UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

FERNANDO BAPTISTA ABBOTT

ESTUDO DE CASO SOBRE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre

2011

FERNANDO BAPTISTA ABBOTT

ESTUDO DE CASO SOBRE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2011

FERNANDO BAPTISTA ABBOTT

ESTUDO DE CASO SOBRE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em ....

Banca Examinadora:

....

Prof. Dr. Marcus Vinicius de A. Basso – Orientador
Instituto de Matemática da UFRGS

....

Profa. Dra. Lúcia Helena Marques Carrasco
Instituto de Matemática da UFRGS

....

Profa. Dra. Simone Dias da Cruz
Colégio de Aplicação da UFRGS

RESUMO

Este trabalho trata de um estudo de caso sobre estratégias de resolução de problemas de matemática no ensino médio, a partir da heurística de resolução proposta por George Polya. A parte prática do trabalho foi realizada no Colégio de Aplicação (CAp) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), com um grupo de alunos do terceiro ano do ensino médio. Nesta prática, foram propostos aos alunos problemas de matemática de concursos vestibulares. A partir do exame das situações apresentadas pelos estudantes, analisamos as estratégias à luz da heurística de resolução de problemas de Polya. Os resultados obtidos permitiram concluir que é possível identificar e relacionar os principais aspectos desta heurística com as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os problemas propostos em sala de aula.

Palavras-chave: Problemas. Resolução. Estratégias. Heurística.

ABSTRACT

The purpose of this work is to show a case study about strategies for solving mathematical problems in high school, from the heuristics for solving problems proposed by George Polya. The practical part of this work has been carried out at Colégio de Aplicação (CAp) – UFRGS, a school from the Federal University of Rio Grande do Sul, Brazil, with a group of students in the third year of high school. For the practice, the students were given math problems taken from university entrance examinations. The solutions reached by the students were, therefore, analyzed from the heuristics for solving problems by Polya. The results showed that it is possible to identify and relate the principal aspects of this heuristic method with the strategies used by the students to solve the math problems proposed in class.

Key-words: Problems. Solutions. Strategies. Heuristics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS E QUADRO

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No processo de ensino e aprendizagem da matemática, problemas e exercícios estão presentes em praticamente todos os conteúdos a serem desenvolvidos com os estudantes. Mesmo que sejam simples, podem trazer um interesse especial pela matemática, pois os alunos podem sentir-se desafiados a resolvê-los e instigados a descobrir as soluções e as diferentes formas de resoluções, além de estimular o raciocínio e aumentar o conhecimento matemático.

No entanto, a resolução de problemas e exercícios pode representar algumas dificuldades aos estudantes de matemática. Tais dificuldades se apresentam nos mais variados aspectos, tais como a interpretação do problema, a extração dos dados que o problema apresenta, a identificação de possíveis maneiras de resolução, os fatores condicionantes, as operações que devem ser utilizadas, o procedimento de resolução, a possibilidade de conferir se a solução está correta, entre outros.

A experiência que tive durante a realização das disciplinas que envolviam práticas docentes, observações em escolas e atividades dentro de sala de aula, do curso de Licenciatura em Matemática Noturno, possibilitou analisar o interesse dos alunos nas aulas de matemática e os momentos em que ocorria uma melhor compreensão com relação aos conteúdos trabalhados em sala. A apresentação expositiva da resolução das questões, depois de trabalhado o conteúdo teórico, foi um fator de destaque durante as aulas, pois percebi que, desta forma, os alunos tinham mais facilidade em compreender o enunciado dos problemas e a forma de resolvê-los. Tal observação se deu quando, após trabalhar as definições e os conteúdos teóricos, os estudantes não respondiam de forma segura ou correta às indagações e perguntas direcionadas a eles.

Dessa maneira, foi possível perceber que o ensino só pela teoria não estava apresentando um resultado satisfatório, criando-se a necessidade de analisar e destacar junto aos alunos uma proposta de resolução de problemas de matemática que os auxiliasse. Esta proposta tem um papel facilitador do ensino de matemática, mostrando ao estudante a importância de compreender um problema, elaborar e executar um plano de resolução e revisar os passos da estratégia utilizada para chegar à resposta, através das ideias e etapas da resolução de problemas de matemática com embasamento nas teorias de George Polya.

No decorrer das práticas, salientei aos alunos que é preciso interpretar o enunciado e identificar o que é pedido pelos problemas e exercícios propostos, antes de começar a fazer os cálculos e operações. Muitos estudantes começavam a calcular sem nem ao menos ter lido o enunciado completamente, acarretando no procedimento de resolução equivocado e, consequentemente, na resposta incorreta. Para alguns professores que com os quais tive a oportunidade de trabalhar durante as práticas docentes nas disciplinas do curso de Licenciatura, essa dificuldade em resolver problemas de matemática pode ser ocasionada pela falta do hábito de leitura, acreditando que o problema, em realidade, é interdisciplinar, pois o aluno que não interpreta corretamente um problema terá grandes chances de não obter sucesso na interpretação de texto em outras disciplinas.

George Polya (2006) apresenta várias ideias que orientam na resolução de problemas matemáticos, apresentando-as em quatro passos:

> Compreensão do problema: é preciso compreender o problema[...]. Estabelecimento de um plano: encontre a conexão entre os dados e a incógnita[...]. Execução do plano: execute o seu plano [...]. Retrospecto: examine a solução obtida [...]. (POLYA, 2006, p.XIX)

Assim, estudar o processo de resolução de problemas sob o prisma da heurística de Polya pode nos trazer a possibilidade de encontrar subsídios que nos auxiliem no ensino e aprendizagem de matemática e na motivação dos alunos que estudam esta ciência exata.

2 PROPOSTA DE ESTUDO E OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo compreender o processo de resolução de problemas de matemática, contribuindo para o meu entendimento sobre o papel do professor e o processo de ensino e aprendizagem de matemática. Tal proposta tem motivação nas atividades docentes desenvolvidas nas disciplinas de Estágio em Educação Matemática I, II e III e Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática I, II e III, do curso de Licenciatura em Matemática Noturno, onde pude analisar o trabalho e o interesse dos alunos nas aulas de matemática e os momentos em que ocorria a compreensão com relação aos conteúdos trabalhados em sala de aula.

A parte prática do trabalho foi realizada no Colégio de Aplicação da UFRGS (CAp), com alunos do terceiro ano do ensino médio de um grupo formado com o objetivo de resolver listas de questões de vestibular como preparação para o mesmo. As aulas eram coordenadas pela professora da disciplina de Matemática do terceiro ano do colégio e as listas de questões eram elaboradas por alunos da disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática I que estavam realizando suas observações e práticas no colégio. Desta maneira, as atividades em sala eram elaboradas de forma a trabalhar com os alunos a prática de resolução de problemas de matemática.

O assunto trabalhado em cada lista era escolhido pelos alunos conforme os mesmos julgavam ser necessário para complementar e reforçar a preparação para o vestibular.

Tendo em vista a finalidade das aulas de preparação ao vestibular, os problemas propostos eram em maioria questões de vestibular da UFRGS, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUC) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) dos últimos anos. Paralelamente às listas, entreguei em cada aula um problema de vestibular para que os estudantes resolvessem, não sendo apresentadas as alternativas de múltipla escolha presentes nas provas originais. Foi destacado, em cada um dos problemas, que apresentassem o desenvolvimento da resolução.

Os alunos foram orientados a resolver os problemas no início das aulas e individualmente, registrando as suas resoluções e respostas na mesma folha em que constava o problema.

Desta forma, este trabalho busca responder à seguinte questão principal: **“Como utilizar a heurística de Polya para analisar as estratégias de resolução de problemas de matemática de alunos do ensino médio?”**

A coleta de informações para o trabalho se deu através de observações feitas em sala de aula e anotadas na forma de diário de campo, no qual foram registradas as análises das resoluções dos problemas do grupo de alunos. Foi aplicado, antes de iniciar as observações, um questionário com algumas perguntas para conhecer um pouco da turma, servindo como uma fonte complementar de informações.

Como principal recorte teórico, foi utilizada a metodologia da resolução de problemas, na qual se destaca como referência o autor George Polya.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma das maiores missões de um professor de matemática é transmitir o conhecimento de forma segura e clara ao aluno, proporcionando ao mesmo os mais diversos recursos e possibilidades de resolução dos problemas e exercícios. Concordo plenamente com Polya (2006), que é fundamental que o estudante crie o hábito de estudar por conta própria e adquira experiência pelo trabalho independente, para que tenha capacidade de decidir qual o caminho mais apropriado diante de uma situação adversa e desafiadora.

Ao buscar a solução, é natural que o aluno altere seguidamente a forma de pensar e encarar o problema. A alternância ocorre desde o princípio do problema, mudando após alguma idéia e pode ser ainda mais diferente quando ele praticamente chegar à solução.

O professor e autor George Polya realizou um longo e sério estudo dos métodos de resolução de problemas matemáticos. Através deste estudo, Polya (2006) destaca dois aspectos da Matemática: a rigorosa ciência de Euclides revelada como dedutiva e sistemática e, em segundo lugar, a Matemática in *statu nascendi*, no processo de ser inventada, que jamais foi apresentada desta maneira aos estudantes, aos professores ou ao grande público. Na verdade, existem diversas opiniões e definições a respeito da Matemática. No entanto, não podemos admitir uma única definição, pois, em realidade, ela está em constante estudo e transformação, podendo surgir a qualquer momento e local do mundo uma descoberta revolucionária e inovadora.

A constante idéia de transformação da Matemática surge como uma importante ferramenta motivacional no estudo de métodos de resolução de problemas matemáticos. E essa busca pelo novo e pela descoberta fez com que Polya desenvolvesse uma heurística que auxiliasse os estudantes na resolução de problemas de matemática. Essa heurística compreende quatro fases de trabalho, nas quais se destacam alguns questionamentos que o estudante deve levar em consideração durante o processo de resolução de problemas. Tais questionamentos são apresentados por Polya (2006, p. XIX-XX), conforme transcrito no Quadro 1.

Quadro 1 – Como Resolver um Problema

Como resolver um Problema	
COMPREENSÃO DO PROBLEMA	
Primeiro É preciso *compreender* o problema.	*Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?* É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é suficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
ESTABELECIMENTO DE UM PLANO	
Segundo Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um *plano* de resolução.	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? *Conhece um problema correlato?* *Conhece um problema que lhe poderia ser útil?* *Considere a incógnita!* E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. *Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado?* É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver parte problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
EXECUÇÃO DO PLANO	
Terceiro *Execute* o plano.	Ao executar o plano de resolução, *verifique cada passo.* É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
RETROSPECTO	
Quarto *Examine* a solução obtida.	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Segundo Polya (2006), é conveniente distinguir as quatro fases durante a resolução dos problemas. Primeiro, é preciso compreender o problema e perceber o que é necessário. Segundo, ver como os diversos itens estão relacionados, como a incógnita está relacionada aos dados, para se ter uma ideia de resolução e estabelecer um plano. Terceiro, executar o plano. Quarto, fazer um retrospecto da resolução completa, resolvendo-a e discutindo-a. Destaca que cada uma destas fases tem a sua importância, podendo ocorrer ao aluno, eventualmente, uma excelente ideia que o faça saltar todas as etapas e chegar de forma direta e imediata à solução.

Ao pensarmos, por exemplo, num problema simples, o estudante pode resolvê-lo pensando nas quatro etapas de resolução. Se eu tenho 20 anos e meu irmão tem 12 anos, a idade dele é quantos por cento da minha? Se pensarmos nestes passos, o problema pode ter sua resolução facilitada. Primeiro, compreender o problema a partir do que são solicitados, no caso, quantos por cento de 20 equivalem a 12. Em seguida, entender como a incógnita está ligada aos dados, ou seja, qual a fração centesimal que multiplicada por 20 terá como resultado 12. No terceiro passo, correspondente a execução do plano, basta resolver a equação resultante. Por último, o aluno pode revisar os passos anteriores, conferindo se a porcentagem obtida, multiplicada por 20, realmente tem como resultado 12.

