UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Gustavo Camargo Bérti

PREVISÃO E VERIFICAÇÃO DA COERÊNCIA DO RESULTADO DE UMA OPERAÇÃO

PORTO ALEGRE
2011

Gustavo Camargo Bérti

PREVISÃO E VERIFICAÇÃO DA COERÊNCIA DO RESULTADO DE UMA OPERAÇÃO

Trabalho de Conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Luisa Rodriguez Doering

Aprovado em: ________________

Banca examinadora:

____

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana

Instituto de Matemática – UFRGS

____

Profª. Drª. Maria Alice Gravina

Instituto de Matemática – UFRGS

____

Profª. Drª. Luisa Rodriguez Doering – Orientadora

Instituto de Matemática – UFRGS

Dedico este trabalho aos meus pais, Nestor e Glades. Agradeço o carinho, a educação, o apoio e os valores que me fizeram chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me possibilitado chegar até aqui.

A meus pais Nestor e Glades por tudo.

A minha namorada e colega Fernanda pelo amor e pelo apoio incondicional durante a parte final desta jornada.

A meu irmão Tiago pelo companheirismo na vida toda, especialmente nos últimos quatro anos em que dividimos o apartamento.

Aos amigos e colegas Henrique, Sílvia e Greice pelos momentos de descontração que passamos juntos e pela amizade que espero levar para toda a vida.

Aos meus familiares que apoiaram durante toda a vida acadêmica, especialmente aos tios Elias e Neiva e a prima Fabiana que me ajudaram a dar os primeiros passos em Porto Alegre.

A prima Débora pelo incentivo na realização deste trabalho.

A escola que possibilitou a realização da parte prática deste trabalho, em especial a professora Angelina, que cedeu seus períodos de aula.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática, em especial a professora e orientadora Luisa pela dedicação e disponibilidade na orientação deste trabalho.

A UFRGS pela formação gratuita e de qualidade.

RESUMO

Este trabalho objetiva uma reflexão sobre a previsão e a verificação da coerência do resultado de um cálculo, observando-se os efeitos e as propriedades aritméticas da operação. Para viabilizar tal raciocínio são expostos alguns efeitos das operações envolvendo números reais, considerando-se a natureza dos números operados, e algumas propriedades aritméticas das operações envolvendo números inteiros. Como atividade prática foi planejada uma oficina com alunos de 8ª série do ensino fundamental, visando a exposição desses tópicos para possibilitar o raciocínio de previsão e verificação da coerência do resultado. A oficina foi realizada dentro de um contexto de Engenharia Didática e as observações feitas antes, durante e depois da prática foram utilizadas para validar hipóteses envolvendo o assunto deste estudo.

Palavras-chave: Previsão. Coerência do resultado. Efeitos da operação. Propriedades aritméticas.

ABSTRACT

The goal of this work is to reflect about the prediction and the verification of the coherence of the result of a calculation, considering the consequences and the arithmetic properties of the operation. In order to achieve this goal we expose some consequences of the operations with real numbers, considering the nature of the involved numbers, and some arithmetic properties of the operations with whole numbers. As a practical activity we planned a workshop with eight graders, in order to expose these topics to allow the prediction and the verification of the coherence of the result. The workshop was offered within a Didatical Engineering context and the observations made before, during and after the practice was used to validate the hypotheses involved in this study.

Keywords: Prediction. Coherence of the result. Consequences of the operation. Arithmetic properties.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

Durante as disciplinas de prática de ensino e estágios não curriculares pude perceber que boa parte dos alunos não tem ideia sobre o resultado de uma operação aritmética. Observei a falta de uma previsão sobre a resposta, mesmo que pouco refinada, antes do cálculo propriamente dito. Por exemplo, em uma subtração de números naturais com minuendo maior que o subtraendo alguns alunos não se dão conta, antes de começar o cálculo, de que a resposta deve ser menor que o minuendo. Erros na resolução através do algoritmo da subtração, que é de difícil compreensão para alguns alunos quando é ensinado nos primeiros anos do ensino fundamental, podem levá-los a uma resposta maior que o minuendo, o que não os chama a atenção quando não têm parâmetros sobre como deve ser o resultado.

A ausência da aplicação de propriedades aritméticas simples é notável em sala de aula. Poucas vezes vêem-se raciocínios do tipo “par + par = par” ou “a: múltiplo de 5 e b:inteiro, implica que $a \cdot b$ “termina” em 0 se b é par ou em 5 se b é ímpar”.

Saindo um pouco do âmbito escolar, essa falta de previsão de resultados continua presente. Cada vez mais usa-se a calculadora como instrumento de cálculo. Algumas correntes incentivam o uso da calculadora até mesmo em sala de aula em detrimento a completa assimilação dos algoritmos de cálculo. É inegável que o uso de calculadoras impede os erros que podem ser ocasionados pelos algoritmos. Entretanto, as calculadoras são operadas por nós, seres humanos, perfeitamente passíveis de erros de digitação, por exemplo. A previsão de resultados pode ser uma aliada ao cálculo com calculadora. Mesmo sem usar os algoritmos de cálculo, ao pensar sobre o comportamento de um resultado, pode-se constatar respostas equivocadas ocasionadas por erros durante o uso do equipamento.

Este trabalho traz um estudo sobre a exploração deste tipo de raciocínio de análise antes da resolução mecânica de uma operação, possibilitando a verificação da coerência da resposta encontrada. Para tal, são abordados detalhadamente três aspectos do conceito de *sentido do número*, o qual se refere à compreensão global dos números e operações: os efeitos das operações, as propriedades aritméticas e a sensibilidade para rever o resultado. Expõem-se aqui alguns efeitos das adições, subtrações, multiplicações e divisões de números reais, tendo em vista a natureza dos números operados; propriedades aritméticas dessas quatro operações quando números inteiros são operados; e argumentos que justificam a importância da verificação do resultado obtido em um cálculo, independentemente do processo de resolução.

A parte prática deste estudo tem como metodologia a Engenharia Didática. Como análise prévia faz-se uma análise sobre a presença e a aplicação dos efeitos das operações, bem como das propriedades aritméticas em livros didáticos, também foi aplicado um questionário inicial aos participantes do experimento didático, visando a avaliação sobre a aplicação dos raciocínios de previsão e verificação da coerência do resultado de uma operação. A análise *a priori* consiste no planejamento de uma sequência didática, fundamentada em pontos críticos observados nas análises prévias. A fase de experimentação deu-se por meio de uma oficina de três encontros, visando à explicitação dos efeitos e as propriedades aritméticas das operações aqui abordadas, objetivando o raciocínio de previsão do resultado de uma operação e verificação da coerência após o processo de cálculo. Os participantes da oficina foram alunos da 8ª série de uma escola pública. A análise *a posteriori* levou em consideração o material produzido pelos alunos durante toda a oficina, porém fundamentou-se na observação de um questionário final nos mesmos moldes que o inicial. A validação de hipóteses levantadas na análise *a priori* baseou-se no confronto dos questionários final e inicial.

Não esperamos que, ao final da oficina, os alunos aceitem e adotem completamente os raciocínios de previsão e verificação da coerência do resultado. Uma das razões para trabalhar com esse tipo de raciocínio é evitar no cálculo mecânico, a aceitação de uma resposta qualquer, apenas por que pelas regras do algoritmo, ou pelo uso da calculadora, se chegou a tal resultado. Espera-se instigar o senso crítico do aluno em relação a isso, bem como constatar o nível de não aplicabilidade desses raciocínios durante o ensino básico, mais especificamente aqui, o Ensino Fundamental.

2 – SENTIDO DO NÚMERO

Normalmente a primeira ideia de número que se tem é a de algo de se pode contar, ou seja, o número de elementos de um conjunto, o seu cardinal. Entretanto, os números podem estar associados a outros conceitos. Podemos usar números para ordenação, como quando dizemos, por exemplo, que um nadador chegou em segundo lugar numa competição. Também podemos usar números simplesmente para nomeação, como, por exemplo, os números das camisetas dos jogadores de uma equipe. Algumas vezes utilizamos os sentidos de ordenação e nomeação juntos, como por exemplo, os números das casas de uma rua ou o número de matrícula de um aluno. Cebola (200-?)[1] fala que essas diversas concepções de número trouxeram à tona a expressão *sentido do número*, a qual parece ser mais adequada ao ensino e à aprendizagem.

Diversas são as definições de *sentido do número* na literatura, mas elas sempre são ideias convergentes. McIntosh et. al. (1992) definem o termo da seguinte forma:

> O sentido do número surge como a compreensão geral dos números e das operações, em paralelo com a capacidade e inclinação para utilizar este conhecimento de forma flexível de forma a fazer julgamentos matemáticos e a desenvolver estratégias eficazes para lidar com os números e as operações. (p.3)

McIntosh et. al. (1992) apresentaram um modelo, dividido em três grandes blocos, para definir e delimitar as diferentes vertentes do sentido do número. Albergaria e Ponte (2008, p. 3) fizeram uma tabela esquematizando esse modelo:

	Bloco 1 - Conhecimento e facilidade com os números	Sentido da ordenação dos números	Valor posicional
			Relações entre números representados de diferentes formas
			Ordenar números representados de forma igual ou diferente
		Múltiplas representações do número	Gráfica e simbólica
			Representações equivalentes
			Comparação com valores de referência
		Sentido de grandeza relativa e absoluta dos números	Comparação com um referencial físico
			Comparação com um referencial matemático
		Sistema de valores	Matemática

[1] A Citação Cebola (200-?) refere-se a um artigo da autora Graça Cebola no qual não se encontra o ano exato da publicação, apenas intui-se que este foi publicado na década de 2000 em razão das citações contidas no texto.

Sentido do número		de referência (benchmarks)	Pessoal
	Bloco 2 - Conhecimento e facilidade com as operações	Compreender o efeito das operações	Operar com números inteiros
			Operar com números racionais (na representação fracionária e decimal)
		Compreender as propriedades matemáticas	Comutatividade
			Associatividade
			Distributividade
			Identidades fundamentais
			Inversos
		Compreender a relação entre as operações	Adição/multiplicação
			Subtração/divisão
			Adição/subtração
			Multiplicação/divisão
	Bloco 3 - Aplicar o conhecimento e facilidade com os números e as operações aos contextos de cálculo	Compreensão das relações entre o contexto e os cálculos adequados	Reconhecer dados como exatos ou aproximados
			Consciência de que as soluções podem ser exatas ou aproximadas
		Consciência da existência de múltiplas estratégias de resolução	Capacidade para criar e/ou inventar estratégias
			Capacidade de aplicar estratégias diferentes
			Capacidade para escolher uma estratégia eficaz
		Predisposição para utilizar uma representação e/ou método eficaz	Facilidade com vários métodos de cálculo (mental, calculadora, escrito)
			Facilidade em escolher números "eficazes"
		Inclinação para rever os dados e o resultado com sensibilidade numérica	Reconhecer a razoabilidade dos dados
			Reconhecer a razoabilidade dos cálculos

Alguns itens dessa tabela são mais relevantes para o nosso trabalho e serão abordados mais detalhadamente. São eles:

Do bloco 2:

- Compreender o efeito das operações;
- Compreender as propriedades matemáticas, neste caso, mais especificamente as propriedades aritméticas.

Do bloco 3:

- Inclinação para rever os dados e o resultado com sensibilidade numérica.

2.1 – COMPREENSÃO DO EFEITO DAS OPERAÇÕES

Cebola (200-?) afirma que a conceitualização das operações aritméticas básicas é plena quando é compreendido o efeito de cada operação sobre dois números quaisquer, inteiros ou não.

2.1.1 – Adição e subtração

Segundo Nunes e Bryant (1997), os raciocínios de adição e subtração de números naturais[1] referem-se a situações nas quais as quantidades (que podem ser interpretadas como conjuntos de objetos) são reunidas ou separadas, respectivamente. Por exemplo, 3 + 7 significa reunir dois conjuntos, um com 7 elementos e o outro com 3, totalizando 10 elementos. Já 6 – 4 significa partir de um conjunto inicial de 6 elementos e separar 4 desse conjunto, restando assim apenas 2 elementos. Podemos pensar também que uma subtração do tipo 3 – 8 significa partir de um conjunto inicial de 3 elementos e separar 8 desse conjunto, faltando 5 elementos para conseguir fazer tal operação, o que pode ser representado por -5.

As seguintes propriedades demonstram compreensão dessa idéia:

A1: Ao adicionar dois números naturais não nulos, o resultado será um número natural maior que ambos.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{N}^*)\ a+b>a \text{ e } a+b>b$$

A2: Ao subtrair um número natural não nulo de outro maior, o resultado será um número natural menor que o minuendo.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{N}^*)\ a>b \Rightarrow a-b<a$$

A3: Ao subtrair um natural não nulo de outro menor, o resultado será um número inteiro negativo maior que o simétrico do subtraendo.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{N}^*)\ a<b \Rightarrow -b<a-b<0$$

[1] Neste trabalho consideramos que o número 0 faz parte do conjunto dos números naturais.

Essas propriedades são generalizadas para números reais positivos, mas devem ser adaptadas quando consideramos os números reais negativos:

A4: Ao adicionar dois números reais negativos, o resultado será um número real negativo menor que ambos.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a<0\ \text{ e }\ b<0 \Rightarrow a+b<a\ \text{ e }\ a+b<b$$

A5: Ao adicionar um número real positivo a um negativo, basta usar a propriedade comutativa da adição, para recair nos casos A2 ou A3. Por exemplo:

-3 + 7 = 7 + (-3) = 7 – 3 = 4

-7 + 3 = 3 + (-7) = 3 – 7 = -4

A6: *Definição:* A subtração é a soma com o simétrico do subtraendo. Logo, as subtrações em que o minuendo é negativo, na verdade são somas com o oposto do minuendo.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a-b=a+(-b)$$

Assim, constata-se que:

- Ao subtrair um número real negativo de um positivo o resultado é maior que o minuendo. Por exemplo, 5 – (-3) = 5 + (+3) = 8;

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a>0\ \text{ e }\ b<0 \Rightarrow a-b>a$$

- Ao subtrair um número real negativo de outro negativo, não se pode afirmar se o resultado é positivo ou negativo, apenas que é um número real entre o minuendo e o oposto do subtraendo. Por exemplo, -5 – (-3) = -5 + 3 = -2 e -4 – (-7) = -4 + 7 = 3.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a<0\ \text{ e }\ b<0 \Rightarrow a<a-b<-b$$

Resumindo, em uma adição de números reais (considerando a subtração como um caso particular de adição) temos as seguintes propriedades:

A7: Se ambas as parcelas são números reais positivos, o resultado é positivo e maior que ambos.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a>0\ \text{ e }\ b>0 \Rightarrow a+b>0,\ \ a+b>a\ \text{ e }\ a+b>b$$

A8: Se ambas as parcelas são números reais negativos, o resultado é negativo e menor que ambos.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a<0\ \text{e}\ b<0 \Rightarrow a+b<0,\ a+b<a\ \text{e}\ a+b<b$$

A9: Se as parcelas a e b são números reais de sinais opostos (um é positivo e o outro é negativo), o resultado é um número real entre a e b, cujo sinal é o do número de maior módulo, onde módulo de um número é a sua distância até zero na reta real.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a<0\ \text{e}\ b>0 \Rightarrow a<a+b<b$$
$$a>0\ \text{e}\ b<0 \Rightarrow b<a+b<a$$

2.1.2 – Multiplicação

Nunes et. al. (2005), afirmam que o conceito de multiplicação normalmente é ensinado na escola baseando-se na ideia de adição repetida de parcelas iguais. Esta ideia é bastante eficiente quando o par de números a ser operado é natural. Isso leva o aluno a raciocínios do tipo: “ao multiplicar dois números naturais (exceto 1 e 0) o resultado será maior que ambos”.

Além disso, Cebola (200-?) ressalta a importância em reparar que mesmo que a adição e a multiplicação de dois de números naturais não nulos gerem resultados maiores que ambos os números, os efeitos são diferentes. Por exemplo, ao adicionar 2 a 30 o resultado é muito mais próximo de 30 do que ao multiplicar 30 por 2. Ou seja:

$$2\cdot 30=60>32=2+30$$

Nunes e Bryant (1997) mostram que as diferenças entre a adição e multiplicação também devem ser ressaltadas. Como visto em A7, somando-se quaisquer dois números reais positivos o resultado será um número maior que ambos:

Entretanto, a multiplicação de dois números reais positivos pode gerar um número menor que um dos fatores (basta multiplicá-lo por um número entre 0 e 1).

Resumindo, na multiplicação de reais positivos, valem as seguintes propriedades:

M1: Ao multiplicar dois números maiores que 1, o resultado é maior que ambos.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a>1\ \text{e}\ b>1 \Rightarrow a\cdot b>a\ \text{e}\ a\cdot b>b$$

Em consequência disso, fica evidente que o produto é maior que 1:

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a > 1 \text{ e } b > 1 \Rightarrow a \cdot b > 1$$

M2: Ao multiplicar um número maior que 1 por outro entre 0 e 1, o resultado é menor que o primeiro e maior que o segundo (consequência de M1, pois este está sendo multiplicado por um número maior que 1).

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ a > 1 \text{ e } 0 < b < 1 \Rightarrow b < a \cdot b < a$$

M3: Ao multiplicar dois números menores que 1, o resultado é menor que ambos.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ 0 < a < 1 \text{ e } 0 < b < 1 \Rightarrow a \cdot b < a \text{ e } a \cdot b < b$$

Em consequência disso, fica evidente que o produto é um número entre 0 e 1:

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ 0 < a < 1 \text{ e } 0 < b < 1 \Rightarrow 0 < a \cdot b < 1$$

Quando nos estendemos ao conjunto de todos os números reais, o sinal do resultado é importante. Multiplicando dois números reais quaisquer, o módulo do produto obedece às conclusões M1, M2 e M3, porém o sinal é proveniente da “regra de sinais”:

$$\begin{aligned}(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R})\ & a > 0\ ,\ b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0 \\ & a < 0\ ,\ b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0 \\ & a < 0\ ,\ b > 0 \Rightarrow a \cdot b < 0 \\ & a > 0\ ,\ b < 0 \Rightarrow a \cdot b < 0\end{aligned}$$

2.1.3 – Divisão

Para Nunes e Bryant (1997), assim como a multiplicação de números naturais pode ser compreendida como uma soma repetida de parcelas iguais, a divisão de números naturais pode ser compreendida como uma subtração repetida. Por exemplo, pode-se obter a resposta de 270 divido por 90 observando quantas vezes se deve subtrair 90 de 270 até chegar a zero.

