



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA



Estimação em Processos ARMA com Adição de Termos de Perturbação

Autor: Patricia Vieira de Llano

Orientador: Prof. Dr. Cleber Bisognin

Porto Alegre, 22 de Junho de 2011.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Departamento de Estatística

Estimação em Processo ARMA com Adição de Termos de Perturbação

Autor: Patricia Vieira de Llano

Monografia apresentada para obtenção
do grau de Bacharel em Estatística

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cleber Bisognin

Prof^a. Dr^a. Liane Werner

Porto Alegre, 22 de Junho de 2011.

Dedico este trabalho ao meu amor, Gustavo Correa Leite, pois sem sua presença, apoio, dedicação e carinho nada disso teria se tornado realidade.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço aos meus pais, que são à base de tudo que me tornei. Agradeço pelo incentivo, pelo carinho e pela compreensão dada pelos momentos que precisei me ausentar para me dedicar ao meu estudo acadêmico.

Ao meu marido, amigo e parceiro de vida Gustavo, que fez com que tudo isso se tornasse realidade. Agradeço pelas palavras de apoio nos momentos difíceis, pela motivação nos momentos de angústia e por estar sempre ao meu lado.

Agradeço aos professores do departamento de Estatística em especial ao professor Cleber por aceitar me orientar neste trabalho final de curso e a professora Liane, pelo companheirismo e amizade repassados além da vida acadêmica.

Agradeço a todos os amigos e familiares que estiveram comigo de um jeito ou de outro ao longo desta jornada. Agradeço aos colegas de serviço que muitas vezes foram muito mais do que colegas, foram grande amigos, de quem recebi muito apoio e uma torcida incrível.

Agradeço aqueles que fizeram parte de minha vida e que não mais estão aqui hoje, mas cujas memórias permanecem vivas em minhas lembranças e no meu coração.

E também agradeço a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para que eu vencesse mais esta etapa de minha vida.

Resumo

Neste estudo proposto foram analisados modelos de volatilidade estocástica segundo processos Autorregressivos Médias Móveis (ARMA), denotados VE-ARMA(p,q), e com modelos ARMA(p,q) adicionado por perturbações. Modelos do tipo ARMA(p,q) são processos formados pelo conjunto dos modelos Autorregressivos (AR(p)) e Médias Móveis (MA(q)) os quais são estacionários com a característica de memória curta ou curta dependência. Na forma mais geral teremos p parâmetros autorregressivos e q parâmetros de médias móveis. Para este estudo trabalharemos com $p=l=q$. Nosso estudo teve por objetivo, então, verificar o comportamento de modelos de volatilidade estocástica quando seguem um modelo ARMA(p,q) e modelos ARMA(p,q) adicionados com perturbações geradas através da distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Para analisar os resultados foram feitas simulações de Monte Carlo para gerar processos de acordo com as especificações descritas neste estudo. Utilizamos os estimadores paramétricos de Máxima Verossimilhança, Beran (1994) e Fox e Taquq (1983) para estimar os parâmetros ϕ 's e θ 's do modelo e verificar qual deles se aproxima mais do verdadeiro parâmetro inicial proposto. Para analisar o comportamento dos estimadores comparamos o seu vício, erro quadrático médio e variância. Após todas as etapas descritas, verificou-se que o estimador que apresentou os melhores resultados, de maneira geral, foi o estimador FT, que se destacou entre os demais estimadores na análise dos processos VE-ARMA(p,q) e que também apresentou bons resultados na maior parte das simulações dos processos com perturbação cujos erros foram gerados através da distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Conteúdo

1. Introdução	1
2. Análise de Séries Temporais	4
2.1. Processos Estocásticos no Domínio do Tempo	4
2.2. Processos Estocásticos no Domínio da Frequência	8
3. Processos ARMA(p, q)	11
3.1 Definição e Propriedades	12
4. Volatilidade Estocástica e Termos de Perturbação	15
4.1. Modelo de Volatilidade Estocástica	15
4.2. Modelo VE-ARMA(p, q)	17
4.3. Processos ARMA(p, q) com Adição de Perturbações	19
5. Estimação dos Parâmetros	21
5.1. Estimador FT	21
5.2. Estimador Beran	22
5.3. Estimador de Máxima Verossimilhança Condicional	23
6. Simulação de Monte Carlo	26
6.2 Resultados	28
7. Análise dos Resultados	45
7.1 Análise dos Resultados com Contaminações $\log\chi_1^2$ para Modelos Puros	45
7.2 Análise dos Resultados com Contaminações $\log\chi_1^2$ para Modelos Mistos	50
7.3 Análise dos Resultados com Contaminações $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ para Modelos Puros	54
7.4 Análise dos Resultados com Contaminações $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ para Modelos Mistos	57
8. Conclusões Finais	67
9. Referências	69

1. Introdução

Uma série temporal pode ser definida como um conjunto de observações ordenadas no tempo que apresentam dependência entre instantes de tempo. Modelos de séries temporais são usados em diversas áreas como economia, meteorologia, medicina, entre outros. O interesse no estudo de séries temporais está ligado a dois fatores: modelar a série temporal e fazer previsões de valores futuros.

Há, basicamente, dois enfoques usados na análise de séries temporais. Em ambos o objetivo é construir modelos para as séries. No primeiro enfoque a análise é feita no domínio do tempo e no segundo a análise é conduzida no domínio da frequência. O estudo no domínio da frequência enfoca conceitos de periodograma e de densidade espectral, já o estudo no domínio no tempo engloba o estudo das funções autocovariância e autocorrelação.

Neste Trabalho estudaremos os modelos de volatilidade estocástica segundo um processo $ARMA(p,q)$, denotados $VE-ARMA(p,q)$, e os processos $ARMA(p,q)$ adicionados de perturbações cujos erros seguem a distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Os modelos $ARMA(p,q)$ - Autorregressivos Médias Móveis - possuem a característica de memória curta, ou seja, a correlação entre dados próximos é maior do que a correlação entre dados distantes no tempo. Essa peculiaridade do modelo é facilmente identificada através do gráfico de autocorrelação, o qual decai de forma exponencial para zero, como poderá ser visto no capítulo 3 deste estudo.

Podemos verificar que os modelos de volatilidade estocástica tendo como processo principal o processo $ARMA(p,q)$ podem ser analisados como um processo $ARMA(p,q)$ adicionado por uma perturbação (ver Capítulo 3). Como este estudo tem por objetivo verificar o comportamento de modelos de volatilidade estocástica quando seguem um modelo $ARMA(p,q)$ e modelos $ARMA(p,q)$ adicionados com perturbações geradas através da distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, faremos uma contaminação no modelo proposto a fim de aumentar a variabilidade dos dados e verificar se as estimativas para os parâmetros destes modelos contaminados se aproximam do parâmetro ou parâmetros iniciais propostos.

A volatilidade estocástica é modelada como um componente não observável da série temporal. Nos modelos de volatilidade estocástica, esta é especificada como um processo estocástico linear, na forma de um processo autorregressivo de média móvel, que se altera ao longo do tempo (MORETTIN, 2006). Esse tipo de processo é um caso particular dos processos com adição de perturbação. Portanto, além de analisar os modelos com volatilidade estocástica, analisaremos também processos com a adição de termos de perturbação seguindo a distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Após essas inovações estudaremos alguns estimadores paramétricos a fim de fazer comparações para verificar o comportamento dos estimadores para o modelo gerado.

Para este estudo, então, seguiremos as seguintes etapas descritas abaixo, as quais estruturam a forma com que as definições, simulações e análises serão apresentadas.

No Capítulo 2 serão apresentadas algumas definições e propriedades de modelos de séries temporais que são pertinentes ao nosso estudo. Apresentaremos as definições sob dois enfoques: no domínio do tempo e no domínio da frequência.

No Capítulo 3 apresentaremos as definições e propriedades do modelo Autorregressivo Médias Móveis – $ARMA(p, q)$. Introduziremos também o conceito de ruído branco, o qual é importante para compreensão dos processos estudados.

Já no Capítulo 4 será apresentado o Modelo de Volatilidade Estocástica e as perturbações que serão adicionadas ao processo $ARMA(p, q)$. Neste capítulo apresentaremos também a forma de um dos modelo que será objeto de estimação no nosso estudo, o processo $VE-ARMA(p, q)$ e como serão gerados os termos de perturbações ou inovações que serão adicionados ao processo $ARMA(p, q)$.

No Capítulo 5 serão apresentados os estimadores paramétricos que serão utilizados no nosso estudo: Fox e Taquq (1983), Beran (1994) e Estimador de Máxima Verossimilhança.

No Capítulo 6 mostraremos a metodologia utilizada para estimar os parâmetros e os resultados tabelados das simulações de Monte Carlo para o nosso modelo .

Já no Capítulo 7 serão apresentadas as análises dos resultados obtidos no capítulo 6, na qual faremos a apresentação dos resultados para os modelos com volatilidade estocástica e dos modelos com contaminação geradas através da distribuição $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$.

Finalmente no capítulo 8 serão apresentadas as conclusões deste estudo.

2. Análise de Séries Temporais

Uma série temporal é um conjunto de observações ordenadas no tempo de qualquer fenômeno aleatório. Encontramos exemplos de séries temporais nas mais diversas áreas de aplicação como, por exemplo, registros de temperatura de uma cidade, medidas dos níveis de água em um rio, o PIB trimestral, a taxa de desemprego mensal, as vendas semanais de um certo tipo de produto, entre outros.

O objetivo do estudo de séries temporais é construir modelos para as séries, onde se busca alcançar os seguintes objetivos, conforme Morettin e Tolo (2004):

- Investigar o mecanismo gerador da série temporal;
- Fazer previsões de valores futuros da série;
- Descrever o comportamento da série, a partir da construção de gráfico, verificação da existência de tendências, ciclos, variações sazonais;
- Procurar periodicidades relevantes nos dados.

Neste capítulo, então, abordaremos alguns dos conceitos de séries temporais que serão utilizados ao longo deste estudo, primeiramente sob o enfoque no domínio do tempo e após sob o enfoque no domínio da frequência.

2.1. Processos Estocásticos no Domínio do Tempo

Nesta seção abordaremos os modelos de séries temporais no domínio do tempo. Os modelos utilizados para descrever séries temporais são processos estocásticos, isto é, processos controlados por leis probabilísticas.

A seguir definiremos o processo estocástico e a função de distribuição conjunta para um vetor aleatório $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ bem como suas funções de autocovariância e autocorrelação, funções estas que definem o grau de interdependência entre as variáveis.

Definição 2.1.1: Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$, onde todas as variáveis estão definidas em um mesmo espaço de probabilidade (Ω, A, P) , no qual temos que $T \neq \emptyset$ é um conjunto de índices, Ω é o espaço amostral, A é a classe de eventos aleatórios e $P: A \rightarrow [0,1]$ é a função que associa a probabilidade de um evento qualquer. O conjunto de índices T pode ser \mathbb{N} , $\mathbb{Z}[0, \infty)$ ou \mathbb{R} . Neste trabalho será considerado o processo onde $T = \mathbb{Z}$.

Definição 2.1.2: A função de distribuição conjunta de um número finito de variáveis aleatórias $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$, cujas componentes são definidas no mesmo espaço de probabilidade (Ω, A, P) é dada por

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n),$$

quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $t_i \in T$, $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i=1,2,\dots,n$.

Definição 2.1.3: Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico tal que $\text{Var}(X_t) < \infty$ para todo $t \in T$.

A função de autocovariância do processo, denotada por $\gamma_x(\cdot, \cdot)$ é dada por

$$\gamma_x(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))], r, s \in T,$$

onde $E(X_t) \equiv \mu_t$ é a esperança de X_t

Definição 2.1.4: Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico tal que $\text{Var}(X_t) < \infty$ para todo $t \in T$.

A função de autocorrelação do processo, denotada por $\rho_x(\cdot, \cdot)$ é dada por

$$\rho_x(r, s) = \frac{\gamma_x(r, s)}{\sqrt{\text{Var}(X_r)}\sqrt{\text{Var}(X_s)}}, r, s \in T,$$

onde $\text{Var}(X_t) \equiv \gamma_x(t, t)$, para todo $t \in T$.

A seguir definiremos a função de autocorrelação parcial, que fornece informações sobre a estrutura de dependência de um processo. Esta função depende somente de propriedade de segunda ordem do processo $\{X_t\}_{t \in T}$. Deseja-se investigar a correlação entre X_t e X_{t+k} após a remoção das tendências lineares das variáveis intermediárias $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}$.

Definição 2.1.5: Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico. A função de autocorrelação parcial de ordem k , a qual denotaremos por $\phi_X(k, k)$, é determinada pelo quociente entre o determinante de duas matrizes de ordem $k \times k$ dada por

$$\phi_X(k, k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \dots & \rho_X(k-2) & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 & \dots & \rho_X(k-3) & \rho_X(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \dots & \rho_X(1) & \rho_X(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \dots & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \dots & \rho_X(k-3) & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \dots & \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}}.$$

Para um estudo mais completo, ver Brockwell e Davis (1991).

Para obtermos propriedades probabilísticas e estatísticas desejáveis na utilização de modelos para descrever processos físicos são necessárias algumas suposições. Os conceitos a seguir referem-se a estacionariedade de processos estocásticos.

Definição 2.1.6: Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ diz-se fortemente estacionário se as funções de distribuição conjunta dos vetores $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ e $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ são as mesmas para todo $n \in T$ e para todo $h, t_i, t_{i+h} \in T$ com $i=1, 2, \dots, n$.

Entretanto, essa é uma definição extremamente exigente e que pouco ocorre na prática. Então, faz-se necessário uma definição mais razoável, a qual é definida a seguir.

Definição 2.1.7: Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ diz-se fracamente estacionário ou simplesmente estacionário (como serão chamados daqui por diante) se

- (i) $E|X_t|^2 < \infty$ para todo $t \in T$;
- (ii) $E(X_t) = \mu$, uma constante independente de t ;
- (iii) $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t)$ para quaisquer $r, s, t \in T$.

Observamos que, conforme o item (iii) da Definição 2.1.7, a função de autocovariância de um processo estocástico estacionário satisfaz $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r - s, 0)$, para quaisquer $r, s \in T$. Por esta razão, é conveniente redefinirmos a função de autocovariância de ordem k de um processo estacionário como

$$\gamma_X(k) = \gamma_X(k, 0) = \text{Cov}(X_{t+k}, X_t), \text{ para quaisquer } k, t \in T.$$

Observação 2.1.1: As funções de autocovariância e autocorrelação de um processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in T}$ possuem as seguintes propriedades

- $\gamma_X(k) = \text{Cov}(X_{t+k}, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_{t-k})$, para todo $t, k \in \mathbb{Z}$;
- $\gamma_X(0) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \text{Var}(X_t)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$;
- $\gamma_X(k) = \gamma_X(-k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
- $|\gamma_X(k)| \leq \gamma_X(0)$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
- $\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)}$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
- $\rho_X(k) = \rho_X(-k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
- $|\rho_X(k)| \leq \rho_X(0) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

2.2. Processos Estocásticos no Domínio da Frequência

A análise espectral é fundamental em áreas onde o interesse básico é a procura de periodicidade nos dados. De forma geral, a análise espectral de séries temporais estacionárias $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ decompõe a série em componentes senoidais com coeficientes aleatórios não correlacionados. Junto com essa decomposição, existe a correspondente decomposição, em senóides, da função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$. Assim, a decomposição espectral de um processo estacionário é análogo à representação de Fourier de funções determinísticas.

A seguir definiremos a função de densidade espectral de um processo estocástico estacionário que nada mais é do que a transformada de Fourier da função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$, quando esta for absolutamente convergente. Serão definidos também os estimadores da função de densidades espectral, o periodograma e o periodograma suavizado.

Definição 2.2.1: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário com função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ absolutamente convergente, isto é, $\sum |\gamma_X(k)| < \infty$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. A função de densidade espectral de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, denotada por $f_X(\cdot)$, é dada por

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k) e^{-i\omega k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k) \cos(\omega k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \gamma_X(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_X(k) \cos(\omega k), \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

O Teorema 2.2.1, a seguir, apresenta algumas propriedades da função densidade espectral de um processo estocástico estacionário.

Teorema 2.2.1: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário com função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ absolutamente convergente. A função de densidade espectral dada pela definição 2.2.1 tem as seguintes propriedades

$f_X(\omega)$ é uma função real contínua, a menos de um conjunto de medida nula;

$$f_X(\omega) = f_X(-\omega) \text{ para todo } \omega \in [-\pi, \pi];$$

$$f_X(\omega) \geq 0 \text{ para todo } \omega \in [-\pi, \pi].$$

Definição 2.2.2: Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal obtida de um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A função periodograma $I(\cdot)$, da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ é definida por

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{k=1}^n X_k e^{-i\omega k} \right|^2, \text{ para todo } \omega \in (0, \pi],$$

ou ainda

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_X(k) \cos(\omega k) \right], \text{ para todo } \omega \in [-\pi, \pi],$$

onde $\hat{\gamma}_X(\cdot)$ é a função de autocovariância amostral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Apesar da função periodograma ser um estimador assintoticamente não-viciado, ela é não consistente para a função densidade espectral $f_X(\cdot)$. Definimos então, a seguir, um estimador consistente para $f_X(\cdot)$.

Definição 2.2.3: A função periodograma suavizado, denotada por $f_s(\cdot)$, é um estimador consistente da função de densidade espectral $f_X(\cdot)$ e é dada por

$$f_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda(k) \hat{\gamma}_X(k) \cos(\omega k), \omega \in [-\pi, \pi],$$

onde $\lambda(\cdot)$ é uma função de ponderação conhecida como janela espectral.

Na literatura encontramos diferentes tipos de janela espectral e aqui destacamos a Janela de Bartlett, cujo núcleo é definido por

$$\omega_m(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{m}, & |k| \leq m \\ 0, & |k| > m \end{cases} .$$

onde m é definido como ponto de truncamento da janela e depende do número n de observações da série temporal através de $m = n^\beta$, para $\beta \in (0,1)$.

3. Processos ARMA(p,q)

Neste capítulo iremos apresentar o modelo autorregressivo média móvel, denotados por ARMA(p,q). Os modelos do tipo ARMA(p,q) são processos lineares estacionários com a característica de curta dependência, ou seja, sua autocorrelação decai rapidamente para zero, como podemos visualizar na figura abaixo, a qual representa a Função de autocorrelação amostral de um processo ARMA(1,1), onde $\phi_1=0,9$ e $\theta_1=0,5$.

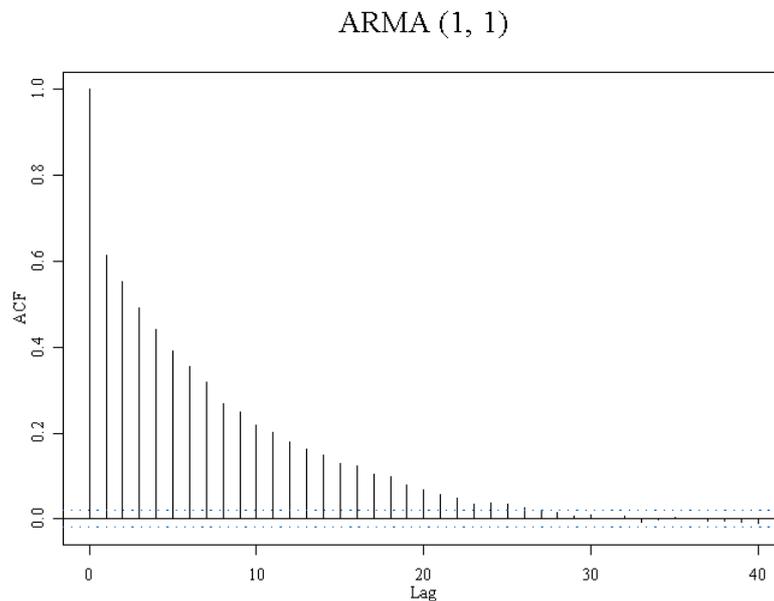


Figura 1: Função de autocorrelação amostral de um processo ARMA(1,1), onde $\phi_1=0,9$ e $\theta_1=0,5$.

Antes de definirmos o processo ARMA(p,q), primeiramente apresentaremos o processo conhecido como Ruído Branco e sua função densidade espectral.

Definição 3.1: Um processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um ruído branco com média 0 e variância σ_ε^2 quando escrito na seguinte forma $\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, se e somente se $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem média zero e covariância dada por

$$\gamma_\varepsilon(k) = \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}$$

ou seja, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são não-correlacionados.