Segundo Polya, a compreensão do problema é uma etapa importante e que vai desencadear todas as outras etapas durante a resolução do problema.

> O estudante deve considerar as partes principais do problema, atenta e repetidamente, sob vários pontos de vista. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá *traçar uma figura* e nela indicar a incógnita e os dados. Se for necessário designar estes elementos, devera *adotar uma notação adequada*, pois, dedicando alguma atenção aos signos apropriados, será obrigado a considerar os elementos para os quais esses signos têm de ser escolhidos. Há uma outra indagação que pode ser útil neste estágio preparatório, desde que não se espere para ela uma resposta definitiva e sim uma provisória, uma suposição: *É possível satisfazer a condicionante?*. (POLYA, 2006, p. 5)

O trajeto a ser percorrido desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano pode ser duradouro e difícil. O autor destaca que:

> [...] o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma ideia brilhante [...].(POLYA, 2006, p.7).

E esta ideia pode ser provocada através de perguntas e questionamentos feitos pelo professor. Ainda, segundo Polya, sabemos que:

> [...] As boas ideias são baseadas nas experiências passadas ou em conhecimentos previamente adquiridos. [...] Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas e teoremas anteriormente resolvidos e demonstrados [...] (POLYA, 2006, p.7)

Assim, para Polya (2006) é interessante que se conheça um problema correlato. No entanto, ao tentar aplicar diversos problemas ou teoremas conhecidos, investigando variações e problemas auxiliares diferentes, é possível que ocorra o distanciamento do problema original e, até mesmo, o risco de perdê-lo por completo. Dessa maneira, uma boa indagação que contribui para rever o problema é questionar se ele utilizou todos os dados e toda a condicionante.

A concepção de um plano e de uma ideia de resolução são relativamente mais complicados, pois exige conhecimentos anteriores, boa mentalização, concentração no objetivo e, porque não, sorte. Já a execução do plano é mais fácil, cabendo ao estudante ter paciência para tal. Com relação a esse assunto, Polya cita:

> Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a idéia final, não perderá facilmente essa idéia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que aluno verifique cada passo. (POLYA, 2006, p. 11)

De acordo com as ideias de Polya (2006), a quarta e última etapa diz respeito ao retrospecto da resolução dos problemas. Geralmente, os alunos fecham os livros e passam a outro assunto depois de chegarem à solução do problema. Dessa forma, acabam perdendo uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução, pois ao fazer um retrospecto da resolução completa, reexaminando os resultado final e o percurso que o levou até ele, poderão consolidar os seus conhecimentos e aperfeiçoar a capacidade de resolver problemas. Esse autor (2006, p. 12) destaca, ainda, que um professor qualificado "[...] precisa compreender e transmitir aos seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer." E, desta forma, é possível sempre melhorar qualquer resolução com estudo e aprofundamento, aperfeiçoando e fixando a compreensão da mesma. Desta maneira, destaca que

> Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que o os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros [...]. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua solução. Os estudantes acharão realmente interessante o retrospecto se eles houverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema. (POLYA, 2006, p. 13)

Assim, é interessante que o professor procure motivar os alunos a imaginar casos em que eles poderão retomar o conteúdo trabalhado e outra vez utilizar o resultado obtido, bem como utilizar o procedimento adotado no problema em outras situações.

3.1 Resolução de Problemas

Ao analisarmos as diferentes maneiras que a palavra problema é definida, chama atenção os dois significados dados pelo dicionário Miniaurélio, expressas como: “[...]questão matemática proposta para que se lhe dê solução[...]” e “[...]questão não solvida, ou de solução difícil[...]” (FERREIRA, 2004). Ou seja, percebemos que a palavra problema está intimamente ligada à Matemática e, consequentemente, à solução do problema ou à dificuldade em obtê-la. Desta forma, constatamos que a necessidade em encontrar a solução de um problema de matemática está relacionada à estratégia utilizada na resolução do mesmo, necessitando de subsídios para que se tenha sucesso diante do problema.

Um problema de matemática é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, é possível construir a solução, mesmo que ela não esteja ainda disponível (BRASIL, 1998).

É consenso de todos que sempre existirá um problema a ser resolvido, pois a ciência está em constante renovação e transformação, trazendo novos problemas que acabam por gerar mais problemas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) elucidam que educadores de matemática apontam a resolução de problemas como ponto inicial para a atividade de matemática, deixando implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos se deparam com situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. Ainda, encontramos nos PCNs que a resolução de problemas, de acordo com os educadores de matemática, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance (BRASIL, 1998). Desta maneira, segundo Schoenfeld (1985), os alunos terão a oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como da visão que têm de Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

3.2 Problemas e exercícios: importância e peculiaridades

Utilizando a linguagem do ensino de proporção, podemos afirmar que os problemas e exercícios estão para a educação matemática assim como os elementos químicos estão para o aprendizado de química. Enquanto os exercícios estão associados à aplicação de fórmulas e conhecimentos matemáticos anteriormente adquiridos através de repetições e listas, os problemas aparecem com um propósito de despertar e criar ideias, desenvolvendo formas de pensamento para que se busque a solução e se obtenha a resposta desejada.

Com relação a esta diferenciação, o professor da UFRGS J. F. Porto da Silveira escreve:

> Um problema matemático é toda situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo, e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. O fundamental é que o resolvedor tenha de inventar estratégias e criar idéias; ou seja: pode até ocorrer que o resolvedor conheça o objetivo a chegar, mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem os meios para atingir tal objetivo... O exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade/conhecimento matemático já conhecido pelo resolvedor, como a aplicação de um algoritmo CONHECIDO, de uma fórmula CONHECIDA, etc. O exercício envolve mera aplicação e o problema necessariamente envolve invenção ou/e criação significativa. (SILVEIRA, 2001).[1]

No ensino e aprendizagem de matemática tanto os exercícios quanto os problemas têm um papel importante para o estudante. A resolução de exercícios proporciona ao aluno a utilização dos algoritmos e fórmulas estudadas, mesmo sendo uma forma de aplicar e reaplicar os conhecimentos já adquiridos. Através dos exercícios é possível consolidar o sucesso na busca da resposta correta e exercitar mecanicamente as técnicas de resolução. Em contrapartida, os problemas exigem atenção e criatividade, pois necessitam que ideias e estratégias sejam criadas para que se consiga chegar à resposta desejada, desenvolvendo o raciocínio e instigando a curiosidade do estudante.

Não obstante, remetendo o assunto aos passos de resolução propostos por Polya, depois de passar pelas etapas de compreensão do problema e estabelecimento do plano, considero que os exercícios se farão extremamente importantes na etapa de execução do plano, pois nela existe grande possibilidade do aluno necessitar da prática dos mesmos para chegar à resposta final.

[1] Disponível em: http:// http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html

A prática em sala de aula, no decorrer da realização das disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática Noturno, apresentou dados interessantes com relação à resolução de problemas e exercícios. Quando apresentado um problema para que fosse resolvido pelos alunos, pude observar que grande parte da turma tentava resolvê-lo como se fosse um exercício, ou seja, aplicando diretamente alguma fórmula relacionada com o conteúdo que estava sendo trabalhado em sala ou buscando algum algoritmo estudado anteriormente que acreditavam ser possível utilizar naquele momento. Diante de tal situação, procurei salientar aos estudantes que procurassem entender o que estava sendo solicitado no problema, compreendendo e extraindo os dados dele, interpretando a situação e relacionando-a com algum conteúdo que já havia sido trabalhado com a turma. Tal procedimento, em realidade, é a essência da heurística proposta por George Polya, na qual o aluno, diante de um problema de matemática, pode utilizar os quatro passos para resolvê-lo. Os passos desenvolvidos por Polya têm o objetivo de auxiliar o estudante e dar a ele subsídios para que obtenha sucesso na jornada da resolução de problemas de matemática, desenvolvendo o raciocínio, a criação e o desenvolvimento de ideias.

Desta maneira, Polya chama atenção à importância do estudo da heurística de resolução de problemas, apoiada pela motivação da diminuição do trabalho mecanizado por parte do aluno. O estudo e o incentivo de uma nova metodologia de resolução de problemas no ensino de matemática podem auxiliar o aluno no desenvolvimento do raciocínio lógico e motivá-lo a novos desafios. A diminuição gradual do trabalho mecânico, por vezes estimulado pela resolução de exercícios, pode despertar no aluno a consciência da importância do processo de resolução, para que o mesmo não aplique tão somente fórmulas em uma busca por resultados sem nenhum significado para ele.

Cabe salientar que Polya nunca teve a pretensão que o estudante seguisse sua divisão como uma sequência de etapas obrigatórias a serem seguidas, nem que a considerasse uma “fórmula mágica”, podendo o discente voltar atrás ou tomar cada etapa da forma que considerar conveniente.

Ao citar a diferenciação entre problemas e exercícios, não se procura enaltecer a importância de um ou outro, mas sim salientar que tanto os exercícios quanto os problemas têm a sua parcela de contribuição no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Assim, o que se destaca é em relação à forma como cada um deles é apresentado e trabalhado, dentro e fora da sala de aula.

3.3 Sobre o termo Heurística

No estudo de Polya (2006) sobre resolução de problemas, encontramos uma interessante explanação sobre o termo heurística. De acordo com ele, a Heurística, também conhecida como Heurética ou “ars inveniendi”, era o nome de um determinado ramo de estudo pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado e raramente apresentado com detalhes, mas hoje praticamente esquecido. Para Polya, o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras de descoberta e da invenção.

Segundo Rosa & Orey (2009), a heurística pode ser entendida como um caso especial do método de tentativa e erro, no qual a solução dos problemas é dada pelo meio de tentativas, até que seja encontrada a solução correta. No entanto, quando a solução adequada for encontrada, ela necessita ser testada com a rigorosidade do método científico para que a validade da resposta seja estabelecida.

Polya (2006) discute sobre a Heurística Moderna, afirmando que a mesma busca compreender o processo solucionador do problema, em particular as operações mentais que tenham utilidade nesse processo. A respeito da Heurística Moderna, escreve:

> [...] Um estudo consciencioso da Heurística deve levar em conta, tanto as suas bases lógicas quanto psicológicas. Não deve esquecer aquilo que autores antigos como Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano escreveram sobre o assunto, mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atitude por parte de outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística. Neste estudo, não devemos descurar nenhum tipo de problema, e sim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independentemente do assunto específico do problema. O estudo da Heurística tem objetivos “práticos”: melhor esclarecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática. (POLYA, 2006, p.100)

Um interessante aspecto abordado na obra de Polya (2006) diz respeito ao raciocínio heurístico. Segundo esse autor (2006, p.152) ele é definido como “[...]aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta”. Ele ainda explica que o ensino de várias disciplinas de nível superior, como o Cálculo para engenheiros e físicos, seria melhorado se a natureza do raciocínio heurístico fosse mais bem compreendida, se tanto suas limitações quanto suas vantagens fossem abertamente reconhecidas e se os livros apresentassem claramente os argumentos heurísticos.

Dessa maneira, Polya considera que o seu livro, A Arte de Resolver Problemas, constitui a primeira tentativa de realização do programa de estudo da Heurística.

3.4 Construção de estratégias sob uma visão cognitiva

No artigo de Resnick e Collins (1996) encontramos interessantes questões com relação ao construtivismo e às concepções sobre aprendizagem (como surgem as habilidades de aprendizagem, se é possível ensiná-las e de que maneira).