A divisão de números naturais em que o resultado é natural e há resto é chamada de divisão euclidiana. A cada vez que se pode subtrair o divisor do dividendo, o resultado aumenta uma unidade. O processo termina quando o resto é menor que o divisor. Por exemplo, na divisão de 10 por 3, temos:

$10-1.3=7$
$10-2.3=4$
$10-3.3=1$ (O processo termina aqui, pois $1<3$. O resultado é 3 e o resto é 1.)

Podemos utilizar a divisão euclidiana para concluir sobre o quociente de uma divisão exata de números naturais. A partir daqui, sempre estamos nos referimos a divisões exatas e a palavra quociente é utilizada como sinônimo do resultado dessa operação.

D1: O quociente da divisão de dois números naturais não nulos iguais é 1;

$$(\forall\ a\ \in\ \mathbf{N}^*)\ a \div a = 1$$

D2: O quociente da divisão de um número natural por outro menor é maior que 1 (o quociente nem sempre é natural).

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{N}^*)\ a > b \Rightarrow a \div b > 1$$

Exemplo: $4 \div 3$ (Na divisão euclidiana temos resultado 1 com resto 1. Isso significa que na divisão exata o quociente é um número não inteiro entre 1 e 2.)

D3: O quociente da divisão de um número natural por outro maior é maior que 0 e menor que 1 (logo não é um número natural).

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{N}^*)\ a < b \Rightarrow 0 < a \div b < 1$$

Exemplo: $3 \div 4$ (Na divisão euclidiana temos resultado 0 com resto 3. Isso significa que na divisão exata o quociente é um número não inteiro entre 0 e 1.)

As propriedades D1, D2 e D3 podem ser generalizadas para a divisão exata de dois números reais positivos quaisquer. Além disso, a divisão pode ser encarada como a multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor. Pelas propriedades da multiplicação, ao considerarmos apenas os números reais positivos, temos que:

D4: O quociente da divisão de um número real positivo por outro maior que 1 é menor que o primeiro.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R}_+^*)\ a > 0 \text{ e } b > 1 \Rightarrow a \div b < a$$

D5: O quociente da divisão de um número real positivo por outro menor que 1 é maior que o primeiro.

$$\left(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R}_{+}^{*}\right) 0 < b < 1 \Rightarrow a \div b > a$$

As propriedades da divisão até aqui abordadas podem ser generalizadas para a divisão de dois números reais não nulos quaisquer, considerando-se apenas os seus módulos. O sinal do quociente vem da mesma "regra de sinais" da multiplicação:

$$\begin{aligned}\left(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{R}\right) & a > 0\ ,\ b > 0 \Rightarrow a \div b > 0 \\ & a < 0\ ,\ b < 0 \Rightarrow a \div b > 0 \\ & a < 0\ ,\ b > 0 \Rightarrow a \div b < 0 \\ & a > 0\ ,\ b < 0 \Rightarrow a \div b < 0\end{aligned}$$

2.2 - COMPREENSÃO DAS PROPRIEDADES ARITMÉTICAS

Nessa seção serão abordadas algumas consequências das propriedades da adição e da multiplicação de números naturais em quatro "operações" nos números inteiros: adição, subtração, multiplicação e divisão (a divisão não pode ser considerada uma operação no conjunto dos números inteiros, pois mesmo que dois números inteiros sejam operados, o resultado pode não pertencer ao conjunto). Cebola (200-?) enfatiza que as propriedades aritméticas devem ser aplicadas aos cálculos, pois elas fazem parte do *sentido do número*.

De Hefez (2006) extraímos as seguintes propriedades válidas para números naturais:

i) A adição e a multiplicação são bem definidas:

$$\left(\forall\ a,\ b,\ a',\ b'\ \in\ \mathbf{N}\right) a = a' \text{ e } b = b' \Rightarrow\ a + b = a' + b' \text{ e } a \cdot b = a' \cdot b'$$

ii) A adição e a multiplicação são comutativas:

$$\left(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{N}\right) a + b = b + a \text{ e } a \cdot b = b \cdot a$$

iii) A adição e a multiplicação são associativas:

$$\left(\forall\ a,\ b\ ,\ c\ \in\right) \mathbf{N}\ (a + b) + c = a + (b + c) \text{ e } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

iv) A adição e a multiplicação possuem elementos neutros:

$$\forall\ a\ \in\ \mathbf{N},\ a+0=a \text{ e } a\cdot 1=a$$

v) A multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$\forall\ a,\ b\ ,\ c\ \in\ \mathbf{N},\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

Essas cinco propriedades são chamadas leis básicas da aritmética. Além do conjunto dos números naturais, os conjuntos dos números inteiros, racionais, reais e complexos também estão sujeitos a essas leis.

2.2.1 – Paridade

Chamamos de paridade a classificação de um número inteiro em par ou ímpar.

Um número inteiro é par quando é múltiplo de 2, ou seja, pode ser escrito na forma *2k*, ou ímpar, caso possa ser escrito na forma *2k + 1* (em ambos os casos *k* é um número inteiro).

2.2.1.1 – Propriedades quanto à paridade

C1: A soma e a diferença de dois números inteiros de mesma paridade são pares.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{Z})\ \left.\begin{array}{r} a \text{ par e } b \text{ par} \\ a \text{ ímpar e } b \text{ ímpar} \end{array}\right\} \Rightarrow (a+b) \text{ e } (a-b) \text{ são pares}$$

C2: A soma e a diferença de dois números inteiros de paridades diferentes são ímpares.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{Z})\ \left.\begin{array}{r} a \text{ par e } b \text{ ímpar} \\ a \text{ ímpar e } b \text{ par} \end{array}\right\} \Rightarrow (a+b) \text{ e } (a-b) \text{ são pares}$$

C3: O produto de dois números inteiros é par, se e somente se, um dos fatores é par.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{Z})\ (a\cdot b) \text{ é par} \Leftrightarrow a \text{ é par ou } b \text{ é par}$$

Observação: A forma “contrapositiva” dessa equivalência é: “o produto de dois números inteiros é ímpar, se e somente se, os dois fatores são ímpares”.

$$(\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbf{Z})\ a\cdot b \text{ é ímpar} \Leftrightarrow a \text{ e } b \text{ são ímpares}$$

2.2.2 – Valor posicional

Sejam $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}$ e a_n os dígitos de um número natural a. Assim, a representação de a é $a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 a_1 a_0$ que também pode ser escrito como:

$$a = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 + ... + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^n a_n$$

Neste trabalho, sempre que utilizarmos a nomenclaturas "último dígito" ou "termina em" estamos nos referindo ao algarismo a_0.

2.2.3 – Múltiplos

Os múltiplos de um número inteiro são todos os números gerados pelo produto desse número com qualquer número inteiro.

2.2.3.1 – Propriedades quanto ao comportamento dos múltiplos

C4: A soma, a subtração e a multiplicação de múltiplos de um número inteiro também são múltiplos desse mesmo número.

$$(\forall\ a,\ b,\ t,\ k_1,\ k_2 \in\ \mathbf{Z})\ \left.\begin{array}{r} a = t \cdot k_1 \\ b = t \cdot k_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow a + b = t \cdot (k_1 + k_2),\ \ a - b = t \cdot (k_1 - k_2)\ \text{ e }\ a \cdot b = t \cdot (k_1 \cdot k_2)$$

C5: Múltiplos de 10 "terminam" em 0, e reciprocamente, se um número inteiro "termina" em 0, este é múltiplo de 10.

$$(\forall\ a,\ t \in\ \mathbf{Z})\ a \text{ é representado por } a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 a_1 a_0$$
$$a = 10 \cdot t \Leftrightarrow a_0 = 0$$

C6: Múltiplos de 5 "terminam" em 0 (caso o outro fator seja par) ou 5 (caso o outro fator seja ímpar) , e reciprocamente, se um número inteiro "termina" em 0 ou 5, este é múltiplo de 5.

$$(\forall\ a,\ t \in\ \mathbf{Z})\ a \text{ é representado por } a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 a_1 a_0$$
$$a = 5 \cdot t \Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ (se } t \text{ é par) ou } a_0 = 5 \text{ (se } t \text{ é ímpar)}$$

C7: Múltiplos de 2 "terminam" em 0, 2, 4, 6 ou 8, e reciprocamente, se um número inteiro "termina" em 0, 2, 4, 6 ou 8, este é múltiplo de 2.

$$(\forall\ a,\ t \in \mathbf{Z})\ a \text{ é representado por } a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0$$
$$a = 2 \cdot t \Leftrightarrow a_0 \in \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$$

C8: O número formado pelos dois últimos dígitos de um múltiplo de 4 é múltiplo de 4, e reciprocamente, se o número formado pelos dois últimos dígitos de um número inteiro é múltiplo de 4, este é múltiplo de 4.

$$(\forall\ a,\ t \in \mathbf{Z})\ a \text{ é representado por } a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0$$
$$a = 4 \cdot t \Leftrightarrow 10a_1 + a_0 = 4 \cdot k, \text{com } k \in \mathrm{Z}$$

C9: O número formado pelos três últimos dígitos de um múltiplo de 8 é múltiplo de 8, e reciprocamente, se o número formado pelos três últimos dígitos de um número inteiro é múltiplo de 8, este é múltiplo de 8.

$$(\forall\ a,\ t \in \mathbf{Z})\ a \text{ é representado por } a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0$$
$$a = 8 \cdot t \Leftrightarrow 10^2 a_1 + 10a_1 + a_0 = 8 \cdot k, \text{com } k \in \mathrm{Z}$$

C10: Somando-se os algarismos de um múltiplo de 9, obtém-se um múltiplo de 9, e reciprocamente, se a soma dos algarismos de um número inteiro é múltiplo de 9, este é múltiplo de 9.

$$(\forall\ a,\ t \in \mathbf{Z})\ a \text{ é representado por } a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0$$
$$a = 9 \cdot t \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 9 \cdot k, \text{com } k \in \mathrm{Z}$$

C11: Somando-se os algarismos de um múltiplo de 3, obtém-se um múltiplo de 3, e reciprocamente, se a soma dos algarismos de um número inteiro é múltiplo de 3, este é múltiplo de 3.

$$(\forall\ a,\ t \in \mathbf{Z})\ a \text{ é representado por } a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0$$
$$a = 3 \cdot t \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 3 \cdot k, \text{com } k \in \mathrm{Z}$$

C12: O quociente de uma divisão de inteiros é inteiro, se e somente se, o dividendo é múltiplo do divisor.

$$(\forall\ a,\ b,\ c\ \in\ \mathbf{Z})\ a \div b = c \Leftrightarrow a = b \cdot c$$

Podemos utilizar C5 à C11 para decidir se o dividendo é múltiplo do divisor (se o divisor pertence ao conjunto {2, 3, 4, 5, 8, 9, 10}). Nesse caso, essas propriedades são chamadas de “regras de divisibilidade”.

2.2.4 – Propriedades quanto ao comportamento do último dígito

C13: Numa soma de naturais, o último dígito é o último dígito da soma dos últimos dígitos.

$$(\forall\ a,\ b \in\ \mathbf{N})$$

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ é representado por } a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0 \\ \text{e } b \text{ por } b_m b_{m-1} \ldots b_3 b_2 b_1 b_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{o último dígito de } a+b \text{ é o último dígito de } a_0 + b_0$$

C14: Numa subtração de naturais, o último dígito é o último dígito é a diferença dos últimos dígitos ou essa diferença somada a dez (caso a diferença dos últimos dígitos seja negativa).

$$(\forall\ a,\ b \in\ \mathbf{N})$$

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ é representado por } a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0 \\ \text{e } b \text{ por } b_m b_{m-1} \ldots b_3 b_2 b_1 b_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \text{o último dígito de } a-b \text{ é o último dígito de } a_0 - b_0 \text{, se } a \geq b \\ \text{ou o último dígito } 10 + a_0 - b_0 \text{, se } a < b \end{array}$$

C15: Numa multiplicação de números inteiros, o último dígito do produto é o último dígito do produto dos últimos dígitos.

$$(\forall\ a,\ b \in\ \mathbf{N,})$$

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ é representado por } a_n \ldots a_1 a_0 \\ \text{e } b \text{ por } b \ldots b_1 b_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{o último dígito de } a \cdot b \text{ é o último dígito de } a_0 \cdot b_0$$

2.3 – SENSIBILIDADE PARA REVER O RESULTADO

2.3.1 – A importância da análise crítica do resultado

Muitos são os métodos para a resolução de um cálculo (algoritmos, calculadora, cálculo mental, etc.), entretanto, poucas são as vezes em que o aluno, ao chegar ao resultado de uma operação, se pergunta se o resultado do cálculo faz sentido. Consideramos aqui, a operação como um problema. Segundo Polya (1945):

> Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem uma reflexão da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. (p. 14)

O autor ressalta que se existe algum processo rápido e intuitivo de verificação, este não pode ser desprezado. Neste trabalho, não se propõe uma verificação da exatidão de um resultado, mas sim de sua coerência. Isto pode ser feito observando-se os efeitos e as propriedades aritméticas das operações, tópicos expostos anteriormente.

Segundo Nunes e Bryant (1997), a sociedade atual não exige apenas que os indivíduos saibam fazer contas, mas também que sejam capazes de discutir as relações numéricas e a compreensão das informações que são apresentadas em termos matemáticos. Por exemplo, ao ler em um jornal que a área de um país é 40.000 metros quadrados, o indivíduo deve ser suficientemente crítico a ponto de perceber que esse dado é absurdo, visto que 40.000 metros quadrados é a área de um quadrado de 200 metros de lado e as dimensões de um país, mesmo que muito pequeno, são muito maiores que isso. Analisar criticamente o resultado de uma operação é uma das primeiras etapas para esse tipo de compreensão.

2.3.2 – Os algoritmos

Segundo Brocardo et. al. (2003), dentre as técnicas de cálculo, os algoritmos ainda mantêm o *status* de técnica mais eficiente devido à generalidade – em uma operação quaisquer dois números podem ser operados (note que a subtração não é uma operação no universo do conjunto dos números naturais, pois no caso em que o minuendo é menor que o subtraendo a diferença não pertence ao universo) e à eficácia – seguindo-se bem as regras sempre é possível chegar à resposta correta.

Dante (1985) afirma que a compreensão do que se está fazendo em um algoritmo é motivadora e estimulante. Caso o aluno entenda o porquê do "vai um na adição", ou "empresta um" na subtração, etc., ele começa sentir melhor o significado das operações no sistema de numeração decimal. Já a apresentação do algoritmo como um conjunto de regras prontas, sem essas explicações, inibe a compreensão e a curiosidade do aluno.

Moreira e David (2005) ressaltam que alguns estudos sugerem que a não compreensão do funcionamento dos algoritmos ocasiona grande parte dos erros cometidos na resolução de operações mediante a aplicação destes.

Brocardo et. al. (2003), trazem o exemplo da subtração 50007 – 19, resolvida por um grupo de alunos através do algoritmo de cálculo. Alguns dos resultados obtidos pelos alunos foram: 50008, 5000098, 50088, 56988 e 50018. Os autores fazem uma análise crítica desse resultado:

> Respostas como essa sugerem que as crianças não desenvolveram uma tendência de antecipar uma resposta e de controlar a exatidão do resultado a partir dessa antecipação. De fato, pensamos que eles têm a noção de que depois de tirarem 19 de 50007 devem obter um número inferior a 50007. No entanto, uma vez que usam um procedimento que apenas faz apelo a um recurso mecanizado não pensam nos números e na operação e dão uma resposta cega e que corresponde ao resultado da conta de fizeram. (p. 1)

Para Medeiros (2004), o ensino tradicional prioriza os mecanismos de cálculo em detrimento ao significado das operações. D'Ambrosio (1989) enfatiza que essa ênfase nas regras é prejudicial ao aluno: "o aluno, acreditando e supervalorizando o poder da matemática formal perde qualquer autoconfiança em sua intuição matemática, perdendo, dia a dia, seu "bom-senso" matemático" (p. 1).

Quando o aluno aplica o algoritmo mecanicamente, passa a aceitar qualquer resposta obtida, pois o *sentido do número* foi perdido. Já quando é feita uma análise da plausibilidade da resposta obtida, ele pode verificar, por exemplo, se os efeitos da operação nos números operados foram respeitados, se o último dígito da resposta respeita os fatos apresentados anteriormente, etc. Assim sendo, erros ocasionados durante a aplicação do algoritmo podem ser constatados.

2.3.3 – O uso da calculadora

O uso da calculadora é uma realidade nos dias atuais. Para Magro (2009), a não aprendizagem do uso desse instrumento na escola implica na aprendizagem fora desta, o que pode ocasionar a inutilização dos recursos mais avançados do equipamento.

Moreira e David (2005) ressaltam que não há um consenso na discussão a cerca do uso da calculadora em sala de aula, em substituição aos algoritmos de cálculo. A calculadora seria uma alternativa a execução repetitiva de certos cálculos. “A ênfase no processo escolar pode ser direcionada para a resolução de problemas, aos significados das operações e as análises críticas dos resultados” (WHEATLEY e SHUMWAY, 1992 apud MOREIRA e DAVID, 2005, p. 9).

Albergaria e Ponte (2008) abordam um estudo de Mamede (2001) centrado no uso da calculadora em sala de aula. Foi observado que os alunos com um *sentido do número* pouco desenvolvido são incapazes de avaliar incoerências no resultado obtido ocasionadas por equívocos durante o manuseio do equipamento. Em outras palavras, o uso da calculadora não garante que o resultado obtido está correto. De nada adianta um equipamento com tal potencial se o usuário não tem a capacidade de avaliar a resposta obtida.

2.3.4 – O cálculo mental

Ao calcular mentalmente, o indivíduo manipula os números e as operações convenientemente, utilizando estratégias pessoais. Para Sowder (1988), os conceitos e as aptidões dos alunos são relacionados, contribuindo para o desenvolvimento da compreensão do funcionamento dos números e das operações, o que estimula seu *sentido do número*.

