{e0}$) no equilíbrio. Escolhendo $\vec{E}_0 = 0$, implicará que \vec{B}_0 é estacionário, segundo a equação (3.36). Podemos ainda escolher um campo magnético ambiente uniforme, apontando na direção z , sentido positivo ($\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$). Segundo essa escolha, no equilíbrio não deve existir corrente líquida no plasma ($\vec{J}_{e0} + \vec{J}_{i0} = 0$). Logo, os dois últimos termos do lado direito de (3.37) se cancelam. Nesse caso, o sistema possui uma simetria azimutal e a função distribuição eletrônica não dependerá da variável φ , mostrada na figura 3.1.

Em ordem ϵ^1 , obtemos

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_e \gamma} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_{e1} - \frac{e}{m_e \gamma c} (\vec{p} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e1} = e n_{e0} \left(\vec{E}_1 + \frac{\vec{p} \times \vec{B}_1}{m_e \gamma c} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e0} \quad (3.38.a)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = -4\pi e \int f_{e1} d^3p \quad (3.38.b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (3.38.c)$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (3.38.d)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} - \frac{4\pi e}{m_e c} \int \frac{\vec{p}}{\gamma} f_{e1} d^3p, \quad (3.38.e)$$

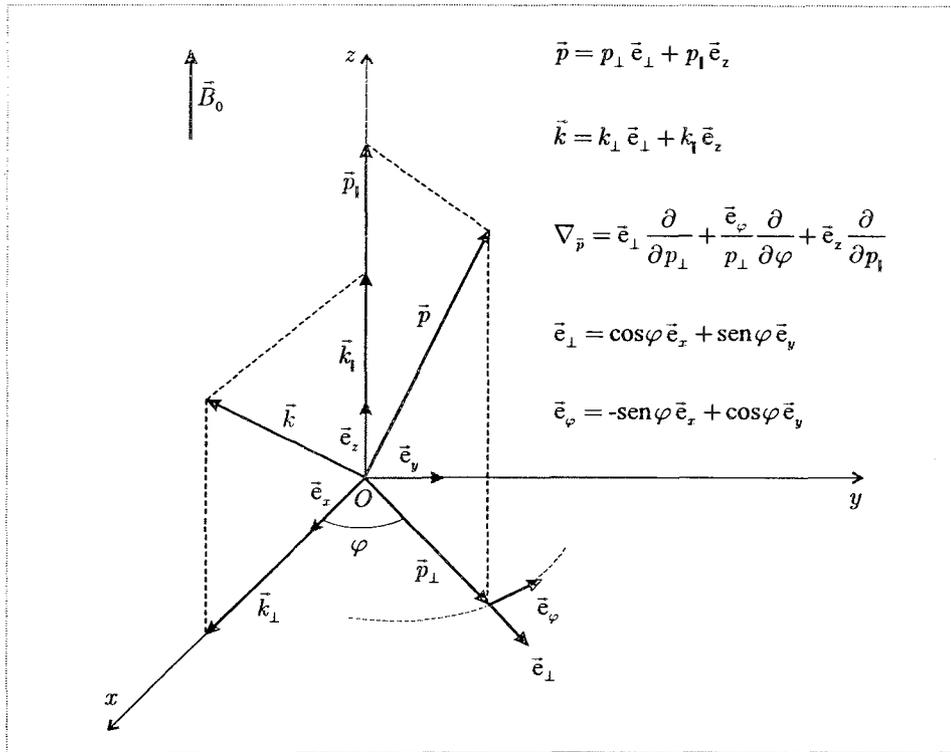


FIGURA 3.1: Sistema de coordenadas utilizado.

Da equação (3.33) obtemos que

$$e \left(\frac{\vec{p} \times \vec{B}_0}{m_e \gamma c} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e0} = 0 \quad (3.39)$$

Utilizando-se o sistema de coordenadas mostrado na figura 3.1 podemos escrever a relação (3.39) como

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.40)$$

ou seja, a função distribuição eletrônica de equilíbrio possui simetria azimutal, como dito anteriormente. Note que a perturbação f_{e1} não terá a mesma simetria, uma vez que fora do equilíbrio o plasma não necessariamente possui simetria azimutal.

Podemos transformar o sistema composto pelas equações (3.38) em um sistema de equações algébricas, aplicando transformadas de Fourier no espaço e tempo:

$$\mathcal{F}_e(\vec{k}, \vec{p}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int f_{e1}(\vec{r}, \vec{p}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3r \quad (3.41)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \vec{E}_1(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3r \quad (3.42)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_1(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \vec{B}_1(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3r. \quad (3.43)$$

Aplicando-se (3.41) a (3.43) ao conjunto de equações (3.38), é obtido um sistema de equações algébricas para as componentes de Fourier \mathcal{F}_e , $\vec{\mathcal{E}}_1$ e $\vec{\mathcal{B}}_1$. Dessa forma, pode-se mostrar que

$$-i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \mathcal{F}_e - \frac{e}{c} (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_{\vec{p}} \mathcal{F}_e = n_{e0} e \left(\vec{\mathcal{E}}_1 + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{\mathcal{B}}_1 \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e0}(\vec{p}) \quad (3.44.a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_1 = i4\pi e \int \mathcal{F}_e d^3p \quad (3.44.b)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}}_1 = 0 \quad (3.44.c)$$

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}_1 = \frac{\omega}{c} \vec{\mathcal{B}}_1 \quad (3.44.d)$$

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{B}}_1 + \frac{\omega}{c} \vec{\mathcal{E}}_1 = i4\pi \frac{e}{c} \int \vec{v} \mathcal{F}_e d^3p, \quad (3.44.e)$$

sendo $\vec{v} = \vec{p}/(m_e \gamma)$. Escrevendo-se a equação (3.44.a) no sistema de coordenadas mostrado na figura 3.1, obtemos:

$$-i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \mathcal{F}_e + \frac{\Omega_e}{\gamma} \frac{\partial \mathcal{F}_e}{\partial \varphi} = n_{e0} e \left(\vec{\mathcal{E}}_1 + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_1 \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e0}(\vec{p}) \quad . \quad (3.45)$$

Pode-se mostrar que [86]:

$$\mathcal{F}_e(\vec{k}, \vec{p}, \omega) = i n_{e0} e e^{-ib \sin \varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{a}_n \cdot \vec{\mathcal{E}}_1(\vec{k}, \omega)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{n \Omega_e}{\gamma}} e^{in\varphi} \quad , \quad (3.46)$$

onde:

$$a_{nx} = \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\parallel}} \right] \frac{n}{b} J_n(b) \quad (3.47)$$

$$a_{ny} = -i \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\parallel}} \right] \frac{n}{b} J'_n(b) \quad (3.48)$$

$$a_{nz} = \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\parallel}} J_n(b) + \left(\frac{k_{\perp} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\parallel}} \right) \frac{n}{b} J_n(b) \quad , \quad (3.49)$$

onde p_{\parallel} e p_{\perp} são, respectivamente, as componentes paralela e perpendicular ao campo \vec{B}_0 do momentum do elétron. Analogamente, k_{\parallel} e k_{\perp} são, respectivamente, as componentes paralela e perpendicular ao campo do vetor de onda. Para a obtenção de (3.46) foram usadas as seguintes identidades:

$$e^{\pm ib \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(b) e^{\pm in\varphi} \quad (3.50)$$

$$\sin \varphi e^{\pm ib \sin \varphi} = \mp i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J'_n(b) e^{\pm in\varphi} \quad (3.51)$$

$$\cos \varphi e^{\pm ib \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{b} J_n(b) e^{\pm in\varphi} \quad , \quad (3.52)$$

onde $b = k_{\perp} r_L$ e $r_L = p_{\perp} / (m_e \Omega_e)$ é o raio de Larmor dos elétrons. Nas expressões (3.50) a (3.52), $J_n(b)$ é a função de Bessel de ordem n e $J'_n(b) = \frac{d}{db} J_n(b)$ a sua derivada. A relação (3.46) é de extrema importância na obtenção das componentes do tensor dielétrico do plasma magnetizado.

3.2.4 O tensor dielétrico e a relação de dispersão

Escrevendo as equações de Maxwell para as perturbações em termos do vetor deslocamento elétrico

$$\vec{D}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \vec{J}_1(\vec{r}, t') dt' \quad (3.53)$$

obtém-se:

$$\nabla \cdot \vec{D}_1 = 0 \quad (3.54.a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (3.54.b)$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (3.54.c)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t} \quad (3.54.d)$$

Para que este sistema possa ser estudado, precisamos ainda fornecer informações a respeito da interação do campo eletromagnético com o meio onde este campo é aplicado. Sendo válida a teoria da resposta linear [85] neste caso, pode-se supor que

$$\vec{J}_1(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \vartheta(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \cdot \vec{E}_1(\vec{r}', t') \quad (3.55)$$

$$\vec{D}_1(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \xi(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \cdot \vec{E}_1(\vec{r}', t'), \quad (3.56)$$

onde $\vartheta(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ é o tensor condutividade do plasma e $\xi(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ o tensor dielétrico. As expressões (3.55) e (3.56) levam em conta uma possível anisotropia do meio, o que acarreta que a condutividade e as propriedades dielétricas não sejam grandezas escalares mas sim tensoriais. Além disso, o valor da densidade de corrente (ou vetor deslocamento elétrico) depende em geral do valor do campo em todas as posições \vec{r}' diferentes de \vec{r} e em cada instante de tempo t' diferente de t e anterior a este, ou seja, o plasma pode ser não homogêneo e não estacionário.

Escrevemos a densidade de corrente, o vetor deslocamento elétrico e o campo elétrico em termos de suas componentes de Fourier:

$$\vec{J}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int \vec{J}_1(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d^3k \quad (3.57)$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int \vec{E}_1(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d^3k \quad (3.58)$$

$$\vec{D}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int \vec{D}_1(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d^3k . \quad (3.59)$$

Quando o meio puder ser considerado homogêneo (ou localmente homogêneo) e estacionário (ou seja, $\vec{\vartheta}$ e $\vec{\epsilon}$ dependem somente de $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ e $\tau = t - t'$), pode-se mostrar, usando (3.55) e (3.56), que:

$$\vec{J}_1(\vec{k}, \omega) = \left(\int_0^\infty d\tau \int \vec{\vartheta}(\vec{R}, \tau) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{R}-\omega\tau)} d^3R \right) \cdot \vec{E}_1(\vec{k}, \omega) = \vec{\vartheta}_{\vec{k}, \omega} \cdot \vec{E}_1(\vec{k}, \omega) \quad (3.60)$$

$$\vec{D}_1(\vec{k}, \omega) = \left(\int_0^\infty d\tau \int \vec{\epsilon}(\vec{R}, \tau) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{R}-\omega\tau)} d^3R \right) \cdot \vec{E}_1(\vec{k}, \omega) = \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \omega} \cdot \vec{E}_1(\vec{k}, \omega) , \quad (3.61)$$

onde $\vec{\vartheta}_{\vec{k}, \omega}$ e $\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \omega}$ são, respectivamente, a transformada de Fourier do tensor condutividade e do tensor dielétrico do plasma. Existe uma relação entre as transformadas de Fourier desses dois tensores, a qual pode ser obtida da transformada de Fourier da equação (3.53). Obtém-se que

$$\vec{D}_1(\vec{k}, \omega) = \vec{\epsilon}_1(\vec{k}, \omega) + \frac{4\pi i}{\omega} \vec{J}_1(\vec{k}, \omega) , \quad (3.62)$$

de onde, com o uso de (3.60) e (3.61) chegamos à relação citada:

$$\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \omega} = \vec{I} + \frac{4\pi i}{\omega} \vec{\vartheta}_{\vec{k}, \omega} , \quad (3.63)$$

onde \vec{I} é o tensor identidade, cujas componentes são $(\vec{I})_{ij} = \delta_{ij}$. De (3.28) podemos escrever que

$$\vec{J}_1(\vec{k}, \omega) = -e \int \frac{\vec{p}}{m_e \gamma} \mathcal{F}_e(\vec{k}, \vec{p}, \omega) d^3p , \quad (3.64)$$

que, juntamente com (3.46) e (3.63), fornece uma expressão para as componentes da transformada de Fourier do tensor dielétrico de um plasma magnetizado

$$\begin{aligned}
 (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{ij} &= \delta_{ij} + m_e X_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3p \left[(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\parallel}} \right] \frac{v_{\perp} \Pi_{ni} \Pi_{nj}^*}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{n\Omega_e}{\gamma}} \\
 &\quad + m_e \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \delta_{iz} \delta_{jz} \int d^3p v_{\parallel} \left(\frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\parallel}} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{e0}}{\partial p_{\perp}} \right), \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \vec{\Pi}_n &= \frac{n}{b} J_n(b) \vec{e}_x + i J'_n(b) \vec{e}_y + \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(b) \vec{e}_z \\
 X_e &= \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}.
 \end{aligned}$$

Na expressão (3.65) aparecem integrais do tipo

$$\int d^3p \frac{G(\vec{p})}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{n\Omega_e}{\gamma}}, \quad (3.66)$$

que podem ser separadas via fórmula de Plemelj em uma parte principal (que exclui os pólos) mais uma parte imaginária, relacionada à ressonância das partículas com a onda. A fórmula de Plemelj diz que

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - y + i\xi} = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - y} - i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - y) dx, \quad (3.67)$$

onde:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{y-i\xi} + \int_{y+i\xi}^{+\infty} \right].$$

Aplicando-se a fórmula de Plemelj à integral que aparece em (3.66), obtemos

$$\int d^3p \frac{G(\vec{p})}{(\omega + i\omega_i) - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{n\Omega_e}{\gamma}} = P \int d^3p \frac{G(\vec{p})}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{n\Omega_e}{\gamma}} - i\pi \int d^3p G(\vec{p}) \delta\left(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{n\Omega_e}{\gamma}\right), \quad (3.68)$$

onde, seguindo a prescrição de Landau, a frequência ω deve ter uma parte imaginária pequena

e positiva. Dessa forma, pode-se separar a integral de (3.66) segundo a fórmula de Plemelj, obtendo as partes hermiteana e anti-hermiteana do tensor $\epsilon_{\vec{k},\omega}^{\pm}$, onde

$$(\epsilon_{\vec{k},\omega}^{\pm})_{\alpha\beta}^h = \frac{(\epsilon_{\vec{k},\omega}^{\pm})_{\alpha\beta} + (\epsilon_{\vec{k},\omega}^{\pm})_{\beta\alpha}^*}{2}$$

é a parte hermiteana e

$$(\epsilon_{\vec{k},\omega}^{\pm})_{\alpha\beta}^{ah} = \frac{(\epsilon_{\vec{k},\omega}^{\pm})_{\alpha\beta} - (\epsilon_{\vec{k},\omega}^{\pm})_{\beta\alpha}^*}{2i}$$

é a parte anti-hermiteana ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$). Pode-se mostrar que a última desempenha um papel fundamental na amplificação ou absorção da energia de ondas eletromagnéticas [85, 87]. O processo de absorção ou amplificação das ondas depende basicamente da forma da função distribuição de equilíbrio e da condição $\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{n\Omega_e}{\gamma} = 0$, denominada condição de ressonância, a qual será abordada na subseção 3.4.

As componentes da transformada de Fourier do tensor dielétrico aparecem ainda na relação de dispersão para o plasma magnetizado. Combinando-se as equações (3.38.d), (3.38.e) e (3.55), obtemos:

$$\nabla^2 \vec{E}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}_1) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{G}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \cdot \vec{E}_1(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \quad (3.69)$$

Tomando-se a transformada de Fourier:

$$-k^2 \vec{E}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1 + \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_1) = -i\omega \frac{4\pi}{c^2} \vec{J}_1 \quad (3.70)$$

Usando-se (3.60) e (3.63) obtém-se

$$-k^2 \vec{E}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\vec{k},\omega}^{\pm} \cdot \vec{E}_1 + \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_1) = 0 \quad (3.71)$$

Podemos mostrar, a partir desta equação, que

$$\sum_{\beta} \left[\frac{\omega^2}{c^2} (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{\alpha\beta} - k^2 \delta_{\alpha\beta} + k_{\alpha} k_{\beta} \right] \mathcal{E}_{1\beta} = 0 \quad . \quad (3.72)$$

Em (3.72) estão compactadas três equações para cada $\alpha = x, y, z$. A soma em β ($\beta = x, y, z$), para cada α , fornece um sistema homogêneo de equações nas incógnitas \mathcal{E}_{1x} , \mathcal{E}_{1y} e \mathcal{E}_{1z} . Esse sistema somente admitirá solução não trivial quando for nulo o determinante da matriz cujos elementos são os coeficientes das incógnitas. Dessa forma, deve ser satisfeita a condição:

$$\det \left[\frac{\omega^2}{c^2} (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{\alpha\beta} - k^2 \delta_{\alpha\beta} + k_{\alpha} k_{\beta} \right] = 0 \quad . \quad (3.73)$$

Colocando-se ω^2/c^2 em evidência, notando que segundo o sistema de coordenadas da figura 3.1 o índice de refração \vec{N} é dado por $\vec{N} = \vec{k}c/\omega = (N_{\perp}, 0, N_{\parallel})$, obtém-se

$$\Lambda = \det[\mathbf{M}] = 0 \quad , \quad (3.74)$$

onde:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{xx} - N^2 + N_{\perp}^2 & (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{xy} & (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{xz} + N_{\perp} N_{\parallel} \\ (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{yx} & (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{yy} - N^2 & (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{yz} \\ (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{zx} + N_{\perp} N_{\parallel} & (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{zy} & (\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega})_{zz} - N^2 + N_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.75)$$

A relação (3.74) é chamada relação de dispersão e a partir dela se obtém os modos possíveis de oscilação de um plasma magnetizado e homogêneo. De (3.74) pode-se obter uma relação entre \vec{N} e ω , ou seja, ela fornece o vetor de onda (ou o índice de refração) com o qual a mesma se propagará no plasma em função da frequência ω da onda.

Nota-se a importância do conhecimento adequado e consistente das componentes da transformada de Fourier do tensor dielétrico no cálculo do índice de refração do plasma. Todas elas estão presentes na relação de dispersão, o que torna necessário conhecê-las explicitamente. Como mostra (3.65), o tensor dielétrico pode ser conhecido se conhecermos a função distribuição eletrônica de equilíbrio.

3.3 Expansões em raio de Larmor para o tensor dielétrico

A expressão (3.65) para as componentes do tensor dielétrico têm validade ampla. Qualquer plasma que obedeça as condições impostas até aqui, pode ser descrito pelo tensor definido por (3.65). No entanto, para tratar numericamente o problema, (3.65) deve ser reescrita. O procedimento matemático utilizado para isso incluirá todas as ordens possíveis em raio de Larmor, por meio do uso das seguintes expressões [88] para as funções de Bessel e suas derivadas:

$$J_n^2(b) = \sum_{m=0}^{+\infty} a(n, m)(b^2)^{n+m} \quad (3.76.a)$$

$$J_n(b)J'_n(b) = \sum_{m=0}^{+\infty} a(n, m)(n+m)b(b^2)^{n+m-1} \quad (3.76.b)$$

$$J_n'^2(b) = \sum_{m=0}^{+\infty} d(n, m)(b^2)^{n+m-1}, \quad (3.76.c)$$

onde:

$$a(n, m) = \frac{(-1)^m [2(n+m)]! \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+m)}}{[(n+m)!]^2 (2n+m)! m!},$$

$$d(n, m) = \begin{cases} a(1, m-2) & (n=0) \\ \frac{1}{4}[a(n-1, m) + a(n+1, m-2) - 2\frac{n+m-1}{n+m}a(n, m-1)] & (n > 0) \end{cases},$$

$$\frac{1}{(-m)!} = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Com o uso das expressões (3.76), pode-se reescrever (3.65) na seguinte forma:

$$(\vec{\epsilon}_{\vec{k}, \omega})_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{iz}\delta_{jz} e_{zz} + N_{\perp}^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} \chi_{ij} \quad (3.77.a)$$

$$e_{zz} = X_e \int d^3u \frac{u_{\parallel} \partial f_{e0} / \partial u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} \quad (3.77.b)$$

$$\chi_{ij} = \frac{X_e}{Y_e^{\delta_{iz} + \delta_{jz}}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_e}\right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m s_{ij}(n, m) I(n, m, \delta_{iz} + \delta_{jz}) \quad (3.77.c)$$

onde:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{\vec{p}}{m_e c} \\ Y_e &= \frac{\Omega_e}{\omega}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I(n, m, h) &= \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2m-1} \mathcal{L} f_{e0}}{\gamma - n Y_e - N_{\parallel} u_{\parallel}} \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{11}(n, m) &= n^2 a(|n|, m - |n|) \\ s_{12}(n, m) &= -i m n a(|n|, m - |n|) = -s_{21}(m, n) \\ s_{13}(n, m) &= n a(|n|, m - |n|) = s_{31}(m, n) \\ s_{22}(n, m) &= d(|n|, m - |n|) \\ s_{23}(n, m) &= i m a(|n|, m - |n|) = -s_{32}(m, n) \\ s_{33}(n, m) &= a(|n|, m - |n|) .\end{aligned}$$

Estas expressões podem ser aplicadas a qualquer função distribuição que satisfaça as condições de equilíbrio impostas neste trabalho. Mais adiante, quando for apresentado um modelo físico para a região fonte da AKR, será postulada uma forma para a distribuição eletrônica de equilíbrio f_{e0} .

3.4 A condição de ressonância

Na relação (3.68) notamos que a parte imaginária será não nula apenas para os valores de momentum em que o argumento da função delta de Dirac $\delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{n\Omega_e}{\gamma})$ se anula. Pode-se mostrar que a parte anti-hermiteana do tensor dielétrico contém apenas integrais deste tipo, denominadas integrais ressonantes. Os elétrons cujo momentum satisfizer a condição

$$\gamma - n Y_e - N_{\parallel} u_{\parallel} = 0 , \quad (3.78)$$

poderão amplificar ou absorver a radiação que se propaga no plasma. O fato de absorver ou

amplificar a energia das ondas depende da forma da função distribuição de equilíbrio que estatisticamente descreve os elétrons, como veremos na seção 3.5. Em (3.78) foi usada a condição de ressonância em termos do momentum adimensional \bar{u} como aparece em (3.77).

Reescrevendo (3.78), obtemos

$$\bar{\omega} = \frac{n\Omega_e}{\gamma} + k_{\parallel}v_{\parallel} , \quad (3.79)$$

onde $\bar{\omega}$ é a frequência ressonante. Se a propagação da onda é perpendicular ao campo magnético externo ($k_{\parallel} = 0$) e se não levamos em conta os efeitos relativísticos no movimento térmico dos elétrons ($\gamma = 1$), a ressonância entre as partículas e a onda se daria quando a frequência da onda fosse igual a um múltiplo inteiro da frequência de cíclotron eletrônica ($\bar{\omega} = n\Omega_e$), sendo o harmônico fundamental $n = 1$, em geral, o valor para o qual a amplificação ou absorção são mais significativas. Logo, a absorção ou amplificação da energia da onda se daria com mais eficácia para ondas com frequência igual a exatamente Ω_e . Assim, a região de frequências para as quais existe ressonância teria uma largura nula em torno de Ω_e . Quando o efeito relativístico é levado em conta, a frequência ressonante nesse caso será $\bar{\omega} = \frac{n\Omega_e}{\gamma}$, ou seja, dependendo do valor de γ ($\gtrsim 1$), a ressonância se dará para frequências menores ou da ordem de Ω_e , fazendo com que a região de frequências onde tal ressonância pode ocorrer se alargue. Tal alargamento pode ser estimado se aproximarmos⁴ γ por $1/\gamma \approx 1 - v_{te}^2/(2c^2)$, onde $v_{te} = \sqrt{k_B T_e/m_e}$ é a velocidade térmica dos elétrons, que é também uma medida da largura da função distribuição eletrônica. Dessa forma, o alargamento devido ao efeito relativístico no movimento dos elétrons é estimado como

$$\Delta\omega_{\text{REL}} = \left| \frac{n\Omega_e}{\gamma} - n\Omega_e \right| \approx n\Omega_e \left(\frac{v_{te}^2}{c^2} \right) .$$

Quando a propagação da onda é oblíqua ($k_{\parallel} \neq 0$) o termo $k_{\parallel}v_{\parallel}$ que aparece em (3.79) também contribui no sentido de modificar a frequência ressonante, diminuindo a mesma se $k_{\parallel}v_{\parallel} < 0$ (partícula movendo-se em sentido oposto ao da onda) ou aumentando se $k_{\parallel}v_{\parallel} > 0$ (partícula movendo-se no mesmo sentido da onda). Este termo aparece devido ao efeito Doppler longitudinal. O alargamento devido ao efeito Doppler pode ser estimado como sendo

⁴Tal aproximação tem validade quando o plasma puder ser considerado fracamente relativístico, ou seja, $v_{te} \ll c$. Este é o caso do plasma estudado neste trabalho.

$$\Delta\omega_{\text{DOP}} = \pm |k_{\parallel} v_{\parallel}| \approx \pm \frac{n\Omega_e}{c} \underbrace{\frac{|k_{\parallel}| c}{n\Omega_e}}_{\approx |N_{\parallel}|} v_{te} \approx \pm n\Omega_e \frac{v_{te}}{c} |N_{\parallel}|,$$

onde o sinal positivo indica que a partícula e a onda estão se movendo em sentidos opostos e o negativo que estão se movendo no mesmo sentido.

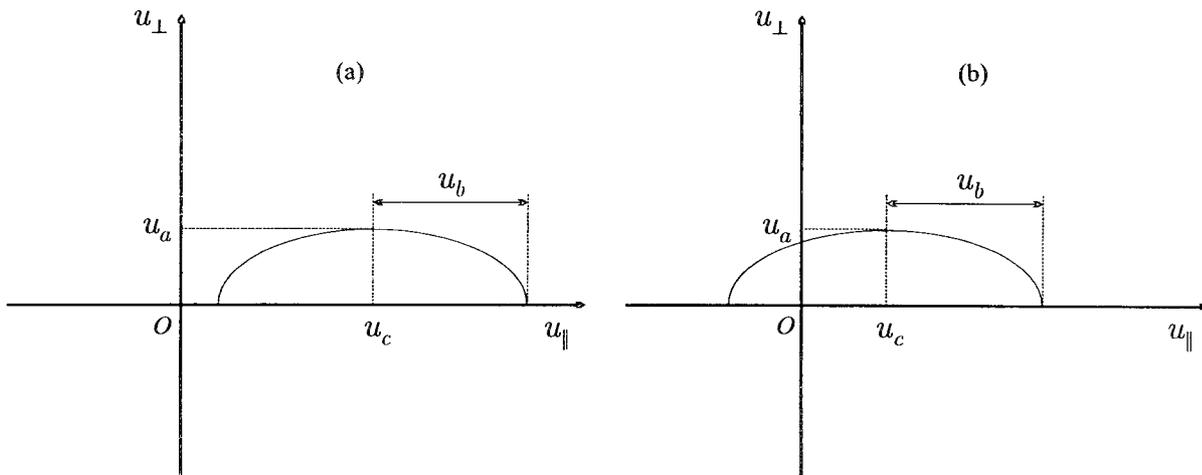


FIGURA 3.2: A elipse ressonante para (a) $\omega > n\Omega_e$ e (b) $\omega < n\Omega_e$.

Como dito no capítulo anterior, no local onde a AKR é gerada, a propagação é aproximadamente perpendicular ao campo magnético local. É razoável então supor que N_{\parallel} está contido no intervalo $0 < N_{\parallel} < 1$ para todos os pontos da cavidade auroral onde a onda se propaga. Neste caso, pode-se reescrever (3.78), usando $\gamma = (1 + u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2)^{1/2}$. Obtemos

$$u_{\perp}^2 + (1 - N_{\parallel}^2)u_{\parallel}^2 - 2nY_e N_{\parallel}u_{\parallel} = n^2 Y_e - 1, \quad (3.80)$$

com a condição adicional de que $u_{\perp} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \geq 0$. A partir de (3.80) pode-se mostrar que

$$\frac{u_{\perp}^2}{u_a^2} + \frac{(u_{\parallel} - u_c)^2}{u_b^2} = 1, \quad (3.81)$$

onde:

$$u_a^2 = \frac{n^2 Y_e^2}{1 - N_{\parallel}^2} - 1 \quad (3.82.a)$$

$$u_b^2 = \frac{u_a^2}{1 - N_{\parallel}^2} \quad (3.82.b)$$

$$u_c = \frac{n Y_e N_{\parallel}}{1 - N_{\parallel}^2} \quad (3.82.c)$$

Logo, a condição de ressonância (3.78) é representada no espaço de momenta por uma elipse de semi-eixo maior u_b , semi-eixo menor u_a e centrada em u_c . Esta é a chamada elipse ressonante, a curva no espaço de velocidades onde existe ressonância entre as partículas do plasma e a onda. A elipse está mostrada na figura 3.2 para dois casos diferentes: (a) $\omega > n\Omega_e$ e (b) $\omega < n\Omega_e$.

Pode-se ver, de (3.81), que quando $N_{\parallel} = 0$ teremos uma circunferência centrada na origem do plano $(u_{\perp}, u_{\parallel})$, ao invés de uma elipse. Pode-se mostrar também, que a ressonância no caso $nY_e < 1$ ($\omega > n\Omega_e$) e $N_{\parallel} < 1$, existirá apenas quando $nY_e \geq (1 - N_{\parallel}^2)^{1/2}$.

Em outros intervalos de N_{\parallel} , teremos uma parábola de ressonância quando $N_{\parallel} = 1$ e uma hipérbole quando $N_{\parallel} > 1$. Estes casos porém, não serão abordados neste trabalho.

3.5 A função distribuição e o surgimento de instabilidades

No caso da aplicação de uma formulação onde a frequência da onda é complexa ($\omega = \omega_r + i\omega_i$) e o número de onda é real, temos que em um determinado ponto do plasma a amplitude da onda será multiplicada pelo fator $e^{-i(\omega_r + i\omega_i)t} = e^{-i\omega_r t} e^{\omega_i t}$. Note que neste caso, a energia da onda (módulo quadrado da amplitude) terá uma exponencial crescente ($\omega_i > 0$) ou decrescente ($\omega_i < 0$) como fator multiplicativo. No caso em que $\omega_i > 0$ se têm uma instabilidade pois, segundo a teoria linear, a amplitude da onda crescerá indefinidamente no tempo. Porém, esta afirmação não é válida, uma vez que a teoria linear vai perdendo sua validade quando a amplitude das ondas cresce. Neste caso deve ser usada uma teoria quase-linear [86] ou uma teoria não linear. Logo, a teoria linear indica apenas a possibilidade de amplificação de ondas, sendo usada para uma ampla variedade de situações em plasmas, como os plasmas em tokamaks [82] ou os plasmas astrofísicos [26].

A influência da forma da função distribuição de equilíbrio no possível surgimento de instabilidades pode ser vista seguindo-se o procedimento adotado por Wu e Lee (1979) [22] e Wu (1985) no seu artigo de revisão [26]. Supondo-se que $k_{\parallel} \approx 0$, $\omega_{pe}/\Omega_e \ll 1$ e que $\omega_r \approx \Omega_e$ pode-se mostrar que a relação de dispersão pode ser aproximada por

$$1 - \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \int d^3v \left(\Omega_e \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \right) \frac{v_{\perp} J_n'^2(b)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\Omega_e}{\gamma}} = 0, \quad (3.83)$$

para o modo extraordinário, e

$$1 - \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \int d^3v \left(\Omega_e \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \right) \frac{v_{\parallel}^2 J_n^2(b)}{v_{\perp} (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{\Omega_e}{\gamma})} = 0, \quad (3.84)$$

para o modo ordinário. Supondo-se que: (1) o plasma é fracamente relativístico, ou seja, que possa ser usada a expansão $1/\gamma \approx 1 - v^2/(2c^2)$; (2) $\omega_r \approx \Omega_e \approx kc$; (3) o argumento das funções de Bessel b seja muito pequeno, de forma que são válidas as aproximações $J_1'^2(b) \approx 1/4$ e $J_1^2(b) \approx v_{\perp}^2/(4c^2)$, pode-se mostrar que [26].

$$\omega_i = \frac{\pi^2 \omega_{pe}^2}{4\omega_r} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 \delta \left[\omega_r - \Omega_e \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) - k_{\parallel} v_{\parallel} \right] \Omega_e \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}}, \quad (3.85)$$

para o modo extraordinário, e

$$\omega_i = \frac{\pi^2 \omega_{pe}^2}{4\omega_r} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{v_{\perp}^2}{c^2} v_{\parallel}^2 \delta \left[\omega_r - \Omega_e \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) - k_{\parallel} v_{\parallel} \right] \Omega_e \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}}, \quad (3.86)$$

para o modo ordinário. Foi suposto ainda que $\partial f_{e0}/\partial v_{\parallel} \approx \partial f_{e0}/\partial v_{\perp}$, o que permitiu desprezar a derivada em v_{\parallel} em (3.83) e (3.84) pois, sendo $k_{\parallel} \approx 0$, teremos que

$$k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \approx \Omega_e \frac{k_{\parallel}}{k} \frac{v_{\perp}}{c} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \ll \Omega_e \frac{\partial f_{e0}}{v_{\perp}}.$$

Poderemos ter instabilidade portanto se, na região onde são realizadas as integrais em (3.85) e (3.86), a contribuição da parte onde $\partial f_{e0}/\partial v_{\perp} > 0$ superar a contribuição da parte onde $\partial f_{e0}/\partial v_{\perp} < 0$. A região onde estas integrais são realizadas é definida pela condição de ressonância, como discutido anteriormente. Este mecanismo de amplificação é conhecido na li-

teratura como "maser de elétron cíclotron" pelo fato da condição $\partial f_{e0}/\partial v_{\perp} > 0$ significar uma inversão de população. É uma instabilidade de origem cinética, já que é a forma da função distribuição de equilíbrio que determina a amplificação ou não da onda.

Note que a inclusão dos efeitos relativísticos é de extrema importância no estudo das ondas de elétron-cíclotron. Mesmo que a energia cinética média dos elétrons seja pequena, podendo estes serem descritos por uma função distribuição não relativística, devemos incluir tais efeitos. Analisando as relações (3.85) e (3.86) pode-se notar que se desprezarmos a correção relativística, a região onde as integrais são realizadas será definida pela condição (3.79) com $n = 1$

$$\omega_r - k_{\parallel} v_{\parallel} - \Omega_e = 0 ,$$

a qual é a equação de uma reta. Quando realizadas sobre esta reta, as integrais que aparecem em (3.85) e (3.86) resultarão em $\omega_i < 0$ na aproximação não relativística, qualquer que seja a forma de f_{e0} . Isso acontece porque a função delta limita apenas a parte em v_{\parallel} , sendo a parte em v_{\perp} realizada em $0 \leq v_{\perp} < \infty$. Nesse caso, a contribuição onde $\partial f_{e0}/\partial v_{\perp} < 0$ sempre supera a contribuição da parte onde $\partial f_{e0}/\partial v_{\perp} > 0$. Quando incluídos os efeitos relativísticos, ainda que em forma aproximada (usando-se $1/\gamma \approx 1 - v^2/(2c^2)$), a função delta limita as integrais em v_{\perp} e v_{\parallel} , tornando possível o surgimento de instabilidades, quando a função distribuição de equilíbrio possuir regiões no espaço de velocidades (ou momenta) onde $\partial f_{e0}/\partial v_{\perp} > 0$. Esta condição obviamente não é a única que pode levar a instabilidades em plasmas. Existem instabilidades que podem ser geradas por exemplo, se $\partial f_{e0}/\partial v_{\parallel} > 0$. Para maiores detalhes, consulte a referência Melrose (1983) [89], capítulo 11.

Como citado no capítulo anterior, existe um critério qualitativo que permite estimar a possibilidade de amplificação significativa para o modo X . Tal critério é baseado na razão entre a frequência de plasma e a frequência de cíclotron do plasma. Pode-se escrever a condição de ressonância (3.78) em coordenadas esféricas

$$(1 + u^2)^{1/2} = nY_e + N_{\parallel} u \cos \psi , \quad (3.87)$$

ou seja,

$$(1 + u^2) = n^2 Y_e^2 + 2nY_e N_{\parallel} u \cos \psi + N_{\parallel}^2 u^2 \cos^2 \psi , \quad (3.88)$$

onde $\psi = \tan^{-1}(u_{\perp}/u_{\parallel})$. Neste caso, o momentum normalizado ressonante será

$$u_{\pm} = \frac{nY_e N_{\parallel} \cos \psi \pm (N_{\parallel}^2 \cos^2 \psi + n^2 Y_e^2 - 1)^{1/2}}{1 - N_{\parallel}^2 \cos^2 \psi}, \quad (3.89)$$

sendo novamente feita a ressalva de que $u \geq 0$.

Para um dado ω_r e um dado N_{\parallel} sempre existirá um ângulo ψ_c tal que, para $nY_e < 1$,

$$N_{\parallel}^2 \cos^2 \psi_c = 1 - n^2 Y_e^2, \quad (3.90)$$

que corresponde ao caso em que $u_+ = u_- = u_m$. Por exemplo, se a função distribuição possuir uma característica de cone-de-perda com um cone de abertura de ângulo ψ_c (sendo uma Maxwelliana fora da região definida pelo cone, por exemplo), a máxima amplificação se dará quando a elipse ressonante estiver completamente inserida na região interna do cone-de-perda ($\partial f_{e0}/\partial u_{\perp} > 0$). Se a função distribuição se anular em todos os pontos da região interna do cone, haverá máxima amplificação quando a elipse ressonante estiver totalmente inserida nessa região e a fronteira entre a parte externa ($\partial f_{e0}/\partial u_{\perp} < 0$) e interna do cone-de-perda for tangente à elipse ressonante [24, 26], como mostra a parte (a) da figura 3.3.

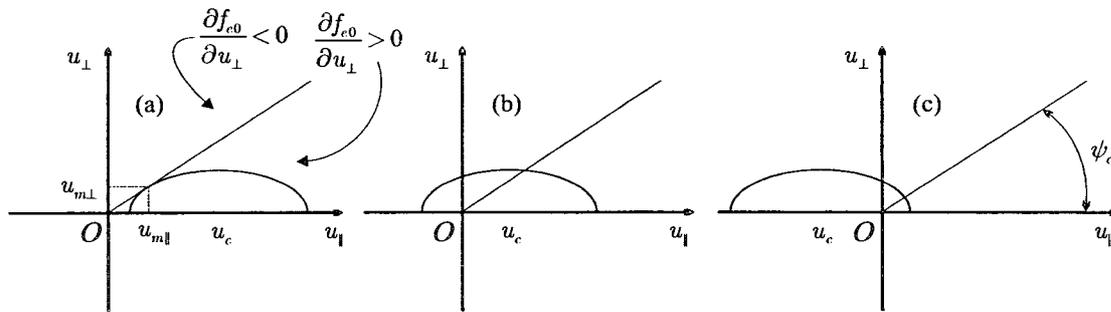


FIGURA 3.3: A possibilidade de haver amplificação: para $u_c > 0$ há (a) amplificação ($nY_e < 1$) e (b) absorção ($nY_e > 1$) e (c) para $u_c < 0$ pode haver absorção ou amplificação, dependendo de quanto da elipse ressonante está inserida na região onde $\partial f_{e0}/\partial u_{\perp} > 0$. Esta figura foi adaptada de Wu e Qiu (1983) [24].

Como mostra a figura 3.2 tal situação somente ocorre para $\omega > n\Omega_e$ ou, equivalentemente, $nY_e < 1$. Se u_c está do mesmo lado que o cone-de-perda, esperamos amplificação quando (a) $nY_e < 1$ e (b) amortecimento quando $nY_e > 1$. No caso (b) da figura 3.3 é bastante claro que a porção da elipse onde $\partial f_{e0}/\partial u_{\perp} < 0$ está situada em uma região onde a população de elétrons

é substancialmente maior do que a da região onde $\partial f_{e0}/\partial u_{\perp} > 0$. Logo, é de se esperar que haja absorção da energia das ondas, ao invés de amplificação. No caso (a), certamente haverá amplificação, uma vez que a elipse está inteiramente localizada em uma região onde $\partial f_{e0}/\partial u_{\perp} > 0$. No caso (c) está mostrada a situação onde u_c se encontra do lado oposto ao cone-de-perda, o que ocorre apenas para $nY_e > 1$. Apesar da porção da elipse contida na região onde $\partial f_{e0}/\partial u_{\perp} > 0$ ser bastante pequena, poderá haver amplificação, pois nesta região a população de elétrons é bastante grande. Ainda assim, poderá ocorrer absorção se a porção da elipse ressonante que está contida na região $\partial f_{e0}/\partial u_{\perp} < 0$ for tal que a integração sobre ela forneça $\omega_i < 0$.

Considerando o caso citado acima ($nY_e < 1$) e substituindo (3.90) em (3.89), obtemos:

$$u_m = \left(\frac{1}{n^2 Y_e^2} - 1 \right)^{1/2} . \quad (3.91)$$

Vamos supor que o plasma seja rarefeito o suficiente, de forma que o parâmetro ω_{pe}^2/Ω_e^2 seja pequeno se comparado à unidade. Além disso, focalizaremos a análise no harmônico fundamental $n = 1$. No caso do modo X , existe uma frequência de corte, abaixo da qual a onda neste modo não pode se propagar. Reescrevendo a frequência de corte para o modo X , definida em (2.20) em termos do parâmetro $\varrho_{\omega} = \omega_{pe}^2/\Omega_e^2$ obtemos

$$\omega_X = (1 + \varrho_{\omega})\Omega_e , \quad (3.92)$$

sendo ω_X a frequência angular de corte para o modo X , a qual é muito pouco superior a Ω_e quando $\varrho_{\omega} \ll 1$. Para uma dada onda com frequência ω no modo X se propagar, deve ser satisfeita a condição $\omega > \omega_X$, ou seja

$$\frac{\omega - \Omega_e}{\Omega_e} = \frac{1}{Y_e} - 1 > \varrho_{\omega} . \quad (3.93)$$

Utilizando-se (3.93) na relação (3.91) obtemos a condição

$$u_m = \left(\frac{1}{Y_e^2} - 1 \right)^{1/2} \gtrsim (2\varrho_{\omega})^{1/2} . \quad (3.94)$$

Logo:

$$u_m \gtrsim \sqrt{2} \frac{\omega_{pe}}{\Omega_e} . \quad (3.95)$$

Se o valor de u_m^2 for maior do que o momentum normalizado quadrático médio ($\int f_{e0} (u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2) d^3u$) dos elétrons, que é da ordem de $2k_B T_e/m_e c^2$, não necessariamente haverá amplificação significativa para o modo X . Como discutido anteriormente, em regiões onde o módulo quadrado do momentum é maior do que o momentum quadrático médio, a população de elétrons diminui. Na figura 3.3.a pode-se notar que se a tangência da elipse com o cone de perda se der muito longe do vértice do cone, mesmo sendo toda ela inserida em uma região onde $\partial f_{e0}/\partial u_{\perp} > 0$, a população de elétrons será pequena e a amplificação tende a não ser significativa. Logo, o critério qualitativo para que haja uma amplificação significativa para o modo X pode ser dado pela condição oposta, ou seja, que u_m^2 seja menor do que o momentum normalizado quadrático médio. Podemos então dizer que o critério a ser satisfeito é dado por

$$u_m^2 \approx 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \lesssim \frac{2k_B T_e}{m_e c^2} , \quad (3.96)$$

ou como escrito em (2.2)

$$\frac{\alpha_{te}^2}{c^2} \gtrsim 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} , \quad (3.97)$$

com $\alpha_{te}^2 = 2k_B T_e/m_e$.

Nota-se que, como já foi comentado no capítulo anterior, a densidade dos elétrons (presente em ω_{pe}) desempenha um papel importante na teoria do maser de elétron-cíclotron no que se refere à amplificação de ondas no modo X . A formação de uma cavidade auroral (onde a densidade de elétrons é baixa) ajuda a diminuir ϱ_{ω} e conseqüentemente pode favorecer a amplificação de ondas neste modo. Os plasmas, como os que originam a AKR ou em magnetosferas de outros planetas do sistema solar, apresentam realmente $\varrho_{\omega} < 1$. Já os plasmas oriundos de sistemas binários de estrelas por exemplo, apresentam tipicamente $\varrho_{\omega} > 1$, e o mecanismo de amplificação se denomina maser de síncrotron. Neste trabalho porém, examinaremos apenas a AKR, onde o maser de elétron-cíclotron opera em regime tal que $\varrho_{\omega} < 1$.

Capítulo 4

Propagação da Radiação em Plasmas

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é fornecer os conhecimentos necessários para fazer uma ligação entre os capítulos 2 e 3 e o próximo, onde abordaremos o modelo físico para a região fonte da AKR e o cálculo da emissividade a partir de uma função distribuição modelo.

Este capítulo consiste apenas de uma seção, onde veremos alguns aspectos gerais da propagação de radiação em plasmas. Ao final dela, obteremos as equações que permitem determinar a trajetória da onda na cavidade auroral, supondo conhecida a relação de dispersão em cada ponto dessa trajetória (equações de traçado de raios). Também nessa seção, obteremos a equação de transferência e uma expressão para a emissividade de um plasma homogêneo em presença de um campo magnético externo, o que é essencial para calcular a intensidade da onda ao longo de sua trajetória. Será usado aqui o mesmo formalismo desenvolvido em Bekeffi (1966) [32].

4.2 Aspectos gerais da propagação da radiação em plasmas

A amplificação (ou absorção) de ondas que se propagam em um plasma, de um dado ponto inicial s_0 até um ponto s , pode ser estimada por

$$g = \ln \left[\frac{I_\omega(s)}{I_\omega(s_0)} \right], \quad (4.1)$$

onde $I_\omega(s)$ é a intensidade da radiação no ponto s e $I_\omega(s_0)$ a intensidade no ponto inicial. A quantidade g é chamada de fator de amplificação da radiação.

O cálculo das intensidades nos pontos inicial e final deve ser feito através da equação de

transferência, como veremos no decorrer desta seção. Primeiramente, vamos abordar alguns conceitos básicos referentes à propagação de ondas em plasmas.

4.2.1 A direção da velocidade de grupo e do escoamento de energia

O escoamento de energia eletromagnética em um meio (dielétrico ou não) pode ser descrito pelo vetor de Poynting. Em um meio dielétrico, o escoamento de energia inclui uma parte não eletromagnética, proveniente das partículas que se movem coerentemente com a onda presente no meio [32, 90, 87]. Mostra-se que, inclusive em meios anisotrópicos, a velocidade de grupo aponta na mesma direção do escoamento de energia (eletromagnético + partículas), no caso em que a absorção de energia das ondas pelo meio é pequena [32].

No entanto, há uma diferença entre as direções de propagação da onda (direção do vetor de onda \vec{k}) e da velocidade de grupo (direção do escoamento de energia), no caso em que o meio é anisotrópico. Na figura 4.1 mostramos o vetor de onda \vec{k} e a correspondente velocidade de grupo \vec{w} com seus respectivos ângulos sólidos $d\Omega_{\vec{k}}$ e $d\Omega$.

Supomos o vetor de onda \vec{k} direcionado como mostra a figura 4.1.a. A onda tem "larguras" em frequência e em número de onda, respectivamente dadas por $d\omega$ e $d\vec{k}$, onde \vec{k} é expresso em coordenadas esféricas (k, θ, φ) . A relação de dispersão do meio pode ser escrita como

$$\omega = \omega(k, \theta, \varphi) \quad (4.2.a)$$

ou

$$k = k(\omega, \theta, \varphi) \quad (4.2.b)$$

Sendo a velocidade de grupo definida por $\vec{w} = \nabla_{\vec{k}}\omega$, podemos escrever que:

$$w_k = \frac{\partial\omega}{\partial k} \quad w_\theta = \frac{1}{k} \frac{\partial\omega}{\partial\theta} \quad w_\varphi = \frac{1}{k \sin\theta} \frac{\partial\omega}{\partial\varphi} \quad (4.3)$$

Usando as relações (4.2.a) e (4.2.b), pode-se facilmente demonstrar que (4.3) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$w_k = \left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)^{-1} \quad w_\theta = -\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial\theta} \left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)^{-1} \quad w_\varphi = -\frac{1}{k \sin\theta} \frac{\partial k}{\partial\varphi} \left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)^{-1} \quad (4.4)$$

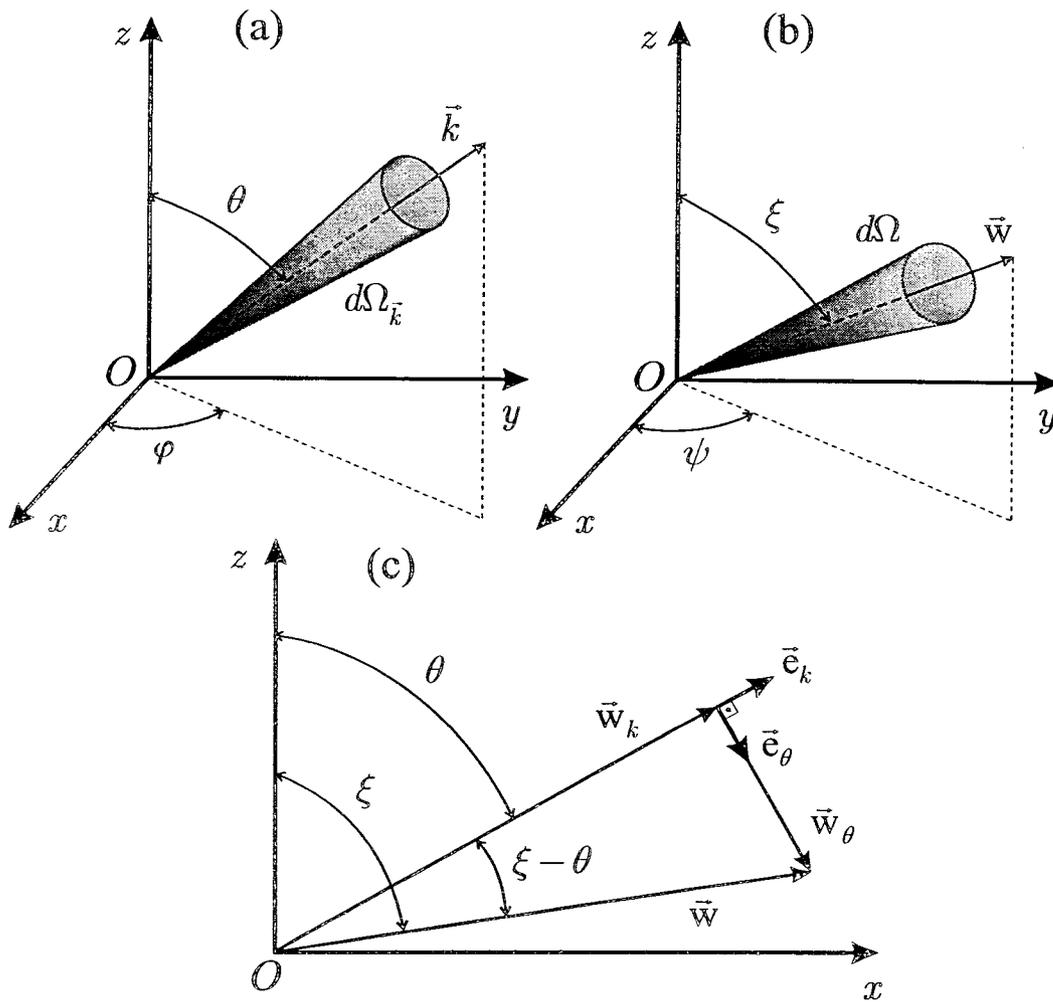


FIGURA 4.1: O vetor de onda \vec{k} e a correspondente velocidade de grupo \vec{w} com seus respectivos ângulos sólidos $d\Omega_{\vec{k}}$ e $d\Omega$.

Alguns sistemas podem apresentar algum tipo de simetria, como no caso de um plasma homogêneo imerso em um campo magnético também homogêneo. Nesse tipo de sistema, o eixo de simetria é paralelo ao campo magnético. Se escolhermos o eixo z paralelo ao campo, teremos uma simetria azimutal e $\partial k/\partial\varphi = 0$, ou seja, $w_\varphi = 0$. Neste caso, as componentes da velocidade de grupo \vec{w} são dadas por (ver figura 4.1.c):

$$w_k = w \cos(\theta - \xi) \tag{4.5.a}$$

$$w_\theta = -w \sin(\theta - \xi) , \tag{4.5.b}$$

onde, como mostra a figura 4.1.c, $\xi - \theta$ é o ângulo entre o vetor de onda \vec{k} e a velocidade de grupo \vec{w} . Substituindo (4.4) em (4.5.a) e (4.5.b) obtemos:

$$\tan(\theta - \xi) = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial \theta} . \quad (4.6)$$

Dessa forma mostra-se que a velocidade de grupo da onda (que tem a mesma direção do escoamento de energia total) não aponta na direção do vetor de onda \vec{k} (que fornece a direção de propagação da onda), a não ser que o meio seja isotrópico ($\partial k / \partial \theta = 0$).

O módulo da velocidade de grupo pode então ser obtido da soma dos quadrados das suas componentes, dadas por (4.4). Obtém-se:

$$w = \left| \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1} \left[1 + \left(\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right|^{1/2} . \quad (4.7)$$

Com isso pode-se deduzir a relação existente entre o elemento de ângulo sólido em torno da direção do escoamento de energia $d\Omega$ e o elemento de ângulo sólido $d\Omega_{\vec{k}}$ em torno da direção de \vec{k} . Temos que:

$$\begin{aligned} d\Omega_{\vec{k}} &= \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ d\Omega &= \sin \xi \, d\xi \, d\psi . \end{aligned}$$

Podemos escrever então que:

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{\sin \xi}{\sin \theta} \frac{d\xi}{d\theta} \frac{d\psi}{d\varphi} \underbrace{\sin \theta \, d\theta \, d\varphi}_{d\Omega_{\vec{k}}} \\ &= d\Omega_{\vec{k}} \frac{\sin \xi}{\sin \theta} \frac{d\xi}{d\theta} . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Usando a relação $d\xi/d\theta = -(1/\sin \xi) (\partial/\partial \theta) \cos \xi$ em (4.8), obtemos:

$$d\Omega = - \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \xi$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{d\Omega_{\vec{k}}}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos(\theta - \xi - \theta) \\
 &= -\frac{d\Omega_{\vec{k}}}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\cos(\theta - \xi) \cos \theta + \text{sen}(\theta - \xi) \text{sen } \theta \right] .
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Podemos utilizar a relação (4.6) em (4.9), obtendo:

$$d\Omega = -\frac{d\Omega_{\vec{k}}}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{k \cos \theta + (\partial k / \partial \theta) \text{sen } \theta}{[k^2 + (\partial k / \partial \theta)^2]} \right\} ,
 \tag{4.10}$$

Vê-se que, quando o meio é isotrópico, $\theta = \xi$ e $d\Omega = d\Omega_{\vec{k}}$.