Para o construtivismo, as pessoas que aprendem são construtoras do próprio conhecimento. O ensino não é a introdução de informação, mas uma preparação para que os alunos construam o próprio conhecimento. A investigação cognitiva está focada em estabelecer relações entre a natureza da resolução de problemas e o conhecimento que o sustenta. Dessa forma, observou-se que os bons pensadores e os especialistas em resolver problemas têm um maior conhecimento de conteúdos específicos. Tais especialistas usam mais esses conhecimentos do que a capacidade cognitiva em geral. Querer implementar nos alunos o mesmo "estilo" dos especialistas seria produzir um conhecimento inerte que dificilmente será usado em situações mais complexas. Dessa forma, o conhecimento deve ser construído por cada indivíduo.

Os estudantes possuem muitos conhecimentos ao entrar na escola, mas ainda que, raramente, no meio escolar estes conhecimentos sigam se desenvolvendo. Estes conhecimentos podem interferir positivamente ou negativamente na aprendizagem, segundo Resnick e Collins (1996). Para os mesmos, ao comparar o conhecimento específico e as habilidades de aprendizagem, há o entendimento de que os estudantes com maior êxito são os que usam estratégias com mais freqüência e eficácia (habilidades). Ainda, segundo Resnick e Collins, quem possui o conhecimento e domina estratégias de aprendizagem que se valorizam na escola tem mais possibilidades de beneficiar-se com as novas oportunidades de aprendizagem. Sua capacidade de questionamento e elaboração facilita o entendimento do que a escola pede.

Para Zuffi e Onuchic (2007), de um ponto de vista cognitivo, o desempenho em Matemática está associado à ativação, por parte de quem aprende, de processos intelectuais de ordem superior que são demandados por tarefas próprias desta disciplina, em especial a resolução de problemas, e a tomada de consciência de tais processos.

4 METODOLOGIA

Este trabalho foi elaborado via estudo de caso sobre estratégias de resolução de problemas de matemática, a partir da heurística de resolução baseada nas ideias de George Polya, com um grupo de alunos do terceiro ano do ensino médio que se preparava para o concurso vestibular.

Procuramos identificar e relacionar os principais aspectos desta heurística, como os passos propostos por ela para a resolução de problemas, com as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os problemas propostos em sala de aula.

O tempo aproximado para a prática junto ao grupo de alunos foi de dez horas/aula, com a possibilidade de ser estendido conforme necessidade de observação e complementação dos dados para posterior análise.

O assunto trabalhado em cada lista foi escolhido pelos alunos da turma da escola, conforme os mesmos julgavam ser necessário para complementar e reforçar a preparação para o vestibular.

Tendo em vista a finalidade das aulas de preparação ao vestibular, os problemas propostos eram em maioria questões do concurso vestibular da UFRGS, PUC e ENEM de anos anteriores.

Paralelamente às listas, entregamos, em cada aula, um problema de vestibular para que os estudantes resolvessem, não sendo apresentadas as alternativas de múltipla escolha presentes nas provas originais. Antes de entregá-los, foi apresentada em uma tira de papel e explicada aos estudantes a proposta de resolução de problemas de Polya, com os quatro passos presentes na heurística. Foi destacado, em cada um dos enunciados destes problemas, que apresentassem o desenvolvimento da resolução.

Cada um dos problemas que foram entregues aos estudantes, em paralelo às listas de questões, foi recolhido e utilizado como material de apoio para auxiliar na análise dos dados.

De acordo com a metodologia criada para esse estudo, os alunos foram orientados a resolver os problemas no início das aulas e individualmente, registrando as suas resoluções e respostas na mesma folha em que constava o problema.

Desta maneira, para obter as informações desejadas enquanto os alunos procediam a resolução dos problemas em sala de aula, utilizei o método de fazer perguntas e levantar questionamentos aos mesmos. Tal procedimento foi utilizado para que fosse possível obter as respostas necessárias ao estudo de caso proposto, observando a maneira com que os alunos estavam pensando e desenvolvendo o raciocínio naquele momento. Assim, anotei e registrei os comentários e situações que julguei importantes e necessários para uma melhor análise dos dados deste trabalho em um diário de campo.

4.1 Estudo de Caso

Um estudo de caso (PONTE, 1994) visa entender uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo ou qualquer outra unidade social. Ele objetiva compreender em profundidade essa entidade, evidenciando a sua identidade e característica próprias, no que diz respeito aos aspectos que interessam o pesquisador. Para o autor, é uma investigação que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, ao menos em determinados aspectos, buscando descobrir o que há de mais importante e característico. Desse modo, contribui para a compreensão global de um fenômeno de interesse.

Segundo Ponte, um estudo de caso pode ter propósitos variados e pode utilizar uma grande variedade de instrumentos e estratégias, assumindo formatos específicos e envolvendo diversas técnicas de recolhimento e análise de dados. O autor cita algumas características deste tipo de investigação, evidenciando-a como de natureza empírica, não experimental e de diversos modos de apresentação.

No artigo em questão, estas características são apresentadas e explicadas. Em primeiro lugar, caracteriza-se um estudo de caso como uma investigação de natureza empírica, baseada fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando ao máximo de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações e documentos. Em segundo lugar, este tipo de investigação não é experimental, utilizada quando o investigador não pretende modificar a situação e, sim, compreendê-la da maneira com ela é. Por último, o autor destaca que os resultados de um estudo de caso podem ser conhecidos de diversas maneiras, como textos escritos, comunicações orais ou registro em vídeo. No entanto, o seu relato assume com freqüência a forma de uma narrativa cujo objetivo é contar uma história que acrescente algo de significativo ao conhecimento existente e seja interessante e esclarecedora.

Conforme o autor, na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido utilizados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de docentes, projetos de inovação curricular, entre outros. Desta maneira, ele conclui que os estudos de caso contribuem para um melhor entendimento dos problemas da prática e das instituições educativas, configurando um papel significativo no desenvolvimento do conhecimento em Educação Matemática.

4.2 Sujeitos da Pesquisa

O trabalho teve como sujeitos da pesquisa um grupo de alunos do terceiro ano do ensino médio, do turno da manhã, do Colégio de Aplicação da UFRGS (CAp). Tais estudantes se preparavam para prestar o concurso vestibular e, portanto, ingressar em algum curso de graduação superior.

A média de idade dos estudantes que foram observados e tiveram suas resoluções analisadas era de 17 anos. Tendo em vista que a grupo formado realizou a atividade no turno da tarde, o número de alunos era variável em cada aula, possuindo uma média aproximada de dez alunos.

4.3 Coleta de Dados

A coleta de informações para o trabalho se deu através de observações feitas em sala de aula e registradas na forma de diário de campo e, também, da análise das resoluções de problemas realizadas pelo grupo de alunos.

Foi aplicado, antes de iniciar as observações, um breve questionário com três perguntas para conhecer um pouco do grupo, servindo como uma fonte complementar de informações. As perguntas eram relacionadas diretamente com a Matemática, solicitando a opinião pessoal de cada um com relação à disciplina. Nove alunos responderam o questionário, sendo obtidos os seguintes resultados:

1. Você gosta da disciplina de Matemática?

No seguinte gráfico de setores circulares são apresentadas as quantidades de alunos que responderam à pergunta número 1, na qual é perguntado se o aluno gosta da disciplina de Matemática. Na figura, observa-se que seis alunos responderam que sim, um respondeu que não e dois responderam que depende de algum fator com relação à forma com que a disciplina é ensinada e apresentada a eles.

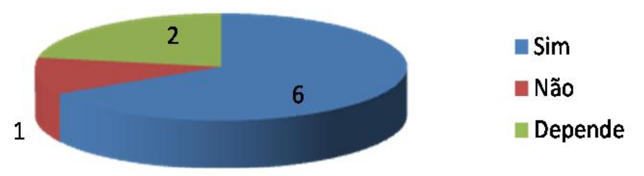


Gráfico 1 – Gráfico de setores circulares referente à pergunta 1 do questionário

2. Você gosta de resolver problemas de matemática?

O gráfico de setores circulares abaixo representa o número de alunos que responderam à pergunta número 2, em que é questionado se o estudante gosta de resolver problemas de matemática. Analisando-o, vemos que três alunos responderam que sim, nenhum respondeu que não e seis responderam que depende de certos aspectos relacionados com o problema em si.

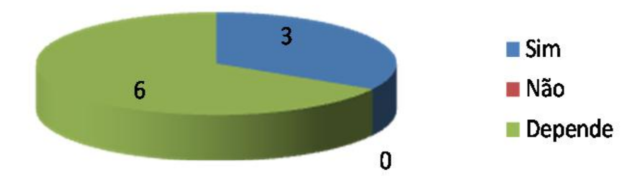


Gráfico 2 – Gráfico de setores circulares referente à pergunta 2 do questionário

3. De maneira geral, quais as dificuldades que você acredita ter ao resolver problemas de matemática?

O gráfico de setores circulares apresentado abaixo corresponde ao número de alunos que responderam à pergunta número 3, na qual foram indagadas as principais dificuldades que o estudante acredita possuir ao resolver problemas de matemática. Ao analisar a figura abaixo, é possível observar que apenas um aluno não sabe, enquanto as outras dificuldades tiveram um número igual de estudantes que declararam possuírem-nas.

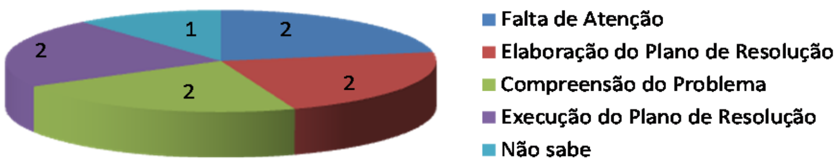


Gráfico 3 – Gráfico de setores circulares referente à pergunta 3 do questionário

4.4 Problemas Propostos

Foram analisados os seguintes problemas que foram propostos aos alunos, durante as aulas, no período de prática na escola.

Problema 1: Se num determinado período o dólar sofre uma alta de 100% em relação ao real, no mesmo período o real, em relação ao dólar, sofrerá uma alta ou uma baixa? De quanto?

Problema 2: Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como representado abaixo:

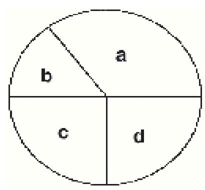


Gráfico 4 – Gráfico de setores circulares referente ao Problema 2

Ao setor A estão associadas 35% das respostas, ao setor b, 270 respostas e, aos setores c e d, um mesmo número de respostas. Qual é esse número?

Problema 3: Se $x = 0{,}949494\ldots$ e $y = 0{,}060606\ldots$, então quanto vale $x + y$?

Problema 4: Se $xy = 2$ e $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 3$, então $(x + y)^2$ é igual a quanto?

Os problemas propostos foram escolhidos com o objetivo de contemplar determinados aspectos que considerei importantes para auxiliar na análise das resoluções dos alunos. São eles:

a. Retomada do conteúdo aprendido em séries anteriores;
b. Possibilidade de identificar estratégias que não utilizem planos de resolução, para verificar se o aluno chegou à solução através de uma ideia intuitiva;
c. Identificação dos dados e de situações do cotidiano em problemas de proporcionalidade, como no Problema 1;
d. Verificar a possibilidade de introdução de elementos auxiliares para tornar possível a sua utilização, como no Problema 1;
e. Interpretação e análise de imagem como elemento auxiliar na elaboração de uma estratégia de resolução, como no Problema 2;
f. Trabalhar conteúdos de álgebra e noções de dízima periódica, para identificar se o aluno relembra o conteúdo, como no Problema 3;
g. Relacionar e relembrar problemas correlatos que auxiliem na elaboração e execução da estratégia de resolução, como no Problema 4.

5 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, apresentaremos a análise dos dados obtidos durante a prática realizada no colégio, relativos às resoluções de problemas dos alunos.

