

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Determinação do Autovalor Dominante da
Equação de Transporte em Geometria
Planar pela Combinação dos Métodos LTS_N
e Esquema Iterativo de Potência**

por

Maglliane Maicá Figueredo

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena
Orientador

Prof. Ricardo Carvalho de Barros
Co-Orientador

Porto Alegre, 28 de janeiro de 2011.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Figueredo, Magliane Maicá

Determinação do Autovalor Dominante da Equação de Transporte em Geometria Planar pela Combinação dos Métodos LTS_N e Esquema Iterativo de Potência / Magliane Maicá Figueredo.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2011.

44 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2011.

Orientador: Vilhena, Marco Tullio Menna Barreto de; Co-Orientador: Barros, Ricardo Carvalho de

Dissertação: Matemática Aplicada
Fenômenos de Transporte

Determinação do Autovalor Dominante da Equação de Transporte em Geometria Planar pela Combinação dos Métodos LTS_N e Esquema Iterativo de Potência

por

Maglliane Maicá Figueredo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Numérica e Computação Científica

Orientador: Prof. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Ricardo Carvalho de Barros

Banca examinadora:

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas
PUC RS

Prof. Dr. Bardo Bodmann
UFRGS

Prof. Dra. Cynthia Feijó Segatto
UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
28 de janeiro de 2011.

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter iluminado o meu caminho e pela sabedoria que permitiu que eu realizasse este trabalho.

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais, Olavo e Donatila, pelo apoio incondicional, incentivo e confiança que depositaram em mim.

Agradeço aos professores Marco Tullio e Ricardo pela confiança em mim depositada, pelos auxílios e sugestões durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Agradeço a UFRGS, em especial ao PPGMAp e seus professores, que possibilitaram um curso de mestrado com qualidade e gratuito.

Agradeço aos amigos, presentes ou não, que de alguma forma me auxiliaram na construção deste trabalho. Agradeço aos meus colegas, demais professores do PPGMAp e do DENUC e a todos que de alguma forma ou de outra me auxiliaram no crescimento e desenvolvimento deste trabalho.

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Espessura da placa [cm]
\mathbf{A}	Matriz dos termos de perda de nêutrons
\mathbf{A}^k	Matriz \mathbf{A} da região k
$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{s})$	Inversa da matriz \mathbf{M}_N
a_{ij}	Elementos da matriz \mathbf{A}
$\mathbf{B}(\mathbf{x})$	Matriz dos autovetores da matriz \mathbf{A}
C	Região do combustível em uma placa heterogênea
$\mathbf{D}(\mathbf{x})$	Matriz dos autovalores da matriz \mathbf{A}
$\mathbf{D}_1(\mathbf{x})$	Matriz dos autovalores negativos da matriz \mathbf{A}
$\mathbf{D}_2(\mathbf{x})$	Matriz dos autovalores positivos da matriz \mathbf{A}
F	Operador de perda de nêutrons
$f(\mu)$	Fluxo angular incidente em $x = 0$ na direção μ
$g(\mu)$	Fluxo angular incidente em $x = x_0$ na direção μ
$\mathbf{H}(\mathbf{x})$	Matriz da convolução entre a matriz \mathbf{A} e o vetor do termo fonte \mathbf{S}
\mathbf{I}	Matriz identidade
K	Número de regiões em uma placa heterogênea
k_{eff}	Fator de multiplicação de nêutrons
\mathbf{M}	Operador de perda de nêutrons
\mathbf{M}_N	Matriz da diferença entre a matriz transformada de \mathbf{A} e a matriz identidade
$P_\ell^m(\mu)$	Funções associadas de Legendre
$Q(x, \mu)$	Termo fonte
Q_i^k	Elemento de posição i da matriz do termo fonte da região k
R	Região do refletor em uma placa heterogênea
S	Termo fonte
$\mathbf{S}(\mathbf{x})$	Vetor do termo fonte
$\bar{\mathbf{S}}(s)$	Vetor transformado do termo fonte
x	Variável espacial
x_0	Extremidade a esquerda em uma placa homogênea
x_{k-1}	Extremidade a esquerda na região k de uma placa heterogênea
x_k	Extremidade a direita na região k de uma placa heterogênea
\mathbf{X}	Matriz dos autovetores de \mathbf{A}
\mathbf{X}^{-1}	Inversa da matriz dos autovetores de \mathbf{A}

SÍMBOLOS GREGOS

Λ	Matriz albedo
α_i	Ésimo elemento da diagonal da matriz Λ
σ_t	Seção de choque macroscópica total
σ_s	Seção de choque diferencial de espalhamento
σ_f	Seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons
ν	Número médio de nêutrons emitidos por fissão
β_ℓ	Coefficiente dos polinômios de Legendre tabelado
Θ	Ângulo de espalhamento
φ	Ângulo azimutal
$\Psi_\mu(\mathbf{x})$	Vetor fluxo angular de nêutrons na direção μ
$\bar{\Psi}(s)$	Vetor fluxo angular de nêutrons transformado
ω_m	Pesos da quadratura de Gauss-Legendre
μ_j	Raízes dos polinômios de Legendre

Conteúdo

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	x
1 INTRODUÇÃO	1
2 O MÉTODO LTS_N PARA PROBLEMAS DE CRITICALIDADE	5
2.1 FORMULAÇÃO LTS_N PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MEIOS HOMOGÊNEOS	6
2.2 FORMULAÇÃO LTS_N PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MEIOS HETEROGÊNEOS	13
3 CÁLCULO DO FATOR DE MULTIPLICAÇÃO EFETIVO	17
3.1 O MÉTODO DA POTÊNCIA	17
3.2 O ESTUDO DA CRITICALIDADE PELO MÉTODO LTS_N	20
4 CONDIÇÕES DE CONTORNO DO TIPO ALBEDO	22
4.1 PARA UMA REGIÃO REFLETORA	22
4.2 DUAS REGIÕES REFLETORAS	24
5 RESULTADOS NUMÉRICOS	26
5.1 RESULTADOS NUMÉRICOS NO ESTUDO DA CRITICALIDADE PELO MÉTODO EXPLÍCITO	26
5.1.1 PROBLEMA MODELO Nº 1: CÁLCULO DO k_{eff} EM UMA PLACA HOMOGÊNEA	27
5.1.2 PROBLEMA MODELO Nº 2: CÁLCULO DO k_{eff} EM UMA PLACA HETEROGÊNEA COM DUAS REGIÕES	29
5.1.3 PROBLEMA MODELO Nº 3: CÁLCULO DO k_{eff} EM UMA PLACA HETEROGÊNEA COM TRÊS REGIÕES	31

5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS COM CONDIÇÕES DE CON- TORNHO DO TIPO ALBEDO	34
6 CONCLUSÕES	38
BIBLIOGRAFIA	40

Lista de Figuras

Figura 2.1	Representação de uma placa com k regiões	14
Figura 4.1	Representação esquemática de um domínio refletido típico . . .	22
Figura 4.2	Representação esquemática de um domínio refletido com "baffle".	24

Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 1	28
Tabela 5.2	Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 1 pelo código ANISN	28
Tabela 5.3	Desvio relativo percentual do problema modelo n° 1 do código ANISN para o método LTS_N combinado com os métodos da Bisseção e da Potência	29
Tabela 5.4	Parâmetros do problema modelo n° 2	30
Tabela 5.5	Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 2	30
Tabela 5.6	Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 2 pelo código ANISN	30
Tabela 5.7	Desvio relativo percentual do problema modelo n° 2 do código ANISN para o método LTS_N combinado com os métodos da Bisseção e da Potência	31
Tabela 5.8	Parâmetros do problema modelo n° 3	32
Tabela 5.9	Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 3	32
Tabela 5.10	Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 3 pelo código ANISN	33
Tabela 5.11	Desvio relativo percentual do problema modelo n° 3 do código ANISN para o método LTS_N combinado com os métodos da Bisseção e da Potência	33
Tabela 5.12	Parâmetros nucleares para o cálculo dos coeficientes de albedo.	34
Tabela 5.13	Fluxo escalar de nêutrons sem albedo e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 120$	35
Tabela 5.14	Fator de multiplicação de nêutrons sem albedo e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 120$	35
Tabela 5.15	Tempo de CPU gasto com a região R explícita e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 120$	35
Tabela 5.16	Fluxo escalar de nêutrons sem albedo e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 130$	36
Tabela 5.17	Fator de multiplicação de nêutrons sem albedo e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 130$	36

RESUMO

Investigamos neste trabalho, além da determinação da constante de multiplicação efetiva pela combinação dos métodos LTS_N e da Potência, a eficiência das condições de contorno tipo albedo na formulação de ordenadas discretas (S_N) para problemas monoenergéticos de autovalor em geometria planar. Esses albedos S_N substituem o sistema "baffle-refletor" em torno do domínio ativo dos núcleos de reatores nucleares. As condições de contorno tipo albedo unidimensionais a uma velocidade são exatas. Por eficiência referimo-nos analisar a precisão dos resultados numéricos em relação ao tempo de execução computacional de cada cálculo de um dado problema modelo. Resultados numéricos para problemas típicos são apresentados tanto para a constante de multiplicação efetiva como para ilustrar a análise de eficiência da condição de contorno do tipo albedo.

ABSTRACT

We discuss in this work, besides the evaluation of the effective multiplicative factor by the combined LTS_N and power methods, the efficiency of discrete ordinates (S_N) albedo boundary conditions for one-speed eigenvalue problems in slab geometry. The non-standard S_N albedos substitute the "bafflereflector" system around the active domain. The offered monoenergetic slab-geometry albedo boundary conditions at a speed are exact. By efficiency we mean analyzing the accuracy of the numerical results versus the CPU execution time of each run for a given model problem. Numerical results to typical test problems are shown to illustrate this efficiency analysis, including the effective multiplicative simulations.

1 INTRODUÇÃO

Em um reator nuclear no estado crítico, existe um balanço entre o número de nêutrons produzidos na fissão e o número de nêutrons que é removido, tanto por absorção no núcleo do reator quanto por fuga através da superfície de contorno. Um dos problemas centrais no projeto de um reator nuclear é o cálculo das dimensões e da composição do sistema necessários para manter esse balanço. Cálculos das condições necessárias para criticalidade são convencionalmente realizados usando a teoria de transporte ou da difusão de nêutrons [Duderstadt & Hamilton, 1976]. Os métodos aplicáveis a essas teorias, que vêm sendo desenvolvidos para modelos simplificados de cálculos de reatores nucleares, constituem problema de autovalor que fornecem o fator de multiplicação efetivo (k_{eff}), definido como o autovalor dominante e o fluxo estacionário de nêutrons (autofunção fundamental) em várias ocasiões durante o tempo de vida útil do núcleo do reator nuclear. Portanto, o problema de se encontrar o fator de multiplicação resume-se a resolver um problema de autovalor usando a equação de transporte ou da difusão de nêutrons, independentes do tempo, como modelos matemáticos. Ressaltamos neste ponto que nesta dissertação usamos a teoria de transporte de nêutrons como modelo matemático. Maiores detalhes sobre o modelo da difusão podem ser encontrados na referência [Petersen, 2008]. Propomos neste trabalho a aplicação do método LTS_N com o modelo monoenergético unidimensional de transporte de nêutrons e espalhamento isotrópico na formulação de ordenadas discretas, que gera soluções numéricas que coincidem com os resultados gerados a partir da solução analítica.