Cebola (200-?) justifica as razões pelas quais considera o cálculo mental uma manifestação do sentido do número:

> Como se pode observar pela multiplicidade de métodos existentes, a flexibilidade aumenta e as escolhas podem ser feitas na base da rapidez e da facilidade. Uma vez que não há apenas uma resolução única, isto é, uma escolha única na forma dos números serem trabalhados, o cálculo mental é extremamente criativo e inventivo. (p.11)

Essa multiplicidade de procedimentos de resolução possível conserva os números de maneira global durante todo o processo. Entretanto, o cálculo mental não é a garantia de que o resultado obtido está correto. O aluno pode ter cometido equívocos durante alguma operação no processo de resolução. Novamente aqui, a avaliação do resultado obtido se faz necessária.

2.3.5 – O procedimento de cálculo adequado

Segundo Fosnot e Dolk (2001), a capacidade de avaliar criticamente os números operados, permite escolher uma estratégia de cálculo adequada para os números em questão em detrimento a uma estratégia universal. Os autores chamam essa capacidade de cálculo acompanhado de *sentido do número*.

Note que a capacidade de avaliar criticamente os números operados envolve as noções sobre o efeito das operações os números operados. Por exemplo, na multiplicação $0{,}2 \cdot 0{,}357$, o indivíduo deve pensar que na multiplicação de dois números racionais positivos menores que 1, que o resultado será um número racional positivo menor que ambos. Sendo assim, a aplicação do cálculo mental nesse caso pode ser mais difícil que a das outras estratégias.

3 – ENGENHARIA DIDÁTICA

A noção de engenharia didática começou a ser empregada na didática da matemática em meados da década de 1980. Essa noção compara o trabalho didático ao de um engenheiro. Para realizar um projeto, é preciso apoiar-se nos conhecimentos científicos de seu domínio e submeter-se a um controle de tipo científico. Entretanto, na execução do projeto, é necessário trabalhar com objetos muito mais complexos que os objetos abordados pela ciência. É nesse sentido que a engenharia didática se diferencia: estudam-se de forma prática, com todos os meios que se encontram ao alcance, problemas que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar.

No âmbito da didática da matemática, a engenharia didática surgiu como importante meio de abordar duas questões cruciais: "as relações entre a investigação e a ação no sistema de ensino; e o papel que convém levar as realizações didáticas a desempenhar na sala de aula, no seio das metodologias da investigação didática" (ARTIGUE, 1996, p.193).

Vendo-a como metodologia de investigação, a engenharia didática caracteriza-se como um esquema experimental baseado na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. "A validação é essencialmente interna fundada no confronto entre análise *a priori* e a análise *a posteriori*" (ARTIGUE, 1996, p.197).

Esse processo metodológico divide-se em quatro fases, em ordem cronológica:

1. Análises prévias
2. Concepção e análise *a priori*
3. Experimentação
4. Análise *a posteriori* e validação

3.1 – AS FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA NESTE TRABALHO

3.1.1 - Análises prévias

As análises prévias têm por objetivo dar suporte para a fase de concepção do trabalho. Elas variam conforme o objetivo do trabalho. Segundo Artigue (1996) essas análises são na maior parte dos casos:

- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;

- a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;

- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam a sua evolução;

- a análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;

As análises prévias se dão no âmbito do cenário amplo onde vai ser realizada a experiência. Neste trabalho, essa fase será caracterizada pela análise de livros didáticos, que se baseia na busca por raciocínios que explicitem os efeitos das operações e o uso de propriedades aritméticas para previsão e verificação da coerência do resultado, e pela aplicação de um questionário inicial ao público envolvido no experimento prático, a fim de verificar a aplicação ou não desse tipo de raciocínio.

3.1.1.2 – Análise de livros didáticos

Como análise prévia, faço uma análise da existência e aplicação do raciocínio de previsão e verificação da coerência do resultado de uma operação em alguns livros didáticos aprovados pelo MEC (BRASIL, 2010). Observei a coleção completa dos livros analisados, mas os conteúdos em que poderiam ser desenvolvidos tais raciocínios não aparecem a partir do 7º ano. As operações com números naturais, critérios de divisibilidade e operações com números na forma decimal concentram-se nos livros do 6º ano. Segue a lista de livros analisados:

- BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática* – 6º ano. -- 6. ed. -- São Paulo: Moderna, 2006.
- MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática: ideias e desafios* – 6º ano. -- 15. ed. -- São Paulo: Saraiva, 2009.
- CENTURIÓN, Marília Ramos; JAKUBOVIC. *Matemática na medida certa* – 6º ano. -- 11. ed. – São Paulo: Scipione, 2009.
- DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática* – 6º ano. -- 3. ed. -- São Paulo: Ática, 2010.

Aspectos observados:

1. As noções de efeito das operações com números naturais encontram-se explícitas? Há aplicações para essas ideias?
2. Os raciocínios de paridade e último dígito do resultado da operação são mostrados? Há aplicações?
3. Os critérios de divisibilidade são abordados? Há aplicação explícita em divisões? (Por exemplo, responda sem fazer contas: o resultado de $78 \div 5$ é exato?)
4. A fração é abordada como uma divisão? É observado que quando o numerador é maior que o denominador essa divisão resulta em um quociente maior que 1, e quando o numerador é menor, o quociente é maior que 1?
5. Nas operações envolvendo números não inteiros na forma decimal é observado o efeito das operações? Há aplicações para isso?

Aspecto 1 – Efeitos das operações com números naturais

Em todos os livros, o efeito das operações é percebido pelas palavras ou expressões que as apresentam nos inícios de capítulo:

- Soma: juntar, acrescentar;
- Subtração: tirar, retirar, comparar;
- Multiplicação: somar muitas vezes o mesmo número, princípio multiplicativo da combinatória;
- Divisão: repartir em partes iguais, quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

Entretanto, a ideia do efeito, matematicamente falando, fica implícita em todos os livros. Nenhum observa explicitamente, por exemplo, que em uma soma de números naturais, o total é maior que ambas as parcelas.

Não há exercícios de aplicação envolvendo os efeitos das operações.

Aspecto 2 – Paridade e último dígito do resultado da operação

Nenhum livro aborda as ideias de paridade e último dígito da operação durante as explicações. O raciocínio de observação da paridade do resultado não é utilizado em nenhum exercício. O livro Matemática na medida certa é o único que traz exercícios envolvendo o raciocínio de último dígito:

24 Na adição abaixo, A, B e C são três algarismos (as duas letras B representam o mesmo algarismo). Descubra as parcelas e a soma.

$$\begin{array}{r} B3 \\ +\ 5B \\ \hline AC2 \end{array}$$

Figura 1: Exercício do livro Matemática na medida certa, p. 13.

D&S2. Na subtração abaixo, descubra os valores dos algarismos A, B e C.

$$\begin{array}{r} 4AB \\ -\ CC9 \\ \hline CC4 \end{array}$$

Figura 2: Desafio do livro Matemática na medida certa, p. 14.

Aspecto 3 – Critérios de divisibilidade

Todos os livros trazem os critérios de divisibilidade. Entretanto, os exercícios são em sua maioria do tipo “o número *x* é divisível por *y*?”, o que pode ser facilmente respondido aplicando o critério de divisibilidade por *y* em *x*. A aplicação direta em divisões aparece, mas em poucos exercícios:

36. Sem efetuar o cálculo, identifique as divisões que são exatas e copie-as:

a) 579 : 3
b) 774 : 6
c) 999 : 6
d) 9780 : 10
e) 10402 : 4
f) 80000 : 5

Divisibilidade 121

Figura 3: Exercício do livro Matemática: ideias e desafios, p.121.

Aspecto 4 – Quociente maior que 1 e menor que 1

O fato de que algumas frações representam mais do que um inteiro sempre é explorado. Todos os livros mostram que as frações podem ser próprias, imprópias ou aparentes. Nos quatro livros, uma das ideias de fração é a de divisão do numerador pelo denominador. É mostrado que para transformar uma fração em um número na forma decimal basta fazer a divisão, mas não é feita uma ligação entre essa divisão e o tipo de fração. Nada é comentado sobre o fato de que o numerador maior que o denominador resulta em um quociente maior e 1, e o numerador menor que o denominador gera um quociente menor que 1.

Aspecto 5 – Efeito das operações envolvendo números não inteiros na forma decimal

Em linhas gerais, os livros dão ênfase aos algoritmos para a resolução de operações envolvendo números não inteiros na forma decimal. Fatos estranhos aos alunos como, por exemplo, multiplicações em que o produto é menor que ambos os fatores no geral não são comentados. O livro Matemática na medida certa faz um pequeno comentário e traz um exercício sobre os efeitos das operações envolvendo números não inteiros na forma decimal:

Figura 4: Comentário do livro Matemática na medida certa, p. 188.

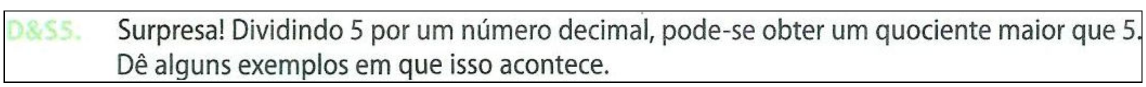

D&S5. Surpresa! Dividindo 5 por um número decimal, pode-se obter um quociente maior que 5. Dê alguns exemplos em que isso acontece.

Figura 5: Desafio do livro Matemática na medida certa, p. 192.

3.1.1.3 – Análise do questionário inicial

Os alunos mesmo alunos que participariam da parte experimental responderam um questionário inicial, contendo questões de múltipla escolha. As questões eram todas operações aritméticas básicas. Cada questão continha quatro alternativas das quais apenas uma estava correta e as outras três podiam ser facilmente eliminadas através dos raciocínios de análise do efeito da operação e das propriedades aritméticas. O cálculo estava “proibido”. O questionário inicial encontra-se na página 59.

Classificamos os erros da seguinte forma:

- *Erros de efeito*: quando a resposta assinalada não respeitou o efeito da operação. Por exemplo, 187 – 24 = 193 (a diferença deveria ser menor que 187);
- *Erros de dígito:* quando o último dígito e a paridade do resultado da operação não foram observados.

Por exemplo, 187 – 24 = 168 (o último dígito deveria ser 3);

- *Erros de divisibilidade:* quando, na divisão, não foi observado que, para que a divisão seja exata, o dividendo deve ser múltiplo do divisor.

Por exemplo, $322 \div 5 = 64$ (322 não é múltiplo de 5, então a resposta não poderia ser um número inteiro).

Nessa análise constata-se que a maior parte dos alunos tem boas noções sobre os efeitos das operações com números inteiros. Entretanto, boa parte dos alunos cometeu erros quanto ao último dígito e a paridade do resultado. Outro erro comum foi não observar que para que uma divisão de inteiros seja exata o dividendo deve ser múltiplo do divisor.

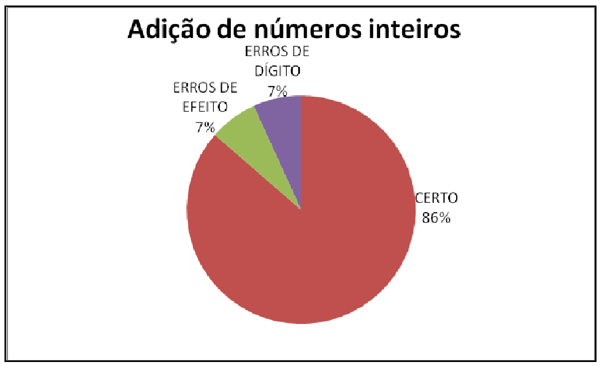


Figura 6: Gráfico – Adição de números inteiros (Questões 1 e 7)

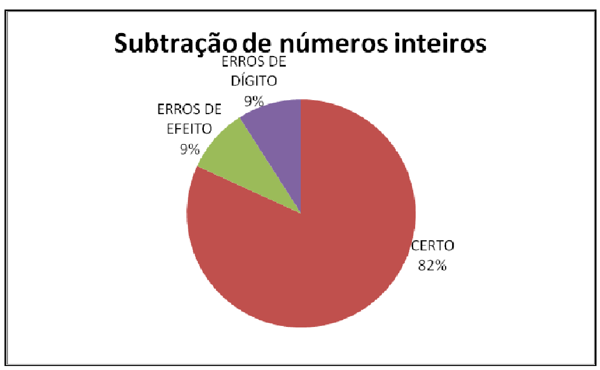


Figura 7: Gráfico – Subtração de números inteiros (Questões 2, 5 e 6)

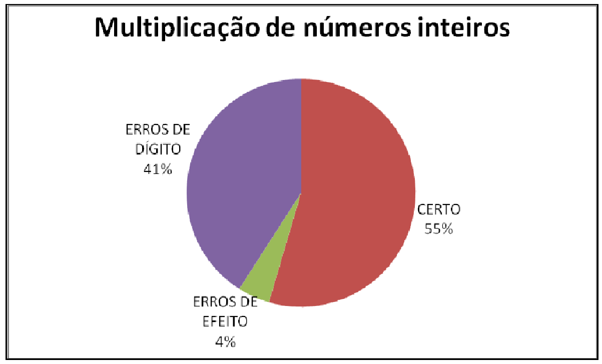


Figura 8: Gráfico – Multiplicação de números inteiros (Questão 3)

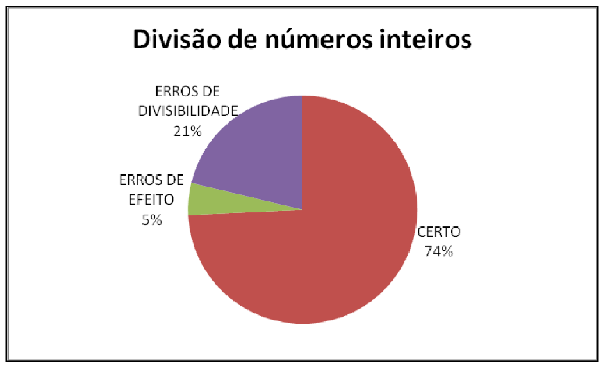


Figura 9: Gráfico – Divisão de números inteiros (Questões 4, 8 e 9)

Mesmo que os efeitos da adição e da subtração envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal sejam os mesmos do que quando essas operações envolvem apenas inteiros, o percentual de erro foi bem maior quando números não inteiros são operados.

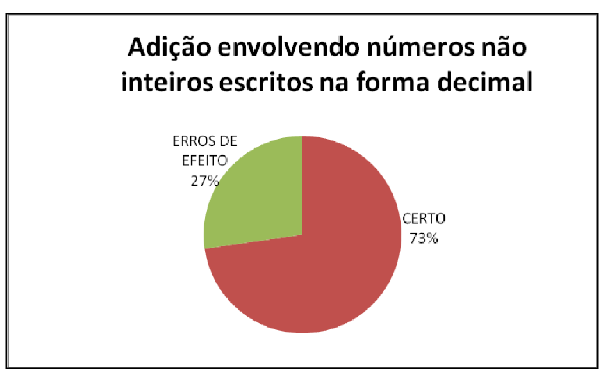


Figura 10: Gráfico – Adição envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal (Questão 10)

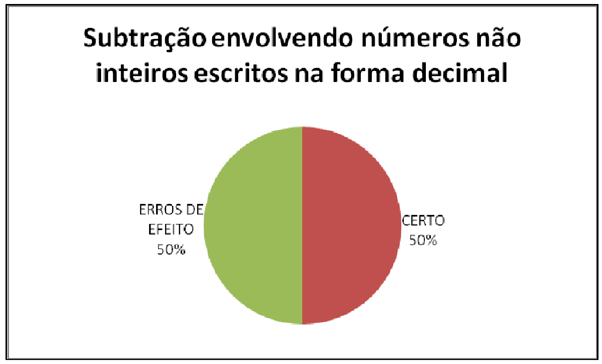


Figura 11: Gráfico – Subtração envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal (Questão 13)

Quanto às multiplicações e divisões envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal, a falta de noção sobre os efeitos das operações foi gritante.