4.2.2 A equação de transferência

Em um meio em regime estacionário, onde a dissipação de energia pode ser desconsiderada, temos a equação de conservação

$$\nabla \cdot \vec{F}_\omega = 0 ,
 \tag{4.11}$$

onde a quantidade \vec{F}_ω é o fluxo espectral de Poynting [32], que possui unidade de energia por unidade de área, de frequência e de tempo.

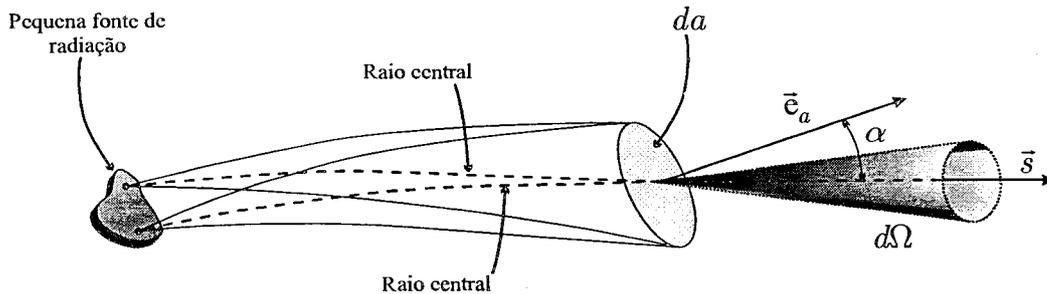


FIGURA 4.2: Radiação proveniente de uma fonte pequena e que cruza um elemento de área da.

Logo,

$$dP_\omega = d\vec{F}_\omega \cdot \vec{e}_a \, d\omega \, da = dF_\omega \cos \alpha \, d\omega \, da ,
 \tag{4.12}$$

fornece a potência da radiação que passa pela área infinitesimal da , no intervalo de frequência $d\omega$.

De acordo com a ótica geométrica, a radiação que se propaga em um meio homogêneo (ou localmente homogêneo) pode ser considerada como transportada ao longo de um conjunto de raios que não interagem entre si. A trajetória desses raios é determinada através das chamadas equações de traçado de raios, como será visto mais adiante. Na figura 4.2 mostra-se uma pequena fonte de radiação, onde cada elemento infinitesimal dessa fonte emite um tubo de raios que cruzam a superfície da , cujo vetor unitário normal é \vec{e}_a . Os raios centrais desses tubos de raios preenchem o elemento de ângulo sólido $d\Omega$.

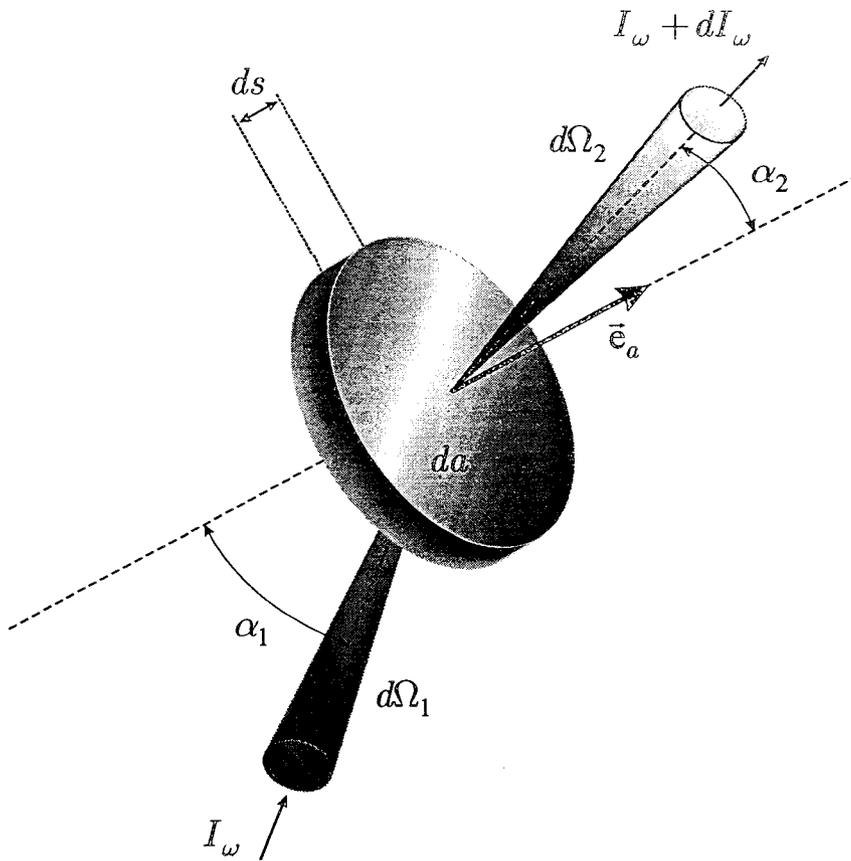


FIGURA 4.3: Radiação penetrando um pequeno elemento de volume sofrendo uma pequena refração na saída, devido à diferença dos índices de refração do meio nas duas faces de área da (supõe-se que o meio possui inhomogeneidades).

O fluxo espectral de Poynting elementar que passa através do elemento de área da pode ser escrito como

$$d\vec{F}_\omega \cdot \vec{e}_a = dF_\omega \cos \alpha = I_\omega(\vec{s}) \cos \alpha d\Omega, \quad (4.13)$$

onde a constante de proporcionalidade $I_\omega(\vec{s})$ é denominada de intensidade da radiação. Logo, a potência da radiação dada por (4.12) pode ser escrita como:

$$dP_\omega = I_\omega(\vec{s}) \cos \alpha d\Omega d\omega da. \quad (4.14)$$

Pode-se deduzir uma equação de conservação de energia da radiação, chamada de equação de transferência. Consideremos um elemento de volume infinitesimal de um dado meio, na forma de um cilindro, como visto na figura 4.3. Uma pequena parte da radiação com intensidade I_ω e ângulo sólido $d\Omega_1$ entra por uma das faces a um ângulo α_1 em relação ao vetor normal \vec{e}_a , saindo pela outra com uma intensidade $I_\omega + dI_\omega$, a um ângulo α_2 com o vetor normal. Os ângulos de entrada e saída do elemento de volume são diferentes porque é suposto que o meio possui inhomogeneidades.

Se o meio não absorver a energia da radiação, obtemos de (4.14) que

$$I_\omega \cos \alpha_1 d\Omega_1 d\omega = (I_\omega + dI_\omega) \cos \alpha_2 d\Omega_2 d\omega, \quad (4.15)$$

que é uma equação de conservação da energia da radiação que se propaga no meio.

Usando-se a lei de Snell,

$$N_1 \sin \alpha_1 = N_2 \sin \alpha_2, \quad (4.16)$$

podemos escrever que

$$N_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 = N_2 \cos \alpha_2 d\alpha_2. \quad (4.17)$$

Os elementos de ângulo sólido são dados por:

$$d\Omega_1 = \text{sen } \alpha_1 d\alpha_1 d\varphi_1 \quad (4.18.a)$$

$$d\Omega_2 = \text{sen } \alpha_2 d\alpha_2 d\varphi_2 \quad (4.18.b)$$

Usando o mesmo procedimento algébrico usado em (4.8), obtemos:

$$\begin{aligned} d\Omega_1 &= \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \underbrace{\text{sen } \alpha_2 d\alpha_2 d\varphi_2}_{d\Omega_2} \\ &= d\Omega_2 \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \quad (4.19) \end{aligned}$$

Inserindo (4.16) e (4.17) em (4.19), obtêm-se:

$$N_1^2 \cos \alpha_1 d\Omega_1 = N_2^2 \cos \alpha_2 d\Omega_2 \quad (4.20)$$

Usando (4.15), chegamos à seguinte expressão:

$$\frac{I_\omega}{N_1^2} = \frac{(I_\omega + dI_\omega)}{N_2^2} \quad (4.21)$$

Logo:

$$\frac{I_\omega}{N^2} = \text{constante ao longo do raio} \quad (4.22)$$

Em um meio anisotrópico, pode-se mostrar que [32]

$$N_r^2 \cos \alpha d\Omega = \text{constante ao longo do raio} \quad (4.23)$$

↓

$$\frac{I_\omega}{N_r^2} = \text{constante ao longo do raio} \quad (4.24)$$

onde N_r é chamado de índice de refração do raio, e é dado por

$$N_r^2 = \left| \frac{w}{c} N^2 \frac{\partial \omega N}{\partial \omega} \right| \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{d\Omega} = N^2 \left| \left[1 + \left(\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{d\Omega} \right| . \quad (4.25)$$

Como $(1/N) \partial N / \partial \theta = (1/k) \partial k / \partial \theta$, pode-se inserir a equação (4.6) em (4.25), obtendo a seguinte relação entre os elementos de ângulo sólido:

$$\frac{d\Omega_{\vec{k}}}{d\Omega} = \frac{N_r^2}{N^2} \left| (1 + \tan^2 \beta)^{-1/2} \right| = \frac{N_r^2}{N^2} \cos \beta , \quad (4.26)$$

onde $\beta = \theta - \xi$. A quantidade $(1/N) \partial N / \partial \theta$ pode ser obtida da relação de dispersão, como veremos no capítulo 6.

A equação de conservação de energia tal como aparece em (4.24) não leva em conta a possibilidade do meio absorver energia das ondas que nele se propagam ou dele ser uma fonte de radiação. Neste caso, a potência absorvida pelo elemento de volume da figura 4.3 quando o raio percorre o comprimento ds é, de acordo com (4.14),

$$-\alpha_\omega ds I_\omega \cos \alpha d\Omega d\omega da , \quad (4.27)$$

onde a quantidade $\alpha_\omega = -2 \operatorname{Im}(k)$ é definida como o coeficiente de absorção do meio.

Se o meio é um emissor de radiação, a potência emitida pelo elemento de volume será dada por

$$\eta_\omega ds \cos \alpha d\Omega d\omega da , \quad (4.28)$$

onde a quantidade $\eta_\omega \equiv \eta(\omega, \theta)$ é definida como a emissividade do meio, que é a potência gerada por unidade de volume do meio, por unidade de frequência e por unidade de ângulo sólido. Somando-se as relações (4.27) e (4.28) e colocando-as no lado direito de (4.15), pode-se mostrar que:

$$N_r^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{I_\omega}{N_r^2} \right) = \eta_\omega - \alpha_\omega I_\omega , \quad (4.29)$$

Na obtenção da relação acima foi usada ainda a relação (4.23).

A equação (4.29) é conhecida como a *equação de transferência* para um meio anisotrópico que pode absorver e emitir radiação. A solução dessa equação fornece uma expressão para a intensidade da radiação ao longo da sua trajetória, como segue abaixo:

$$\frac{I_\omega(s)}{[N_r(s)]^2} = e^{-2 \int_{s_0}^s ds \operatorname{Im}[k(s')]} \left[\frac{I_\omega(s_0)}{[N_r(s_0)]^2} + \int_{s_0}^s ds' \frac{\eta_\omega}{N_r^2} e^{2 \int_{s_0}^{s'} ds'' \operatorname{Im}[k(s'')] } \right]. \quad (4.30)$$

O coeficiente de absorção pode ser obtido da relação de dispersão, a partir da obtenção da parte imaginária do vetor de onda \vec{k} . A relação de dispersão aparece também no cálculo da emissividade, como será visto a seguir.

4.2.3 O cálculo da emissividade

Quando se deseja estudar a propagação de uma onda em um plasma computando a intensidade ao longo da sua trajetória, pode-se usar a expressão (4.30). Pode-se obter uma relação de dispersão para o plasma, a qual pode fornecer o coeficiente de absorção. A emissividade depende, entre outras coisas, das propriedades dielétricas do meio e das funções distribuição das partículas, sendo a emissividade total a soma das emissividades de cada população de partículas que compõe o plasma.

Estudos de emissão em plasmas já foram feitos por diversos autores. Entre eles estão os trabalhos de Freund & Wu (1977) [91, 92], Audenaerde (1977) [93], Bornatici & Engelman (1979) [94], Bornatici & Ruffina (1986) [95] e Bornatici, Ruffina & Westerhof (1988) [96]. O método que será apresentado aqui foi desenvolvido por Freund & Wu [91], e usa o formalismo de Klimontovich [97] da teoria cinética de plasmas. Neste artigo são levadas em conta as propriedades dielétricas do plasma, bem como as correlações binárias entre os elétrons que o constituem. Serão descritas a seguir as principais etapas usadas nesse artigo para obter a emissividade espectral. A idéia básica é calcular a potência dissipada por uma corrente microscópica externa (efeito Joule). Ela pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$P = - \int d^3x \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta \vec{J}_e(\vec{x}, t), \quad (4.31)$$

onde $\delta\vec{J}_s(\vec{x}, t)$ é a densidade de corrente microscópica externa e $\delta\vec{E}(\vec{x}, t)$ é o campo elétrico microscópico gerado pela corrente $\delta\vec{J}_s(\vec{x}, t)$.

Para calcular a potência média irradiada, realizamos primeiramente uma média de ensemble, como segue:

$$\bar{P} = - \int d^3x \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \lim_{t' \rightarrow t} \langle \delta\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta\vec{J}_s(\vec{x}', t') \rangle . \quad (4.32)$$

Assumindo que o plasma possa ser considerado homogêneo e estacionário, é correto supor que a quantidade $\langle \delta\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta\vec{J}_s(\vec{x}', t') \rangle$ será uma função de $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$ e $\tau = t - t'$. Então, fazendo-se uso da transformada de Fourier, obtêm-se:

$$\langle \delta\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta\vec{J}_s(\vec{x}', t') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega\tau)} \langle \delta\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta\vec{J}_s(\vec{x}', t') \rangle_{\vec{k}, \omega} . \quad (4.33)$$

Pode ser mostrado que [98]:

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \langle \delta\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta\vec{J}_s(\vec{x}', t') \rangle_{\vec{k}, \omega} = \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} 2\omega_i \langle \delta\vec{E}(\vec{k}, \omega + i\omega_i) \cdot \delta\vec{J}_s^*(\vec{k}', \omega + i\omega_i) \rangle , \quad (4.34)$$

onde o asterisco denota o complexo conjugado. As quantidades $\delta\vec{E}(\vec{k}, \omega + i\omega_i)$ e $\delta\vec{J}_s(\vec{k}', \omega + i\omega_i)$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier-Laplace da densidade de corrente e do campo elétrico, definidas como:

$$\delta\vec{E}(\vec{k}, \omega + i\omega_i) = \int_0^{\infty} dt \int d^3x e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} e^{-\omega_i t} \delta\vec{E}(\vec{x}, t) \quad (4.35.a)$$

$$\delta\vec{J}_s(\vec{k}, \omega + i\omega_i) = \int_0^{\infty} dt \int d^3x e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} e^{-\omega_i t} \delta\vec{J}_s(\vec{x}, t) . \quad (4.35.b)$$

Usando-se (4.34) em (4.32), obtêm-se:

$$\bar{P} = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} 2\omega_i \langle \delta\vec{E}(\vec{k}, \omega + i\omega_i) \cdot \delta\vec{J}_s^*(\vec{k}, \omega + i\omega_i) \rangle . \quad (4.36)$$

Introduzindo o sistema de Klimontovich-Maxwell linearizado, o qual consiste nas seguintes equações [97]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{\gamma} \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{x}} - \frac{e}{\gamma m_e c} (\vec{u} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_{\vec{u}} \right] \delta N(\vec{x}, \vec{u}, t) = \frac{e n_e}{m_e c} \left[\delta \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\vec{u}}{\gamma} \times \delta \vec{B}(\vec{x}, t) \right] \cdot \nabla_{\vec{u}} f_e(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (4.37)$$

$$\nabla_{\vec{x}} \times \delta \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{B}(\vec{x}, t) \quad (4.38)$$

$$\nabla_{\vec{x}} \times \delta \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \delta \vec{J}_T(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{E}(\vec{x}, t), \quad (4.39)$$

onde $\vec{u} = \vec{p}/m_e c = \gamma \vec{v}$, $\gamma = (1 + u^2)^{1/2}$ e $\delta \vec{J}_T(\vec{x}, t) = \delta \vec{J}(\vec{x}, t) + \delta \vec{J}_s(\vec{x}, t)$ é a perturbação total da corrente. Além disso temos:

$$\delta N(\vec{x}, \vec{u}, t) = N(\vec{x}, \vec{u}, t) - \langle N(\vec{x}, \vec{u}, t) \rangle \quad (4.40.a)$$

$$\delta \vec{E}(\vec{x}, \vec{u}, t) = \vec{E}(\vec{x}, \vec{u}, t) - \langle \vec{E}(\vec{x}, \vec{u}, t) \rangle \quad (4.40.b)$$

$$\delta \vec{B}(\vec{x}, \vec{u}, t) = \vec{B}(\vec{x}, \vec{u}, t) - \langle \vec{B}(\vec{x}, \vec{u}, t) \rangle \quad (4.40.c)$$

$$N(\vec{x}, \vec{u}, t) = \sum_{i=1}^{N_e} \delta[\vec{x} - \vec{x}_i(t)] \delta[\vec{u} - \vec{u}_i(t)] \quad (4.40.d)$$

Neste sistema não foi considerada a dinâmica dos íons, que fazem apenas um pano de fundo, garantindo a quase-neutralidade do plasma, como discutido na seção 3.2.1. Temos ainda que $\langle N(\vec{x}, \vec{u}, t) \rangle = n_e f_e(\vec{x}, \vec{u}, t)$, $\langle \vec{E}(\vec{x}, \vec{u}, t) \rangle = 0$ e $\langle \vec{B}(\vec{x}, \vec{u}, t) \rangle = \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

Com o uso das transformadas de Fourier-Laplace, definidas em (4.35), nas equações (4.38) e (4.39), pode-se mostrar que estas equações podem ser escritas como

$$\vec{\Lambda}(\vec{k}, \omega + i\omega_i) \cdot \delta \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}, \omega + i\omega_i) = -\frac{4\pi i}{\omega + i\omega_i} \delta \vec{\mathcal{J}}_s(\vec{k}, \omega + i\omega_i), \quad (4.41)$$

onde:

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega + i\omega_i) = \frac{c^2 k^2}{(\omega + i\omega_i)^2} \left(\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) + \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega + i\omega_i), \quad (4.42)$$

sendo $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega + i\omega_i)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 3$) as componentes do tensor dielétrico do plasma.

Utilizando-se as equações (4.36) e (4.41), obtemos:

$$\bar{P} = \frac{i}{4\pi^3} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega \Lambda(\vec{k}, \omega)} \sum_{i,j} \lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) T_{ji}(\vec{k}, \omega), \quad (4.43)$$

onde λ_{ij} ($i, j = 1, \dots, 3$) e $\Lambda(\vec{k}, \omega)$ são os elementos da matriz adjunta [99, 100] da matriz que representa o tensor $\tilde{\chi}(\vec{k}, \omega + i\omega_i)$, definido em (4.41), e o determinante da mesma, respectivamente, quando $\omega_i \rightarrow 0^+$. Além disso, temos:

$$\tilde{T}(\vec{k}, \omega) = \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} 2\omega_i \langle \delta \vec{\mathcal{J}}_s(\vec{k}, \omega + i\omega_i) \delta \vec{\mathcal{J}}_s^*(\vec{k}, \omega + i\omega_i) \rangle. \quad (4.44)$$

Escrevendo a expressão

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{k}, \omega) &= \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} \Lambda(\vec{k}, \omega + i\omega_i) = \Lambda_r(\vec{k}, \omega) + i\Lambda_i(\vec{k}, \omega) \\ &= \Lambda_r(\vec{k}, \omega) \left[1 + i \frac{\Lambda_i(\vec{k}, \omega)}{\Lambda_r(\vec{k}, \omega)} \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

e aplicando-a quando a absorção da energia das ondas é pequena ($|\Lambda_i(\vec{k}, \omega)/\Lambda_r(\vec{k}, \omega)| \ll 1$), obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\delta[\Lambda_r(\vec{k}, \omega)]}{\omega} \sum_{i,j} \lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) T_{ji}(\vec{k}, \omega) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \int_0^{\infty} d\omega \frac{\delta[\Lambda_r(\vec{k}, \omega)]}{\omega} \sum_{i,j} \lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) T_{ji}(\vec{k}, \omega). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Usamos então a identidade [98]

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ss}(\vec{k}, \omega) a_i(\vec{k}, \omega) a_j^*(\vec{k}, \omega). \quad (4.47)$$

obtendo:

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \int_0^{\infty} d\omega \frac{\lambda_{ss}(\vec{k}, \omega)}{\omega} \delta[\Lambda_r(\vec{k}, \omega)] \vec{a}^*(\vec{k}, \omega) \cdot \tilde{T}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{a}(\vec{k}, \omega), \quad (4.48)$$

onde $\lambda_{ss}(\vec{k}, \omega)$ é o traço da matriz que representa o tensor $\tilde{\chi}(\vec{k}, \omega)$ e $\vec{a}(\vec{k}, \omega)$ é o vetor de polarização, dado por:

$$\vec{a}(\vec{k}, \omega) = \frac{\delta \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}, \omega)}{|\delta \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}, \omega)|} . \quad (4.49)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier-Laplace na equação (4.37), obtemos que:

$$\delta \vec{\mathcal{J}}_s(\vec{k}, \omega) = -\frac{ec}{\gamma} \int d^3 u \vec{u} \delta \mathcal{N}_s(\vec{k}, \vec{u}, \omega) , \quad (4.50)$$

onde

$$\delta \mathcal{N}_s(\vec{k}, \vec{u}, \vec{w}) = \frac{\gamma}{\Omega_e} \int_{-\infty}^{\varphi} d\bar{\varphi} H(\varphi, \bar{\varphi}) \delta \mathcal{N}(\vec{k}, \vec{u}, t=0) , \quad (4.51)$$

onde $\vec{u} = (u_{\perp}, u_{\parallel}, \bar{\varphi})$, φ e $\bar{\varphi}$ são os ângulos azimutais e

$$H(\varphi, \bar{\varphi}) = e \left[i \gamma \frac{\omega - k_{\parallel} c u_{\parallel} / \gamma + i \omega_i}{\Omega_e} (\varphi - \bar{\varphi}) - i \frac{k_{\perp} c u_{\perp}}{\Omega_e} (\text{sen } \varphi - \text{sen } \bar{\varphi}) \right] . \quad (4.52)$$

Como resultado, obtemos para o tensor $\vec{T}^{\dagger}(\vec{k}, \omega)$:

$$\begin{aligned} \vec{T}^{\dagger}(\vec{k}, \omega) &= \frac{e^2 c^2}{\Omega_e^2} \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} \int d^3 u \int d^3 u' \vec{u} \vec{u}' \int_{-\infty}^{\varphi} d\bar{\varphi} \int_{-\infty}^{\varphi'} d\bar{\varphi}' H(\varphi, \bar{\varphi}) H^*(\varphi', \bar{\varphi}') \\ &\times \left\langle \delta \mathcal{N}(\vec{k}, \vec{u}, t=0) \delta \mathcal{N}^*(\vec{k}, \vec{u}', t=0) \right\rangle . \end{aligned} \quad (4.53)$$

De acordo com (3.13):

$$\left\langle \delta \mathcal{N}(\vec{k}, \vec{u}, t=0) \delta \mathcal{N}^*(\vec{k}, \vec{u}', t=0) \right\rangle = V \left[n_e \delta(\vec{u} - \vec{u}') f_e(\vec{u}) + n_e^2 \mathcal{F}_{ee}(\vec{k}, \vec{u}, \vec{u}') \right] , \quad (4.54)$$

onde $\mathcal{F}_{ee}(\vec{k}, \vec{u}, \vec{u}')$ é a função distribuição para um par de elétrons. Quando não existir correlação entre o par, essa função distribuição pode ser escrita como um produto de funções distribuição de partícula única. A equação (4.53) pode ser escrita como

$$\vec{T}^{\dagger}(\vec{k}, \omega) = \vec{T}^{\dagger(1)}(\vec{k}, \omega) + \vec{T}^{\dagger(2)}(\vec{k}, \omega) ,$$

onde:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{(1)}(\vec{k}, \omega) &= \frac{e^2 c^2 n_e}{\Omega_e^2} V \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} \int d^3 u \int d^3 u' \vec{u} \vec{u}' \int_{-\infty}^{\varphi} d\bar{\varphi} \int_{-\infty}^{\varphi'} d\bar{\varphi}' H(\varphi, \bar{\varphi}) H^*(\varphi', \bar{\varphi}') \\ &\times \delta(\vec{u} - \vec{u}') f_e(\vec{u}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{(2)}(\vec{k}, \omega) &= \frac{e^2 c^2 n_e^2}{\Omega_e^2} V \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} \int d^3 u \int d^3 u' \vec{u} \vec{u}' \int_{-\infty}^{\varphi} d\bar{\varphi} \int_{-\infty}^{\varphi'} d\bar{\varphi}' H(\varphi, \bar{\varphi}) H^*(\varphi', \bar{\varphi}') \\ &\times \mathcal{F}_{ee}(\vec{k}, \vec{u}, \vec{u}') . \end{aligned} \quad (4.56)$$

A emissividade pode ser obtida usando-se a sua definição:

$$\eta(\omega, \theta) = \frac{1}{V} \frac{d^2 \bar{P}}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{V} \frac{d^2 \bar{P}}{d\omega d\Omega_{\vec{k}}} \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{d\Omega} = \frac{1}{V} \left(\frac{N_r}{N} \right)^2 \cos \beta \frac{d^2 \bar{P}}{d\omega d\Omega_{\vec{k}}} . \quad (4.57)$$

Foi usada na equação acima a relação (4.26) entre os ângulos sólidos na direção de propagação da onda e do escoamento de energia.

Usando (4.48), (4.55) e (4.56), podemos escrever a emissividade como

$$\eta(\omega, \theta) = \eta^{(1)}(\omega, \theta) + \eta^{(2)}(\omega, \theta),$$

onde:

$$\begin{aligned} \eta^{(1,2)}(\omega, \theta) &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{N_r}{N} \right)^2 \cos \beta \int d^3 k \int_0^{\infty} dk k^2 \frac{\lambda_{ss}(\vec{k}, \omega)}{\omega} \delta[\Lambda_r(\vec{k}, \omega)] \\ &\times \vec{a}^*(\vec{k}, \omega) \cdot \frac{\tilde{T}^{(1,2)}(\vec{k}, \omega)}{V} \cdot \vec{a}(\vec{k}, \omega) . \end{aligned} \quad (4.58)$$

Se o plasma está em equilíbrio termodinâmico e a distribuição de partícula única é uma Maxwelliana isotrópica, pode-se mostrar que a contribuição à emissividade, devida à distribuição conjunta de pares de partículas, se anula. Isso pode ser visto com o uso da seguinte relação [97]:

$$\mathcal{F}_{ee}(\vec{k}, \vec{u}, \vec{u}') = [n_e (1 + k^2 \lambda_D^2)]^{-1} f_e(\vec{u}) f_e(\vec{u}') . \quad (4.59)$$

Substituindo-se (4.59) em (4.56), mostra-se que $\vec{T}^{(2)}(\vec{k}, \omega) = 0$. Logo a emissividade será, nesse caso, dada apenas pela contribuição da função distribuição de equilíbrio de partícula única. Após uma extensa álgebra, que não será apresentada aqui, pode-se obter a seguinte expressão para a emissividade [91]:

$$\begin{aligned} \eta(\omega, \theta) = & \frac{e^2 n_e \omega^2}{2\pi c} \left(\frac{N_r}{N}\right)^2 \cos\beta \int d^3u f_e(\vec{u}) \sum_i \int_0^\infty dN^2 \frac{N \lambda_{ss}(\vec{k}, \omega)}{\left|\frac{\partial \Lambda_r}{\partial N^2}\right|_{N=N_i}} \delta(N^2 - N_i^2) \\ & \times \sum_{m=-\infty}^\infty \left|\vec{a}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{j}_m\right|^2 \delta\left[\omega \left(1 - N \frac{u_{\parallel}}{\gamma} \cos\theta\right) - \frac{m_e \Omega_e}{\gamma}\right], \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde N_i é uma raiz da relação de dispersão $\Lambda_r(\vec{k}, \omega) = 0$ e $\vec{j}_m = [(mv_{\perp}/b) J_m(b), iv_{\perp} J'_m(b), v_{\parallel} J_m(b)]$, sendo $b = k_{\perp} c u_{\perp} / (\Omega_e)$. Além disso, $J_m(b)$ e $J'_m(b)$ são, respectivamente, a função de Bessel de ordem m e a sua derivada.

Vemos que, conhecendo-se a relação de dispersão, pode-se calcular a emissividade do meio. Esta pode ser colocada na equação de transferência a fim de obter a intensidade da radiação ao longo da sua trajetória. A trajetória é determinada pelas equações de traçado de raios, como será visto a seguir.

4.2.4 As equações de traçado de raios

As equações de traçado de raios são usadas para calcular a trajetória de uma onda em um dado meio, levando em conta as propriedades dielétricas desse meio. Pode-se também, a partir delas, calcular a absorção (ou amplificação) da energia da onda, enquanto ela se propaga no meio. É necessário porém, calcular a relação de dispersão em cada ponto da trajetória, o que implica em calcular o tensor dielétrico do plasma em cada ponto. Como no tensor dielétrico comparecem os parâmetros típicos do plasma (densidade, temperatura, etc.), necessitamos do modelo físico para a região fonte, apresentado na seção 5.2.

Para deduzir as equações de traçado de raios, considera-se a radiação como um conjunto de partículas (fótons) com Hamiltoniano $H = \hbar\omega$ e momentum $p = \hbar\vec{k}$. Usando-se as equações de Hamilton

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla_{\vec{r}} H \quad (4.61.a)$$

$$\dot{\vec{r}} = \nabla_{\vec{p}} H, \quad (4.61.b)$$

obtemos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \nabla_{\vec{k}} \omega \text{ e } \frac{d\vec{k}}{dt} = -\nabla_{\vec{r}} \omega. \quad (4.62)$$

A relação de dispersão é escrita como

$$\Lambda(\vec{k}, \omega, \vec{r}) = 0, \quad (4.63)$$

ou seja:

$$d\Lambda = \nabla_{\vec{k}} \Lambda \cdot d\vec{k} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} d\omega + \nabla_{\vec{r}} \Lambda \cdot d\vec{r} = 0. \quad (4.64)$$

Escrevendo-se $d\omega$ como $d\omega = \nabla_{\vec{k}} \omega \cdot d\vec{k} + \nabla_{\vec{r}} \omega \cdot d\vec{r}$ e substituindo-se em (4.64), obtemos:

$$\begin{aligned} d\Lambda &= \nabla_{\vec{k}} \Lambda \cdot d\vec{k} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \nabla_{\vec{k}} \omega \cdot d\vec{k} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \nabla_{\vec{r}} \omega \cdot d\vec{r} + \nabla_{\vec{r}} \Lambda \cdot d\vec{r} \\ &= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \nabla_{\vec{k}} \omega + \nabla_{\vec{k}} \Lambda \right) \cdot d\vec{k} + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \nabla_{\vec{r}} \omega + \nabla_{\vec{r}} \Lambda \right) \cdot d\vec{r} = 0. \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \nabla_{\vec{k}} \omega + \nabla_{\vec{k}} \Lambda = 0 \quad (4.65.a)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \nabla_{\vec{r}} \omega + \nabla_{\vec{r}} \Lambda = 0. \quad (4.65.b)$$

Com o uso de (4.62) na equação acima, obtemos finalmente que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{-\nabla_{\vec{k}} \Lambda}{\partial \Lambda / \partial \omega} \quad (4.66.a)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\nabla_{\vec{r}} \Lambda}{\partial \Lambda / \partial \omega}. \quad (4.66.b)$$

As equações (4.66) serão usadas para o cálculo da trajetória da onda a partir da região fonte, bem como para o cálculo da sua amplificação ou absorção ao longo do caminho. Através do cálculo da intensidade da onda, feito através da equação de transferência, pode-se calcular a quantidade g , definida em (4.1). Na abordagem numérica, que será realizada no capítulo 6, usaremos o que foi visto aqui com o objetivo de estudar a propagação e a amplificação das ondas a partir da região fonte.

Capítulo 5

O Modelo Físico para a Região Fonte da Radiação Quilométrica das Auroras

5.1 Introdução

Para fazer um estudo numérico da propagação da AKR na cavidade auroral, é necessário o uso de um modelo físico para os parâmetros do plasma na região fonte (tais como a densidade e temperatura) para que estes estejam de acordo com as medições feitas pelos satélites artificiais, citadas no capítulo 2.

Um modelo unidimensional para a região fonte foi construído por Chiu e Shulz (1978) [1], onde os parâmetros do plasma dependem da coordenada curvilínea s (ver seção 2.5.3, figura 2.18) e são calculados supondo-se uma forma para a função distribuição em cada uma das regiões mostradas na figura 2.21. Este modelo não leva em conta as variações que os parâmetros possam ter na direção perpendicular ao campo magnético local, ou seja, é um modelo que calcula os mesmos no centro do "V-invertido". Foi construído por Kan *et al.* (1979) [101] um modelo bidimensional, mas que não será utilizado aqui por ser demasiadamente complexo para a operacionalização numérica de um estudo de traçado de raios. Ao invés de usarmos um modelo sofisticado como o de Kan *et al.*, artificialmente estimaremos a variação dos parâmetros em pontos fora do centro do feixe de elétrons que compõem o "V-invertido", sugerindo perfis para as grandezas relevantes.

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na seção 5.2 apresentamos o modelo físico para a região fonte. Na seção 5.3 será apresentada a função distribuição modelo, constituída por uma soma de distribuições do tipo DGH [102] mostrando, na seção 5.4, como são escritas as componentes do tensor dielétrico para tal distribuição. Por fim, na seção 5.5, será visto o cálculo da emissividade para a função distribuição considerada.

5.2 Modelo físico para a região fonte

O modelo apresentado nesta seção, usa uma metodologia análoga e as mesmas funções distribuição utilizadas no trabalho em que Chiu e Shulz (1978) [1] demonstraram, escolhendo convenientemente as funções distribuição dos plasmas magnetosféricos e ionosféricos no seu ponto de origem, que é possível existir um campo eletrostático ascendente proveniente da interação entre os plasmas de origem magnetosférica (que são injetados na ionosfera devido às subtormentas magnetosféricas) e plasmas de origem ionosférica. Neste artigo os autores mostram que pode surgir uma diferença de potencial da ordem de 1kV entre o topo da ionosfera e o equador magnético. Estes são, respectivamente, os pontos $s = l$ e $s = 0$ da figura 2.18. Como já mencionado no capítulo 2, $s = l$ é definido como sendo o ponto onde a frequência de ciclotron da partícula de carga q e massa m_q se iguala à frequência de colisões entre as partículas. Os autores mostram ainda que a condição suficiente para que qualquer ponto $0 \leq s \leq l$ seja acessível a partir do ponto-fonte da ionosfera $s = l$ ($v_{\parallel s}^2 \geq 0$) é

$$\frac{dV_s}{dE_s} > 0 \text{ e } \frac{d^2V_s}{dB_s^2} \leq 0, \quad (5.1)$$

onde V_s e B_s são, respectivamente, o potencial eletrostático e o campo magnético, ambos calculados no ponto s .

A dependência do potencial eletrostático com o campo magnético escolhida neste trabalho é ([36], [30], [31]) dada por

$$V_s = V_l \frac{\sqrt{B_s} - \sqrt{B_0}}{\sqrt{B_l} - \sqrt{B_0}}, \quad (5.2)$$

a qual satisfaz as condições impostas por (5.1).

Esta forma de potencial, bem como todo o modelo que será apresentado nesta seção, foi utilizada na literatura em estudos de traçado de raios usando-se o método de *Poeverlein*, sendo posteriormente empregada em conjunto com o formalismo da ótica geométrica [30, 31] no cálculo da trajetória da onda.

Na construção do modelo físico para a região fonte, serão consideradas as seguintes populações de partículas:

- 1- Plasma quente de origem magnetosférica;
- 2- Elétrons frios de origem ionosférica;
- 3- Íons frios de origem ionosférica;
- 4- Elétrons que são espelhados pelo campo magnético na ionosfera;
- 5- Elétrons que são espelhados na ionosfera e que não têm energia suficiente para sobrepujar o campo elétrico, não tendo acesso ao equador magnético (são chamados de elétrons aprisionados).

5.2.1 Plasma quente de origem magnetosférica

Elétrons

Esta população é suposta como a principal fonte de energia para a AKR e é constituída por partículas precipitantes ($v_{\parallel l}^2 > 0$) e espelhadas ($v_{\parallel l}^2 \leq 0$). Segundo Wu & Lee (1979) [22] são os elétrons espelhados que servem como principal fonte de energia para a amplificação da AKR. Os elétrons precipitantes são os que compõem os eventos de "V-invertido". De acordo com (2.5), obtemos para os elétrons

$$v_{\parallel l}^2 = v_{\parallel s}^2 - \beta_{ls} v_{\perp s}^2 + v_{ls}^{e^2}, \quad (5.3)$$

onde repetimos, por motivos de clareza, as definições de β_{ls} e v_{ls}^e , dadas por (2.7) e (2.8):

$$\beta_{ls} = \left| \frac{B_l}{B_s} - 1 \right| \quad (5.4)$$

$$v_{ls}^{e^2} = \frac{2}{m_e} |e(V_l - V_s)|. \quad (5.5)$$

É suposto que tanto os elétrons magnetosféricos precipitantes como os espelhados tenham acesso ao equador magnético, ou seja:

$$v_{\parallel 0}^2 = v_{\parallel s}^2 + \beta_{0s} v_{\perp s}^2 - v_{s0}^{e^2} \geq 0. \quad (5.6)$$

Neste caso, como consideramos um ponto genérico s tal que $0 \leq s \leq l$ é acessível do equador magnético, do teorema de Liouville temos que

$$f_{Me}(v_{\parallel s}, v_{\perp s}, s) = f_{Me}(v_{\parallel 0}, v_{\perp 0}, 0) , \quad (5.7)$$

pois o plasma é, por hipótese, não-colisional nessa região. Logo, de (5.6) e (5.7), podemos postular uma função distribuição para os elétrons magnetosféricos, que inclui os espelhados e precipitantes:

$$f_{Me}(v_{\parallel}, v_{\perp}, s) = C_{Me} \left[\theta(-v_{\parallel t}^2) \theta(-v_{\parallel s}) + \theta(v_{\parallel s}) \right] \theta(v_{\parallel 0}^2) e^{-\mu_{\parallel e}(v_{\parallel}^2 + \beta_{0s} v_{\perp}^2 + v_{s0}^e)} e^{-\mu_{\perp e} \Gamma_{0s} v_{\perp}^2} , \quad (5.8)$$

onde $\Gamma_{ss'} = B_s/B_{s'}$, $\mu_{\parallel e} = m_e/(2T_{\parallel e})$ e $\mu_{\perp e} = m_e/(2T_{\perp e})$. Além disso:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} . \quad (5.9)$$

Em (5.8) o termo com o produto $\theta(-v_{\parallel t}^2)\theta(-v_{\parallel s})$ é não nulo apenas quando $v_{\parallel t}^2 \leq 0$ e $v_{\parallel s} \leq 0$. Logo, ele corresponde aos elétrons magnetosféricos espelhados (ascendentes). Analogamente, $\theta(v_{\parallel s})$ gera o termo relativo aos elétrons precipitantes (descendentes). Como ambas as populações de elétrons devem ter acesso ao equador magnético, tudo é multiplicado por $\theta(v_{\parallel 0}^2)$. Na figura 2.21, estas populações são rotuladas pela letra M.

A densidade total de elétrons de origem magnetosférica no ponto s , pode ser obtida a partir da distribuição definida em (5.8), da seguinte forma

$$n_{Me}(s) = 2\pi \left[\int_{-\infty}^0 dv_{\parallel} \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} f_{Me}(v_{\parallel}, v_{\perp}, s) + \int_0^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} f_{Me}(v_{\parallel}, v_{\perp}, s) \right] , \quad (5.10)$$

onde o primeiro termo entre colchetes corresponde aos elétrons ascendentes e o segundo aos descendentes.

Sendo $v_{\parallel t}^2 \leq 0$ e $v_{\parallel 0}^2 \geq 0$, temos:

$$v_{\parallel 0}^2 = v_{\parallel}^2 + \beta_{0s} v_{\perp}^2 - v_{s0}^e \geq 0 \quad (5.11.a)$$

$$v_{\parallel t}^2 = v_{\parallel}^2 - \beta_{ts} v_{\perp}^2 + v_{ts}^e \leq 0 . \quad (5.11.b)$$

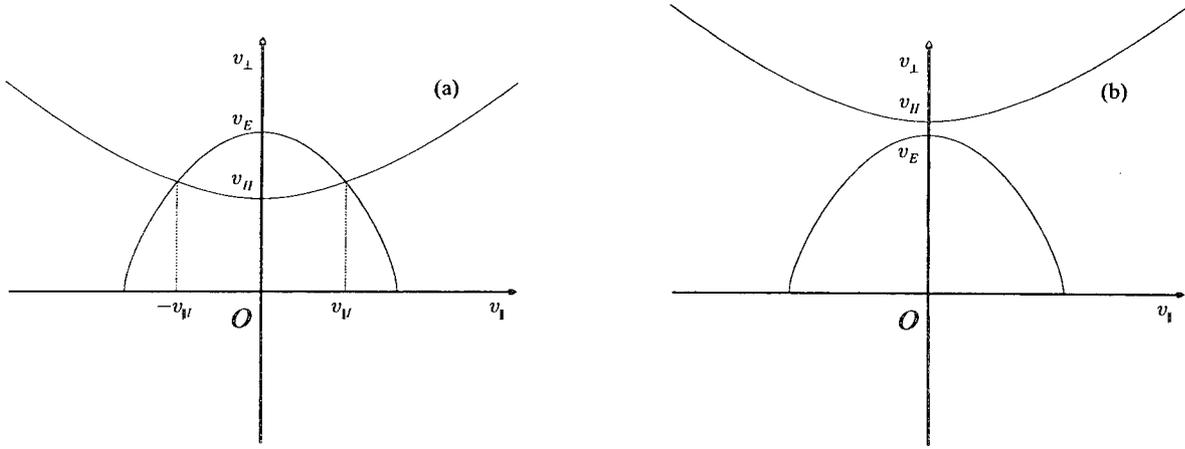


FIGURA 5.1: A elipse e a hipérbole correspondentes aos elétrons magnetosféricos para dois casos: (a) $v_H < v_E$ e (b) $v_H > v_E$.

As equações (5.11.a) e (5.11.b) representam, respectivamente, uma elipse e uma hipérbole no espaço de velocidades. Na figura 5.1 elas são mostradas nos casos em que $v_H < v_E$ e em que $v_H > v_E$, sendo:

$$v_E = \frac{v_{s0}^e}{\beta_{0s}^{1/2}} \quad (5.12.a)$$

$$v_H = \frac{v_{ls}^e}{\beta_{ls}^{1/2}} \quad (5.12.b)$$

$$v_{\parallel I} = \frac{\beta_{ls} v_{s0}^{e2} - \beta_{0s} v_{ls}^{e2}}{\beta_{ls} + \beta_{0s}} \quad (5.12.c)$$

A fim de obter a constante de normalização C_{Me} que aparece em (5.8), pode-se usar (5.10) e (5.8) colocando $s = 0$. Neste caso, o limite inferior da integral em v_{\perp} será igual a $(v_{\parallel}^2/\beta_{l0}) + v_H^2$ para os elétrons ascendentes, pois $v_E = 0$. Obtemos:

$$n_{Me}(0) = n_{Me}^{eq} = \pi C_{Me} \left(\int_{-\infty}^0 dv_{\parallel} e^{-\mu_{\parallel} v_{\parallel}^2} \int_{(v_{\parallel}^2/\beta_{l0})+v_H^2}^{\infty} dv_{\perp}^2 e^{-\mu_{\perp} v_{\perp}^2} + \int_0^{\infty} dv_{\parallel} e^{-\mu_{\parallel} v_{\parallel}^2} \int_0^{\infty} dv_{\perp}^2 e^{-\mu_{\perp} v_{\perp}^2} \right), \quad (5.13)$$

sendo n_{Me}^{eq} a densidade de elétrons de origem magnetosférica no equador magnético. Obtemos então, como constante de normalização:

$$C_{Me} = \frac{2}{\pi^{3/2}} \mu_{\parallel e}^{1/2} \mu_{\perp e} n_{Me}^{eq} \left[1 + \left(\frac{\mu_{\parallel e} \beta_{I0}}{\mu_{\parallel e} \beta_{I0} + \mu_{\perp e}} \right)^{1/2} e^{\mu_{\perp e} v_{I0}^2 / \beta_{I0}} \right]^{-1}. \quad (5.14)$$

Com isso, podemos calcular a densidade de elétrons magnetosféricos descendentes:

$$\begin{aligned} n_{Me\downarrow}(s) &= \pi C_{Me} \int_0^\infty dv_{\parallel} \int_0^\infty dv_{\perp}^2 \theta(v_{\parallel 0}^2) e^{-\mu_{\parallel e} (v_{\parallel}^2 + \beta_{0s} v_{\perp}^2 - v_{s0}^2)} e^{-\mu_{\perp e} \Gamma_{0s} v_{\perp}^2} \\ &= \frac{C_{Me}}{\alpha_e} \left[\delta_e^{1/2} \text{Di} \left(\frac{v_{s0}^2}{\delta_e^{1/2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\mu_{\parallel e}} \right)^{1/2} D_1(\mu_{\parallel e}^{1/2} v_{s0}^2) \right], \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \mu_{\parallel e} \beta_{0s} + \mu_{\perp e} \Gamma_{0s} \\ \delta_e &= \frac{\beta_{s0}}{\mu_{\perp e}} \\ \text{Di}(x) &= e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} dy \\ D_1(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_x^\infty e^{-y^2} dy = e^{x^2} \text{Erfc}(x), \end{aligned}$$

sendo $\text{Di}(x)$ a integral de Dawson e $\text{Erfc}(x)$ a função erro complementar [88].

A densidade de elétrons ascendentes pode ser calculada de forma análoga à usada para calcular a densidade de elétrons descendentes. Neste caso:

$$n_{Me\uparrow}(s) = \pi C_{Me} \int_{-\infty}^0 dv_{\parallel} \int_0^\infty dv_{\perp}^2 \theta(-v_{\parallel I}^2) \theta(v_{\parallel 0}^2) e^{-\mu_{\parallel e} (v_{\parallel}^2 + \beta_{0s} v_{\perp}^2 - v_{s0}^2)} e^{-\mu_{\perp e} \Gamma_{0s} v_{\perp}^2}. \quad (5.16)$$

Como mostra (5.16), as condições $v_{\parallel I}^2 \leq 0$ e $v_{\parallel 0}^2 \geq 0$ devem ser satisfeitas simultaneamente. Devemos portanto, considerar os dois casos mostrados na figura 5.1: (a) $v_H < v_E$ e (b) $v_H \geq v_E$.

Para $v_H < v_E$, a figura 5.1 mostra que a elipse e a hipérbole têm intersecções nos pontos $v_{\parallel} = +v_{\parallel I}$ e $v_{\parallel} = -v_{\parallel I}$. Vê-se que para $v_{\parallel} \in (-\infty, -v_{\parallel I}]$ o limite inferior da integral em v_{\perp} será igual a $(v_{\parallel}^2 / \beta_{I0}) + v_H^2$ e para $v_{\parallel} \in [-v_{\parallel I}, 0]$ este limite será igual a $v_E^2 - (v_{\parallel}^2 / \beta_{0s})$. Logo:

$$n_{Me\uparrow}(s) = \pi C_{Me} e^{\mu_{\parallel e} v_{s0}^2} \left(\int_{-\infty}^{-v_{\parallel I}} dv_{\parallel} e^{-\mu_{\parallel e} v_{\parallel}^2} \int_{(v_{\parallel}^2 / \beta_{I0}) + v_H^2}^\infty dv_{\perp}^2 e^{-\alpha_e v_{\perp}^2} + \right.$$

$$\int_{-v_{\parallel I}}^0 dv_{\parallel} e^{-\mu_{\parallel e} v_{\parallel}^2} \int_{v_E^2 - (v_{\parallel}^2/\beta_{0s})}^{\infty} dv_{\perp}^2 e^{-\alpha_e v_{\perp}^2} . \quad (5.17)$$

Então, para $v_H < v_E$:

$$n_{Me\uparrow} = \pi \frac{C_{Me}}{\alpha_e} \left[\frac{(\pi \eta_e)^{1/2}}{2} e^{-\zeta_e (v_{i_0}^2 + v_{\parallel I}^2)} + (\delta_e)^{1/2} e^{\frac{1}{\delta_e} (v_{i_0}^2 - v_{\parallel I}^2)} \text{Di} \left(\frac{v_{\parallel I}}{\delta_e^{1/2}} \right) \right] , \quad (5.18)$$

onde:

$$\zeta_e = \frac{\mu_{\perp e} \Gamma_{0s}}{\beta_{Is}}$$

$$\eta_e = \frac{\beta_{Is}}{\mu_{\parallel e} \beta_{Is} + \alpha_e} .$$

Para o outro caso ($v_H \geq v_E$), a figura 5.1 mostra que a elipse e a hipérbole não têm intersecção.

Neste caso, o limite inferior da integração em v_{\perp} será igual a v_H . Dessa forma, obtém-se:

$$n_{Me\uparrow}(s) = \frac{\pi^{3/2}}{2} \frac{\eta_e^{1/2}}{\alpha_e} C_{Me} e^{-\nu_e} , \quad (5.19)$$

onde:

$$\nu_e = \frac{\mu_{\parallel e} (\beta_{0s} v_{Is}^2 - \beta_{Is} v_{i_0}^2) + \mu_{\perp e} \Gamma_{0s} v_{Is}^2}{\beta_{Is}} . \quad (5.20)$$

A velocidade de deriva dos elétrons magnetosféricos é obtida através do cálculo da velocidade média, que é dada por:

$$\langle v_e \rangle(s) = \frac{1}{n_{Me}(s)} \int d^3v v_{\parallel} f_{Me}(v_{\parallel}, v_{\perp}, s) . \quad (5.21)$$

Pode-se separar a velocidade média, analogamente ao caso das densidades, em componentes ascendente e descendente. Obtemos

$$\langle v_e \rangle_{\downarrow}(s) = \frac{\pi C_{Me}}{2 n_{Me}(s) \alpha_e} \left[\frac{1}{\mu_{\parallel e}} + \delta_e \left(1 - e^{v_{i_0}^2/\delta_e} \right) \right] , \quad (5.22)$$

para a componente descendente, e

$$\langle v_e \rangle_{\uparrow}(s) = \begin{cases} -\frac{\pi C_{Me}}{2 n_{Me}(s) \alpha_e} \left[\delta_e e^{v_{s0}^2 / \delta_e} \left(e^{v_{\parallel I}^2 / \delta_e} - 1 \right) + \eta_e e^{-\zeta_e (v_{Is}^2 + v_{\parallel I}^2)} \right] & (v_H < v_E) \\ -\frac{\pi C_{Me}}{2 n_{Me}(s) \alpha_e} \eta_e e^{-\nu_e} & (v_H \geq v_E) \end{cases}, \quad (5.23)$$

para a componente ascendente.