A formulação das ordenadas discretas (S_N) consiste na aproximação da equação de transporte por um sistema de equações diferenciais lineares. Este método é centrado no tratamento discreto da variável angular e consiste, fundamentalmente, na aproximação do termo integral por uma fórmula de quadratura [Case & Zweifel, 1967]. O método LTS_N baseia-se na aplicação da transformada de Laplace no

sistema S_N , inversão analítica da matriz simbólica, resolução do sistema linear obtido para a equação de transporte transformada e aplicação da transformada inversa de Laplace.

Esta metodologia tem sido aplicada em uma classe abrangente de problemas de transporte unidimensionais entre os quais citamos: An analytical solution for the one-dimensional time-dependent S_N equation for bounded and unbounded domains in cartesian geometry [Segatto et al. 2010], Generalized discrete ordinates methods for neutral particle transport problems in slab geometry [Segatto et al. 2008], The LTS_N solution of transport equation for one-dimensional cartesian geometry with $c = 1$ [Segatto et al. 2008], An analytical integral formulation for time-dependent S_N transport equation in a slab by double Laplace transform technique [Segatto et al. 2008], Determination of the exposed build-up factor in a slab by the LTS_N method [Amaral et al. 2006], Recents advances in the LTS_N method for criticality calculation in slab geometry [Orengo et al. 2004], The LTS_N angular multigrid approach in a slab [Segatto et al. 2004], Solutions of the one-dimensional time-dependent discrete ordinates problem in slab by the spectral and LTS_N methods [Oliveira et al. 2002], The one-dimensional LTS_N formulation for high degree of anisotropy [Segatto et al. 1999], Convergence of the LTS_N : approach of CO semigroup [Vilhena & Pazzos, 1999], The one-dimensional LTS_N solution in a slab with high degree of quadrature [Segatto et al. 1999], Determination of the effective multiplication factor in a slab by the LTS_N method [Batistela et al. 1999], Criticality by the LTS_N method [Batistela & Vilhena, 1997] e Extension of the LTS_N formulation for discrete ordinates problem without azimuthal symmetry [Segatto & Vilhena, 1994].

Batistela, em [Batistela,1996; 1997], e Orengo, em [Orengo, 2002], resolveram o problema de determinação do k_{eff} combinando o método LTS_N com o método da bissecção. Entretanto, observou-se neste método uma limitação computacional no valor de N para o cálculo deste autovalor, ou seja, $N = 100$. Ob-

servando que o valor de N , que determina a ordem da matriz LTS_N , provém do grau de quadratura utilizado na discretização da variável angular na aproximação S_N do problema. Motivado por este fato, este trabalho apresenta um método de determinação de k_{eff} pela combinação do método LTS_N e o esquema iterativo de Potência.

É fato conhecido que fissão nuclear não ocorre em regiões não multiplicativas dos reatores nucleares, por exemplo, moderador, refletor e meios estruturais; portanto nossa proposta é voltada para o desenvolvimento de ferramentas que futuramente serão utilizadas para aumentar a eficiência dos cálculos globais de reatores nucleares com a eliminação dos cálculos numéricos explícitos no interior dessas regiões não multiplicativas em torno da região ativa. Neste sentido, a contribuição desta dissertação é a aplicação de condições de contorno não convencionais, denominadas condições de contorno do tipo albedo para duas regiões não multiplicativas: sistema "baffle-refletor" em torno do núcleo de reatores nucleares do tipo térmico, como o que temos em Angra dos Reis, RJ, Angra I e Angra II. Usamos nesta dissertação o modelo unidimensional monoenergético de transporte de nêutrons com espalhamento isotrópico na formulação S_N . Albedo, palavra de origem latina para alvura, foi definida por Lambert (1760) como a fração da luz incidente que é difusamente refletida por uma superfície [Pannecoek, 1961]. Esta palavra latina permaneceu como termo científico usual inicialmente em astronomia, entretanto atualmente esta expressão já está muito difundida em outras áreas como física de partículas e nuclear. Em neutrônica estendemos esse conceito para a reflexão de nêutrons.

Na derivação da matriz albedo de duas regiões, resolvemos as equações S_N unidimensionais homogêneas usando o método da transformada de Laplace (LTS_N). A matriz de albedo relaciona os fluxos angulares de nêutrons incidentes no "baffle" ou no refletor (no caso de ausência de "baffle"), emergentes da região

ativa do núcleo, desde que as condições de contorno do tipo vácuo apliquem-se nos contornos externos das regiões refletoras.

Observamos neste ponto que não existem aproximações envolvidas na determinação da matriz albedo; portanto, esperamos que o uso das condições de contorno tipo albedo virá aumentar a eficiência dos cálculos da criticalidade S_N no sentido de que esperamos que ele gere os mesmos resultados com menor tempo computacional. Dizemos mesmos resultados no sentido que a formulação LTS_N aplicada tanto ao problema com sistema "baffle-refletor" explícito, quanto ao sistema implícito através do uso de condições de contorno tipo albedo são analíticas; e portanto gerem resultados numéricos exatos, a menos de erros de arredondamento da aritmética computacional finita. É importante ressaltar que na formulação LTS_N para determinação da matriz albedo precisamos inverter algumas matrizes que podem apresentar problemas computacionais de mau condicionamento. Entretanto, como em cálculos de criticalidade de sistemas neutrônicos, não existe a necessidade premente de se usarmos altas ordens de quadraturas angulares S_N , esta limitação não deverá implicar limitação do método em cálculos realísticos.

Afim de atingirmos nossos objetivos, este trabalho está dividido em seis capítulos. No capítulo dois descrevemos o método LTS_N para problemas de fluxo neutrônico em meios homogêneos e em meios heterogêneos. No capítulo seguinte apresentamos o esquema iterativo de potência para o cálculo do fator de multiplicação efetivo e a combinação do método LTS_N a este método. No capítulo quatro descrevemos as condições de contorno tipo albedo e como ocorre sua aplicação. No capítulo cinco apresentamos resultados numéricos para problemas modelos típicos obtidos pelo método LTS_N combinado com o método da Potência comparados com os resultados obtidos pelo método LTS_N com o método da Bissecção. Algumas conclusões e sugestões para trabalhos futuros estão apresentados no capítulo seis.

2 O MÉTODO LTS_N PARA PROBLEMAS DE CRITICALIDADE

Como falamos anteriormente, com o método LTS_N determinamos uma solução analítica para problemas de transporte de nêutrons descritos na formulação de ordenadas discretas (S_N). Desenvolvido em meados dos anos 90, o método consiste em aplicarmos a transformada de Laplace no sistema de equações S_N , invertermos a matriz simbólica associada ao método, resolvermos o sistema linear de n equações diferenciais para determinarmos o fluxo angular de nêutrons transformado e aplicarmos a transformada inversa de Laplace para determinarmos o fluxo angular de nêutrons, solução analítica do problema.

Muitos trabalhos foram realizados a fim de aperfeiçoar e ampliar a aplicabilidade do método: [Zabadal, 1993; 1995; 1997], [Segatto & Vilhena, 1994; 1997], [Segatto, 1995], [Vilhena, 1999], entre outros, são apenas alguns dos trabalhos realizados, além dos citados na introdução, que aumentaram consideravelmente a classe de problemas S_N que podemos resolver utilizando o método LTS_N e tornaram este método aplicável e viável para solução de problemas neutrônicos. Assim, nas duas seções seguintes apresentamos a formulação atual para problemas unidimensionais de transporte de nêutrons com um grupo de energia e simetria azimutal para placas homogêneas e heterogêneas. Maiores informações sobre o desenvolvimento do método pode ser encontrada em [Golçalves, 2002a], onde Gonçalves faz uma revisão completa sobre o método.

2.1 FORMULAÇÃO LTS_N PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MEIOS HOMOGÊNEOS

Seja a equação linear de transporte unidimensional monoenergética, considerando simetria azimutal e geometria planar em um meio homogêneo

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \sigma_t \Psi(x, \mu) = \int_{-1}^{+1} \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \Psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (2.1)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\Psi(0, \mu) = f(\mu), \quad \text{se } \mu > 0 \quad (2.2a)$$

e

$$\Psi(x_0, \mu) = g(\mu), \quad \text{se } \mu < 0 \quad (2.2b)$$

onde:

- $\Psi(x, \mu)$ é o fluxo angular de partículas na direção $\mu = \cos \theta$;
- θ é o ângulo polar;
- σ_t é a seção de choque macroscópica total;
- $\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu)$ é a seção de choque diferencial de espalhamento;
- $Q(x, \mu)$ é o termo fonte;
- $x \in [0, x_0]$ é a variável espacial;
- $f(\mu)$ e $g(\mu)$ são os fluxos incidentes na fronteira do domínio nas direções positivas e negativas, respectivamente.

Considerando que a seção de choque diferencial de espalhamento é convencionalmente expandida em polinômios de Legendre, temos

$$\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\cos \Theta), \quad (2.3)$$

onde os coeficientes β_ℓ são tabelados com $\beta_0 = 1$ e Θ é o ângulo de espalhamento. Pelo teorema da adição para polinômios de Legendre, podemos reescrever a equação (2.3)

$$\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \sum_{m=0}^M \sum_{\ell=m}^L \frac{\sigma_s}{2} \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) P_\ell^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (2.4)$$

onde φ é o ângulo azimutal formado com o ângulo de referência, $P_\ell^m(\mu)$ são as funções associadas de Legendre e os coeficientes β_ℓ^m são descritos por

$$\beta_\ell^m = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \beta_\ell. \quad (2.5)$$

Nosso problema possui simetria azimutal, logo $M = 0$ e podemos reescrever a equação (2.1) como

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \sigma_t \Psi(x, \mu) = \int_{-1}^{+1} \sum_{\ell=0}^L \frac{\sigma_s}{2} \beta_\ell P_\ell(\mu) P_\ell(\mu') \Psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (2.6)$$

onde aproximamos o termo integral da equação (2.6) por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N (par), após empregamos o método da colocação de variável de direção μ , considerando como função teste a Delta de Dirac, $\delta(\mu - \mu_m)$ para $m = 1, \dots, N$ e como pontos de colocação as raízes dos polinômios de Legendre de grau N . Desta forma encontramos a aproximação S_N da equação (2.6). Assim, o sistema S_N de equações associado a equação (2.6) é dado por

$$\mu_n \frac{d}{dx} \Psi_n(x) + \sigma_t \Psi_n(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{j=1}^N \Psi_j(x) \omega_j \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu_n) P_\ell(\mu_j) + Q(x, \mu_n), \quad (2.7)$$

sujeito às condições de contorno

$$\Psi_n(0) = f_n, \quad \text{se } \mu_n > 0 \quad (2.8a)$$

e

$$\Psi_n(x_0) = g_n, \quad \text{se } \mu_n < 0 \quad (2.8b)$$

onde os μ_n são as raízes dos polinômios de Legendre de grau N e ω_n são os respectivos pesos da quadratura de Gauss-Legendre dados por

$$\omega_n = \int_{-1}^{+1} \prod_{j=1, j \neq n}^N \frac{(\mu - \mu_j)}{(\mu_n - \mu_j)} d\mu. \quad (2.9)$$