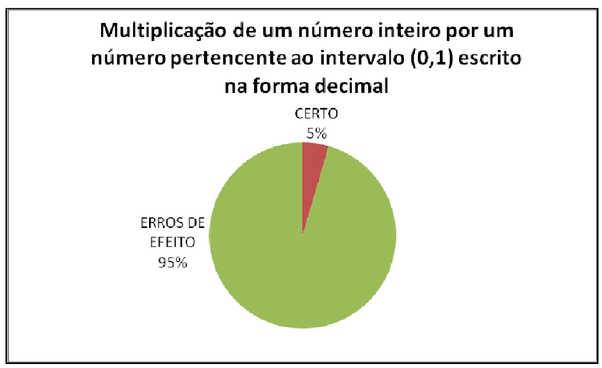


Figura 12: Gráfico – Multiplicação de um número inteiro por um número pertencente ao intervalo (0,1) escrito na forma decimal (Questão 11)

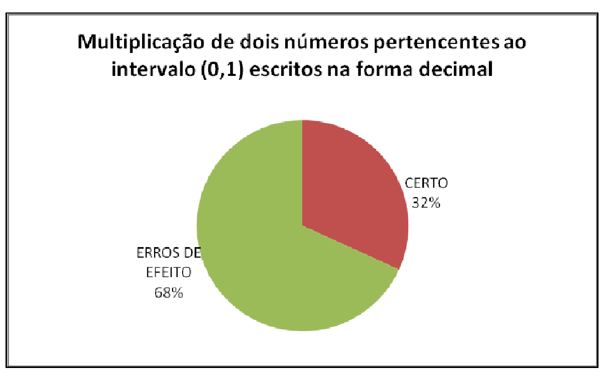


Figura 13: Gráfico – Multiplicação de dois números pertencente ao intervalo (0,1) escritos na forma decimal (Questão 14)

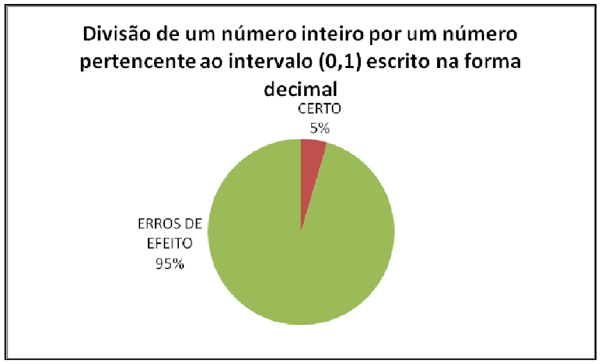


Figura 14: Gráfico – Divisão de um número inteiro por um número pertencente ao intervalo (0,1) escrito na forma decimal (Questões 12 e 15)

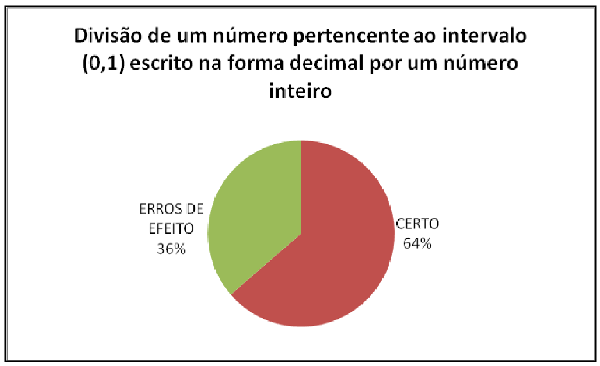


Figura 15: Gráfico – Divisão de um número pertencente ao intervalo (0,1) escrito na forma decimal por um número inteiro (Questão 17)

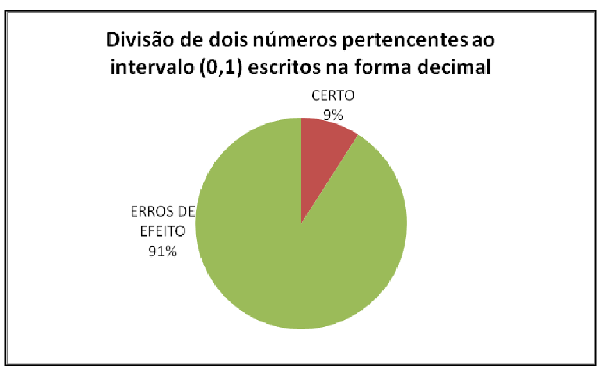


Figura 13: Gráfico – Divisão de dois números pertencentes ao intervalo (0,1) escritos na forma decimal (Questões 16 e 18)

Na questão de interpretação básica foi dado um enunciado simples que trazia a operação que deveria ser feita. O percentual de respostas erradas foi surpreendente.

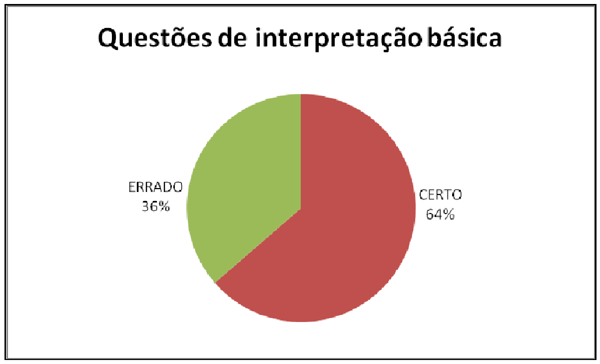


Figura 14: Gráfico – Questões de interpretação básica (Questão 19)

3.1.1.4 – Afirmações no contexto das análises prévias

A combinação da análise dos livros didáticos com a análise do questionário inicial permite enunciar as seguintes afirmações:

i) O raciocínio de previsão e verificação da coerência do resultado de uma operação não é tratado com a devida ênfase na escola básica;

ii) As propriedades aritméticas são abordadas na escola básica, mas não são aplicadas nas operações;

iii) Não se chama a atenção para a possibilidade de efeitos diferentes em uma mesma operação ocasionados pela natureza dos números operados.

3.1.2 – Concepção e análise *a priori*

Nessa fase são descritas as escolhas globais (os objetivos gerais da sequência de ensino) e as escolhas locais (as atividades com que se pretende atingir tais objetivos).

Neste trabalho, podem-se considerar:

Escolhas globais: o raciocínio de análise do efeito das operações e do uso das propriedades aritméticas para a previsão e verificação da coerência do resultado;

Escolhas locais: a elaboração da sequência didática, fundamentada em pontos críticos observados durante as análises prévias.

Para Artigue (1996), o foco da análise *a priori* é determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar o comportamento dos alunos e o sentido desses comportamentos. Devem ser pensados os motivos pelos quais cada parte da sequência se justifica e o efeito esperado sobre a aprendizagem após a sequência de atividades. Tendo em vista esse efeito esperado, levantam-se hipóteses, que serão validadas ou não após a análise *a posteriori*.

3.1.2.1 – Elaboração da sequência didática

A elaboração da sequência didática objetivou a explicitação dos raciocínios de análise de uma operação antes do desenvolvimento do cálculo e verificação da coerência do resultado, visto que, pelas análises prévias, constatou-se que ocorre a carência da aplicação desse tipo de raciocínio durante o Ensino Fundamental.

A sequência didática abordou os tópicos que apresentaram porcentagem considerável de erro no questionário inicial. São eles:

- Efeito das operações envolvendo números naturais;

- Paridade do resultado;

- Regras de divisibilidade;

- Comportamento do último dígito do resultado de uma operação;

- Efeito das operações envolvendo números não inteiros na forma decimal.

Os tópicos abordados na oficina não foram novidade para nenhum dos alunos, eram conhecimentos que eles adquiram ao longo do Ensino Fundamental. Entretanto, a forma com que os efeitos das operações e as propriedades aritméticas foram mostrados na oficina talvez não tivesse sido abordada anteriormente. A análise dos livros didáticos fornece grandes indícios disto. As operações e as propriedades aritméticas estão presentes nestes, porém poucos são os comentários e exercícios que exploram o efeito das operações e a aplicação das propriedades aritméticas nas operações. Na oficina tentou-se incentivar o aluno a aplicar esses raciocínios, que estão implícitos, mas que muitas vezes são ignorados na resolução de uma operação.

As notas de aulas foram pensadas de forma a levar o aluno a concluir empiricamente sobre o efeito ou as propriedades aritméticas da operação, considerando-se a natureza dos números operados, para possibilitar uma posterior generalização. Cada tópico foi abordado em quatro etapas:

- *Etapa 1 - Operações envolvendo números de certa natureza:* Aqui o aluno deveria calcular utilizando o procedimento de sua preferência;

- *Etapa 2 – Observação:* Aqui o aluno deveria observar se existe regularidade no efeito ou em alguma propriedade aritmética da operação, observando-se a natureza dos números operados;

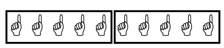
- *Etapa 3 – Generalização:* Aqui o efeito ou a propriedade aritmética era generalizado pelo professor, tendo em vista a natureza dos números operados;

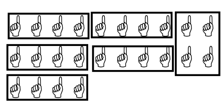
- *Etapa 4 – Aplicação:* Aqui eram propostas algumas questões de múltipla escolha as quais deveriam ser resolvidas sem procedimentos de cálculo, apenas observando os efeitos ou propriedades aritméticas abordadas no tópico.

Observe como exemplo o tópico *Divisão envolvendo números naturais*:

4) DIVISÃO

4.1) Dividendo maior que o divisor:

a) 10 ÷ 5 =  = ___

b) 24 ÷ 4 =  = ____ **O quociente é __________ que 1.**
O quociente é __________ menor que o dividendo.

c) 120 ÷ 15 = _____

4.2) Dividendo menor que o divisor:

a) 5 ÷ 10 =  = ___
Não é possível formar grupo de 10.

b) 4 ÷ 24 =  = ____ **O quociente é __________ que 1.**
Não é possível formar grupo de 24.
O quociente é __________ menor que o dividendo.

c) 15 ÷ 120 = _______

4.3) Dividendo igual ao divisor:

O quociente é _____.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

1) 183 ÷ 3 = ?
   a) 549   b) 60,5   c) 237   d) 61

2) 57840 ÷ 10 = ?
   a) 5784   b) 578400   c) 57850   d) 5784,1

1) 322 ÷ 5 = ?
   a) 64   b) 70   c) 1260   d) 64,4

Figura 15: Tópico do primeiro encontro da oficina

3.1.2.2 – Hipóteses

A aplicação da sequência didática visa o incentivo a aplicação dos raciocínios de previsão e verificação da coerência do resultado. Foram elaboradas algumas hipóteses a cerca do que está sendo suposto sobre o efeito da aprendizagem após realizar a sequência de atividades. São elas:

i) O incentivo ao raciocínio de previsão e verificação da coerência do resultado de uma operação faz com que o aluno o aplique;

ii) Após chamar a atenção para a aplicação das propriedades aritméticas nas operações, o aluno passa a utilizá-las;

iii) Comentários sobre a possibilidade de efeitos diferentes em uma mesma operação ocasionados pela natureza dos números operados despertam a atenção do aluno para a verificação destes no resultado.

3.1.3 – Experimentação

Essa fase prevê a aplicação da sequência didática. Para Almouloud e Coutinho (2008):

> [...] é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise *a priori*, em um processo de complementação (p.67).

3.1.3.1 – A oficina

A oficina foi elaborada com o intuito de explicitar os raciocínios de previsão e verificação da coerência do resultado de uma operação. Ela foi realizada em três encontros, totalizando cinco horas aula (cada hora aula tem 50 minutos). Os participantes foram os alunos de uma turma de 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual localizada em Porto Alegre. A oficina ocorreu durante o horário de aula dos alunos (manhã) em períodos letivos cedidos pelos professores de Português e Religião.

Nos dois primeiros encontros foram disponibilizadas as notas de aula para os alunos (p. 63). Estas continham lacunas que deveriam ser preenchidas pelos alunos com base nas explicações. Em cada tópico abordado havia cálculos convenientemente escolhidos para exemplificar os efeitos das operações sobre dois números de certo tipo ou as propriedades aritméticas. Os resultados dos cálculos podiam ser obtidos pelos alunos através de qualquer método de cálculo (algoritmo, calculadora ou cálculo mental). Esses cálculos também eram escritos no quadro e os alunos dividiam os resultados com o grande grupo. Feitos os cálculos, o efeito ou propriedade exemplificada por estes era generalizado para o tipo de números operados e os alunos completavam as lacunas nas notas. Após isso, havia sempre duas ou três questões de múltipla escolha em que as alternativas incoerentes com o raciocínio explicitado no tópico deveriam ser eliminadas. Ressalto que nessas questões de múltipla escolha sempre foi enfatizado que o cálculo estava "proibido". No fim de cada encontro uma breve atividade sobre os tópicos abordados foi proposta aos alunos e recolhida para análise.

No terceiro encontro foram propostos exercícios e problemas visando à aplicação dos raciocínios explicitados nos encontros anteriores (p. 72). A atividade foi resolvida individualmente por cada aluno com meu auxílio para o esclarecimento de dúvidas na interpretação da questão quando requisitado. Ao término da atividade, esta foi recolhida para análise.

3.1.3.2 – Relatório das aulas

1ª aula: 01/06/2011

O encontro foi realizado nos dois primeiros períodos (07:45 às 09:25), que foram cedidos pela professora de Português. Esta ficou presente na sala durante todo o tempo.

Os alunos foram bastante receptivos à apresentação da proposta da oficina. Após a minha apresentação, entreguei o questionário inicial. Ao explicar a tarefa, fui bastante claro sobre a proibição do cálculo. Apenas o bom senso deveria ser utilizado para a escolha da alternativa correta. Disponibilizei 10 minutos para a realização da atividade.

Após o questionário inicial, comentei sobre o mesmo com os alunos. Alguns disseram que “chutaram tudo” já que o cálculo não era permitido, mas outros disseram que em algumas questões era possível escolher a alternativa certa por eliminação. Ressaltei o fato de que todas as questões podiam ser resolvidas sem calcular, apenas analisando os efeitos e as propriedades aritméticas de cada operação e expliquei que esses seriam os tópicos da oficina.

Ao entregar as notas de aula enfatizei o fato de que se deveria prestar muita atenção na explicação para completar as lacunas. Essa estratégia possibilitou a participação bastante ativa dos alunos durante as explicações.

Em todos os momentos ressaltei que nessa oficina estávamos trabalhando com números inteiros, com ênfase nos naturais, e que quando nosso universo incluir os números não inteiros os efeitos das operações podem mudar.

Na maior parte da aula os alunos estavam focados na compreensão e aplicação dos efeitos e propriedades, entretanto no meio da oficina houve uma troca de período e os alunos que chegaram à escola atrasados para o primeiro período puderam entrar na sala no início do segundo. Essa movimentação fez com que parte dos alunos ficasse dispersa durante o restante da oficina.

Ao término das explicações entreguei aos alunos uma folha contendo duas atividades: uma envolvendo o raciocínio de último dígito e a outra envolvendo o raciocínio de características dos múltiplos. Pude constatar que parte dos alunos não conseguiu fazer a ligação entre as explicações e a aplicação destas durante a atividade, mas boa parte conseguiu.

2ª aula: 02/06/2011

O encontro foi realizado no terceiro período (09:25 às 10:15), que foi cedido pela professora de Religião. Esta não ficou presente na sala na maior parte do tempo.

Os alunos estavam bastante agitados. Demorei em torno de 5 minutos para conseguir começar as atividades. Houve bastante conversa paralela e senti que boa parte dos alunos não estava concentrada nas explicações. O fato de a sala ser próxima ao pátio e captar todo o barulho do recreio das séries iniciais (que estava acontecendo no momento) colaborou com isso.

Nesse encontro, em que o assunto era as operações envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal, que normalmente são considerados difíceis de serem feitas mentalmente, a participação na obtenção dos resultados dos cálculos iniciais de cada tópico foi bastante pequena. Apenas dois ou três alunos utilizaram a calculadora e falaram em voz alta os resultados obtidos. Enfatizei o fato que quando números pertencentes ao intervalo (0,1) são operados, os efeitos da multiplicação e da divisão são diferentes do que quando dois naturais são operados. Os alunos notaram essa diferença e conseguiram perceber os efeitos exemplificados nos cálculos, para completar os enunciados nas notas de aula. Quanto aos testes de múltipla escolha após cada tópico, percebi que uma parte da turma estava bastante interessa em eliminar as respostas incoerentes analisando os efeitos da operação sobre os números, entretanto a outra parte apenas esperava a minha explicação sobre a questão para o grande grupo.

Ao término da explanação, distribui aos alunos cópias do questionário inicial, comentei que havia analisado este e observei que grande parte da turma errou as questões envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal. Solicitei que estas questões fossem feitas novamente, agora tentando utilizar os raciocínios explicitados no encontro e justificando o porquê da escolha da alternativa correta. Como essa atividade foi feita nos últimos dez minutos antes do recreio, parte da turma não se concentrou em fazer a atividade.

3ª aula: 06/06/2011

O encontro foi realizado nos dois últimos períodos (10:30 às 12:10), que foram cedidos pela professora de Português. Esta ficou presente na sala durante todo o tempo.

Para começar a aula, pedi que os alunos dissessem números aleatoriamente, para pensarmos quais os efeitos e a propriedades aritméticas que podiam ser utilizados para ter noções sobre o resultado da operação. Essa atividade foi uma forma de revisão dos raciocínios abordados nas duas primeiras aulas.

O foco desse encontro foi a realização de exercícios envolvendo atividades que deveriam ser resolvidas utilizando-se os raciocínios explorados nos encontros anteriores. Esclareci dúvidas individualmente durante a atividade. Pedi que os alunos justificassem as respostas e notei uma grande dificuldade nessa tarefa. Mesmo deixando explícito que não poderiam ser feitos cálculos de qualquer tipo, percebi que alguns tentaram fazer os cálculos utilizando o algoritmo ou até mesmo a calculadora. Após a realização dos exercícios, foi feita a correção e o esclarecimento de dúvidas para o grande grupo.

Nos últimos 15 minutos da aula foi feito o questionário final, seguindo os mesmos padrões do questionário inicial, com a diferença de que os alunos tiveram 5 minutos a mais para justificar as respostas escolhidas.

3.1.3.3 –Análise das atividades realizadas durante a oficina

Encontro 1

1) A calculadora de Ana está quebrada e não mostra o último dígito da resposta. Complete o dígito que falta no resultado.

a) $1234 \cdot 785 = 96869\_$

b) $888 \cdot 31 = 2752\_$

c) $3333 \cdot 143 = 47661\_$

d) $125 \cdot 3213 = 40162\_$

e) $9876 \cdot 54320 = 53646432\_$

f) $1234 + 789654 = 79088\_$

g) $789654 - 1234 = 78842\_$

h) $96114 - 643 = 9547\_$

Figura 16: Atividade do primeiro encontro da oficina

No geral, os alunos realizaram a atividade corretamente. O raciocínio de verificação do último dígito foi facilmente aceito e adotado pela maioria dos alunos. Entretanto, alguns alunos fizeram a mesma operação para verificação do último dígito em todos os itens. Por exemplo, alguns fizeram o produto dos últimos dígitos na adição e nas subtrações propostas. Esse tipo de erro reflete certa tendência em generalizar os procedimentos, em detrimento à análise da aplicação das propriedades aritméticas de cada operação.

2) João molhou o papel em que está escrito a senha de seu e-mail. Alguns dígitos não aparecem:

_5_75_

João não decorou a senha, sabe apenas que ela é um número múltiplo de 2, de 5 e de 9. Com essas informações, quais são as possíveis senhas?

Figura 17: Atividade do primeiro encontro da oficina

A maior parte dos alunos conseguiu concluir que o último dígito é 0 e que a soma dos algarismos teria que ser 18 (esqueceu que também podia ser 27). Dessa fatia, a maioria colocou apenas 150750 e esqueceu a outra possibilidade que era 051750.

Poucos se deram conta que várias senhas eram possíveis. Nenhum conseguiu obter todas as senhas. Alguns alunos observaram que a soma dos algarismos também podia ser 27, mas não obtiveram todas as combinações possíveis.

Essa questão reflete a desvinculação das propriedades matemáticas com as situações reais por parte do aluno, que já havia sido constatada no último item do questionário inicial. Em uma situação real, o aluno certamente se daria por conta que várias são as possibilidades de senha para seu email que respeitam condição da soma dos dígitos ser 18 ou 27. Já no problema, mesmo que citado na ordem que existia mais de uma senha possível, poucos foram os que se preocuparam em descobrir todas as possibilidades.