A velocidade de deriva dos elétrons ascendentes refletidos é dada por:

$$v_d(s) = -\langle v_e \rangle_{\uparrow}(s). \quad (5.24)$$

A temperatura dos elétrons magnetosféricos pode ser obtida em termos da energia cinética média das partículas, resultando

$$T_{Me} = \frac{2}{3} \left[\left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 \right\rangle - \frac{1}{2} m_e \langle v_e \rangle^2 \right], \quad (5.25)$$

tanto para os elétrons descendentes quanto para os ascendentes. Obtém-se que

$$\left\langle \frac{1}{2} m_e v_{\parallel}^2 \right\rangle_{\downarrow} = \frac{m_e \pi C_{Me}}{2 n_{Me}(s) \alpha_e} \times \left[\left(\frac{v_{s0}^2}{\beta_{0s}} + \frac{1}{\alpha_e} + \frac{\delta_e}{2\beta_{0s}} \right) \delta_e^{1/2} \text{Di}(v_{s0}^2 / \delta_e^{1/2}) - \frac{\delta_e}{2\beta_{0s}} v_{s0}^2 + \frac{1}{2\alpha_e} \left(\frac{\pi}{\mu_{\parallel e}} \right)^{1/2} \text{D}_1(\mu_{\parallel e}^{1/2} v_{s0}^2) \right]$$

$$\left\langle \frac{1}{2} m_e v_{\perp}^2 \right\rangle_{\downarrow} = \frac{m_e \pi C_{Me}}{2 n_{Me}(s) \alpha_e} \times \left\{ \frac{\delta_e}{2} [v_{s0}^2 - \delta_e^{1/2} \text{Di}(v_{s0}^2 / \delta_e^{1/2})] + \frac{1}{2\mu_{\parallel e}} \left[v_{s0}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\mu_{\parallel e}} \right)^{1/2} \text{D}_1(\mu_{\parallel e}^{1/2} v_{s0}^2) \right] \right\},$$

para os elétrons magnetosféricos descendentes, e

$$\left\langle \frac{1}{2} m_e v_{\perp}^2 \right\rangle_{\uparrow} = \begin{cases} \frac{\pi C_{Me}}{2 n_{Me}(s) \alpha_e} \times \\ \left\{ e^{-\zeta_e(v_{is}^e{}^2 + v_{\parallel I}^2)} \left[\left(\frac{v_{is}^e{}^2}{\beta_{Is}} + \frac{1}{\alpha_e} + \frac{\eta_e}{2\beta_{Is}} \right) \frac{(\pi \eta_e)^{1/2}}{2} D_1(v_{\parallel I}/\eta_e^{1/2}) + \frac{\eta_e}{2\beta_{Is}} v_{\parallel I} \right] + \right. \\ \left. e^{-\zeta_e(v_{s0}^e{}^2 - v_{\parallel I}^2)/\delta_e} \left[\left(\frac{v_{s0}^e{}^2}{\beta_{0s}} + \frac{1}{\alpha_e} + \frac{\delta_e}{2\beta_{0s}} \right) \delta_e^{1/2} \text{Di}(v_{\parallel I}/\delta_e^{1/2}) - \frac{\delta_e}{2\beta_{0s}} v_{\parallel I} \right] \right\} & (v_H < v_E) \\ \\ \frac{\pi C_{Me}}{2 n_{Me}(s) \alpha_e} \frac{(\pi \eta_e)^{1/2}}{2} \left(\frac{v_{Is}^e{}^2}{\beta_{Is}} + \frac{1}{\alpha_e} + \frac{\eta_e}{2\beta_{Is}} \right) e^{-\nu_e} & (v_H \geq v_E) \end{cases}$$

$$\left\langle \frac{1}{2} m_e v_{\parallel}^2 \right\rangle_{\uparrow} = \begin{cases} \frac{\pi C_{Me}}{2 n_{Me}(s) \alpha_e} \times \\ \left\{ \frac{\eta_e}{2} e^{-\zeta_e(v_{is}^e{}^2 + v_{\parallel I}^2)} \left[v_{\parallel I} + \frac{(\pi \eta_e)^{1/2}}{2} D_1(v_{\parallel I}/\eta_e^{1/2}) \right] + \right. \\ \left. \frac{\delta_e}{2} e^{-\zeta_e(v_{s0}^e{}^2 - v_{\parallel I}^2)/\delta_e} \left[v_{\parallel I} - \delta_e^{1/2} \text{Di}(v_{\parallel I}/\delta_e^{1/2}) \right] \right\} & (v_H < v_E) \\ \\ \frac{\pi C_{Me}}{2 n_{Me}(s) \alpha_e} \left[\frac{(\pi \eta_e)^{1/2}}{2} \right]^3 e^{-\nu_e} & (v_H \geq v_E), \end{cases}$$

para os ascendentes.

Íons

Considerando a população de íons magnetosféricos como composta essencialmente por prótons, obtemos de (2.9) e (2.10):

$$v_{\parallel 0}^2 = v_{\parallel}^2 + \beta_{0s} v_{\perp}^2 + v_{s0}^p{}^2 \geq 0 \quad (5.26.a)$$

$$v_{\parallel i}^2 = v_{\parallel}^2 - \beta_{Is} v_{\perp}^2 - v_{Is}^p{}^2 \leq 0 \quad (5.26.b)$$

As quantidades onde aparece o sub-índice (ou superíndice) p (que indica prótons) são definidas da mesma forma como as correspondentes definidas para os elétrons, apenas trocando-se e por p . Postulamos ainda, para essa população, uma função distribuição formalmente idêntica à definida em (5.1).

Obtemos que:

$$C_{MP} = \frac{2}{\pi^{3/2}} \mu_{\parallel p}^{1/2} \mu_{\perp p} n_{MP}^{eq} \left\{ 1 + \text{Erf}(\mu_{\parallel p}^{1/2} v_{I0}^p) + \left(\frac{\mu_{\parallel p} \beta_{I0}}{\mu_{\parallel p} \beta_{I0} + \mu_{\perp p}} \right)^{1/2} \times e^{\mu_{\parallel p} v_{I0}^p} D_1 \left[\left(\frac{\mu_{\parallel p} \beta_{I0} + \mu_{\perp p}}{\beta_{I0}} \right) v_{I0}^p \right] \right\}^{-1} . \quad (5.27)$$

Resulta então, para as densidades:

$$n_{MP\uparrow}(s) = \frac{\pi^{3/2} C_{MP}}{2 \mu_{\parallel p}^{1/2} \alpha_p} e^{-\mu_{\parallel p} v_{s0}^p} \quad (5.28)$$

$$n_{MP\downarrow}(s) = \frac{\pi^{3/2} C_{MP}}{2 \alpha_p} \left[\eta_p^{1/2} D_1(v_{Is}^p / \eta_p^{1/2}) + \mu_{\parallel p}^{-1/2} D_2(\mu_{\parallel p}^{1/2} v_{Is}^p) \right] e^{-\mu_{\parallel p} (v_{s0}^p + v_{Is}^p)^2} , \quad (5.29)$$

onde temos

$$D_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_0^x e^{-y^2} dy = e^{x^2} \text{Erf}(x) . \quad (5.30)$$

5.2.2 Elétrons frios de origem ionosférica

Postula-se para estes elétrons uma função distribuição isotrópica [1], sabendo que estes podem ter acesso ao ponto $s = l$:

$$f_{Ie}(v_{\parallel}, v_{\perp}, s) = C_{Ie} \theta(v_{\parallel l}^2) e^{-\mu_{Ie} (v^2 + v_{s0}^e)} , \quad (5.31)$$

onde $\mu_{Ie} = m_e / (2T_{Ie})$. Obtém-se então que

$$n_{Ie}(s) = n_{Ie}(l) e^{-\mu_{Ie} v_{Is}^e} \left[1 - \left(\frac{\beta_{Is}}{\Gamma_{Is}} \right)^{1/2} e^{-\mu_{Ie} v_{Is}^e / \beta_{Is}} \right] . \quad (5.32)$$

5.2.3 Íons de origem ionosférica

Consideraremos que os íons frios são descritos por uma função distribuição anisotrópica. Como para os íons o potencial gravitacional pode ser comparável ao potencial elétrico (para $s \gtrsim l$), os efeitos gravitacionais devem ser levados em conta. Portanto, pode-se escrever que

$$v_{\parallel l}^2 = v_{\parallel s}^2 - \beta_{I_s} v_{\perp}^2 + v_{I_s}^q{}^2 + 2GM_{\oplus} \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_s} \right), \quad (5.33)$$

onde G é a constante de gravitação universal, M_{\oplus} é a massa da Terra e r_s é a altitude (distância ao centro da Terra) do ponto s . Supomos então que a distribuição de velocidades dos íons de origem ionosférica pode ser dada por

$$f_{Iq}(v_{\parallel}, v_{\perp}, s) = C_{Iq} \theta(v_{\parallel l}^2) \theta(-v_{\parallel}) e^{-\mu_{Iq}[v^2 - p(s)]}, \quad (5.34)$$

onde $\mu_{Iq} = m_q/(2T_{Iq})$ e

$$p(s) = v_{I_s}^q{}^2 - 2GM_{\oplus} \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_s} \right).$$

O fator $\theta(-v_{\parallel})$ em (5.34) aparece porque é suposto que na região $0 < s \leq l$ não existem íons descendentes [1]. Obtêm-se então, para a densidade dos íons ionosféricos:

$$n_{Iq}(s) = \begin{cases} n_{Iq}(l) e^{\mu_{Iq}p(s)} \left[1 - \left(\frac{\beta_{I_s}}{\Gamma_{I_s}} \right)^{1/2} e^{\mu_{Iq}p(s)/\beta_{I_s}} \right] & (p(s) \leq 0) \\ n_{Iq}(l) \left\{ D_1 [(\mu_{Iq}p(s))^{1/2}] - \left(\frac{\beta_{I_s}}{\Gamma_{I_s}} \right)^{1/2} D_1 \left[\left(\mu_{Iq}p(s) \frac{\Gamma_{I_s}}{\beta_{I_s}} \right)^{1/2} \right] \right\} & (p(s) > 0) \end{cases}. \quad (5.35)$$

Com os resultados apresentados até aqui, é possível calcular todos os parâmetros relevantes do plasma no centro da cavidade auroral. Na direção perpendicular, pode-se simular uma cavidade de largura finita através de um perfil gaussiano para a densidade eletrônica total, ou seja:

$$n_{Te}(x, s) = \bar{n}_{Te}(s) [\Delta - (\Delta - 1) e^{-[(x/L_1)^2 \mathcal{F}(x)]}], \quad (5.36)$$

onde $\bar{n}_{Te}(s)$ é a densidade no centro da cavidade, L_1 é um parâmetro que fornece uma medida da

largura da cavidade, $\Delta \times \bar{n}_{re}(s)$ é a densidade na borda da cavidade, e Δ é um número maior do que a unidade. A densidade eletrônica total no centro da cavidade é a soma das densidades de todas as populações eletrônicas no centro da cavidade. Para simular as microcavidades, usa-se a função $\mathcal{F}(x) = a + (b - a)\cos^2(x/L_2)$ [34], onde L_2 , em analogia a L_1 , é um parâmetro que mede a largura das microcavidades. Este perfil será analisado em maior detalhe na próxima seção.

Podem-se usar perfis similares para a velocidade de deriva e temperatura, ressaltando-se o fato de que estas quantidades devem decrescer quando nos aproximamos das bordas da cavidade, ou seja:

$$T_{me}(x, s) = \bar{T}_e(s) + [T_{me}(s) - \bar{T}_e(s)]e^{-[(x/L_1)^2\mathcal{F}(x)]} \quad (5.37)$$

$$v_d(x, s) = v_d(s)e^{-[(x/L_1)^2\mathcal{F}(x)]} \quad (5.38)$$

5.3 A função distribuição modelo

No capítulo 2 foram vistas as principais características da função distribuição eletrônica na região fonte da AKR. São elas o cone-de-perda (na região dos elétrons ascendentes), a corcova (na região $v_\perp > 0$ e $v_\parallel \approx 0$) e o buraco (na região dos elétrons descendentes). Vários estudos foram feitos nos últimos anos com base nas medições feitas por satélites mostradas no capítulo 2, com o intuito de entender os mecanismos de geração e amplificação da AKR [22, 23, 24, 74, 26, 52, 30, 31, 34, 71]. Acredita-se que o plasma quente de origem magnetosférica (população 1 da seção 5.2) seja a principal fonte de energia para a AKR, embora a contribuição dos elétrons aprisionados possa também ser importante [52].

Como um grande número de elétrons não é espelhado pelo estreitamento do campo magnético e se precipita na magnetosfera, resulta uma cavidade, como explicado no capítulo 2. A função distribuição para os elétrons refletidos (ascendentes) exibe o aspecto cone-de-perda, que serve como fonte de energia para a amplificação da AKR, como visto no capítulo 3. É no aspecto cone-de-perda que se concentra este trabalho. A distribuição real (figura 2.22) apresenta o cone-de-perda no lado dos elétrons ascendentes (espelhados). Para ondas cuja frequência é maior do que a frequência de ciclotron eletrônica e para $0 \leq N_\parallel \leq 1$, a curva ressonante é uma elipse localizada na região $v_\parallel > 0$; o cone-de-perda é aqui considerado o aspecto mais importante na função distribuição. Esse tipo de distribuição é bastante utilizado na literatura e fornece um

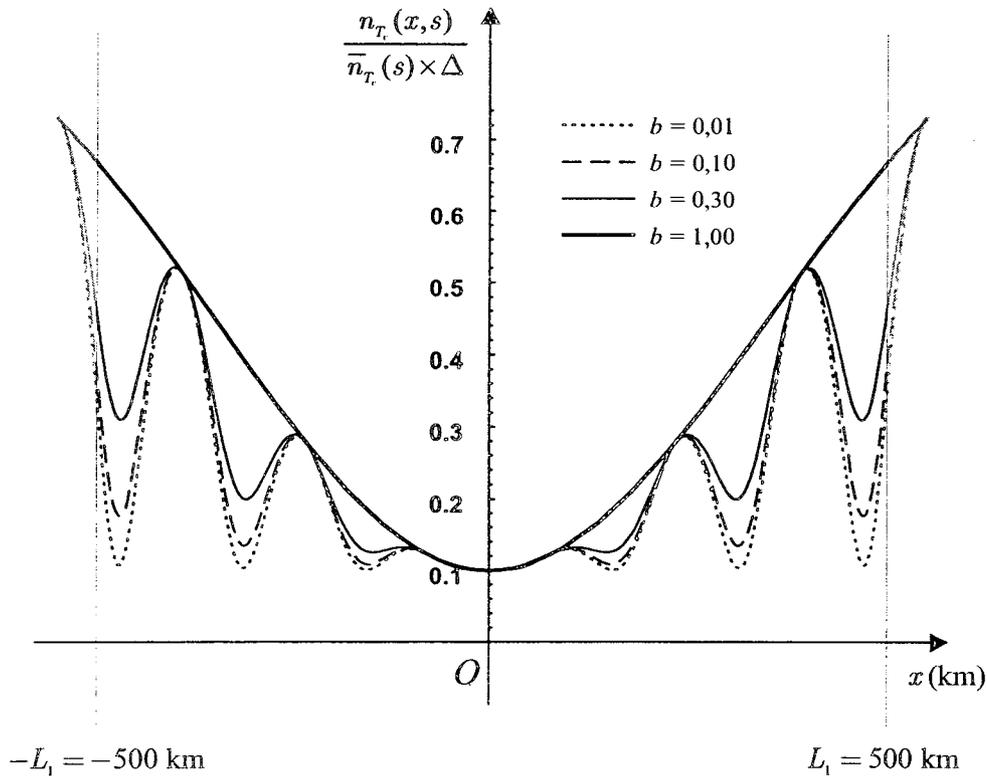


FIGURA 5.2: O perfil de densidades da cavidade auroral, definido por (5.36). No eixo das ordenadas estão os valores da densidade normalizada $n_{Te}(x,s)/[\bar{n}_{Te}(s) \times \Delta]$. Esta figura foi obtida para os quatro valores de b indicados. Os outros parâmetros são $a = 1$, $L_1 = 500$ km, $L_2 = 50$ km e $\Delta = 10$. A linha mais espessa mostra o perfil puramente Gaussiano ($a = b = 1$), onde são desconsideradas as subcavidades aurorais.

modelo bastante adequado para o estudo da AKR [71]. Podemos então escrever a distribuição eletrônica total como a soma de uma população de elétrons magnetosféricos (plasma quente, cuja distribuição exibe um aspecto cone-de-perda tipo DGH¹) mais um "background" Maxwelliano frio, ou seja²:

$$f_{e0}(\vec{u}) = \frac{n_{Me}}{n_{Te}} f_{LC}(\vec{u}) + \left(\frac{n_{Te} - n_{Me}}{n_{Te}} \right) f_M(\vec{u}), \quad (5.39)$$

onde $\vec{u} = \vec{p}/m_e c$ e n_{Te} e n_{Me} são, respectivamente, a densidade total de elétrons e a densidade de elétrons magnetosféricos na região fonte. A densidade total de elétrons é dada pela expressão (5.36), com o perfil mostrado na figura 5.2. Para uma cavidade auroral de algumas centenas de quilômetros consideraremos que a densidade na borda da cavidade é no mínimo uma ordem de

¹Ver a relação (5.40).

²Estamos usando o sistema de referência mostrado na figura 3.1, onde o sentido positivo de $v_{||}$ é o mesmo do campo geomagnético. Assim, $v_{||} \geq 0$ se refere aos elétrons refletidos.

grandeza maior do que a densidade no centro ($\Delta_{\min} = 10$)³.

Tanto $f_{LC}(\vec{u})$ quanto $f_M(\vec{u})$ são dadas pela distribuição [103],

$$f_\alpha(\vec{u}) = A_\alpha u_\perp^{2l_\alpha} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel)}, \quad (5.40)$$

onde

$$A_\alpha = \frac{\mu_\alpha^{l_\alpha+1}}{4\pi 2^{l_\alpha} l_\alpha! \gamma_\alpha K_{l_\alpha+2}(\mu_\alpha)}, \quad (5.41.a)$$

$$\mu_\alpha = \frac{m_e c^2}{T_\alpha}, \quad (5.41.b)$$

$$\beta_\alpha = \frac{v_\alpha}{c}, \quad (5.41.c)$$

$$\gamma_\alpha = (1 - \beta_\alpha^2)^{-1/2}. \quad (5.41.d)$$

Nas expressões acima, v_α é a velocidade de deriva das partículas da população α e l_α é um número inteiro positivo chamado de índice do cone-de-perda. Se $\alpha = LC$, $l_{LC} \geq 1$ e para $\alpha = M$, $l_M = 0$. Além disso, $K_n(x)$ é a função modificada de Bessel de ordem n . Como visto no capítulo 3, se houver uma região no espaço de velocidades onde a função distribuição seja tal que $\partial f_{e0}/\partial u_\perp \geq 0$, é possível o surgimento de instabilidades. Este é o caso da função distribuição $f_{LC}(\vec{u})$ em (5.39).

Por possuir o aspecto cone-de-perda, a função distribuição dada por (5.39) apresenta uma região onde $\partial f_{e0}/\partial u_\perp \geq 0$, podendo auxiliar a amplificação de ondas.

Pode-se ainda reescrever (5.39) como

$$f_{e0}(\vec{u}) = \frac{\zeta}{\zeta + 1} f_{LC}(\vec{u}) + \frac{1}{\zeta + 1} f_M(\vec{u}), \quad (5.42)$$

onde

$$\zeta(x, s) = \frac{n_{Me}(x, s)}{n_{Te}(x, s) - n_{Me}(x, s)} \quad (5.43)$$

é a razão entre a densidade dos elétrons magnetosféricos quentes e a densidade dos elétrons que compõem o plasma frio Maxwelliano (plasma de fundo).

³Para a velocidade de deriva e temperatura dos elétrons magnetosféricos usaremos os perfis definidos em 5.37 e 5.38.

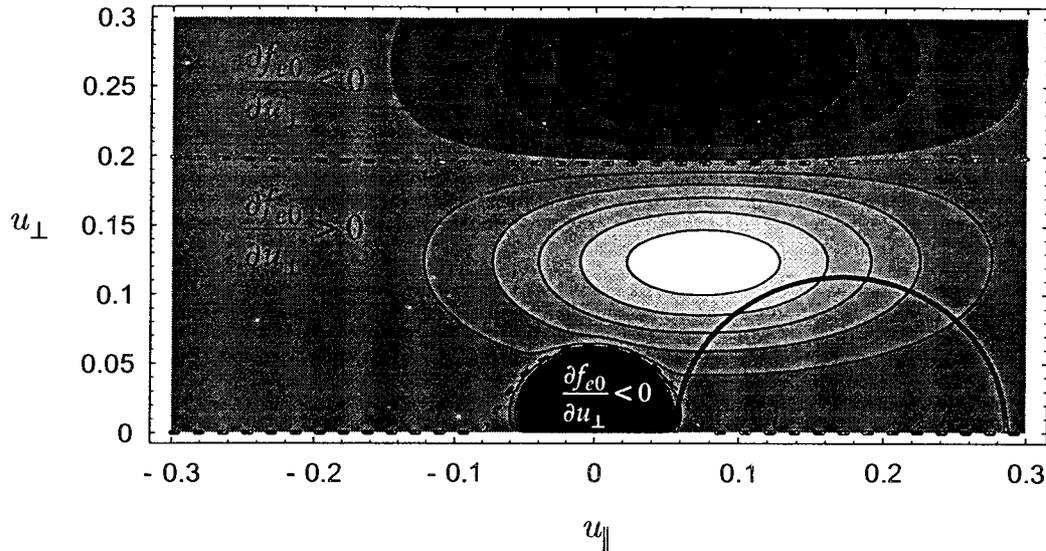


FIGURA 5.3: Mapa de contornos de $\partial f_{e0}(\vec{u})/\partial u_{\perp}$, mostrando as regiões onde $\partial f_{e0}(\vec{u})/\partial u_{\perp} > 0$ e $\partial f_{e0}(\vec{u})/\partial u_{\perp} < 0$. Este mapa foi feito usando-se os seguintes parâmetros: $z = 2,5 R_{\Phi}$, $\varsigma = 3,717121$, $T_{LC} = 4,762389$ keV, $T_M = 0,1$ keV, $\beta_{LC} = 0,07385439$ e $l_{LC} = 2$. As linhas pontilhadas são as curvas sobre as quais $\partial f_{e0}(\vec{u})/\partial u_{\perp} = 0$. Também está mostrada a elipse ressonante para $N_{\parallel} = 0,168$ e $\omega/\Omega_e = 1,008$, quase totalmente inserida na região de instabilidade, onde $\partial f_{e0}(\vec{u})/\partial u_{\perp} > 0$.

Na figura 5.3 está mostrada parte da região onde $\partial f_{e0}(\vec{u})/\partial u_{\perp} \geq 0$, no caso em que $z = 2,5 R_{\Phi}$. Note que a elipse ressonante está com a sua maior parte imersa em uma região onde $\partial f_{e0}(\vec{u})/\partial u_{\perp} \geq 0$.

5.4 As componentes do tensor dielétrico

No capítulo 3 são apresentadas as expressões das componentes do tensor dielétrico para um plasma magnetizado, válidas para qualquer função distribuição de equilíbrio. As expressões (3.77.b) e (3.77.c) contêm integrais onde aparece a função distribuição de equilíbrio, onde (5.42) deve ser inserida. Dessa forma, as componentes do tensor dielétrico se dividem em duas partes, correspondentes à cada população.

Temos

$$f_{e0}(\vec{u}) = \sum_{\alpha=M,LC} c_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{u}) \quad (5.44)$$

$$\vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega} = \sum_{\alpha=M,LC} c_{\alpha} \vec{\epsilon}_{\vec{k},\omega}(\alpha) \quad (5.45)$$

onde:

$$\begin{aligned} c_M &= \frac{1}{\zeta + 1} \\ c_{LC} &= \frac{\zeta}{\zeta + 1} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Analisaremos aqui a integral que aparece em (3.77.b) com o objetivo de mostrar o procedimento que leva à obtenção de expressões de todas as componentes do tensor dielétrico para a função distribuição de equilíbrio (5.42).

Temos que

$$I(n, m, h) = \sum_{\alpha=M, LC} c_\alpha I_\alpha(n, m, h) , \quad (5.47)$$

onde

$$I_\alpha(n, m, h) = \int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2m-1} \mathcal{L} f_\alpha(\vec{u})}{\gamma - nY_e - N_\parallel u_\parallel} \quad (5.48)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_\parallel u_\parallel) \frac{\partial}{\partial u_\perp} + N_\parallel u_\perp \frac{\partial}{\partial u_\parallel} \right] . \quad (5.49)$$

Usando-se (5.40), pode-se mostrar que:

$$\mathcal{L} = \frac{\xi_\alpha}{\gamma u_\perp} \left[u_\perp^2 + \frac{2l_\alpha}{\xi_\alpha} (\gamma - N_\parallel u_\parallel) \right] f_\alpha(\vec{u}) , \quad (5.50)$$

onde:

$$\xi_\alpha = -\mu_\alpha \gamma_\alpha (1 - N_\parallel \beta_\alpha) . \quad (5.51)$$

A integral (5.48) pode então ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_\alpha(n, m, h) &= \frac{2\pi A_\alpha \xi_\alpha}{n_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^h \int_{\gamma_\parallel}^{\infty} d\gamma \frac{(\gamma^2 - \gamma_\parallel^2)^{m+l_\alpha-1}}{\gamma + nY - N_\parallel u_\parallel} \\ &\times \left[\gamma^2 - \gamma_\parallel^2 + \frac{2l_\alpha}{\xi_\alpha} (\gamma - N_\parallel u_\parallel) \right] e^{-\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel)} , \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde

$$\gamma_{\parallel} = (1 + u_{\parallel}^2)^{1/2} .$$

Fazendo-se a troca de variável $x = \gamma - \gamma_{\parallel}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} I_{\alpha}(n, m, h) &= \frac{2\pi A_{\alpha} \xi_{\alpha}}{n_{\alpha}} \times \\ &\int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} \int_0^{\infty} dx \frac{(x^2 + 2\gamma_{\parallel} x)^{m+l_{\alpha}+1}}{x + \alpha_n} \\ &\times \left[x^2 + 2\gamma_{\parallel} x - \gamma_{\parallel}^2 + \frac{2l_{\alpha}}{\xi_{\alpha}} (x + \gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}) \right] e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} x} , \end{aligned} \quad (5.53)$$

onde $\alpha_n = \gamma_{\parallel} + nY - N_{\parallel} u_{\parallel}$.

Expandindo $(x^2 + 2\gamma_{\parallel} x)^{m+l_{\alpha}+1}$ em binômio de Newton, obtemos:

$$(x^2 + 2\gamma_{\parallel} x)^{m+l_{\alpha}+1} = \sum_{k=0}^{m+l_{\alpha}+1} \frac{(m+l_{\alpha}+1)!}{k!(m+l_{\alpha}-k-1)!} (2\gamma_{\parallel})^{m+l_{\alpha}-k-1} x^{m+l_{\alpha}+k-1} . \quad (5.54)$$

Logo, (5.53) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} I_{\alpha}(n, m, h) &= \frac{2\pi A_{\alpha} \xi_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{k=0}^{m+l_{\alpha}+1} \frac{(m+l_{\alpha}+1)!}{k!(m+l_{\alpha}-k-1)!} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h (2\gamma_{\parallel})^{m+l_{\alpha}-k-1} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} \\ &\times \left[R_n(m+l_{\alpha}+k+1) + 2 \left(\gamma_{\parallel} + \frac{l_{\alpha}}{\xi_{\alpha}} \right) R_n(m+l_{\alpha}+k) \right. \\ &\left. + \frac{2l_{\alpha}}{\xi_{\alpha}} (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}) R_n(m+l_{\alpha}+k-1) \right] , \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde

$$R_n(j) = \int_0^{\infty} \frac{x^j}{x + \alpha_n} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} x} dx . \quad (5.56)$$

Pode-se demonstrar que a integral $R_n(j)$ pode ser escrita como

$$R_n(j) = \frac{1}{(\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha})^j} \left[\theta(j) \sum_{i=0}^{j-1} (j-i-1)! x_{\alpha n}^i + x_{\alpha n}^j e^{-x_{\alpha n}} E_1(-x_{\alpha n}) \right] , \quad (5.57)$$

onde

$$\begin{aligned}
 x_{\alpha n} &= -\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \alpha_n \\
 \theta(j) &= \begin{cases} 1, & j > 0 \\ 0, & j \leq 0 \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Além disso, $E_1(-x_{\alpha n})$ é a integral exponencial, definida como [88]:

$$E_1(-x) = \int_{-x_{\alpha n}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \text{para } |\arg(-x_{\alpha n})| < \pi. \tag{5.59}$$

Como estamos usando o contorno de Landau, temos que $\omega = \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} (\omega_r + i\omega_i)$. Dessa forma é satisfeita a condição $|\arg(-x_{\alpha n})| < \pi$ em (5.59). Usando-se a fórmula de Plemelj, definida em (3.67), podemos escrever $E_1(-x_{\alpha n})$ como

$$E_1(-x_{\alpha n}) = -E_i(x_{\alpha n}) - i\pi\theta(nY + N_{\parallel}u_{\parallel} - \gamma_{\parallel}), \tag{5.60}$$

sendo $E_i(x_{\alpha n})$ dado por

$$E_i(x_{\alpha n}) = -P \int_{-x_{\alpha n}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \tag{5.61}$$

onde P denota a parte principal da integral. Com isso, pode-se demonstrar que $I_{\alpha}(n, m, h)$ é escrita como [31]:

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha}(n, m, h) &= 2\pi A_{\alpha} \sum_{i=0}^j \frac{j!}{(j-i)!i!} \frac{1}{(\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha})^{j+i}} \left\{ \theta(j+i) \sum_{k=0}^{j+i-1} (j+i-1-k)! \right. \\
 &\quad \times [D_1 L(h, j-i, k) + D_2 L(h+1, j-i, k) + D_3 L(h+2, j-i, k)] \\
 &\quad + (j+i)! [C_1 L(h, j-i, 0) + C_2 L(h+1, j-i, 0) + C_3 L(h, j-i+1, 0) \\
 &\quad + D_1 H(h, j-i, j+i) + D_2 H(h+1, j-i, j+i) \\
 &\quad \left. + D_3 H(h+2, j-i, j+i) \right\}, \tag{5.62}
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 j &= l_{\alpha} + m - 1 \\
 D_1 &= 2l_{\alpha} nY + \xi_{\alpha} (n^2 Y^2 - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= 2\xi_\alpha nY N_\parallel \\
 D_3 &= -\xi_\alpha(1 - N_\parallel^2) \\
 C_1 &= \frac{2l_\alpha}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} + \frac{\xi_\alpha}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \left[nY + \frac{l_\alpha + m + i}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \right] \\
 C_2 &= \frac{N_\parallel \xi_\alpha}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \\
 C_3 &= \frac{\xi_\alpha}{2\mu_\alpha \gamma_\alpha} .
 \end{aligned}$$

Temos ainda:

$$L(a, b, c) = \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^a (2\gamma_\parallel)^b e^{-\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} x_{\alpha n}^c \quad (5.63)$$

$$H(a, b, c) = \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^a (2\gamma_\parallel)^b e^{-\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} x_{\alpha n}^c e^{-x_{\alpha n}} E_1(-x_{\alpha n}) . \quad (5.64)$$

Para a função distribuição de equilíbrio (5.42), o termo designado por e_{zz} em (3.77) pode ser escrito como:

$$e_{zz} = \sum_{\alpha=M,LC} c_\alpha e_{zz}^\alpha , \quad (5.65)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^\alpha &= 2\pi A_\alpha X_e \sum_{i=0}^{l_\alpha} \frac{l_\alpha!}{i!(l_\alpha - i)!} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel (2\gamma_\parallel)^{l_\alpha - i} e^{-\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} \right. \\
 &\quad \left. \times [\beta_\alpha R_0(l_\alpha + i + 1) + (\beta_\alpha \gamma_\parallel - u_\parallel) R_0(l_\alpha + i)] \right\} , \quad (5.66)
 \end{aligned}$$

sendo $R_0(n)$ definida pela expressão (5.57). Para $N_\parallel < 1$ temos que e_{zz} é real, uma vez que a condição $\alpha_0 = N_\parallel u_\parallel - \gamma_\parallel \leq 0$ nunca é satisfeita. Pode-se mostrar ainda que:

$$e_{zz}^\alpha = 2\pi A_\alpha X_e \sum_{i=0}^{l_\alpha} \frac{l_\alpha!}{i!(l_\alpha - i)!} \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha + i}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel (2\gamma_\parallel)^{l_\alpha - i} e^{-\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} G(l_\alpha + i) \right] , \quad (5.67)$$

onde:

$$G(j) = \beta_\alpha j! + \xi_\alpha u_\parallel \left[\theta(j) \sum_{i=0}^{j-1} (j - i - 1)! x_{\alpha 0}^i + x_{\alpha 0}^j e^{-x_{\alpha 0}} E_1(-x_{\alpha 0}) \right] . \quad (5.68)$$

Da relação (5.60) vemos que $E_1(-x_{\alpha 0}) = -E_i(x_{\alpha 0})$ pois, para $N_\parallel < 1$, $x_{\alpha 0} < 0$. As componentes do tensor dielétrico serão então expressas em termos das integrais (5.63), (5.64) e (5.66).

5.5 A lâmina de plasma e a expressão para a emissividade

A figura 5.4 mostra, na sua parte superior, a região fonte. A ampliação na parte inferior desta figura mostra essa região em destaque, sendo descrita localmente e de forma aproximada por uma lâmina de plasma de largura $2L_1$ ⁴. Embora o campo geomagnético seja função da posição, se a onda se propagar dentro da lâmina com um ângulo suficientemente pequeno em relação às direções x e y (direção que aponta para fora da página, como mostra a figura 5.4), podemos considerar o campo magnético \vec{B}_0 como localmente uniforme. Neste caso, pode-se aproximar a cavidade auroral por uma lâmina de plasma como a da figura 5.4.

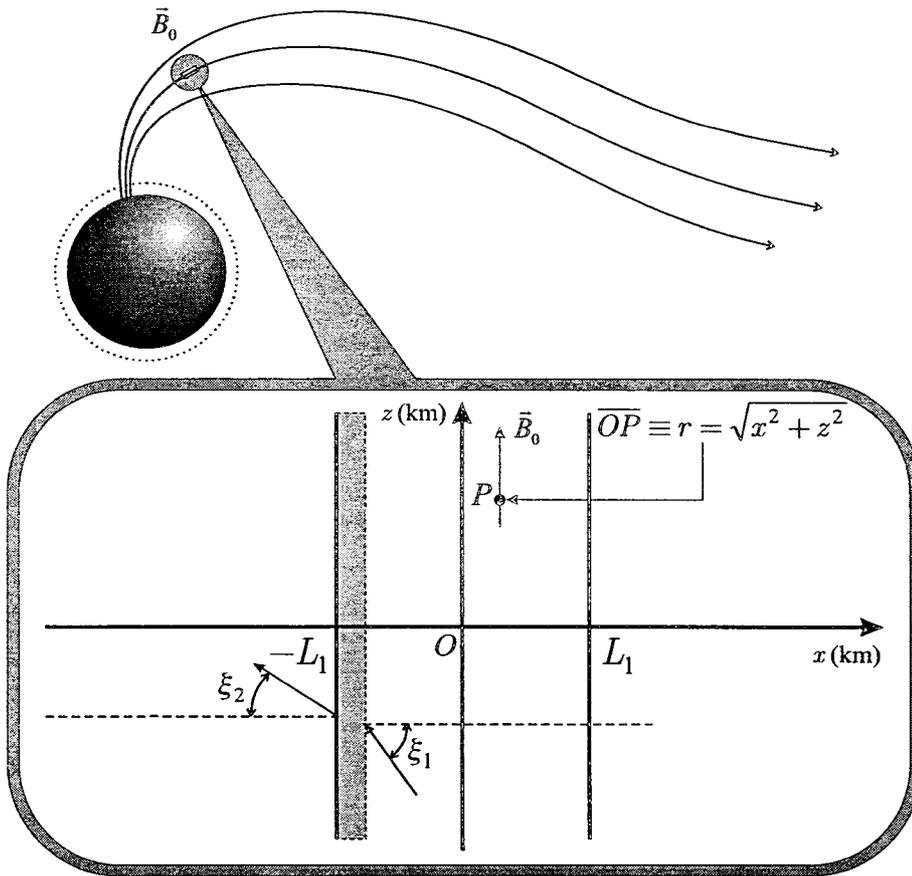


FIGURA 5.4: A lâmina de plasma. Na parte superior está mostrada a região da magnetosfera à qual se refere a lâmina. Note que o campo geomagnético aponta na direção z e pode ser considerado uniforme nessa região.

Escrevendo a Lei de Snell, obtemos:

⁴O parâmetro L_1 é da mesma ordem de grandeza da largura da cavidade auroral, como mostra a equação (5.36)

$$\underbrace{N_1 \text{sen} \xi_1}_{N_{\parallel}} = \underbrace{N_2 \text{sen} \xi_2}_{N_{\parallel}} . \quad (5.69)$$

Conclui-se que a componente do índice de refração paralela ao campo magnético é contínua e constante ao longo de qualquer superfície paralela ao eixo z . É conveniente então expressar a emissividade em termos de N_{\parallel} , usando-se a definição abaixo:

$$\eta_N(\omega, N_{\parallel}) = \frac{1}{V} \frac{d^2 \bar{P}}{d\omega dN_{\parallel}} . \quad (5.70)$$

A potência média \mathcal{P}_ω emitida por unidade de volume e unidade de frequência é dada por:

$$\mathcal{P}_\omega = \int \eta(\omega, \theta) d\Omega_{\vec{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_N(\omega, N_{\parallel}) dN_{\parallel} . \quad (5.71)$$

Usando $d\Omega_{\vec{k}} = \text{sen} \theta d\theta d\varphi$ e observando que $dN_{\parallel} = d(N \cos \theta) = -N \text{sen} \theta d\theta + \cos \theta dN$, obtemos de (5.71) que

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \eta(\omega, \theta) \text{sen} \theta d\theta = - \int_{\pi}^0 \eta_N(\omega, N_{\parallel}) N \text{sen} \theta d\theta , \quad (5.72)$$

de onde concluímos que:

$$\eta(\omega, \theta) = \frac{N}{2\pi} \eta_N(\omega, N_{\parallel}) . \quad (5.73)$$

Devemos incorporar a função distribuição de equilíbrio (5.44) na expressão para a emissividade, dada por (5.70). Obtemos:

$$\eta_N(\omega, N_{\parallel}) = \sum_{\alpha=M, LC} c_{\alpha} \eta_{N\alpha}(\omega, N_{\parallel}) . \quad (5.74)$$

A partir de (4.46) obtemos que:

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi c^3} \int d^3 N \int_0^{\infty} d\omega \frac{\delta[\Lambda_r(\vec{N}, \omega)]}{\omega} \sum_{i,j} \lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) T_{ji}(\vec{N}, \omega) , \quad (5.75)$$

onde

$$T_{ij}(\omega, \vec{N}) = 2\pi e^2 n_{\alpha} \int d^3 u f_{\alpha}(\vec{u}) \sum_{-\infty}^{\infty} j_{ni} j_{nj}^* \delta \left[\omega \left(1 - \frac{N_{\parallel} u_{\parallel}}{\gamma} \right) - \frac{n\Omega_e}{\gamma} \right] \quad (5.76)$$

$$\vec{j}_n = \frac{c}{\gamma} \left[\frac{nu_{\perp}}{b} J_n(b), iu_{\perp} J'_n(b), u_{\parallel} J_n(b) \right] , \quad (5.77)$$

onde, lembrando, $J_n(b)$ e $J'_n(b)$ a função de Bessel de ordem n e sua derivada, respectivamente, de argumento $b = k_\perp u_\perp / \Omega_e$. O tensor $\vec{\chi}(\vec{N}, \omega)$ é representado pela matriz transposta da matriz dos cofatores de $\vec{\Lambda}(\vec{N}, \omega)$, ou seja:

$$\vec{\chi}(\vec{N}, \omega) = \begin{pmatrix} \Lambda_{22}\Lambda_{33} - \Lambda_{23}\Lambda_{32} & \Lambda_{32}\Lambda_{13} - \Lambda_{12}\Lambda_{33} & \Lambda_{12}\Lambda_{23} - \Lambda_{13}\Lambda_{22} \\ \Lambda_{23}\Lambda_{31} - \Lambda_{21}\Lambda_{33} & \Lambda_{11}\Lambda_{33} - \Lambda_{13}\Lambda_{31} & \Lambda_{13}\Lambda_{21} - \Lambda_{11}\Lambda_{23} \\ \Lambda_{21}\Lambda_{32} - \Lambda_{22}\Lambda_{31} & \Lambda_{12}\Lambda_{31} - \Lambda_{11}\Lambda_{32} & \Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{12}\Lambda_{21} \end{pmatrix}, \quad (5.78)$$

sendo o tensor $\vec{\Lambda}(\vec{N}, \omega)$ definido em (4.42).

Podemos então escrever a emissividade como:

$$\eta_{N\alpha}(\omega, N_{\parallel}) = \left(\frac{N_r}{N}\right)^2 \cos\beta \frac{\omega^2}{\pi c^3} \int_0^\infty dN_\perp N_\perp \delta[\Lambda_r(\vec{N}, \omega)] \sum_{i,j} \lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) T_{ji}(\vec{N}, \omega). \quad (5.79)$$

Utilizando-se a relação

$$\delta[f(x)] = \sum_p \left\{ \left[\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_p} \right]^{-1} \delta(x - x_p) \right\},$$

onde x_p são as raízes de $f(x) = 0$, obtemos:

$$\eta_{N\alpha}(\omega, N_{\parallel}) = \left(\frac{N_r}{N}\right)^2 \cos\beta \frac{\omega^2}{\pi c^3} \sum_p D_p \int_0^\infty dN_\perp N_\perp \delta(N_\perp - N_{\perp p}) \sum_{i,j} \lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) T_{ji}(\vec{N}, \omega), \quad (5.80)$$

onde

$$D_p = \left| \frac{d\Lambda_r(\vec{N}, \omega)}{dN_\perp} \right|_{N_\perp = N_{\perp p}}, \quad (5.81)$$

e $N_{\perp p}$ são as raízes da relação de dispersão $\Lambda_r(\vec{N}, \omega) = 0$. Introduzindo (5.76) em (5.80), com o uso de (5.40), obtemos:

$$\begin{aligned} \eta_{N\alpha}(\omega, N_{\parallel}) &= \left(\frac{N_r}{N}\right)^2 \cos\beta X \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 A_\alpha m_e c^2 \int_{-\infty}^\infty du_{\parallel} \int_0^\infty du_{\perp} u_{\perp}^{2l_\alpha+2} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel})} \sum_p N_{\perp p} D_p \\ &\times \sum_{i,j} \lambda_{ij} \sum_{n=-\infty}^\infty j_{nj} j_{ni}^* \delta \left[\omega \left(1 - \frac{N_{\parallel} u_{\parallel}}{\gamma} \right) - \frac{n\Omega_e}{\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Pode-se mostrar então que a emissividade para um dado modo de propagação p é:

$$\eta_{N\alpha p}(\omega, N_{\parallel}) = \left(\frac{N_r}{N}\right)^2 \cos\beta X \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 A_\alpha m_e c^2 \frac{N_{\perp p}}{\left| \frac{\partial \Lambda_r(\vec{N}, \omega)}{\partial N_\perp} \right|_{N_\perp = N_{\perp p}}} \sum_{n=1}^\infty \int_{u_-}^{u_+} du_{\parallel} \left[\bar{\gamma} - 1 - u_{\parallel}^2 \right]^{l_\alpha+1}$$

$$\times e^{-\mu_\alpha \gamma_\alpha (\bar{\gamma} - \beta_\alpha u_\parallel)} \sum_{ij} \xi_{ni}^* \lambda_{ij}(\vec{N}, \omega) \xi_{nj}, \quad (5.83)$$

onde:

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_n &= \left[\frac{n}{\bar{b}_p} J_n(\bar{b}_p), iJ'_n(\bar{b}_p), \frac{N_\parallel u_\parallel}{Y \bar{b}_p} J_n(\bar{b}_p) \right] \\ \bar{b}_p &= \frac{N_\perp}{Y} (\bar{\gamma}^2 - 1 - u_\parallel^2)^{1/2} \\ \bar{\gamma} &= nY + N_\parallel u_\parallel \\ u_\pm &= \frac{nN_\parallel Y \pm \sqrt{n^2 Y^2 - 1 + N_\parallel^2}}{1 - N_\parallel^2} \end{aligned}$$

A expressão (5.83) pode ser utilizada na equação de transferência para o cálculo da intensidade da AKR, dada por:

$$\frac{I_\omega(s)}{[N_r(s)]^2} = e^{-2 \int_{s_0}^s ds \operatorname{Im}[k_\perp(s')]} \left[\frac{I_\omega(s_0)}{[N_r(s_0)]} + \int_{s_0}^s ds' N \frac{\eta_N(\omega, N_\parallel)}{2\pi N_r^2} e^{2 \int_{s_0}^{s'} ds'' \operatorname{Im}[k_\perp(s'')]} \right] \quad (5.84)$$

A equação acima permite obter a intensidade da onda na posição s , sendo conhecida a intensidade na posição inicial s_0 . É necessário ainda calcular em cada ponto da trajetória a emissividade e a parte imaginária da componente perpendicular do vetor de onda, o que pode ser feito a partir das equações (4.66). Além disso, pode-se supor que $|N_r(s_0)|$ e $|N_r(s)|$ são bastante próximos da unidade. Isto é válido sempre que o plasma for rarefeito [32] e, como o plasma da região fonte da AKR o é, tal aproximação se justifica.

No próximo capítulo, onde será feito o estudo numérico da propagação e absorção da AKR na cavidade auroral, a equação (5.84) será aplicada na obtenção do fator de amplificação, definido em (4.1).

Capítulo 6

Análise Numérica e Discussão dos Resultados

6.1 Introdução

Para realizar um estudo quantitativo da propagação, absorção ou da amplificação da AKR, foi necessário desenvolver um modelo físico para a região fonte [36, 30], baseado no que foi descrito por Chiu e Shulz [1]. A partir do modelo físico para a região fonte é possível estimar os valores da temperatura, densidade e velocidade de deriva dos elétrons e íons que constituem o plasma nessa região, ao longo das linhas geomagnéticas. Mesmo sendo um modelo simplificado, ele permite estudar quantitativamente via traçado de raios, a trajetória e a absorção ou a amplificação da onda enquanto ela se propaga na cavidade auroral.

Os tópicos deste capítulo estão distribuídos na seguinte forma: na seção 6.2 será abordado o procedimento de traçado de raios e brevemente explicada a sistemática utilizada para viabilizar o estudo da AKR por este procedimento. Por fim, será apresentada na seção 6.3, uma discussão dos resultados obtidos através desse estudo.

6.2 O procedimento de traçado de raios

Como mostra a figura 5.4, a região auroral é descrita por uma lâmina de plasma bidimensional, onde o campo geomagnético aponta na direção z e o eixo x aponta na direção da latitude magnética. As inhomogeneidades estão todas ao longo do eixo x , sendo o plasma homogêneo nas direções y e z . A relação de dispersão $\Lambda(\vec{N}, \omega, x, z) = \det[\vec{\Lambda}(\vec{N}, \omega)] = 0$ pode ser escrita como:

$$\Lambda(\vec{N}, \omega, x, z) = AN_{\perp}^4 + BN_{\perp}^2 + C = 0, \quad (6.1)$$

onde os coeficientes A , B e C são escritos em termos das quantidades definidas em (3.77.a), (3.77.b) e (3.77.c):

$$A = (1 + \chi_{11})(1 - \chi_{33}) + \chi_{13}(2N_{\parallel} + \chi_{13}) + \chi_{33}N_{\parallel}^2 \quad (6.2.a)$$

$$B = 2\chi_{12}\chi_{23}(N_{\parallel} + \chi_{13}) - \chi_{12}^2(1 - \chi_{13}) \\ + (\chi_{11} + 1 - N_{\parallel}^2)[\chi_{23}^2 - 1 - e_{zz} + \chi_{33}(\chi_{22} + 1 - N_{\parallel}^2)] \\ - (\chi_{22} + 1 - N_{\parallel}^2)[1 + \chi_{11} + \chi_{13}(2N_{\parallel} + \chi_{13})] \quad (6.2.b)$$

$$C = (1 + e_{zz})[(\chi_{11} + 1 - N_{\parallel}^2)(\chi_{22} + 1 - N_{\parallel}^2) + \chi_{12}^2] \quad (6.2.c)$$

A trajetória das ondas e seus vetores de onda podem ser obtidos através da solução das equações de traçado de raios, dadas por (4.66.a) e (4.66.b):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{-\nabla_{\vec{k}}\Lambda_r}{\partial\Lambda_r/\partial\omega} \\ \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\nabla_{\vec{r}}\Lambda_r}{\partial\Lambda_r/\partial\omega} ,$$

onde Λ_r indica a parte real da relação de dispersão, obtida com uso das partes hermiteanas das componentes do tensor dielétrico.

Componente a componente, podemos reescrever as equações de traçado de raios como:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\Lambda_r/\partial k_x}{\partial\Lambda_r/\partial\omega} \quad (6.3.a)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial\Lambda_r/\partial k_z}{\partial\Lambda_r/\partial\omega} \quad (6.3.b)$$

$$\frac{dk_x}{dt} = \frac{\partial\Lambda_r/\partial x}{\partial\Lambda_r/\partial\omega} \quad (6.3.c)$$

$$\frac{dk_z}{dt} = \frac{\partial\Lambda_r/\partial z}{\partial\Lambda_r/\partial\omega} \quad (6.3.d)$$

As derivadas da relação de dispersão podem ser obtidas de (6.1), sendo escritas como:

$$\frac{\partial\Lambda_r}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x}N_{\perp}^4 + \frac{\partial B}{\partial x}N_{\perp}^2 + \frac{\partial C}{\partial x} \quad (6.4.a)$$

$$\frac{\partial\Lambda_r}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z}N_{\perp}^4 + \frac{\partial B}{\partial z}N_{\perp}^2 + \frac{\partial C}{\partial z} \quad (6.4.b)$$

$$\frac{\partial \Lambda_r}{\partial k_x} = \frac{c}{\omega} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial N_\perp} \right) N_\perp^4 + \left(\frac{\partial B}{\partial N_\perp} \right) N_\perp^2 + \frac{\partial C}{\partial N_\perp} + 4AN_\perp^3 + 2BN_\perp \right] \quad (6.4.c)$$

$$\frac{\partial \Lambda_r}{\partial k_z} = \frac{c}{\omega} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial N_\parallel} \right) N_\perp^4 + \left(\frac{\partial B}{\partial N_\parallel} \right) N_\perp^2 + \frac{\partial C}{\partial N_\parallel} \right] \quad (6.4.d)$$

$$\frac{\partial \Lambda_r}{\partial \omega} = \left(\frac{\partial A}{\partial \omega} - \frac{4A}{\omega} \right) N_\perp^4 + \left(\frac{\partial B}{\partial \omega} - \frac{2B}{\omega} \right) N_\perp^2 + \frac{\partial C}{\partial \omega} . \quad (6.4.e)$$

As derivadas dos coeficientes A , B e C são dadas em termos de χ_{ij} e de suas derivadas, dadas por:

$$\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial x} = \chi_{ij} d_x^{n_e} + \frac{X}{Y^{\delta_{iz} + \delta_{jz}}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m s_{ij}(n, m) \frac{\partial}{\partial x} I(n, m, \delta_{iz} + \delta_{jz}) \quad (6.5.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial z} &= \chi_{ij} d_z^{n_e} - (\delta_{iz} + \delta_{jz}) \chi_{ij} d_z^{B_0} + \frac{X}{Y^{\delta_{iz} + \delta_{jz}}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m s_{ij}(n, m) \frac{\partial}{\partial z} I(n, m, \delta_{iz} + \delta_{jz}) \\ &\quad - d_z^{B_0} \frac{X}{Y^{\delta_{iz} + \delta_{jz}}} \sum_{m=2}^{\infty} 2(m-1) \left(\frac{N_\perp}{Y} \right)^{2(m-1)-1} \sum_{n=-m}^m s_{ij}(n, m) I(n, m, \delta_{iz} + \delta_{jz}) \end{aligned} \quad (6.5.c)$$

$$\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial N_\perp} = \frac{X}{Y^{1+\delta_{iz} + \delta_{jz}}} \sum_{m=1}^{\infty} 2(m-1) \left(\frac{N_\perp}{Y} \right)^{2(m-1)-1} \sum_{n=-m}^m s_{ij}(n, m) I(n, m, \delta_{iz} + \delta_{jz}) \quad (6.5.d)$$

$$\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial N_\parallel} = \frac{X}{Y^{\delta_{iz} + \delta_{jz}}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m s_{ij}(n, m) \frac{\partial}{\partial N_\parallel} I(n, m, \delta_{iz} + \delta_{jz}) \quad (6.5.e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \omega} &= \frac{\chi_{ij}}{\omega} (\delta_{iz} + \delta_{jz} - 2) + \frac{X}{Y^{\delta_{iz} + \delta_{jz}}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y} \right)^{2(m-1)} \\ &\quad \times \sum_{n=-m}^m s_{ij}(n, m) \frac{\partial}{\partial \omega} I(n, m, \delta_{iz} + \delta_{jz}) , \end{aligned} \quad (6.5.f)$$

onde temos, sendo \mathcal{D} um parâmetro qualquer do plasma

$$d_\nu^{\mathcal{D}} = \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nu}, \nu = x, z, N_\parallel \text{ ou } \omega. .$$

Nas expressões (6.5.a) a (6.5.f) aparecem, além das derivadas dos parâmetros do plasma, as derivadas de $I(n, m, h) = \sum_{\alpha=M, LC} c_\alpha I_\alpha(n, m, h)$, definida em (5.62). Devemos então calcular as derivadas das integrais $L(a, b, c)$ e $H(a, b, c)$, definidas em (5.63) e (5.64). Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu} L(a, b, c) &= -\frac{\mu_\alpha \gamma_\alpha}{2} d_\nu^{\mu_\alpha \gamma_\alpha} L(a, b+1, c) + \mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha (d_\nu^{\mu_\alpha \gamma_\alpha} + d_\nu^{\beta_\alpha}) L(a+1, b, c) \\
&+ c d_\nu^{\mu_\alpha \gamma_\alpha} L(a, b, c) + c \mu_\alpha \gamma_\alpha n Y d_\nu^{B_0} L(a, b, c-1) \\
&+ c \mu_\alpha \gamma_\alpha N_\parallel d_\nu^{N_\parallel} L(a+1, b, c-1)
\end{aligned} \tag{6.6.a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu} H(a, b, c) &= -\frac{\mu_\alpha \gamma_\alpha}{2} d_\nu^{\mu_\alpha \gamma_\alpha} H(a, b+1, c) + \mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha (d_\nu^{\mu_\alpha \gamma_\alpha} + d_\nu^{\beta_\alpha}) H(a+1, b, c) \\
&+ d_\nu^{\mu_\alpha \gamma_\alpha} [c H(a, b, c) - L(a, b, c) - H(a, b, c+1)] \\
&+ \mu_\alpha \gamma_\alpha n Y d_\nu^{B_0} [c H(a, b, c-1) - L(a, b, c-1) - H(a, b, c)] \\
&+ \mu_\alpha \gamma_\alpha N_\parallel d_\nu^{\mu_\alpha \gamma_\alpha} [c H(a+1, b, c-1) - L(a+1, b, c-1) \\
&- H(a+1, b, c)] .
\end{aligned} \tag{6.6.b}$$

As equações de traçado de raios (6.3) podem ser resolvidas numericamente pelo método de Runge-Kutta com passo variável [104]. A evolução temporal do vetor de onda \vec{k} (e portanto do vetor índice de refração \vec{N}) pode ser calculada através dessas equações, que dependem das derivadas da relação de dispersão e, portanto, das derivadas das componentes do tensor dielétrico. Através dessas equações pode-se também calcular a trajetória da onda na cavidade auroral e a sua amplificação (ou absorção) enquanto ela se propaga, tendo partido de uma distância z_0 relativa ao centro da Terra. Para tratar numericamente esse sistema de equações diferenciais é necessário calcular ponto a ponto os diversos parâmetros do plasma na região fonte (densidade, temperatura e velocidade de deriva), para cada tipo de população considerada. Como já colocado, o modelo físico para a região fonte, exposto na seção 5.2, fornece esses parâmetros para cada ponto ao longo de uma linha de campo geomagnético, sendo a variação com a latitude (x) estimada através de perfis como os definidos em (5.36). A aproximação localmente homogênea foi adotada para as componentes do tensor dielétrico, ou seja, no cálculo destas não foram incluídos explicitamente efeitos devidos a inhomogeneidades, muito embora o estudo destes efeitos represente uma área ativa em pesquisa no Instituto de Física da UFRGS. Como exemplo de trabalhos desenvolvidos neste tema em nossa Instituição, inclusive com nossa participação, podemos citar trabalhos onde foram consideradas inhomogeneidades nos parâmetros do plasma (com campo magnético homogêneo) [105, 106, 107, 108, 109], trabalhos onde foram consideradas inhomogeneidades apenas no campo magnético [110, 111, 112] e trabalhos considerando inhomogeneidades tanto no campo magnético quanto nos parâmetros do plasma [113].