Ressaltamos que raízes μ_n são ordenadas de forma decrescente

$$-1 < \mu_N < \mu_{N-1} < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_2 < \mu_1 < 1. \quad (2.10)$$

Para fonte externa isotrópica, temos Q dependente apenas da posição espacial e para simplificar a notação consideramos

$$\sigma_{n,j} = \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu_n) P_{\ell}(\mu_j); \quad (2.11)$$

assim, podemos expressar a equação (2.7) como

$$\mu_n \frac{d}{dx} \Psi_n(x, \mu) + \sigma_t \Psi_n(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{j=0}^N \sigma_{n,j} \omega_j \Psi_j(x) + Q_n(x), \quad (2.12)$$

e na seguinte forma matricial

$$\frac{d}{dx} \Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{A} \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz quadrada $N \times N$ e seus elementos são expressos da seguinte forma

$$a_{i,j} = \begin{cases} -\frac{\sigma_t}{\mu_i} + \frac{\sigma_s}{2\mu_i} \sigma_{ij} \omega_j & \text{se } i = j \\ \frac{\sigma_s}{2\mu_i} \sigma_{ij} \omega_j & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (2.14)$$

O vetor fonte $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ de ordem N definido por

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\mathbf{Q}_1(\mathbf{x})}{\mu_1} \quad \frac{\mathbf{Q}_2(\mathbf{x})}{\mu_2} \quad \dots \quad \frac{\mathbf{Q}_N(\mathbf{x})}{\mu_N} \right]^T \quad (2.15)$$

e o vetor fluxo angular de nêutrons $\Psi(\mathbf{x})$ é definido por:

$$\Psi(\mathbf{x}) = [\Psi_1(\mathbf{x}) \dots \Psi_{\frac{N}{2}}(\mathbf{x}) \Psi_{\frac{N}{2}+1}(\mathbf{x}) \dots \Psi_N(\mathbf{x})]^T \quad (2.16)$$

e os fluxos incidentes nas fronteiras do domínios são expressos por

$$\Psi_n(\mathbf{0}) = \mathbf{f}_n \quad \text{e} \quad \Psi_n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}_n. \quad (2.17)$$

Para simplificar a notação consideramos

$$\Psi_1(\mathbf{0}) = \mathbf{f} \quad \text{e} \quad \Psi_2(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}. \quad (2.18)$$

Agora, com o problema já definido na forma matricial, usando o método LTS_N , que consiste na aplicação da transformada de Laplace sobre a variável espacial x da equação (2.13) e gera um sistema linear com N incógnitas e N equações na aproximação S_N da equação de transporte (2.1), temos:

$$\mathbf{M}_N(\mathbf{s})\overline{\Psi}(\mathbf{s}) = \Psi(\mathbf{0}) + \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{s}) \quad (2.19)$$

onde $\overline{\Psi}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}[\Psi(\mathbf{x})]$ e $\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}[\mathbf{S}(\mathbf{x})]$ são as transformadas de Laplace, s é um parâmetro complexo e $M_N(s)$ uma matriz quadrada, de ordem N da forma

$$\mathbf{M}_N(\mathbf{s}) = \mathbf{sI} - \mathbf{A}, \quad (2.20)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N . Resolvendo a equação (2.19) para $\overline{\Psi}$ temos:

$$\overline{\Psi}(\mathbf{s}) = \mathbf{M}_N^{-1}(\mathbf{s})\Psi(\mathbf{0}) + \mathbf{M}_N^{-1}(\mathbf{s})\overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{s}). \quad (2.21)$$

Agora, para invertermos a matriz simbólica $\mathbf{M}_N(\mathbf{s})$ notemos que:

$$\mathbf{M}_N^{-1}(\mathbf{s}) = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}. \quad (2.22)$$

Observamos agora que se $c \neq 1$ os autovalores da matriz \mathbf{A} são todos simétricos e diferentes entre si, sendo assim, a matriz pode ser diagonalizada

$$\mathbf{A} = \mathbf{XDX}^{-1} \quad (2.23)$$

onde \mathbf{D} é a matriz diagonal formada pelos autovalores de \mathbf{A} e \mathbf{X} é a matriz coluna dos autovetores associados, logo:

$$\mathbf{M}_N^{-1}(\mathbf{s}) = (\mathbf{sI} - \mathbf{XDX}^{-1})^{-1} = (\mathbf{sXX}^{-1} - \mathbf{XDX}^{-1})^{-1} = (\mathbf{X}(\mathbf{sI} - \mathbf{D})\mathbf{X}^{-1})^{-1} = \mathbf{X}(\mathbf{sI} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}. \quad (2.24)$$

Assim, a equação (2.21) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\overline{\Psi}(\mathbf{s}) = \mathbf{X}(\mathbf{sI} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\Psi(\mathbf{0}) + \mathbf{X}(\mathbf{sI} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{s}). \quad (2.25)$$

Como a matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{D})$ é uma matriz diagonal, onde d_i são os autovalores de \mathbf{A} , sua inversa é dada por

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-d_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{s-d_N} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Logo, para determinarmos o fluxo angular de nêutrons basta tomarmos a transformada inversa de Laplace da equação (2.25)

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{\Psi}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\Psi(0) + \mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\bar{\mathbf{S}}(s)] \quad (2.27a)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\Psi(0)] + \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\bar{\mathbf{S}}(s)] \quad (2.27b)$$

$$= \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}]\mathbf{X}^{-1}\Psi(0) + \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}]\mathbf{X}^{-1} * \mathcal{L}^{-1}[\bar{\mathbf{S}}(s)] \quad (2.27c)$$

onde o sinal $*$ representa a convolução entre os vetores. Assim, a transformada inversa de Laplace da equação (2.25) é dada por:

$$\Psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}e^{-\mathbf{D}\mathbf{x}}\mathbf{X}^{-1})\Psi(0) + (\mathbf{X}e^{-\mathbf{D}\mathbf{x}}\mathbf{X}^{-1}) * \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{x}). \quad (2.28)$$

Fazendo

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}e^{-\mathbf{D}\mathbf{x}}\mathbf{X}^{-1}) * \mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (2.29)$$

podemos escrever o problema na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{X} \begin{bmatrix} e^{\mathbf{D}_1\mathbf{x}} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{D}_2\mathbf{x}} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_1(0) \\ \Psi_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

onde as matrizes diagonais \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 possuem os autovalores negativos e positivos da matriz \mathbf{A} e as componentes dos vetores $\Psi_1(0)$ e $\Psi_2(0)$ contêm as direções angulares discretas positivas e negativas do fluxo na fronteira a esquerda do domínio, respectivamente. Observe que as componentes de $\Psi_1(0)$ são todas conhecidas, entretanto, as componentes de $\Psi_2(0)$ são desconhecidas.

Para determinarmos as componentes do vetor $\Psi_2(\mathbf{0})$ consideramos

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}\mathbf{e}^{\mathbf{D}(\mathbf{x})}\mathbf{X}^{-1} \quad (2.31)$$

escrita na forma particionada:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}(\mathbf{x}) & \mathbf{C}_{12}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{C}_{21}(\mathbf{x}) & \mathbf{C}_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Desta forma a equação (2.30) é reescrita como

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}(\mathbf{x}) & \mathbf{C}_{12}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{C}_{21}(\mathbf{x}) & \mathbf{C}_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{0}) \\ \Psi_2(\mathbf{0}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Assim, aplicando $x = x_0$ nas $\frac{N}{2}$ últimas linhas da equação (2.33), obtemos:

$$\Psi_2(\mathbf{x}_0) = \mathbf{C}_{21}(\mathbf{x}_0)\Psi_1(\mathbf{0}) + \mathbf{C}_{22}(\mathbf{x}_0)\Psi_2(\mathbf{0}) + \mathbf{H}_2(\mathbf{x}_0) \quad (2.34)$$

e notamos que os vetores $\Psi_1(\mathbf{0})$, $\Psi_2(\mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{H}_2(\mathbf{x}_0)$ são conhecidos, assim

$$\Psi_2(\mathbf{0}) = \mathbf{C}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_0)[\Psi_2(\mathbf{x}_0) - \mathbf{C}_{21}(\mathbf{x}_0)\Psi_1(\mathbf{0}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{x}_0)]. \quad (2.35)$$

Desta forma a equação (2.30) fica totalmente determinada e representa a solução analítica do sistema de equações diferenciais descrito pela equação (2.13).

Entretanto, a equação (2.30) que representa a solução LTS_N possui forma exponencial. Este comportamento exponencial juntamente com o fato de que os autovalores da matriz \mathbf{A} crescem em magnitude com o aumento do N demonstra que esse método não é adequado para resolver problemas de grandes espessuras ou elevados graus de anisotropia, pois o uso de operações com aritmética finita gera uma falha computacional conhecida como "overflow".

Gonçalves, [Gonçalves, 2002b], Vilhena e Segatto, [Segatto & Vilhena, 1996], contornaram o problema de "overflow" gerado pelos termos exponenciais positivos para N grande usando a propriedade de invariância da equação de transporte.