5.1 Análise do Problema 1

Problema 1: Se num determinado período o dólar sofre uma alta de 100% em relação ao real, no mesmo período o real, em relação ao dólar, sofrerá uma alta ou uma baixa? De quanto?

O problema 1 foi resolvido por um total de dez alunos. Verificamos que oito alunos buscaram relacionar o valor atual ou aproximado do dólar com relação ao real como estratégia para tentar resolvê-lo, conforme podemos observar, por exemplo, nas resoluções dos alunos 1 e 2.

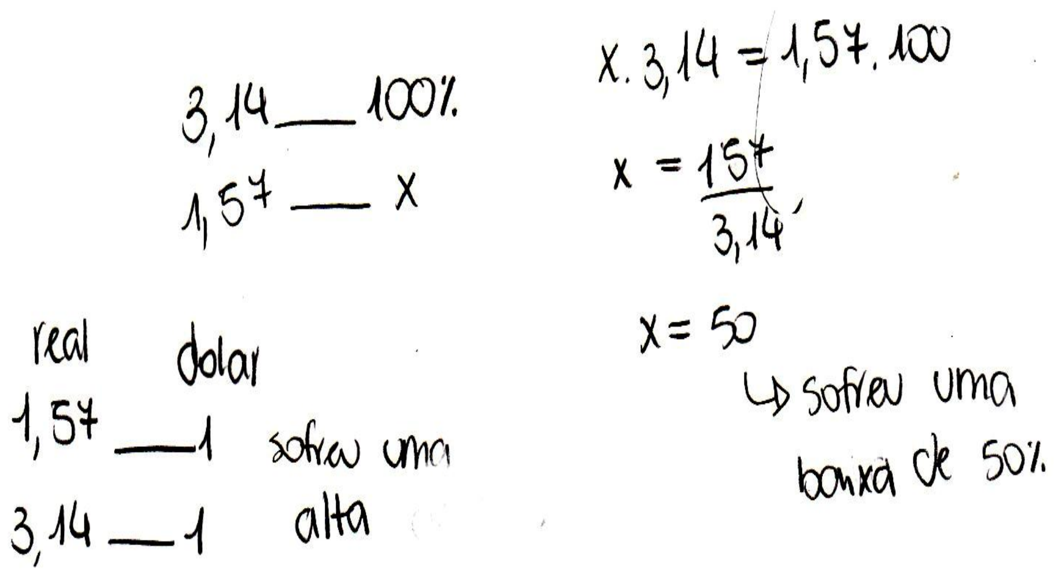


Figura 1 - Solução do Aluno 1 referente ao Problema 1

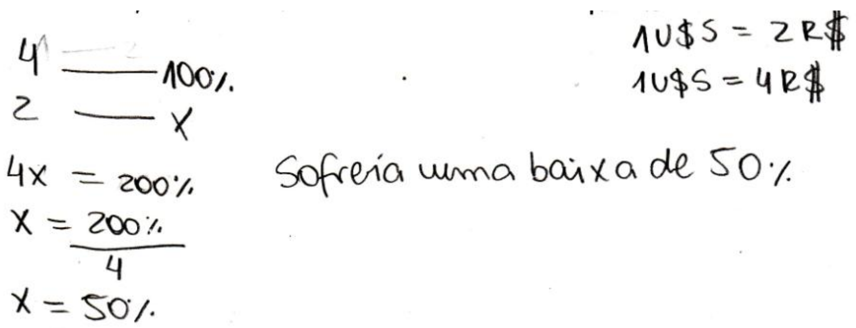


Figura 2 - Solução do Aluno 2 referente ao Problema 1

De maneira geral, os estudantes utilizaram como estratégia de resolução a proporcionalidade (“regra de três”, conforme os dizeres dos estudantes) para chegar à solução. Podemos aqui, identificar que os estudantes introduziram um elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização, no caso, relacionando a cotação aproximada da moeda que, no dia, era de dois dólares para cada real. Tal característica é encontrada no questionamento proposto por Polya e presente na etapa da Compreensão do Problema contida no Quadro 1. Podemos, ainda, verificar que estes alunos compreenderam o problema proposto, interpretando e extraindo os dados dele, estabelecendo estratégias de resolução e executando corretamente o plano estabelecido para chegar à solução.

Dos oito alunos que encontraram a resposta correta, destacamos a resolução de um deles. O aluno 3 chegou à solução do problema sem realizar qualquer cálculo, estruturando uma estratégia sem saber explicar o que havia pensado quando questionei como ele havia resolvido o problema. Essa situação é citada por Polya, em que, na concepção da ideia de uma estratégia de resolução, pode ocorrer ao resolvedor, repentinamente, uma ótima ideia que o permita chegar à solução do problema.

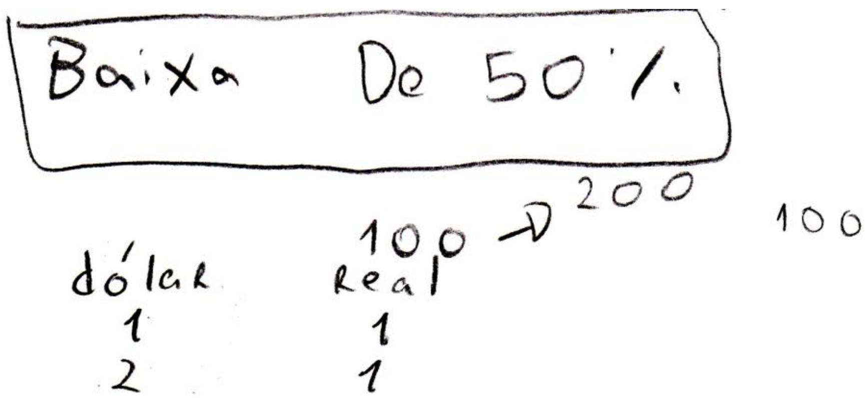


Figura 3 - Solução do Aluno 3 referente ao Problema 1

Ao analisar todas as resoluções deste primeiro problema, foi observado que dois alunos demonstraram não compreender o enunciado, não estabelecendo estratégia alguma de resolução ou apresentando uma resposta direta a partir de suposições acerca do enunciado do problema. Isto se verifica na proposta de Polya, quando o mesmo observa que a compreensão do problema é uma etapa importante e que vai desencadear todas as outras etapas durante a resolução do problema. Como podemos observar abaixo, o aluno 4 obteve a resposta correta não apresentando uma estratégia de resolução para o problema e o aluno 5 apresentou a resposta incorreta sem apresentar uma estratégia de resolução do problema.


Uma baixa de menos de 100%, eu acho que 50%, sei lá.

Figura 4 - Solução do Aluno 4 referente ao Problema 1


o real é desvalorizado 100% em relação ao dólar.

Figura 5 - Solução do Aluno 5 referente ao Problema 1

Neste primeiro problema, observei que nenhum dos dez alunos fez uma análise da solução obtida através da revisão do seu desenvolvimento, a qual é identificada no Quadro 1, na etapa do retrospecto da proposta de Polya.

5.2 Análise do Problema 2

Problema 2: Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como representado abaixo:

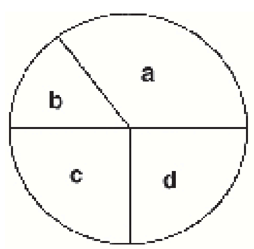


Gráfico 4 – Gráfico de setores circulares referente ao Problema 2

Ao setor A estão associadas 35% das respostas, ao setor b, 270 respostas e, aos setores c e d, um mesmo número de respostas. Qual é esse número?

A análise das resoluções do problema 2 permitiu identificar variadas estratégias de resolução dos alunos. Em cada uma delas encontramos elementos relacionados com as etapas de resolução de problemas proposta por Polya. Dos doze alunos que resolveram o problema, todos chegaram à solução correta. Em sua totalidade, os estudantes demonstraram que compreenderam o problema, utilizando a figura que foi dada como suporte para identificar os dados do enunciado. Esta característica é identificada na proposta de Polya, na qual é explicado que se existir uma figura relacionada ao problema, o discente deverá traçá-la e nela indicar a incógnita e os dados.

Ao analisarmos os planos de resolução, por exemplo, utilizados pelos alunos 1 e 2, observamos que ambos utilizaram a mesma estratégia, aplicando a proporcionalidade para descobrir a quantidade de respostas do setor A. Assim, associaram o total obtido dos setores A e B à metade do círculo e, consequentemente, encontrando o número de respostas correspondentes aos setores C e D, já que cada um destes equivale a um quarto do círculo representado no gráfico de setores do enunciado.

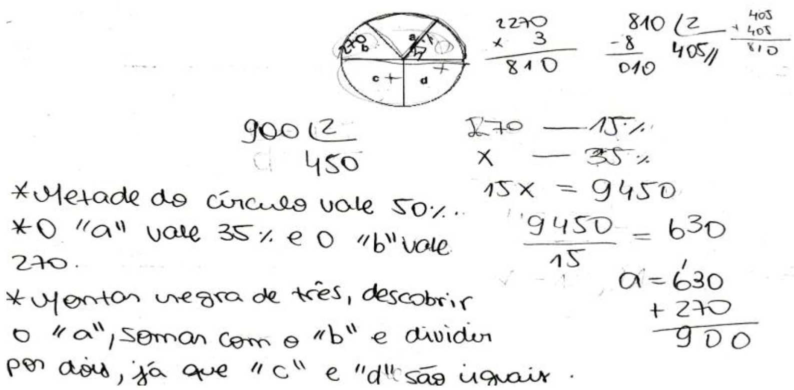


Figura 6 - Solução do Aluno 1 referente ao Problema 2

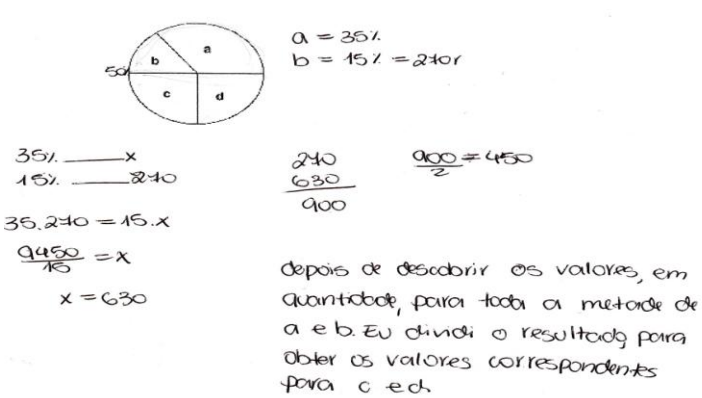


Figura 7 - Solução do Aluno 2 referente ao Problema 2

Ao elaborar a sua estratégia de resolução, o aluno 3 identificou a incógnita do problema e utilizou-a diretamente no cálculo da proporcionalidade, encontrando de imediato a resposta desejada. Conforme questionamento sugerido por Polya e encontrado no Quadro 1, na etapa de Estabelecimento do Plano, o aluno 3 extraiu dos dados alguma coisa de útil, variando a incógnita, ou os dados, ou todos eles, de tal maneira que ficassem mais próximos entre si, conforme podemos verificar abaixo na Figura 8.