A função densidade espectral do processo ruído branco $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por:

$$f_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i\omega k} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi.$$

3.1 Definição e Propriedades

Os modelos autorregressivos são bastante populares em algumas áreas, como em Economia, onde é natural pensar o valor de alguma variável no instante t como funções de valores defasados da mesma variável. Em outras áreas, como em ciências físicas e geofísicas, o interesse em modelos autorregressivos reside em outro aspecto que não o da previsão: deseja-se estimar o espectro do processo e os estimadores autorregressivos são utilizados para tal fim. Por outro lado, representar um processo por um modelo de médias móveis puro não parece tão natural ou intuitivo.

Para muitas séries encontradas na prática, se quisermos um modelo com um número não muito grande de parâmetros, a inclusão de termos autorregressivos e de médias móveis é a solução adequada. Surgem então, os modelos autorregressivos de médias móveis – ARMA(p, q) – cuja definição é dada a seguir.

Definição 3.1.1: O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo autorregressivo e de médias móveis de ordens p e q , denotado ARMA(p, q), se o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ for estacionário e satisfaz a seguinte expressão

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco.

A equação dada na definição 3.1.1 pode ser escrita na forma mais compacta

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad t \in \mathbb{Z},$$

onde B é o operador defasagem, isto é, $B^j Y_t = Y_{t-j}$, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco com média 0 e variância σ_ε^2 , $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são polinômios de ordem p e q (inteiros), respectivamente, dados por

$$\phi(B) = -\sum_{j=0}^p \phi_j B^j \quad \text{e} \quad \theta(B) = -\sum_{i=0}^q \theta_i B^i,$$

onde $\phi_0 = -1 = \theta_0$

Existem duas formas bastante úteis de representar processos lineares. A primeira é chamada média móvel infinita e consiste em expressá-lo como uma combinação linear de uma sequência de variáveis aleatórias do tipo ruído branco. A existência dessa representação está ligada ao conceito de causalidade. A segunda forma é representar um processo na sua forma autorregressiva, isto é, como uma combinação linear de suas observações passadas somadas a uma variável aleatória de média zero. O processo que pode ser escrito nessa forma é considerado invertível. Na seção 3.1.2 definiremos a primeira forma citada e na seção 3.1.3 a segunda.

Definição 3.1.2: Um processo $ARMA(p,q)$, ver Definição 3.1.1, é dito ser causal ou estacionário se existem constantes $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tais que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ e

$$X_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \varepsilon_t = \psi_j(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}} \quad \text{é um processo ruído branco}$$

A representação dada pela Definição 3.1.2 é equivalente ao processo Médias Móveis em sua representação infinita, $MA(\infty)$. Nota-se que a casualidade não é uma propriedade de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ sozinho, mas da relação entre os dois processos, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que aparecem na definição da equação de um processo $ARMA(p,q)$. No caso dos processos $ARMA(p,q)$, temos a propriedade da causalidade quando as raízes da equação $\phi(z) = 0$, estão fora do círculo unitário, ou seja,

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Definição 3.1.3: Um processo ARMA (p, q) , ver Definição 3.1.1, é dito ser invertível se existe uma sequência de constantes $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tais que $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ e

$$\varepsilon_t = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} X_t = \pi(B) X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ e } \{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}} \text{ é um ruído branco.}$$

A representação dada pela Definição 3.1.3 equivalente ao processo Autorregressivo em sua representação infinita, $AR(\infty)$. Nota-se que, assim como a casualidade, a invertibilidade não é uma propriedade de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ sozinho, mas da relação entre os dois processos, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que aparecem na definição da equação de um processo ARMA (p, q) . No caso dos processos ARMA (p, q) , temos a propriedade da causalidade quando as raízes da equação $\theta(z) = 0$ estão fora do círculo unitário, ou seja,

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

O teorema a seguir apresenta a função densidade espectral dos processos ARMA (p, q) , cuja demonstração pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1991).

Teorema 3.1.1. Considere $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARMA (p, q) dado na Definição 3.1.1. Suponha que as equações $\phi(B) = 0$ e $\theta(B) = 0$ não possuem raízes em comum e suas raízes não estão dentro do círculo unitário. Então o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem função densidade espectral dada por

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\omega})|^2} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

$$\text{onde } \theta(e^{-i\omega})^2 = 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j e^{-ij\omega} \text{ e } \phi(e^{-i\omega})^2 = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-ij\omega}.$$

4. Volatilidade Estocástica e Termos de Perturbação

Neste capítulo apresentamos os modelos de volatilidade estocástica, onde modelamos a volatilidade por um processo $ARMA(p,q)$, e o processos $ARMA(p,q)$ adicionados de uma perturbação.

Na seção 4.1 a seguir, definimos os modelos de volatilidade estocástica.

4.1. Modelo de Volatilidade Estocástica

O modelo de volatilidade estocástica foi proposto por Taylor (1980, 1986) para modelar retornos de ativos, onde a volatilidade aparece como um processo latente a ser estimado. Uma estimativa da volatilidade é de vital importância no mercado financeiro, pois a partir dessa pode-se, por exemplo, precificar opções e medir o risco de um ativo.

Enquanto que os modelos da família ARCH supõem que a variância condicional depende de retornos passados, o modelo de volatilidade estocástica (MVE) tem como premissa o fato que a volatilidade presente depende de valores passados da mesma, mas é independente dos retornos passados.

A seguir definimos os modelos de volatilidade estocástica.

Definição 4.1.1: Um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ segue um modelo de volatilidade estocástica se

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t = \exp\left\{\frac{h_t}{2}\right\},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, com média zero e variância um, σ_t é a volatilidade de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ no tempo t e $\{h_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo que pode ou não ser estacionário, com uma

densidade de probabilidade $f(h)$. Em geral usa-se distribuição normal para o processo ruído branco.

O termo $\{h_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser a equação de volatilidade de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e independe dos valores passados de X_t . Na formulação mais simples do modelo, $\{h_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é modelado como um processo AR(1) dado por

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t,$$

onde α_0 e α_1 são parâmetros invariantes no tempo e $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário gaussiano com média zero e variância σ_η^2 .

No modelo de volatilidade estocástica as características da série de retornos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, estão associadas à especificação de volatilidade, uma vez que é definido como produto da volatilidade e um termo de perturbação.

Observações:

(1) Assume-se que as perturbações $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são ruídos branco gaussianos independentes, ou seja, $E(X_t) = E(\sigma_t \varepsilon_t) = E(\sigma_t)E(\varepsilon_t) = 0$, com variâncias 1 e σ_η^2 , respectivamente;

$$(2) \text{Var}(X_t) = E(X_t^2) = E(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2)E(\varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2)$$

(3) No caso de $\{h_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ser um processo AR(1), a condição de estacionariedade é $|\alpha_1| < 1$.

O modelo de volatilidade estocástica pode ser generalizado para que a volatilidade seja um processo ARMA(p, q), mantendo sua característica estacionária.

Na seção a seguir definimos os modelos de volatilidade estocástica ARMA(p, q), denotados por VE-ARMA(p, q).

4.2. Modelo VE-ARMA(p, q)

O modelo de volatilidade estocástica considera a volatilidade como um componente não observável da série temporal. Na modelagem da volatilidade estocástica seja a série temporal, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, como a série dos retornos financeiros, decomposta em um termo σ_t , sendo o desvio padrão, e um termo de processo ruído branco, $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ em que a volatilidade, como o logaritmo da variância σ_t^2 , denotada por $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é um processo estocástico.

O modelo de volatilidade estocástica utilizado neste estudo, então, será dado da seguinte forma (Breidt, et al. 1998):

$$Y_t = \sigma_t \xi_t$$
$$\sigma_t = \sigma \exp\left\{\frac{v_t}{2}\right\},$$

onde $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é independente de $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, σ_t é a volatilidade de Y_t , $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco gaussiano com média 0 e variância 1, (ver Observação 4.2.1 abaixo) e $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo que pode ou não ser estacionário que, neste estudo, será o processo ARMA(p, q).

Observação 4.2.1: Para estimação de modelos usa-se geralmente o método de máxima verossimilhança, cuja implementação pressupões que se faça uma hipótese sobre a verdadeira distribuição. Escolhe-se, em geral a distribuição normal. Entretanto, Hentschel (1995) argumenta que a presença de leptocurtose sugere o uso da distribuição t-student ou distribuição com erro generalizado (GED) para estimação, ainda que esta venha a falhar se a série tiver elevado número de distribuições extremas. Mesmo na falta de normalidade nos erros, pode-se utilizar a distribuição normal, entendendo isso como uma estimação de quase-máxima-verossimilhança. Por isso a escolha da distribuição normal para o processo $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

A partir disso temos que:

$$Y_t = \sigma \exp\{v_t / 2\} \xi_t$$
$$Y_t^2 = \sigma^2 \exp\{v_t\} \xi_t^2$$

Denotemos agora $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ como o logaritmo de $\{Y_t^2\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado que o modelo de volatilidade estocástica pode ser linearizado, tomando-se o logaritmo do quadrado dos retornos, o qual é apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_t &= \ln Y_t^2 \\ X_t &= \ln \sigma^2 + v_t + \ln \xi_t^2 \end{aligned}$$

Ao tomarmos o logaritmo do quadrado dos retornos, o termo de erro que possui distribuição normal passar a ter distribuição log-qui-quadrado ($\log \chi_1^2$) com média $E[\ln \xi_t^2] = -1,27$ e variância $\text{Var}[(\ln \xi_t^2)] = \pi^2 / 2$, conforme Wishart (1947). Para desenvolver boas propriedades aos erros, consideramos a inovação $\varepsilon_t = \ln \xi_t^2 - E[\ln \xi_t^2]$. Assim, somando e diminuindo $E[\ln \xi_t^2]$ a forma do modelo linearizado é dada por

$$\begin{aligned} X_t &= \ln \sigma^2 + v_t + \ln \xi_t^2 + E[\ln \xi_t^2] - E[\ln \xi_t^2] \\ X_t &= \ln \sigma^2 + E[\ln \xi_t^2] + v_t + \ln \xi_t^2 - E[\ln \xi_t^2] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dessa forma, o modelo de volatilidade estocástica pode ser descrito em formato de espaço de estado, com a equação de transição para volatilidade determinando o estado do sistema a cada instante de tempo como:

$$X_t = \mu + v_t + \varepsilon_t, \quad (4.2)$$

onde $X_t = \ln Y_t^2$, $\mu = \ln \sigma^2 + E[\ln \xi_t^2]$, a qual atribuiremos o valor zero, e $\varepsilon_t = \ln \xi_t^2 - E[\ln \xi_t^2]$.

Considere $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, na equação (4.1), como sendo um processo ARMA(p, q), ver Definição 3.1.1, então a função densidade espectral de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, na expressão (4.2), é dada por

$$f_x(\omega) = \frac{\sigma_\eta^2 |\theta(e^{-i\omega})|^2}{|\phi(e^{-i\omega})|^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi. \quad (4.3)$$

Na seção a seguir definimos os tipos de perturbações que serão adicionados ao processo ARMA(p, q).

4.3. Processos ARMA(p, q) com Adição de Perturbações

Como vimos na seção anterior, o modelo de volatilidade estocástica pode ser considerado como um processo ARMA(p, q) adicionado de uma perturbação e segue a expressão

$$X_t = v_t + \varepsilon_t, \text{ onde} \quad (4.4)$$

onde $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ segue o modelo ARMA(p, q), e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o ruído contaminante do processo.

Os processos de volatilidade estocástica, visto na seção anterior, são um caso particular dos processos com adição de perturbação. No caso dos processos VE-ARMA(p, q), $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem distribuição $\log \chi_1^2$ com média $E[\ln \xi_t^2] = -1,27$ e variância $\text{Var}[(\ln \xi_t^2)] = \pi^2 / 2$. Neste trabalho, também utilizamos $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ruído branco gaussiano, isto é, com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

A função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfazendo a expressão (4.4) é dada pela expressão (4.3), onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo de perturbação e $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARMA(p, q).

A relação entre a variância do processo de perturbação e do processo de inovação dos processos ARMA(p, q) é dada por $ns = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\eta^2$ onde σ_ε^2 representa a variância da perturbação

e σ_{η}^2 representa a variância das inovações do processo ARMA(p,q) a qual foi atribuído o valor 1. Quando $ns=0$ temos o modelo sem ruído. Assim, para $ns \neq 0$, temos $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\eta}^2 * ns$.

Geraremos então diferentes contaminações variando de $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Para este modelo também faremos a comparação com o modelo ARMA(p,q) sem contaminação quando ambos os parâmetros forem positivos, ou seja, atribuíremos o valor 0 para ns ($ns=0$), uma vez que na geração destes modelos encontramos problemas e algumas simulações não convergiram. Por esta mesma razão não foram feitas simulações quando os parâmetros ϕ_1 e θ_1 do modelo possuíam sinais negativos.

Dessa forma, teremos as seguintes estimações:

- $X_t = v_t + \varepsilon_t$, onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem distribuição $\log \chi_1^2$;
- $X_t = v_t$ (modelo ARMA sem ruído), quando $ns = 0$;
- $X_t = v_t + \varepsilon_t$, onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem distribuição $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ e $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\eta}^2 * ns$, ou seja, $\sigma_{\varepsilon}^2 = \{1, 2, \dots, 5\}$.

5. Estimação dos Parâmetros

Neste capítulo apresentamos os estimadores para os parâmetros dos processos VE-ARMA(p, q) e dos processos ARMA(p, q) adicionados de uma perturbação, conforme descrito no Capítulo 4.

Aqui vamos utilizar os métodos paramétricos de estimação. Tais métodos precisam de especificação prévia de um modelo paramétrico para os dados, ou seja, é preciso especificar toda a estrutura de autocorrelação ou da função de densidade espectral do modelo.

Estes métodos baseiam-se em maximizar a função de verossimilhança ou alguma aproximação desta. Nesta seção, apresentamos três métodos para estimar os parâmetros do modelo estudado.

- 1) Estimador Fox e Taqu, denotado por FT;
- 2) Estimador Beran, denotado pelo mesmo nome do autor;
- 3) Estimador de Máxima Verossimilhança - *Maximum Likelihood Estimation* – o qual denotaremos como MLE.

5.1. Estimador FT

O estimador de máxima verossimilhança, proposto por Fox e Taqu (1986), utiliza uma aproximação para a matriz de autocovariância sugerida por Whittle (1951).

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo que satisfaz a equação (4.2) ou (4.4).

O estimador FT é obtido minimizando a função

$$\sigma^2(\mathbf{v}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\omega_j)}{f_v(\omega, \mathbf{v}_1) + f_\varepsilon(\mathbf{v}_2)} d\omega,$$

onde $f_v(\cdot, \mathbf{v}_1)$ é a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $I(\cdot)$ é a função periodograma e $f_\varepsilon(\mathbf{v}_2)$ é a função de densidade espectral do ruído de contaminação do modelo. Neste estudo, $\sigma_\eta^2 = 1$, \mathbf{v}_1 é o vetor de parâmetros do processo ARMA(p, q), ou seja, $\mathbf{v}_1 = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ e $\mathbf{v}_2 = \sigma_\varepsilon^2$ é a variância do processo de perturbação.

O estimador FT é o valor de $\mathbf{v} = (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2)$ que minimiza a função $\sigma_v^2(\cdot)$.

Computacionalmente o estimador FT é obtido minimizando a seguinte função

$$FT(\mathbf{v}) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\ln [f_v(\omega_j, \mathbf{v}) + f_\varepsilon(\mathbf{v}_2)] + \frac{I(\omega_j)}{f_v(\omega, \mathbf{v}_1) + f_\varepsilon(\mathbf{v}_2)} \right).$$

onde n é o tamanho da amostra.

5.2. Estimador Beran

Este estimador de máxima verossimilhança aproximada foi proposto por Beran (1994) para estimação dos parâmetros de um processo ARFIMA(p, d, q). Neste trabalho adaptamos sua teoria para os processos ARMA(p, q).

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo satisfazendo a equação (4.2) ou (4.4). Considere $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARMA(p, q) invertível. Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma série temporal e considere

$$U_t = Y_t - \sum_{j=1}^{t-1} \pi_j(\mathbf{v}) Y_{t-j},$$

para $t = 2, \dots, n$, onde $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ são os coeficientes da representação autorregressiva infinita do processo ARMA(p, q). Denote $r_t(\mathbf{v}) = U_t(\mathbf{v}) / \sigma$ os resíduos da série temporal $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Neste caso, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ o vetor de parâmetros é dado por $\mathbf{v} = (\sigma, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$. O autor sugestiona estimar o vetor de parâmetros \mathbf{v} minimizando a soma dos resíduos ao quadrado

$$B(\mathbf{v}) = 2n \ln(\sigma) + \sum_{t=2}^n r_t^2(\mathbf{v})$$

com respeito a \mathbf{v} . Seja $\hat{\mathbf{v}}$ a solução da equação acima.

5.3. Estimador de Máxima Verossimilhança Condicional

Nesta seção apresentamos os estimadores de máxima verossimilhança condicional para os processos ARMA(p, q).

A forma exata da função verossimilhança do modelo ARMA(p, q) é bastante complicada e foi desenvolvida por Newbold (1974). Referências adicionais são Ansley (1979), Nicholls e Hall (1979), Ljung e Box (1979) e Box, Jenkins e Reinsel (1994), dentre outros.

Neste estudo consideramos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo satisfazendo a equação (4.2) ou (4.4). Para este estimador, vamos considerar $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARMA(p, q) estacionário dado pela seguinte expressão

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco gaussiano $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Ou seja, estamos trabalhando com a suposição de não contaminação por perturbação. A função densidade de probabilidade conjunta de $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$ é dada por

$$P(\boldsymbol{\varepsilon} | \phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum \varepsilon_t^2\right\}.$$

Reescrevendo o processo ARMA(p, q) em função de $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, temos

$$\varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Logo a função de verossimilhança, condicional a escolha de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$ é dada por

$$L(\boldsymbol{\xi} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 2\pi^{-n/2} (\sigma_\varepsilon^2)^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^n (X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_p \varepsilon_{t-p})^2 \right\}$$

Considere o vetor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ e assuma a condição inicial $\mathbf{v}_* = (X_{1-p}, \dots, X_{-1}, X_0)'$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_* = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)'$. O estimador MLE é dado maximizando-se o logaritmo natural da função de verossimilhança

$$\ln L_*(\phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{S_*(\phi, \mu, \theta)}{2\sigma_\varepsilon^2}, \quad (5.1)$$

onde

$$S_*(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\phi, \mu, \theta | \mathbf{v}_*, \boldsymbol{\varepsilon}_*, \mathbf{X}), \quad (5.2)$$

com respeito a $\mathbf{v} = (\phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2)$.

Maximizando a equação (5.1) é equivalente a minimizar a equação (5.2) e obtemos assim $\hat{\mathbf{v}}$.

Existem poucas alternativas para especificar as condições iniciais \mathbf{v}_* e $\boldsymbol{\varepsilon}_*$. Baseado na suposição de que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco Gaussiano com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, podemos substituir os valores desconhecidos de $\{X_t\}_{t=1-p, \dots, -1, 0}$, do vetor \mathbf{v}_* , pela média amostral \bar{X} e os desconhecidos valores de $\{\varepsilon_t\}_{t=1-q, \dots, -1, 0}$, do vetor $\boldsymbol{\varepsilon}_*$, pelo valor esperado de $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que é zero. Para o processo

ARMA(p, q) reescrito em função de $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ podemos assumir que $\varepsilon_p = \varepsilon_{p-1} = \dots = \varepsilon_{p-(q-1)} = 0$ e calcular $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ para $t \geq (p+1)$.

6. Simulação de Monte Carlo

Para os processo VE-ARMA(p,q) e os processos ARMA(p,q) adicionado de perturbações, foram feitas simulações utilizando o Método de Monte Carlo (MMC), o qual pode ser simplifcadamente descrito como um processo computacional que utiliza números aleatórios para produzir resultados. Assim em vez de ter entradas fixas, distribuições de probabilidade são atribuídas a algumas ou todas as entradas. Isto gerará uma distribuição de probabilidade para a saída após a simulação ser executada.