Isto é, fisicamente, como as direções discretas são simétricas em torno de $\mu = 0$, corresponde considerar partículas se deslocando da direita para esquerda com $\mu < 0$ e as partículas se deslocando da esquerda para direita com $\mu > 0$. Este resultado foi analisado por Golçalves em [Golçalves, 2002b]. Com esta propriedade foi possível separar as soluções homogênea e particular em componentes que contêm apenas expoentes positivos e negativos. Desta forma obtiveram a decomposição da matriz \mathbf{D} da seguinte forma

$$D = \begin{bmatrix} e^{D_1 x} & 0 \\ 0 & e^{D_2(x-x_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{D_2 x_0} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

onde as submatrizes \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 são matrizes diagonais de ordem $\frac{N}{2}$ formadas pelos autovalores negativos e positivos da matriz \mathbf{A} , respectivamente. Reescrevemos então a equação (2.30) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} e^{\mathbf{D}_1 \mathbf{x}} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{D}_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{D}_2 \mathbf{x}_0} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{0}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Considerando agora

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{D}_2 \mathbf{x}_0} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{0}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

temos

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{X} \begin{bmatrix} e^{\mathbf{D}_1 \mathbf{x}} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{D}_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

onde o vetor convolução é dado por

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (\mathbf{X} e^{\mathbf{D} \mathbf{x}} \mathbf{X}^{-1}) * \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{X} \int_0^{\mathbf{x}_0} e^{\mathbf{D}^*(\mathbf{x}-\eta)} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{S}(\eta) d\eta, \quad (2.40)$$

onde

$$e^{\mathbf{D}^* \mathbf{x}} = \begin{cases} e^{\mathbf{D}_i \mathbf{x}} & \text{se } \mathbf{D}_i < \mathbf{0} \\ e^{\mathbf{D}_i(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} & \text{se } \mathbf{D}_i > \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.41)$$

Escrevendo

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{X} \begin{bmatrix} e^{\mathbf{D}_1 \mathbf{x}} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{D}_2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

temos o problema expresso da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Isto é,

$$\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\xi + \mathbf{H}(\mathbf{x}), \quad (2.44)$$

sujeito às condições de contorno

$$\Psi_1(\mathbf{0}) = \mathbf{f} \quad (2.45a)$$

e

$$\Psi_2(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}. \quad (2.45b)$$

A equação (2.44) juntamente com as condições de contorno (2.45a) e (2.45b) representam a solução LTS_N do problema proposto na equação (2.1) para uma placa homogênea. Cabe salientar, que na solução proposta na equação (2.44) todos os expoentes são negativos, significando que o fluxo angular está completamente determinado e não ocorrerá "overflow" para grandes espessuras nem para elevadas ordens de quadratura e ainda, que esta formulação é aplicável a problemas com qualquer tipo de fonte.

2.2 FORMULAÇÃO LTS_N PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MEIOS HETEROGÊNEOS

Na seção anterior vimos a formulação LTS_N para problemas em uma placa homogênea. A partir de agora, estendemos a formulação do método para problemas em placas heterogêneas, definidos como problemas multi-regiões.

Portanto, consideramos um problema de transporte de nêutrons em uma placa de K regiões, como mostra a Fig. (2.1). Cada região se diferencia pelas suas propriedades físicas, isto é, pelo material de que é composta. As equações S_N



Figura 2.1: Representação de uma placa com k regiões

que modelam esse problema são expressas por

$$\mu_i \frac{d}{dx} \Psi_i^k(x, \mu) + \sigma_t^k \Psi_i^k(x, \mu) = \frac{\sigma_s^k}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_{i,j}^k \omega_j \Psi_j^k(x) + Q_i^k(x), \quad (2.46)$$

que nos fornecem um conjunto de N equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, com $k = 1 : K$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $x_0 = 0$ e $x_K = a$, $i = 1 : N$, $j = 1 : N$ e as condições de contorno

$$\Psi_i^1(0) = f_i, \quad i = 1 : \frac{N}{2} \quad (2.47a)$$

$$\Psi_{i+\frac{N}{2}}^K(a) = g_i, \quad i = 1 : \frac{N}{2} \quad (2.47b)$$

adicionada às condições de continuidade de fluxo angular nas interfaces das regiões

$$\Psi_i^k(x_k) = \Psi_i^{k+1}(x_k), \quad i = 1 : N \quad (2.48)$$

onde, $\Psi_i^k(x, \mu)$ é o fluxo angular de partículas na direção μ_i na placa k , σ_t^k é a seção de choque total na placa k , σ_s^k é a seção de choque de espalhamento na placa k , $Q_i^k(x)$ é o termo fonte na placa k . Para podermos aplicar o método LTS_N em cada placa, procedemos a seguinte mudança na variável espacial $x \in [x_{k-1}, x_k]$, então

$$x - x_{k-1} \rightarrow x \quad (2.49)$$

para $k = 1 : K$. Dessa forma, $x \in [0, L_k]$, onde $L_k = x_k - x_{k-1}$ é a espessura da região k . Portanto, temos k problemas de placas homogêneas com as condições

de contorno dadas pelas condições de continuidade de fluxo no interior da placa expressas pela identidade numérica

$$\Psi_i^k(L_k) = \Psi_i^{k+1}(0). \quad (2.50)$$

Assim, a equação (2.46), pode ser expressa matricialmente como

$$\frac{d}{dx} \Psi^k(\mathbf{x}) - \mathbf{A}^k \Psi^k(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^k(\mathbf{x}), \quad (2.51)$$

a qual difere da equação (2.13) apenas pelo índice k , que representa a região homogênea. Observamos que a solução da equação (2.51) é encontrada da mesma forma que a solução da equação (2.13); porém agora é calculada para cada uma das k placas homogêneas que compõem a placa heterogênea. Logo, a generalização do método LTS_N para um problema de placa heterogênea de K regiões é imediata. Então, aplicamos o método LTS_N em cada uma das K regiões, determinamos a solução em cada uma delas e assim encontramos a solução da k -ésima região como

$$\Psi^k(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^k(\mathbf{x})\xi^k + \mathbf{H}^k(\mathbf{x}) \quad (2.52)$$

para $x_{k-1} < x < x_k$ com k assumindo valores de $1 : K$, as condições de contorno

$$\Psi_i^1(0) = f_i, \quad i = 1 : \frac{N}{2} \quad (2.53a)$$

$$\Psi_{i+\frac{N}{2}}^K(a) = g_i, \quad i = 1 : \frac{N}{2} \quad (2.53b)$$

e adicionada às condições continuidade de fluxo angular nas interfaces das regiões

$$\Psi_i^k(L_k) = \Psi_i^{k+1}(0), \quad i = 1 : \frac{N}{2} \text{ e } k = 1 : K - 1 \quad (2.53c)$$

Assim, a equação (2.52) juntamente com as condições de contorno (2.53a), (2.53b) e a condição de continuidade de fluxo nas interfaces (2.53c) representam a solução para o problema de placas heterogêneas S_N da equação de transporte dada pela equação matricial (2.51).

Ressaltamos que da mesma forma que a solução apresentada para placas homogêneas é válida para qualquer tipo de fonte, espessura da placa e ordem de quadratura, pois todos os expoentes presentes na equação são negativos, isto também vale para placas heterogêneas, uma vez que uma placa heterogênea nada mais é que um conjunto de placas homogêneas com continuidade de fluxo nas interfaces. Desta forma, a solução (2.52) é válida para qualquer tipo de fonte, toda espessura de placa e ordem de quadratura.

3 CÁLCULO DO FATOR DE MULTIPLICAÇÃO EFETIVO

A importância do cálculo da constante de multiplicação efetiva em problemas neutrônicos vem da necessidade de, além de determinarmos o comportamento do fluxo de nêutrons, prevermos também o balanço entre as reações de produção e remoção de nêutrons em um reator nuclear. Assim, neste capítulo abordamos a determinação do fator de multiplicação efetivo (k_{eff}) nos problemas estudados pelo método LTS_N usando o esquema iterativo de potência para convergência da solução dominante do problema. Em trabalhos anteriores Batistela e mais recentemente Orengo, [Batistela, 1996; 1997a; 1997b] e [Orengo,2004], utilizaram o método da bissecção nesse estudo. Na primeira seção deste capítulo apresentamos o método da potência em sua formulação geral e na seguinte a adequação do método para nosso problema. Detalhes do método da potência, além do aqui exposto, podem ser encontrados em [Dudestad & Hamilton,1976], [Gentle, 1998] e [Allaire, 2002].

3.1 O MÉTODO DA POTÊNCIA

No estudo da criticalidade em problemas neutrônicos fazemos o cálculo do balanço entre as reações de produção e remoção de nêutrons em um reator nuclear. Consideramos então o problema de autovalor expresso pela equação

$$\mathbf{M}\Psi = \frac{1}{k}\mathbf{F}\Psi \quad (3.1)$$

onde definimos

$$\mathbf{M} = \left(\mathbf{I} \frac{d}{dx} + \mathbf{A} \right) \text{ é o operador de remoção de nêutrons} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} \text{ é o operador de produção de nêutrons .} \quad (3.3)$$

Assumimos que o termo de fonte de fissão representado por \mathbf{S} , com $\mathbf{S} = \mathbf{F}\Psi$, no lado direito da equação (3.1) é conhecido. Então podemos considerar o lado esquerdo desta mesma equação como a equação de transporte para o fluxo de nêutrons com fonte fixa dada por $\frac{1}{k}\mathbf{S}$, em um meio não multiplicativo, que podemos resolver facilmente pelo método LTS_N descrito no capítulo anterior. Entretanto, não conhecemos efetivamente essa fonte, uma vez que ela própria depende de Ψ . Portanto, estimamos um valor inicial e a partir dele usamos um esquema iterativo que convirja para o problema (3.1).

Desta forma, sejam as estimativas iniciais

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{F}\Psi^{(0)} \cong \mathbf{S}^{(0)}, \quad \mathbf{k} \cong \mathbf{k}^{(0)}; \quad (3.4)$$

a partir delas encontramos o fluxo $\Psi^{(1)}$ através da seguinte estimativa

$$\mathbf{M}\Psi^{(1)} = \frac{1}{\mathbf{k}^{(0)}}\mathbf{S}^{(0)} \quad (3.5)$$

usando um método numérico adequado para encontrar o fluxo neutrônico com fonte constante. Com este resultado, conseguimos calcular explicitamente a fonte de fissão resultante para esse fluxo $\Psi^{(1)}$ como

$$\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{F}\Psi^{(1)}. \quad (3.6)$$

Com a nova fonte de fissão $\mathbf{S}^{(1)}$ conseguimos calcular uma nova estimativa para o fluxo, $\Psi^{(2)}$, supondo que conseguimos uma nova estimativa para o valor de k , e assim sucessivamente. Isto é, em cada iteração para o cálculo do fluxo neutrônico, calculamos uma nova fonte de fissão a partir da anterior resolvendo

$$\mathbf{M}\Psi^{(n+1)} = \frac{1}{\mathbf{k}^{(n)}}\mathbf{S}^{(n)}; \quad (3.7)$$

desta forma, para $\Psi^{(n+1)}$ temos

$$\mathbf{S}^{(n+1)} = \mathbf{F}\Psi^{(n+1)}. \quad (3.8)$$

Entretanto, para validarmos as equações (3.7) e (3.8), precisamos encontrar uma forma geral para o cálculo das estimativas de k . Para tanto, retornamos ao nosso problema de autovalor inicial. Se o nosso método iterativo para o cálculo da fonte de fissão realmente funciona, então para um n suficientemente grande $\Psi^{(n)}$ converge para $\Psi(\mathbf{x})$ e temos

$$\mathbf{M}\Psi^{(n+1)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}^{(n+1)}}\mathbf{F}\Psi^{(n+1)}. \quad (3.9)$$

A convergência de $\Psi^{(n)}$ para $\Psi(\mathbf{x})$ e de $k^{(n)}$ para k_{eff} é provada matematicamente; entretanto não abordamos neste trabalho. Mais informações sobre a convergência do método podem ser encontradas nas referências [Gentle, 1998] e [Allaire, 2002].