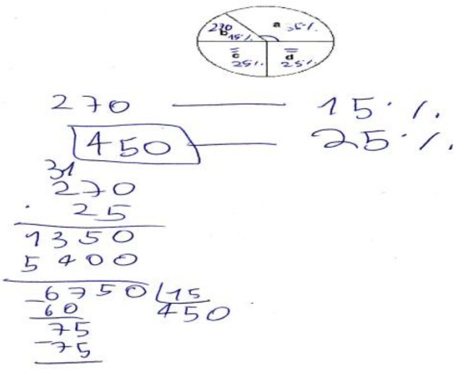


Figura 8 - Solução do Aluno 3 referente ao Problema 2

Os alunos 4 e 5 apresentaram estratégias de resolução semelhantes, variando somente a escolha dos setores utilizados na proporcionalidade, encontrando o total de respostas correspondente à metade do círculo representado no gráfico de setores do enunciado. Durante a aula, foi observado um comentário que o aluno 4 realizou: "*A matemática é legal quando tenho que descobrir como se faz pra resolver um problema, porque daí me lembro das coisas que já tinha estudado nas outras séries*"(sic). Podemos relacionar esta afirmação com o que é encontrado no item 3.1. Resolução de Problemas, no qual é citado que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos se deparam com situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

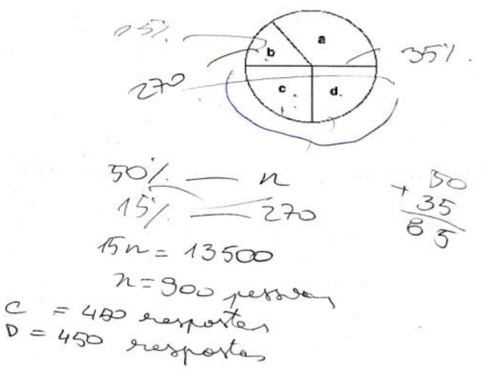


Figura 9 - Solução do Aluno 4 referente ao Problema 2

Ao analisar a explicação apresentada na resolução do aluno 5, observamos que o mesmo, além de compreender o problema, elaborar uma estratégia de resolução e executá-la corretamente, procurou revisar os passos utilizados em sua estratégia. Esta revisão, conforme afirma Polya, pode consolidar os conhecimentos e aperfeiçoar a capacidade de resolver problemas.

270 - 15
x - 35 → 9450 = 15x → x = 630

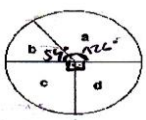
630
+270
900 | 2
450.

Se A possui 35% das respostas, b possuirá 15%, pois ocupa a outra metade do semi círculo superior. Com uma regra de três descobre-se quantas respostas estão na parte de cima (mesmo número que na parte de baixo). A quantidade de respostas na parte de cima pode ser dividida por dois para chegar a quantidade de respostas de c e d, pois ambos ocupam 25% do gráfico.

Figura 10 - Solução do Aluno 5 referente ao Problema 2

Considerei interessante a estratégia de resolução utilizada pelo aluno 6. Ao observar o círculo representado no gráfico de setores do enunciado, o estudante relacionou a quantidade de respostas e as porcentagens apresentadas no enunciado com o ângulo formado entre cada um dos setores do círculo. Conforme podemos observar na Figura 11, o aluno também fez um retrospecto da resolução, examinando os passos da solução obtida.

54° — 270
90° — x
54x = 24300
x = 24300/54   x = 450



25% — 90°
35% — x
25x = 3150
x = 3150/25
x = 126

C E D CORRESPONDIAM À 50% DA PESQUISA, E FAZIAM UM ÂNGULO DE 90° COM O DIÂMETRO, ENTÃO SE 25% CORRESPONDIA A 90°, 35% FAZENDO REGRA DE TRÊS CORRESPONDIA A 126°. 180° - 126° = 54° QUE É O VALOR DO ÂNGULO B. SE B TEM 54° E 270 RESPOSTAS, C E D TEM 90° CADA E X RESPOSTAS FAZENDO REGRA DE TRÊS DESCOBRE-SE QUE C E D VALEM 450 RESPOSTAS, SOMANDO 900 QUE ERA A METADE DA PESQUISA.

Figura 11 - Solução do Aluno 6 referente ao Problema 2

Ao finalizar as atividades referentes ao problema 2, foi observado que apenas cinco alunos examinaram a solução obtida, procurando verificar o resultado. Questionei aos estudantes, após a entrega das questões, se eles procuravam verificar se o caminho da resolução e os passos da mesma estavam corretos e, também, a solução obtida ao fim. Alguns responderam que era muito trabalhoso rever todo o desenvolvimento da resolução e que não tinham paciência para tal, afirmando ser chato. Conforme anotado no Diário de Campo, um dos estudantes afirmou que "*não tem coisa mais difícil que escrever contas, imagina só ler de novo tudo que eu fiz*" (sic).

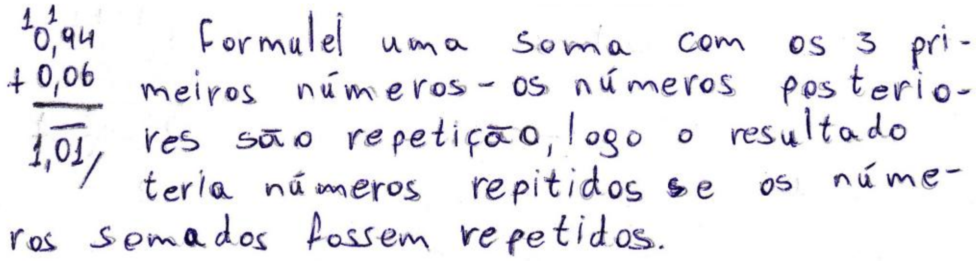
Com relação ao parágrafo anterior, verificamos que Polya chama a atenção ao fato de que, geralmente, os alunos fecham os livros e passam a outro assunto depois de chegarem à solução do problema e, assim, acabam perdendo uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. O autor escreve que, ao fazer um retrospecto da resolução completa, reexaminando os resultado final e o percurso que o levou até ele, os alunos acabam por consolidar os seus conhecimentos e, assim, aperfeiçoar a capacidade de resolver problemas.

5.3 Análise do Problema 3

Problema 3: Se $x = 0{,}949494\ldots$ e $y = 0{,}060606\ldots$, então quanto vale $x + y$?

Este problema procurou trabalhar a noção de dízima periódica dos alunos. A questão original retirada da prova do concurso vestibular, que apresentava nas alternativas de múltipla escolha o resultado da soma na forma de fração geratriz, já condicionava o resolvedor a adotar uma estratégia de resolução que utilizasse os números ou a soma na forma de fração. No entanto, observei que todos os treze alunos que resolveram o problema não utilizaram nas estratégias de resolução a forma fracionária. Acredito que tal fato se deu, talvez, pela simplicidade da pergunta presente no enunciado ou pela falta de condicionantes estabelecidas pelo problema.

As estratégias apresentadas pelos alunos consistiram em somar, simplesmente, os dois números, variando a forma como interpretaram o resultado obtido. Verificamos que a ideia do infinito com relação à representação das casas decimais da dízima periódica foi identificada corretamente em algumas soluções como, por exemplo, do aluno 5.

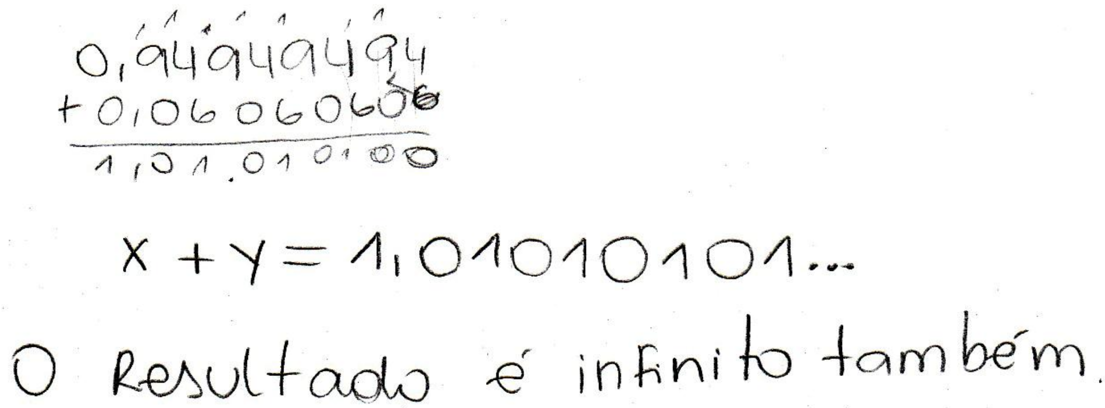


$$\begin{array}{r} 0,94 \\ +\,0,06 \\ \hline 1,01 \end{array}$$

Formulei uma soma com os 3 primeiros números - os números posteriores são repetição, logo o resultado teria números repitidos se os números somados fossem repetidos.

Figura 12 - Solução do Aluno 5 referente ao Problema 3

Interessante observar que o aluno 7, na sua estratégia de resolução, obteve um resultado exato na soma, mas afirmou na solução que o resultado da soma era infinito. Perguntei a ele, durante a aula, como havia chegado à solução, quando o mesmo respondeu que se lembrava de uns problemas que já havia estudado em outras séries. Tal fato é evidenciado por Polya, ao explicar que os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas e teoremas anteriormente resolvidos e demonstrados. Assim, é interessante que se conheça um problema correlato.



$$\begin{array}{r} 0,94949494 \\ +\,0,06060606 \\ \hline 1,01010100 \end{array}$$

$x + y = 1,01010101...$

O Resultado é infinito também.

Figura 13 - Solução do Aluno 7 referente ao Problema 3

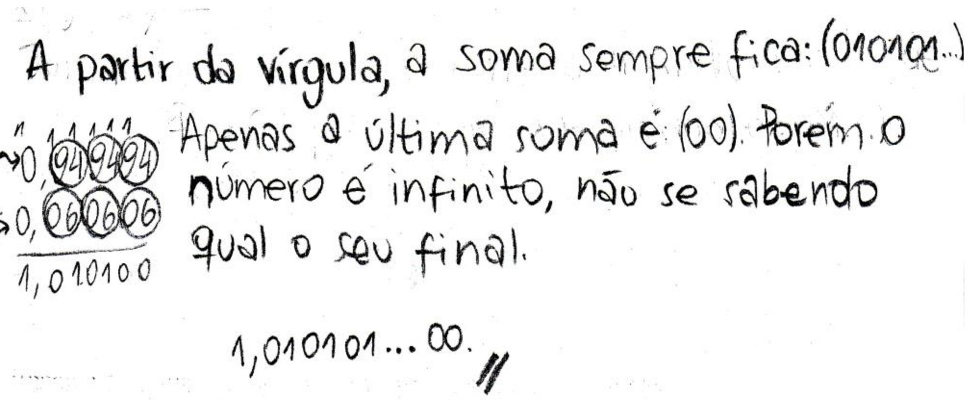
O aluno 8 resolveu o problema sem apresentar uma estratégia definida, justificando, por escrito, que a solução encontrada era uma dízima periódica e, assim, nunca encontraria um resultado exato. Durante a aula, o aluno perguntou-me se ele tinha que incluir as palavras "dízima periódica" na justificativa para estar certa a resposta. Tal questionamento do aluno demonstrou que ele não estava preocupado em entender o porquê da presença daquelas palavras, mas sim em apresentar uma resposta correta. Sugeri ao aluno, então, que pensasse um pouco mais no conceito de dízima periódica, pois considerei que não adiantaria responder a ele sim ou não. Conforme encontramos no item 3.4. Construção de Estratégias sob uma Visão Cognitiva, o ensino não é a introdução de informação, mas uma preparação para que os alunos construam o próprio conhecimento.

1,010101...

O resultado é uma dizima periódica, logo nunca teremos um resultado exato

Figura 14 - Solução do Aluno 8 referente ao Problema 3

Dentre os treze estudantes que resolveram o problema 3, os alunos 9 e 10 não encontraram a solução correta. Foi observado que ambos não compreenderam o problema, pois extraíram os dados incorretos do enunciado, considerando que os números envolvidos na soma eram finitos. Podemos identificar tal situação na proposta de resolução de Polya, onde é observado que é preciso compreender o problema e extrair dele os dados para obter êxito na resolução. Apresentamos abaixo, as soluções dos alunos 9 e 10.