Encontro 2

Questões envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal na análise a priori:

2) 0,04 + 3 = ?
   a) 3,04 b) 2,94 c) 2,04 d) 0,07

3) 1024 . 0,5 = ?
   a) 5120 b) 2048 c) 512 d) 1536

4) 3145 ÷ 0,1 = ?
   a) 3145 b) 314,5 c) 31,45 d) 31450

5) 2 - 0,003 = ?
   a) 1,997 b) 2,003 c) 2,007 d) 2,03

6) 0,4 . 0,5 = ?
   a) 20 b) 0,2 c) 0,8 d) 4

7) 131 ÷ 0,5 = ?
   a) 26,2 b) 65,5 c) 262 d) 126

8) 0,99 ÷ 0,9 = ?
   a) 0,11 b) 0,1 c) 0,9 d) 1,1

9) $0{,}84 \div 3 = ?$

a) 1,28 b) 0,28 c) 2,52 d) 25,2

10) $0{,}8 \div 0{,}08 = ?$

a) 0,1 b) 0,064 c) 1 d) 10

11) Uma hora tem 3600 segundos. Para saber a quantidade de horas que corresponde a 37 segundos, fazemos $37 \div 3600$. Então é possível afirmar que:

a) ( ) 37 segundos correspondem a mais de uma hora.

b) ( ) 37 segundos correspondem a uma hora.

c) ( ) 37 segundos correspondem a menos de uma hora

Figura 18: Atividades do segundo encontro da oficina

Essa análise não pode ser feita para a turma como um todo, pois como observado no relatório da aula, a maior parte dos alunos não se concentrou na realização da tarefa. Dentre os que fizeram a atividade conscientemente, no geral não tiveram problemas em constatar as alternativas incoerentes, observando os efeitos da operação.

Encontro 3

1) Verdadeiro ou falso? Justifique **sem fazer cálculos**. Caso você ache que é verdadeiro justifique apenas o motivo pelo qual a resposta é coerente.

a) ( ) 1572 é múltiplo de 3

b) ( ) 765987745 / 5 = 153197549,1

c) ( ) 100002 é múltiplo de 4

d) ( ) 898989898 - 67987575 é par

e) ( ) o último dígito de 10000000000000000 - 1 é 1

f) ( ) $8765 \cdot 0{,}000876 = 76781{,}4$

g) ( ) $0{,}3 \div 0{,}00009$ é menor que 1

h) ( ) $0{,}00009 \div 0{,}3$ é menor que 1

i) ( ) $34 \div 0{,}001 = 34000$

j) ( ) $5126 \cdot 1234 = 6325484$

k) ( ) $777 \cdot 568 \cdot 897 = 395878399$

l) ( ) $0{,}99999 \cdot 0{,}9 = 8{,}99991$

Figura 19: Atividade do terceiro encontro da oficina

A maioria dos alunos não sabia apresentar argumentos que comprovassem a falsidade de uma sentença nem que explicassem a razão pela qual a resposta estava coerente.

Parte da turma não conseguiu utilizar a ideia de que 765987745 é múltiplo de 5, logo a divisão por 5 deveria ser exata (item “b”).

O critério de divisibilidade por 4 não foi compreendido pela maioria, que afirmou que 100002 (item “c”) é múltiplo de 4 pois é par, esquecendo que o quociente na divisão por 2 também deveria ser par para que isso ocorresse. Alguns alunos justificaram corretamente a questão observando que o número formado pelos últimos dois dígitos de um múltiplo de 4 deve ser um múltiplo de 4.

Alguns alunos tiveram dificuldade para constatar que 76781,4 é maior que 8765 (item “f”), e para comparar os números decimais 0,3 e 0,00009 (itens “g” e “h”).

Muitos alunos não conseguiam observar dois aspectos simultaneamente: o efeito da operação e o último dígito. Por exemplo, no item “k” responderam que era verdadeiro, pois o produto de números maiores que 1 é maior que todos os fatores, entretanto esqueceram de analisar a paridade do resultado ou o último dígito.

Parte da turma fez confusões entre os efeitos da multiplicação e da divisão envolvendo números não inteiros pertencentes ao intervalo (0,1).

2) Uma hora tem 3600 segundos. Para saber a quantidade de horas que corresponde a 637 segundos, fazemos $637 \div 3600$. Então é possível afirmar que:

a) ( ) 637 segundos correspondem a mais de uma hora.

b) ( ) 637 segundos correspondem a uma hora.

c) ( ) 637 segundos correspondem a menos de uma hora.

3) Um quilômetro corresponde a 1000 metros. 18 quilômetros correspondem a:

a) ( ) mais de 1000 metros.

b) ( ) menos de 1000 metros.

c) ( ) 1000 metros.

4) Em uma garrafa há 0,5 litros de refrigerante. Quero dividir essa quantidade de refrigerante em 30 copos. Cada copo irá conter:

a) ( ) mais de 0,25 litros. b) ( ) menos de 0,25 litros.

5) Um modo de calcular x% de y é dividir x por 100 e multiplicar por y. Por exemplo:

$$50\% \text{ de } 37 = \frac{50}{100} \cdot 37 = 0{,}5 \cdot 37 = 18{,}5$$

Assinale a alternativa correta, sem fazer cálculos e justificando a resposta.

a) 25% de R$ 39,00: ( ) mais do que R$ 39,00 ( ) menos do que R$ 39,00

a) 156% de R$ 47,00: ( ) mais do que R$ 47,00 ( ) menos do que R$ 47,00

6) João juntou 420 centavos. Esta quantia corresponde a...

a) mais de 5 reais.
b) entre 4 e 5 reais.
c) entre 3 e 4 reais.
d) menos de 3 reais.

Figura 20: Atividades do terceiro encontro da oficina

Em linhas gerais, essas questões foram compreendidas, e não houve equívocos consideráveis. Nenhum aluno apresentou justificativas para a escolha das questões.

7) (Olimpíada Brasileira de Matemática) Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro naturais consecutivos? a) 712 b) 548 c) 1026 d) 1456 e)1680

Figura 21: Atividade do terceiro encontro da oficina

Alguns alunos me questionaram sobre o significado de "4 números naturais consecutivos". Nenhum visualizou facilmente que dentre quatro naturais consecutivos, sempre teremos pelo menos um múltiplo de 2, pelo menos um múltiplo de 3 e um múltiplo de 4. Mesmo me questionando sobre isso, poucos concluíram que o número tinha que possuir as características dos múltiplos de 2, de 3 e de 4 simultaneamente.

8) (Olimpíada Brasileira de Matemática) A soma de dois números primos a e b é 34 e a soma dos primos a e c é 33. Quanto vale a + b + c?

Figura 22: Atividade do terceiro encontro da oficina

Os alunos acharam essa questão bastante interessante. Fui questionado sobre quais são os números primos. A maioria não teve ideias iniciais sobre o processo de resolução do exercício, mas após questionamentos, conseguiram associar as ideias de paridade de uma soma para obter a resposta. Nenhum aluno escreveu no papel as justificativas para o raciocínio.

3.1.4 – Análise *a posteriori* e validação

Durante todo o processo de experimentação coleta-se material produzido pelos alunos, observa-se o comportamento destes, faz-se questionários, entre outras formas de metodologias externas. A análise *a posteriori* consiste na observação desse material. Ela pode ter uma parte qualitativo-descritiva, em nosso caso a análise de material e comportamento dos alunos durante a oficina, e uma parte quantitativa, aqui representada pela análise de um questionário final, nos mesmos moldes que o inicial.

Como já foi dito, o confronto entre as análises *a posteriori* e *a priori* constitui o processo de validação da engenharia didática. Para Almouloud e Coutinho (2008), "O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados" (p. 68).

Neste trabalho a validação se fundamenta no confronto entre os questionários final e inicial. Note que o questionário inicial faz parte da fase de análise prévia, porém toda a sequência didática planejada na análise *a priori* foi fundamentada baseando-se em pontos observados durante a fase anterior, bem como as hipóteses a serem validadas. Sendo assim, o confronto dos questionários final e inicial pode ser considerando um confronto das análises *a priori* e a *posteriori*.

3.1.4.1 – Análise do questionário final

Neste questionário (p. 61), que fundamenta a análise *a posteriori*, constata-se que os erros de observação do efeito do resultado das operações com números inteiros diminuíram consideravelmente. Observa-se que o raciocínio de análise do último dígito foi empregado com sucesso, uma vez que erros desse tipo foram inexistentes. Entretanto, pelas justificativas apresentadas percebe-se que parte dos alunos generalizou esse raciocínio para a divisão, o que ocasionou alguns erros.

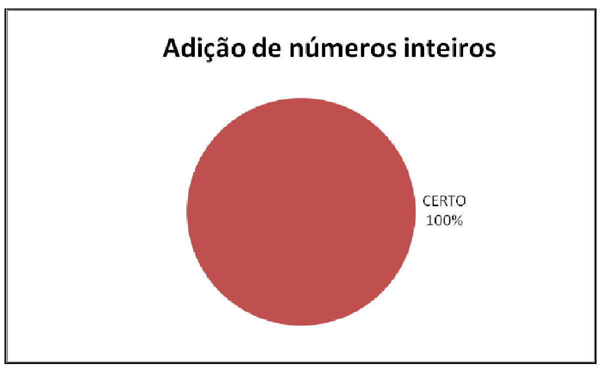


Figura 23: Gráfico – Redução no percentual de erro na adição de números inteiros (Questões 1 e 7)

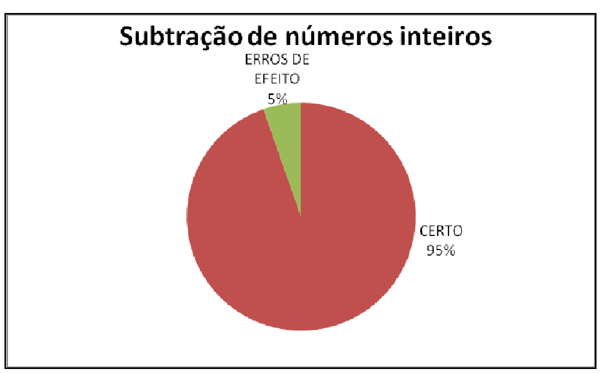


Figura 24: Gráfico – Redução no percentual de erro na subtração de números inteiros (Questões 2, 5 e 6)

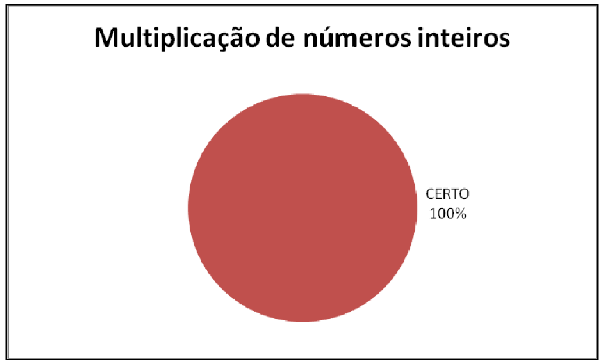


Figura 25: Gráfico – Redução no percentual de erro na multiplicação de números inteiros (Questão 3)

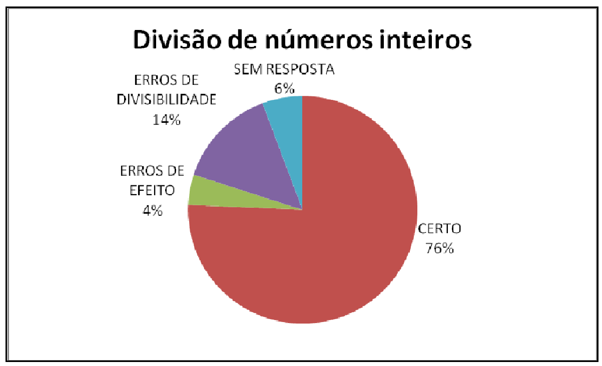


Figura 26: Gráfico – Redução no percentual de erro na divisão de números inteiros (Questões 4, 8 e 9)

Os erros de efeito nas adições e subtrações envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal diminuíram, mas ainda mantiveram um percentual elevado.

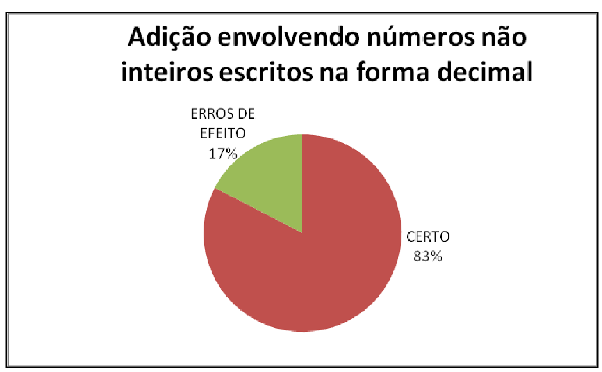


Figura 27: Gráfico – Redução no percentual de erro na adição envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal (Questão 10)

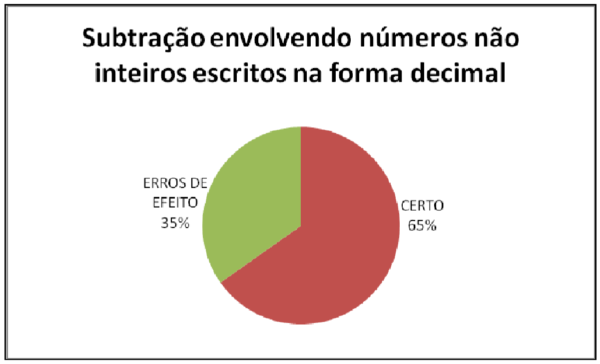


Figura 28: Gráfico – Redução no percentual de erro na subtração envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal (Questão 12)

As multiplicações envolvendo números não inteiros na forma decimal apresentaram uma redução no percentual de erro. Nas divisões, o caso de divisão de um número pertencente ao intervalo (0,1) apresentou aumento no percentual de erros, os outros dois casos apresentaram uma redução desse percentual. Em todos os casos de multiplicação e divisão o percentual de erro continua alarmante.

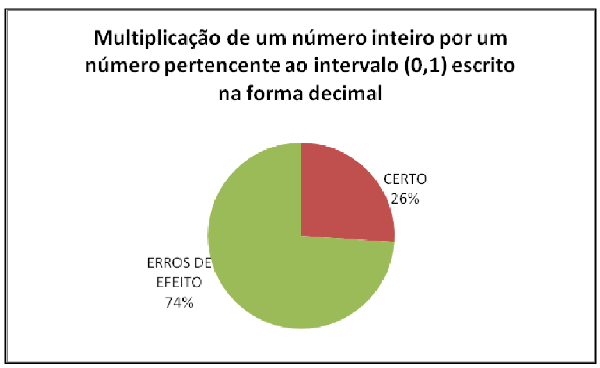


Figura 29: Gráfico – Redução no percentual de erro na multiplicação de um número inteiro por um número pertencente ao intervalo (0,1) escrito na forma decimal (Questão 11)

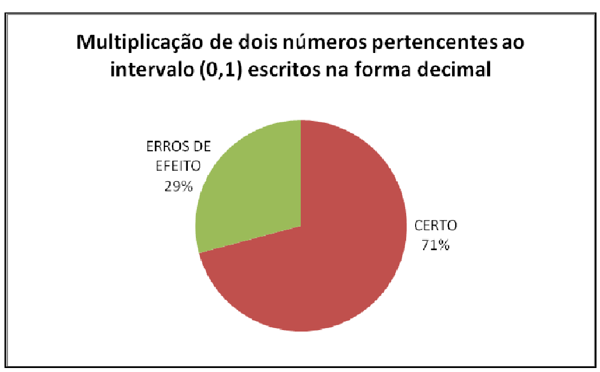


Figura 30: Gráfico – Redução no percentual de erro na multiplicação de dois números pertencente ao intervalo (0,1) escritos na forma decimal (Questão 13)

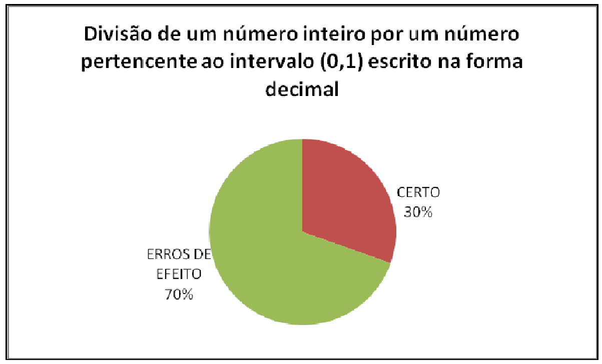


Figura 31: Gráfico – Redução no percentual de erro na divisão de um número inteiro por um número pertencente ao intervalo (0,1) escrito na forma decimal (Questão 14)

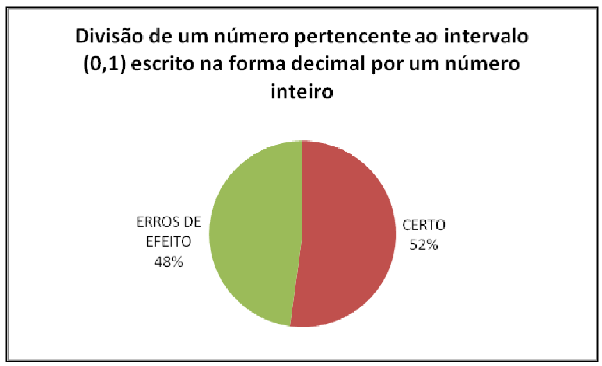


Figura 32: Gráfico – Aumento no percentual de erro na divisão de um número pertencente ao intervalo (0,1) escrito na forma decimal por um número inteiro (Questão 16)

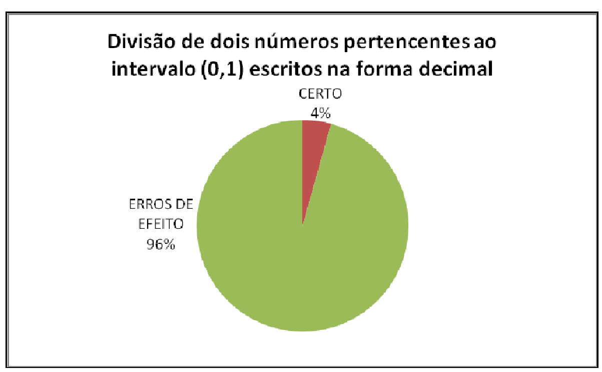


Figura 33: Gráfico – Redução no percentual de erro na divisão de dois números pertencentes ao intervalo (0,1) escritos na forma decimal (Questões 15 e 17)

Desta vez foram feitas duas questões de interpretação básica e o percentual de erro foi reduzido em relação à análise a priori.