A seguir descreveremos as etapas de simulações de amostras de tamanho n de um processo VE-ARMA(p,q) e dos modelos com inovações, ou seja, dos modelos ARMA(p,q) adicionados de um ruído com distribuição Normal $(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Etapa I: Gerar uma série temporal (amostra) do processo ARMA(p,q) de tamanho n ;

Etapa II: Gerar uma amostra de tamanho n do ruído o qual segue uma distribuição $\log \chi_1^2$ ou Normal $(0, \sigma_\varepsilon^2)$, conforme seção 4.2 ou seção 4.3;

Etapa III: Somar os processos gerados nas etapas I e II;

Etapa IV: Estimar os parâmetros ϕ 's e θ 's do modelo através dos estimadores apresentados no capítulo 5.

Nestas simulações utilizamos dois tamanhos amostrais, $n \in \{1000, 2000\}$. Para cada simulação foram geradas $re=1000$ replicações.

Na etapa II, isto é, na geração do termo de perturbação da série, geramos uma amostra aleatória do mesmo tamanho da série temporal com distribuição $\log \chi_1^2$ (definida na seção 4.2) ou distribuição Normal com os parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_v^2 * ns$. As distribuições Normais foram simulados com $ns \in \{1, \dots, 5\}$ e no caso em que ambos os parâmetros eram positivos geramos também o processo sem contaminação, ou seja, $ns=0$, como já citado no capítulo 4. Neste mesmo caso geramos simulações para $ns \in \{0, \dots, 4\}$, dado que as simulações apresentaram resultados ruins e não seria necessário aumentar a variabilidade da amostra

neste caso. Não foram feitas simulações para os parâmetros negativos porque as simulações divergiam quando estabelecíamos sinal negativo para os parâmetros ϕ 's e θ 's do modelo.

Após soma-se a série temporal a perturbação e em seguida estimam-se os parâmetros ϕ 's e θ 's de acordo com os estimadores FT, Beran e MLE, descritos no capítulo 5. Todas as etapas aqui descritas foram realizadas simultaneamente na geração dos estimadores.

Abaixo estão descritas as simulações que foram feitas neste estudo e destacamos as variações dos parâmetros atribuído.

Para as simulações com processos VE-ARMA(p,q) isto é, de processos ARMA(p,q) adicionados de um ruído (perturbação) com distribuição $\log\chi_1^2$ temos:

VE-ARMA(1,1), $\phi_1 = -0,5$ e $\theta_1 = 0,4$, $n=1000$;

VE-ARMA(1,1), $\phi_1 = 0,5$ e $\theta_1 = -0,4$, $n=1000$;

VE-ARMA(1,1), $\phi_1 = 0,5$ e $\theta_1 = 0,4$, $n=1000$;

VE-ARMA(1,1), $\phi_1 = -0,5$ e $\theta_1 = -0,4$, $n=1000$;

Para as simulações de processo ARMA(p,q) adicionados de um ruído (perturbação) com distribuição $N(0, \sigma_\epsilon^2)$, onde $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$ temos:

ARMA(1,1), $\phi_1 = -0,5$ e $\theta_1 = 0,4$, $n=1000$ e $n=2000$, $ns \in \{1,2,\dots,5\}$;

ARMA(1,1), $\phi_1 = 0,5$ e $\theta_1 = -0,4$, $n=1000$ e $n=2000$, $ns \in \{1,2,\dots,5\}$;

ARMA(1,1), $\phi_1 = 0,5$ e $\theta_1 = 0,4$, $n=1000$ e $n=2000$, $ns \in \{0,1,\dots,4\}$;

Como as estimativas dos modelos acima não apresentaram bons resultados em algumas simulações e como encontramos problemas de convergência para simular estimativas para os parâmetros ϕ 's e θ 's no modelo misto ARMA(p,q), com $p=1=q$, optou-se então por gerar simulações para os modelos puros AR(p) e MA(q), com $p=1=q$, a fim de verificar se os problemas encontrados estariam vinculados ao fato de estarmos trabalhando com o modelo misto ARMA(p,q).

Dessa forma, geramos também as simulações descritas abaixo.

Para as simulações com adição de ruído com distribuição $\log \chi_1^2$:

VE-ARMA(1,0), $\phi_1 = (0.1, 0.2, \dots, 0.9)$, $n=1000$;

VE-ARMA(1,0), $\phi_1 = (-0.1, -0.2, \dots, -0.9)$, $n=1000$;

VE-ARMA(0,1), $\theta_1 = (0.1, 0.2, \dots, 0.9)$, $n=1000$;

VE-ARMA(0,1), $\theta_1 = (-0.1, -0.2, \dots, -0.9)$, $n=1000$;

Para as simulações com adição de ruído com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$:

AR(1), $\phi_1 = 0,5$, $n=1000$, $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$;

AR(1), $\phi_1 = -0,5$, $n=1000$, $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$;

MA(1), $\theta_1 = 0,5$; $n=1000$, $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$;

MA(1), $\theta_1 = -0,5$; $n=1000$, $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$;

6.2 Resultados

A seguir serão apresentados os resultados obtidos nas simulações de Monte Carlo. Para cada estimador foram calculados a média, o viés, o erro quadrático médio e a variância a fim de fazermos comparações entres os estimadores estudados neste trabalho. Os valores destas medidas serão apresentados nas tabelas 1 a 18. Separamos a apresentação das tabelas de acordo com as inovações ou termos de perturbação adicionado. Primeiramente apresentaremos os resultados tabelados para erros com distribuição $\log \chi_1^2$, os quais serão apresentados nas tabelas 1 à 8 e após os resultados cuja contaminação segue uma distribuição normal, que serão apresentados nas tabelas 9 à 18.

Nas tabelas 1 e 2 apresentaremos os resultados simulados para os modelos VE-AR(1) para o parâmetro $\phi_1 = (\pm 0,1; \pm 0,2; \dots; \pm 0,9)$. Nas tabelas 3 e 4 apresentaremos os resultados para os modelos VE-MA(1) para o parâmetro $\theta_1 = (\pm 0,1; \pm 0,2; \dots; \pm 0,9)$. Nas tabelas 5 à 8 serão mostrados os resultados para o modelo VE-ARMA(1,1) quando $\phi_1 = (0,5)$ e $\theta_1 = (0,4)$, $\phi_1 = (0,5)$ e $\theta_1 = (-0,4)$, $\phi_1 = (-0,5)$ e $\theta_1 = (0,4)$ e $\phi_1 = (-0,5)$ e $\theta_1 = (-0,4)$. Em todas estas simulações as amostras tinham o mesmo tamanho, ou seja, $n=1000$.

Nas tabelas 9 à 18 apresentaremos os resultados para os modelos ARMA(p,q) adicionado de um ruído definido na seção 4.3. Assim, nas tabelas 9 e 10 apresentaremos os resultados para o modelo AR(1) onde $\phi_1 = (\pm 0,5)$ e $ns \in \{1, \dots, 5\}$. Nas tabelas 11 e 12 serão apresentados os resultados para o modelo MA(1) onde $\theta_1 = (\pm 0,4)$ e $ns \in \{1, \dots, 5\}$. Nas tabelas 13 à 18 mostraremos os resultados para o modelo ARMA(1,1) quando $\phi_1 = (0,5)$ e $\theta_1 = (-0,4)$, $\phi_1 = (-0,5)$ e $\theta_1 = (0,4)$ (nesses casos $ns \in \{1, \dots, 5\}$) e $\phi_1 = (0,5)$ e $\theta_1 = (0,4)$ (nesse caso $ns \in \{0, \dots, 4\}$). Em todos as simulações geramos amostras com tamanho $n=1000$ e nos casos do modelo ARMA(1,1) também foram feitas simulações para $n=2000$.

Para as simulações nas quais foram assumidos erros com distribuição $\log \chi_1^2$ os resultados serão apresentados na ordem dos modelos puros (VE-AR(1) e VE-MA(1)) e após o modelo misto (VE-ARMA(1,1)). A análise dos resultados obtidos será apresentada no capítulo 7 deste estudo. Os resultados das simulações com ruídos seguindo uma distribuição $\log \chi_1^2$ podem ser visualizados nas tabelas 1 à 8, as quais estão destacadas a seguir:

Tabela 1: Estimação para os processos VE-AR(1) ou VE-ARMA(p, q), onde $p=1$ e $q=0$ e $\phi_1 = (0, 1; 0, 2; \dots; 0, 9)$, $n=1000$.

ϕ_1	Estimador	Resultados			
		média	viés	eqm	variância
0.1	FT	0,0826	-0,0174	0,0266	0,0264
	Beran	0,0168	-0,0832	0,0079	0,0010
	MLE	0,0170	-0,0830	0,0079	0,0010
0.2	FT	0,1729	-0,0271	0,0260	0,0253
	Beran	0,0346	-0,1654	0,0285	0,0011
	MLE	0,0348	-0,1652	0,0284	0,0011
0.3	FT	0,2647	-0,0353	0,0202	0,0189
	Beran	0,0527	-0,2473	0,0621	0,0010
	MLE	0,0530	-0,2470	0,0620	0,0010
0.4	FT	0,3728	-0,0272	0,0139	0,0132
	Beran	0,0761	-0,3239	0,1059	0,0010
	MLE	0,0765	-0,3235	0,1057	0,0010
0.5	FT	0,4823	-0,0177	0,0083	0,0080
	Beran	0,1046	-0,3954	0,1574	0,0011
	MLE	0,1052	-0,3948	0,1569	0,0011
0.6	FT	0,5894	-0,0106	0,0038	0,0037
	Beran	0,1434	-0,4566	0,2097	0,0012
	MLE	0,1442	-0,4558	0,2090	0,0012
0.7	FT	0,6926	-0,0074	0,0019	0,0018
	Beran	0,1971	-0,5029	0,2542	0,0013
	MLE	0,1983	-0,5017	0,2530	0,0013
0.8	FT	0,7967	-0,0033	0,0007	0,0007
	Beran	0,2828	-0,5172	0,2690	0,0015
	MLE	0,2850	-0,5150	0,2667	0,0015
0.9	FT	0,8988	-0,0012	0,0003	0,0003
	Beran	0,4535	-0,4465	0,2015	0,0022
	MLE	0,4587	-0,4413	0,1970	0,0022

Tabela 2: Estimação para os processos VE-AR(1) ou VE-ARMA(p,q), onde $p=1$ e $q=0$ e $\phi_1 = (-0,1; -0,2; \dots; -0,9)$, $n=1000$.

ϕ_1	Estimador	Resultados			
		média	viés	eqm	variância
-0.1	FT	-0,0967	0,0033	0,0268	0,0268
	Beran	-0,0186	0,0814	0,0076	0,0010
	MLE	-0,0184	0,0816	0,0076	0,0010
-0.2	FT	-0,1899	0,0101	0,0233	0,0232
	Beran	-0,0363	0,1637	0,0277	0,0010
	MLE	-0,0362	0,1638	0,0278	0,0010
-0.3	FT	-0,2844	0,0156	0,0192	0,0190
	Beran	-0,0564	0,2436	0,0603	0,0010
	MLE	-0,0563	0,2437	0,0604	0,0010
-0.4	FT	-0,3796	0,0204	0,0147	0,0143
	Beran	-0,0787	0,3213	0,1043	0,0011
	MLE	-0,0786	0,3214	0,1044	0,0011
-0.5	FT	-0,4854	0,0146	0,0080	0,0078
	Beran	-0,1070	0,3930	0,1556	0,0011
	MLE	-0,1069	0,3931	0,1556	0,0011
-0.6	FT	-0,5844	0,0156	0,0045	0,0042
	Beran	-0,1428	0,4572	0,2102	0,0011
	MLE	-0,1427	0,4573	0,2102	0,0011
-0.7	FT	-0,6925	0,0075	0,0018	0,0018
	Beran	-0,1999	0,5001	0,2514	0,0013
	MLE	-0,1998	0,5002	0,2515	0,0013
-0.8	FT	-0,7921	0,0079	0,0008	0,0007
	Beran	-0,2874	0,5126	0,2643	0,0015
	MLE	-0,2873	0,5127	0,2643	0,0015
-0.9	FT	-0,8936	0,0064	0,0003	0,0003
	Beran	-0,4609	0,4391	0,1950	0,0022
	MLE	-0,4609	0,4391	0,1950	0,0022

Tabela 3: Estimação para os processos VE-MA(1) ou VE-ARMA(p,q), onde $p=0$ e $q=1$ e $\theta_1 = (0, 1; 0, 2; \dots; 0, 9)$, $n=1000$.

θ_1	Estimador	Resultados			
		média	viés	eqm	variância
0.1	FT	0,1091	0,0091	0,0359	0,0358
	Beran	0,0176	-0,0824	0,0078	0,0010
	MLE	0,0175	-0,0825	0,0078	0,0010
0.2	FT	0,2050	0,0050	0,0371	0,0371
	Beran	0,0338	-0,1662	0,0287	0,0011
	MLE	0,0336	-0,1664	0,0287	0,0011
0.3	FT	0,3211	0,0211	0,0384	0,0380
	Beran	0,0526	-0,2474	0,0622	0,0010
	MLE	0,0526	-0,2474	0,0623	0,0010
0.4	FT	0,4095	0,0095	0,0344	0,0343
	Beran	0,0669	-0,3331	0,1119	0,0009
	MLE	0,0668	-0,3332	0,1119	0,0009
0.5	FT	0,5148	0,0148	0,0380	0,0378
	Beran	0,0838	-0,4162	0,1743	0,0010
	MLE	0,0837	-0,4163	0,1743	0,0010
0.6	FT	0,6055	0,0055	0,0388	0,0388
	Beran	0,0974	-0,5026	0,2537	0,0011
	MLE	0,0973	-0,5027	0,2537	0,0011
0.7	FT	0,7019	0,0019	0,0348	0,0348
	Beran	0,1116	-0,5884	0,3472	0,0010
	MLE	0,1116	-0,5884	0,3472	0,0010
0.8	FT	0,7994	-0,0006	0,0280	0,0280
	Beran	0,1271	-0,6729	0,4539	0,0010
	MLE	0,1270	-0,6730	0,4539	0,0010
0.9	FT	0,8600	-0,0400	0,0243	0,0227
	Beran	0,1373	-0,7627	0,5827	0,0010
	MLE	0,1373	-0,7627	0,5827	0,0010

Tabela 4: Estimação para os processos VE-MA(1) ou VE-ARMA(p,q), onde $p=0$ e $q=1$ e $\theta_1 = (-0,1; -0,2; \dots; -0,9)$, $n=1000$.

θ_1	Estimador	Resultados			
		média	viés	eqm	variância
-0.1	FT	-0,0870	0,0130	0,0354	0,0352
	Beran	-0,0153	0,0847	0,0082	0,0010
	MLE	-0,0155	0,0845	0,0081	0,0010
-0.2	FT	-0,1948	0,0052	0,0390	0,0391
	Beran	-0,0333	0,1667	0,0289	0,0011
	MLE	-0,0335	0,1665	0,0288	0,0011
-0.3	FT	-0,2876	0,0124	0,0356	0,0355
	Beran	-0,0487	0,2513	0,0642	0,0010
	MLE	-0,0489	0,2511	0,0640	0,0010
-0.4	FT	-0,3962	0,0038	0,0358	0,0358
	Beran	-0,0661	0,3339	0,1125	0,0010
	MLE	-0,0663	0,3337	0,1123	0,0010
-0.5	FT	-0,4853	0,0147	0,0359	0,0358
	Beran	-0,0798	0,4202	0,1776	0,0010
	MLE	-0,0801	0,4199	0,1773	0,0010
-0.6	FT	-0,5880	0,0120	0,0383	0,0382
	Beran	-0,0954	0,5046	0,2557	0,0010
	MLE	-0,0957	0,5043	0,2554	0,0010
-0.7	FT	-0,6889	0,0111	0,0366	0,0365
	Beran	-0,1107	0,5893	0,3483	0,0011
	MLE	-0,1111	0,5889	0,3479	0,0011
-0.8	FT	-0,7692	0,0308	0,0303	0,0294
	Beran	-0,1222	0,6778	0,4603	0,0010
	MLE	-0,1226	0,6774	0,4599	0,0010
-0.9	FT	-0,8433	0,0567	0,0278	0,0246
	Beran	-0,1351	0,7649	0,5861	0,0011
	MLE	-0,1355	0,7645	0,5856	0,0011

Tabela 5: Estimação para os processos VE-ARMA(p,q), onde $p=1=q$ e $\phi_1 = 0.5, \theta_1 = 0.4$ e $n=1000$.

Estimador	$\phi_1 = 0,5$				$\theta_1 = 0,4$			
	média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
FT	0,2093	-0,2907	0,3253	0,2410	0,1080	-0,2920	0,3939	0,3090
Beran	0,0561	-0,4439	0,5331	0,3364	0,0378	-0,3622	0,4644	0,3335
MLE	0,0557	-0,4443	0,4162	0,2191	0,0370	-0,3630	0,3476	0,2161

Tabela 6: Estimação para os processos VE-ARMA(p,q), onde $p=1=q$ e $\phi_1 = 0.5, \theta_1 = -0.4$ e $n=1000$.

Estimador	$\phi_1 = 0,5$				$\theta_1 = -0,4$			
	média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
FT	0,4863	-0,0137	0,0147	0,0146	-0,4119	-0,0119	0,0626	0,0625
Beran	0,4843	-0,0157	0,0176	0,0174	0,2959	0,6959	0,5044	0,0201
MLE	0,4847	-0,0153	0,0154	0,0152	0,2954	0,6954	0,5017	0,0181

Tabela 7: Estimação para os processos VE-ARMA(p,q), onde $p=1=q$ e $\phi_1 = -0.5, \theta_1 = 0.4$ e $n=1000$.

Estimador	$\phi_1 = -0,5$				$\theta_1 = 0,4$			
	média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
FT	-0,4879	0,0121	0,0163	0,0162	0,4099	0,0099	0,0683	0,0682
Beran	-0,4876	0,0124	0,0165	0,0164	-0,2972	-0,6972	0,5056	0,0196
MLE	-0,4823	0,0177	0,0170	0,0167	-0,2918	-0,6918	0,4983	0,0198

Tabela 8: Estimação para os processos VE-ARMA(p,q), onde $p=1=q$ e $\phi_1 = -0.5, \theta_1 = -0.4$ e $n=1000$.

Estimador	$\phi_1 = -0,5$				$\theta_1 = -0,4$			
	média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
FT	0,1217	0,6217	0,6723	0,2861	0,2390	0,6390	0,7410	0,3331
Beran	-0,0564	0,4436	0,5444	0,3480	-0,0405	0,3595	0,4754	0,3465
MLE	-0,0606	0,4394	0,4376	0,2448	-0,0429	0,3571	0,3712	0,2439

Para as simulações nas quais foram assumidos ruído (perturbação) com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$ os resultados serão apresentados na mesma ordem que apresentamos os resultados com inovações com distribuição $\log \chi_1^2$, ou seja, primeiramente apresentamos os resultados dos modelos puros (AR(1) ou ARMA(1,0) e MA(1) ou ARMA(0,1)) e após o modelo misto (ARMA(1,1)). A análise dos resultados obtidos também será realizada no capítulo 7 deste estudo. Os resultados das simulações com ruídos seguindo uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ estão apresentadas nas tabelas 9 à 18 as quais estão destacadas a seguir:

Tabela 9: Estimação para os processos AR(1) ou ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $p=1$ e $q=0$ e $\phi_1 = 0.5$, $ns \in \{1, \dots, 5\}$ e $n=1000$.

Inovação	Estimador	$\phi_1 = 0,5$			
		média	viés	eqm	variância
ns=1	FT	0,4972	-0,0028	0,0016	0,0016
	Beran	0,2831	-0,2169	0,0480	0,0010
	MLE	0,2846	-0,2154	0,0474	0,0010
ns=2	FT	0,4963	-0,0037	0,0025	0,0025
	Beran	0,1985	-0,3015	0,0919	0,0010
	MLE	0,2000	-0,3000	0,0911	0,0010
ns=3	FT	0,4918	-0,0082	0,0040	0,0039
	Beran	0,1522	-0,3478	0,1220	0,0011
	MLE	0,1535	-0,3465	0,1211	0,0011
ns=4	FT	0,4859	-0,0141	0,0064	0,0062
	Beran	0,1213	-0,3787	0,1446	0,0012
	MLE	0,1226	-0,3774	0,1436	0,0012
ns=5	FT	0,4794	-0,0206	0,0077	0,0073
	Beran	0,1020	-0,3980	0,1595	0,0010
	MLE	0,1032	-0,3968	0,1585	0,0010

Tabela 10: Estimação para os processos AR(1) ou ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $p=1$ e $q=0$ e $\phi_1 = -0.5$, $ns \in \{1, \dots, 5\}$ e $n=1000$.