A partir da vírgula, a soma sempre fica: (010101...)

x → 0,949494

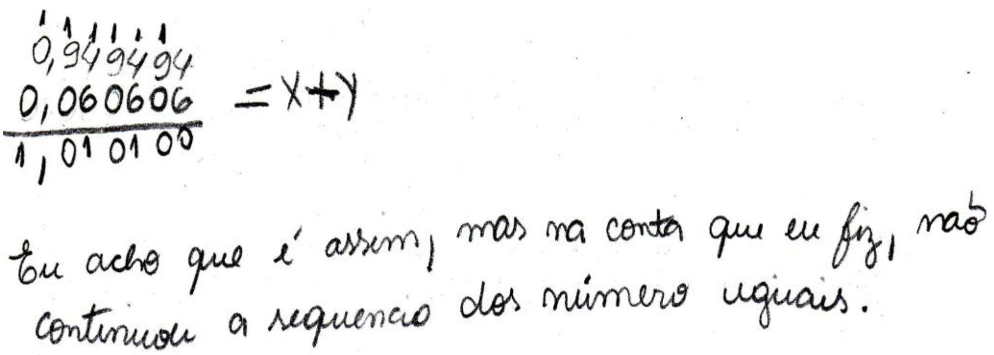
y → 0,060606

1,010100

Apenas a última soma é (00). Porém o número é infinito, não se sabendo qual o seu final.

1,010101...00.

Figura 15 - Solução do Aluno 9 referente ao Problema 3



0,949494

0,060606 = x+y

1,010100

Eu acho que é assim, mas na conta que eu fiz, não continuou a sequencia dos número iguais.

Figura 16 - Solução do Aluno 10 referente ao Problema 3

No término da atividade, verificamos que as estratégias de resolução utilizadas no problema 3, apesar de apresentarem poucas variações quanto ao plano de resolução utilizado, permitiram identificar nelas as etapas de compreensão do problema, elaboração e execução do plano de resolução da proposta de Polya. No entanto, através de perguntas e conversas com os alunos após a entrega da resolução do problema, foi observado que apenas quatro alunos procuraram realizar a revisão dos passos utilizados na resolução do problema 3, permanecendo baixa a ocorrência desta etapa da heurística nos problemas até então analisados.

5.4 Análise do Problema 4

Problema 4: Se $xy = 2$ e $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 3$, então $(x + y)^2$ é igual a quanto?

No problema 4, procurei destacar junto aos alunos, enquanto resolviam o problema, que era interessante que verificassem e separassem os dados do problema, tentando relembrar de alguns problemas parecidos que já haviam trabalhado anteriormente. Dos oito alunos que resolveram o problema, todos chegaram à solução correta, sendo possível destacar algumas características interessantes nas suas estratégias resoluções.

Foi observado que cinco alunos identificaram e separaram os dados do problema, como observado por Polya na etapa da Compreensão do Problema da proposta de resolução. Eles estabeleceram um plano de resolução através do desenvolvimento do produto notável perguntado no problema, sendo interessante o destaque dos próprios estudantes dizendo que já haviam resolvido problemas parecidos. Tal fato nos remete, novamente, às perguntas do Quadro 1, na etapa de Elaboração do Plano, na qual é destacado que pode ser útil considerar um problema correlato, introduzindo algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização. Assim, verificamos que a estratégia utilizada no planejamento da resolução passou por conhecimentos e problemas anteriormente vistos e trabalhados, como podemos verificar abaixo, por exemplo, nas resoluções dos alunos 1 e 7.

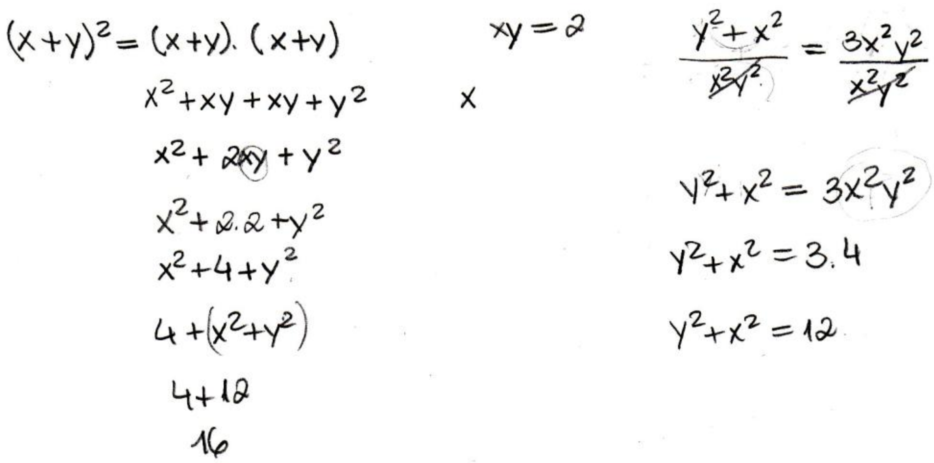


Figura 17 - Solução do Aluno 1 referente ao Problema 4

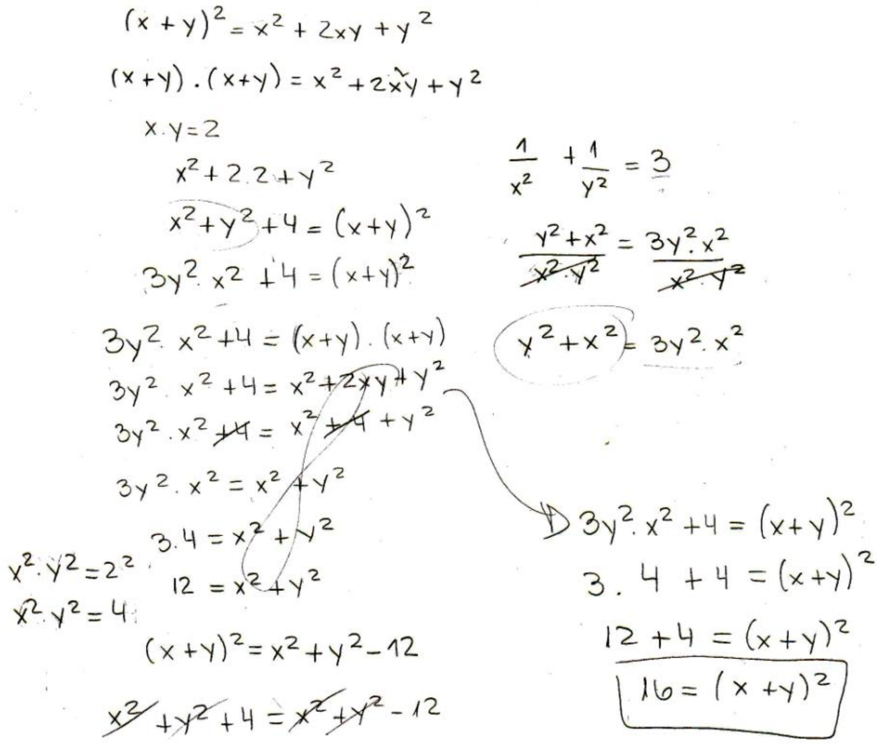


Figura 18 - Solução do Aluno 7 referente ao Problema 4

Todos os alunos executaram o plano corretamente, sem maiores dificuldades, provavelmente devido à simplicidade dos cálculos e operações envolvidos.

Em suas estratégias de resolução, os alunos manipularam os dados extraídos do problema, relacionando-os com o produto notável que foi perguntado no enunciado. Como podemos observar na estratégia de resolução do aluno 11, o mesmo resolveu, primeiramente, a soma do inverso dos quadrados de x e y, percebendo que (x^2+y^2) era igual à $3x^2y^2$. Posteriormente, percebeu que, do outro dado do enunciado, ele tinha que x^2y^2 era igual a quatro. Por último, bastou o desenvolvimento do produto notável para que ele pudesse chegar à solução desejada, utilizando os dados obtidos nos passos anteriores da resolução.

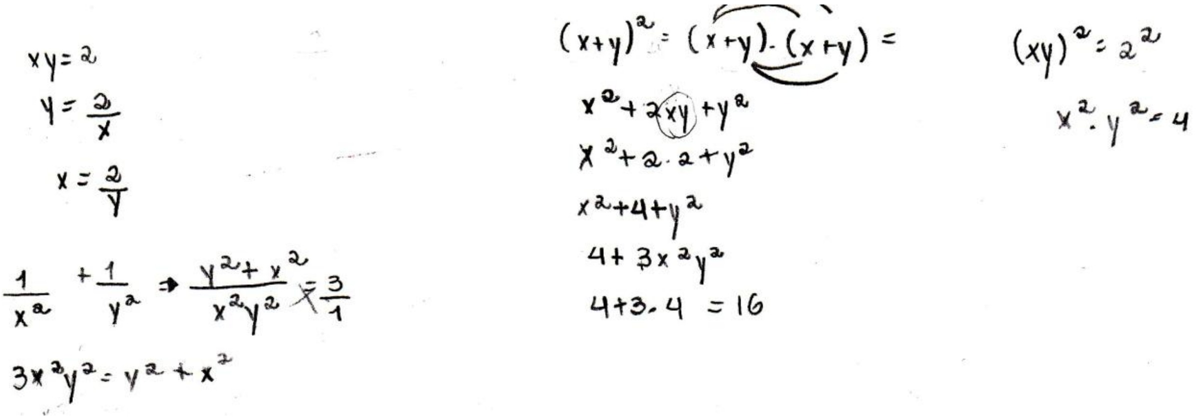


Figura 19 - Solução do Aluno 11 referente ao Problema 4

Ao iniciar a resolução do problema, verificamos que alguns estudantes tentaram isolar umas das incógnitas do problema, a partir do dado $xy = 2$. Como podemos observar na resolução do aluno 13, bem como na resolução anterior do aluno 11, os alunos tentaram isolar uma das incógnitas, mas não conseguiram utilizá-las nas estratégias de resolução estabelecidas, partindo para outra tentativa. Estas características podem ser relacionadas com o que é citado por Rosa & Orey no item 3.3. Sobre o termo Heurística, no qual os autores destacam que a heurística pode ser entendida como um caso especial do método de tentativa e erro, no qual a solução dos problemas é dada pelo meio de tentativas, até que seja encontrada a solução correta.

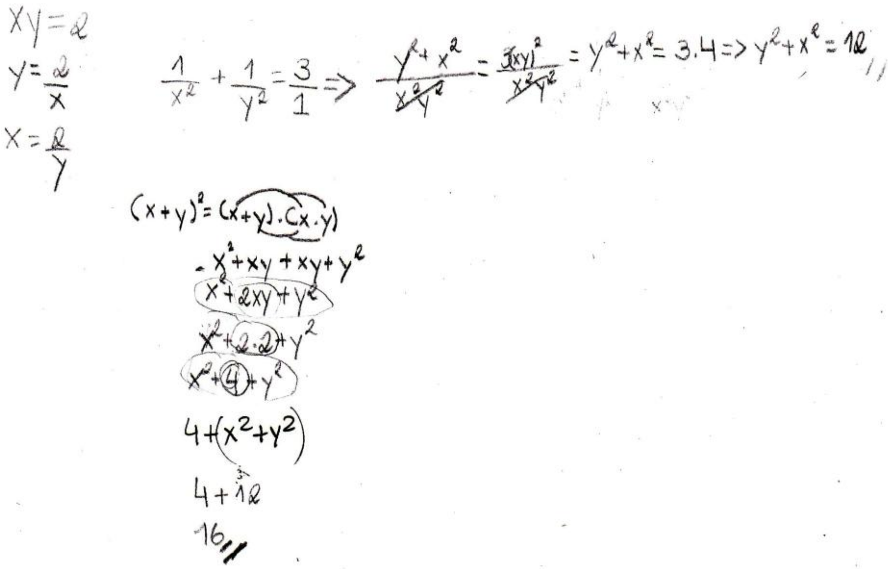


Figura 20 - Solução do Aluno 13 referente ao Problema 4

Assim, verificamos que em todas as estratégias de resolução analisadas do problema foi possível identificar alguma relação com a heurística de resolução em estudo. As etapas da heurística de Polya que correspondem à compreensão do problema, elaboração e execução da estratégia foram observadas em todas as resoluções, enquanto a etapa referente ao retrospecto, na qual o aluno faz a revisão dos passos que foram utilizados na estratégia adotada, não foi identificada em nenhuma delas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades em sala de aula e a análise das resoluções dos problemas de matemática dos alunos de uma turma que se preparava para o concurso vestibular possibilitou-me realizar algumas considerações que julgo importantes.