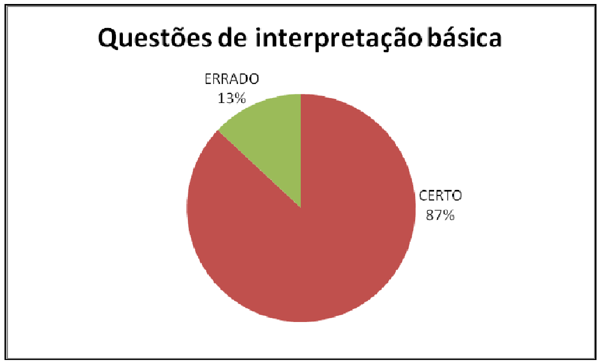


Figura 34: Gráfico – Questões de interpretação básica (Questões 18 e 19)

3.1.4.2 – Conclusões a partir do confronto das análises *a priori* e *a posteriori*

Aqui se busca confrontar as análises *a priori* e *a posteriori*, levando em consideração tudo o que foi observado durante a sequência didática, para tentar concluir sobre as hipóteses levantadas.

Hipótese i):

O incentivo ao raciocínio de previsão e verificação da coerência do resultado de uma operação faz com que o aluno o aplique.

A falta de comentários e exercícios utilizando esse raciocínio constatada na análise dos livros didáticos e o estranhamento dos alunos ao ouvirem um enunciado no tipo "não faça contas e utilize apenas o bom senso" validam essa hipótese. O alto índice de erros no questionário inicial, mesmo em operações com números inteiros, a fortalece. Além do mais, foi possível perceber que alguns alunos simplesmente "chutaram tudo", ignorando completamente o raciocínio de análise da operação. Outro fator notável foi a falta de paciência e de atenção para essa análise. A persistência no uso dos algoritmos de cálculo, mesmo que feitos mentalmente, e em tentativas de utilização da calculadora também foram constatadas.

No questionário final é possível constatar que os procedimentos de verificação do último dígito, da paridade e dos efeitos da operação quando operados números inteiros foram facilmente aceitos e adotados pelos alunos. Este fato demonstra que o ato pensar sobre o resultado encontrado não é tratado com a devida ênfase durante o ensino fundamental, uma vez que o incentivo a análise da coerência possibilitou a aplicação dessas propriedades, as quais os alunos já tinham uma boa noção, na verificação do resultado.

<u>*Hipótese ii):*</u>

Após chamar a atenção para a aplicação das propriedades aritméticas nas operações, o aluno passa a utilizá-las.

A redução no percentual de erros de dígito e de divisibilidade no questionário final em relação ao questionário final demonstra a veracidade dessa hipótese. Como dito anteriormente, os alunos têm noções sobre as propriedades aritméticas, fato que foi confirmado na análise dos livros didáticos. Faltava apenas fazer a ligação entre as propriedades e as aplicações destas nos cálculos. A ausência desta ligação pôde ser visualizada facilmente nos livros didáticos. Por exemplo, todos os livros analisados traziam os critérios de divisibilidade, entretanto poucos eram os exercícios que aplicavam esse critério para decidir se uma divisão era exata ou não.

Foi notável a adoção equivocada dos procedimentos de análise do último dígito e de paridade na divisão. Raciocínios do tipo "par dividido por par é par" e "na divisão de número que termina em 6 por número que termina em 2, o quociente termina em 3" foram recorrentes. Isso demonstra certa tendência dos alunos em generalizar as ideias sem uma justificativa prévia.

<u>*Hipótese iii):*</u>

Comentários sobre a possibilidade de efeitos diferentes em uma mesma operação ocasionados pela natureza dos números operados despertam a atenção do aluno para a verificação destes no resultado.

A alarmante falta de noção sobre os efeitos das multiplicações e divisões envolvendo números pertencentes ao intervalo (0,1), constatada em ambos os questionários, não deixa dúvidas quanto à veracidade dessa hipótese.

O aumento do percentual de acerto no questionário final, mesmo que muito pequeno, das multiplicações envolvendo números não inteiros pertencentes ao intervalo (0,1) demonstra que parte dos alunos conseguiu visualizar a diferença nos efeitos da multiplicação quando operados números desse tipo. O baixo índice de acerto na multiplicação de um número inteiro por um número pertencente ao número (0,1) em ambos os questionários demonstra a falta de comentários sobre os efeitos dessa operação quando operados números dessa natureza, visto que uma das multiplicações era de um número natural por 0,5, a qual os alunos certamente já se depararam em exercícios anteriores.

A redução no percentual de acerto na maioria dos casos de divisão em relação ao questionário inicial, nos qual o índice de acerto já era baixo, demonstra a confusão que a maior parte dos alunos fez entre a multiplicação e a divisão envolvendo números pertencentes ao intervalo (0,1). Aqui novamente se verifica a tendência em generalizar, agora os efeitos da multiplicação, para a divisão.

4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados expostos neste trabalho sugerem que o raciocínio de previsão e verificação da coerência do resultado de uma operação não é desenvolvido gradualmente, em conjunto com a conceitualização das operações. Pensamos que desde as séries iniciais, o aluno deve ser incentivado a parar para pensar no resultado para tal operação, observando-se a natureza dos números operados, bem como observar se o resultado encontrado, independentemente do procedimento de cálculo adotado é coerente com as observações feitas no primeiro momento. Obviamente, isso exigiria uma mudança de postura do professor, no sentido de questionar e proporcionar reflexões por parte dos alunos.

Um dos pontos que mais chama atenção neste trabalho é o fato de que os raciocínios de análise do efeito das operações e aplicação das propriedades aritméticas ficam implícitos quando são trabalhadas as operações com números naturais, talvez por serem consideradas óbvias. Entretanto os efeitos continuam implícitos, mesmo quando os alunos são apresentados às operações envolvendo números pertencentes ao intervalo (0,1) que trazem resultados que fogem completamente à intuição do aluno dada a experiência que este tem até o momento. As operações envolvendo números dessa natureza são resolvidas pelo uso de algoritmos ou da calculadora, e nada é discutido sobre a natureza do resultado. Como pôde ser constatado aqui, essa falta de observação e de explicitação implicam no não uso de raciocínios de efeito dos números operados no resultado da operação e a aceitação de qualquer resultado.

Essa falta de criticidade sobre a coerência de um resultado se reflete em todas as áreas do conhecimento e quiçá na vida do aluno. O indivíduo que não pára para pensar se algo proposto realmente faz sentido corre o risco de se tornar um cidadão extremamente manipulável na sociedade.

5 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERGARIA, Inês S.; PONTE, João P.. *Cálculo mental e calculadora*. In: CANAVARRO, A. P.; MOREIRA, D.; ROCHA, M. I.. Tecnologias e educação matemática. Lisboa: SEM-SPCE, p. 98-109, 2008.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia didática. In: BRUN, Jean. *Didáctica das matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, p. 193-217, 1996.

ALMOULOUD, Saddo A.; COUTINHO, Cileda Q. S.. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revista Eletrônica de Educação Matemática,* v. 3. n.1, p.62-77, UFSC: 2008. Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/13031/12137 >. Acesso em 06 maio 2011.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática* – 6º ano. -- 6. ed. -- São Paulo: Moderna, 2006.

BRASIL. *Guia de livros didáticos:* PNLD 2011: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

BROCARDO, J.; SERRAZINA, L.; KRAMER J.-M.. *Algoritmos e sentido do número*. Portugal, 2003. Disponível em <http://fordis.ese.ips.pt/conumero/textos/sentido_numero.pdf>. Acesso em 16 mar. 2011.

CEBOLA, Graça. *Do número ao sentido do número*. Escola Superior de Educação de Porto Alegre. Portugal, [200-?]. Disponível em <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/2007%202008/temas%20matematicos/Graca%20Cebola.pdf>. Acesso em 16 mar. 2011.

CENTURIÓN, Marília Ramos; JAKUBOVIC. *Matemática na medida certa* – 6º ano. -- 11. ed. – São Paulo: Scipione, 2009.

D'AMBROSIO. Beatriz S.. Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debates*, Brasília: SBEM, p. 15-19, 1989.

DANTE, Luiz Roberto. Os algortimos e as suas implicações educativas. *Revista de Ensino de Ciências*, São Paulo, n.12, p. 29-34, mar. 1985.

__________________. *Tudo é Matemática* – 6º ano. -- 3. ed. -- São Paulo: Ática, 2010.

FOSNOT, C. T.; DOLK, M. *Young mathematicians at work:* Constructing number sense, addition and subtraction. Portsmouth: Heinemann, 2001.

HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*. 2 ed.. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

POLYA, George. *How to solve it*: a new aspect of the mathematical method. Princeton: Princeton University Press, 1945. Tradução de parte do livro disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/polya.pdf>. Acesso em 29 abr. 2011.

MAGRO, Juliana Zys. *Uso da calculadora na sala de aula*: ensino das potências reais. [Trabalho de Conclusão de Curso] Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

MAMEDE, Sílvia; PENAFORTE, Júlio (org.). *Aprendizagem baseada em problemas:* anatomia de uma abordagem educacional. Säo Paulo: Hucitec; 2001.

MCINTOSH, A.; REYS, B. J.; REYS, R. E.. A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics,* v. 12(3), n.44, p. 2-8, 1992.

MEDEIROS, Kátia Maria de. A influência da calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 8., 2004, Recife, Anais. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/06/CC77270991472.pdf>. Acesso em 11 abr. 2011.

MOREIRA, Plínio C.; DAVID, Maria M.. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, n. 28, p. 50-62, jan.-abr. 2005.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática: ideias e desafios* – 6º ano. **--** 15. ed. **--** São Paulo: Saraiva, 2009.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática*. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. *Educação Matemática 1:* Números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

SOWDER, J.. Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In: HIEBERT, J. e BHR, M. *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston: Lawrence Erlbaum. p. 182-197, 1988.

WHEATLEY, G., SHUMWAY, R. The potential for calculators to transform elementary school mathematics. In: FEY, T. J., HIRSCH, C. R.. *Calculators in mathematics education*. Reston: NCTM , p. 1-8, 1992.

APÊNDICE

Questionário inicial

Assinale a alternativa correta **SEM FAZER CÁLCULOS**. Utilize apenas o bom senso.

1) $17 + 81 = ?$
   a) 78 b) 99 c) 98 d) 89

2) $187 - 24 = ?$
   a) 163 b) 168 c) 211 d) 193

3) $81 \cdot 17 = ?$
   a) 98 b) 1377 c) 77 d) 1478

4) $183 \div 3 = ?$
   b) 549 b) 60,5 c) 237 d) 61

5) $50007 - 9 = ?$
   a) 50008 b) 49998 c) 5000098 d) 50016

6) $7158 - 252 = ?$
   a) 7406 b) 6906 c) 6807 d) 7356

7) $8143 + 1124 = ?$
   a) 8167 b) 9368 c) 9267 d) 7019

8) $57840 \div 10 = ?$
   b) 5784 b) 578400 c) 57850 d) 5784,1

9) $322 \div 5 = ?$
   b) 64 b) 70 c) 1260 d) 64,4

10) $0,04 + 3 = ?$
   b) 3,04 b) 2,94 c) 2,04 d) 0,07

11) $1024 \cdot 0,5 = ?$
   b) 5120 b) 2048 c) 512 d) 1536

12) $3145 \div 0,1 = ?$
   b) 3145 b) 314,5 c) 31,45 d) 31450

13) $2 - 0,003 = ?$
   b) 1,997 b) 2,003 c) 2,007 d) 2,03

14) $0,4 \cdot 0,5 = ?$
   b) 20 b) 0,2 c) 0,8 d) 4

15) $131 \div 0,5 = ?$
   b) 26,2 b) 65,5 c) 262 d) 126

16) $0,99 \div 0,9 = ?$

b) 0,11 b) 0,1 c) 0,9 d) 1,1

17) 0,84 $\div$ 3 = ?
b) 1,28 b) 0,28 c) 2,52 d) 25,2

18) 0,8 $\div$ 0,08 = ?
b) 0,1 b) 0,064 c) 1 d) 10

19) Uma hora tem 3600 segundos. Para saber a quantidade de horas que corresponde a 37 segundos, fazemos 37 $\div$ 3600. Então é possível afirmar que:
a) ( ) 37 segundos correspondem a mais de uma hora.
b) ( ) 37 segundos correspondem a uma hora.
c) ( ) 37 segundos correspondem a menos de uma hora

Questionário final

Assinale a alternativa correta **SEM FAZER CÁLCULOS**. Utilize apenas o bom senso.

1) $25 + 39 = ?$
   a) 67 b) 34 c) 64 d) 73

2) $148 - 23 = ?$
   a) 125 b) 128 c) 155 d) 171

3) $18 \cdot 12 = ?$
   a) 219 b) 216 c) 17 d) 30

4) $483 \div 3 = ?$
   a) 1449 b) 90,1 c) 587 d) 161

5) $50007 - 19 = ?$
   a) 50008 b) 49988 c) 5000098 d) 50016

6) $7159 - 253 = ?$
   a) 7406 b) 6906 c) 6807 d) 7356

7) $8143 + 1125 = ?$
   a) 8168 b) 9368 c) 9268 d) 7019

8) $5784 \div 10 = ?$
   a) 578,4 b) 578400 c) 57830 d) 5784

9) $320 \div 5 = ?$
   a) 64,4 b) 70,2 c) 1600 d) 64

10) $0{,}07 + 5 = ?$
   a) 5,07 b) 4,93 c) 2,07 d) 0,12

11) $2468 \,.\, 0{,}5 = ?$
   a) 12340 b) 3048 c) 1234 d) 2536

12) $10 - 0{,}007 = ?$
   a) 9,993 b) 10,003 c) 10,007 d) 10,03

13) $0{,}6 \cdot 0{,}8 = ?$
   a) 48 b) 0,48 c) 1,2 d) 6

14) $106 \div 0{,}5 = ?$
   a) 21,2 b) 53 c) 212 d) 96

15) $0{,}77 \div 0{,}007 = ?$
   c) 0,11 b) 0,011 c) 0,00539 d) 110

16) $0{,}95 \div 5 = ?$
   c) 1,9 b) 0,19 c) 19 d) 1,05

17) $0{,}5 \div 0{,}02 = ?$
   c) 0,025 b) 0,1 c) 25 d) 1

18) Uma hora tem 60 minutos. Então é possível afirmar que:
a) 89 minutos correspondem a mais de uma hora.
b) 89 minutos correspondem a uma hora.
c) 89 minutos correspondem a menos de uma hora

19) Marcos juntou 1070 centavos. Esta quantia corresponde a:
a) mais de 10 reais.
b) entre 10 e 7 reais.
c) entre 7 e 5 reais.
d) menos de 5 reais.

Notas de aula entregues aos alunos durante a oficina

ENCONTRO 1 – OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

EFEITOS DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS POSITIVOS

5) ADIÇÃO

a) 3 + 7 = _____ **O total é __________ que ambas as parcelas.**
b) 1307 + 204 = _____

Obs.: Se uma das parcelas é 0, o total é ___________ a outra parcela.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

12) 17 + 81 = ?
b) 78 b) 99 c) 98 d) 89

13) 8143 + 1124 = ?
b) 8167 b) 9368 c) 9267 d) 7019

6) SUBTRAÇÃO (minuendo maior que o subtraendo)

a) 7 - 3 = _____ **A diferença é __________ que o minuendo.**
b) 1307 - 204 = _____

Obs.: Se o subtraendo é 0, a diferença é ___________ ao minuendo.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

1) 187 - 24 = ?
b) 163 b) 168 c) 211 d) 193

2) 50007 - 9 = ?
a) 50008 b) 49998 c) 5000098 d) 50016

3) 7158 - 252 = ?
b) 7406 b) 6906 c) 6807 d) 7356

7) MULTILPLICAÇÃO

a) $3 \cdot 7 =$ ☝☝☝ = ___
☝☝☝
☝☝☝
☝☝☝
☝☝☝
☝☝☝
☝☝☝

O produto é __________ que ambas as parcelas.

= ____

b) 10 · 2 = 

c) 2002 · 4 = _______
Obs.: Se um dos fatores é 1, o produto é ___________ ao outro fator.

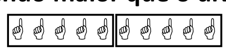
Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

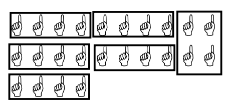
1) 81 · 17 = ?
b) 98 b) 1377 c) 77 d) 1478

2) 12345 · 6798 = ?
a) 63810205 b) 83921310 c) 10205 d) 12330

8) DIVISÃO

4.4) Dividendo maior que o divisor:

d) 10 ÷ 5 =  = ___

e) 24 ÷ 4 =  = ____ **O quociente é __________ que 1.**
O quociente é __________ menor que o dividendo.

f) 120 ÷ 15 = _____

4.5) Dividendo menor que o divisor:

d) 5 ÷ 10 =  = ___
Não é possível formar grupo de 10.

e) 4 ÷ 24 =  = ____ **O quociente é __________ que 1.**
Não é possível formar grupo de 24.
O quociente é __________ menor que o dividendo.

f) 15 ÷ 120 = _______

4.6) Dividendo igual ao divisor:

O quociente é _____.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

3) 183 ÷ 3 = ?
c) 549 b) 60,5 c) 237 d) 61

4) 57840 ÷ 10 = ?
c) 5784 b) 578400 c) 57850 d) 5784,1

14) 322 ÷ 5 = ?

c) 64 b) 70 c) 1260 d) 64,4

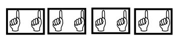
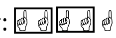
Obs.: Considerando-se também os números negativos deve-se ter cuidado com o sinal.
Exemplos:

a) -3 - 7 = -(3+ 7) = -10
b) -3 + 7 = 7 - 3 = 4
c) 3 - 7 = -(7 - 3) = -4
d) -4 . 5 = -20
e) -4 . -5 = 20
f) 7 ÷ (-2) = -3,5
g) -7 ÷ (-2) = 3,5

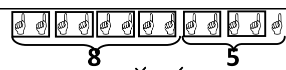
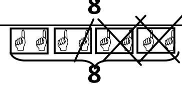
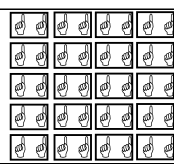
PROPRIEDADES ARITMÉTICAS

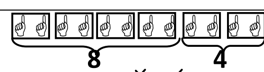
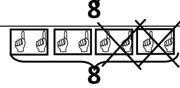
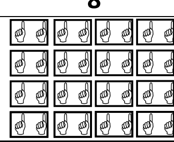
1) PARIDADE

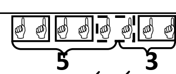
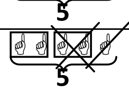
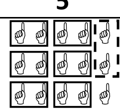
Um número é par quando é possível agrupá-lo em grupos de 2 de modo que não sobre elemento sem ser agrupado. Caso contrário o número é ímpar.