Para melhorarmos a estimativa de $k^{(n+1)}$ para um n finito, integramos a equação (3.9) em todas as direções do espaço e encontramos

$$k^{(n+1)} \cong \frac{\int \mathbf{F}\Psi^{(n+1)} d\mathbf{x}}{\int \mathbf{M}\Psi^{(n+1)} d\mathbf{x}} \quad (3.10)$$

usando os resultados (3.7) e (3.8) reescrevemos (3.10) da seguinte forma

$$k^{(n+1)} \cong \frac{\int \mathbf{S}^{(n+1)} d\mathbf{x}}{\frac{1}{k^{(n)}} \int \mathbf{S}^{(n)} d\mathbf{x}}, \quad (3.11)$$

onde o termo $\frac{\int \mathbf{S}^{(n+1)} d\mathbf{x}}{\int \mathbf{S}^{(n)} d\mathbf{x}}$ representa o fator de correção do k em cada iteração.

Usamos a equação (3.11) para calcular uma nova estimativa de $k^{(n+1)}$ a partir de estimativas anteriores de $\Psi^{(n+1)}$ e $k^{(n)}$.

Portanto, as equações (3.7), (3.8) e (3.11) são a base para o método iterativo da potência para convergência do k_{eff} e do Ψ . Observe que, à medida que aumentamos o número de iterações, filtramos o autovalor dominante k_{eff} e, conseqüentemente, temos a convergência de Ψ para a autofunção fundamental da equação (3.1). Na prática estas iterações continuam até que os seguintes critérios de parada sejam satisfeitos

$$\left| \frac{k^{(n)} - k^{(n-1)}}{k^{(n)}} \right| < \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\mathbf{S}^{(n)} - \mathbf{S}^{(n-1)}}{\mathbf{S}^{(n)}} \right| < \varepsilon_2 \quad (3.12)$$

com ε_1 e ε_2 positivos e em geral $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Assim, com as equações (3.7), (3.8) e (3.11) e os critérios de parada dados pela equação (3.12) encontramos uma solução para o nosso problema de autovalor que fornece o fator de multiplicação efetivo e o fluxo estacionário de nêutrons.

3.2 O ESTUDO DA CRITICALIDADE PELO MÉTODO

LTS_N

Nesta seção abordamos o problema de fluxo neutrônico como um problema de autovalor. Desta forma podemos aplicar o método da potência descrito na seção anterior. Para tanto, consideramos a formulação de ordenadas discretas para a equação de transporte de nêutrons descrita na sua forma matricial de acordo com a equação (3.13)

$$\frac{d}{dx}\Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

sujeita às condições de contorno

$$\Psi_1(\mathbf{0}) = \mathbf{f} \quad (3.14a)$$

$$\Psi_2(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}. \quad (3.14b)$$

Analisando cada operador da equação (3.13) identificamos

$$\frac{d}{dx} \equiv \text{operador de remoção de nêutrons por migração}$$

$\mathbf{A} \equiv$ matriz operador de remoção de nêutrons por colisão, definida na equação (2.14)

$\mathbf{S} \equiv$ vetor operador de produção de nêutrons por fissão nuclear, definido na equação (2.15).

Desta forma definimos os operadores \mathbf{M} e \mathbf{F} , remoção e produção de nêutrons respectivamente, da equação (3.1), como

$$\mathbf{M} = \left(\mathbf{I} \frac{d}{dx} + \mathbf{A} \right) \quad (3.15)$$

e

$$\mathbf{F}\Psi = \mathbf{S}. \quad (3.16)$$

Sejam as estimativas iniciais do método da potência dadas

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{F}\Psi^{(0)} \cong \mathbf{S}^{(0)} \quad , \quad \mathbf{k} \cong \mathbf{k}^{(0)}; \quad (3.17)$$

com essas estimativas iniciais calculamos $\Psi^{(1)}$ a partir da equação

$$\mathbf{M}\Psi^{(1)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}^{(0)}}\mathbf{S}^{(0)} \quad (3.18)$$

que nada mais é que

$$\frac{d}{dx}\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}^{(0)}}\mathbf{S}^{(0)}. \quad (3.19)$$

Resolvemos facilmente a equação (3.19) utilizando o método LTS_N descrito no capítulo anterior.

Com a nova estimativa de fonte geramos um novo fluxo $\Psi^{(2)}$, e assim, sucessivamente, generalizamos o cálculo do fluxo, já que as estimativas $\mathbf{S}^{(n+1)}$ e $k^{(n+1)}$ são conhecidas como

$$\mathbf{S}^{(n+1)} = \mathbf{F}\Psi^{(n+1)} \quad (3.20)$$

$$k^{(n+1)} \cong \frac{\int \mathbf{S}^{(n+1)} d\mathbf{x}}{\frac{1}{k^{(n)}} \int \mathbf{S}^{(n)} d\mathbf{x}}. \quad (3.21)$$

Usando os resultados obtidos nas equações (3.7), (3.8) e (3.11), critérios de parada dados pela equação (3.12) aplicados a equação (3.1) sujeita aos operadores expressos pelas equações (3.15) e (3.16) encontramos uma solução para nosso problema de autovalor que fornece o fator de multiplicação efetivo e o fluxo estacionário de nêutrons.

4 CONDIÇÕES DE CONTORNO DO TIPO ALBEDO

4.1 PARA UMA REGIÃO REFLETORA

Seja um domínio unidimensional composto por regiões multiplicativas, onde há fonte de nêutrons por fissão nuclear, e uma região refletora, sem fonte de nêutrons, conforme 4.1:

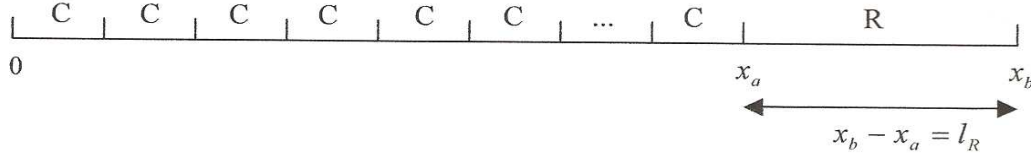


Figura 4.1: Representação esquemática de um domínio refletido típico

O fluxo é descrito pela equação matricial (2.51), as condições de contorno (2.47a) e (2.47b) e as equações de continuidade de fluxo (2.48) que apresentamos novamente a seguir:

$$\frac{d}{dx} \Psi^k(\mathbf{x}) - \mathbf{A}^k \Psi^k(\mathbf{x}) = \mathbf{S}^k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k} = \mathbf{1} : \mathbf{K} \quad (4.1)$$

e as condições de contorno

$$\Psi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{1}}(\mathbf{0}) = \mathbf{f}_{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{1} : \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{2}} \quad (4.2a)$$

$$\Psi_{\mathbf{i} + \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{2}}}^{\mathbf{K}}(\mathbf{a}) = \mathbf{g}_{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{1} : \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{2}}, \quad (4.2b)$$

juntamente às condições de continuidade de fluxo angular nas interfaces das regiões

$$\Psi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) = \Psi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k}+1}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{i} = \mathbf{1} : \mathbf{N}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{1} : \mathbf{K} - \mathbf{1} \quad (4.3)$$

Os meios multiplicativos dos reatores são normalmente circundados por materiais refletoras usados para reduzir a fuga de nêutrons. Nosso objetivo portanto é retirarmos a região refletora dos cálculos globais explícitos introduzindo o parâmetro albedo, ou coeficiente de reflexão, a fim de melhorarmos o tempo computacional gasto na resolução dos problemas. Para isso é necessário primeiro encontrarmos o parâmetro albedo Λ para a região refletora localizada à direita do domínio multiplicativo representado na Fig. 4.1.

Determinamos este parâmetro a partir da condição de continuidade de fluxo nas interfaces das regiões. Desta forma, o parâmetro albedo é expresso como uma relação entre o fluxo na direção positiva de μ e o fluxo na direção negativa de μ ; isto é, o coeficiente de reflexão albedo é a fração entre o que está emergindo das regiões combustíveis e o que está retornando para ela. É a razão entre as coordenadas simétricas de Ψ em torno de $\mu = 0$. Assim, para $i = 1 : \frac{N}{2}$

$$\Psi_{i+\frac{N}{2}}(x_{k-1}) = \alpha_i \Psi_i(x_{k-1}). \quad (4.4)$$

Em forma matricial temos

$$\Psi_2(\mathbf{x}_{k-1}) = \Lambda \Psi_1(\mathbf{x}_{k-1}), \quad (4.5)$$

onde os vetores $\Psi_1(\mathbf{x}_{k-1})$ e $\Psi_2(\mathbf{x}_{k-1})$ possuem $\frac{N}{2}$ posições e contêm as direções discretas positivas e negativas do fluxo angular de nêutrons, respectivamente, e Λ é uma matriz diagonal composta pelos valores α_i .

Então, seguindo nosso objetivo da retirada da região refletora do cálculo a fim de diminuir o tempo computacional para a execução dos mesmos, após o cálculo do parâmetro albedo retiramos a região refletora do cálculo explícito e ficamos com o problema expresso da seguinte forma

$$\frac{d}{dx} \Psi^k(\mathbf{x}) - \mathbf{A}^k \Psi^k(\mathbf{x}) = \mathbf{S}^k(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

agora com $k = 1 : K - 1$ e as condições de contorno

$$\Psi_i^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{i} = 1 : \frac{N}{2} \quad (4.7a)$$

$$\Psi_{i+\frac{N}{2}}^{K-1}(x_{k-1}) = \alpha_i \Psi_i^{K-1}(x_{k-1}), \quad i = 1 : \frac{N}{2} \quad (4.7b)$$

juntamente às condições de continuidade de fluxo angular nas interfaces das regiões

$$\Psi_i^k(\mathbf{x}_k) = \Psi_i^{k+1}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{i} = 1 : \mathbf{N}, \quad \mathbf{k} = 1 : \mathbf{K} - 2. \quad (4.8)$$

Para resolvermos este problema, aplicamos o método LTS_N com as novas condições de contorno à direita, definidas pela equação (4.7b). Como não há aproximações feitas na matriz albedo, esperamos que a aplicação das condições de contorno deste tipo gere os mesmos resultados do que os cálculos explícitos. Neste ponto é importante ressaltar que a retirada da região refletora só é possível quando temos condição de vácuo na região externa do domínio, que é típico em cálculos globais de reatores nucleares.

4.2 DUAS REGIÕES REFLETORAS

Seja agora um domínio unidimensional conforme apresentado na Fig.

4.2

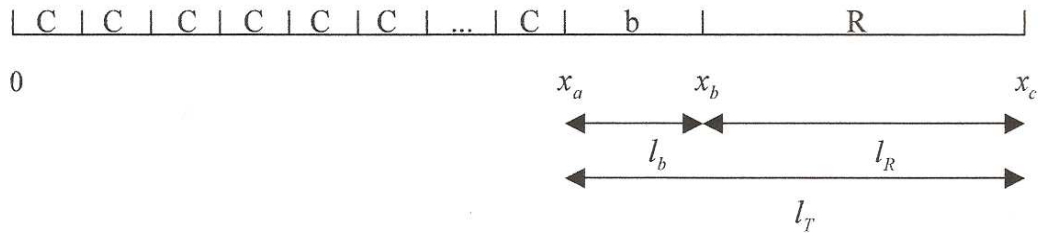


Figura 4.2: Representação esquemática de um domínio refletido com "baffle".