Inovação	Estimador	$\phi_1 = -0,5$			
		média	viés	eqm	variância
ns=1	FT	-0,4947	0,0053	0,0016	0,0016
	Beran	-0,2861	0,2139	0,0468	0,0010
	MLE	-0,2853	0,2147	0,0471	0,0010
ns=2	FT	-0,4898	0,0102	0,0030	0,0029
	Beran	-0,1977	0,3023	0,0925	0,0012
	MLE	-0,1969	0,3031	0,0931	0,0012
ns=3	FT	-0,4894	0,0106	0,0043	0,0042
	Beran	-0,1538	0,3462	0,1210	0,0011
	MLE	-0,1529	0,3471	0,1216	0,0011
ns=4	FT	-0,4916	0,0084	0,0053	0,0053
	Beran	-0,1269	0,3731	0,1402	0,0010
	MLE	-0,1260	0,3740	0,1409	0,0010
ns=5	FT	-0,4830	0,0170	0,0081	0,0078
	Beran	-0,1058	0,3942	0,1565	0,0011
	MLE	-0,1048	0,3952	0,1573	0,0011

Tabela 11: Estimação para os processos MA(1) ou ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $p=0$ e $q=1$ e $\theta_1 = 0.5$, $ns \in \{1, \dots, 5\}$ e $n=1000$.

Inovação	Estimador	$\theta_1 = 0,5$			
		média	viés	eqm	variância
ns=1	FT	0,4987	-0,0013	0,0048	0,0048
	Beran	0,2356	-0,2644	0,0709	0,0010
	MLE	0,2343	-0,2657	0,0715	0,0009
ns=2	FT	0,4962	-0,0038	0,0097	0,0097
	Beran	0,1581	-0,3419	0,1179	0,0009
	MLE	0,1569	-0,3431	0,1187	0,0009
ns=3	FT	0,4960	-0,0040	0,0179	0,0179
	Beran	0,1197	-0,3803	0,1456	0,0010
	MLE	0,1186	-0,3814	0,1465	0,0010
ns=4	FT	0,4934	-0,0066	0,0267	0,0267
	Beran	0,0964	-0,4036	0,1639	0,0010
	MLE	0,0952	-0,4048	0,1648	0,0010
ns=5	FT	0,4917	-0,0083	0,0373	0,0372
	Beran	0,0808	-0,4192	0,1767	0,0010
	MLE	0,0796	-0,4204	0,1777	0,0010

Tabela 12: Estimação para os processos MA(1) ou ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição $N(0, \sigma_\epsilon^2)$, onde $p=0$ e $q=1$ e $\theta_1 = -0.5$, $ns \in \{1, \dots, 5\}$ e $n=1000$.

Inovação	Estimador	$\theta_1 = -0,5$			
		média	viés	eqm	variância
ns=1	FT	-0,5034	-0,0034	0,0052	0,0052
	Beran	-0,2351	0,2649	0,0711	0,0010
	MLE	-0,2359	0,2641	0,0707	0,0010
ns=2	FT	-0,5025	-0,0025	0,0102	0,0102
	Beran	-0,1573	0,3427	0,1184	0,0010
	MLE	-0,1582	0,3418	0,1178	0,0010
ns=3	FT	-0,5047	-0,0047	0,0185	0,0185
	Beran	-0,1196	0,3804	0,1457	0,0010
	MLE	-0,1206	0,3794	0,1450	0,0010
ns=4	FT	-0,4987	0,0013	0,0280	0,0281
	Beran	-0,0951	0,4049	0,1650	0,0010
	MLE	-0,0960	0,4040	0,1643	0,0010
ns=5	FT	-0,4882	0,0118	0,0418	0,0417
	Beran	-0,0781	0,4219	0,1791	0,0011
	MLE	-0,0790	0,4210	0,1783	0,0011

Tabela 13: Estimação para os processos ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição

$N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $p=1=q$ e $\phi_1 = 0.5$, $\theta_1 = -0.4$, $ns \in \{1, \dots, 5\}$ e $n=1000$.

Inovação	Estimador	$\phi_1 = 0,5$				$\theta_1 = -0,4$			
		média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
ns=1	FT	0,4859	-0,0141	0,0039	0,0037	0,0265	0,4265	0,1863	0,0045
	Beran	0,4887	-0,0113	0,0037	0,0036	0,0311	0,4311	0,1903	0,0044
	MLE	0,4921	-0,0079	0,0036	0,0036	0,0336	0,4336	0,1924	0,0044
ns=2	FT	0,4884	-0,0116	0,0063	0,0062	0,1576	0,5576	0,3189	0,0079
	Beran	0,4922	-0,0078	0,0062	0,0062	0,1634	0,5634	0,3253	0,0080
	MLE	0,4952	-0,0048	0,0062	0,0062	0,1655	0,5655	0,3277	0,0080
ns=3	FT	0,4806	-0,0194	0,0115	0,0111	0,2163	0,6163	0,3925	0,0127
	Beran	0,4861	-0,0139	0,0090	0,0088	0,2233	0,6233	0,3996	0,0111
	MLE	0,4888	-0,0112	0,0089	0,0088	0,2251	0,6251	0,4017	0,0110
ns=4	FT	0,4780	-0,0220	0,0176	0,0172	0,2587	0,6587	0,4525	0,0187
	Beran	0,4862	-0,0138	0,0130	0,0129	0,2680	0,6680	0,4616	0,0154
	MLE	0,4886	-0,0114	0,0131	0,0130	0,2695	0,6695	0,4637	0,0155
ns=5	FT	0,4774	-0,0226	0,0218	0,0213	0,2885	0,6885	0,4974	0,0234
	Beran	0,4847	-0,0153	0,0190	0,0188	0,2972	0,6972	0,5075	0,0214
	MLE	0,4851	-0,0149	0,0196	0,0194	0,2966	0,6966	0,5072	0,0220

Tabela 14: Estimação para os processos ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $p=1=q$ e $\phi_1 = 0.5$, $\theta_1 = -0.4$, $ns \in \{1, \dots, 5\}$ e $n=2000$.

Inovação	Estimador	$\phi_1 = 0,5$				$\theta_1 = -0,4$			
		média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
ns=1	FT	0,4936	-0,0064	0,0018	0,0018	0,0334	0,4334	0,1901	0,0022
	Beran	0,4954	-0,0046	0,0018	0,0018	0,0361	0,4361	0,1924	0,0022
	MLE	0,4968	-0,0032	0,0018	0,0017	0,0370	0,4370	0,1932	0,0022
ns=2	FT	0,4924	-0,0076	0,0029	0,0029	0,1607	0,5607	0,3181	0,0038
	Beran	0,4942	-0,0058	0,0029	0,0029	0,1635	0,5635	0,3213	0,0038
	MLE	0,4959	-0,0041	0,0029	0,0028	0,1648	0,5648	0,3227	0,0038
ns=3	FT	0,4913	-0,0087	0,0050	0,0050	0,2279	0,6279	0,4003	0,0061
	Beran	0,4933	-0,0067	0,0049	0,0049	0,2308	0,6308	0,4039	0,0060
	MLE	0,4949	-0,0051	0,0049	0,0049	0,2319	0,6319	0,4053	0,0060
ns=4	FT	0,4945	-0,0055	0,0064	0,0063	0,2754	0,6754	0,4638	0,0076
	Beran	0,4968	-0,0032	0,0063	0,0063	0,2786	0,6786	0,4680	0,0075
	MLE	0,4980	-0,0020	0,0063	0,0063	0,2792	0,6792	0,4689	0,0076
ns=5	FT	0,4911	-0,0089	0,0085	0,0084	0,3024	0,7024	0,5033	0,0099
	Beran	0,4941	-0,0059	0,0083	0,0083	0,3063	0,7063	0,5087	0,0098
	MLE	0,4950	-0,0050	0,0082	0,0082	0,3067	0,7067	0,5091	0,0097

Tabela 15: Estimação para os processos ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $p=1=q$ e $\phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = 0.4$, $ns \in \{1, \dots, 5\}$ e $n=1000$.

Inovação	Estimador	$\phi_1 = -0,5$				$\theta_1 = 0,4$			
		média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
ns=1	FT	-0,4942	0,0058	0,0036	0,0035	-0,0383	-0,4383	0,1968	0,0047
	Beran	-0,4963	0,0037	0,0035	0,0035	-0,0375	-0,4375	0,1961	0,0047
	MLE	-0,4974	0,0026	0,0035	0,0035	-0,0397	-0,4397	0,1980	0,0046
ns=2	FT	-0,4924	0,0076	0,0059	0,0058	-0,1635	-0,5635	0,3252	0,0077
	Beran	-0,4950	0,0050	0,0058	0,0058	-0,1634	-0,5634	0,3250	0,0077
	MLE	-0,4955	0,0045	0,0058	0,0058	-0,1649	-0,5649	0,3267	0,0076
ns=3	FT	-0,4810	0,0190	0,0123	0,0120	-0,2196	-0,6196	0,3977	0,0137
	Beran	-0,4861	0,0139	0,0101	0,0099	-0,2222	-0,6222	0,3993	0,0122
	MLE	-0,4854	0,0146	0,0099	0,0097	-0,2222	-0,6222	0,3991	0,0120
ns=4	FT	-0,4808	0,0192	0,0135	0,0131	-0,2622	-0,6622	0,4542	0,0157
	Beran	-0,4849	0,0151	0,0133	0,0131	-0,2645	-0,6645	0,4572	0,0157
	MLE	-0,4833	0,0167	0,0132	0,0129	-0,2635	-0,6635	0,4556	0,0154
ns=5	FT	-0,4756	0,0244	0,0246	0,0240	-0,2895	-0,6895	0,5016	0,0262
	Beran	-0,4845	0,0155	0,0200	0,0198	-0,2964	-0,6964	0,5077	0,0228
	MLE	-0,4821	0,0179	0,0180	0,0177	-0,2943	-0,6943	0,5030	0,0210

Tabela 16: Estimação para os processos ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $p=1=q$ e $\phi_1 = -0.5$, $\theta_1 = 0.4$, $ns \in \{1, \dots, 5\}$ e $n=2000$.

Inovação	Estimador	$\phi_1 = -0,5$				$\theta_1 = 0,4$			
		média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
ns=1	FT	-0,4981	0,0019	0,0016	0,0016	-0,0414	-0,4414	0,1971	0,0023
	Beran	-0,4992	0,0008	0,0016	0,0016	-0,0410	-0,4410	0,1968	0,0023
	MLE	-0,4996	0,0004	0,0016	0,0016	-0,0419	-0,4419	0,1975	0,0022
ns=2	FT	-0,4979	0,0021	0,0028	0,0028	-0,1681	-0,5681	0,3265	0,0037
	Beran	-0,4993	0,0007	0,0027	0,0027	-0,1682	-0,5682	0,3265	0,0037
	MLE	-0,4995	0,0005	0,0027	0,0027	-0,1689	-0,5689	0,3272	0,0036
ns=3	FT	-0,4942	0,0058	0,0044	0,0044	-0,2325	-0,6325	0,4056	0,0055
	Beran	-0,4960	0,0040	0,0044	0,0044	-0,2331	-0,6331	0,4063	0,0055
	MLE	-0,4956	0,0044	0,0043	0,0043	-0,2331	-0,6331	0,4062	0,0054
ns=4	FT	-0,4936	0,0064	0,0063	0,0063	-0,2741	-0,6741	0,4623	0,0079
	Beran	-0,4961	0,0039	0,0062	0,0062	-0,2755	-0,6755	0,4641	0,0078
	MLE	-0,4951	0,0049	0,0061	0,0061	-0,2748	-0,6748	0,4630	0,0077
ns=5	FT	-0,4911	0,0089	0,0076	0,0075	-0,3025	-0,7025	0,5027	0,0091
	Beran	-0,4936	0,0064	0,0075	0,0075	-0,3040	-0,7040	0,5047	0,0091
	MLE	-0,4910	0,0090	0,0075	0,0074	-0,3016	-0,7016	0,5012	0,0090

Tabela 17: Estimação para os processos ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $p=1=q$ e $\phi_1 = 0.5$, $\theta_1 = 0.4$, $ns \in \{0, \dots, 4\}$ e $n=1000$.

Inovação	Estimador	$\phi_1 = 0,5$				$\theta_1 = 0,4$			
		média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
ns=0	FT	0,4295	-0,0705	0,0859	0,0810	0,3265	-0,0735	0,0895	0,0842
	Beran	0,4119	-0,0881	0,0986	0,0909	0,3123	-0,0877	0,1003	0,0927
	MLE	0,4229	-0,0771	0,0778	0,0719	0,3214	-0,0786	0,0807	0,0746
ns=1	FT	0,2687	-0,2313	0,3317	0,2785	0,1676	-0,2324	0,3335	0,2797
	Beran	0,2572	-0,2428	0,3197	0,2610	0,2057	-0,1943	0,2950	0,2575
	MLE	0,2417	-0,2583	0,2560	0,1895	0,1885	-0,2115	0,2308	0,1862
ns=2	FT	0,1664	-0,3336	0,4605	0,3496	0,0601	-0,3399	0,4700	0,3548
	Beran	0,1144	-0,3856	0,4889	0,3405	0,0791	-0,3209	0,4362	0,3335
	MLE	0,1327	-0,3673	0,3529	0,2182	0,0957	-0,3043	0,3065	0,2142
ns=3	FT	0,1215	-0,3785	0,5003	0,3574	0,0114	-0,3886	0,5258	0,3752
	Beran	0,0596	-0,4404	0,5511	0,3576	0,0329	-0,3671	0,4856	0,3512
	MLE	0,0789	-0,4211	0,3982	0,2211	0,0505	-0,3495	0,3392	0,2173
ns=4	FT	0,1931	-0,3069	0,4815	0,3877	0,0848	-0,3152	0,5145	0,4156
	Beran	0,0275	-0,4725	0,6069	0,3841	0,0058	-0,3942	0,5328	0,3777
	MLE	0,0815	-0,4185	0,4044	0,2295	0,0594	-0,3406	0,3422	0,2264

Tabela 18: Estimação para os processos ARMA(p,q) adicionado de perturbação com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $p=1=q$ e $\phi_1 = 0.5$, $\theta_1 = 0.4$, $ns \in \{0, \dots, 4\}$ e $n=2000$.

Inovação	Estimador	$\phi_1 = 0,5$				$\theta_1 = 0,4$			
		média	viés	eqm	variância	média	viés	eqm	variância
ns=0	FT	0,4746	-0,0254	0,0296	0,0290	0,3730	-0,0270	0,0322	0,0315
	Beran	0,4660	-0,0340	0,0339	0,0327	0,3661	-0,0339	0,0360	0,0349
	MLE	0,4629	-0,0371	0,0310	0,0296	0,3621	-0,0379	0,0334	0,0320
ns=1	FT	0,3682	-0,1318	0,1830	0,1658	0,2666	-0,1334	0,1853	0,1677
	Beran	0,3414	-0,1586	0,2034	0,1784	0,2896	-0,1104	0,1887	0,1767
	MLE	0,3366	-0,1634	0,1692	0,1426	0,2833	-0,1167	0,1555	0,1421
ns=2	FT	0,2430	-0,2570	0,3341	0,2683	0,1445	-0,2555	0,3287	0,2637
	Beran	0,2513	-0,2487	0,3177	0,2562	0,2181	-0,1819	0,2842	0,2513
	MLE	0,2170	-0,2830	0,2699	0,1900	0,1825	-0,2175	0,2327	0,1856
ns=3	FT	0,1319	-0,3681	0,4540	0,3188	0,0332	-0,3668	0,4408	0,3066
	Beran	0,1568	-0,3432	0,4058	0,2882	0,1313	-0,2687	0,3531	0,2812
	MLE	0,1166	-0,3834	0,3662	0,2195	0,0910	-0,3090	0,3078	0,2126
ns=4	FT	0,1101	-0,3899	0,5274	0,3757	0,0118	-0,3882	0,5326	0,3823
	Beran	0,1253	-0,3747	0,4635	0,3234	0,1051	-0,2949	0,4039	0,3173
	MLE	0,0961	-0,4039	0,3868	0,2239	0,0751	-0,3249	0,3233	0,2180

7. Análise dos Resultados

A fim de facilitar a compreensão dos resultados, iremos dividir as análises em quatro (4) partes. Primeiramente analisaremos os casos com contaminação de erros com distribuição $\log\chi_1^2$ com os modelos puros, ou seja, VE-AR(1) e VE-MA(1). Após veremos os casos com contaminação de erros com distribuição $\log\chi_1^2$ com os modelos mistos, ou seja, VE-ARMA(1,1). Depois vamos verificar o que ocorre com as estimativas quando as inovações ou termos de perturbações adicionados seguem uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$ para modelos os modelos puros AR(1) e MA(1). Em seguida vamos verificar o comportamento das estimativas quando os erros seguem uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$ para modelos mistos, ou seja, ARMA(1,1). Uma análise geral dos resultados obtidos será apresentada no capítulo 8 deste estudo.

7.1 Análise dos Resultados com Contaminações $\log\chi_1^2$ para Modelos Puros

Podemos perceber que, pelas tabelas 1 à 4, o estimador FT foi quem melhor estimou o verdadeiro valor do parâmetro para ϕ_1 e θ_1 nos modelos puros, ou seja, no modelo VE-AR(1) ou VE-ARMA(1,0) e VE-MA(1) ou VE-ARMA(0,1).

Para os casos do modelo VE-AR(1) que $\phi_1 = (0,1;0,2;\dots;0,9)$ o estimador FT sempre subestimou o verdadeiro valor do parâmetro. Esse mesmo estimador foi melhorando à medida que ϕ_1 se aproximava de 0.9. O viés deste estimador aumentou um pouco até $\phi_1=0.3$ e passou a decair após $\phi_1=0.4$. Tanto o erro quadrático médio quanto a variância diminuíam à medida que ϕ_1 aumentava. Os estimadores Beran e MLE tiveram comportamentos semelhantes entre eles. Nenhum deles conseguiu se aproximar do verdadeiro valor do parâmetro. O viés destes os estimadores e o erro quadrático médio aumentaram até $\phi_1=0.8$ e decaíram muito pouco em $\phi_1=0.9$. A variância nesses últimos estimadores não mudou muito, sendo que aumentou um pouco a partir de $\phi_1=0.7$.

Quando analisamos o modelo VE-AR(1) para $\phi_1 = (-0,1; -0,2; \dots; -0,9)$, ou seja, com sinal negativo, o estimador FT se manteve como o melhor para estimar o verdadeiro valor do parâmetro. As estimativas ficaram melhores para ϕ_1 próximo de -0.1 e de -0.7 à -0.9 . O viés deste estimador aumentou até $\phi_1=0.4$ e depois passou a se comportar de forma alternada, ora aumentando, ora diminuindo, não seguindo um padrão. Tanto o erro quadrático médio quando a variância diminuíram à medida que ϕ_1 se aproximava de -0.9 . Mais uma vez, os estimadores Beran e MLE tiveram comportamentos semelhantes entre si. As estimativas ainda destes estimadores não foram boas e tanto o viés, quanto o erro quadrático médio e a variância mantiveram o mesmo comportamento quando analisamos ϕ_1 positivo.

Já para as estimativas dos modelos VE-MA(1) quando analisamos $\theta_1 = (0,1; 0,2; \dots; 0,9)$, o estimador FT se manteve como o melhor para estimar o verdadeiro valor do parâmetro. Para valores de θ_1 até o valor 0.7 , este estimador superestimou o verdadeiro valor do parâmetro, passando a subestimar a partir de $\theta_1=0.8$. Tanto o viés, quanto o erro quadrático médio e a variância se alternam ao longo das estimativas, não seguindo um padrão constante. Os estimadores Beran e MLE tiveram comportamentos semelhantes entre si. As estimativas não foram boas e pioraram à medida que θ_1 aumentava. Tanto o viés, quanto o erro quadrático médio aumentavam ao longo das estimativas. A variância destes últimos estimadores se manteve constante.

Quando analisamos os resultados obtidos para as estimativas dos modelos VE-MA(1) para $\theta_1 = (-0,1; -0,2; \dots; -0,9)$, o estimador FT ainda se manteve como o melhor para estimar o verdadeiro valor do parâmetro. Em todos os casos o estimador subestimou o valor do parâmetro. Tanto o viés, quanto o erro quadrático médio e a variância se alternam ao longo das estimativas, se comportando da mesma forma quando analisamos θ_1 positivo. Os estimadores Beran e MLE, mais uma vez, tiveram comportamentos semelhantes entre si. As estimativas não foram boas e pioraram à medida que θ_1 diminuía, ou seja, À medida que se aproximava de -0.9 . Tanto o viés, quanto o erro quadrático médio aumentavam ao longo das estimativas. A variância destes últimos estimadores se manteve constante, apresentando comportamento análogo do caso em que θ_1 era positivo.