O acompanhamento e a observação das aulas realizadas durante a parte prática da elaboração deste trabalho nos fez perceber o quão importante são os problemas de matemática para um aluno do ensino médio. O ensino de matemática está intimamente ligado à resolução de problemas e exercícios, nos quais a estratégia utilizada na busca pela solução necessita de subsídios para que se tenha sucesso diante do problema. Desta maneira, pude perceber que os conhecimentos acumulados pelos alunos, ao longo da vida escolar, são um dos principais fatores que influenciam no sucesso da resolução dos problemas, pois os mesmos englobam vários conhecimentos que acabam estimulando o raciocínio e proporcionando uma recapitulação dos mais variados conteúdos.

A análise dos dados permitiu verificar que os alunos que compreenderam os problemas, extraindo deles os dados, identificando quais eram as variáveis e as condicionantes envolvidas, conseguiram elaborar estratégias de resolução que possibilitaram encontrar a solução correta. Ou seja, ao atingir a primeira fase de trabalho, caracterizada por Polya como Compreensão do Problema, os estudantes conseguiram estabelecer e elaborar estratégias que tornassem possíveis a eles chegar à solução do problema.

Assim, uma vez realizada a conexão entre os dados e a variável, em praticamente todas as resoluções analisadas, os alunos conseguiram elaborar uma estratégia de resolução e executá-la corretamente, utilizando para tal os conhecimentos matemáticos adquiridos em etapas anteriores de suas vidas escolares. Dessa maneira, constatamos que nas estratégias de resolução em que foram identificadas as etapas de Compreensão do Problema, Estabelecimento e Execução do Plano de Resolução, encontradas na metodologia de resolução proposta por Polya, a solução correta do problema foi obtida.

Ainda, observamos que poucos estudantes verificaram o resultado encontrado nos problemas, não se preocupando em revisar os passos utilizados nas suas estratégias de resolução. Acredito que a pouca ocorrência desta etapa do Retrospecto, como é chamada na heurística que foi utilizada como metodologia para este trabalho, tenha relação com vários aspectos, podendo destacar a especificidade de estudo da turma, determinada a resolver problemas de vestibular. Conforme observado nas resoluções das listas de exercícios pelos estudantes em sala de aula, a maioria deles estava focada em resolver o máximo de questões no menor tempo possível, o que, de fato, é necessário e importante para um indivíduo que está na iminência de prestar o concurso vestibular. Ainda, percebemos que, através da análise das resoluções, observação em sala e perguntas aos alunos, este pode ser um motivo que tenha influenciado os alunos a não revisarem suas resoluções dos problemas entregues sem as alternativas apresentadas originalmente na prova de vestibular.

Portanto, concluímos que é possível identificar e relacionar os principais aspectos desta heurística com as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os problemas propostos em sala de aula.

As etapas da proposta de Polya, apresentadas nesta produção escrita, são de grande valia para os estudantes. Compreender o problema, estabelecendo uma estratégia de resolução e executando-a e, por fim, fazendo um retrospecto das etapas anteriores, constituem um método eficaz e acessível a qualquer sujeito disposto a estudar e aprender Matemática.

Este trabalho possibilitou verificar que a consciência de todo o processo de resolução por parte do aluno, analisando de forma individual cada problema, identificando os objetivos e as diferentes maneiras de alcançá-los, é de fundamental importância no estudo da resolução de problemas.

A oportunidade da experiência docente e o contato com a comunidade escolar, por meio da elaboração desta produção escrita, proporcionaram importantes momentos de reflexão sobre o papel do professor e o processo de ensino-aprendizagem em matemática. Além da identificação de estratégias que contribuem na resolução de problemas de matemática no ensino médio, pude perceber o quão essencial é entender e estudar essas resoluções e as estratégias utilizadas nelas.

Assim, consideramos satisfatória a experiência e o aprendizado proporcionados durante a elaboração deste trabalho, uma vez que pude observar um grupo de alunos que se preparava para o concurso vestibular através da resolução de problemas de matemática. As dificuldades encontradas podem, num primeiro momento, ter trazido dúvidas e incertezas. No entanto, depois de muitas reflexões, acredito que isto deva ser encarado como um desafio a ser trabalhado em novas oportunidades. Assim, mudar essa situação buscando, primeiramente, motivar e incentivar o aluno para o estudo da matemática é o primeiro dos desafios a enfrentar como educador.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs** (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília, SEMTEC/MEC, 1998. 148p.

CARVALHO, Dione Lucchesi; COELHO, Maria Aparecida Vilela Mendonça Pinto. **Rumo às significações no estudo do discurso sobre resolução de problemas.** FE/UNICAMP, Campinas: [s.n.], 2005.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda**. Miniaurélio**: o dicionário da língua portuguesa. Dicionário eletrônico versão 5.12, 2004.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, [S.l.], ano 19, n 25, p. 105-132, 1994.

RAMOS, Agnelo Pirez. et al. **Problemas matemáticos:** caracterização, importância e estratégias de resolução. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. São Paulo: [s.n.], 2002.

RESNIK, L. & COLLINS, Allan. Cognición y Aprendizaje. **Anuario Psicología**, Barcelona, n 69, p. 189-1997, 1996.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. De Pappus a Polya: da heurística grega à resolução de problemas. **Plures Humanidades**, Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação – Mestrado Centro Universitário Moura Lacerda, Ribeirão Preto, ano 10, n 11, p. 12-27, 2009.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving.** Nova York: Academic Press, 1985.

SILVEIRA, J. F. Porto. **O que é um problema matemático?** 2001. Disponível em: <http:// www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html > Acesso em 9 fev.2011.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica:** a questão da democracia. São Paulo: Papirus, 4ª edição, 2008.

ZUFFI, Edna Maura; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n 11, p. 79-97, 2007.

APÊNDICE A – FREQÛENCIA DOS ALUNOS

Quadro 2 – Frequência dos Alunos

AULAS/DATAS	N.º DE ALUNOS
1ª Aula – 18 de abril de 2011	09
2ª Aula – 25 de abril de 2011	10
3ª Aula – 02 de maio de 2011	12
4ª Aula – 09 de maio de 2011	13
5ª Aula – 16 de maio de 2011	08

APÊNDICE B – DIÁRIO DE CAMPO

18 de abril de 2011 − 1º Aula

Foram observadas as aulas de Laboratório em Ensino de Matemática e do Grupo Pré-Vestibular de Resolução de Problemas. Os alunos responderam ao questionário. Foi trabalhada a primeira lista sobre proporcionalidade envolvendo basicamente questões de vestibular e do ENEM. A estratégia utilizada pela maioria foi a proporcionalidade (regra de três). Observou-se pouca dificuldade na compreensão dos problemas. Os alunos procuraram resolver as questões com a aplicação direta da regra de três, alguns deles sem utilizar todos os dados dos problemas. Uma aluna resolveu uma das questões utilizando lógica, através de uma idéia muito boa que lhe permitiu resolver a questão (ENEM) de forma rápida e direta, pulando as outras etapas. Percebeu-se boa compreensão dos problemas. A maioria dos alunos conseguiu atingir as etapas de elaboração e execução do plano. As dificuldades na etapa de execução do plano se deveram a falta de alguns conhecimentos matemáticos anteriormente trabalhados. Foi observado que nenhum estudante fez o retrospecto da resolução do problema procurando verificar se a solução está correta.

No primeiro encontro procurou-se observar como os alunos resolviam os problemas. Não foi explicado o modelo de Polya nem apresentadas as quatro etapas por ele desenvolvidas para resolução de problemas. Com relação ao questionário 09 alunos o responderam com o seguinte resultado:

Todos são alunos de 3º ano, média de idade de 17 anos:

1. Você gosta da disciplina de Matemática?

   Sim: 6 Depende: 2 Não: 1

2. Você gosta de resolver problemas de matemática?

   Sim: 3 Depende: 6 Não: 0

3. De maneira geral, quais as dificuldades que você acredita ter ao resolver problemas de matemática?
   - Falta de atenção: 2
   - Elaborar o plano: 2
   - Compreensão: 2
   - Execução do plano: 2
   - Não sabe: 1

25 de abril de 2011 – 2ª Aula

Apresentei o modelo de resolução de problemas proposto por Polya em uma pequena tira de papel, na qual constavam as etapas e as perguntas mais diretas com relação a cada uma delas, conforme abaixo.

COMO RESOLVER UM PROBLEMA

Primeiro
COMPREENSÃO DO PROBLEMA
É preciso compreender o problema.

Segundo
ESTABELECIMENTO DE UM PLANO
Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.
É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.
É preciso chegar afinal a um plano para a execução.

Terceiro
EXECUÇÃO DO PLANO
Execute o plano.

Quarto
RETROSPECTO
Examine a solução.

No mesmo momento que foi entregue o modelo impresso na tira de papel, expliquei aos alunos qual era o objetivo do modelo de resolução de problemas e as quatro etapas propostas.

Foi entregue no início da aula um problema do vestibular da UFRGS de 2003 sobre o assunto visto no encontro anterior sobre proporcionalidade. Cabe salientar que não foram apresentadas as alternativas da questão original e foi solicitado que apresentassem o desenvolvimento da resolução do problema. A questão foi a seguinte:
(UFRGS) Se num determinado período o dólar sofre uma alta de 100% em relação ao real, no mesmo período o real, em relação ao dólar, sofrerá uma alta ou uma baixa? De quanto?

Estavam presentes dez alunos. Os alunos tiveram dez minutos para resolver o problema proposto. Foi ressaltado que apresentassem o desenvolvimento da resolução. Havia duas duplas. Observou-se que oito alunos compreenderam o problema, estabelecendo um plano e executando-o corretamente. Dois alunos não compreenderam o enunciado, não estabelecendo plano algum e apresentando uma resposta direta a partir de suposições acerca do enunciado do problema. Um deles obteve a resposta correta não apresentando o desenvolvimento do problema e o outro apresentou a resposta incorreta sem também não apresentar nenhum desenvolvimento da resolução do problema. Nenhum aluno fez uma análise da solução obtida fazendo um retrospecto do seu desenvolvimento.

Após recolher o problema proposto dos alunos, prossegui observando a forma como resolviam os problemas da lista proposta do pré-vestibular do dia.

Foi trabalhada junto à turma de alunos do pré-vestibular uma lista sobre proporcionalidade com questões de vestibular e do ENEM envolvendo análise de gráficos. Foi possível observar dificuldade na compreensão dos enunciados dos problemas, pois os gráficos acabavam por se tornar a prioridade na interpretação do problema, não prestando atenção nos dados nem na incógnita do problema que era procurada. O estabelecimento do plano foi realizado por praticamente todos os alunos sem maiores dificuldades, visto que em praticamente todos os problemas a melhor estratégia era usar a proporcionalidade (regra de três). Consequentemente, a execução do plano se deu de forma tranquila pela maioria dos alunos, pois os cálculos eram simples e de fácil execução. A etapa do retrospecto não foi realizada por nenhum aluno, parecendo que muitos priorizavam a busca pelo resultado final como último passo da resolução do problema, não examinando a forma, os cálculos e nem os possíveis erros da solução obtida.