A Fig. 4.2 ilustra a região de combustível (C): $0 \leq x \leq x_a$ e duas regiões refletoras: uma região de revestimento estrutural denominada "baffle"(b): $x_a \leq x \leq x_b$ e uma região com refletor (R): $x_b \leq x \leq x_c$, com as seguintes dimensões

$l_b = x_b - x_a$, $l_R = x_c - x_b$ e $l_T = l_b + l_R$. Neste caso temos o meio não-multiplicativo decomposto em duas regiões, "baffle" e refletor.

O procedimento para o cálculo do parâmetro albedo retirando as duas regiões não-multiplicativas, é análogo ao realizado retirando apenas uma região não-multiplicativa, conforme descrevemos a seguir.

Consideramos então a equação de transporte de nêutrons que rege o problema completo

$$\frac{d}{dx} \Psi^k(\mathbf{x}) - \mathbf{A}^k \Psi^k(\mathbf{x}) = \mathbf{S}^k(\mathbf{x}), \quad (4.9)$$

$k = 1 : K$ e as condições de contorno

$$\Psi_i^1(\mathbf{0}) = \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{i} = 1 : \frac{N}{2} \quad (4.10a)$$

$$\Psi_{i+\frac{N}{2}}^K(\mathbf{a}) = \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{i} = 1 : \frac{N}{2} \quad (4.10b)$$

adicionada as condições de continuidade de fluxo angular nas interfaces das regiões

$$\Psi_i^k(\mathbf{x}_k) = \Psi_i^{k+1}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{i} = 1 : N \quad (4.11)$$

O nosso objetivo neste caso é retirarmos as duas regiões não-multiplicativa, "baffle" e refletor, introduzindo o parâmetro albedo. O parâmetro é calculado da mesma forma que no caso anterior, então

$$\frac{d}{dx} \Psi^k(\mathbf{x}) - \mathbf{A}^k \Psi^k(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^k(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

fazendo agora $k = 1 : K - 2$ e as condições de contorno

$$\Psi_i^1(\mathbf{0}) = \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{i} = 1 : \frac{N}{2} \quad (4.13a)$$

$$\Psi_{i+\frac{N}{2}}^{K-2}(\mathbf{x}_a) = \alpha \Psi_i^{K-2}(\mathbf{x}_a), \quad \mathbf{i} = 1 : \frac{N}{2}, \quad (4.13b)$$

adicionada às condições de continuidade de fluxo angular nas interfaces das regiões

$$\Psi_i^k(\mathbf{x}_k) = \Psi_i^{k+1}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{i} = 1 : N, \quad \mathbf{k} = 1 : K - 3. \quad (4.14)$$

E, novamente, resolvemos este problema aplicando o método LTS_N com as novas condições de contorno à direita definidas pela equação (4.13b).

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira apresentamos os resultados obtidos para o cálculo do fator de multiplicação efetivo de problemas de transporte de nêutrons com simetria azimutal e espalhamento isotrópico em geometria planar e na segunda seção apresentamos os resultados obtidos com a utilização de condições de contorno do tipo albedo nesses cálculos.

5.1 RESULTADOS NUMÉRICOS NO ESTUDO DA CRITICALIDADE PELO MÉTODO EXPLÍCITO

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos obtidos pela aplicação do método LTS_N combinado ao método iterativo da Potência a fim de determinarmos o autovalor dominante do problema definido como fator de multiplicação efetivo em problemas de transporte neutrônico com simetria azimutal e espalhamento isotrópico em geometria unidimensional. Os programas desenvolvidos para determinação da solução foram implementados na linguagem Fortran 90. Os resultados encontrados foram comparados com os resultados obtidos por Batistela em [Batistela, 1996b; 1997a; 1997b].

Os códigos desenvolvidos por Batistela nos seus trabalhos diferem-se deste no que diz respeito ao método utilizado para a determinação do k_{eff} . Batistela apresentou resultados obtidos através da combinação do método LTS_N com o método da Bissecção, conforme mencionamos anteriormente. Embora o método LTS_N combinado com o método da bissecção apresente eficiência computacional e convergência bastante rápida para baixas ordens de quadratura (pequenos valores de N), apresenta baixa eficiência para grandes ordens de quadratura.

Assim, buscamos maior eficiência na combinação do método LTS_N com o método da Potência para ordens mais elevadas de quadratura conjugada as condições de contorno do tipo albedo, que substituem de forma implícita o sistema não multiplicativo "baffle-refletor" em torno da região combustível de um reator nuclear.

Para a apresentação dos resultados numéricos consideramos a equação de transporte de nêutrons expressa da seguinte forma:

$$\mu_i \frac{d}{dx} \Psi_i + \sigma_t \Psi_i = \left(\frac{\nu \sigma_f}{k_{eff}} + \frac{\sigma_s}{2} \right) \sum_{j=0}^N \omega_j \Psi_j \quad (5.1)$$

com:

- σ_t [cm^{-1}] seção de choque macroscópica total
- σ_s [cm^{-1}] seção de choque macroscópica de espalhamento
- ν número médio de nêutrons emitidos por fissão
- σ_f [cm^{-1}] seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons
- k_{eff} fator de multiplicação efetivo
- Ψ [nêutrons/ $cm^2 seg$] fluxo de nêutrons

5.1.1 PROBLEMA MODELO Nº 1 : CÁLCULO DO k_{eff} EM UMA PLACA HOMOGÊNEA

Seja uma placa plana homogênea sujeita a condições de contorno do tipo vácuo e aos seguintes parâmetros: espessuras $a = 10cm$, $\sigma_t = 1,0cm^{-1}$, $\sigma_s = 0,92cm^{-1}$ e $\nu\sigma_f = 0,1cm^{-1}$

Apresentamos as aproximações obtidas para o k_{eff} pelo método LTS_N combinado com o método da Potência na tabela 5.1, bem como os resultados gerados pelo método LTS_N combinado com o método da Bissecção [Batistela, 1997a] e

o desvio relativo percentual encontrado entre os resultados. Os resultados apresentados na tabela (5.2), determinados pelo código ANISN, por Stepanec, 1981, foram usados por Batistela a título de validação dos resultados obtidos em seu trabalho combinando o método LTS_N com o método da Bissecção.

LTS_N associado ao método da			
N	Potência k_{eff} (N° de iterações)	Bissecção k_{eff} (N° de iterações)	Desvio Relativo Percentual
2	0,939075 (12)	0,939050 ()	2,6622E-0003%
4	0,952096 (13)	0,951550 (40)	5,738E-0002%
6	0,952940 (13)	0,953010 (36)	7,3451E-0002%
8	0,953188 (13)	0,953201 (32)	1,3638E-0002%
10	0,953295 (13)	0,953301 (28)	6,2939E-0004%
12	0,953351 (13)	0,953354 (24)	3,1467E-0004%
14	0,953384 (13)	0,953387 (20)	3,1366E-0004%
16	0,953405 (13)	0,953409 (16)	4,1954E-0004%
18	0,953419 (13)	0,953424 (12)	5,2442E-0004%
20	0,953429 (13)	0,953432 (8)	3,1465E-0004%

Tabela 5.1: Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 1

Código ANISN	
N	k_{eff}
4	0,95207
8	0,95316
16	0,95338
32	0,95343

Tabela 5.2: Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 1 pelo código ANISN

Na tabela (5.3) apresentamos o desvio relativo percentual do método LTS_N combinado com os métodos da Bissecção e esquema iterativo da Potência para o método ANISN.

Analisando os resultados apresentados na tabela (5.1) para o desvio relativo percentual entre os resultados encontrados pelo método LTS_N combinado com o método da Bissecção e os resultados encontrados pelo método LTS_N combinado ao esquema iterativo da Potência observamos uma boa concordância nos resultados, uma vez que o desvio relativo percentual mostra uma pequena variação entre os

Desvio relativo Código ANISN X		
Método LTS_N combinado ao método da		
N	Potência	Bisseccção
4	2,73E-0003%	5,461E-0002%
8	2,308E-0003%	4,301E-0003%
16	2,62E-0003%	4,615E-0003%

Tabela 5.3: Desvio relativo percentual do problema modelo n° 1 do código ANISN para o método LTS_N combinado com os métodos da Bisseccção e da Potência

resultados encontrado com cada método. Agora, observando os resultados apresentados na tabela (5.3) afirmamos que os resultados apresentados pelo método LTS_N combinado ao esquema iterativo da Potência se aproxima mais do resultado encontrado pelo código ANISN do que os resultados apresentados pelo método LTS_N combinado ao método da Bisseccção, uma vez que o desvio relativo apresentado na segunda coluna desta tabela é menor, indicando que os resultados encontrados pelo método LTS_N combinado ao método iterativo da Potência encontra-se entre os resultados obtidos por Batistela e os resultados usados por ela para validação do código apresentado em [Batistela, 1997a].

Cabe ressaltar ainda que eliminamos a limitação apresentada pela metodologia proposta por Batistela, uma vez que o método apresentado neste trabalho continua válido para ordens de quadraturas maiores $N > 100$.

5.1.2 PROBLEMA MODELO N° 2: CÁLCULO DO k_{eff} EM UMA PLACA HETEROGÊNEA COM DUAS REGIÕES

Consideramos uma placa heterogênea, formada por duas regiões com 5cm de espessura cada, sujeita às condições de contorno do tipo reflexão em $x = 0$, vácuo em $x = 10$ e aos parâmetros listados na tabela (5.4).

Apresentamos as aproximações encontradas para k_{eff} na tabela (5.5), bem como os resultados obtidos por Batistela, 1997, e o desvio relativo percentual

Dados Geométricos	Região 1	Região 2
Espessura (cm)	5	5
$\sigma_t(cm^{-1})$	1,0	1,0
$\sigma_s(cm^{-1})$	0,5	0,9
$\nu\sigma_f(cm^{-1})$	0,6	0

Tabela 5.4: Parâmetros do problema modelo $n^\circ 2$

encontrado entre os resultados. Na tabela (5.6) apresentamos os resultados encontrados pelo código ANISN usado por Batistela para validação dos resultados por ela apresentados em [Batistela, 1997a].

LTS_N associado ao método da			
N	Potência k_{eff} (Nº de iterações)	Bissecção k_{eff} (Nº de iterações)	Desvio Relativo Percentual
2	1,157416 (57)	1,157750 (-)	0,0288%
4	1,158524 (62)	1,159750 (25)	0,1057%
6	1,158561 (63)	1,158847 (21)	0,0246%
8	1,158571 (63)	1,158893 (17)	0,0202%
10	1,158577 (63)	1,158914 (13)	0,0290%
12	1,158575 (63)	1,158916 (9)	0,0294%
50	1,158581 (63)		
100	1,158581 (63)		
200	1,158581 (81)		
300	1,158 (63)		

Tabela 5.5: Estimativa para k_{eff} do problema modelo $n^\circ 2$

Código ANISN	
N	k_{eff}
8	1,159

Tabela 5.6: Estimativa para k_{eff} do problema modelo $n^\circ 2$ pelo código ANISN

Na tabela (5.7) apresentamos o desvio relativo percentual do método LTS_N combinado com os métodos da Bissecção e esquema iterativo da Potência para o método ANISN.