O índice de refração pode ser calculado resolvendo-se a relação de dispersão em cada ponto da trajetória da onda. Usando-se (6.1), podemos escrever:

$$N_{\perp}^{2\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (6.7)$$

A equação acima pode ser resolvida iterativamente, fornecendo duas raízes (uma para o sinal positivo e outra para o negativo). Toma-se como aproximação inicial para N_{\perp}^2 o valor obtido para o modo ordinário e extraordinário na aproximação de plasma frio, dados respectivamente por

$$N_{\perp}^2 = (1 - X) \quad (\text{modo ordinário}) \quad (6.8.a)$$

$$N_{\perp}^2 = (2 - X) \quad (\text{modo extraordinário, com } \omega \approx \Omega_e), \quad (6.8.b)$$

sendo $X = \omega_{pe}^2/\omega^2$, onde $\omega_{pe} = 4\pi e^2 n_{Te}(x, s)/m_e$. Calculamos a partir dessas aproximações iniciais, outros dois valores de N_{\perp}^2 , dados através da equação (6.7). Esse novo valor calculado é então inserido no lado direito da equação (6.7), repetindo o processo até que a diferença entre o resultado obtido em uma dada iteração e o resultado obtido na iteração anterior seja menor do que um valor previamente estipulado. Em geral, bastam apenas algumas iterações para obter a convergência desejada. Em cada iteração podemos usar as aproximações iniciais (6.8.a) e (6.8.b) para identificar o resultado como sendo modo extraordinário ou ordinário. Neste trabalho focalizaremos a atenção apenas no modo extraordinário rápido.

6.3 Discussão dos resultados

Os resultados obtidos com o cálculo de traçado de raios serão apresentados em duas partes. A primeira parte usa os mesmos perfis de densidade, temperatura e velocidade de deriva usados nos trabalhos de Gaelzer, Ziebell e Schneider (1992) [30] e Gaelzer, Ziebell e Schneider (1994) [31]. Tais perfis podem ser obtidos fazendo-se $a = b = 1$ em (5.36). Em Gaelzer, Ziebell e Schneider (1992) foi utilizado o método de Poverlein [114], mostrando que a inclusão de gradientes perpendiculares às linhas de campo geomagnético é importante na amplificação da Radiação Quilométrica das Auroras. No trabalho de Gaelzer, Ziebell e Schneider (1994) foi feita uma abordagem mais sofisticada, utilizando as equações definidas em (4.66.a) e (4.66.b) para o traçado de raios. Mostrou-se então que, embora os gradientes perpendiculares sejam importantes na amplificação da Radiação Quilométrica das Auroras, o efeito é menos pronunciado do que o sugerido pelo método de Poverlein. Em ambos os trabalhos, o cálculo do fator de amplificação não

leva em conta a emissividade do meio. Como já foi definido em (4.1), o fator de amplificação g é dado por:

$$g = \ln \left[\frac{I_\omega(s)}{I_\omega(s_0)} \right] \cong -2 \int_{s_0}^s \text{Im}[k_\perp(s')] ds' , \quad (6.9)$$

onde $I_\omega(s)$ é a intensidade da radiação no ponto s e $I_\omega(s_0)$ a intensidade no ponto inicial.

Para incorporar a emissividade no cálculo do fator de amplificação é necessário usar a solução da equação de transferência, dada por (5.84). A primeira parte dessa seção se destina justamente ao estudo da propagação e da amplificação (ou absorção) da onda na região auroral levando-se em conta a emissividade do meio. A segunda parte estuda os efeitos das subcavidades na região fonte, utilizando o perfil de densidade definido em (5.36). Veremos como essa característica da cavidade auroral pode contribuir para amplificar as ondas que se propagam na região fonte. Será dada ênfase ao cálculo do fator de amplificação g , dado por

$$g = \ln \left[\frac{I_\omega(s)}{I_\omega(s_0)} \right] , \quad (6.10)$$

onde a intensidade da radiação no ponto s é calculada a partir da solução da equação de transferência (5.84), sendo assumido que a intensidade da onda no ponto inicial da trajetória seja dada pela intensidade da radiação de corpo negro [32], ou seja:

$$I_\omega(s_0) = I_{bb} \equiv \frac{\omega^2 T_e}{8\pi^3 c^2} . \quad (6.11)$$

6.3.1 O efeito da emissividade do meio na propagação, amplificação e absorção da Radiação Quilométrica das Auroras

Os níveis de amplificação típicos observados da Radiação Quilométrica das Auroras estão na ordem dos 100 decibéis ($g \cong 23$), ou seja, a intensidade da onda em um dado ponto da sua trajetória pode atingir cerca de e^{23} vezes o valor da intensidade no ponto inicial.

Além disso, o valor aproximado de 86 decibéis ($g \cong 20$) é o mínimo estipulado para garantir a hipótese de que mecanismo de maser de elétron-ciclotron possa ser considerado como o responsável pela geração da Radiação Quilométrica das Auroras [28]. No entanto, como dito acima, medições recentes revelam que o fator de amplificação atinge valores típicos de 100 db, podendo ainda chegar até 120 db [68].

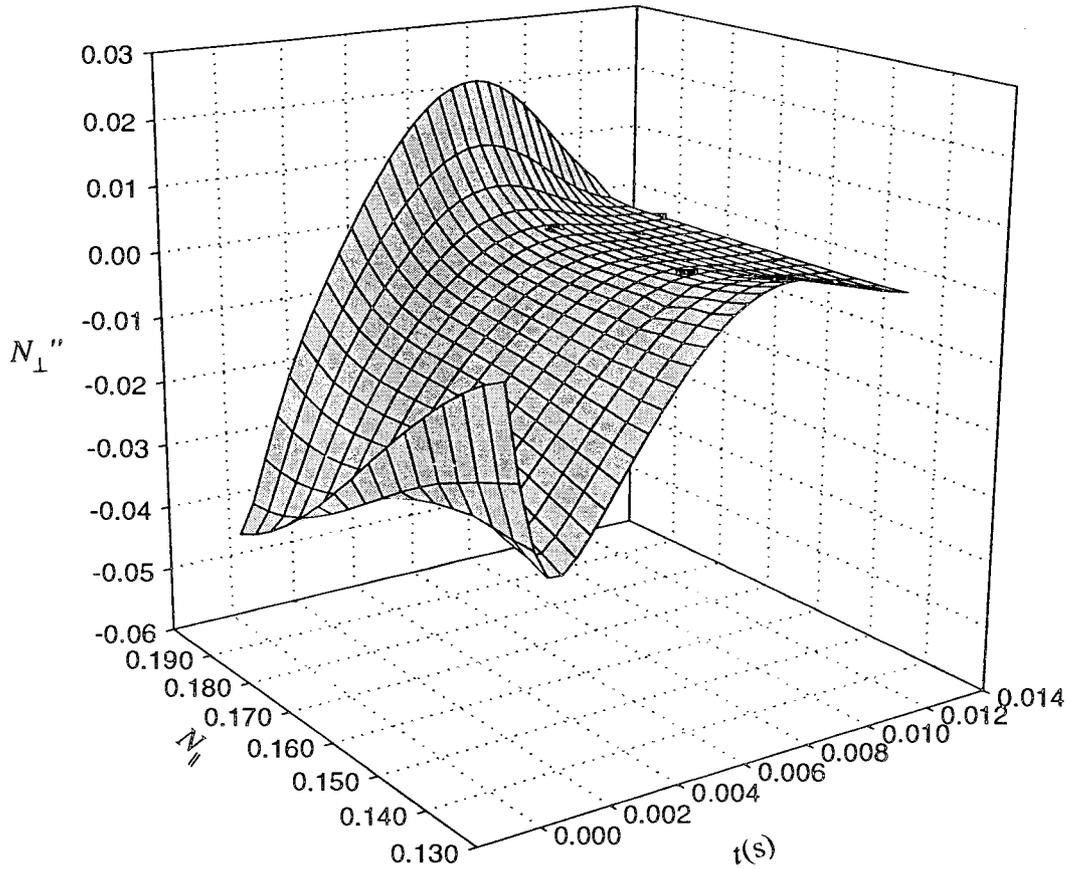


FIGURA 6.1: Parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração para $\omega = 1,008 \Omega_e$ em função do tempo t transcorrido e dos valores iniciais de N_{\parallel} . Os parâmetros usados são $z_0 = 2,5R_{\Phi}$, $\Delta = 10$ e $L_1 = 500$ km.

Os parâmetros adotados para a região fonte, definidos nas seções 5.2 e 5.3, são os seguintes: $V_l = 8$ kV, $n_{me}^{eq} = 0,8$ el/cm³, $T_{\parallel e} = 4$ keV, $T_{\perp e} = 6$ keV e $l_{lc} = 2$. Além disso, adotamos $L_1 = 500$ km para o comprimento da cavidade, $\Delta = 10$, e $T_m = 0,1$ eV para a temperatura da população de fundo.

Aqui usaremos a grandeza g_D , que fornece o nível de amplificação em decibéis, definida como

$$g_D = 10 \log \left[\frac{I_{\omega}(s)}{I_{\omega}(s_0)} \right], \quad (6.12)$$

que se relaciona com o fator de amplificação g através de

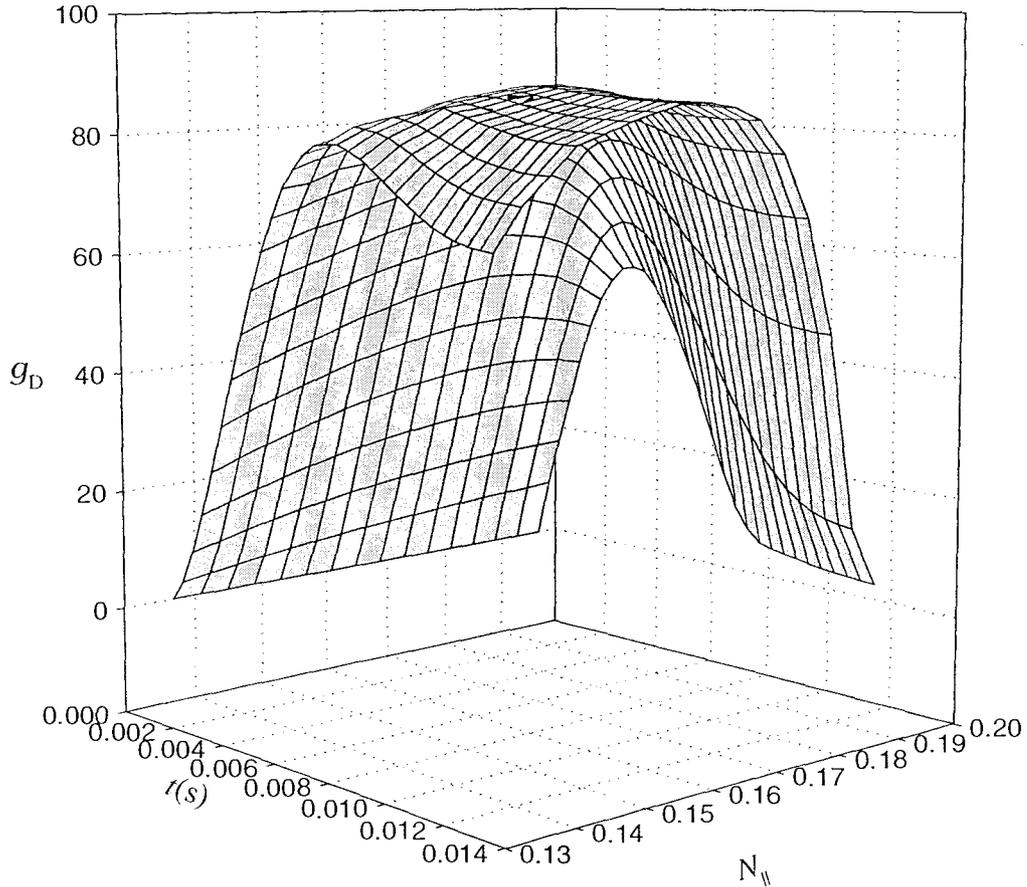


FIGURA 6.2: O fator de amplificação g_D para $\omega = 1,008\Omega_e$ em função do tempo t transcorrido e dos valores iniciais de N_{\parallel} . Os outros parâmetros utilizados são os mesmos da figura 6.1

$$g_D = (10 \log e) g \cong 4,3429 g \quad (6.13)$$

O procedimento de traçado de raios apresentado nesse trabalho sugere que ondas com $\omega \cong 1,01\Omega_e$ são as que sofrem maior amplificação na cavidade auroral [31, 35]. Inicialmente faremos um estudo para $\omega \cong 1,008\Omega_e$ e, partindo da posição $z_0 = 2,5R_{\oplus}$, para um conjunto de valores iniciais de N_{\parallel} .

Na figura 6.1 mostramos a parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração N_{\perp}'' , em função do tempo transcorrido t e dos valores iniciais de N_{\parallel} . Tais valores de N_{\parallel} correspondem a um conjunto de raios cujo ângulo de propagação inicial em relação ao campo magnético

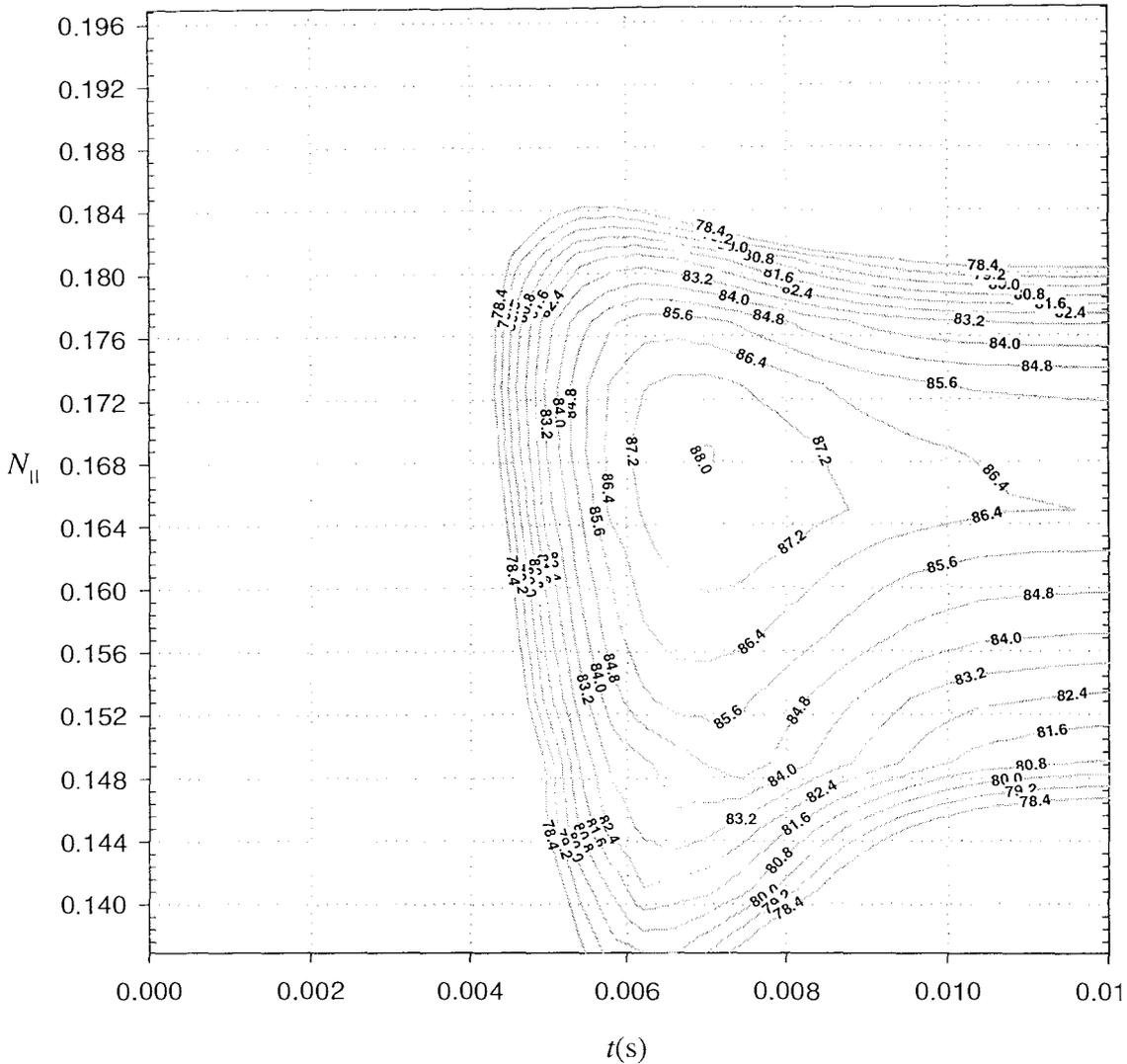


FIGURA 6.3: Mapa de contornos para o fator de amplificação g_D para $\omega = 1,008 \Omega_e$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

é da ordem de 80° com uma largura angular de aproximadamente 4° . Note que, durante a trajetória dos diversos raios, os valores de N_{\perp}'' são negativos (amplificação) até deixarem a região de ressonância (onde $N_{\perp}'' = 0$). Para os raios no limite superior do intervalo de valores iniciais de N_{\perp} considerado existe, além da região onde $N_{\perp}'' < 0$, um intervalo no final da trajetória onde $N_{\perp}'' > 0$, correspondendo à absorção.

Na figura 6.2 mostramos o fator de amplificação g_D em função do tempo e do valor inicial de N_{\perp} . O intervalo em N_{\perp} engloba, para esta frequência, o valor de máxima amplificação, como

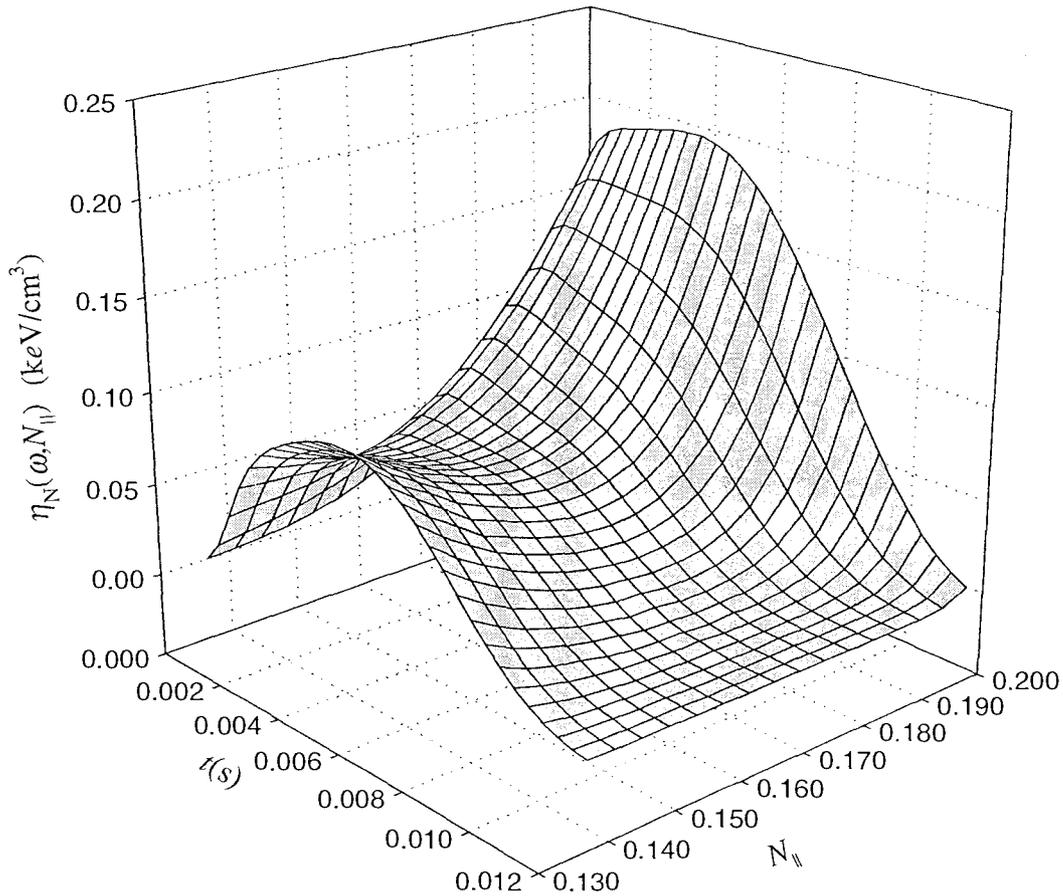


FIGURA 6.4: A emissividade espectral $\eta_N(\omega, N_{||})$ para $\omega = 1,008 \Omega_e$. Os outros parâmetros usados na obtenção dessa figura são os mesmos da figura 6.1.

mostra a figura. O raio central ($N_{||} \cong 0,17$) é o que sofre maior amplificação até chegar ao fim da região de ressonância. Nos extremos do intervalo de valores iniciais de $N_{||}$ nota-se que há reabsorção da energia da onda (onde g_b diminui sensivelmente), sendo esta reabsorção bastante mais intensa no limite superior do que no inferior.

Na figura 6.3 temos o mapa de contornos de g_b para os mesmos parâmetros utilizados na figura 6.2. Nessa figura aparecem apenas os contornos para os valores mais altos do fator de amplificação g_b . Pode-se notar mais precisamente que o valor inicial de $N_{||}$ que proporciona maior amplificação ao longo da trajetória da onda está em torno de $N_{||} = 0,168$, onde o fator de amplificação pode chegar até 88 db. Esse valor será então usado como o valor inicial de $N_{||}$ para

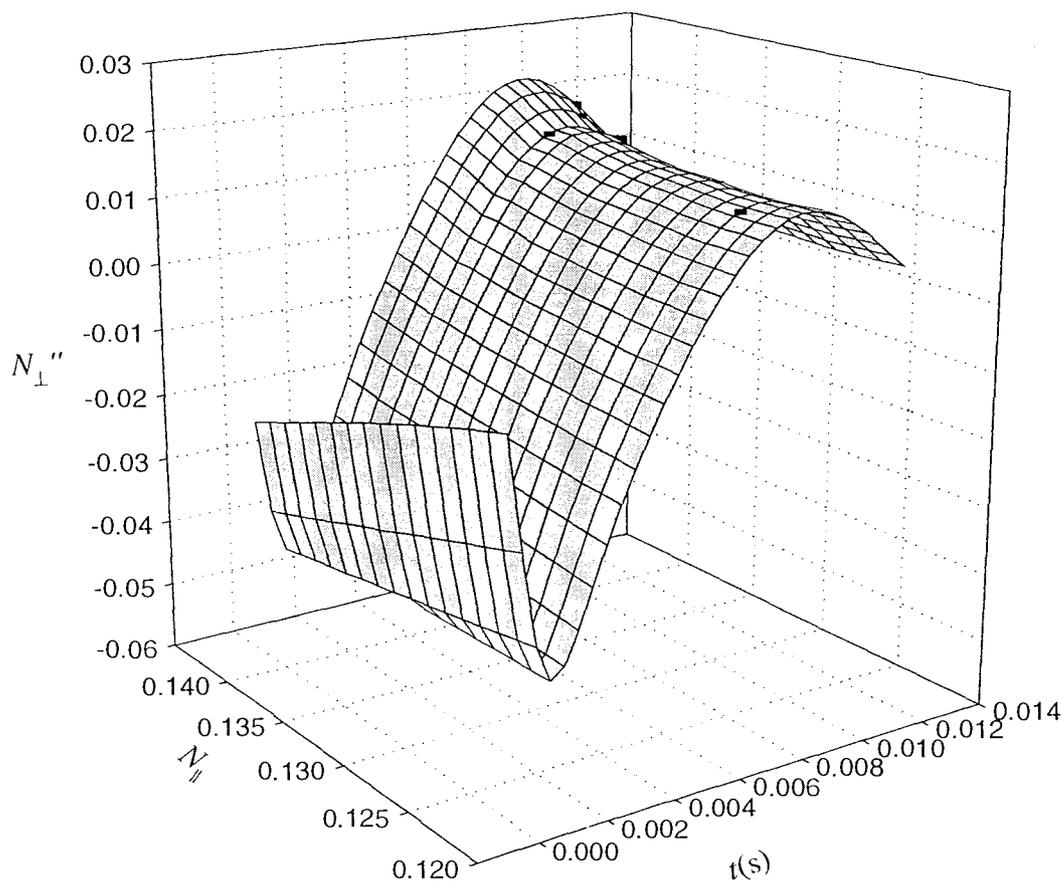


FIGURA 6.5: Parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração para $\omega = 1,005 \Omega_e$ em função do tempo t transcorrido e dos valores iniciais de N_{\parallel} . Os parâmetros usados são $z_0 = 2,5 R_{\oplus}$, $\Delta = 10$ e $L_1 = 500\text{km}$.

obter os resultados que seguem, no caso em que $\omega = 1,008 \Omega_e$.

A emissividade espectral $\eta_N(\omega, N_{\parallel})$ é mostrada na figura 6.4, em função do tempo t e dos valores iniciais de N_{\parallel} . Vê-se que a emissividade espectral inicia com valores baixos para todos os valores iniciais de N_{\parallel} , crescendo enquanto se propaga. Ao final da trajetória o seu valor se torna muito pequeno. Nota-se claramente na figura que para os raios que estão nos extremos do intervalo de valores iniciais de N_{\parallel} , a emissividade atinge valores maiores do que para os raios que estão no centro desse mesmo intervalo, como mostra a figura. Existe ainda uma assimetria no comportamento da emissividade espectral, pois ela atinge valores mais altos no extremo superior

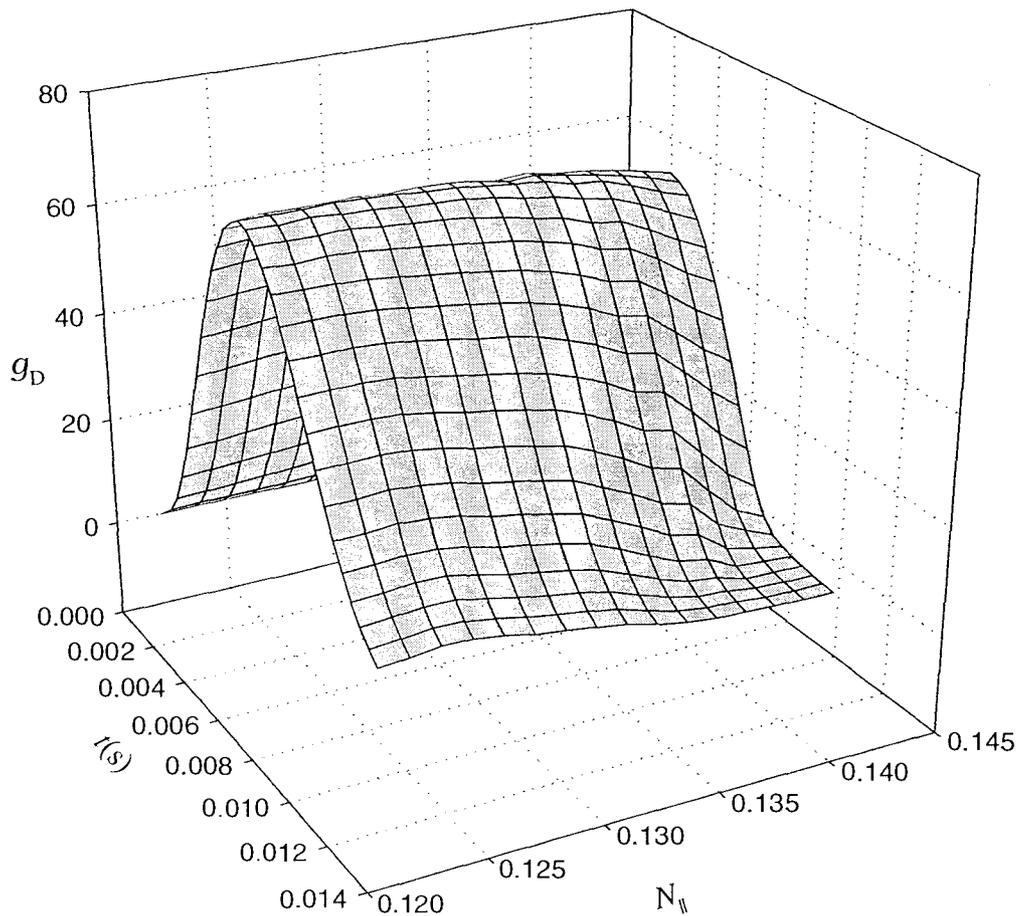


FIGURA 6.6: O fator de amplificação g_D para $\omega = 1,005 \Omega_e$ em função do tempo t transcorrido e dos valores iniciais de $N_{||}$. Os outros parâmetros utilizados são os mesmos da figura 6.1

do intervalo de valores iniciais de $N_{||}$ do que no extremo inferior.

O estudo da amplificação e absorção da Radiação Quilométrica das Auroras foi feito para outras frequências, cujos valores são $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$, e os resultados obtidos mostraremos a seguir.

Na figura 6.5 vemos a parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração, obtida para $\omega = 1,005 \Omega_e$, em um gráfico similar ao mostrado na figura 6.1. Como mostra a figura, durante a trajetória dos diversos raios os valores de N_{\perp}'' iniciam negativos (amplificação), passando a positivos (absorção) até deixarem a região de ressonância. No entanto, a figura indica uma uniformidade maior do que a apresentada na figura 6.1 ao longo de todo o intervalo

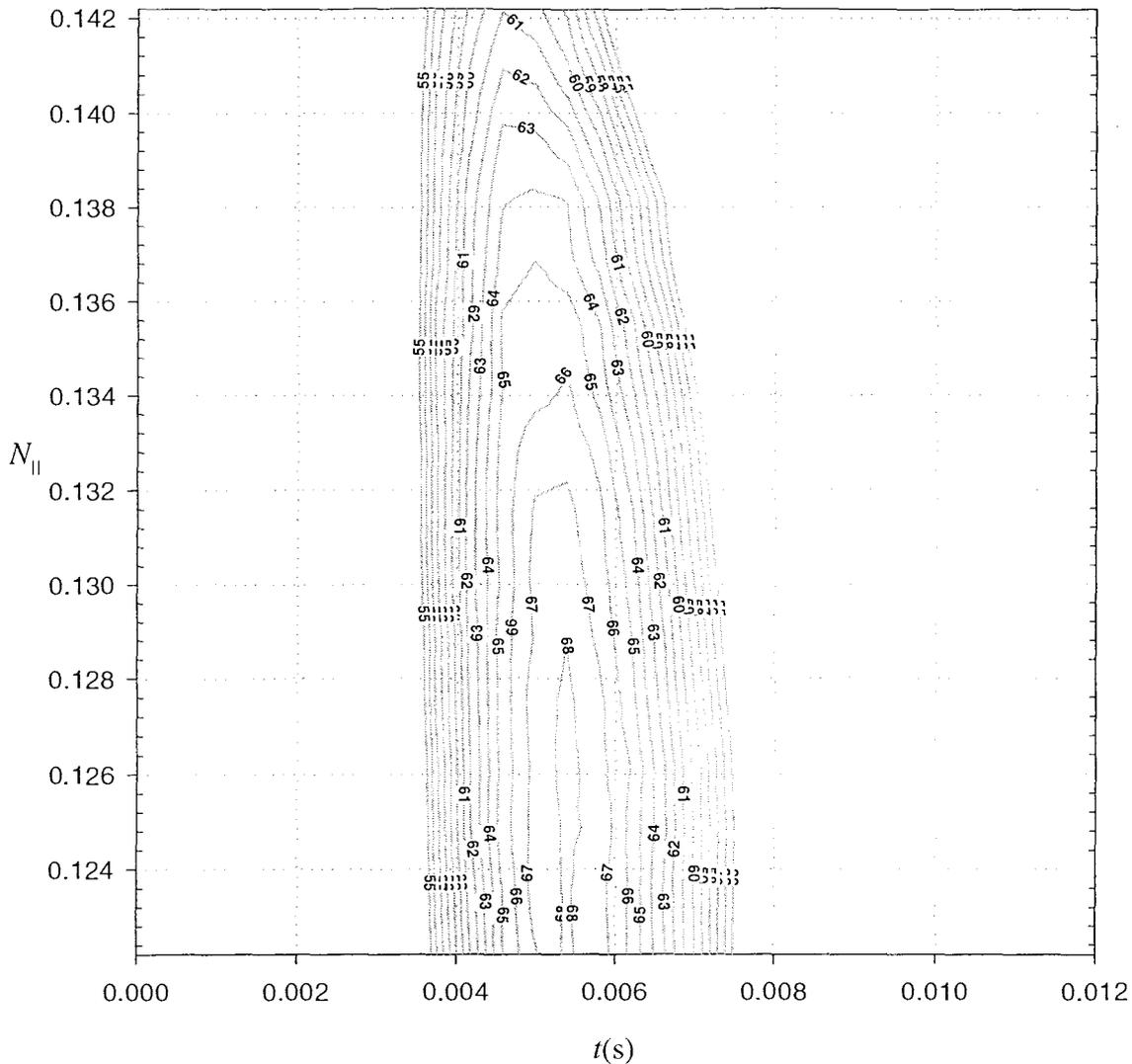


FIGURA 6.7: Mapa de contornos para o fator de amplificação g_D para $\omega = 1,005 \Omega_e$. Os outros parâmetros usados na obtenção dessa figura são os mesmos da figura 6.5.

de valores iniciais de $N_{||}$, havendo reabsorção em todo esse campo de valores. É então de se esperar que o fator de amplificação g_D seja menor para $\omega = 1,005 \Omega_e$ do que para $\omega = 1,008 \Omega_e$.

Isso pode ser visto claramente na figura 6.6, que mostra o fator de amplificação g_D para $\omega = 1,005 \Omega_e$ em função do tempo t transcorrido e dos valores iniciais de $N_{||}$.

Nessa figura podemos ver com clareza que, além da amplificação ser como um todo bem menor do que no caso onde $\omega = 1,008 \Omega_e$, há realmente reabsorção ao final da trajetória para todo o conjunto de valores iniciais de $N_{||}$. Além disso, o gráfico indica que o valor de $N_{||}$ que

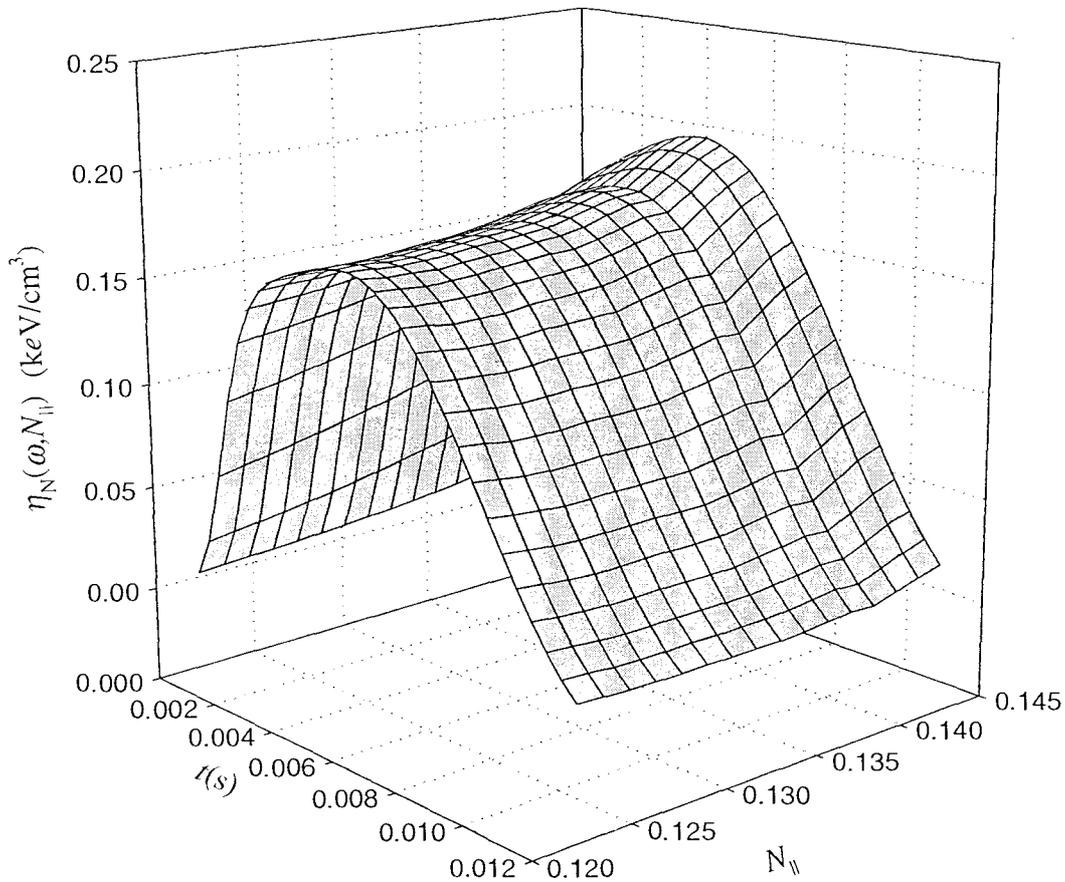


FIGURA 6.8: A emissividade espectral $\eta_N(\omega, N_{||})$ para $\omega = 1,005\Omega_e$. Os parâmetros usados na obtenção dessa figura são os mesmos da figura 6.5.

proporciona maior amplificação fica em torno de $N_{||} \cong 0,13$.

Na figura 6.7 vemos o mapa de contornos de g_D , onde nota-se mais precisamente que o valor inicial de $N_{||}$ que proporciona maior amplificação ao longo da trajetória da onda está em torno de $N_{||} = 0,126$. Para esse valor o fator de amplificação pode chegar até 68 db, bem abaixo tanto do típico valor de 100 db observados experimentalmente quanto do mínimo estipulado como 86 db.

A emissividade espectral $\eta_N(\omega, N_{||})$ para $\omega = 1,005\Omega_e$ é mostrada na figura 6.8. Nota-se um comportamento similar ao apresentado na figura 6.4, onde a emissividade espectral inicia com valores baixos para todos os valores iniciais de $N_{||}$, aumentando enquanto se propaga, se tornando pequena ao final da trajetória. No entanto, o comportamento ao longo do intervalo de

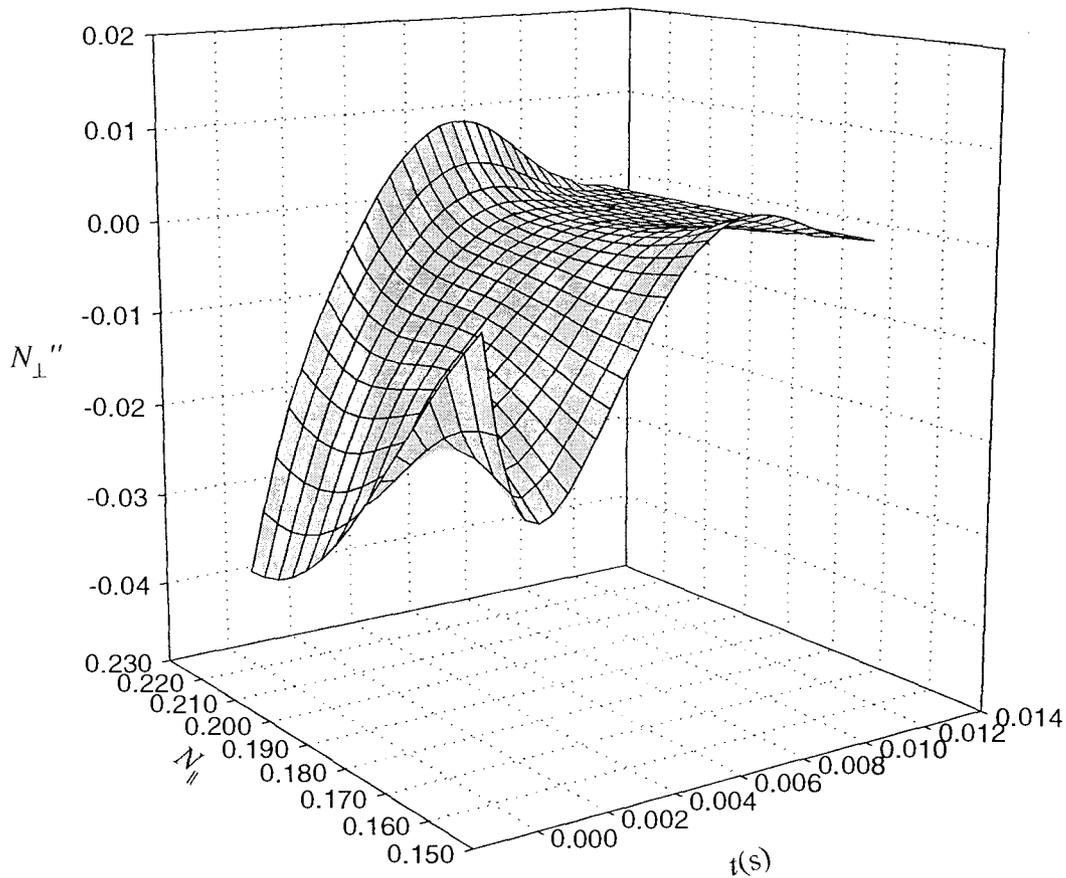


FIGURA 6.9: Parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração para $\omega = 1,011 \Omega_e$ em função do tempo t transcorrido e dos valores iniciais de N_{\parallel} . Os parâmetros usados são $z_0 = 2,5R_{\oplus}$, $\Delta = 10$ e $L_1 = 500\text{km}$.

valores iniciais de N_{\parallel} é bastante mais uniforme do que no caso em que $\omega = 1,008 \Omega_e$, como mostra a figura 6.4.

O caso em que a frequência é tal que $\omega = 1,011 \Omega_e$ é mostrado na figura 6.9, onde vemos a evolução temporal da componente perpendicular do índice de refração N_{\perp}'' para diversos valores iniciais de N_{\parallel} . O comportamento é bastante similar ao apresentado na figura 6.1, onde $\omega = 1,008 \Omega_e$. Na trajetória dos diversos raios, vemos novamente que há uma região de amplificação da energia da onda que passa, a partir de um certo tempo, a sofrer absorção. No entanto, a figura 6.9 indica que a amplificação é menos intensa do que no caso em que $\omega = 1,008 \Omega_e$.

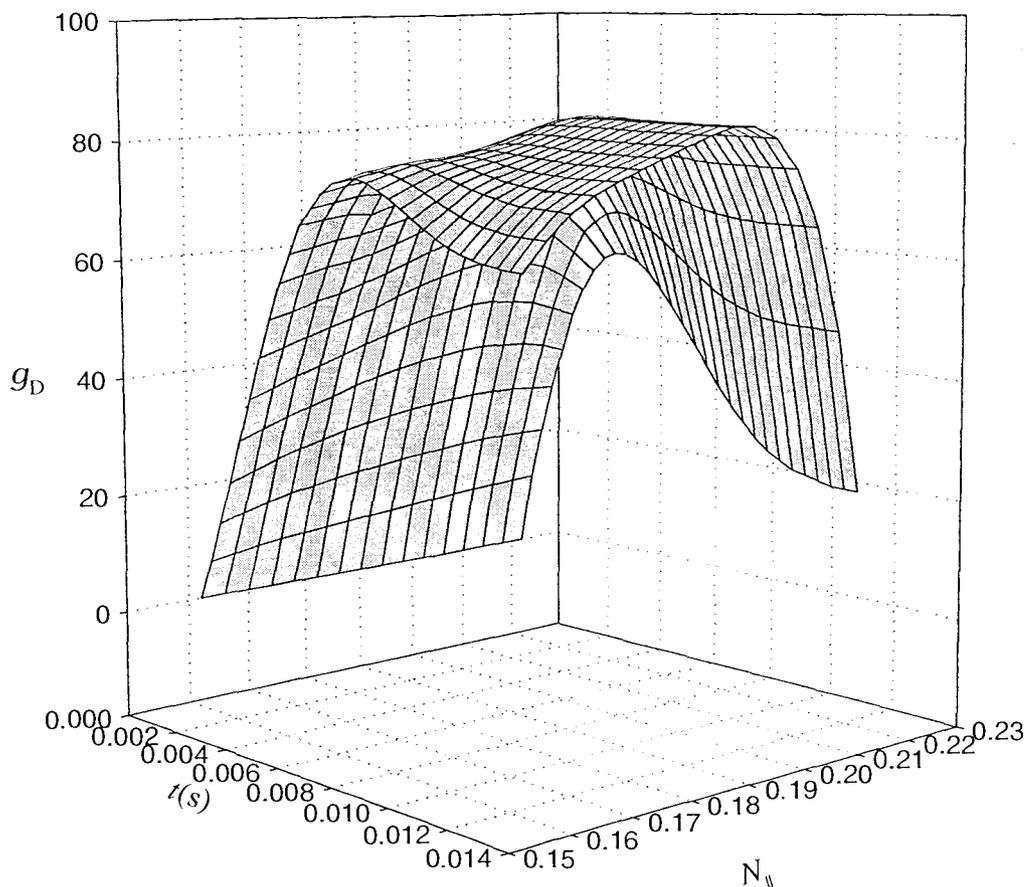


FIGURA 6.10: O fator de amplificação g_D para $\omega = 1,011 \Omega_e$. Os outros parâmetros são os mesmos da figura 6.9.

Isto pode ser melhor visualizado com o auxílio da figura 6.10, que mostra o fator de amplificação g_D em função do tempo e dos valores iniciais de N_{\parallel} . O gráfico mostra que o comportamento de g_D é similar ao apresentado na figura 6.2. No entanto, o valor de N_{\parallel} inicial para o qual a amplificação é máxima está aproximadamente no centro ($N_{\parallel} \cong 0,17$) do conjunto de valores iniciais de N_{\parallel} utilizado. Na figura 6.10 o valor de N_{\parallel} inicial para o qual a amplificação é máxima se situa mais próximo do extremo superior desse mesmo intervalo ($N_{\parallel} \cong 0,2$).

A figura 6.10 mostra também que, igualmente ao caso $\omega = 1,008 \Omega_e$, nos extremos do intervalo de valores iniciais de N_{\parallel} há reabsorção da energia da onda. Similarmente, esta reabsorção é bem mais intensa no limite superior dos valores iniciais de N_{\parallel} do que no limite inferior.

Freqüências intermediárias entre $\omega = 1,008 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$ foram estudadas pelo mesmo

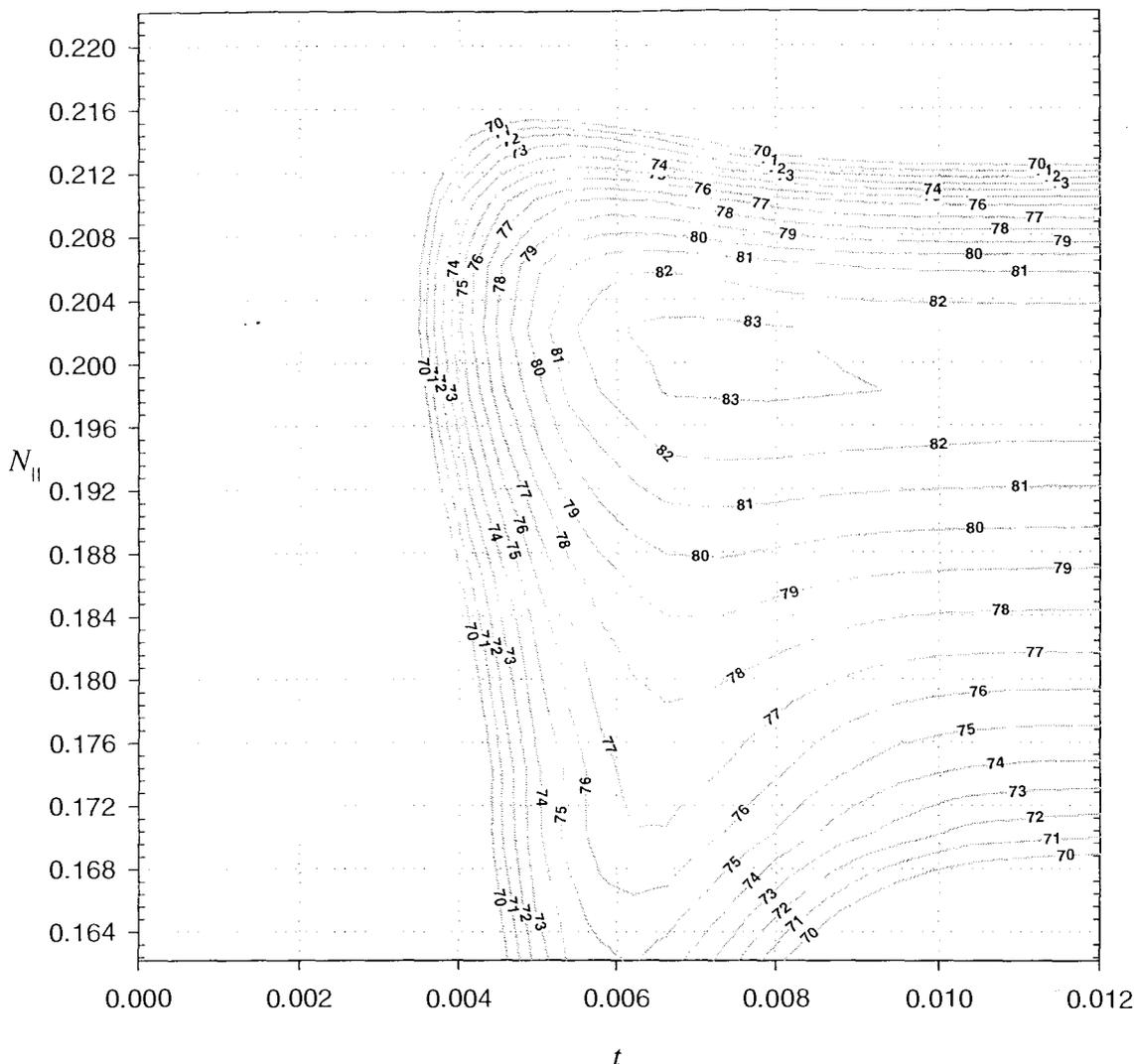


FIGURA 6.11: Mapa de contornos para o fator de amplificação g_D para $\omega = 1,011 \Omega_e$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.9.

procedimento adotado neste trabalho (sem a inclusão da emissividade) [31] mostrando que $\omega = 1,008 \Omega_e$ é o valor de frequência onde a amplificação da onda é mais significativa ao longo de sua trajetória.

Na figura 6.11 vemos o mapa de contornos de g_D , similar aos mapas das figuras 6.3 e 6.7, para os mesmos parâmetros utilizados na figura 6.9. Aqui se tem novamente uma noção mais precisa do valor inicial de $N_{||}$ que proporciona maior amplificação ao longo da trajetória. A figura mostra que ele está em torno de $N_{||} = 0,2$, caso em que o fator de amplificação g_D pode chegar

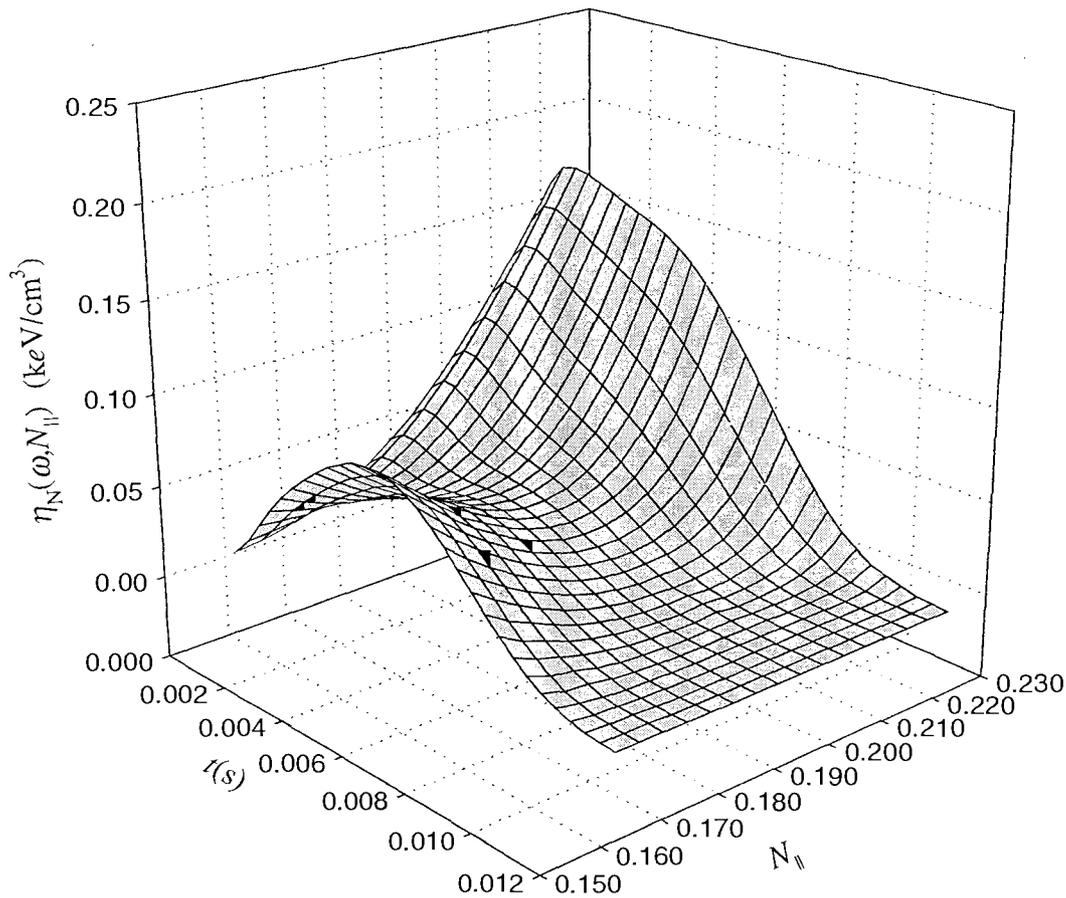


FIGURA 6.12: A emissividade espectral $\eta_N(\omega, N_{||})$ para $\omega = 1,011 \Omega_e$. Os parâmetros usados na obtenção dessa figura são os mesmos da figura 6.9.

até 83 db.