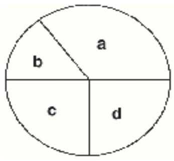
Como já era o final do encontro, pedi aos alunos que relessem as quatro etapas e procurassem aplicá-las durante a resolução dos problemas presentes nas listas do pré-vestibular. Combinei com a turma que levaria para o próximo encontro um problema para que resolvessem, já conhecendo as quatro etapas de resolução de problemas de George Polya.

02 de maio de 2011 – 3ª Aula

Foi entregue aos alunos, conforme combinado na aula anterior, uma questão do vestibular da UFRGS envolvendo proporcionalidade, porcentagem, análise e interpretação de figura. Já havia sido explicado o modelo de resolução de problemas de Polya aos alunos, destacando suas quatro etapas e algumas indagações que o estudante poderia se fazer quando da passagem por cada uma delas. Mesmo assim, novamente apresentei aos alunos a tira de papel da aula anterior relembrando o modelo e pedindo que lessem antes de iniciar a resolução. A questão com o problema apresentado foi a seguinte:

Resolva a questão:

(UFRGS) Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como representado abaixo:



Ao setor A estão associadas 35% das respostas, ao setor b, 270 respostas e, aos setores c e d, um mesmo número de respostas. Qual é esse número?

Associando as resoluções dos alunos com as etapas do modelo de resolução analisado neste trabalhado, relevando-se eventuais e pequenos erros no desenvolvimento da resolução, observamos o seguinte:

1) Compreensão do problema: Doze alunos compreenderam o problema, pois identificaram corretamente a incógnita e souberam relacioná-la com os demais dados apresentados. É relevante considerar que a figura apresentada facilitou a compreensão do problema, visto que pelo enunciado não era possível identificar que os setores c e d representavam metade do círculo.

2) Estabelecimento de um plano: os doze alunos estabeleceram um plano para resolução do problema em questão, pois foi possível observar que conseguiram encontrar a conexão entre os dados e a incógnita, estabelecendo, desta forma, um plano para a execução. Todos eles utilizaram a proporcionalidade (“regra de três”) para elaborar o seu plano. Dos doze, apenas um aluno (Aluno 6) estabeleceu o plano utilizando os ângulos dos setores na proporcionalidade. O restante procurou trabalhar com a porcentagem apresentada no enunciado.

3) Execução do plano: Doze alunos executaram o plano corretamente. Foi possível observar que todos os alunos não apresentaram dificuldades nesta etapa, desenvolvendo os cálculos das proporcionalidades de forma tranquila e sem apresentar dúvidas nem fazer questionamentos a respeito. Cabe salientar que o aluno que apresentou a resposta incorreta executou corretamente o seu plano estabelecido,

alterando a resposta obtida no fim da execução do plano apenas quando quis apresentar em destaque os valores dos setores c e d.

4) Retrospecto: Apenas cinco alunos (Aluno 5, Aluno 14, Aluno 11, Aluno 2, Aluno 1) examinaram a solução obtida, procurando verificar o resultado. Questionei aos estudantes, após a entrega das questões, se eles procuravam verificar se o caminho da resolução e os passos da mesma estavam corretos e, também, a solução obtida ao fim. Alguns responderam que era muito trabalhoso rever todo o desenvolvimento da resolução e que não tinham paciência para tal, afirmando ser chato. Um dos estudantes afirmou que "*não tem coisa mais difícil que escrever contas, imagina só ler de novo tudo que eu fiz*" (sic). É interessante destacar que os estudantes que passaram pela quarta etapa do retrospecto, mesmo que intuitivamente, obtiveram a resposta correta do problema apresentado.

Desta forma, a primeira observação de resolução de problemas de matemática após a apresentação do modelo de Polya apresentou um resultado satisfatório. Foi possível realizar uma associação das etapas do modelo com as respostas apresentadas pelos estudantes no decorrer das resoluções. As explicações de alguns deles, reforçadas pelo pedido de apresentação do desenvolvimento da resolução anteriormente ao enunciado da questão, facilitaram a percepção e análise acerca do entendimento e compreensão dos alunos com relação ao que foi solicitado no problema. Da mesma forma, foi possível perceber e identificar as segunda e terceira etapas, pois a elaboração e execução do plano ficaram claramente destacadas nas resoluções dos estudantes. Já a quarta etapa, do retrospecto, foi observada em menos da metade das resoluções, sejam por meio das explicações ou através do diálogo durante a observação em sala de aula através de perguntas e questionamentos feitos pelos estudantes a mim.

09 de maio de 2011 – 4ª Aula

Nesta aula, entreguei aos alunos uma questão do vestibular da UFRGS envolvendo operações com dízimas periódicas. Os estudantes se manifestaram com relação ao conteúdo da questão, afirmando que já haviam estudado o conteúdo em séries anteriores e que parecia não ser muito complicado resolver tal questão. A questão apresentada foi a seguinte:

Resolva a questão:

(UFRGS) Problema 3: Se $x = 0{,}949494\ldots$ e $y = 0{,}060606\ldots$, então quanto vale $x + y$?

Salientei no enunciado que tentassem explicar a resolução porque considerei que, apresentando as alternativas da questão original de múltipla escolha, haveria a possibilidade de que os estudantes ficassem condicionados a responder de forma única ou não lembrassem a dízima em forma de fração, o que de fato ocorreu. Não ocorreu nenhuma resposta que apresentasse a transformação das dízimas em forma de fração geratriz para posterior soma dos valores. Das treze resoluções apresentadas e analisadas, oito estavam realmente corretas e, em algumas delas, justificadas, sendo que estas oito resoluções foram desenvolvidas praticamente da mesma forma: simplesmente efetuaram a adição dos algarismos presentes depois da vírgula. No entanto, cabe salientar que podemos considerar que ocorreu a compreensão com relação à representação das casas decimais, pois apesar de efetuarem a soma dos seis algarismos após a vírgula e obterem o resultado 1,010100, apresentaram como solução o resultado 1,010101..., o que caracterizou o entendimento de que a representação das casas decimais é infinita. Desta forma, foi possível destacar que os oito estudantes (Aluno 13, Aluno 4, ALUNO 1, Aluno 11, Aluno 5, Aluno 6, Aluno 7, Aluno 8) compreenderam, elaboraram e executaram o plano corretamente e que, além disso, quatro examinaram a solução obtida, através de explicação escrita ou oral em sala (Aluno 5, Aluno 6, Aluno 7, Aluno 8). Dos cinco alunos que não responderam corretamente à questão, dois (Aluno 10 e Aluno 9) elaboraram e executaram o plano da mesma maneira, apresentando como solução o número finito obtido da adição dos seis algarismos após a vírgula, não compreendendo o significado dos três pontos ao final de cada uma das dízimas e, ainda, procuraram examinar a solução obtida. Um deles (Aluno 15) afirmou não se lembrar do que se tratava o assunto da questão. Dos outros dois (Aluno 16 e Aluno 7) que não apresentaram a resolução nem a resposta perguntada, ambos demonstraram, através de explicações por escrito, ter compreendido a questão, mas não conseguiram elaborar e executar um plano de resolução.

A análise dos dados obtidos na quarta aula da prática com a turma do pré-vestibular da escola, relacionadas com as etapas apresentadas por Polya, apresentou os seguintes números:

-Compreensão do problema: 10

-Elaboração do Plano de Execução: 10

-Execução do Plano: 10

-Retrospecto: 4

Desta maneira, percebemos que o número de alunos que passaram pelas etapas da compreensão do problema, elaboração e execução do plano de resolução se manteve relativamente elevado e, também, constante. É possível perceber que estas três etapas também tiveram um número elevado na análise dos dados da aula anterior (3ª aula – 02.05.2011) e também praticamente de iguais valores. Ainda, cabe salientar que a quantidade de alunos que passaram pela etapa correspondente ao Retrospecto se manteve abaixo das outras etapas nesta 4ª aula, como já observado anteriormente na aula passada (3ª).

Acredito que o baixo índice de ocorrência até então apresentado na etapa do Retrospecto tenha relação com vários aspectos, podendo destacar a especificidade de estudo da turma, focada em problemas de vestibular. Conforme observado nas resoluções das listas pelos estudantes em sala de aula, a maioria está focada em resolver o máximo de questões no menor tempo possível, o que, de fato, é necessário e importante para um indivíduo que está na iminência de prestar o concurso vestibular. Desta forma, este pode ser um motivo que influencie os alunos durante a resolução das questões por mim entregues sem as alternativas apresentadas originalmente.

16 de maio de 2011 – 5ª Aula

Nesta aula, foi entregue aos alunos uma questão do vestibular da UFRGS que considerei interessante por envolver operações com produtos notáveis, assunto já trabalhado na oitava série do ensino fundamental, conforme informação da professora coordenadora. A questão foi a seguinte:

Resolva a questão:

(UFRGS) Se $xy = 2$ e $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 3$, então $(x + y)^2$ é igual a quanto?

Procurei destacar junto aos alunos, enquanto resolviam o problema, que era interessante que verificassem e separassem os dados do problema, tentando relembrar de alguns problemas parecidos que já haviam trabalhado anteriormente. Dos oito alunos que resolveram a questão, todos eles chegaram à solução correta, sendo possível destacar algumas características interessantes nas suas resoluções. Cinco deles (Aluno 13, Aluno 7, Aluno 17, Aluno 11, Aluno 1) identificaram os dados do problema e os destacaram, como observado por Polya na etapa da Compreensão do Problema. Todos eles estabeleceram um plano de resolução através do desenvolvimento do produto notável perguntado no problema, sendo interessante o destaque dos próprios estudantes dizendo que já haviam resolvido problemas parecidos, chamando a atenção novamente às perguntas de Polya presentes na etapa de Elaboração do Plano - *Pode ser útil considerar um problema correlato?Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?* – se verificando que a estratégia utilizada no planejamento da resolução passou por conhecimentos e problemas anteriormente vistos e trabalhados. Todos os alunos executaram o plano corretamente, sem maiores dificuldades devido, provavelmente, à simplicidade dos cálculos e operações envolvidos. Cabe destacar que nenhum estudante revisou a resolução para verificar se a resposta encontrada estava correta.

Desta forma, podemos destacar que em todas as estratégias de resolução do problema foi possível identificar uma relação com alguma etapa da heurística de resolução em estudo, ressaltando-se que as etapas Compreensão do Problema, Elaboração e Execução do Plano estavam presentes em todas as resoluções, enquanto a Revisão não foi percebida em nenhuma delas. Assim, notamos que se mantêm a característica da presença elevada das três primeiras etapas da heurística de resolução.

ANEXO A – AUTORIZAÇÃO PARA CITAR O NOME DO COLÉGIO

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Of. nº 104/11-CA

Porto Alegre, 19 de julho de 2011.

Senhor Diretor:

Autorizo o acadêmico FERNANDO BAPTISTA ABBOTT do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul que, sob orientação do Professor Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso, desenvolveu o trabalho de Conclusão de Curso intitulado ESTUDO DE CASO SOBRE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO, com estudantes do Ensino Médio e em parceria com a Professora Simone Dias Cruz, professora dessa Instituição de Ensino, a utilizar o nome do Colégio de Aplicação da UFRGS em seu trabalho.

Atenciosamente,

Professor Edson Luiz Lindner
Diretor do Colégio de Aplicação
Edson Luiz Lindner
Diretor do Colégio de Aplicação da UFRGS

Sr.
Rudnei Dias da Cunha
Diretor do Instituto de Matemática
A/C Prof. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
N/U