Analisando os resultados apresentados na tabela (5.5) observamos novamente uma ótima concordância entre os resultados encontrados pelo método LTS_N

Desvio relativo Código ANISN X		
Método LTS_N combinado ao método da		
N	Potência	Bisseccção
8	3,7014E-0002%	9,2320E-0003%

Tabela 5.7: Desvio relativo percentual do problema modelo n° 2 do código ANISN para o método LTS_N combinado com os métodos da Bisseccção e da Potência

combinado ao método iterativo da Potência e o método LTS_N combinado ao método da Bisseccção, com desvio relativo na ordem de 0,1% para todos os valores de N comparados, conforme encontramos no exemplo anterior. Embora neste exemplo os resultados encontrados pelo método LTS_N não tenham ficado entre os resultados obtidos por Batistela e os resultados encontrados pelo código ANINS, como ocorreu no exemplo anterior, ainda assim temos uma ótima precisão nos resultados apresentados. Podemos melhorar a ordem do desvio relativo encontrado aumentando o grau de precisão utilizado no método da Potência, mas isso se tornaria inviável do ponto de vista computacional, uma vez que melhoramos os nossos resultados mas aumentamos o tempo computacional gasto na resolução dos cálculos.

Quanto aos resultados apresentados obtidos pelo método LTS_N combinado ao método iterativo da Potência, embora já encontramos ótimos resultados para k_{eff} entre $N = 50$ e $N = 100$, apresentamos o resultado para $N = 200$ mostrando novamente a viabilidade do método para ordens de quadratura $N > 100$.

5.1.3 PROBLEMA MODELO N° 3: CÁLCULO DO k_{eff} EM UMA PLACA HETEROGÊNEA COM TRÊS REGIÕES

Consideramos uma placa heterogênea, formada por três regiões, sujeita às condições de contorno do tipo vácuo e as seguinte propriedades:

- região 1: material 2 e espessura 1,8cm

Seção de choque (cm^{-1})	Material 1	Material 2
σ_t	1,265	2,06
σ_s	1,2	2,0405
$\nu\sigma_f$	0,09	0

Tabela 5.8: Parâmetros do problema modelo n° 3

- região 2: material 1 e espessura 4,95cm
- região 3: material 2 e espessura 2,4cm

e as seções de choque associadas apresentamos na tabela (5.8).

Apresentamos as aproximações encontradas para k_{eff} na tabela (5.9), bem como os resultados obtidos por Batistela, 1997, e o desvio relativo percentual encontrado entre os resultados. Na tabela (5.10) apresentamos os resultados encontrados pelo código ANISN usado por Batistela para validação dos resultados por ela apresentados em [Batistela, 1997a].

LTS_N associado ao método da			
N	Potência k_{eff} (N° de iterações)	Bissecção k_{eff} (N° de iterações)	Desvio Relativo Percentual
2	0,983418 (16)	0,983450 (-)	3,2538E-0003%
4	0,991441 (17)	0,990950 (40)	4,9548E-0002%
6	0,991468 (17)	0,991791 (36)	3,2567E-0002%
8	0,991864 (17)	0,991844 (32)	2,0164E-0003%
10	0,991905 (17)	0,991897 (28)	8,0653E-0004%
12	0,991926 (17)	0,991929 (24)	3,0244E-0004%
14	0,991939 (17)	0,991957 (20)	1,8145E-0003%
16	0,991947 (17)	0,991961 (16)	1,4113E-0003%
18	0,991953 (17)		
20	0,991957 (17)		

Tabela 5.9: Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 3

Na tabela (5.11) apresentamos o desvio relativo percentual do método LTS_N combinado com os métodos da Bissecção e esquema iterativo da Potência para o método ANISN.

Código ANISN	
N	k_{eff}
4	0,99130
8	0,99173
16	0,99192

Tabela 5.10: Estimativa para k_{eff} do problema modelo n° 3 pelo código ANISN

Desvio relativo Código ANISN X		
Método LTS_N combinado ao método da		
N	Potência	Bisseccção
4	1,4223E-0002%	3,5301E-0002%
8	1,3511E-0002%	1,1495E-0002%
16	3,3268E-0003%	4,1333E-0003%

Tabela 5.11: Desvio relativo percentual do problema modelo n° 3 do código ANISN para o método LTS_N combinado com os métodos da Bisseccção e da Potência

Novamente na tabela (5.9) os resultados encontrados pelo método LTS_N associado ao método iterativo da Potência apresenta ótima concordância com os resultados apresentados por Batistela na combinação dos métodos LTS_N e Bisseccção. Neste exemplo novamente encontramos nossos resultados entre os resultados obtidos por Batistela e o usado para validação de seus resultados, para $N = 16$, confirmando a qualidade dos resultados obtidos pelo método LTS_N combinado ao método iterativo da Potência.

Embora nos resultados apresentados pela combinação dos métodos LTS_N e iterativo da Potência não tenha havido redução do número de iterações com o aumento da quadratura N , é possível controlarmos o tempo computacional gasto e o número de iterações de acordo com o critério de parada utilizado no esquema iterativo da Potência. Nos três problemas modelos apresentados não foram realizados a análise, comparação, referente ao número de iterações de cada método comparado, uma vez que esse número está diretamente ligado ao grau de precisão usado nos métodos e não temos essa informação referente ao trabalho apresentado por Batistela.

5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS COM CONDIÇÕES DE CONTORNO DO TIPO ALBEDO

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos no cálculo do fluxo escalar e do fator de multiplicação efetivo em um problema de transporte de nêutrons para uma placa plana, heterogênea, com simetria azimutal, em um meio isotrópico e com um grupo de energia, utilizando condições de contorno do tipo albedo.

Consideramos uma placa composta com três regiões multiplicativas e uma região não multiplicativa. A placa é composta das regiões materiais M_1 : $0 < x < 50$; M_2 : $0 < x < 30$; M_3 : $0 < x < 50$; e uma região refletora, não multiplicativa, (R): $0 < x < 20$. Com condições de contorno do tipo reflexiva a esquerda do domínio e vácuo a direita do domínio.

Vemos na tabela (5.12) os parâmetros nucleares para cada região utilizada no problema, onde

- σ_t [cm^{-1}] seção de choque total
- σ_s [cm^{-1}] seção de choque de espalhamento
- ν número médio de nêutrons emitidos por fissão
- σ_f [cm^{-1}] seção de choque de fissão de nêutrons
- k_{eff} fator de multiplicação efetivo

	Região1	Região2	Região3	Região4
σ_t	0,25	0,25	0,12	0,3691
σ_s	0,05	0,01	0,01	0,3371
$\nu\Sigma_f$	0,22	0,25	0,08	0
L	50	30	50	20

Tabela 5.12: Parâmetros nucleares para o cálculo dos coeficientes de albedo.

Nas tabelas (5.13), (5.14) e (5.15) listamos o fluxo escalar de nêutrons para cada região da placa heterogênea calculado utilizando o método LTS_N , com quadratura S_{120} de Gauss-Legendre, os valores de k_{eff} e o tempo de CPU, respectivamente. Comparamos os resultados encontrados com a região R não multiplicativa explícita e com a utilização das condições de albedo, onde a região R fica implícita através da matriz albedo.

FLUXO DE NÊUTRONS [nêutrons/cm²]		
	Fluxo de nêutrons com a região R explícita	Fluxo de nêutrons com Albedo para a região R
x=0 cm	0,281739	0,283031
x=25 cm	0,224483	0,224483
x=50 cm	0,074635	0,074900
x=65 cm	0,017900	0,017902
x=80 cm	0,254490E-002	0,255037E-002
x=105 cm	0,170339E-003	0,170730E-003
x=130 cm	0,183208E-004	0,176546E-004

Tabela 5.13: Fluxo escalar de nêutrons sem albedo e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 120$.

Fator de Multiplicação Efetiva k_{eff}		
com a região R explícita	com Albedo para a região R	Desvio relativo percentual
1.0950938571	1.0950938569	9,1316E-0008%

Tabela 5.14: Fator de multiplicação de nêutrons sem albedo e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 120$.

Tempo de CPU em segundos	
com a região R explícita	com Albedo para a região R
543,1875 s	318,9063 s

Tabela 5.15: Tempo de CPU gasto com a região R explícita e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 120$.

Embora os resultados apresentados na tabela (5.13) para o fluxo escalar de nêutrons apresentem apenas concordância de dois algarismos significativos comparados aos resultados encontrados sem a utilização deste tipo de condição de contorno; ainda assim o método é eficaz para o cálculo do fator de multiplicação efetiva, uma vez que conforme resultados apresentados na tabela (5.14) encontramos

concordância de oito algarismos significativos no cálculo do fator de multiplicação efetivo.

Apresentamos na tabela (5.16) os resultados obtidos, para o mesmo problema apresentado no início da seção, para o perfil do fluxo escalar com quadratura angular de ordem $N = 130$ e na tabela (5.17) os respectivos valores encontrados para k_{eff}

FLUXO DE NÊUTRONS [nêutrons/cm²]		
	Fluxo de nêutrons com a região R explícita	Fluxo de nêutrons com Albedo para a região R
x=0 cm	0,281739	0,283031
x=25 cm	0,224483	0,224483
x=50 cm	0,074635	0,074900
x=65 cm	0,017900	0,017902
x=80 cm	0,025449E-001	0,025503E-002
x=105 cm	0,017033E-002	0,017073E-003
x=130 cm	0,018320E-003	0,017650E-004

Tabela 5.16: Fluxo escalar de nêutrons sem albedo e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 130$.

Fator de Multiplicação Efetiva k_{eff}		
com a região R explícita	com Albedo para a região R	Desvio relativo percentual
1.0950938567	1.0950938570	9,1316E-0008%

Tabela 5.17: Fator de multiplicação de nêutrons sem albedo e com albedo para uma região com quadratura angular de ordem $N = 130$.

Comparando os resultados obtidos nas tabelas (5.13), (5.14), (5.16) e (5.17) concluímos também que a ordem $N = 120$ nos fornece uma boa aproximação do valor de k_{eff} , uma vez que encontramos concordância em oito algarismos significativos e o mesmo desvio relativo percentual. Analisando ainda a convergência do método utilizando condições de contorno do tipo albedo, verificamos que fora das interfaces da região encontramos concordância em um número maior de algarismos significativos, entretanto o ganho de tempo computacional com o uso deste tipo de condições de contorno é superior às informações perdidas do problema e tendo

em vista que as diferenças encontradas podem ter ocorrido devido à precisão do compilador utilizado. Assim, concluímos que o método é eficaz e melhorias podem ser feitas no algoritmo utilizado, porém, deixamos estas melhorias para trabalhos futuros.