A emissividade espectral $\eta_N(\omega, N_{||})$ para $\omega = 1,011 \Omega_e$ aparece na figura 6.12. Nota-se um comportamento muito similar ao apresentado na figura 6.4, onde a emissividade espectral inicia com valores baixos para todos os valores iniciais de $N_{||}$, aumentando enquanto se propaga, voltando a decrescer ao final da trajetória. No entanto, o comportamento ao longo do intervalo de valores iniciais de $N_{||}$, apresenta uma assimetria maior do que no caso em que $\omega = 1,008 \Omega_e$ onde, para valores do extremo superior do intervalo de valores iniciais de $N_{||}$, ela é em média menor do que no caso em que $\omega = 1,008 \Omega_e$. Nota-se também que, igualmente ao caso em que $\omega = 1,008 \Omega_e$, a emissividade espectral atinge valores maiores no extremo superior do intervalo

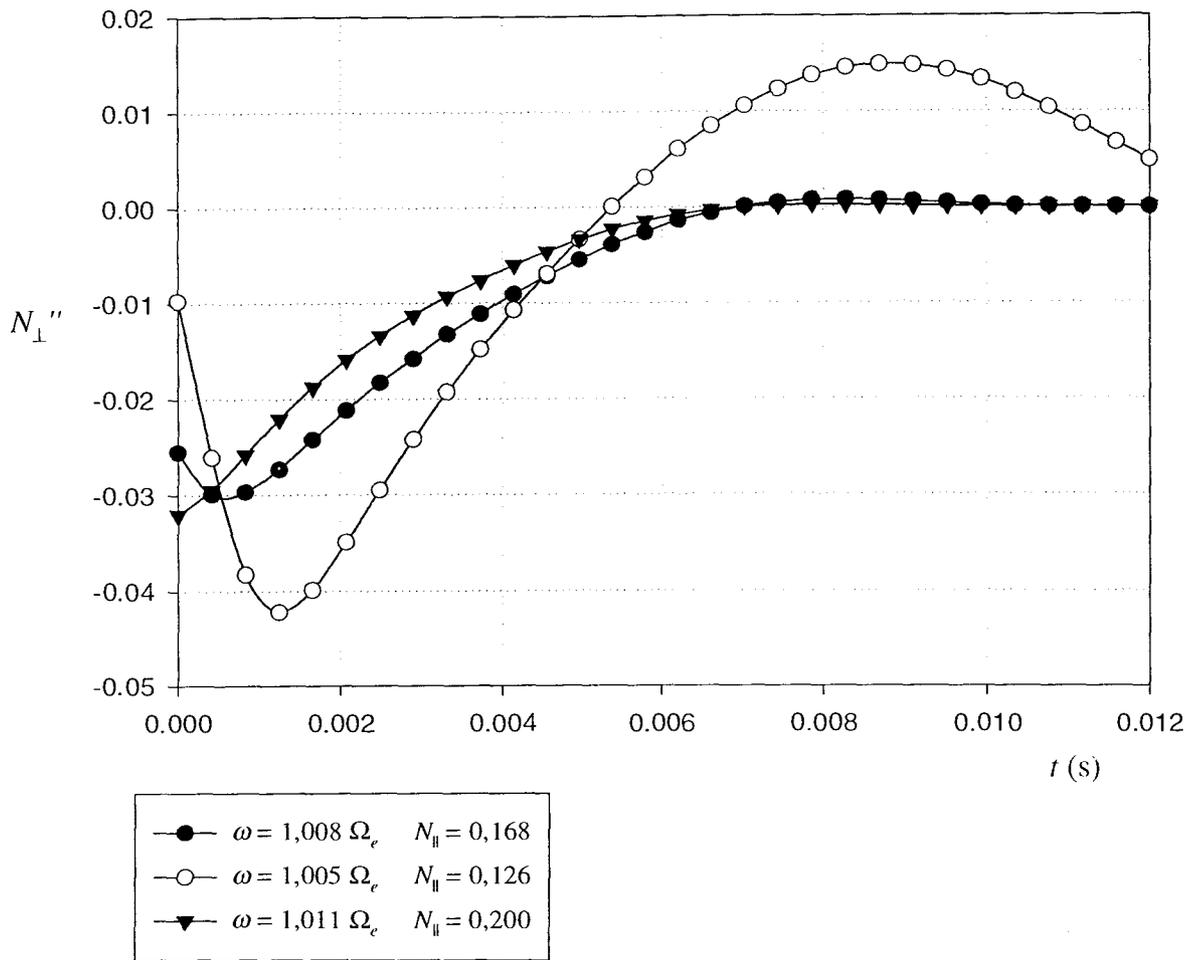


FIGURA 6.13: Parte imaginária para a componente perpendicular do índice de refração em função do tempo t para $\omega = 1,008 \Omega_e$, $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$ que, respectivamente, foram obtidos para os valores iniciais de N_{\parallel} tais que $N_{\parallel} = 0,168$, $N_{\parallel} = 0,126$ e $N_{\parallel} = 0,2$, nos quais se atinge a máxima amplificação. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.9.

de valores iniciais de N_{\parallel} do que no extremo inferior.

Tendo sido feito o estudo para diversos raios, cada um com um valor inicial de N_{\parallel} , é também conveniente estudar como os principais parâmetros envolvidos influem na propagação e absorção da AKR para um determinado raio.

A figura 6.13 mostra a parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração em função do tempo t para os casos em que $\omega = 1,008 \Omega_e$, $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. Para

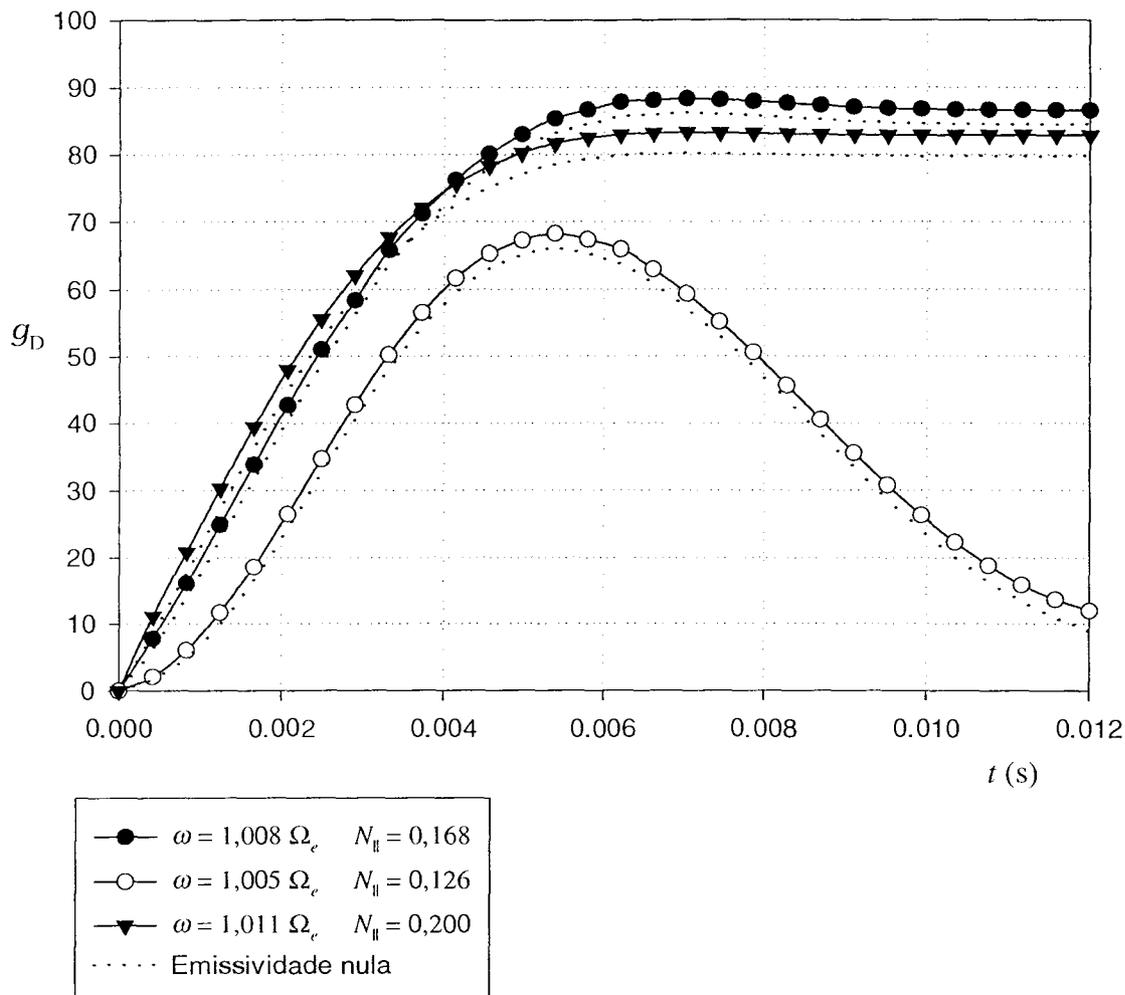


FIGURA 6.14: O fator de amplificação g_D em função do tempo t para $\omega = 1,008 \Omega_e$, $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.9. As linhas pontilhadas mostram o fator de amplificação no caso em que a emissividade do meio é desconsiderada.

cada frequência foi usado o raio cujo valor inicial de $N_{||}$ proporciona a maior amplificação. Em todos os três casos a onda sofre amplificação durante os instantes iniciais da sua trajetória passando após a sofrer absorção. A absorção é bastante mais pronunciada para o caso em que $\omega = 1,005 \Omega_e$.

A figura 6.14 mostra um gráfico similar ao mostrado na figura 6.13 para o fator de amplificação g_D em função do tempo t . Nota-se claramente aqui, que a frequência que proporciona a maior amplificação é $\omega = 1,008 \Omega_e$ ($g_D \cong 88$ db).

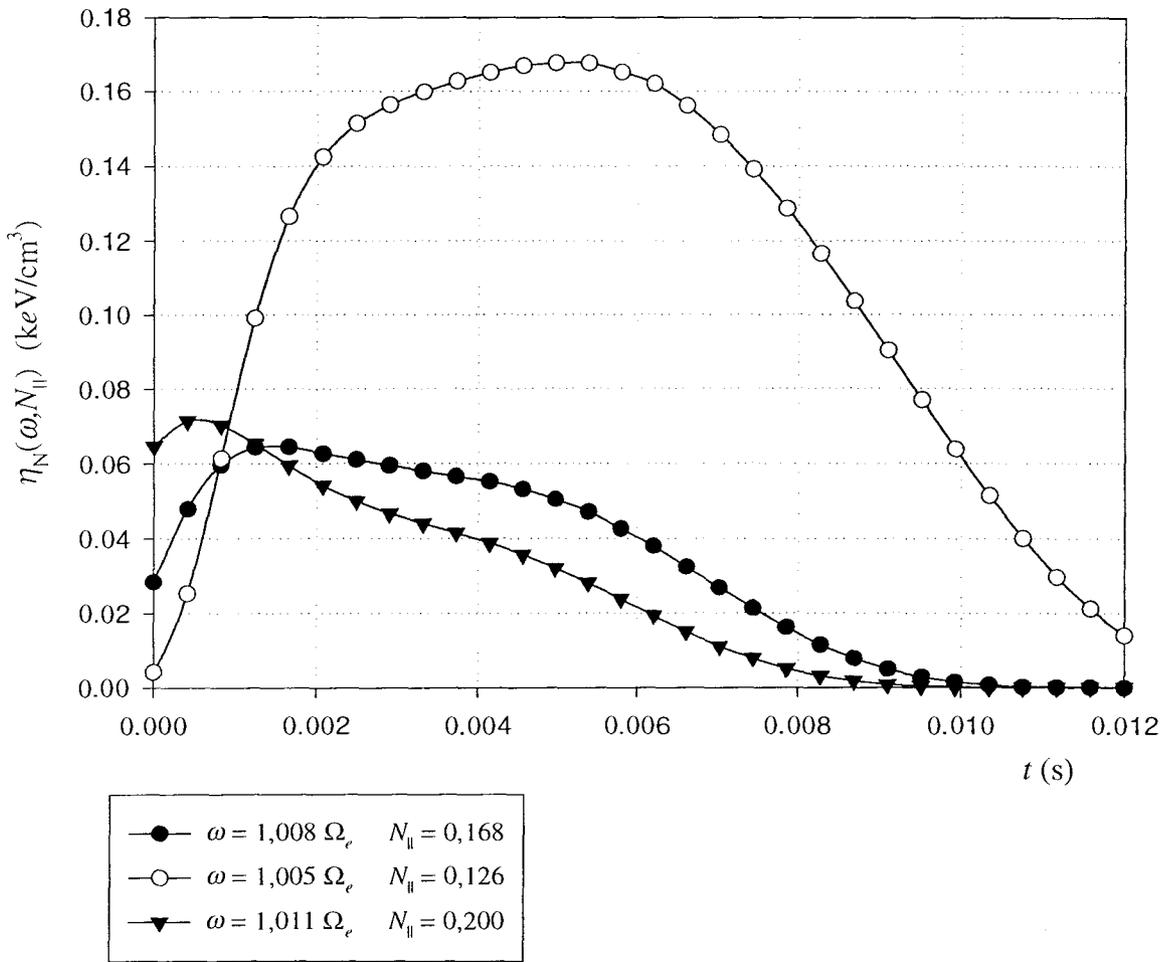


FIGURA 6.15: A emissividade espectral em função do tempo t para $\omega = 1,008 \Omega_e$, $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.9.

Para $\omega = 1,011 \Omega_e$ o fator de amplificação tem uma forma similar ao caso em que $\omega = 1,008 \Omega_e$, porém sem atingir valores tão altos. Como se pode ver, no caso onde $\omega = 1,005 \Omega_e$ há uma forte reabsorção da energia da onda a partir de $t \cong 5,3$ ms, o que está em total acordo com o que mostra a figura 6.13. A linha pontilhada indica, para cada frequência, o fator de amplificação desconsiderando-se a emissividade do meio durante a trajetória.

A emissividade espectral $\eta_N(\omega, N_{||})$ é mostrada na figura 6.15 para $\omega = 1,008 \Omega_e$, $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. Para todos os casos o comportamento da emissividade é semelhante, iniciando

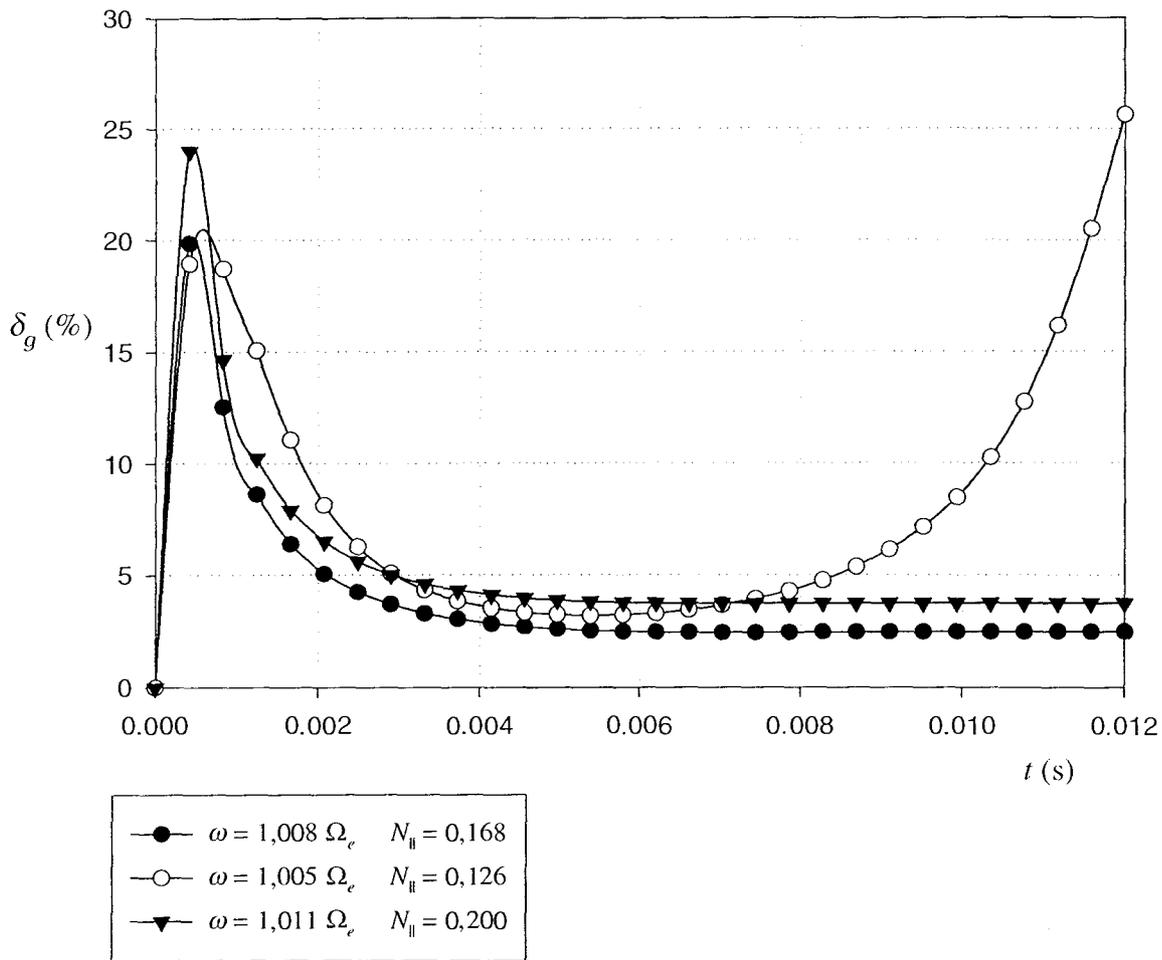


FIGURA 6.16: O efeito percentual da emissividade do meio na amplificação e absorção da onda (δ_g) em função do tempo t para $\omega = 1,008 \Omega_e$, $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.9.

com valores baixos, crescendo ao longo da trajetória e decrescendo ao final da mesma. Vê-se ainda na figura que, no caso em que $\omega = 1,005 \Omega_e$, a emissividade espectral atinge valores bem mais altos do que nos casos em que $\omega = 1,008 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$.

O efeito da emissividade pode ser avaliado pela quantidade δ_g , definida como

$$\delta_g = 100 \times \left| \frac{g_D - g_D^{(0)}}{g_D} \right|, \tag{6.14}$$

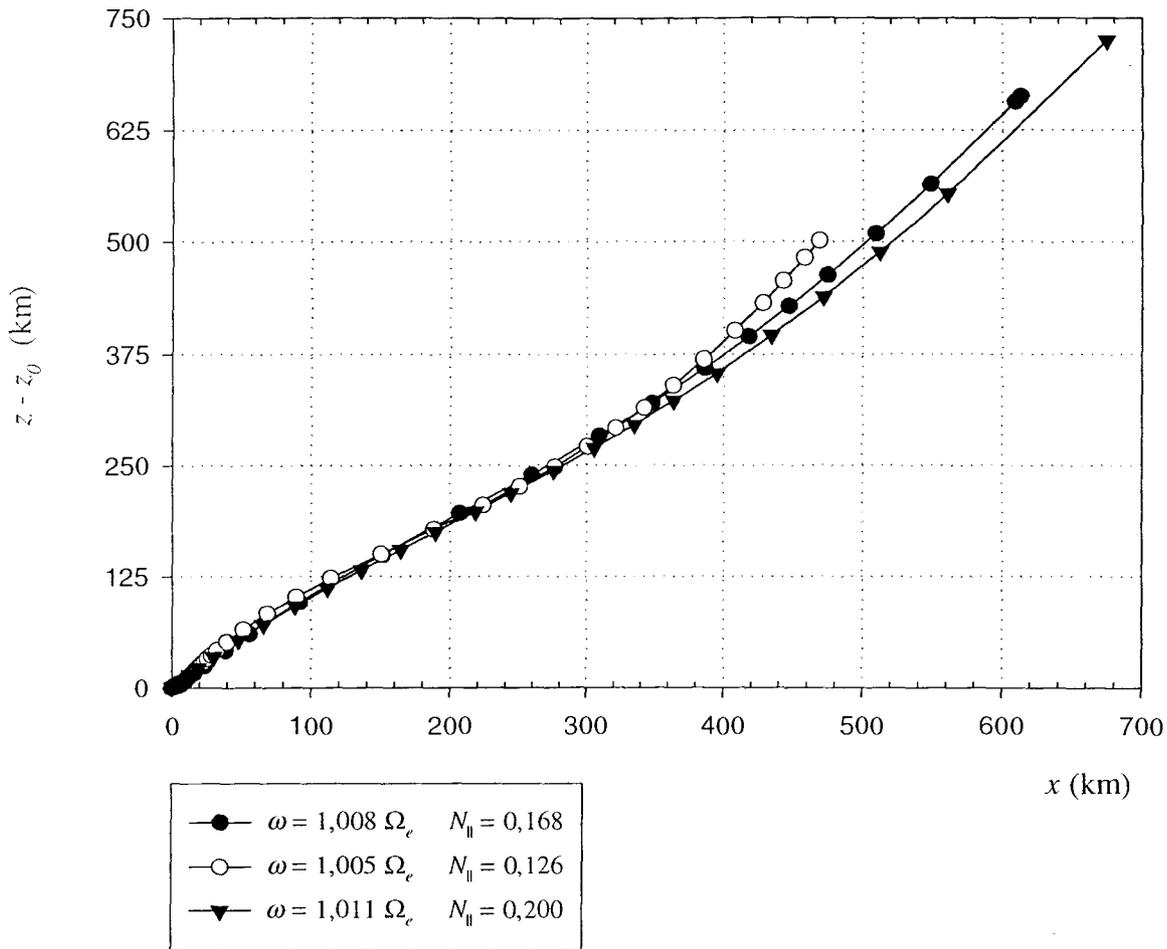


FIGURA 6.17: A trajetória da onda para $\omega = 1,008 \Omega_e$, $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.9.

onde $g_D^{(0)}$ é o fator de amplificação obtido desconsiderando-se a emissividade do meio ao longo da trajetória da onda (a linha pontilhada mostrada na figura 6.14).

Na figura 6.16 está mostrado o efeito percentual da emissividade na amplificação e na absorção da onda em função do tempo t , para os mesmos parâmetros da figura 6.14. Nota-se que esse efeito é mais pronunciado para o caso em que $\omega = 1,005 \Omega_e$, onde a amplificação é menos significativa. Além disso, há um pico (em torno de $t \cong 0,4$ ms) onde o efeito da emissividade no fator de amplificação pode chegar até em torno de 20%. Como se pode notar para o caso $\omega = 1,005 \Omega_e$,

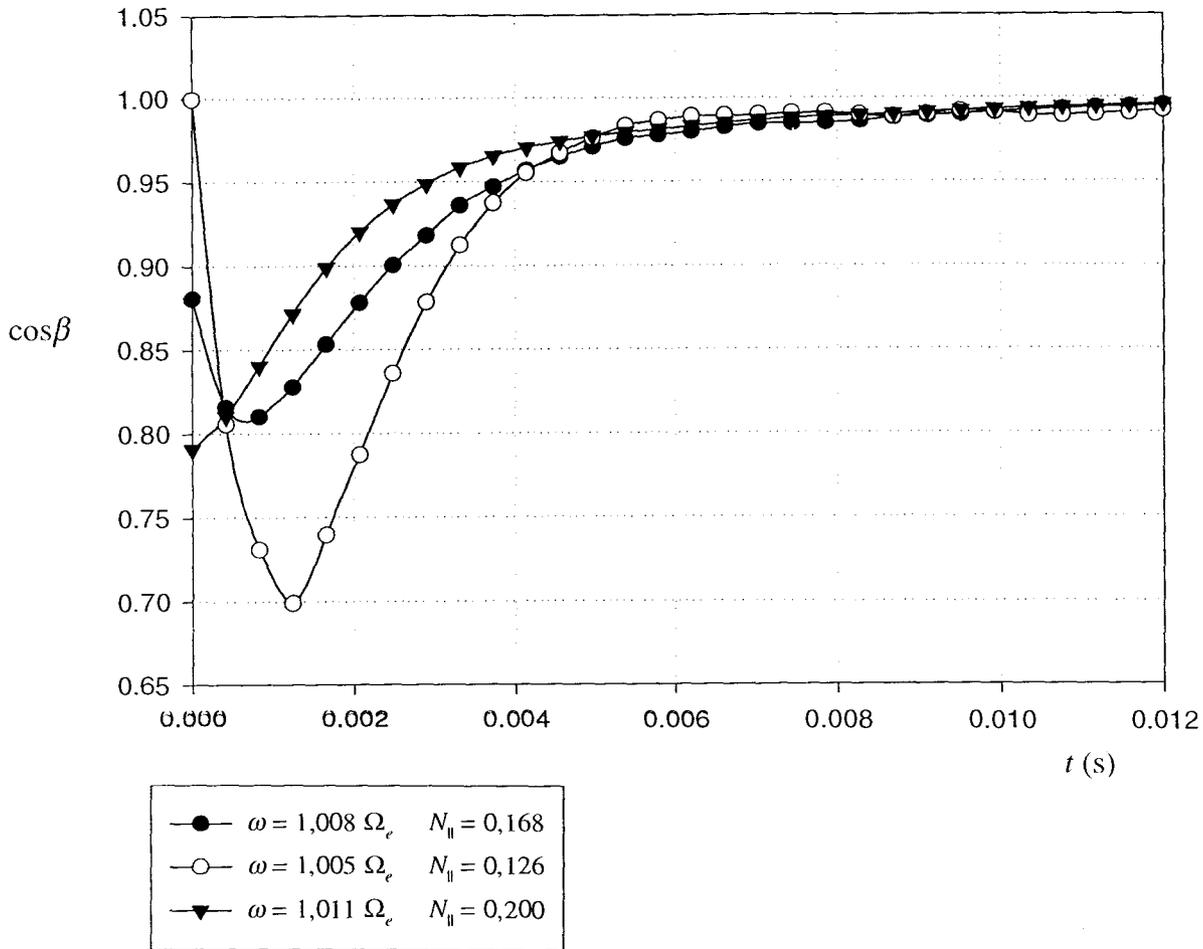


FIGURA 6.18: Gráfico de $\cos \beta$ em função do tempo t para $\omega = 1,008 \Omega_e$, $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.9.

o efeito é mais pronunciado quando a energia da onda é reabsorvida (ao final da trajetória).

A figura 6.17 mostra as trajetórias da onda para as frequências $\omega = 1,008 \Omega_e$, $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. Todas as trajetórias mostradas na figura foram obtidas para o caso em que $L_1 = 500\text{km}$. Em todos os três casos, nota-se que a trajetória tende a se alinhar mais com o campo magnético, ao sair da cavidade.

Em cada ponto da trajetória da onda, a direção da velocidade de grupo da onda difere da direção de propagação da mesma, como mostra a relação (4.6), a qual, por motivos de clareza

repetimos abaixo:

$$\tan\beta \equiv \tan(\theta - \xi) = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial \theta} . \quad (6.15)$$

Na figura 6.18 mostramos o gráfico de $\cos\beta$ (o qual aparece na equação de transferência (5.84)) em função do tempo t para $\omega = 1,008\Omega_e$, $\omega = 1,005\Omega_e$ e $\omega = 1,011\Omega_e$. Nota-se que a anisotropia provocada pelo campo magnético tem um papel maior no início do intervalo de tempo considerado ($t \cong 1,2$ ms), sendo quase inexistente quando os raios se aproximam do final do mesmo, onde $\cos\beta \cong 1$ e, portanto, $\theta - \xi \cong 0$. O fator $\cos\beta$ pode ser calculado via relação de dispersão e suas derivadas. Temos que

$$\Lambda[N_{\perp}(\theta), N_{\parallel}(\theta)] = 0 . \quad (6.16)$$

Fazendo $d\Lambda/d\theta = 0$, obtemos:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial N_{\perp}} \frac{\partial N_{\perp}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial N_{\parallel}} \frac{\partial N_{\parallel}}{\partial \theta} = 0 . \quad (6.17)$$

Temos ainda que:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{\perp}}{\partial \theta} = \frac{\partial N}{\partial \theta} \sin\theta + N \cos\theta \\ \frac{\partial N_{\parallel}}{\partial \theta} = \frac{\partial N}{\partial \theta} \cos\theta - N \sin\theta \end{cases} . \quad (6.18)$$

Substituindo-se (6.18) em (6.17), com o uso das identidades $\sin\theta = N_{\perp}/N$, $\cos\theta = N_{\parallel}/N$, $N\cos\theta = N_{\parallel}$ e $N\sin\theta = N_{\perp}$, obtemos:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial N_{\perp}} \left(\frac{\partial N}{\partial \theta} \frac{N_{\perp}}{N} + N_{\parallel} \right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial N_{\parallel}} \left(\frac{\partial N}{\partial \theta} \frac{N_{\parallel}}{N} - N_{\perp} \right) = 0 . \quad (6.19)$$

Isolando-se o fator $(1/N)(\partial N/\partial \theta) = (1/k)(\partial k/\partial \theta) = \tan\beta$, obtemos:

$$\tan\beta = \frac{N_{\perp} \frac{\partial \Lambda}{\partial N_{\parallel}} - N_{\parallel} \frac{\partial \Lambda}{\partial N_{\perp}}}{N_{\perp} \frac{\partial \Lambda}{\partial N_{\perp}} + N_{\parallel} \frac{\partial \Lambda}{\partial N_{\parallel}}} , \quad (6.20)$$

sendo $\cos\beta$ obtido através da relação $\cos\beta = \sqrt{1/(1 + \tan^2\beta)}$.

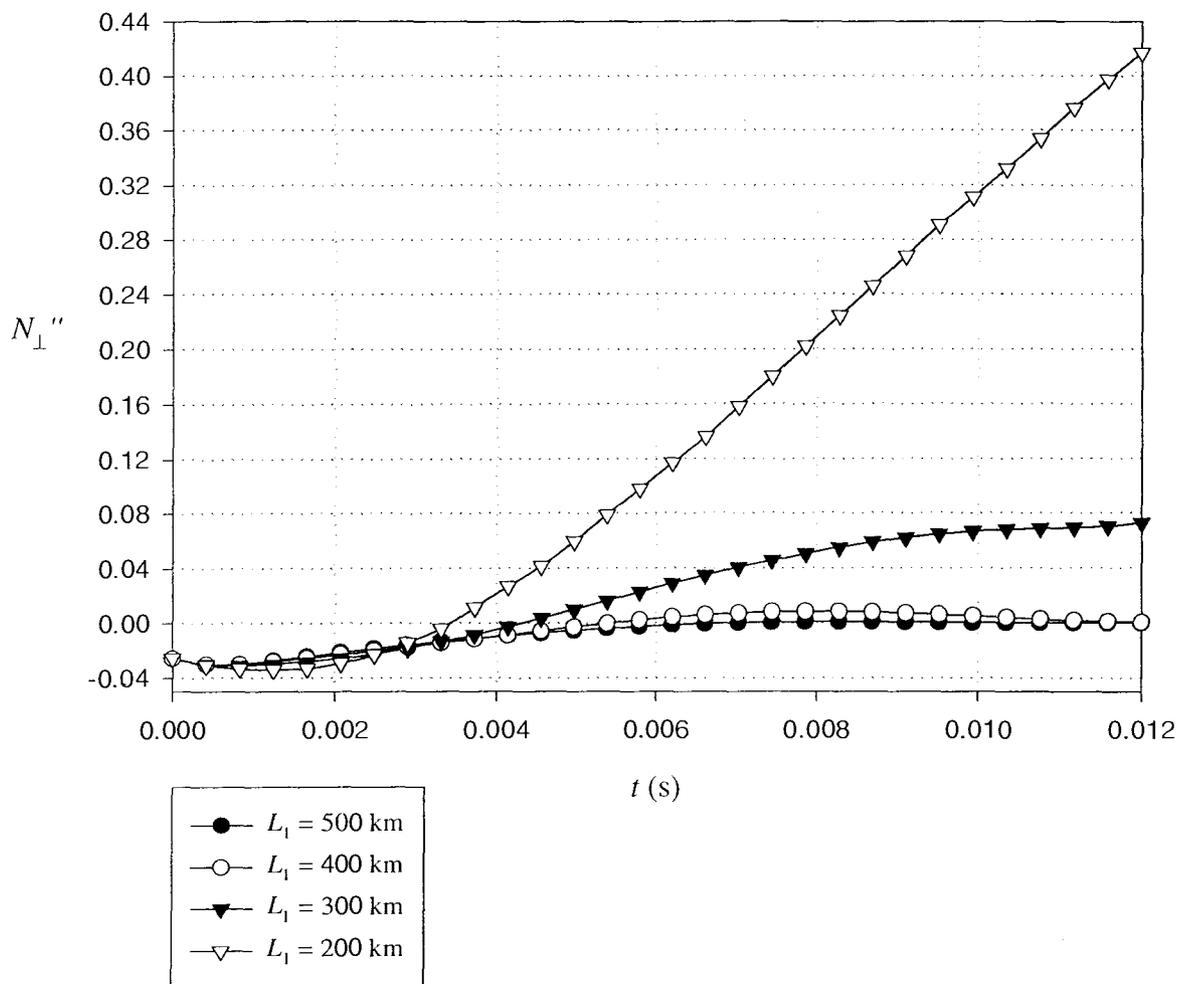


FIGURA 6.19: Parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração em função do tempo t para $L_1 = 500\text{km}$, $L_1 = 400\text{km}$, $L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$. Esta figura foi obtida para $\omega = 1,008 \Omega_e$, para o valor inicial de N_{\parallel} tal que $N_{\parallel} = 0,168$ no qual se atinge a máxima amplificação. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.9.

Podemos ainda estudar o efeito da largura da cavidade auroral na propagação e amplificação da AKR. Para isto, deve-se variar o parâmetro L_1 , definido em (5.36). Na figura 6.19 está mostrado o gráfico da parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração em função do tempo t para $L_1 = 500\text{km}$, $L_1 = 400\text{km}$, $L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$. Nota-se claramente que, embora exista em todos os casos um intervalo de tempo significativo onde há amplificação, o intervalo de tempo onde ocorre reabsorção é maior quanto menor for a largura da cavidade au-

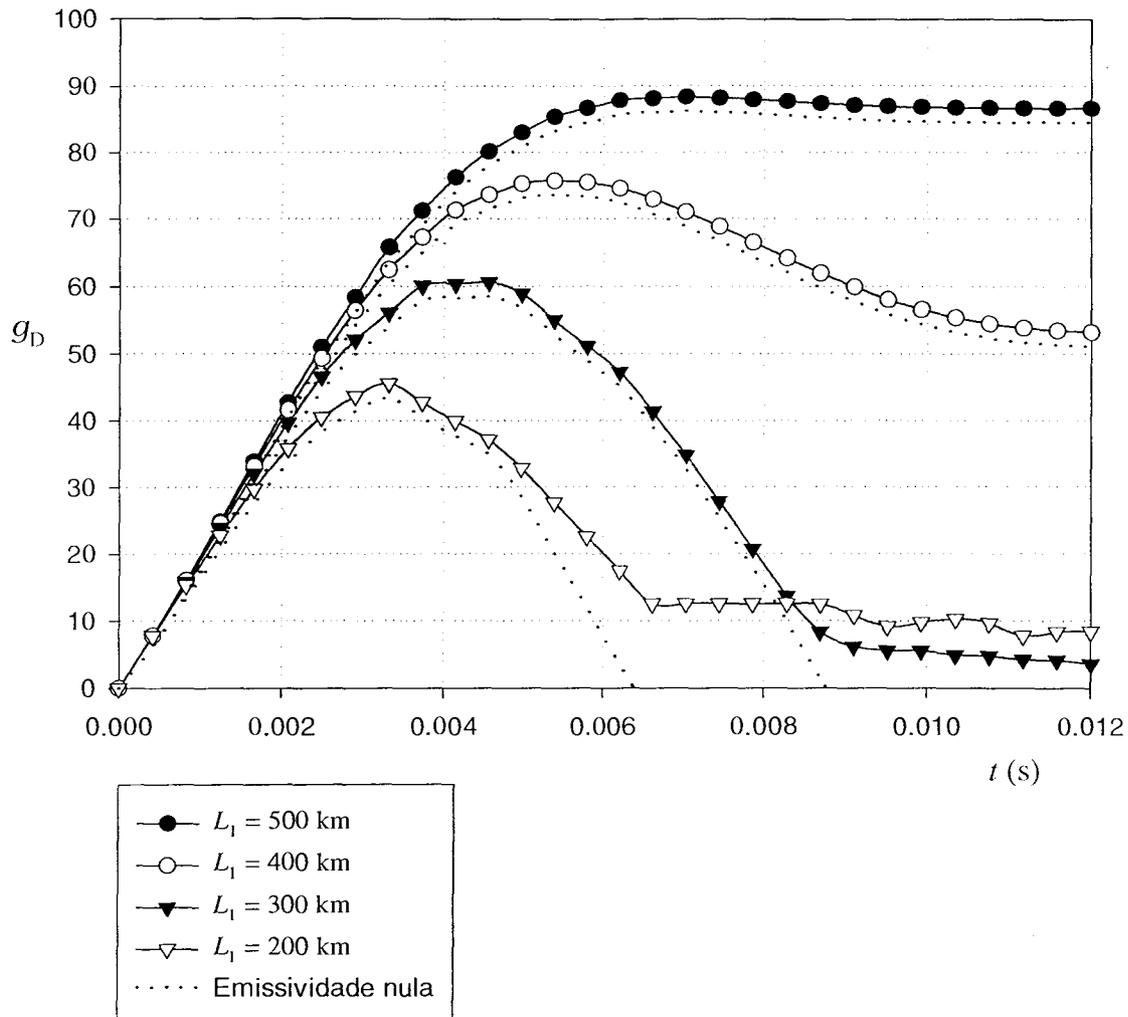


FIGURA 6.20: Fator de amplificação g_D em função do tempo t para $L_1 = 500$ km, $L_1 = 400$ km, $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.19.

roral. Como consequência, é de se esperar que o fator de amplificação g_D seja mais pronunciado para $L_1 = 500$ km do que para os demais casos.

O fator de amplificação g_D em função do tempo t para $L_1 = 500$ km, $L_1 = 400$ km, $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km, é mostrado na figura 6.20. Como esperado, a amplificação mais significativa se dá para o caso em que $L_1 = 500$ km. Nos demais casos a onda sofre uma reabsorção significativa, que reduz o valor de g_D . As linhas pontilhadas mostram ainda os valores do fator de amplificação para o caso em que a emissividade do meio é desconsiderada.

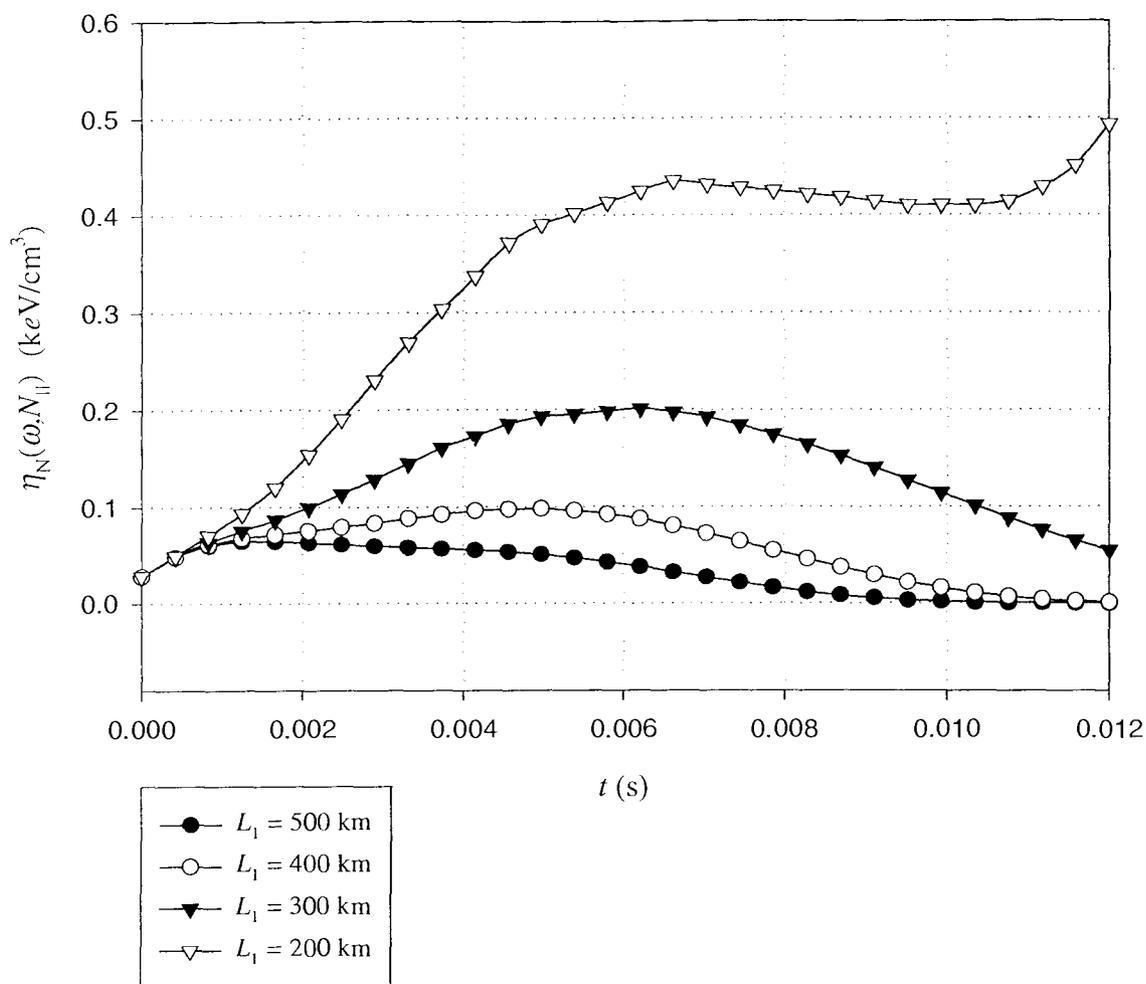


FIGURA 6.21: A emissividade espectral em função do tempo t para $L_1 = 500$ km, $L_1 = 400$ km, $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.19.

Se, para os casos $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km a emissividade fosse ignorada ao longo da trajetória, o fator de amplificação seria negativo ao final da mesma. Isto equivale a dizer que a intensidade da onda no final da trajetória é menor do que a intensidade no instante inicial.

O efeito da largura da cavidade auroral na emissividade é mostrado na figura 6.21, para os casos $L_1 = 500$ km, $L_1 = 400$ km, $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km.

A diminuição da largura da cavidade, embora cause uma diminuição no fator de amplificação, provoca um aumento da emissividade para a frequência considerada na figura. O comporta-

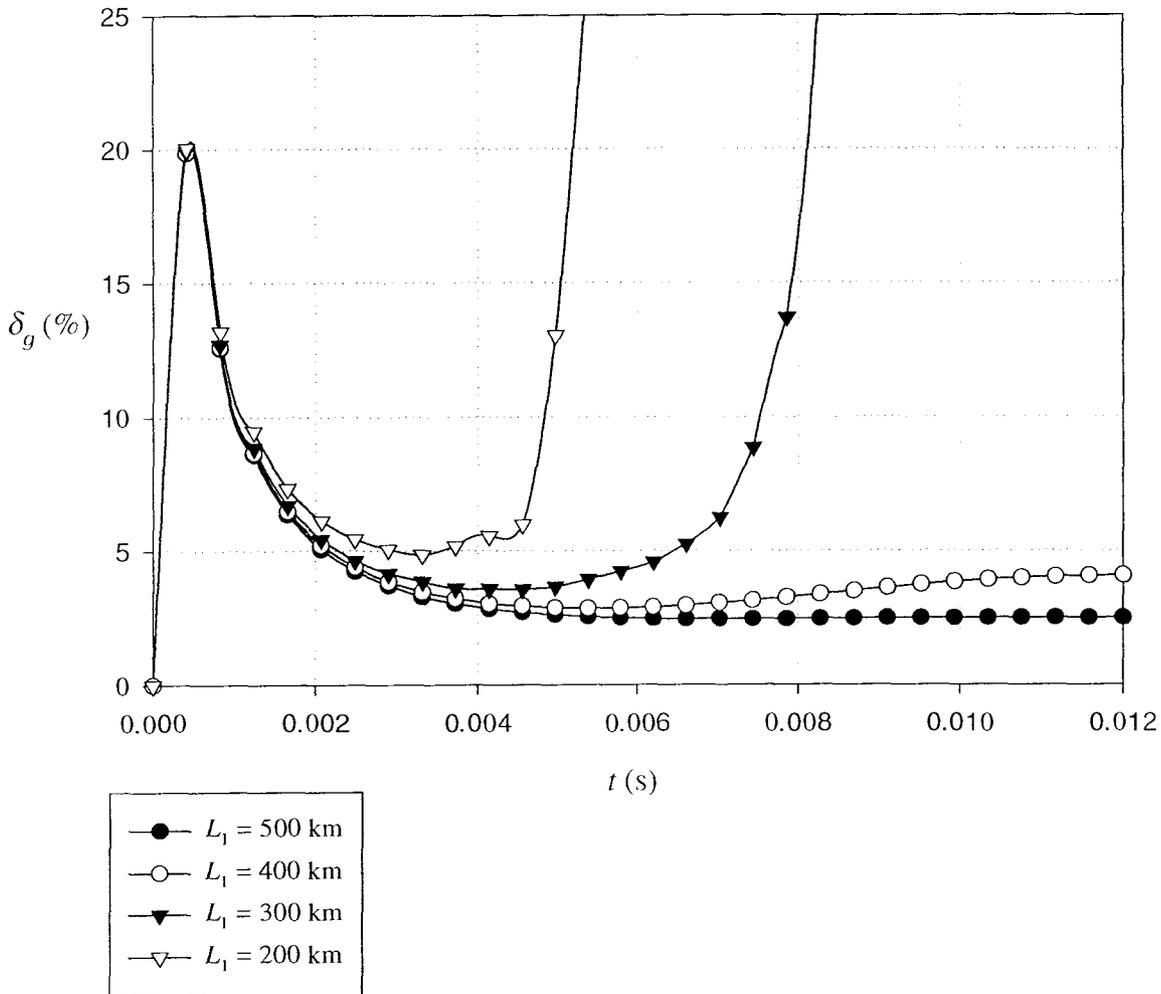


FIGURA 6.22: O efeito percentual da emissividade do meio na amplificação e absorção da onda (δ_g) em função do tempo t para $L_1 = 500\text{km}$, $L_1 = 400\text{km}$, $L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.19.

mento da emissividade ao longo da trajetória para $L_1 = 500\text{km}$, $L_1 = 400\text{km}$ e $L_1 = 300\text{km}$ segue um padrão semelhante aos casos anteriores, iniciando com valores baixos e decrescendo nos instantes finais da trajetória. Para o caso em que $L_1 = 200\text{km}$ no entanto, esse comportamento não se repete, pois a emissividade sofre um ligeiro aumento ao final da trajetória.

O efeito percentual da emissividade no fator de amplificação pode ser visto na figura 6.22, em função do tempo t para $L_1 = 500\text{km}$, $L_1 = 400\text{km}$, $L_1 = 300\text{km}$ e $L_1 = 200\text{km}$. Como se pode antever na figura 6.20, o efeito mais pronunciado é para $L_1 = 200\text{km}$ e $L_1 = 300\text{km}$. Como

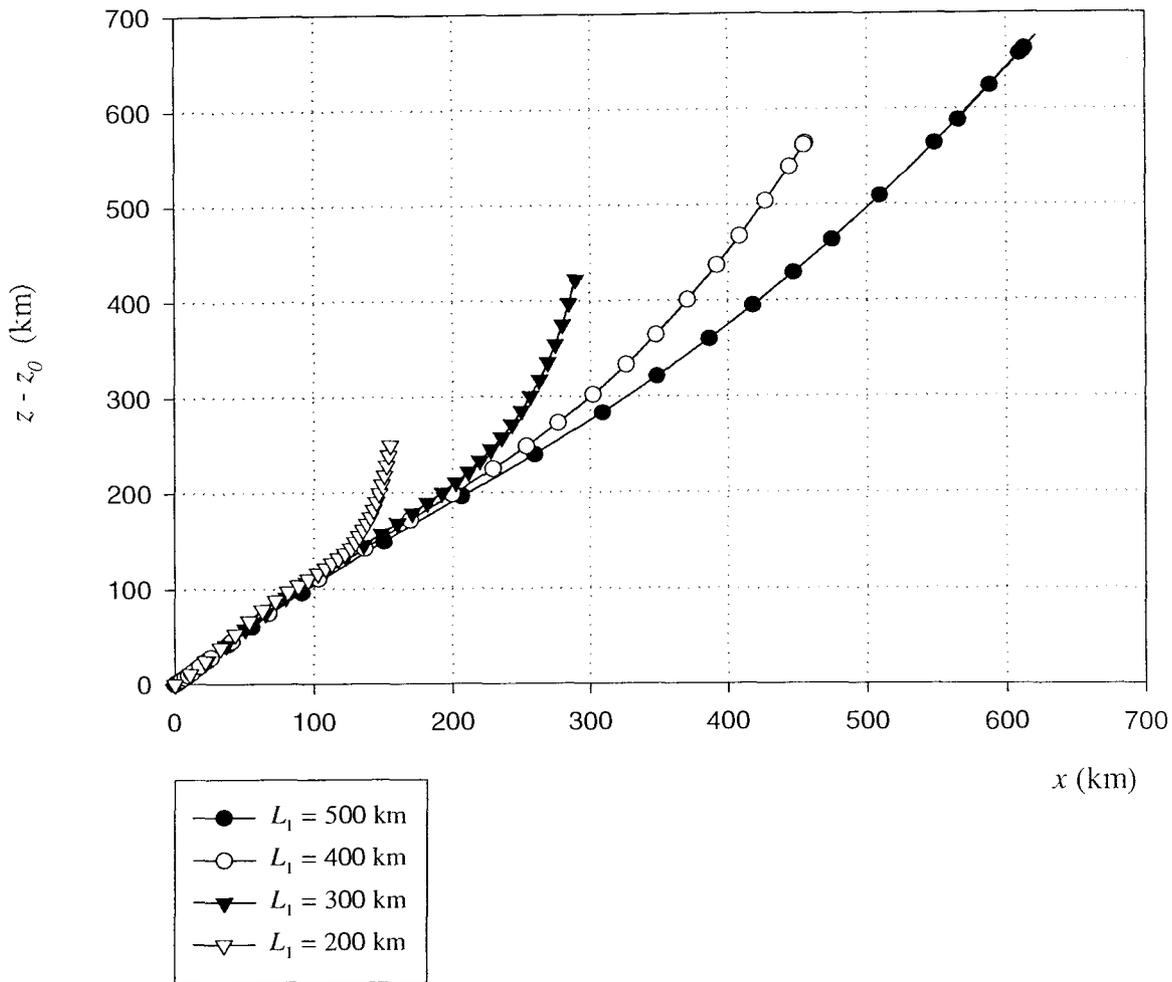


FIGURA 6.23: A trajetória da onda para $L_1 = 500$ km, $L_1 = 400$ km, $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.19.

na figura 6.16, há um pico em torno de $t \cong 0,4$ ms para todos os valores de L_1 computados, onde o efeito percentual pode chegar até aproximadamente 20%. Novamente, o efeito é mais pronunciado ao final da trajetória, quando a energia da onda é reabsorvida.