Como o estimador FT foi o melhor estimador encontrado, apresentaremos um gráfico onde mostra a média do estimador FT para processos VE-AR(1) e VE-MA(1) onde parâmetros estimados eram positivos e o mesmo gráfico quando estimamos os valores negativos. Também mostraremos o gráficos do viés para os casos citados a fim de complementar as conclusões citadas anteriormente. Primeiro apresentaremos os gráficos para os parâmetros positivos (figura 2 e 3) e a seguir para os parâmetros negativos (figura 4 e 5).

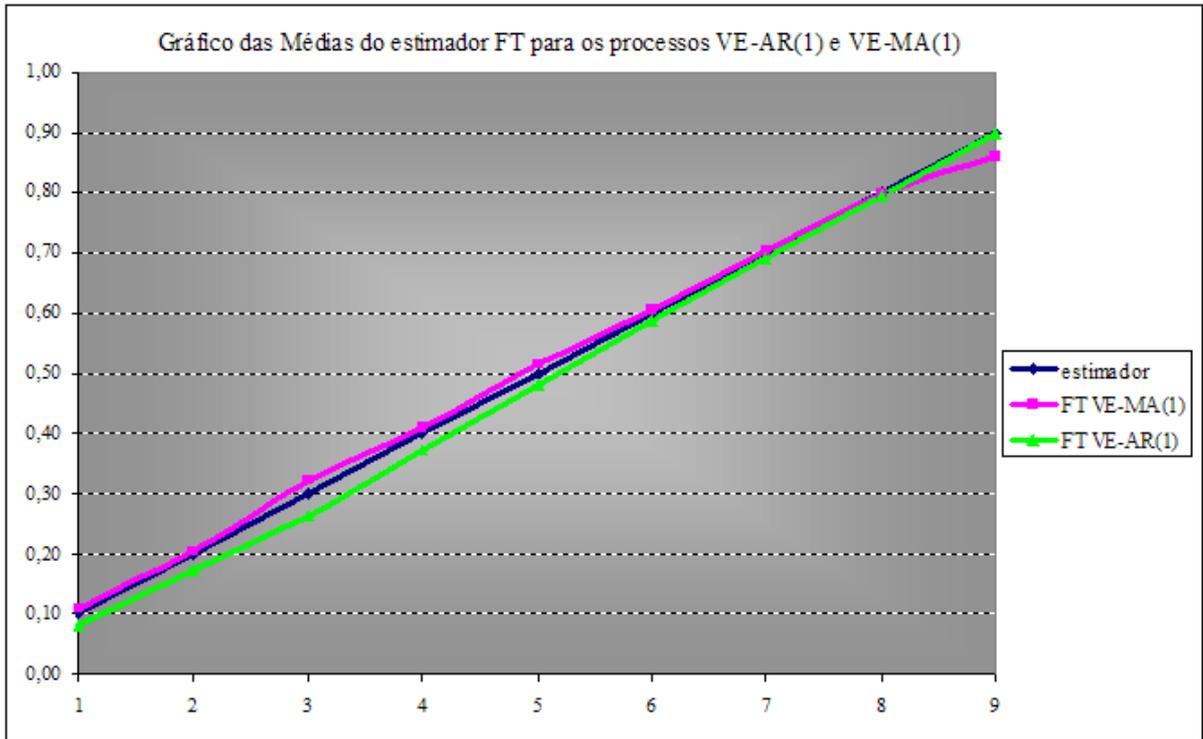


Figura 2: Gráfico das médias do Estimador FT para os processos VE-AR(1) e VE-MA(1) quando o erro possui distribuição $\log \chi_1^2$ e $\phi_1 = (0,1;0,2;...;0,9) = \theta_1$

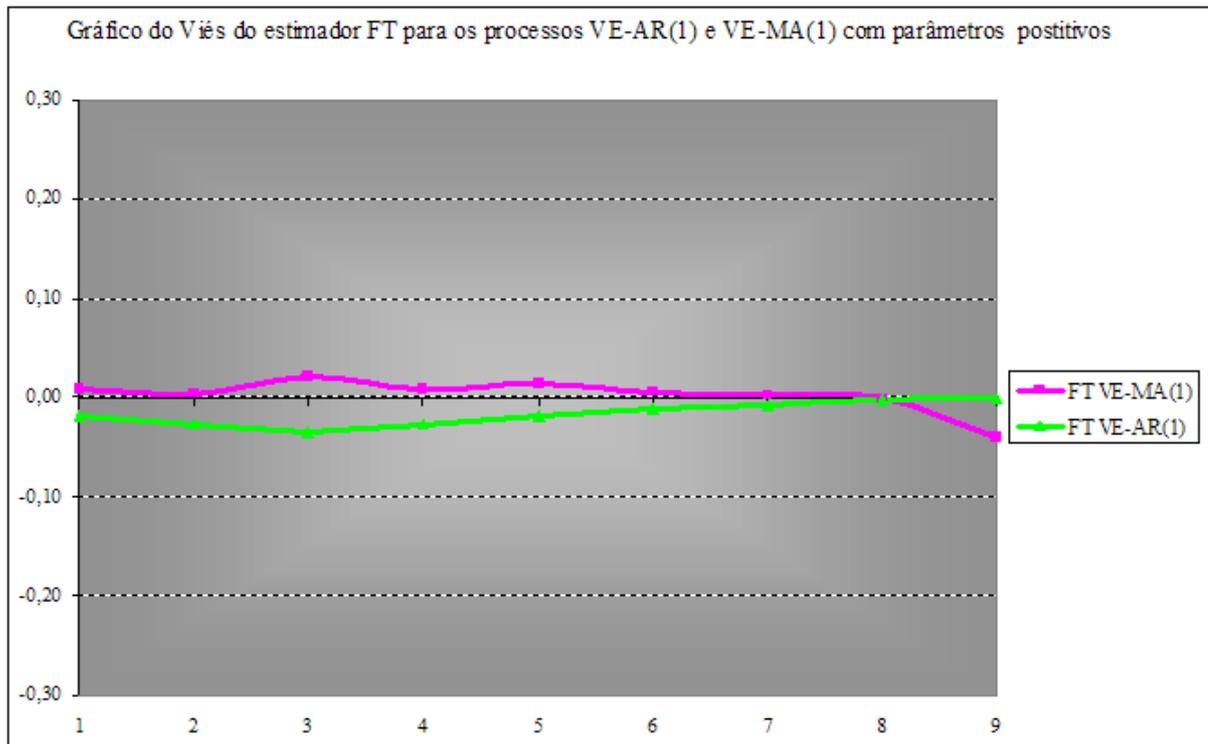


Figura 3: Gráfico para as estimativas do Viés do Estimador FT para os processos VE-AR(1) e VE-MA(1) quando o erro possui distribuição $\log \chi_1^2$ e $\phi_1 = (0, 1; 0, 2; \dots; 0, 9) = \theta_1$.

Os gráficos apresentados ratificam o que já foi dito sobre o estimador FT. É fácil visualizar que para o processo VE-MA(1) as estimativas começam superestimando o verdadeiro valor do parâmetro e passam a subestimar a partir de $\theta_1=0.8$. Para os processos VE-AR(1) o estimador sempre subestimou o verdadeiro parâmetro. Pelo viés também podemos identificar o comportamento já citado. Quando temos estimativas positivas o viés fica positivo quando superestimamos o valor que queremos estimar, uma vez que o viés é calculado subtraindo-se o verdadeiro parâmetro do valor estimado: $\text{Viés} = (\hat{\beta} - \beta)$.

Agora apresentaremos os mesmos gráficos quando os parâmetros são negativos.

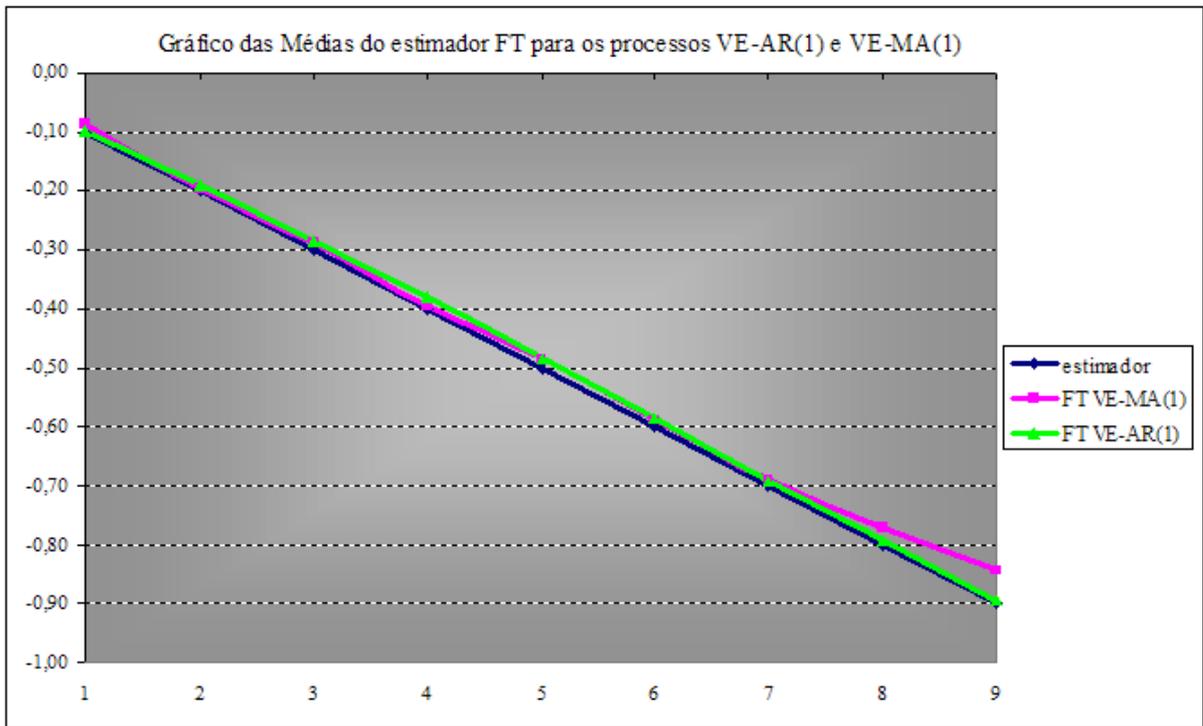


Figura 4: Gráfico das Médias do Estimador FT para os processos VE-AR(1) e VE-MA(1) quando o erro possui distribuição $\log \chi_1^2$ e $\phi_1 = (-0,1; -0,2; \dots; -0,9) = \theta_1$.

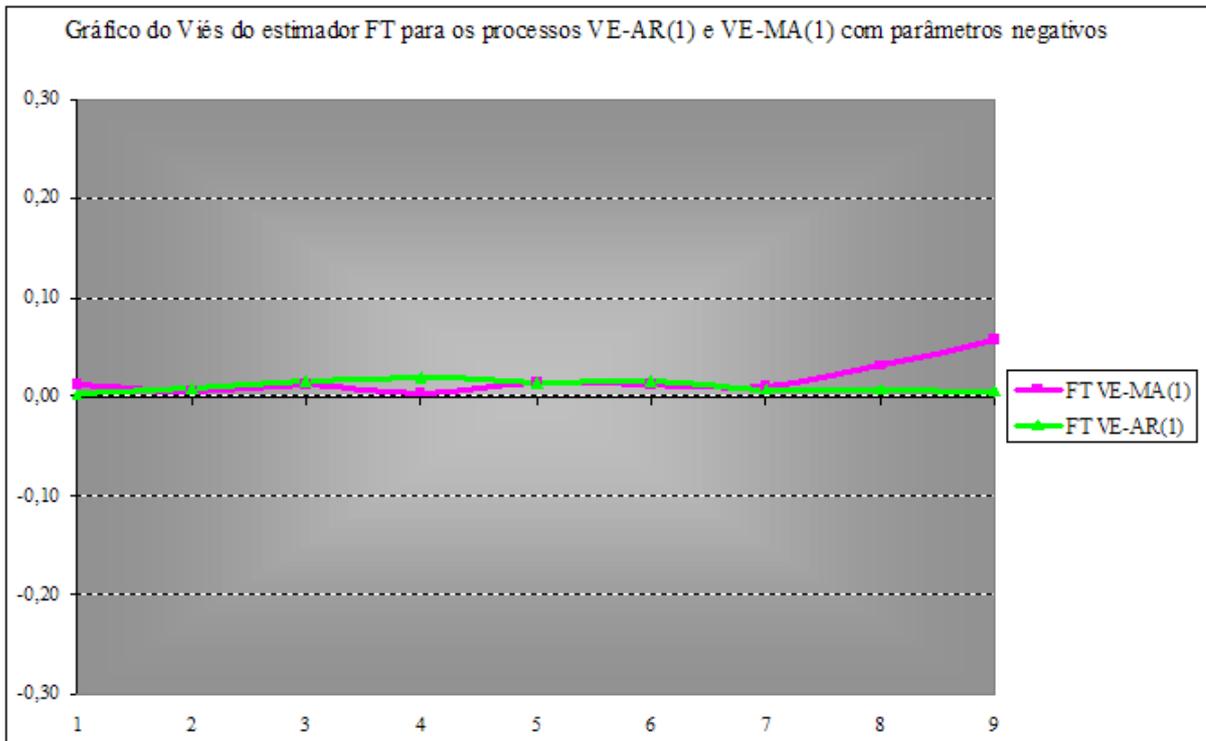


Figura 5: Gráfico para as estimativas do Viés do Estimador FT para os processos VE-AR(1) e VE-MA(1) quando o erro possui distribuição $\log \chi_1^2$ e $\phi_1 = (-0,1; -0,2; \dots; -0,9) = \theta_1$.

Os gráficos acima, mais uma vez, reforçam o que já foi dito sobre o estimador FT. É fácil visualizar que em ambos os processos o estimador sempre subestimou o verdadeiro parâmetro. Pelo viés também podemos identificar este tipo de comportamento. Quando temos estimativas negativas o viés fica positivo quando subestimamos o valor que queremos estimar.

A seguir apresentaremos as conclusões sobre as estimativas para os modelos mistos VE-ARMA(1,1) quando assumimos as inovações com distribuição $\log\chi_1^2$.

7.2 Análise dos Resultados com Contaminações $\log\chi_1^2$ para Modelos Mistos

Pela análise das tabelas 5 à 8 percebe-se que, apesar de ter tido problemas para estimar os parâmetros quando ϕ_1 e θ_1 tinham sinais iguais, ainda assim o estimador FT foi o que apresentou os melhores resultados.

Quando ϕ_1 e θ_1 tinham sinais positivos, nenhum estimador conseguiu se aproximar do verdadeiro valor estipulado para o parâmetro, ou seja $\phi_1=0,5$ e $\theta_1=0,4$. O estimador FT foi quem melhor estimou os parâmetros, apesar dos maus resultados apresentados os quais ainda estavam longe do verdadeiro parâmetro a ser estimado. O estimador FT apresentou menor viés tanto para ϕ_1 quanto θ_1 . Os estimadores Beran e MLE apresentaram estimativas muito ruins. Para os valores estimados de ϕ_1 , FT apresentou também menor erro quadrático médio (EQM) enquanto que o estimador MLE apresentou menor variabilidade para esse parâmetro. Para as estimativas de θ_1 o estimador MLE apresentou menor EQM e também menor variância. Em contrapartida, quando os parâmetros tinham sinais negativos, ou seja, $\phi_1=-0,5$ e $\theta_1=-0,4$, o estimador FT foi quem apresentou os piores resultados, uma vez que estimou todos os parâmetros com sinais positivos, obtendo assim o maior viés nesta simulação. Os estimadores Beran e MLE ficaram muito longe dos verdadeiros parâmetros, apesar de terem acertado o sinal deste. Para esse caso, o estimador MLE obteve o menor viés, EQM e variância.

Ao analisarmos os estimadores quando ϕ_1 e θ_1 tinham sinais opostos, o estimador FT estimou muito bem os valores tanto para ϕ_1 quanto para θ_1 , obtendo assim os menores vícios

e EQM's nesta simulação. Observou-se também que este estimador subestimou os valores de ϕ_1 e superestimou os valores de θ_1 . Todos os estimadores chegaram bem próximos ao verdadeiro valor do parâmetro de ϕ_1 , porém tanto o estimador Beran quanto o MLE estimaram θ_1 com sinal oposto. Para $\phi_1=0,5$ e $\theta_1=-0,4$, FT obteve a menor variância para ϕ_1 , enquanto MLE obteve a menor variância para θ_1 . Para $\phi_1=-0,5$ e $\theta_1=0,4$, FT obteve o menor novamente a menor variância para ϕ_1 , enquanto que, desta vez, o estimador Beran obteve a menor variância para θ_1 .

Abaixo seguem os gráficos comparativos das médias dos valores estimados por todos os estimadores comparados com o verdadeiro valor que deveria ser estimado.

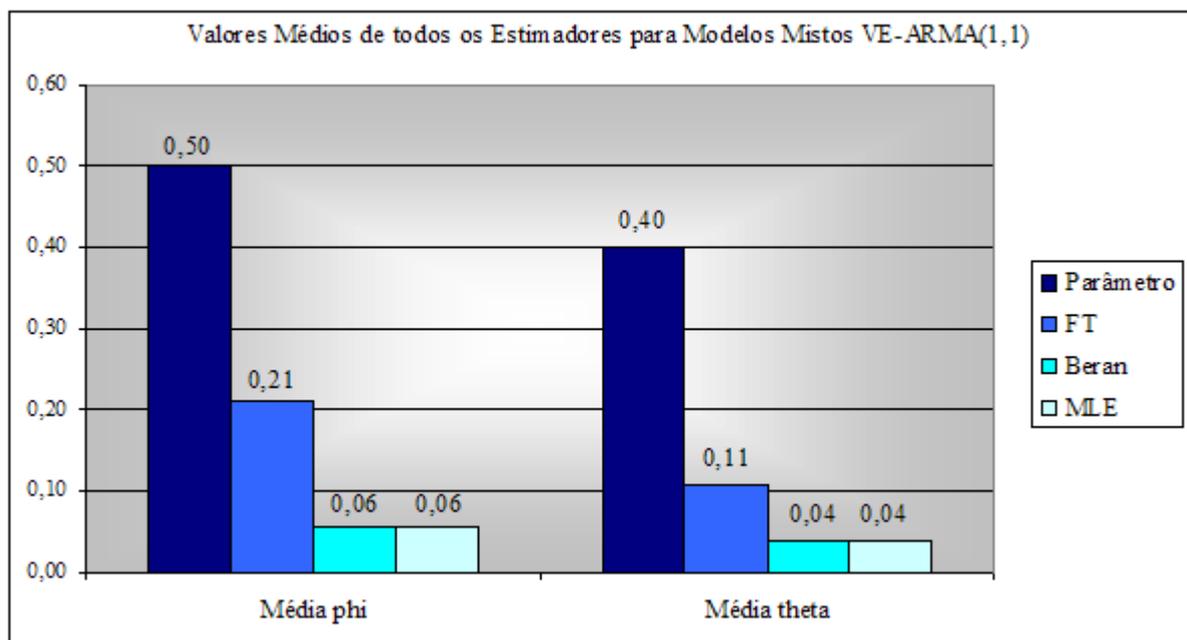


Figura 6: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos VE-ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $\log \chi_1^2$ e $\phi_1=0,5$ e $\theta_1=0,4$