Exemplos: a) 8 é par:  b) 5 é ímpar: 

1.1) Paridade nas operações:

a) 8 + 5 =		= ______	**Par + Ímpar = ______** **Ímpar + Par = ______**
8 - 5 =		= ______	**Par - Ímpar = ______** **Ímpar - Par = ______**
8 · 5 =		= ______	**Par . Ímpar = ______** **Ímpar . Par = ______**

b) 8 + 4 =		= ______	**Par + Par = ______**
8 - 4 =		= ______	**Par - Par = ______**
8 · 4 =		= ______	**Par . Par = ______**

b) 5 + 3 =		= ______	**Ímpar + Ímpar = ______**
5 - 3 =		= ______	**Ímpar - Ímpar = ______**
5 · 3 =		= ______	**Ímpar . Ímpar = ______**

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

1) 17 + 81 = ?
a) 78 b) 99 c) 98 d) 89

2) 8143 + 1124 = ?
a) 8167 b) 9368 c) 9267 d) 7019

3) 187 - 24 = ?
a) 163 b) 168 c) 211 d) 193

4) 7158 - 252 = ?
a) 7406 b) 6906 c) 6807 d) 7356

5) $81 \cdot 17 = ?$
a) 98 b) 1377 c) 77 d) 1478

6) $12345 \cdot 6798 = ?$
a) 63810205 b) 83921310 c) 10205 d) 12330

2) MÚLTIPLOS

2.1) Multiplicação de múltiplos:

O produto é múltiplo de todos os números dos quais os fatores são múltiplos.

Por exemplo:

$2 \cdot 3 = 6$, logo 6 é múltiplo de 2 e de 3

$4 \cdot 5 = 20$, logo 20 é múltiplo de 4 e de 5

$6 \cdot 20 = 120$. Portanto, 120 é múltiplo de 2, 3, 4 e 5, entre outros.

2.2) Múltiplos de 2:

$2 \cdot \boxed{\text{QUALQUER NÚMERO INTEIRO}}$ **= PAR**

Múltiplos de 2 terminam em __, __, __, __ ou __.

2.3) Múltiplos de 4:

a) $3 \cdot 4$ = ____, o produto dividido por 2 é ______.

b) $4 \cdot 52$ = ____, o produto dividido por 2 é ______.

c) $491 \cdot 4$ = ____, o produto dividido por 2 é ______.

Um número é múltiplo de 4 quando é par e a sua divisão por 2 é ______.

Propriedade alternativa: O número formado pelos últimos 2 dígitos de um múltiplo de 4 é múltiplo de 4.

2.4) Múltiplos de 8:

a) $5 \cdot 8$ = ____, o produto dividido por 2 é ______, e esse resultado divido por 2 é ____.

b) $8 \cdot 45$ = ____, o produto dividido por 2 é ____, e esse resultado divido por 2 é ___.

c) $331 \cdot 8$ = ____, o produto dividido por 2 é ___, e esse resultado divido por 2 é ____.

Um número é múltiplo de 8 quando é par, a sua divisão por 2 é ______, e esse resultado dividido por 2 é _____.

Propriedade alternativa: O número formado pelos últimos 3 dígitos de um múltiplo de 8 é múltiplo de 8.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

1) 62 · 75 = ?
   a) 4656 b) 4652 c) 4650 d) 4655

2) 148 · 13 = ?
   a) 1924 b) 1922 c) 1928 d) 1926

3) 88 · 31 = ?
   a) 2724 b) 2732 c) 2726 d) 2728

2.5) Múltiplos de 10:

10 · $\boxed{\text{QUALQUER NÚMERO INTEIRO = ☺}}$ = ☺ CENTENAS

Múltiplos de 10 terminam em __.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

1) 31759 · 6134750 = ?
   a) 194833525255 b) 194833525248 c) 194833525252 d)194833525250

2.6) Múltiplos de 5:

a) 5 · 3 =	☝☝☝☝☝ ☝☝☝☝☝ 10 ☝☝☝☝☝ 5	=___
b) 5 · 4 =	☝☝☝☝☝ ☝☝☝☝☝ 10 ☝☝☝☝☝ ☝☝☝☝☝ 10	=____

Múltiplos de 5 terminam em __, se o outro fator é ímpar, ou __, se outro fator é par.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

1) 17· 5675 = ?
   a) 96460 b) 96480 c) 96475 d) 96470

2) 31755 · 72 = ?
   b) 2286360 b) 2286365 c) 2286355 d) 2286350

2.7) Múltiplos de 3:

a) 3 · 5 = ____, a soma dos dígitos do produto é _____.

b) 3 · 52 = ____, a soma dos dígitos do produto é _____.

c) 491 · 3 = ____, a soma dos dígitos do produto é _____.

A soma dos dígitos de um múltiplo de 3 é um múltiplo de ____.

2.8) Múltiplos de 9:

a) 2 · 9 = ____, a soma dos dígitos do produto é _____.

b) 9 · 41 = ____, a soma dos dígitos do produto é _____.

c) 111 · 9 = ____, a soma dos dígitos do produto é _____.

A soma dos dígitos de um múltiplo de 9 é um múltiplo de ____.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

1) 33 · 766 = ?
   a) 25281 b) 25278 c) 25275 d) 25268

2) 35 · 27 = ?
   b) 942 b) 935 c) 945 d) 954

2.9) Soma e subtração de múltiplos de um número:

A soma e a subtração de múltiplos de um número também são múltiplos desse número.

Exemplo: 23436 e 567 são múltiplos de 9.

23436 + 567 = _____, que é múltiplo de 9.

23436 - 567 = _____, que é múltiplo de 9.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

1) 1233 + 9564 = ?
   a) 12797 b) 10897 c) 10797 d) 11797

3) DIVISÃO EXATA

a) $7 \div 2 =$ c) $63 \div 3 =$ e) $70 \div 10 =$

b) $48 \div 2 =$ d) $40 \div 3 =$ f) $444 \div 10 =$

A divisão é exata quando o dividendo é _________ do divisor.

Elimine as alternativas incoerentes e justifique:

1) $183 \div 3 = ?$
   d) 549 b) 60,5 c) 237 d) 61

2) $322 \div 5 = ?$
   d) 64 b) 70 c) 1260 d) 64,4

4) ÚLTIMO DÍGITO

a) 27 + 31 = 27 + 31 = ______

27	+ 31	=	______
2 dezenas	**3 dezenas**		**5 dezenas**
7 unidades	**1 unidade**		**7 unidades**

b) 59 + 72 = 59 + 72 = _______

59	+ 72	=		_______
5 dezenas	**7 dezenas**	**12 dezenas**	**= 13 dezenas**	**= 1 centena, 3 dezenas e 1 unidade**
9 unidades	**2 unidades**	**11 unidades**	**1 unidade**	

O último dígito da soma é último dígito da soma dos últimos _________.

c) 10 · 7 = 10 . 7 = ______

10	. 7	=	______
1 dezena			**7 dezenas**
0 unidades			**0 unidades**

d) 12 · 13 = 12 . 13 = _______

12	. 13	=		_______
1 dezena		**13 dezenas**	**= 15 dezenas**	**= 1 centena, 5 dezenas e 6 unidades**
2 unidades		**26 unidades**	**6 unidades**	

O último dígito do produto é último dígito do produto dos últimos _________.

e) 59 - 12 =	59 **5 dezenas** **9 unidades**	-	12 **1 dezena** **2 unidades**	=	______ **4 dezenas** **8 unidades**
f) 31 – 27 =	31 **3 dezenas = 2 dezenas** **1 unidade 11 unidades**	-	27 **2 dezenas** **7 unidades**	=	_______ **0 dezenas** **4 unidades**

O último dígito da diferença:

- **É a diferença dos últimos dígitos se o último dígito do minuendo é ______ que o do subtraendo;**
- **É a diferença dos últimos dígitos somada à 10 se o último dígito do minuendo é ______ que o do subtraendo.**

Atividades

1) A calculadora de Ana está quebrada e não mostra o último dígito da resposta. Complete o dígito que falta no resultado.

a) 1234 · 785 = 96869_

b) 888 · 31 = 2752_

c) 3333 · 143 = 47661_

d) 125 · 3213 = 40162_

e) 9876 · 54320 = 53646432_

f) 1234 + 789654 = 79088_

g) 789654 - 1234 = 78842_

h) 96114 - 643 = 9547_

2) João molhou o papel em que está escrito a senha de seu e-mail. Alguns dígitos não aparecem:

_5_75_

João não decorou a senha, sabe apenas que ela é um número múltiplo de 2, de 5 e de 9. Com essas informações, quais são as possíveis senhas?

ENCONTRO 2 – OPERAÇÕES COM NÚMEROS NÃO INTEIROS ESCRITOS NA FORMA DECIMAL

EFEITOS DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS NÃO INTEIROS POSITIVOS ESCRITOS NA FORMA DECIMAL

1) ADIÇÃO

c) 3 + 0,007 = _____ **O total é __________ que ambas as parcelas.**
d) 1307,57 + 204,43 = _____

Obs.: Se uma das parcelas é 0, o total é ___________ a outra parcela.

2) SUBTRAÇÃO (minuendo maior que o subtraendo)

c) 7 – 0,03 = _____ **A diferença é __________ que o minuendo.**
d) 1307,54 – 204,48 = _____

Obs.: Se o subtraendo é 0, a diferença é ___________ ao minuendo.

Elimine as alternativas incorretas e justifique:

15) 0,04 + 3 = ?
c) 3,04 b) 2,94 c) 2,04 d) 0,07

16) 2 - 0,003 = ?
c) 1,997 b) 2,003 c) 2,007 d) 2,03

3) MULTILPLICAÇÃO

Todo número escrito na forma decimal com um número finito de casas depois da vírgula ou dízima periódica, pode ser escrito em forma de fração, por exemplo:

a) 0,5 = $\frac{1}{2}$ b) 0,25 = $\frac{1}{4}$ c) 0,1 = $\frac{1}{10}$ d) 0,2 = $\frac{1}{5}$ e) 1,5 = $\frac{3}{2}$ f) 2,5 = $\frac{5}{2}$

Lembre que uma fração pode ser vista como uma divisão. Na aula passada vimos que, se em uma divisão:

- o dividendo é maior que o divisor, o quociente é maior que 1, o que está exemplificado em “e” e “f”.
- o dividendo é menor que o divisor, o quociente é menor que 1, o que pode ser comprovado em “a”, “b”, “c” e “d”.

Quando temos uma multiplicação com números decimais podemos trocar um dos fatores pelo número decimal correspondente a ele, por exemplo:

a) $20 \cdot 1{,}5 = 20 \cdot \frac{3}{2} = \frac{60}{2} =$ _______ b) $20 \cdot 0{,}5 = 20 \cdot \frac{1}{2} = \frac{20}{2} =$ _______ c) $48 \cdot 2{,}5 = 48 \cdot \frac{5}{2} = \frac{240}{2} =$ _______ d) $48 \cdot 0{,}1 = 48 \cdot \frac{1}{10} = \frac{48}{10} =$ _______	Se os dois fatores são maiores que 1, o produto é __________ que ambos. Multiplicar por um número menor que 1, significa ________ por um número maior que 1, portanto o produto é _________ que o maior fator. Se os dois fatores são menores que 1, o produto é __________ que ambos.

e) $0{,}9 \cdot 0{,}25 = 0{,}9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{0{,}9}{4} =$ _______ f) $0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{0{,}2}{2} =$ _______	

Elimine as alternativas incorretas e justifique:

1) 1024 . 0,5 = ?
   c) 5120 b) 2048 c) 512 d) 1536

2) 0,4 . 0,5 = ?
   c) 20 b) 0,2 c) 0,8 d) 4

3) 0,9 . 0,9 = ?
   a) 1 b) 8,1 c) 0,81 d) 0,981

4) DIVISÃO

A divisão pode ser vista como a multiplicação pelo inverso do divisor, por exemplo:

a) $20 \div 1{,}5 = 20 \div \frac{3}{2} = 20 \cdot \frac{2}{3} = \frac{40}{3} =$ _______ b) $20 \div 0{,}5 = 20 \div \frac{1}{2} = 20 \cdot 2 =$ _______ c) $48 \div 2{,}5 = 48 \div \frac{5}{2} = 48 \cdot \frac{2}{5} = \frac{96}{5}$ _______ d) $48 \div 0{,}1 = 48 \div \frac{1}{10} = 48 \cdot 10 =$ _______ e) $0{,}9 \div 0{,}25 = 0{,}9 \div \frac{1}{4} = 0{,}9 \cdot 4 =$ _______ f) $0{,}2 \div 0{,}5 = 0{,}2 \div \frac{1}{2} = 0{,}2 \cdot 2 =$ _______ g) $2 \div 10 = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10} =$ ___________	Em uma divisão em que o dividendo é maior que o divisor (todos os exemplos exceto “f” e “g”) o resultado é ________ que 1. Em uma divisão em que o dividendo é menor que o divisor (exemplos f” e “g”) o resultado é ________ que 1. Se o divisor é maior que 1, o quociente é ________ que o dividendo. Se o divisor é menor que 1, o quociente é ________ que o dividendo.

Elimine as alternativas incorretas e justifique:

1) 3145 $\div$ 0,1 = ?
   c) 3145 b) 314,5 c) 31,45 d) 31450

2) 45 $\div$ 180 = ?
   d) 4,25 b) 25 c) 4 d) 0,25

3) 0,4 $\div$ 0,5 = ?
   c) 4 b) 2 c) 1,2 d) 0,8

4) 0,6 $\div$ 0,25 = ?
   a) 0,125 b) 2,4 c) 0,825 d) 0,375

Observação: Os efeitos das operações vistos aqui valem para quaisquer números reais positivos operados, não apenas para os racionais.

ENCONTRO 3 – DESAFIOS

1) Verdadeiro ou falso? Justifique **sem fazer cálculos**. Caso você ache que é verdadeiro justifique apenas o motivo pelo qual a resposta é coerente.

a) ( ) 1572 é múltiplo de 3

b) ( ) 765987745 / 5 = 153197549,1

c) ( ) 100002 é múltiplo de 4

d) ( ) 898989898 - 67987575 é par

e) ( ) o último dígito de 100000000000000000 - 1 é 1

f) ( ) 8765 $\cdot$ 0,000876 = 76781,4

g) ( ) 0,3 $\div$ 0,00009 é menor que 1

h) ( ) 0,00009 $\div$ 0,3 é menor que 1

i) ( ) 34 $\div$ 0,001 = 34000

j) ( ) 5126 $\cdot$ 1234 = 6325484

k) ( ) 777 $\cdot$ 568 $\cdot$ 897 = 395878399

l) ( ) 0,99999 $\cdot$ 0,9 = 8,99991

2) Uma hora tem 3600 segundos. Para saber a quantidade de horas que corresponde a 637 segundos, fazemos 637 $\div$ 3600. Então é possível afirmar que:

a) ( ) 637 segundos correspondem a mais de uma hora.

b) ( ) 637 segundos correspondem a uma hora.

c) ( ) 637 segundos correspondem a menos de uma hora.

3) Um quilômetro corresponde a 1000 metros. 18 quilômetros correspondem a:

a) ( ) mais de 1000 metros.

b) ( ) menos de 1000 metros.

c) ( ) 1000 metros.

4) Em uma garrafa há 0,5 litros de refrigerante. Quero dividir essa quantidade de refrigerante em 30 copos. Cada copo irá conter:

a) (   ) mais de 0,25 litros.   b) (   ) menos de 0,25 litros.

5) Um modo de calcular x% de y é dividir x por 100 e multiplicar por y. Por exemplo:

50% de 37 = $\frac{50}{100}.37 = 0{,}5.37 = 18{,}5$

Assinale a alternativa correta, sem fazer cálculos e justificando a resposta.

a) 25% de R$ 39,00:   (   ) mais do que R$ 39,00   (   ) menos do que R$ 39,00

a) 156% de R$ 47,00: (   ) mais do que R$ 47,00   (   ) menos do que R$ 47,00

6) João juntou 420 centavos. Esta quantia corresponde a...

a) mais de 5 reais.
b) entre 4 e 5 reais.
c) entre 3 e 4 reais.
d) menos de 3 reais.

7) (Olimpíada Brasileira de Matemática) Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro naturais consecutivos?

a) 712   b) 548   c) 1026   d) 1456   e)1680

8) (Olimpíada Brasileira de Matemática) A soma de dois números primos a e b é 34 e a soma dos primos a e c é 33. Quanto vale a + b + c?

ANEXOS

Respostas dos alunos

Questionário inicial

Exemplo de aluno que cometeu erros de efeito, de dígito e de divisibilidade:

Assinale a alternativa correta **SEM FAZER CÁLCULOS**. Utilize apenas o bom senso.