Na figura 6.23 estão as trajetórias no plano xOz da onda nos casos $L_1 = 500$ km, $L_1 = 400$ km, $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km. No início da trajetória todas as ondas viajam em direções cujos ângulos em relação ao campo magnético são aproximadamente os mesmos. Ao final, as ondas tendem a se alinhar mais com o campo magnético, sendo esse alinhamento tanto mais

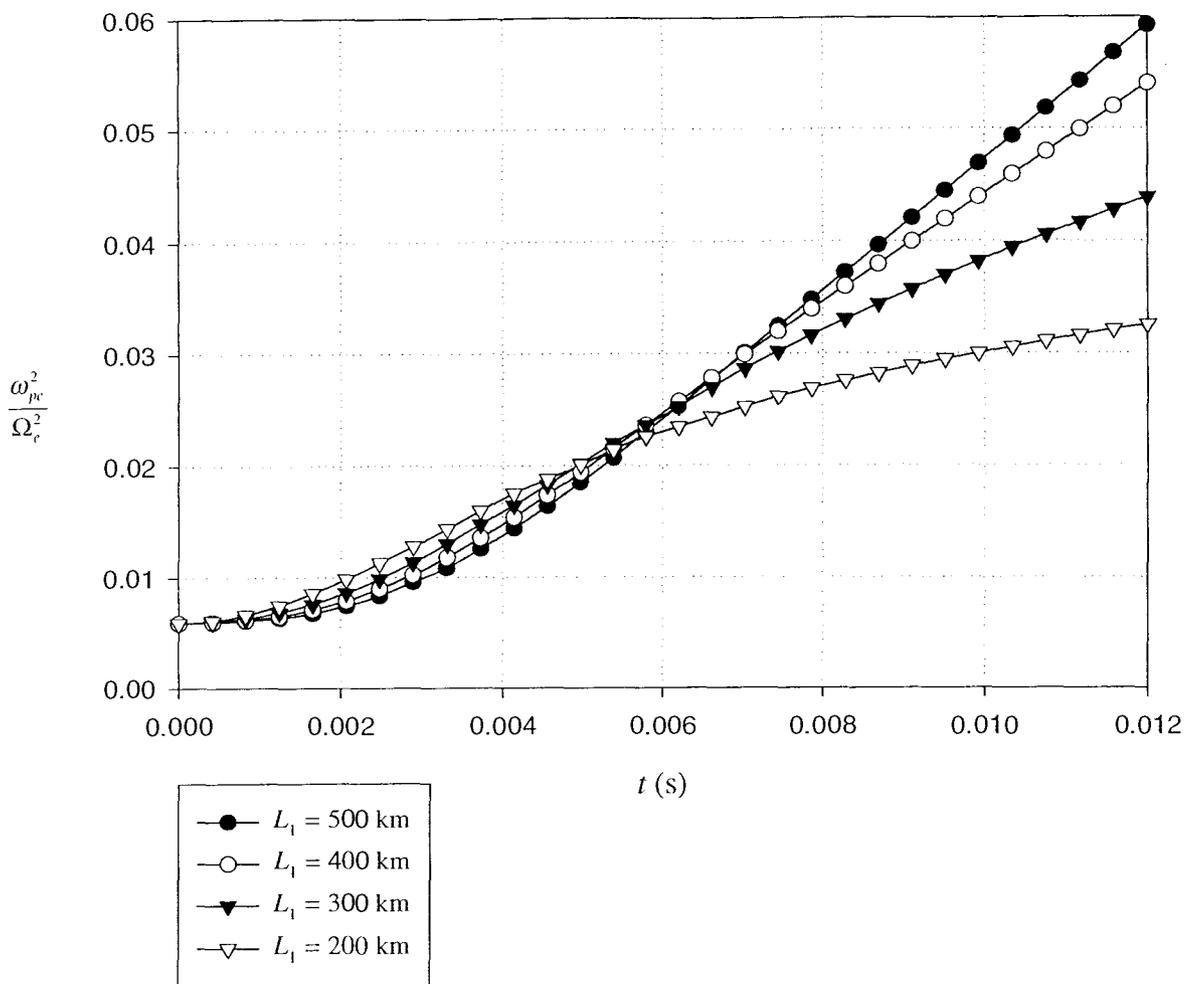


FIGURA 6.24: A quantidade $\varrho_\omega = \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2$ em função do tempo t para $L_1 = 500$ km, $L_1 = 400$ km, $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.19.

pronunciado quanto menor for a largura da cavidade. Para $L_1 = 200$ km a onda praticamente se propaga paralelamente ao campo magnético nos estágios finais da sua trajetória.

A quantidade $\varrho_\omega = \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2$, definida em (2.20), pode ser vista na figura 6.24, em função do tempo t para $L_1 = 500$ km, $L_1 = 400$ km, $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km. Como já comentado no capítulo 3, a densidade dos elétrons (presente em ω_{pe}) pode desempenhar um papel importante na teoria do maser de elétron-cíclotron no que se refere à amplificação de ondas no modo extraordinário rápido. Valores mais baixos de ϱ_ω podem favorecer a amplificação da energia das ondas

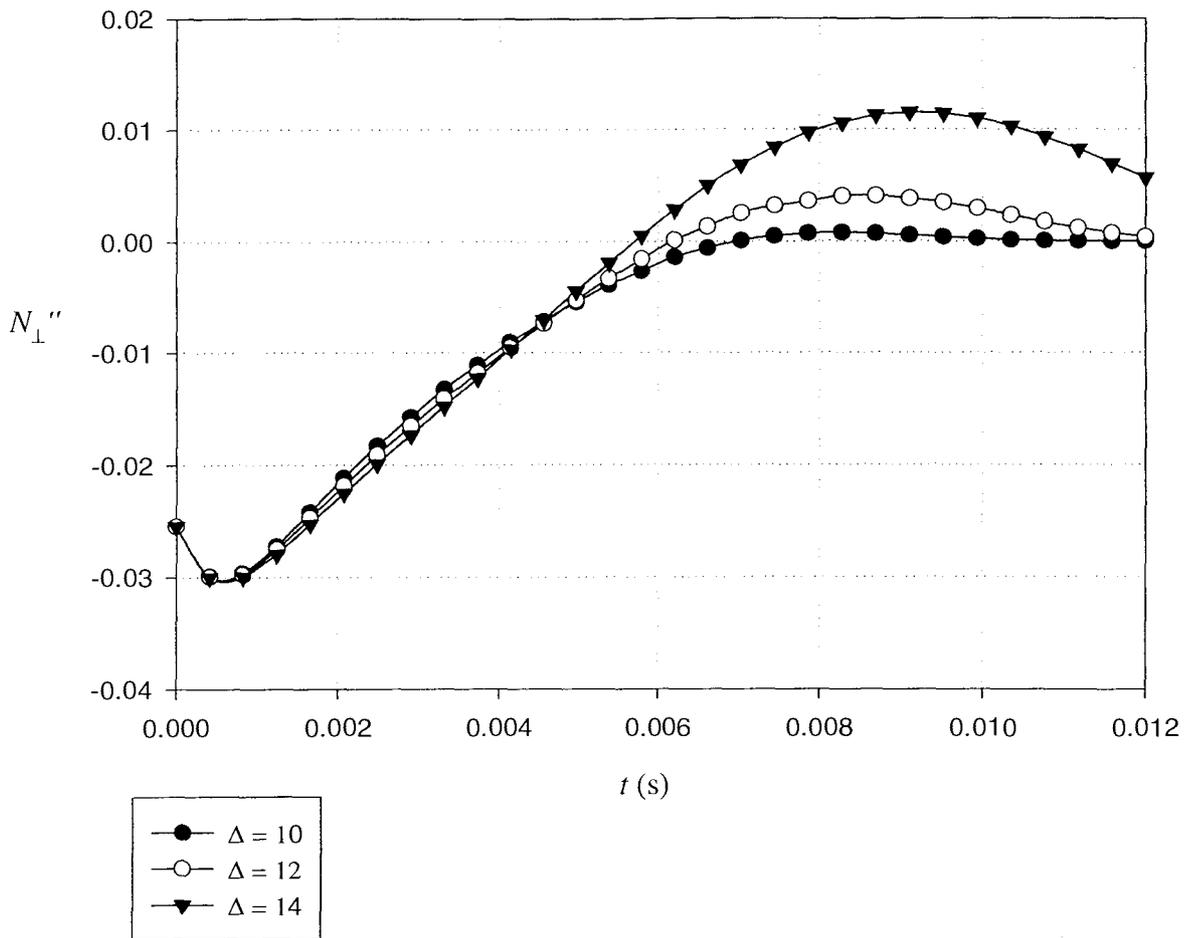


FIGURA 6.25: Parte imaginária para a componente perpendicular do índice de refração em função do tempo t para $\Delta = 10$, $\Delta = 12$ e $\Delta = 14$. Esta figura foi obtida para $\omega = 1,008\Omega_e$ para o valor inicial de N_{\parallel} tal que $N_{\parallel} = 0,168$ no qual se atinge a máxima amplificação. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.9.

neste modo.

A figura 6.24 mostra que nos primeiros 5 ms da trajetória, a quantidade $\varrho_{\omega} = \omega_{pe}^2/\Omega_e^2$ decresce com o aumento da largura da cavidade, acontecendo o oposto de 5 ms em diante. Nestes primeiros segundos é que ocorre a amplificação. De fato, a figura 6.20 mostra que a amplificação final é crescente com a largura da cavidade, ao menos no intervalo de larguras onde a amplificação é significativa. Essa dependência inversa da amplificação com o parâmetro ϱ_{ω} concorda com o

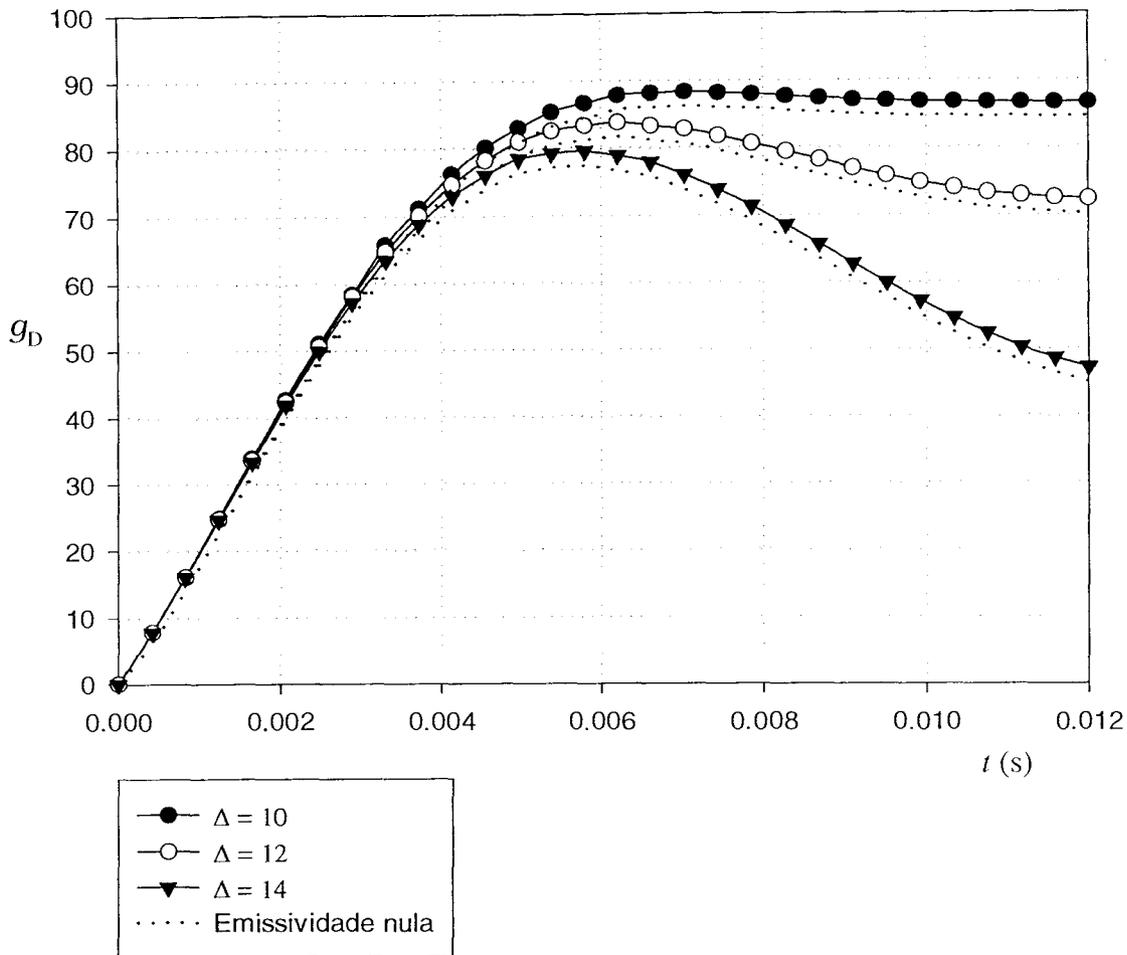


FIGURA 6.26: Fator de amplificação g_D em função do tempo t para $\Delta = 10$, $\Delta = 12$ e $\Delta = 14$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.19.

critério qualitativo proposto por C. S. Wu, definido no capítulo 2 através da equação (2.2).

O efeito do parâmetro Δ na amplificação e absorção da energia da onda e nas trajetórias foi também investigado. O valor mínimo do parâmetro Δ é escolhido de forma que o valor da densidade nas bordas da cavidade seja pelo menos uma ordem de grandeza maior do que o valor da densidade no centro da cavidade¹. Na figura 6.25 está mostrada a parte imaginária do índice de refração N''_{\perp} . Note que no início da trajetória, independentemente do valor de Δ , há amplificação em todos os casos, a qual é tanto maior quanto menor for o valor do parâmetro Δ .

¹Ver figuras 2.14 e 2.15.

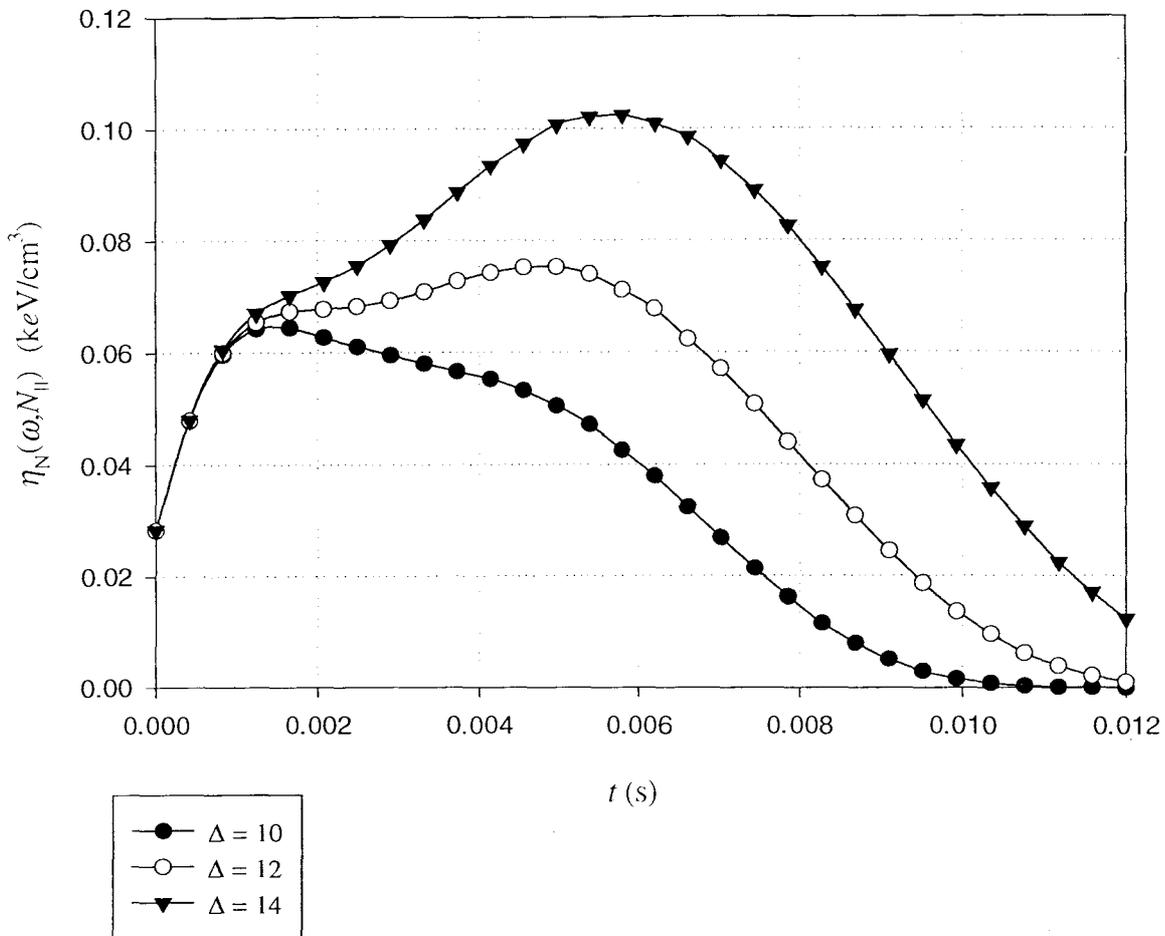


FIGURA 6.27: A emissividade espectral em função do tempo t para $\Delta = 10$, $\Delta = 12$ e $\Delta = 14$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.19.

Isto pode ser confirmado através da figura 6.26.

Na figura 6.26 está o gráfico do fator de amplificação g_b em função do tempo t para os mesmos valores de Δ com os quais foi obtida a figura 6.25. As linhas pontilhadas mostram o fator de amplificação desconsiderando-se a emissividade. No caso em que $\Delta = 12$ existe uma reabsorção bastante perceptível da energia da onda, sendo esta reabsorção ainda mais intensa no caso em que $\Delta = 14$.

O efeito do parâmetro Δ na emissividade espectral é mostrado na figura 6.27, para os casos

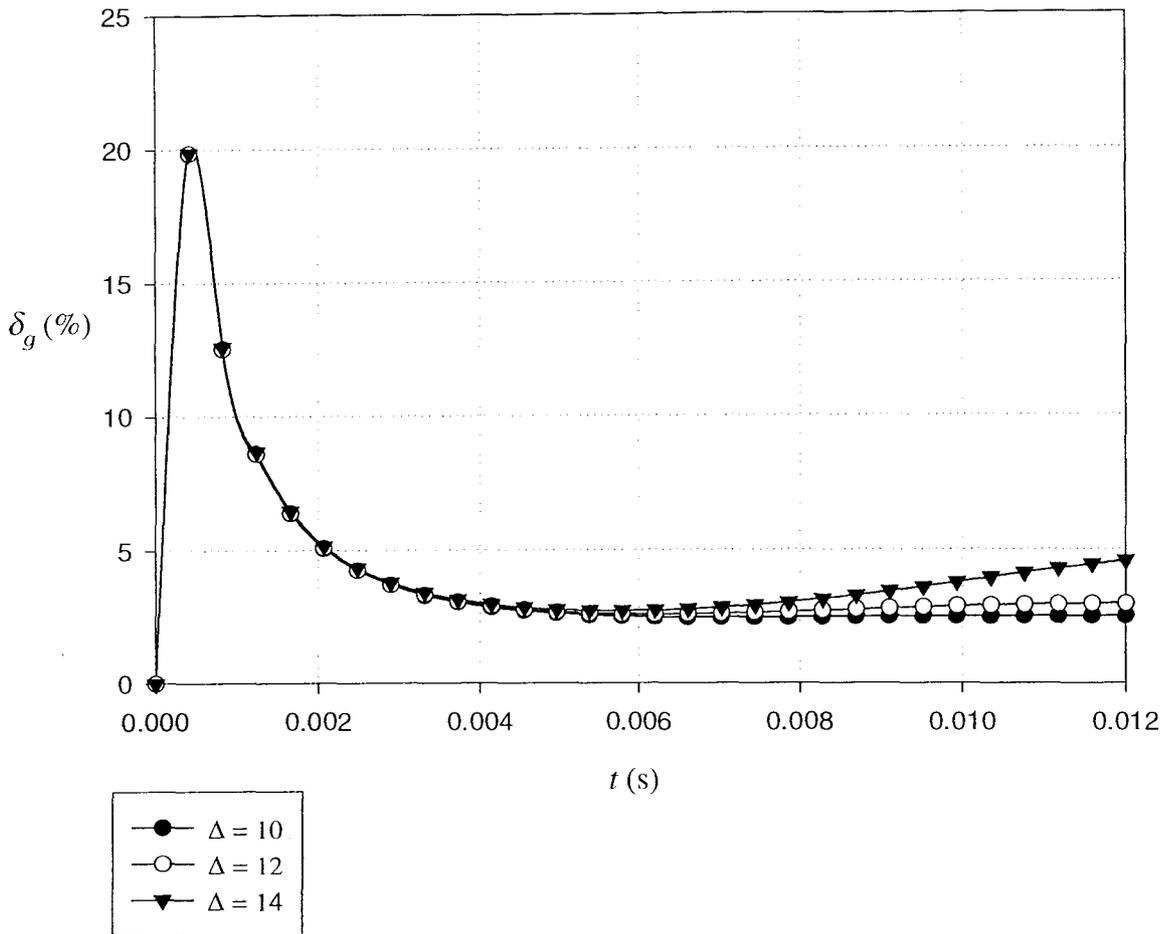


FIGURA 6.28: O efeito percentual da emissividade do meio na amplificação e absorção da onda (δ_g) em função do tempo t para $\Delta = 10$, $\Delta = 12$ e $\Delta = 14$. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.19.

$\Delta = 10$, $\Delta = 12$ e $\Delta = 14$. O aumento do parâmetro Δ causa uma diminuição no fator de amplificação e provoca um aumento da emissividade, como mostra a figura. Novamente, ao longo da trajetória, a emissividade espectral inicia com valores baixos, atinge um valor máximo e decresce nos instantes finais.

Na figura 6.28 pode ser visto o efeito percentual relativo da emissividade no fator de amplificação, em função do tempo t para $\Delta = 10$, $\Delta = 12$ e $\Delta = 14$. Como nos casos anteriores, há um pico em torno de $t \cong 0,4$ ms para todos os valores de Δ , sendo o efeito percentual relativo da emissi-

vidade ligeiramente mais pronunciado ao final da trajetória, quando a energia da onda começa a ser reabsorvida.

Apesar da emissividade espectral contribuir positivamente para a amplificação da AKR, sua inclusão no cálculo do fator de amplificação não explica os níveis de amplificação tipicamente observados de 100 db ou mais. Com base no modelo físico utilizado neste trabalho, pode-se concluir que a emissividade não pode ser responsável por tais níveis de amplificação. Na próxima subseção incluiremos as subcavidades ao perfil definido em (5.36) e mostrado na figura 5.2, com o intuito de investigar que efeito a existência de subcavidades pode causar na amplificação da AKR. Para isso, basta fazer $b < 1$ em (5.36).

6.3.2 A inclusão das subcavidades no perfil de densidade

Na subseção 2.5.2 do capítulo 2 foi dito que a cavidade auroral é na verdade composta por um conjunto de cavidades menores, com decréscimos súbitos no valor local de densidade que podem chegar até duas ordens de grandeza aproximadamente. Na figura 5.2 mostramos tal perfil para $a = 1$ e para quatro valores distintos de b . O valor $b = 1$ foi utilizado na subseção anterior e não leva em conta a presença de tais subcavidades. A análise do caso em que as subcavidades são levadas em conta no procedimento de traçado de raios encontra-se na literatura, no trabalho de Cavalcanti, Ziebell & Schneider (1996) [34]. Este trabalho demonstra que essas subcavidades podem desempenhar um papel importante na explicação dos níveis de amplificação observados da AKR e é nele que se baseia essa subseção.

O critério básico para que o plasma na cavidade auroral possa ser considerado localmente homogêneo é que o comprimento da onda que se propaga nele (AKR) seja pequeno se comparado com a escala de comprimento típica das inhomogeneidades. Podemos estimar a escala de comprimento das inhomogeneidades através da escala de comprimento de variação da densidade normalizada, usando a expressão

$$L_x = \left(\left| \frac{1}{\mathcal{N}_e} \frac{\partial \mathcal{N}_e}{\partial x} \right| \right)^{-1}, \quad (6.21)$$

onde $\mathcal{N}_e = n_{re}(x, s) / [\bar{n}_{re}(s) \times \Delta]$ é o perfil mostrado na figura 5.2. O comprimento de onda típico da AKR é da ordem de 1km, valor tomado para λ_{AKR} ao construir a figura 6.29, onde foram usados $a = 1$, $L_1 = 500\text{km}$, $L_2 = 50\text{km}$ e $\Delta = 10$. Nesta figura estão superpostos os gráficos de λ_{AKR}/L_x

para $b = 0,01$, $b = 0,1$, $b = 0,3$ e $b = 1$ (perfil puramente gaussiano).

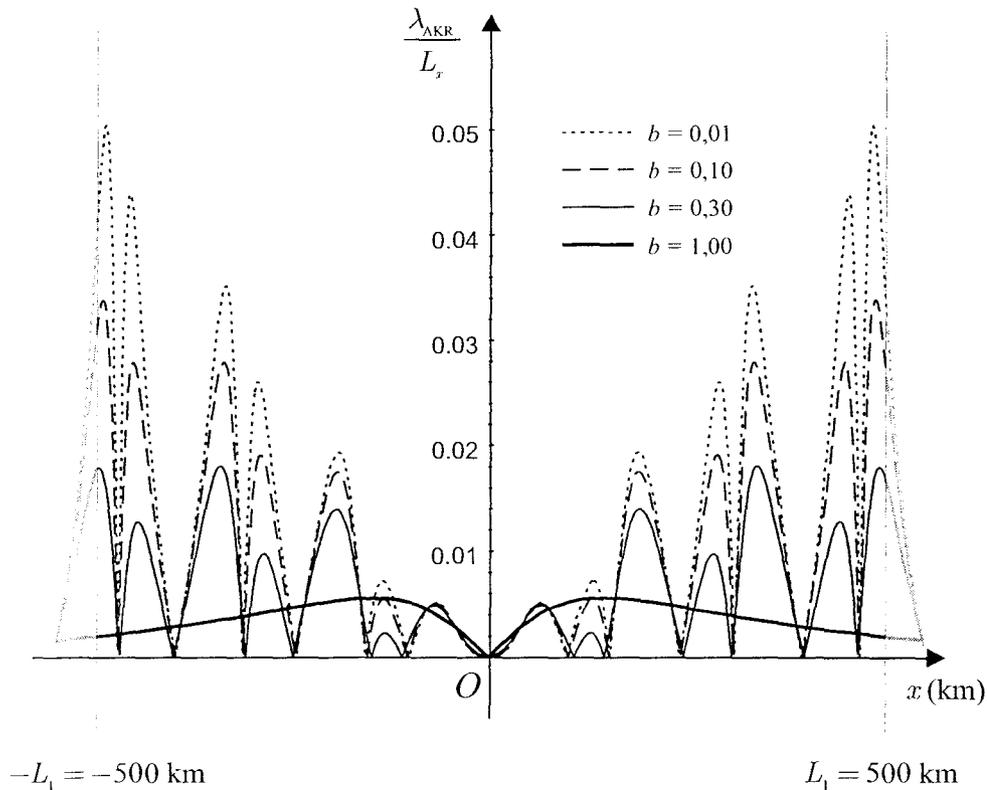


FIGURA 6.29: A variação de λ_{AKR}/L_x com a posição x na cavidade auroral. O comprimento L_x é dado por $L_x = [(1/\mathcal{N}_e)\partial\mathcal{N}_e/\partial x]^{-1}$, onde $\mathcal{N}_e = n_{Te}(x, s)/[\bar{n}_{Te}(s) \times \Delta]$. Esta figura foi obtida para os quatro valores de b indicados na figura. Os outros parâmetros são $a = 1$, $L_1 = 500$ km, $L_2 = 50$ km e $\Delta = 10$. A linha mais espessa mostra o caso onde o perfil é puramente Gaussiano ($a = b = 1$), onde são desconsideradas as subcavidades.

Para o perfil puramente gaussiano, representado pela linha mais espessa, a aproximação localmente homogênea é sem dúvida melhor do que para os outros casos, principalmente na proximidade das bordas da cavidade auroral. Apesar disso, pode-se dizer que tal aproximação é válida, pois mesmo no caso mais drástico ($b = 0,01$) temos que λ_{AKR}/L_x atinge um valor máximo de 0,05 próximo às bordas da cavidade. Tal valor ainda pode ser considerado suficientemente pequeno para que a aproximação localmente homogênea possa ser considerada válida para comprimentos de onda da mesma ordem de grandeza de λ_{AKR} .

A figura 6.30 mostra um gráfico semelhante ao da figura 6.29 tomando-se $L_2 = 100$ km ao invés de $L_2 = 50$ km. Os outros parâmetros são os mesmos usados na figura 6.29. Neste caso o gradiente de densidade se torna mais suave, o que acarreta em valores maiores para o comprimento L_x . Isso, como mostra a figura, torna os valores assumidos pela quantidade λ_{AKR}/L_x

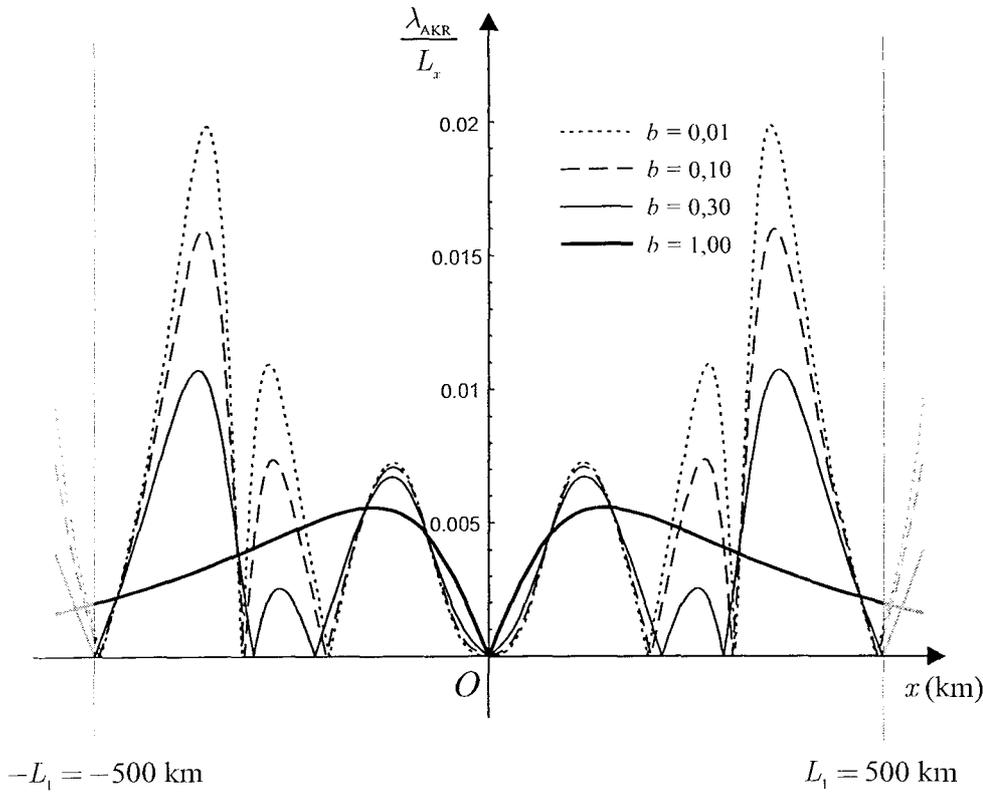


FIGURA 6.30: A variação de λ_{AKR}/L_x com a posição x na cavidade auroral para $L_2 = 100$. Os demais parâmetros são os mesmos utilizados na figura 6.29.

menores do que no caso onde $L_2 = 50\text{km}$, também aumentando nas proximidades das bordas da cavidade auroral. Neste caso, para comprimentos de onda típicos da AKR, o comprimento de onda λ_{AKR} fica limitado a um máximo em torno de 2% do valor local de L_x , ou seja, a aproximação localmente homogênea pode ser considerada satisfatória.

De forma a manter a aproximação localmente homogênea confiável, o valor mínimo adotado neste trabalho para o comprimento das subcavidades L_2 é de 50km. Neste caso, nas proximidades das bordas da cavidade teremos que o comprimento de onda típico da AKR, λ_{AKR} , fica limitado a cerca de 5% do valor local do comprimento L_x .

Os resultados que serão mostrados nas figuras que seguem foram obtidos com os seguintes parâmetros: $V_l = 8\text{ kV}$, $n_{Mc}^{eq} = 0,8\text{ el/cm}^3$, $T_{\parallel e} = 4\text{ keV}$, $T_{\perp e} = 6\text{ keV}$ e $l_{LC} = 2$, $L_1 = 500\text{ km}$, $\Delta = 10$ e $T_M = 0,1\text{ eV}$ para a temperatura da população de fundo. Estes foram os mesmos valores utilizados na subseção anterior. Além disso, todos os resultados a seguir foram obtidos para $\omega = 1,008\Omega_e$, que é frequência que proporciona a maior amplificação.

No entanto, como mostra a figura 6.31, não mais temos $N_{\parallel} = 0,168$ como o valor inicial de

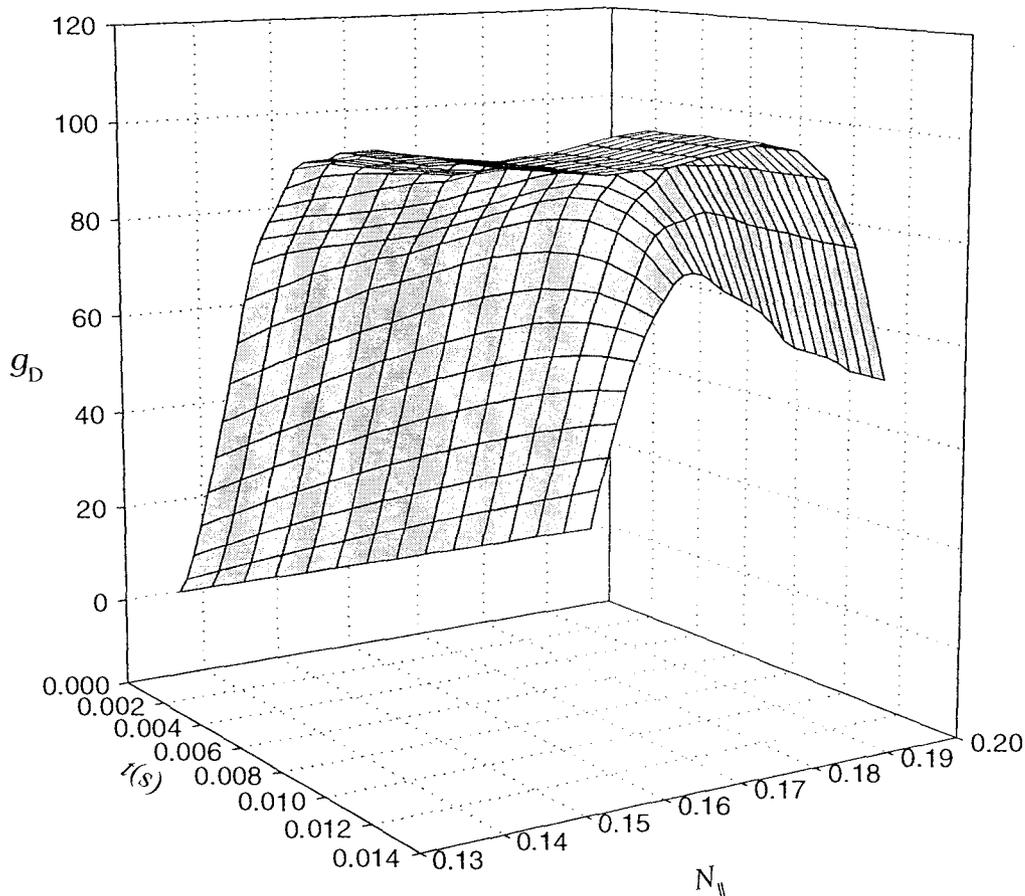


FIGURA 6.31: O fator de amplificação g_D para $\omega = 1,008 \Omega_e$ em função do tempo t transcorrido e dos valores iniciais de $N_{||}$. Esta figura foi obtida para $a = 1$ e $b = 0,01$, sendo o restante dos parâmetros utilizados os mesmos da figura 6.1.

$N_{||}$ para o qual a amplificação é máxima. Na figura vê-se claramente que não é mais na região central do intervalo dos valores iniciais de $N_{||}$ que acontece a amplificação mais eficaz, pois esta se desloca na direção dos extremos desse intervalo. Resta então saber para qual dos dois extremos do intervalo se desloca a amplificação mais eficaz.

Na figura 6.32 está mostrado o mapa de contornos do fator de amplificação g_D para o mesmo caso mostrado na figura 6.31. Nota-se que g_D não é máximo na região central do intervalo de valores iniciais de $N_{||}$, e sim em uma região mais próxima do extremo inferior desse intervalo, onde $N_{||} \cong 0,140$. Nesse caso, seu valor pode atingir 99,8 db (para $N_{||} = 0,1420$), bastante

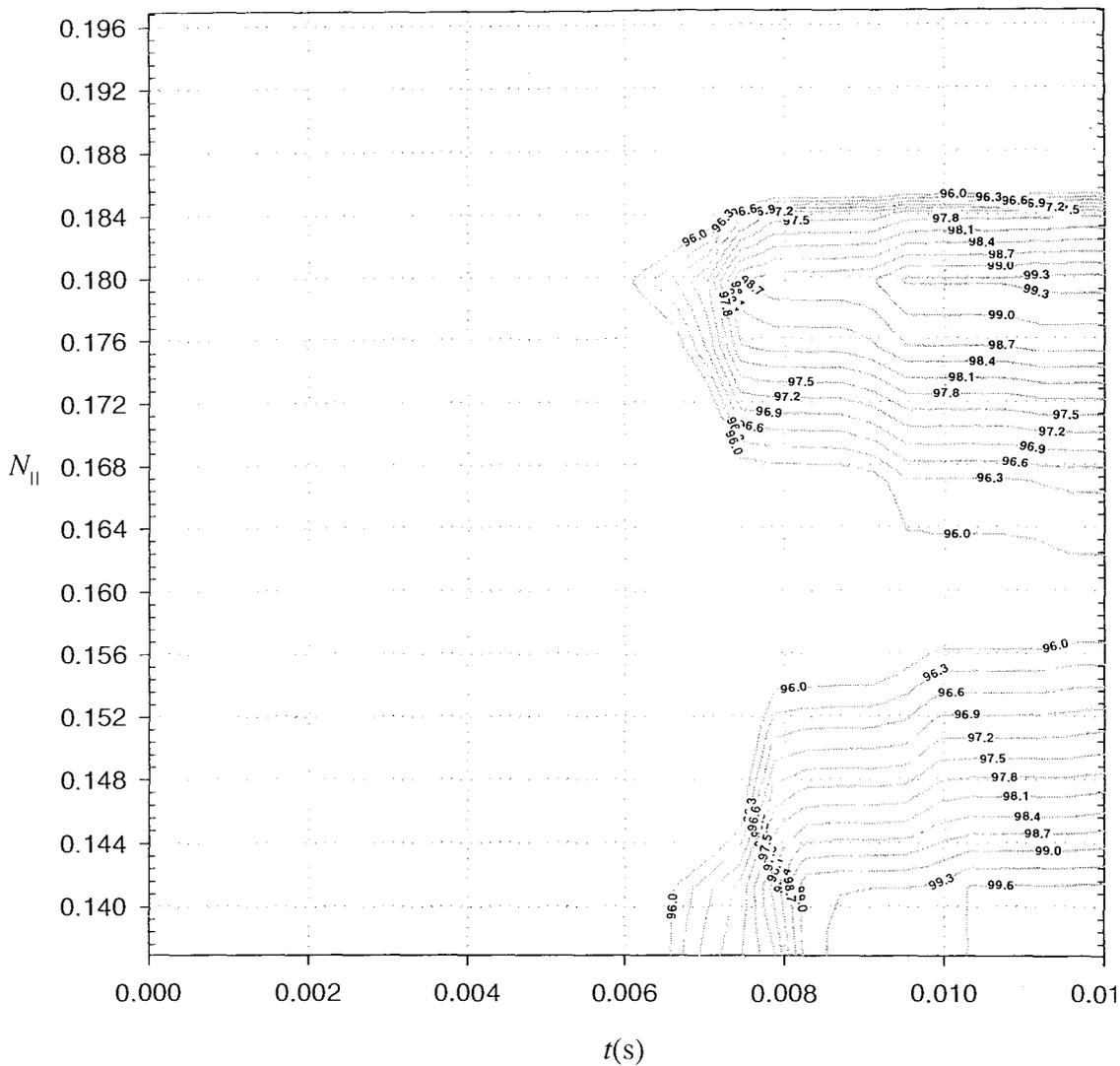


FIGURA 6.32: Mapa de contornos para o fator de amplificação g_D para $a = 1$ e $b = 0,01$.

próximo dos 100 db tipicamente observados.

Podemos prosseguir nesse estudo investigando a região do intervalo de valores iniciais de $N_{||}$ onde ocorre a máxima amplificação para outros valores do parâmetro b . Na figura 6.33 vemos o gráfico do fator de amplificação g_D para $a = 1$ e $b = 0,1$, em função dos valores iniciais de $N_{||}$ e do tempo t . Percebe-se um comportamento similar ao caso mostrado na figura 6.31, ou seja, a região onde a amplificação é máxima se desloca para os extremos do intervalo dos valores iniciais de $N_{||}$.

Na figura 6.34 mostramos o mapa de contornos do fator de amplificação g_D para o caso onde

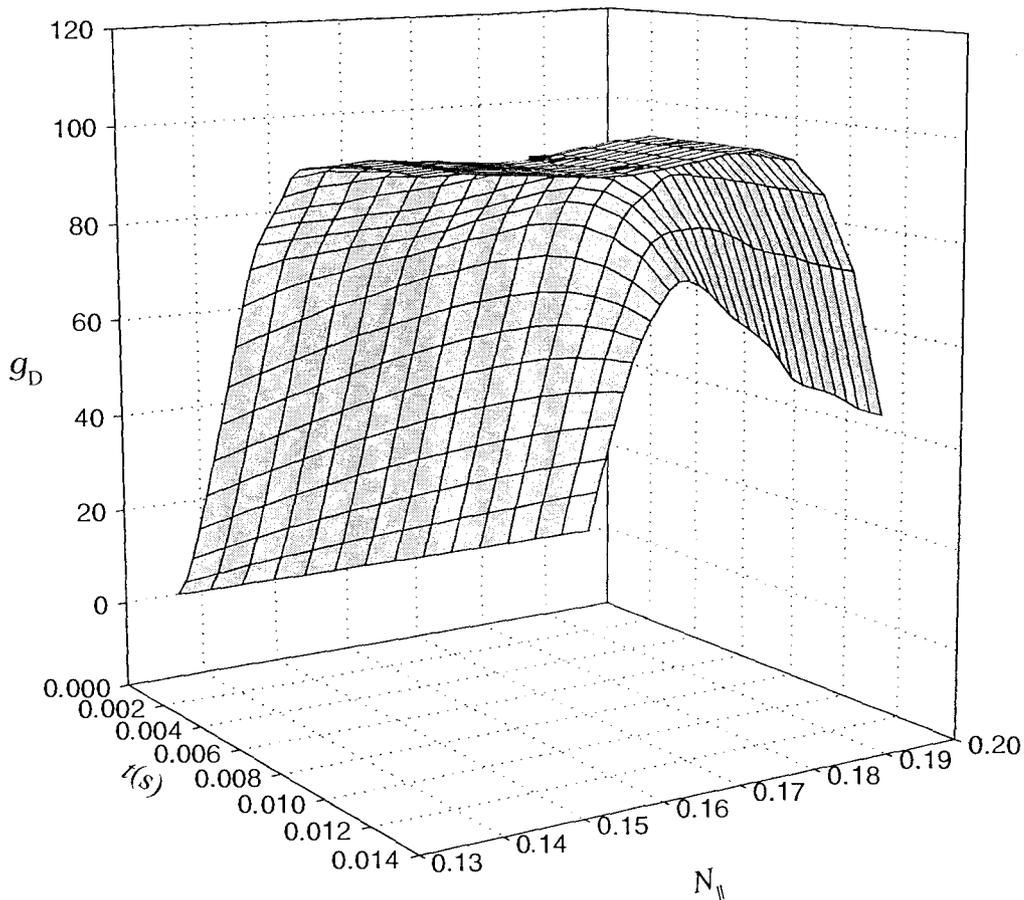


FIGURA 6.33: O fator de amplificação g_D para $\omega = 1,008 \Omega_e$ em função do tempo t transcorrido e dos valores iniciais de $N_{||}$. Esta figura foi obtida para $a = 1$ e $b = 0,1$, sendo o restante dos parâmetros utilizados iguais aos da figura 6.31.

$a = 1$ e $b = 0,1$. Os parâmetros restantes são os mesmos da figura 6.31. Nota-se que a região onde a amplificação é máxima se desloca da região central do intervalo de valores iniciais de $N_{||}$, para a região superior desse intervalo, onde $N_{||} \cong 0,18$. Nesse caso, seu valor pode atingir em torno de 98,38 db (para $N_{||} = 0,1798$).

O caso onde $b = 0,3$ é mostrado na figura 6.35, onde vemos o novamente o fator de amplificação g_D em função dos valores iniciais de $N_{||}$ e do tempo t . Na figura pode-se ver que, similarmente aos casos anteriores, a região onde a amplificação é mais eficaz também se desloca para os extremos do intervalo de valores iniciais de $N_{||}$. No entanto, é bem menos perceptível o aumento da

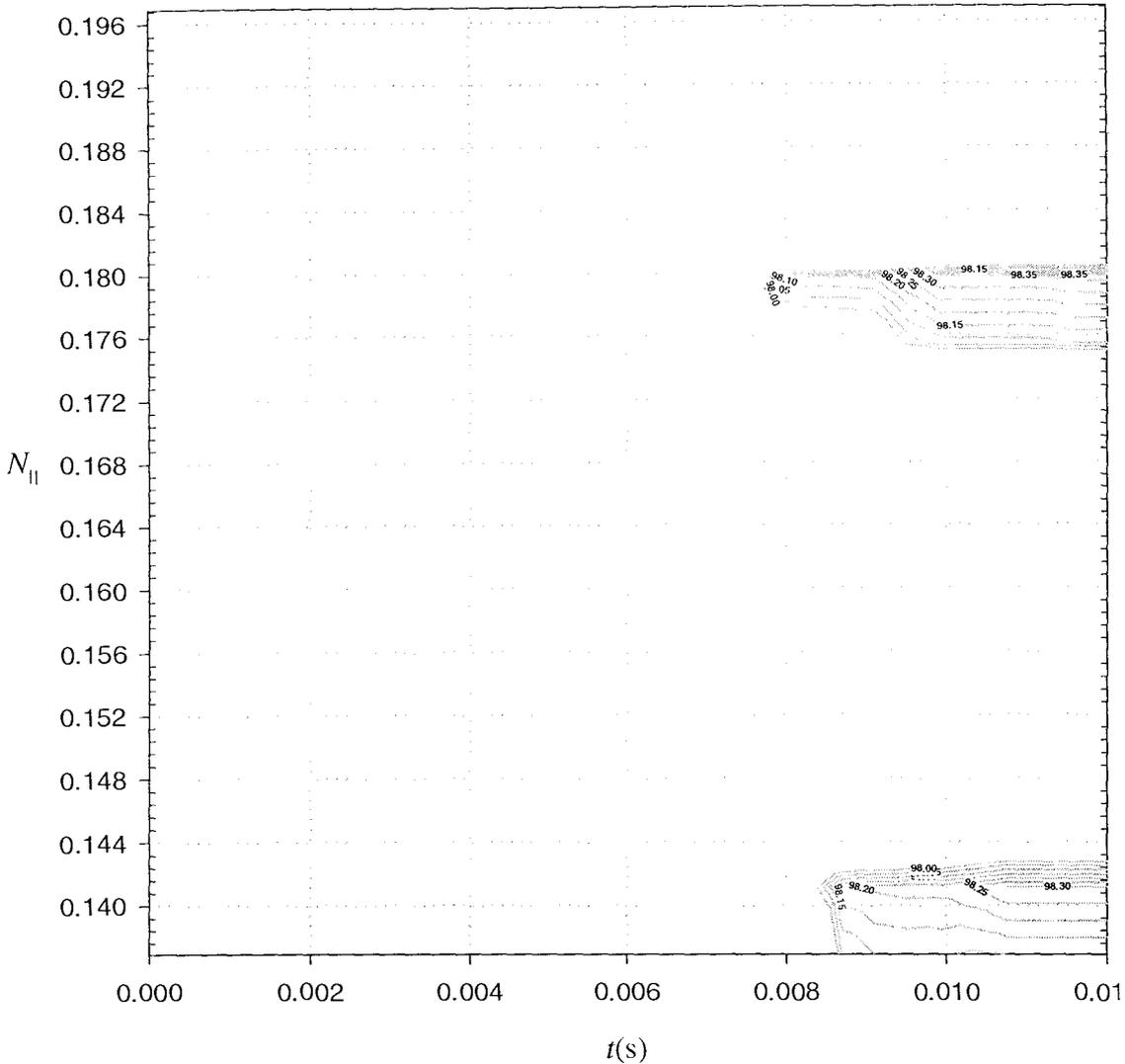


FIGURA 6.34: Mapa de contornos para o fator de amplificação g_D para $a = 1$ e $b = 0, 1$.

amplificação nessas regiões do que nos casos anteriores.

A figura 6.36 mostra um gráfico similar ao mostrado nas figuras 6.32 e 6.34, para $a = 1$ e $b = 0, 3$. Como no caso onde $b = 0, 1$, o valor inicial de $N_{||}$ que proporciona a maior amplificação se encontra deslocado para o extremo superior do intervalo, onde o fator de amplificação g_D fica em torno de 96,28 db (para $N_{||} = 0, 1755$). Por motivo de clareza, foram mostrados apenas alguns poucos contornos, todos próximos do valor máximo do fator de amplificação g_D .

Faremos agora um estudo investigando o comportamento do fator de amplificação g_D para diversos valores do parâmetro a , ou seja, mantendo constante o valor do parâmetro b e variando-

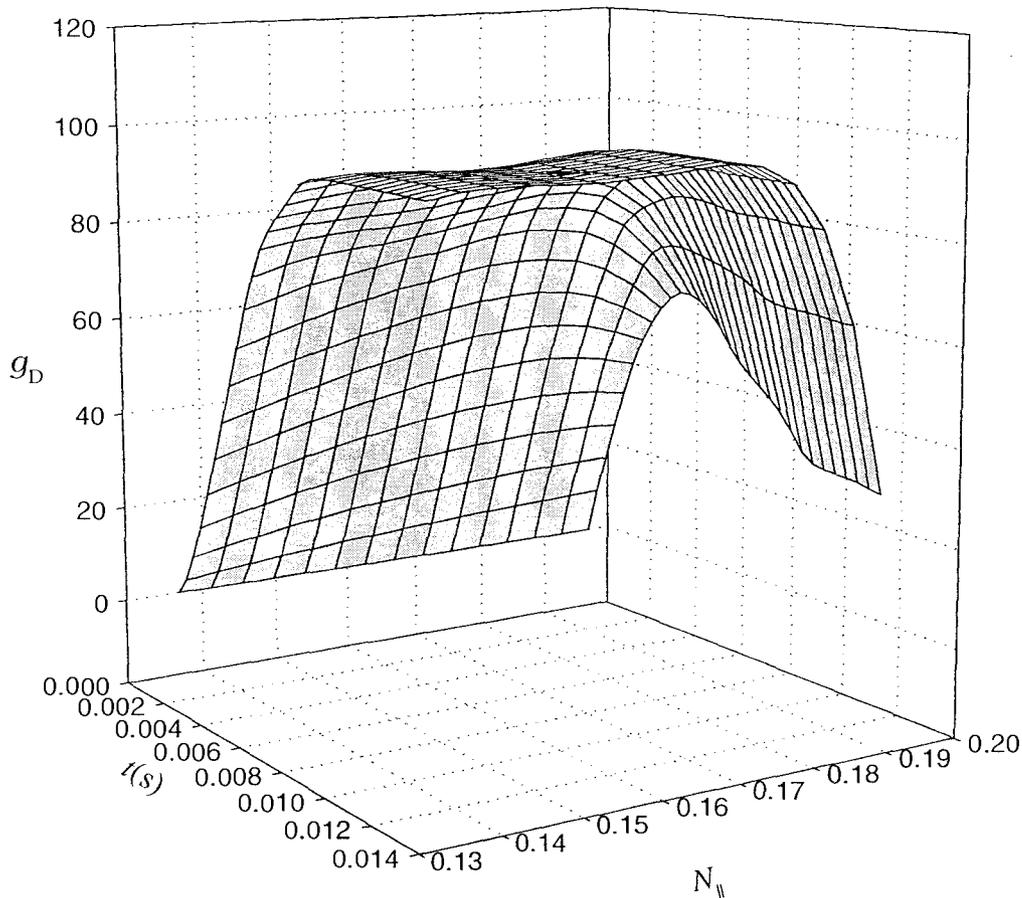


FIGURA 6.35: O fator de amplificação g_D para $\omega = 1,008 \Omega_e$ em função do tempo t transcorrido e dos valores iniciais de $N_{||}$. Esta figura foi obtida para $a = 1$ e $b = 0,3$, sendo o restante dos parâmetros utilizados os mesmos da figura 6.31.

se o valor do parâmetro a (em torno da unidade). Assim pode-se ter uma visão ampla do conjunto de valores de a e b para os quais a amplificação é mais significativa, segundo o modelo físico utilizado neste trabalho.