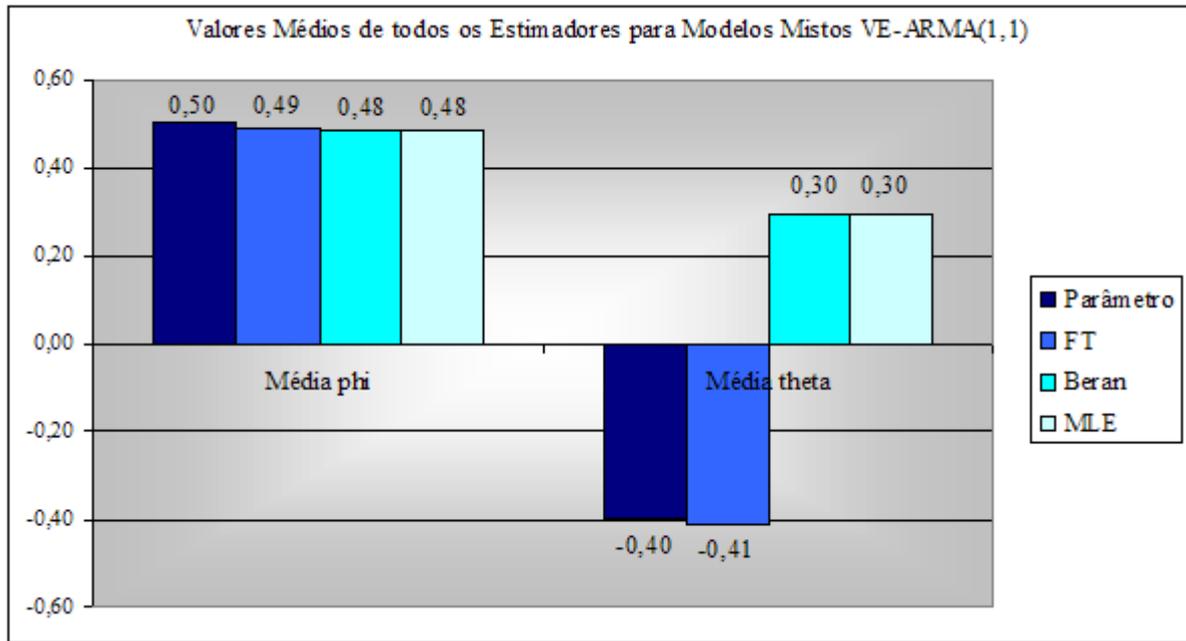


Figura 7: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos VE-ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $\log \chi_1^2$ e $\phi_1=0,5$ e $\theta_1=-0,4$

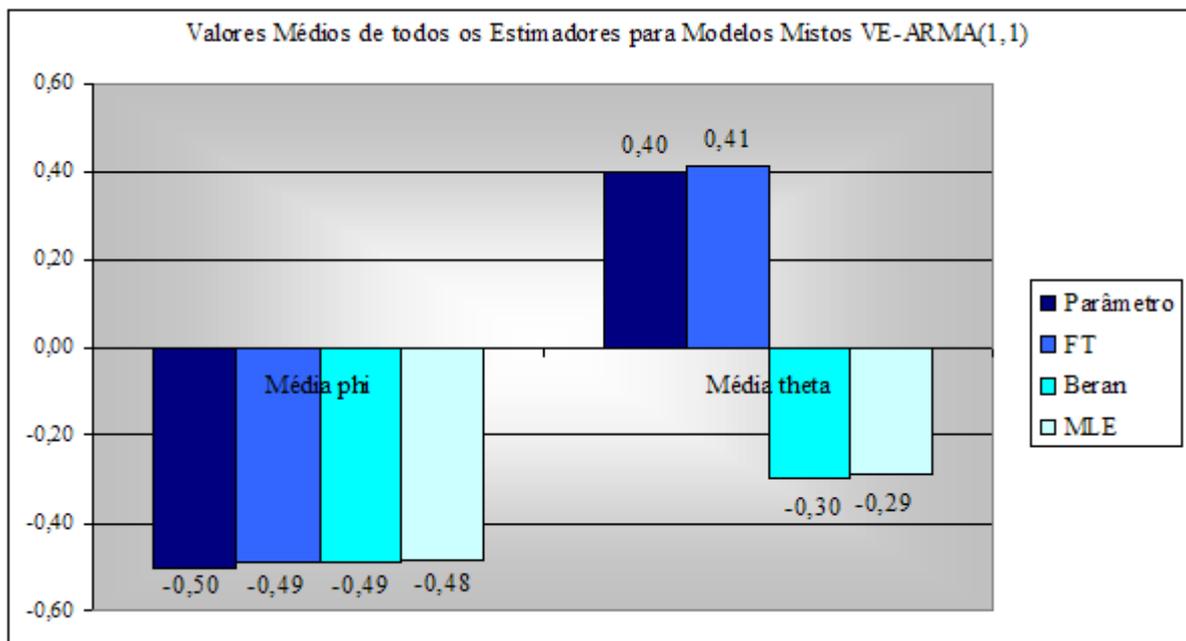


Figura 8: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos VE-ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $\log \chi_1^2$ e $\phi_1=-0,5$ e $\theta_1=0,4$

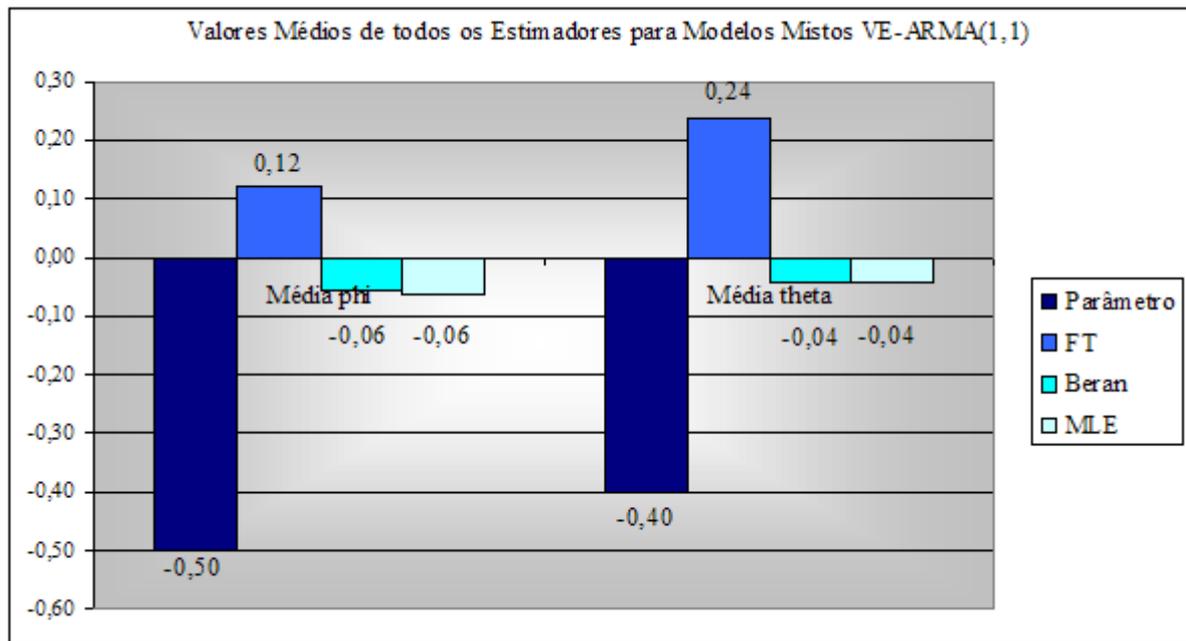


Figura 9: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos VE-ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $\log \chi_1^2$ e $\phi_1 = -0,5$ e $\theta_1 = -0,4$

Pelos gráficos apresentados, ficou evidente na visualização de que quando os parâmetros possuem sinais opostos, todos os estimadores se comportam bem para as estimativas de ϕ_1 . O estimador FT foi quem apresentou os melhores resultados para ϕ_1 e θ_1 com sinais positivos e o pior para os estimadores com sinais negativos. Quando ϕ_1 e θ_1 possuem sinais opostos, FT estima bem ambos os parâmetros. O mesmo não ocorre com os estimadores Beran e MLE que invertem o sinal de θ_1 .

A seguir apresentaremos as conclusões para as estimativas quando as inovações ou termos de perturbações adicionados seguem uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$ para modelos os modelos puros AR(1) e MA(1).

7.3 Análise dos Resultados com Contaminações $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ para Modelos Puros

Podemos perceber que, pelas tabelas 9 à 12, o estimador FT foi quem melhor estimou o verdadeiro valor do parâmetro para ϕ_1 e θ_1 nos modelos puros, ou seja, no modelo AR(1) ou ARMA(1,0) e MA(1) ou ARMA(0,1).

Para estes casos analisaremos diferentes tipos de contaminações ou perturbações. Em cada uma das simulações utilizamos a contaminação com uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$. Já havíamos definido antes que $\sigma_\eta^2 = 1$, logo, $\sigma_\varepsilon^2 = ns$ e $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$.

Para os casos do modelo AR(1) que $\phi_1 = 0,5$ e $\phi_1 = -0,5$ o estimador FT sempre subestimou o verdadeiro valor do parâmetro. Esse mesmo estimador foi piorando à medida que ns aumentava a não ser no caso em que $\phi_1 = -0,5$ quando o estimador FT melhorou em ns=4, mas voltou a piorar quando ns=5. Os estimadores Beran e MLE não apresentaram boas estimativas para os parâmetros iniciais propostos e tanto para ϕ_1 positivo ou negativo as estimativas pioravam à medida que ns aumentava. Sabe-se que à medida que ns aumenta, a tendência é que as estimativas piorem, uma vez que estamos acrescentando mais erros a nossa série inicial. Em todos os casos o estimador FT obteve os menores vícios e também os menores erros quadráticos médios. Os estimadores Beran e MLE obtiveram resultados muito próximos e a menor variância tanto para ϕ_1 positivo ou negativo.

Já nos casos do modelo MA(1) que $\theta_1 = 0,5$ e $\theta_1 = -0,5$ tivemos resultados semelhantes. O estimador FT sempre subestimou o verdadeiro valor do parâmetro quando $\theta_1 = 0,5$ e foi piorando à medida que ns aumentava. Em contrapartida, quando $\theta_1 = -0,5$ o estimador FT superestimou o valor do parâmetro até ns=3. Mais uma vez o estimador FT obteve os menores vieses e os menores EQM's. Assim como aconteceu nos modelos AR(1), os estimadores Beran e MLE não apresentaram boas estimativas para os parâmetros iniciais propostos e tanto para θ_1 positivo ou negativo as estimativas pioravam à medida que ns

aumentava. Os estimadores Beran e MLE obtiveram resultados muito próximos e a menor variância tanto para θ_1 positivo ou negativo.

Abaixo apresentaremos os gráficos com as estimativas das médias dos parâmetros de todos os modelos para demonstrar o comportamento das simulações à medida que ns aumenta.

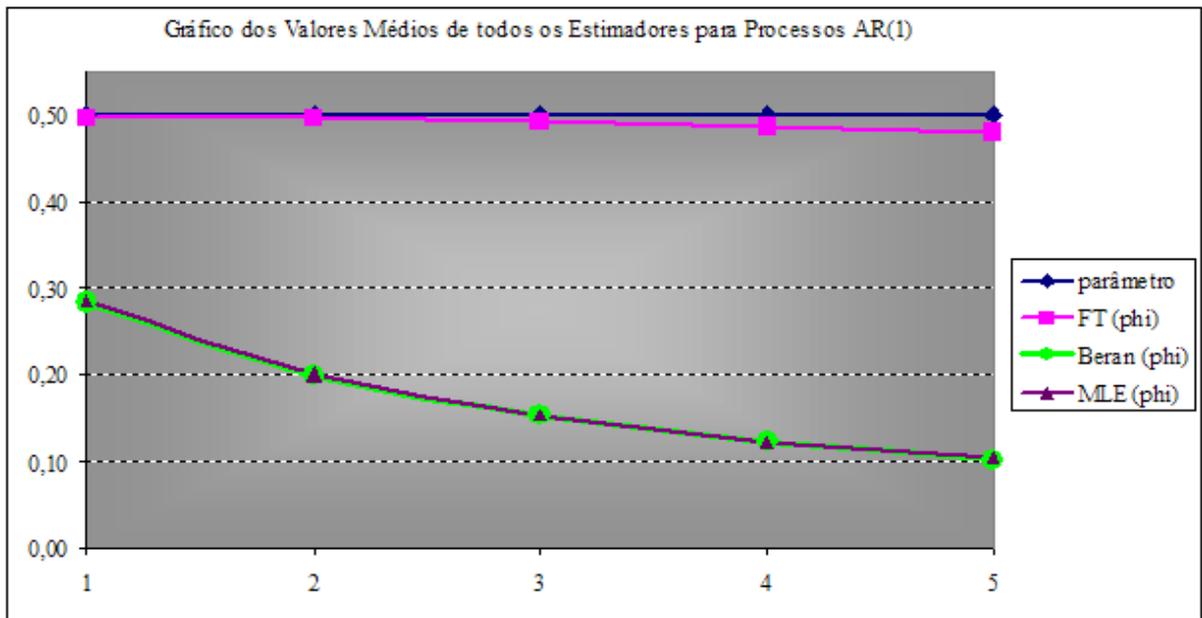


Figura 10: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos AR(1) quando o erro possui distribuição

$$N(0, \sigma_\epsilon^2) \text{ onde } \sigma_\epsilon^2 = ns \text{ e } ns \in \{1, 2, \dots, 5\} \text{ e } \phi_1 = 0,5$$

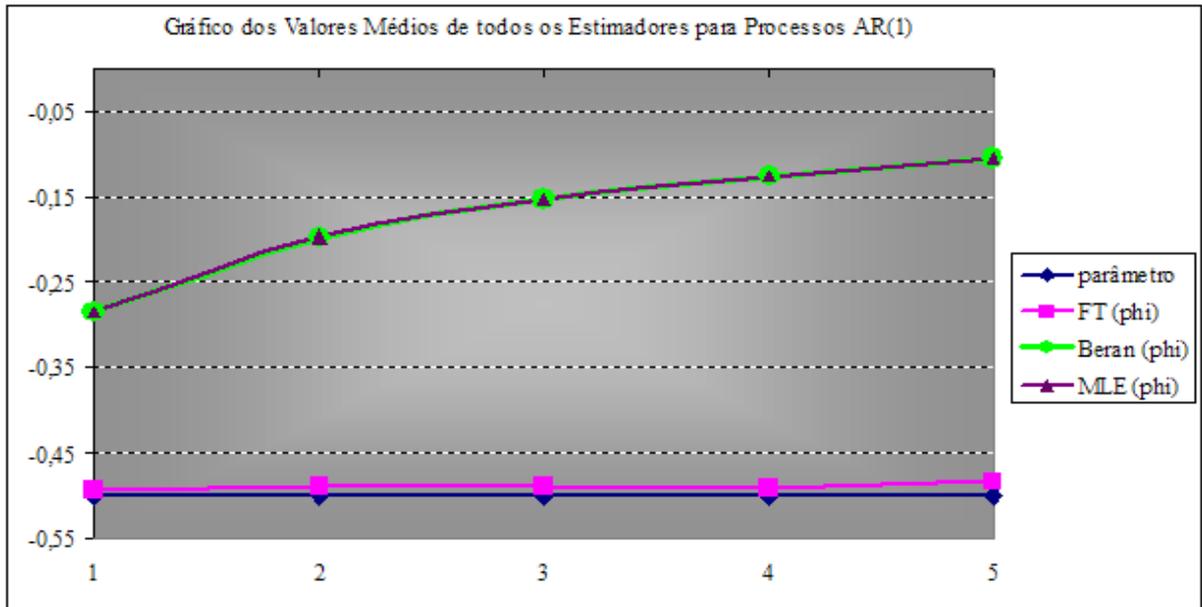


Figura 11: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos AR(1) quando o erro possui distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ onde $\sigma_\varepsilon^2 = ns$ e $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$ e $\phi_1 = -0,5$

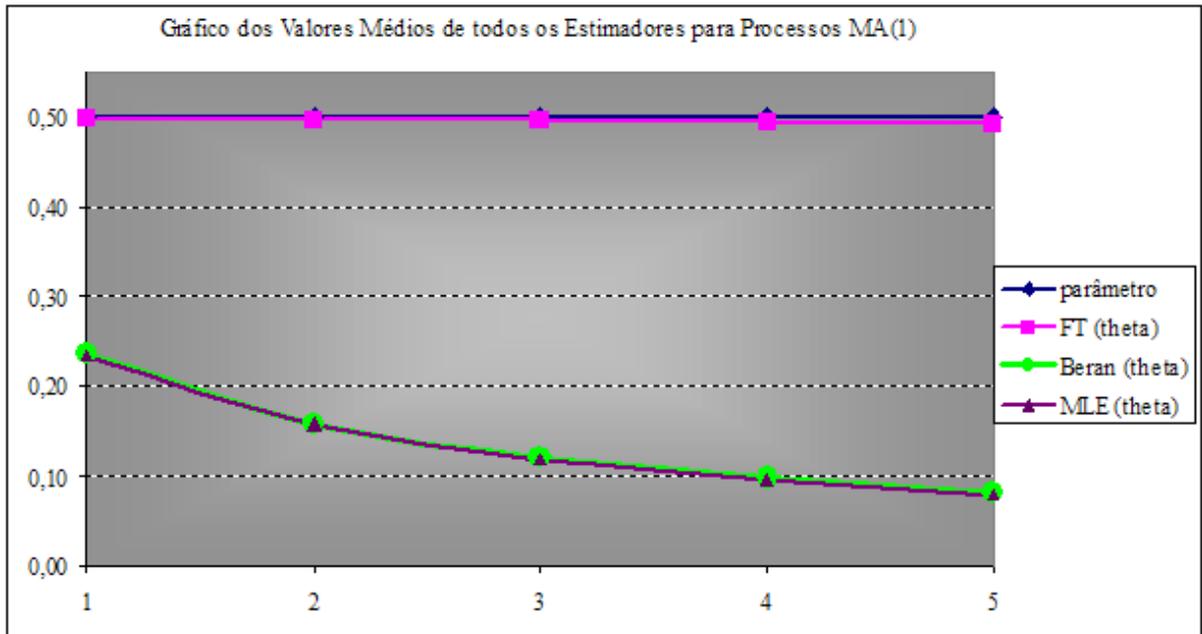


Figura 12: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos MA quando o erro possui distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ onde $\sigma_\varepsilon^2 = ns$ e $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$ e $\theta_1 = 0,5$

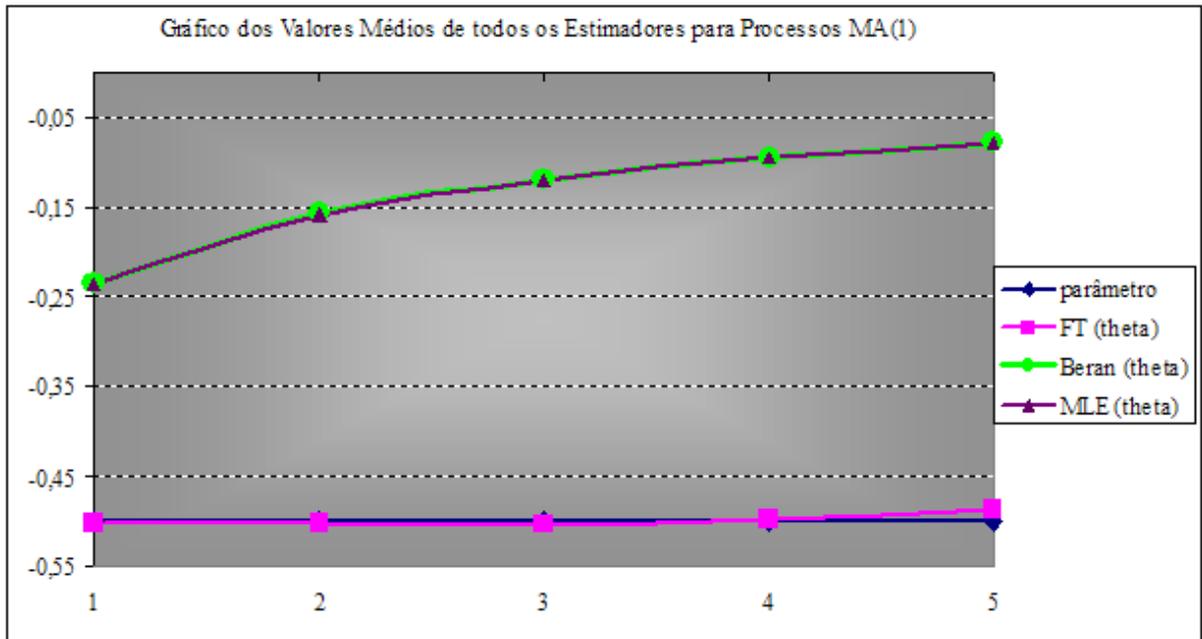


Figura 13: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos MA(1) quando o erro possui distribuição

$$N(0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ onde } \sigma_\varepsilon^2 = ns \text{ e } ns \in \{1, 2, \dots, 5\} \text{ e } \theta_1 = -0,5$$

Dessa forma, de acordo com os gráficos apresentados, ficou evidente a visualização das análises apresentadas. É fácil visualizar que o estimador FT foi o que apresentou o melhores resultados para as estimativas dos parâmetros em todos os casos analisados, à medida que os estimadores Beran e MLE não apresentaram bons resultados e foram piorando quando aumentava o valor de ns.