6 CONCLUSÕES

Analisando os bons resultados obtidos, onde conseguimos elevar a ordem de quadratura Gauss-Legendre no método LTS_N combinado ao método da Potência superando assim os resultados obtidos com o método LTS_N combinado ao método da Bissecção. Reduzimos o tempo computacional gasto para solucionar problemas em geometria planar com simetria azimutal em meios isotrópicos com a utilização das condições de contorno do tipo albedo, sem perda significativa de informações nos resultados encontrados. Desta forma, afirmamos que o objetivo deste trabalho foi atingido uma vez que completamos o estudo de aplicação do método LTS_N para a determinação do fator de multiplicação efetivo, agora combinado com o método da Potência, e mostramos a viabilidade da utilização das condições de contorno do tipo albedo.

Cumpramos notar que a metodologia anterior, que combinava o método LTS_N com o da bissecção modificado, não mostrou-se eficiente, sob ponto de vista computacional, para problemas que demandem a aproximação S_N com $N > 100$. Entretanto, para os casos aqui mostrados esta limitação foi superada.

Cabe ressaltar que tendo em vista que foi provada a convergência do método LTS_N pela teoria de semi-grupos fortemente contínuos [Vilhena, 1999], e lembrando que o cálculo do fluxo de nêutrons Ψ no método da Potência, obtido no chamado cálculo interno do método, é feito pelo método LTS_N , podemos afirmar que a convergência da solução do problema S_N correspondente ao cálculo interno é garantida. Portanto a análise referente ao estudo de convergência na determinação do fator de multiplicação efetivo fica restrita à iteração referente ao refinamento do k_{eff} , conhecida como iteração externa.

Finalmente devemos observar que os resultados encontrados para K_{eff} utilizando condição de contorno tipo albedo apresentaram uma excelente concordân-

cia com os resultados do problema original. Entretanto, apesar de não ter sido notado significativa diminuição do esforço computacional do problema com condição de contorno tipo albedo considerado, acreditamos que esta redução deverá ser observada na solução de problemas de transporte multidimensionais.

Face ao exposto, concluimos que a metodologia proposta é uma teoria promissora para o estudo da criticalidade em geometria cartesiana unidimensional, motivo pelo qual, como trabalho futuro sugerimos a generalização desta formulação para o cálculo da constante de multiplicação efetiva e condições de contorno do tipo albedo para problemas multidimensionais considerando modelo de multigrupo. Salientamos ainda a possibilidade de aceleração do método da potência usando a técnica de Chebysheff de dois parâmetros e a técnica de Wielandt.

Bibliografia

- [Allaire, 2002] Allaire, G., Kaber, S. M. Texts in Applied Mathematics Numerical Linear Algebra, Springer Science + Business Media, New York, 2008.
- [Batistela, 1999] Batistela, C.H.F., Vilhena, M. T., Borges, V. Determination of the Effective Multiplication Factor in slab by the LTSN Method. Annals of Nuclear Energy, vol. 26, pp. 761-767, 1999.
- [Barichello, 1992] Barichello, L. B.. Formação Analítica da Solução do Problema de Ordenadas Discretas Unidimensional. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 1992.
- [Batistela, 1997a] Batistela, C. H. F. Estudo da Criticalidade pelo Método LTS_N , Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC-UFRGS, 1997.
- [Batistela, 1997b] Batistela, C. H. F., Vilhena, M. T., Borges, V. Cálculo do parâmetro de criticalidade pelo método LTS_N . EGATEA Revista da Escola de Engenharia, UFRGS, v.25, n.4, pp.55-64, 1997.
- [Batistela, 1996a] Batistela, C.H.F. and Vilhena, M. T. Criticality by LTSN Method, Journal of Nuclear Science and Technology, vol. 34, n° 6, pp.603-606, 1996.
- [Batistela, 1996b] Batistela, C. H. F., Vilhena, M. T., Borges, V. Cálculo do fator de multiplicação K_{eff} pelo método LTS_N . EGATEA Revista da Escola de Engenharia, UFRGS, v.24, n.1, pp. 101-110, 1996.
- [Brancher, 1998] Brancher, J. Formação Analítica para Solução do Problema de Ordenadas Discretas pelo Método LTS_N , para Valores de N Grandes. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Pro-

grama de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e Materiais - PPGEM, Porto Alegre, RS, Brasil, 1998.

[Brancher, 1998] Brancher, J., Segatto, C. F., and Vilhena, M. T. M. B. The LTS_N Solution for Radiative Transfer Problem without Azimuthal Symmetry with Severe Anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Great Britain, 62:743-753, 1999.

[Case & Zweifel, 1967] Case, K.M., Zweifel, P. F. *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1967.

[Duderstad & Hamilton, 1976] Duderstad, J. J., Hamilton, L. J. *Nuclear Reactor Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[Gentle, 1998] Gentle, J. E. *Numerical Linear Algebra for Applications in Statistics*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Gomes, 1999] Gomes, M. G. Métodos de Inversão de Matriz para $(sA + B)$ em Problemas de Transporte de Nêutrons, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp-UFRGS, 1999.

[Gonçalves, 2002a] Gonçalves, G.A., Segatto, C.F., Vilhena, M. T. The LTS_n Particular Solution in a Slab Geometry for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, pp. 7, 2002.

[Gonçalves, 2002b] Gonçalves, G.A., Orengo, G., Vilhena, M. T., and Graça, C. O. LTS_N Solution of the Adjoint Neutral Transport Equation With Arbitrary Source for high Order Quadrature in a Homogeneous Slab. *Annals of Nuclear Energy*, 29(5):561-569, 2002.

[Marona, 2007] Marona, D. V. Solução LTS_N da Equação de Transporte em Geometria Cartesiana Unidimensional para $c = 1$. Dissertação de mestrado,

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil, 2007.

- [Oliveira, 1993] Oliveira, J. V. P. Formulação LTS_N para Problemas de Ordenadas Discretas com Anisotropia. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil, 1993.
- [Oliveira, 2002a] Oliveira, G. O. Avanços no Método LTS_N para Cálculos de Criticalidade e Desenvolvimento da Primeira Versão do Código LTS_N , Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC-UFRGS, 2002.
- [Oliveira, 2002b] Oliveira, J. V. P., Cordona, A. V., Vilhena, M. T. Solutions of the one-dimensional time-dependent discrete ordinates problem in slab by the spectral and LTS_N methods. *Annals of Nuclear Energy*, Inglaterra, v. 29, n.1, pp. 13-20, 2002.
- [Orengo, 2004] Orengo, G., Vilhena M.T., Graça, C. O., Caldeira, A.D., Golçalves, G. A. Recent Advances in the LTS_N Method for Criticality Calculations in Slab Geometry, *Annals of Nuclear Energy*, vol. 31, pp. 2195-2202, 2004.
- [Pazos, 1999] Pazos, R., and Vilhena, M. T., Convergence of the LTS_N Method: Approach of Semi-Groups. *Progress in Nuclear Energy*, 30:77-86, 1999.
- [Petersen, 2008] Petersen, C. Z. Aplicação da Transformada de Laplace para Determinação das Condições de Contorno Tipo Albedo para Cálculos Neutrônicos, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC-UFRGS, 2008.
- [Segatto, 2010] Segatto, C. F., Vilhena, M. T., Gonçalves, T. T. An analytical solution for the one-dimensional time-dependent S_N transport equation

for bounded and unbounded domains in cartesian geometry. *Kerntechnik*, v. 75, pp. 53-57, 2010.

- [Segatto, 2008a] Segatto, C.F., Vilhena, M. T., Thompson, M., Barros, R. C. Generalized Discrete Ordinates Methods for Neutral Particle Transport in Slab Geometry, *Progress in Nuclear Energy*, vol. 50, pp. 747-756, 2008.
- [Segatto, 2008b] Segatto, C.F., Vilhena, M. T., Marona, D.V. The LTSN Solution of the Transport Equation for one dimensional Cartesian Geometry with $c=1$, *Kerntechnik*, vol. 37, pp. 57-60, 2008.
- [Segatto, 2008c] Segatto, C. F., Vilhena, M. T., Gonçalves, T. Solution of the Radiative Heat Transfer Equation with Internal Energy Sources in a Slab by the LTSn Method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, v.73, pp. 57-60, 2008.
- [Segatto, 2004] Segatto, C. F., Vilhena, M. T., Leite, S. B. The LTS_N angular multigrid Approach in a slab. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, v. 95, pp. 415-433, 2004.
- [Segatto, 1999a] Segatto, C. F., Vilhena, M. T., Brancher, J. D. The one-dimensional LTS_N formulation for high degree of anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, v. 61, n.1, pp. 39-43, 1999.
- [Segatto, 1999b] Segatto, S. F., Vilhena, M. T., Gomes, M. G. The one-dimensional LTS_N solution in a slab with high degree of quadrature. *Annals of Nuclear Energy*, v. 26, pp. 925-934, 1999.
- [Segatto & Vilhena, 1994] Segatto, C. F., Vilhena, M. T. Extension of the LTS_N formulation for discrete ordinates problem without azimuthal symmetry. *Annals of Nuclear Energy*, ELSEVIER SCIENCE LTD. - PERGAM, v. 21, n.11, pp. 701-710, 1994.

- [Segatto & Vilhena, 1996] Segatto, C. F., Vilhena, M. T. A new iterative method to solve the radiative transfer equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Great Britain, 55:493-498, 1996.
- [Stepaneck,1981] Stepaneck, J. The DPN Surface Flux Integral Neutron Transport Method for Slab Geometry, *Nuclear Science and Engineering*, vol. 78, pp. 53-65, 1981.
- [Streck,1993] Streck, E. E. Solução Analítica para Aproximação P_N da Equação de Transporte Linear Unidimensional. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, RS, Brasil, 1993.
- [Vilhena,1999] Vilhena, M. T., Pazos, R. P. Convergence of the LTS_N : approach of CO semigroup. *Progress in Nuclear Energy*, v.34, n.1, pp. 77-86, 1999.
- [Vilhena,1998] Vilhena, M. T., Barichello, L. B., Zabadal, J., Segatto, C. F., Cordona, A. V. General Solutions of one-dimensional transport equation Approximations. *Progress in Energy Nuclear*, v. 33, n. 1-2, pp. 99-115, 1998.
- [Zabadal,1997] Zabadal, J., Vilhena, M. T., Barichello, L. B. An analytical solution for the two-dimensional discrete ordinates problem in a convex domain. *Progress in Nuclear Energy*, v. 31, n.3, pp. 225-228, 1997.
- [Zabadal, 1995] Zabadal, J., Barichello, L. B., Vilhena, M. T. Solution of the three-dimensional one-group discrete ordinates problems by the LTS_N method. *Annals of Nuclear Energy*, v. 22, n.2, pp. 131-134, 1995.