O perfil de densidades no caso onde o parâmetro a é diferente da unidade é mostrado na figura 6.37. Nela se vê o gráfico da densidade normalizada $n_{Te}(x, s) / [\bar{n}_{Te}(s) \times \Delta]$ em função de x para $a = 0,8$ e $a = 1,2$. Diferentemente do gráfico mostrado na figura 5.2 nota-se que, nos pontos onde residem os picos de densidade, seu valor é ligeiramente maior (no caso em que $a = 1,2$) ou menor (no caso em que $a = 0,8$) do que aquele que ela atingiria se o seu perfil fosse

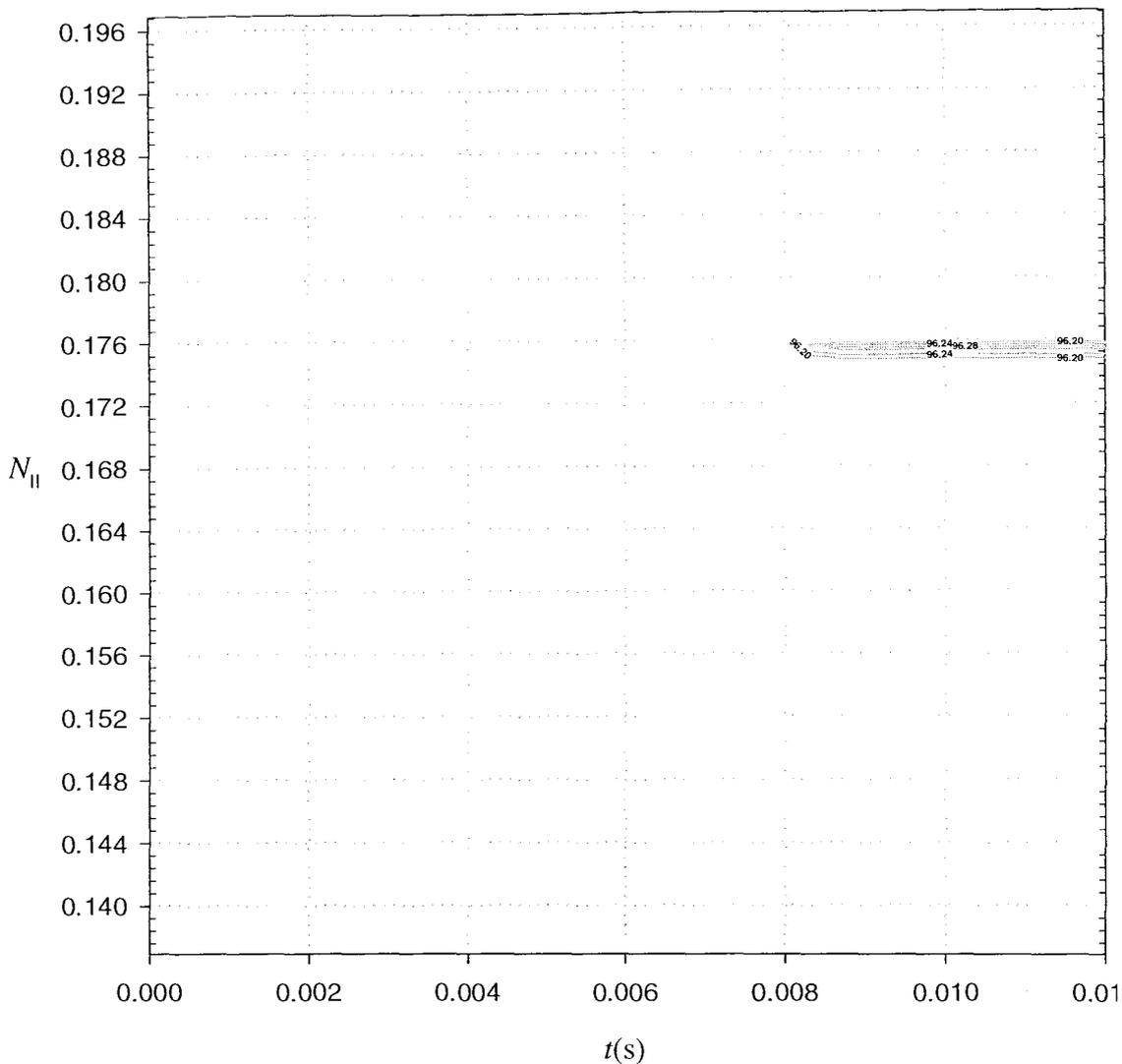


FIGURA 6.36: Mapa de contornos para o fator de amplificação g_D para $a = 1$ e $b = 0,3$.

considerado como puramente Gaussiano. Nos três casos mostrados na figura foi tomado o valor $b = 0,1$. Independente do valor de a , o parâmetro b tem o efeito de aumentar (para b menores) ou diminuir (para b maiores) a profundidade das subcavidades, como já mostrado na figura 5.2.

O mapa de contornos do fator de amplificação g_D para $b = 0,01$ e para o parâmetro a variando em torno da unidade ($0,8 < a < 1,2$) é mostrado na figura 6.38. O valor inicial da componente paralela do índice de refração é aquele em que acontece a maior amplificação para $b = 0,01$ e $a = 1$ ($N_{||} = 0,1420$). Na figura pode-se ver que a amplificação mais eficaz não se dá quando $a = 1$, mas para $a \cong 0,86$. Uma análise mais precisa mostra que, quando $a = 0,8667$ o fator de

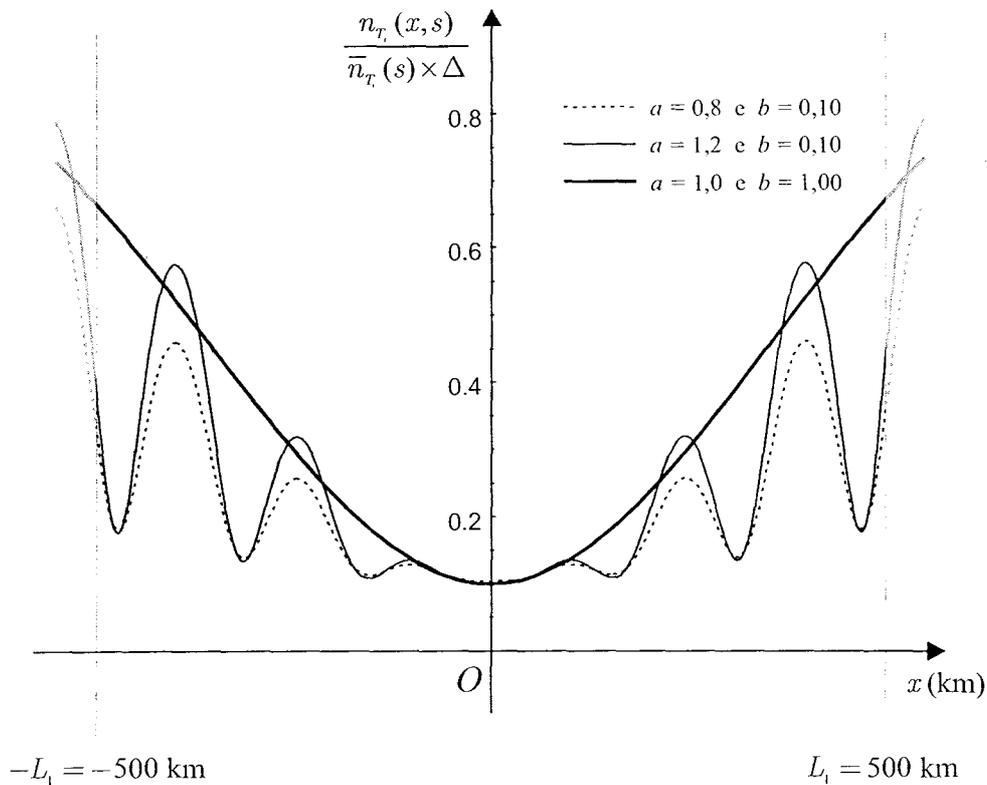


FIGURA 6.37: Gráfico da densidade normalizada $n_{T_e}(x, s)/[\bar{n}_{T_e}(s) \times \Delta]$ para $a = 0,8$ e $a = 1,2$, análogo ao mostrado na figura 5.2. Esta figura foi obtida para os três valores de a indicados, podendo-se comparar diretamente os casos $a = 0,8$ e $a = 1,2$ com o caso onde $a = 1$. Os outros parâmetros são os mesmos usados na figura 5.2.

amplificação pode atingir até 100,22 db, pouco acima do valor comumente observado de 100 db.

O caso onde a varia em torno da unidade e $b = 0,1$ é mostrado na figura 6.39, onde a componente paralela inicial do índice de refração é $N_{||} = 0,1798$. Na figura nota-se mais uma vez que a amplificação mais eficaz não se dá quando $a = 1$, mas desta vez ocorre para $a \cong 0,8$ onde o fator de amplificação pode atingir até 100,35 db, pouco mais alto do que o valor máximo atingido quando $b = 0,01$.

A figura 6.40 mostra o mapa de contornos para o fator de amplificação, no caso onde $b = 0,3$ e cuja componente paralela inicial do índice de refração é $N_{||} = 0,1755$. Novamente a amplificação mais eficaz acontece para $a \cong 0,8$, onde o fator de amplificação pode atingir até 98,14 db, pouco abaixo do valor máximo atingido quando $b = 0,01$ e $b = 0,1$ e do valor tipicamente observado de 100 db.

As demais grandezas físicas, como as partes real e imaginária da componente perpendicular do índice de refração e emissividade, serão estudadas a seguir. Em todos os gráficos que seguem,

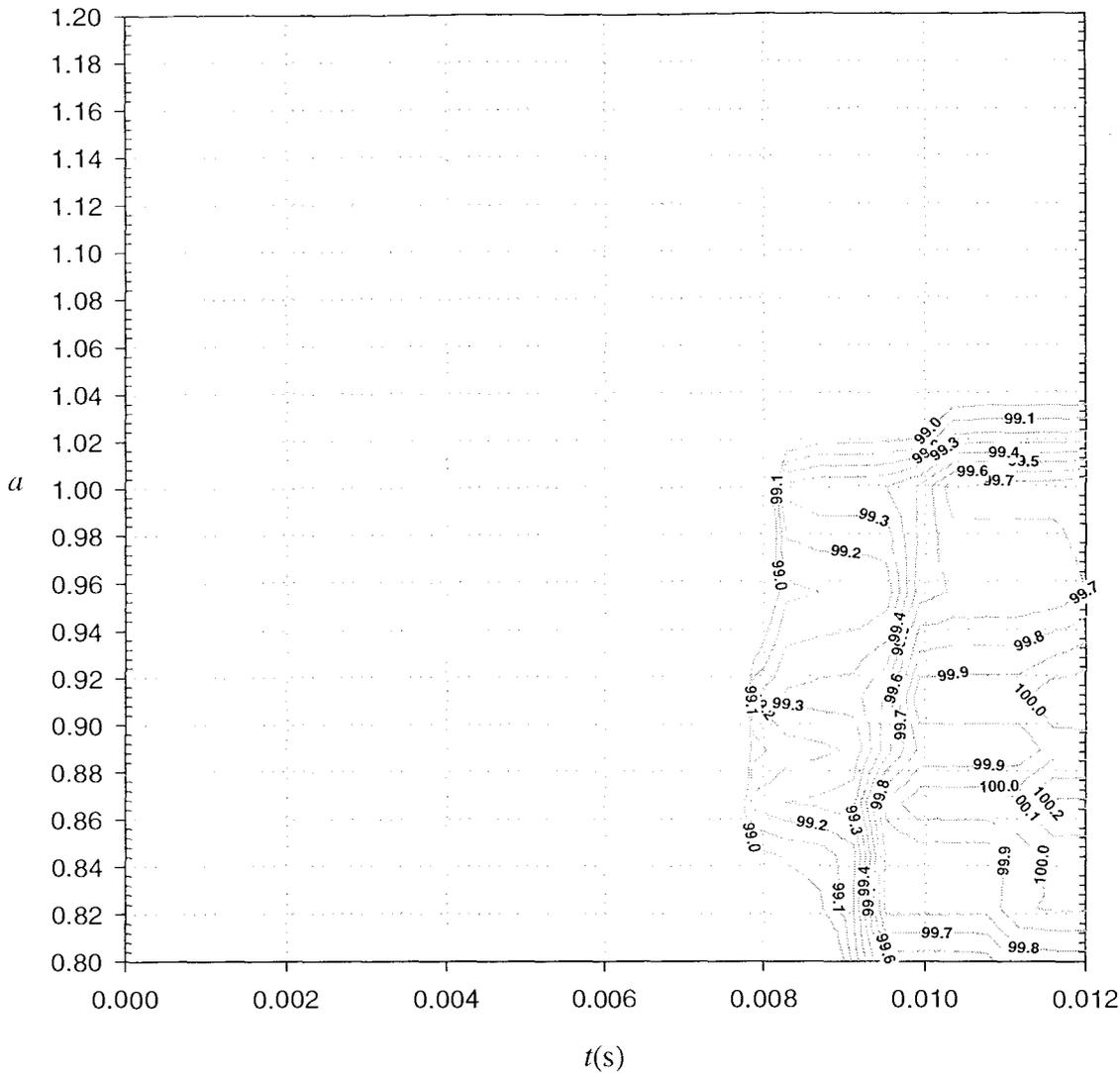


FIGURA 6.38: Mapa de contornos para o fator de amplificação g_D para $b = 0,01$. O valor inicial da componente paralela do índice de refração é $N_{||} = 0,1420$.

os parâmetros considerados serão aqueles que correspondem à amplificação mais eficaz. O comportamento dessas grandezas ao longo da trajetória da onda será estudado para $b = 0,01$ (onde a amplificação mais eficaz se dá para $a = 0,8667$ e $N_{||} = 0,1420$), $b = 0,1$ (onde a amplificação mais eficaz se dá para $a = 0,8$ e $N_{||} = 0,1798$) e $b = 0,3$ (onde a amplificação mais eficaz se dá para $a = 0,8$ e $N_{||} = 0,1755$). Serão mostrados ainda resultados utilizando-se o perfil puramente gaussiano ($a = b = 1$ e $N_{||} = 0,1680$), para fins de comparação. Além disso, usaremos aqui os valores de L_1 , δ e ω para os quais, na subseção 6.3.1, foi constatada a amplificação mais eficaz,

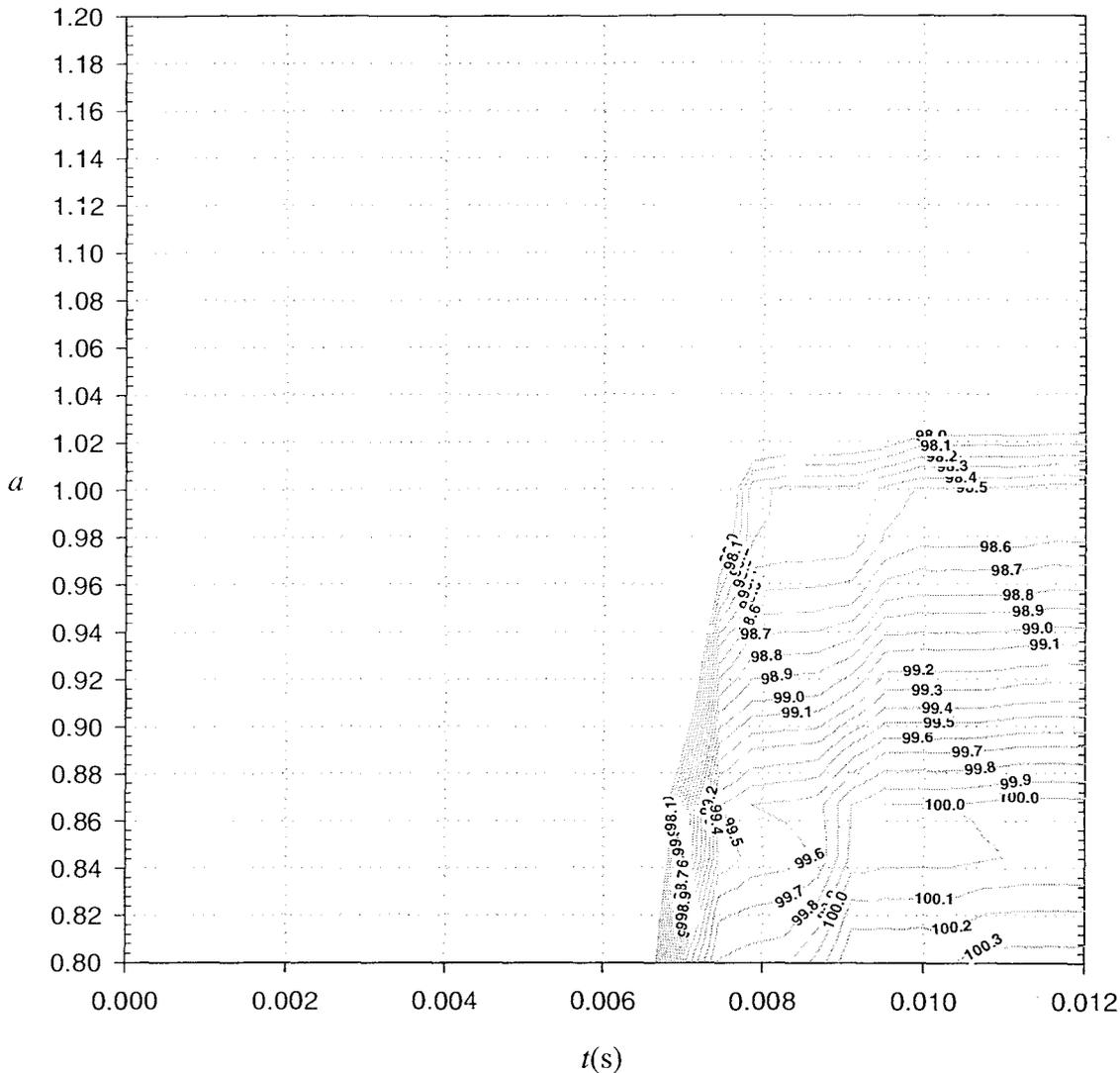


FIGURA 6.39: Mapa de contornos para o fator de amplificação g_D para $b = 0, 1$. O valor inicial da componente paralela do índice de refração é $N_{\parallel} = 0,1798$.

ou seja, $L_1 = 500 \text{ km}$, $\Delta = 10$ e $\omega = 1,008 \Omega_e$.

Na figura 6.41 estão mostrados os gráficos da parte imaginária da componente do índice de refração perpendicular ao campo magnético, em função do tempo t . Aparecem aqui também as oscilações originadas da variação do perfil de densidades com a distância x ao longo da cavidade auroral. Nota-se claramente na figura que a região de reabsorção ($N_{\perp}'' > 0$) se torna praticamente inexistente quando são incluídas as subcavidades. No caso onde $b = 1$ (perfil de densidade puramente gaussiano) essa região é bem mais destacada do que nos casos onde usamos valores

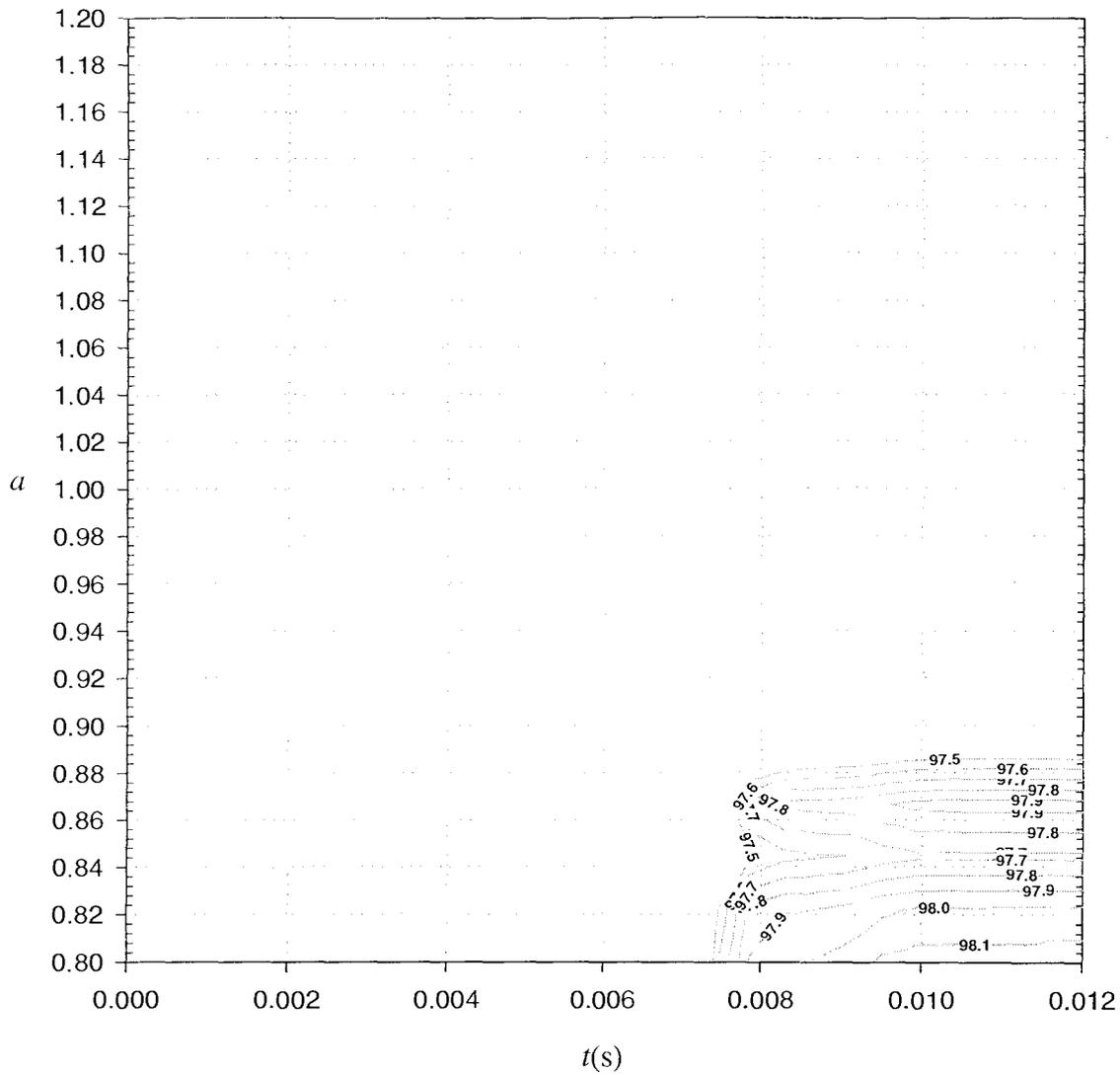


FIGURA 6.40: Mapa de contornos para o fator de amplificação g_D para $b = 0,3$. O valor inicial da componente paralela do índice de refração é $N_{\parallel} = 0,1755$.

menores para o parâmetro b . Nos casos onde o parâmetro b é menor do que a unidade, essa diferença é bem menos pronunciada. Isso leva a uma amplificação mais eficaz, como mostra a figura 6.42.

Na figura 6.42 está mostrado o gráfico do fator de amplificação g_D em função do tempo t , usando diferentes valores do parâmetro b : $b = 0,01$, $b = 0,1$, $b = 0,3$ e $b = 1$. A figura mostra que, embora não haja uma diferença muito grande nos níveis de amplificação nos casos onde $b = 0,01$, $b = 0,1$ e $b = 0,3$, existe, como já foi visto, um aumento bastante significativo em relação ao caso

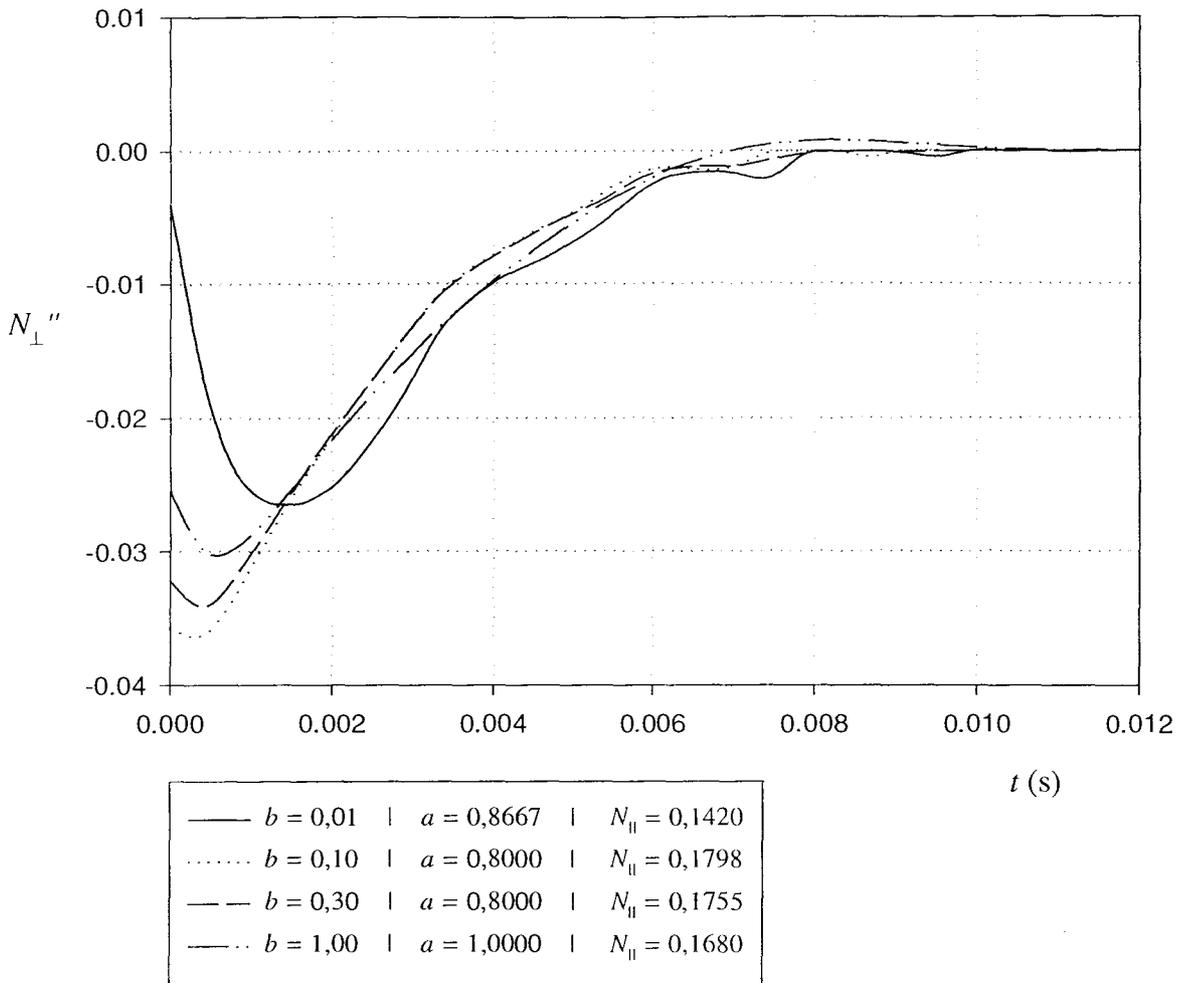


FIGURA 6.41: Parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração N_{\perp}'' em função do tempo t para diferentes valores de b . Os valores de a correspondentes são os que levam à máxima amplificação em cada caso. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

onde $b = 1$ do perfil puramente gaussiano. Além disso, nota-se algumas oscilações no fator de amplificação para os casos onde $b \neq 1$, provocados pelas diminuições súbitas do valor local da densidade na região fonte. A existência dessas diminuições pode então ser um fator importante no que se refere ao processo de amplificação da AKR. Nota-se que o caso onde a amplificação é mais eficaz acontece para $b = 0,1$, $a = 0,8$ e $N_{\parallel} = 0,1798$, onde o fator de amplificação atinge em torno de 100,35 db no final do intervalo de tempo considerado.

A emissividade espectral em função do tempo t para diferentes valores do parâmetro b está

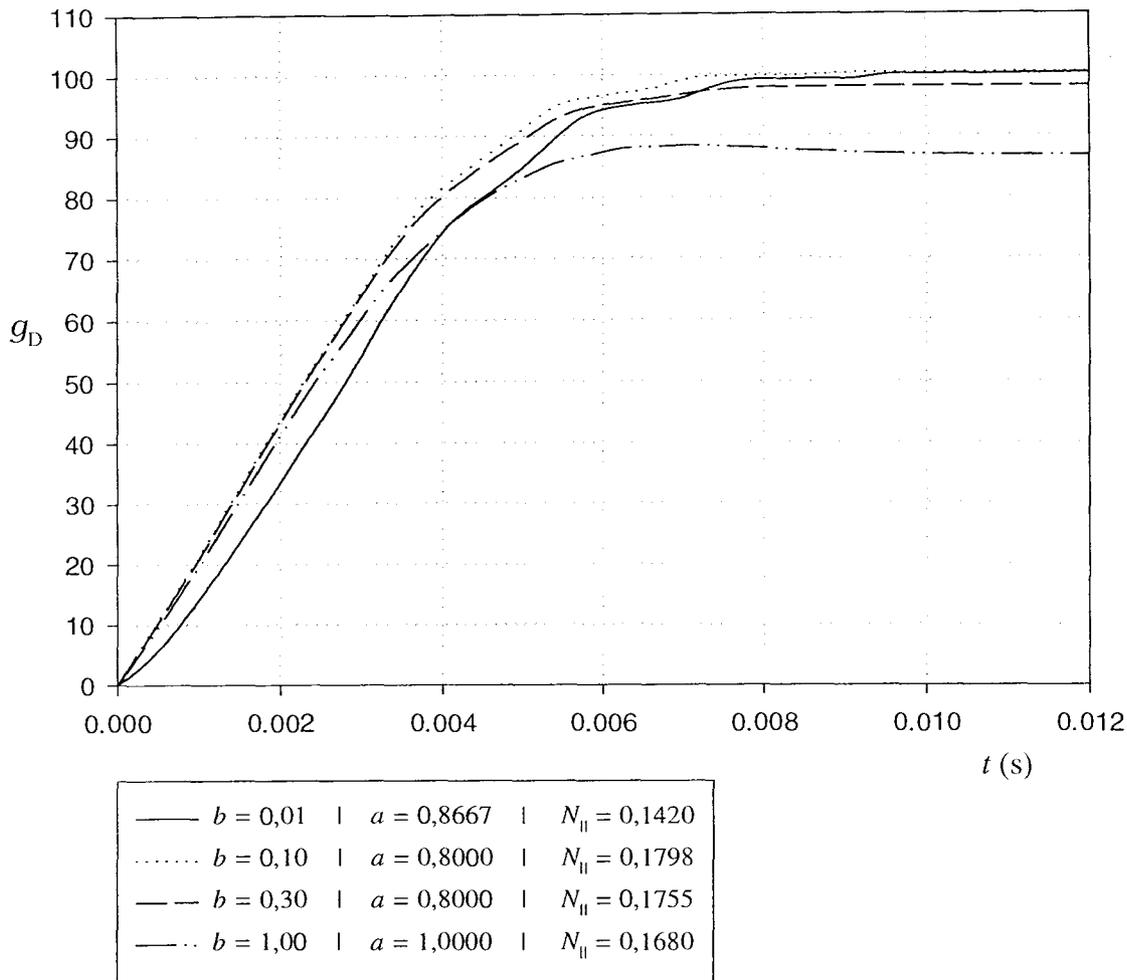


FIGURA 6.42: O fator de amplificação g_D em função do tempo t para diferentes valores de b . Os valores de a correspondentes são os que levam à máxima amplificação em cada caso. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

exposta na figura 6.43. Nota-se que a emissividade no caso em que $b = 0,1$ é maior do que nos outros casos no início da trajetória. Após aproximadamente 3 ms, o caso onde o perfil é considerado puramente gaussiano é o que apresenta a maior emissividade ao longo da trajetória. Após esse mesmo instante de tempo, o caso onde $b = 0,1$ é o que apresenta a menor emissividade em média, ao longo da trajetória. Como anteriormente, a emissividade decresce a valores muito baixos nos instantes finais da trajetória, independente do valor do parâmetro b . É claro na figura ainda que a emissividade é bastante mais sensível às variações de densidade na cavidade auroral

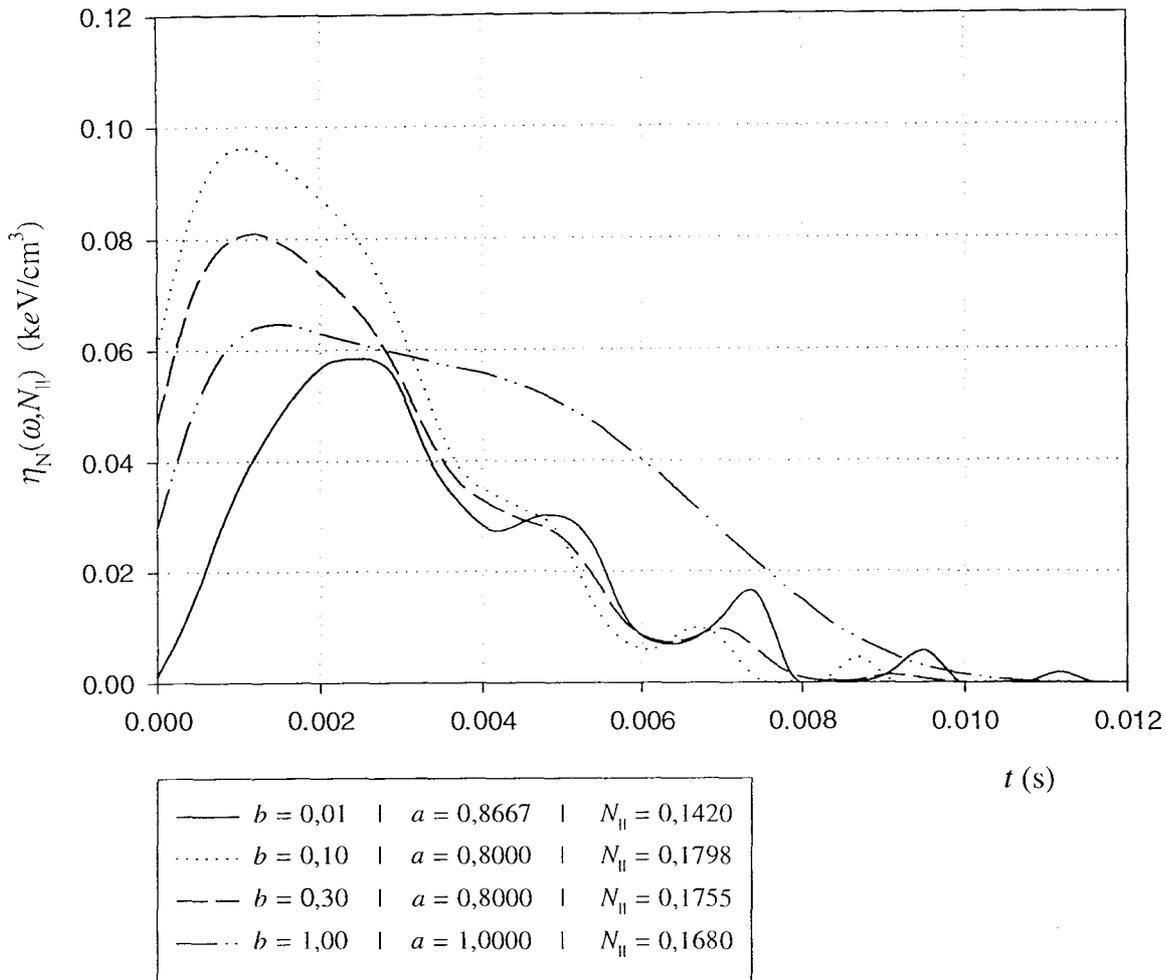


FIGURA 6.43: A emissividade espectral em função do tempo t para diferentes valores de b . Os valores de a correspondentes são os que levam à máxima amplificação em cada caso. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

do que o fator de amplificação e a parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração.

Na figura 6.44 vemos as trajetórias dos raios para os diversos valores do parâmetro b . A maneira como a onda se propaga ao longo da cavidade auroral é bastante influenciada pelo perfil de densidade na região, como mostra a figura. No caso onde $b = 1$ a trajetória tende a se alinhar mais com o campo magnético do que nos outros casos. Além disso, a distância que a onda viaja, para os casos onde os valores do parâmetro b são menores do que a unidade, é em geral poucas

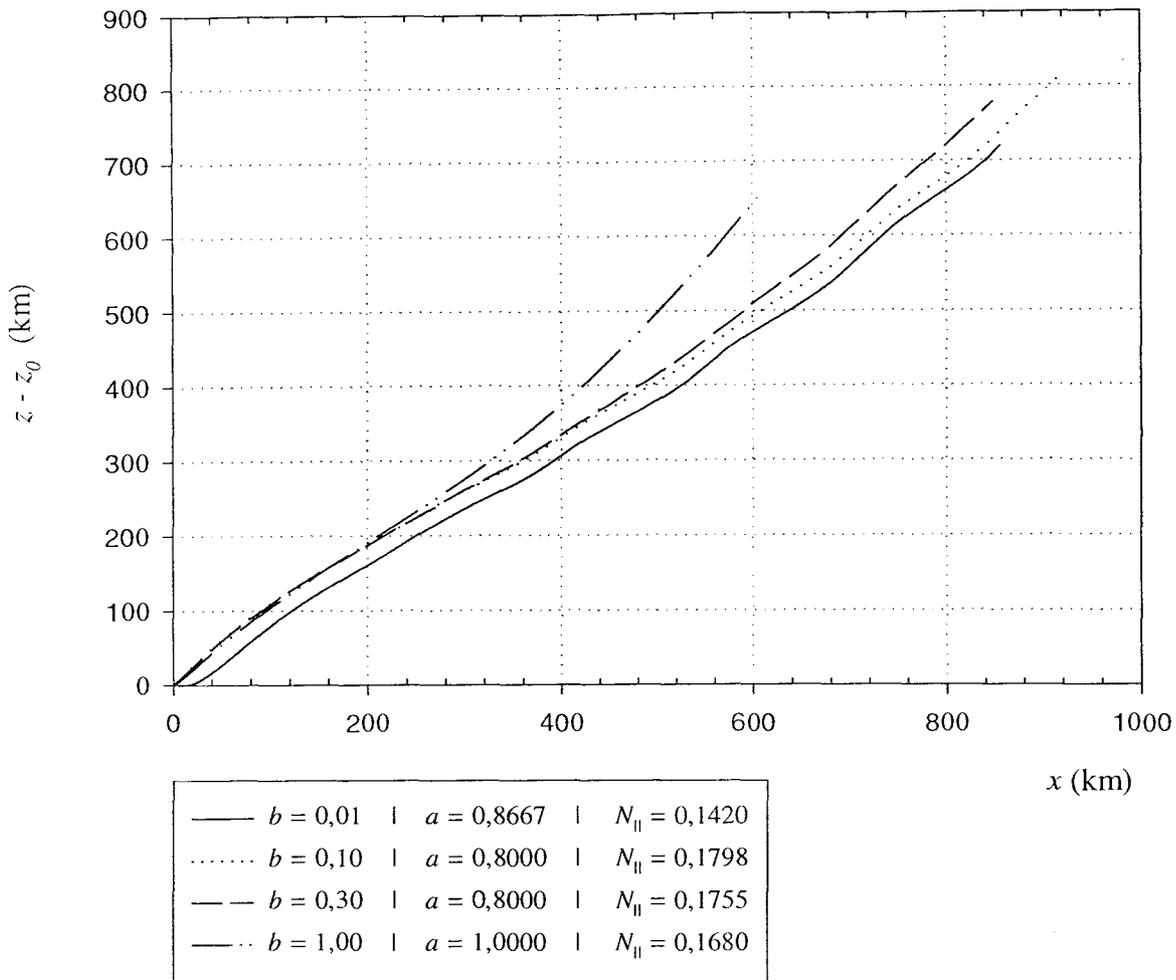


FIGURA 6.44: A trajetória da onda para diferentes valores de b . Os valores correspondentes de a são os que levam à máxima amplificação em cada caso. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

centenas de quilômetros maior do que no caso onde $b = 1$.

A parte real da componente perpendicular do índice de refração é muito sensível às variações súbitas da densidade de partículas da cavidade auroral. Na figura 6.45, que mostra a parte real da componente perpendicular (N'_{\perp}) e a componente paralela ($N_{||}$) do índice de refração em função do tempo, vemos com clareza que as oscilações no valor local da densidade influenciam principalmente a componente perpendicular do índice de refração.

A componente paralela do índice de refração não sofre uma influência tão drástica em seu

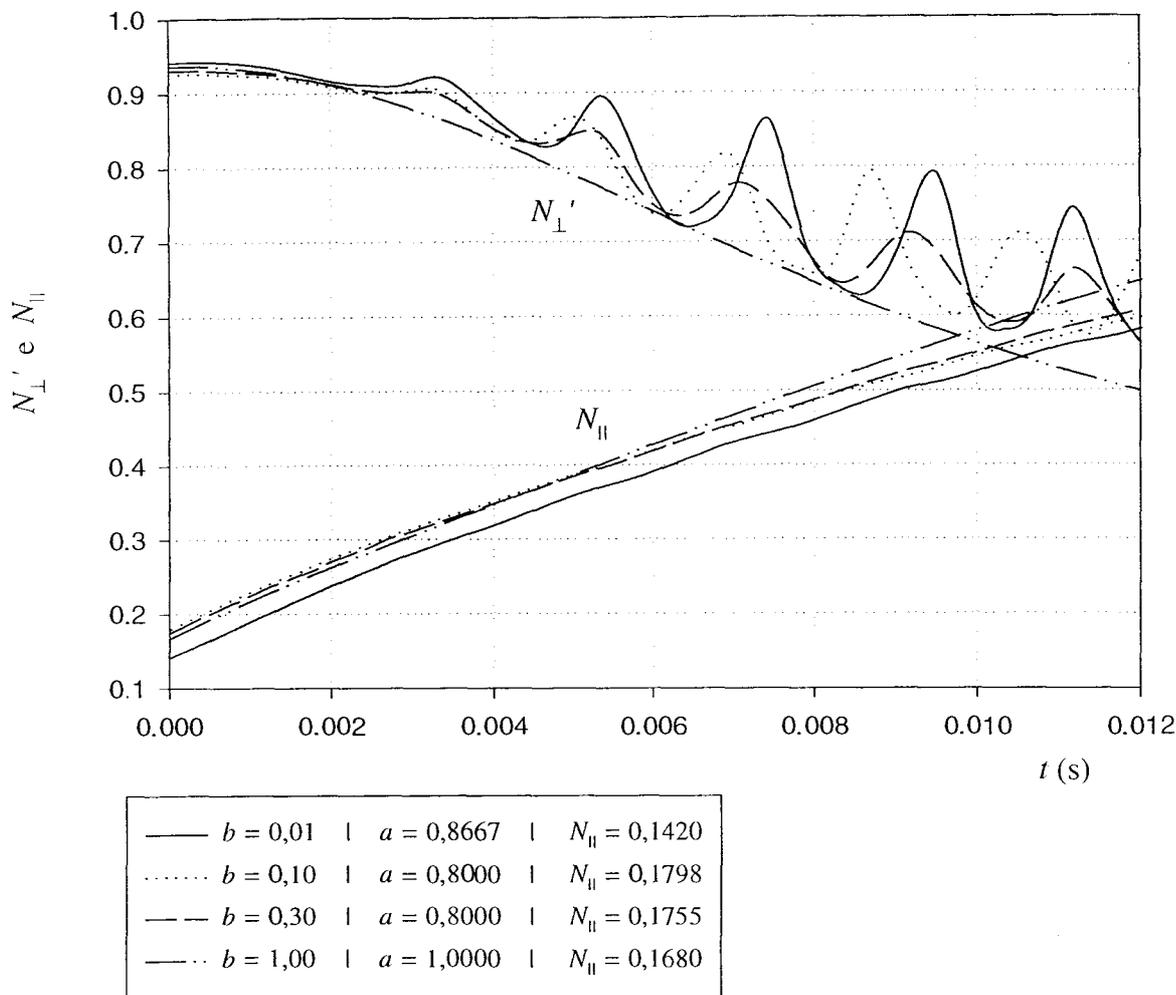


FIGURA 6.45: A parte real da componente perpendicular (N'_{\perp}) e a componente paralela (N_{\parallel}) do índice de refração em função do tempo t , para diferentes valores de b . Os valores de a correspondentes são os que levam à máxima amplificação em cada caso. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

comportamento ao longo da trajetória, não sendo portanto, tão sensível à variação do parâmetro b . É sensível obviamente ao valor inicial de N_{\parallel} , mas a forma do gráfico não se altera muito para os diferentes valores de b . Isso é fisicamente esperado, já que todos os gradientes do plasma no modelo físico utilizado neste trabalho estão na direção perpendicular ao campo magnético e não na direção paralela, fazendo com que a propagação das ondas seja muito mais afetada na direção dos gradientes do que na direção paralela ao campo magnético.

Na figura 6.46 está exposto o gráfico de $\cos\beta$ em função do tempo t para diferentes valores

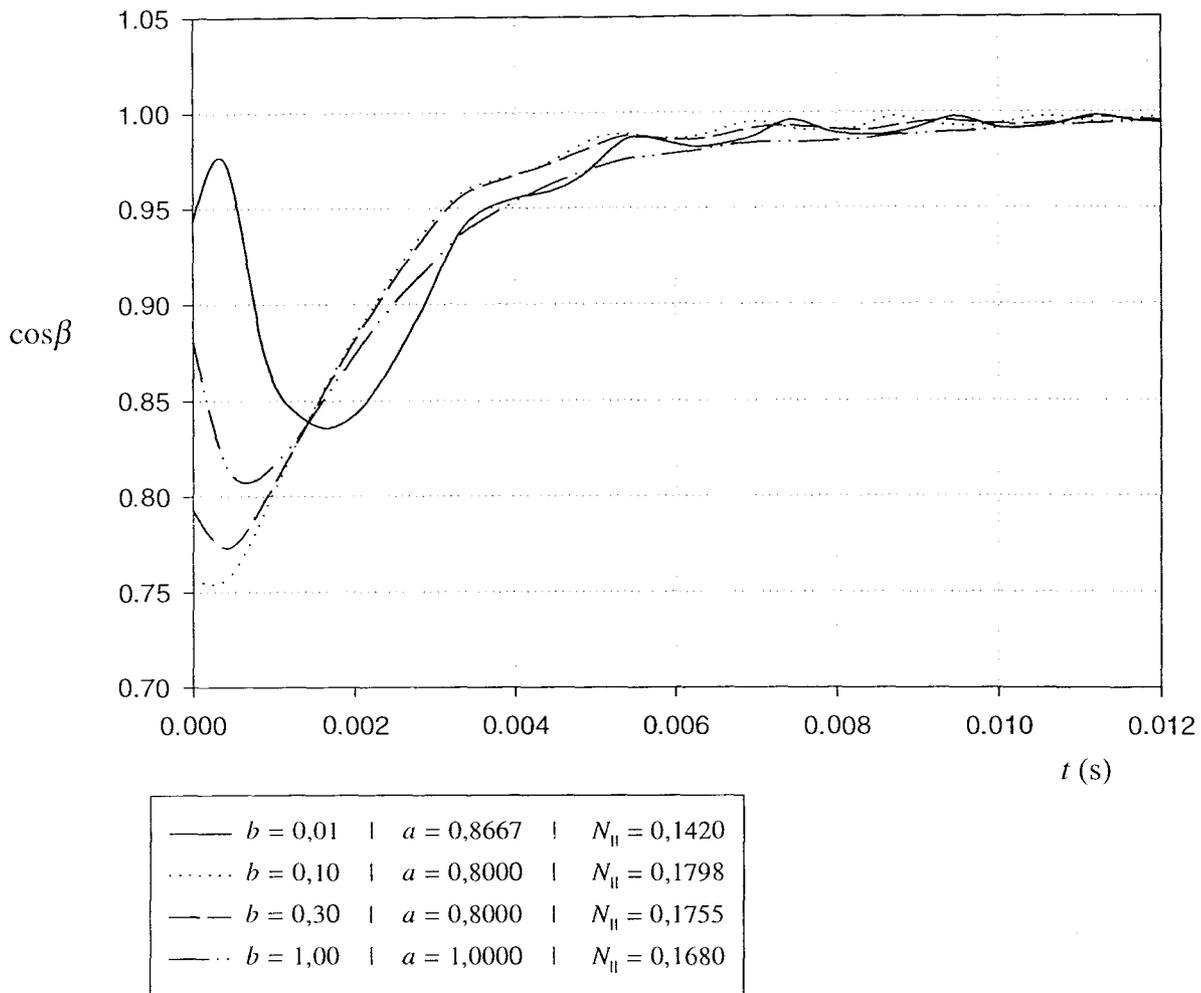


FIGURA 6.46: Gráfico de $\cos\beta$ em função do tempo t para diferentes valores de b . Os valores de a correspondentes são os que levam à máxima amplificação em cada caso. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

do parâmetro b , com os correspondentes valores de a que levam à máxima amplificação em cada caso. Nota-se que, de acordo com a equação (4.6), o efeito da anisotropia do meio é bem menos pronunciado no início da trajetória do que ao final, quando $\cos\beta \cong 1$, ou seja, $\beta \cong 0$. Nos instantes finais da trajetória, portanto, a direção de propagação da onda é aproximadamente igual à direção do escoamento de energia total (que tem a mesma direção da velocidade de grupo). Do conjunto de valores de b adotado, os casos onde $b = 0,1$ e $b = 0,01$ são, respectivamente, o mais e o menos afetado pela anisotropia do meio nos instantes iniciais da trajetória.

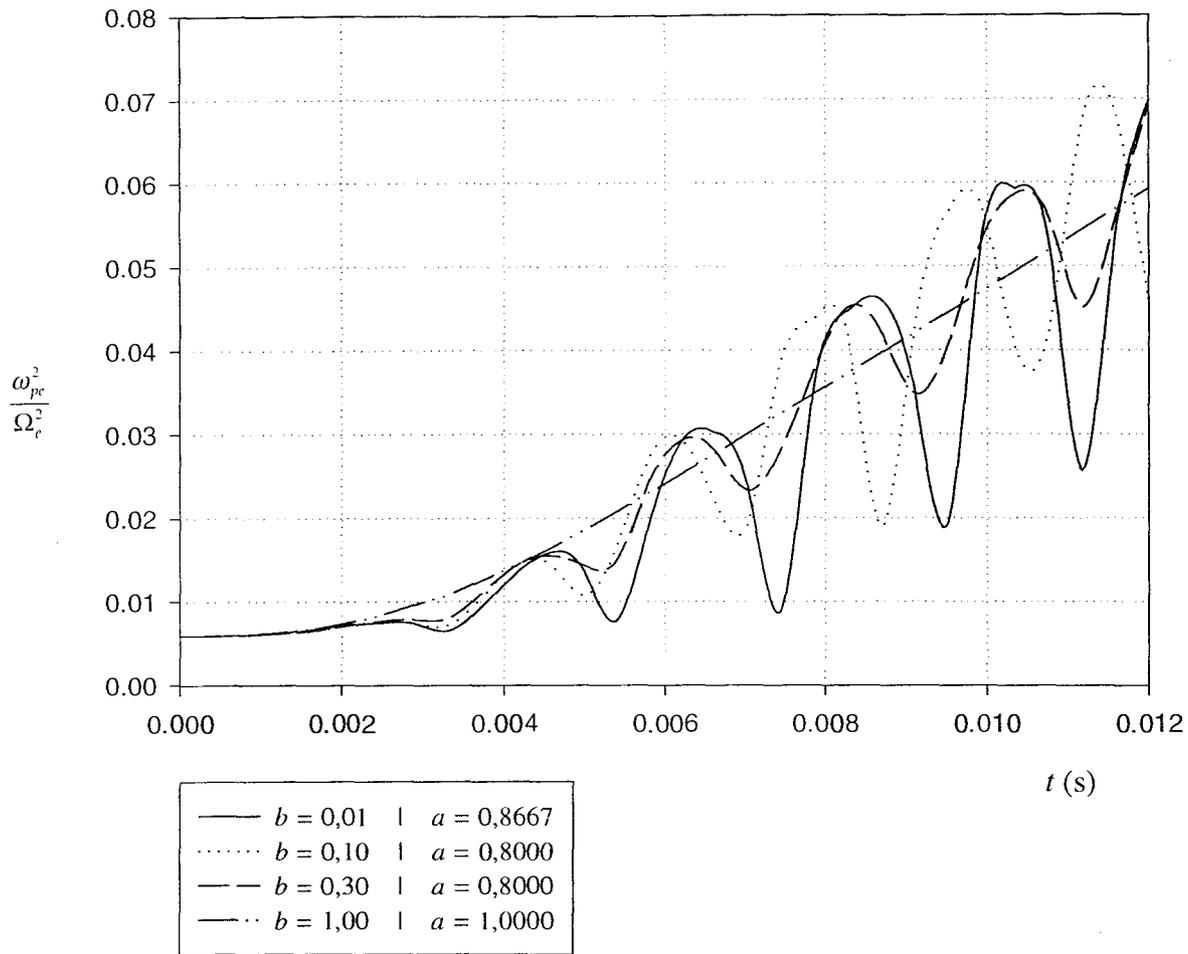


FIGURA 6.47: A quantidade $\varrho_\omega = \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2$ em função do tempo t para diferentes valores de b . Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

A figura 6.47 mostra o gráfico da quantidade $\varrho_\omega = \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2$ ao longo da trajetória na cavidade auroral. Note que, na medida em que o parâmetro b diminui em relação à unidade, começam a aparecer depressões na quantidade ϱ_ω , o que, segundo o critério estabelecido no artigo de revisão escrito por Wu [26], pode levar ao favorecimento da amplificação da energia das ondas no caso do modo extraordinário rápido. Essas depressões no valor de ϱ_ω ficam mais acentuadas na medida em que o parâmetro b assume valores menores, como mostra a figura.

A figura 6.48 mostra o efeito relativo percentual da emissividade δ_g , definido por (6.14), na

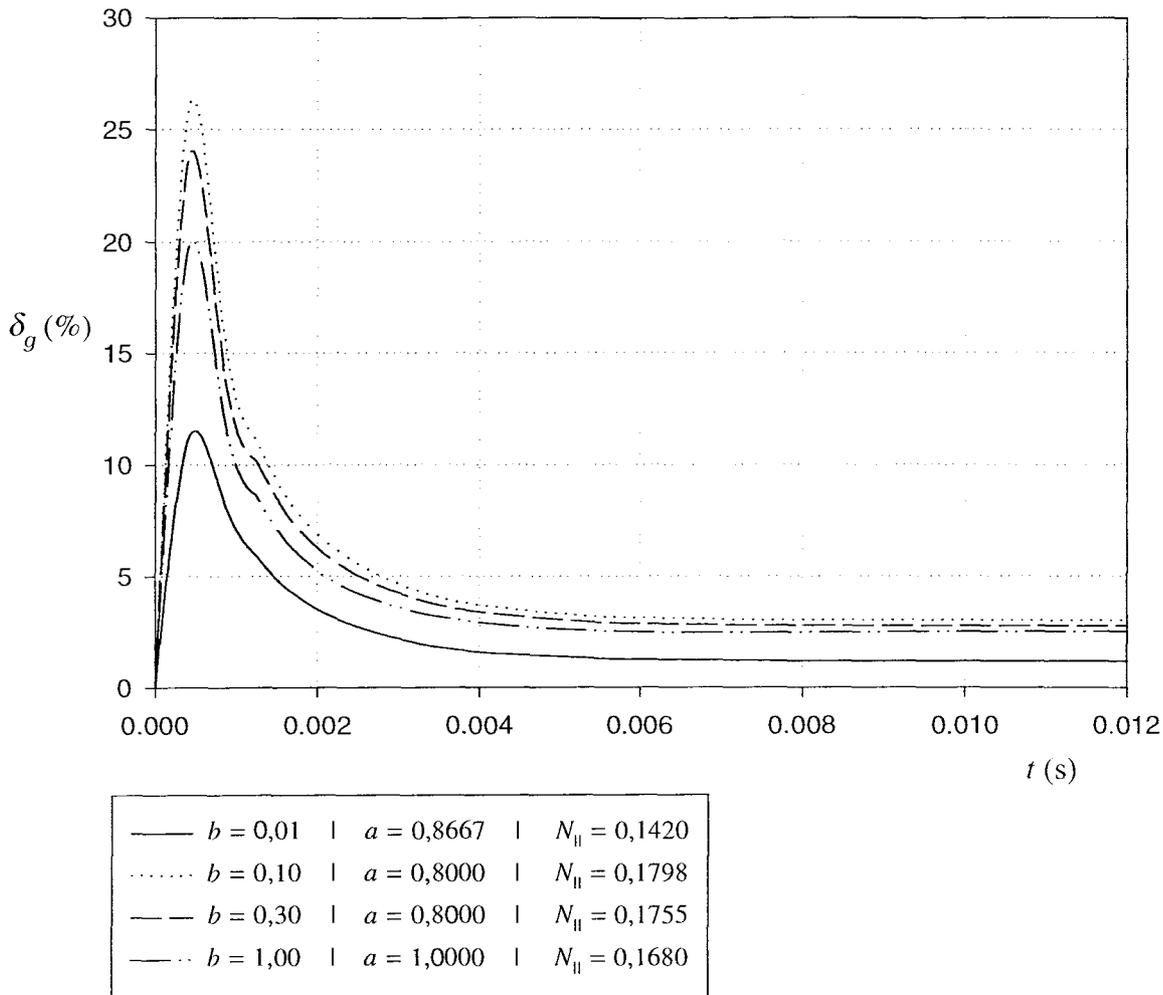


FIGURA 6.48: O efeito percentual da emissividade do meio na amplificação e absorção da onda (δ_g) em função do tempo t para diferentes valores de b . Os valores de a correspondentes são os que levam à máxima amplificação em cada caso. Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

amplificação da onda em função da trajetória, para diferentes valores do parâmetro b . O maior efeito se dá no início da trajetória, onde há um pico em δ_g , que existe para todos os valores adotados do parâmetro b . O caso em que $b = 0,1$ e $a = 0,8$ é onde o efeito relativo da emissividade é maior, seguido em ordem decrescente em δ_g pelos casos onde $b = 0,3$ e $a = 0,8$, $b = 1$ e $a = 1$ e $b = 0,01$ e $a = 0,8667$. Ao final da trajetória o efeito percentual da emissividade é muito pequeno, pois como já foi visto até aqui, a emissividade tende a se anular ao final da trajetória.