Agora vamos verificar o comportamento das estimativas quando os erros seguem uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$ para modelos mistos, ou seja, ARMA(1,1).

7.4 Análise dos Resultados com Contaminações $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ para Modelos Mistos

Nesta seção apresentaremos a análise dos resultados dos modelos mistos ARMA(1,1) com adição de diferentes inovações. Para estes casos analisaremos diferentes tipos de contaminações ou perturbações. Em cada uma das simulações utilizamos a contaminação com

uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$. Já havíamos definido antes que $\sigma_\eta^2 = 1$, logo, $\sigma_\varepsilon^2 = ns$ e $ns = (1, 2, \dots, 5)$.

Pelos resultados apresentados nas tabelas 13 à 18 percebe-se então que, quando analisamos os estimadores com os parâmetros com sinais opostos, encontramos problemas para a estimação do parâmetro θ_1 . Em todos os casos os parâmetros de ϕ_1 ficaram bem estimados. Quando os parâmetros tinham o mesmo sinal, ou seja, quando ambos eram positivos, não encontramos estimativas realmente boas para nenhum dos parâmetros estipulados nas simulações.

Agora, analisando caso a caso, quando ϕ_1 e θ_1 tinham sinais inversos, ou seja, no caso de $\phi_1 = 0,5$ e $\theta_1 = -0,4$ o estimador MLE foi quem melhor estimou o valor de ϕ_1 para $n=1000$ e $n=2000$, apesar de que todos os estimadores encontraram bons valores para este parâmetro. As estimativas melhoravam e os vícios diminuía à medida que n aumentou. Da mesma forma que nos modelos puros, os modelos mistos tiveram estimativas piores quando ns aumentava. Nos dois tamanhos de amostra o MLE obteve melhor média, vício, EQM e variância na estimativa do parâmetro ϕ_1 . Já as estimativas de θ_1 ficaram muito ruins. Nenhum dos estimadores conseguiu estimar esse parâmetro com o sinal correto, dado que o valor atribuído para o parâmetro era de $\theta_1 = -0,4$. Quando n aumentou as estimativas de θ_1 pioraram ainda mais, gerando valores muito longes do verdadeiro parâmetro estabelecido e ainda com sinais inversos. As médias, vícios, EQM's e variâncias tiveram resultados bastante próximos para todos os estimadores estudados de θ_1 , não nos permitindo garantir qual deles foi o melhor nessa simulação.

Quando ϕ_1 era negativo e θ_1 positivo, ou seja, $\phi_1 = -0,5$ e $\theta_1 = 0,4$ o estimador MLE foi quem melhor estimou o valor de ϕ_1 para $n=1000$ e $n=2000$ quando $ns \in \{1, 2\}$. A partir de $ns=3$, o estimador Beran se aproximou mais do verdadeiro valor do parâmetro para os dois tamanhos de amostra estudados, dado que obteve menor viés. Todos os estimadores encontraram bons valores para este parâmetro. As estimativas melhoravam e os vícios diminuía à medida que n aumentou. em contrapartida as estimativas ficavam piores quando ns aumentava. Para $n=1000$, o EQM e a variância dos estimadores de ϕ_1 ficaram muito

próximos até $ns=2$. A partir daí, o estimador Beran obteve os melhores resultados de EQM e variância. Quando $n=2000$ tanto o EQM quanto à variância ficaram muito próximos para todos os estimadores. Já as estimativas de θ_1 , assim como no caso anterior, ficaram todas muito ruins. Nenhum dos estimadores conseguiu estimar esse parâmetro com o sinal correto. Quando n aumentou a estimativa de θ_1 piorou. O parâmetro continuou sendo estimado com sinais inversos e o viés aumentou. As médias, vícios, EQM's e variâncias também tiveram resultados bastante próximos para todos os estimadores estudados de θ_1 e, dessa forma não podemos argumentar qual deles foi melhor, mesmo que nenhum deles tenha sido bom.

Quando ϕ_1 e θ_1 tinham o mesmo sinal, ou seja, quando ambos eram positivos, nos casos em que $\phi_1=0,5$ e $\theta_1=0,4$ nós simulamos os estimadores para $ns \in \{0,1,\dots,4\}$ a fim de comparar com o modelo ARMA(1,1) sem ruído. O caso de $ns=5$ não foi simulado pois com os resultados obtidos já podia se perceber o comportamento das simulações quando ns aumentava. Nessas simulações, encontramos diferentes resultados para cada ns estudado e para as amostras de tamanho $n=1000$ e $n=2000$. Quando $n=1000$ o estimador FT foi quem melhor estimou os parâmetros de ϕ_1 . As estimativas em geral não foram boas. Quando aumentamos o tamanho da amostra para $n=2000$, o estimador FT ainda se saiu melhor para $ns \in \{1,2\}$ e depois o estimador Beran foi quem melhor estimou o parâmetro ϕ_1 . Apesar de não ter estimado bem o valor do parâmetro ϕ_1 , o estimador MLE foi quem obteve os menores EQM's e variâncias para este parâmetro. Quando analisamos os valores estimados para o parâmetro θ_1 não foi possível identificar um comportamento constante. Verificamos que, para $n=1000$, o estimador FT obteve o menor viés para $ns=0$ e $ns=4$. Para $ns=1$ quem teve o menor viés foi o estimador Beran e para $ns=2$ e 3 quem obteve o menor viés foi o MLE. Nos casos em que o tamanho da amostra era de $n=2000$ o estimador FT só obteve o menor viés para $ns=0$. Nos demais casos o estimador Beran foi quem obteve o menor viés para o parâmetro θ_1 . O estimador MLE apresentou os menores EQM's e variâncias nos dois tamanhos de amostra nos modelos com contaminação. Apesar de definirmos os melhores estimadores utilizando o critério de menor viés, nenhuma das estimativas ficaram realmente boas e os vícios ficaram bem altos.

A seguir são apresentados os gráficos comparativos das médias dos valores estimados por estimador comparados com o verdadeiro valor que deveria ser estimado.

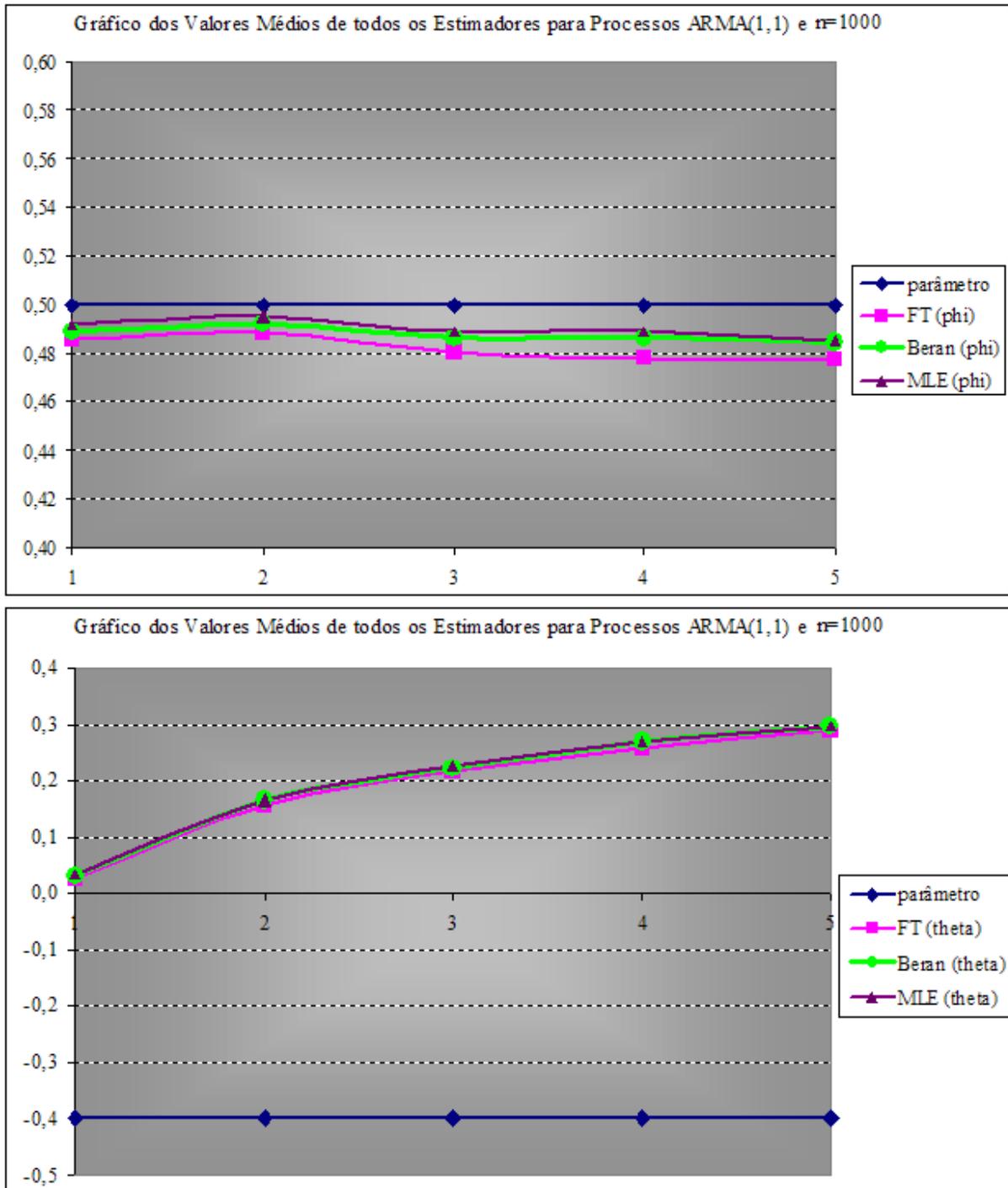


Figura 14: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ onde $\sigma_\varepsilon^2 = ns$ e $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$ e $\phi_1=0,5$ e $\theta_1=-0,4$ e $n=1000$.

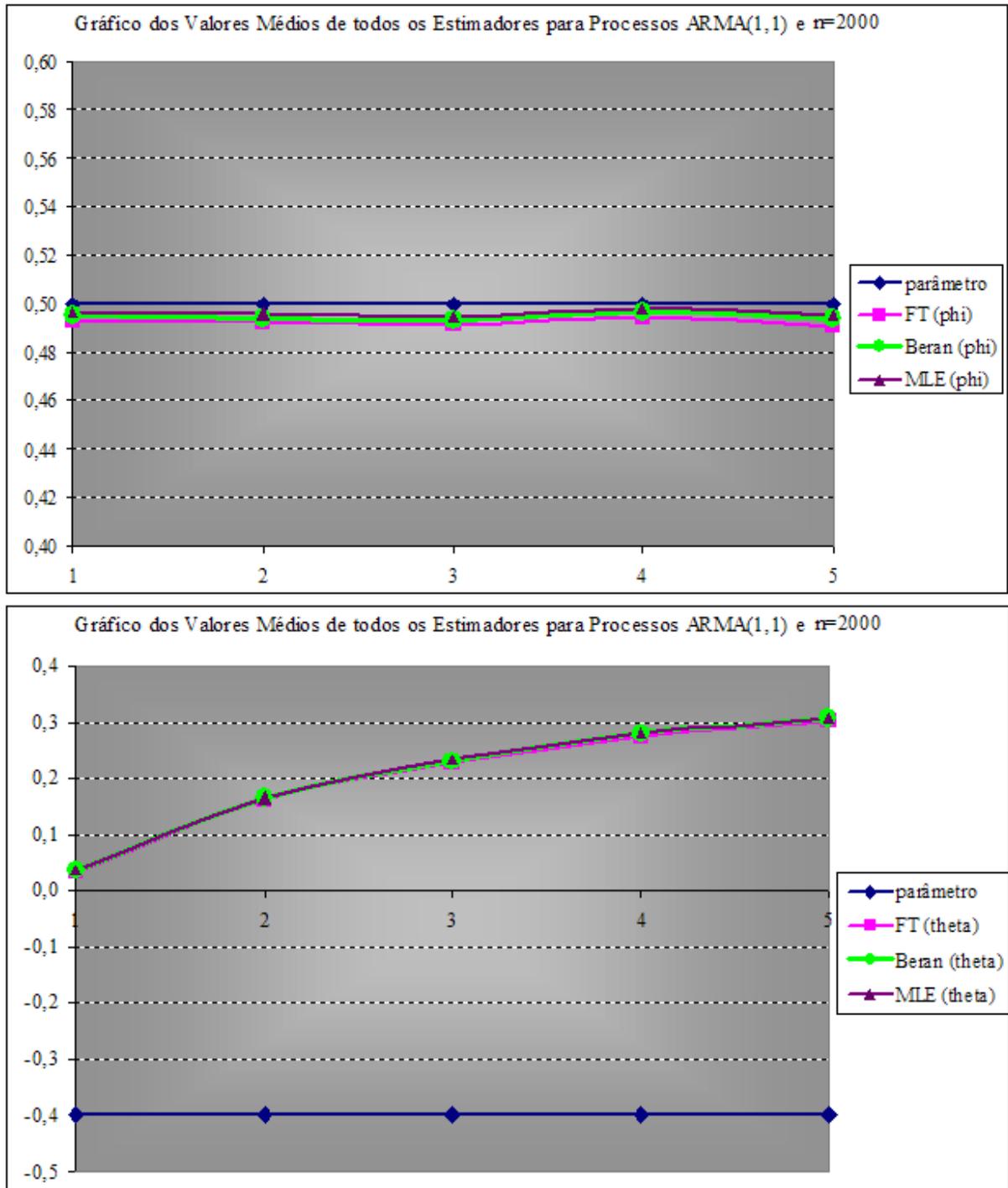


Figura 15: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ onde $\sigma_\varepsilon^2 = ns$ e $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$ e $\phi_1=0,5$ e $\theta_1=-0,4$ e $n= 2000$.

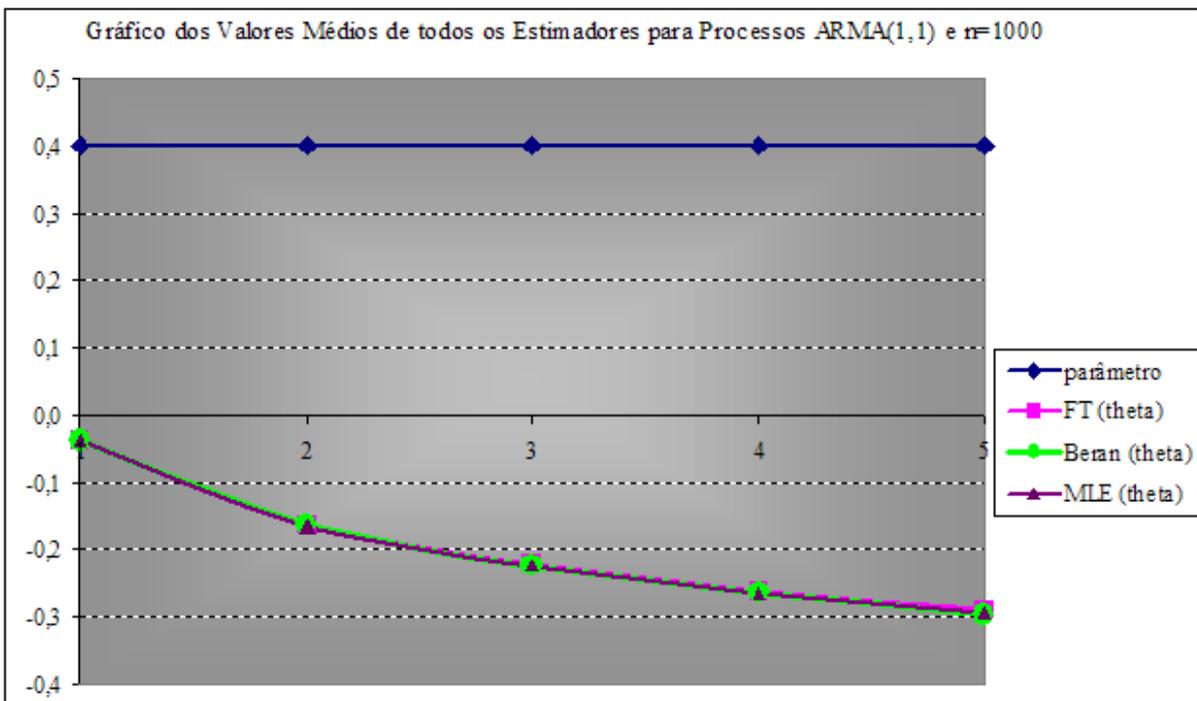
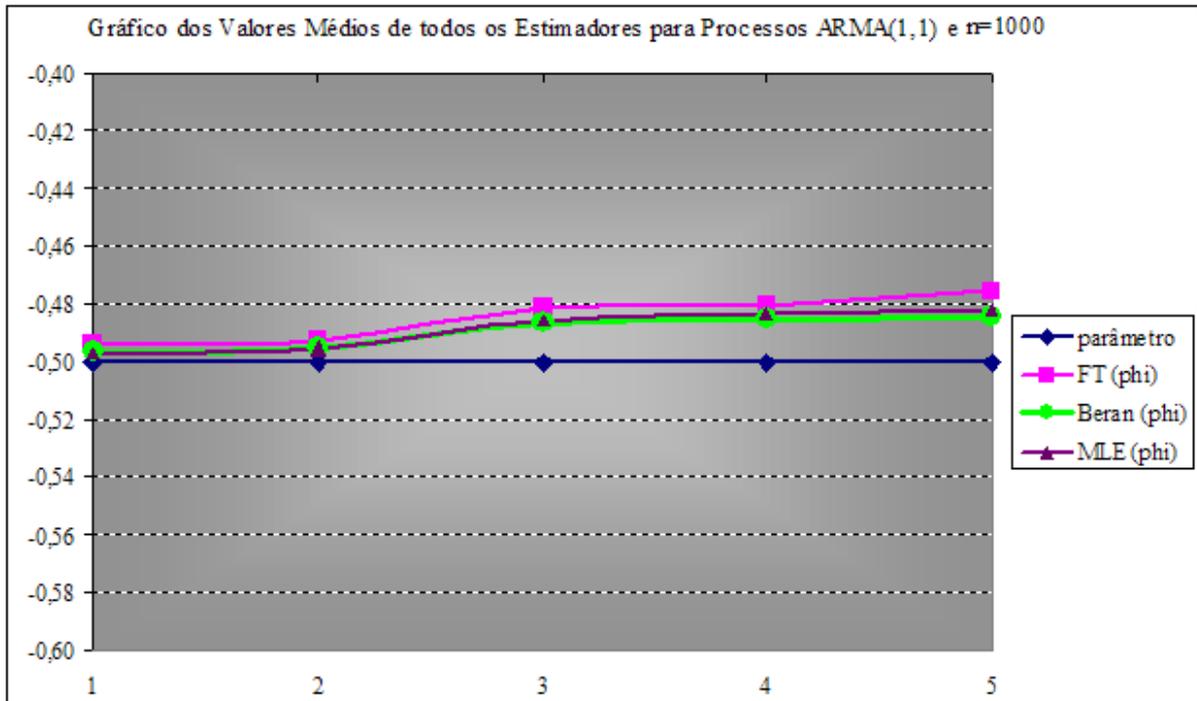


Figura 16: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ onde $\sigma_\varepsilon^2 = ns$ e $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$ e $\phi_1 = -0,5$ e $\theta_1 = 0,4$ e $n = 1000$.