C

1) 17 + 81 = ?
a) 78 b) 99 c) 98 d) 89

Dígito X

2) 187 - 24 = ?
a) 163 b) 168 c) 211 d) 193

Dígito X

3) 81 . 17 = ?
a) 98 b) 1377 c) 77 d) 1478

C

4) 183 ÷ 3 = ?
a) 549 b) 60,5 c) 237 d) 61

C

5) 50007 - 9 = ?
a) 50008 b) 49998 c) 5000098 d) 50016

C

6) 7158 - 252 = ?
a) 7406 b) 6906 c) 6807 d) 7356

C

7) 8143 + 1124 = ?
a) 8167 b) 9368 c) 9267 d) 7019

Efeito X

8) 57840 ÷ 10 = ?
a) 5784 b) 578400 c) 57850 d) 5784,1

Múltiplo X

9) 322 ÷ 5 = ?
a) 64 b) 70 c) 1260 d) 64,4

Efeito X

10) 0,04 + 3 = ?
a) 3,04 b) 2,94 c) 2,04 d) 0,07

C

11) 1024 . 0,5 = ?
a) 5120 b) 2048 c) 512 d) 1536

X

12) 3145 ÷ 0,1 = ?
a) 3145 b) 314,5 c) 31,45 d) 31450

Efeito X

13) 2 - 0,003 = ?
a) 1,997 b) 2,003 c) 2,007 d) 2,03

X

14) 0,4 . 0,5 = ?
a) 20 b) 0,2 c) 0,8 d) 4

X

15) 131 ÷ 0,5 = ?
a) 26,2 b) 65,5 c) 262 d) 126

X

16) 0,99 ÷ 0,9 = ?
a) 0,11 b) 0,1 c) 0,9 d) 1,1

X

17) 0,84 ÷ 3 = ?
a) 1,28 b) 0,28 c) 2,52 d) 25,2

X

18) 0,8 ÷ 0,08 = ?
a) ~~0,1~~ b) 0,064 c) 1 d) 10

19) Uma hora tem 3600 segundos. Para saber a quantidade de horas que corresponde a 37 segundos, fazemos 37 ÷ 3600. Então é possível afirmar que:
a) ( ) 37 segundos correspondem a mais de uma hora.
b) ( ) 37 segundos correspondem a uma hora.
c) (X) 37 segundos correspondem a menos de uma hora

C

Exemplo de aluno com boas noções de efeito, exceto na divisão envolvendo números não inteiros pertencentes ao intervalo (0,1):

Assinale a alternativa correta **SEM FAZER CÁLCULOS**. Utilize apenas o bom senso.

1) 17 + 81 = ?
a) 78 b) 99 c) 98 d) 89

2) 187 - 24 = ?
a) 163 b) 168 c) 211 d) 193

Último dígito

3) 81 . 17 = ?
a) 98 b) 1377 c) 77 d) 1478

4) 183 ÷ 3 = ?
a) 549 b) 60,5 c) 237 d) 61

5) 50007 - 9 = ?
a) 50008 b) 49998 c) 5000098 d) 50016

6) 7158 - 252 = ?
a) 7406 b) 6906 c) 6807 d) 7356

7) 8143 + 1124 = ?
a) 8167 b) 9368 c) 9267 d) 7019

8) 57840 ÷ 10 = ?
a) 5784 b) 578400 c) 57850 d) 5784,1

9) 322 ÷ 5 = ?
a) 64 b) 70 c) 1260 d) 64,4

10) 0,04 + 3 = ?
a) 3,04 b) 2,94 c) 2,04 d) 0,07

11) 1024 . 0,5 = ?
a) 5120 b) 2048 c) 512 d) 1536

12) 3145 ÷ 0,1 = ?
a) 3145 b) 314,5 c) 31,45 d) 31450

13) 2 - 0,003 = ?
a) 1,997 b) 2,003 c) 2,007 d) 2,03

14) 0,4 . 0,5 = ?
a) 20 b) 0,2 c) 0,8 d) 4

15) 131 ÷ 0,5 = ?
a) 26,2 b) 65,5 c) 262 d) 126

16) 0,99 ÷ 0,9 = ?
a) 0,11 b) 0,1 c) 0,9 d) 1,1

17) 0,84 ÷ 3 = ?
a) 1,28 b) 0,28 c) 2,52 d) 25,2

18) 0,8 ÷ 0,08 = ?
a) 0,1 b) 0,064 c) 1 d) 10

19) Uma hora tem 36000 segundos. Para saber a quantidade de horas que corresponde a 37 segundos, fazemos 37 ÷ 36000. Então é possível afirmar que:
a) ( ) 37 segundos correspondem a mais de uma hora.
b) ( ) 37 segundos correspondem a uma hora.
c) (x) 37 segundos correspondem a menos de uma hora

Atividades recolhidas no primeiro encontro

Exemplo de aluno que fez o exercício 1 corretamente, encontrou uma das senhas no exercício 2, mas que não se deu conta que existem várias outras possibilidades de senha:

1) A calculadora de Ana está quebrada e não mostra o último dígito da resposta. Complete o dígito que falta no resultado.

a) $1234 \cdot 785 = 96869\underline{0}$
b) $888 \cdot 31 = 2752\underline{8}$
c) $3333 \cdot 143 = 47661\underline{9}$
d) $125 \cdot 3213 = 40162\underline{5}$
e) $9876 \cdot 54320 = 53646432\underline{0}$
f) $1234 + 789654 = 79088\underline{6}$
g) $789654 - 1234 = 78842\underline{0}$
h) $96114 - 643 = 9547\underline{1}$

2) João molhou o papel em que está escrito a senha de seu email. Alguns dígitos não aparecem:

$\underline{4}5\underline{6}75\underline{0}$

João não decorou a senha, sabe apenas que ela é um número múltiplo de 2, de 5 e de 9. Com essas informações, quais são as possíveis senhas?

Atividades recolhidas no segundo encontro

Exemplo de aluno que justificou corretamente as alternativas escolhidas:

Assinale a alternativa correta SEM **FAZER CÁLCULOS**. Utilize apenas o bom senso.

1) 17 + 81 = ?
a) 78 b) 99 c) 98 d) 89

2) 187 - 24 = ?
a) 163 b) 168 c) 211 d) 193

3) 81 . 17 = ?
a) 98 b) 1377 c) 77 d) 1478

4) 183 ÷ 3 = ?
a) 549 b) 60,5 c) 237 d) 61

5) 50007 - 9 = ?
a) 50008 b) 49998 c) 5000098 d) 50016

6) 7158 - 252 = ?
a) 7406 b) 6906 c) 6807 d) 7356

7) 8143 + 1124 = ?
a) 8167 b) 9368 c) 9267 d) 7019

8) 57840 ÷ 10 = ?
a) 5784 b) 578400 c) 57850 d) 5784,1

9) 322 ÷ 5 = ?
a) 64 b) 70 c) 1260 d) 64,4

10) 0,04 + 3 = ?
a) 3,04 b) 2,94 c) 2,04 d) 0,07

TEM QUE SER MAIOR QUE 0,04

11) **1024 . 0,5 = ?**
a) 5120 b) 2048 c) 512 d) 1536

TEM QUE SER MAIOR QUE 3145

12) 3145 ÷ 0,1 = ?
a) 3145 b) 314,5 c) 31,45 d) 31450

TEM QUE SER MENOR 0,2

13) 2 - 0,003 = ?
a) 1,997 b) 2,003 c) 2,007 d) 2,03

TEMQUE SER MAIOR QUE 131

14) 0,4 . 0,5 = ?
a) 20 b) 0,2 c) 0,8 d) 4

15) **131 ÷ 0,5 = ?**
a) 26,2 b) 65,5 c) 262 d) 126

16) 0,99 ÷ 0,9 = ?
a) 0,11 b) 0,1 c) 0,9 d) 1,1

TEM QUE SER MAIOR QUE 0,99

17) 0,84 ÷ 3 = ?
a) 1,28 b) 0,28 c) 2,52 d) 25,2

TEM QUE SER MENOR QUE 0,84

18) 0,8 ÷ 0,08 = ?
a) 0,1 b) 0,064 c) 1 d) 10

TEM QUE SER MAIOR 0,8

19) Uma hora tem 3600 segundos. Para saber a quantidade de horas que corresponde a 37 segundos, fazemos 37 ÷ 3600 . Então e possível afirmar que:
a) ( ) 37 segundos correspondem a mais de uma hora.
b) ( ) 37 segundos correspondem a uma hora.
c) (X) 37 segundos correspondem a menos de uma hora

Atividades recolhidas no terceiro encontro

Exemplo de aluno que não consegue aplicar os efeitos da operação e as propriedades aritméticas simultaneamente (itens “b”, “f”, “j”, “k”); não reconhece a ordem entre dois números pertencentes ao intervalo (0,1) escritos na forma decimal (itens “g” e “h”); confunde os efeitos das operações de multiplicação e divisão quando operados números pertencentes ao intervalo (0,1) (item “l”):

1) Verdadeiro ou falso? Justifique **sem fazer cálculos.** Caso você ache que é verdadeiro justifique apenas o motivo pelo qual a resposta é coerente.

a) (V) 1572 é múltiplo de 3 Pois a soma de todos os numeros é multiplo de 3.

b) (V) 765987745 / 5 = 153197549,1 Pois $\frac{\text{maior}}{\text{menor}}$ então é menor que o 1º e maior que 1

c) (V) 100002 é múltiplo de 4 Pois é Par.

d) (F) 898989898 - 67987575 é par Pois Par - impar é impar

e) (F) o último dígito de 100000000000000000 - 1 é 1 Pois

f) (F) 8765 · 0,000876 = 76781,4 Pois o resultado de 5 · 6 é 30 termina em zero

g) (V) 0,3 ÷ 0,00009 é menor que 1 Pois quando é $\frac{\text{menor}}{\text{maior}}$ é menor que 1

h) (F) 0,00009 ÷ 0,3 é menor que 1 Pois " " $\frac{\text{maior}}{\text{menor}}$ é maior que 1.

i) (V) 34 ÷ 0,001 = 34000 Pois $\frac{\text{maior}}{\text{menor}}$ é maior que 34.

j) (V) 5126 · 1234 = 6325484 Pois vai dar um numero maior que os dois.

k) (V) 777 · 568 · 897 = 395878399 Pois a resposta é maior que os tres

l) (V) 0,99999 · 0,9 = 8,99991 Pois $\frac{\text{maior}}{\text{menor}}$ é maior que 1

Exemplo de aluno que respondeu corretamente as questões 2 à 6, sem apresentar justificativas:

2) Uma hora tem 3600 segundos. Para saber a quantidade de horas que corresponde a 637 segundos, fazemos 637 ÷ 3600. Então é possível afirmar que:

a) ( ) 637 segundos correspondem a mais de uma hora.

b) ( ) 637 segundos correspondem a uma hora.

c) (X) 637 segundos correspondem a menos de uma hora.

3) Um quilômetro corresponde a 1000 metros. 18 quilômetros correspondem a:

a) (X) mais de 1000 metros.

b) ( ) menos de 1000 metros.

c) ( ) 1000 metros.

4) Em uma garrafa há 0,5 litros de refrigerante. Quero dividir essa quantidade de refrigerante em 30 copos. Cada copo irá conter:

a) ( ) mais de 0,25 litros. b) (X) menos de 0,25 litros.

5) Um modo de calcular x% de y é dividir x por 100 e multiplicar por y. Por exemplo:

$$50\% \text{ de } 37 = \frac{50}{100}.37 = 0,5.37 = 18,5$$

Assinale a alternativa correta, sem fazer cálculos e justificando a resposta.

a) 25% de R$ 39,00: ( ) mais do que R$ 39,00 (X) menos do que R$ 39,00

a) 156% de R$ 47,00: (X) mais do que R$ 47,00 ( ) menos do que R$ 47,00

6) João juntou 420 centavos. Esta quantia corresponde a...

a) mais de 5 reais.
b) entre 4 e 5 reais.
c) entre 3 e 4 reais.
d) menos de 3 reais.

Exemplo de aluno que respondeu corretamente as questões 7 e 8, sem apresentar justificativas, as quais eram esperadas devido à relativa complexidade dos raciocínios:

7) (Olimpíada Brasileira de Matemática) Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro naturais consecutivos?

a) 712 b) 548 c) 1026 **d)** 1456 e) 1680

8) (Olimpíada Brasileira de Matemática) A soma de dois números primos a e b é 34 e a soma dos primos a e c é 33. Quanto vale a + b + c?

a = 31 a + b + c = 36
b = 3
c = 2

Questionário final

Exemplo de aluno que assinalou a resposta certa em todas as operações com números inteiros, porém cometeu erros na maioria das questões envolvendo números não inteiros escritos na forma decimal. Esse dado não sabe como justificar visto que as justificativas não são plausíveis nas questões 4, 8 à 17.

Assinale a alternativa correta **SEM FAZER CÁLCULOS**. Utilize apenas o bom senso.

1) 25 + 39 = ?
a) 67 b) 34 c) 64 d) 73

2) 148 - 23 = ?
a) 125 b) 128 c) 155 d) 171

3) 18 . 12 = ?
a) 219 b) 216 c) 17 d) 30

4) 483 ÷ 3 = ?
a) 1449 b) 90,1 c) 587 d) 161

5) 50007 - 19 = ?
a) 50008 b) 49988 c) 5000098 d) 50016

6) 7159 - 253 = ?
a) 7406 b) 6906 c) 6807 d) 7356

7) 8143 + 1125 = ?
a) 8168 b) 9368 c) 9268 d) 7019

8) 5784 ÷ 10 = ?
a) 578,4 b) 578400 c) 57830 d) 5784

9) 320 ÷ 5 = ?
a) 64,4 b) 70,2 c) 1600 d) 64

10) 0,07 + 5 = ?
a) 5,07 b) 4,93 c) 2,07 d) 0,12

Efeito

11) 2468 . 0,5 = ?
a) 12340 b) 3048 c) 1234 d) 2536

Efeito

12) 10 - 0,007 = ?
a) 9,993 b) 10,003 c) 10,007 d) 10,03

Efeito

13) 0,6 . 0,8 = ?
a) 48 b) 0,48 c) 1,2 d) 6

Efeito

14) 106 ÷ 0,5 = ?
a) 21,2 b) 53 c) 212 d) 96

Efeito

15) 0,77 ÷ 0,007 = ?
a) 0,11 b) 0,011 c) 0,00539 d) 110

Efeito

16) 0,95 ÷ 5 = ?
a) 1,9 b) 0,19 c) 19 d) 1,05

17) 0,5 ÷ 0,02 = ?
a) 0,025 b) 0,1 c) 25 d) 1

18) Uma hora tem 60 minutos. Então é possível afirmar que:
a) 89 minutos correspondem a mais de uma hora.
b) 89 minutos correspondem a uma hora.
c) 89 minutos correspondem a menos de uma hora

19) Marcos juntou 1070 centavos. Esta quantia corresponde a:
a) mais de 10 reais.
b) entre 10 e 7 reais.
c) entre 7 e 5 reais.
d) menos de 5 reais.

Exemplo de aluno que acertou a maioria das questões e apresentou justificativas que demonstram a aceitação dos raciocínios expostos na oficina, mesmo que fazendo confusões entre os efeitos na multiplicação e divisão de números não inteiros pertencentes ao intercalo (0,1) escritos na forma decimal (itens 11, 15 e 16):

Assinale a alternativa correta **SEM FAZER CÁLCULOS.** Utilize apenas o bom senso.

1) 25 + 39 = ? TEM QUE SER MAIOR QUE OS DOIS E PAR
   a) 67 b) 34 c) 64 d) 73

2) 148 - 23 = ? TEM QUE SER MENOR QUE OS 2 E O FINAL TEM QUE SER 5
   a) 125 b) 128 c) 155 d) 171

3) 18 . 12 = ? ACABA EM PAR E É MAIOR QUE OS 2
   a) 219 b) 216 c) 17 d) 30

OK Múltiplo

4) 483 ÷ 3 = ? MENOR QUE OS 2 E DÁ EXATO, POIS A SOMA É 15
   a) 1449 b) 90,1 c) 587 d) 161

5) 50007 - 19 = ? TEM QUE SER MENOR E DAR ÍMPAR.
   a) 50008 b) 49988 c) 5000098 d) 50016

6) 7159 - 253 = ? MENOR QUE O 1º E PAR
   a) 7406 b) 6906 c) 6807 d) 7356

7) 8143 + 1125 = ? PAR E MAIOR QUE OS 2
   a) 8168 b) 9368 c) 9268 d) 7019

8) 5784 ÷ 10 = ? A VÍRGULA CAMINHA UMA CASA, DE ACORDO COM 1 ZERO DO DEZ.
   a) 578,4 b) 578400 c) 57830 d) 5784

OK Múltiplo

9) 320 ÷ 5 = ? MENOR QUE O MAIOR E EXATA.
   a) 64,4 b) 70,2 c) 1600 d) 64

10) 0,07 + 5 = ? "VÍRGULA ABAIXO DE VÍRGULA."
   a) 5,07 b) 4,93 c) 2,07 d) 0,12

Efeito

11) 2468 . 0,5 = ? TEM QUE ACABAR EM ZERO E MAIOR QUE OS 2.
   a) 12340 b) 3048 c) 1234 d) 2536

12) 10 - 0,007 = ? MENOR QUE O 1º E 10-7 É 3
   a) 9,993 b) 10,003 c) 10,007 d) 10,03

13) 0,6 . 0,8 = ? MENOR QUE 1.
   a) 48 b) 0,48 c) 1,2 d) 6

14) 106 ÷ 0,5 = ? ACABA EM VÍRGULA, POIS PRA SER DIVISÍVEL POR 5 ACABA EM 5 OU ZERO.
   a) 21,2 b) 53 c) 212 d) 96

Efeito

15) 0,77 ÷ 0,007 = ? MENOR QUE OS 2
   a) 0,11 b) 0,011 c) 0,00539 d) 110

Efeito

16) 0,95 ÷ 5 = ? AUMENTA O NÚMERO
   a) 1,9 b) 0,19 c) 19 d) 1,05

17) 0,5 ÷ 0,02 = ? AUMENTA TMB
   a) 0,025 b) 0,1 c) 25 d) 1

18) Uma hora tem 60 **minutos**. Então é possível afirmar que:
a) 89 minutos correspondem a mais de uma hora.
b) 89 minutos correspondem a uma hora.
c) 89 minutos correspondem a menos de uma hora

19) Marcos juntou 1070 **centavos**. Esta quantia corresponde a:
a) mais de 10 reais.
b) entre 10 e 7 reais.
c) entre 7 e 5 reais.
d) menos de 5 reais.