Vamos agora estudar a parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração,

o fator de amplificação e a trajetória da onda na cavidade auroral, frente à variação do parâmetro L_2 , que é da ordem da largura de cada subcavidade.

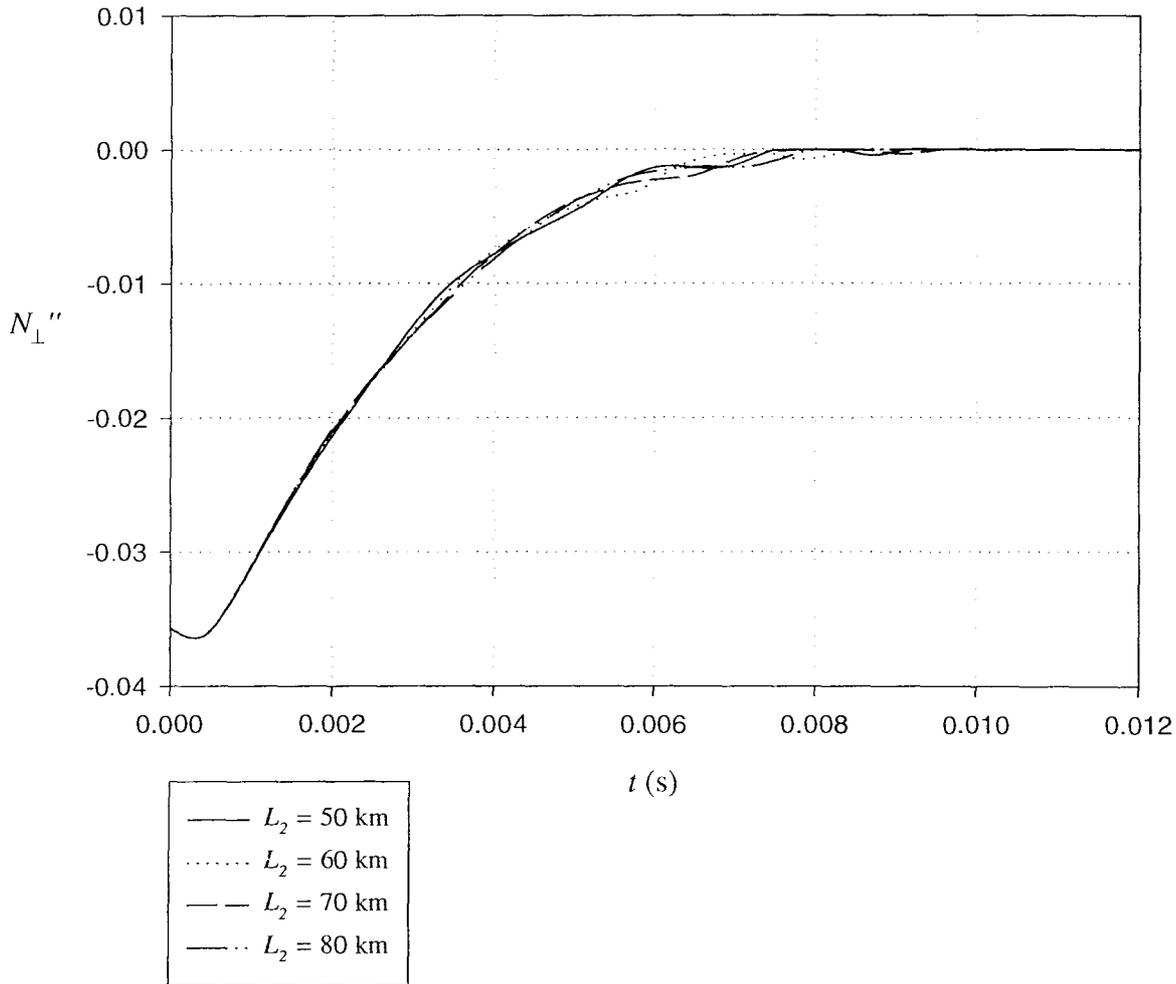


FIGURA 6.49: Parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração N_{\perp}'' em função do tempo t , para diferentes valores de L_2 . Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

Na figura 6.49 vemos os gráficos da parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração em função do tempo, para quatro valores de L_2 : 50 km, 60 km, 70 km e 80 km. Foram tomados os valores 0,8 e 0,1 para os parâmetros a e b , respectivamente. Nota-se pelo gráfico que o parâmetro L_2 não parece influenciar muito na amplificação da onda, pois os gráficos diferem entre si apenas nas ondulações oriundas das variações no perfis de densidade, temperatura e

velocidade de deriva ao longo da cavidade. É de se esperar portanto, que o fator de amplificação seja também pouco influenciado pela variação do comprimento L_2 .

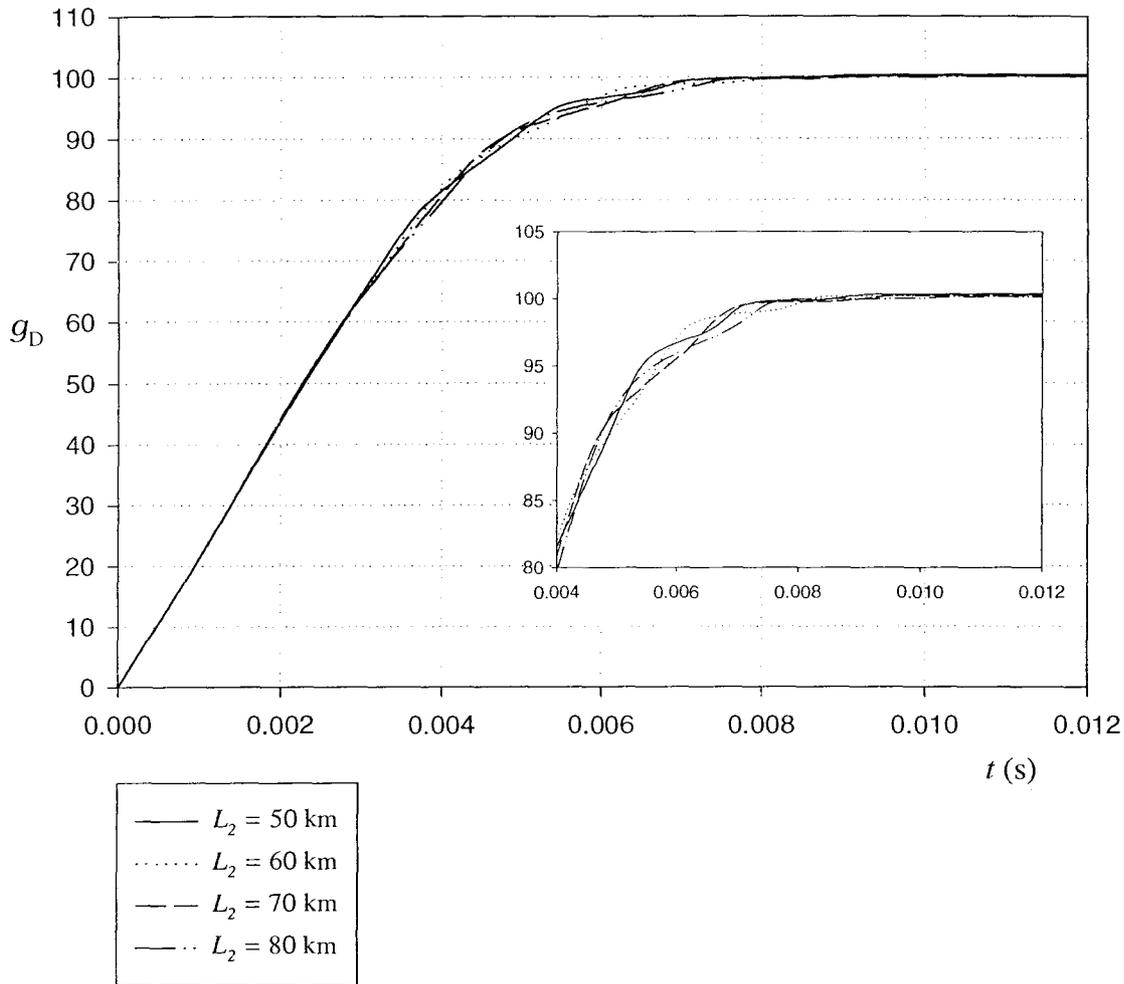


FIGURA 6.50: Fator de amplificação g_D em função do tempo t para diferentes valores de L_2 . Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

A figura 6.50 mostra o fator de amplificação g_D em função do tempo para diferentes valores do comprimento L_2 . No gráfico foi colocado, por motivos de clareza, uma pequena ampliação do intervalo de tempo que corresponde aos instantes onde o fator de amplificação atinge seu maior valor. Em todos os casos o fator de amplificação atinge um valor ligeiramente superior a 100 db. O caso onde a amplificação é mais eficaz, embora a diferença entre todos os casos seja muito

pequena, é o caso em que $L_2 = 50$ km, onde o fator de amplificação atinge cerca de 100,35 db. Nos demais casos temos o valor máximo de 100,26 db, para $L_2 = 60$ km, 100,22 db, para $L_2 = 70$ km e 100,11 db para $L_2 = 80$.

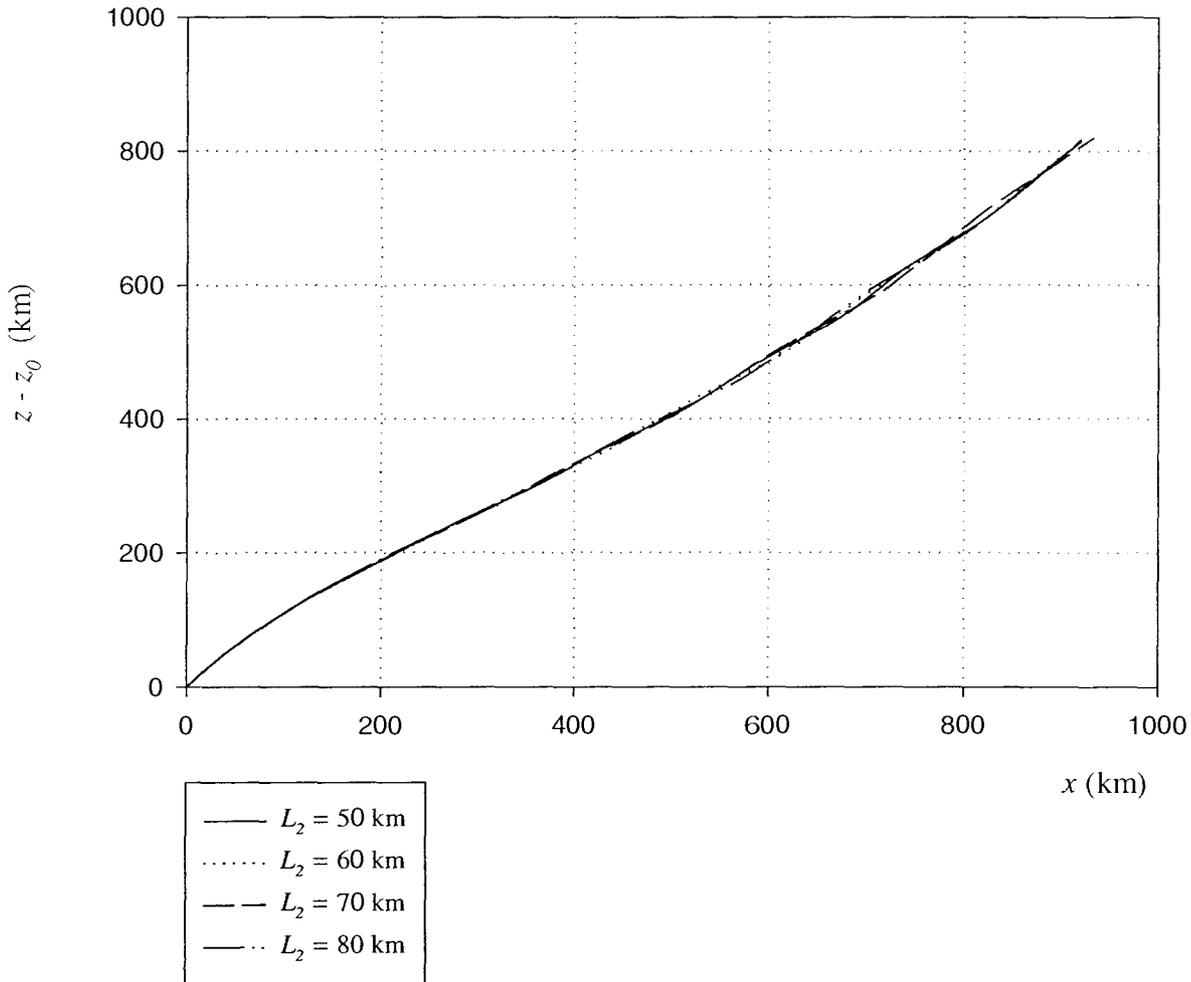


FIGURA 6.51: Trajetória da onda para diferentes valores de L_2 . Os outros parâmetros usados são os mesmos da figura 6.1.

As trajetórias da onda para diferentes valores do comprimento L_2 são mostradas na figura 6.51. Para todos os valores de L_2 tomados, a trajetória é praticamente a mesma ao longo da cavidade auroral. Como a amplificação da onda depende muito da trajetória que ela descreve ao longo da cavidade, é de se esperar que não haja grande variação no fator de amplificação com a

variação do comprimento L_2 .

Constata-se com o que foi visto nesta subseção, que a existência das subcavidades pode ser um fator importante para explicar os valores típicos observados para os níveis de amplificação da AKR. Quando estas não são consideradas, os níveis de amplificação obtidos com o modelo físico apresentado neste trabalho não reproduzem os valores tipicamente observados, mesmo com a inclusão da emissividade do meio no procedimento de traçado de raios. O perfil de densidade que considera a existência de tais subcavidades é, portanto, bastante mais realista do que o perfil puramente gaussiano utilizado em trabalhos anteriores.

Conforme o já mencionado critério estabelecido por Wu, valores baixos de densidade dos elétrons podem levar à amplificação de ondas no modo extraordinário rápido [26]. A existência das subcavidades reduz o valor local de densidade, podendo levar à uma amplificação mais eficaz deste modo.

Capítulo 7

Sumário e Conclusões

O interesse em plasmas astrofísicos sempre foi acentuado por parte da comunidade científica, pois nesses sistemas ocorrem fenômenos que normalmente não são possíveis de serem reproduzidos em laboratórios, o que os torna muito valiosos no que se refere ao aprendizado dos vários processos físicos que podem ocorrer em plasmas.

O plasma que está presente na magnetosfera terrestre é responsável por uma gama imensa de emissões, entre as quais se encontra a mais intensa delas, denominada Radiação Quilométrica das Auroras, ou simplesmente AKR. Desde a primeira metade da década de setenta, quando surgiram os primeiros trabalhos quantitativos sobre essa emissão, muito se aprendeu sobre o fenômeno. No entanto, modelos teóricos que reproduzam satisfatoriamente algumas de suas características, como distribuição angular, frequência, direção de propagação e níveis de amplificação, são ainda motivo de grande interesse na área. Até o presente momento, o modelo do maser de elétron-ciclotron se mostrou eficaz ao reproduzir muitas das características citadas ao longo deste trabalho, como direção de propagação, frequência das ondas e sua polarização. Prevê ainda o surgimento de instabilidades que levam à amplificação da energia das ondas, sendo essas instabilidades uma decorrência da forma da função distribuição de equilíbrio que descreve o plasma. Na aproximação linear porém, o modelo do maser de elétron-ciclotron não descreve a evolução temporal dessas instabilidades, sendo para isso, necessário o uso de uma teoria não linear ou quase-linear.

Estudos de traçado de raios têm sido feitos com o objetivo de descrever características específicas da AKR. No que se refere aos níveis de amplificação da AKR no entanto, não houve ainda um trabalho nessa linha que reproduzisse o nível de amplificação de 100 db tipicamente observado pelos satélites. O trabalho de Gaelzer, Ziebell & Schneider (1994) [31] foi um avanço

importante no que se refere ao estudo por traçado de raios, permitindo o cálculo não apenas da trajetória da onda a partir da região fonte, mas também dos níveis de amplificação que a onda atinge enquanto se propaga na cavidade auroral. O modelo físico para a região fonte é o mesmo que foi discutido aqui, e foi baseado no modelo desenvolvido por Chiu & Schulz [1] em 1978. No entanto, esse trabalho apenas estima o fator de amplificação ao longo da trajetória da onda. Um cálculo mais preciso exigiria que a emissividade do meio fosse considerada em cada instante de sua trajetória. Além disso, os gradientes perpendiculares são tomados como gaussianos, não considerando as possíveis irregularidades de densidade e temperatura que são observadas na cavidade auroral. Como foi mencionado no capítulo 2, há decréscimos súbitos no valor local de densidade de até duas ordens de grandeza, que dão origem às chamadas subcavidades. O objetivo do presente trabalho foi o de incluir a emissividade do meio no cálculo do fator de amplificação e de sofisticar o modelo físico da região fonte, focalizando o efeito dessas modificações no fator de amplificação, calculado ao longo da trajetória da onda.

Para isso, iniciamos abordando as principais características da Radiação Quilométrica das Auroras, com base em alguns estudos feitos desde a década de 70. O objetivo foi tornar acessível ao leitor o conhecimento dessas características, que são fundamentais para a compreensão do que é feito em capítulos posteriores.

Após foi abordada a estatística que descreve o plasma, onde apresentamos as aproximações que levam à equação de Vlasov que, juntamente com as equações de Maxwell, é usada para descrever o plasma não colisional. A transformada de Fourier das componentes do tensor dielétrico é deduzida a seguir, para um plasma magnetizado e homogêneo, na aproximação linear da equação de Vlasov. Neste capítulo são destacadas a relação de dispersão, a condição de ressonância e a influência da forma da função distribuição no surgimento de instabilidades. No capítulo 4 foi apresentada uma revisão sobre a propagação de radiação em plasmas, onde foram abordadas a equação de transferência, o cálculo da emissividade de um plasma magnetizado e homogêneo e as equações de traçado de raios. No capítulo 5 foi visto o modelo físico para a região fonte da AKR, a partir do qual são construídos os perfis de grandezas como a densidade de partículas, temperatura e velocidade de deriva. Mostramos então a função distribuição modelo, que consiste em uma soma de duas funções distribuição: uma do tipo DGH relativística, e uma Maxwelliana que representa o background de elétrons frios.

Finalmente, após uma breve explicação sobre o procedimento de traçados de raios e do método

numérico utilizado nos cálculos computacionais, foi feito o estudo quantitativo da amplificação da AKR e de sua propagação na cavidade auroral. O fator de amplificação aqui não é apenas estimado como em outros trabalhos, mas calculado através da equação de transferência, onde aparece a contribuição da emissividade do meio. Para isso, foi necessário o cálculo da emissividade do meio para a função distribuição considerada, em cada ponto da trajetória da onda. Esse procedimento foi baseado nos clássicos artigos de Freund & Wu (1977) [91, 92], onde a emissividade é estudada tanto para plasma frio quanto no caso onde os efeitos térmicos são considerados.

Nesta etapa foi estudada a propagação e amplificação da AKR para três valores de frequências: $\omega = 1,005 \Omega_e$, $\omega = 1,008 \Omega_e$ e $\omega = 1,011 \Omega_e$. Para cada caso foi feita uma estimativa de qual valor inicial de N_{\parallel} levaria à uma amplificação mais eficaz. A amplificação máxima aconteceu para $\omega = 1,008 \Omega_e$ e $N_{\parallel} = 0,1680$. Foi então feito um estudo comparativo entre estes três casos, com o intuito de estudar o efeito da emissividade no cálculo do fator de amplificação, que foi obtido na forma aproximada (sem a inclusão da emissividade do meio) e com o uso da equação de transferência, onde a emissividade é considerada. Em todos os casos a emissividade tende a decrescer com o tempo, mas atingindo valores bem mais expressivos para o caso onde $\omega = 1,005 \Omega_e$ e $N_{\parallel} = 0,1260$, do que para os demais casos estudados. Embora a emissividade leve a um aumento do fator de amplificação, este não é suficiente para explicar os níveis típicos de amplificação observados. O valor máximo obtido para o fator de amplificação foi de aproximadamente 88 db (para $\omega = 1,008 \Omega_e$ e $N_{\parallel} = 0,1680$) que, apesar de estar acima do mínimo de 86 db¹, é inferior aos típicos 100 db observados.

Foi ainda estudado o efeito da anisotropia, causada pelo campo magnético externo \vec{B}_0 , na diferença entre as direções de propagação da onda e do escoamento de energia, que se dá na mesma direção da velocidade de grupo. Este aspecto é importante no cálculo da emissividade espectral e foi estudado para os três valores de frequência citados acima. Se nota, a partir da figura 6.18, que a diferença entre as direções de propagação da onda e do escoamento de energia é bem mais acentuada nos instantes iniciais do intervalo de tempo considerado. Além disso, essa diferença é mais pronunciada para o caso onde $\omega = 1,005 \Omega_e$ ($\beta_{\max} \approx 45^\circ$) do que para os demais. Essa diferença praticamente se anula para todos os valores de frequência no extremo superior do intervalo de tempo considerado, pois $\cos\beta \cong 1$ e, portanto, $\theta - \xi \cong 0$.

¹Estipulado por Omidi & Gurnett (1984) [28].

O efeito da emissividade se mostrou mais pronunciado nos instantes iniciais da trajetória da onda ($\cong 20\%$). Como se vê nas figuras 6.16 (em função da frequência ω), 6.22 (em função da largura L_1 da cavidade) e 6.28 (em função do parâmetro Δ), todas elas apresentam um pico no início do intervalo de tempo considerado. Quando variamos a largura da cavidade, esse efeito é mais pronunciado para os casos $L_1 = 300$ km e $L_1 = 200$ km, onde observa-se que, sem a inclusão da emissividade no cálculo do fator de absorção, este seria negativo para tempos maiores do que 6 ms (no caso em que $L_1 = 200$ km) e 9 ms (no caso em que $L_1 = 300$ km). Não foram estudados casos onde $L_1 \leq 100$ km porque, para valores de largura menores do que 100 km, não mais podemos garantir a validade da hipótese da homogeneidade local do plasma. Nos casos estudados, notou-se também que o efeito da emissividade no fator de amplificação tende a ser mais pronunciado quando a amplificação é menos significativa, como se pode ver nas figuras 6.16, 6.22 e 6.28.

A segunda etapa desse estudo consistiu em incorporar as subcavidades aos perfis do plasma na região fonte. Se espera que os decréscimos do valor de densidade possam levar a uma amplificação mais eficaz, ou seja, que as microestruturas de densidade na região fonte possam desempenhar um papel importante na amplificação da AKR. Foi adotado o valor mínimo de 50 km para o parâmetro L_2 , de forma a garantir a validade da aproximação localmente homogênea.

Foi usado o valor de frequência que proporcionou o amplificação mais eficaz na abordagem onde não eram consideradas as subcavidades (perfil puramente gaussiano), ou seja, $\omega = 1,008\Omega_e$. Inicialmente se manteve fixo o valor $L_2 = 50$ km e $a = 1$, obtendo-se para $b = 0,01$, $b = 0,1$ e $b = 0,3$, o correspondente valor inicial de N_{\parallel} para o qual a amplificação é mais eficaz. Foram obtidos os valores de $N_{\parallel} = 0,1420$ (para $b = 0,01$), $N_{\parallel} = 0,1798$ (para $b = 0,1$) e $N_{\parallel} = 0,1755$ (para $b = 0,3$). Os valores máximos para o fator de amplificação foram, respectivamente, 99,8 db, 98,38 db e 96,28 db. Tais valores são bastante próximos dos 100 db tipicamente observados.

Para tornar a análise mais completa, o passo tomado a seguir foi variar o parâmetro a para os valores $b = 0,01$, $b = 0,1$ e $b = 0,3$, com os correspondentes valores iniciais de N_{\parallel} que proporcionam maior amplificação. Em todos os casos o intervalo adotado foi $0,8 \leq a \leq 1,2$. O objetivo foi investigar, para cada valor de b e N_{\parallel} inicial correspondente, qual o valor do parâmetro a que proporcionava a amplificação mais eficaz. Ao final, foram encontrados os valores mostrados na tabela 7.

b	N_{\parallel}	a	g_D máximo (decibéis)
0,01	0,1420	0,8667	100,22
0,1	0,1798	0,8000	100,35
0,3	0,1755	0,8000	98,14

TABELA 7.1: Valores de b com os correspondentes valores obtidos de a , N_{\parallel} inicial e valor máximo obtido do fator de amplificação.

Os valores máximos obtidos para o fator de amplificação g_D são então coerentes com os valores típicos observados. Os valores expostos na tabela 7 foram usados para fazer o estudo comparativo com o caso onde o perfil de densidade é puramente gaussiano ($b = 1$, $a = 1$ e $N_{\parallel} = 0,1680$). A máxima amplificação obtida se dá, como exposto na tabela 7, para $b = 0,1$, $a = 0,8$ e $N_{\parallel} = 0,1798$, onde o fator de amplificação atinge um máximo de 100,35db.

Após, foi feito um estudo da influência da largura da subcavidade (parâmetro L_2) no fator de amplificação e na trajetória da onda. Constatou-se que essa influência é bastante pequena para os casos considerados ($L_2 = 50$ km, 60 km, 70 km e 80 km). A influência da largura da cavidade inteira é bastante mais acentuada.

Baseado no que foi visto nesta etapa, pode-se concluir que a existência das subcavidades tem um papel importante para explicar os níveis de amplificação observados da AKR. Segundo o modelo físico utilizado neste trabalho, mesmo com a inclusão da emissividade no cálculo do fator de amplificação, não serão reproduzidos os níveis de amplificação tipicamente observados da AKR se não forem incluídas essas subcavidades.

Este trabalho deixa algumas possibilidades em aberto para futuras abordagens. Talvez a mais importante seja a de estender o estudo aqui feito a outros tipos de funções distribuição, contendo mais fontes de energia livre, como os aspectos "bump" (corcova) e "hole" (buraco), citados no capítulo 2. Embora a função distribuição aqui utilizada, denominada DGH relativística, não reproduza fielmente aspectos das distribuições observadas, ela reproduz bem os níveis de amplificação típicos da AKR [71]. Mas ainda assim é aconselhável investir em funções distribuição mais próximas das que foram recentemente observadas [69, 71, 72, 73], chamadas "Horseshoe Distributions". São funções distribuição difíceis de serem modeladas matematicamente e, portanto, levam a dificuldades sérias no cálculo analítico das componentes do tensor dielétrico. No entanto, podem ser pensadas formas mais simplificadas que levam em conta parte

dos aspectos deste interessante tipo de distribuição, que pode levar a resultados promissores.

Outro aprimoramento que certamente pode contribuir muito para a área é o uso de modelos físicos mais sofisticados para a região fonte. Ao invés de estimar a variação dos parâmetros nas direções perpendiculares ao campo magnético, pode-se fazer uso de um modelo físico bidimensional semelhante ao utilizado por Kan *et al.* (1979) [101].

Como sugestão final, pode-se ainda fazer um tratamento não linear ou quase-linear, que certamente descreve mais corretamente a amplificação das ondas em casos onde a aproximação linear não mais pode ser usada. Certamente este assunto é rico o suficiente para proporcionar ainda muita discussão e pesquisa continuada, pois são cada vez mais refinadas as medições feitas pelos satélites usados para estudar os fenômenos na magnetosfera terrestre, sempre trazendo novos aspectos da AKR ao conhecimento da comunidade científica.

Referências Bibliográficas

- [1] CHIU, Y. T.; SHULZ, M. Self-consistent particle and parallel electrostatic field distributions in the magnetospheric-ionospheric auroral region. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 83, n. A2, p. 629-642, Feb. 1978.
- [2] HEIKKILA, W. J. *Physics of the hot plasma in the magnetosphere*. New York: Plenum, 1975. p. 69-90.
- [3] ROEDERER, J. *Solar system plasma physics: Earth's magnetosphere: global problems in magnetospheric plasma physics*. Amsterdam: North-Holland, 1979. v. 2, p. 1-76.
- [4] SHAWHAN, S. *Solar system plasma physics: magnetospheric plasma waves*. New York: Plenum, 1979. v. 3, p. 211-270.
- [5] OYA, H. Origin of jovian decameter wave emissions - conversion from the electron cyclotron plasma wave to the ordinary mode electromagnetic wave. *Planetary and Space Science*, Oxford, v. 22, n. 5, p. 687-708, May 1974.
- [6] PALMADESSO, P. J.; COFFEY, T. P.; OSSAKOW, S. L.; PAPADOPOULOS, K. Generation of terrestrial kilometric radiation by a beam-driven electromagnetic instability. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 81, n. 10, p. 1762-1770, Apr. 1976.
- [7] JONES, D. Mode-coupling of Z-mode waves as a source of terrestrial kilometric and jovian decametric radiations. *Astronomy and Astrophysics*, Berlin, v. 55, n. 2, p. 245-252, Mar. 1977.
- [8] ROUX, A.; PELLAT, R. Coherent generation of the auroral kilometric radiation by nonlinear beatings of electrostatic waves. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 84, n. A9, p. 5189-5198, Sept. 1979.
- [9] GRABBE, C. L.; PAPADOPOULOS, K.; PALMADESSO, P. J. A coherent nonlinear theory

- of auroral kilometric radiation 1. Steady state model. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 85, n. A7, p. 3337–3346, July 1980.
- [10] CALVERT, W. A feedback model for the source of the auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 87, n. 10, p. 8199–8214, Oct. 1982.
- [11] OYA, H.; MORIOKA, A. Observational evidence of Z and L-O mode waves as the origin of auroral kilometric radiation from the Jikiken EXOS-B satellite. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 88, n. A8, p. 6189–6203, Aug. 1983.
- [12] SARMA, S. N.; NAMBU, M. Plasma-maser instability of electromagnetic radiation in the presence of lower hybrid turbulence. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 74, n. 1, p. 94–97, Jan. 1995.
- [13] NAMBU, M. Consequences of the plasma-maser instability in magnetized plasma. *Physica Scripta*, Stockholm, v. T63, p. 41–45, 1996.
- [14] MELROSE, D. An interpretation of Jupiter's decametric radiation and the auroral kilometric radiation as direct amplified gyroemission. *Astrophysical Journal*, Chicago, v. 207, n. 2, p. 651–662, July 1976.
- [15] LEE, L. C.; KAN, J. R.; WU, C. S. Generation of the auroral kilometric radiation and the structure of the auroral acceleration region. *Planetary and Space Science*, Oxford, v. 28, n. 7, p. 703–711, July 1980.
- [16] WONG, H. K.; WU, C. S.; KE, F. J.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Electromagnetic cyclotron-loss-cone instability associated with weakly relativistic electrons. *Journal of Plasma Physics*, London, v. 28, n. 3, p. 503–525, Dec. 1982.
- [17] LAU, Y. Y.; CHU, K. R. Electron-cyclotron maser instabilities driven by a loss-cone distribution. *Physical Review Letters*, New York, v. 50, n. 4, p. 243–246, Jan. 1983.
- [18] LE QUÉAU, D.; PELLAT, R.; ROUX, A. Direct generation of auroral kilometric radiation by the maser synchrotron instability: physical mechanism and parametric study. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 89, n. A5, p. 2831–2841, May 1984.
- [19] MELROSE, D. B.; HEWITT, R. G.; DULK, G. A. Electron-cyclotron maser emission: relative growth and damping for different modes and harmonics. *Journal of Geophysical*

- Research*, Washington, v. 89, n. A2, p. 897–904, Feb. 1984.
- [20] PRITCHETT, P. L. Relativistic dispersion, the ciclotron maser instability and auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 89, n. A10, p. 8957–8970, Oct. 1984.
- [21] ZIEBELL, L. F. Quasilinear evolution of the weakly relativistic electron cyclotron maser instability. *Physics of Plasmas*, Woodbury, v. 4, n. 7, p. 2697–2706, July 1997.
- [22] WU, C. S.; LEE, L. C. A theory of the terrestrial kilometric radiation. *Astrophysical Journal*, Chicago, v. 230, p. 621–626, June 1979.
- [23] WU, C. S.; WONG, H. K.; GORNEY, D. J.; LEE, L. C. Generation of the auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 87, n. A6, p. 4476–4488, June 1982.
- [24] WU, C. S.; QIU, X. M. Emissions of second-harmonic auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 88, n. A12, p. 10072–10080, Dec. 1983.
- [25] WU, C. S.; DILLENBURG, D.; ZIEBEL, L. F.; FREUND, H. P. Excitation of whistler waves by reflected auroral electrons. *Planetary and Space Science*, Oxford, v. 31, n. 5, p. 499–507, May 1983.
- [26] WU, C. S. Kinetic cyclotron and synchrotron maser instabilities: radio emission processes by direct amplification of radiation. *Space Science Reviews*, Dordrecht, v. 41, n. 3/4, p. 215–298, Aug. 1985.
- [27] MELROSE, D. B. Radiation from instabilities in space plasmas. *Astrophysics and Space Science*, Dordrecht, v. 264, n. 1/4, p. 401–410, May 1998.
- [28] OMIDI, N.; GURNETT, D. Path-integrated growth of auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 89, n. A12, p. 10801–10812, July 1984.
- [29] PRITCHETT, P. L.; WINGLEE, R. M. Generation and propagation of kilometric radiation in the auroral plasma cavity. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 94, n. A1, p. 129–143, Jan. 1989.

- [30] GAELZER, R.; ZIEBELL, L. F.; SCHNEIDER, R. S. Propagation and amplification of auroral kilometric radiation in finite width auroral cavities. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 97, n. A12, p. 19299–19310, Dec. 1992.
- [31] GAELZER, R.; ZIEBELL, L. F.; SCHNEIDER, R. S. Ray tracing studies on auroral kilometric radiation in finite width auroral cavities. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 99, n. A5, p. 8905–8916, May 1994.
- [32] BEKEFI, G. *Radiation processes in plasmas*. New York: John Wiley, 1966. (Wiley series in plasma physics).
- [33] CALVERT, W. The auroral plasma cavity. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 8, n. 8, p. 919–921, Aug. 1981.
- [34] CAVALCANTI, C. J. H.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Emission and propagation of auroral kilometric radiation in the density depletions of the auroral region. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 101, n. A11, p. 24557–24564, Nov. 1996.
- [35] CAVALCANTI, C. J. H.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Emissivity and growth of auroral kilometric radiation in source regions with perpendicular gradients. *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v. 27, n. 1, p. 33–43, Mar. 1997.
- [36] GAELZER, R. *O maser de elétron-ciclotron como mecanismo gerador da radiação quilométrica das auroras*. 1991. 216 f. Dissertação (Mestrado em Física). Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1991.
- [37] SCARF, F. L.; GURNETT, D. A.; KURTH, W. S. Jupiter plasma wave observations: an initial Voyager 1 overview. *Science*, Washington, v. 304, n. 4396, p. 991–995, June 1979.
- [38] GURNETT, D. A.; KURTH, W. S.; SCARF, F. L. Plasma waves near Saturn: initial results from Voyager I. *Science*, Washington, v. 212, n. 4491, p. 235–239, Apr. 1981.
- [39] GURNETT, D. A.; KURTH, W. S.; POYNTER, R. L.; GRANROTH, L. J.; CAIRNS, I. H.; MACEK, W. M.; MOSES, S. L.; CORONITI, F. V.; KENNEL, C. F.; BARBOSA, D. D. First plasma wave observations at Neptune. *Science*, Washington, v. 246, n. 4936, p. 1494–1497, Dec. 1989.

- [40] QUEINNEC, J.; ZARKA, P. Io-controlled decameter and Io-Jupiter interaction. *Journal of Geophysical Research - Space Physics*, Washington, v. 103, n. A11, p. 26649–26666, Nov. 1998.
- [41] GURNETT, D. The Earth as a radio source: terrestrial kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 79, n. 28, p. 4227–4238, Oct. 1974.
- [42] DUNCKEL, N.; FICKLIN, B.; RORDEN, L.; HELLIWELL, R. A. Low frequency noise observed in the distant magnetosphere with Ogo1. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 75, n. 10, p. 1854–1862, Apr. 1970.
- [43] KURTH, W. S.; GURNETT, D. A. Auroral kilometric radiation integrated power flux as a proxy for AE. *Advances in Space Research*, Oxford, v. 22, n. 1, p. 73–77, July 1998.
- [44] KURTH, W. S.; MURATA, T.; LU, G.; GURNETT, D. A.; MATSUMOTO, H. Auroral kilometric radiation and the auroral electrojet index for the January 1997 cloud event. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 25, n. 15, p. 3027–3030, Aug. 1998.
- [45] KAISER, M. L.; ALEXANDER, J. K. Relationship between auroral substorms and the occurrence of terrestrial kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 82, n. 32, p. 5283–5286, Nov. 1977.
- [46] SNYDER, A.; AKASOFU, S. I.; DAVIS, T. N. Auroral substorms observed from above the north polar region by a satellite. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 79, n. 10, p. 1393–1402, July 1974.
- [47] GREEN, J. L.; GURNETT, D. A.; SHAWHAN, S. D. The angular distribution of auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 82, n. 13, p. 1825–1838, May 1977.
- [48] KASABA, Y.; MATSUMOTO, H.; HASHIMOTO, K.; ANDERSON, R. R. The angular distribution of auroral kilometric radiation observed by GEOTAIL spacecraft. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 24, n. 20, p. 2483–2486, Oct. 1997.
- [49] KUMAMOTO, A.; OYA, H. Assymetry of occurrence-frequency and intensity of AKR between summer polar region and winter polar region sources. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 25, n. 13, p. 2369–2372, July 1998.

- [50] KAISER, M. L.; ALEXANDER, J. K. Terrestrial kilometric radiation 3: average spectral properties. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 82, n. 22, p. 3273–3289, Aug. 1977.
- [51] BENSON, R. F.; CALVERT, W. Isis 1 observations at the source of AKR. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 6, n. 6, p. 479–482, June 1979.
- [52] LOUARN, P.; ROUX, H.; DE FÉRAUDY, H.; LE QUÉAU, D. Trapped electrons as a free energy source for the auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 95, n. A5, p. 5983–5995, May 1990.
- [53] HILGERS, A.; ROUX, A.; LUNDIN, R. Characteristics of AKR sources: a statistical description. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 18, n. 8, p. 1493–1496, Aug. 1991.
- [54] ROUX, A.; HILGERS, A.; DEFÉRAUDY, H.; LE QUÉAU, D.; LOUARN, P.; PERRAUT, S. Auroral kilometric radiation sources: in situ and remote observations from Viking. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 98, n. A7, p. 11657–11670, July 1993.
- [55] MENIETTI, J. D.; WEIMER, D. R.; ANDRE, M.; ELIASSON, L. DE 1 and Viking observations associated with electron conical distributions. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 99, n. A12, p. 23673–23684, Dec. 1994.
- [56] HANASZ, J.; SCHREIBER, R.; DE FÉRAUDY, H.; MOGILEVSKI, M. M.; ROMANTSOVA, T. V. Observation of the upper frequency cutoffs of the auroral kilometric radiation. *Annales Geophysicæ-Atmospheres Hydrospheres and Space Sciences*, New York, v. 16, n. 9, p. 1097–1104, Sept. 1998.
- [57] ALEXANDER, J. K.; KAISER, M. L. Terrestrial kilometric radiation 1: spatial structure studies. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 81, n. 34, p. 5948–5956, Dec. 1976.
- [58] ALEXANDER, J. K.; KAISER, M. L.; RODRIGUEZ, P. Scattering of terrestrial kilometric radiation at very high altitudes. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 84, n. A6, p. 2619–2629, June 1979.

- [59] MEAD, G. D.; FAIRFIELD, D. H. Quantitative magnetospheric models derived from spacecraft magnetometer data. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 80, n. 4, p. 523–534, Feb. 1975.
- [60] GURNETT, D. A.; GREEN, J. L. On the polarization and origin of auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 83, n. A2, p. 689–696, Feb. 1978.
- [61] SHAWHAN, S. D.; GURNETT, D. A. Polarizations measurements of auroral kilometric radiation by Dynamics Explorer 1. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 9, n. 9, p. 913–916, Sept. 1982.
- [62] ACKERSON, K. L.; FRANK, L. A. Correlated satellite measurements of low-energy electron precipitation and ground-based observations of visible auroral arc. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 77, n. 7, p. 1128–1136, Mar. 1972.
- [63] GREEN, J. L.; GURNETT, D. A. A correlation between auroral kilometric radiation and inverted V electron precipitation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 84, n. A9, p. 5216–5222, Sept. 1979.
- [64] IMHOF, W. L.; WALT, M.; ANDERSON, R. R.; CHENETTE, D. L.; HAWLEY, J. D.; MOBILIA, J.; PETRINE, S. M. Association of electron precipitation with auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research - Space Physics*, Washington, v. 105, n. A1, p. 277–289, Jan. 2000.
- [65] BAHNSEN, A.; PEDERSEN, B. M.; JESPERSEN, M.; UNGSTRUP, E.; ELIASSON, L.; MURPHREE, J. S.; ELPHINSTONE, R. D.; BLOMBERG, L.; HOLMGREEN, G.; ZANETTI, L. J. Viking observations at the source region of auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 94, n. A6, p. 6643–6654, June 1989.
- [66] STRANGEWAY, P. J.; KEPKO, L.; ELPHIC, R. C.; CARLSON, C. W.; ERGUN, R. E.; MCFADDEN, J. P.; PERIA, W. J.; DELORY, G. T.; CHASTON, C. C.; TEMERIN, M.; CATTEL, C. A.; MOBIUS, E.; KISTLER, L. M.; KLUMPAR, D. M.; PETERSON, W. K.; SHELLEY, E. G.; PFAFF, R. E. FAST observations of VLF waves in the auroral zone: evidence of very low plasma densities. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 25, n. 12, p. 2065–2068, June 1998.

- [67] HILGERS, A.; HOLBACK, B.; HOLMGREN, G.; BOSTRÖM, R. Probe measurements of low plasma densities with applications to the auroral acceleration region and auroral kilometric radiation sources. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 97, n. A6, p. 8631–8641, June 1992.
- [68] ERGUN, R.; CARLSON, C. W.; MCFADDEN, J. P.; MOZER, F. S.; DELORY, G. T.; PERIA, W.; CHASTON, C. C.; TEMERIN, M.; ELPHIC, R.; STRANGWAY, R.; PFAFF, R.; CATTEL, C. A.; KLUMPAR, D.; SHELLY, E.; PETERSON, W.; MOEBIUS, E.; KISTLER, L. FAST satellite wave observations in the AKR source region. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 25, n. 12, p. 2061–2064, June 1998.
- [69] DELORY, G. T.; ERGUN, R. E.; CARLSON, C. W.; MUSCHIETTI, L.; CHASTON, C. C.; PERIA, W.; MCFADDEN, J. P.; STRANGWAY, R. FAST observations of electron distributions within AKR source regions. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 25, n. 12, p. 2069–2072, June 1998.
- [70] CARLSON, C. W.; PFAFF, R. F.; WATZIN, J. G. The fast auroral snapshot FAST mission. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 25, n. 12, p. 2013–2016, June 1998.
- [71] PRITCHETT, P. L.; STRANGWAY, R. J.; CARLSON, C. W.; ERGUN, R. E.; MCFADDEN, J. P.; DELORY, G. T. Free energy sources and frequency bandwidth of the auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research - Space Physics*, Washington, v. 104, n. A5, p. 10317–10326, May 1999.
- [72] BINGHAM, R.; CAIRNS, R. A. Generation of auroral kilometric radiation by electron horseshoe distributions. *Physics of Plasmas*, Woodbury, v. 7, n. 7, p. 3089–3092, July 2000.
- [73] ERGUN, R. E.; CARLSON, C. W.; MCFADDEN, J. P.; DELORY, G. T.; STRANGWAY, R. J.; PRITCHETT, P. L. Electron-cyclotron maser driven by charged-particle acceleration from magnetic field-aligned electric fields. *Astrophysical Journal*, Chicago, v. 538, n. 1, p. 456–466, July 2000.
- [74] OMIDI, N.; WU, C. S.; GURNETT, D. A. Generation of auroral kilometric radiation and Z mode radiation by the cyclotron maser mechanism. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 89, n. A2, p. 883–895, Feb. 1984.

- [75] UNGSTRUP, E.; BAHNSEN, A. Energy source and generation mechanism for auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 95, n. A5, p. 5973–5981, May 1990.
- [76] GURNETT, D. A.; SHAWHAN, S. D.; SHAW, R. R. Auroral hiss, Z mode radiation, and auroral kilometric radiation in the polar magnetosphere: DE 1 observations. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 88, n. A1, p. 329–340, Jan. 1983.
- [77] JAMES, H. G. Direction-of-arrival measurements of auroral kilometric radiation and associated ELF data from ISIS 1. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 85, n. A7, p. 3367–3375, July 1980.
- [78] MELLOTT, M. M.; CALVERT, W.; HUFF, R. L.; GURNETT, D. A.; SHAWHAN, S. D. DE 1 observations of ordinary mode and extraordinary mode auroral kilometric radiation. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 11, n. 12, p. 1188–1191, Dec. 1984.
- [79] MELLOTT, M. M.; HUFF, R. L.; GURNETT, D. A. The auroral kilometric radiation: DE 1 direction finding studies. *Geophysical Research Letters*, Washington, v. 12, n. 8, p. 479–482, Aug. 1985.
- [80] FIDONE, I.; GRANATA, G.; RAMPONI, G.; MEYER, R. L. Wave absorption near the electron cyclotron frequency. *Physics of Fluids*, New York, v. 21, n. 2, p. 645–652, Aug. 1978.
- [81] FIDONE, I.; GRANATA, G.; MEYER, R. L.; JORNADA, E. H.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Electron cyclotron emission from tokamak plasmas with mildly superthermal electrons. *Physics of Fluids*, New York, v. 23, n. 7, p. 1336–1347, July 1980.
- [82] BORNATICI, M.; CANO, R.; DE BARBIERI, O.; ENGELMANN, F. Electron cyclotron emission and absorption in fusion plasmas. *Nuclear Fusion*, Vienna, v. 23, n. 9, p. 1153–1257, Sept. 1983.
- [83] KRALL, N. A.; TRIVELPIECE, A. W. *Principles of plasma physics*. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [84] BORN, M.; GREEN, H. C. *Proceedings of the Royal Society of London: a general kinetic theory of liquids I. The molecular distributions functions*. London: Royal Society of London, 1946. p. 10–18 (Mathematical and physical sciences, series A, 188).

- [85] KUBO, R.; TODA, M.; HASHITSUME, N. *Statistical physics II: nonequilibrium statistical mechanics*. 3. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1985. (Springer series in solid state science, 31).
- [86] AKHIEZER, A. I.; AKHIEZER, I. A.; POLOVIN, R. V.; SITENKO, A. G.; STEPANOV, K. N. *Plasma electrodynamics*. New York: Pergamon Press, 1975. v. 1 (International series of monographs in natural philosophy, 68).
- [87] SHAFRANOV, V. D. *Reviews of plasma physics*. New York: Consultants Bureau, 1967. v. 3, p. 1–157.
- [88] ABRAMOVITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. Washington: National Bureau of Standards, 1964.
- [89] MELROSE, D. B. *Instabilities in space and laboratory plasmas*. New York: Cambridge University Press, 1986.
- [90] STIX, T. H. *The theory of plasma waves*. New York: McGraw-Hill, 1962.
- [91] FREUND, H. P.; WU, C. S. Plasma effects on the spontaneous emission of synchrotron radiation from weakly relativistic electrons. *Physics of Fluids*, New York, v. 20, n. 6, p. 963–973, June 1977.
- [92] FREUND, H. P.; WU, C. S. Synchrotron emission near the electron cyclotron and upper hybrid resonances. *Physics of Fluids*, New York, v. 20, n. 10, p. 1697–1703, Oct. 1977.
- [93] AUDENAERDE, K. Cyclotron emissivity of a plasma of arbitrary density. *Plasma Physics*, Bristol, v. 19, n. 3, p. 299–314, Mar. 1977.
- [94] BORNATICI, M.; ENGELMANN, F. Emissivity near the electron cyclotron frequency from a thermal plasma of finite density. *Physics of Fluids*, New York, v. 22, n. 9, p. 1833–1834, Sept. 1979.
- [95] BORNATICI, M.; RUFFINA, U. Perpendicular electron cyclotron emission and absorption for relativistic loss-cone type distributions. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 28, n. 10, p. 1589–1608, Oct. 1986.

- [96] BORNATICI, M.; RUFFINA, U.; WESTERHOF, E. Fundamental harmonic electron cyclotron emission for hot, loss-cone type distributions. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Bristol, v. 31, n. 2, p. 221–228, Feb. 1989.
- [97] KLIMONTOVICH, Y. L. *The statistical theory of non-equilibrium processes in a plasma*. Cambridge: MIT Press, 1967.
- [98] SITENKO, A. G. *Electromagnetic fluctuations in plasma*. San Diego: Academic Press, 1967.
- [99] ANTON, H. *Álgebra linear*. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.
- [100] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.
- [101] KAN, J. R.; LEE, L. C.; AKASOFU, S. I. Two-dimensional potential double layers and discrete auroras. *Journal of Geophysical Research*, Washington, v. 84, n. A8, p. 4305–4315, Aug. 1979.
- [102] DORY, R. A.; GUEST, G. E.; HARRIS, E. G. Unstable electrostatic plasma waves propagating perpendicular to a magnetic field. *Physical Review Letters*, New York, v. 14, n. 5, p. 131, Apr. 1965.
- [103] YOON, P. H.; CHANG, T. Exact dielectric tensor for relativistic magnetized plasma with loss-cone and field-aligned drift. *Journal of Plasma Physics*, London, v. 42, n. 2, p. 193–204, Oct. 1989.
- [104] PRESS, W. H.; FLANNERY, S. A., T.; VETTERLLING, W. T. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. New York: University Press, 1989.
- [105] CALDELA FILHO, R. A. *Efeitos de inhomogeneidades no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas magnetizados*. 1990. 116 f. Tese (Doutorado em Ciências). Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1990.
- [106] CALDELA FILHO, R. A.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. The dispersion relation and the dielectric tensor of inhomogeneous magnetized plasma. *Journal of Plasma Physics*, London, v. 42, n. 1, p. 165–175, Aug. 1989.

- [107] CALDELA FILHO, R. A.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Inhomogeneity effects on the absorption of electromagnetic high-frequency waves by magnetized maxwellian plasmas. *Journal of Plasma Physics*, London, v. 43, n. 3, p. 335–356, June 1990.
- [108] CAVALCANTI, C. J. H. *Estudo da absorção de ondas eletromagnéticas de alta frequência em plasmas inhomogêneos com presença de corrente*. 1993. 128 f. Dissertação (Mestrado em Física). Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1993.
- [109] CAVALCANTI, C. J. H.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Electron cyclotron absorption by inhomogeneous current-carrying plasmas. *Journal of Plasma Physics*, London, v. 52, n. 2, p. 195–214, Oct. 1994.
- [110] GAELZER, R. *O tensor dielétrico efetivo para plasmas imersos em campos magnéticos com gradientes perpendiculares*. 1995. 157f. Tese (Doutorado em Ciências). Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1995.
- [111] GAELZER, R.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Dispersion relation and the dielectric tensor for magnetized plasmas with inhomogeneous magnetic field. *Physical Review E*, Woodbury, v. 51, n. 3, p. 2407–2424, Mar. 1995.
- [112] GAELZER, R.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Dispersion functions for plasmas with loss-cone distributions in inhomogeneous magnetic field. *Physical Review E*, Woodbury, v. 55, n. 5, p. 5859–5873, May 1997.
- [113] GAELZER, R.; ZIEBELL, L. F.; SILVEIRA, O. J. G. Dielectric tensor for inhomogeneous plasmas in inhomogeneous magnetic field. *Physics of Plasmas*, Woodbury, v. 7, n. 12, p. 4533–4541, Dec. 1999.
- [114] BUDDEN, K. G. *The propagation of radio waves: the theory of radio waves of low power in the ionosphere and magnetosphere*. New York: Cambridge University Press, 1985.