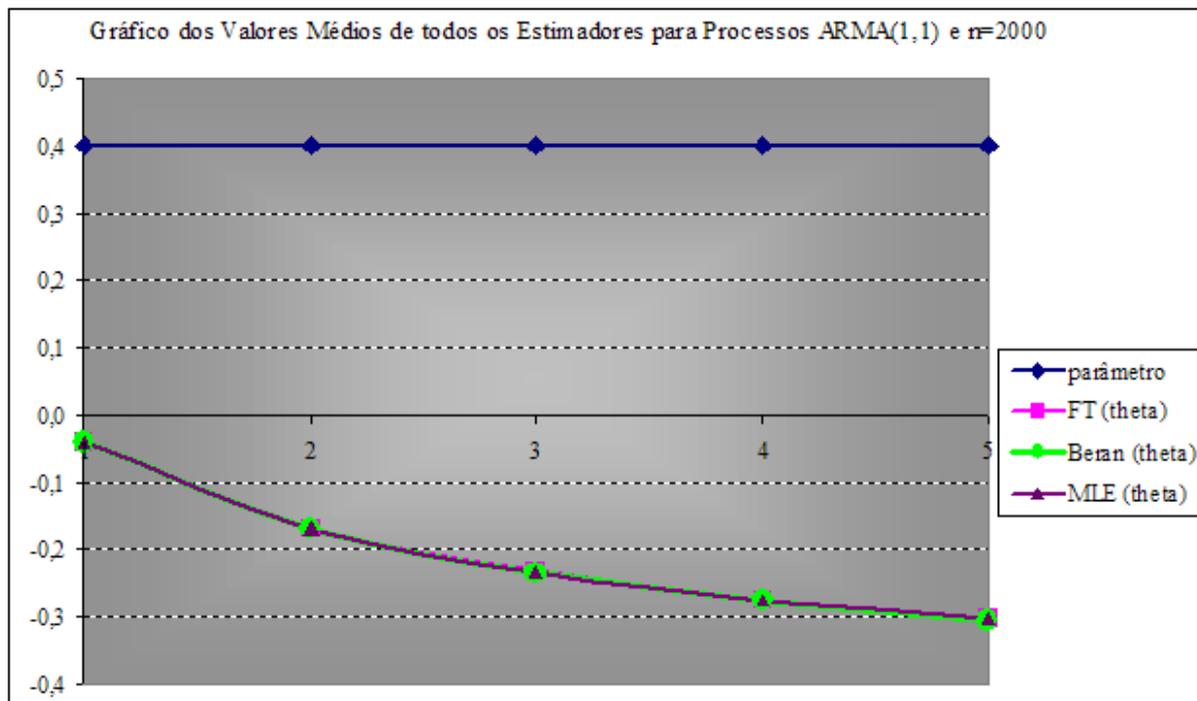
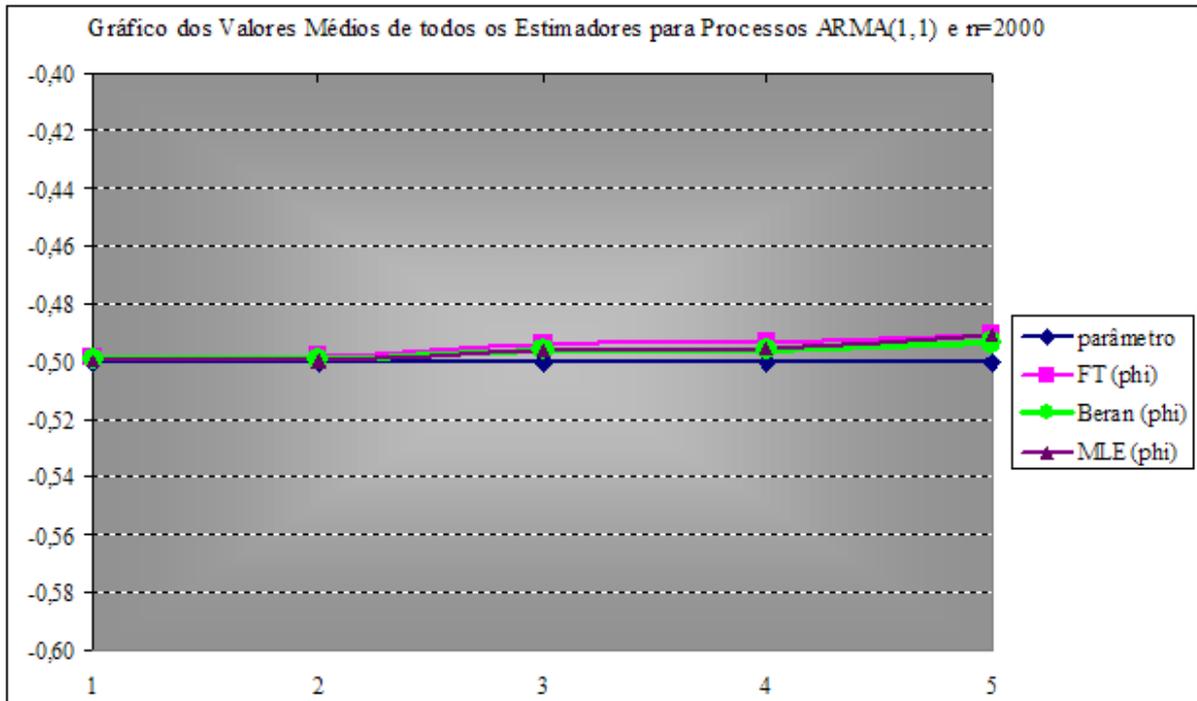


Figura 17: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ onde $\sigma_\varepsilon^2 = ns$ e $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$ e $\phi_1 = -0,5$ e $\theta_1 = 0,4$ e $n = 2000$.

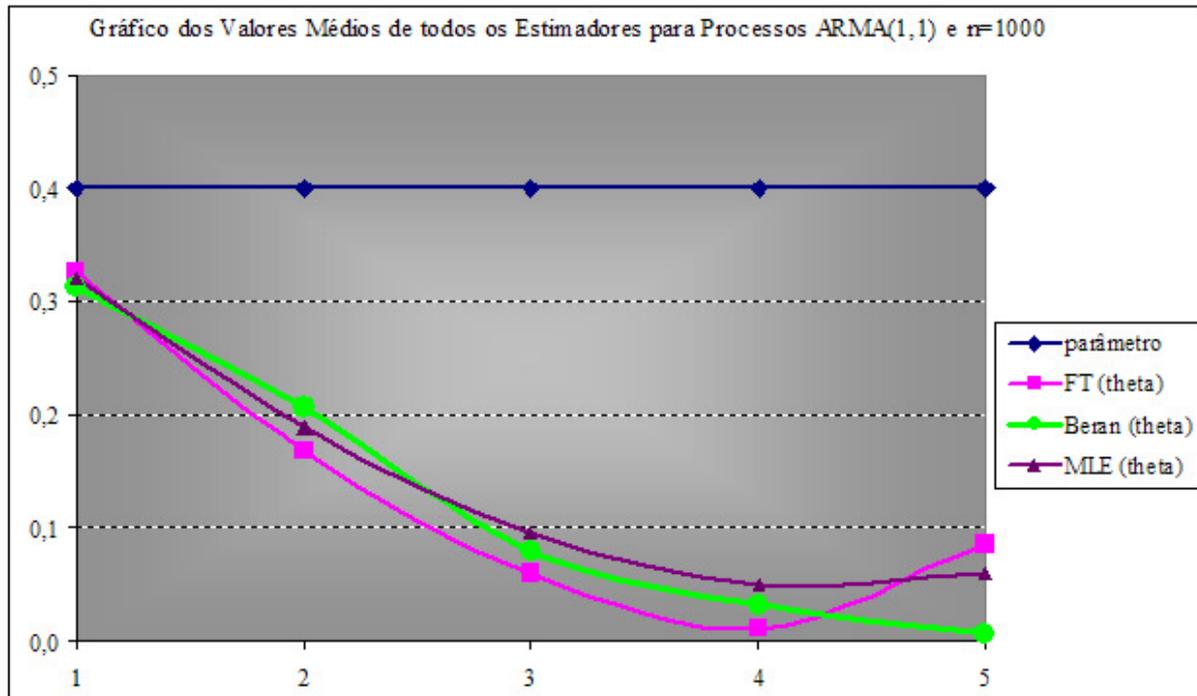
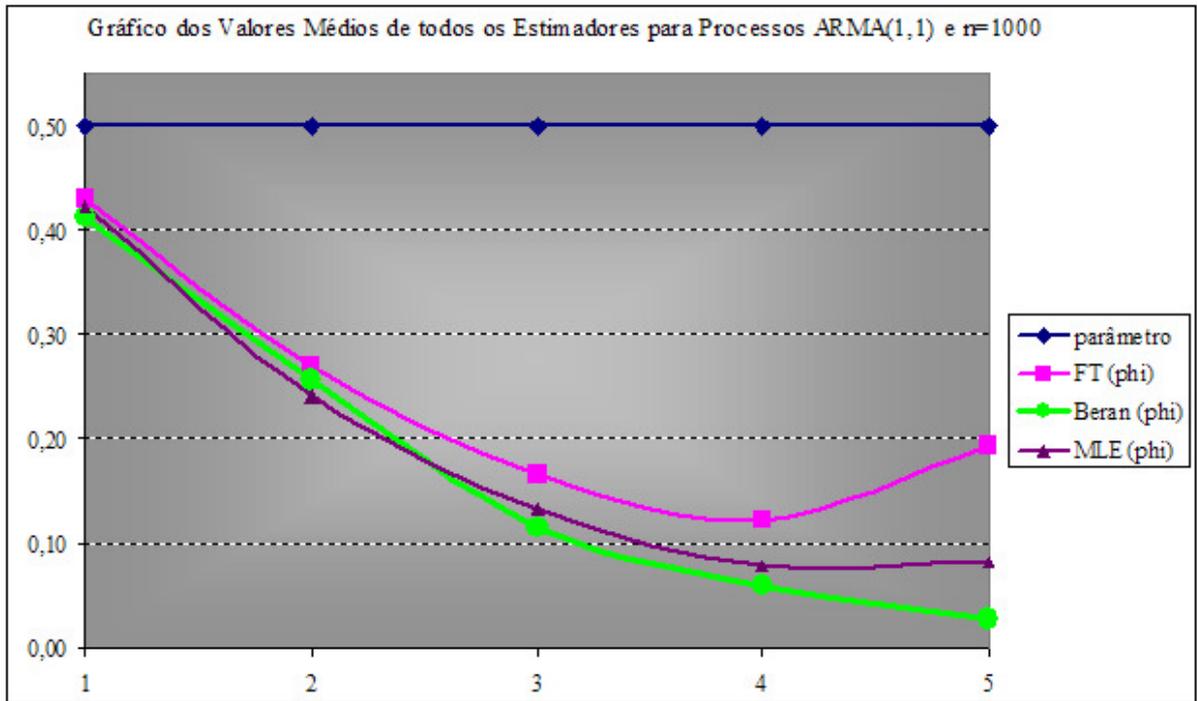


Figura 18: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $N(0, \sigma_\epsilon^2)$

onde $\sigma_\epsilon^2 = ns$ e $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$ e $\phi_1=0,5$ e $\theta_1=0,4$ e $n=1000$.

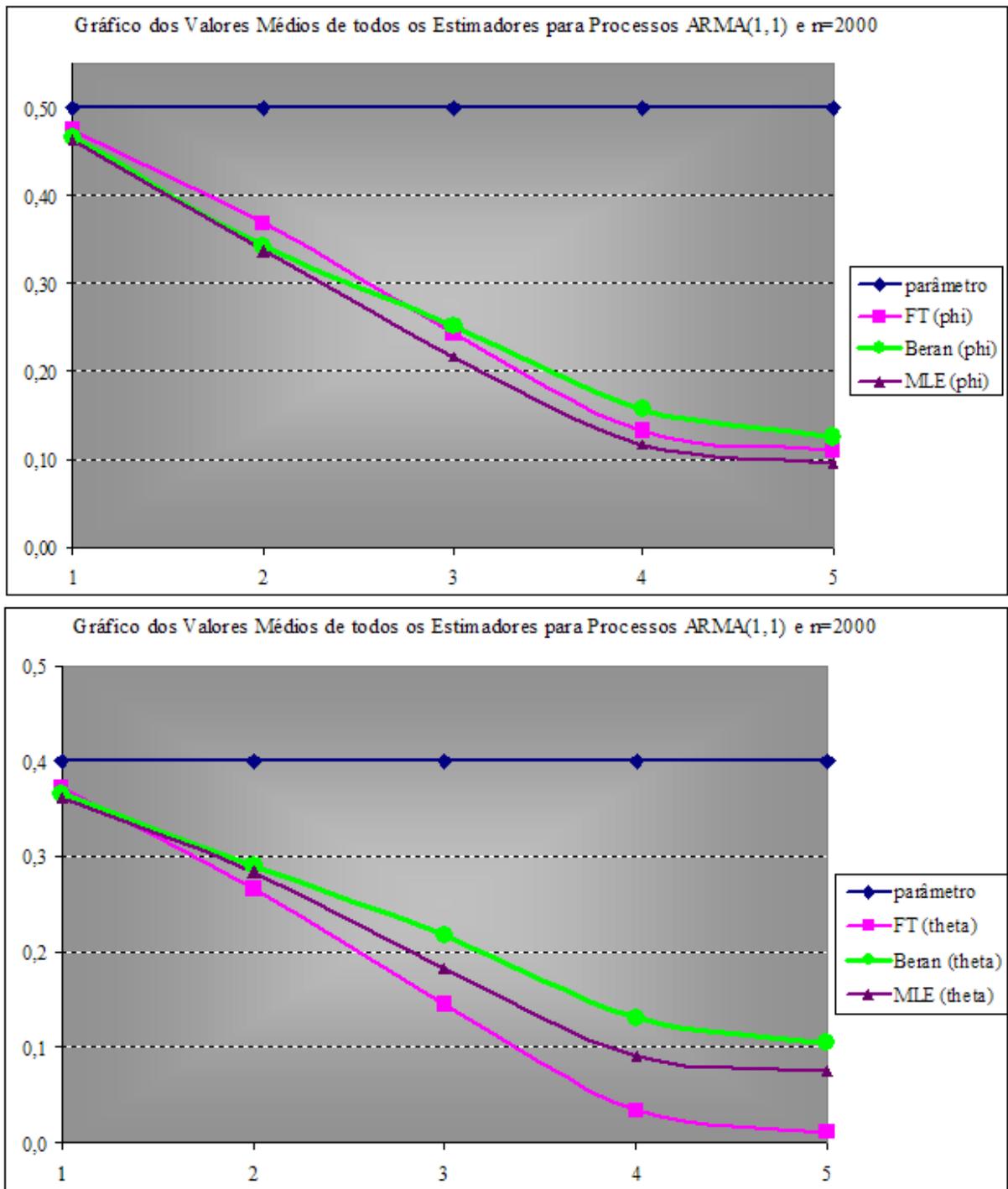


Figura 19: Gráfico para as estimativas da Média de todos os estimadores para os processos ARMA(1,1) quando o erro possui distribuição $N(0, \sigma_\epsilon^2)$ onde $\sigma_\epsilon^2 = ns$ e $ns \in \{1, 2, \dots, 5\}$ e $\phi_1=0,5$ e $\theta_1=0,4$ e $n=2000$.

Os gráficos apresentados ajudam a elucidar o que já foi dito acerca dos estimadores. Ficou claro na visualização dos gráficos de que quando os parâmetros possuem sinais inversos, todos os estimadores se comportam bem para as estimativas de ϕ_1 mas nenhum

deles consegue estimar o parâmetro de θ_1 com o sinal correto e todos eles estimam de forma semelhante esses valores com sinal inverso. Quando analisamos os estimadores com sinais positivos todos os estimadores conseguem estimar ϕ_1 e θ_1 com sinal correto, mas vão piorando consideravelmente à medida que n_s e n aumentam.

No capítulo 8, a seguir, serão apresentadas as conclusões gerais deste estudo.

8. Conclusões Finais

Após a apresentação de todos os resultados e análise de cada um dos processos simulados, chegamos a conclusão de que a estimação nos modelos mistos VE-ARMA(1,1), com inovações seguindo uma distribuição $\log\chi_1^2$ ou para modelos ARMA(1,1) adicionando erros com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 * ns$, em geral, não obtivemos estimativas boas para todos os parâmetros.

Verificamos que, no caso de contaminações com distribuição $\log\chi_1^2$ para modelos com sinais opostos, o único estimador que consegue se aproximar do verdadeiro valor dos parâmetros ϕ_1 e θ_1 é o estimador FT, sendo que para o parâmetro ϕ_1 ele subestima o verdadeiro valor e para algumas estimativas do parâmetro θ_1 ele superestimou o verdadeiro valor estipulado. Os demais estimadores geraram um valor para o parâmetro θ_1 com sinal oposto ao que deveria ser estimado. Já em estimações com o mesmo sinal, quando apresentamos os resultados para ϕ_1 e θ_1 positivos, nenhum estimador se aproximou do verdadeiro parâmetro, mas pelo menos nenhum estimou o parâmetro com sinal invertido, caso este que ocorreu nas simulações quando ϕ_1 e θ_1 eram negativos, dado que o estimador FT gerou ambos os parâmetros com sinais positivos.

Nos modelos mistos ARMA(1,1) com adição de ruídos com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ verificamos que todos os estimadores quando tínhamos ϕ_1 e θ_1 com sinais invertidos não conseguiram estimar o verdadeiro valor de θ_1 , sendo que sempre foram gerados parâmetros com sinal inverso ao verdadeiro valor. Os parâmetros ϕ_1 , em geral, foram sempre bem estimados nos modelos mistos, sendo que o estimador que mais se destacou foi o MLE, apesar das más estimativas para o parâmetro θ_1 . Quanto mais aumentávamos o valor de ns , piores eram as estimativas encontradas. Quando aumentamos o tamanho da amostra, as estimativas para o parâmetro ϕ_1 se tornaram melhores, em contrapartida as estimativas para o parâmetro θ_1 pioraram. Não chegamos a analisar o caso em que ϕ_1 e θ_1 tinham sinais negativos por problemas de convergência durante as simulações, mas analisamos o caso em que ambos possuem sinal positivo. Foi verificado que as estimativas não foram boas em nenhum dos

estimadores estudados. O modelo gerado com $ns=0$, ou seja, sem contaminação apresentou melhores resultados para o estimador FT. Porém, à medida que ns e o tamanho da amostra aumentavam, a tendência era que as estimativas ficassem piores para as simulações com ϕ_1 e θ_1 positivos.

No caso de contaminações com distribuição $\log \chi_1^2$ para modelos puros VE-AR(1) e VE-MA(1) todos os estimadores apresentaram bons resultados para os parâmetros. Verificou-se que entre todos os estimadores estudados, o que apresentou melhor resultado foi o estimador FT, que possuiu menor viés em todos os casos analisados. Pôde-se perceber que os problemas encontrados nas simulações dos modelos mistos com adição de termos de perturbações não se repetiu durante as simulações dos modelos puros com perturbações.

Nas estimações para os modelos puros AR(1) e MA(1) quando adicionamos erros com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, apenas o estimador FT apresentou bons resultados nas estimativas dos parâmetros ϕ_1 e θ_1 .

9. Referências

- [1] Bezerra, M.I.S. (2006). “Apostila de Análise de Séries Temporais”. UNESP, São Paulo.
- [2] Bisognin, C. (2003). “Estimação e Previsão em Processos com longa Dependência Sazonais”. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- [3] Breidt, F. J., N. Crato e P. de Lima (1998). “The Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility”. *Journal of Econometrics*, **83**: 325-348.
- [4] Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York.
- [5] Brockwell, P.J. e R.A. Davis (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer St., New York.
- [6] Chiepp, L. O. (2003). “Testes de Ajustamento de Modelos em Processos com Longa Dependência”. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- [7] Crato, N. e B. K. Ray (2002). “Semi-parametric Smoothing Estimators for Long-Memory Processes With Added Noise”. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **105**:283-297.
- [8] Hatadani, I. M. (2004). “Estimação de Parâmetros em Modelos ARFIMA”. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Computação Científica da UNICAMP, Campinas.
- [9] Lopes, S. R. C., B. P. Olbermann e V.A. Reisen (2002). “Nonstationary Gaussian ARFIMA Processes: Estimation and Application”. *Brazilian Review of Econometrics*, **22**: 109-110.
- [10] Morettin, P. A. e C. M Toloí (2004). *Análise de Séries Temporais*. Blücher, São Paulo.

- [11] Morettin, P. A. (2006). *Um Curso em Séries Temporais Financeiras*. ABE, São Paulo.
- [12] Olbermann, B.P. (2002). “Estimação em Classes de Processos Estocásticos com Decaimento Hiperbólico da Função de Autocorrelação”. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- [13] Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis in Time Series*. Academic Press: New York.
- [14] Reisen, V.A (2007). Minicurso: Modelo ARFIMA. UFES, Tocantins.
- [15] Wei, W. (1990). “*Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*”. Addison Wesley : New York.